



**HAL**  
open science

# Étude expérimentale de la génération de structures linéaires et non-linéaires (solibores, solitons) en milieu stratifié

Matthieu Mercier

► **To cite this version:**

Matthieu Mercier. Étude expérimentale de la génération de structures linéaires et non-linéaires (solibores, solitons) en milieu stratifié. Physique [physics]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2010. Français. NNT: . tel-00542727

**HAL Id: tel-00542727**

**<https://theses.hal.science/tel-00542727>**

Submitted on 3 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 574

N° attribué par la bibliothèque : \_ENSL574



## **THÈSE**

en vue d'obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Lyon - École Normale Supérieure de Lyon**

**spécialité : Physique**

**LABORATOIRE DE PHYSIQUE**

**Ecole Doctorale de Physique et Astrophysique de Lyon**

présentée et soutenue publiquement le 29/06/2010

par Monsieur Matthieu MERCIER

# **Étude expérimentale de la génération de structures linéaires et non-linéaires (solibores, solitons) en milieu stratifié.**

Directeur de thèse : Monsieur Thierry DAUXOIS

Après avis de : Monsieur Patrice LE GAL, rapporteur  
Monsieur Frédéric MOISY, rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

Madame Pascale BOURUET-AUBERTOT, invitée  
Monsieur François CHARRU, membre  
Monsieur Jean-Marc CHOMAZ, membre  
Monsieur Thierry DAUXOIS, membre  
Monsieur Patrice LE GAL, membre et rapporteur  
Monsieur Frédéric MOISY, membre et rapporteur



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
1.1 Mécanique des fluides stratifiés . . . . .	9
1.2 Ondes internes à l'échelle du globe . . . . .	11
1.3 Approche choisie . . . . .	15
<b>2 Description analytique</b>	<b>17</b>
2.1 Mise en équation . . . . .	17
2.2 Ondes linéaires . . . . .	19
2.2.1 Solutions de type ondes planes . . . . .	19
2.2.2 Solutions auto-similaires . . . . .	22
2.2.3 Influence des conditions aux limites : modes verticaux . . . . .	25
2.3 Aspects non-linéaires . . . . .	28
2.3.1 Cas des ondes planes . . . . .	28
2.3.2 Cas des modes verticaux . . . . .	30
<b>3 Techniques et outils</b>	<b>33</b>
3.1 Obtenir un fluide stratifié . . . . .	33
3.2 Observer les ondes internes . . . . .	35
3.2.1 Strioscopie synthétique . . . . .	35
3.2.2 Autres outils . . . . .	40
3.3 Analyser les champs d'ondes internes . . . . .	42
3.3.1 Transformée de Hilbert . . . . .	42
3.3.2 Décomposition modale . . . . .	47
<b>4 New Wave Generation</b>	<b>53</b>
4.1 Introduction . . . . .	54
4.2 Methods . . . . .	57
4.2.1 Experiments . . . . .	57

4.2.2	Numerics . . . . .	59
4.2.3	Analysis . . . . .	60
4.3	Plane waves . . . . .	61
4.3.1	Analysis . . . . .	62
4.3.2	Configuration . . . . .	63
4.3.3	Results . . . . .	64
4.3.4	Summary . . . . .	73
4.4	Wave Beams . . . . .	74
4.4.1	Analysis . . . . .	74
4.4.2	Configuration . . . . .	75
4.4.3	Results . . . . .	75
4.4.4	Summary . . . . .	77
4.5	Vertical modes . . . . .	77
4.5.1	Analysis . . . . .	78
4.5.2	Configuration . . . . .	79
4.5.3	Results . . . . .	79
4.5.4	Summary . . . . .	80
4.6	Conclusions . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Ondes internes et topographies</b>	<b>83</b>
5.1	Introduction . . . . .	83
5.2	Réflexion d'ondes sur une surface plane . . . . .	83
5.2.1	Cadre analytique . . . . .	83
5.2.2	Expériences de réflexion sur un plan incliné . . . . .	88
5.2.3	Conclusion . . . . .	94
5.3	Modes verticaux incidents sur une topographie . . . . .	95
5.3.1	État de l'art . . . . .	95
5.3.2	Dispositif expérimental . . . . .	96
5.3.3	Champ d'onde incident : mode 1 . . . . .	100
5.3.4	Topographie idéalisée, barrière verticale . . . . .	108
5.3.5	Mont Gaussien . . . . .	118
5.4	Conclusions . . . . .	123
<b>6</b>	<b>Ondes internes et interfaciales de gravité</b>	<b>125</b>
6.1	Coupler des dynamiques très différentes . . . . .	125
6.1.1	Introduction . . . . .	125
6.1.2	Comparaison de différentes approches analytiques . . . . .	128
6.1.3	Synthèse . . . . .	134
6.2	Génération de solitons . . . . .	135

6.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	135
6.2.2	Influence de la pycnocline sur la réflexion d'ondes internes . . . . .	139
6.2.3	Effets non-linéaires associés aux ondes internes . . . . .	141
6.2.4	Effets non-linéaires associés à l'interface . . . . .	146
6.2.5	Conclusion . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Phénomène d'eaux mortes</b>	<b>155</b>
7.1	Introduction et historique . . . . .	155
7.1.1	La thèse d'Ekman . . . . .	156
7.1.2	Autres travaux traitant des eaux mortes . . . . .	160
7.2	Revisiter les travaux d'Ekman . . . . .	162
7.2.1	Expériences réalisées . . . . .	162
7.2.2	Dynamique du bateau . . . . .	167
7.2.3	Ondes interfaciales . . . . .	171
7.2.4	Retour sur l'explication (détaillée) du phénomène d'eaux mortes . .	179
7.3	Modélisation de la dynamique du bateau . . . . .	180
7.3.1	Principe . . . . .	180
7.3.2	Modèles de force de frottements dûe aux vagues . . . . .	181
7.3.3	Conclusion . . . . .	184
7.4	Un phénomène robuste . . . . .	185
7.4.1	Stratification à 3 couches . . . . .	185
7.4.2	Stratification continue avec pycnocline . . . . .	193
7.5	Conclusion . . . . .	200
	<b>Conclusion</b>	<b>203</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>207</b>
	<b>Publications et communications de la thèse</b>	<b>219</b>



# Remerciements

Mes remerciements vont bien sûr en priorité à mon directeur de thèse avec qui, et grâce à qui j'ai eu la chance de partager des expériences scientifiques et personnelles formidables. Sa confiance ainsi que la grande liberté qu'il m'a accordé, tout en m'encadrant de près, me permettent de dire que j'ai été un thésard chanceux et privilégié. J'espère exploiter au mieux tout ce qu'il a pu me transmettre dans le futur. Merci encore Thierry.

J'ai également eu la possibilité de collaborer avec de nombreux chercheurs au cours de ma thèse. Cet aspect est très important à mes yeux, et je voulais notamment remercier toute l'équipe de Coriolis (Henri, Samuel, Joël et Louis), l'équipe du ENDLab au MIT (Tom, Mani, Paula, Ray, Michael), Hans et tout l'équipage du Pelagia, Theo, Jeroen et également Leo grâce à qui j'ai été initié au phénomène d'eaux mortes (et qui est un grand passionné du sujet).

Je tiens également à remercier le laboratoire de Physique de l'ENS Lyon au sens large, qui est un environnement privilégié tant par sa taille que par sa diversité, et qui a contribué à mon épanouissement. Merci plus particulièrement à Guilhem, Philippe, James et Sylvain qui sont venus grossir les rangs de l'équipe « ondes internes ».

Au travail comme ailleurs, j'ai également pu partager avec plaisir une partie de ma recherche avec mes amis et je les remercie d'avoir toujours montré de l'intérêt (et de la patience parfois) pour d'autres sujets que le bateau Playmobil. Merci entre autres à Dan, Grand Gui, Pané, JC et Joub's (pour le quotidien) mais aussi à Kiki, Xav, Tom, Mickey, Manch, Laure, Mathilde, Juju, Faustine, Florian, Fanny, Johanna, Leïla, Elodie, Evan, Anne-So, Nasta (sans ordre de préférence et pardon pour ceux que j'aurai oublié).

Parce qu'au cours de ma thèse j'ai pu côtoyer un peu plus que des chercheurs, je remercie Julie pour avoir été là, et m'avoir soutenu dans cette dernière année notamment.

Enfin, ma dernière pensée va à ma famille qui a toujours été derrière moi, curieuse de mes progrès et évolutions.



# Chapitre 1

## Introduction

Un fluide stratifié est un fluide dont les propriétés thermodynamiques varient avec l'altitude : l'évolution peut être continue ou bien le fluide est constitué de plusieurs strates/couches. Deux exemples emblématiques sont à citer. L'atmosphère qui est stratifiée en température principalement, et l'océan dont la température et la salinité varient notablement avec la profondeur. Il en résulte une variation de la densité du fluide considéré avec la hauteur. On peut également citer les systèmes astrophysiques tels que les étoiles ou les galaxies, ou bien encore les cocktails !

C'est cette propriété remarquable qui est à l'origine des ondes internes, comme nous allons le voir par la suite. Après avoir introduit le mécanisme à la base des ondes dans les fluides stratifiés, nous présenterons les mécanismes de génération de ces ondes à l'échelle de la planète, avant d'aborder un certain nombre de points d'intérêts concernant la recherche dans ce domaine.

### 1.1 Mécanique des fluides stratifiés

Soit un fluide incompressible de densité variable  $\rho_0(z)$  à l'équilibre. La situation est caractérisée par l'hydrostatique

$$\vec{\text{grad}}P_0 = \rho_0(z)\vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = -g\vec{e}_z. \quad (1.1)$$

Cherchons à étudier simplement une perturbation à cette situation d'équilibre. On considère un volume élémentaire de fluide à l'altitude  $z_0$  : si on le déplace jusqu'à l'altitude  $z_0 + \delta z$ , il est soumis à la poussée d'Archimède

$$\vec{F}_A = (\rho_0(z_0) - \rho_0(z_0 + \delta z))\vec{g}. \quad (1.2)$$

La dynamique de cet élément de fluide, si on néglige les variations du champ de pression (ce qui est logique si on considère la poussée d'Archimède dans un cadre quasi-statique),

est donc régie par l'équation

$$\delta \ddot{z} = \frac{g}{\rho_0(z_0)} \frac{d\rho_0}{dz}(z_0) \delta z = -N^2 \delta z. \quad (1.3)$$

On voit apparaître l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $N$ , appelée pulsation de Brunt-Väisälä. C'est ce mécanisme qui est à l'origine des ondes internes, nous allons détailler la théorie dans la partie suivante. Noter que l'on définit plus généralement la pulsation de Brunt-Väisälä dans un fluide en utilisant la masse volumique moyennée selon la verticale  $\bar{\rho} = \langle \rho_0 \rangle_z$ , d'où l'expression

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\rho_0}{dz}. \quad (1.4)$$

On peut généraliser ce raisonnement au cas où le mouvement du fluide se fait avec un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale (par exemple le long d'une pente). La force de rappel selon cette direction vaut alors  $-g \frac{d\rho_0}{dz} \sin^2 \theta$  et il en résulte que la fréquence d'oscillation selon cette direction est changée en  $N \sin \theta$ . On peut alors anticiper en écrivant la relation de dispersion des ondes internes

$$\omega = N \sin \theta, \quad (1.5)$$

que nous démontrerons plus rigoureusement au chapitre suivant.

Outre la stratification, les ondes internes à l'échelle de la planète sont également régies par l'influence de la rotation de la Terre. On parle alors d'ondes gravito-inertielles qui correspondent alors à une gamme de fréquences comprises entre  $f$ , la fréquence de Coriolis pour une latitude donnée, et  $N$ . Cependant au cours de cette thèse, nous nous limiterons au cas sans rotation  $f = 0$ .

Il est intéressant de donner un ordre de grandeur pour  $N$ . Dans les océans, des prélèvements en profondeur permettent d'établir des profils de température, salinité et densité. Un exemple de mesures auxquelles j'ai pu participer est illustré à la figure 1.1. Celles-ci ont eu lieu dans le cadre d'une campagne océanographique sous la responsabilité de Hans van Haren (NIOZ, Pays-Bas), dédiée à l'étude des ondes internes dans deux bassins du Brésil et des Canaries [121]. Les travaux réalisés pendant ces premiers pas sur un bateau ne sont cependant pas présentés dans ce manuscrit. On peut notamment observer sur le profil de densité que  $N$  n'est pas constant sur toute la profondeur de l'océan, bien que les valeurs pour des profondeurs supérieures à 400 m varient peu.

Ainsi  $N$  est compris entre  $5 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  (très proche du fond) et  $2.3 \cdot 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$  pour la valeur maximale (vers 60 m), avec une valeur moyenne pour la partie quasiment constante autour de  $2 \cdot 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$ . Ces valeurs sont à comparer aux fréquences astronomiques<sup>1</sup>, les interactions gravitationnelles entre les astres sont une source d'énergie pour

---

1. Une unité standard en océanographie est le cycle par jour (cpd), la marée semi-diurne de la Lune ayant alors une

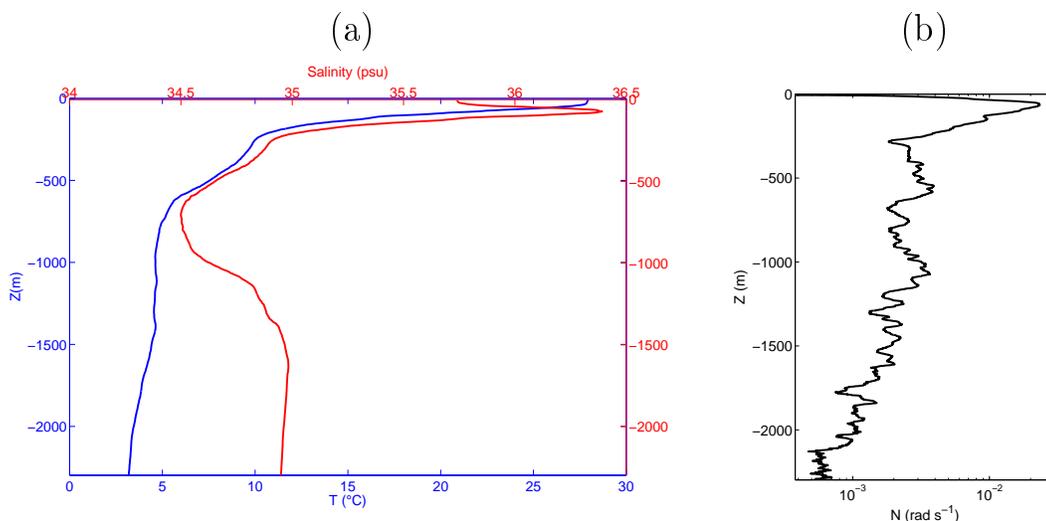


FIGURE 1.1 – (a) Profils de température et salinité et (b) profil  $N(z)$  associé, mesurés à bord du Pelagia (25/06/2009) dans le bassin CEARÁ (1°23' N, -38°38' W) au large du Brésil.

l'océan, via le phénomène de marée dont les fréquences caractéristiques sont inférieures à  $N$  ; pour la marée semi-diurne due à la Lune, notée  $M_2$  conventionnellement, on trouve  $1.4 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ .

Dans le cadre du laboratoire, la densité varie de quelques ‰ sur la hauteur d'une cuve ( $\sim 40 \text{ cm}$ ) d'où une valeur de  $N$  de l'ordre de 0.1 à 1  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , c'est-à-dire des fréquences caractéristiques inférieures au Hertz.

## 1.2 Ondes internes à l'échelle du globe

Dans l'atmosphère, les ondes internes sont particulièrement importantes dans les zones fortement stratifiées de l'atmosphère (la stratosphère par exemple), tandis que dans les océans elles sont omniprésentes.

**Cycle de vie des ondes internes** Connaissant un peu mieux le mécanisme physique à l'origine de ces ondes internes, il est important de comprendre le cycle de vie de ces ondes. On peut tout d'abord identifier différents mécanismes générant des ondes internes. On pourra citer notamment :

- L'effet des topographies sur les écoulements stratifiés. Il peut s'agir d'un écoulement oscillant, tel que celui généré par la marée, d'un écoulement tournant dû à un cyclone ou un vortex, ou bien encore un écoulement permanent.

---

fréquence de 1.92 cpd. À noter que les fréquences émises en lien avec la marée sont nombreuses, elles sont classifiées par une lettre correspondant à l'astre considéré, ainsi qu'un chiffre associé à la période. La marée  $M_1$  correspond à la marée diurne de la Lune,  $M_2$  la marée semi-diurne de la Lune,  $S_2$  la marée semi-diurne due au Soleil, etc.

- L'effet de la turbulence sur les fluides stratifiés. La partie supérieure de l'océan est par exemple fortement perturbée par les vents à la surface.

Par la suite, les ondes générées se propagent sur de grandes distances. Elles peuvent cependant interagir de nouveau avec des topographies, avec d'autres ondes, des écoulements, ou bien encore se déstabiliser pour finir par se briser (générant de la turbulence, du mélange) et se dissiper localement par effets visqueux.

Dans le contexte océanographique, ce cycle d'évolution a été résumé par Garrett [31] et est représenté schématiquement à la figure 1.2. Il est également mis en évidence sur la droite de l'image que le mélange contribue au maintien de la dynamique globale de l'océan, tel que la circulation thermohaline.

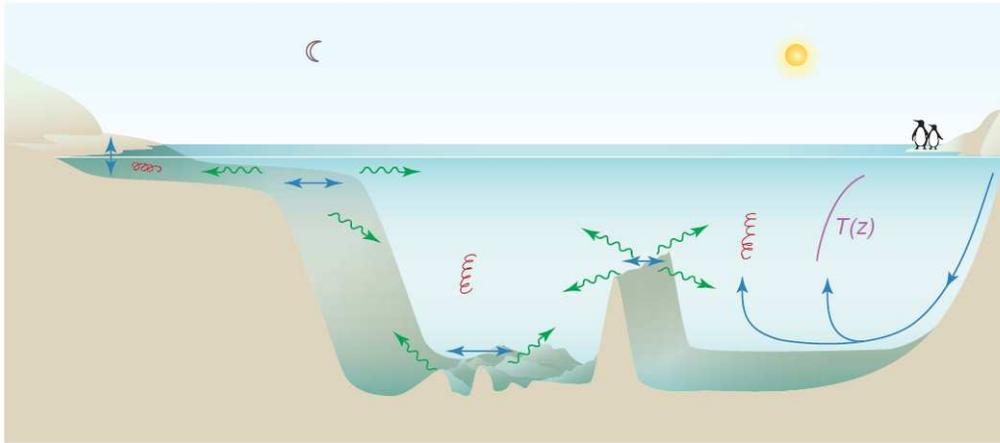


FIGURE 1.2 – Influence des marées dans l'océan (extrait de [31]). De gauche à droite, génération au bord des talus continentaux, au niveau des fonds sous-marins et le long des ridges océaniques. Les ondes générées peuvent engendrer de la turbulence et du mélange nécessaire au maintien de la circulation thermohaline à grande échelle (à droite).

**Forçage par la marée** La génération de la marée interne, qui correspond aux ondes internes émises à la fréquence de la marée, est un sujet de recherche très actif dont on peut trouver un résumé par Garret & Kunze [32]. La prise en compte en détail des mécanismes linéaires et non-linéaires de conversion de la marée barotrope vers la marée barocline a permis d'apporter un vision unifiée décrivant notamment les lieux de génération et les structures émises.

Parmi les différentes approches abordées, on peut citer entre autres

- des travaux théoriques précurseurs tels que ceux de Bell [12] ou bien encore de Baines [6, 7, 10],
- des simulations numériques idéalisées par Gerkema [36] ou bien plus réalistes telles que celles réalisées par Nycander [97] (*cf.* figure 1.3),
- des expériences de laboratoire étudiant un talus continental par Gostiaux *et al.* [43] ou encore des monts sous-marins Echeverri *et al.* [21],

- des mesures satellites (Egbert & Ray [23]) et des campagnes océanographiques sur le terrain (Ray & Mitchum [107]).

Ces différents travaux ont notamment mis en évidence l'importance des talus continentaux ainsi que des monts et ridges sous-marins dans le mécanisme de génération des ondes internes. Plus particulièrement, certains paramètres des topographies tels que la pente de la topographie comparativement à la pente associée à la propagation des ondes internes (criticalité), le rapport de la hauteur de la topographie à la profondeur de l'océan, l'extension horizontale comparativement à l'amplitude de l'excursion de la marée ; régissent la nature des champs rayonnés.

**Un rôle dans le bilan global de l'océan** La compréhension détaillée du mécanisme de génération des ondes internes a permis d'apporter une estimation du flux d'énergie transmis de la marée barotrope vers la marée barocline. Une première évaluation réalisée par Munk & Wunsch [87], et mis à jour plus récemment par Wunsch & Ferrari [127], estime qu'environ un 1 TW sur les 3.5 TW disponibles sont transformés en ondes internes, et principalement au niveau des reliefs sous-marins ou sur les fond rugueux (*cf.* figure 1.3).

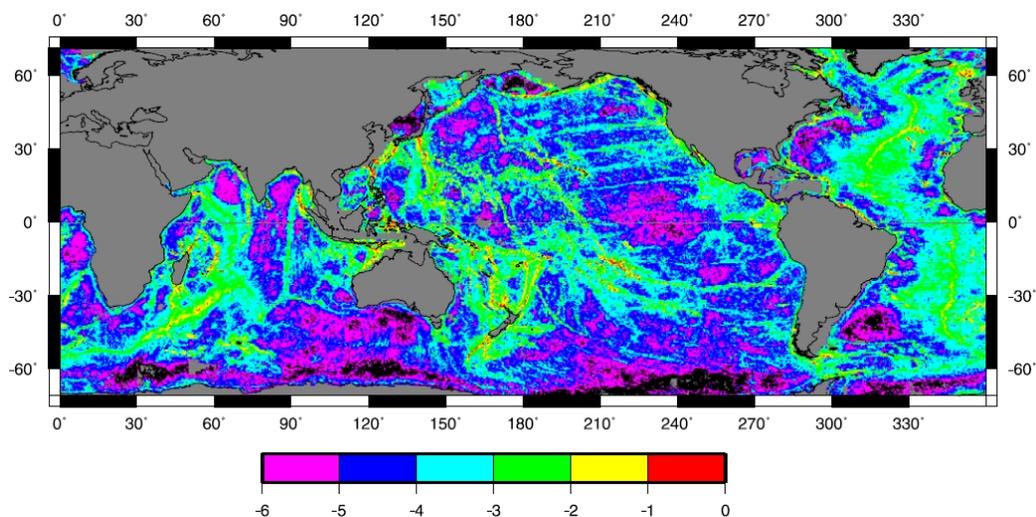


FIGURE 1.3 – Carte du flux d'énergie en  $W/m^2$  transmis de la marée diurne à la pulsation  $M_2$  aux ondes internes (échelle de couleur logarithmique,  $-3$  signifiant  $10^{-3} W m^2$  par exemple). Extrait de [97].

Cette énergie est alors susceptible d'être redistribuée dans l'océan et de participer notamment au maintien de la stratification abyssale qui est essentielle à la dynamique océanique et climatique, et dont l'apport énergétique nécessaire est estimé à 2.1 TW. Le bilan énergétique océanique est présenté dans son ensemble à la figure 1.4. La question alors posée est : quelle est l'évolution des ondes internes émises, et quel mécanisme est le plus à même de dissiper leur énergie ?

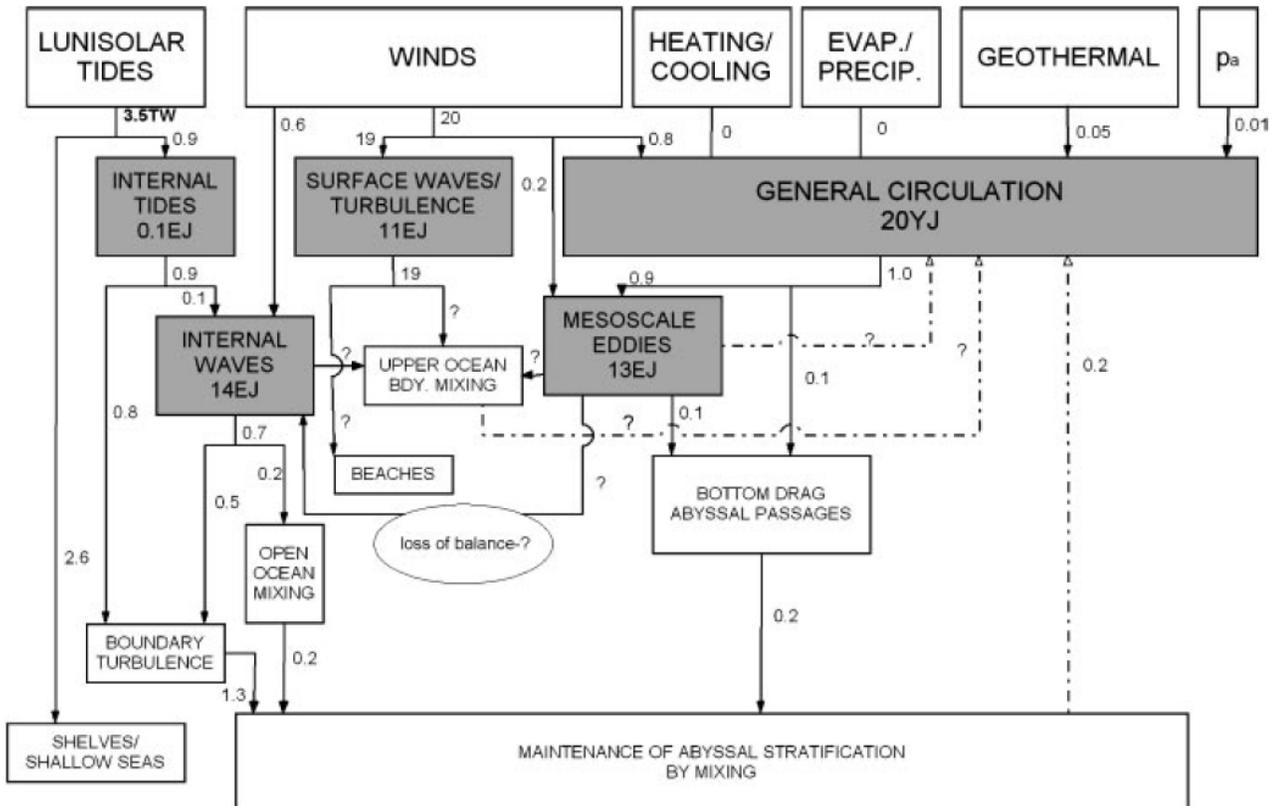


FIGURE 1.4 – Bilan énergétique global des différents apports d'énergie à l'océan en exajoules ( $1 \text{ EJ} = 10^{18} \text{ J}$ ) et yottajoules ( $1 \text{ YJ} = 10^{24} \text{ J}$ ), où les flèches représentent des flux énergétiques en terrawatts ( $1 \text{ TW} = 10^{12} \text{ W}$ ). Extrait de [127] avec *erratum* « INTERNAL WAVES 1.4EJ ».

## 1.3 Approche choisie

Les mécanismes de génération des ondes internes sont assez bien connus dorénavant, et conduisent à identifier différents types d'ondes : les modes verticaux correspondants à la marée interne, et les faisceaux intenses et localisés générés au niveau des pentes critiques. Cependant le devenir de ces structures laisse encore de nombreuses questions en suspens. Il est donc capital de pouvoir reproduire ces structures, afin de pouvoir étudier leur évolution, et c'est notamment un des objectifs de cette thèse.

Par ailleurs, du point de vue du physicien, les ondes internes sont surprenantes de par leur propriété de propagation atypique et leur dynamique non-linéaire. Certains problèmes classiques de la physique des ondes n'ont pas encore été revisités dans le cas des ondes internes. Dans une démarche simplificatrice typique de l'approche du physicien, nous souhaitons aussi imaginer des expériences idéalisées permettant de dégager les éléments essentiels des mécanismes décrits auparavant.

Ainsi après avoir décrit plus en détail ces différentes structures spatiales au chapitre 2, nous introduirons les outils nécessaires à l'étude de ces ondes au laboratoire au chapitre 3. Ces deux chapitres sont principalement issus d'une reformulation personnelle de résultats et techniques connus.

Par la suite, nous montrerons au chapitre 4 que nous pouvons générer toutes les structures d'ondes internes au laboratoire, en présentant nos travaux concernant la caractérisation d'une nouvelle source d'ondes internes.

Nous chercherons alors à étudier chacune de ces structures indépendamment et nous nous tournerons notamment vers deux mécanismes d'interactions de ces ondes. Au chapitre 5, nous étudierons l'interaction d'ondes internes avec une topographie dans le cas idéalisé d'une onde plane se réfléchissant sur une surface plane, et aussi dans le cas de la marée interne interagissant avec un mont sous-marin. Au chapitre 6, l'étude de l'interaction d'un faisceau d'ondes internes, intense et localisé, avec une stratification compliquée présentera la première mise en évidence de génération de solitons au niveau d'une pycnocline par des ondes internes. Enfin l'étude de la dynamique d'un objet se déplaçant dans un fluide stratifié au chapitre 7 permettra de (re)-découvrir le phénomène atypique des eaux-mortes.

Nous réaliserons pour chacun de ces chapitres originaux (4 à 7) une introduction spécifique à la situation physique abordée.



# Chapitre 2

## Description analytique des différents types d'ondes internes

Nous présentons dans ce chapitre quelques éléments essentiels à la description des ondes internes observées dans les expériences des sections à venir. Nous mettrons notamment en évidence la différence entre les structures localisées (faisceaux) et les structures guidées (modes). Cette « zoologie » des ondes est présentée dans un cadre à deux dimensions bien que l'extension à trois dimensions soit possible; de part la nature quasiment bidimensionnelle des expériences réalisées, nous nous limitons à cet aspect.

### 2.1 Mise en équation

Considérons un fluide stratifié incompressible à deux dimensions, initialement à l'équilibre hydrostatique. Nous allons étudier les perturbations à cet équilibre, et donc nous intéresser aux écarts des grandeurs par rapport à l'équilibre hydrostatique (indiqué par un "0"). Ainsi, on notera respectivement les champs de densité, de pression et de vitesse comme

$$\rho = \rho_0(z) + \rho', \quad P = P_0(z) + p', \quad \vec{v}. \quad (2.1)$$

Les équations qui régissent l'évolution du fluide sont

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{Incompressibilité,} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0 \quad \text{Conservation de la masse,} \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \operatorname{grad} p' - \eta \Delta \vec{v} - \rho' \vec{g} = 0 \quad \text{Navier-Stokes.} \quad (2.4)$$

Le caractère bidimensionnel nous permet d'utiliser la fonction de courant  $\psi$  vérifiant  $u = \partial\psi/\partial z$  et  $w = -\partial\psi/\partial x$  où  $\vec{v} = (u, w)$ . En utilisant l'opérateur Jacobien  $J(f, g) =$

$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}$ , les équations s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) + \frac{N^2 \bar{\rho}}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J \left( \frac{\partial \psi}{\partial z}, \psi \right) \right] = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z}, \quad (2.6)$$

$$\rho \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} - J \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi \right) \right] = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \eta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \rho' g, \quad (2.7)$$

avec  $\bar{\rho}$  la valeur moyenné sur la profondeur de  $\rho_0(z)$ , et  $N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\rho_0}{dz}$ .

Ce système d'équations n'ayant pas de solution analytique, on fait appel alors à l'approximation de Boussinesq. Cette dernière consiste à négliger les variations de densité par rapport à la densité moyenne sauf si elles sont multipliées par la gravité. Ainsi on élimine  $\rho'$  devant  $\rho_0$  et on ne garde que le moteur des oscillations, la poussée d'Archimède, qui ne peut être négligée ici.

On peut également remplacer  $\rho_0(z)$  par  $\bar{\rho}$  puisque les échelles de variations de  $\rho_0(z)$  sont grandes devant celles de  $\psi$ . On combine alors les équations (2.6) et (2.7) pour éliminer la pression et on obtient le système suivant

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) + \frac{N^2 \bar{\rho}}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

$$\bar{\rho} \left[ \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\Delta \psi, \psi) \right] = \eta \Delta^2 \psi + \frac{\partial \rho'}{\partial x} g. \quad (2.9)$$

Ce système d'équations reste général puisque l'approximation de Boussinesq est très bien vérifiée expérimentalement, et qu'il prend en compte la viscosité du fluide. Les équations sont cependant non-linéaires et il n'y pas de solution exacte connue.

Si l'on fait l'approximation linéaire, en supposant donc le produit de perturbations négligeable devant ces dernières, on obtient

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{N^2 \bar{\rho}}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \eta \Delta^2 \psi - \frac{\partial \rho'}{\partial x} g = 0. \quad (2.11)$$

Ce système présente donc le mouvement vertical,  $w = -\partial \psi / \partial x$ , comme source des perturbations de densité, et les inhomogénéités horizontales de densité,  $\partial \rho' / \partial x$ , comme source de vorticité puisque  $\Delta \psi$  est la composante de la vorticité dans la direction transverse au plan  $(xOz)$ . En éliminant  $\rho'$  entre (2.10) et (2.11), on aboutit à

$$N^2(z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial t}, \quad (2.12)$$

ou encore, si l'on néglige la viscosité du fluide

$$N^2(z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.13)$$

On peut remarquer que l'équation (2.13) traduit bien l'asymétrie entre les directions horizontale et verticale. On constate par ailleurs qu'elle ne fait intervenir aucune distance caractéristique.

**Aspects énergétiques** Il est possible d'établir une équation de conservation de l'énergie dans ce cadre linéaire non-visqueux. En multipliant l'équation (2.5) par  $\rho'$ , l'équation (2.6) par  $u$  et l'équation (2.7) par  $w$ , et en sommant ces trois termes, on obtient

$$\frac{\bar{\rho}}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{g^2}{\bar{\rho}^2 N^2} \rho'^2 \right] + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.14)$$

où l'on a fait apparaître la densité d'énergie cinétique et potentielle des ondes internes ainsi qu'une grandeur que l'on peut considérer comme le flux instantané d'énergie,  $\vec{J} = p' \vec{v}$ .

## 2.2 Ondes linéaires

Dans le cas des équations linéarisées, nous pouvons raisonner sur le champ complexe  $\psi \in \mathbb{C}$ , plus pratique lorsque l'on étudie des ondes. On peut alors en déduire les solutions réelles en considérant  $(\psi + \psi^*)/2$ . Cette remarque ne sera plus valable dans le cadre de la section 2.3.

### 2.2.1 Solutions de type ondes planes

On considère le cas d'un fluide continûment stratifié de pulsation caractéristique  $N(z) = N$  constante. On pourrait cependant prendre en compte une évolution lente de la stratification en utilisant une approximation de type WKB<sup>1</sup>, mais la discussion apporterait peu aux cas que nous considérons dans les chapitres suivants.

#### 2.2.1.1 Relation de dispersion

Si l'on considère un fluide non visqueux, et que l'on cherche des solutions à l'équation (2.13) en ondes planes progressives de la forme  $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$ , on obtient la

---

1. L'approximation WKB, pour Wentzel, Kramers et Brillouin, consiste à considérer l'interaction entre le champ étudié et les propriétés moyennes de l'écoulement ou du fluide, lorsque les échelles d'évolution spatiales et/ou temporelles sont découplées.

relation de dispersion

$$\omega^2(k_x^2 + k_z^2) = N^2 k_x^2 \Leftrightarrow \omega^2 = N^2 \sin^2 \theta, \quad (2.15)$$

où l'on introduit l'angle  $\theta$  défini par le vecteur d'onde et la verticale. Cette relation particulière est à la base de l'originalité des ondes internes puisqu'elle ne fait pas intervenir le nombre d'onde mais seulement la direction du vecteur d'onde. Ainsi, pour chaque fréquence correspondent quatre directions de propagation quelle que soit la longueur d'onde.

De la relation de dispersion, on peut déduire les vitesses de phase et de groupe de ces ondes dispersives

$$\vec{v}_\phi = \pm \frac{N \sin \theta}{k} (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z), \quad (2.16)$$

$$\vec{v}_g = \pm \frac{N \cos \theta}{k} (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z). \quad (2.17)$$

On remarque alors que  $\vec{v}_\phi \cdot \vec{v}_g = 0$ , vitesse de phase et vitesse de groupe sont orthogonales. La structure de l'onde correspond donc à une onde de cisaillement dont la phase évolue dans la direction transverse à la propagation, comme résumé à la figure 2.1. On y introduit également le système de coordonnées associé à chaque direction d'émission :  $\xi = x \cos \theta - z \sin \theta$  selon la direction de la vitesse de groupe, et  $\eta = x \sin \theta + z \cos \theta$  selon la direction de la vitesse de phase.

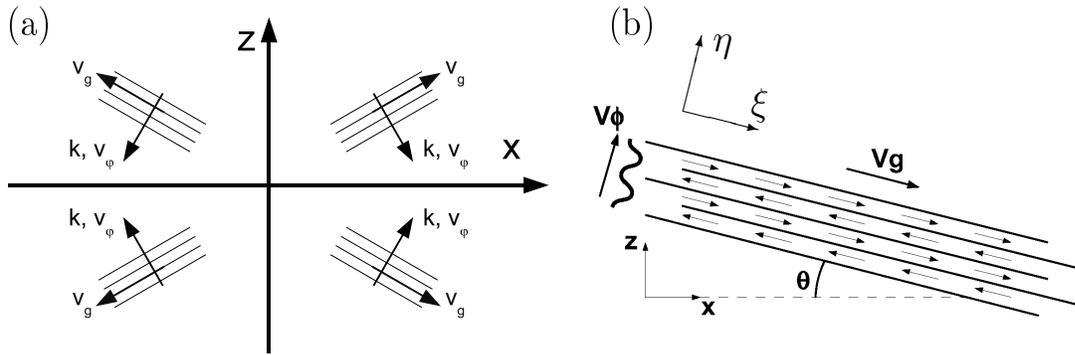


FIGURE 2.1 – Propagation en croix dans un fluide stratifié avec  $N$  constant lorsque la source oscillante est ponctuelle (gauche) et structure d'un faisceau émis (droite).

### 2.2.1.2 Paquet d'ondes planes

De façon plus générale, la superposition d'ondes planes se propageant dans une même direction ( $O\xi$ ), est toujours solution du problème (par linéarité). On peut alors écrire [116]

$$\psi(\xi, \eta, t) = Q(\eta)e^{i\omega t}, \quad \text{avec} \quad Q(\eta) = \int_0^\infty A(k)e^{-ik\eta} dk. \quad (2.18)$$

Dans le cas d'un paquet d'ondes monochromatiques à la pulsation  $\omega$ , il est notamment intéressant d'introduire le flux moyen d'énergie par unité de longueur  $\mathcal{F}$  associé à un paquet d'ondes à travers une section (infinie) transverse à la direction de propagation ( $O\xi$ ). On a par définition

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\omega}{2\pi\bar{\rho}} \int_0^{2\pi/\omega} \vec{J} \cdot \vec{e}_\xi dt \right) d\eta, \quad (2.19)$$

qui s'exprime simplement, en utilisant (2.14) et (2.18), sous la forme

$$\mathcal{F} = iN \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \left( Q^* \frac{\partial Q}{\partial \eta} - Q \frac{\partial Q^*}{\partial \eta} \right) d\eta = -2N \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} \left( Q^* \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) d\eta, \quad (2.20)$$

où  $Q^*$  indique le complexe conjugué de  $Q$ .

Il est intéressant de remarquer que  $\mathcal{F}$  est bien une grandeur réelle puisque l'expression sous la première intégrale est purement imaginaire; et que dans le cas où  $Q$  est une grandeur réelle,  $\mathcal{F}$  est nul indiquant que le paquet d'ondes ne transporte pas d'énergie en moyenne.

### 2.2.1.3 Correction visqueuse

Dans le cas où l'on cherche une solution de type onde plane de l'équation (2.12) avec viscosité plutôt que (2.13) sans viscosité, avec  $\omega \in \mathbb{C}$ , on obtient les relations suivantes

$$\omega_r^2 = N^2 \sin^2 \theta - \frac{\nu^2 k^4}{4}, \quad (2.21)$$

$$\omega_i = \frac{\nu k^2}{2}, \quad (2.22)$$

avec  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  et  $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ .

Les ondes planes considérées sont donc atténuées et le taux d'atténuation de l'énergie (associée à l'amplitude au carré) de chaque composante de Fourier est  $|\tilde{\psi}(k)|^2 \propto e^{-\nu k^2 t}$ . Mais cette approche implique une étude temporelle de l'atténuation alors que l'on cherche plutôt une dépendance spatiale.

Dans le cas particulier d'une onde progressive harmonique, la transposition en atténuation selon la distance de propagation ( $O\xi$ ) se fait en utilisant la vitesse de groupe de la composante de Fourier étudiée, donnée à l'équation (2.17). En notant  $\alpha'(k) = \nu k^2$  le taux d'atténuation par unité de temps de l'énergie, et  $\alpha(k)$  celui par unité de longueur dans la direction de propagation, on a

$$\xi = v_g t \quad \Rightarrow \quad \alpha(k) = \frac{\alpha'(k)}{v_g} = \frac{\nu k^3}{N \cos \theta}. \quad (2.23)$$

En utilisant la relation de dispersion (2.15), on a

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{N^2}} = \frac{\omega}{N} \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1}, \quad (2.24)$$

qui permet d'aboutir finalement à

$$\alpha(k) = \frac{\nu k^3}{\omega \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1}}. \quad (2.25)$$

Donc chaque composante de Fourier de l'onde interne est censée évoluer, dans le système de coordonnées associé à l'onde, selon l'expression

$$\psi(\xi, \eta, t) = \psi_0 e^{-\alpha(k)\xi/2} e^{i(\omega t - k\eta)}. \quad (2.26)$$

On retrouve par cette présentation originale les résultats des références [56] et [67, chap. 4.10, formule (340)]. Par ailleurs, la validité de la relation (2.25) a été démontrée expérimentalement dans [78].

La transformée de Fourier semble donc être un outil particulièrement intéressant pour décrire la structure des ondes internes, nous reviendrons sur cet outil par la suite. Il est cependant possible de considérer les effets visqueux de façon plus rigoureuse que par notre correction élémentaire. Nous présentons cette méthode dans la section suivante.

## 2.2.2 Solutions auto-similaires

La description des effets de la viscosité présentée précédemment est approximative, mais donne une intuition des conséquences sur la structure des ondes. Une approche analytique plus rigoureuse est possible. Il s'agit des travaux présentés par Thomas & Stevenson [117], généralisés par la suite par Hurley & Keady [56]. Nous rappelons ici les principaux résultats.

Nous allons considérer les ondes générées par un objet oscillant à la pulsation  $\omega$ , se propageant dans une seule direction selon les valeurs de  $x$  croissantes et de  $z$  décroissantes (cf figure 2.1(b)), et faisant un angle  $\theta \in [0, \pi/2]$  avec l'horizontale. Dans le référentiel associé à l'onde  $(O\xi, O\eta)$ , on peut alors exprimer l'équation (2.12) sous la forme suivante [56]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\tan 2\theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{i\nu \tan \theta}{2\omega} \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial \eta^4} \right) = 0, \quad (2.27)$$

où l'on a pris une solution de la forme  $\psi = \phi e^{i\omega t}$ .

Dans l'approximation où les variations longitudinales sont négligeables devant celles dans la direction de propagation de la phase, dite « approximation de la couche limite » [117], on obtient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{i\nu \tan \theta}{2\omega} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \eta^4} = 0. \quad (2.28)$$

Si on note  $L$  la taille caractéristique de l'objet, et  $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$  l'épaisseur de la couche limite visqueuse autour de l'objet [11], on peut alors réécrire l'équation (2.28) sous la forme adimensionnée

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi' \partial \eta'} + i\lambda \frac{\partial^4 \phi}{\partial \eta'^4} = 0, \quad (2.29)$$

avec  $(\xi, \eta) = L(\xi', \eta')$  et

$$\lambda = \frac{\nu \tan \theta}{2\omega L^2} = \frac{\delta^2}{2L^2} \tan \theta. \quad (2.30)$$

L'hypothèse consiste alors à considérer  $\lambda \ll 1$ , ce qui correspond à négliger l'épaisseur de la couche limite visqueuse devant l'extension spatiale de l'objet.

Les solutions proposées par Hurley & Keady s'expriment alors en fonction de la première fonction de Bessel  $J_1$  et de l'amplitude de la vitesse de l'objet  $V$  sous la forme

$$\phi(\xi', \eta') = -\frac{i}{2} L V e^{-i\theta} \int_0^\infty \frac{J_1(K)}{K} \exp(-K^3 \lambda \xi' - iK \eta') dK, \quad \text{pour } \xi' > 0, \quad (2.31)$$

qui sont en accord avec l'approche de Thomas & Stevenson, correspondant à la limite champ lointain ( $L/\xi \rightarrow 0$ ) où l'on peut alors faire l'approximation  $J(K) \simeq K$ , seules les composantes spectrales pour  $K \rightarrow 0$  ayant un poids suffisant dans l'intégrale. En prenant cette limite, on retrouve par ailleurs la propriété d'auto-similarité des solutions, qui n'est pas vérifiée par l'expression (2.31), puisqu'on peut alors exprimer la fonction d'onde  $\phi$  en fonction de la variable  $\eta'/(\lambda \xi')^{1/3}$ . Les expressions (2.32) mettent en avant cette propriété de façon plus évidente.

On peut remarquer qu'à la différence du cas du paquet d'ondes planes, la décomposition spectrale des solutions auto-similaires (2.31) est analogue au cas d'un paquet d'ondes planes (2.18) mais avec  $Q$  (qui correspond à  $\phi$  ici) complexe. La conséquence principale est alors que le flux moyen d'énergie selon la direction de propagation du faisceau est non nul ( $\mathcal{F} \neq 0$ , cf. equation (2.20)). Le problème est notamment intéressant pour étudier des phénomènes de transport [48].

Nous exprimons à titre indicatif l'expression des différentes grandeurs d'intérêt pour les solutions en champ lointain, dite de Thomas–Stevenson par la suite, et dont il sera fait usage dans les chapitres 4 et 6. Nous exprimons les grandeurs sous une forme dimensionnée

dans le référentiel associé à l'onde (grandeurs primées).

$$u'(\xi, \eta, t) = u_0 \left( \frac{\xi N^2 \sin \theta}{g} \right)^{-2/3} \int_0^\infty k \exp(-k^3) \exp\left(ik\alpha \frac{\eta}{\xi^{1/3}} - i\omega t\right) dk, \quad (2.32a)$$

$$w'(\xi, \eta, t) = -iu_0 \left( \frac{\xi N^2 \sin \theta}{g} \xi \alpha^{3/2} \right)^{-2/3} \int_0^\infty k^3 \exp(-k^3) \exp\left(ik\alpha \frac{\eta}{\xi^{1/3}} - i\omega t\right) dk, \quad (2.32b)$$

et

$$\rho'(\xi, \eta, t) = -i \frac{N\bar{\rho} u_0}{g} \left( \frac{\xi N^2 \sin \theta}{g} \right)^{-2/3} \int_0^\infty k \exp(-k^3) \exp\left(ik\alpha \frac{\eta}{\xi^{1/3}} - i\omega t\right) dk, \quad (2.32c)$$

avec  $u_0$  l'amplitude de la vitesse horizontale, et  $\alpha = (2N \cos \theta / \nu)^{1/3} = (L^2 \lambda)^{-1/3}$ . On représente également à la figure 2.2 l'allure de ces solutions (champ de vitesse et de densité).

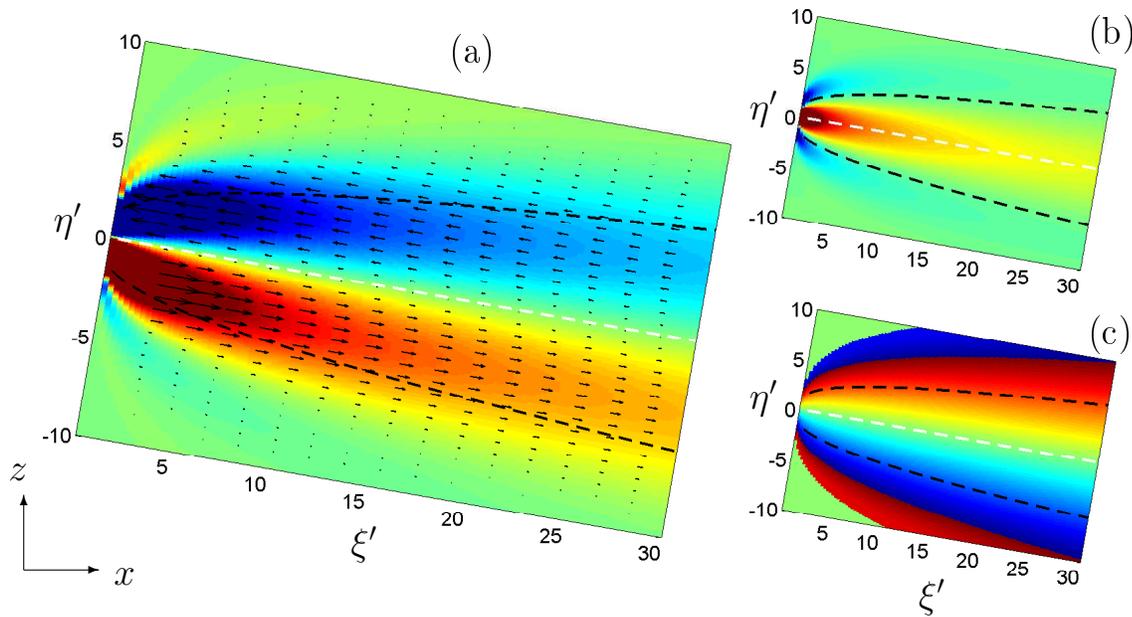


FIGURE 2.2 – Allure (a) du champ de vitesse (vecteurs) et amplitude de la vitesse longitudinale  $\text{Re}(u')$  (couleur), (b) du champ de densité  $\text{Re}(\rho')$  ainsi que (c) sa phase  $\text{arg}(\rho')$ , pour les solutions auto-similaires en champ lointain (2.32a-2.32c), se propageant selon un angle  $\theta = 10^\circ$  (direction en pointillé blanc). Les lignes pointillées noires indiquent deux isophases.

Les solutions auto-similaires (2.32) correspondent donc aux champs émis loin de la source, et sont particulièrement intéressantes car la structure spatiale décrite est alors indépendante de celle de la source. Ces solutions génériques seront notamment étudiées aux chapitres 4 et 6.

### 2.2.3 Influence des conditions aux limites : modes verticaux

Les solutions présentées précédemment ne prennent pas en compte la profondeur finie du fluide stratifié. Il est souvent inutile de considérer des limites selon la direction horizontale des ondes puisque les distances de propagation sont en général très grandes devant les longueurs d'ondes. L'influence des parois verticales peut cependant être considérée : la surface de la Terre dans le cadre atmosphérique, et le fond et la surface libre dans le cadre océanique.

Dans le cas où seule une paroi joue un rôle, il s'agit d'un problème de réflexion qui sera abordé au chapitre 5. Lorsque la propagation est guidée entre deux parois horizontales, il est intéressant de raisonner en termes de modes verticaux dont la structure est adaptée à la géométrie du problème.

**Cas d'une stratification quelconque** Considérons le cas général d'une stratification  $N(z)$  quelconque. Nous cherchons des solutions à l'équation (2.13) sous la forme  $\psi = f(z)e^{i(\omega t - k_x x)}$ . On obtient alors l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) + k_x^2 \left( \frac{N^2(z)}{\omega^2} - 1 \right) f(z) = 0, \quad (2.33)$$

associée à des conditions aux limites spécifiques au fond et à la surface libre. Par exemple, dans le cas où l'on considère des parois solides en  $z = 0$  et  $z = -H$ , la condition de vitesse verticale nulle aux parois impose

$$w(x, z = 0 \text{ ou } -H, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, z = 0 \text{ ou } -H, t) = 0. \quad (2.34)$$

Pour une valeur de  $\omega$  fixée, on reconnaît alors un problème de type Sturm-Liouville pour la fonction  $w$  dont on peut chercher les fonctions propres  $f_n(z)$  associées aux valeurs propres  $\pm k_{x,n}$  et où l'indice  $n$  indique en général le nombre de zéros de la fonction selon la verticale<sup>2</sup>.

Remarquons que, comme l'ensemble des ondes planes, l'ensemble des fonctions  $\{f_n, \forall n \in \{1, \dots, \infty\}\}$ , forme une base orthogonale ce qui permet de décrire de façon univoque un

---

2. Le signe des valeurs propres indique s'il s'agit d'un mode se propageant vers les valeurs de  $x$  décroissantes ou croissantes.

champ d'ondes internes se propageant vers la droite selon le développement

$$w(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\phi_n} f_n(z) \exp [i(\omega t - k_{x,n}x)] \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{R} \text{ et } \phi_n \in [0, 2\pi[. \quad (2.35)$$

De façon à pouvoir déduire l'ensemble des champs associés (vitesse, pression et densité), il est utile d'exprimer cette décomposition pour la fonction d'onde

$$\psi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \frac{a_n e^{i\phi_n}}{k_{x,n}} \exp \left[ i \left( \omega t - k_{x,n}x - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (2.36)$$

**Cas d'une stratification uniforme** Dans le cas où  $N(z) = N$  est constant, l'équation (2.33) correspond à un oscillateur harmonique vérifiant également les conditions aux limites (2.34). Les solutions sont alors les modes propres  $f_n(z)$

$$f_n(z) = \sin \left( \frac{n\pi z}{H} \right), \quad \text{avec } k_{x,n} = \pm \frac{n\pi}{H} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (2.37)$$

et on peut donc réécrire l'équation (2.36) sous la forme

$$\psi(x, z, t) = -\frac{H}{\pi \tan \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi z}{H} \right) \frac{ia_n e^{i\phi_n}}{n} \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{n\pi x \tan \theta}{H} \right) \right]. \quad (2.38)$$

À titre d'exemple, les champs de vitesse associés à un mode-1 ou un mode-2 seul, d'après l'expression (2.38), sont représentés à la figure 2.3. On peut observer qu'un mode- $n$  consiste en une série de rouleaux transverses contra-rotatifs,  $n$  selon la verticale, se propageant selon l'horizontale.

Il est intéressant de remarquer que

- on retrouve la relation de dispersion (2.15) en prenant  $k_z = n\pi/H$  ;
- une onde interne décrite en terme de modes est stationnaire selon la direction ( $Oz$ ) et se propage selon la direction ( $Ox$ ),  $\theta$  n'indique plus l'angle de propagation de l'onde mais relie  $k_x$  et  $k_z$  ;
- en écrivant  $\sin \left( \frac{n\pi z}{H} \right) = \frac{1}{2i} \left[ \exp \left( +i \frac{n\pi z}{H} \right) - \exp \left( -i \frac{n\pi z}{H} \right) \right]$ , on peut considérer un mode comme la superposition de deux ondes planes progressives de vecteurs d'ondes  $(k_{x,n}, +k_{z,n})$  et  $(k_{x,n}, -k_{z,n})$ , symétriques par rapport à l'horizontale.

De façon plus générale, on retrouve les propriétés de propagation guidée analogues pour tout type d'ondes, ce qui n'était pas forcément évident vu les propriétés atypiques des ondes internes.

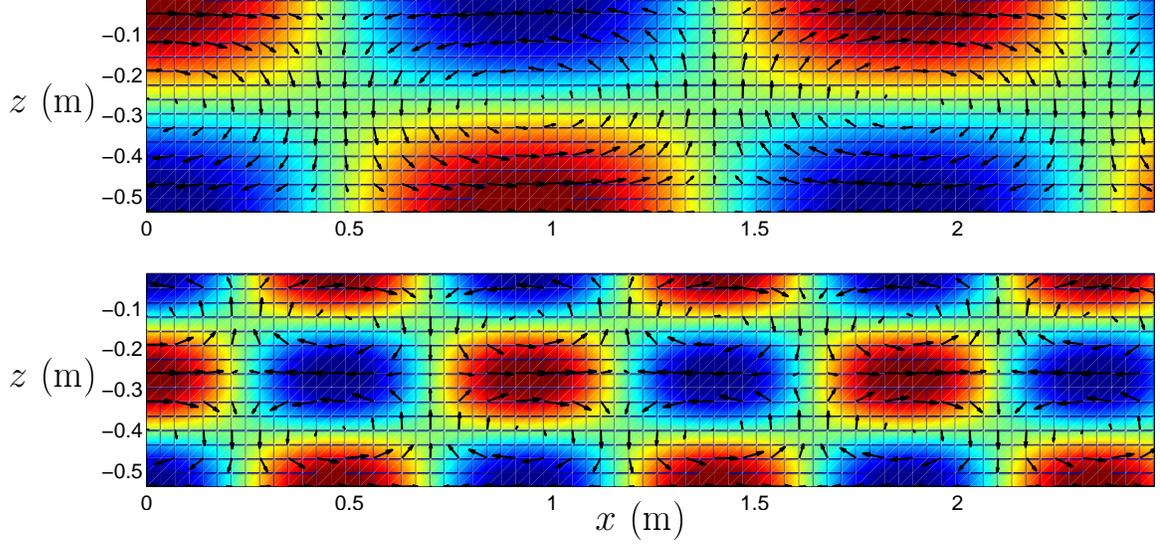


FIGURE 2.3 – Champs de vitesse (vecteurs) et intensité de la composante horizontale de vitesse (couleur) correspondant à un mode 1 (haut) et un mode 2 (bas) se propageant dans une stratification uniforme de hauteur de fluide  $H = 0.54$  m, associés à une même pulsation  $\omega = N/2$ .

Il est possible d'introduire une correction visqueuse pour les modes de la même façon que pour l'onde plane. Cela consiste à multiplier l'amplitude des modes par un terme dissipatif du type  $e^{-\alpha_n x}$ , avec

$$\alpha_n = \frac{\nu n^3}{2\omega} \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 \left[ \frac{N^2}{N^2 - \omega^2} \right]^2, \quad (2.39)$$

qui représente le taux d'atténuation spatial [118, 21]. On retrouve également un résultat en accord avec la dissipation pour les ondes planes puisque  $\alpha_n \propto n^3 \Leftrightarrow \alpha(k) \propto k^3$ .

Le flux moyen d'énergie exprimé par (2.20) n'est cependant pas applicable dans le cas des modes. Les modes se propageant selon l'horizontale seulement, le flux moyen d'énergie à travers une section verticale de fluide s'exprime sous la forme [106]

$$\mathcal{F} = \int_{-H}^0 \left( \frac{\omega}{2\pi\bar{\rho}} \int_0^{2\pi/\omega} \vec{J} \cdot \vec{e}_x dt \right) dz = \frac{N^2 H^2}{8\pi^2 \tan \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}. \quad (2.40)$$

En introduisant le flux d'énergie d'un mode  $e_n$  comme proportionnelle à son amplitude au carré  $a_n^2$  divisé par  $n$ , on en déduit que le flux moyen d'énergie est proportionnel à  $\sum_n e_n$ . Nous utiliserons notamment cette représentation dans le chapitre 5.

## 2.3 Aspects non-linéaires

Afin de prendre en compte les termes non-linéaires dans les équations (2.8) et (2.9), la démarche couramment utilisée est de réaliser un développement perturbatif faiblement non-linéaire; c'est par ailleurs la seule approche utilisable en pratique.

Notez que l'on peut continuer à raisonner avec des champs complexes si l'on tient compte de la nature réelle des champs dans les termes non-linéaires. On notera notamment c.c le complexe conjugué à une grandeur. Il est important de noter que les pulsations rencontrées peuvent donc être négatives.

### 2.3.1 Cas des ondes planes

De façon surprenante, un paquet d'ondes planes se propageant dans une unique direction ( $O\xi$ ), est une solution exacte du problème non-linéaire car les jacobiens s'annulent dans les équations (2.5-2.7).

Cependant, dans le cas où il existe un domaine de l'espace où deux paquets d'ondes se propageant dans des directions différentes se superposent, alors des interactions non-linéaires localisées dans ce domaine peuvent générer de nouveaux faisceaux, le jacobien étant alors non nul. Les règles générales d'interaction entre les faisceaux ont été établies par Tabaei *et al.* [116], puis corrigée par Jiang & Marcus [58].

#### 2.3.1.1 Règle de sélection

Nous allons raisonner sur une onde hypothétique décrite par son expression complexe  $e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$ , mais nous autorisons la pulsation à être positive ou négative, de façon à prendre en compte la nature réelle des champs. Si l'on considère deux ondes planes idéales  $\psi_1$  et  $\psi_2$  définies respectivement par leurs pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et leurs vecteurs d'ondes  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ , dans le cas faiblement non-linéaire, les termes d'interactions non-linéaires vont générer des ondes ( $\psi_3$ ) caractérisées par une pulsation  $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$  et un vecteur d'onde  $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$ .

Cependant, cette onde ne vérifie pas nécessairement les propriétés de propagation des ondes internes, c'est-à-dire la relation de dispersion

$$\omega_3^2 = N^2 \frac{k_{3,x}^2}{k_{3,x}^2 + k_{3,z}^2}, \quad (2.41)$$

qui impose donc que  $0 < |\omega_1 \pm \omega_2| < N$ , et le fait que la direction de propagation de la phase soit dans la bonne direction.

Selon les différentes combinaisons possibles, Jiang & Marcus [58] ont montré que le nombre de faisceaux générés par interactions non-linéaires peut varier entre 0 et 4 seule-

(a)		$\omega_2 < \omega_1/2 < N/4$			
$\omega_1$	$\swarrow$	$\begin{matrix} \vdots \\ \swarrow \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \swarrow \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$
	$\nwarrow$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \swarrow \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \swarrow \\ \vdots \end{matrix}$
(b)		$\omega_2 = \omega_1/2 < N/4$			
$\omega_1$	$\swarrow$	$\begin{matrix} \vdots \\ \swarrow \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$
	$\nwarrow$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \swarrow \\ \vdots \end{matrix}$
(c)		$\omega_1/2 < \omega_2 < \omega_1 < N/2$			
$\omega_1$	$\swarrow$	$\begin{matrix} \vdots \swarrow \\ \vdots \swarrow \\ \vdots \swarrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$
	$\nwarrow$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \swarrow \\ \vdots \swarrow \\ \vdots \swarrow \end{matrix}$
(d)		$\omega_2 = \omega_1 < N/2$			
$\omega_1$	$\swarrow$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$
	$\nwarrow$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \\ \swarrow \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$

TABLE 2.1 – Nombre et direction de propagation autorisés pour les faisceaux d’ondes  $\psi_3$ , issus des interactions non-linéaires entre les ondes internes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  pour certaines gammes de fréquence d’intérêt. Pour chaque case, la colonne de gauche représente les harmoniques  $|\omega_1| + |\omega_2|$  et celle de droite  $\pm(|\omega_1| - |\omega_2|)$ . D’après les règles énoncés dans [58].

ment, et qu’il n’existe pas de cas où 8 faisceaux pourraient être émis (8 correspondant au nombre maximum de faisceaux autorisés par la seule contrainte  $\omega_3 \leq N$ ). On résume dans le tableau 2.1 le nombre de faisceaux attendus en fonction des propriétés des faisceaux incidents. L’ensemble des configurations possibles peut être obtenu en réalisant la symétrie par rapport à la verticale pour la direction du faisceau  $\psi_1$ .

### 2.3.1.2 Extension aux paquets d’ondes

Dans le cas général de l’interaction de deux paquets d’ondes internes, on considère  $\psi^\theta$  et  $\psi^\phi$  se propageant respectivement avec une pulsation  $\omega_\theta$  et  $\omega_\phi$  et dans la direction de propagation faisant un angle  $\theta$  et  $\phi$  avec l’horizontale. De la même façon qu’en (2.18), les ondes incidentes sont décrites par leurs spectres spatiaux

$$\psi^{\theta/\phi}(x, z, t) = \epsilon Q^{\theta/\phi}(x, z) e^{i\omega_{\theta/\phi} t} = e^{i\omega_{\theta/\phi} t} \int_0^\infty A^{\theta/\phi}(\ell) \exp[i\ell(x + z \cotan(\theta/\phi))] d\ell, \quad (2.42)$$

où l'on introduit  $\epsilon$ , petit paramètre afin de réaliser un développement perturbatif. On s'attend donc à un champ total se décomposant selon le développement en  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ )

$$\begin{aligned}
\psi &= \epsilon \left\{ [Q^\theta(x, z)e^{i\omega_\theta t} + \text{c.c.}] + [Q^\phi(x, z)e^{i\omega_\phi t} + \text{c.c.}] \right\} \\
&+ \epsilon^2 \left\{ [Q^{\theta+\phi}(x, z)e^{i(\omega_\theta+\omega_\phi)t} + \text{c.c.}] + [Q^{\theta-\phi}(x, z)e^{i(\omega_\theta-\omega_\phi)t} + \text{c.c.}] \right\} \\
&+ \epsilon^3 \left\{ [Q_1^\theta(x, z)e^{i\omega_\theta t} + \text{c.c.}] + [Q_1^\phi(x, z)e^{i\omega_\phi t} + \text{c.c.}] \right. \\
&+ [Q^{2\theta+\phi}(x, z)e^{i(2\omega_\theta+\omega_\phi)t} + \text{c.c.}] + [Q^{2\theta-\phi}(x, z)e^{i(2\omega_\theta-\omega_\phi)t} + \text{c.c.}] \\
&\left. + [Q^{\theta+2\phi}(x, z)e^{i(\omega_\theta+2\omega_\phi)t} + \text{c.c.}] + [Q^{\theta-2\phi}(x, z)e^{i(\omega_\theta-2\omega_\phi)t} + \text{c.c.}] \right\} + \dots, \quad (2.43)
\end{aligned}$$

où des équations aux dérivées partielles complexes régissent l'évolution des différents ordres. Les règles de sélection précédentes doivent par ailleurs être vérifiées au cas par cas. Cette approche reste au final difficilement exploitable.

## 2.3.2 Cas des modes verticaux

### 2.3.2.1 Mode unique dans une stratification uniforme

On suppose tout d'abord qu'un mode unique (mode- $n$ ) se propage. Si l'on prend en compte les équations (2.8) et (2.9), on trouve le même résultat que pour un paquet d'ondes planes se propageant dans une direction unique, à savoir que les jacobiens s'annulent : on a donc une solution du problème non-linéaire.

On peut également essayer de raisonner par analogie avec les ondes planes. Si on considère l'équivalence entre un mode et deux ondes planes à la même fréquence mais avec des vecteurs d'ondes symétriques par rapport à l'horizontale comme montré précédemment, alors on peut considérer l'interaction entre deux ondes vérifiant  $\omega_2 = \omega_1$  et  $\vec{k}_2 = (k_{1,x}, -k_{1,z})$ . Dans le cas où  $\omega_1$  est inférieur à  $N/2$ , seule l'harmonique à la pulsation  $\omega_3 = 2\omega_1$  pourrait se propager, mais elle correspond à un vecteur d'onde  $\vec{k}_3 = (2k_{1,x}, 0)$  qui n'est pas un mode puisque  $k_{3,z} = 0$ . Au final, via l'interprétation d'un mode en terme d'ondes planes et l'utilisation des règles de sélection de la table 2.1, on retrouve bien le fait qu'un mode unique est solution du problème non-linéaire.

### 2.3.2.2 Superposition de modes

Le résultat précédent n'est plus vrai quand l'on considère une superposition quelconque de modes. Dans le cas plus général où la stratification n'est pas uniforme [36], on

peut décrire une superposition de modes sous la forme

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t, x) f_n(z); \quad \rho = \sum_{n=1}^{\infty} N^2 b_n(t, x) f_n(z). \quad (2.44)$$

Les équations couplant les modes se mettent alors sous la forme

$$a_{k,t} - c_k^2 a_{k,xt} R_k + c_k^2 \sum_{n,m} a_{n,x} a_m \left\{ S_{kmn} \left( \frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{c_m^2} \right) - T_{kmn} \frac{1}{c_m^2} \right\} + c_k^2 b_{k,x} = 0 \quad (2.45)$$

$$b_{k,t} + \sum_{n,m} \{ (b_{n,x} a_m - a_{n,x} b_m) S_{kmn} - a_{n,x} b_m T_{kmn} \} + a_{k,x} = 0 \quad (2.46)$$

où les termes couplant les modes sont

$$\begin{aligned} P_k &= \int dz N^2 f_k^2; & R_k &= \frac{\int dz f_k^2}{P_k}; \\ S_{kmn} &= \frac{\int dz N^2 f_k f'_m f_n}{P_k}; & T_{kmn} &= \frac{\int dz (N^2)' f_k f_m f_n}{P_k}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Deux effets non-linéaires sont ici mis en jeu. La présence d'une stratification non-linéaire ( $N \neq \text{cste}$ ) joue un rôle dans l'ensemble des termes (2.47) et rend les équations (2.45- 2.46) intrinsèquement non-linéaires. L'évolution d'un mode initialement unique est non-linéaire et peut générer d'autres modes. Dans le cas  $N = \text{cste}$ , on peut montrer [36] que les termes  $R_k$  valent tous 1, tous les termes  $T_{kmn}$  s'annulent mais pas l'ensemble des termes  $S_{kmn}$ , ce qui conduit à des interactions non-linéaires possibles entre plusieurs modes lorsqu'ils se superposent initialement.

## Résumé

Nous avons rappelé ici les principaux types d'ondes internes que l'on peut rencontrer dans les fluides stratifiés, ainsi que les descriptions analytiques qui leurs sont associées. Nous avons pu notamment mettre en évidence les similitudes entre les différents points de vue, modes et ondes planes. Quelques éléments originaux tels que la description d'une correction visqueuse par exemple, ont également été apportés.

Le cadre linéaire sera particulièrement utile à l'introduction des outils d'analyse des données présentés au chapitre 3 tandis que les aspects linéaires et non-linéaires nous serviront à discuter les résultats des expériences des chapitres 4 à 6.



# Chapitre 3

## Techniques d'observation et outils d'analyse des ondes internes au laboratoire

Nous présentons ici les techniques expérimentales utilisées au laboratoire de l'ENS Lyon ainsi que d'autres techniques rencontrées au cours de collaborations, à la plateforme Coriolis, au laboratoire du M.I.T où j'ai fait deux séjours de quelques semaines, et à bord du Pelagia. Afin de pouvoir observer et traiter les champs d'ondes internes, des outils d'analyse ont été développés au cours de cette thèse, ou bien encore adaptés lorsqu'ils existaient déjà.

### 3.1 Obtenir un fluide stratifié

Afin de pouvoir étudier des ondes internes de gravité, il est nécessaire de pouvoir générer de façon reproductible et systématique un fluide stratifié. Selon la stratification désirée, deux techniques ont été utilisées et nous les présentons ici.

A titre indicatif, deux types de cuve sont utilisés pour les expériences réalisées à Lyon ; la cuve n° 1 pour les expériences avec le générateur d'ondes, et la cuve n° 2 pour les expériences sur le phénomène d'eaux mortes. Leurs dimensions respectives sont rappelées dans la table 3.1. Il est possible d'emboîter plusieurs exemplaires (3 au total) de la cuve n° 1, afin d'obtenir un canal plus long.

**Techniques de remplissage :** Le remplissage d'une cuve avec un fluide stratifié est une opération classique [27, 100] et la méthode, dite "méthode des deux bacs", a été généralisée récemment pour créer tout type de profil [50]. Le principe est illustré à la figure 3.1 (a). Le bac de stockage correspond à l'eau salée (la plus dense) et le bac de

Cuve	Longueur W	Hauteur H	Largeur L	Volume V
1	0.80	0.425	0.17	57.8
2	3.00	0.40	0.105	126.0

TABLE 3.1 – Dimensions des cuves utilisées lors des expériences à l’ENS de Lyon. Les dimensions sont en mètres, les volumes en Litres.

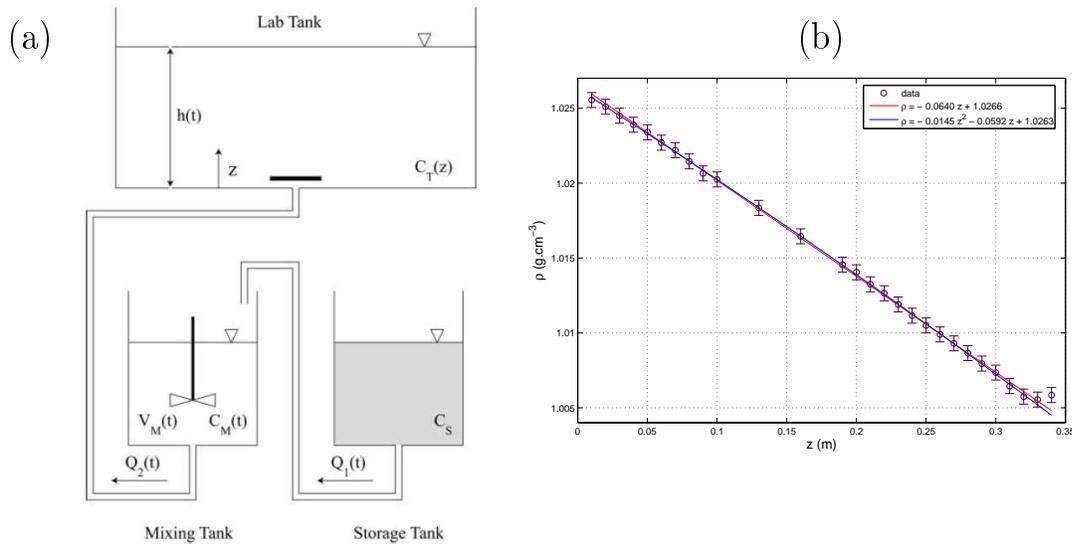


FIGURE 3.1 – (a) Schéma du remplissage par la méthode des 2 bacs, extrait de [50]. (b) Profil de densité dans la cuve 1 (mesuré au densimètre) et estimations linéaire et quadratique (en trait continu).

mélange est initialement remplie d’eau douce (la plus légère). Nous avons appliqué cette méthode illustrée grâce à deux pompes péristaltiques Cole-Parmer ©. Nos cuves étant de section constante, le choix du débit  $Q_2(t) = 2Q_1(t) = \text{cste}$  permet d’obtenir une évolution linéaire de la densité avec la profondeur. La stratification obtenue est alors très stable, et permet de réaliser des expériences sur plusieurs jours voire plusieurs semaines.

Dans le cas où l’on souhaite réaliser un fluide constitué de plusieurs couches homogènes, il est plus simple de remplir ces couches les unes après les autres. Pour cela, on utilise un flotteur sur lequel est placé un tuyau relié au volume d’eau à la densité souhaitée, et on laisse agir la gravité. Il est important que le fluide s’écoulant à la surface du flotteur atteigne la surface libre avec la vitesse verticale la plus faible possible, pour minimiser le mélange avec la couche précédente.

**Mesure de la stratification :** Le contrôle du profil de densité peut se faire de deux façons ; par l’observation des faisceaux d’ondes internes à une fréquence donnée (dans le cas où  $N(z)$  varie peu), ou par la mesure directe du profil de densité.

La deuxième méthode est rendue possible grâce à la présence de seringues de prélèvement sur le coté de la cuve n° 1, espacées tous les centimètres, et grâce à un densimètre de la marque Anton Paar ©. Le principe d'utilisation du densimètre est simple : une pompe de prélèvement permet d'introduire le fluide à peser dans un capillaire, qui est excité et dont la fréquence de vibration dépend de sa masse. L'appareil permet de mesurer la masse volumique d'un fluide entre 0 et 2 g.cm<sup>-3</sup> avec une précision de 5.10<sup>-4</sup> g.cm<sup>-3</sup> à partir d'un échantillon de 2 mL. La mesure est donc non-intrusive, perturbe très peu la stratification (2 mL prélevé pour 50 L de fluide stratifié), et est directe. Un exemple de profil quasi-linéaire mesuré avec cette méthode est présenté à la figure 3.1 (b).

Pour les dernières expériences réalisées au cours de la thèse, une sonde conductimétrique et de température (thermocouple) de la marque PME © a été utilisée. Cet instrument, bien qu'intrusif, est monté sur une longue tige très fine qui déplace très peu de fluide. La taille de la zone active de mesure étant très petite (quelques microns) et la mesure pouvant se faire en continu, la sonde permet de réaliser un profil de densité du fluide stratifié en la déplaçant à travers la stratification à l'aide d'un axe motorisé. Plusieurs exemples seront présentés à travers les différents chapitres.

## 3.2 Observer les ondes internes

### 3.2.1 Strioscopie synthétique

#### 3.2.1.1 Principe de la technique

L'observation des ondes internes est possible grâce au fait que l'indice de l'eau est fonction de sa masse volumique. Ainsi, le gradient de concentration en sel entraîne un gradient de masse volumique et donc un gradient d'indice. Qui plus est, sur la gamme de valeurs rencontrées, on peut supposer la variation linéaire, d'où :

$$n = a + b.\rho, \quad \text{avec} \quad \frac{d\rho}{dn} = 4.1 \text{ g cm}^{-3}. \quad (3.1)$$

La technique de strioscopie synthétique, "synthetic schlieren technique" en anglais, est sensible aux variations d'indice. Introduite par Dalziel *et al* [17], elle permet de quantifier les gradients d'indice optique dans les écoulements bidimensionnels.

La figure 3.2 décrit le principe. L'image du motif obtenu par la caméra à travers le fluide à l'équilibre sert de référence. Il s'agit d'un nuage de points répartis aléatoirement, et de densité suffisante pour que le damage du plan soit le plus fin possible. Quelques pixels par points est suffisant, mais la grille dépend de la résolution spatiale choisie pour la caméra.

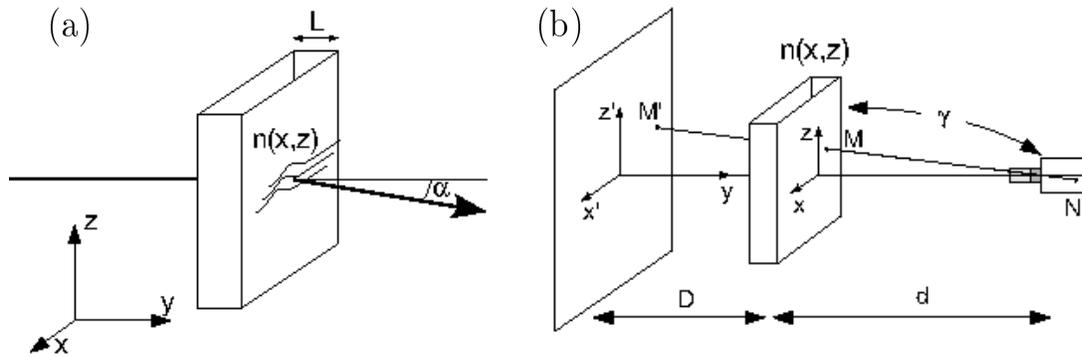


FIGURE 3.2 – (a) Origine de la déviation d'un rayon lumineux traversant un fluide stratifié, et (b) principe de la technique de strioscopie synthétique.

Les rayons lumineux traversant la cuve sont déviés d'un angle  $\alpha$  fonction des gradients locaux :

$$\tan \alpha = \sqrt{\tan^2 \alpha_x + \tan^2 \alpha_z} \quad \text{avec} \quad \alpha_x = \frac{L}{n} \frac{\partial n}{\partial x}, \alpha_z = \frac{L}{n} \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (3.2)$$

Pour chaque point du motif de référence, cette déviation se traduit par un déplacement de l'image de ce point de quelques pixels  $\Delta p$  sur la caméra. Si on raisonne sur une des directions ( $x$  ou  $z$ ) :

$$\Delta p_x = \frac{\alpha_x f}{r}, \quad (3.3)$$

où  $r$  est la dimension d'un pixel en cm,  $f$  la focale de la caméra que l'on peut relier à la résolution de la caméra en pixels/cm  $\gamma$  via  $\gamma = f/rd$ . Ainsi, on a

$$\Delta p_x = \alpha_x \gamma d \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{n}{L} \frac{d\rho}{dn} \frac{\Delta p_x}{\gamma d}. \quad (3.4)$$

On peut convertir cette variation en pixels en unité adaptée; la plus pratique est en variation de pulsation de Brunt-Väisälä

$$\Delta N^2 = \frac{g n}{\rho L} \frac{d\rho}{dn} \frac{\Delta p}{\gamma d} \quad \text{en} \quad (\text{rad.s}^{-1})^2. \quad (3.5)$$

Au final, il suffit de connaître l'indice et la densité moyenne pour chaque remplissage, ainsi que la résolution choisie pour connaître les variations horizontales ou verticales de la pulsation (les paramètres  $L$ ,  $d$ , et  $g$  sont constants).

### 3.2.1.2 Imperfection des mesures

La technique de strioscopie synthétique présente certaines limitations qu'il est important de rappeler.

Il faut remarquer que dans le cadre des expériences, des variations d'indice de l'air contribuent à la modification du chemin optique entre le motif et la caméra. Il est difficile de s'affranchir des fluctuations thermiques et du brassage naturel de l'air de la pièce, cela constitue la source de bruit la plus gênante. La déviation standard des déplacements générés sont de l'ordre de 0.03 à 0.1 pix (selon les conditions climatiques). Il est cependant possible de diminuer au maximum cette contribution de plusieurs façons.

Tout d'abord, il est possible d'essayer de minimiser l'amplitude du bruit généré. La source lumineuse utilisée a été choisie de façon à minimiser l'émission d'infra-rouges. En remplaçant les lampes de bureau (éclairage puissant, directif, chauffant fortement l'air) par un panneau lumineux<sup>1</sup> de dimensions 17" x 24", offrant un éclairage homogène sur toute la surface du motif et générant très peu de chaleur. Une seconde amélioration peut être apportée en minimisant les mouvements de l'air dans la pièce via une isolation soignée de la salle où sont réalisées les expériences, et la mise en place d'un caisson d'isolement de l'air entre la cuve et la caméra. La plus forte contribution étant due à l'air le plus proche de la caméra, ce caisson peut se limiter à l'environnement proche de la caméra.

Par ailleurs, il peut être intéressant d'augmenter l'amplitude du signal observé pour un même niveau de bruit (*i.e.* pour une même température). La sensibilité du montage ainsi que l'optimisation de la géométrie du dispositif utilisée a déjà été étudiée [17, 40]. L'influence de la distance motif-cuve ainsi que celle de la distance cuve-caméra est telle qu'on peut optimiser les déplacements apparents des points du motif sans que la distance totale ne joue de rôle majeur. Cette démarche n'est cependant pas générale et dépend de l'expérience considérée via la taille du motif observé, la finesse du motif, la structure des ondes, etc. Un exemple de configuration utilisée est une distance totale caméra-motif de 3.2 m, avec  $D = 0.4$  m et  $d = 2.8$  m (*cf.* figure 3.2), avec une distance focale de la caméra typiquement de l'ordre de 7 cm.

On peut également remarquer que les fluctuations de densité dues aux ondes sont proportionnelles au gradient moyen de densité ( $\propto N^2$ , *cf.* equation (2.10) ou encore (2.32c)). L'amplitude du signal mesuré  $\Delta p$  est donc directement proportionnelle à la pulsation de Brunt-Väisälä de la stratification mise en place, alors que le niveau de bruit reste constant. Il est possible d'utiliser ce moyen afin d'augmenter le rapport signal sur bruit des mesures. Cependant, nous n'avons pas systématiquement adopté cette démarche car il est difficile d'augmenter considérablement la valeur de  $N$ .

Les autres sources de bruit sont d'éventuelles modifications non-souhaitées de la configuration de l'expérience (vibration du support de la caméra, de la cuve ou de la grille de point) ou encore les bruits électroniques du système d'acquisition d'images. Elles restent en général négligeables devant la première source présentée.

---

1. l'éclairage basse tension est obtenu à partir d'un fin tapis de matériau semi-conducteur. Produit de la marque Electric Vynil ©.

### 3.2.1.3 Calculs de corrélation

L'aboutissement de la mesure nécessite l'utilisation d'un algorithme de corrélation d'images afin de calculer l'ensemble des déplacements (verticaux et horizontaux) du motif et d'obtenir un champ bi-dimensionnel correspondant aux ondes internes observées.

Nous utilisons pour cela les logiciels du projet CIVx développé à la plateforme d'expérimentation Coriolis (à Grenoble) [105, 26]. Le principe est simple et basé sur un calcul de corrélations entre une image de référence (*cf.* section 3.2.1.4) et une image dans un état perturbé.

De façon similaire à un algorithme de PIV, il s'agit d'un algorithme de "Correlation Image Velocimetry" qui donne comme information finale le champ de déplacement des points entre 2 images. La résolution obtenue permet de détecter des déplacements inférieurs au dixième de pixel. On obtient donc les champs de déformation horizontaux et verticaux,  $U(x, z, t_i)$  et  $V(x, z, t_i)$ , où  $\{t_i, i \in \{1, \dots, N\}\}$  sont les temps d'échantillonnage, entre deux images. Un exemple est illustré à la figure 3.3 où l'on a superposé le champ  $V$  sur la deuxième image ayant servi au calcul, la première image correspondant à la même image au repos (absence d'ondes dans la cuve). Il suffit alors de traduire  $U$  et

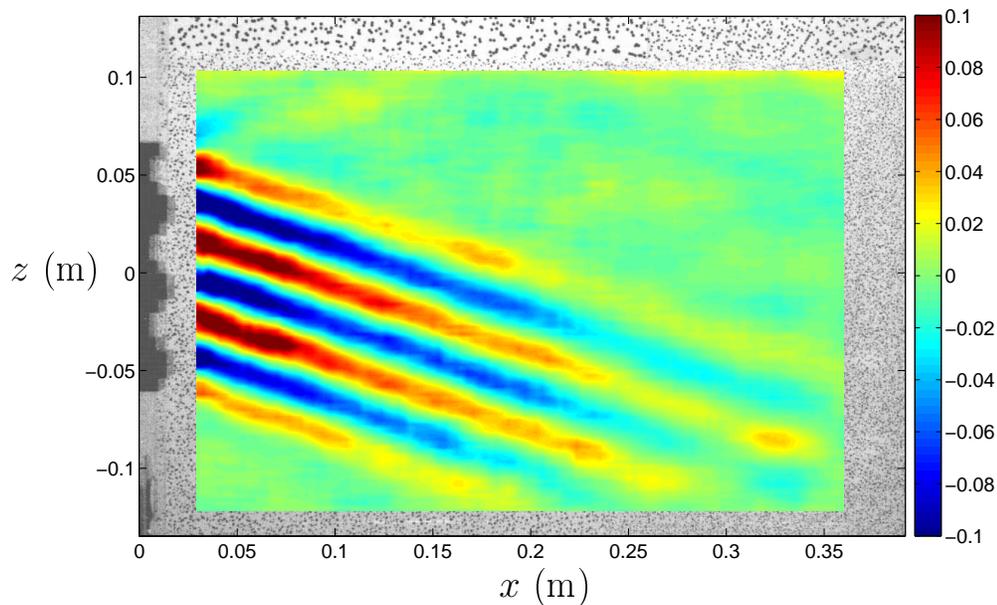


FIGURE 3.3 – Image noir et blanc acquise avec la caméra sur laquelle est superposée le champ de déplacement vertical du motif (en pixels) obtenu à l'issue du calcul de l'algorithme CIVx avec comme image de référence la stratification sans onde (au repos).

$V$  dans les unités d'intérêts par l'intermédiaire de la formule (3.5) pour pouvoir exploiter quantitativement les données.

### 3.2.1.4 Choix de l'image de référence

Les déplacements du motif observés sont relatifs à un état de référence. Il est cependant possible de choisir la référence et plusieurs informations en résultent.

**Référence en fluide stratifié ("Synthetic Schlieren") :** Dans le cas où l'on considère la référence comme étant le fluide stratifié au repos, comme illustré à la figure 3.3, les perturbations optiques sont directement reliées aux différences de chemin optique entre le champ  $n_0(z)$  associé à  $\rho_0(z)$  et  $n(x, z, t)$  associé à  $\rho_0(z) + \rho'(x, z, t)$  (où  $\rho'$  est associé aux ondes internes uniquement). Ainsi on obtient les champs  $\partial_x \rho'(x, z, t_i)$  et  $\partial_z \rho'(x, z, t_i)$ . C'est l'usage le plus courant de la technique, que nous utiliserons souvent.

On peut également comparer deux images consécutives, dans le cas où l'état de repos n'est pas forcément pertinent (ou accessible). C'est par exemple le cas si la stratification évolue au cours de l'expérience, notamment lors de processus de mélange. On réalise alors une dérivation temporelle supplémentaire des champs, de la même façon que pour la technique PIV (présentée par la suite), aboutissant à la mesure de  $\partial_t \partial_x \rho'$  et  $\partial_t \partial_z \rho'$ . Cependant, cette approche ne nous a pas été utile au cours de cette thèse.

**Référence en fluide homogène ("Absolute Schlieren") :** Finalement, il est également possible de considérer l'image de référence comme étant un fluide de même hauteur d'eau, sans stratification. Cette méthode est plus particulièrement utilisée dans le cas de forts gradients optiques [16], notamment en présence de saut de densité où des ondes interfaciales peuvent se développer. Cette référence avec un fluide homogène (de l'eau douce par exemple) permet alors de mesurer le gradient de densité "total",  $\partial_x(\rho_0 + \rho')$  et  $\partial_z(\rho_0 + \rho')$ , ce qui permet de prendre en compte d'éventuelles évolution dans le temps de  $\rho_0$ .

Un exemple de ce type de traitement est présenté à la figure 3.4, correspondant à une expérience du chapitre 7. Nous présentons le résultat du calcul de corrélation à l'image (a), que nous comparons au profil mesuré avec la sonde conductimétrique (b), les deux mesures étant faites quand la stratification est non perturbée. Au final, la comparaison des gradients issus de la mesure optique et de la mesure conductimétrique est faite à l'image (c) où l'on peut constater que la mesure optique retranscrit bien la partie quasi-linéaire de la stratification ( $z \in [-0.25; -0.05]$  m), ainsi que la position où le gradient est maximal ( $z_m = -0.033$  m). Cependant, les zones de fortes variations d'indice ( $z \in [-0.05; 0]$  m) ne donnent pas une information fiable via la mesure optique, du moins pour la résolution de caméra choisie.

La technique peut cependant être exploitée pour observer les ondes dans la stratification linéaire via les déplacements horizontaux associés à  $\partial_x \rho$ ; ainsi qu'observer les oscillations de la thermocline via les déplacements verticaux associés à  $\partial_z \rho$ , comme on

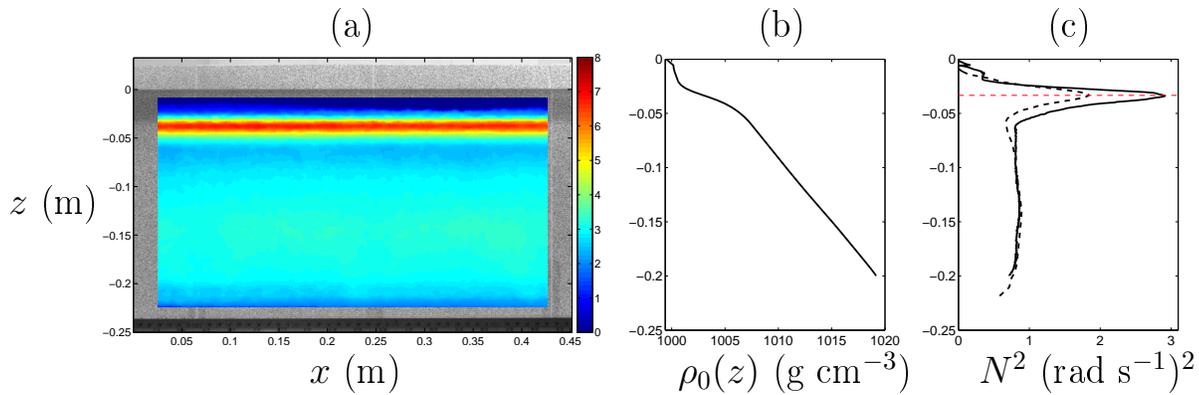


FIGURE 3.4 – (a) Image noir et blanc (acquise avec la caméra) sur laquelle est superposée le champ de déplacement vertical du motif (en pixel) obtenu à l’issue du calcul de l’algorithme CIVx avec comme image de référence un fluide homogène. (b) Profil de densité  $\rho_0(z)$  mesuré avec la sonde PME ©. (c) Comparaison des gradients verticaux de densité mesurés optiquement (ligne discontinue) et avec la sonde conductimétrique (ligne continue), le maximum du gradient mesuré optiquement étant repéré par les pointillés rouges.

peut le voir illustrer à la figure 3.5 correspondant à la perturbation de la stratification de la figure 3.4 par le passage d’un bateau à la surface. Ce choix de la référence avec un

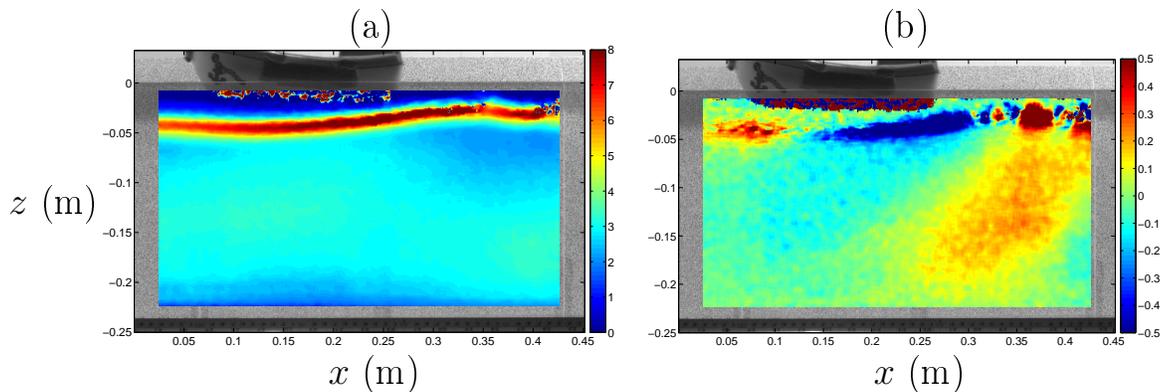


FIGURE 3.5 – Image noir et blanc acquise avec la caméra sur laquelle est superposée le champ de déplacement (a) vertical et (b) horizontal du motif (en pixel) obtenu à l’issue du calcul de l’algorithme CIVx avec comme image de référence un fluide homogène.

fluide homogène sera exploité principalement au chapitre 7.

### 3.2.2 Autres outils

Il existe d’autres techniques quantitatives de visualisation des ondes internes, nous présentons ici d’autres approches abordées au cours de cette thèse, bien que n’étant pas exploitées systématiquement, mais dont il est intéressant d’avoir un aperçu.

### 3.2.2.1 PIV en fluide stratifié

La technique de "Vélocimétrie par Imagerie de Particules" ou "Particle Image Velocimetry" (PIV) en anglais, est basée sur le suivi de particules injectées dans l'écoulement que l'on souhaite observé. Cette technique classique fondée sur le fait que la dynamique des particules retranscrit celle de l'écoulement sur un temps court, est cependant soumise à certaines contraintes lorsqu'on l'utilise avec des fluides stratifiés.

La première difficulté est l'ensemencement du fluide, le but étant de répartir des particules de façon suffisamment dense pour obtenir une résolution spatiale suffisante. Deux choix de particules sont possibles selon les visualisations réalisées.

- De très petites particules plus denses que le fluide dont la vitesse de sédimentation  $V_s$  est très faible. Pour un rayon  $a$  de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$  et une masse volumique  $\rho_p$  de l'ordre  $1.1 \text{ g cm}^{-3}$ , on peut estimer cette vitesse selon la formule de Stokes [11] à  $V_s = \frac{2a^2g}{9\nu} \left( \frac{\rho_p}{\bar{\rho}} - 1 \right) \simeq 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$  où  $\nu$  et  $\bar{\rho}$  sont respectivement la viscosité cinématique et la densité du fluide stratifié. Cela reste négligeable devant la vitesse associée aux ondes (de l'ordre de  $10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ )
- Des particules iso-densité, c'est-à-dire dont la densité correspond à celle du fluide à une altitude donnée de la stratification, qui ont diamètre de l'ordre de  $0.5 \text{ mm}$ .

Pour les expériences réalisées à Lyon (à petite échelle), le choix s'est porté sur les petites particules afin d'obtenir une plus grande densité de particules. Lors d'expériences à la plateforme Coriolis à Grenoble (à grande échelle), le choix se porte sur les particules iso-densité qui permettent une exploitation des expériences sur une plus longue durée, et qui sont plus facilement observables lors de visualisation de champs larges.

Outre le choix des particules à visualiser, une contrainte supplémentaire est l'indice optique variable à travers le fluide. Lorsque l'on observe un plan vertical à travers un fluide stratifié, une erreur systématique sur la position apparente des particules est due à la déviation des faisceaux lumineux vers le bas (direction du gradient d'indice). Cependant cet effet est d'autant plus marqué que la quantité de fluide traversée est importante, et que le gradient est important. Dans le cas d'une stratification où  $N \simeq 0.6 \text{ rad s}^{-1}$ , nous avons observé qu'un faisceau laser d'incidence horizontale dans le fluide était dévié vers le fond avec une pente de l'ordre 1%. Notons que l'on peut essayer de s'affranchir de cet effet en mélangeant au cours du remplissage le fluide avec de l'éthanol (d'indice différent de l'eau et de densité plus faible). La concentration d'éthanol varie afin de rendre l'indice optique de la solution quasiment constant [15]. Mais nous n'avons pas appliquée cette technique.

Au cours de cette thèse, la PIV a principalement été utilisée pour les expériences réalisées à la plateforme Coriolis (*cf.* chapitres 5 et 6).

### 3.2.2.2 Divers colorants

Les colorants en mécanique des fluides sont souvent utilisés pour visualiser les lignes de courants, ou bien encore le mélange. Dans le cadre de la mécanique des fluides stratifiés, il s'agit d'une des premières méthodes utilisées afin de mesurer le déplacement des lignes iso-densités. Ainsi, il est possible de mesurer les déplacements  $\eta(x, z_i, t)$  d'une ligne de densité  $\rho_i$  pour différentes altitudes  $z_i$ ; on peut alors par interpolation retranscrire l'évolution temporelle du champ de densité dans tous l'espace. Il est alors nécessaire de choisir des colorants qui ne diffusent pas trop rapidement à travers la stratification. Un exemple de cette utilisation est présenté au chapitre 6

Nous avons également utilisé des colorants alimentaires dans le cas d'une stratification à deux couches de densité bien distinctes (*cf.* chapitre 7), dans le but d'identifier rapidement les couches. Cette technique extrêmement simple s'est montrée particulièrement intéressante.

## 3.3 Analyser les champs d'ondes internes

Les techniques de mesure présentées nous permettent d'observer des champs bidimensionnels d'ondes internes au cours du temps. Nous présentons deux techniques d'analyse de ces données.

### 3.3.1 Transformée de Hilbert

L'outil présenté ici a fait l'objet d'un article dans *Physics of Fluids* [78].

La technique de démodulation a déjà été appliquée pour des ondes thermo-capillaires [14, 30, 29] dans le but d'extraire des grandeurs locales et instantanées telles que l'amplitude, la fréquence ou encore les nombres d'ondes. Il s'agit de la première application au cadre des ondes internes.

Le but est d'extraire des mesures, grâce à la transformée de Hilbert, un champ complexe  $\tilde{\psi}(x, z, t)$  associé à  $\psi(x, z, t)$  tel que la partie réelle de  $\tilde{\psi}$  vérifie  $\text{Re}(\tilde{\psi}) = \psi$ . Nous rappelons que la technique s'applique à n'importe quel champ décrivant l'évolution spatio-temporelle des ondes internes (fonction de courant, pression, densité, vitesse). Nous utiliserons ici la grandeur  $\psi(x, z, t)$  pour rester général, les illustrations seront basées sur les gradients de densité.

Pour éviter d'éventuelles confusions, il faut noter que la transformée de Hilbert fait parfois référence à l'opération qui associe le champ réel  $\text{Im}(\tilde{\psi})$  au champ réel  $\psi$ . Par abus de langage, nous appelons transformée de Hilbert (ou démodulation complexe) l'opération qui consiste à associer le champ complexe  $\tilde{\psi}$  au champ réel  $\psi$ .

### 3.3.1.1 Un cas simple à une dimension

Nous considérons d'abord un cas d'ondes unidimensionnelles pour illustrer la technique. Lorsque deux ondes se propagent dans deux directions opposées, selon  $(Oz)$  par exemple, avec le même nombre d'onde  $k_z$  et la même pulsation  $\omega$ , on peut écrire le champ total comme

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - k_z z) + B \cos(\omega t + k_z z). \quad (3.6)$$

Comme  $z$  est associé à la verticale, le premier terme correspond à une onde se propageant vers le haut et le second à une onde se propageant vers le bas. Par souci de simplicité nous supposons de plus que les amplitudes  $A$  et  $B$  sont constantes (en temps et espace).

On peut réécrire la relation (3.6) en utilisant la représentation complexe des fonctions cosinus, et en combinant les termes associés à la décomposition de Fourier en temps, selon

$$\psi(z, t) = \hat{\psi}_1 e^{i\omega t} + \hat{\psi}_2 e^{-i\omega t}, \quad (3.7)$$

où  $\hat{\psi}_1 = (Ae^{-ik_z z} + Be^{ik_z z})/2$  et  $\hat{\psi}_2 = \hat{\psi}_1^*$  est le complexe conjugué de  $\hat{\psi}_1$ .

Si on élimine le terme associé aux pulsations négatives dans (3.7), et que l'on multiplie par un facteur 2 le terme résultant, on obtient

$$\tilde{\psi}(z, t) = A e^{i(\omega t - k_z z)} + B e^{i(\omega t + k_z z)}. \quad (3.8)$$

Ainsi le champ à valeur réelle  $\psi(z, t)$  a été transformé en son équivalent à valeur complexe  $\tilde{\psi}(z, t)$  de telle sorte que  $\psi(z, t) = \text{Re}(\tilde{\psi}(z, t))$ . À partir de ce signal complexe, il est désormais possible de séparer les deux ondes initialement superposées en regardant leurs composantes de Fourier spatiales.

$$\tilde{\psi}(z, t) = (Ae^{i\omega t}) e^{-ik_z z} + (Be^{i\omega t}) e^{ik_z z}. \quad (3.9)$$

On peut alors extraire les composantes spectrales associées au nombre d'onde positif (resp. négatif)  $k_z$  et isoler l'onde qui se propage dans la direction des valeurs de  $z$  décroissantes (resp. croissantes). Il est important de remarquer que cette deuxième étape n'est possible qu'après avoir obtenu le champ complexe  $\tilde{\psi}$  et non avec le champ réel  $\psi$  car sa transformée de Fourier spatiale n'est pas la somme de deux termes complexes conjugués pour les nombres d'ondes positifs et négatifs.

### 3.3.1.2 Extension aux ondes bidimensionnelles

Il est possible de réaliser la même décomposition que précédemment pour des données correspondants à des champs à deux dimensions.

**Étape 1 :** La première étape de démodulation est obtenue à partir de la séquence d'opérations suivantes :

- i) calcul de la transformée de Fourier en temps du champ  $\psi(x, z, t)$ ,
- ii) filtrage passe-bande (sélectif ou large) des composantes de Fourier centré sur la pulsation positive  $\omega = 2\pi f$ , où  $f$  est la fréquence mesurée en hertz, et multiplication par un facteur 2.
- iii) calcul de la transformée de Fourier inverse du champ filtré pour obtenir le champ complexe  $\tilde{\psi}(x, z, t)$ .

Il est important de noter qu'à l'issue de cette première étape, le signal se compose de quatre types d'ondes progressives

$$\tilde{\psi}(x, z, t) = \tilde{A}(x, z, t) + \tilde{B}(x, z, t) + \tilde{C}(x, z, t) + \tilde{D}(x, z, t), \quad (3.10)$$

avec

$$\tilde{A}(x, z, t) = A(x, z, t) \exp [i(\omega t - k_x x - k_z z)], \quad (3.11)$$

$$\tilde{B}(x, z, t) = B(x, z, t) \exp [i(\omega t - k_x x + k_z z)], \quad (3.12)$$

$$\tilde{C}(x, z, t) = C(x, z, t) \exp [i(\omega t + k_x x - k_z z)], \quad (3.13)$$

$$\tilde{D}(x, z, t) = D(x, z, t) \exp [i(\omega t + k_x x + k_z z)]. \quad (3.14)$$

Nous considérons dans les équations (3.11)-(3.14) les nombres d'ondes  $k_x$  et  $k_z$  positifs afin de distinguer plus facilement la direction de propagation de chaque terme. Ainsi, bien que les quatre ondes oscillent à la pulsation  $\omega$ , elles ne se propagent pas dans la même direction (*cf.* figure 3.6).

Notons que les amplitudes instantanées  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  peuvent dépendre des coordonnées spatiales et temporelles, l'effet de la dissipation visqueuse en est une raison par exemple. Cependant, les échelles associées à leurs variations doivent être grandes devant les échelles caractéristiques de l'onde porteuse,  $\omega^{-1}$ ,  $k_x^{-1}$  and  $k_z^{-1}$ , sur laquelle la démodulation est effectuée.

**Étape 2 :** Dans un second temps, nous souhaitons séparer les quatre composantes identifiées en (3.10). Pour cela, nous réalisons un deuxième filtrage des composantes de Fourier mais dans l'espace des nombres d'ondes  $(k_x, k_z)$  cette fois-ci. Il est important de remarquer encore une fois que cette opération est possible car nous considérons un champ complexe  $\tilde{\psi}$ , *i.e.* après avoir réalisé l'étape 1 de transformée de Hilbert. Le but étant en général d'extraire les composantes spectrales associées aux nombres d'ondes positifs ou négatifs, il n'est pas nécessaire de réaliser un filtrage sélectif bien qu'il puisse être intéressant d'éliminer certains détails ou bruits à certains nombres d'ondes.

Dans le but de tirer avantage du fait que les données temporelles sont souvent mieux résolues que les données spatiales, nous choisissons de réaliser la transformée de Fourier

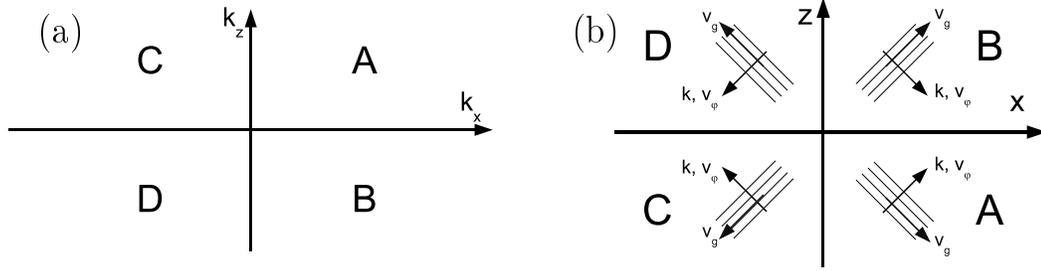


FIGURE 3.6 – Illustration des quatre directions de propagation possibles pour une onde harmonique dans un fluide stratifié. (a) Domaine de Fourier associé à (b) l'espace réelle. Les quatre quadrants du domaine de Fourier  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  correspondent à quatre différentes directions de propagation de l'espace physique, selon les signes des composantes horizontale et verticale du vecteur d'onde. Pour chaque direction, la vitesse de groupe  $\vec{c}_g$  et la vitesse  $\vec{c}_\phi$  du faisceau émis par une source oscillante au centre du repère sont représentées.

en temps en premier. Il est pourtant possible d'inverser l'ordre des opérations quand la résolution spatiale le permet, la transformée de Fourier étant bijective pour les signaux périodiques ou infinis. Le meilleur choix pour la première étape correspond à la coordonnée avec la meilleure résolution.

En s'appuyant sur la figure 3.6, il est apparent que l'on obtient alors une onde unique correspondant à la direction de propagation associée au vecteur d'onde filtré.  $A(x, z, t)$  représente l'amplitude complexe de l'onde se propageant vers les valeurs de  $x$  croissantes et de  $z$  décroissantes. Il en est de même pour  $B$ ,  $C$  et  $D$  dans les trois autres directions.

**Résumé :** Pour synthétiser, la démodulation complexe permet d'extraire d'un signal expérimental (typiquement un champ issu de l'analyse par strioscopie synthétique ou par PIV) la grandeur complexe

$$\chi(x, z, t) = |\chi(X, Z, T)| \exp[i\varphi_\chi(x, z, t)], \quad (3.15)$$

où  $\chi$  peut être  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$ . L'argument de l'exponentiel  $\varphi_\chi$  correspond à la phase de l'onde comportant à la fois l'évolution "rapide" à la fréquence de l'onde et éventuellement des modulations "lentes".

En pratique, le champ de données initial  $\psi(x, z, t)$  est transformé en quatre grandeurs (locales et instantanées) pour chacun des quatre champs spatio-temporels :

- i) amplitude  $|\chi(x, z, t)|$ ,
- ii) pulsation  $\omega(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial t$ ,
- iii) nombre d'onde dans la direction ( $Ox$ )  $k_x(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial x$ ,
- iv) nombre d'onde dans la direction ( $Oz$ )  $k_z(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial z$ .

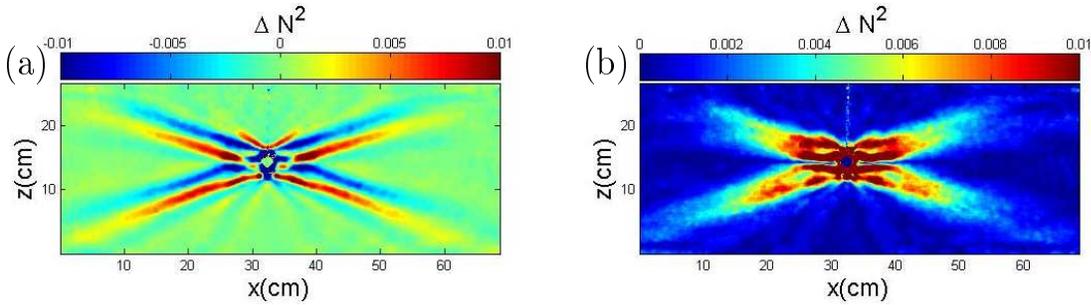


FIGURE 3.7 – Croix de Saint-André obtenue avec un cylindre de rayon  $R = 1.5$  cm oscillant à la pulsation  $\omega = 0.28$  rad s $^{-1}$  dans un fluide stratifié de pulsation de Brunt-Väisälä  $N = 1.0$  rad.s $^{-1}$ . (a) Partie réelle et (b) amplitude du champ  $\tilde{\rho}_z$  à l’issue de l’étape 1 de la transformée de Hilbert.

Nous allons illustrer la technique sur un exemple simple, le cas d’un cylindre oscillant dans un fluide stratifié linéairement.

### 3.3.1.3 Illustration : cas d’un cylindre oscillant

Afin de rattacher cette technique à un exemple concret, nous nous penchons sur une expérience historique, un grand classique des ondes internes, l’oscillation d’un cylindre à la pulsation  $\omega$  dans un fluide stratifié. Cette expérience initialement réalisée par Görtler en 1943 [41] et rendue populaire par Mowbray and Rarity [83] par la suite, a été le sujet d’études plus récentes à deux [42, 130] et trois [61, 98] dimensions.

L’expérience a été réalisée dans une cuve de dimensions  $1.20 \times 0.50 \times 0.10$  m $^3$  remplie par un fluide linéairement stratifié en sel, de pulsation caractéristique  $N = 1.0$  rad s $^{-1}$ . Des mesures quantitatives du gradient de densité du champ d’ondes internes émises ont été obtenues par strioscopie synthétique. Nous présentons ici l’analyse de la composante verticale du gradient de densité  $\partial_z \rho(x, z, t)$ .

Dans le cas présenté ici, un cylindre de rayon  $R = 1.5$  cm, oscillant à une pulsation  $\omega = 0.28$  rad s $^{-1}$ , émet quatre faisceaux d’ondes internes faisant un angle  $\theta \simeq 16^\circ$  avec l’horizontale, de façon analogue à la représentation de la figure 3.6(b), en forme de croix de Saint-André. La démodulation complexe de ce signal après l’étape 1, partie réelle et amplitude, est représenté à la figure 3.7. On distingue notamment que l’enveloppe est modulée à proximité du cylindre, ce qui est caractéristique des objets de rayons suffisamment grands devant la taille de la couche limite visqueuse  $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$  [56]. Pour la pulsation étudiée, nous avons  $\delta \simeq 2$  mm ce qui est bien petit devant  $R$ .

Nous pouvons alors isoler les quatre faisceaux en appliquant un filtrage non-sélectif selon la direction ( $Oz$ ) puis la direction ( $Ox$ ), comme cela est illustré à la figure 3.8. Bien que les discontinuités du champ mesuré au centre de l’image (dues au cylindre) génèrent une perturbation en croix selon l’axe vertical et horizontal, il n’y a pas de doute sur les

composantes extraites dans chacune des directions. Qui plus est, on pourrait s'affranchir de cet effet en n'appliquant l'étape 2 du filtrage sur un domaine connexe du champ d'ondes, et non sur l'ensemble de la fenêtre d'observation.

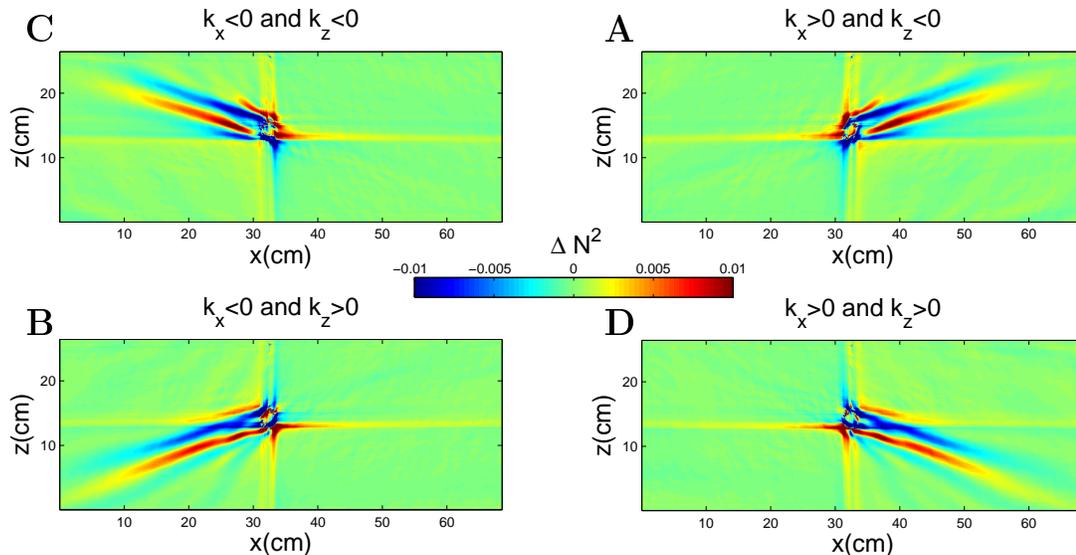


FIGURE 3.8 – Partie réelle du gradient horizontal de densité présenté à la figure 3.7 après filtrage spatial. Les 4 images sont labélisées en accord avec la classification de la figure 3.6(a).

Nous faisons une dernière remarque quant à l'utilisation de la technique qui est basée sur la notion de filtrage de Fourier en temps et en espace. La prise en compte du critère de Shannon implique certaines limitations sur l'application de la technique. Il n'est pas possible de filtrer les champs d'ondes internes pour lesquels la fréquence caractéristique est supérieure à deux fois la fréquence d'échantillonnage, et les longueurs d'ondes supérieures à la moitié de la taille de la fenêtre d'observation. Nous verrons que ce critère spatial peut jouer un rôle, notamment dans l'étude de structures modales.

### 3.3.2 Décomposition modale

L'outil présenté ici a été développé au cours de la thèse de Paula Echeverri [21] dans le cas particulier d'une stratification linéaire. Nous présentons la méthode que nous avons utilisée au cours de nos analyses (*cf.* chapitre 5). Nous l'avons étendue au cas plus général d'une stratification quelconque.

#### 3.3.2.1 Principe

La décomposition modale a pour but d'extraire les coefficients  $\{\gamma_n = a_n e^{i\phi_n}, \forall n \in \mathbb{N}\}$  associé à la description d'une onde interne en modes verticaux d'un champ d'ondes

internes. L'expression de la fonction de courant peut s'écrire

$$\psi(x, z, t) = W_0 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \frac{\gamma_n}{k_{x,n}} e^{i(\omega t - k_{x,n}x - \frac{\pi}{2})} \right], \quad (3.16)$$

où  $W_0$  est une vitesse caractéristique du problème étudié (cf. équation (2.36)). Si l'on souhaite exprimer la décomposition en terme de la composante verticale de vitesse par exemple, on obtient

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = W_0 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n(z) e^{i(k_{x,n}x - \omega t)} \right], \quad (3.17)$$

où les fonctions  $f_n(z)$  sont les solutions de l'équation (2.33) correspondantes aux modes propres d'ordre  $n$  associés à la stratification  $N(z)$ . La base des fonctions est orthonormée.

Afin d'extraire l'amplitude et la phase de chaque mode (deux informations différentes), il est nécessaire d'exploiter deux projections du champ observé. La décomposition modale se réalise donc en deux étapes

**Étape 0 :** On calcule l'amplitude instantanée à chaque position  $x$  de la fenêtre d'observation associé au mode- $n$

$$\alpha_n(x, t) = \int_0^H w(x, z, t) f_n(z) dz \equiv W_0 |\gamma_n| \operatorname{Re} \left[ e^{i(\hat{\phi}_n - \omega t)} \right], \quad (3.18)$$

où  $\hat{\phi}_n = \phi_n + k_{x,n}x$ .

**Étape 1 :** On étudie la phase du signal extrait  $\alpha_n$  en chaque position en réalisant l'intégrale de Fourier sur un nombre  $N_p$  de périodes

$$\kappa_n(x) = \frac{\omega}{N_p \pi} \int_0^{2\pi N_p / \omega} \alpha_n(x, t) \cos(\theta_n - \omega t) dt \quad (3.19)$$

et en cherchant le maximum de la fonction  $\kappa_n(x)$  par rapport à la variable  $\theta_n$ . Le maximum est obtenu pour la valeur  $\theta_n = \hat{\phi}_n$ , et vaut  $\kappa_n(x) = |\gamma_n(x)|$ .

**Étape 2 :** On extrait finalement la phase du mode connaissant le nombre d'onde  $k_{x,n}$  associé, en vérifiant que la valeur  $\hat{\phi}_n - k_{x,n}x$  est bien constante par rapport à  $x$ .

Il est donc nécessaire d'utiliser à la fois l'information temporelle et spatiale associées à un champ de vitesse observé afin de pouvoir décomposer complètement ce dernier sur la base des modes verticaux.

### 3.3.2.2 Réalisation pratique

En pratique, l'algorithme de décomposition modale calcule les différents coefficients en réalisant l'inversion du système

$$\sum_{m=1}^M \Gamma_{n,m} \Psi_m(x, t) = \int_b^{H-a} W(x, z, t) f_n(z) dz, \quad (3.20)$$

où l'on a

$$\Gamma_{n,m} = \int_b^{H-a} f_m(z) f_n(z) dz \quad (3.21)$$

$$\Psi_m(x, t) = W_0 a_n \operatorname{Re} \left[ e^{i(\omega t - k_{x,n} x + \phi_n)} \right]. \quad (3.22)$$

On peut observer plusieurs limitations. En prenant en compte les pertes d'information<sup>2</sup> à la surface ( $a$ ) et au fond ( $b$ ), la matrice  $\Gamma_{n,m}$  n'est plus diagonale et l'inversion n'est possible qu'avec une base infinie de fonction  $f_n$ . Cependant, la réalisation pratique de l'inversion impose une troncature à une valeur finie  $M$  de la somme sur  $m$  dans (3.20). Il en résulte des incertitudes sur la décomposition modale obtenue. L'influence des différents paramètres  $M$ ,  $a$ , et  $b$  a été étudiée, et on peut en déduire que

- pour une valeur de  $M$  fixée, l'influence de la perte d'information est faible. Pour des valeurs de  $a$  et  $b$  variant indépendamment entre 0.1 et 2% de la hauteur d'eau, la valeur des coefficients de la décomposition modale de la vitesse verticale varie de moins de 5%.
- pour des valeurs de  $a$  et  $b$  fixées et pour un mode- $n$  donné, il existe une valeur de  $M$  au dessus de laquelle le coefficient mesuré n'évolue quasiment plus. Cette valeur est d'autant plus grande que le mode étudié est élevé.

En pratique, pour les expériences où nous avons utilisé cette méthode (chapitres 4 et 5), les valeurs de  $a/H$  et  $b/H$  étaient de l'ordre de 1% et nous nous sommes limités à  $M \simeq 25$ , suffisant pour l'étude des premiers modes.

### 3.3.2.3 Exemple

Nous proposons d'illustrer la technique sur un exemple idéalisé où l'on utilise la définition (3.17) en fixant les valeurs des coefficients  $\gamma_n$ . Nous choisissons  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 0.25e^{i\pi/3}$  et  $\gamma_3 = 0.1e^{i\pi/5}$ . Tous les autres coefficients sont nuls. Le champ à analyser est présenté à la figure 3.9 (a).

---

2. Dans le cas de mesures PIV, il s'agit des zones de surbrillance dues aux réflexions de la nappe laser à la surface libre ou au fond, et aussi à l'ensemencement qui est en général également moins bon.

Concernant la mesure, nous considérons un fluide stratifié avec une stratification linéaire, de hauteur  $H = 0.54$  m, dont les informations ne sont pas exploitables à la surface et au fond sur une hauteur de 0.01 m ( $a = b = 0.01$  m). Le résultat de la décomposition modale pour les modes 1 à 4 est illustré aux figures 3.9 (b-c). Le résultat est très bon et les incertitudes sur les amplitudes et phases faibles. L'erreur due à la perte d'information à la surface et au fond est d'environ 5% sur les phases et 2% pour les amplitudes.

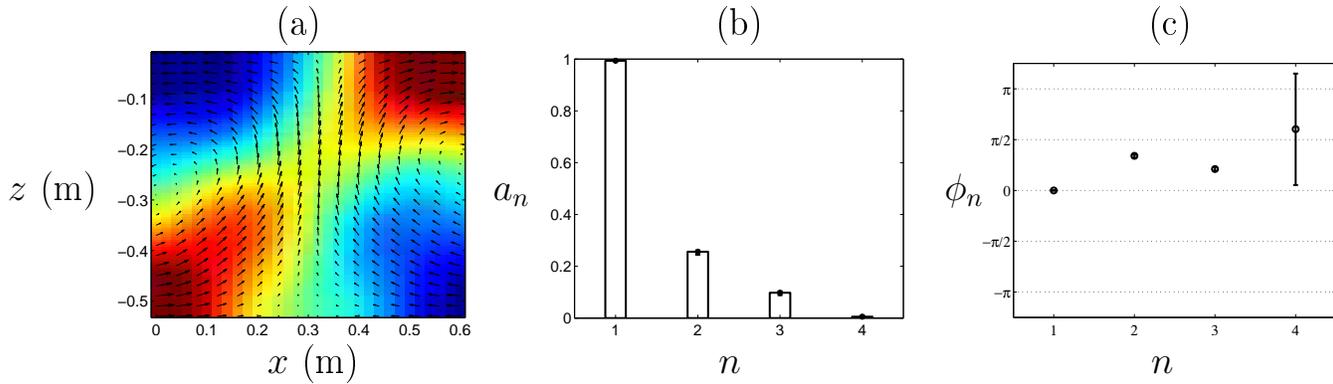


FIGURE 3.9 – (a) Champ de vitesse (vecteurs) et intensité de la composante horizontale associée (couleur) pour la somme de trois modes. (b) Amplitudes et (c) phases obtenus à partir de la décomposition modale du champ en (a) pour  $M = 25$ ,  $a/H = b/H = 0.02$ .

Comparativement, dans le cas où l'on a aucune perte d'informations ( $a = b = 0$ ), on trouverait les valeurs imposées avec une erreur moindre que 1% pour l'amplitude et 0.1% pour la phase.

Nous remarquons que la technique est moins précise si nous analysons de la même façon la composante horizontale de vitesse, les erreurs ainsi que les incertitudes de la mesure étant de l'ordre de 5 – 10% et 7 – 15% pour la phase. Nous utiliserons donc de façon privilégiée l'analyse de la composante verticale de la vitesse.

## Résumé

Nous avons présenté les techniques et outils utilisés au cours de cette thèse.

Hormis la mise en place de la strioscopie synthétique classique (« synthetic schlieren »), les techniques expérimentales présentées ont été développées au cours de cette thèse permettant notamment une modernisation de la salle de manipulation. L'utilisation de la strioscopie synthétique absolue est particulièrement intéressante bien qu'encore très peu utilisée.

Les outils d'analyse ont été développés sur Matlab © afin de les rendre facilement utilisables pour tout utilisateur. La combinaison des deux techniques permet d'analyser tout type d'ondes internes présenté au chapitre 2. Nous utiliserons régulièrement ces

outils au cours de cette thèse, qui sont particulièrement pratique pour extraire les diverses informations présentent dans des champs de données à trois dimensions (une temporelle et deux spatiales).



# Chapitre 4

## Génération contrôlée des ondes internes au laboratoire.

La génération contrôlée de tout type d'ondes internes est le souhait de tout expérimentateur afin de pouvoir se pencher sur les enjeux associés aux ondes internes dans les océans. Bien que le générateur d'ondes présenté par la suite ait été inventé avant le début de cette thèse, un temps considérable a été consacré à la compréhension détaillée de son mode de fonctionnement. En outre, dans la publication originale [45], seul le forçage en onde plane avait été testé. Nous montrons ici que les possibilités sont beaucoup plus larges, en résumant les principaux résultats.

La majeure partie de ce chapitre correspond à un travail réalisé en collaboration avec Manikandan Mathur et Thomas Peacock au laboratoire du M.I.T (expériences), avec Denis Martinand au laboratoire M2P2 (simulations) et avec Louis Gostiaux au laboratoire LEGI (expertise). Il a été accepté à la publication à *Journal of Fluid Mechanics* [79], sous le titre « New Wave Generation ».

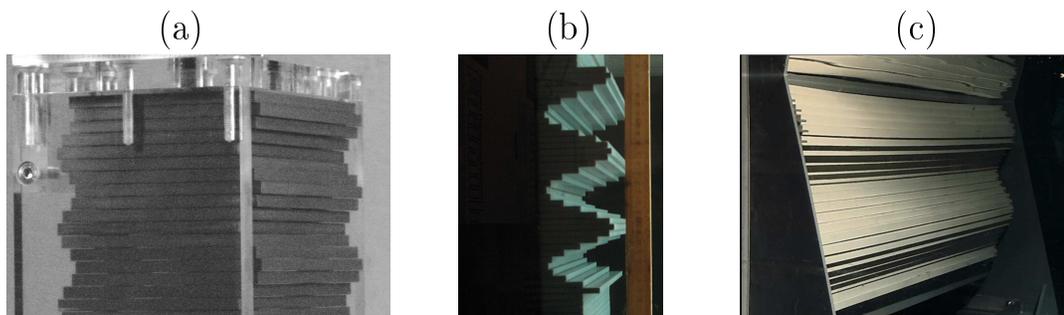


FIGURE 4.1 – Vues en perspective du générateur d'ondes (a) de l'ENS Lyon, (b) du MIT et (c) de la plate-forme Coriolis.

**Résumé** Nous présentons ici les résultats combinés d'expériences et de simulations numériques étudiant la génération d'ondes internes utilisant une nouvelle source développée par Gostiaux *et al.* [45] (voir figure 4.1). Le mécanisme, qui est composé de plaques oscillantes générant un profil modulable, a déjà été utilisé pour un certain nombre d'études fondamentales qui ont mis en avant son potentiel sans pour autant élucider complètement son fonctionnement.

Nous mettons en évidence dans ce chapitre la grande variété d'ondes à deux dimensions que ce générateur peut émettre. Des ondes planes aux modes verticaux en passant par les faisceaux localisés, l'ensemble des structures décrites au chapitre 2 seront abordées. L'influence des différents paramètres tels que la discrétisation du profil, l'amplitude de forçage, ou encore l'angle de propagation, est analysée en s'appuyant notamment sur un outil analytique, la transformée de Fourier, qui permet de prédire précisément l'allure du champ émis.

## 4.1 Introduction

The study of internal waves continues to generate great interest due to the evolving appreciation of their role in many geophysical systems. In the ocean, internal waves play an important role in dissipating barotropic tidal energy [see 32, for a review], whereas atmospheric internal waves are an important means of momentum transport [4]. In both the ocean and the atmosphere, internal wave activity also impacts modern day technology [99]. Many unanswered questions remain, however, particularly regarding the fate of internal waves. For example : How much mixing do internal waves generate in the ocean, and via what processes ? And at what altitudes do atmospheric internal waves break and deposit their momentum ? The ability to reliably model internal wave dynamics is key to tackling important questions such as these.

Internal waves come in a wide variety of forms. The simplest, a plane wave, is the basis of many theoretical studies that provide fundamental insight [see 119, 120, 18, for instance], especially as any linear wave structure can be decomposed into independent plane waves via Fourier transforms. While plane wave solutions are the focus of many theoretical studies, laboratory experiments and field observations reveal that internal waves generated by a localized source, such as the tidal flow past an ocean ridge [12, 72] or deep tropical convection in the atmosphere [125], produce coherent wave beams that radiate away from the generation site. In vertically-finite domains, such as the ocean, the internal wave field can be conveniently described using vertical modes, i.e. horizontally propagating and vertically standing waves, whose spatial form is dictated by the vertical stratification, as discussed in [21]. Finally, localized solitary wave structures are also ubiquitous [92].

Investigation of these different internal wave forms in laboratory experiments has

played a key role in internal wave research, starting with the pioneering work of [83] on the wave beams generated by an oscillating cylinder. Since then, internal waves have been generated using a variety of means. [20] performed an experimental study of the reflection of nominally plane waves, produced by a paddle mechanism, from a density jump. A similar paddle mechanism was used by [57] to study the dissipation caused by internal wave breaking at a sloping boundary. [70] used vertical oscillations of a tank filled with salt-stratified water to parametrically excite internal waves, which eventually focused onto internal wave attractors in the tank. With the ocean in mind, [43] and [21] produced internal waves by side-to-side oscillation of topography.

The aforementioned experimental methods of internal wave generation have three inherent shortcomings. Firstly, they produce wave fields that are invariant in one horizontal direction, and thus nominally two-dimensional. In this paper, we too restrict ourselves to the study of such situations, using  $z$  to refer to the vertical direction, antiparallel to the gravity field  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ , and  $x$  to the horizontal direction; the possibility of generating three-dimensional wave fields using the novel generator is raised at the end of the paper. The second shortcoming is that, with the exception of towed topography [9, 2], pre-existing methods radiate waves in multiple directions rather than in a single direction. This is due to the dispersion relation for internal gravity waves,

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta, \quad (4.1)$$

which relates the forcing frequency,  $\omega$ , to the local angle of energy propagation with respect to the horizontal,  $\theta$ , via the Brunt-Väisälä frequency,  $N = \sqrt{-g\partial_z\rho/\rho}$ , where  $\rho$  is the background fluid density. Since waves propagating at angles  $\pm\theta$  and  $\pi \pm \theta$  all satisfy (4.1) for a given frequency ratio  $\omega/N$ , a two-dimensional localized source, such as a vertically oscillating cylinder, generates internal waves propagating in four different directions. Propagation in two of the four directions can be suppressed by either providing oscillations along only one of the directions of propagation (i.e.  $\theta$  and  $\pi + \theta$ ) [33, 25] or by using a paddle system at a boundary [20]. These arrangements nevertheless still produce an undesirable second set of waves that must somehow be dealt with in an experiment. The third, and perhaps the most significant, shortcoming is that all pre-existing methods provide very limited, if any, control of the spatial structure of an internal wave field.

A major advance in internal wave generation recently occurred with the design of a novel type of internal wave generator [45]. This design uses a series of stacked, offset plates on a camshaft to simultaneously shape the spatial structure of an experimental internal wave field and enforce wave propagation in a single direction, as illustrated in figure 4.2. The maximum horizontal displacement of each plate is set by the eccentricity of the corresponding cam, and the spatio-temporal evolution is defined by the phase progression from one cam to another and the rotation speed of the camshaft. So far, this novel configuration has been used to study plane wave reflection from sloping boundaries

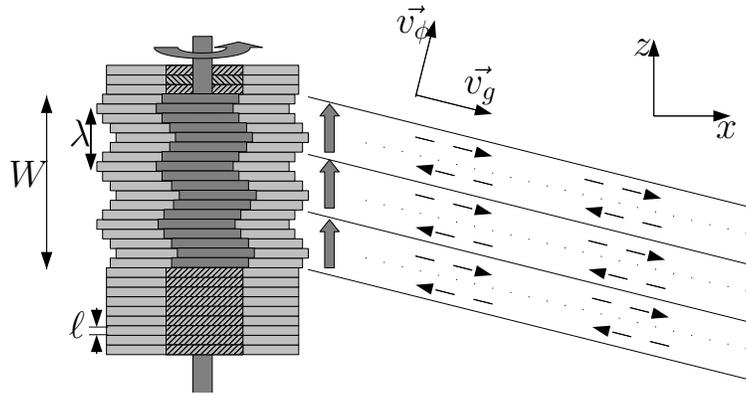


FIGURE 4.2 – A schematic showing the basic configuration of a novel internal wave generator. Plates are vertically stacked on an eccentric camshaft. See text in section 2 for the definitions of the different lengths  $W$ ,  $\ell$  and  $\lambda$ . The circular arrow at the top of the generator illustrates the direction of rotation of the camshaft, the thick vertical arrows show the corresponding motion of the wave form of the plates, and the dashed oblique arrows indicate the resulting local velocity field.  $\vec{v}_\phi$  and  $\vec{v}_g$  indicate the direction of phase and group velocity, respectively.

[42], diffraction through a slit [78] and wave beam propagation through nonuniform stratifications [74]. Despite these early successes, however, there has been no dedicated study of the ability of this arrangement to generate qualitatively different forms of internal wave fields, and several important questions remain. For example, how does a stratified fluid that supports two-dimensional waves respond to controlled forcing in only one direction (i.e. parallel to the motion of the plates)?

In this paper, we present the results of a comprehensive study of two-dimensional wave fields produced by different configurations of novel internal wave generators, and reveal that this approach can accurately produce plane waves, wave beams and discrete vertical modes. The results of experiments are compared with predictions based on the Fourier transforms of the spatial structure of the wave generator, which proves to be a very useful and simple tool for predicting wave fields, and numerical simulations, which allow investigation of the boundary conditions imposed by the generator. The material is organized as follows. Section 4.2 presents the experimental and numerical methods used throughout the study. The generation of plane waves is addressed in § 4.3, followed by the generation of self-similar wave beams and vertical modes in § 4.4 and § 4.5, respectively. Our conclusions, and suggestions for future applications of the generator, are presented in § 4.6.

## 4.2 Methods

### 4.2.1 Experiments

Throughout this paper, we consider the case of wave fields excited by a vertically standing generator with horizontally moving plates of thickness  $\ell$ , as depicted in figure 4.2. This scenario, which is possible because the direction of wave propagation is set by the dispersion relation (4.1), has two major advantages over the other possibility of a generator tilted in the direction of wave propagation [45, 74]. First, it is far more convenient because it requires no mechanical components to orient the camshaft axis and no change of orientation for different propagation angles. Second, unwanted wave beams that are inevitably produced by free corners within the body of a stratified fluid are eliminated because the generator extends over the entire working height of the fluid.

Two different laboratory experimental facilities, both using the double-bucket method [100] to create salt/density stratifications, were used. The first, at ENS de Lyon, utilized a 0.8 m long, 0.170 m wide and 0.425 m deep wave tank. The wave generator, whose characteristics are listed in table 4.1, was positioned at one end of the tank. On each side of the wave generator there was a 0.015 m gap between the moving plates and the side wall of the wave tank. Visualizations and quantitative measurements of the density-gradient perturbation field were performed using the Synthetic Schlieren technique [17]. The CIV algorithm of [26] was used to compute the cross-correlation between the real-time and the  $t = 0$  background images. Blocksom filter matting was used to effectively damp end wall reflections of internal waves. The ENS Lyon setup was used to run experimental studies of the classical Thomas–Stevenson wave beam profile [117], detailed in § 4.4.

The second system, at MIT, utilized a 5.5 m long, 0.5 m wide and 0.6 m deep wave tank. A partition divided almost the entire length of the tank into 0.35 m and 0.15 m wide sections, the experiments being performed in the wider section. The wave generator, whose characteristics are given in table 4.1, was mounted in the 0.35 m wide section of the tank with a gap of 0.025 m between the moving plates and either side wall. Parabolic end walls at the ends of the wave tank reflected the wave field produced by the generator into the 0.15 m wide section of the tank, where it was dissipated by Blocksom filter matting. Visualizations and quantitative measurements of the velocity field in the vertical midplane of the generator were obtained using a LaVision Particle Image Velocimetry (PIV) system. This facility was used for studies of plane waves and vertical modes, detailed in § 4.3 and § 4.5, respectively.

Examples of the amplitude and phase arrangements of the plates for the experiments discussed in this paper are presented in figure 4.3. We use the following terminology :  $M$  is the number of plates per period used to represent a periodic wave form of vertical

Generator	Height	Width	Plate thick.	Plate gap	Max. eccentricity	Num. of plates
Lyon	390.0	140.0	6.0	0.7	10.0	60
MIT	534.0	300.0	6.3	0.225	35.0	82

TABLE 4.1 – Details of the wave generators at ENS de Lyon and MIT. Dimensions are in mm.

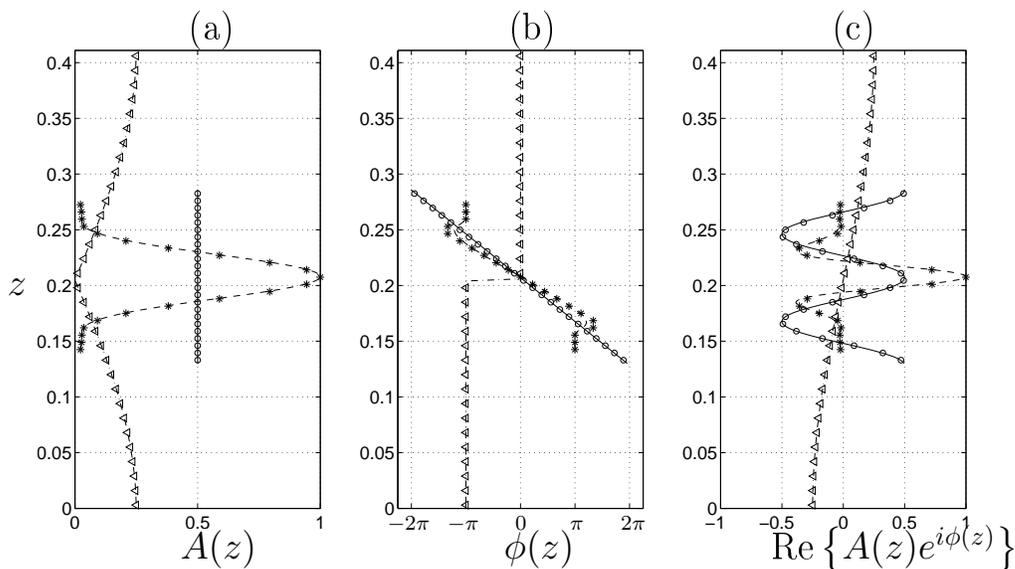


FIGURE 4.3 – Examples of the (a) eccentricity  $A(z)$  in cm, (b) phase  $\phi(z)$  and (c) instantaneous position of the cams for different profiles used throughout the paper. These include : plane waves for  $M = 12$  and  $W = 2\lambda$  ( $\circ$ ), Thomas & Stevenson beam ( $*$ ) and a mode-1 internal tide ( $\triangleleft$ ). Thin lines drawn through the discrete points are the corresponding analytical forms being modeled.

wavelength  $\lambda$ ,  $W$  is the total height of the active region of the generator with nonzero forcing amplitude,  $A(z)$  is the eccentricity of a cam located at height  $z$ , and  $\phi(z)$  is the phase of a cam set by the initial rotational orientation relative to the mid-depth cam ( $\phi = 0$ ). The actual profile of the generator is given by  $\text{Re} \{A(z)e^{i\phi(z)}\}$ , where  $\text{Re}$  stands for the real part. For a plane wave,  $A(z)$  is constant and  $\phi(z)$  varies linearly over the active region of the generator. For the Thomas & Stevenson profile there is a nontrivial spatial variation in both  $A(z)$  and  $\phi(z)$  over the active region, and elsewhere  $A(z)$  is zero. Finally, for a mode-1 wave field,  $A(z)$  varies as the magnitude of a cosine over the entire fluid depth, while  $\phi(z)$  jumps by  $\pi$  at mid-depth.

### 4.2.2 Numerics

Complementary two-dimensional numerical simulations, in which excitation by the generator was modeled by imposing spatio-temporal variations of the velocity and buoyancy fields along one boundary of the numerical domain, were performed. The simulations, which assumed a Newtonian fluid in the Boussinesq approximation, solved the incompressible continuity, Navier–Stokes and energy equations

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\partial_t \vec{v} + \left( \vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times \vec{v} = -\vec{\nabla} q + b \vec{e}_z + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (4.2b)$$

and

$$\partial_t b + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) b = -N^2 \vec{v} \cdot \vec{e}_z + \kappa \nabla^2 b, \quad (4.2c)$$

where  $\vec{v} = (u, w)$  is the velocity field,  $v$  the corresponding velocity magnitude,  $p = q - v^2/2$  the pressure,  $b$  the buoyancy field, related to the density by  $\rho = \rho_0 (1 - g^{-1} N^2 z - g^{-1} b)$  where  $\rho_0$  is the density at  $z = 0$ ,  $\nu$  the kinematic viscosity and  $\kappa$  the diffusivity.

The code used was an extension of that developed for channel flow [38], to which the integration of the energy equation and the possibility of spatially varying and time evolving boundary conditions on the plates were added, as already presented in [73] for thermal convection. The method proceeds as follows. A numerical solution in a rectangular domain  $[0, l_x] \times [0, l_z]$  is obtained by a tau-collocation pseudo-spectral method in space, using Fourier modes in the  $z$ -direction and Chebyshev polynomials in the confined  $x$ -direction. This method very precisely accounts for the dissipative terms. The nonlinear and diffusion terms are discretized in time by Adams–Bashforth and Crank–Nicolson schemes, respectively, resulting in second order accuracy in time. As the simulation focuses on the linear and weakly nonlinear dynamics, the de-aliasing of the nonlinear term in the spatial expansion of the solution is not of crucial importance and is omitted to decrease the computational cost. Owing to the assumption of a divergence-free flow, the influence matrix method, introduced in [62, 63], is used to evaluate the pressure and the velocity field; the pressure gradient in the Navier–Stokes equation then being discretized by an implicit Euler scheme. Finally, the buoyancy term is also discretized in time by an implicit Euler scheme, since the energy equation is solved before the Navier–Stokes equations.

Simulations were run by imposing forced boundary conditions on components of the velocity and buoyancy fields at  $x = 0$ ; no forcing was applied to the pressure, since its value on the boundaries is an outcome of the numerical method. The governing equations (4.2) were thus integrated together with Dirichlet boundary conditions

$$\vec{v}(0, z, t) = \vec{v}_f(z, t), \quad b(0, z, t) = b_f(z, t); \quad (4.3)$$

while

$$\vec{v}(l_x, z, t) = \vec{0}, b(l_x, z, t) = 0, \quad (4.4)$$

were applied at  $x = l_x$ . We note that this numerical forcing is Eulerian in nature, whereas the corresponding experimental forcing is Lagrangian in spirit. The spectral method introduces periodic conditions in the  $z$ -direction, which have to be accounted for to avoid Gibbs oscillations. Therefore, the boundary conditions (4.3) were multiplied by a polynomial “hat” function  $H(z) = \left(1 - (2z/l_z - 1)^{30}\right)^6$ , vanishing at  $z = 0$  and  $z = l_z$ . The choice of the exponents in  $H(z)$  is qualitative, the aim being that the variation of the profile envelope be smooth compared to the spatial resolution, yet sharp enough to keep a well-defined width of forcing.

The boundary conditions (4.4) imply wave reflection, with the reflected waves eventually interfering with the forced waves. Thus, the numerical domain was made sufficiently large to establish the time-periodic forced wave field near the generation location long before reflections became an issue. For a typical simulation, the domain was  $l_x = 3.01$  m long and  $l_z = 1.505$  m high, and the number of grid points used was  $N_x = 1024$  and  $N_z = 512$ , giving a spatial vertical resolution of 2.9 mm that ensured at least two grid points per plate. Satisfactory spectral convergence was confirmed for this spatial resolution and the time step was set to ensure stability of the numerical scheme.

### 4.2.3 Analysis

A detailed study of the impact of sidewall boundary conditions on the generation of shear waves was performed by [76]. Here, we take a simpler approach and show that a useful tool for investigating both theoretical and experimental internal wave fields produced by the novel generator is Fourier analysis. This allows one to decompose internal wave fields into constituent plane waves, and readily make predictions about the radiated wave field.

For an unconfined, inviscid, two-dimensional system, any physical field variable associated with a periodic internal wave field of frequency  $\omega$  can be described by its Fourier spectrum [115, 116], i.e.

$$\psi(x, z, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Q}_\psi(k_x, k_z) e^{i(k_x x + k_z z)} \delta((k_x^2 + k_z^2)\omega^2 - N^2 k_x^2) dk_z dk_x, \quad (4.5)$$

where  $\psi(x, z, t)$  represents a field variable (e.g.  $b, u$ ) and the Dirac  $\delta$ -function ensures the dispersion relation (4.1) is satisfied by the plane waves components. Propagating waves in a single direction, say towards positive  $x$ -component and negative  $z$ -component for the energy propagation, require

$$\tilde{Q}_\psi(k_x, k_z) = 0 \quad \forall k_x \leq 0 \quad \& \quad \forall k_z \leq 0, \quad (4.6)$$

as noted by [78].

At a fixed horizontal location  $x_0$ , the values of  $\psi(x_0, z, t)$  for all the field variables can be considered as boundary conditions that force the propagating wave field  $\psi(x, z, t)$ . Knowing the Fourier transform of the boundary forcing,

$$Q_\psi(x_0, k_z) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0, z, t) e^{-ik_z z} dz, \quad (4.7)$$

leads to complete description of the radiated wave field for  $x > x_0$  :

$$\psi(x, z, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_\psi(x_0, k_z) e^{i(k_x x + k_z z)} \delta((k_x^2 + k_z^2)\omega^2 - N^2 k_x^2) dk_z dk_x, \quad (4.8)$$

assuming that only right-propagating waves (i.e.  $k_x \geq 0$ ) are possible.

In practice, the novel wave generator we consider forces only the horizontal velocity field in a controlled manner, i.e.

$$\psi(0, z, t) = u(0, z, t) = \text{Re} \{ U(z) e^{-i\omega t} \}. \quad (4.9)$$

As such, we expect the Fourier transform of this boundary condition to act only as a guide for the nature of the radiated wave field, since it is not clear how the fluid will respond to forcing of a single field variable. Throughout the paper, we perform the Fourier transform along a specific direction using the Fast Fourier Transform algorithm. To compare spectra from theoretical, numerical and experimental profiles with the same resolution, a cubic interpolation (in space) of the experimental wave field is used if needed.

Unless otherwise stated, the experimental and numerical results presented are filtered in time at the forcing frequency  $\omega$ . The aim is to consider harmonic (in time) internal waves for which we can define the Fourier decomposition in (4.5), and to improve the signal-to-noise ratio, which lies in the range  $10^2 - 10^1$ , with the best results for shallow beam angles and small amplitude forcing. The time window  $\Delta t$  used for the filtering is such that  $\omega\Delta t/2\pi \geq 9$  for  $A_0 = 0.005$  m and  $\omega\Delta t/2\pi \geq 4$  for  $A_0 = 0.035$  m (where  $A_0$  is the amplitude of motion of the plates defined in 4.3.1), ensuring sufficient resolution in Fourier space for selective filtering. The recording was initiated at time  $t_0$  after the start-up of the generator such that  $Nt_0/2\pi \simeq 30 \gg 1$ , ensuring no transients remained. [123].

### 4.3 Plane waves

Since many theoretical results for internal waves are obtained for plane waves [e.g. 119, 120, 18], the ability to generate a good approximation of a plane wave in a laboratory

setting is important to enable corresponding experimental investigations. In order to generate a nominally plane wave, however, one must consider the impact of the different physical constraints of the wave generator, which include : the controlled forcing of only one velocity component by the moving plates, the finite spatial extent of forcing, the discretization of forcing by a finite number of plates, the amplitude of forcing, and the direction of wave propagation with respect to the camshaft axis of the generator. In this section, we present the results of a systematic study of the consequences of these constraints ; a summary of the experiments is presented in table 4.2.

### 4.3.1 Analysis

Two-dimensional, planar internal waves characterized by their wave vector  $\vec{k} = (k_x, k_z)$  take the form  $\psi(x, z, t) = \text{Re} \{ \psi_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \}$ , where  $\psi(x, z, t)$  represents a field variable. Being of infinite extent is an idealization that is never realizable in an experiment. To investigate the consequences of an internal wave generator being of finite extent, the horizontal velocity boundary conditions used to produce a downward, right-propagating, nominally plane wave can be written as :

$$u(0, z, t) = \text{Re} \left\{ [\Theta(z + W/2) - \Theta(z - W/2)] A_0 \omega e^{i(-\omega t + k_e z)} \right\}, \quad (4.10)$$

where  $k_e > 0$  is the desired vertical wave number,  $\lambda_e = 2\pi/k_e$  the corresponding vertical wavelength,  $-W/2 \leq z \leq W/2$  the vertical domain over which forcing is applied,  $A_0$  the amplitude of motion of the plates, and  $\Theta$  the Heaviside function. The spatial Fourier transform of (4.10) is :

$$Q_u(0, k_z) = A_0 \omega \frac{W}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc} \left( \frac{(k_z - k_e)W}{2} \right), \quad (4.11)$$

with  $\text{sinc}(x) = \sin x/x$  the sine cardinal function. In the limit  $W \rightarrow \infty$ , Eq. (4.11) approaches a delta function, which is the Fourier transform of a plane wave. Owing to the finite value of  $W$ , however,  $Q_u(0, k_z)$  does not vanish for negative values of  $k_z$ , suggesting that (4.10) will also excite upward propagating plane waves. Following the convention usual in optics that  $Q_u(0, k_z)$  is negligible for  $|k_z - k_e|W/2 \geq \pi$ , if  $k_e \gg 2\pi/W$  then (4.6) is reasonably satisfied.

Another consideration is that the forcing provided by the wave generator is not spatially continuous, but discretized by  $N_p$  oscillating plates of width  $\ell$ . Accounting for this, the boundary forcing can be written as :

$$u(0, z, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{j=0}^{N_p-1} [\Theta(z - z_j) - \Theta(z - z_j + \ell)] A(z_j) e^{i(k_e z_j + k_e \ell/2 - \omega t)} \right\}, \quad (4.12)$$

where  $z_j = j\ell - W/2$  and  $N_p\ell = W$ . The Fourier transform of (4.12) for the specific case of constant amplitudes  $A(z_j) = A_0\omega$ ,  $\forall j \in \{0, \dots, N_p - 1\}$ , reduces to

$$Q_u(0, k_z) = A_0\omega \frac{\ell}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{k_z\ell}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(k_z - k_e)W}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(k_z - k_e)\ell}{2}\right)}, \quad (4.13)$$

a classical result often encountered for diffraction gratings. Consequently, the magnitudes of  $W$  and  $\ell$  in comparison to the desired vertical wavelength  $\lambda_e = 2\pi/k_e$  characterize the spread of the Fourier spectrum and the potential for excitation of upward propagating waves.

In the following sections, we quantify the downward emission of waves using the parameter  $\beta_d$ , defined as :

$$\beta_d = \frac{\int_0^{+\infty} |Q_u(x_0, k_z)|^2 dk_z}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Q_u(x_0, k_z)|^2 dk_z}, \quad (4.14)$$

which is essentially the ratio of the total kinetic energy of the downward-propagating waves to the total kinetic energy of the radiated wave field.

### 4.3.2 Configuration

The MIT facility was used for these plane wave experiments (see table 4.1). A variety of different configurations were tested and these are summarized in table 4.2. The fluid depth was  $H = 0.56 \pm 0.015$  m and the background stratification was  $N = 0.85$  rad s<sup>-1</sup> for all experiments. An example configuration of the cams (amplitude and phase evolution) is presented in figure 4.3. Plane waves were produced by configuring the  $N_p$  plates of the wave generator with an oscillation amplitude  $A_0 = 0.005$  m, with the exception of experiments 13 to 15 for which  $A_0 = 0.035$  m. Results were obtained for different forcing frequencies corresponding to propagating angles of 15, 30, 45 and 60°. Visualization of the wave field was performed using PIV, for which it was possible to observe the wave field in a 40 cm-wide horizontal domain over the entire depth of the tank, save for a 1 cm loss near the top and bottom boundaries due to unavoidable laser reflections. The corresponding numerical simulations were configured accordingly.

	#	Experiment/Simulation	Forcing	$M$	$W/\lambda_e$	$A_0$ (mm)	$\theta$ (deg.)
Common case	1	exp./sim.	partial	12	3	5.0	15
Forcing	2	sim.	complete	12	3	5.0	45
Angle	3	exp./sim.	partial	12	3	5.0	30
	4	exp./sim.	partial	12	3	5.0	45
	5	exp./sim.	partial	12	3	5.0	60
	6	sim.	partial	12	3	5.0	75
Width	7	exp./sim.	partial	12	2	5.0	15
	8	exp./sim.	partial	12	1	5.0	15
	9	exp./sim.	partial	12	2	5.0	45
	10	exp./sim.	partial	12	1	5.0	45
Discretization	11	sim.	partial	$\infty$	3	5.0	15
	12	exp./sim.	partial	4	3	5.0	15
Amplitude	13	exp./sim.	partial	12	3	35.0	15
	14	exp.	partial	12	3	35.0	30
	15	exp.	partial	12	3	35.0	45

TABLE 4.2 – Summary of experiments and numerical simulations.  $M$  is the number of plates used for one wavelength,  $W/\lambda_e$  is the spatial extent of forcing expressed in terms of the dominant wavelength,  $A_0$  is the eccentricity of the cams, and  $\theta$  is the energy propagation angle. For complete forcing,  $u$ ,  $w$  and  $b$  were forced at the boundary.

### 4.3.3 Results

#### 4.3.3.1 Forcing

The consequences of forcing only a single component of the velocity field, which we call *partial forcing*, in comparison to forcing both the velocity field components and the buoyancy field (assuming they are related by the inviscid linear wave equation), which we call *complete forcing*, were investigated first using the numerical simulations. Here, we present the results of simulations performed using a sinusoidal boundary wave form with  $W = 3\lambda_e$ ,  $M = 12$  and  $\lambda_e = 78.8$  mm (experiments 2 and 4 of table 4.2). The magnitude and frequency of the boundary condition for horizontal velocity were  $A_0 = 5.0$  mm and  $\omega = 0.601$  rad s<sup>-1</sup>, the latter giving  $\theta = 45^\circ$ .

Figures 4.4(a) and (b) present snapshots of the horizontal velocity fields  $u$  produced by partial and complete boundary forcing, respectively, and there is excellent qualitative agreement between the two. More quantitative comparisons are provided in figure 4.4(c), which presents data along the vertical cuts  $\mathcal{C}$  indicated in figures 4.4(a) and (b), located at  $x_{\mathcal{C}} = 0.05$  m; this location was chosen because it is close enough to the generator that viscous damping has only an order 1% effect on the wave field (based on the linear viscous theory for plane waves by [67]), yet is sufficiently far from the generator to allow the wave field to adapt to the boundary forcing. The cross beam profiles in figure 4.4(c) show the amplitude of  $u$  is roughly 20% lower for the case of partial forcing compared to

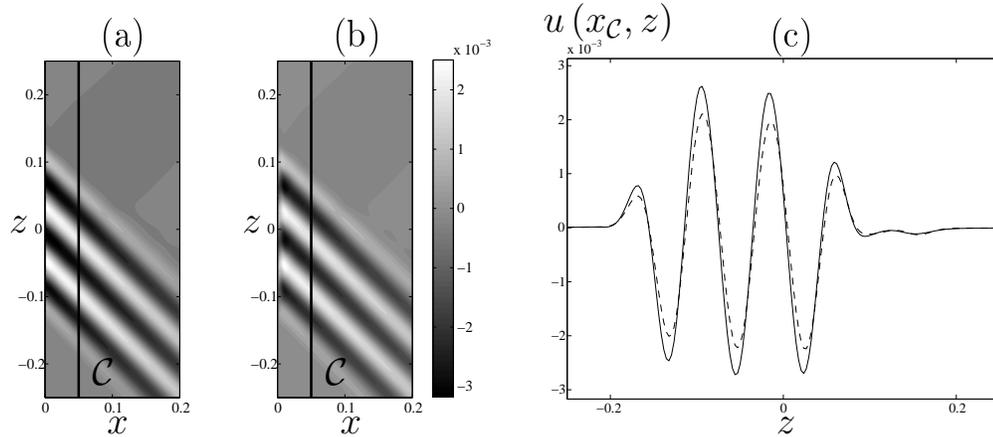


FIGURE 4.4 – Comparison of the numerically obtained horizontal velocity field,  $u$ , for plane wave beams forced by (a) complete and (b) partial forcing (experiments 2 and 4 in table 4.2). (c) Horizontal velocity along the cut  $\mathcal{C}$  in (a) and (b), located at  $x_{\mathcal{C}} = 0.05$  m for complete (—) and partial (---) forcing. All lengths are in m and all velocities in  $\text{m s}^{-1}$ .

complete forcing, but otherwise their forms closely match. Spectral information reveals no other discernable difference between the two, and both cases give  $\beta_d > 0.99$ , compared to the theoretical prediction of  $\beta_d = 0.97$ , revealing that almost all the energy is being emitted downward. Qualitatively and quantitatively similar results to those presented in figures 4.4(c) and (d) were obtained for different physical quantities (e.g.  $w$  and  $b$ ) of the wave fields, and for the other configurations of the generator listed in table 4.2.

### 4.3.3.2 Angle of emission

As one might expect, the quality of the wave field was best for shallower propagation angles, for which the horizontal velocity is a more defining quantity, and degraded for steep propagation angles, where  $w$  becomes the dominant velocity component. This is demonstrated in a qualitative manner by figures 4.5(a)-(d), which present snapshots of the experimental horizontal velocity fields for  $\theta = 15, 30, 45$  and  $60^\circ$ , corresponding to experiments 1, 3, 4 and 5 in table 4.2, respectively. Although the forcing velocity  $u = A_0\omega$  is strongest for  $\theta = 60^\circ$ , the wave field resulting from this partial forcing is not as strong and coherent as those at lesser angles.

Another demonstration of the consequences of partial forcing is given in figure 4.6, which presents the efficiency of the wave generator as a function of the forcing frequency for experiments and numerics. The efficiency is defined as the magnitude of the horizontal velocity component  $u$  (figure 4.6(a)), or the velocity in the direction of wave propagation  $u'$  (figure 4.6(b)), averaged over the central 0.1 m of the cut  $\mathcal{C}$  across the wave field, compared to the forced horizontal velocity  $A_0\omega$ . For complete forcing, one expects the ratio  $u/A_0\omega$  to

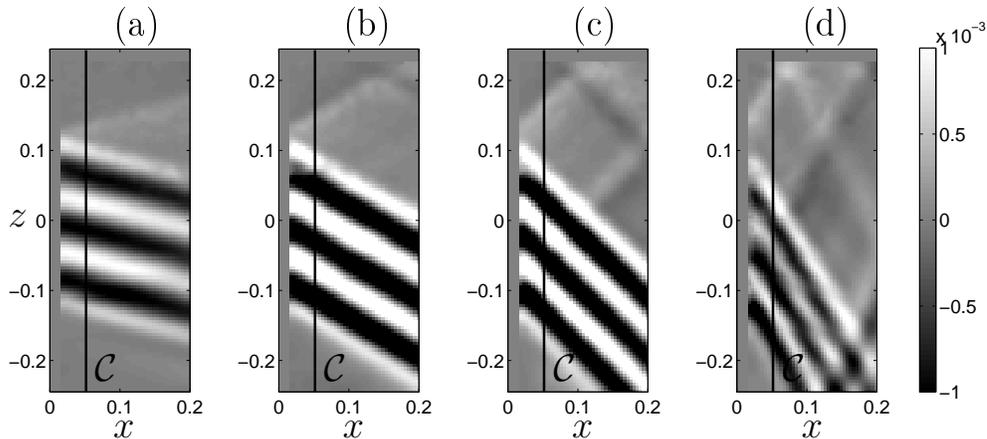


FIGURE 4.5 – Experimental horizontal velocity fields  $u$  for different forcing frequencies corresponding to angles of propagation (a)  $\theta = 15^\circ$ , (b)  $30^\circ$ , (c)  $45^\circ$  and (d)  $60^\circ$ . These are experiments 1, 3, 4 and 5 in table 4.2, respectively. All lengths are in m and all velocities in  $\text{m s}^{-1}$ .

be one, whereas a smaller value indicates a less efficient mechanism. The results show that both  $u/A_0\omega$  and  $u'/A_0\omega$  decrease with increasing  $\omega/N$ . A simple physical argument for the decay of the response with the propagation angle could be that the generator provides an initial amount of kinetic energy that is redistributed by the flow into both horizontal and vertical motions. If all the energy is appropriately distributed, we expect  $u' = A_0\omega$ , and thus  $u = A_0\omega \cos \theta = A_0\omega \sqrt{1 - (\omega/N)^2}$ , represented by solid lines in both panels of figure 4.6. Below  $(\omega/N)^2 = 0.5$  the experiments and numerics follow this trend quite closely, but then depart from it significantly for higher frequency ratios. Also plotted as dashed lines in figure 4.6 is the relation  $u' = A_0\omega \cos \theta$ , implying  $u'/A_0\omega = \sqrt{1 - \omega^2/N^2}$  and  $u/A_0\omega = 1 - \omega^2/N^2$ , which does a reasonable job of capturing the trend of the results, especially at higher frequency ratios. This relation implies that the energy associated with the motion of the plates along the direction of propagation is primarily responsible for setting the strength of the wave field.

Finally, we analyze the evolution the wave field with increasing angle by computing  $\beta_d$ . For these experiments, the Fourier analysis in section 4.3.1 predicts  $\beta_d = 0.97$ , independent of the angle of emission. Although the numerical values concur with this prediction, with  $\beta_d > 0.99$  for all angles, we obtain values of 0.99 for  $\theta = 15^\circ$ , 0.98 for  $\theta = 30^\circ$  and  $45^\circ$ , and 0.93 for  $\theta = 60^\circ$  for the experiments. One possible reason for this decrease in efficiency is the finite-amplitude lateral displacement of the plates of the generator, which could partially block the propagation of steeper waves; this is not taken into account in the numerics. Another possible reason is that at higher frequency of forcing the Reynolds number for the oscillating plates is larger, increasing the likelihood of more complex dynamics near the oscillating plates and thereby weakening their coupling to

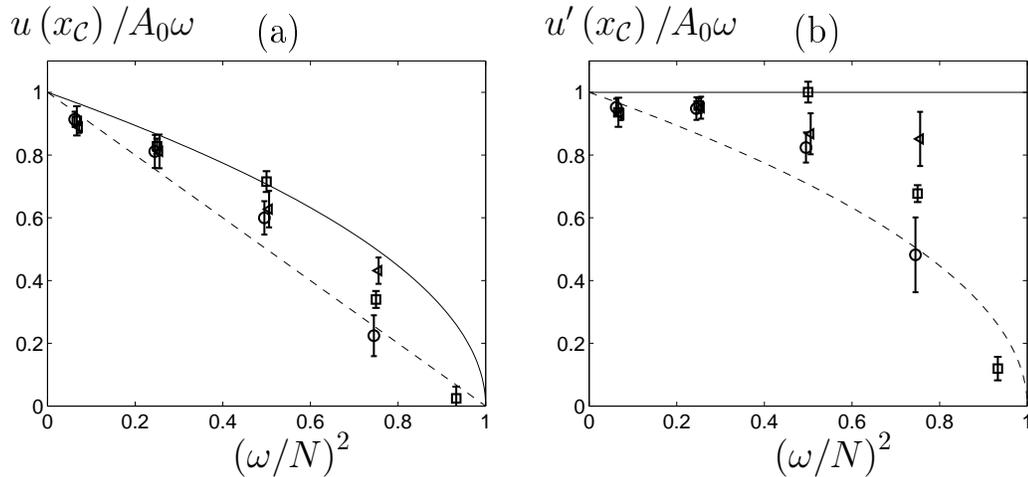


FIGURE 4.6 – Comparison of numerical results ( $\square$ ) and experimental results for the vertical ( $\circ$ ) and tilted ( $\triangleleft$ ) wave generator for the mean amplitude and standard deviation of (a)  $u/A_0\omega$  and (b)  $u'/A_0\omega$ . Results are plotted as a function of  $(\omega/N)^2$  for different frequencies corresponding to  $\theta = 15, 30, 45, 60$  and  $75^\circ$  (numerics only). The solid lines correspond to  $u'/(A_0\omega) = 1$  and the dashed lines to  $u'/(A_0\omega) = \cos\theta$ .

wave generation. These issues are raised again in section 4.3.3.5.

Overall, the results in this section and the previous section reveal that partial (horizontal) forcing by a vertically standing generator works well for  $\theta \leq 45^\circ$ . This gives the user the freedom to perform experiments over a range of angles without having to re-orient the generator. For larger angles, however, it would seem prudent to use a generator with its perpendicular axis tilted toward the direction of propagation. This was confirmed by a series of experiments similar to cases 1 and 3 to 5 in table 4.2, but with the generator tilted at  $15^\circ$  to the vertical; these results are also included in figure 4.6. For angles smaller than  $45^\circ$ , there is almost no difference in the efficiency of the generator, but we found that the  $60^\circ$  wave field produced by the tilted generator was noticeably stronger and more coherent than that produced by the vertically-standing generator.

### 4.3.3.3 Finite extent

The Fourier analysis in section 4.3.1 predicts that a consequence of a generator inevitably being of finite vertical extent is the production of undesirable waves that propagate in the vertical direction opposite to the principal wave field. This can be seen in both the numerical and experimental wave fields in figures 4.4 and 4.5, which contain a weak, upward-propagating wave field in addition to the principal downward-propagating wave field. Experiments were therefore performed for  $W/\lambda_e = 1, 2$  and  $3$  to investigate how the strength of the undesirable wave field was influenced by the vertical restriction of the

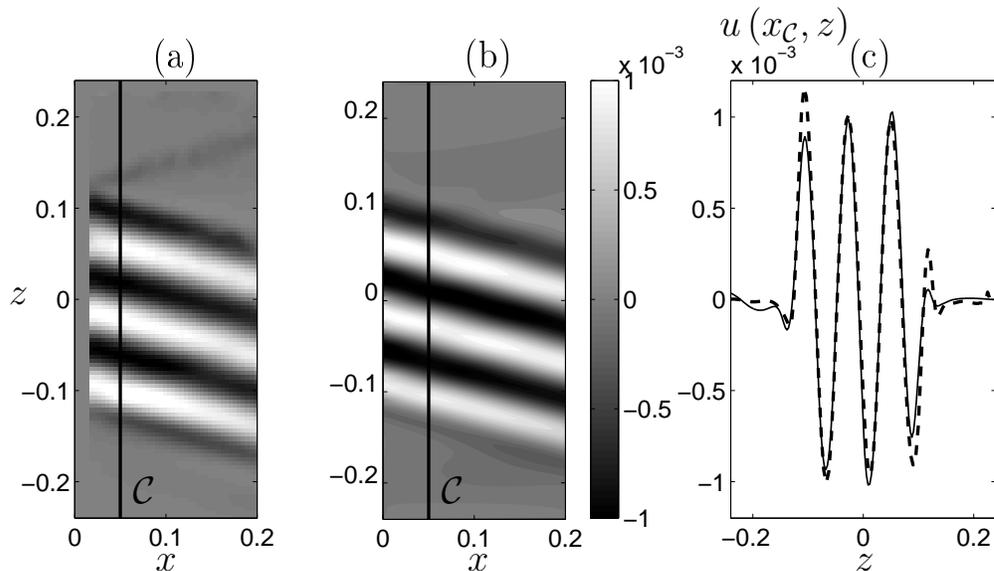


FIGURE 4.7 – Horizontal velocity fields for (a) experiment and (b) simulation for experiment 1 in Table 4.2. (c) Vertical profiles along the cut  $\mathcal{C}$  located at  $x_{\mathcal{C}} = 0.05$  m for the experiment (---) and the simulation (—). All lengths are in m and all velocities in  $\text{m s}^{-1}$ .

forcing, and to determine how well this was predicted by simple Fourier analysis. Except for varying  $W/\lambda_e$  and having  $\theta = 15^\circ$ , the configuration was the same as in the previous subsection. The experiments are listed as experiments 1, 7 and 8 in table 4.2.

A direct comparison of experimental and numerical horizontal velocity fields for  $W/\lambda_e = 3$  is presented in figure 4.7, demonstrating very good agreement between the two, providing confirmation that our numerical approach can reliably model the horizontal forcing provided by the plates. The profiles presented in figure 4.7(c), obtained at the vertical cuts indicated in figures 4.7(a) and 4.7(b), have only one small, but noticeable, difference : slightly higher peaks at either end of the experimental velocity profile. A similar level of agreement was obtained for the vertical velocity profile.

The normalized experimental spatial Fourier spectra  $Q_u(x_{\mathcal{C}}, k_z)$  at  $x_{\mathcal{C}} = 0.05$  m and the normalized theoretical spectra  $Q_u(0, k_z)$  are presented in figure 4.8. A standout feature of the results is that the theoretical Fourier transform does a remarkably good job of predicting the spectrum of the experimental wave field. For  $W/\lambda_e = 1$ , the spectrum is broadly centered around the expected vertical wavenumber  $k_e = 79.9 \text{ m}^{-1}$ , and this principal peak becomes increasingly sharp for  $W/\lambda_e = 2$  and 3. This evolution is quantified by the half width  $\delta k$ , defined as the width of the principal spectral peak at half peak amplitude, the values of which are listed in table 4.3 for the three different configurations.

Another notable feature of the spectra is that strength of the upward propagating wavefield ( $k_z < 0$ ) significantly decreases with increasing  $W/\lambda_e$ . Computing the parameter  $\beta_d$  for experimental and numerical cases 1, 7 and 8 of table 4.2 quantifies this trend. As

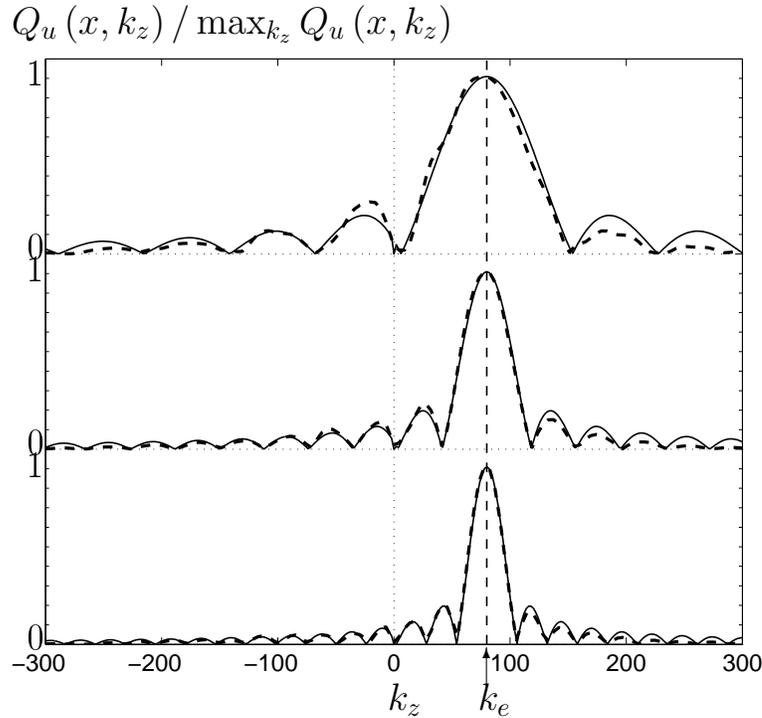


FIGURE 4.8 – Comparison between spatial spectra  $Q_u(x, k_z)$  computed from the experiments (—) at station  $x_c = 0.05$  m and the theoretical expression (---) computed from (4.13) on the boundary  $x = 0$ , for  $W = \lambda_e$  (top),  $W = 2\lambda_e$  (middle) and  $W = 3\lambda_e$  (bottom).

seen in table 4.3, 98% of the energy propagates in the desired direction for  $W/\lambda_e \geq 2$ . Furthermore, we computed  $\delta k/k_e$  and  $\beta_d$  for cases 4, 9 and 10 of table 4.2 too, and the results presented in table 4.3 show that the influence of the width is more significant than the influence of the angle of emission.

#### 4.3.3.4 Discretization

To study the impact of spatially discretized, rather than continuous, forcing, experiments were performed for  $W/\lambda_e = 3$  with  $M = 4$  and  $M = 12$ ; these being experiments 12 and 1 in table 4.2. For comparison, corresponding numerical simulations were also performed for these two configurations, as well as for the idealized case  $M \rightarrow \infty$ , which is listed as experiment 11 in table 4.2 and corresponds to forcing discretized on the scale of the grid resolution in the numerical simulations.

Snapshots of the experimental and numerical wave fields for  $M = 4$  are presented in figures 4.9(a) and 4.9(b), respectively, while figure 4.9(c) presents vertical cuts of the horizontal velocity field at  $x_c = 0.05$  m for these two data sets. Even for this coarse discretization, there is still a remarkably smooth and periodic wave field that looks little

$\frac{W}{\lambda_e}$	$\delta k/k_e$ (15°)			$\beta_d$ (15°)			$\delta k/k_e$ (45°)			$\beta_d$ (45°)		
	num.	exp.	theo.	num.	exp.	theo.	num.	exp.	theo.	num.	exp.	theo.
1	1.67	1.11	1.21	0.97	0.94	0.94	1.31	1.08	1.21	0.97	0.92	0.94
2	0.58	0.57	0.60	0.99	0.97	0.96	0.61	0.58	0.60	0.99	0.96	0.96
3	0.37	0.39	0.40	0.99	0.99	0.97	0.40	0.39	0.40	0.99	0.98	0.97

TABLE 4.3 – Relative half width,  $\delta k/k_e$ , and relative energy of the downward propagating wave,  $\beta_d$ , for cases 1, 7 and 8 of table 4.2, corresponding to a propagation angle of 15°, and experiments 4, 9 and 10 for a propagation angle of 45°.

different to that obtained using  $M=12$  (see figure 4.7). And once again there is good agreement between experiment and numerics, with the slight exception of the outer edges of the profile where the numerical peaks are a little larger amplitude.

Although the cross-section of the emitted downward-propagating, nominally plane wave looks reasonable, the discretization does induce more of an undesired upward-propagating wave, which can clearly be seen in figures 4.9(a) and 4.9(b). Fourier spectra for experiments, numerics and theory corresponding to  $M=4$ , 12 and  $\infty$  are presented in figure 4.10 and, as predicted by (4.13), the strength of the negative wave numbers noticeably increases with decreasing  $M$ . Most notably, for  $M = 4$  (corresponding to  $\ell = 19.6$  mm) the discretization introduces a peak around  $k_z = -235(\pm 4)$  m<sup>-1</sup>, which is strongest in the theoretical spectrum but nevertheless evident in the experimental and numerical spectra. By analogy with the theory of optical gratings, this value is in good agreement with the canonical formula  $2\pi/\lambda_e - 2\pi/\ell = -241$  m<sup>-1</sup>, which can also be inferred from (4.13) when  $\ell \ll \lambda_e$ . For all three cases the principal peak remains sharp, with  $\delta k/k_e = 0.42$ . The value of  $\beta_d$  is 0.96 when  $M = 4$ , so a vast majority of the energy is still in the downward propagating wave field.

#### 4.3.3.5 Amplitude

All the results presented thus far have been for  $A_0 = 5.0$  mm. To investigate the impact of a significantly larger amplitude of forcing on the quality of the radiated wave field, we performed a series of experiments with the same parameters as experiments 1, 3 and 4, with the exception of  $A_0 = 35.0$  mm; they are listed as experiments 13 to 15 in table 4.2.

We found that the qualitative level of agreement between experiment and numerics for snapshots of the wave field was comparable to that presented in figure 4.7(a) and (b). When a more quantitative comparison is made, however, some consequences of the higher-amplitude forcing become apparent. For example, for vertical cuts located at  $x_c = 0.075$  m the amplitude of the horizontal velocity component in the experiments was  $4.4 \pm 0.9$  mm s<sup>-1</sup>, compared to  $5.50 \pm 0.25$  mm s<sup>-1</sup> in the numerical simulations. We

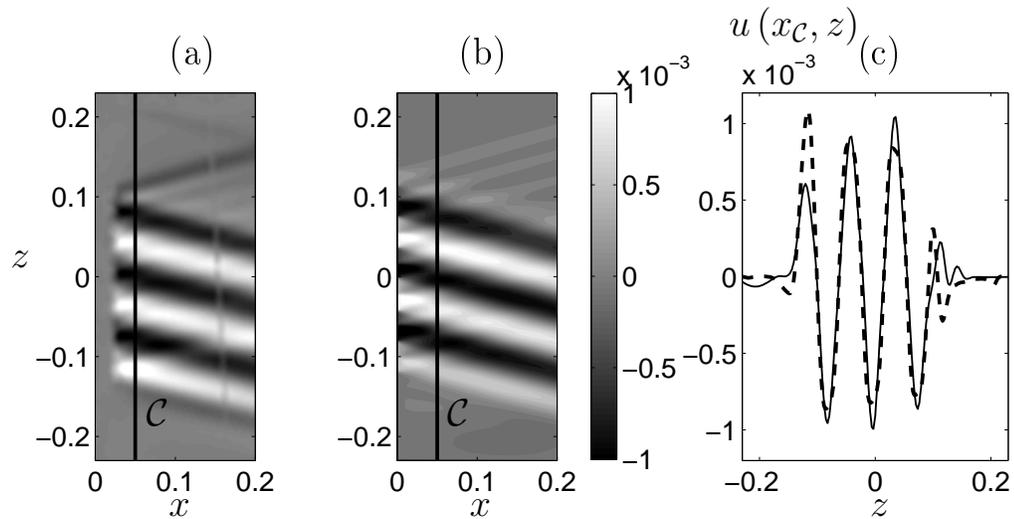


FIGURE 4.9 – Horizontal velocity fields for (a) experiment and (b) simulation for case 12 in Table 4.2 with  $M = 4$ . (c) Vertical profiles along the cut  $\mathcal{C}$  located at  $x_C = 0.05$  m for the experiment (---) and the simulation (—). All lengths are in m and all velocities in  $\text{m s}^{-1}$ .

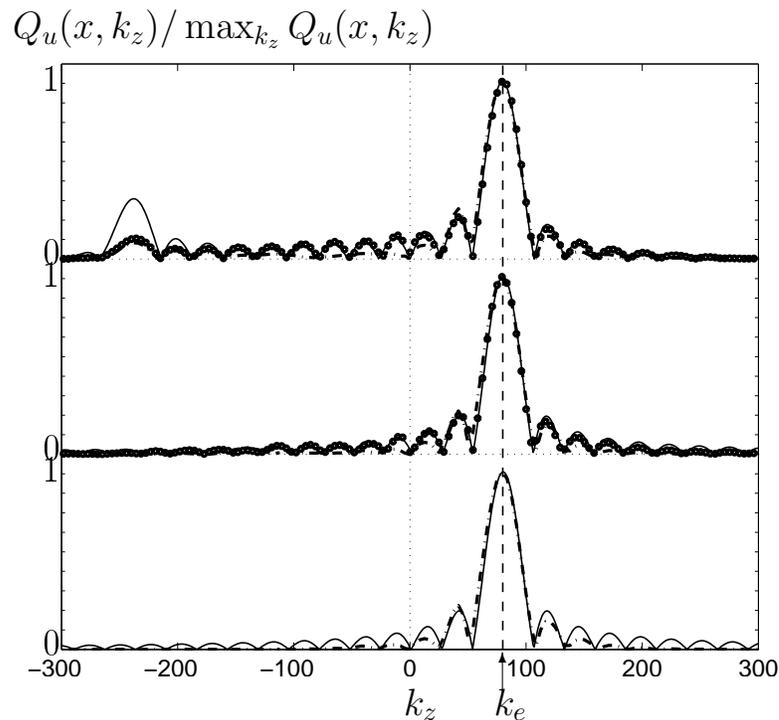


FIGURE 4.10 – Comparison between spatial spectra  $Q_u(x, k_z)$  computed from the experiments ( $\circ$ ) and numerical simulations ( $-\cdot$ ) at station  $x_C = 0.05$  m, and the theoretical expression ( $-$ ) computed from (4.13) on the boundary  $x = 0$ , for  $M = 4$  (top), 12 (middle) and  $\infty$  (bottom).

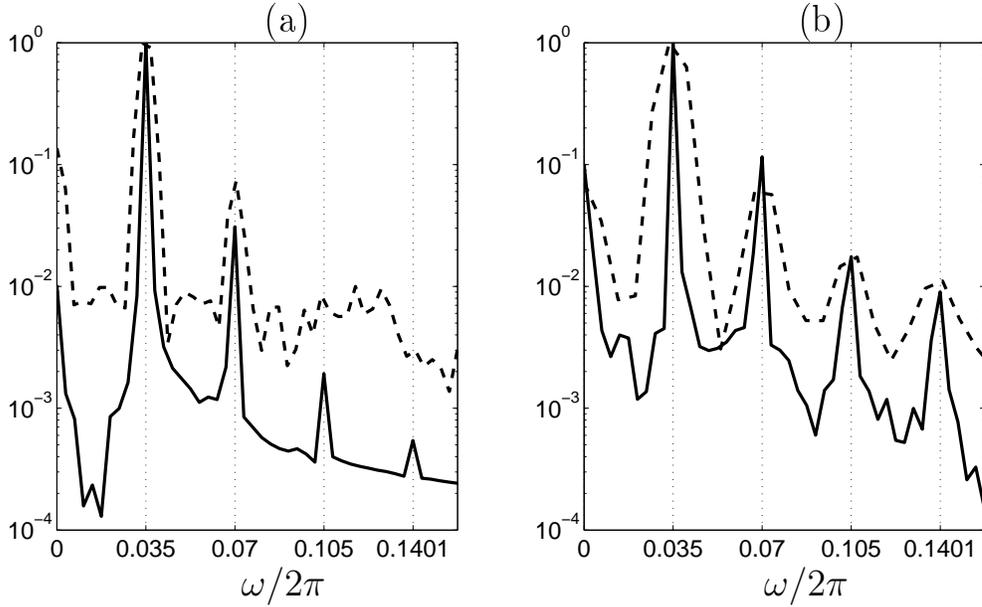


FIGURE 4.11 – Vertically-averaged temporal Fourier spectra of horizontal velocity normalized by their maximum amplitude. The data was obtained from cuts at  $x_c = 0.075$  m for (a)  $A_0 = 0.005$  m and (b)  $A_0 = 0.035$  m, for experiments (---) and numerics (—).

also note that although the forcing amplitude was increased by a factor of 7, in the experiments the wave amplitudes only increased by a factor of around 5. We must indicate that we had to make these, and later, comparisons, for a vertical cross section further away from the generator than in our previous studies because the much larger amplitude motion of the plates created a more intense wave field very close to the generator, where it was not possible to get reliable experimental data.

Figure 4.11 presents vertically-averaged temporal spectra of the horizontal velocity for the cuts at  $x_c = 0.075$  m, for both small and large amplitude forcing. The numerical data, being at somewhat higher temporal resolution, has a lower noise level than the experimental data. Both experimental and numerical spectra display the same qualitative change; the large amplitude forcing introduces more significant higher harmonic content into the wave field.

The normalized spatial spectra of the wave field for frequencies corresponding to  $\theta = 15, 30$  and  $45^\circ$  are presented for both small and large amplitude forcing in figure 4.12. The angle of emission does not seem to significantly impact the quality of the wave field for the small amplitude forcing, but this is not so for the larger amplitude forcing, for which we find that  $\beta_d$  decreases from 0.97 to 0.94 for  $\theta = 15^\circ$  and  $30^\circ$ , respectively (although  $\delta k/k_e = 0.38$  remains constant). For  $\theta = 45^\circ$  and  $A_0 = 35.0$  mm, the generator no longer generates a clean plane wave, the main peak being centered around  $41.5 \text{ m}^{-1}$  and  $\beta_d = 0.80$ . The cause of this breakdown is not easy to discern. One hypothesis is that

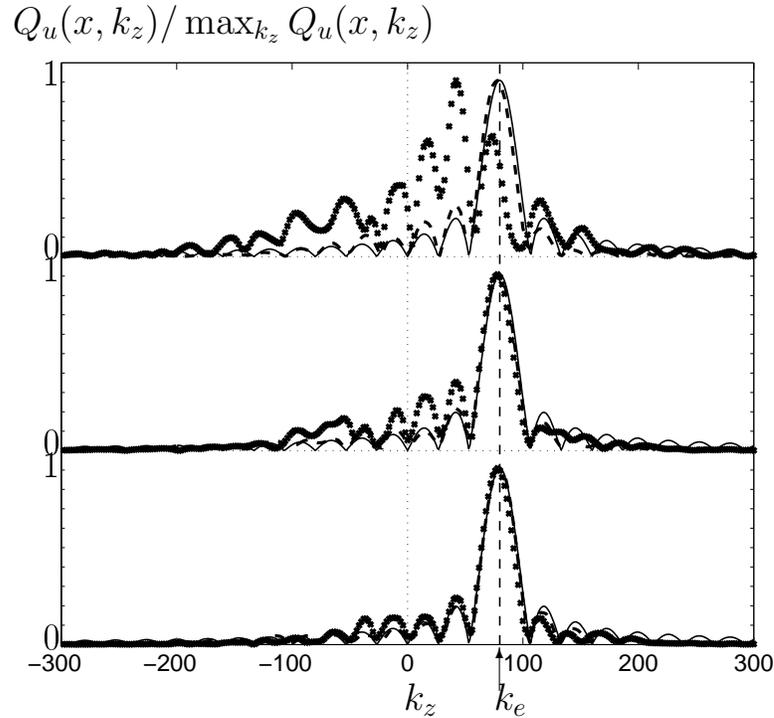


FIGURE 4.12 – Comparison between spatial spectra  $Q_u(x, k_z)$  computed from the experiments with  $A_0 = 0.035$  m ( $\times$ ) and  $A_0 = 0.005$  m ( $---$ ) at station  $x_C = 0.075$  m and the theoretical expression ( $-$ ) computed from (4.13) on the boundary  $x = 0$ , for  $\theta = 45^\circ$  (top),  $30^\circ$  (middle) and  $15^\circ$  (bottom).

breakdown occurs at criticality, when the angle of wave propagation exceeds the maximum slope angle of the face of the generator,  $\theta_m = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\pi A_0}{\lambda_e}\right)$ . The reason is not as simple as this, however, since  $\theta_m = 20^\circ$  for the experiments with  $A_0 = 35.0$  mm, and yet the generator is still an efficient source of plane waves for  $\theta = 30^\circ$ . Other factors, such as the nonlinear coupling between the plates and the wave field, as characterized by the Reynolds number of the plate motion, would also seem to play a role.

#### 4.3.4 Summary

Through a systematic series of experiments, listed in Table 4.2, we can draw several conclusions about the ability of the novel wave generator to generate plane waves. We find that the spatial Fourier transform of the profile of the wave generator can reasonably predict *a priori* the spectrum of the radiated wave field. If more comprehensive resources are available, a numerical simulation with boundary forcing applied at  $x=0$  can reliably reproduce the emitted wave field for small-amplitude forcing. As one might expect, the spectrum of the wave field becomes increasingly sharp about the dominant wavelength,

and thus more akin to a plane wave, as the number of wavelengths excited increases, and even a very crude spatial discretization of the desired wave form produces a remarkably smooth and coherent wave field. For large amplitude forcing, the main impact is an increase of the harmonic content of the wave field. Overall, we conclude that a vertically-standing wave generator produces a radiated wave field of high quality provided  $\theta \leq 45^\circ$ .

## 4.4 Wave Beams

Wave beams are a common feature of internal wave fields in both laboratory experiments [102, 43] and geophysical settings [64, 72], since they are readily generated by periodic flow relative to an obstacle, be it a cylinder or an ocean ridge for example. We choose to investigate the so-called Thomas–Stevenson profile [117], a viscous self-similar solution of (4.2) that can be considered as the far-field limit of the viscous solution of elliptic cylinder oscillating in a stratified fluid [56]. It has been shown that this profile describes oceanographically relevant internal wave beams far from their generation site at the continental shelf [43]; after their reflection at the bottom of the ocean, such wave beams are thought to be the cause of solitons generated at the thermocline [see 92, 35, for instance].

### 4.4.1 Analysis

Consider a downward-propagating, right-going beam at angle  $\theta \in [0, \pi/2]$  with respect to the horizontal, here  $\theta$  being defined to be positive in a clockwise sense. Let  $\xi = x \cos \theta - z \sin \theta + l$  and  $\eta = x \sin \theta + z \cos \theta$  be the coordinates parallel and transverse to the wave beam, respectively, with  $l$  corresponding to the distance from the point source to the origin of the cartesian frame at the center of the active region of the generator. At leading order, the parallel and transverse velocity components and buoyancy fields of the Thomas–Stevenson profile are :

$$u'(\xi, \eta, t) = u_0 \left( \frac{\xi N^2 \sin \theta}{g} \right)^{-2/3} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty k \exp(-k^3) \exp \left( ik\alpha \frac{\eta}{\xi^{1/3}} - i\omega t \right) dk \right\}, \quad (4.15a)$$

$$v'(\xi, \eta, t) = u_0 \left( \frac{\xi N^2 \sin \theta}{g} \xi \alpha^{3/2} \right)^{-2/3} \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^\infty k^3 \exp(-k^3) \exp \left( ik\alpha \frac{\eta}{\xi^{1/3}} - i\omega t \right) dk \right\}, \quad (4.15b)$$

and

$$b(\xi, \eta, t) = Nu_0 \left( \frac{\xi N^2 \sin \theta}{g} \right)^{-2/3} \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^\infty k \exp(-k^3) \exp \left( ik\alpha \frac{\eta}{\xi^{1/3}} - i\omega t \right) dk \right\}, \quad (4.15c)$$

where  $u_0$  is the amplitude of the horizontal velocity and  $\alpha = (2N \cos \theta / \nu)^{1/3}$ .

In principle, to most accurately reproduce (4.15) one should tilt the generator and configure the profile of the forcing plates to match the transverse profile of the Thomas-Stevenson beam. As stated earlier, however, we consider a vertically-standing wave generator, since one will typically want to investigate several wave beam angles in an experiment and reconfiguring the system for each angle is impractical. Thus we seek to reproduce the profile (4.15) by using only the longitudinal velocity profile (4.15a), instead of the true horizontal velocity profile, to prescribe the forcing at  $x=0$ , i.e.

$$u(0, z, t) = u'(l, z, t). \quad (4.16)$$

This is an approximation of the exact solution, which will become increasingly valid with decreasing  $\theta$ . For a given viscosity, stratification and forcing frequency that determine  $\alpha$ , equation (4.16) sets effective values for the parameters  $l$  and  $u_0$  in (4.15).

#### 4.4.2 Configuration

The experiments were performed using the ENS Lyon generator (see table 4.1) with a background stratification  $N = 0.82 \text{ rad s}^{-1}$  and forcing frequencies  $\omega = 0.20 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $0.44 \text{ rad s}^{-1}$  and  $0.58 \text{ rad s}^{-1}$ , corresponding to propagation angles of  $14^\circ$ ,  $32^\circ$  and  $44^\circ$  respectively. The arrangement used twenty-one plates to discretize the profile at  $x = 0$ , thirteen of which covered the 9 cm active region. Based on the results of section 4.3.3.4, this level of discretization is expected to be sufficient to resolve the structure of the wave beam. The configuration of the cams (amplitude and evolution of the phase) is depicted in figure 4.3, with the maximum amplitude of oscillation being 10 mm.

Experimental visualizations were performed using the Synthetic Schlieren method, which gives direct measurements of the gradient of the buoyancy field. For the following study, we integrate this data and compare the measured buoyancy field with the analytical model (4.15c) and numerical results. For these simulations, the numerical domain was 0.80 m long and 0.60 to 1.01 m high, with a vertical resolution  $\Delta z = 0.79 \text{ mm}$ . The forcing on the boundary was discretized on the scale of the numerical grid.

#### 4.4.3 Results

A direct comparison between experimental and numerical buoyancy fields for  $\theta = 14^\circ$  is presented in figure 4.13. There is close qualitative agreement between the two, and it

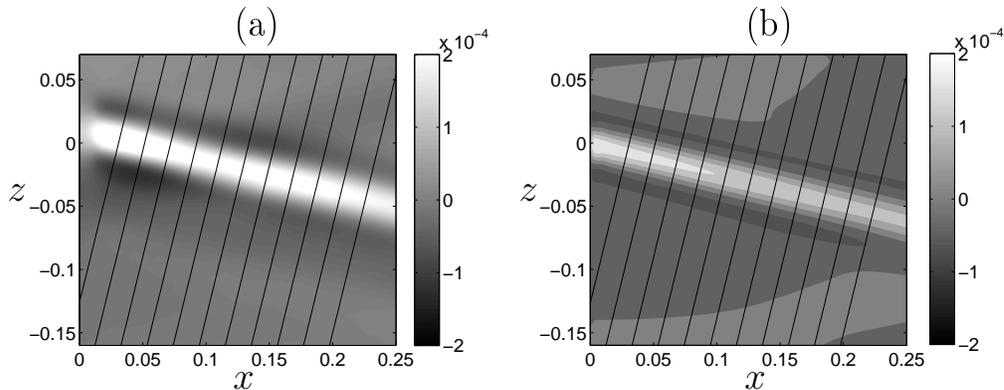


FIGURE 4.13 – Buoyancy field  $b(x, z, t)$  for a  $14^\circ$  Thomas–Stevenson beam. Black lines are the transverse cuts used in figure 4.14 to compare with the model. (a) Experimental and (b) numerical buoyancy fields are in  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ .

is notable that there is no visible sign of any upward propagating beam coming from the generator, due to the highly resolved, smooth boundary conditions that were used. For a vertical cut at  $x_c = 0.05$  m of the vertical component of the density gradient,  $\partial_z b$ , we find that  $\beta_d = 0.98$  for the experiments and  $\beta_d = 0.99$  for the numerics. We note that the maximum values of  $\partial_z b$  are around 2% of the background stratification, and so the wave field can reasonably be considered linear. Analysis of temporal spectra confirmed that harmonics were at least one order of magnitude smaller than the fundamental signal.

For a more quantitative comparison with the self-similar solution of Thomas–Stevenson, we investigate the buoyancy field extracted along the cuts indicated in figures 4.13(a) and (b). Specifically, we consider the normalized transverse profiles :

$$\frac{b(\eta/\xi^{1/3})}{b_m(\xi)} = \frac{\int_0^\infty k \exp(-k^3 + ik\alpha\eta/\xi^{1/3}) dk}{\int_0^\infty k \exp(-k^3) dk}, \quad (4.17)$$

where

$$b_m(\xi) = \max_{\eta} b(\xi, \eta, 0) = Nu_0 \left( \frac{\xi N^2 \sin \theta}{g} \right)^{-2/3} \int_0^\infty k \exp(-k^3) dk \quad (4.18)$$

is the maximum amplitude of the buoyancy perturbation (4.15c) along a transverse cut, which lies at the center of the beam ( $\eta = 0$ ). The results are presented in figure 4.14(a) and (b), where it can be seen that both the experimental and numerical results evolved spatially in a self-similar manner, with only small differences compared to the analytical model.

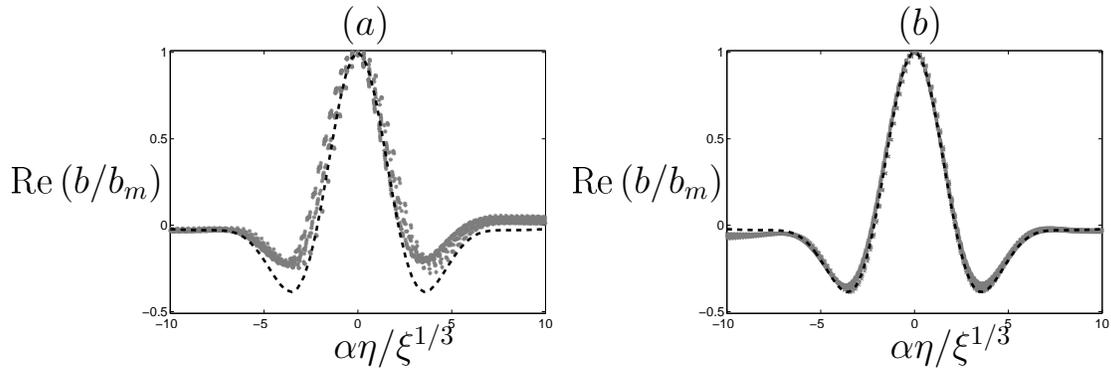


FIGURE 4.14 – Real parts of the normalized transverse profiles  $b/b_m$  as defined in (4.17) for (a) experiments and (b) numerical simulations as a function of  $\alpha\eta/\xi^{1/3}$  for the case  $\theta = 14^\circ$ . Asterisks correspond to the different cuts in figure 4.13, the dashed line corresponds to the analytical solution in (4.17).

We also confirmed the ability of the generator to produce wave beams for some steeper angles, by performing experiments for  $\theta = 32^\circ$  and  $\theta = 44^\circ$ . Comparisons with the analytical solution revealed the same level of agreement as for the  $\theta = 14^\circ$  wave beam. The wave generator still emitted a beam in only one direction, and the experimental values of  $\beta_d$  were 0.99(8) for  $\theta = 32^\circ$  and 0.99(8) for  $\theta = 44^\circ$ , with no discernable change in the value of  $\beta_d$  for the numerical simulations.

#### 4.4.4 Summary

On the basis of this study, we conclude that the novel wave generator is capable of producing a wave beam structure of a desired form, which demands excitation of a prescribed Fourier spectrum. We have demonstrated this for the example of the Thomas–Stevenson profile, and speculate that although it is not necessary, perhaps even closer agreement with theory can be obtained using a tilted generator.

## 4.5 Vertical modes

Vertical internal wave modes play an important role in our current understanding of internal tides in the ocean [32]. To date, however, there has been little progress in producing high-quality vertical modes in laboratory experiments. [118] generated a mode-1 disturbance by oscillating a flap hinged about a horizontal axis at mid-depth; and [96] produced low modes in an essentially two-layer system with a thermocline, but neither of these approaches can readily produce arbitrary modes in an arbitrary stratification. Generalized forcing of a spectrum of vertical modes was obtained by [21], who used an

oscillating Gaussian topography to generate an internal wave field, and developed a robust algorithm for extracting modal amplitudes from experimental data. Here, we demonstrate the ability of the novel wave generator to reliably produce arbitrary internal wave modes.

### 4.5.1 Analysis

For a stratified fluid of constant  $N$ , the horizontal velocity field associated with the  $n^{\text{th}}$  vertical mode of frequency  $\omega$  propagating from left to right is :

$$u_n(x, z, t) = \text{Re} \left[ u_0 \cos \left( \frac{n\pi z}{H} \right) \exp \left( i \frac{n\pi}{H \cot \theta} x - i\omega t \right) \right], \quad (4.19)$$

where  $u_0$  is a complex amplitude that sets both magnitude and phase,  $n$  is a positive integer,  $z = 0$  and  $z = H$  are the bottom and top boundaries, respectively, and  $\theta$  is the first-quadrant angle that satisfies the dispersion relation (4.1). Note that  $\theta$  does not specify the direction of energy propagation for a vertical mode and only plays a part in setting the horizontal wavenumber [39].

The idealized boundary forcing of the horizontal velocity at  $x = 0$  to excite the  $n^{\text{th}}$  vertical mode is :

$$u(0, z, t) = a \cos \left( \frac{n\pi z}{H} \right) \cos(\omega t), \quad (4.20)$$

where  $a$  is an arbitrary amplitude. To analyze the quality of the wave field generated by this forcing, instead of Fourier transforms one uses modal analysis, which is equivalent to Fourier series in a constant stratification. The horizontal velocity component of the resulting wave field can be written as :

$$u(x, z, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi z}{H} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{H \cot \theta} - \omega t + \phi_n \right), \quad (4.21)$$

where  $a_n$  and  $\phi_n$  are the strength and the phase of the  $n^{\text{th}}$  mode respectively. Similar results exist for other physical variables, including vertical velocity and buoyancy fields.

From a practical point of view, one decomposes the experimental generated wave field at a fixed  $x$  location into the vertical basis modes using the numerical algorithm described and implemented in [21]. The modal decomposition is then performed at several other  $x$  locations, and the variations in  $a_n$  and  $\phi_n$  across various  $x$  locations gives an estimate of the experimental errors in the results. One can reliably correct for viscous dissipation of the modes, if needs be, by introducing in (4.21) a multiplicative term of the type  $e^{-f_n x}$ , with

$$f_n = \frac{\nu n^3}{2\omega} \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 \left[ \frac{N^2}{N^2 - \omega^2} \right]^2 \quad (4.22)$$

being the spatial damping rate [118, 21]. In our experiments,  $f_n$  is very small (roughly  $10^{-4} \text{ m}^{-1}$  for mode-1 and  $10^{-3} \text{ m}^{-1}$  for mode-2) and hence viscous dissipation can be neglected.

The discretization results for plane waves in section 4.3.3.4 suggest that there could be limitations on the ability to resolve a vertical mode due to the discretization of the wave generator. By computing the modal decomposition of the discrete plate arrangement, we find that provided at least  $3n$  equispaced plates are used to represent the  $n^{\text{th}}$  mode, then more than 95% of the boundary forcing is contained in the  $n^{\text{th}}$  mode. To ensure good quality of the generated wave field also requires one to account for the approximation that the boundary forcing of horizontal velocity occurs at a fixed  $x$  location even though the plates are actually moving. For this approximation to hold, the ratio of the maximum amplitude of oscillations of the plates to the horizontal wavelength corresponding to the  $n^{\text{th}}$  mode should be much smaller than unity, i.e.  $nA_0/(2H \cot \theta) \ll 1$ . Provided these two conditions are satisfied, a high-quality wave field is to be expected.

## 4.5.2 Configuration

The MIT facility was used for the experiments with  $N_p = 64$  of the total 82 plates (see table 4.1). Individual vertical modes were produced by configuring the  $N_p$  plates of the wave generator to reproduce (4.20). The amplitude of oscillation of the  $j^{\text{th}}$  plate centered at vertical position  $z_j = j\ell/2$  of mode  $n$  was  $A(z_j) = A_0 \cos(n\pi z_j/H)$ , with  $\ell$  being the plate thickness (see Fig. 4.3 for more details of the configuration). Experiments were performed for modes 1 and 2. The spatial resolution of the forcing, relative to the vertical wavelength of the mode being forced, was  $1/64$  in both experiments. The fluid depth was  $H = 0.416 \text{ m}$ , the maximum amplitude of oscillation was  $A_0 = 2.5 \text{ mm}$  and the stratification was  $N \simeq 0.85 \text{ rad s}^{-1}$ . Visualization of the wave field was performed using PIV technique. Using this arrangement it was possible to observe the wave field in a 45 cm-wide horizontal domain and covering the full depth of the tank. No corresponding numerical simulations were performed in this case.

## 4.5.3 Results

We present detailed results for mode-1 and mode-2 wave fields with  $\theta=45^\circ$ , for which the horizontal wavelengths excited were  $k_x = 7.55 \text{ m}^{-1}$  and  $k_x = 15.1 \text{ m}^{-1}$ , respectively. Snapshots of the wave fields obtained in the vicinity of the generator are presented in figure 4.15. One can clearly see the characteristic structure of a single vortex that covers the entire vertical domain for mode-1 (figure 4.15(a)), whereas for mode-2 the structure comprises stacked pairs of counter rotating vortices (figure 4.15(b)).

Modal decomposition of the experimental wave fields was performed at 81  $x$ -locations

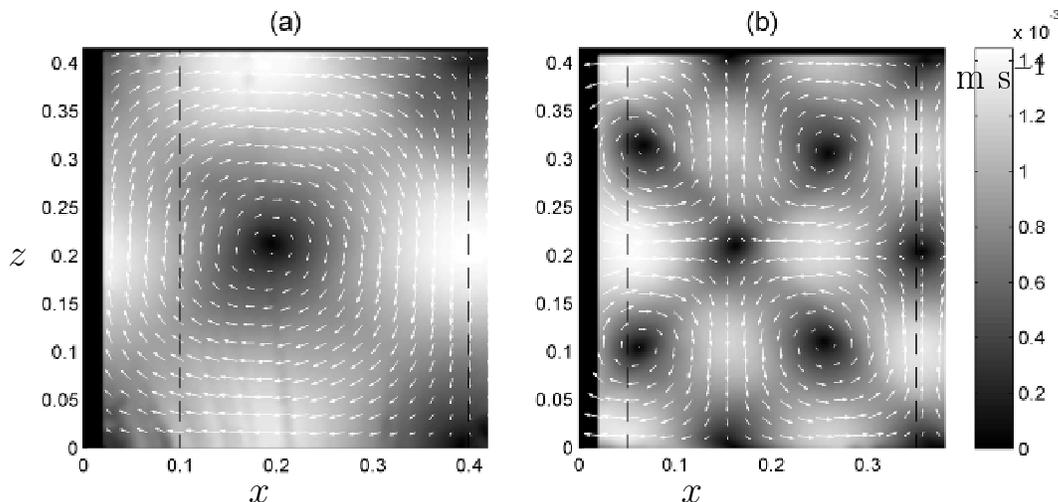


FIGURE 4.15 – Snapshots of experimental velocity fields for (a) mode-1 and (b) mode-2. The location of the wave generator is  $x = 0$  and the vertical dashed lines bound the domain over which modal decomposition is performed. The  $x$  and  $z$  coordinates are in meters and the grey scale is the velocity magnitude in  $\text{m s}^{-1}$ . Arrows indicate local velocity direction.

in the regions bounded by the vertical dashed lines in figures 4.15(a) and 4.15(b), and the results are presented in figure 4.16. Since the maximum values of both  $u$  and  $w$  were the same for these  $\theta = 45^\circ$  wave fields, reliable values of  $a_n$  and  $\phi_n$  were obtained from both components of the velocity field. The two wave fields were clearly dominated by their mode number, with by far the largest detectable amplitude being for modes-1 and modes-2 in the two respective experiments, and with very little variability across the experimental domain, emphasizing the weak impact of viscosity in these experiments. We also observed very little variability in the phase of the dominant mode across the visualization window, implying that the wave fields were highly spatially coherent. Since energy flux scales as  $a_n^2/n$  ([21]) over 98.8 % of the energy was in the desired mode in each experiment. The efficiency of conversion, defined as  $a_n/A\omega$ , was 0.89 and 0.78 for the two experiments. The insets in figure 4.16 present the vertically-averaged temporal Fourier spectrum of  $u$ . These are dominated by the fundamental frequency, demonstrating that very little higher-harmonic content was generated by nonlinearity.

#### 4.5.4 Summary

Overall, these experiments reveal that the novel wave generator is capable of producing very high-quality radiating vertical modes in a linear stratification. For smaller angles (i.e. lower frequencies),  $\theta = 15^\circ$  for example, we found that the wave field took longer horizontal distances to evolve into established modal solutions, presumably due to the longer horizontal wave lengths of the modes. For higher frequencies,  $\theta = 60^\circ$  for

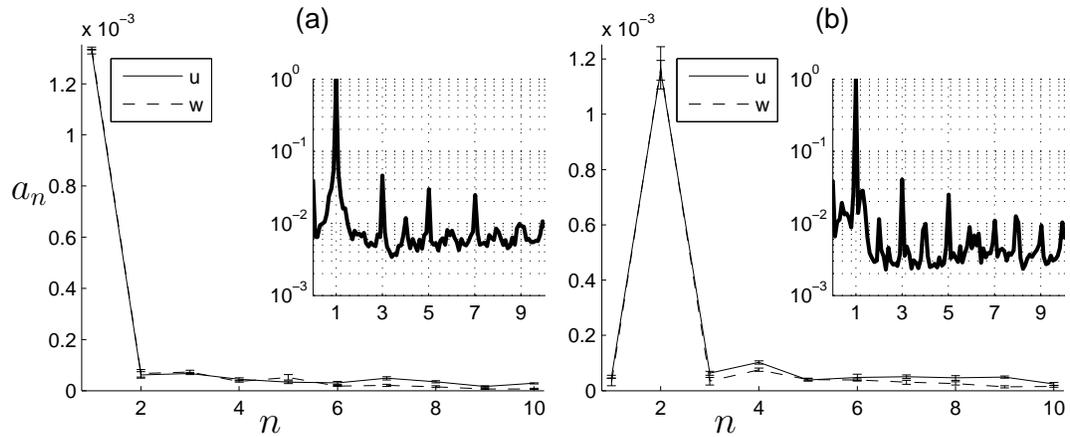


FIGURE 4.16 – Modal decompositions of the wave fields presented in (a) figure 4.15(a), and (b) figure 4.15(b). Error bars are the standard deviation of modal amplitude for the 81 vertical cross-sections studied between the dashed lines in figure 4.15. The insets show vertically averaged absolute value of the temporal Fourier spectra of  $u$  at  $x = 10$  cm and  $x = 5$  cm in (a) and (b), respectively.

example, we observed high-quality modal solutions within our visualization window, but with a small variation in the dominant modal strength for mode-2, possibly due to nonlinear effects. For higher angles, therefore, it would seem prudent to decrease the maximum amplitude of oscillations and/or reduce the stratification  $N$  (allowing for lower forcing frequency) in an effort to produce as clean a wave field as possible. In principle, this approach can be extended to experiments with nonlinear density stratifications, provided the stratification is known *a priori* so that the generator can be configured for the appropriate vertical structure of the horizontal velocity field.

## 4.6 Conclusions

Through combined experimental, numerical and theoretical studies we have demonstrated that the novel type of internal wave generator, comprising a series of stacked, offset plates, can reliably shape the spatial structure of an experimental internal wave field and enforce wave propagation. This approach is similar in spirit to multiple-paddle techniques that have been developed for generating *surface* waves [see 88, for instance]. We have demonstrated the ability of the generator to produce three qualitatively-different types of wave field : plane waves, wave beams and vertical modes. This new technology therefore provides a very useful tool to study all manner of internal wave scenarios in the laboratory, in order to gain insight into geophysically important problems. Furthermore, our studies reveal that the Fourier transform of the spatial profile of the wave generator provides a reasonably accurate prediction of the form of emitted wave field, making it a

useful tool when designing experiments.

There are numerous examples of where this new found capability can now be utilized. For example, observations in several locations, in particular in the Bay of Biscay [93, 92], have determined that an internal tidal beam striking the thermocline is responsible for the generation of solitons. A full understanding of the generation mechanism has yet to be achieved, however, and laboratory experiments using the Thomas–Stevenson beam profile impinging on a thermocline could provide significant insight. Indeed, the interaction of wave beams with nonlinear features in the density stratification is of widespread interest [74], since this is also relevant to how and where atmospheric internal waves break and deposit their momentum [91]. In regards to ocean mixing problems, an open issue is to determine the fate of the internal tide which, among other things, can be scattered by topography [59, 107]. The ability to directly generate vertical modes provides a new capability to study these important processes in controlled settings. Other interesting avenues for research are the generation of shear waves (McEwan & Baines 1974) and extensions to three-dimensional wave fields, which could be achieved by introducing some horizontal spatial structure (in the  $y$ -direction) to the leading edge of the moving plates.

# Chapitre 5

## Interactions entre ondes internes et topographies

### 5.1 Introduction

Comme nous l'avons présenté dans la chapitre 1, l'étude de la génération de la marée interne a permis d'estimer le flux d'énergie transmis de la marée barotrope à la marée barocline, de l'ordre de 1 TW [22]. Afin d'étudier le devenir de ces ondes émises, nous allons considérer un des mécanismes possible pour la dissipation des ondes internes, l'interaction de ces ondes avec des topographies sous-marines.

Notre approche sera double. Nous allons d'abord analyser un cas idéalisé étudiant l'interaction d'une onde plane avec une topographie simple afin d'appréhender les points importants pour la compréhension des mécanismes mis en jeu. Puis nous nous pencherons sur l'interaction de la marée interne avec des structures de taille finie, correspondant à un mécanisme plus réaliste.

Un des objectifs notamment est d'étudier la génération de structures avec de plus petites échelles spatiales que l'onde incidente, qui sont plus à même à se dissiper par des mécanismes linéaires (atténuation) et non-linéaires (raidissement, instabilité, et mélange).

Certains résultats de ce chapitre ont été publiés dans *Physics of Fluids* [78, 101].

### 5.2 Réflexion d'ondes sur une surface plane

#### 5.2.1 Cadre analytique

La réflexion des ondes internes sur une surface plane a été l'un des premiers sujets d'étude associé aux ondes internes après le mécanisme de génération des ondes, les premiers travaux remontant aux années 1960 [103]. La relation de dispersion atypique des

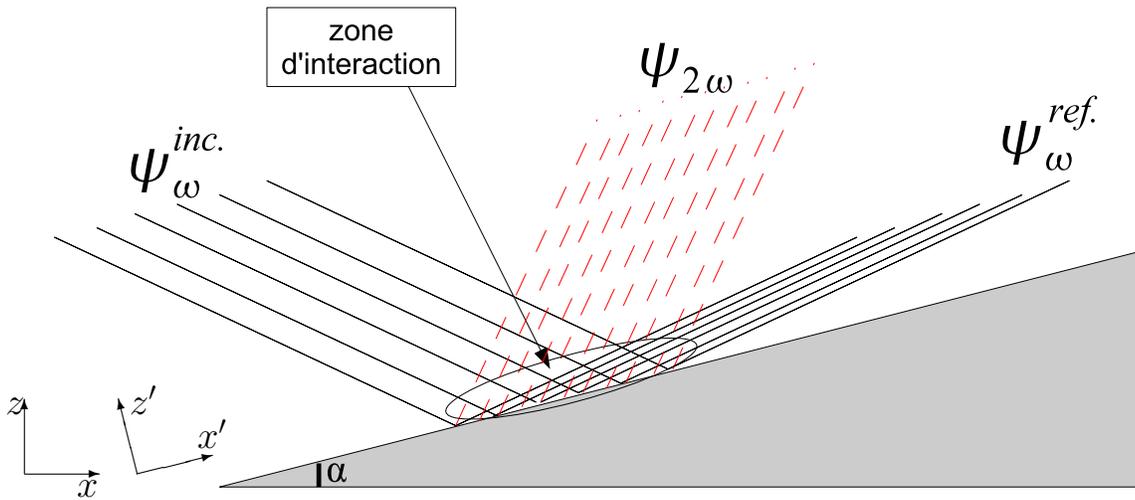


FIGURE 5.1 – Principe de la réflexion des ondes internes sur une surface plane (cas sous-critique).

ondes internes associée à leur caractère non-linéaire fait que ce sujet d'étude, bien que simple en apparence, est encore très actif. Ces deux influences sont réunies pour décrire le schéma de principe du problème étudié à la figure 5.1.

On définit la criticalité de la réflexion comme le rapport de la pente du plan incliné ( $s = \tan \alpha$ ) à celle correspondant à l'angle de propagation des ondes internes ( $\tan \theta$ ). Si on note  $\varepsilon = s / \tan \theta$  ce rapport, on peut donc avoir une pente

- $\varepsilon < 1$  sous-critique,
- $\varepsilon = 1$  critique,
- $\varepsilon > 1$  ou sur-critique,

correspondant à des réflexions sur-critique, critique et sous-critique<sup>1</sup> (cf. figure 5.3). Nous nous référerons à la convention de la topographie par la suite.

Par ailleurs, on introduit le système de coordonnées associé à la pente et correspondant à une rotation d'un angle  $\alpha$ ,  $(x', z') = (x \cos \alpha + z \sin \alpha, -x \sin \alpha + z \cos \alpha)$ , qui sera utilisé dans la suite.

### 5.2.1.1 Approche linéaire

Il est important de rappeler les propriétés de l'onde réfléchie dans le cas de la réflexion linéaire [103], sans prendre en compte l'aspect singulier de la réflexion critique. Pour une onde incidente  $\psi^{inc}$  à la pulsation  $\omega$ , de largeur  $W_{\omega}^i$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_{\omega}^i = (k_x^i, k_z^i)$  et

1. Il n'y a pas vraiment de classification standard de la criticalité, tout dépend du point de vue considéré, celui de l'onde ou celui de la topographie. On trouve donc  $\varepsilon$  et  $1/\varepsilon$  selon les études.

d'amplitude (de la fonction de courant)  $A_\omega^i$ , on détermine l'onde réfléchie  $\psi^{ref}$  en considérant l'absence de vitesse normale à la paroi (conditions aux limites à la topographie)

$$\vec{\nabla} (\psi^{inc}(x, z, t) + \psi^{ref}(x, z, t)) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{pour } z = sx, \quad (5.1)$$

où  $\vec{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$  est le vecteur normal à la pente. On peut alors vérifier que l'onde réfléchie est caractérisée par

- une pulsation  $\omega$ ,
- une largeur  $W_\omega^r = \gamma W_\omega^i$  avec  $\gamma = |\sin(\theta - \alpha) / \sin(\theta + \alpha)|$ ,
- un vecteur d'onde  $\vec{k}_\omega^r = \gamma^{-1} (k_x^i, -k_z^i)$ ,
- une amplitude  $A_\omega^r = -A_\omega^i$ ,

qui vérifie également la conservation de l'énergie (*cf.* section 2.1).

On peut faire une remarque sur la stabilité du faisceau réfléchi. Un fluide stratifié est stable si le gradient de densité est partout négatif (critère statique). L'onde incidente étant initialement stable, on voudrait vérifier que

$$\left| \frac{\partial \rho_r}{\partial z} \right| < \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \Rightarrow \frac{|\vec{k}_\omega^r|^2 \cos \theta}{N} A_r < 1. \quad (5.2)$$

On en déduit la condition de stabilité en fonction de l'onde incidente

$$\frac{|\vec{k}_\omega^i|^2 \cos \theta}{N} A_i < \gamma^2. \quad (5.3)$$

Ainsi selon les propriétés de l'onde incidente, il existe une pente  $s$  telle que l'inégalité (5.3) n'est pas vérifiée et l'onde réfléchie est alors instable.

**Couche limite visqueuse** L'approche proposée par Wunsch [126] prend également en compte les effets de couche limite visqueuse.

L'auteur considère le cas d'une onde interne (de pulsation  $\omega$ ) se propageant dans un fluide stratifié avec un fond plat incliné, et décrite par la fonction d'onde

$$\psi^{inc} = 2iA_0^i \sin \left[ \frac{q}{2} \ln \left( \frac{\tan \theta x - z}{\tan \theta x + z} \right) \right] \exp \left[ -i \frac{q}{2} \ln(\tan^2 \theta x^2 - z^2) \right], \quad (5.4)$$

avec  $q = 2n\pi / \ln(\Delta)$  où  $n$  est un entier, et  $\Delta = (\tan \theta + s) / (\tan \theta - s) = \tan \theta (1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon)$ . Il met notamment en évidence un écoulement oscillant dans cette couche limite, à la même pulsation que l'onde incidente, décrit dans le système de coordonnées associé à la

pente  $(Ox', Oz')$ , par la fonction d'onde suivante

$$\begin{aligned} \psi^{BL}(x', z', t) &= \frac{\psi_0^{BL}}{x'} \exp \left[ (-1 + i) \left( \frac{2NR(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)}{\omega} \right)^{1/2} z' \right] \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\frac{\tan \theta \sin \alpha - \cos \alpha}{\tan \theta \cos \alpha + \sin \alpha} \exp [-iq \ln(\tan \theta \cos \alpha + \sin \alpha)x'] \\ &- \frac{\tan \theta \sin \alpha + \cos \alpha}{\tan \theta \cos \alpha - \sin \alpha} \exp [-iq \ln(\tan \theta \cos \alpha - \sin \alpha)x'] \end{aligned} \right\} \quad (5.5) \end{aligned}$$

avec  $\psi_0^{BL} = \frac{iq(2\omega/N)^{1/2}R^{-1/2}A_0^i}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{1/2}(-1 + i)}$  et  $R = \frac{NH^2}{\nu}$  qui s'apparente au nombre de Reynolds. Cette solution est valable lorsque l'on est suffisamment loin de la criticalité, le critère étant  $(|\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha| > O(R^{-1/2}))$ .

**Non-linéarités, cas  $\theta \neq \alpha$  ( $\varepsilon \neq 1$ )** L'interaction des faisceaux incident et réfléchi conduit à la génération d'harmoniques à des fréquences multiples de celle de l'onde incidente ( $2\omega, 3\omega$ , etc). La contribution de Thorpe [119] sur ce sujet a permis de mettre en évidence le fait que cette interaction n'est pas toujours favorable à l'émission d'harmoniques. Lorsque les faisceaux incident et réfléchi interagissent à la réflexion sur une pente sous-critique, les combinaisons des fréquences et des nombres d'ondes peuvent être telles que la relation de dispersion pour l'harmonique forcée n'est pas vérifiée. Dans le cas sur-critique, l'interaction n'est jamais favorable.

Dans le cas général, en se basant sur la même description de l'onde incidente que précédemment, la perturbation générée au premier ordre est caractérisée dans le référentiel de la pente, par

- une pulsation  $2\omega = N \sin \theta_2 = N \sin(2 \arcsin \theta)$ ,
- un vecteur d'onde  $\vec{k}_{2\omega} = (k_x^i(1 + \gamma^{-1}), k_z^i(1 - \gamma^{-1}))$ ,
- une amplitude  $A_{2\omega}^r = O((A_\omega^i)^2)$

Il est alors possible que cette combinaison  $(2\omega, \vec{k}_{2\omega})$  ne satisfasse pas la relation de dispersion. Une onde interne vérifiant la relation de dispersion à la pulsation  $2\omega$ , donc libre de se propager, pourrait être décrite par

- une pulsation  $2\omega$
- un vecteur d'onde  $\vec{k}_{2\omega}^\ell = ((1 + \gamma^{-1})k_x^i, k_z^\ell)$ ,

tels que

$$4\omega^2 = N^2 \frac{(1 + \gamma^{-1})^2 k_x^{i2}}{(1 + \gamma^{-1})^2 k_x^{i2} + k_z^{\ell2}}. \quad (5.6)$$

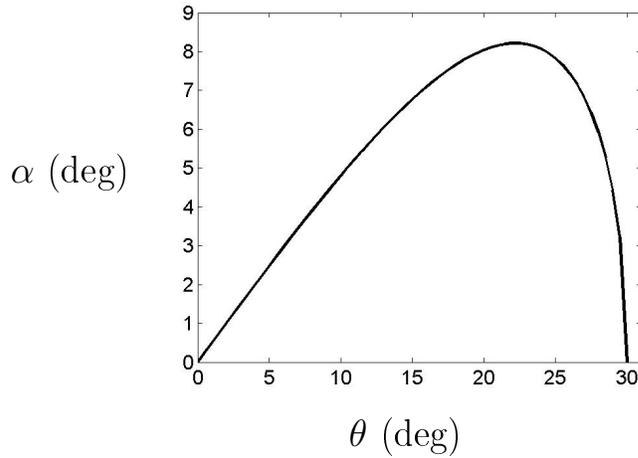


FIGURE 5.2 – Condition de résonance (5.8) pour l'émission d'harmonique à la pulsation  $2\omega$  selon Thorpe [119].

Il découle de (5.6) que

$$k_z^\ell = \pm k_x^i (1 + \gamma^{-1}) \sqrt{\frac{1 - 4 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}} \quad (5.7)$$

L'émission de la seconde harmonique est alors considérée résonnante quand la composante selon la verticale de  $\vec{k}_{2\omega}$  vaut  $k_z^\ell$ . Cette condition est vérifiée si

$$\tan \alpha = \pm \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} \sqrt{-3 + 4 \cos^2 \theta}. \quad (5.8)$$

L'équation (5.8) est représentée dans un diagramme  $(\theta, \alpha)$  à la figure 5.2. On retrouve alors le fait que deux solutions existent pour une pente  $\alpha$  donnée, dans la limite où  $\alpha \leq 8.2^\circ$ .<sup>2</sup>

Cette étude est valable pour une onde incidente plane idéale, d'extension infinie, et ne laisse rien deviner de l'extension au cas d'un faisceau de taille finie. Une approche plus récente a pour but de prendre en compte cette limitation et décrit les faisceaux de taille finie grâce à leur décomposition en série de Fourier [116]. L'approche est en apparence similaire avec celle décrite précédemment, en remplaçant simplement l'onde harmonique incidente par

$$\psi_\omega^{inc}(x', z', t) = e^{i\omega t} \int_0^\infty dl A(l) e^{-il(x' + z' \cotan(\theta + \alpha))}, \quad (5.9)$$

2. Il est étonnant que la même condition de résonance puisse être obtenue lorsqu'on considère que la composante selon l'horizontale de  $\vec{k}_{2\omega}$  est libre et que celle selon la verticale est forcée par la superposition des ondes incidentes et réfléchies. Cependant, une telle onde ne vérifie pas la bonne condition limite.

où l'on s'est placé dans le référentiel de la pente. En prenant l'exemple de l'harmonique oscillant à la pulsation  $2\omega$  comme précédemment, on peut alors écrire

$$\psi_{2\omega}(x', z', t) = e^{i2\omega t} \int_0^\infty dl B_2(l) e^{-il(x' - z' \cotan(\theta_2 - \alpha))}, \quad (5.10)$$

avec

$$B_2(l) = -\frac{i}{l \sin 2\theta_2} \int_0^\infty dz' \hat{f}_2(l, z') \left[ e^{ilz' \cotan(\theta_2 + \alpha)} - e^{-ilz' \cotan(\theta_2 - \alpha)} \right] \quad (5.11)$$

où  $\hat{f}_2$  est la transformée de Fourier selon l'axe ( $Ox'$ ) de la fonction

$$f_2(x', z') = -3i \sin \theta J(\Delta(\psi_\omega^{inc} + \psi_\omega^{ref}), (\psi_\omega^{inc} + \psi_\omega^{ref})). \quad (5.12)$$

Récemment, une vérification expérimentale et numérique [110] de ces deux modèles a conduit à montrer qu'aucune des deux théories ne décrivait complètement l'émission résonante d'harmoniques lors de la réflexion d'un faisceau d'ondes internes monochromatique d'enveloppe gaussienne de largeur  $2\lambda$ . Il est donc toujours important d'étudier ce mécanisme fondamental, notamment grâce au générateur d'onde plane qui permet un meilleur contrôle de l'onde incidente.

**Non-linéarités, cas  $\theta \simeq \alpha$  ( $\varepsilon \simeq 1$ )** Enfin, le cas de la réflexion critique est particulier puisqu'il s'agit d'un problème fortement non-linéaire, avec notamment divergence des amplitudes dans un modèle non-visqueux. L'approche de Dauxois et Young [18] permet de traiter ces problèmes par un développement multi-échelles. La prise en compte des effets non-linéaires, transitoires et visqueux permet de résoudre cette singularité et de considérer une évolution vers la turbulence induite par inversion du gradient de densité ou instabilité de cisaillement.

## 5.2.2 Expériences de réflexion sur un plan incliné

L'étude systématique de la réflexion plane est un problème qui a déjà été étudié par Gostiaux [44, 42], et nous avons souhaité nous rapprocher du cas critique seulement, dans la perspective d'identifier des structures plus complexes telles que les solibores [54] notamment. L'exploitation d'un outil développé, la transformée de Hilbert présentée à la section 3.3.1, a également permis de vérifier expérimentalement un résultat classique concernant la réflexion en retour.

Différentes séries d'expériences de réflexion plane sur un plan incliné ont été réalisées en variant les paramètres. Cependant, dans tous les cas étudiés, l'onde incidente correspond à un faisceau de type onde plane comme décrit à la section 4.3 avec un forçage de largeur  $W = 3\lambda_e$  avec  $\lambda_e = 3.6$  cm, d'amplitude d'oscillation des plaques  $A_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  m.

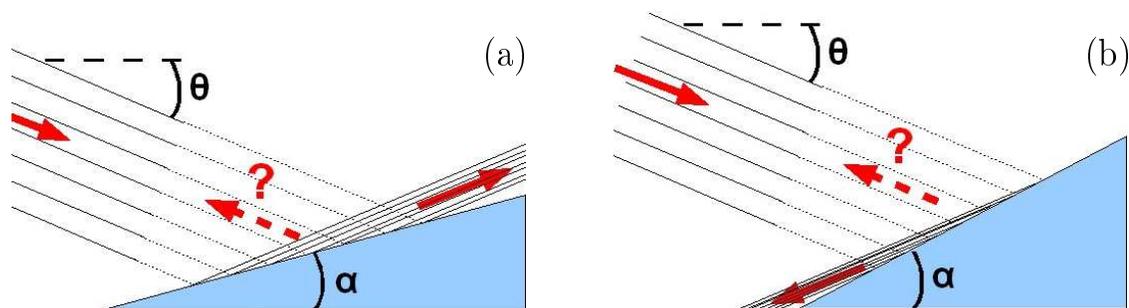


FIGURE 5.3 – Principe de la réflexion en retour des ondes internes sur une surface plane (a) sous-critique et (b) sur-critique.

### 5.2.2.1 Vérification d'un consensus

Lors de la réflexion d'une onde interne sur un fond plat, une des directions « possible »<sup>3</sup> de propagation pour le rayon réfléchi est le retour dans la direction opposée à l'onde incidente, comme illustré par la flèche en pointillé sur la figure 5.3. Cependant, la prise en compte des conditions aux limites à la paroi (cf. equation (5.1)) réfute la possibilité de cette onde réfléchie en retour dans le cas d'une surface plane.

Selon la valeur du paramètre  $\varepsilon$ , et notamment dans le cas critique  $\varepsilon = 1$ , on peut essayer de vérifier l'absence de champ réfléchi dans cette direction grâce à l'utilisation de la transformée de Hilbert. En effet, il est en général impossible de discriminer cette onde réfléchie en retour de celle incidente puisqu'elles se superposent spatialement et que leurs amplitudes peuvent être très différentes.

Les principaux paramètres des expériences réalisées, tels que la fréquence de forçage et les caractéristiques du milieu (stratification et pente), sont résumés dans la table 5.1.

Nous illustrons dans les figures 5.4 et 5.5 les champs observés par la technique de stioscopie synthétique dans les cas sur-critique (exp. 1) et sous-critique (exp. 5). Nous avons utilisé la technique de transformée de Hilbert afin de discriminer les ondes se propageant vers le bas, avec  $k_z < 0$ , des ondes se propageant vers le haut, avec  $k_z > 0$ . Cela nous permet d'identifier immédiatement la présence ou non du faisceau réfléchi en retour. Il est clair sur les figures 5.4(b) et 5.5(b) qu'aucune onde ne se propage dans la direction associée à la flèche pointillée de la figure 5.3.

À travers les différentes expériences 1 à 5, aucune onde n'a été observée dans cette direction particulière, quelque soit la valeur de  $\varepsilon$ .

Outre l'absence d'onde réfléchie en retour, les figures 5.4 et 5.5 mettent en évidence une structure spatiale particulière des ondes réfléchies. Par exemple, dans le cas de l'expérience 1 où la pente est sur-critique, le faisceau réfléchi se propage vers le bas de la pente. On observe pourtant à la figure 5.4 (b) qu'une structure localisée le long de la paroi autour de la position  $x = 0.35$  m se propage vers le haut. On peut également remarquer

3. car autorisée par la relation de dispersion.

Exp.	1	2	3	4	5
$N$ (rad s <sup>-1</sup> )	0.42	0.58	0.58	0.58	0.42
$\omega$ (rad s <sup>-1</sup> )	0.10	0.07	0.11	0.15	0.18
$\theta$ (deg)	14.0	7.0	11.4	15.1	25.0
$\alpha$ (deg)	25.5	14.5	14.5	14.5	14.0
$\theta - \alpha$ (deg)	-11.5	-7.5	-3.1	0.6	11.0
$\varepsilon$	1.91	2.11	1.28	0.96	0.53
$\text{Re} = \frac{A_0\omega\lambda_e}{\nu}$	18	12.6	19.8	27	32.4
$\gamma^2$	0.098	0.127	0.015	$4.10^{-4}$	0.092
$\frac{k_e A_0 \omega}{N}$	0.208	0.105	0.165	0.226	0.374
$ \sin^2 \theta - \sin^2 \alpha $	0.129	0.048	0.026	0.005	0.125
$R^{-1/2}$	0.006	0.008	0.007	0.007	0.005

TABLE 5.1 – Paramètres des expériences réalisées de réflexion d’un faisceau de type onde plane sur une surface plane inclinée. Le nombre de Reynolds  $\text{Re} = A_0\omega\lambda_e/\nu$  est défini à partir des caractéristique de l’onde, et est différent du paramètre  $R$  introduit en (5.5).

à la figure 5.5 (b) que l’onde interne réfléchie ne semble pas être décrite par les propriétés de la réflexion linéaire présentée à la section 5.2.1.1.

De façon plus générale, on peut distinguer

- une onde réfléchie se propageant avec un angle  $\theta$  vérifiant la relation de dispersion (4.1) mais n’étant pas décrite par la théorie de la réflexion linéaire,
- une structure oscillant à la pulsation  $\omega$  et localisée le long de la pente.

Nous nous penchons par la suite sur ces structures.

### 5.2.2.2 Écart à la réflexion linéaire

On peut observer à la figure 5.5 (b) que l’onde réfléchie a une longueur d’onde plus grande que l’onde incidente. De façon plus quantitative, on peut comparer les spectres associés à chacun des faisceaux, comme illustré à la figure 5.6. Le maximum du spectre associé au faisceau réfléchi correspond à une valeur inférieure à celui du faisceau incident. Dans le cas quasi-critique (b), aucune longueur d’onde dominante ne peut être définie.

Dans le cas étudié précédemment, nous n’avons pas vérifié si le critère de stabilité (5.3) était vérifié. On sait estimer d’après la section 4.3 le vecteur d’onde et l’amplitude de la vitesse horizontale émise. Aux fréquences considérées ( $\omega/N < 1/2$ ),  $|\vec{k}_\omega^i| = k_e/\cos\theta$  et  $u \simeq A_0\omega \cos\theta$  ce qui implique que l’amplitude de la fonction d’onde  $A_i$  vaut  $A_0\omega \cos\theta/k_e$ . On peut alors calculer les termes de l’inégalité (5.3), le terme de gauche valant  $k_e A_0\omega/N$ , et dont les valeurs sont résumées dans la table 5.1.

On constate alors que dans la plupart des expériences présentées, l’onde réfléchie

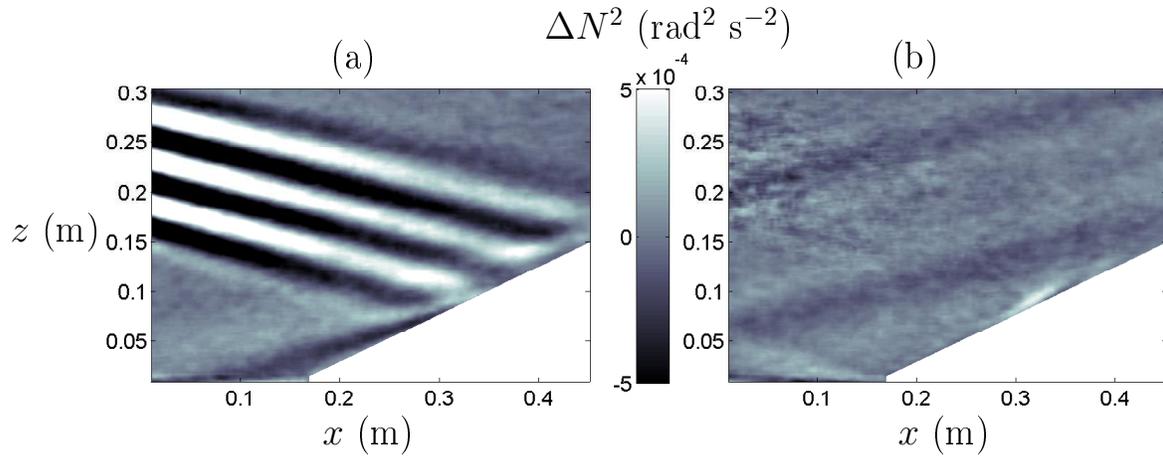


FIGURE 5.4 – (Exp. 1) Gradient vertical de densité  $\partial_z \rho'$  filtré à la pulsation  $\omega$  par transformée de Hilbert pour observer les champs d'ondes (a) se propageant vers le bas ( $k_z > 0$ ) ou (b) vers le haut ( $k_z < 0$ ) seulement.

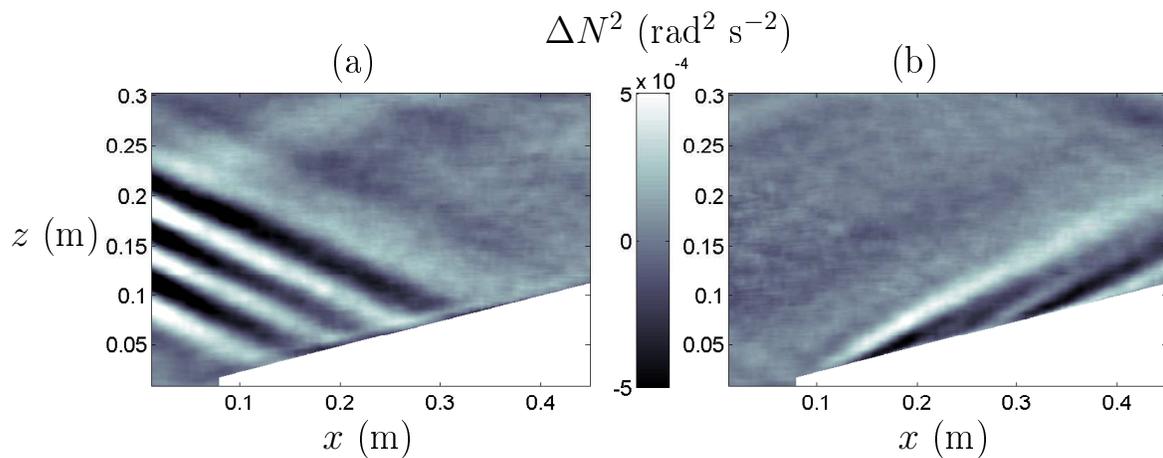


FIGURE 5.5 – (Exp. 5) Gradient vertical de densité  $\partial_z \rho'$  filtré à la pulsation  $\omega$  par transformée de Hilbert pour observer les champs d'ondes (a) se propageant vers le bas ( $k_z > 0$ ) ou (b) vers le haut ( $k_z < 0$ ) seulement.

est statiquement instable, ce qui peut justifier l'observation d'une structure inattendue. Cependant, même dans le cas de l'expérience n° 2 *a priori* stable, nous n'observons pas de structure d'onde plane réfléchi. Par ailleurs, une analyse des composantes spectrales du champ d'ondes ne mettent pas en évidence de composantes harmoniques à  $2\omega$ . L'amplitude des ondes étant assez faible, on peut supposer que l'amplitude des harmoniques est inférieure au seuil de détection de la technique de strioscopie synthétique. Leur rôle dans l'explication de la structure de l'onde réfléchi ne semble donc pas important.

Ces deux points peuvent apparaître contradictoires, il semblerait naturel d'observer des non-linéarités en présence d'instabilité statique de la stratification qui peut induire du mélange localement. Le fait que les expériences sont dans un régime à bas Reynolds

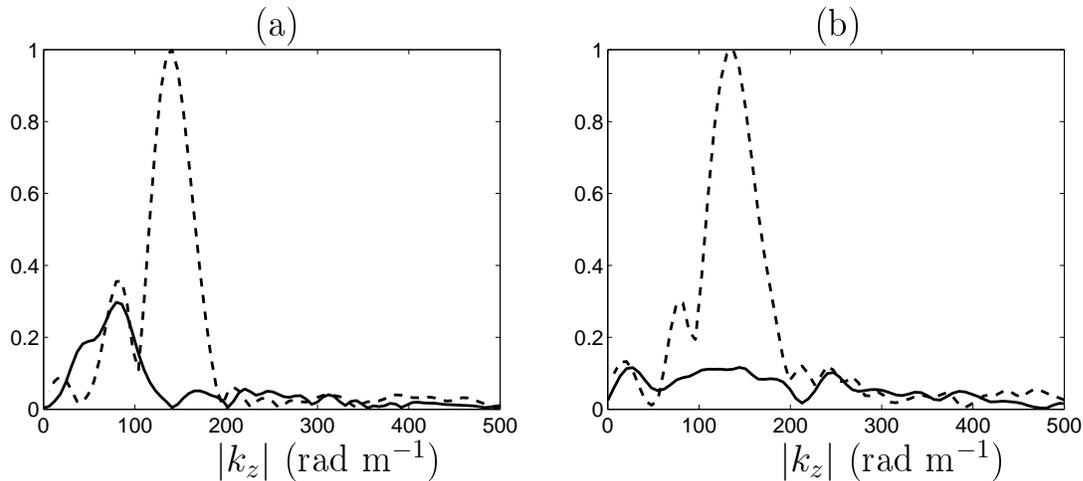


FIGURE 5.6 – Spectres verticaux du gradient vertical de densité  $\partial_z \rho'$  pour les faisceaux incident (pointillés) et réfléchi (trait continu) pour les expériences (a) 5 et (b) 4, normalisés par le maximum d'amplitude du spectre incident.

(*cf.* table 5.1) est peut-être une explication à cette observation surprenante.

**À la recherche des solibores** Selon Wunsch [126], pour une incidence suffisamment différente de la criticalité ( $|\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha| > O(R^{-1/2})$ ), une onde peut se propager dans la couche limite (*cf.* section 5.2.1.1). Bien que l'onde incidente que nous utilisons soit de nature différente de celle décrite par l'auteur, une des caractéristiques fondamentales de l'onde dans la couche limite est une extension spatiale ayant une décroissance exponentielle dans la direction transverse à la pente, et la propagation d'une phase faisant un angle  $\theta \pm \alpha$  avec la pente.

Par ailleurs, on notera que la couche limite est de l'ordre de quelques millimètres dans les expériences considérées.

Nous avons observé les expériences précédentes dans le référentiel associé à la pente, et nous avons notamment considéré l'enveloppe et la phase du signal se propageant en montant ou descendant la pente. En plus des onde incidente et réfléchie, une structure localisée très proche de la paroi est observable aux figures 5.7 et 5.8 où l'on a représenté le gradient vertical de densité dans le référentiel de la pente pour les expériences 3 et 4.

Les expériences 3 et 4 respectivement sous-critique et sur-critique, bien que toutes deux proches de la criticalité, présentent une modulation de l'amplitude des ondes se propageant vers le bas de la pente (ondes filtrées avec  $k_z > 0$ , se propageant vers les valeurs négatives de  $x'$ ). Cependant l'enveloppe des ondes remontant la pente (filtrées avec  $k_z < 0$ ), n'est pas similaire dans les deux cas. La superposition de l'onde réfléchie, se propageant vers les valeurs de  $x'$  positives peut justifier le fait que l'amplitude des ondes remontant la pente soit plus continu dans le cas de l'expérience 4.

Enfin, les images représentant la partie réelle ou la phase du gradient de densité

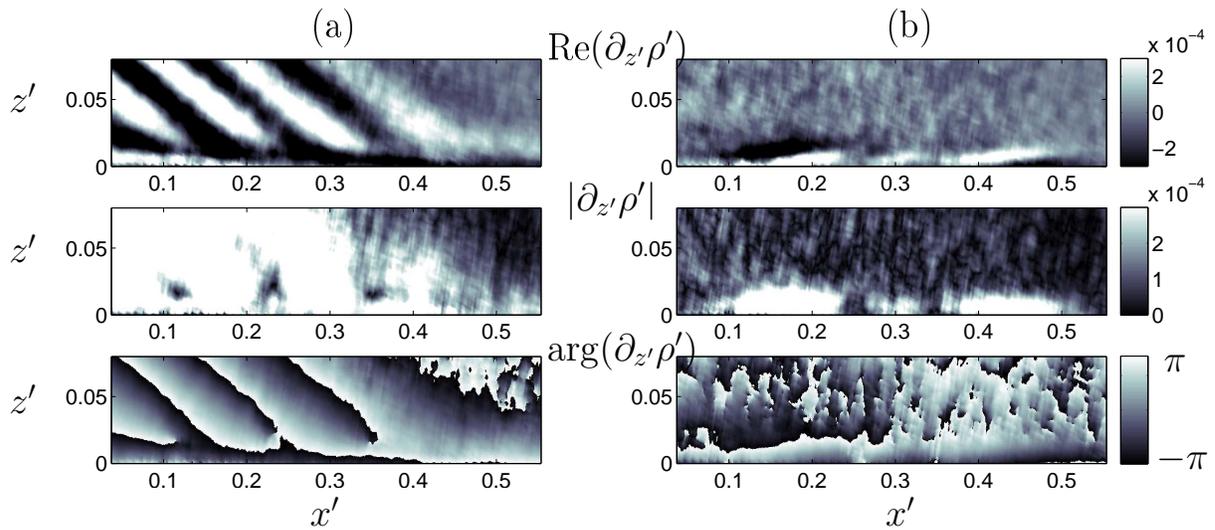


FIGURE 5.7 – (Exp. 3) Gradient vertical de densité  $\partial'_{z'}\rho'$  dans le référentiel associé à la pente ( $x'Oz'$ ), filtré par transformée de Hilbert pour observer la partie réelle, l'amplitude et la phase des champs avec (a)  $k_z > 0$  et (b)  $k_z < 0$ . Les distances sont exprimées en mètre et l'amplitude des champs en ( $\text{rad}^2 \text{s}^{-2}$ ).

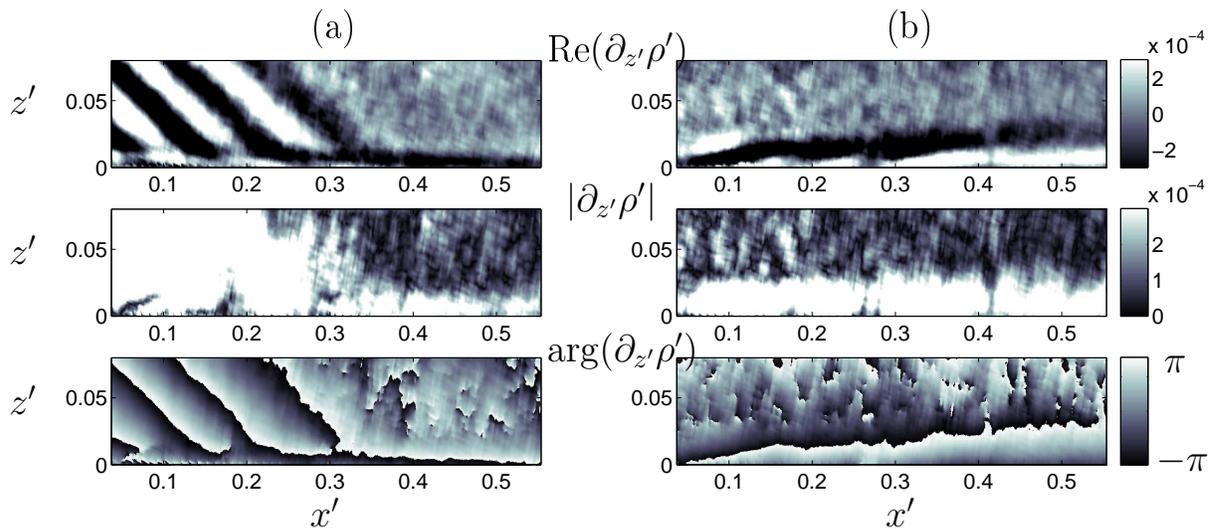


FIGURE 5.8 – (Exp. 4) Gradient vertical de densité  $\partial'_{z'}\rho'$  dans le référentiel associé à la pente ( $x'Oz'$ ), filtré par transformée de Hilbert pour observer la partie réelle, l'amplitude et la phase des champs avec (a)  $k_z > 0$  et (b)  $k_z < 0$ . Les distances sont exprimées en mètre et l'amplitude des champs en ( $\text{rad}^2 \text{s}^{-2}$ ).

( $\text{Re}(\partial_{z'}\rho')$  ou  $\text{arg}(\partial_{z'}\rho')$ ) mettent en évidence que la phase de ces ondes ne se propagent pas selon la direction de la pente, mais selon l'angle déterminé par la relation de dispersion. La précision des mesures, et le fait que  $N$  varie peut-être de façon notable près de la paroi ne nous permet pas de vérifier quantitativement cet aspect.

Bien que les mesures réalisées soient à la limite de résolution de la technique de strioscopie synthétique, il est possible de distinguer sur les figures 5.7 et 5.8 une structure localisée le long de la pente dans les expériences de réflexion d'une onde plane. La phase de cette structure localisée se propage avec un angle différent que celui de la pente, en lien avec la pulsation définie par la relation de dispersion.

Il n'est pas évident qu'il y ait un lien entre la présence de cette structure localisée à la paroi et le fait que l'onde réfléchie ne soit pas décrite par la théorie linéaire, puisque la limite de stabilité est également atteinte lors des expériences considérées.

Au final, nous soulignons le fait qu'à partir d'une onde interne linéaire, il est possible de générer une perturbation de la couche limite pouvant se propager le long de la pente. Des observations similaires ont été réalisées par De Silva *et al.* [19] à des échelles assez différentes correspondant à un nombre de Reynolds plus élevé, et un faisceau incident d'ondes internes de largeur  $1.5\lambda$  ( $\lambda \simeq 0.2$  m). Dans un cadre où la dissipation serait moins important, cette perturbation pourrait alors évoluer non-linéairement ; il serait notamment intéressant de savoir si un tel mécanisme pourrait être à l'origine des solibores [54], structures non-linéaires remontant les pentes océaniques.

### 5.2.3 Conclusion

Le problème de réflexion d'une onde interne plane sur un plan incliné a été appréhendé d'un point de vue fondamental, en réalisant une expérience en apparence simple. Dans un premier temps, l'absence d'onde réfléchie dans la direction opposée à celle de l'onde incidente a été vérifiée, notamment proche de la réflexion critique où la théorie linéaire n'est plus valable.

Par ailleurs, du fait que la limite de stabilité de l'onde réfléchie est rapidement atteinte dans nos expériences, la structure spatiale de l'onde réfléchie ne vérifie pas la relation établie par la théorie linéaire.

Les non-linéarités décrites par des approches perturbatives telles que celles présentées ne jouent pas de rôle important ici puisqu'aucune onde harmonique de l'onde incidente n'a pu être observée. De même, aucun mélange n'a pu être observé. Cependant, nous observons la présence d'une perturbation localisée le long de la pente, dans les cas sous-critique et sur-critique.

L'observation de structures localisées dans la couche limite d'un fluide stratifié reste cependant à la limite de la technique de visualisation utilisée et ne permet pas de conclure

sur la nature de ces ondes.

Il serait intéressant de pouvoir étudier à une plus grande échelle un même mécanisme, où la dissipation serait alors moindre. De même, l'influence de la nature de la pente (concave, convexe ou plane) peut jouer un rôle sur la présence ou non de ces structures [6, 7, 112].

Les expériences réalisées soulèvent ainsi la question de la redistribution des échelles spatiales des ondes dans le cas de l'interaction avec une topographie. L'étude de l'onde plane sur une surface plane inclinée est une limitation au cas où l'échelle caractéristique des ondes est petite devant celle associée à la topographie. Nous allons maintenant nous tourner vers la limite où ces deux échelles caractéristiques sont comparables : l'action d'une topographie de taille finie sur la marée interne.

## 5.3 Modes verticaux incidents sur une topographie

### 5.3.1 État de l'art

L'étude du problème à deux dimensions de conversion linéaire de la marée interne par des topographies infinitésimales dans le cas sous-critique notamment [6, 7, 86, 66], a permis de mettre en évidence un transfert d'énergie des grandes structures vers les plus petites, *i.e.* vers des modes correspondants à des longueurs d'ondes verticales plus petites. Les taux de transfert d'énergie sont estimés à partir de la comparaison du flux d'énergie incident avec le flux d'énergie rayonné par ces modes plus élevés. Ils varient de 6 à 10% de l'énergie incidente selon les approches considérées, présentant finalement ce mécanisme comme assez peu efficace.

Cependant, l'efficacité de la conversion augmente avec la taille de la topographie ainsi que leur rugosité. Cela a été mis en évidence par un certain nombre d'approches analytiques étudiant une barrière verticale (« knife-edge » en anglais) [65, 109] ou encore des configurations correspondant à des talus continentaux ou des rifts océaniques [84, 85]. Le taux de conversion vers les petites longueurs d'ondes dépend de la hauteur de la topographie et des propriétés de l'onde incidente, mais le fait que les topographies sous-critiques et sur-critiques jouent toutes deux un rôle dans la réflexion et la transmission de la marée interne est plus surprenant.

Des simulations numériques [90, 59] dans des cas idéalisés à deux et trois dimensions mettent en évidence des taux de conversion pouvant être de l'ordre de 40% de l'énergie incidente correspondant à un mode-1, le champ diffusé ayant notamment un contenu riche en modes plus élevés (modes 2 à 5). Le champ d'ondes réfléchi est quant à lui plutôt dominé par un mode-1, mais le pourcentage d'énergie réfléchi dépend de la hauteur et de la nature de la topographie.

Finalement, des observations satellites autour de l'archipel d'Hawaï [107], ainsi que des simulations numériques réalistes associées à cette bathymétrie [60], mettent également en évidence une conversion de la marée interne mode-1 à la fréquence  $M_2$  vers des modes plus élevés de l'ordre de 20%, ainsi que des processus de transfert non-linéaire vers la marée interne à la fréquence  $M_4$  (3%) et du mélange turbulent (15%). Le rôle de la conversion de la marée interne dans les régions aux topographies accidentées de l'Océan Pacifique semble donc être important.

Bien qu'il existe des études expérimentales de l'interaction de faisceaux d'ondes internes avec un talus continental ou encore une pente, déjà présentées précédemment, il n'y a pas (à ma connaissance) d'étude expérimentale de l'interaction de la marée interne avec un rift de taille finie. Une des difficultés pour cette étude est notamment de générer et contrôler de façon fiable la marée interne envoyée sur la topographie; le générateur d'ondes internes va permettre de surpasser cette contrainte.

Une partie des résultats concernant la conversion par une montagne gaussienne a fait l'objet d'une publication dans *Physics of Fluids* [101].

### 5.3.2 Dispositif expérimental

Nous allons étudier l'interaction d'une onde interne de type mode-1 avec une topographie sous-marine.

Les expériences décrites dans cette partie ont été réalisées à la plate-forme Coriolis à Grenoble [1]. Cette infrastructure exceptionnelle, faisant partie du contrat Grand Instrument Européen, est la plus grande plaque tournante au monde. Avec une cuve cylindrique de 13 m de diamètre et 1 m de hauteur, la plateforme est particulièrement adaptée à la modélisation expérimentale des écoulements géophysiques en présence de stratification en densité et de topographie, avec prise en compte de la rotation de la Terre.

#### 5.3.2.1 Disposition

Le schéma du dispositif expérimental ainsi que des photos de l'expérience sont présentés à la figure 5.9. L'origine du référentiel est situé au fond, au bord de l'excitateur. L'axe des  $z$  est dirigé dans le sens opposé à la gravité.

Dans un fluide continûment stratifié de hauteur  $H = 0.54$  m et de pulsation caractéristique  $N \simeq 0.6$  rad  $s^{-1}$ , le générateur d'ondes internes développé à Coriolis est utilisé afin de générer un mode-1. A la différence des générateurs présentés dans la table 4.1, cette source est constituée de 24 plaques de 1.5 m de largeur et de 2 cm d'épaisseur, permettant un forçage de la totalité de la hauteur d'eau. Le profil correspondant au mode-1 de l'excitateur (figure 5.9(a)) correspond à  $A_0 \cos(\pi z/H)$  avec une amplitude d'oscillation maximale  $A_0 = 35 \pm 1$  mm.

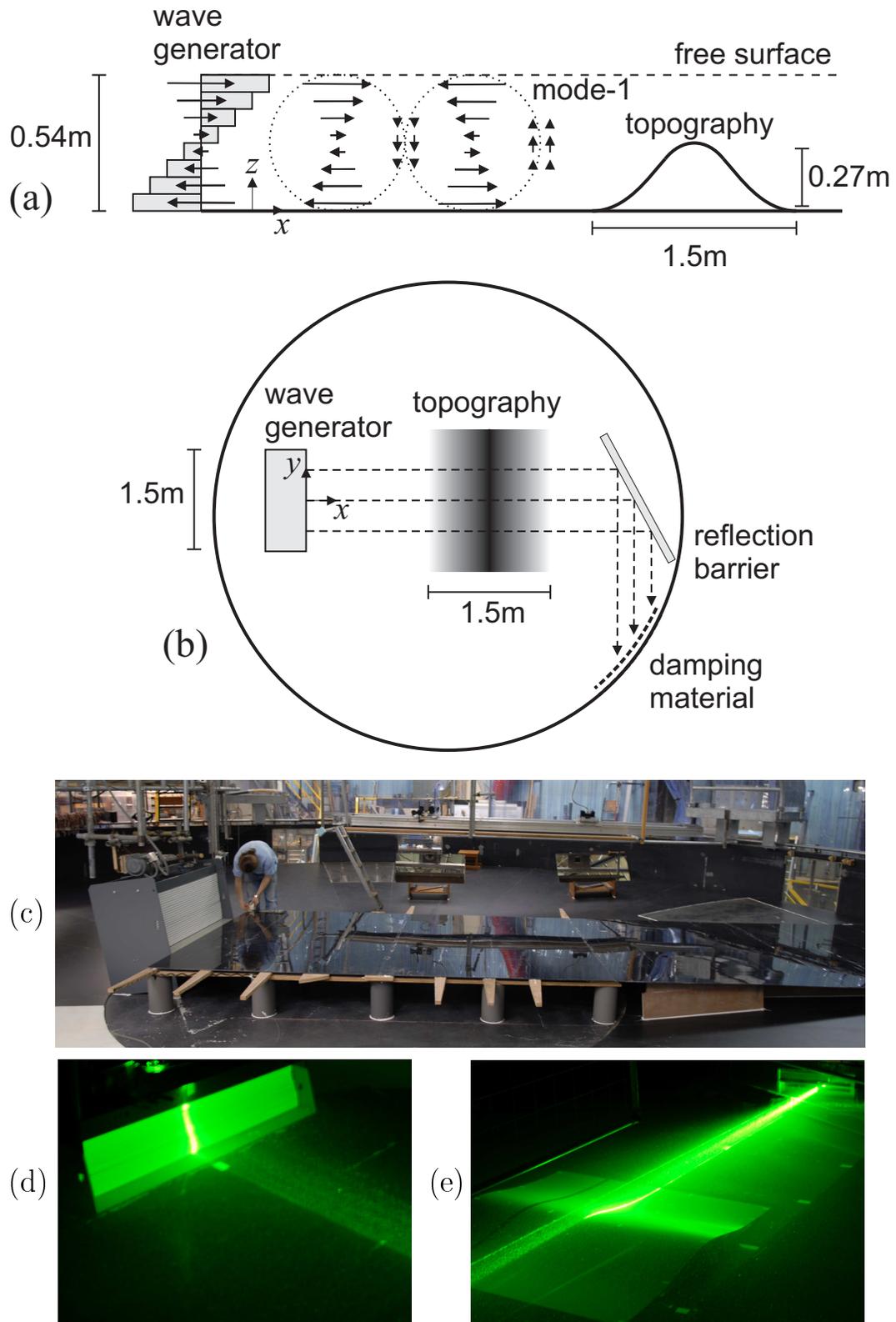


FIGURE 5.9 – Principe de l'expérience étudiant la conversion de la marée interne lors de l'interaction avec une topographie de taille finie. (a) Vue de côté et (b) vue de dessus. Photos (c) du dispositif expérimental avant remplissage et sans topographie, (d) du profil du générateur d'onde et (e) de la topographie gaussienne avec l'éclairage par la nappe laser verticale dans le plan  $(xOz)$ .

Le générateur émet des ondes se propageant selon un diamètre de la cuve, de telle sorte qu'en l'absence de topographie, l'onde émise peut se propager sur une distance d'environ 7 m avant d'atteindre le bord de la cuve (figure 5.9(b)). Une paroi verticale, faisant un angle de  $30^\circ$  avec l'axe de propagation, permet de plus de réfléchir l'onde vers les bords de la cuve et une grille absorbante, afin d'éliminer les ondes réfléchies et d'obtenir une onde progressive seulement.

Les champs de vitesse ont été obtenus par PIV à partir d'images enregistrées à 3 ou 4 Hz selon les cas, avec des caméras CCD 12-bit de résolution  $1024 \times 1024$ . Les visualisations réalisées avec un laser continu 6 W et un miroir oscillant, correspondent en général à des nappes verticales centrées en  $y = 0$  m et  $y = \pm 0.3$  m ; une série d'acquisition a également été réalisée avec une nappe horizontale à l'altitude  $z = 0.42$  m. Les données obtenues ont été traitées à l'aide des algorithmes CIVx [26].

Différentes topographies seront introduites sur le chemin de l'onde émise, une montagne gaussienne et une barrière verticale, dont nous présenterons les caractéristiques ultérieurement. Du fait d'un éclairage venant du bord de la cuve, il n'est pas facile de mesurer le champ de vitesse en amont de la topographie qui génère une zone d'ombre. C'est notamment le cas de la montagne gaussienne (non transparente).

Avant de décrire le champ émis, il est nécessaire de revenir sur la décomposition modale présentée à la section 3.3.2.

### 5.3.2.2 Décomposition modale et stratification

Les expériences que nous avons réalisées ne sont pas correctement décrites par une stratification avec  $N(z)$  constant. Le profil est présenté à la figure 5.10. La présence d'une couche homogène en surface de quelques centimètres est notamment très nette, bien que le reste du profil soit approximativement constant avec une valeur moyenne  $\bar{N} = 0.63 \pm 0.07$  rad/s. Ainsi la base des fonctions propres  $f_n(z)$  obtenues à partir de la stratification mesurée expérimentalement, et représentées à la figure 5.10 pour les cinq premiers modes, sera utilisée lors de la décomposition modale.

On constate notamment que l'influence de la couche homogène en surface est plus forte sur les modes plus élevés, et qu'elle joue un rôle équivalent à diminuer la hauteur totale du fluide stratifié.

En pratique, nous réaliserons la décomposition pour la vitesse horizontale *et* verticale afin de vérifier que les deux résultats obtenus sont cohérents. On rappelle que l'on cherche

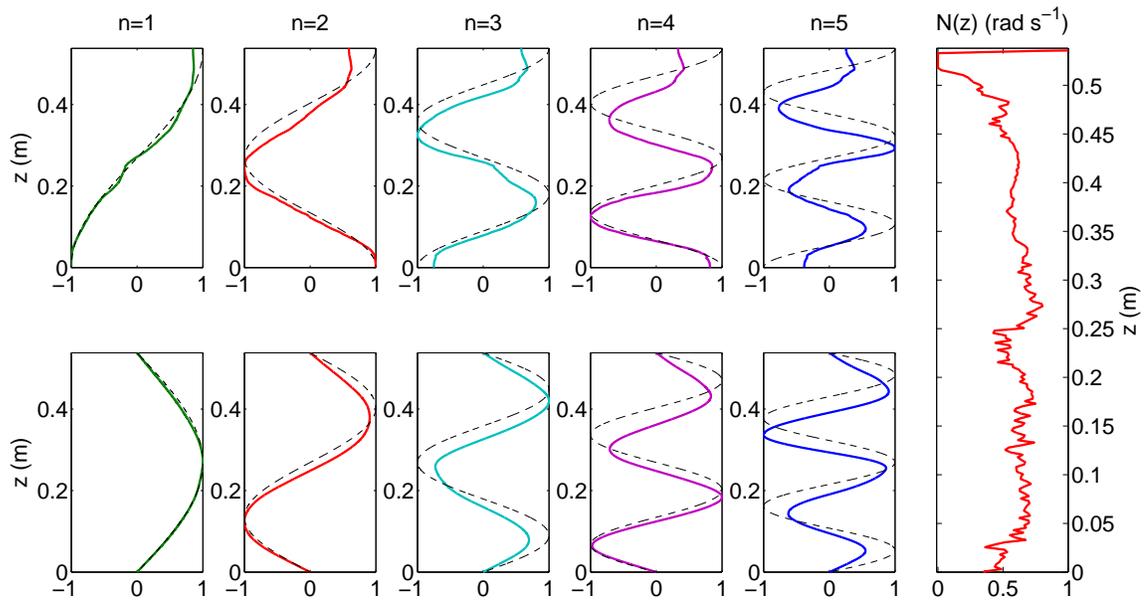


FIGURE 5.10 – Allure de la vitesse horizontale (en haut) et de la vitesse verticale (en bas) pour les modes 1 à 5, et profil de la stratification associée pour une des séries de mesures. La valeur moyenne de la pulsation de Brunt-Väisälä est  $\bar{N} = 0.63 \pm 0.07$  rad/s. Les modes en pointillés correspondent aux solutions dans le cas d'une stratification avec  $N(z) = \bar{N}$  constante.

Cas		1	2	3	4
$\omega$	rad s <sup>-1</sup>	0.241	0.285	0.348	0.392
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	s	26	22	18	16
$\theta = \arcsin(\frac{\omega}{N})$	deg	22	27	34	38
$\tan \theta$		0.40	0.51	0.67	0.78

TABLE 5.2 – Paramètres de forçage pour les quatre cas choisis.

les coefficients  $\gamma_n = a_n e^{i\phi_n}$  dans la décomposition

$$u(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^u e^{i\phi_n^u} f_n^u(z) \exp [i(\omega t - k_{x,n}x)] \quad (5.13)$$

$$w(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^w e^{i\phi_n^w} f_n^w(z) \exp [i(\omega t - k_{x,n}x)] . \quad (5.14)$$

### 5.3.3 Champ d'onde incident : mode 1

Pour étudier la conversion de la marée interne à une topographie, il est nécessaire de connaître et contrôler l'onde incidente. Bien que la source utilisée soit de même nature que dans la section 4.5, quelques vérifications sont nécessaires.

Afin de caractériser au mieux le champ incident, nous avons réalisés des mesures en l'absence de topographie à différentes fréquences de forçage pour le générateur. Quatre cas de référence ont été choisis d'après les caractéristiques des topographies et de la pulsation de Brunt-Väisälä. Les valeurs des différents paramètres qui en découlent sont résumées dans la table 5.2.

Nous allons vérifier un certain nombre de points importants sur ces cas tests, nécessaires à la bonne interprétation des expériences en présence de topographie, et qui ne découlent pas directement de l'étude du chapitre 4. Ainsi nous étudierons

1. l'obtention d'un régime établi reproductible,
2. l'émission d'une onde interne harmonique progressive (sans onde stationnaire),
3. la géométrie quasi-bidimensionnelle du champ émis,
4. la décomposition modale de la structure verticale.

#### 5.3.3.1 État stationnaire et répétabilité

L'obtention d'un régime établi de façon reproductible est un point important à vérifier pour deux raisons particulières. Tout d'abord, la mise en marche du forçage pour chaque expérience n'est pas automatisée. Le générateur d'ondes internes est contrôlé en

fréquence par une tension analogique. Lors d'un démarrage instantané à la fréquence de forçage, l'ensemble du spectre des fréquences est excité (réponse à un créneau) et la durée du régime transitoire est assez long (*cf.* [123]). Afin de minimiser la durée du régime transitoire, nous réalisons une rampe (manuellement) de la commande en fréquence, sur une durée de 30 s environ. De plus, le dispositif expérimental a été pensé de façon à obtenir un mode propagatif et non stationnaire, mais nous devons vérifier son efficacité.

Nous nous proposons d'illustrer cette propriété en comparant des séries temporelles des composantes de la vitesse extraites à certains points de l'espace, pour deux expériences faites consécutivement avec les mêmes paramètres. Les points de mesure sont situés au centre du forçage ( $y = 0$  m) tous les 0.05 m de  $z = 0.05$  m à  $z = 0.45$  m, à deux endroits différents selon la direction de propagation,  $x = 2.40$  m et  $x = 4.40$  m.

Les séries temporelles de l'une des expériences sont illustrées à la figure 5.11, ainsi qu'une analyse temps-fréquence de certaines séries extraites. La répétabilité des expériences est quant à elle illustrée à la figure 5.12 où les évolutions des enveloppes des signaux filtrés à la fréquence de forçage des deux expériences (différentes) sont quasiment identiques. Il est remarquable d'observer malgré un démarrage non automatisé du générateur d'ondes que nous sommes même capables de reproduire certaines oscillations de faible amplitude dans le champ de vitesse. Par ailleurs, l'origine de ces oscillations peut s'expliquer par l'évolution encore transitoire au démarrage ainsi que par la présence éventuelle de plusieurs modes se propageant à la même fréquence mais avec des phases différentes, induisant un phénomène de battements.

L'évolution des composantes spectrales, illustrée à la figure 5.11 (c) et (d), montre l'établissement d'un régime stationnaire environ 150 s après le démarrage de l'excitation, ce qui est en accord avec l'évolution temporelle de la figure 5.12.

### 5.3.3.2 Onde interne progressive

À la figure 5.13, nous présentons l'allure des champs filtrés à la fréquence de forçage pour les cas 2 et 3 de la table 5.2. Ces grandes fenêtres d'observations ( $1.25 \times 0.55$  m<sup>2</sup>) sont obtenues en réunissant les mesures issues de deux caméras l'une à côté de l'autre. La zone de jonction autour de la position  $x \simeq 4.20$  m présente cependant quelques aberrations. On peut notamment remarquer que la longueur d'onde horizontale des modes est de l'ordre de la taille de la fenêtre (a), voire supérieure (b). Nous avons notamment pu mesurer le nombre d'onde horizontal via le gradient de la phase observée grâce à la transformée de Hilbert (*cf.* section 3.3.1), ainsi que la vitesse de groupe via la vitesse d'avancée des rouleaux observés, mesures résumées dans la table 5.3. Quelques variations horizontales de l'amplitude de la vitesse verticale sont également discernables.

Afin de vérifier si les faibles variations de l'amplitude correspondent à une modulation due à la superposition du mode généré avec une onde interne se propageant dans la

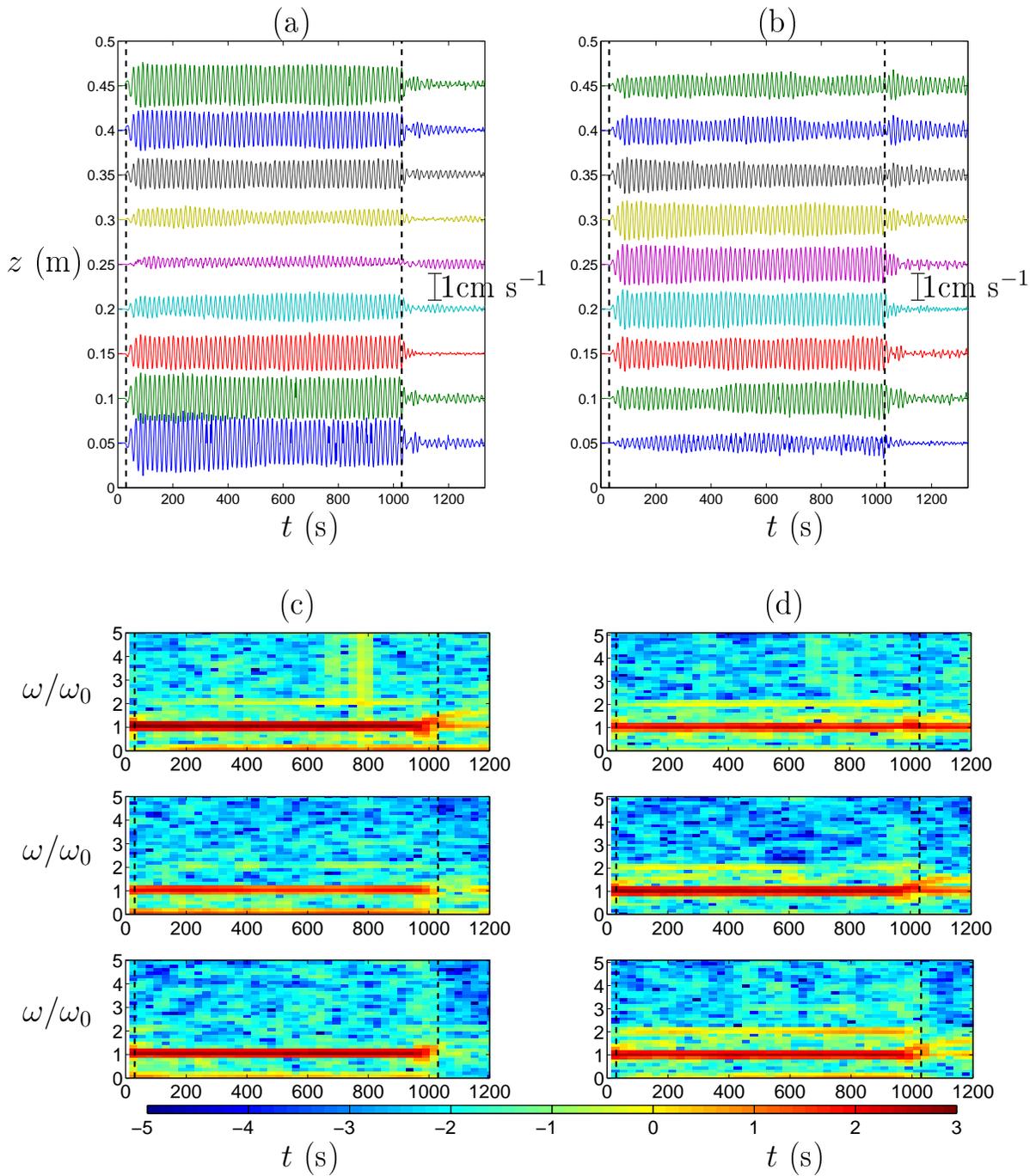


FIGURE 5.11 – Séries temporelles extraites de la composante horizontale (a) et verticale (b) de la vitesse en  $x = 2.40$  m pour une expérience avec un forçage à  $\omega_0 = 0.368$  rad  $\text{s}^{-1}$ , correspondant à une période de 17.1 s. Les différentes séries sont centrées autour de la profondeur où elles ont été extraites. (c) et (d) sont les diagrammes temps-fréquences associés aux séries temporelles (a) et (b) respectivement, pour les trois profondeurs  $z = 0.15, 0.30$  et  $0.45$  m (de bas en haut). L'échelle de couleur indiquée est logarithmique. Les lignes pointillées verticales sur toutes les figures indiquent le démarrage et l'arrêt du forçage.

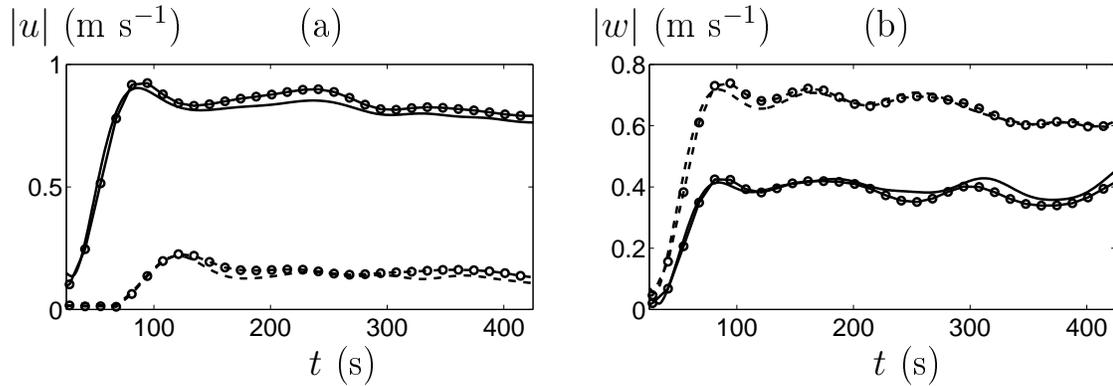


FIGURE 5.12 – Évolutions temporelles de l'amplitude de la composante (a) horizontale et (b) verticale de la vitesse, filtrés à la fréquence de forçage  $\omega = 0.368 \text{ rad s}^{-1}$ , en  $x = 2.40 \text{ m}$  pour deux expériences (symboles ou non). Les profondeurs où elles ont été extraites correspondent à  $z = 0.10 \text{ m}$  (traits continus) et  $z = 0.25 \text{ m}$  (traits pointillés) des figures 5.11 (a) et (b).

Cas	$c_g$ (cm s <sup>-1</sup> )	$k_x$ (rad m <sup>-1</sup> )	$\lambda_x$ (m)
1	9.6 ( $\pm 1.5$ )	2.97 ( $\pm 0.09$ )	2.11 ( $\pm 0.07$ )
2	9.0 ( $\pm 1.5$ )	3.26 ( $\pm 0.10$ )	1.92 ( $\pm 0.06$ )
3	7.6 ( $\pm 1.5$ )	4.06 ( $\pm 0.05$ )	1.55 ( $\pm 0.02$ )
4	7.3 ( $\pm 1.5$ )	4.68 ( $\pm 0.22$ )	1.34 ( $\pm 0.07$ )

TABLE 5.3 – Paramètres des ondes internes mesurés sur les composantes horizontale  $u$  ou verticale  $w$  du champ de vitesse pour les quatre cas considérés, en l'absence de topographie.

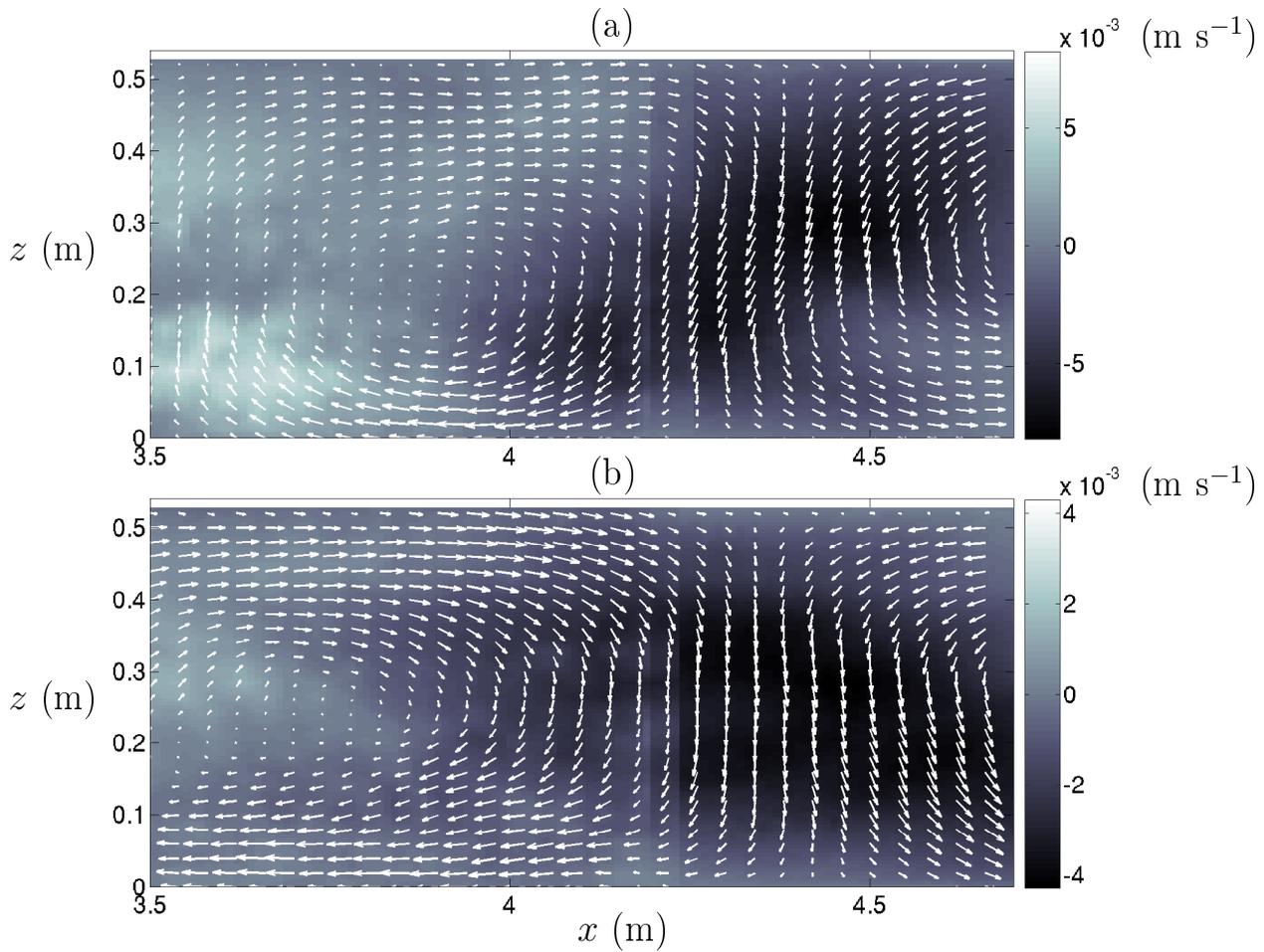


FIGURE 5.13 – Vues verticales des champs de vitesse filtrés à la fréquence de forçage pour les cas (a) 2 et (b) 3 (*cf.* table 5.2). L'échelle de gris représente la composante verticale de la vitesse en m s $^{-1}$ , et les vecteurs indiquent la direction locale de la vitesse.

direction opposée à l'onde émise (réfléchiée à l'extrémité de la cuve), nous utilisons la transformée de Hilbert. Cependant, cette technique n'est pas capable de discriminer les ondes qui se propagent en s'éloignant ou se rapprochant de la source si la taille du champ observé n'est pas supérieure à une longueur d'onde. Seul le cas 4, le plus haut en fréquence, correspond à une longueur d'onde horizontale  $\lambda_x$  inférieure à la fenêtre d'observation, comme on peut le voir à la figure 5.14, et qui permet de satisfaire une résolution spectrale suffisante pour l'utilisation de la transformée de Fourier (*cf.* remarque à la fin de la section 3.3.1.3). La décomposition en ondes se propageant de la gauche vers la droite

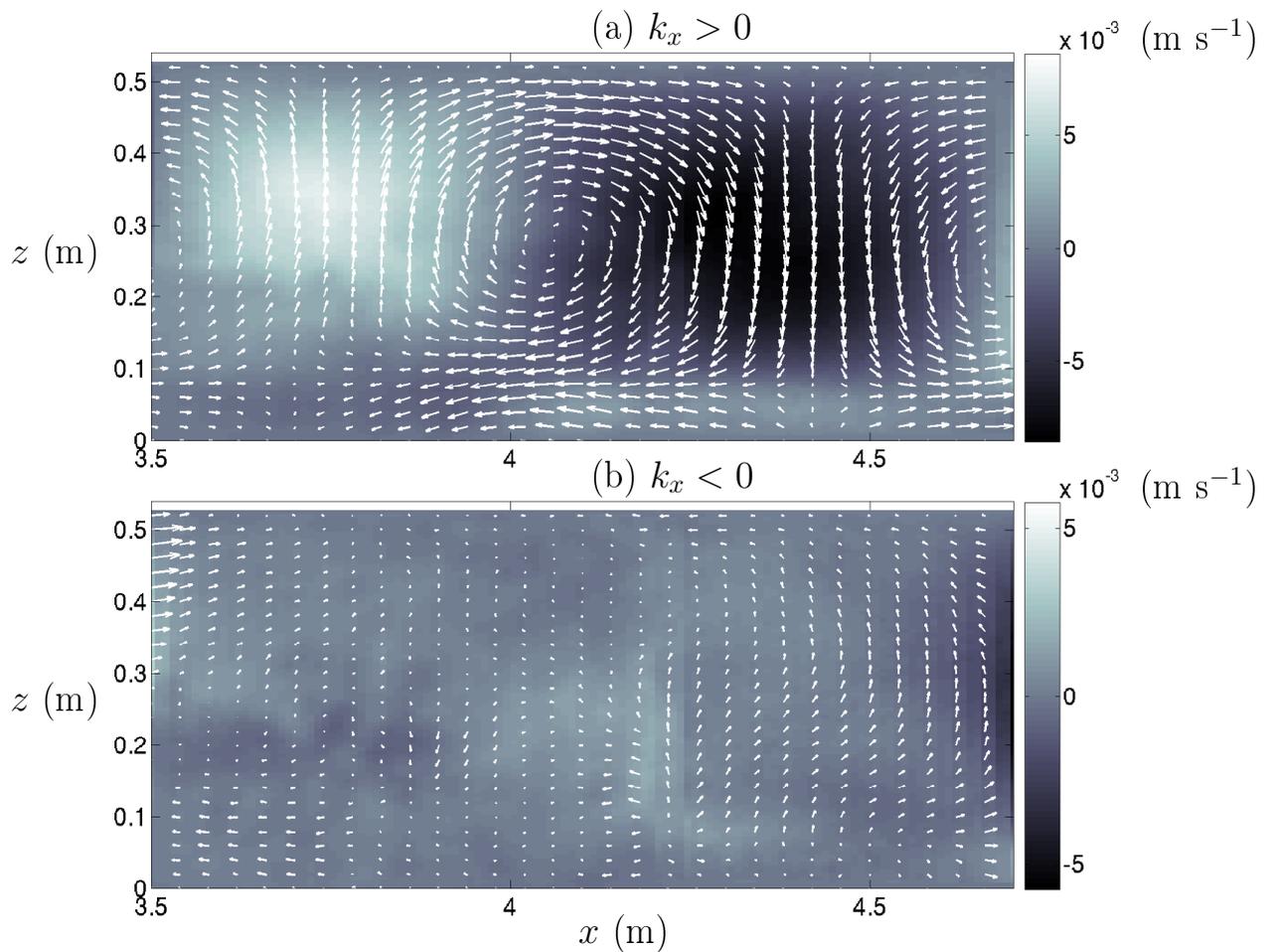


FIGURE 5.14 – Vues verticales en régime établi des champs de vitesse filtrés à la fréquence de forçage pour le cas 4 de la table 5.2, également filtrés spatialement de façon à ne garder que les composantes (a)  $k_x > 0$  et (b)  $k_x < 0$ . L'échelle de gris représente la composante verticale de la vitesse en  $\text{m s}^{-1}$ , et les vecteurs indiquent la direction locale de la vitesse.

(figure 5.14 (a)) ou de la droite vers la gauche (figure 5.14 (b)) montre bien l'absence d'onde réfléchiée (lorsqu'il n'y a pas de topographie).

### 5.3.3.3 Évolution quasi bidimensionnelle

Afin de vérifier l'hypothèse que le forçage utilisé, sur une largeur de 1.50 m, permet une étude bi-dimensionnelle, nous avons observé le champ émis dans un plan horizontal, proche de la surface ( $z \simeq 0.42$  m). Il est important de noter que l'obtention d'une nappe laser horizontale sur une grande section dans un fluide stratifié est difficile du fait du gradient d'indice selon la verticale qui a tendance à dévier les rayons lumineux vers le fond de la cuve. Ainsi la pente de la nappe horizontale est d'environ 0.01, soit une variation de profondeur de 1 cm par mètre.

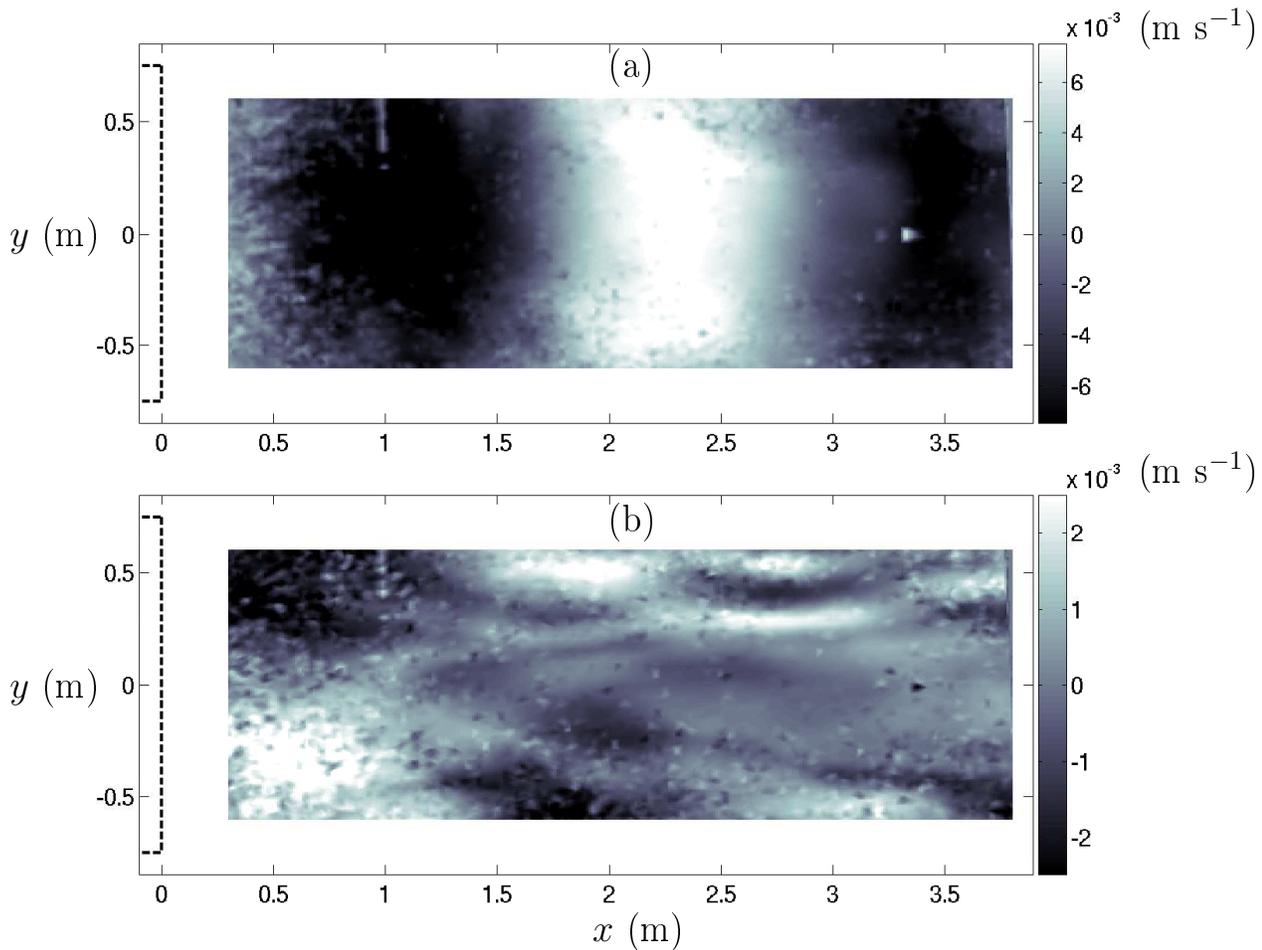


FIGURE 5.15 – Vues horizontales des composantes de la vitesse selon (a) la direction ( $Ox$ ) *i.e.*  $u$ , et (b) selon la direction ( $Oy$ ) *i.e.*  $v$ , pour une expérience du cas 3 (*cf.* table 5.2). L'emplacement du générateur est représenté en pointillés.

La figure 5.15 permet de vérifier que la zone au centre du forçage, *i.e.*  $y \in [-0.1; 0.1]$  m, est bien décrite par un écoulement bi-dimensionnel. Plus particulièrement, les effets 3D sont le plus marqués au niveau de la source ( $x \in [0; 1.0]$  m), où le mouvement oscillant des plaques semble générer un pompage oscillant dans la direction transverse à la propagation. Cet effet s'atténue avec la propagation, et à partir de la position  $x = 2.5$  m, la zone

Cas	$A_0\omega$ (cm s <sup>-1</sup> )	$a_1$ (cm s <sup>-1</sup> )		$e_1/E_{in}$ (%)		$E_{in}$ (cm s <sup>-1</sup> ) <sup>2</sup>	
		$u$	$w$	$u$	$w$	$u$	$w$
1	0.84	0.39	0.23	96	91	0.15	0.057
2	1.00	0.69	0.43	98	96	0.49	0.20
3	1.22	0.95	0.75	97	94	0.93	0.61
4	1.37	0.89	0.20	98	20	0.81	0.19

TABLE 5.4 – Décomposition modale basée sur les composantes horizontale  $u$  ou verticale  $w$  du champ de vitesse pour les quatre cas considérés, en l’absence de topographie. Le flux incident d’énergie  $E_{in}$  est défini comme la somme des flux d’énergie de tous les modes, *i.e.*  $\sum_n e_n = \sum_n a_n^2/n$ .

centrale a alors une dynamique quasi-2D. Nous nous limiterons à cette zone centrale par la suite. On peut remarquer cependant qu’une structure modale selon ( $Oy$ ) s’éloignant de la zone d’étude est visible selon une structure en V, dont il est difficile de trouver une origine.

### 5.3.3.4 Structure modale

Une dernière vérification à apporter concerne la structure modale du champ généré. Du fait des écarts à la linéarité de la stratification utilisée, le forçage par un mode-1 associé à une stratification uniforme peut être moins efficace. Nous réaliserons la décomposition modale sur la fenêtre d’observation  $x \in [4.25; 4.65]$  m qui correspond à la caméra ayant la meilleure résolution verticale. Nous tenons à souligner que l’atténuation visqueuse du mode-1 est suffisamment faible pour que l’on puisse comparer les mesures réalisées autour de  $x \simeq 4.2$  m avec celles réalisées ultérieurement en présence de topographie, plus éloignées (autour de  $x \simeq 5.2$  m).

La décomposition modale des composantes horizontale et verticale de la vitesse est présentée dans la table 5.4. D’après la décomposition (5.14), les deux mesures sont reliées par le rapport des nombres d’ondes puisque  $|w/u| \sim k_x/k_z$ , et sont cohérentes avec les mesures de la table 5.3 lorsque le mode-1 est prédominant. On notera que nous avons définie le flux incident d’énergie  $E_{in} = \sum_n e_n = \sum_n a_n^2/n$  de façon à analogue à l’équation (2.40), et que le pourcentage de mode-1 dans le champ d’ondes incident est défini par le rapport  $e_1/E_{in} = a_1^2/E_{in}$ .

Les résultats des cas 2 et 3 sont très bons, les estimations des composantes horizontale et verticale sont cohérentes et toutes deux proches de 100% ; tandis que le cas 4 ne permet pas de conclure quant à la qualité du champ émis. Le cas 1 est également de bonne

qualité, bien que l'amplitude du mode-1 généré soit faible. Il est possible que cela soit dû à l'émission d'une structure modale bien définie que nous avons identifiée (mais qui n'est pas montrée dans le manuscrit) et qui correspond principalement un mode-2 à la pulsation harmonique  $2\omega$ , ayant une amplitude environ moitié du mode-1 à la pulsation  $\omega$ .

### 5.3.3.5 Résumé

De part les différentes analyses présentées, nous allons considérer par la suite uniquement les cas 2 et 3, de façon à être sûr de la qualité de l'onde incidente. Les valeurs des fréquences sont par ailleurs telles que l'on pourra considérer les cas de réflexion sous-critique et sur-critique.

Le champ d'onde émis est parfaitement décrit par un mode-1 à la fréquence de forçage. Nous pouvons alors étudier son interaction avec une topographie sous-marine.

## 5.3.4 Topographie idéalisée, barrière verticale

Nous avons tout d'abord considéré la topographie idéalisée de type « knife-edge », correspondant à une barrière verticale de hauteur  $b$  et d'extension horizontale nulle. En pratique, nous avons utilisé une plaque de PVC d'épaisseur 0.015 m et de 2.0 m de largeur. Deux hauteurs ont été étudiées,  $b = 0.197$  m et  $b = 0.367$  m correspondant à  $b \simeq H/3$  et  $b \simeq 2H/3$  respectivement.

Dans chaque cas, la barrière a été placée à la distance  $x = 4.20$  m du générateur, et les mesures PIV ont été réalisées derrière la topographie, comme illustré avec les images issues des deux caméras utilisées à la figure 5.16. On peut remarquer que les deux caméras n'observent pas l'écoulement avec la même résolution et les fenêtres d'observation ne se superposent pas ; la caméra la plus éloignée de la topographie dispose de la meilleure résolution verticale et sera utilisée pour la décomposition modale ( $x \in [5.15; 5.65]$  m).

### 5.3.4.1 Conversion modale à la fréquence de l'onde incidente

Dans un premier temps, nous nous allons analyser le mécanisme de conversion spatiale du mode-1 de la marée interne incidente. Le mécanisme est non-linéaire puisque l'onde interagit avec une macro-structure, mais reste cependant linéaire au sens des fréquences puisque nous nous limitons à la fréquence de l'onde incidente.

**Allure des ondes transmises** Quelque soit la fréquence de l'onde interne considérée, la barrière verticale est une topographie sur-critique puisque sa pente est infinie. Pour une barrière de hauteur donnée, l'allure des ondes transmises doit donc être analogue pour

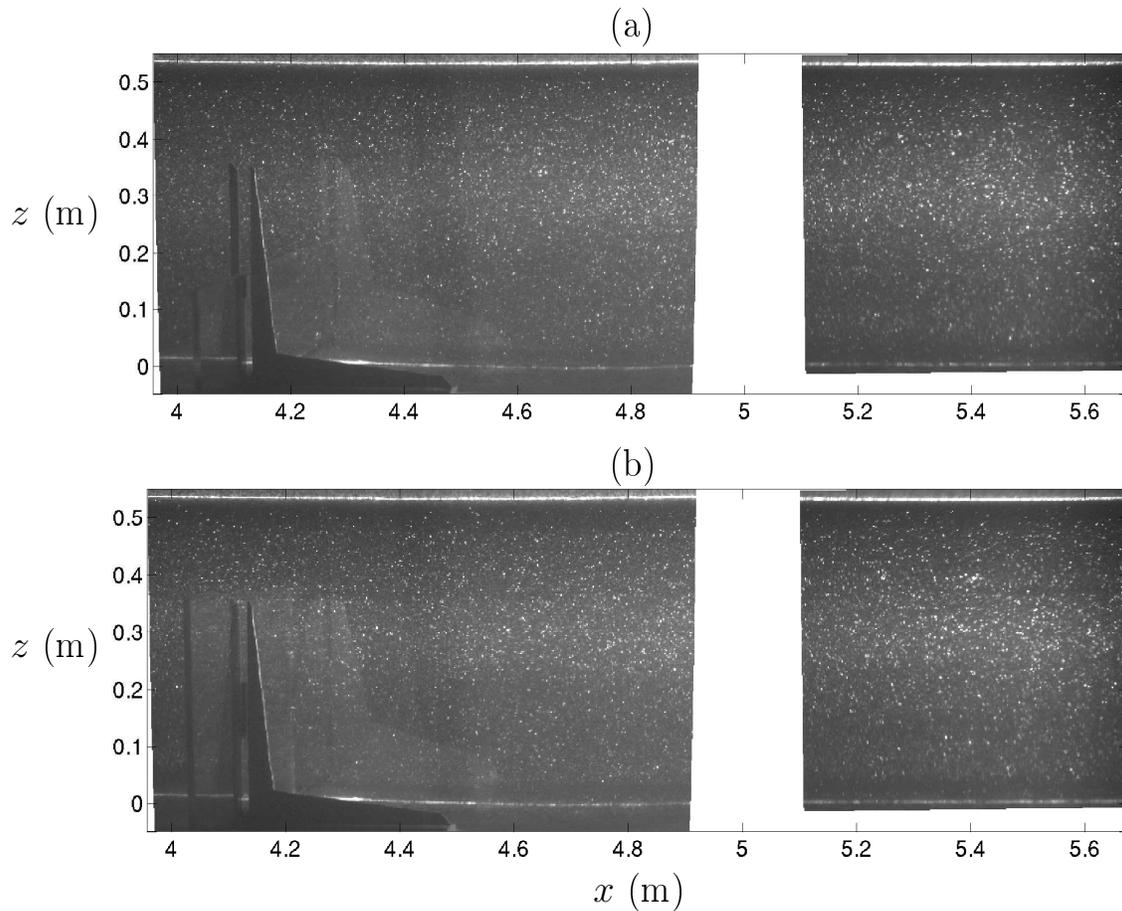


FIGURE 5.16 – Images des particules dans le plan vertical ( $xOz$ ), utilisées pour les mesures PIV associées aux expériences avec la barrière verticale de hauteur (a)  $b = H/3$  et (b)  $b = 2H/3$ . Les zones blanches correspondent à la zone de non-recouvrement des deux caméras.

les cas 2 et 3. Ainsi, la figure 5.17 met en évidence des similitudes mais également des différences dans la structure transmise selon la fréquence. Les visualisations sont obtenues au même instant par rapport à la phase du mode incident.

Dans toutes les configurations observés (a à d), on peut observer une intensification de l'énergie de l'onde transmise autour de faisceaux émis au niveau du sommet de la barrière verticale, et se propageant avec un angle  $\theta = \pm \arcsin(\omega/N)$  par rapport à l'horizontal.

Les expériences avec une barrière de hauteur  $b \simeq H/3$  semblent comparables (a et c), le rouleau associé à la structure de type mode-1 semble franchir la barrière en  $x = 4.2$  m dans son intégralité pour les deux fréquences considérées. La structure verticale d'un mode-1 en champ lointain est également clairement visible, notamment grâce à l'échelle de gris de la composante verticale de la vitesse, bien que de des structures plus petites soient visibles.

	Cas	$a_1$ (cm s <sup>-1</sup> )		$e_1/E_{in}$ (%)		$E_{tr}$ (cm s <sup>-1</sup> ) <sup>2</sup>		% transmis	
		$u$	$w$	$u$	$w$	$u$	$w$	$u$	$w$
$b \simeq H/3$	2	0.31	0.22	70	72	0.14	0.064	29	32
	3	0.74	0.52	77	74	0.71	0.36	76	59
$b \simeq 2H/3$	2	0.24	0.20	85	87	0.068	0.044	14	22
	3	0.72	0.60	87	91	0.59	0.39	63	64

TABLE 5.5 – Décomposition modale de l'écoulement transmis par une barrière verticale de hauteur  $b$  correspondant à un tiers et deux tiers de la hauteur de la stratification. Deux valeurs basées sur les composantes horizontale  $u$  et verticale  $w$  du champ de vitesse sont données. Le pourcentage transmis est obtenu en comparant le flux d'énergie transmise avec le flux incident de la table 5.4.

Dans le cas de la barrière de hauteur  $b \simeq 2H/3$ , le franchissement de la barrière verticale par le mode-1 incident ne semble pas se faire de la même façon pour les deux fréquences considérées. Dans le cas 3, on distingue clairement qu'un rouleau complet passe entre la surface libre et la barrière verticale; tandis que seule la moitié supérieure du rouleau semble être transmise dans le cas 2. La nature de l'écoulement juste derrière la topographie est également différente, mais ces différences ne sont plus clairement visibles pour l'allure de l'onde transmise en champ lointain ( $x > 5$  m).

L'analyse de la structure modale va nous permettre de décrire plus en détails ces différences et similitudes entre les expériences.

**Décomposition modale du champ transmis** Nous analysons la structure du champ transmis en appliquant la décomposition modale sur la fenêtre d'observation  $x \in [5.15; 5.6]$  m, correspondant à la caméra la plus éloignée de la topographie. Les observations précédentes concernant les champs filtrés se retrouvent comme on peut le voir dans la table 5.5. On introduira notamment le flux d'énergie transmise  $E_{tr} = \sum_n e_n = \sum_n a_n^2/n$ , de la même façon que nous avons défini le flux incident  $E_{in}$  précédemment.

On retrouve via la décomposition modale que les champs transmis dans les cas 2 et 3 sont majoritairement décrits par une structure mode-1; à 70 – 75% pour la barrière de hauteur  $b \simeq H/3$  et à 85 – 90% pour celle de hauteur  $b \simeq 2H/3$ .

Nous présentons à la figure 5.18 la décomposition détaillée du champ d'ondes transmis en terme d'énergie et de phase des modes pour les expériences considérées. Les figures 5.18 (a) et (c) montrent notamment que les modes 2, 3 et 4 constituent les 15 à 25% restants du champ transmis. Il ne semble pas y avoir de relation particulière entre la phase des différents modes transmis comme on peut le voir sur les figures 5.18 (b) et (d). Cependant, le fait que le champ d'ondes internes transmis se décompose sur une somme finie de modes ayant une phase bien définie contribue à une allure du champ de vitesse

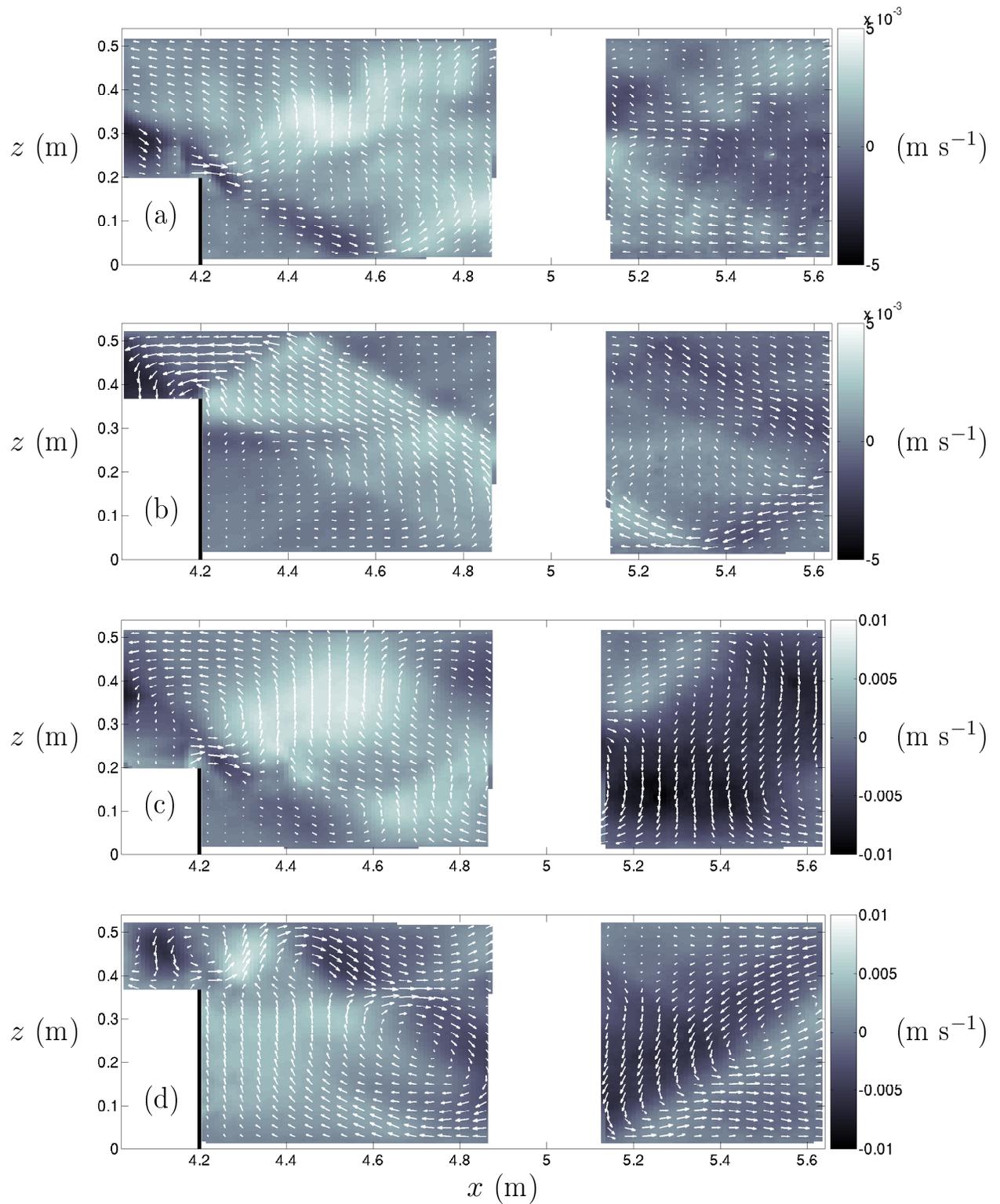


FIGURE 5.17 – Vues verticales des champs de vitesse filtrés à la pulsation de forçage  $\omega$  pour les cas (a-b) 2 et (c-d) 3 (*cf.* table 5.2) transmis après la barrière verticale de hauteur respective  $b \simeq H/3$  (a-c) et  $b \simeq 2H/3$  (b-d) et symbolisée par un trait épais vertical noir. Les tons de gris représentent la composante verticale de la vitesse en  $\text{m s}^{-1}$ , et les vecteurs indiquent la direction locale de la vitesse.

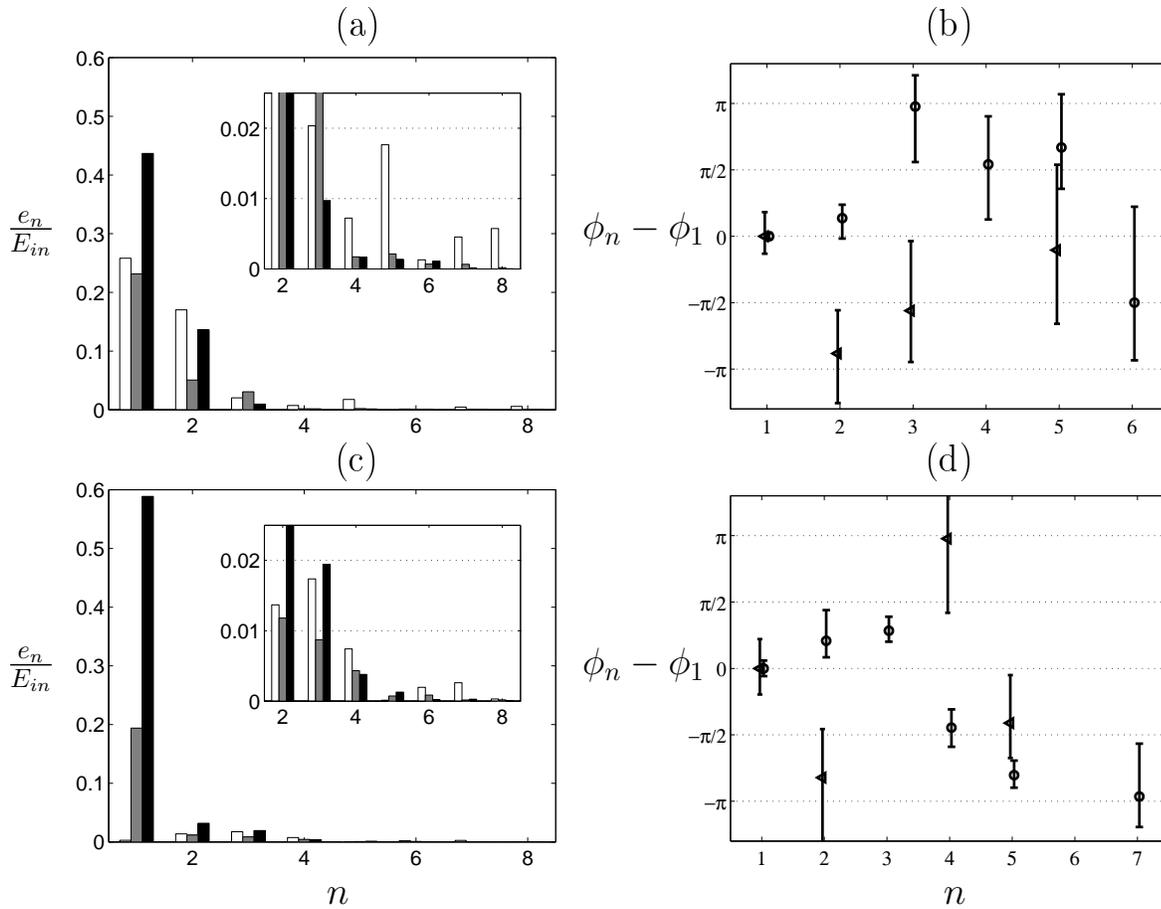


FIGURE 5.18 – Décomposition modale pour les expériences avec la barrière verticale de hauteur  $H/3$  (a-b) et  $2H/3$  (c-d). Le cas 2 est en gris l’amplitude des modes (a-c) et symbolisé par des triangles pour la phase de modes (b-d) ; tandis que le cas 3 est en noir pour l’amplitude des modes et symbolisé par des cercles pour la phase. Lorsque la phase du mode- $n$  n’est pas représentée, ce mode ne fait pas partie de la décomposition. Les barres blanches en (a) et (c) sont associées au modèle discuté à la section 5.3.4.3.

où des faisceaux semblent se propager. Cette remarque justifie donc l’allure des champs filtrés observés à la figure 5.17.

**Remarque :** En présence de topographie, nous n’avons pas accès au champ de vitesse en amont de la topographie. Nous ne pouvons donc pas donner d’information sur la structure réfléchi sur la barrière, ni connaître le taux de réflexion. Nous pouvons éventuellement estimer le taux de réflexion de l’énergie incidente en soustrayant à cette dernière le taux d’énergie transmise. Cependant, il faut garder à l’esprit que dans le cadre des ondes internes qui sont décrites par des processus non-linéaires, réflexion et transmission ne sont pas les seuls mécanismes de conversion de l’énergie incidente.

### 5.3.4.2 Aspects non-linéaires

Outre la conversion de la marée interne incidente à la fréquence de forçage, l'interaction du mode-1 avec la topographie est susceptible d'être source de non-linéarités, et nous allons étudier les harmoniques émises notamment.

**Harmoniques transmises** Deux mécanismes possibles peuvent être à l'origine de la génération d'ondes internes à une fréquence harmonique du forçage : la génération locale au niveau de la topographie, ou bien l'interaction onde-onde entre la marée incidente et les ondes générées par la topographie. Les deux cas étudiés (2 et 3) présentent cependant un comportement différent vis à vis de la génération d'harmoniques. L'harmonique à la pulsation  $2\omega$  est propagative dans le cas 2 ( $\omega/N < 1/2$ ) tandis que dans le cas 3,  $\omega/N \geq 1/2$  ce qui implique que l'harmonique est à la limite d'être non-propagative ( $N$  n'étant pas tout à fait constant sur toute la hauteur du fluide).

La figure 5.19 illustre les champs d'ondes internes transmises à la pulsation  $2\omega$  de la même façon qu'à la figure 5.17. Dans tous les cas, on observe le fait que les ondes émises à la pulsation  $2\omega$  sont en opposition de phase avec l'onde incidente

On observe notamment que lorsque l'harmonique à  $2\omega$  est propagative (images (a) et (b)), les ondes internes émises sont d'amplitude comparable aux ondes transmises à la pulsation  $\omega$ , et une structure modale dominée par un mode-1 se propage (mode-2 et mode-3 également présents). Dans le cas 2, le flux total d'énergie rayonné correspond à  $0.061 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$  pour la barrière de hauteur  $H/3$ , soit 30% de l'énergie incidente, et à  $0.042 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$  pour la barrière de hauteur  $2H/3$ , soit 20% de l'énergie incidente. Ces valeurs sont comparables aux flux transmis à la pulsation  $\omega$ .

Dans le cas où la pulsation de l'harmonique est très proche de  $N$ , les ondes restent piégées au niveau de l'altitude où elles sont générées, *i.e.* au niveau du haut de la barrière. Nous remarquons qu'il est surprenant sur la figure 5.19 (d) représentant un champ filtré à  $2\omega$  que l'on puisse observer une structure se propageant avec un angle associé à la pulsation  $\omega$ . Si l'on compare cette figure avec la figure 5.17 (d) filtrée à  $\omega$ , on constate que cette zone est associée à un faisceau d'ondes internes nettement visible, dont la phase n'est peut-être pas parfaitement définie par rapport au système d'acquisition. Cela peut induire du signal dans les composantes harmoniques mais qui n'a pas de sens physique.

Nous concluons que la génération d'harmonique semble être donc issue de l'interaction non-linéaire du mode-1 incident avec la topographie.

**Courant moyen** La prise en compte des interactions non-linéaires conduit souvent à analyser les harmoniques à des fréquences multiples de la fréquence de forçage, mais il est également possible de s'intéresser aux perturbations générées à la fréquence nulle, *i.e.* aux courants moyens.

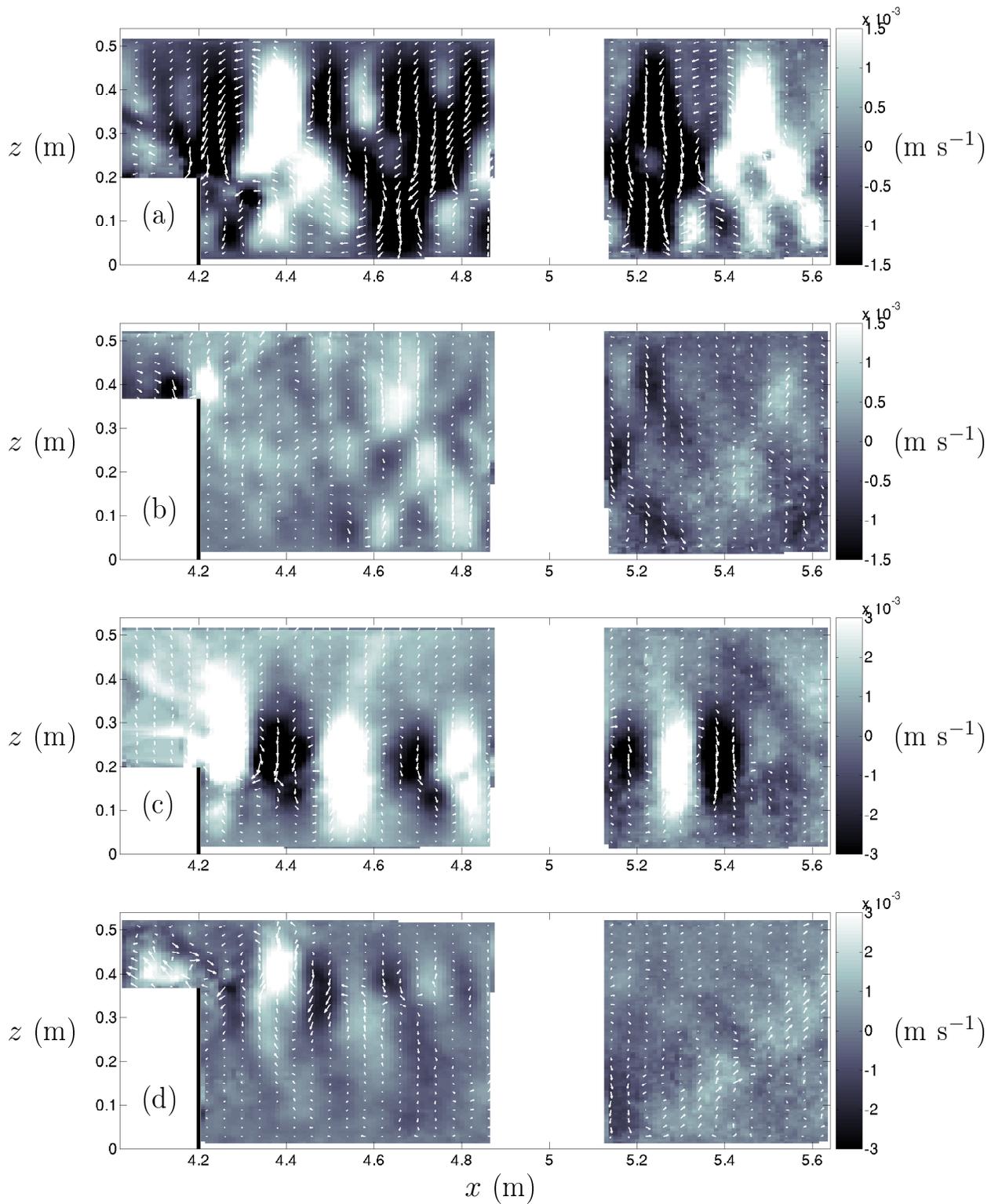


FIGURE 5.19 – Même représentation qu’à la figure 5.17 mais filtrée à la pulsation  $2\omega$ . (a-b) Cas 2 et (c-d) cas 3 transmis après la barrière verticale de hauteur respective  $b \simeq H/3$  (a-c) et  $b \simeq 2H/3$  (b-d) et symbolisée par un trait épais vertical noir. Les tons de gris représentent la composante verticale de la vitesse en  $\text{m s}^{-1}$ , et les vecteurs indiquent la direction locale de la vitesse.

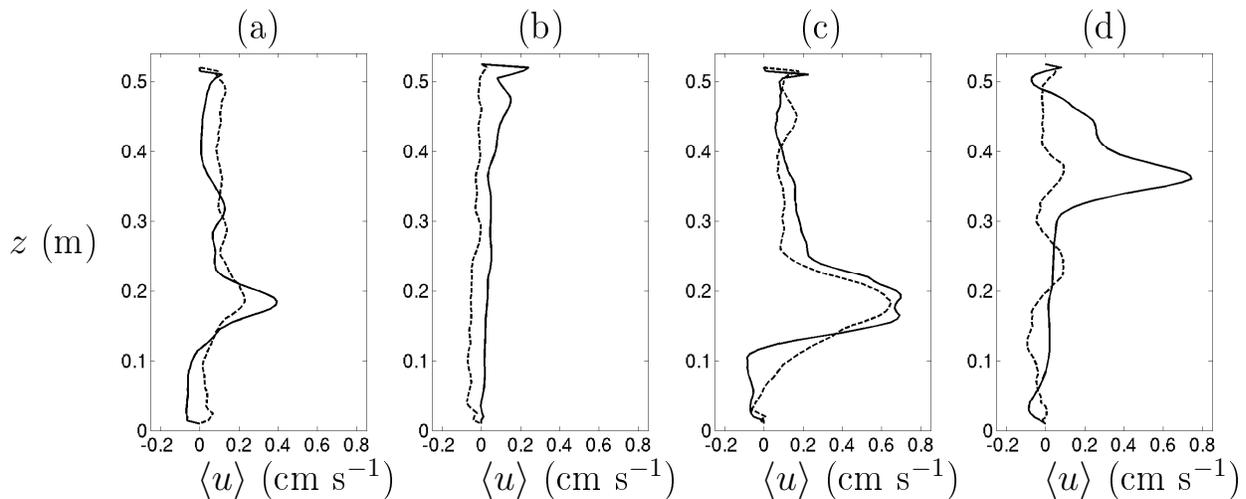


FIGURE 5.20 – Valeurs moyennes de la composante horizontale de la vitesse extraites aux positions  $x = 4.4$  m (traits continus) et  $x = 5.4$  m (traits pointillés) pour les expériences avec la barrière verticale. (a) Barrière verticale de hauteur  $b \simeq H/3$  et (b) barrière verticale de hauteur  $b \simeq 2H/3$  pour le cas 2. (c) Barrière verticale de hauteur  $b \simeq H/3$  et (d) barrière verticale de hauteur  $b \simeq 2H/3$  pour le cas 3.

La figure 5.20 illustre la valeur moyenne de la composante horizontale de la vitesse

$$\langle u(x, z) \rangle_{t_0} = \frac{1}{mT} \int_{t_0 - mT/2}^{t_0 + mT/2} u(x, z, t) dt, \quad (5.15)$$

obtenue en moyennant sur  $m = 10$  périodes en régime établi ( $t_0 \simeq 500$  s), pour toutes les expériences réalisées. Excepté dans le cas 2 avec la barrière verticale de hauteur  $2H/3$  (b), on distingue clairement un courant moyen s'éloignant de la topographie et localisé au niveau du sommet de la topographie. Le courant est plus intense pour le cas 3 (c et d), correspondant à l'harmonique à  $2\omega$  piégée également à cette même profondeur. L'amplitude de ce courant peut être assez importante, de l'ordre de  $0.5 \text{ cm s}^{-1}$  à une distance de  $0.2$  m de la topographie, ce qui est comparable avec le champ observé à la fréquence du forçage à la figure 5.17.

Ainsi, cette information vient corrélérer celle obtenue via l'analyse des harmoniques transmises, à savoir que le sommet de la barrière verticale est le lieu des interactions non-linéaires entre l'onde incidente et la topographie.

### 5.3.4.3 Synthèse

Les résultats obtenus peuvent être comparés aux résultats analytiques présentés par Robinson [109]. L'analyse est basée sur l'utilisation des fonctions de Green pour exprimer

les champs d'ondes internes dans une stratification de profondeur  $H$  et avec  $N$  constant. En imposant que la superposition de l'onde incidente, un mode- $m$ , et des champs réfléchis et transmis vérifie les conditions aux limites sur la barrière verticale, on peut alors exprimer l'amplitude des champs réfléchis et transmis par la barrière verticale de hauteur  $b$ .

Ainsi, si l'on suppose l'onde incidente (monochromatique en temps) est décrite par

$$\psi^{inc}(X, Z) = \sin(mZ) \exp(-imX), \quad (5.16)$$

avec  $Z = \pi z/H$  et  $X = \pi \tan \theta x/H$ , on peut exprimer le champ total sous la forme

$$\psi(X, Z) = \sin(mZ)e^{-imX} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nZ) \exp(inX \text{sign}(X)), \quad (5.17)$$

où  $\text{sign}(X) = \pm 1$  selon le signe de  $X$  et

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{b\pi/H} f(z) \sin(nz) dz. \quad (5.18)$$

L'allure de  $f(z)$  ne dépend que du mode- $m$  incident et de la hauteur de la barrière, et pas de la fréquence de l'onde.

Les structures observées expérimentalement à la pulsation du mode incident peuvent être comparées avec l'étude analytique de Robinson [109] dans le cas d'un mode-1 incident sur une barrière verticale de hauteur  $H/3$  et  $2H/3$ . La décomposition modale analytique a été superposée aux résultats présentés à la figure 5.18 (barres blanches), et on peut observer que l'amplitude des modes n'est en général pas bien décrite par l'approche analytique.

Il est possible également de comparer le taux de transmission de l'énergie par la barrière, ce qui est fait à la figure 5.21 où l'on a considéré le modèle analytique pour toutes les hauteurs de barrière possible ainsi que les données expérimentales obtenues à partir des deux composantes de la vitesse. De même que pour la décomposition modale, le taux de transfert énergétique n'est pas bien décrit par le modèle. On pourra cependant noter que la comparaison pour la barrière verticale de hauteur  $H/3$  est meilleure que pour celle de hauteur  $2H/3$ , de même le cas 2 (cercles) est plus proche du modèle que le cas 3 (triangles).

Le fait que notre stratification ne soit pas linéaire peut être évoqué quant à la comparaison du modèle avec nos expériences. En effet, la structure modale étant modifiée de façon non triviale, il en résulte que l'interaction avec une topographie est différente du cas uniforme du fait des modulations de l'amplitude du mode selon la verticale. Par ailleurs, l'influence des défauts de la stratification linéaire est plus forte lorsque la pulsation tend vers  $N$ . Cela pourrait notamment expliquer la dépendance en fréquence des résultats expérimentaux.

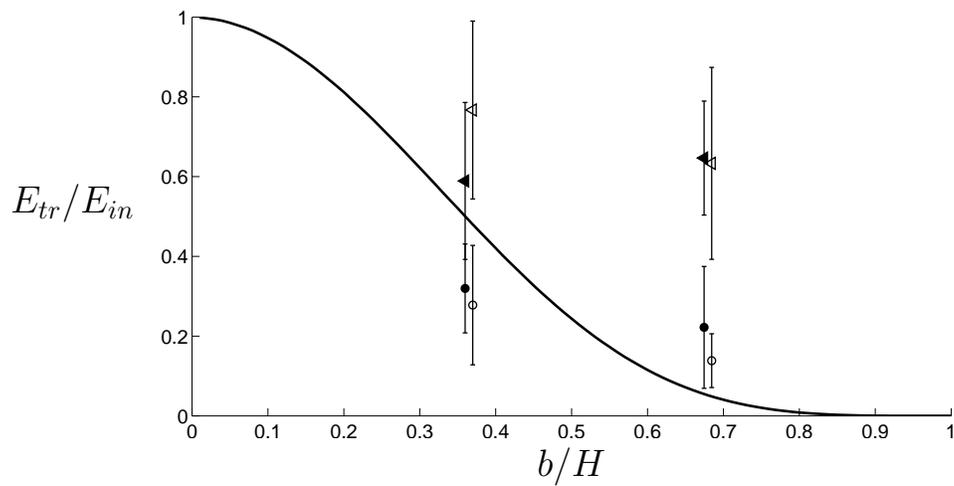


FIGURE 5.21 – Pourcentage d'énergie transmise par un mode-1 incident sur une barrière verticale en fonction de la hauteur de cette dernière comparativement à la profondeur du fluide stratifié. La ligne continue représente le modèle présenté par Robinson [109] pour un mode-1 incident, et les symboles représentent les expériences réalisées pour les deux hauteurs de barrière. Les symboles vides (respectivement pleins) correspondent à l'analyse de la composante horizontale  $u$  (respectivement verticale  $w$ ) du champ de vitesse.

Finalement, on peut remarquer également que le champ transmis par la barrière verticale présente des similitudes avec le champ rayonné par la même topographie mais dans le cas d'un forçage barotrope [68, 106], illustré à la figure 5.22. Les faisceaux émis au sommet de la barrière se superposent au mode-1 incident dans le cas des expériences (*cf.* figure 5.17).

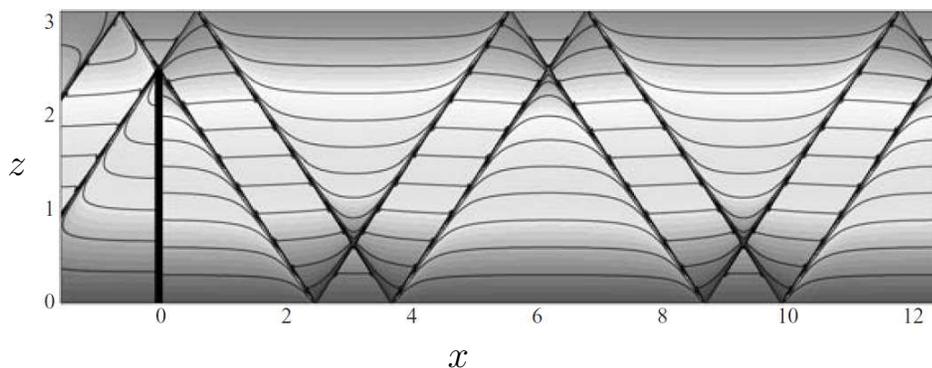


FIGURE 5.22 – Allure du champ de densité (lignes iso-densité) pour la marée interne générée au niveau d'une barrière verticale de hauteur  $b/H = 0.8$  (trait épais en  $x = 0$ ). Image extraite de [68].

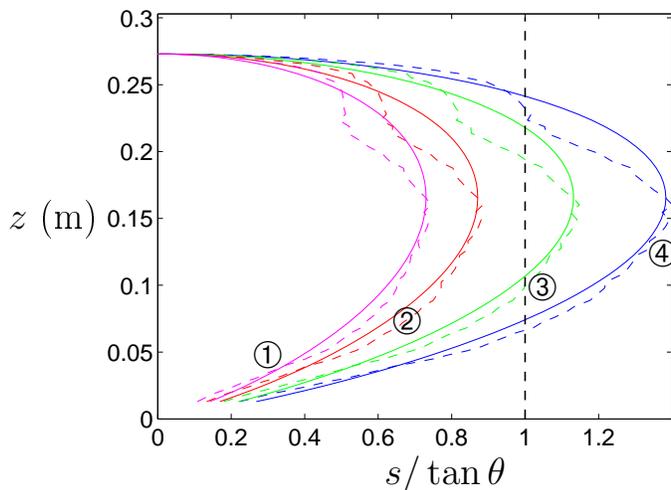


FIGURE 5.23 – Criticalité  $s/\tan\theta$  dans le cas de la montagne gaussienne en fonction de l'altitude, pour les quatre fréquences considérées initialement (cas 1 à 4). Traits continus pour  $\tan\theta = \sqrt{\omega^2/(\bar{N}^2 - \omega^2)}$  et discontinus pour  $\tan\theta(z) = \sqrt{\omega^2/(N(z)^2 - \omega^2)}$ . La limite sous-critique/sur-critique est symbolisée par la verticale  $s/\tan\theta = 1$  (pointillée noire).

### 5.3.5 Mont Gaussien

Après avoir étudié la géométrie particulière de la barrière verticale, nous avons considéré le cas d'une montagne gaussienne définie par  $h(x) = h_0 \exp(-(x - x_0)^2/2\sigma^2)$  et construite en PVC. Les dimensions de ce « ridge » océanique sont une hauteur maximale  $h_0 = 0.273$  m et une variance  $\sigma = 0.3$  m, de telle sorte que son extension dans la direction ( $Ox$ ) est d'environ 1.5 m. L'extension transverse selon la direction ( $Oy$ ) est de 2.0 m et la topographie est centrée en  $x_0 = 3.93$  m. Nous allons étudier de la même façon que précédemment la conversion à la fréquence de l'onde incidente ainsi que les non-linéarités susceptibles de se développer.

Il est important de remarquer qu'à la différence avec l'étude de la section 5.3.4, la géométrie de la montagne est telle qu'une partie est sous-critique et une autre sur-critique, comme illustré à la figure 5.23. Ainsi, dans le cas 2, la montagne sera partout sous-critique alors que dans le cas 3, seule la partie de la topographie comprise dans l'intervalle  $z \in [0.1; 0.2]$  m sera sur-critique.

#### 5.3.5.1 Conversion modale à la fréquence de l'onde incidente

Comme dans le cas de la barrière verticale, nous analysons la structure du champ transmis en appliquant la décomposition modale sur la fenêtre d'observation  $x \in [5.15; 5.6]$  m, correspondant à la caméra la plus éloignée de la topographie. Dans le cas de la montagne gaussienne, il est particulièrement important de se positionner dans une zone où la pro-

Cas	$a_1$ (cm s <sup>-1</sup> )		$e_1/E_{in}$		$E_{tr}$ (cm s <sup>-1</sup> ) <sup>2</sup>		% transmis	
	$u$	$w$	$u$	$w$	$u$	$w$	$u$	$w$
2	0.23	0.19	30	42	0.18	0.084	37	42
3	0.43	0.34	50	62	0.38	0.18	40	30

TABLE 5.6 – Décomposition modale de l’écoulement transmis par une montagne gaussienne. Deux valeurs basées sur les composantes horizontale  $u$  et verticale  $w$  du champ de vitesse sont données. Le pourcentage transmis est obtenu en comparant le flux d’énergie transmise avec le flux incident de la table 5.4.

fondeur est constante pour que la décomposition modale ait encore un sens.

Le champ d’onde interne transmis par la montagne gaussienne pour les cas 2 et 3 est présenté aux figures 5.24 (a) et (b). Les visualisations sont obtenues au même instant par rapport à la phase du mode incident. On constate que les cas sous-critique et sur-critique sont similaires. Une légère singularité dans le cas 3 (b) est observable au niveau de la topographie, proche de la profondeur  $z = 0.2$  m. Ceci correspond au début de la zone sur-critique de la topographie. Le rouleau passant alors au sommet de la topographie semble légèrement déformé.

L’analyse de la structure modale nous permet de mettre en évidence cette légère différence de façon plus notoire. Bien que les ordres de grandeurs de l’énergie transmise soient les mêmes pour les cas sous-critique et sur-critique (*cf.* table 5.6), on peut distinguer que la décomposition modale est différente. Le mode-1, encore dominant pour le cas sur-critique, devient du même ordre de grandeur que le mode-2 dans le cas sous-critique comme on peut le voir à la figure 5.25. Ce résultat est particulièrement important puisqu’il met en évidence la possibilité de transmettre un champ d’ondes internes dominé par des structures verticales plus petites que l’onde incidente. La dissipation lors de la propagation étant plus importante pour les plus petites structures (*cf.* formule (2.39)), l’énergie de la marée interne va donc se dissiper au niveau de la topographie ou dans un environnement proche.

D’autres modes sont générés avec une amplitude plus faible mais une phase assez bien définie. Cela est en accord avec les observations des structures de la figure 5.24 où des faisceaux avec un angle  $\theta = \pm \arcsin(\omega/N)$  sont bien visibles, ce qui est caractéristique de la superposition de quelques modes avec un déphasage entre les modes spécifique, comme nous l’avons déjà fait remarquer pour la barrière verticale. Nous constatons cependant que dans le cas de la montagne gaussienne, les premiers modes transmis (1 à 3) semblent avoir un déphasage constant les uns par rapport aux autres. On peut écrire  $\phi_n = \phi_1 + n\delta\phi$  avec  $\delta\phi \simeq 2\pi/3$  pour le cas sous-critique (figure 5.25 (b)) et  $\delta\phi \simeq \pi/3$  pour le cas sur-critique (figure 5.25 (d)).

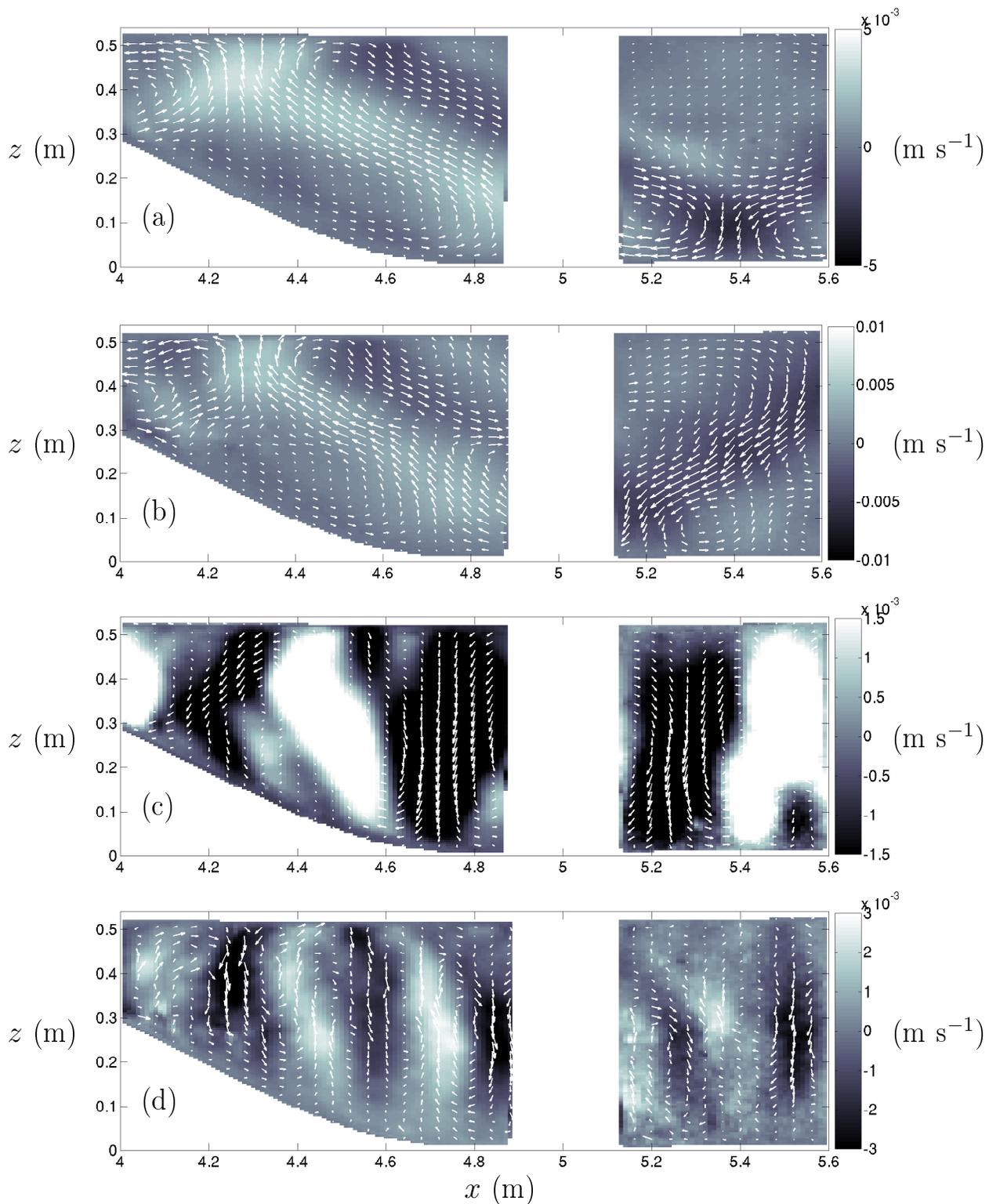


FIGURE 5.24 – Vues verticales des champs de vitesse transmis après la montagne gaussienne filtrés à la pulsation de forçage  $\omega$  pour les cas (a) 2 et (b) 3 (*cf.* table 5.2), et à la pulsation  $2\omega$  pour les cas (c) 2 et (d) 3 également. L'échelle de couleur représente la composante verticale de la vitesse en  $\text{m s}^{-1}$ , et les vecteurs indiquent la direction locale de la vitesse.

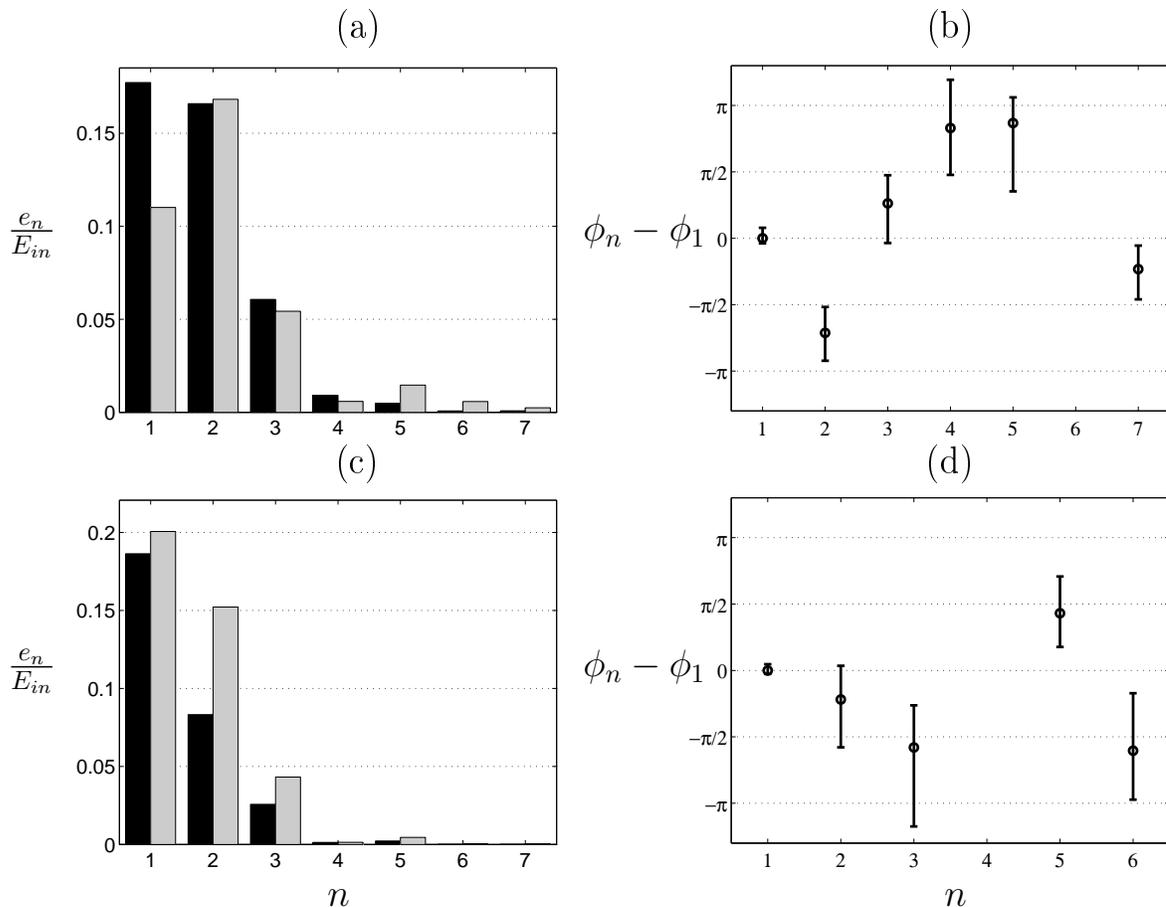


FIGURE 5.25 – Décomposition modale pour les expériences avec la montagne gaussienne pour le cas 2 (a-b) et 3 (c-d). L’amplitude des modes (a-c) est en noir (respectivement en gris) pour la décomposition basée sur la composante verticale (respectivement horizontale) de la vitesse. Lorsque la phase du mode- $n$  n’est pas représentée (b-d), ce mode ne fait pas partie de la décomposition.

### 5.3.5.2 Aspects non-linéaires

L’étude des non-linéarités induites par l’interaction du mode-1 incident avec la topographie gaussienne est grandement similaire à celle réalisée pour la barrière verticale.

Comme on peut le voir aux figures 5.24 (c) et (d), on retrouve l’émission d’une onde interne à la pulsation  $2\omega$  étant générée au sommet de la topographie, et qui se propage au loin de la topographie lorsque la pulsation de l’onde incidente est inférieure à  $\bar{N}/2$ . Dans le cas 2 où l’harmonique est la plus intense, la structure spatiale de cette onde est décrite principalement par la superposition d’un mode-1 et d’un mode-2, représentant chacun 40% du flux d’énergie total, et approximativement en phase. Ce flux total d’énergie correspond à  $0.083 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  soit environ 40% de l’énergie incidente, ce qui est équivalent au flux transmis à la pulsation de l’onde incidente.

Dans le cas 3 seulement, nous avons pu observer un courant moyen (non représenté

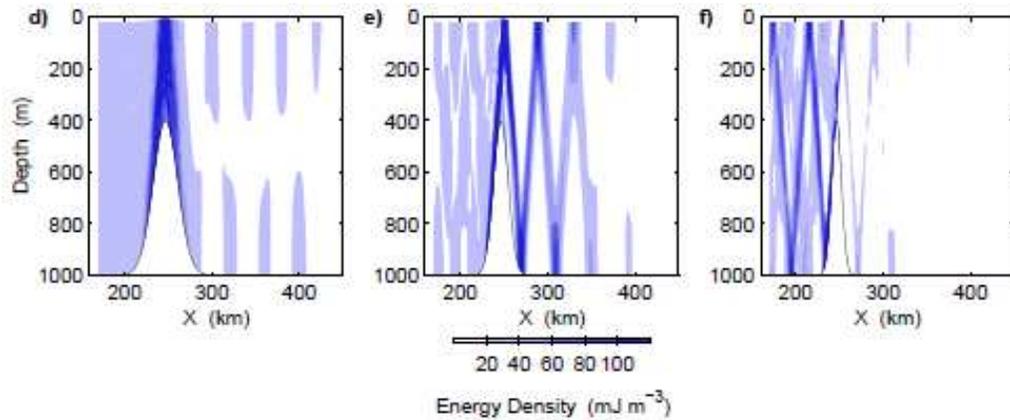


FIGURE 5.26 – Densité d'énergie barocline lors de simulations numériques étudiant l'interaction d'un mode-1 avec une montagne gaussienne sous-critique (gauche), critique (centre) et sur-critique (droite). Image extraite de [59].

dans ce manuscrit) d'amplitude valant  $0.4 \text{ cm s}^{-1}$  à la position  $x = 4.4 \text{ m}$ , et localisé au niveau de la profondeur  $z = 0.3 \text{ m}$ . Cela correspond à la hauteur de la topographie  $h_0 = 0.297 \text{ m}$ .

### 5.3.5.3 Synthèse

Les analyses de la conversion d'un mode-1 sur une topographie gaussienne dont les dimensions sont comparables aux longueurs d'ondes horizontale et verticale de l'onde incidente dans un cas sous-critique et sur-critique conduisent à des conclusions similaires, malgré la différence de nature de la topographie.

Le taux de transmission de l'énergie, de l'ordre de 40% de l'énergie incidente, semble ainsi peu influencé par la nature de la topographie et la hauteur de la topographie joue certainement un rôle plus important. La structure de champ transmis est cependant différente dans les deux cas considérés, où le cas sous-critique correspond à un champ transmis contenant majoritairement de plus petites structures verticales que le mode incident. Les non-linéarités observées semblent encore une fois dues à l'interaction non-linéaire entre l'onde incidente et la topographie, maximum au niveau du sommet de la topographie.

Au final, ces résultats sont en accord avec des simulations numériques réalisées par Johnston et Merrifield [59]. Leurs travaux étudient l'influence d'une montagne sous-marine de hauteur et de criticalité variable, à deux et trois dimensions, à des échelles océaniques.

Ces auteurs avaient notamment observé que le champ transmis par la topographie se décompose en modes plus élevés, ayant une phase bien définie ce qui induit une localisation de la densité énergétique le long de faisceaux nettement visibles (*cf.* figure 5.26). La hauteur de la topographie influence principalement les taux de transmission et réflexion de l'énergie tandis que la criticalité influence la génération de modes supérieurs. Leur

code numérique étant non-linéaire, ils mettent également en évidence la génération d'harmoniques ayant une structure décrite principalement par un mode-1, mais également la présence de zone de mélange au niveau des topographies.

## 5.4 Conclusions

L'approche analytique introduite par [109] dans le cadre de la barrière verticale est fondée sur la théorie des fonctions de Green et peut se généraliser sur les mêmes bases. Les solutions analytiques de la conversion de la marée barocline à une topographie quelconque ne sont pas explicites mais une approche numérique peut permettre de calculer les structures transmises et réfléchies au niveau des topographies. Les progrès récents obtenus dans le domaine de la conversion barotrope [106, 21] permettent d'espérer une application future de la méthode employée, en adaptant la source du forçage.

Cependant, les résultats présentés dans ce chapitre mettent en évidence que cette approche ne prend pas en compte l'aspect non-linéaire de la conversion, tant au point de vue de la stratification qu'au point de vue des interactions non-linéaires onde-topographie pouvant générer des harmoniques et des courants moyens.

Par ailleurs, il est indispensable de prendre en compte la rotation de la Terre pour décrire des phénomènes océaniques. Cependant, l'ensemble de cette étude en rotation sous-entend la connaissance du fonctionnement « normal » de l'excitateur dans ce cas spécifique. Nous avons réalisé des expériences en rotation avec la montagne gaussienne mais aucune en l'absence de topographie. Ainsi il nous est difficile de présenter les observations faites.

## Résumé

Nous avons étudié l'interaction des ondes internes avec une topographie sous deux aspects.

Dans un premier temps, l'étude du problème fondamental de l'interaction d'une onde plane avec un plan incliné nous a permis de mettre en évidence que les structures se réfléchissant à la paroi ne sont pas régies par le modèle de Phillips [103] dans la limite de stabilité gravitationnelle des ondes. L'évolution des nombres d'ondes lors de la réflexion n'est donc pas un problème simple. La description d'ondes localisées le long de la pente, dans la couche limite, a également été présentée.

Nous avons considéré par la suite une configuration plus proche des mécanismes océaniques, l'interaction d'un mode-1 avec une topographie de taille comparable aux longueurs d'ondes horizontale et verticale. Deux types de topographies ont été envisagés, une barrière verticale très fine et une montagne gaussienne.

L'analyse de la conversion de la structure modale incidente en de plus petites échelles spatiales a permis de mettre en avant le rôle de la criticalité de la topographie, les pentes sous-critiques étant les plus efficaces pour générer des modes plus élevés. L'influence de la hauteur de la topographie joue un rôle plus important dans le taux de transmission de l'énergie.

L'importance des mécanismes non-linéaires a également été mis en évidence, avec la présence d'ondes internes à la fréquence double de l'onde incidente mais également avec l'existence d'un courant moyen ayant pour origine le sommet de la topographie.

La comparaison avec un modèle analytique dans le cas de la barrière verticale, permet de souligner la limite d'une approche linéaire théorique pour décrire les mécanismes observés. Dans le cas de la montagne gaussienne, la conclusion principale de nos expériences est que le mécanisme de conversion de la marée barocline au niveau d'une topographie ne doit pas être négligé dans la liste des processus de dissipation des ondes internes. Il permet d'augmenter le taux de dissipation de l'énergie des modes étant donné le transfert énergétique entre modes, les modes plus élevés se dissipant plus vite.

# Chapitre 6

## Ondes internes et interfaciales de gravité. Couplage et génération de solitons

Nous présentons une étude du mécanisme d'interaction entre ondes internes et interfaciales de gravité, conduisant à la première mise en évidence expérimentale de génération d'ondes solitaires par un faisceau d'onde interne.

Après avoir détaillé les travaux analytiques, permettant une compréhension approfondie des mécanismes mis en jeu, nous décrivons les expériences réalisées sur la plateforme Coriolis lors d'une collaboration européenne. La mise en évidence de deux types d'évolution non-linéaires distinctes permet de confirmer les résultats établis analytiquement.

### 6.1 Coupler des dynamiques très différentes

#### 6.1.1 Introduction

La présence de sauts de densité localisés au niveau d'une profondeur donnée est une situation souvent rencontrée dans les fluides stratifiés. Ainsi une thermocline peut-être observée proche de la surface des lacs l'été, due à une importante augmentation de la température de l'eau à la surface chauffée par le soleil. Dans l'océan, le réchauffement des couches de surface combiné à une variation de la salinité de l'eau due à l'évaporation, est également à l'origine d'une pycnocline dont les propriétés sont saisonnières. Cette configuration particulière des fluides stratifiés est à l'origine d'un couplage entre deux types d'ondes de gravité : les ondes internes et les ondes interfaciales. Par ailleurs, ces deux types d'ondes internes sont régies par des équations non-linéaires pouvant entraîner la génération d'harmoniques pour les ondes internes, et également d'ondes solitaires dans

le cas des ondes interfaciales.

Les trains d'ondes solitaires sont particulièrement étudiées dans le contexte océanographique. Ces oscillations de grandes amplitudes sont souvent observées par groupe, qui apparaissent périodiquement à la fréquence de la marée, suggérant une origine barotrope. Une observation satellite des ces trains d'ondes dans le golfe de Gascogne est donnée sur la figure 6.1 (b). En effet, un écoulement oscillant au dessus d'une topographie (un talus continental ou une montagne sous-marine) peut engendrer des perturbations de l'interface évoluant non-linéairement et pouvant être décrites par une équation de type Korteweg-de Vries [49] (noté KdV par la suite).

Récemment, un autre mécanisme a été évoqué par New & Pingree [93, 104, 94] pour la génération d'ondes internes solitaires, d'après des campagnes océanographiques dans le golfe de Gascogne. L'origine de la perturbation est toujours à la fréquence de la marée, mais est due à la réflexion d'un faisceau d'ondes internes sur la thermocline. Ce dernier étant généré par le talus continental (*cf.* figure 6.1 (a)), se propage vers le fond où il se réfléchit avant de rencontrer la surface de l'océan à une distance considérable de la topographie (environ 150 km).

Ce mécanisme dit de « génération locale » de trains d'ondes solitaires a depuis été corroboré notamment grâce à la mise en évidence satellite de ces ondes aux lieux prédits par une modélisation des faisceaux émis par la marée au niveau du talus continental [92]. Le principe de la modélisation illustré à la figure 6.1 (c), considère une bathymétrie idéalisée mais une stratification réaliste. Des simulations numériques réalistes [75] ont également confirmé l'éventualité de ce mécanisme (figure 6.1 (d)), et il est également proposé pour expliquer l'observation d'ondes solitaires dans le canal du Mozambique [114]. Nous allons nous focaliser sur cette interaction particulière.

Des expériences en laboratoire ont déjà étudié ce type d'interaction. La réflexion d'un faisceau d'ondes internes sur une couche homogène très profonde mais avec un saut de densité a été étudiée par Delisi et Orlanski [20] qui ont pu mettre en évidence un déphasage du faisceau réfléchi en présence d'oscillations de l'interface, pouvant conduire à une inversion locale du gradient de densité et du mélange. Une autre étude en présence de deux pycnoclines identiques, l'une en surface et l'autre au fond, a été réalisée par Nicolaou *et al.* [96]. L'utilisation d'un cylindre oscillant au milieu de la stratification engendre la réflexion symétrique au fond et à la surface d'ondes internes sur les deux thermoclines, générant des ondes de thermocline dans la zone linéairement stratifiée. Selon les oscillations en phase ou en opposition de phase des deux interfaces perturbées, la présence de modes verticaux impairs ou pairs dans la zone stratifiée est observée. Plus récemment, Mathur et Peacock [74] ont étudié la propagation d'ondes internes dans une stratification non-uniforme, avec présence d'une stratification avec pycnocline. Ils ont pu mettre en évidence le piégeage de faisceau d'ondes internes dans la pycnocline, dispersant le faisceau réfléchi sur une plus grande section que le faisceau incident. Leur étude linéaire

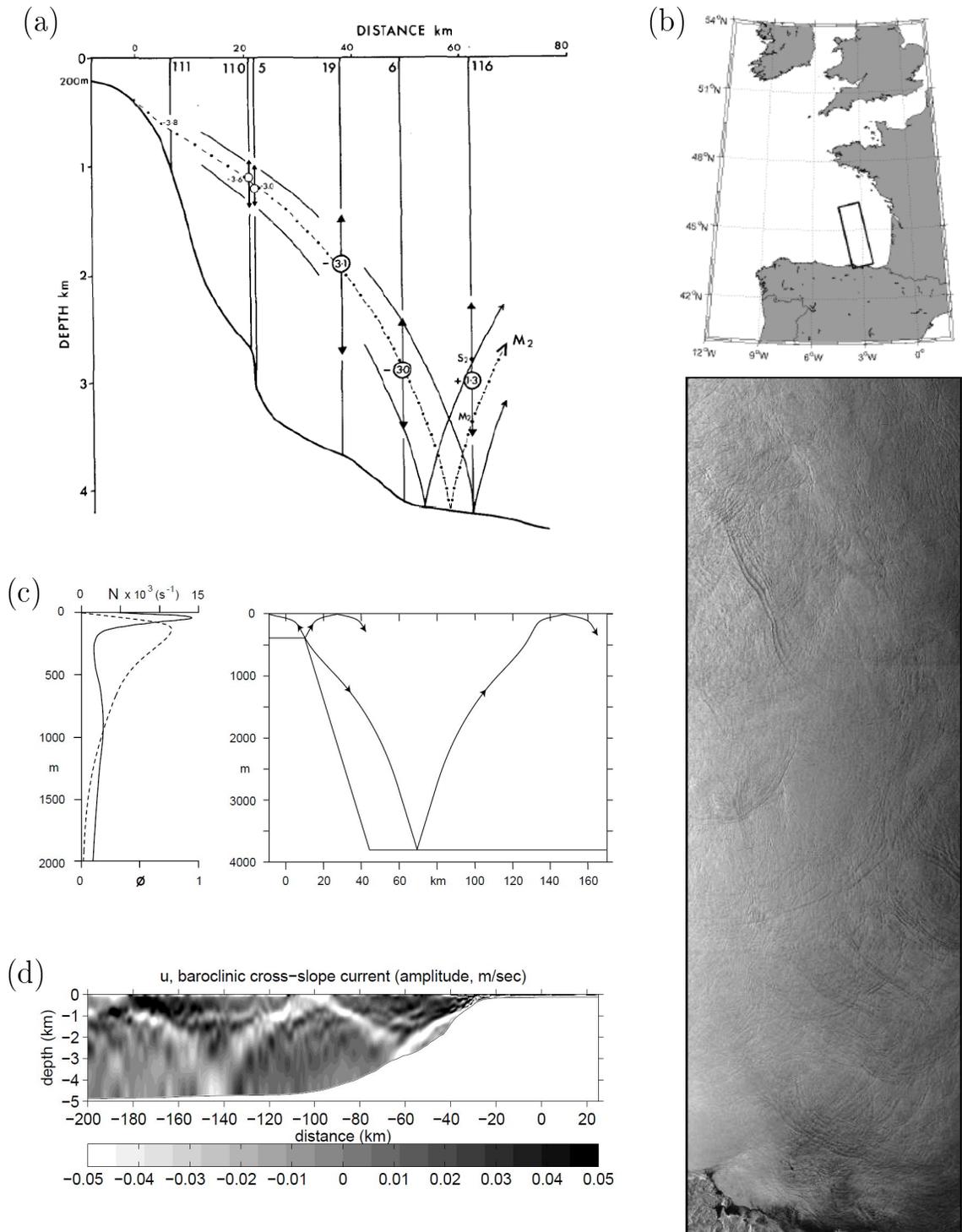


FIGURE 6.1 – (a) Faisceau d’ondes internes observé au niveau du talus continental par la marée barotrope (extrait de [104]). (b) Vue satellite de la surface de l’océan dans le golfe de Gascogne en présence de trains d’ondes solitaires (extrait de [5]). (c) Principe du mécanisme de génération locale de solitons dans le golfe de Gascogne (extrait de [92]). (d) Simulations numériques réalistes du champ d’ondes internes dans le golfe de Gascogne (extrait de [75]).

met en évidence que la propagation guidée d'ondes dans la pycnocline est fonction des propriétés de l'onde incidente et du gradient de densité.

Inspirés par les observations océaniques ou encore par les expériences en laboratoire, différents modèles ont été développés dans le but de comprendre l'évolution de l'interface entre un fluide continûment stratifié et une couche homogène. La modélisation de la stratification de l'océan (ou d'un lac) considère un fluide à deux couches, avec une interface localisée au niveau de la pycnocline et constitué

- d'une couche homogène de densité  $\rho_0(1 - \Delta)$  et d'épaisseur  $h$ ,
- d'une couche linéairement stratifié de densité moyenne  $\rho_0$  et de pulsation de Brunt-Väisälä  $N$ .

Nous réalisons une comparaison détaillée de ces travaux en nous limitant à l'approche linéaire dans la section suivante.

### 6.1.2 Comparaison de différentes approches analytiques

Nous allons présenter différents travaux analytiques afin de mieux comprendre le couplage entre ondes internes et ondes interfaciales.

Nous considérons la situation illustrée à la figure 6.2. Une couche homogène de densité  $\rho_0(1 - \Delta)$  et de hauteur  $h$  repose au-dessus d'un fluide stratifié de pulsation caractéristique  $N$  et de densité moyenne  $\rho_0$ . La couche homogène en surface est régie par l'équation de Laplace

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = 0 \quad \text{pour } z \in [0, h], \quad (6.1)$$

où  $\psi(x, z, t)$  est la fonction de courant. Le fluide linéairement stratifié est quant à lui décrit par l'équation linéaire (2.13) avec  $N(z) = N$  constant, pour  $z \in [-\infty, h]$  (océan de profondeur infinie). Enfin l'équation de l'interface entre les deux couches est  $z = \eta(x, t)$ .

Par la suite, nous allons présenter le problème sous forme adimensionnée pour faciliter les comparaisons, en utilisant l'adimensionnalisation introduite par Akylas *et al.* [3]. On utilisera  $h$  et  $h/c_0$  comme longueur et temps caractéristique, avec  $c_0 = \sqrt{gh\Delta}$  la vitesse limite des ondes interfaciales. On notera notamment que  $N^2$  sera remplacé dans l'équation (2.13) par  $\mu^2 = (Nh/c_0)^2$ .

La description du problème est complète en explicitant les conditions aux limites. Nous considérons la surface libre comme une paroi rigide, impliquant

$$\psi_z = 0 \quad \text{en } z = 1, \quad (6.2)$$

et la continuité de la vitesse verticale et des contraintes à l'interface,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - w = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (6.4)$$

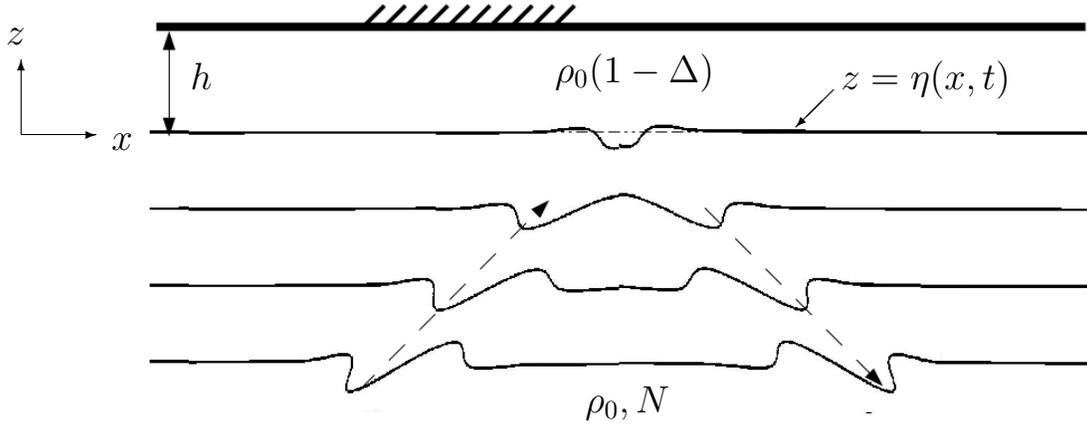


FIGURE 6.2 – Principe de la réflexion d'une onde interne sur une pycnocline de profondeur  $h$ . La position de l'interface est en  $z = 0$  en l'absence de perturbations. Les traits continus représentent les lignes iso-densité. Les directions de propagation des faisceaux incident et réfléchi sont indiquées par les flèches avec tirets.

### 6.1.2.1 Faisceau incident et réponse interfaciale

La description la plus générale du faisceau incident se fait grâce à la transformée de Fourier spatiale (*cf.* section 2.2.1.2). D'après la figure 6.2, nous considérons une onde se propageant de la gauche vers la droite

$$\psi(x, z, t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int \tilde{Q}(k) e^{ik(x \sin \theta - z \cos \theta)} dk \Leftrightarrow \psi(\xi, \eta, t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int \tilde{Q}(k) e^{ik\eta} dk. \quad (6.5)$$

avec  $\omega^2 = \mu^2 k_x^2 / (k_x^2 + k_z^2) = \mu^2 \sin^2 \theta$  et  $(\xi, \eta) = (x \cos \theta + z \sin \theta, x \sin \theta - z \cos \theta)$ .

Dans l'étude réalisée, il est nécessaire de connaître  $\psi(x, z = 0, t)$ , le profil horizontal se réfléchissant sur la pycnocline. On peut remarquer que

$$\psi(x, z = 0, t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int \tilde{Q}(k) e^{ikx \sin \theta} dk = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int Q(k_x) e^{ik_x x} dk_x. \quad (6.6)$$

L'expression (6.6) implique que connaître la décomposition spectrale du profil transverse ou du profil horizontal est analogue, puisque  $Q(k) = \frac{1}{\sin \theta} \tilde{Q}(k / \sin \theta)$ . On peut également faire le changement de variable  $X = x \sin \theta$ . Ainsi quelque soit le faisceau considéré, on peut le définir complètement à partir de son profil horizontal ou transverse (voire vertical comme déjà vu au chapitre 4). Cela est notamment intéressant lorsque la mesure transverse est de meilleure qualité que celle horizontale.

Une fois la structure du faisceau incident connue, la théorie de la réponse linéaire nous permet d'écrire le déplacement de l'interface sous la forme

$$\eta(x, t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int Q(k_x) A(k_x) e^{ik_x x} dk_x, \quad (6.7)$$

où  $A(k_x)$  est la réponse de l'interface à une perturbation harmonique de nombre d'onde  $k_x$ . Les différents modèles présentés par la suite se différencient notamment de par cette fonction. Nous ne précisons plus l'indice  $x$  par la suite pour les expressions adimensionnées.

### 6.1.2.2 Approche linéaire de Delisi et Orlanski

En plus de leur approche expérimentale [20], les auteurs proposent une théorie linéaire de la réflexion d'une onde interne sur une couche homogène d'épaisseur infinie ( $h \rightarrow \infty$ ). Bien sûr cette limite n'est pas adaptée à notre changement de variable, et nous supposons  $h$  finie mais avec  $h \gg k_x^{-1}$ . Le fluide stratifié est également de profondeur infinie. Ainsi, les solutions du champ de vitesse vertical pour  $z > 0$  doivent tendre vers zéro à l'infini, et peuvent se mettre sous la forme  $w = \exp(-k_x z) \exp(i(k_x x - \omega t))$ . Selon ces hypothèses, ils expriment la réponse de l'interface sous la forme

$$A(k) = \frac{2(\rho_0 \omega^2 k_z)^2 + 2i\rho_0 \omega^2 k_x k_z [\omega^2 \rho_0 (\rho_e / \rho_0 - \Delta + gk_x \Delta)]}{(\rho_0 \omega^2 k_z)^2 + k_x^2 [\omega^2 \rho_0 (\rho_e / \rho_0 - \Delta + gk_x \Delta)]^2}, \quad (6.8)$$

où  $\rho_e$  est la densité du fluide stratifié proche de l'interface. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on peut remplacer  $\rho_e$  par  $\rho_0$ , et nous supposerons même  $(\rho_e / \rho_0 - 1) \ll \Delta$ . Ainsi, on peut exprimer la réponse de l'interface sous la forme adimensionnée suivante

$$A(k) = \frac{2}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} e^{i\gamma} \quad \text{avec} \quad \tan \gamma = \tan \theta \left[ 1 - \Delta - \frac{k}{\sin^2 \theta} \right], \quad (6.9)$$

où l'on a séparé l'amplitude et la phase de la réponse.

### 6.1.2.3 Généralisation par Thorpe

Thorpe a étudié ultérieurement un cas similaire [120] mais en levant la contrainte  $h \rightarrow \infty$ , la partie linéairement stratifiée restant de profondeur infinie. Bien que ses travaux prennent en compte les interactions non-linéaires, on peut exprimer au premier ordre la réponse linéaire de l'interface. Selon les notations de l'auteur, on a

$$A(k) = 2 \cos \beta e^{i\beta} \quad \text{avec} \quad \tan \beta = \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \frac{\tan \theta}{\tanh(kh)} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = gk\Delta \tanh(kh). \quad (6.10)$$

Il est important de remarquer que la pulsation  $\omega_0$  ne correspond pas à la relation de dispersion des ondes internes entre deux fluides homogènes ou bien encore entre un fluide

homogène et un fluide stratifié. De façon similaire à (6.9), nous obtenons

$$A(k) = \frac{2}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} e^{i\beta} \quad \text{avec} \quad \tan \beta = \left[ 1 - \frac{k \tanh k}{\mu^2 \sin^2 \theta} \right] \frac{\tan \theta}{\tanh k}. \quad (6.11)$$

#### 6.1.2.4 Limite des grandes longueurs d'ondes par Aklyas *et al.*

Dans l'étude récente d'Aklyas *et al.* [3], les auteurs considèrent la même situation que Thorpe mais dans un contexte océanique; ils font l'hypothèse  $kh \ll 1$ , ou encore  $k \ll 1$  dans le cas sans dimension. Avec cette approximation, les auteurs obtiennent

$$A(k) = -i \frac{k\mu^2 \sin(2\theta)}{k^2 - \mu^2 \sin^2 \theta - i\frac{1}{2}k\mu^2 \sin(2\theta)}, \quad (6.12)$$

soit en terme d'amplitude et phase

$$A(k) = \frac{2}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} e^{i\alpha} \quad \text{avec} \quad \tan \alpha = -2 \frac{k^2 - \mu^2 \sin^2 \theta}{k\mu^2 \sin(2\theta)}. \quad (6.13)$$

On peut remarquer qu'en prenant la limite  $k \ll 1$ , on retrouve bien le fait que la relation (6.11) est en accord avec la relation (6.13).

#### 6.1.2.5 Réponse optimale

D'après l'étude des différents modèles, la description la plus générale de la réponse linéaire de l'interface à une perturbation due à une onde interne correspond à la relation (6.11). Il est intéressant de connaître quelles sont les valeurs des paramètres permettant de rendre cette réponse linéaire maximale, qui est alors plus à même d'évoluer non-linéairement.

L'amplitude de la réponse de l'interface (6.11) est maximale lorsque  $\tan \beta = 0$ , ce qui correspond à  $k \tanh k = \mu^2 \sin^2 \theta$ . Il s'agit du cas où les faisceaux incidents et réfléchis sont en phase et l'amplitude des oscillations de l'interface est alors égale à deux fois l'amplitude de l'onde incidente. En se ramenant à des grandeurs dimensionnées, nous obtenons donc la condition

$$k_x h \tanh(k_x h) = \left( \frac{Nh}{c_0} \right)^2 \sin^2 \theta \Leftrightarrow \tanh(k_x h) = \frac{N^2 \sin^2 \theta}{g\Delta k_x}. \quad (6.14)$$

On peut alors remarquer que dans la limite des grandes longueurs d'ondes (devant la hauteur  $h$ ), la condition (6.14) se met sous la forme

$$g\Delta h = \frac{N^2 \sin^2 \theta}{k_x^2} \Leftrightarrow \sqrt{g\Delta h} = \frac{\omega}{k_x}, \quad (6.15)$$

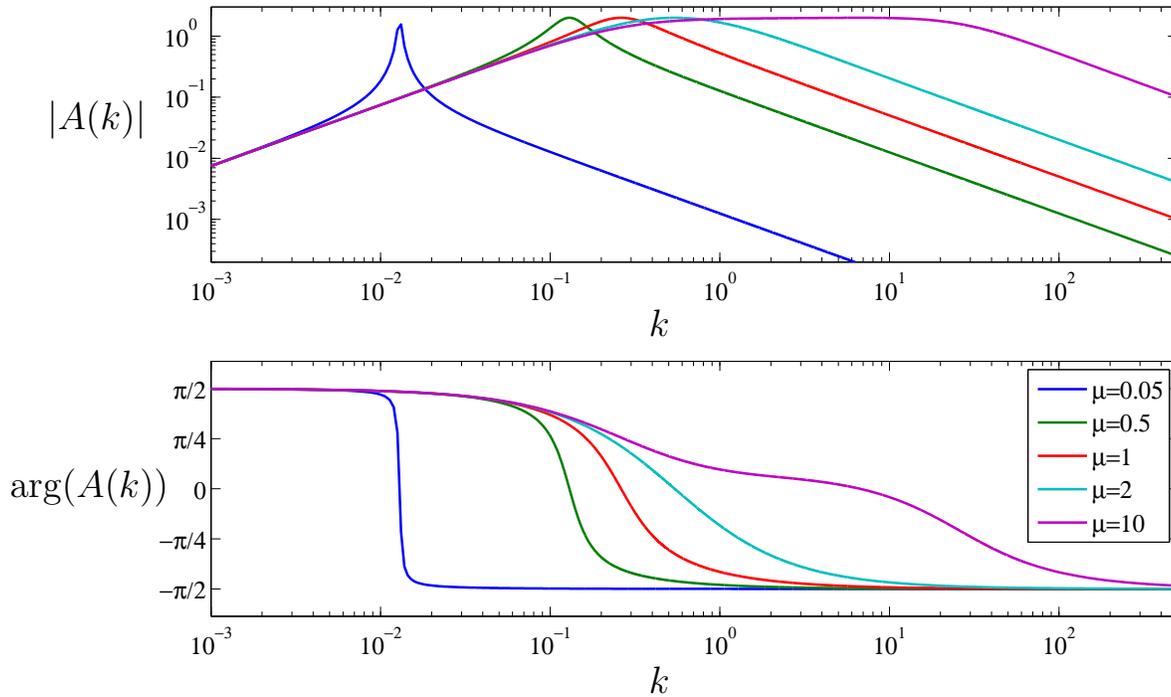


FIGURE 6.3 – Diagramme de Bode de la fonction  $A(k)$  de l'équation (6.11) pour différentes valeurs de  $\mu$ , dans le cas d'une onde incidente avec un angle  $\theta = 15^\circ$ .

qui signifie que la vitesse de phase de l'onde interfaciale est égale à celle de l'onde interne incidente projetée selon la direction horizontale.

Finalement, pour un jeu de paramètres  $(\mu, \theta)$ , nous étudions l'allure globale de la fonction  $A(k)$  afin de pouvoir estimer à quel point ce maximum est piqué. À la figure 6.3, nous présentons le diagramme de Bode associé à la fonction  $A(k)$  pour différentes valeurs de  $\mu$ , pour une onde interne incidente avec un angle  $\theta = 15^\circ$ . On constate que le maximum de  $A(k)$  devient de plus en plus piqué, et se déplace vers les petites valeurs de  $k$  à mesure que  $\mu$  diminue. L'influence de l'angle d'incidence  $\theta$  est plus faible et augmente légèrement la valeur de  $k$  associée au maximum pour une valeur de  $\mu$  fixé.

L'interface joue donc le rôle d'un filtre passe-bande par rapport aux perturbations générées par les ondes internes. Un cas d'interaction particulièrement intéressant est celui d'une onde interne ayant un spectre  $Q(k)$  continu, associé à un faisceau spatialement localisé. Nous considérons le cas particulier où  $\mu = 0.62$ ,  $\theta = 38^\circ$  associé à des conditions expérimentales accessibles au laboratoire, (par exemple  $h = 0.05$  m,  $\Delta = 6.10^{-3}$ ,  $N = 0.68$  rad s $^{-1}$ ). Le faisceau incident correspond à une structure analogue au faisceau autosimilaire présenté en 2.2.2, avec un spectre large centré autour de  $k \sim 5$  (sans unités).

Nous illustrons la réponse spectrale de l'interface à la figure 6.4 (b), où l'on a également représenté le spectre incident de l'onde interne  $Q(k)$ , et la fonction de transfert  $A(k)$ . La focalisation du spectre de l'interface autour d'une longueur d'onde particulière a pour conséquence que l'oscillation qui se développe à l'interface s'étend spatialement

sur une région plus grande que la zone d'impact de l'onde interne (figure 6.4 (a)). Ainsi la perturbation générée à l'interface est à même d'évoluer librement en dehors de la zone de forçage.

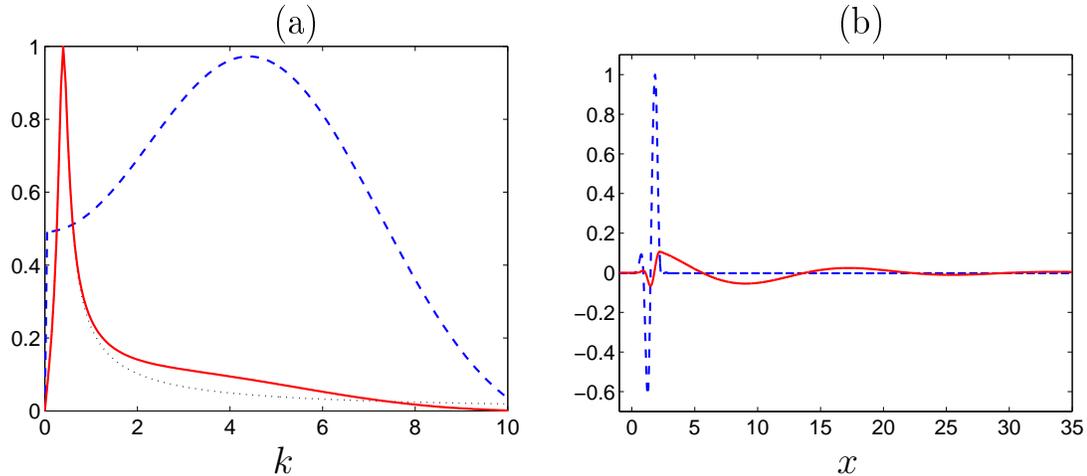


FIGURE 6.4 – (a) Spectres horizontaux de l'onde interne incidente ( $Q(k)$ , tirés bleu), de la fonction de transfert ( $A(k)$ , pointillés noirs) et de l'interface ( $A(k)Q(k)$ , trait continu rouge). (b) Déplacement vertical induit par l'onde interne au niveau de l'interface (tirés bleu) et oscillations résiduelles de l'interface (trait continu rouge).

### 6.1.2.6 Évolutions non-linéaires

Les différents modèles détaillés précédemment ne présentent que la réponse linéaire de l'interface lors de la réflexion d'une onde plane. La dégénérescence de cette perturbation en un train d'ondes solitaires est régie par des équations où un équilibre doit exister entre effets dispersifs et non-linéarités. La dispersion est assurée par le fait que des ondes interfaciales oscillant à une pulsation inférieure à la pulsation de Brunt-Väisälä rayonnent de l'énergie sous forme d'ondes internes dans la partie stratifiée. La non-linéarité vient, quant à elle, directement des équations de Navier-Stokes.

L'approche de Thorpe prend en compte une méthode perturbative, comme présentée à la section 2.3.1.2, où les non-linéarités sont un ordre de grandeur plus faible que la réponse linéaire. La génération d'harmoniques à des fréquences multiples de celle du forçage peut cependant conduire à une déformation asymétrique des oscillations de la pycnocline, et également au rayonnement d'ondes internes à ces mêmes fréquences harmoniques. Ce type d'oscillations de la pycnocline peut conduire à une évolution dégénérant en train d'ondes solitaires, mais cette approche n'est pas considérée par l'auteur.

L'étude réalisée par Akylas *et al.* considère la perturbation linéaire comme une condition initiale pour l'interface, régie par des équations non-linéaire de type KdV. Dans le

cadre de leur hypothèse  $k \ll 1$ , les auteurs séparent notamment le comportement de l'interface proche de la région d'interaction avec les ondes internes, et en champ lointain. Le premier régime est considéré comme peu atténué par radiation d'ondes internes, permettant un raidissement non-linéaire des oscillations lorsque l'amplitude initiale est suffisante. L'évolution en champ lointain est surtout dépendante de l'amplitude de l'oscillation initiale. Au final, les auteurs prédisent que le régime le plus favorable à la génération locale de solitons, dans le cadre de leur hypothèse  $k \ll 1$  impliquant  $\mu \ll 1$ , correspond au cas  $\alpha = NL/c_0 = O(1)$  pour un forçage d'amplitude finie, où  $L$  est une largeur caractéristique du faisceau incident. Ainsi le paramètre  $\alpha$  peut être compris en terme de rapport de vitesse de phase horizontale des ondes internes et interfaciales, puisque  $L \sim \lambda$ .

Finalement, une approche de Gerkema [35], basée sur une décomposition multimodale des ondes internes et interfaciales générées, considère le mécanisme de génération d'ondes solitaires à partir d'ondes internes générées par un forçage barotrope au niveau d'une topographie infinitésimale, dans un fluide stratifié de profondeur finie. La résolution du problème linéaire est faite par décomposition modale du champ d'onde interne, dans le cas d'une stratification continue par morceaux et met en évidence que la réponse de l'interface est maximale lorsque le paramètre

$$\gamma = \frac{(g\Delta h)^{1/2}}{NH} \quad (6.16)$$

est d'ordre 1. L'évolution de cette perturbation dans le cadre d'un modèle non-hydrostatique et non-linéaire met alors en évidence la génération locale de solitons, seulement dans le régime où  $\gamma = O(1)$ . Dans le cadre du forçage considéré, le paramètre  $\gamma$  peut être interprété comme le rapport de la vitesse de phase des ondes interfaciales et celle des ondes internes puisque  $NH \cos \theta / \pi$  correspond à la vitesse de phase horizontale du mode-1 associé à une stratification linéaire.

### 6.1.3 Synthèse

La compréhension du mécanisme de génération locale met en évidence un processus se déroulant en deux étapes. Dans un premier temps, un faisceau d'ondes internes vient se réfléchir à la surface de l'océan où est présente une pycnocline, que l'on peut modéliser par une interface avec un saut de densité. Lors de la réflexion, cette interface est perturbée et une oscillation décrite par une théorie linéaire se développe. Dans un second temps, l'évolution libre de l'interface peut aboutir à la génération de trains d'ondes solitaires lorsque les effets non-linéaires compensent ceux de la dispersion.

Certaines conditions sont favorables à ce mécanisme, dépendant de la nature de la pycnocline et du faisceau d'onde interne incident. Des approches analytiques et des

observations océaniques ont permis d'arriver à ces conclusions, cependant aucune démonstration expérimentale n'existe pour l'instant.

## 6.2 Expériences à grande échelle. Génération de solitons

Les expériences à grande échelle ont été réalisées à la plateforme Coriolis, déjà présentée à la section 5.3.2. Il s'agit d'une collaboration européenne dans le cadre du programme Hydralab III, avec Theo Gerkeman (NIOZ), Louis Gostiaux (LEGI), José Da Silva et Jorge Magalhães (FCUL), Mani Mathur (MIT) et Thierry Dauxois (ENS Lyon). Les résultats présentés dans ce chapitre sont sur le point d'être soumis à *Journal of Fluid Mechanics* [37]. On peut citer plusieurs raisons de réaliser ces expériences à grande échelle plutôt qu'au laboratoire de l'ENS Lyon (où des expériences préliminaires ont été réalisées). Tout d'abord, la grande taille de la cuve permet de considérer un régime établi sans être perturbé par des réflexions multiples venant perturber le faisceau incident. De plus les amplitudes des vitesses utilisées sont suffisamment grande pour espérer que les non-linéarités puissent équilibrer la dissipation. Enfin, certaines techniques de mesures telles que les sondes à ultrasons ou encore la PIV sur de grandes fenêtres de visualisations, sont nécessaires et disponibles à Grenoble.

Outre ma participation active à l'ensemble de la campagne expérimentale, j'ai également grandement participé à l'analyse des données (et notamment des mesures PIV).

En parallèle de ce projet expérimental, des simulations numériques ont été développées par Nicolas Grisouard, reproduisant le dispositif expérimental afin de permettre une comparaison directe avec les expériences. Nous ne détaillerons pas les résultats obtenus, en cours de publication [47], mais les échanges entre les deux équipes ont permis une meilleure compréhension du problème étudié.

### 6.2.1 Dispositif expérimental

#### 6.2.1.1 Mise en place générale

Dans la cuve de 13 m de diamètre, nous avons disposé le générateur d'ondes internes configuré avec le profil de la section 4.4 à environ 8 m du bord de la cuve, comme illustré à la figure 6.5 (a) et (c). Le faisceau d'ondes internes est émis vers le haut, en direction de la pycnocline, et nous définissons l'origine du référentiel à la surface libre, au niveau du centre du générateur. Sur l'axe d'émission ( $y = 0$ ), proche de la paroi, deux murs à  $45^\circ$  sont disposés pour éliminer les ondes réfléchies. Un petit espace permet cependant l'éclairage par la nappe laser du plan ( $xOz$ ).

Le fluide stratifié est obtenu en remplissant par le fond 0.8 m de fluide dont la salinité augmente graduellement, générant une stratification quasiment linéaire où la densité varie de  $1.040 \text{ g cm}^{-3}$  au fond jusqu'à  $1.010 \text{ g cm}^{-3}$  à la surface. La valeur de la pulsation de Brunt-Väisälä valant  $N = 0.6 \text{ rad s}^{-1}$ .

Ensuite, une fine couche d'eau douce (environ 4 cm) est ajoutée par le dessus à l'aide de flotteurs. L'évolution rapide de la densité entre cette couche homogène et la partie continûment stratifiée assure de la présence d'une pycnocline. Cependant, la transition n'est pas toujours très marquée et a tendance à s'atténuer avec le temps. L'ajout d'eau douce sera donc réitéré au fur et à mesure des expériences, et nous siphonnerons régulièrement des couches de fluides proche de la surface grâce à un outil représenté à la figure 6.5 (e). Il est consisté de deux disques espacés de quelques millimètres, un tuyau prélevant du fluide est placé au centre du disque le plus profond, avec un diamètre d'environ 0.15 m et relié à une vanne de débit réglable. Il permet d'extraire du fluide à une altitude précise avec un débit contrôlé. Ainsi différentes pycnoclines ont pu être réalisées (*cf.* figure 6.6), permettant de tester l'influence de la nature de la pycnocline sur la génération locale.

Les mesures de vitesses sont réalisées par PIV (*cf.* section 5.3.2), dans le plan  $(xOz)$  comme illustré à la figure 6.5 (c). Lors des expériences avec pycnocline, les mesures PIV se limitent à la partie linéairement stratifiée, la nappe laser ne pouvant pénétrer la couche homogène à cause des fortes variations d'indice optique. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà fait remarquer à la section 3.2.2.1, l'ensemencement et les fortes variations d'indice ne permettent pas de réaliser des mesures quantitatives dans cette partie de la stratification. Dans la mesure du possible, les champs observés correspondent à la réunion des données issues de deux caméras l'une à côté de l'autre, afin d'obtenir des fenêtres de visualisation d'environ 2 m de large par 1 m de haut. Des zones blanches dans les champs observés peuvent apparaître lorsqu'il n'y a pas superposition des images.

### 6.2.1.2 Motivation du choix de l'onde incidente

Grâce au générateur d'ondes internes utilisé au laboratoire, plusieurs types d'ondes sont à notre disposition (*cf.* chapitre 4).

Les observations océaniques font référence à un faisceau d'ondes internes émis par la topographie. Il a déjà été démontré [43] que cette structure émise au niveau de la pente critique est bien décrite par la théorie de Hurley & Keady [56] proche de la topographie, et par la théorie de Thomas & Stevenson [117] en champ lointain (*cf.* section 2.2.2). Ceci suggère que la configuration présentée à la section 4.4 est adaptée à notre étude.

Par ailleurs, l'utilisation d'une source spatialement localisée ayant un spectre étendu est également motivée par les analyses présentées précédemment, puisqu'alors les oscillations de la pycnocline s'étendront sur une plus grande distance, notamment à l'extérieur

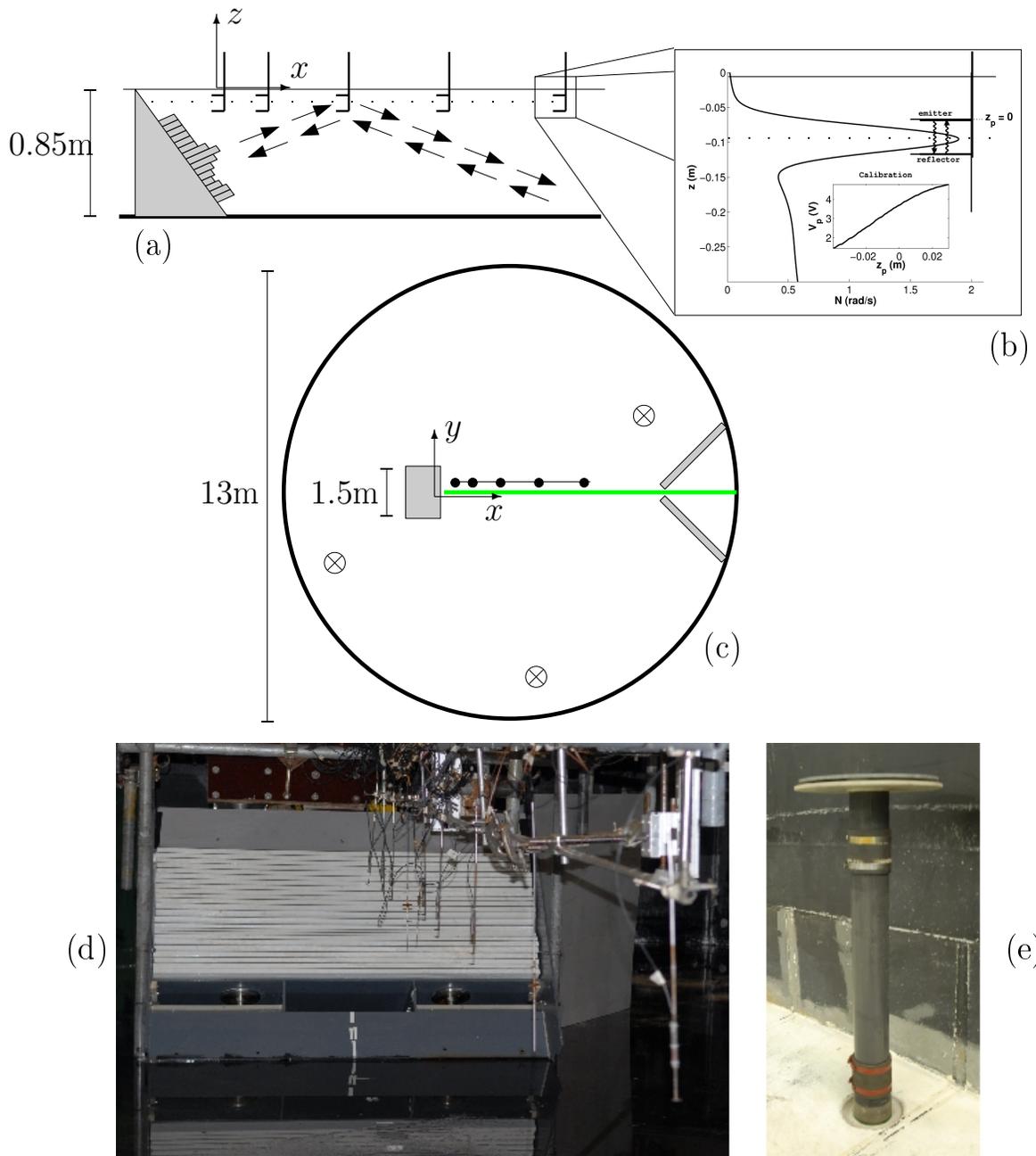


FIGURE 6.5 – Principe de l'expérience étudiant la génération locale de solitons via la réflexion d'une onde interne sur une pycnocline. (a) Vue de côté et (c) vue de dessus. (c) Zoom sur une sonde à ultrasons et son positionnement par rapport à la stratification. L'émetteur et le récepteur encadrent la majorité de la pycnocline. Une calibration typique de la sonde, obtenue en traduisant la sonde en l'absence de forçage, est représentée dans l'encart. Photos (d) du générateur et des sondes à ultrasons selon l'axe de propagation des ondes, avant remplissage, et (e) de l'outil utilisé pour siphonner la pycnocline (également symbolisé par  $\otimes$  sur le schéma (c)).

de la zone de superposition des faisceaux incident et réfléchi.

Enfin, le choix de la fréquence de l'onde est important puisqu'il permet de fixer la vitesse de phase horizontale du faisceau incident. Le meilleur choix correspond à  $\gamma$  ou  $\alpha$  d'ordre 1, paramètres comparant les vitesses de phase des ondes internes et interfaciales. Bien sûr, cela dépend aussi des propriétés de la pycnocline.

### 6.2.1.3 Sondes à ultrasons

Afin de pouvoir suivre l'évolution de l'interface, nous utilisons des sonde à ultrasons constituées d'un émetteur/récepteur et d'un réflecteur, séparés de 5 cm l'un de l'autre, comme on peut le voir à la figure 6.5 (b). Dix sondes sont positionnées aux positions  $x = 0.18, 0.39, 0.62, 0.89, 1.20, 1.2541, 1.59, 2.09, 2.80$  et 4.0 m par rapport à l'excitateur, décalées de quelques centimètres par rapport à l'axe ( $y = 0$ ) afin de ne pas gêner les mesures PIV. Les sondes sont à une profondeur telle que l'émetteur est dans la couche homogène et le réflecteur dans la partie continûment stratifiée.

La tension de sortie d'une sonde est proportionnelle au temps de nécessaire à une impulsion sonore pour traverser la distance aller-retour entre l'émetteur/récepteur et le réflecteur. Dans le cas d'un fluide à deux couches idéal (pycnocline infiniment fine), le temps de parcours est directement proportionnel à la distance entre l'émetteur et l'interface. Dans le cas réaliste de notre expérience, le temps de parcours est une mesure du déplacement moyenné (sur la verticale) de la position de l'interface à la position  $x$  spécifique de la sonde. La relation entre tension et position de l'interface n'est plus linéaire.

Pour calibrer l'ensemble des sondes, celles-ci sont déplacées verticalement de haut en bas d'une distance connue, grâce à un axe motorisé, dans le cas où la cuve est au repos (la pycnocline ne bouge pas). Il est alors possible de convertir la tension de sortie enregistrée au cours du mouvement en position verticale de la sonde par rapport à l'interface. Un exemple de calibration est présenté dans l'encart de la figure 6.5 (b).

Nous remarquons finalement que la technique permet une mesure de la position moyenne de l'interface à une position  $x$  en fonction du temps, mais ne peut pas discriminer une oscillation de l'ensemble de la thermocline d'oscillations plus complexes telles qu'un mode-2, comme observée dans les simulations numériques [47].

### 6.2.1.4 Pycnoclines étudiées

Nous présentons à la figure 6.6 (a) les différentes stratifications que nous avons réalisées au cours de cette campagne d'expériences.

D'après les études présentées à la section 6.1.2.6, nous pouvons classifier la nature de ces pycnoclines grâce à différents paramètres. Le paramètre  $\gamma$  présenté par Gerkema [35] est particulièrement intéressant puisqu'il est indépendant de l'onde incidente. Dans son étude cependant, la stratification est continue par morceaux avec une couche homogène

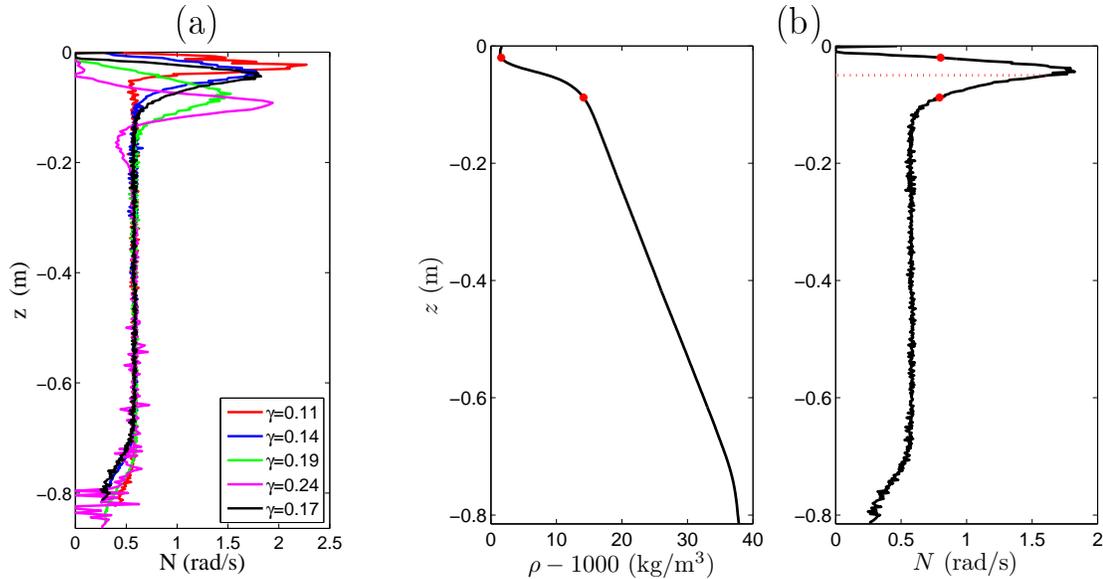


FIGURE 6.6 – (a) Ensemble des stratifications réalisées au cours des expériences de génération locale de solitons et les valeurs de  $\gamma$  associées. (b) Détermination du paramètre  $\gamma$  pour une stratification donnée. Les limites de la pycnocline sont indiquées par des points rouges, la profondeur  $h$  est estimée par le barycentre de la pycnocline et est indiquée en pointillés rouges.

d'épaisseur  $h$ , un saut de densité caractérisé par  $g' = g\Delta$ , et une couche linéairement stratifiée de profondeur  $H$  et de pulsation  $N_c$ . Le paramètre  $\gamma$  vaut alors  $\sqrt{g'h}/N_cH$ .

Nous pouvons dans notre cas obtenir une stratification équivalente à celle idéalisée en raisonnant de la façon suivante (d'après la définition donnée dans [35]). Nous localisons tout d'abord les limites de la pycnocline, un exemple étant présenté à la figure 6.6 (b). La valeur de  $g'$  correspond alors à l'aire sous la courbe  $N^2(z)$ , *i.e.*  $g' = \int N^2 dz$ , où l'intégrale va d'un bord à l'autre de la pycnocline. Par ailleurs, la position  $h$  associée à la pycnocline est calculée comme la profondeur pondérée par  $N^2$  sur la hauteur de la pycnocline, *i.e.*  $h = \int zN^2 dz / \int N^2 dz$ . Finalement, en prenant pour  $N_c$  la valeur moyenne de  $N$  pour la partie linéairement stratifiée et pour  $H$  la hauteur totale de fluide, nous pouvons calculer  $\gamma$  associé à nos expériences. Les valeurs sont résumées sur la figure 6.6 (a).

D'après les discussions précédentes, le profil associé à  $\gamma = 0.11$  est, *a priori*, le plus favorable à la génération locale d'ondes solitaires.

## 6.2.2 Influence de la pycnocline sur la réflexion d'ondes internes

**Vue instantanée** L'effet d'une pycnocline sur la réflexion d'une onde incidente est un problème qui a déjà été abordé par Mathur et Peacock [74]. Nous illustrons l'effet principal à la figure 6.7, via une image du champ de vitesse instantané, et qui est de disperser le faisceau réfléchi.

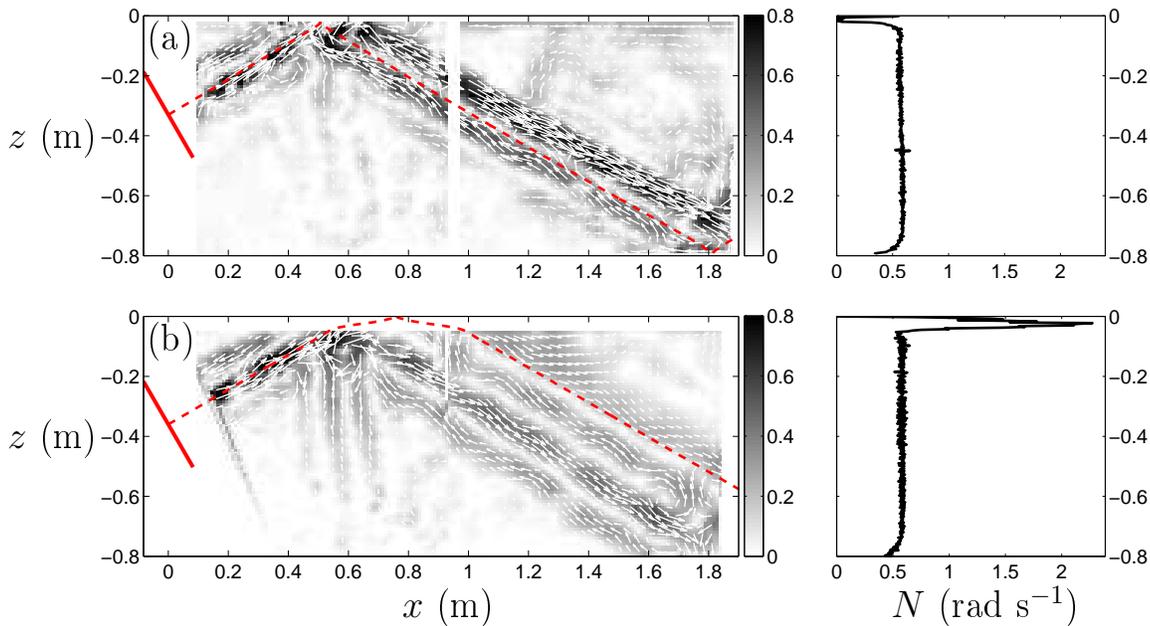


FIGURE 6.7 – Champs de vitesses instantanés, les vecteurs indiquant la direction et les tons de gris l’amplitude de la vitesse (en  $\text{m s}^{-1}$ ), pour deux expériences avec une fréquence de forçage  $\omega = 0.29 \text{ rad s}^{-1}$ , (a) sans pycnocline ( $\gamma = 0$ ) et (b) en présence d’une pycnocline ( $\gamma = 0.11$ ), les stratifications associées étant représentées sur la colonne de droite. Les lignes pointillées rouges indiquent la propagation d’un rayon émis au niveau du centre de l’excitateur.

On peut comprendre cet effet en prenant en compte l’évolution continue de la stratification. Comme on peut le voir avec le tracé de rayons (pointillés rouges) émis depuis la source, la pycnocline correspond à une région où la valeur de  $N$  est plus grande, donc pour une même pulsation l’onde incidente se propage avec un angle plus faible par rapport à l’horizontale. Le faisceau réfléchi ressort donc plus loin de la pycnocline. Cependant, ce raisonnement ne prend pas en compte la largeur finie de l’onde incidente, il en résulte qu’une partie de l’énergie est réfléchie et une partie transmise au niveau de la pycnocline. Le faisceau réfléchi apparaît alors élargi.

Par ailleurs, on peut observer dans le cas avec pycnocline la présence d’harmoniques supérieures (angle de propagation plus grand) issues de la zone d’interaction des faisceaux incident et réfléchi.

**Influence sur le spectre de l’onde réfléchie** Il est possible de quantifier l’effet de dispersion du faisceau réfléchi en étudiant le spectre de l’onde réfléchie. Le mécanisme décrit étant linéaire (à la pulsation  $\omega$ ), nous analysons les expériences présentées à la figure 6.7 en filtrant les champs à la fréquence de forçage, et nous extrayons le profil transverse du faisceau réfléchi centré autour de la position  $x = 1.20 \text{ m}$ . On peut ainsi

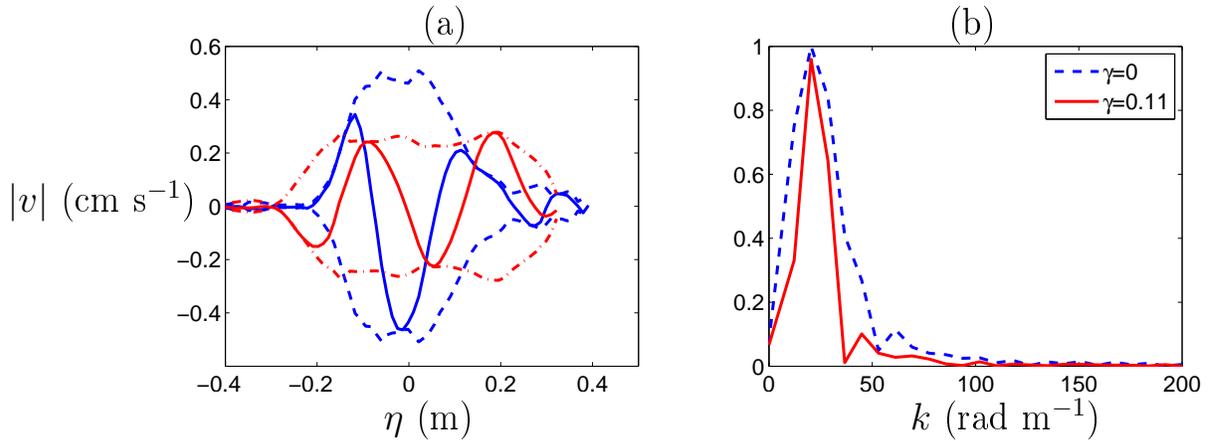


FIGURE 6.8 – (a) Profils transverses et (b) spectres associés de la vitesse dans la direction de propagation des faisceaux réfléchis extraits autour de la position  $x = 1.20$  m pour les expériences de la figure 6.7. Les spectres sont tous deux normalisés par l’amplitude maximale du spectre où  $\gamma = 0$ .

observer à la figure 6.8 que le spectre réfléchi est plus fin pour  $\gamma = 0.11$  que  $\gamma = 0$ . Les deux spectres restent piqués autour de la même valeur  $k = 20.4$   $\text{rad m}^{-1}$  correspondant à une longueur d’onde d’environ 0.30 m. Dans le cas  $\gamma = 0$ , le spectre du faisceau réfléchi correspond à celui du faisceau incident.

Enfin, on peut souligner que cette observation en est accord avec les remarques faites en 6.1.2.5. Les oscillations de l’interface générées par la réflexion linéaire s’établissent sur une largeur plus importante que l’onde incidente ; ces oscillations à une pulsation inférieure à  $N$  rayonnent alors un champ d’ondes internes qui génèrent l’onde réfléchie.

Par ailleurs, connaissant la longueur d’onde dominante du faisceau incident, on peut en déduire la vitesse de phase horizontale  $\omega/k_x = \omega/k \sin \theta = 2.9$   $\text{cm s}^{-1}$ . On peut la comparer à celle associée aux ondes interfaciales équivalentes si l’interface était infiniment fine, et qui vaut d’après (6.16),  $\gamma NH = 5.4$   $\text{cm s}^{-1}$ . Nous avons bien réalisé les conditions d’interaction proche de la réponse optimale de la pycnocline.

### 6.2.3 Effets non-linéaires associés aux ondes internes

On observe également à la figure 6.7 la présence de non-linéarités émises au niveau de la zone de réflexion de l’onde incidente, qui sont particulièrement intenses dans le cas avec pycnocline. En effet des oscillations verticales, associées à une pulsation proche de  $N$  (qui correspondent à  $2\omega$ ), sont visibles. Nous allons détailler les effets non-linéaires à la réflexion plus en détails.

D’après l’étude à petite échelle, nous nous attendons à la présence de composantes harmoniques de l’onde incidente lors de la réflexion, localisées au niveau de la pycnocline.

Deux cas de figures se présentent selon la pulsation de l'onde incidente comparativement à  $N$ . Les deux cas considérés ici interagissent avec une pycnocline correspondant à la valeur  $\gamma = 0.17$ . Nous présentons d'abord un résultat inattendu au vue des expériences préliminaires à petites échelles, la présence d'un courant moyen.

### 6.2.3.1 Courant moyen

Dans toutes les expériences que nous avons étudiées, nous avons pu observer la création d'un courant moyen au niveau de la couche homogène et dont l'influence est visible dans le haut du fluide stratifié. La nature de la pycnocline ne semble pas importante. Ce courant est dans la direction des  $x$  croissants, c'est-à-dire dans la direction de propagation de l'onde interne incidente, et naît au niveau de la réflexion du faisceau incident. Son amplitude varie selon la fréquence de forçage et la nature de la pycnocline.

On notera qu'aucun courant moyen n'est observé à la réflexion sur le fond (après réflexion à la surface). On peut alors mettre en avant que cette absence de courant est due au fait que l'amplitude de l'onde se réfléchissant au fond est trop faible pour que des non-linéarités soient observables. Nous pensons que la différence de nature des conditions aux limites, paroi solide ou surface libre, joue un rôle plus important. En effet, la contrainte de vitesse nulle au fond impose des gradients de vitesse importants qui dissipent plus d'énergie, empêchant le courant moyen de se développer.

Bien que les mesures PIV ne donnent pas accès à la vitesse proche de la surface, nous avons pu estimer le profil de vitesse moyenne sur toute la hauteur du fluide en mesurant la vitesse des particules à la surface libre, piégées par effet capillaire lors de l'ensemencement. Nous verrons par la suite qu'il est important de pouvoir quantifier ce courant moyen, notamment pour la compréhension de l'allure des harmoniques.

Nous présentons le cas particulier de la pulsation  $\omega = 0.39 \text{ rad s}^{-1}$  à la figure 6.9, où nous avons également extrait un profil vertical utilisant la valeur mesurée en surface et une interpolation cubique.

### 6.2.3.2 Harmoniques rayonnées

Lorsque la pulsation de l'onde incidente est inférieure à  $N/2$ , les harmoniques issues des interactions non-linéaires entre l'onde incidente et la pycnocline vont être rayonnées au niveau de l'interface. On peut observer à la figure 6.10 une expérience pour une onde incidente à la pulsation  $\omega = 0.15 \text{ rad s}^{-1}$ , correspondant à un angle  $\theta = 15^\circ$ . On a filtré le champ de vitesse aux pulsations  $n\omega$  ( $n = 1$  à  $4$ ), et on observe que des ondes internes sont rayonnées au niveau de la pycnocline lorsque elles peuvent se propager. À la limite de propagation, ces ondes restent piégées dans la pycnocline. En réalisant la transformée de Fourier spatiale selon l'horizontale, à toutes les profondeurs, on peut observer de plus

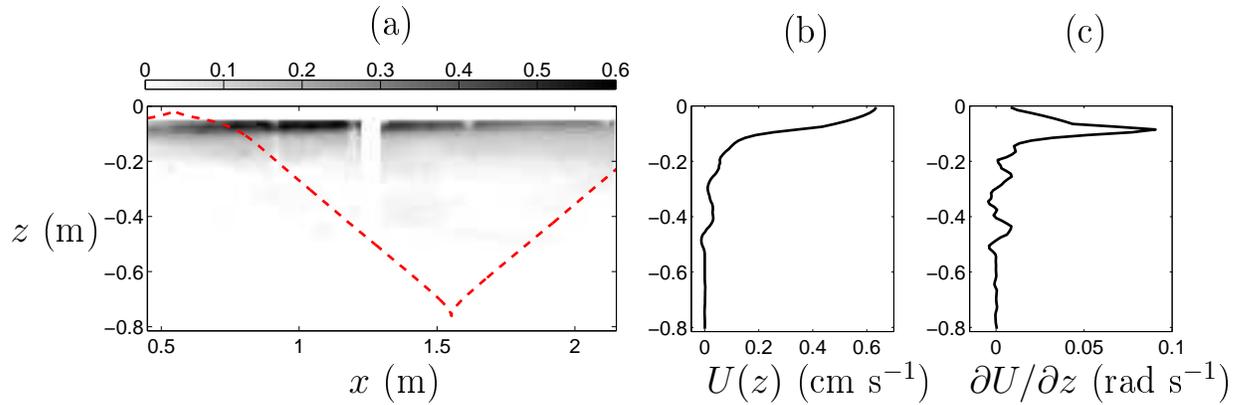


FIGURE 6.9 – (a) Courant horizontal moyen en  $\text{cm s}^{-1}$  obtenu par filtrage des données PIV ( $\omega = 0.39 \text{ rad s}^{-1}$ ), les pointillés rouges donnant une indication du lieu de réflexion du faisceau incident. Profils extraits en  $x = 1.40 \text{ m}$  (b) de la vitesse horizontale moyenne et (c) du cisaillement moyen associé, la valeur en surface étant obtenue par la mesure de vitesse des particules en surface.

que l’harmonique  $n$  émise a une longueur d’onde horizontale  $k_x^n$  bien définie, vérifiant

$$k_x^n = nk_x^1, \quad (6.17)$$

avec pour cette expérience  $k_x^1 = 7.1 \text{ rad m}^{-1}$ .

Cette propriété des ondes rayonnées par la pycnocline est en accord avec l’étude non-linéaire perturbative de Thorpe. Pour une perturbation de l’interface à la pulsation de l’onde incidente s’écrivant  $\eta_1(x, t) \propto \cos(k_x x - \omega t + \phi_1)$ , l’auteur prédit une perturbation harmonique à la pulsation  $2\omega$  de la forme  $\eta_2 \propto \cos(2(k_x x - \omega t) + \phi_2)$ . Ainsi en généralisant, on voit bien apparaître la relation entre les nombres d’ondes associés aux différentes harmoniques.

Cela a notamment pour conséquence que l’ensemble des perturbations créées se propagent toutes avec la même vitesse de phase horizontale.

### 6.2.3.3 Harmoniques piégées

Lorsque la pulsation de l’onde incidente est supérieure à  $N/2$ , les harmoniques issues des interactions non-linéaires entre l’onde incidente et la pycnocline ne peuvent plus se propager dans la stratification continue. Par contre, du fait que la valeur maximale de  $N(z)$  dans la pycnocline est grande devant la valeur moyenne dans la partie stratifiée, ces ondes peuvent rester piégées dans la pycnocline et s’y propager de façon guidée.

La figure 6.11 illustre le cas d’une onde incidente à la pulsation  $\omega = 0.39 \text{ rad s}^{-1}$ . On peut remarquer que l’harmonique à la pulsation  $2\omega$  est piégée, et une structure modale semble se propager dans la pycnocline. Nous mesurons notamment grâce au spectre associé

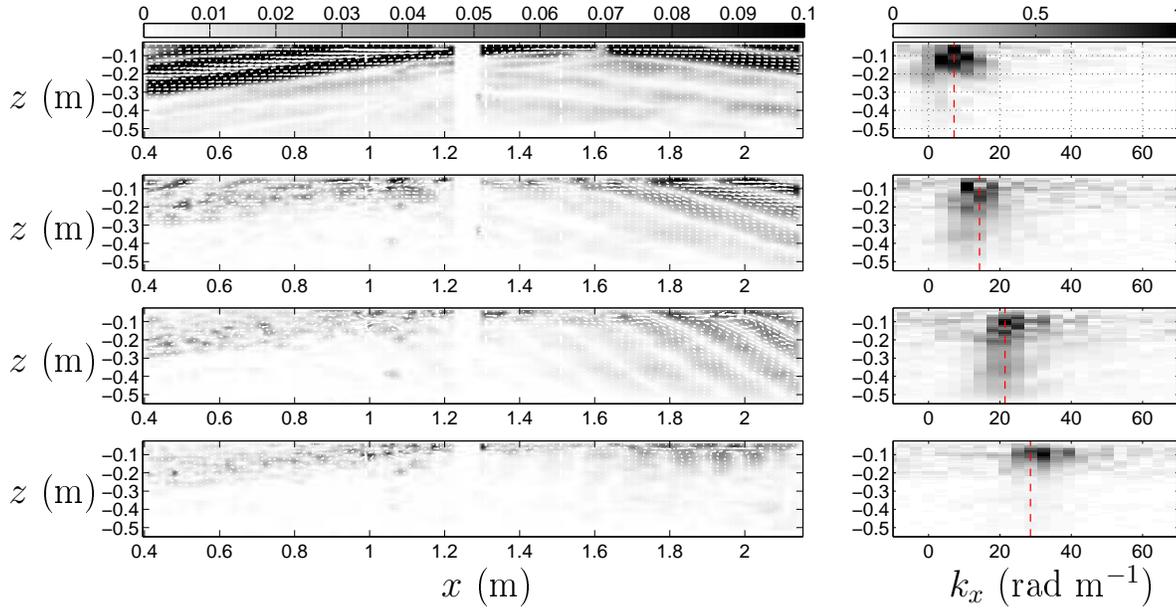


FIGURE 6.10 – *De haut en bas* : champ de vitesse filtré (gauche) à la pulsation  $n\omega$ , pour  $n$  allant de 1 à 4, et spectre horizontal associé en fonction de la profondeur (droite). Les vecteurs donnent la direction de la vitesse et l'échelle de couleur l'amplitude de la vitesse (en  $\text{cm s}^{-1}$ ). Les spectres spatiaux sont normalisés par leur valeur maximale, les traits pointillés rouges indiquent la position de  $nk_x^1$ .

que la longueur d'onde horizontale à la pulsation  $2\omega$  est  $\lambda_x = 0.22 - 0.25$  m, alors que la longueur d'onde associée au faisceau réfléchi à la pulsation  $\omega$  est 0.59 m.

La prédiction de Thorpe est valable pour les ondes propagatives et le cas considéré est évanescent dans la partie linéairement stratifiée. Nous nous tournons alors vers la théorie des modes verticaux (*cf.* section 2.2.3). Connaissant le profil de densité, il nous est possible de calculer les fonctions propres de l'équation (2.33). Les valeurs obtenues alors pour la longueur d'onde des modes à la fréquence  $2\omega$  sont respectivement 0.67 m, 0.21 m et 0.13 m pour le mode-1, le mode-2 et le mode-3.

Même si la comparaison est meilleure pour le mode-2, les écarts sont importants. La prise en compte du courant moyen peut remédier à ces différences. En effet, de façon générale, les ondes internes sont sensibles à la présence d'un écoulement moyen, et notamment par le cisaillement moyen associé. Nous avons mis en évidence précédemment la présence d'un tel écoulement, qui est justement plus intense dans la zone où le mode se propage. La prise en compte de l'équation plus générale [8]

$$w'' + \left[ \frac{N^2}{(U - c)^2} - \frac{U''}{U - c} - k^2 \right] w = 0, \quad (6.18)$$

où  $c = \omega/k$  est la vitesse de phase et  $U(z)$  le courant moyen de cisaillement, est donc plus adaptée à la description d'une structure modale  $w(z)$  se propageant selon la direction

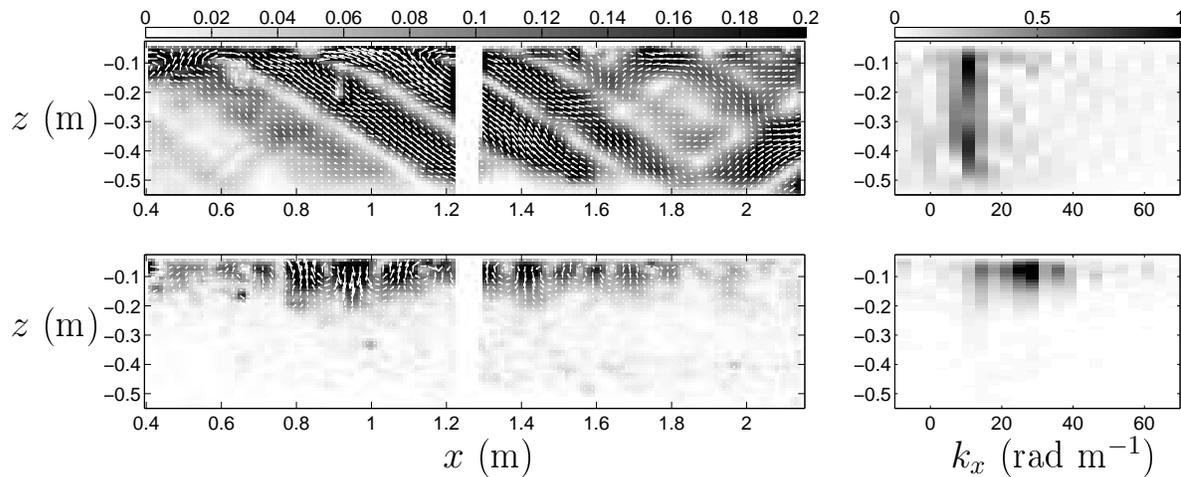


FIGURE 6.11 – *De bas en haut* : champ de vitesse filtré (gauche) à la pulsation  $n\omega$ , pour  $n = 1$  et  $2$ , et spectre horizontal associé en fonction de la profondeur (droite). Les vecteurs donnent la direction de la vitesse et l'échelle de couleur l'amplitude de la vitesse (en  $\text{cm s}^{-1}$ ). Les spectres spatiaux sont normalisés par leur valeur maximale.

( $Ox$ ) avec un nombre d'onde  $k$ .

Pour le cas considéré, d'après le profil  $U(z)$  extrait à la section 6.2.3.1, nous obtenons une longueur d'onde de  $2\pi/k = 0.27$  m pour le mode-2, ce qui est beaucoup plus raisonnable. Par ailleurs nous pouvons comparer la structure verticale du champ de vitesse à la pulsation  $2\omega$  avec le mode obtenu analytiquement. La comparaison illustrée à la figure 6.12 est alors très bonne. Seule l'amplitude  $W_0$  de la vitesse verticale du mode-2 a été ajustée pour correspondre à celle mesurée expérimentalement, l'amplitude de la vitesse horizontale du mode dépendant alors de  $W_0$  et  $k_x$ .

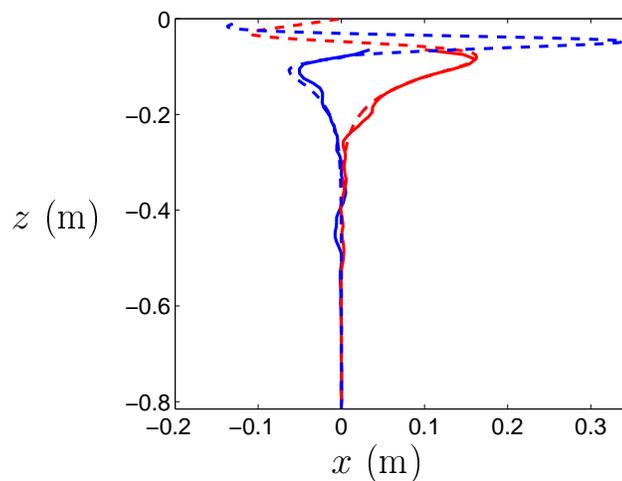


FIGURE 6.12 – Comparaison des profils verticaux des composantes horizontale (bleu) et verticale (rouge) du champ de vitesse expérimental filtré à la pulsation  $2\omega$  (traits continus) avec le mode-2 obtenu à partir de (6.18) (pointillés). Les profils sont extraits à la position  $x = 1.15$  m.

En résumé, l'interaction non-linéaire de l'onde interne incidente sur la pycnocline est bien décrite par les approches faiblement non-linéaires telles que celle de Thorpe. Les structures émises sont de natures différentes selon la nature propagative ou évanescente des harmoniques générées. Il est cependant possible de décrire ces structures, et notamment leur longueurs d'ondes horizontales.

La nature de la pycnocline joue un rôle important sur l'amplitude de ces non-linéarités, et elle tend vers 0 pour  $\gamma$  tendant vers 0.

La deuxième étape du processus de génération locale peut être étudiée maintenant grâce aux sondes à ultrasons.

## 6.2.4 Effets non-linéaires associés à l'interface

Le suivi de la position de l'interface avec le temps à différentes positions grâce aux sondes à ultrasons ne permet pas une mesure aussi continue que la PIV. Cependant la résolution temporelle est plus importante. Nous continuons à détailler les expériences réalisées dans le cas d'une pycnocline avec  $\gamma = 0.17$ , comme à la section précédente.

### 6.2.4.1 Vue globale

Les dix sondes sont donc disposées aux positions  $x = 0.18, 0.39, 0.62, 0.89, 1.20, 1.254, 1.59, 2.09, 2.80$  et 4 m respectivement. Selon la pulsation de l'onde incidente, on peut considérer grossièrement que les 4 premières sondes sont situées avant l'impact de l'onde interne sur la pycnocline. Les deux sondes espacées de 5.4 cm ( $x = 1.20$  m et 1.254 m) permettent de mesurer la vitesse de phase horizontale des ondes interfaciales, du fait de la petite distance de propagation entre les deux.

Considérons le cas d'une onde incidente à la pulsation  $\omega = 0.29$  rad s<sup>-1</sup>, ce qui correspond à un angle de propagation d'environ 30°. L'ensemble des signaux enregistrés par les différentes sondes au cours du temps est représenté à la figure 6.13 (b). L'allure des mesures PIV ainsi que le tracé d'un rayon issu du centre du générateur est également représenté à la figure 6.13 (a) afin de guider le lecteur pour repérer les positions des sondes par rapport à l'écoulement.

On peut notamment voir le régime transitoire de mise en marche de l'expérience vers  $t = 100$  s, et également vérifier qu'aucune oscillation de la pycnocline n'est présente au début de l'expérience ( $t < 100$  s). Les sondes comprises entre  $x = 0.25$  m et  $x = 1.5$  m sont visiblement dans la zone d'impact du faisceau, et la sonde lointaine à  $x = 4.0$  m est proche de la zone de seconde réflexion du faisceau incident (après s'être réfléchi une fois au fond de la cuve).

L'amplitude des oscillations moyennées sur la hauteur des sondes reste cependant faible pour l'ensemble des sondes (de l'ordre de quelques millimètres).

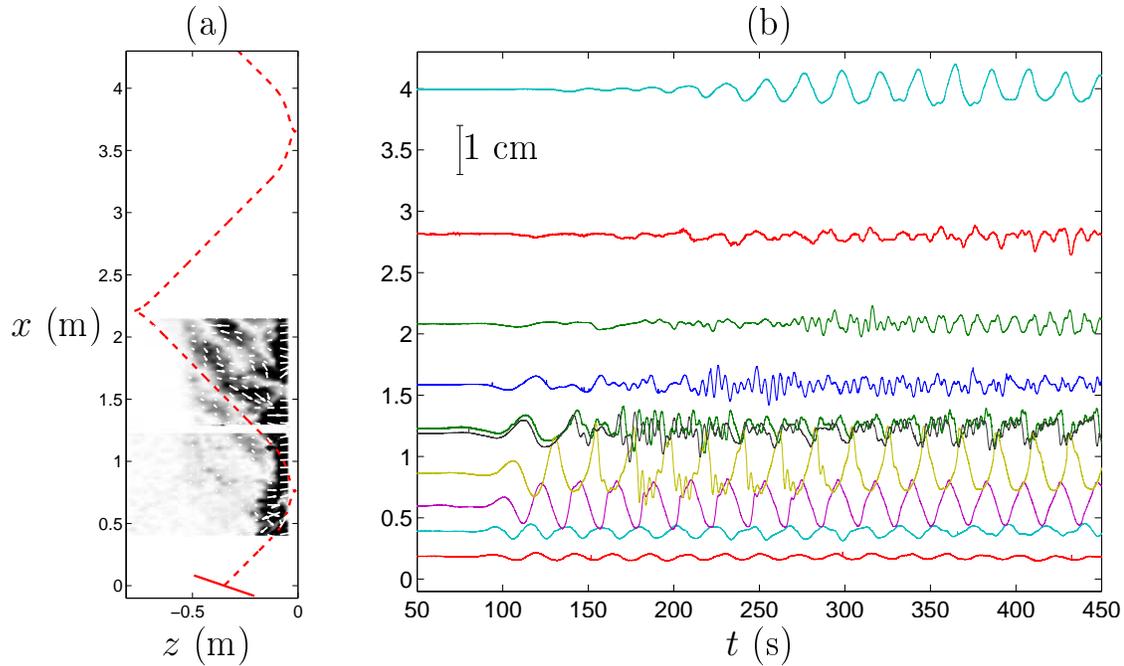


FIGURE 6.13 – (a) Vue tournée à  $90^\circ$  d'un champ de vitesse instantané et (b) enregistrements des dix sondes à ultrasons pour une expérience avec  $\omega = 0.29 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\gamma = 0.17$ . Les pointillés rouges en (a) indiquent la propagation d'un rayon depuis le centre du générateur. Les enregistrements des sondes en (b) sont affichés au niveau de la position de la sonde selon l'axe ( $Ox$ ), et l'amplitude réelle des oscillations est de l'ordre du centimètre comme indiqué par l'étalon.

De façon qualitative, on peut observer qu'à mesure que les ondes interfaciales se propagent, les oscillations initialement quasi-sinusoïdales deviennent asymétriques et se raidissent, avant de dégénérer au niveau des sondes 5–6 en un train d'ondes non-linéaires. Nous nous concentrons sur les sondes proches de la zone d'impact par la suite.

#### 6.2.4.2 Raidissement et dégénérescence des oscillations

Nous allons étudier plus en détails le régime établi, pour les temps  $t > 400 \text{ s}$ .

Comme nous l'avons fait remarquer de façon qualitative, on peut voir aux figures 6.14 (a) à (c) que les oscillations initialement sinusoïdales à la position  $x = 0.62 \text{ m}$  se raidissent en se propageant jusqu'au moment où le front d'onde se sépare en une série d'oscillations à plus hautes fréquences, comme on peut le voir à la position  $x = 1.25 \text{ m}$ . Rapidement par la suite, l'ensemble des oscillations non-linéaires se propageant à différentes vitesses se mélangent avec les oscillations générées avant et après par l'onde incidente stationnaire (nous sommes en régime établi). À la position  $x = 1.59 \text{ m}$ , il est difficile de déduire une information particulière des oscillations de l'interface.

Cette évolution caractéristique des ondes non-linéaires est difficile à quantifier. On

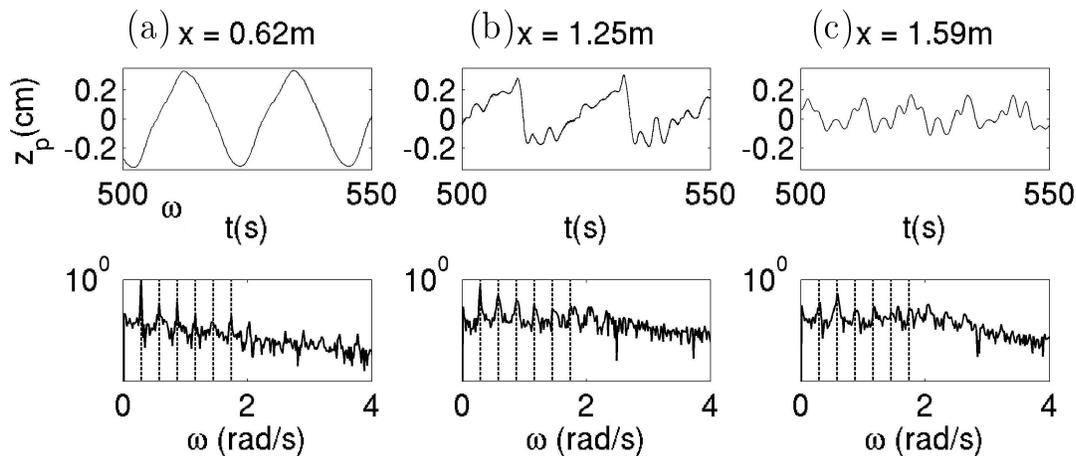


FIGURE 6.14 – ZOOMS sur trois sondes aux positions (a)  $x = 0.62$  m, (b)  $x = 1.25$  m et (c)  $x = 1.59$  m, en régime établi, superposés aux spectres de Fourier associés à chacune des séries temporelles.

peut notamment se demander si la dynamique particulière de l'interface est due à des effets non-linéaires, les amplitudes d'oscillations étant particulièrement faibles comparativement à la profondeur de la pycnocline par exemple.

Nous présentons différents arguments permettant d'affirmer que la dynamique est régie par des effets non-linéaires.

**Spectres temporels** Tout d'abord, nous présentons aux figures 6.14 (d) à (e) les spectre de Fourier associés aux séries temporelles des cas (a) à (c).

À la différence des harmoniques générées dans un cadre faiblement non-linéaire, les ondes solitaires ne sont pas associées à une oscillation harmonique à une fréquence bien définie, et leur spectre temporel n'est pas forcément un outil adapté à leur étude et caractérisation. Nous allons pourtant utiliser la transformée de Fourier des séries temporelles extraites afin de discriminer leur nature. Ce choix est notamment justifié par le fait que l'on cherche à discriminer un signal ayant un nombre fini d'harmoniques (et dont le spectre est constitué de pics marqués) avec un signal intrinsèquement non-linéaire, dont le spectre n'a pas d'interprétation claire.

Pour cela, nous allons comparer ces spectres avec ceux issus de signaux numériques obtenus à partir du modèle non-linéaire et non-hydrostatique d'interaction entre des ondes internes issues d'un forçage barotrope au dessus d'une topographie et une pycnocline idéalisée, développé par Gerkema [35], et présentés à la figure 6.15. Dans le modèle, il est possible d'annuler les termes non-linéaires décrivant l'évolution de l'interface tout en gardant ceux issus de la marée interne. Ce cas illustré aux figures 6.15 (a) et (c) montre des oscillations non-linéaires de l'interface, avec un spectre piqué au niveau de fréquence

harmoniques, mais il n'y a pas de dégénérescence en trains d'ondes solitaires. Le cas illustré aux figures 6.15 (b) et (d) est quant à lui, complètement non-linéaire et on peut observer que la dégénérescence de l'interface en trains d'ondes solitaires. De plus, si l'on compare l'allure des spectres en (c) et (d), on constate que dans le cas non-linéaire la présence d'une amplification d'une gamme continue du spectre à hautes fréquences (dans la gamme entre 10 à 20 fois la fréquence du forçage), en plus des fréquences harmoniques.

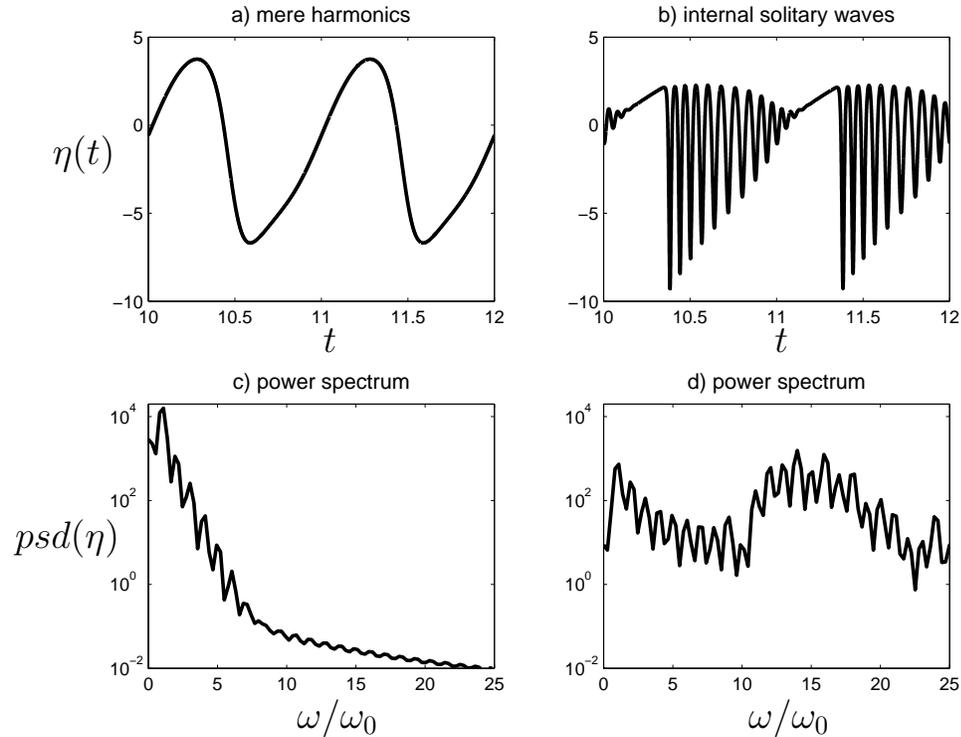


FIGURE 6.15 – Exemples de réponses interfaciales  $\eta(t)$  à un forçage barotrope, et des spectres associés, issues d'un modèle non-linéaire non-hydrostatique de type KdV [35]. Les termes non-linéaires d'évolution de l'interface sont annulés dans le cas (a) et (c), « mere harmonics », tandis que le cas (b) et (d) est complètement non-linéaire, « internal solitary waves ».

Au final, ce bombement du spectre à hautes fréquences (comparativement à la fréquence de forçage) est également visible dans les données expérimentales. Dans les cas (b) et (c) de la figure 6.14, on distingue que la bande de fréquences entre 5 et 10 fois la fréquence de forçage est plus amplifiée que dans le cas (a), ce qui est en accord avec l'allure des oscillations de l'interface.

**Comparaison avec d'autres expériences** Enfin, afin de réfuter l'argument que l'amplitude des ondes observées est trop faible pour être décrite par des effets non-linéaires, nous rappelons une série d'expériences étudiant la dégénérescence d'ondes interfaciales en

trains d'ondes non-linéaires dans le cas d'un fluide à deux couches qui a été réalisées par Horn *et al.* [52].

Leurs expériences consistent à étudier l'évolution sur une longue durée d'une perturbation initiale de l'interface entre les deux fluides. Il s'agit en l'occurrence d'une oscillation de type mode-1 avec la plus grande longueur d'onde possible (la taille de la cuve). Une série temporelle typique de leurs expériences est illustrée à la figure 6.16 (b). Nous avons représenté à titre indicatif une série temporelle caractéristique de nos expériences, sur une fenêtre de temps comparable, à la figure 6.16 (a).

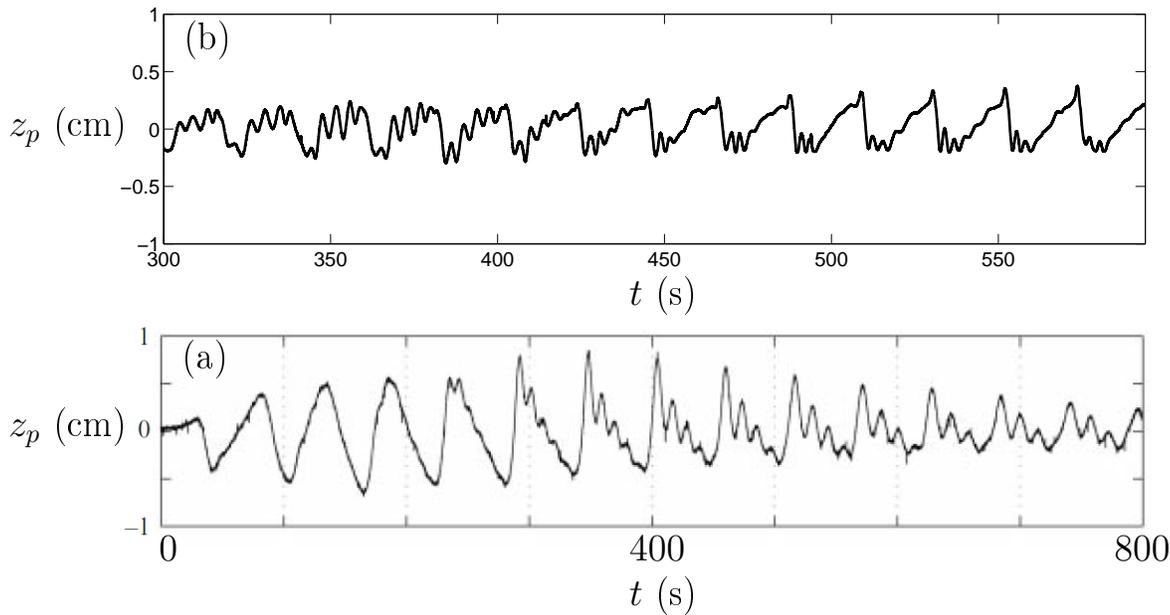


FIGURE 6.16 – Séries temporelles associées aux oscillations (a) de la pycnocline extraite en  $x = 1.20$  m dans l'expérience illustrée à la figure 6.13, et (b) d'un interface dans un fluide à deux couches d'épaisseur  $h_1 = 0.203$  m et  $h_2 = 0.087$  m, avec un saut de densité tel que  $\Delta = 0.02$  (extrait de [52]).

Une comparaison ultérieure de leurs expériences avec un modèle faiblement non-linéaire est réalisé par le même groupe [53], l'accord étant très bon. Ainsi bien que l'amplitude des oscillations soient faibles devant la hauteur de fluide, les expériences réalisées sont décrites par un modèle non-linéaire et la non-linéarité est nécessaire.

## 6.2.5 Conclusion

À travers les différentes analyses réalisées sur les données acquises par la technique PIV ou encore grâce aux sondes à ultrasons, nous avons pu mettre en évidence la pertinence de la description « classiquement » adoptée du mécanisme de génération locale de solitons au niveau d'une pycnocline.

La réflexion linéaire de l'onde interne à la surface a permis de vérifier l'influence de la pycnocline sur l'élargissement spatial de l'onde réfléchie, signe révélateur d'une perturbation de la pycnocline s'échappant de la zone d'impact de l'onde interne incidente. Ces résultats sont en bon accord avec les modèles linéaires présentés au début du chapitre.

Des effets non-linéaires importants, de deux natures différentes, ont également pu être observés distinctement.

**Régime faiblement non-linéaire** Un régime d'interaction faiblement non-linéaire entre l'onde interne incidente et la pycnocline a été observé grâce à la technique PIV. La génération d'harmoniques à des fréquences multiples de celle de l'onde incidente a lieu au niveau de la pycnocline.

Lorsque ces ondes sont propagatives, elles ont également un nombre d'onde horizontal multiple de celui de l'onde incidente. La vitesse de phase de l'ensemble de ces ondes est alors quasiment la même. Ce résultat est également en accord avec les prédictions théoriques de Thorpe [120].

Lorsque ces ondes sont évanescentes dans la partie linéairement stratifiée, elles se propagent de façon guidée dans la pycnocline, sous la forme de modes verticaux dont la vitesse de phase correspond également avec celle de l'onde incidente

Bien qu'il soit possible d'observer un courant moyen lors de l'interaction non-linéaire entre deux ondes internes, ce courant reste confiné à la région d'interaction des deux ondes. Un résultat inattendu et inexplicable par la théorie est donc la présence d'un courant moyen au niveau de la pycnocline qui s'étend sur une grande distance après la zone d'interaction entre les faisceaux incidents et réfléchis.

**Régime non-linéaire** Les non-linéarités décrites précédemment semblent générer une perturbation efficace de la pycnocline pour que son évolution purement non-linéaire soit possible, entraînant le raidissement des oscillations et la dégénérescence en trains d'ondes d'allure non-linéaire.

Nous ne disposons pas cependant de modèle adapté à nos conditions expérimentales pour pouvoir décrire cette évolution analytiquement, tel un modèle de type KdV ou autre.

Les différentes expériences réalisées étudient l'effet de l'angle de l'onde incidente ou la nature de la pycnocline sur la génération locale d'ondes solitaires. Néanmoins, nous n'avons pas présenté l'influence de ces paramètres de façon quantifiée. Un effet également important à inclure pour les études ultérieures est la force de Coriolis, qui déstabilise les trains d'ondes non-linéaires [49].

Au final, nous voulons illustrer à la figure 6.17 l'idée que les deux évolutions décrites grâce à la PIV et aux sondes à ultrasons ne sont pas dissociées ni incompatibles.

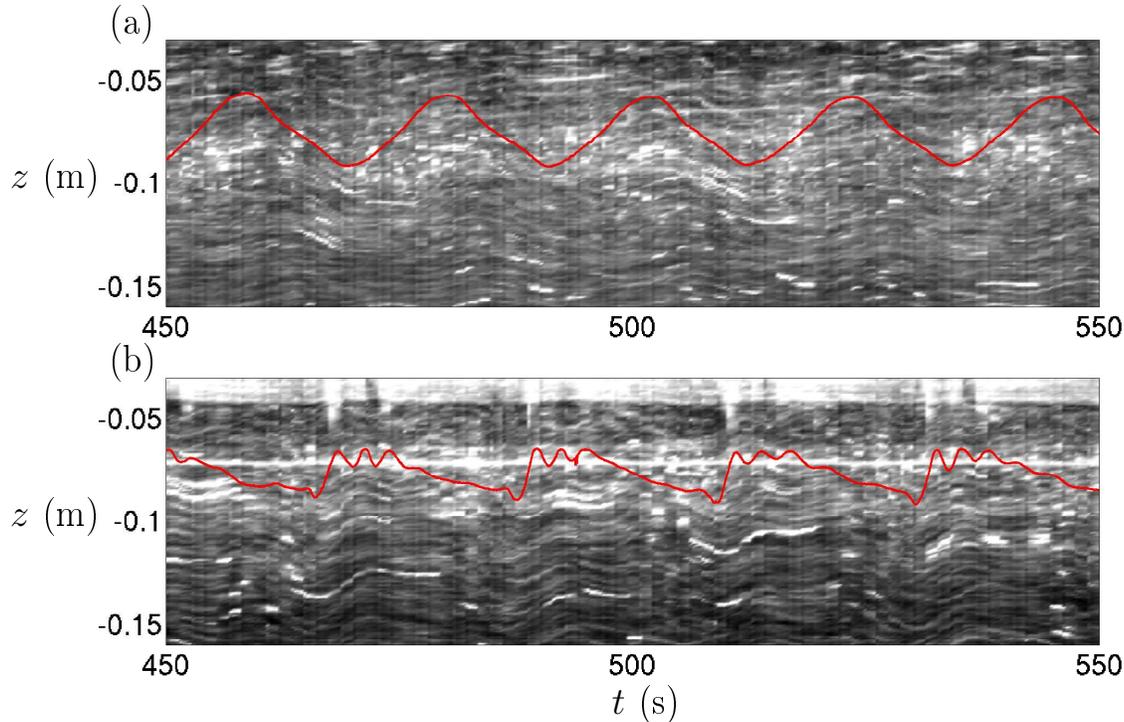


FIGURE 6.17 – Séries temporelles extraites en (a)  $x = 0.69$  m et en (b)  $x = 1.20$  m pour une expérience avec  $\omega = 0.29$  rad s<sup>-1</sup> et  $\gamma = 0.17$ . Les lignes rouges correspondent aux données issues des sondes à ultrasons (multipliées par un facteur 5), l'échelle de gris représentent l'intensité lumineuse associée aux images non-traitées de PIV, les zones blanches correspondent donc à des particules passant à la verticale de la position  $x$  fixée.

L'expérience considérée,  $\omega = 0.29$  rad s<sup>-1</sup> et  $\gamma = 0.17$ , est favorable à l'apparition d'ondes solitaires comme nous l'avons vu. Nous avons superposé les séries temporelles issues des sondes à ultrasons (en rouge) en  $x = 0.69$  m et  $x = 1.20$  m, aux séries temporelles issues des images non-traitées de PIV, extraites aux mêmes positions. Les particules passant à travers la verticale de la sonde laisse ainsi une trainée lumineuse, ce qui donne une allure des trajectoires des particules localement.

Le message que nous souhaitons passer ici est que la dynamique non-linéaire au niveau de l'interface, associée à des oscillations rapides, est filtrée lors du passage dans la partie linéairement stratifiée qui joue le rôle d'un filtre passe-bas (coupant les fréquences supérieures à  $N$ ). Les deux dynamiques coexistent mais ne sont pas nécessairement localisées au même endroit dans la stratification complexe étudiée.

## Résumé

Dans le but de comprendre les interactions entre les ondes internes et interfaciales de gravité, nous avons dans un premier temps récapitulé les notions développées dans

différents modèles analytiques. Cette démarche personnelle de comparaison des modèles a permis une compréhension détaillée des différentes étapes nécessaires à la génération locale de trains d'ondes solitaires.

Les notions acquises ont permis la mise en place avec succès d'une expérience illustrant le mécanisme de génération locale d'ondes non-linéaires lors de la réflexion d'une onde interne sur une pycnocline.

Différentes stratifications ont été présentées, illustrant l'importance de la nature de la pycnocline sur le mécanisme de génération. Les effets non-linéaires ont également pu être quantifiés grâce à deux techniques de mesures complémentaires : la PIV et les sondes à ultrasons. Les résultats sont en accord avec les attentes des modèles présentés.

Cette première mise en évidence expérimentale d'un mécanisme de génération d'ondes non-linéaires à partir d'ondes internes est particulièrement importante pour la compréhension de la « génération locale » dans les océans.



# Chapitre 7

## Un mécanisme atypique couplant ondes internes et interfaciales de gravité. Phénomène d'eaux mortes.

Nous revisitons dans ce chapitre un problème atypique étudié pour la première fois par V. W. Ekman au cours de sa thèse en 1904. En utilisant des techniques modernes telles que l'enregistrement vidéo et la strioscopie synthétique, il est possible d'être plus introspectif que par le passé et d'apporter des éléments nouveaux utiles à la compréhension du phénomène d'eaux mortes.

Nous montrons par ailleurs que le phénomène est robuste en étudiant des fluides à trois couches et linéairement stratifiés.

### 7.1 Introduction et historique

En 1893, l'explorateur Norvégien Fridtjof Nansen à bord de son bateau *Le Fram* fut le témoin d'un étrange phénomène. Alors qu'il naviguait à proximité de l'archipel « Nordenskiöld » au nord de la Sibérie, Nansen [89] raconte que

Le Fram semblait être comme freiné par une force mystérieuse, comme si le moteur ne répondait pas correctement ? Nous avons fait des détours le long de notre route, voire des boucles complètes, essayé toute sorte de ruses pour nous échapper, en vain.

Nansen appela ce phénomène « dead-water » (en anglais) ce qui signifie eaux mortes. Parmi les observations de l'époque, les points remarquables sont notamment la présence



FIGURE 7.1 – Principe illustrant le phénomène d’eaux mortes, extraite du film *Stratified Flow* [69]. L’eau douce et l’eau salée sont respectivement vert clair et vert foncé.

d’une eau particulièrement douce (c’est-à-dire peu salée) en surface de l’océan, le fait que le bateau ait ralenti jusqu’au quart de sa vitesse normale et également que le bateau se soit arrêté voire ait oscillé d’avant en arrière lorsque que les moteurs ont été coupés brutalement.

### 7.1.1 La thèse d’Ekman

Des travaux de recherche réalisés par V.W. Ekman en 1904 [24] ont permis de comprendre que ce phénomène a lieu quand la partie supérieure de l’océan est constituée de couches de densité différentes (et bien différenciées), par exemple à cause de variations de la concentration en sel (eau douce issue d’un glacier au dessus de l’eau salée de l’océan) ou encore de la température (cas d’un lac chauffé en surface l’été). Au passage du bateau, des vagues se forment sous la surface, à l’interface entre les couches de densités différentes, qui vont interagir avec le bateau en le freinant sans qu’aucune activité ne se manifeste à la surface. Le principe est illustré à la figure 7.1. Une observation du phénomène depuis un bateau se déplaçant dans un fjörd « canadien » [39] est également visible à la figure 7.4.

Un certain nombre de propriétés spécifiques à ce phénomène ont été rapportées par Ekman, expliquées grâce à l’appui d’expériences qu’il a réalisées. Nous résumons ici ses principales conclusions.

**Force de traînée :** La force de traînée ressentie par un navire se déplaçant dans un fluide stratifié avec deux couches de densité différentes est plus importante que celle associée au même navire dans un fluide homogène. Ceci est dû au fait que dans le cas stratifié, le bateau génère des ondes à l’interface entre les deux couches et que l’énergie nécessaire à leur maintien est prélevée auprès du bateau. La force exercée par les vagues sur le bateau varie en fonction de l’amplitude des vagues, ce qui entraîne une force de freinage variable en plus des frottements fluides « classiques » (traînée du bateau). Cependant,

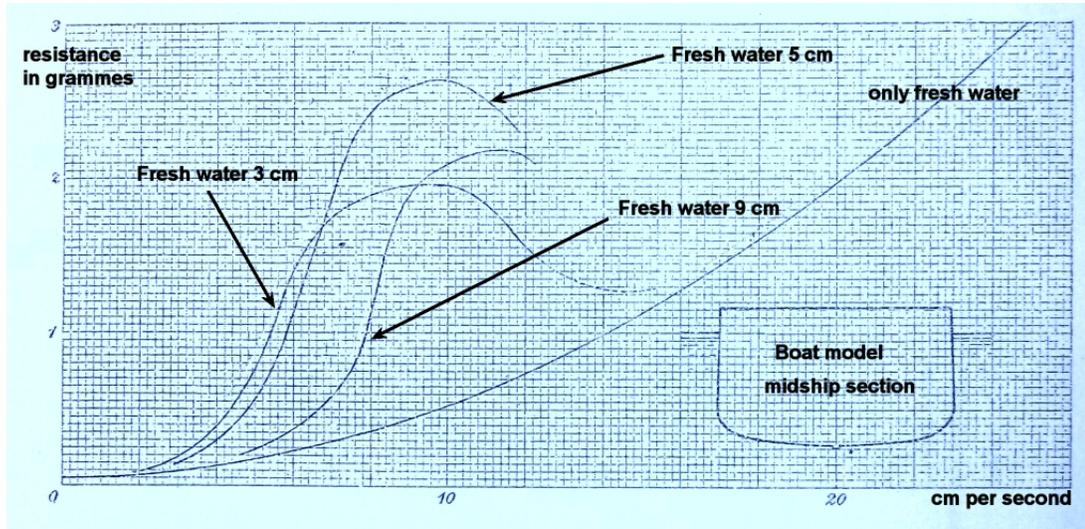


FIGURE 7.2 – Relation force-vitesse établie par Ekman [24] pour un bateau tiré dans un fluide avec une couche d'eau douce de hauteur variable (« Fresh water ») sur une couche d'eau salée de densité  $\rho_2 = 1.030 \text{ g cm}^3$ , comparée au cas d'une couche homogène de même hauteur totale.

cette composante uniquement due aux ondes interfaciales ne joue un rôle important que lorsque la vitesse du bateau est inférieure ou égale à la vitesse de phase de ces ondes.

Une évolution typique de la résistance, *i.e.* la force de trainée, en fonction de la vitesse du bateau est décrite par Ekman à la figure 7.2. Il met notamment en évidence sur ce diagramme l'influence de la hauteur de la couche d'eau douce en surface, qui joue à la fois un rôle sur l'amplitude et la localisation du maximum de résistance (sommet de la courbe). Cependant, le maximum local de la fonction est associé à la vitesse de phase maximale  $c_\phi^m$  des ondes correspondant aux grandes longueurs d'ondes. Si on considère les ondes baroclines seulement [39, p.128], on trouve pour un fluide à deux couches de densité et hauteurs respectives  $(\rho_1, h_1)$  et  $(\rho_2, h_2)$

$$c_\phi^m = \sqrt{g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}. \quad (7.1)$$

Lorsque la vitesse est grande (devant  $c_\phi^m$ ), la résistance tend vers le cas homogène, c'est-à-dire une loi quadratique avec la vitesse.

Outre la hauteur de la couche d'eau douce, la hauteur de la couche d'eau salée, la valeur du saut de densité ainsi que le type de bateau considéré, sont des paramètres influençant le profil de la résistance due aux vagues en fonction de la vitesse. Ekman propose une description analytique prenant en compte ces dépendances, l'allure des solutions étant comparables à celles présentées à la figure 7.2. Nous reviendrons sur cette

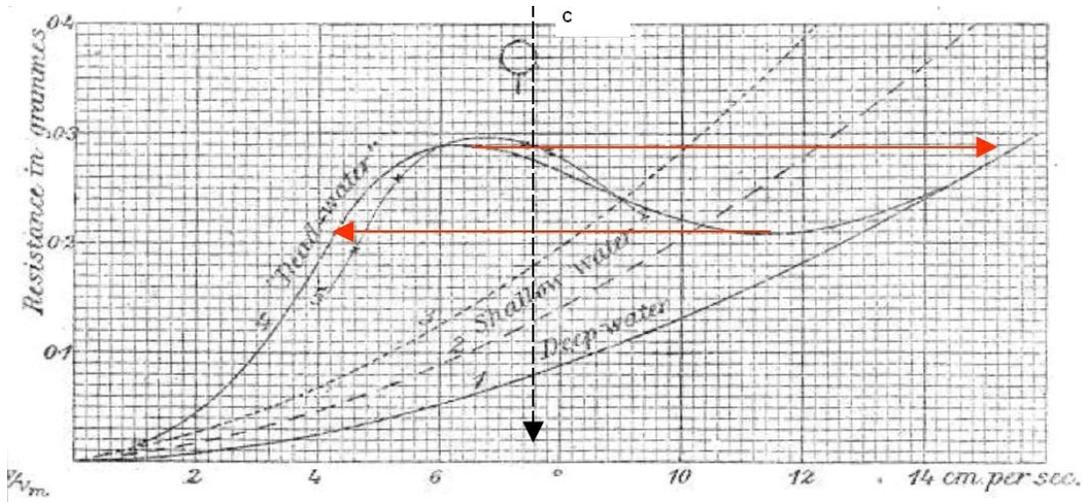


FIGURE 7.3 – Relation force-vitesse établie par Ekman [24] pour un bateau tiré dans un fluide à deux couches, comparée aux cas d'une couche homogène de hauteur variable. Les flèches horizontales indiquent les changements importants de vitesse pour une augmentation ou diminution de la force de traction, illustrant également le cycle d'hystérésis parcouru.

modélisation à la section 7.3.

On peut noter que la résistance est maximale lorsque la hauteur de la couche d'eau douce est de l'ordre de deux fois la hauteur immergée du bateau, que le saut de densité n'est pas trop faible, et que la profondeur est grande.

**Nature hystérétique ou « capricieuse » du phénomène :** Le comportement hystérétique est décrit par Ekman de la façon suivante. En s'appuyant sur le diagramme vitesse-force (résistance due aux vagues) illustré figure 7.3, Ekman montre notamment que la vitesse peut augmenter brusquement en partant d'une valeur faible (saut de 6 à 15 cm/s) lorsque le bateau est en phase d'accélération, mais également qu'il peut être freiné (de 11 à 4 cm/s) lorsqu'il est en train de décélérer. La plage de vitesses de 6 à 12 cm/s correspond alors à une zone pour laquelle la vitesse du bateau ne peut être constante (régime instable), et où le phénomène d'eaux mortes est visible.

Il est important de noter que cette discussion faite par Ekman considère une force de traction variable, *i.e.* si l'on ne tire pas le bateau avec une force constante, on peut observer un cycle d'hystérésis de la vitesse. Cependant, Ekman fait également allusion à un autre aspect, qualifié de « capricieux » [24, p.67], du phénomène. Pour une force de traction constante, dans certains cas, la vitesse du bateau peut ne jamais atteindre de valeur limite et osciller avec une amplitude considérable. Ekman considère alors la valeur moyenne de la vitesse pour obtenir le diagramme force-vitesse. Nous reviendrons sur ce

point à la section 7.3.

**Comment échapper aux eaux mortes ?** Il faut entendre par « échapper aux eaux mortes » pour une embarcation, le fait qu'elle retrouve une vitesse importante après avoir éprouvée une perte de puissance en se déplaçant sur un fluide stratifié.

Les suggestions d'Ekman pour échapper aux eaux mortes consistent à partir d'une situation de repos, où le bateau est à l'arrêt depuis suffisamment longtemps pour que les vagues se soient dissipées. Il recommande alors de fournir le maximum de puissance possible au bateau pour lui permettre d'accélérer suffisamment pour que la résistance maximale due aux vagues soit dépassée et que le bateau puisse atteindre une vitesse suffisante, lui permettant de s'échapper du régime excessivement freiné.

La procédure peut être répétée à plusieurs reprises ; si elle échoue, elle permet alors en plus de mélanger les couches d'eaux douce et salée, diminuant ainsi la différence de densité et donc *a priori* le seuil de résistance maximale. Cet effet reste cependant très faible.

Enfin, une proposition intéressante consiste à se déplacer en direction de la côte la plus proche afin de naviguer dans une région où la hauteur d'eau est plus faible. La vitesse des ondes diminuera fortement, permettant au navire de s'échapper plus facilement. Le risque est alors de retomber dans une région d'eaux mortes en reprenant la route initiale.

**Ondes interfaciales transverses :** Ekman a réalisé ses expériences dans un canal étroit mais également dans un canal plus large où les ondes générées pouvaient avoir une structure à trois dimensions. Il a ainsi pu observer des ondes divergentes analogues aux ondes de surface dans le sillage d'un bateau, et également des ondes transverses dont l'évolution est quasiment bidimensionnelle. Nous nous concentrons sur ces dernières qui sont les seules que nous avons reproduites au laboratoire.

Deux types d'ondes transverses ont été identifiés par Ekman : un train d'ondes à la poupe du bateau et une onde solitaire à la proue.

L'onde solitaire à la proue est décrite comme une masse d'eau que le navire doit pousser, ajoutant une résistance supplémentaire au mouvement qui s'ajoute à l'effet des vagues émises à la poupe. Cette onde peut s'échapper vers l'avant lorsque la vitesse du navire vient à diminuer (à cause d'une forte augmentation de la résistance due au train d'ondes) ; elle se déplace alors à la vitesse maximale qu'a pu atteindre le bateau, sans se déformer.

Concernant le train d'ondes à la poupe, l'origine de la perturbation naît de l'élévation de l'interface due à la dépression créée par l'accélération du fluide de la couche supérieure lorsqu'il passe sous le bateau. L'amplitude de l'élévation croît avec la vitesse du bateau tant que cette dernière reste inférieure à une vitesse critique correspondant à la vitesse maximale des ondes, et à partir de laquelle les ondes disparaissent.

Il est également remarquable que la surface libre du fluide soit quasiment au repos. Les oscillations sont en fait particulièrement faibles puisque leur amplitude et celle de l'interface entre les couches sont reliées par le rapport entre les sauts de densité entre les couches d'air et de fluide, soit  $(\rho_a - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1) \simeq 1/500$ . A l'échelle de l'océan, on peut éventuellement observer ces modes d'oscillations baroclines puisque l'amplitude des ondes interfaciales est très grande, plusieurs dizaines de mètres. Cependant, la signature des ondes internes à la surface est plus souvent associée à l'aspect de la surface libre (lisse ou rugueuse) issue de l'effet des courants de surface sur les ondes gravito-capillaires, notamment grâce à de zones convergentes ou divergentes. Le principe est illustré à la figure 7.4.

### 7.1.2 Autres travaux traitant des eaux mortes

Depuis la thèse d'Ekman, des travaux de recherche plus récents traitent également du phénomène d'eaux mortes. Les résultats présentés sont alors liés au phénomène mais ne l'étudient pas directement.

Une approche originale de Hughes et Grant [55] utilise la génération d'ondes interfaciales par un bateau dans un régime d'eaux mortes afin d'étudier l'effet des vagues transverses sur les ondes de surface dues au vent. L'étude tente notamment de relier les propriétés statistiques des vagues de surface aux courants associés aux ondes internes.

Leo Maas au laboratoire Néerlandais NIOZ a réalisé des expériences ayant pour but d'observer un effet similaire sur des nageurs. Une étude réalisée avec des nageurs dans une piscine remplie avec un fluide à deux couches, stratifié en température, semble confirmer un effet analogue à celui observé pour un bateau [71]. Il a également étudié le bilan des forces sur une main plongeant dans un fluide à deux couches, afin de proposer un bilan de puissance plus détaillé [28]. Cette observation est à mettre en avant pour l'explication de certains accidents comme des noyades inexplicables dans des lacs, en été notamment. Alors que l'eau est en apparence calme, la surface libre est chauffée par le soleil en été et une stratification s'établit. Le nageur, même expérimenté, peut s'épuiser à nager dans une configuration d'eaux mortes, l'empêchant d'atteindre le bord.

Des travaux étudiant l'évolution des ondes internes générées par un objet accéléré dans un fluide stratifié ont permis de mettre en évidence que lors du démarrage du mouvement, les ondes générées se décomposent sur l'ensemble des modes baroclines de la stratification [95]. De plus, la dynamique de ces ondes est non-linéaire puisque lorsque l'on arrête (artificiellement) l'objet en mouvement, leur amplitude croît [113].

**Une approche différente : bateau tiré à vitesse constante.** Un très grand nombre d'articles traitent également du problème d'un objet tracté à vitesse constante dans un fluide stratifié. Un certain nombre de résultats sont utiles à la compréhension des phé-

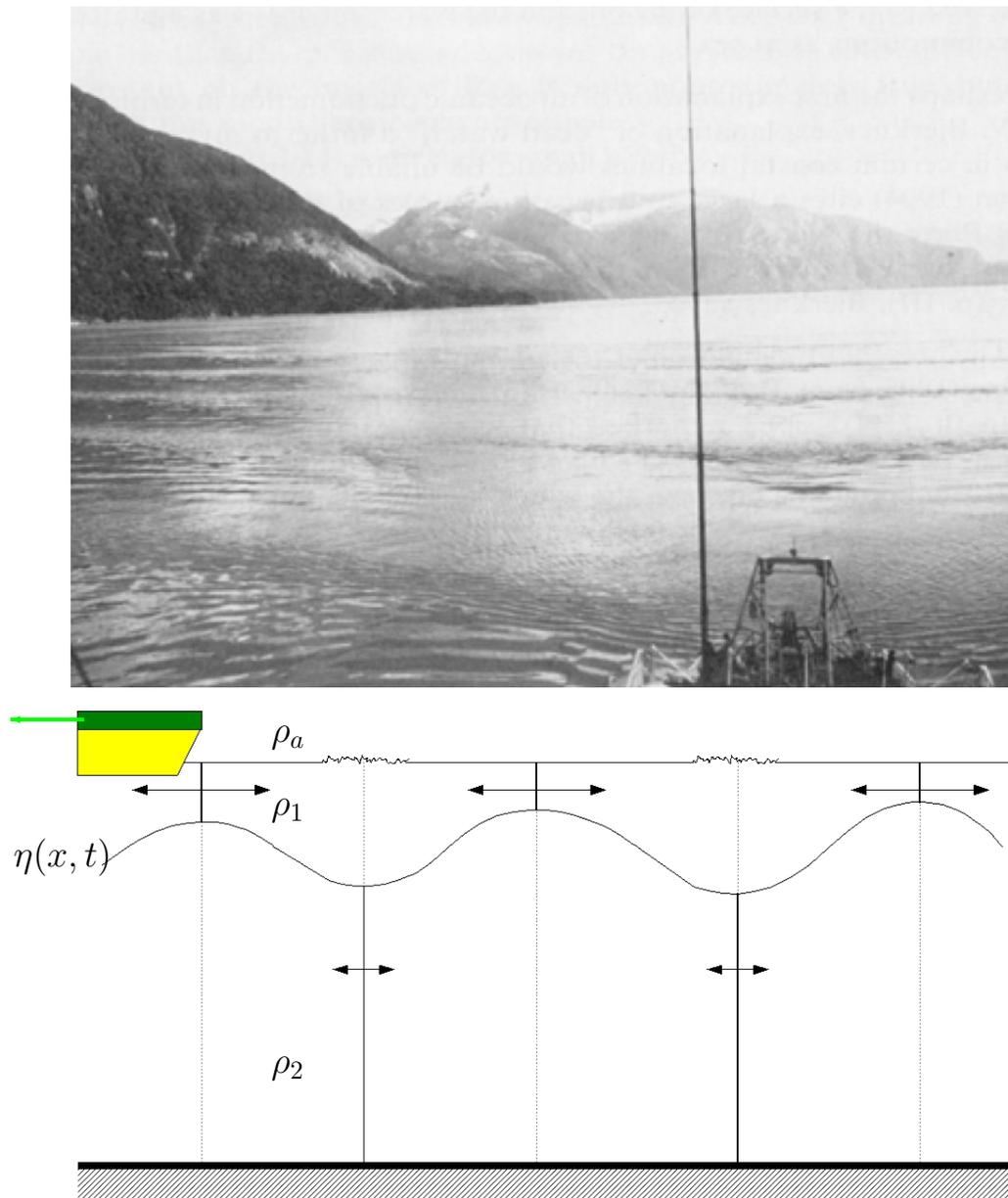


FIGURE 7.4 – Photo du sillage d’un bateau pris dans des eaux mortes [39] dans la baie « Bute » (Colombia Britannique, Canada). La vitesse du bateau est de  $0.5 \text{ m s}^{-1}$  et la couche d’eau douce est d’environ  $3.4 \text{ m}$ . Les bandes d’aspect alternativement lisse et rugueux sont issues de l’effet des courants de surface sur les ondes de surface, le principe étant schématiquement illustré en dessous de la photo, où les courants horizontaux associés aux ondes interfaciales sont représentés, modifiant l’aspect de la surface libre.

nomènes décrits par la suite, notamment en ce qui concerne les vagues générées et la résistance engendrée sur le bateau.

Dans le cas d'un fluide à deux couches, il a été mis en évidence analytiquement et numériquement que la force de traînée due aux ondes internes est maximale pour une valeur inférieure mais proche de 1 (sous-critique) du nombre de Froude [81, 82]. L'allure des ondes internes et notamment leur couplage avec les ondes de surface a permis de justifier l'hypothèse que l'on peut négliger l'influence des ondes de surface dans le régime des eaux mortes [129].

Ces résultats établis dans un cadre linéaire peuvent être étendus en prenant en compte des effets non-linéaires [8].

L'étude du sillage d'un objet évoluant dans une stratification uniforme avec  $N$  constant a également montré que la traînée ressentie par l'objet en mouvement était maximale pour le régime où le Froude est inférieur à 1 [46]. Cependant, la nature des ondes émises est différente selon que la gamme de valeurs considérées [13]; mais également selon que l'objet en mouvement est à la surface [111] ou totalement immergé [51, 80]. On remarquera cependant que l'aspect non-stationnaire de la force ressentie par l'objet tracté en surface est cité par Vosper *et al.* [124].

Cependant, il est important de noter que lors de l'observation du phénomène d'eaux mortes par Ekman, la vitesse du bateau n'est pas constante. L'expérience consiste à imposer une force de traction constante, ou bien une puissance moteur constante, mais laisse libre la vitesse du bateau. Ainsi, l'étude dynamique de ce problème est bien plus riche que le cas d'un objet tracté à vitesse constante.

## 7.2 Revisiter les travaux d'Ekman

Il est intéressant aujourd'hui de revenir sur ces expériences pour essayer de mieux comprendre la nature de l'interaction entre les ondes générées à l'interface entre les couches de différentes densités, et le bateau. Grâce aux outils expérimentaux et théoriques qui ont beaucoup évolué, on peut espérer une meilleure compréhension du phénomène d'eaux mortes.

### 7.2.1 Expériences réalisées

Les expériences décrites par la suite sont également illustrées en détail sur le site Culture-Sciences Physique [77]. Une partie des mesures a été réalisée en collaboration avec Romain Vasseur lors d'un stage de licence co-encadré avec Thierry Dauxois [122].

Paramètres expérimentaux		symboles	valeurs	unités
Cuve	dimensions	$L \times H \times W$	$300 \times 50 \times 10.5$	$\text{cm}^3$
Traction	tension courroie	$T$	$\sim 0.35$	N
	force	$F_t$	$0.011 - 0.035$	N
Bateau	dimensions	$L_b \times h_b \times w_b$	$20.0 \times 5.0 \times 10.0$	$\text{cm}^3$
	section immergée	$S_b$	$12.0 - 24.0$	$\text{cm}^2$
	masse	$M$	$171 - 343$	g
Fluide 1	densité	$\rho_1$	$0.999 - 1.005$	$\text{g cm}^{-3}$
	hauteur	$h_1$	$2.0 - 5.0$	cm
Fluide 2	densité	$\rho_2$	$1.010 - 1.030$	$\text{g cm}^{-3}$
	hauteur	$h_2$	$5.0 - 15.0$	cm
	densité moyenne	$\bar{\rho} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}$	$\sim 1.01$	$\text{g cm}^{-3}$
	saut de densité	$\Delta\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\bar{\rho}}$	$0.01 - 0.1$	
	vitesse limite des ondes	$c_\phi^m = \sqrt{\Delta\rho g \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}$	$0.03 - 0.2$	$\text{m s}^{-1}$
	nombre de Froude	$Fr = \frac{U}{c_\phi^m}$	$0.2 - 2$	
	Reynolds	$Re = \frac{U h_1}{\nu}$	$400 - 10000$	

TABLE 7.1 – Gamme de paramètres expérimentaux utilisés pour étudier le phénomène d'eaux mortes.

### 7.2.1.1 Dispositif expérimental

Le schéma et une photo du montage expérimental sont présentés à la figure 7.5. Les valeurs des principaux paramètres des expériences sont résumées dans la table 7.1.

Dans une cuve en plexiglas de 3 m de long et de largeur 10.5 cm, nous avons tiré un bateau Playmobil © (avec son marin pêcheur et parfois une baleine pour l'alourdir), large de 10 cm sur un fluide stratifié de hauteur variable. Les deux couches de densité différentes sont typiquement de l'eau douce (densité  $\rho_1$ ) avec un peu de colorant alimentaire rouge et de l'eau salée (densité  $\rho_2 > \rho_1$ ). La hauteur du saut de densité entre les couches est minimisée en siphonnant le fluide après le remplissage de la cuve qui est réalisé par la couche salée en premier, puis la couche douce (colorée). Selon les cas, du fait de la diffusion et du mélange généré par les expériences, l'épaisseur de la zone de transition entre les fluides 1 et 2 peut être comprise entre 0.5 cm et 5.0 cm (valeur rarement atteinte). Un

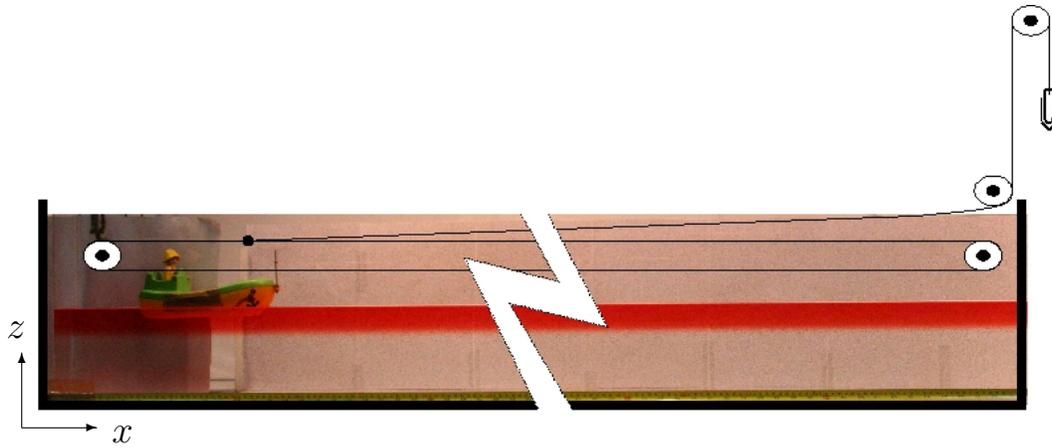


FIGURE 7.5 – Principe de l'expérience illustrant le phénomène d'eaux mortes.

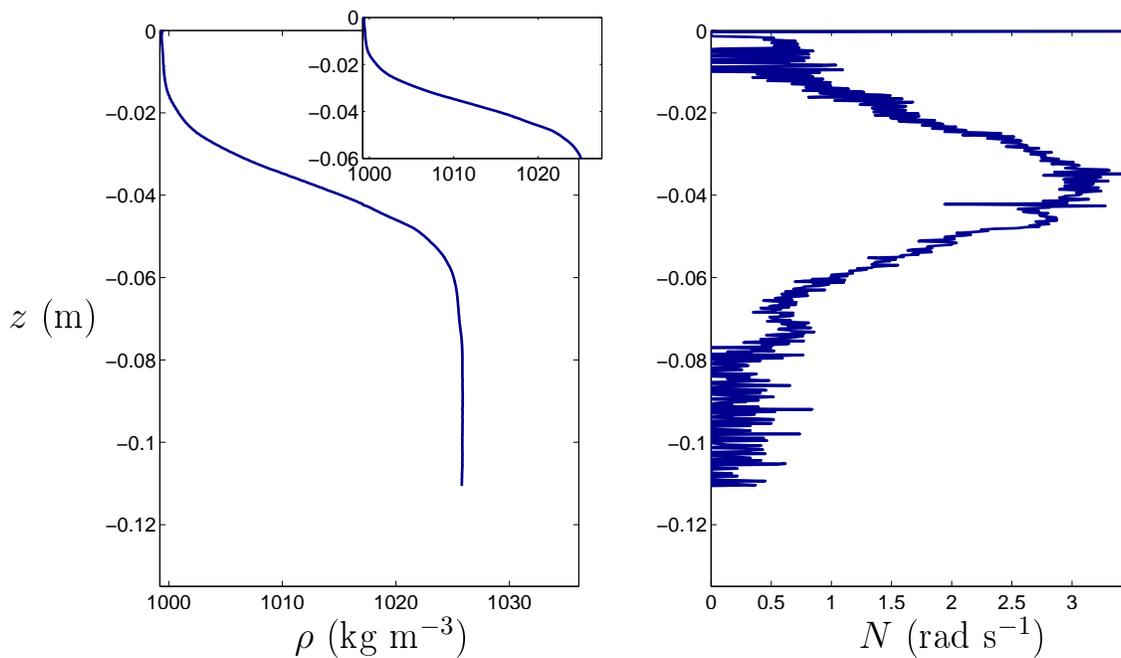


FIGURE 7.6 – Profil de densité et pulsation de Brunt-Väisälä associée pour une stratification à 2 couches à l'issue d'une série d'expériences. Le saut de densité faisant approximativement 4 cm de hauteur est observé dans l'encart zoomé sur le haut de la stratification.

exemple de stratification obtenue dans ce cas-là est présenté à la figure 7.6.

De manière à tirer le bateau à force constante selon la direction horizontale, une courroie est tendue entre deux poulies et à laquelle le bateau est fixé (par un mât à la proue, et par la tête du pêcheur à la poupe) comme illustré à la figure 7.5. La tension de la courroie est ajustable car une des poulies peut coulisser horizontalement, et un contre-poids permet de fixer la tension de travail. Il est important que la tension de la courroie soit fixée pour la reproductibilité des expériences ; qui plus est la valeur choisie est telle

que la courroie ne ressent pas d'effet chaînette (ficelle pesante), sans pour autant être trop tendue ce qui pourrait entraîner un moment de frottements solide trop important au niveau des poulies.

Pour faire avancer le bateau, on accroche à la courroie une autre ficelle dont l'extrémité comporte un poids qui peut tomber sous l'effet de la pesanteur (deux poulies servent à convertir le mouvement horizontal en mouvement vertical descendant). À noter que les poids utilisés sont très faibles (des trombones de quelques milligrammes). Initialement le bateau est maintenu grâce à un aimant fixé à sa poupe, attiré par un électroaimant à l'extérieur de la cuve. Cependant, il est tout à fait possible de retenir le bateau manuellement. L'avantage de l'électroaimant est qu'il minimise les perturbations de la cuve lorsque le bateau est lâché, et qu'il permet un démarrage contrôlé.

### 7.2.1.2 Techniques de mesures

**Technique 1 :** Une première série d'expériences a été réalisée avec une simple caméra noir & blanc permettant de suivre à la fois la dynamique du bateau,  $x(t)$ , et l'évolution temporelle de la position de l'interface entre les deux couches,  $\eta(x, t)$ .

Le principe de la mesure consiste à observer la cuve avec un éclairage puissant afin de rendre l'image très contrastée et de pouvoir identifier la couche d'eau douce à la partie colorée de l'image, la couche inférieure de l'image étant transparente. Un certain nombre d'hypothèses et de contraintes sont inhérentes à cette méthode. On peut notamment remarquer que l'on

- considère l'interface entre les fluides 1 et 2 comme infiniment fine,
- néglige le phénomène de diffusion du sel vers la couche colorée et du colorant vers la couche salée, phénomène lent à l'échelle de la durée des expériences (typiquement une journée comparée à quelques minutes),
- néglige les évolutions à petites échelles de l'interface, notamment les zones de mélange.

En pratique, à partir d'une image enregistrée telle que celle présentée à la figure 7.7(a), on obtient l'image contrastée représentée à la figure 7.7(b) dont il est facile d'extraire l'interface entre les deux couches, ainsi que la surface libre et la position du bateau.

**Technique 2 :** La technique décrite précédemment donne une vue globale de l'expérience mais n'apporte aucune information détaillée sur l'évolution du fluide stratifié. Afin d'obtenir une plus grande caractérisation des ondes internes générées au cours des expériences, mais également dans le but de valider l'utilisation de la technique 1 et pouvoir confirmer les résultats obtenus, des mesures utilisant la strioscopie synthétique absolue (avec l'image de référence en fluide homogène) ont été réalisées.

Afin de comparer avec les données issues de la technique 1, nous avons mis en place

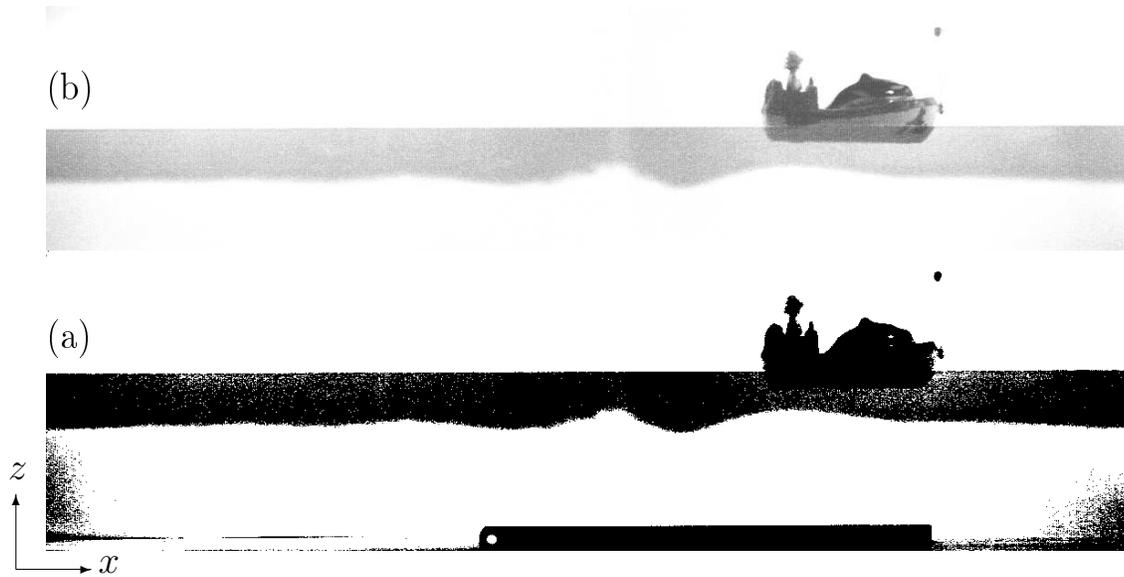


FIGURE 7.7 – (a) Image en ton de gris enregistrée au cours d’une expérience à deux-couches avec la technique 1. (b) Même image qu’en (a) à l’issue de la conversion en image contrastée noir et blanc.

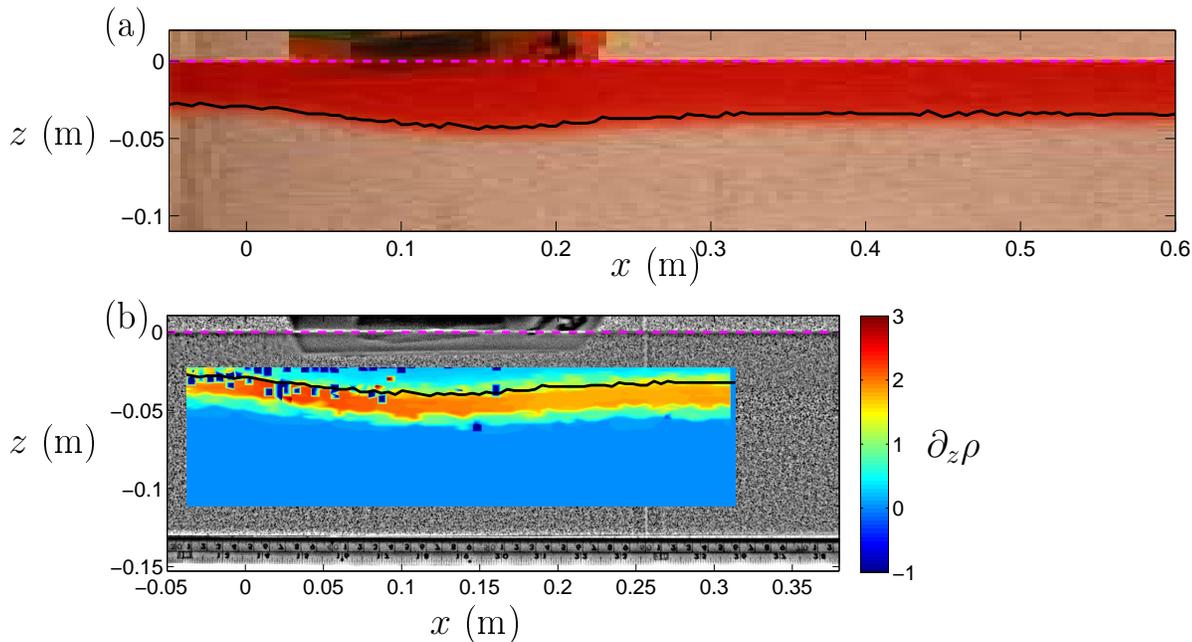


FIGURE 7.8 – Technique 2 au cours d’une expérience à deux-couches : (a) image couleur (prise avec l’appareil photo) et (b) image noir & blanc (prise avec la caméra) sur laquelle est superposé le gradient vertical de densité (en  $(\text{rad s}^{-1})^2$ , calculé par la technique « absolute schlieren ». La ligne noire, correspondant à la position de l’interface, est calculée sur l’image (a) et reportée ensuite sur l’image (b).

une mesure simultanée de l’évolution du fluide stratifié grâce à la caméra noir & blanc et

un appareil photo couleur (ne disposant pas de caméra couleur à ce moment). Le fluide 1 est toujours coloré à l'aide de colorant alimentaire afin de pouvoir suivre l'évolution de l'interface via la technique 1 où l'on détectera la couleur rouge, et on ajoute une grille de points pour utiliser la strioscopie synthétique avec la caméra noir & blanc. L'image de référence correspond à un fluide homogène (*cf.* section 3.2.1.4), afin d'utiliser la technique « absolute schlieren » qui prend mieux en compte les sauts de densité. La figure 7.8 présente les deux types d'images obtenues dans le même référentiel, au même instant.

La ligne noire superposée au champ 2D du gradient vertical de densité (figure 7.8 (b)) est issue du traitement de l'image couleur (figure 7.8 (a)). Elle permet de mettre en évidence que le mouvement de l'interface mesuré avec la technique 1 correspond bien aux oscillations du saut de densité. Ce dernier apparaît sur les données issues de la strioscopie synthétique comme la zone de plus fort gradient vertical de densité. Cette représentation nous permet de valider cette méthode de détection de l'interface, en apparence très limitée.

## 7.2.2 Dynamique du bateau

A l'instar d'Ekman, nous avons pu faire varier différents paramètres, et vérifier que le phénomène d'eaux mortes n'est pas toujours présent et dépend de conditions particulières. Les paramètres importants sont notamment le saut relatif de densité  $\Delta\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ , la hauteur de la couche d'eau douce  $h_1$  par rapport à la hauteur de la couche d'eau salée  $h_2$  mais aussi par rapport à la ligne de flottaison du bateau  $h_b$  (attention, changer cette valeur modifie également la section immergée et donc la force de traînée).

Un jeu de valeurs pour lesquelles il est possible d'observer le phénomène (correspondant à la vidéo du site web [77]) est  $h_1 = 5$  cm,  $h_2 = 12$  cm,  $h_b \simeq 2$  cm,  $\Delta\rho = 0.0216$  et dans le cas d'une force de traction  $F_t = 17.7$  mN. Dans cette configuration, si l'on note  $x(t)$  la position du bateau en fonction du temps, la vitesse du bateau est  $v(t) = dx/dt$ . Ces deux grandeurs sont représentées sur la figure 7.9. On retrouve l'observation faite par Ekman que la vitesse oscille autour d'une valeur moyenne  $\langle v \rangle \simeq 0.019$  m s<sup>-1</sup> avec des fluctuations très importantes  $|v_{max} - v_{min}| \sim 0.015$  m s<sup>-1</sup>, de l'ordre de 80% de la valeur moyenne dans ce cas-ci. La force de traction  $F_t$  étant constante au cours du temps, l'évolution temporelle décrite précédemment suggère donc que la résistance due aux vagues, elle, ne l'est pas. Cela semble raisonnable puisque l'on peut observer des modifications des ondes interfaciales dans le sillage du bateau, donc leur effet sur le bateau doit changer au cours du temps. Nous étudierons plus en détail les ondes dans la section suivante.

A titre d'exemple, la figure 7.10 présente l'évolution temporelle  $x(t)$  et  $v(t)$  pour les mêmes paramètres que précédemment mais avec  $F_t = 20.6$  mN. Le bateau tend vers un régime stationnaire (vitesse limite  $v_\ell \simeq 0.052$  m s<sup>-1</sup>) et, bien qu'il ait ressenti leur influence au démarrage notamment, il échappe aux ondes interfaciales qui se sont développées.

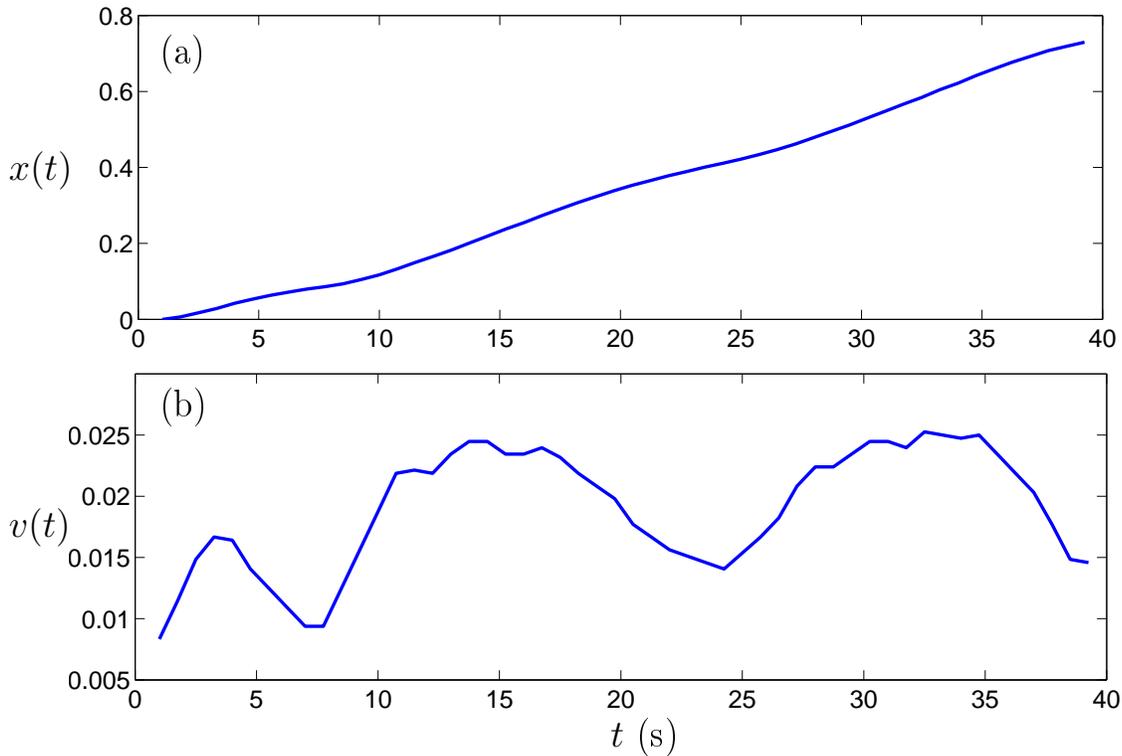


FIGURE 7.9 – (a) Position du bateau  $x(t)$  (en m) et (b) sa vitesse  $\frac{dx}{dt}$  (en  $\text{m s}^{-1}$ ) pour une expérience mettant en évidence le phénomène d'eaux mortes.

**Diagramme Force-Vitesse :** Pour une stratification et un bateau donné, on peut rassembler l'ensemble des résultats obtenus pour les différentes valeurs de  $F_t$  testées. Le but est de comparer nos résultats avec ceux obtenus par Ekman. Nous utiliserons préférentiellement la force de traînée  $F_t$  plutôt que la résistance due aux ondes car il n'est pas toujours possible de définir cette dernière notamment quand la vitesse limite  $v_\ell$  n'est pas atteinte, l'accélération du bateau n'étant alors pas nulle. Dans les cas où  $v_\ell$  est bien définie, les deux forces sont égales.

Nous présentons sur la figure 7.11 des résultats analogues à ceux présentés sur la figure 7.2 tout en prenant en compte les oscillations possibles de la vitesse. Lorsque le bateau n'atteint pas de vitesse limite (cf. figure 7.9), on représente la valeur de  $v_\ell$  par une plage de valeurs possibles (ligne horizontale), avec un symbole indiquant la valeur moyenne.

En comparant ces deux figures, un point commun est le fait que lorsque la couche  $h_1$  d'eau douce diminue, la résistance due aux vagues augmente puisque la vitesse limite  $v_\ell$  diminue pour une même force de traction  $F_t$  donnée.

L'influence du couplage entre le bateau et les ondes interfaciales peut être observée en modifiant le rapport entre les hauteurs d'eau et de bateau. Deux séries d'expériences associées à une même stratification ( $\Delta\rho = 0.0145$ ,  $h_1 = 0.10$  m et  $h_2 = 0.06$  m) mais pour

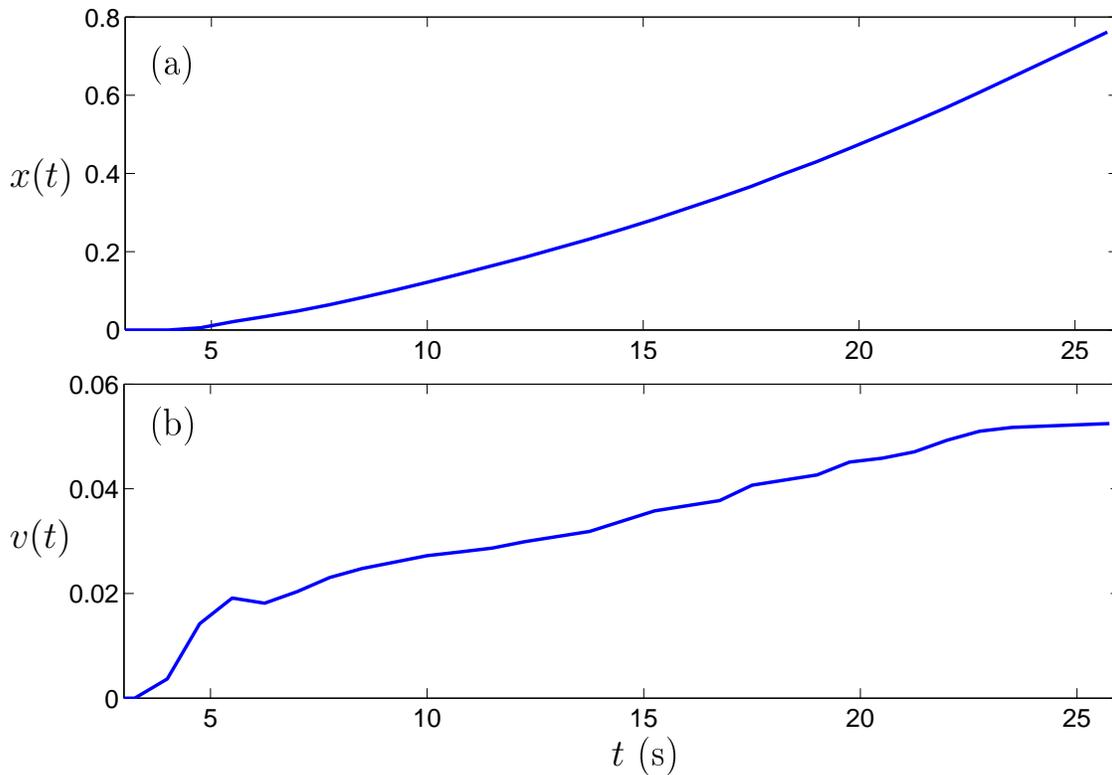


FIGURE 7.10 – (a) Position du bateau  $x(t)$  (en m) et (b) sa vitesse  $\frac{dx}{dt}$  (en  $\text{m s}^{-1}$ ) pour une expérience sans oscillation.

trois configurations de bateau correspondant à  $S_b = 12$  (\*),  $S_b = 18$  ( $\triangleleft$ ) et  $S_b = 24 \text{ cm}^2$  ( $\circ$ ) respectivement, sont représentées à la figure 7.12. On voit ainsi que plus le bateau est immergé dans la couche supérieure, plus il ressent une force de traînée due aux ondes. Lorsque  $h_b$  tend vers  $h_1$ , le bateau génère moins d'ondes mais mélange les deux interfaces. La condition  $h_b \simeq h_1/2$  correspond à un couplage « optimal » entre le bateau et les ondes, dans le sens où la force de traînée est maximale sans nuire à l'intégrité des ondes via du mélange.

Nous avons également vérifié l'influence du saut de densité  $\Delta\rho$ , ainsi que de la hauteur de la couche salée  $h_2$ . Au final, Il est possible de généraliser les résultats obtenus :

- la force de traînée est toujours plus forte dans un fluide à deux couches que dans le cas homogène,
- il existe une plage de vitesse où la force de traînée n'est pas constante dans le temps, les fluctuations de cette dernière peuvent atteindre des amplitudes conséquentes,
- la plage de vitesse oscillante est toujours inférieure à  $c_\phi^m$ .

Au vue de ces résultats, il est important de décrire plus en détail les ondes interfaciales, ce que nous allons faire dans la section suivante.

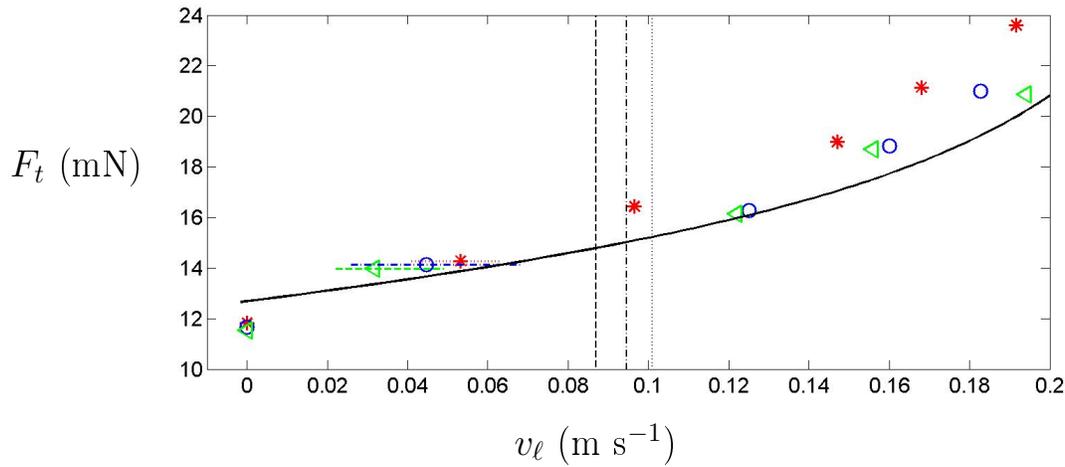


FIGURE 7.11 – Relation force-vitesse établie pour 3 hauteurs d'eau douce  $h_1$ , (\*)0.06 m, (o)0.05 m et ( $\triangleleft$ )0.04 m ; sur une eau salée de hauteur  $h_2 = 0.14$  m avec  $\Delta\rho = 0.0247$ . La courbe continue représente le cas homogène avec une hauteur d'eau de 0.15 m. Les lignes verticales pointillées représentent les valeurs de  $c_\phi^m$  associées à celles de  $h_1$ , soit ( $\cdots$ )0.10 m s $^{-1}$ , ( $-\cdot-$ )0.095 m s $^{-1}$  et ( $---$ )0.087 m s $^{-1}$ . Les lignes horizontales indiquent les plages d'oscillations de la vitesse quand elles existent.

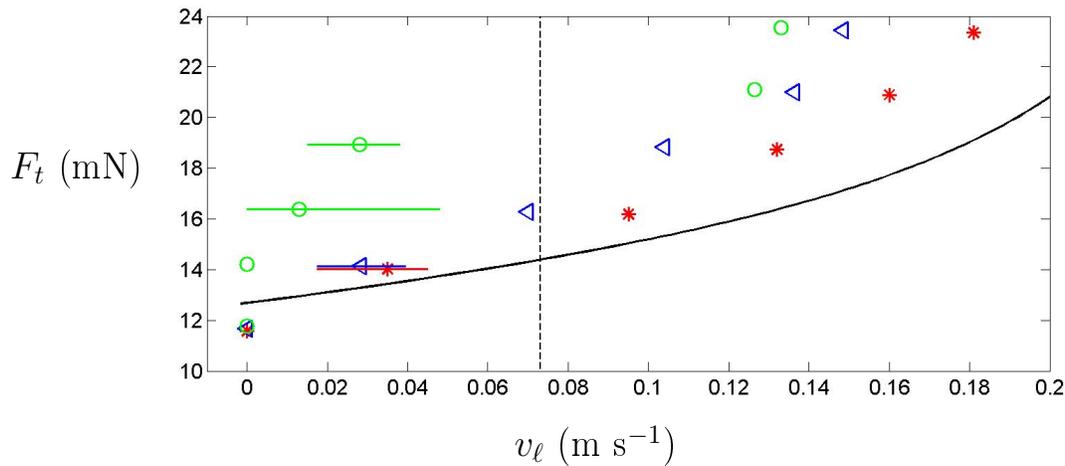


FIGURE 7.12 – Relation force-vitesse établie pour 3 configurations de bateau, (\*) –  $S_b = 12$ , ( $\triangleleft$ ) –  $S_b = 18$ , et (o) –  $S_b = 24$  cm $^2$  dans un fluide avec une couche d'eau douce de hauteur  $h_1 = 0.06$  m sur une eau salée de hauteur  $h_2 = 0.10$  m avec  $\Delta\rho = 0.0145$ . La courbe continue représente le cas homogène avec une hauteur d'eau de 0.15 m et une section 18 cm $^2$ . La ligne verticale pointillée représente  $c_\phi^m$ .

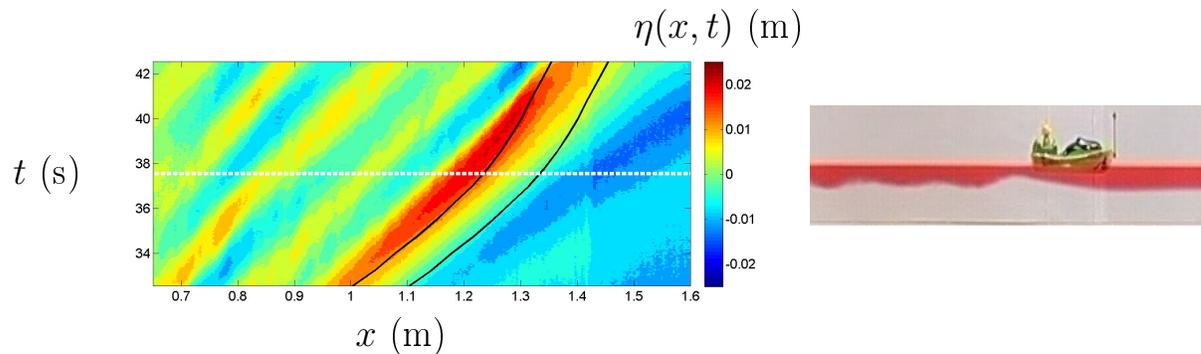


FIGURE 7.13 – Exemple de diagramme spatio-temporel (à gauche) de l’amplitude des ondes interfaciales, ainsi que l’image associée (à droite) à la ligne pointillée blanche à  $t = 37.5$  s. Les lignes noires représentent la position de l’avant et l’arrière du bateau.

### 7.2.3 Ondes interfaciales

Les ondes générées par le bateau peuvent être observées de deux manières différentes. Dans le référentiel du laboratoire, il est facile de comprendre leur dynamique propre et de mesurer leurs caractéristiques. Il est également intéressant de les observer dans le référentiel du bateau, qui n’est pas en translation uniforme donc difficile à utiliser, mais qui permet de comprendre plus d’éléments de la dynamique couplée des ondes et du bateau.

Dans les deux approches, nous allons observer l’évolution de l’interface au cours du temps  $\eta(x, t)$  à l’aide d’un diagramme spatio-temporel où l’évolution du bateau sera également représentée. Trois éléments sont notamment à identifier (cf. figure 7.13) :

- une surpression à l’avant du bateau (en bleu sur le diagramme) qui correspond à un effet de masse ajoutée que le navire doit pousser pour se déplacer dans le fluide à deux couches,
- un affinement de la couche de surface juste à la poupe (en rouge intense sur le diagramme) dû au fait que l’écoulement sous le bateau subit une réduction de section, qui entraîne une augmentation de la vitesse du fluide et donc une dépression dans la couche supérieur, attirant l’interface vers le haut,
- et un train d’onde dans le sillage qui résulte de la relaxation de l’élévation précédente.

#### 7.2.3.1 Dans le référentiel du laboratoire

Dans le référentiel du laboratoire, le paramètre important permettant de classer les différents types de sillages observés est le nombre de Froude  $Fr = v_\ell / c_\phi^m$ . Trois cas de figures se présentent, selon que sa valeur soit petite, du même ordre ou grande devant 1. Les expériences présentées ici correspondent à des valeurs des paramètres telles que

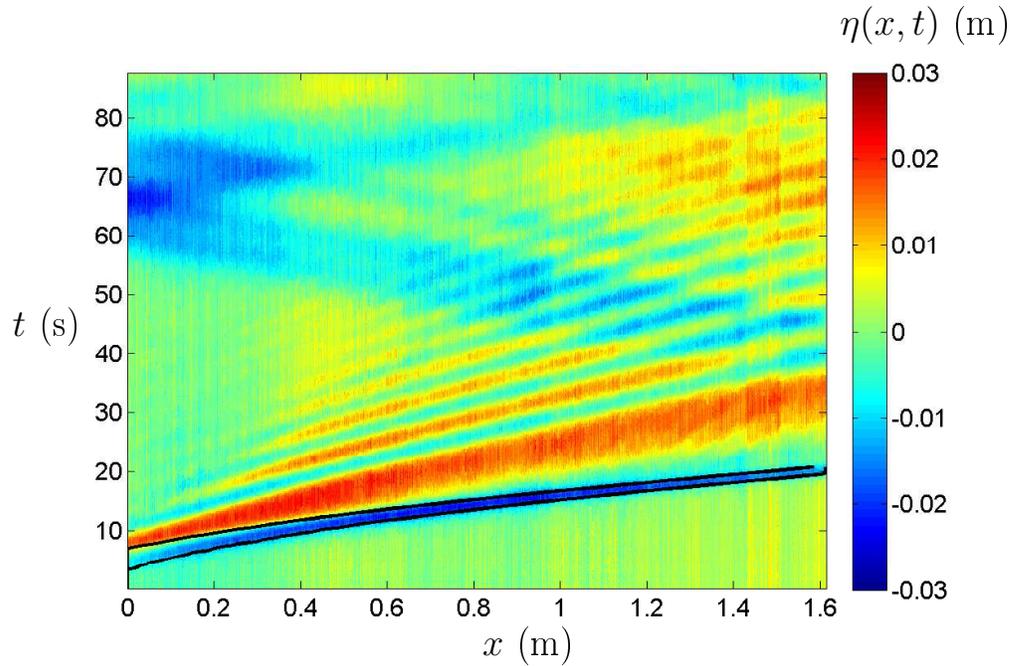


FIGURE 7.14 –  $Fr > 1$  : Diagramme spatio-temporel de l'amplitude des ondes interfaciales  $\eta(x, t)$ . Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux :  $h_1 = 5.0$  cm,  $h_2 = 14.0$  cm,  $\rho_1 = 0.9980$  g cm $^{-3}$ ,  $\rho_2 = 1.0227$  g cm $^{-3}$ ,  $S_b = 24$  cm $^2$ ,  $F_t = 21$  mN.

$$c_\phi^m = 0.094 \text{ m s}^{-1}.$$

$Fr > 1$  : Lorsque la vitesse du bateau est plus grande que la vitesse maximale des ondes interfaciales, alors ces dernières ne peuvent pas suivre le bateau qui s'échappe des ondes générées au démarrage. Par contre, on remarque sur la figure 7.14 que la masse d'eau ajoutée à l'avant du bateau est poussée par ce dernier et donc avance avec la même vitesse. On mesure dans ce cas-ci  $v_\ell \simeq 0.15$  m s $^{-1}$ , soit une valeur du nombre de Froude proche de 1.6. Pour les temps  $t > 40$  s, le bateau atteint l'extrémité de la cuve et s'arrête. La perturbation à l'avant du bateau est expulsée et se propage dans l'autre direction après s'être réfléchi sur le bord de la cuve.

$Fr \simeq 1$  Lorsque que la vitesse limite atteinte par le bateau est de l'ordre de la vitesse des ondes, on observe un sillage d'ondes internes qui se déplacent quasiment à la même vitesse que ce dernier. L'évolution est stationnaire comme on peut le voir sur la figure 7.15 et la suppression à l'avant du bateau également. À noter que cette expérience correspond à une valeur du Froude légèrement inférieure à 1 ( $v_\ell = 0.075$  m s $^{-1}$ , i.e.  $Fr = 0.8$ ). Comme précédemment, on peut remarquer que pour les temps  $t > 45$  s, le bateau atteint l'extrémité de la cuve et s'arrête. La perturbation à l'avant du bateau est expulsée et se propage dans l'autre direction après s'être réfléchi sur le bord de la cuve. Cette dépression

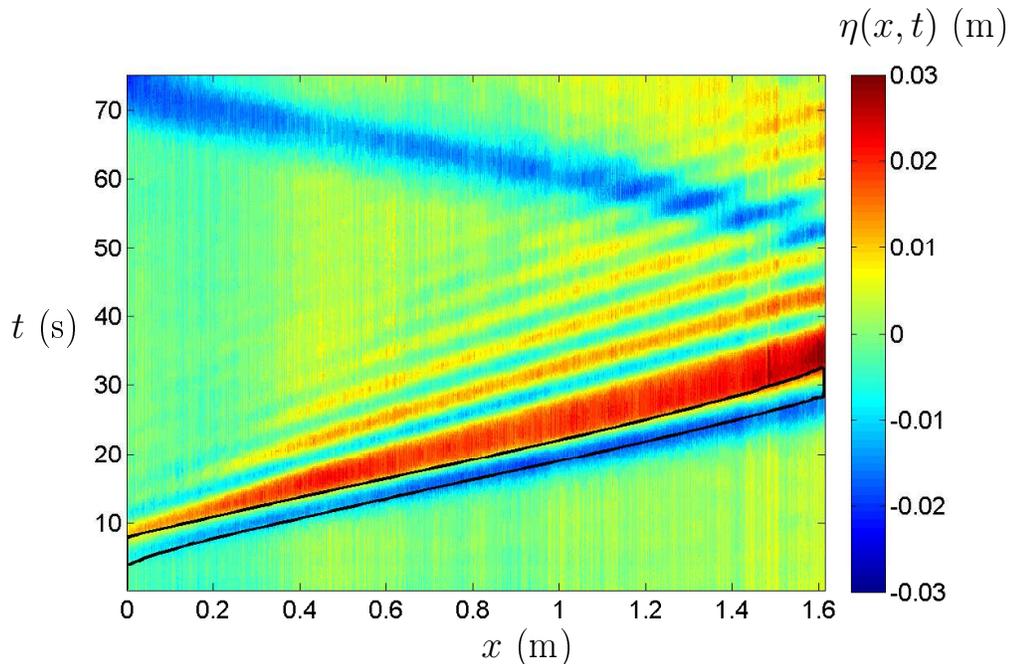


FIGURE 7.15 –  $Fr \simeq 1$ . Diagramme spatio-temporel de l'amplitude des ondes interfaciales  $\eta(x, t)$ . Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux :  $h_1 = 5.0$  cm,  $h_2 = 14.0$  cm,  $\rho_1 = 0.9980$  g cm $^{-3}$ ,  $\rho_2 = 1.0227$  g cm $^{-3}$ ,  $S_b = 18$  cm $^2$ ,  $F_t = 16.3$  mN.

de l'interface se propageant sans se déformer est alors un soliton.

$Fr < 1$  Le régime le plus atypique est celui associé à une vitesse de bateau inférieure à celle des ondes interfaciales. Comme on peut le voir sur la figure 7.16, l'amplitude des ondes créées dans le sillage du bateau croît à mesure que le bateau avance, jusqu'à une amplitude maximale correspondant au moment où le bateau est fortement freiné, voire s'arrête. L'élévation de l'interface semble alors revenir à une valeur très faible, la première vague se brise alors sur le bateau qui repart et cette évolution temporelle se reproduit. On mesure que la vitesse oscille autour de la valeur moyenne  $\langle v(t) \rangle \simeq 0.035$  m s $^{-1}$ , soit une valeur du nombre de Froude variant autour de 0.4.

Il faut noter également que la déformation de l'interface à l'avant du bateau « s'échappe » lorsque ce dernier est freiné alors qu'une nouvelle se crée lorsque le bateau redémarre. On peut supposer qu'il s'agit d'une onde solitaire puisqu'il est possible de voir cette onde de surpression se propager dans l'autre sens ( $t > 50$  s sur la figure 7.16), après s'être réfléchi sur le bord de la cuve, sans se déformer. Elle se réfléchit même une seconde fois à l'autre extrémité de la cuve ( $t > 75$  s).

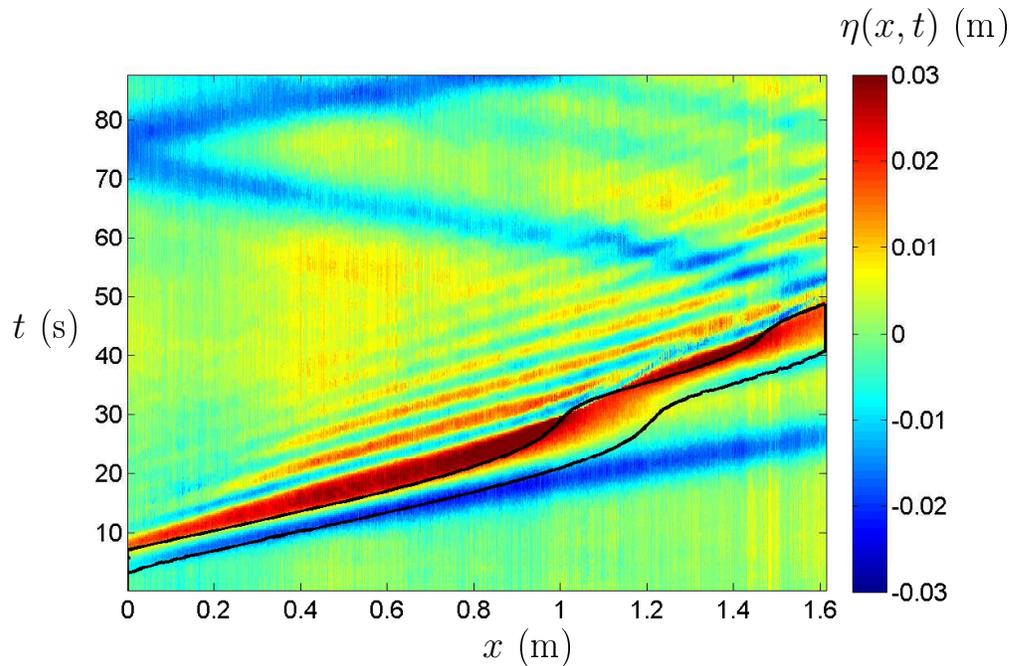


FIGURE 7.16 –  $Fr < 1$ . Diagramme spatio-temporel de l'amplitude des ondes interfaciales  $\eta(x, t)$ . Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux :  $h_1 = 5.0$  cm,  $h_2 = 14.0$  cm,  $\rho_1 = 0.9980$  g cm $^{-3}$ ,  $\rho_2 = 1.0227$  g cm $^{-3}$ ,  $S_b = 24$  cm $^2$ ,  $F_t = 18.8$  mN.

### 7.2.3.2 Dans le référentiel du bateau

Certains points restent difficiles à interpréter en ce qui concerne l'évolution du bateau dans le régime  $Fr < 1$ . Il est notamment difficile de comprendre ce qui détermine les oscillations de la vitesse et leur nature (période, amplitude). Une observation du champ d'ondes dans le référentiel non galiléen associé au bateau apporte des informations complémentaires. Nous revenons sur les trois régimes vus précédemment.

$Fr > 1$  : Le bateau se déplaçant plus vite que les ondes interfaciales, celles-ci s'éloignent de plus en plus du bateau (cf. figure 7.17). L'amincissement de la couche de surface semble également se détacher de la poupe du bateau tout en s'élargissant dans le temps. Quant à la surpression à l'avant du bateau, elle reste quasiment fixe au dessous du bateau dans ce référentiel.

$Fr \simeq 1$  : On s'attend, dans ce cas-ci, à observer que les ondes sont quasiment fixes dans le référentiel du bateau puisque l'on avait déjà observé qu'elles se propageaient à la même vitesse que ce dernier à la figure 7.15. La figure 7.18 confirme cette évolution.

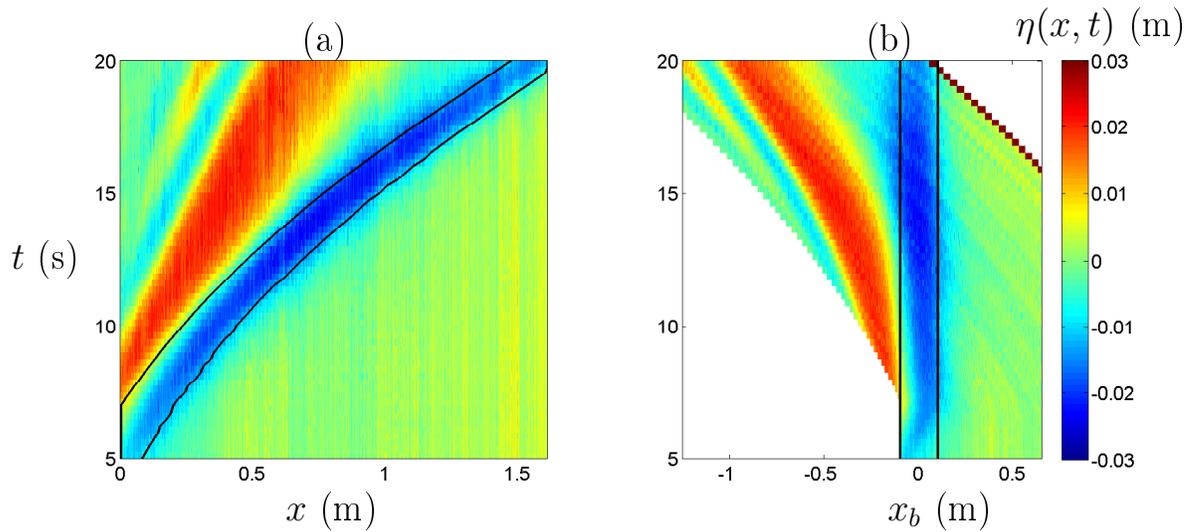


FIGURE 7.17 –  $Fr > 1$ . Diagramme spatio-temporel de l'amplitude des ondes interfaciales dans le référentiel du (a) laboratoire et (b) du bateau. Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Mêmes paramètres qu'à la figure 7.14

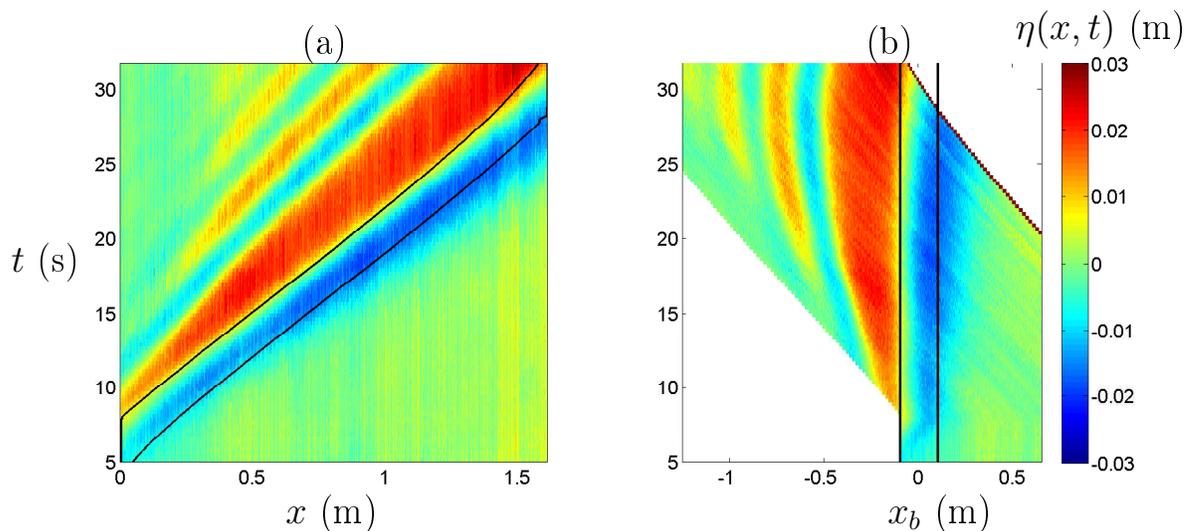


FIGURE 7.18 –  $Fr \simeq 1$ . Diagramme spatio-temporel de l'amplitude des ondes interfaciales. Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Mêmes paramètres qu'à la figure 7.15.

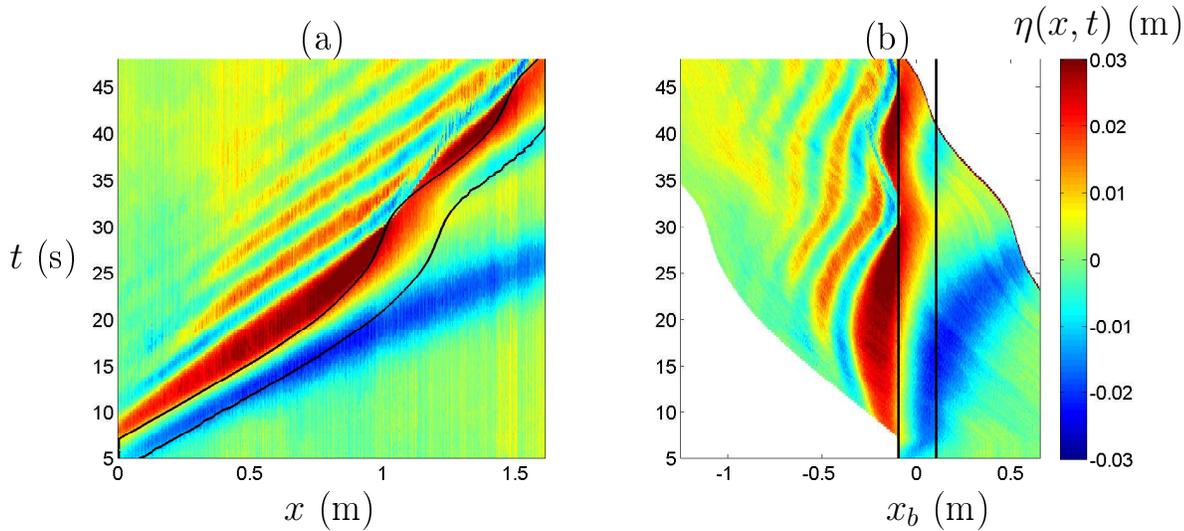


FIGURE 7.19 –  $Fr < 1$ . Diagramme spatio-temporel de l’amplitude des ondes interfaciales dans le référentiel du (a) laboratoire et (b) du bateau. Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau (se déplaçant de la droite vers la gauche). Mêmes paramètres qu’à la figure 7.16.

$Fr < 1$  : Dans le cas le plus typique des eaux mortes, l’évolution des ondes dans le référentiel du bateau (figure 7.19 (b)) est très intéressante. On observe notamment qu’à mesure que l’amplitude de l’élévation à la poupe du bateau croît, le train d’ondes se rapproche du bateau. Cela est principalement dû au ralentissement du bateau puisque l’on peut voir à la figure 7.19 (a) que la vitesse des ondes est quasi-constante.

Finalement, on peut superposer dans le référentiel du bateau l’interface  $\eta(x, t)$  à différents instants afin de vérifier l’évolution non-linéaire des trains d’ondes. On peut observer à la figure 7.20 le raidissement du front d’onde ainsi que la diminution de l’épaisseur de la couche de surface à la poupe du bateau jusqu’à atteindre la limite où elle touche la coque du navire. Cette représentation est associée au diagramme de la figure 7.19 (b), mais retranscrit mieux l’augmentation de l’amplitude du train d’ondes, sans changement de sa longueur d’onde caractéristique.

Qui plus est, il est possible de distinguer en quoi l’oscillation de la vitesse du bateau est liée aux ondes. En effet, on observe que lorsque le maximum d’amplitude possible est atteint, pour l’élévation de l’interface à l’arrière du bateau ( $t = 27$  s), le haut de la « vague » se brise sur le bateau et passe sous le bateau, ainsi que la première perturbation négative qui la suit ( $t = 32$  s). Le train d’ondes s’étant décalé d’environ une longueur d’onde, le bateau repart et l’amplification de l’élévation suivante commence ( $t = 37$  s), ce qui conduit à la même évolution que celle décrite précédemment.

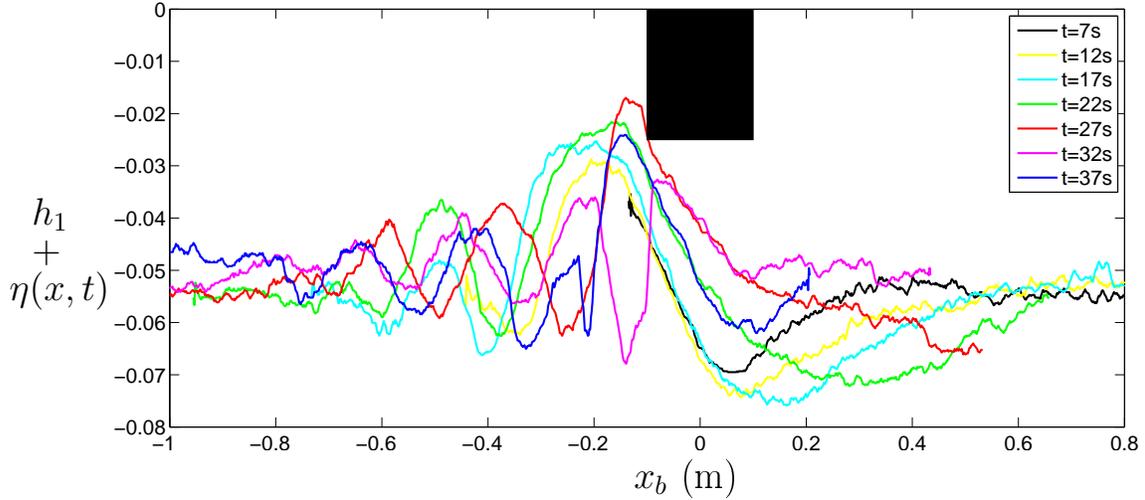


FIGURE 7.20 –  $Fr < 1$ . Position de l'interface  $\eta(x, t)$  (en m) autour de sa position d'équilibre  $h_1$  pour différents instants au cours du ralentissement du bateau. Le rectangle noir représente le bateau. Mêmes paramètres qu'à la figure 7.16.

On peut donc estimer que la fréquence des oscillations du bateau est définie par

$$f_b = \frac{c_g}{\lambda_g} \quad (7.2)$$

où  $c_g$  est la vitesse de groupe du paquet d'ondes et  $\lambda_g$  la longueur d'onde caractéristique du paquet, correspondant à la distance entre les deux premiers maxima principalement.

Nous vérifions cette hypothèse sur un cas analogue au précédent, mais avec  $F_t = 16.3$  mN. D'après l'évolution de la vitesse (figure 7.21 (a)), on peut estimer la fréquence des oscillations à  $f_b \sim 0.07 - 0.08$  Hz. La vitesse moyenne et la longueur d'ondes des vagues sont données par le diagramme de la figure 7.21 (b)). On trouve  $c_g \sim 0.035 - 0.040$  m s<sup>-1</sup> (cette valeur est inférieure à  $c_\phi^m$ ) et  $\lambda_g \sim 0.5$  m. Ainsi on vérifie bien que  $c/\lambda_g \sim 0.07 - 0.08$  Hz.

Concernant l'amplitude des oscillations de la vitesse du bateau, il semble raisonnable de l'associer à l'amplitude maximale  $A_m$  que peut atteindre l'élévation de l'interface. Plus précisément, le bateau est d'autant plus freiné que la dépression qui se crée à sa poupe est grande. La force ressentie par le bateau est alors fonction du gradient horizontal de pression que l'on peut estimer. Si l'on suppose pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli entre une position sous le bateau (A) et la poupe du bateau (B), on a

$$\frac{P_A}{\rho_1} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho_1} + \frac{v_B^2}{2}, \quad (7.3)$$

qui conduit à

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim \frac{P_B - P_A}{L_b} = \frac{\rho_1 v_A^2}{2L_b} \left[ \left( \frac{h_1 - A_m}{h_1 - h_b} \right)^2 - 1 \right]. \quad (7.4)$$

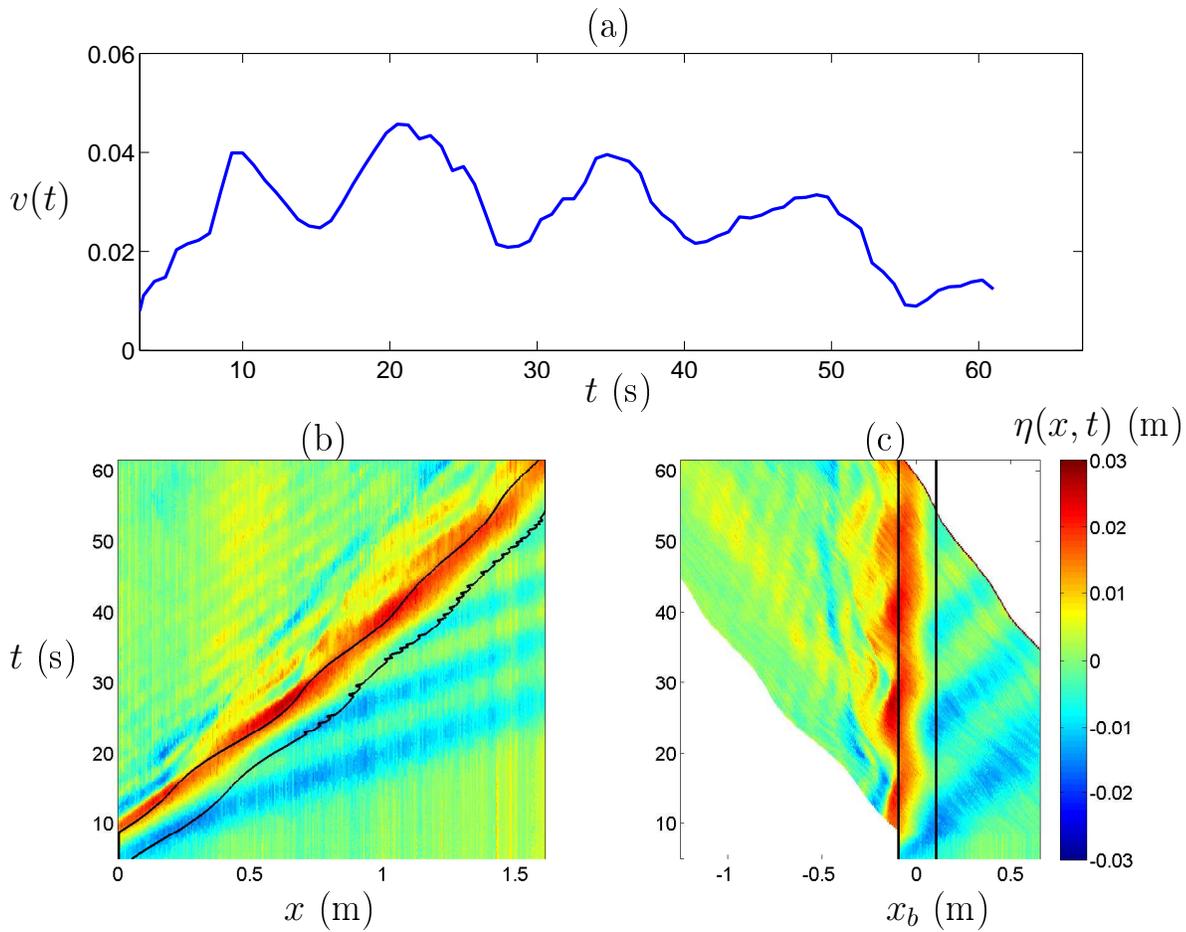


FIGURE 7.21 –  $Fr > 1$ . (a) Vitesse du bateau au cours du temps, et diagrammes spatio-temporels de l'amplitude des ondes interfaciales dans le référentiel du (a) laboratoire et (b) du bateau. Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux :  $h_1 = 5.0$  cm,  $h_2 = 14.0$  cm,  $\rho_1 = 0.9980$  g cm $^{-3}$ ,  $\rho_2 = 1.0157$  g cm $^{-3}$ ,  $S_b = 24$  cm $^2$ ,  $F_t = 16.3$  mN.

On a pris en compte le fait que les variations de vitesse sont régies par la conservation du débit dans la couche 1, soit  $v_B/v_A = (h_1 - A_m)/(h_1 - h_b)$ . Notre raisonnement reste cependant très qualitatif puisqu'il s'agit d'un couplage dynamique entre les ondes et le bateau, une approche quasi-statique étant discutable. Nous ne disposons pas par ailleurs d'assez de points expérimentaux pour vérifier le lien entre l'amplitude des oscillations de  $v(t)$  et  $A_m$ .

### 7.2.4 Retour sur l'explication (détaillée) du phénomène d'eaux mortes

Le mécanisme qui conduit au phénomène d'eaux mortes à partir d'une situation de repos peut être expliqué par le raisonnement suivant qui fait intervenir des notions sur la mécanique des fluides et les ondes non-linéaires de type solitons.

Lorsque le bateau se met en mouvement, il génère une perturbation de l'interface entre les deux couches dans son sillage. Ceci est dû au fait que le bateau déplace verticalement un certain volume de fluide en avançant, mais également au fait que l'écoulement qui se crée sous le bateau (dans la direction opposée à son mouvement) génère une dépression à l'arrière du bateau, qui entraîne une élévation de l'interface.

Par la suite, cette perturbation se développe en un train d'ondes de plus ou moins grande amplitude. Si l'amplitude de ces vagues est suffisamment importante, leur comportement est décrit par des équations non-linéaires de type Korteweg-de Vries [34]. Une propriété remarquable est alors le fait que la vitesse de la vague dépend de son amplitude.

Ainsi, le bateau ayant rapidement atteint une vitesse « limite », il peut être rattrapé par le train d'ondes. La dépression créée à la poupe va alors freiner le bateau de façon importante, voire l'arrêter, jusqu'à ce que la vague vienne se briser sur la coque du bateau et que l'effet se dissipe. Le bateau va alors reprendre sa course, et la seconde vague du train d'onde va alors générer le phénomène, de nouveau, ce qui va engendrer une oscillation de sa vitesse.

Cette dynamique complexe peut s'interpréter comme un phénomène d'hystérésis, puisqu'il existe différentes vitesses possibles du bateau pour une même force de traction. Cependant, la description faite par Ekman lorsque la force de traction varie ne peut s'appliquer pour ce cas-là et c'est la dynamique propre des ondes interfaciales de grandes amplitudes qui intervient.

La mise en place d'une description analytique des ondes interfaciales non-linéaires générées par le déplacement du navire est au delà de notre approche, cependant nous allons présenter les éléments qui semblent nécessaires à la description du phénomène d'eaux mortes.

## 7.3 Un modèle simple pour expliquer la dynamique du bateau

À travers cette étude, nous avons pu comprendre et identifier les éléments caractéristiques du phénomène : une onde solitaire qui peut s'échapper à la proue, et la génération de vagues interfaciales de grandes amplitudes à la poupe. Pour valider nos observations, il est intéressant d'essayer de modéliser l'évolution du bateau à partir d'une approche fortement simplificatrice mais comportant ces éléments essentiels. Nous pourrions notamment étudier l'influence indépendante de chacun de ces éléments.

### 7.3.1 Principe

Nous allons étudier l'évolution temporelle du bateau à partir du principe fondamental de la dynamique. On rappelle que le bateau de masse  $M$  et de géométrie  $\mathcal{G}$  se déplace selon l'axe  $(Ox)$  sous l'action d'une force constante correspondant à la chute d'un poids de masse  $m_t$ . Le fluide considéré est constitué de deux couches de densité et hauteur respectives  $(\rho_1, h_1)$  et  $(\rho_2, h_2)$ . La dynamique du bateau est régie par l'équation

$$[M + m_a(\dot{x}, \ddot{x}, \mathcal{G}, h_i, \rho_i)] \ddot{x}(t) = m_t g - F_v(\dot{x}, \ddot{x}, \mathcal{G}, h_i, \rho_i). \quad (7.5)$$

Nous avons introduit deux éléments spécifiques au phénomène d'eaux mortes,

- $m_a(\dot{x}, \ddot{x}, \mathcal{G}, h_i, \rho_i)$  la masse ajoutée qui est poussée à l'avant du bateau, qui peut évoluer en onde solitaire, et qui est *a priori* fonction de la vitesse du bateau  $\dot{x}$ , de son accélération  $\ddot{x}$ , des propriétés du fluide à la surface et de la couche inférieure  $(\rho_i, h_i)$  ainsi que de la géométrie immergée  $\mathcal{G}$  du bateau ;
- $F_v(\dot{x}, \ddot{x}, \mathcal{G}, h_i, \rho_i)$  la force de frottements fluides prenant en compte la contribution purement visqueuse (présente en fluide homogène également) et la contribution due aux vagues interfaciales générées. Elle est fonction des mêmes paramètres que la masse ajoutée.

Ces deux éléments caractéristiques du phénomène doivent être modélisés à partir des connaissances accumulées dans l'étude précédente. Cependant, l'effet de la masse ajoutée à l'avant du bateau nous a paru moins important. Nous nous concentrons donc sur le modèle de force de traînée due aux vagues.

Nous réalisons une résolution numérique de l'équation (7.5) via le schéma d'intégration suivant pour  $t_n = ndt$  et  $x_n = x(t_n)$ ,

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n dt \quad (7.6)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n dt \quad (7.7)$$

$$\ddot{x}_{n+1} = [m_t g - F_v(\dot{x}_n, \ddot{x}_n, \mathcal{G}, h_i, \rho_i)] / [M + m_a(\dot{x}_n, \ddot{x}_n, \mathcal{G}, h_i, \rho_i)] \quad (7.8)$$

### 7.3.2 Modèles de force de frottements dûe aux vagues

Nous allons essayer de comprendre l'effet des vagues dans le sillage du bateau, en utilisant plusieurs modèles. On rappelle que d'après les travaux d'Ekman ainsi que les expériences que nous avons réalisées, on doit retranscrire le fait que

- le régime d'existence des oscillations de vitesse est limité par la vitesse de phase des ondes  $c_\phi^m$  ;
- la vitesse du bateau peut osciller et ne jamais atteindre de valeur limite ;
- la force de trainée est plus forte que dans le cas homogène.

#### 7.3.2.1 Modèle sans hystérésis

En s'inspirant des travaux de Kelvin sur les ondes de surface, V. W. Ekman a proposé une solution analytique en accord avec les courbes expérimentales. La figure 7.3 présente justement les données avec le modèle. Les hypothèses pour obtenir l'expression de la résistance due aux vagues sont notamment l'absence de vagues à l'avant du bateau, la stationnarité du mouvement, la hauteur immergée du bateau faible devant la hauteur d'eau et sa géométrie suffisamment douce (pas de points anguleux, faibles pentes).

Il exprime alors la relation force vitesse, dans la limite où  $Fr = v/c_\phi^m < 1$ , sous la forme

$$F_v = \frac{g\Delta\rho S_b^3}{h_b(h_1 + h_2)^2} \frac{\sigma_1^2}{e^{2\sigma_1} - (v/c_\phi^m)^2}, \quad (7.9)$$

où  $\sigma_1$  est une fonction de la vitesse, correspondant à la solution de l'équation

$$e^\sigma - \frac{1}{\sigma(v/c_\phi^m)^2} \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{2} = 0. \quad (7.10)$$

L'allure de (7.9) en fonction du nombre de Froude est représentée en pointillé épais à la figure 7.22. On a ajouté également sur cette figure un modèle de relation force-vitesse issu de l'approche analytique et numérique de Miloh *et al.* [81]. Il est intéressant de remarquer que le résultat est comparable à celui d'Ekman, bien que l'influence des ondes se fassent sentir même au-dessus de  $Fr = 1$  (à la limite des grandes valeurs de Froude, le modèle tend vers le résultat en fluide homogène). Enfin la fine ligne pointillée correspond au cas homogène.

Nous allons retranscrire cette allure et l'introduire dans notre modèle, en prenant en compte le fait que l'amplitude du maximum local est fonction des paramètres de l'interface et que sa position correspond à  $c_\phi^m$ .

**Caractère hystérétique mais non « capricieux » :** Afin de montrer l'insuffisance des modèles présentés, nous représentons à la figure 7.23 la vitesse limite atteinte  $v_\ell$ , ou

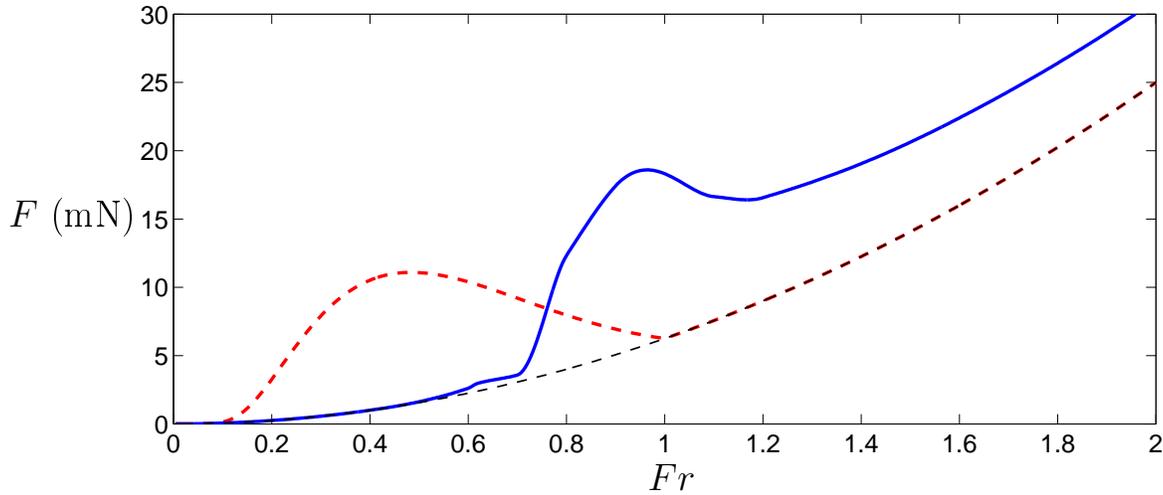


FIGURE 7.22 – Modèles de force de traînée en fonction du nombre de Froude pour le modèle d'Ekman (trait pointillé épais), de Miloh (trait continu) et le cas équivalent homogène (trait pointillé fin).

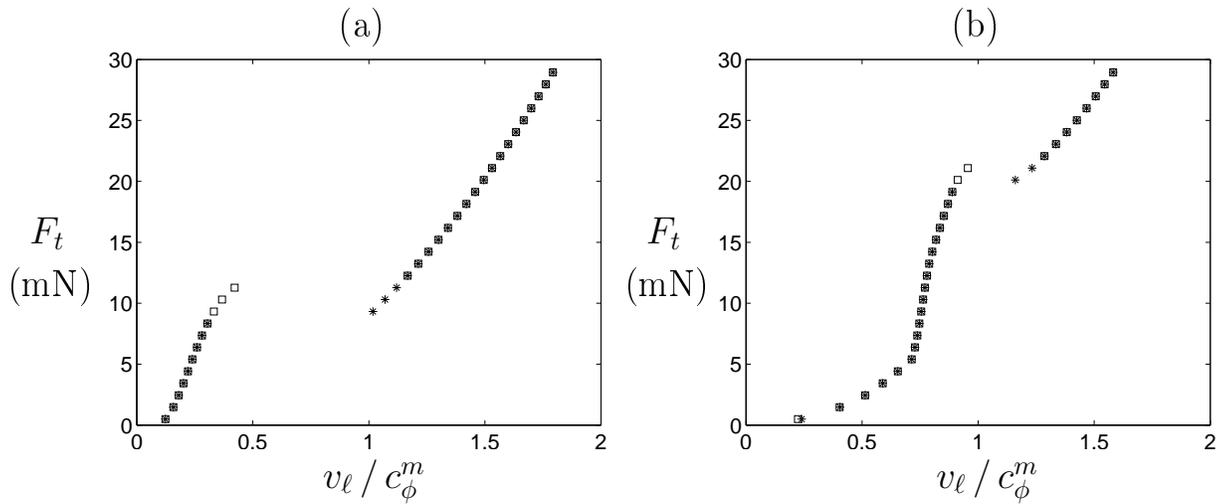


FIGURE 7.23 – Force de traction appliquée en fonction de la vitesse limite  $v_\ell$  atteinte pour les modèles (a) d'Ekman et de (b) Miloh décrits à la figure 7.22. Les symboles  $\square$  correspondent à une vitesse initiale nulle et les symboles  $*$  à une vitesse initiale correspondant à  $1.5 c_\phi^m$ .

la plage de vitesse limite si la limite n'est pas définie, en fonction de la force de traction. Nous pouvons ainsi directement comparer avec les figures 7.11 et 7.12 réalisées de la même façon.

On peut remarquer qu'aucun des modèles de force présentés à la figure 7.22 ne comporte de régime oscillant de la vitesse. Il existe toujours une vitesse limite atteinte et bien définie. Il n'y a pas de caractère « capricieux ».

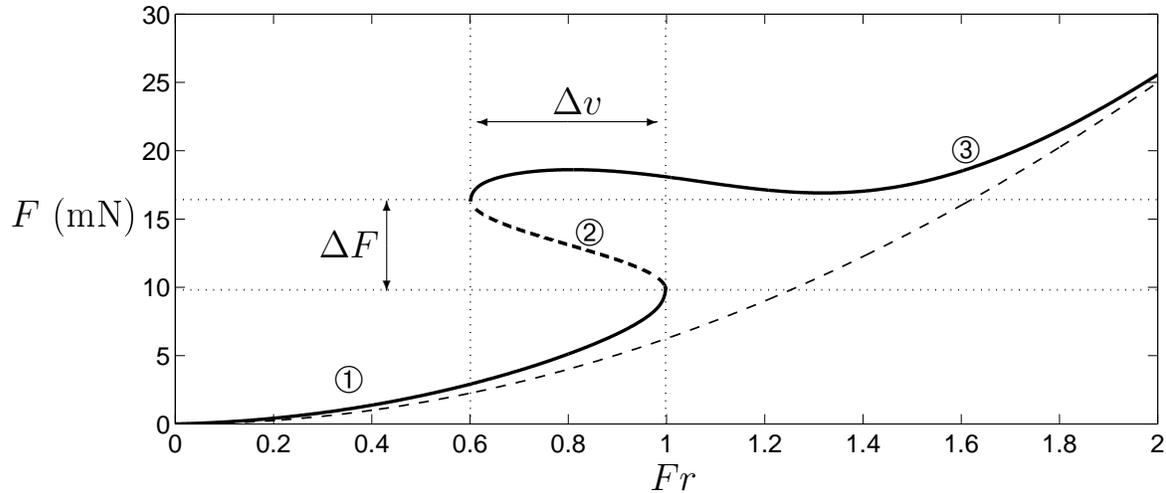


FIGURE 7.24 – Modèle hystérétique modélisant le lien entre la force de trainée due aux vagues et la vitesse du bateau.

Cependant, la vitesse limite peut être différente selon que l'on atteint cette valeur à partir d'une vitesse initiale plus faible ou plus élevée. En cela le modèle est hystérétique.

### 7.3.2.2 Modèle avec hystérésis

Nous proposons un modèle phénoménologique comportant un domaine hystérétique. Comme on peut le voir à la figure 7.24, nous introduisons une plage de vitesses  $\Delta v$  pour laquelle deux branches (① et ③) de la relation force-vitesse co-existent. Le choix de la branche ① au-dessous de la branche ③ est important pour obtenir le comportement oscillant du bateau pour une force de traction constante. Le contraire ne permet pas ce régime. Enfin la branche ② est instable et n'est pas accessible par le système.

**Caractère hystérétique et « capricieux » :** Comme précédemment, nous étudions le diagramme force de trainée - vitesse limite dans le cas où l'on choisit les valeurs  $\Delta F = 3$  mN centré sur la valeur 13 mN et  $\Delta v = 0.4 c_\phi^m$  centré sur  $v = 0.8 c_\phi^m$ . La figure 7.25 illustre le résultat pour deux configurations possibles, l'une correspondant exactement à la représentation de la figure 7.24, et nous avons modifié l'allure de la branche ③ afin qu'il n'y ait plus de minimum local proche de la valeur  $Fr = 1.3$ .

Dans les deux cas illustrés, on retrouve l'existence d'une plage de force de traction (correspondant à la plage de largeur  $\Delta F$ ) pour laquelle la vitesse n'est pas constante et oscille (amplitude des oscillations  $\Delta v$ ). C'est la présence de la branche ② qui introduit cette caractéristique. Cependant, la période des oscillations dépend fortement du choix de l'allure des branches ① et ③.

Le caractère hystérétique, traduisant la différence entre une vitesse limite atteinte par

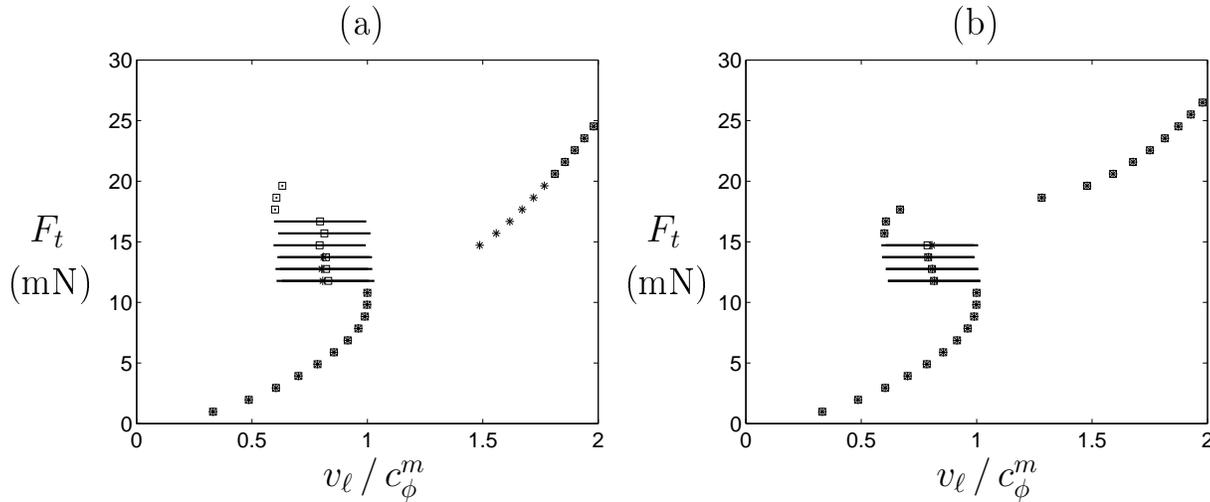


FIGURE 7.25 – Force de traction appliquée en fonction de la vitesse limite  $v_\ell$  atteinte pour le modèle avec hystérésis (a) dans le cas illustré à la figure 7.24 et (b) pour un cas analogue mais où la branche ③ n'a pas de minimum local. Les symboles  $\square$  correspondent à une vitesse initiale nulle et les symboles  $*$  à une vitesse initiale correspondant à  $1.5 c_\phi^m$ .

valeurs croissantes ou décroissantes, dépend également fortement des allures des branches, voire peut disparaître comme pour le cas de la figure 7.25 (b). Cependant, la notion d'hystérésis est quand même présente via la plage de valeurs où il n'existe pas de vitesse limite.

### 7.3.3 Conclusion

Pour décrire de façon réaliste le phénomène d'eaux mortes, le modèle linéaire proposé par Ekman et les modèles obtenus à partir d'études à vitesse constante sont insuffisants. Le caractère hystérétique peut être retrouvé mais pas l'aspect « capricieux » du phénomène, comme classifié par Ekman.

La courbe force-vitesse phénoménologique proposée, de par la présence d'un régime hystérétique, traduit le caractère non-linéaire des ondes interfaciales de gravité et joue notamment un rôle primordial dans la dynamique oscillante du bateau. Les caractéristiques du régime oscillant telles que la pseudo-période et l'amplitude des oscillations sont à associer à la longueur d'onde et la vitesse de propagation du train d'ondes non-linéaires pour une part, et à l'amplitude maximale de l'élévation du train d'ondes d'autre part.

La masse ajoutée à la proue joue certainement un rôle plus subtil mais n'est pas indispensable à l'explication de la dynamique du bateau.

Enfin, une autre approche pour le modèle de la force aurait pu être abordé. Nous aurions pu prendre en compte le caractère non stationnaire du problème en introduisant une dépendance temporelle de la force. Notre approche est très basique et nécessiterait



FIGURE 7.26 – Photos illustrant le phénomène d’eaux mortes dans le cas d’un fluide à trois couches.

une démarche analytique plus poussée.

## 7.4 Un phénomène robuste

Il est possible d’étudier le phénomène d’eaux mortes pour des situations plus complexes où un fluide comporte plusieurs couches de densité bien différentes. Ainsi pour 3 couches, le phénomène est présent et similaire au cas à 2 couches. La dynamique des deux interfaces est alors plus riche car des oscillations en phase et en opposition de phase sont possibles (modes baroclines). Finalement la généralisation au cas d’un fluide continûment stratifié, en présence d’une pycnocline est abordée.

### 7.4.1 Stratification à 3 couches

L’étude systématique du phénomène d’eaux mortes dans le cas d’un fluide à 3 couches de densité distinctes n’a pas pu être abordée par faute de temps, le domaine des paramètres à sonder étant bien plus vaste. Cependant, nous avons pu vérifier que les résultats sont équivalents au cas à 2 couches vu précédemment.

On considère donc un fluide composé de trois couches d’épaisseur  $h_i$  et de densité  $\rho_i$  avec  $i = 1, 2, 3$ . Deux interfaces sont présentes avec  $\eta_{12}(x, t)$  l’interface entre les couches 1 et 2, et  $\eta_{23}(x, t)$  l’interface entre les couches 2 et 3. La photo présentée à la figure 7.26 illustre ce cas.

Le même dispositif expérimental a été utilisé et la technique 1 permet d’extraire les deux interfaces  $\eta_{12}$  et  $\eta_{23}$ , ainsi que la position du bateau pour chaque image. Les principaux paramètres associés aux expériences présentées ici sont résumés dans la table 7.2

**Cadre analytique :** Dans le cas d’un fluide à trois couches, les deux interfaces ne peuvent pas être considérées comme indépendantes, puisqu’elles sont couplées par la couche intermédiaire lorsque que  $h_2$  est comparable à  $h_1$  et  $h_3$ . À titre indicatif, nous donnons les valeurs des paramètres associés à deux interfaces non couplés dans la table 7.2.

Paramètres expérimentaux		symboles	valeurs	unités
Fluide 1	densité	$\rho_1$	0.9967	$\text{g cm}^{-3}$
	hauteur	$h_1$	5.0	cm
Fluide 2	densité	$\rho_2$	1.0079	$\text{g cm}^{-3}$
	hauteur	$h_2$	3.0	cm
Fluide 3	densité	$\rho_3$	1.0201	$\text{g cm}^{-3}$
	hauteur	$h_3$	5.5	cm
Interface $\eta_{12}$	densité moyenne	$\bar{\rho}_{12} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}$	1.0023	$\text{g cm}^{-3}$
	saut de densité	$\Delta\rho_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_{12}}$	0.0112	
	vitesse limite des ondes	$c_{\phi,12}^m = \sqrt{\Delta\rho_{12}g \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}$	0.0147	$\text{m s}^{-1}$
	nombre de Froude	$Fr_{12} = \frac{U}{c_{\phi,12}^m}$	4.1 – 7.5	
Interface $\eta_{23}$	densité moyenne	$\bar{\rho}_{23} = \frac{\rho_3 + \rho_2}{2}$	1.014	$\text{g cm}^{-3}$
	saut de densité	$\Delta\rho_{23} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_{23}}$	0.012	
	vitesse limite des ondes	$c_{\phi,23}^m = \sqrt{\Delta\rho_{23}g \frac{h_2 h_3}{h_2 + h_3}}$	0.0150	$\text{m s}^{-1}$
	nombre de Froude	$Fr_{23} = \frac{U}{c_{\phi,23}^m}$	4.0 – 7.3	
Modes $s/a$	vitesse limite des ondes	$c_{s/a}^m$	0.073/0.044	$\text{m s}^{-1}$
	nombre de Froude	$Fr_{s/a} = \frac{U}{c_{s/a}^m}$	1.5/2.4 – 0.6/0.9	

TABLE 7.2 – Paramètres expérimentaux pour les expériences illustrant le phénomène d'eaux mortes dans un fluide à trois couches.

Dans le cadre théorique linéaire de deux interfaces couplées, il existe deux branches<sup>1</sup> de solutions à la relation de dispersion pour des ondes interfaciales harmoniques qui sont données par la résolution du déterminant suivant [128]

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta \\ \beta & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (7.11)$$

où l'on a introduit

$$\alpha_i = g(\rho_i - \rho_{i+1}) + \frac{\omega^2}{k} \left( \frac{\rho_i}{\tanh kh_i} + \frac{\rho_{i+1}}{\tanh kh_{i+1}} \right) \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (7.12)$$

$$\beta = -\frac{\rho_2 \omega^2}{k \sinh kh_2}. \quad (7.13)$$

On obtient alors un polynôme d'ordre 2 en  $\omega^2$ , ce qui conduit aux solutions du type :

$$\omega^2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad (7.14)$$

avec, en utilisant les notations introduites dans la table 7.2,

$$a = \frac{1}{k^2} \left[ \frac{\rho_1}{\tanh kh_1} + \frac{\rho_2}{\tanh kh_2} \right] \left[ \frac{\rho_2}{\tanh kh_2} + \frac{\rho_3}{\tanh kh_3} \right] - \frac{\rho_2^2}{k^2 \sinh^2(kh_2)}, \quad (7.15)$$

$$b = -\frac{g\Delta\rho_{12}}{k} \left[ \frac{\bar{\rho}_{12}\rho_2}{\tanh kh_2} + \frac{\bar{\rho}_{12}\rho_3}{\tanh kh_3} \right] - \frac{g\Delta\rho_{23}}{k} \left[ \frac{\bar{\rho}_{23}\rho_1}{\tanh kh_1} + \frac{\bar{\rho}_{23}\rho_2}{\tanh kh_2} \right], \quad (7.16)$$

$$D = \frac{g^2}{k^2} \left( \Delta\rho_{23} \left[ \frac{\bar{\rho}_{23}\rho_1}{\tanh kh_1} + \frac{\bar{\rho}_{23}\rho_2}{\tanh kh_2} \right] - \Delta\rho_{12} \left[ \frac{\bar{\rho}_{12}\rho_2}{\tanh kh_2} + \frac{\bar{\rho}_{12}\rho_3}{\tanh kh_3} \right] \right)^2 + \frac{4g^2 \bar{\rho}_{12}\bar{\rho}_{23}\rho_2^2 \Delta\rho_{12} \Delta\rho_{23}}{k^2 \sinh^2(kh_2)}. \quad (7.17)$$

En prenant la limite des grandes longueurs d'ondes ( $\tanh(kh_i) \simeq \sinh(kh_i) \simeq kh_i$ ), dans le cas où les densités sont proches ( $\Delta\rho_{ij} \ll \rho_i, \rho_j$  et  $\rho_i \sim \bar{\rho}, \forall i, j$ ), on peut définir deux vitesses de phases caractéristiques

$$c_s^m = \left[ g \frac{\Delta\rho_{12}h_1(h_2 + h_3) + \Delta\rho_{23}h_3(h_1 + h_2)}{h_1 + h_2 + h_3} + \tilde{\Delta} \right]^{1/2}, \quad (7.18)$$

$$c_a^m = \left[ g \frac{\Delta\rho_{12}h_1(h_2 + h_3) + \Delta\rho_{23}h_3(h_1 + h_2)}{h_1 + h_2 + h_3} - \tilde{\Delta} \right]^{1/2}, \quad (7.19)$$

---

1. Rigoureusement, il y a trois interfaces dans notre problème, mais comme nous l'avons vu précédemment, la déformation de la surface libre est négligeable et inobservable en pratique.

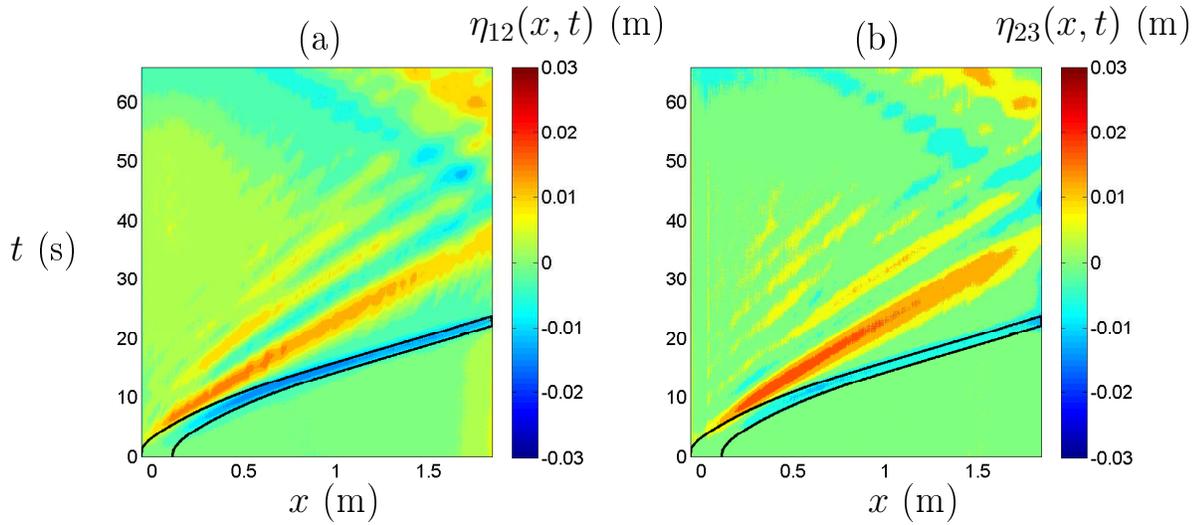


FIGURE 7.27 –  $Fr_s > 1$ . Diagramme spatio-temporel de l'amplitude des ondes interfaciales  $\eta_{12}(x, t)$  et  $\eta_{23}(x, t)$ . Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux de la table 7.2 et  $S_b = 24 \text{ cm}^2$ ,  $F_t = 23.5 \text{ mN}$ .

avec

$$\tilde{\Delta} = \frac{g\sqrt{\Delta\rho_{12}^2 h_1^2 (h_2 + h_3)^2 + \Delta\rho_{23}^2 h_3^2 (h_1 + h_2)^2 - 2\Delta\rho_{12}\Delta\rho_{23}h_1 h_2 h_3 (h_1 + h_2 + h_3 - \frac{h_1 h_3}{h_2})}}{h_1 + h_2 + h_3} \quad (7.20)$$

Ces deux vitesses peuvent être utilisées pour définir le nombre de Froude  $Fr_{s/a} = v/c_{s/a}^m$ , qui permet de classer la vitesse par rapport aux deux types d'ondes. Nous nous aiderons de cette classification par la suite.

**Cas  $Fr_s > 1$  et  $Fr_a > 1$  :** Nous présentons ici un exemple où le navire va plus vite que la plus rapide des ondes. Ce régime a été obtenu en réalisant l'expérience avec un bateau ayant une géométrie  $S_b = 24 \text{ cm}^2$  et une force de traction  $F_t = 23.5 \text{ mN}$ . Les diagrammes spatio-temporels décrivant l'évolution des interfaces  $\eta_{12}(x, t)$  et  $\eta_{23}(x, t)$  sont représentés à la figure 7.27. A noter que le bateau atteint une vitesse limite  $v_\ell \simeq 0.11 \text{ m s}^{-1}$ .

Cependant, comme nous l'avons dit précédemment, les interfaces étant couplées, il est plus intéressant d'observer l'évolution de modes propres associés aux équations (7.18) et (7.19). Nous introduisons donc les grandeurs

$$\eta_s(x, t) = \frac{1}{2} (\eta_{12}(x, t) + \eta_{23}(x, t)) , \quad (7.21)$$

$$\eta_a(x, t) = \frac{1}{2} (\eta_{12}(x, t) - \eta_{23}(x, t)) . \quad (7.22)$$

correspondant aux oscillations symétrique (mode- $s$ ) et antisymétrique (mode- $a$ ) des deux interfaces. Les diagrammes spatio-temporels pour ces modes propres sont représentés sur

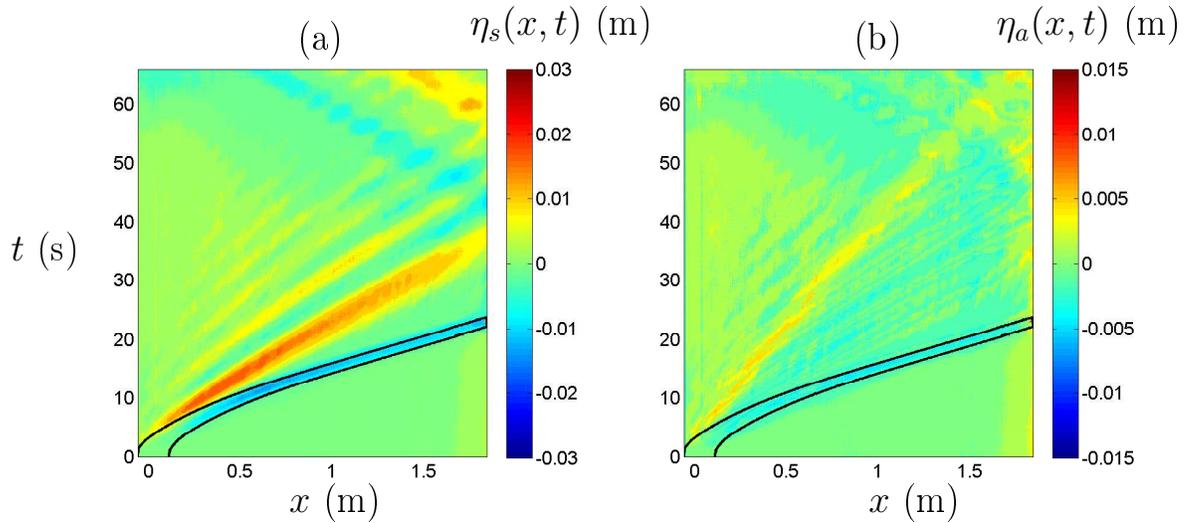


FIGURE 7.28 –  $Fr_s > 1$ . Diagramme spatio-temporel de l’amplitude des modes interfaciaux  $\eta_s(x, t)$  et  $\eta_a(x, t)$ . Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux de la table 7.2 et  $S_b = 24 \text{ cm}^2$ ,  $F_t = 23.5 \text{ mN}$ .

la figure 7.28. Le mode- $s$  est principalement généré au démarrage du bateau, le mode- $a$  ayant une amplitude un peu plus de deux fois plus faible est à la limite de détection avec notre méthode. Les oscillations associées au mode- $s$  forment un train d’ondes dont le front se propage à une vitesse d’environ  $0.06 \text{ m s}^{-1}$ . On peut observer que les lignes isophasse s’évasent, indiquant qu’un ensemble de longueurs d’ondes (et de fréquences) sont émises.

Une dernière information venant corrélérer la description ci-dessus est donnée à la figure 7.29 (a) où l’on a représenté les spectres de Fourier (en temps) associés aux diagrammes spatio-temporels, moyennés sur la coordonnée d’espace, pour les différents grandeurs  $\eta_x$ . On remarque notamment que l’amplitude du spectre est quasi-constante pour la gamme de fréquence  $[0, 0.2] \text{ Hz}$ , et également que l’amplitude du mode symétrique (rouge) est très grande devant celle du mode antisymétrique (bleu).

**Cas  $Fr_s < 1$  et  $Fr_a \simeq 1$  :** Le régime étudié ici correspond à l’expérience avec la même géométrie de bateau que précédemment ( $S_b = 24 \text{ cm}^2$ ) mais avec une force de traction  $F_t = 20.6 \text{ mN}$ . La vitesse moyenne du bateau est  $\langle v(t) \rangle \simeq 0.06 \text{ m s}^{-1}$  avec des oscillations d’amplitude de l’ordre de  $0.04 \text{ m s}^{-1}$  (cf. figure 7.30).

On observe à la figure 7.31 qu’au démarrage du bateau, lorsque l’accélération est la plus importante, les deux modes baroclines sont perturbés. L’amplitude du mode- $s$  est deux fois plus grande que celle du mode- $a$ , mais les deux modes sont nettement discernables. Les structures spatiales sont également très différentes. Le mode- $s$  est constitué d’un train d’ondes assez large, de longueur d’onde  $\lambda_s \simeq 0.4 \text{ m}$ , qui se propage à la vitesse  $c_{g,s} \simeq 0.06 \text{ m s}^{-1}$  similaire à celle du bateau. Quant au mode- $a$ , il correspond à une structure proche d’une onde solitaire qui se propage à la vitesse  $c_{g,a} \simeq 0.035 \text{ m s}^{-1}$ , proche de

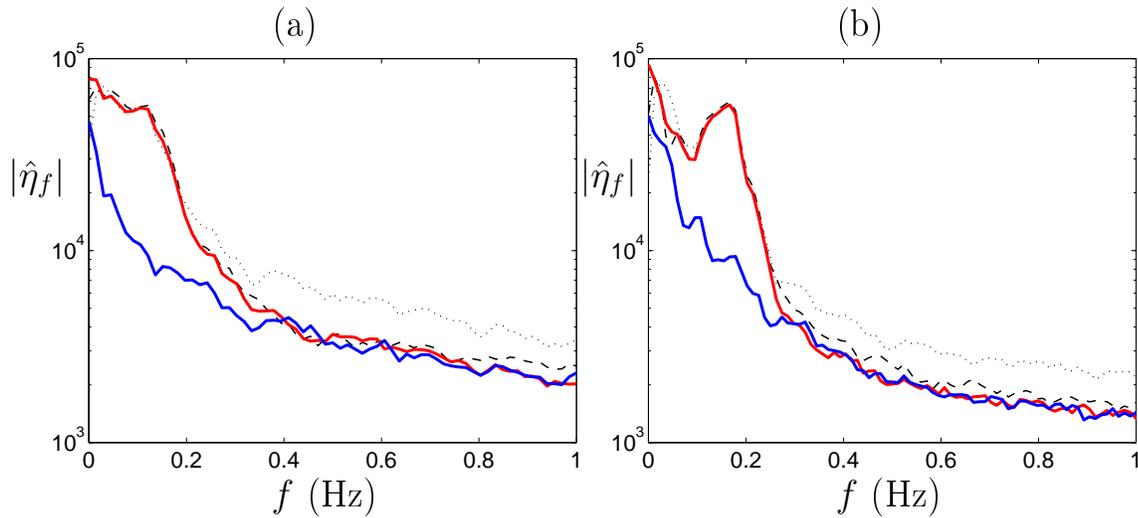


FIGURE 7.29 – Spectres temporels moyens associés aux diagrammes spatio-temporels de (a) la figure 7.27 et (b) figure 7.30. Les courbes pointillées correspondent à  $\eta_{12}$  (–) et  $\eta_{23}$  (:), et les lignes continues épaisses à  $\eta_s$  (rouge) et  $\eta_a$  (bleu).

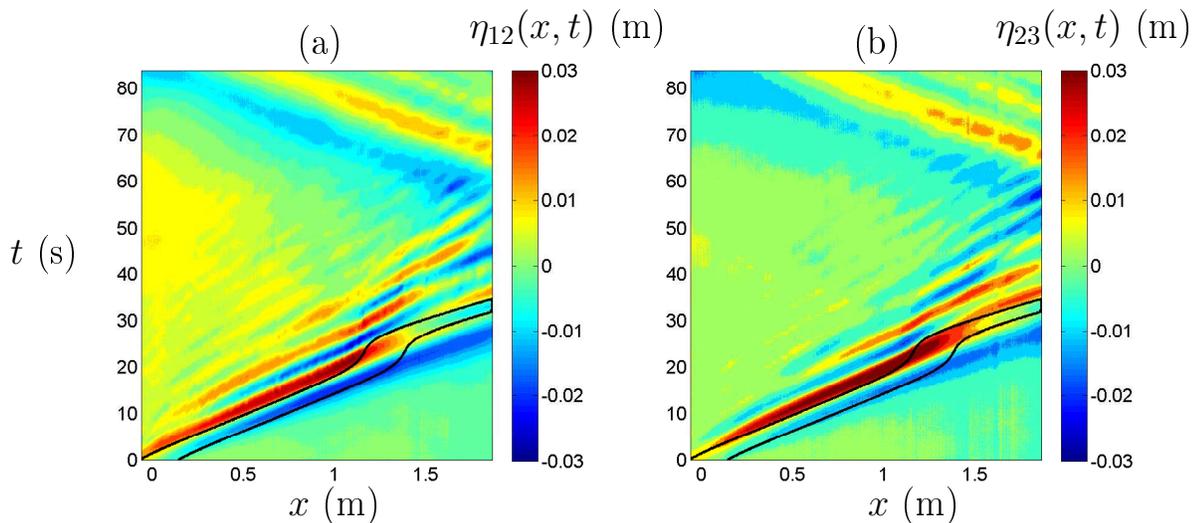


FIGURE 7.30 –  $Fr_s < 1$ . Diagramme spatio-temporel de l'amplitude des ondes interfaciales  $\eta_{12}(x, t)$  et  $\eta_{23}(x, t)$ . Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux de la table 7.2 et  $S_b = 24 \text{ cm}^2$ ,  $F_t = 20.6 \text{ mN}$ .

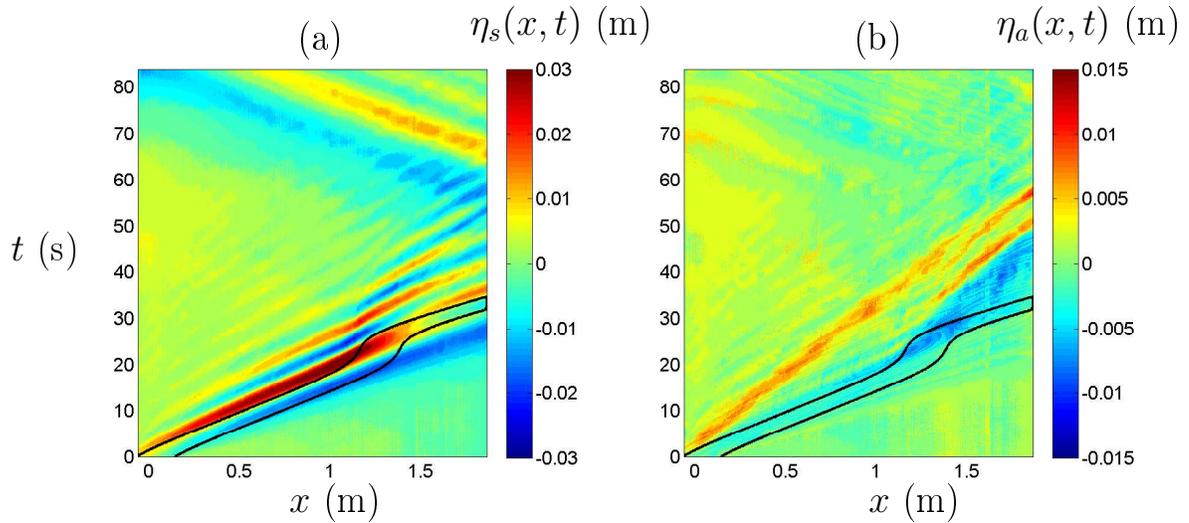


FIGURE 7.31 –  $Fr_s < 1$ . Diagramme spatio-temporel de l’amplitude des modes interfaciaux  $\eta_s(x, t)$  et  $\eta_a(x, t)$ . Les lignes noires représentent la proue et la poupe du bateau. Paramètres expérimentaux de la table 7.2 et  $S_b = 24 \text{ cm}^2$ ,  $F_t = 20.6 \text{ mN}$ .

$c_a^m$  (valant  $0.044 \text{ m s}^{-1}$ ).

Le régime d’eaux mortes semble donc caractérisé par des ondes clairement définies en terme de vecteur d’onde et de vitesse de propagation. La figure 7.29 (b) nous confirme l’existence de fréquences propres bien marquées dans les spectres des modes symétriques et antisymétriques.

**Discussion :** A l’issue des expériences réalisées dans un fluide à trois couches, nous avons pu observer que l’évolution d’un objet avec une vitesse variable (donc accéléré) est analogue au cas à deux couches, le phénomène d’eaux mortes étant reproduit.

Cependant, les ondes interfaciales générées sont de différentes natures. On observe un mode-1 correspondant à l’oscillation symétrique (en phase) des deux interfaces  $\eta_{12}$  et  $\eta_{13}$  et se déplaçant avec une vitesse élevée et un mode-2 correspondant à l’oscillation antisymétrique (opposition de phase) des deux interfaces, avec une vitesse de propagation plus faible que le mode-1. Ainsi on peut remarquer qu’un objet accéléré dans un fluide stratifié génère tous les modes d’oscillations autorisés/possibles. Par contre, c’est le mode le plus rapide qui joue un rôle actif dans la dynamique atypique du phénomène d’eaux mortes.

Il est intéressant de remarquer qu’une analyse réalisée par Nicolaou *et al.* [95], et confirmée expérimentalement par Robey [108], met en évidence le fait qu’un objet accéléré dans une stratification continue associée à un bi-couche excite l’ensemble des modes d’oscillations possibles, les modes étant décrits par (2.33). Nous avons bien retrouvé ce résultat puisque plusieurs modes sont observés lors d’accélération marquée du bateau.

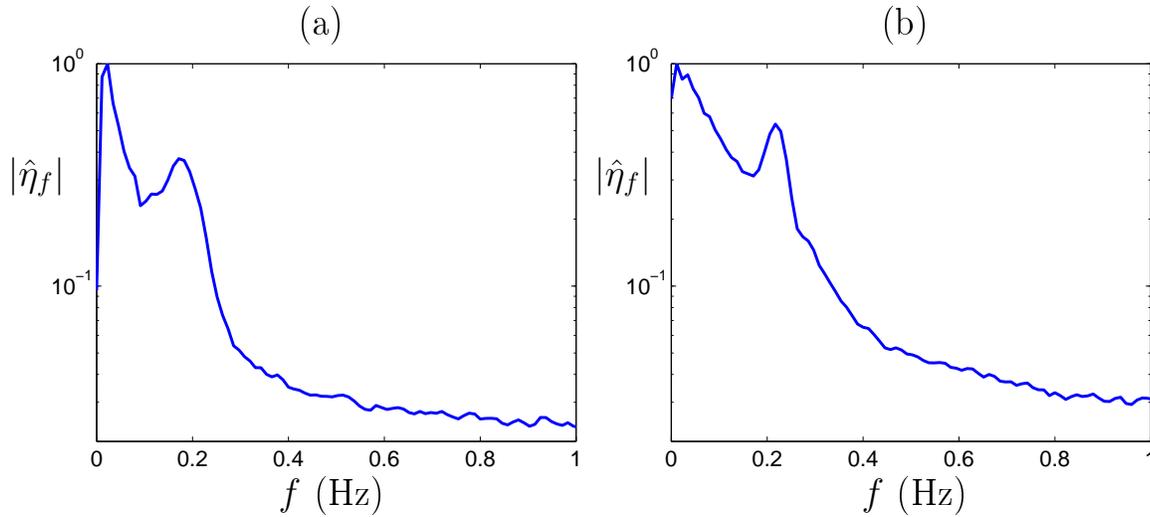


FIGURE 7.32 – Spectres temporels moyens associés aux diagrammes spatio-temporels de (a) la figure 7.17 et (b) figure 7.19.

**Retour sur le cas à deux couches :** Au vu de la discussion ci-dessus, nous souhaitons revenir sur les expériences réalisées avec la technique 2 pour l'étude du fluide à deux couches. En effet, grâce à cette technique nous avons accès au gradient de densité et nous pouvons donc essayer de mettre en évidence la présence de plusieurs modes.

Dans un premier temps, il est nécessaire de calculer la structure verticale associée à chacun de ces modes. Il faut cependant choisir la fréquence associée aux modes. Nous nous basons sur la figure 7.32. Lorsque l'on est dans le régime  $Fr < 1$ , il semble n'y avoir qu'un mode dominant (image (b)) tandis que le cas sur-critique ( $Fr > 1$ , image (a)) deux bandes à « hautes » et « basses » fréquences semblent exister.

Nous réalisons donc le calcul modal comme présenté à la section 3.3.2. Nous utilisons pour cela la stratification telle que présentée à la figure 7.6. La résolution de l'équation (2.33) permet d'obtenir l'allure de la vitesse verticale  $w$  pour chaque mode propre. Les modes verticaux doivent cependant être étudiés à travers la structure du gradient de densité, champ auquel nous avons accès dans les expériences. On peut facilement représenter les modes verticaux du gradient de densité en remarquant que  $\rho' \propto N^2 w$ , donc  $\partial_x \rho' \propto N^2 w$  également.

Le résultat du calcul pour les trois premiers modes est présenté à la figure 7.33 (a) où l'on a considéré que les modes oscillaient à la pulsation<sup>2</sup>  $\omega = 0.25 \text{ rad s}^{-1}$ .

Ne disposant pas d'expériences dans le régime  $Fr < 1$ , nous avons vérifié la présence de différents modes sur une expérience associée au profil de densité utilisé, où  $v_\ell \simeq 0.1 \text{ m s}^{-1}$  impliquant  $Fr \simeq 1.5$ . Différentes structures sont observables, comme illustré à

2. Le calcul des modes verticaux ne dépend pas fortement de la pulsation choisie, dans le cas précis du profil  $N(z)$  considéré. Le calcul réalisé avec une pulsation différente donnerait des allures similaires des modes, le domaine où leur amplitude n'est pas nulle serait légèrement différent.

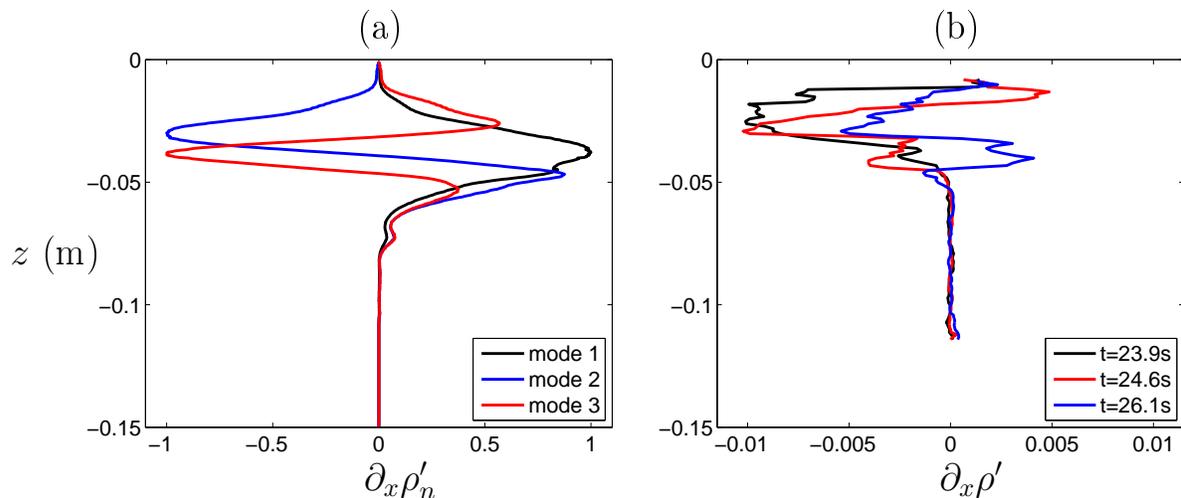


FIGURE 7.33 – (a) Structures verticales (normalisées) du gradient horizontal de densité pour les modes 1 à 4 associés à la stratification de la figure 7.6 à  $\omega = 0.25 \text{ rad s}^{-1}$ , (b) coupes extraites d'une série temporelle du gradient de densité horizontal en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad s}^{-1}$ ) associée à une expérience correspondant à  $Fr = 1.5$ .

la figure 7.33 (b), ces données ne sont pas suffisamment précises pour définir clairement leurs caractéristiques.

## 7.4.2 Stratification continue avec pycnocline

Nous avons observé que les champs d'ondes internes émis par le déplacement du bateau sont de plus en plus compliqués à mesure que l'on augmente le nombre de degrés de liberté du système. On peut faire remarquer que lorsqu'on considère le cas où la stratification n'est pas idéalisée, le nombre de modes possibles est infini. Cependant, leur confinement vertical à une étroite bande où  $N$  est non nul les rend très difficile d'observation. L'étape suivante consiste donc à passer à un continuum de modes possibles, associé à une stratification continue.

Cependant, afin de pouvoir continuer à étudier le phénomène d'eaux mortes, nous considérons un fluide composé d'une partie linéairement stratifiée et d'une pycnocline (ajout d'une couche homogène en surface avec un saut de densité). La figure 7.34 présente un exemple du profil de densité ainsi que de la pulsation de Brunt-Väisälä associée à cette stratification.

Nous avons déjà étudié cette configuration au chapitre 6 dans le cadre de la génération d'ondes interfaciales non-linéaires par des ondes internes. Nous allons étudier ici le mécanisme inverse, l'émission d'ondes internes par des ondes interfaciales non-linéaires.

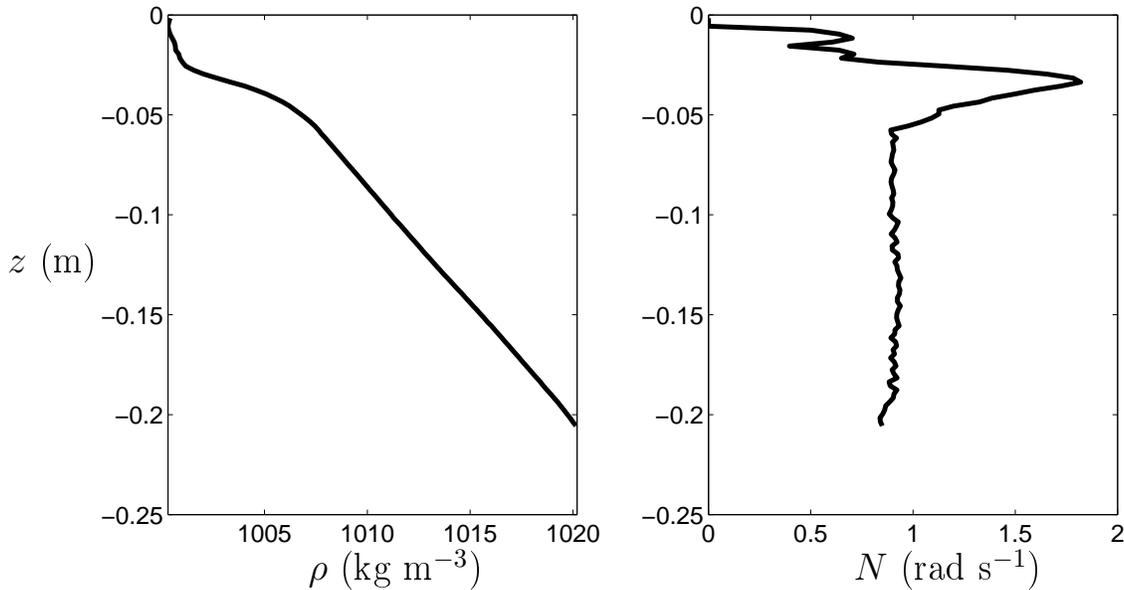


FIGURE 7.34 – Profil de densité pour une stratification linéaire avec pycnocline.

**Protocole expérimental :** Les expériences réalisées sont toujours similaires à celles présentées auparavant, avec l'utilisation de la technique 2 afin de pouvoir étudier les ondes internes émises dans la partie linéairement stratifié. La table 7.3 rappelle les propriétés de la stratification ainsi que les grandeurs d'intérêts dans ce cas particulier.

On peut remarquer que la description des différents régimes en terme de nombre de Froude sera similaire que l'on considère le modèle équivalent à deux couches ou celui prenant en compte de la stratification réelle. Cependant, seul le deuxième est adapté ici, puisque nous allons observer que l'ensemble de la stratification est perturbé.

Par ailleurs, afin de pouvoir suivre l'évolution temporelle non-stationnaire du gradient de densité, nous proposons d'observer les données à l'aide de séries temporelles extraites le long d'une coupe verticale, éventuellement à différentes positions  $x$  données (l'origine étant fixée à la poupe du bateau au démarrage).

**Structure modale :** Nous savons de par les sections précédentes que les structures modales sont susceptibles d'être émises par le forçage dû au bateau, nous anticipons donc en donnant à la figure 7.35 l'allure des modes verticaux 1 à 4 pour les pulsations inférieures à la pulsation de la partie linéairement stratifiée ( $0.9 \text{ rad s}^{-1}$ ) et pour les pulsations associées à la pycnocline ( $\omega \in [0.9; 1.8] \text{ rad s}^{-1}$ ).

**Cas  $Fr_h > 1$  :** Dans le régime sur-critique illustré à la figure 7.36 et correspondant à  $Fr_h = 1.9$ , on peut observer sur la série temporelle associée à  $\partial_z \rho$  que le passage rapide du bateau perturbe assez peu la stratification. L'amplitude des oscillations de la pycnocline (en blanc sur le diagramme) est inférieure à  $0.01 \text{ m}$ ; et le champ d'ondes internes observé

Paramètres expérimentaux		symboles	valeurs	unités
Fluide 1	densité	$\rho_1$	0.9978	$\text{g cm}^{-3}$
	hauteur	$h_1$	5.0	cm
Fluide 2	densité	$\rho(z)$	1.007 – 1.028	$\text{g cm}^{-3}$
	hauteur	$h_2$	20.0	cm
	pulsation BV	$N$	0.9	$\text{rad s}^{-1}$
Interface $\eta_{12}$	densité moyenne	$\bar{\rho}_{12} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}$	1.0024	$\text{g cm}^{-3}$
	saut de densité	$\Delta\rho_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\bar{\rho}_{12}}$	0.0092	
	vitesse limite des ondes	$c_{\phi,12}^m = \sqrt{\Delta\rho_{12}g \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}$	0.06	$\text{m s}^{-1}$
	nombre de Froude	$Fr_{12} = \frac{U}{c_{\phi,12}^m}$	0.6 – 2.3	
Modes	vitesse limite des ondes	$\frac{Nh}{\pi}$	0.072	$\text{m s}^{-1}$
	nombre de Froude	$Fr_h = \frac{U\pi}{Nh}$	0.5 – 1.9	

TABLE 7.3 – Paramètres expérimentaux pour les expériences illustrant le phénomène d’eaux mortes dans un fluide continuum stratifié avec une pycnocline.

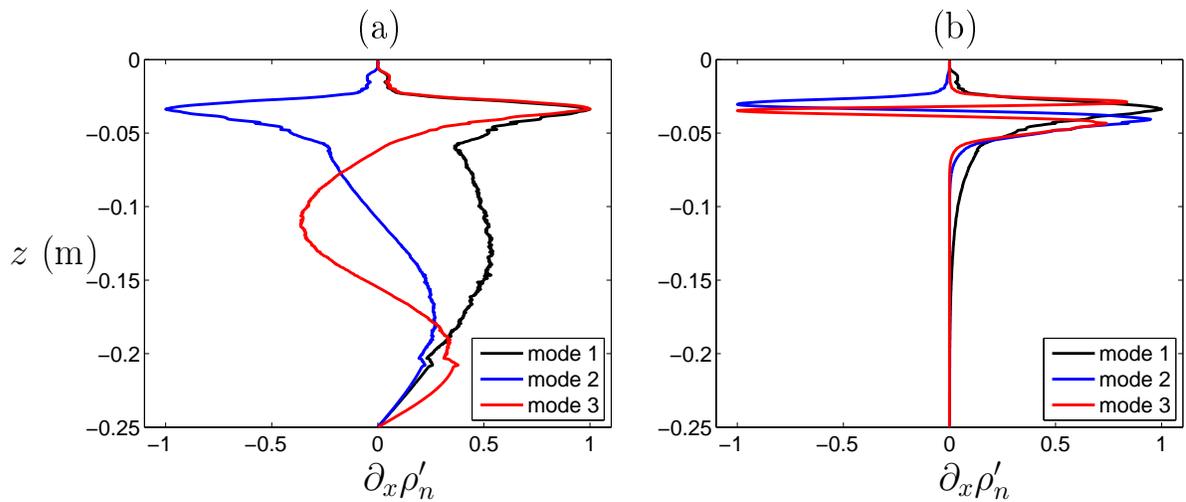


FIGURE 7.35 – Structures verticales (normalisées) du gradient horizontal de densité pour les modes 1 à 4 associés à la stratification de la figure 7.34 à (a)  $\omega = 0.25 \text{ rad s}^{-1}$  et (b)  $\omega = 1.1 \text{ rad s}^{-1}$ .

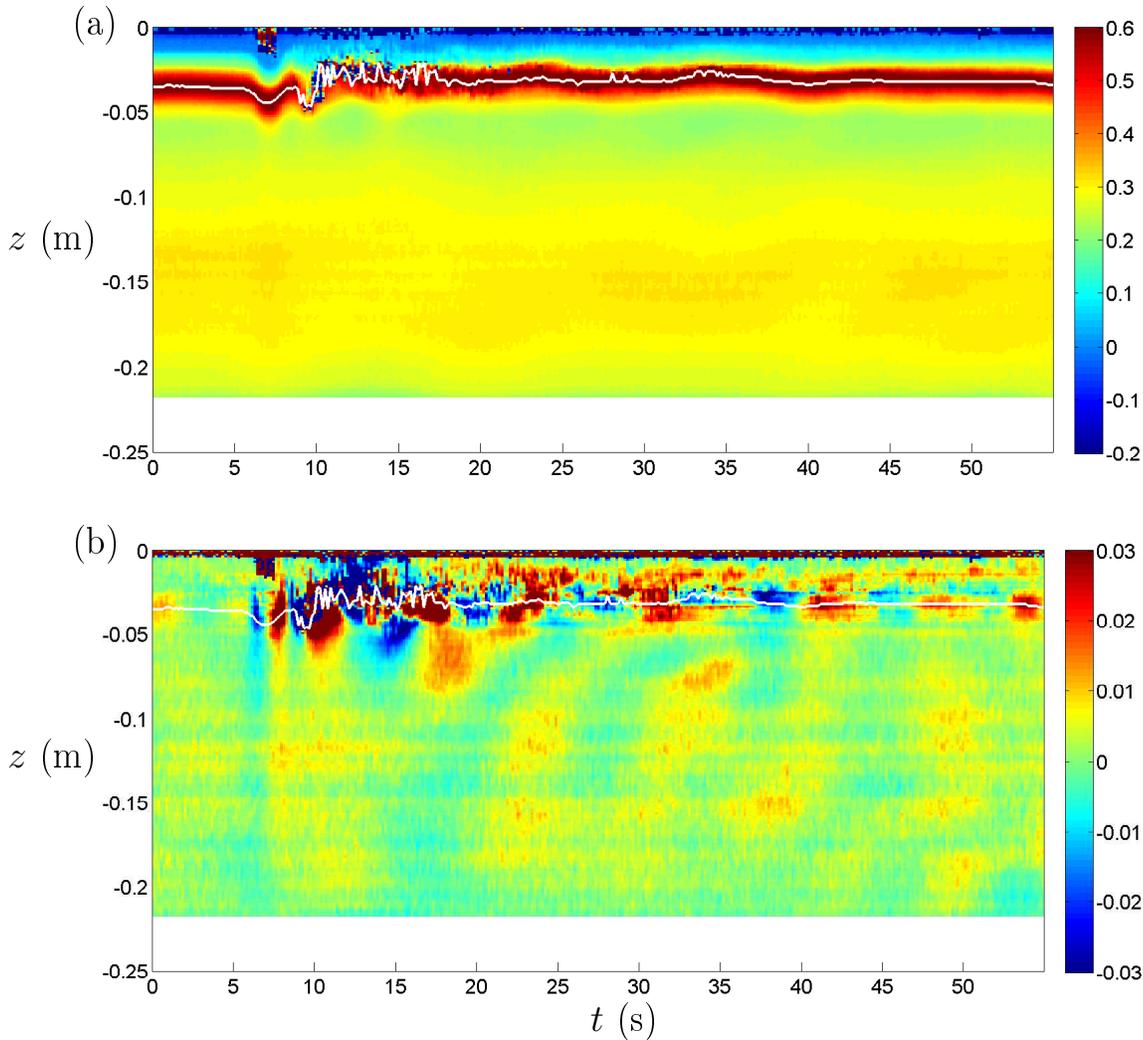


FIGURE 7.36 –  $Fr_h > 1$  Séries temporelles extraites à  $x = 0.5$  m pour (a)  $\partial_z \rho$  et (b)  $\partial_x \rho$ , en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad s}^{-1}$ )<sup>2</sup>.

pour  $z \in [-0.25, -0.05]$  est peu intense.

Concernant le champ d'ondes internes observé, on peut remarquer que les ondes émises sont principalement rayonnées par les perturbations turbulentes au niveau de la pycnocline (fig. 7.37 (b)). Elles se propagent alors vers le fond de la cuve et semblent peu influencées par la hauteur finie de fluide. Une structure modale (mode 1) est cependant discernable comme on peut le voir également à la figure 7.37 (a).

**Cas  $Fr_h < 1$  :** Dans le cas sous-critique ( $Fr_h \sim 0.5$ ), nous présentons les séries temporelles associées à deux coupes différentes, l'une à  $x = 0.33$  m du démarrage du bateau (fig. 7.38) et l'autre à  $x = 0.67$  m (fig. 7.39). L'intérêt est que la première est située avant le ralentissement du bateau, alors que la seconde correspond au lieu où le bateau a commencé à ralentir, bien que l'arrêt complet se situe à  $x \simeq 1.5$  m au temps  $t = 50$  s.

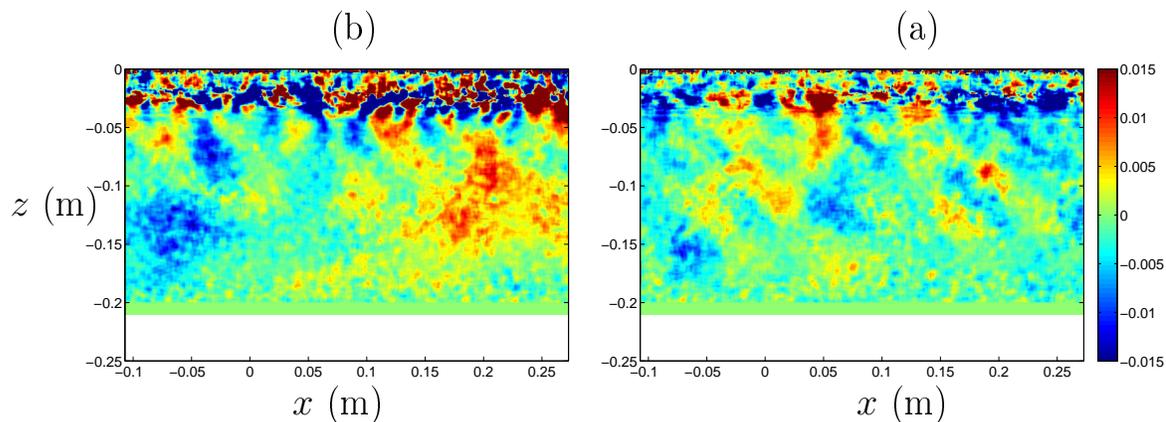


FIGURE 7.37 –  $Fr_h > 1$  Champs instantannés  $\partial_x \rho$  à (a)  $t = 19.8$  s et (b)  $t = 35.4$  s, en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad s}^{-1}$ )<sup>2</sup>.

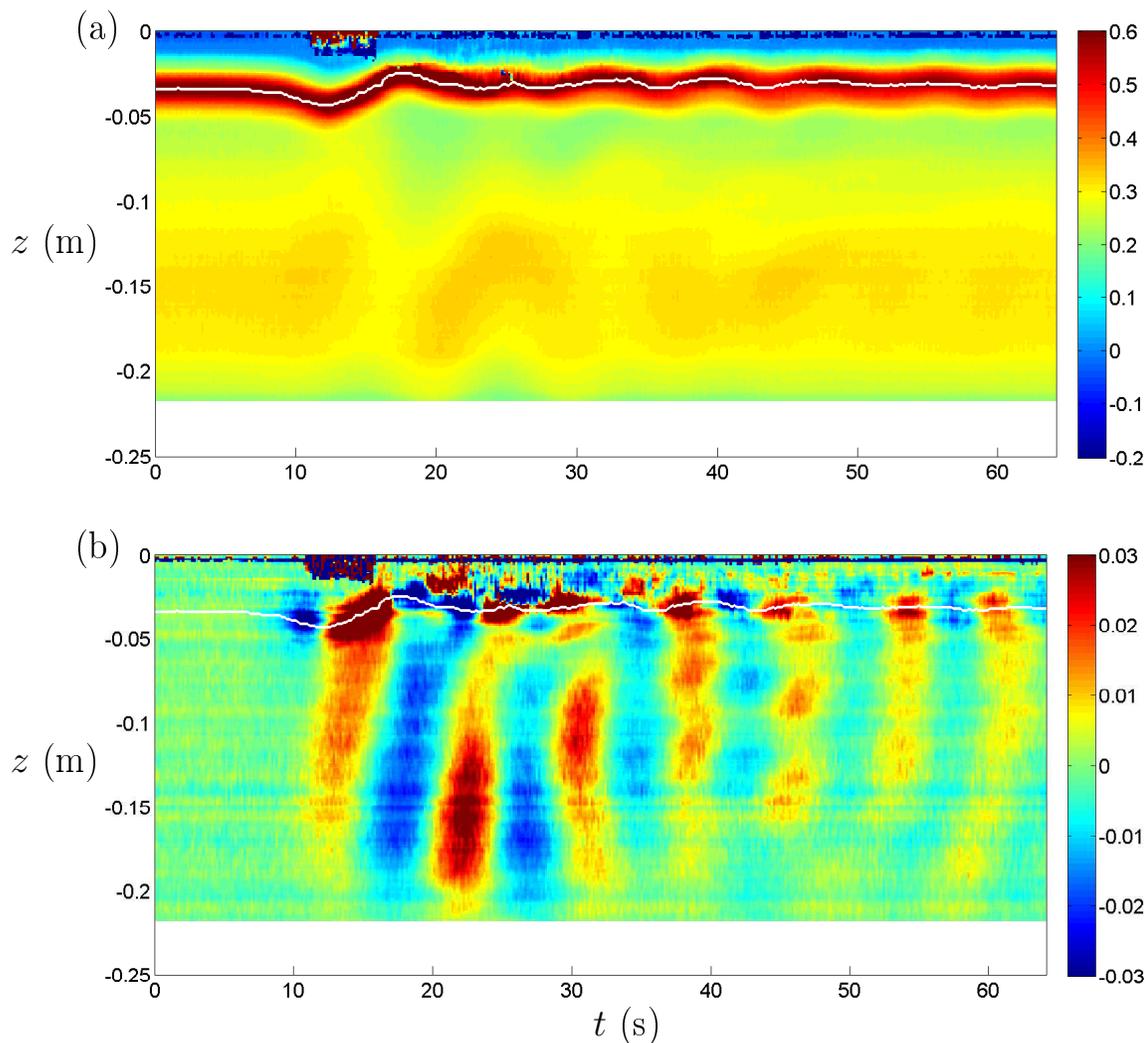


FIGURE 7.38 –  $Fr_h < 1$  Séries temporelles extraites à  $x = 0.33$  m pour (a)  $\partial_z \rho$  et (b)  $\partial_x \rho$ , en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad s}^{-1}$ )<sup>2</sup>.

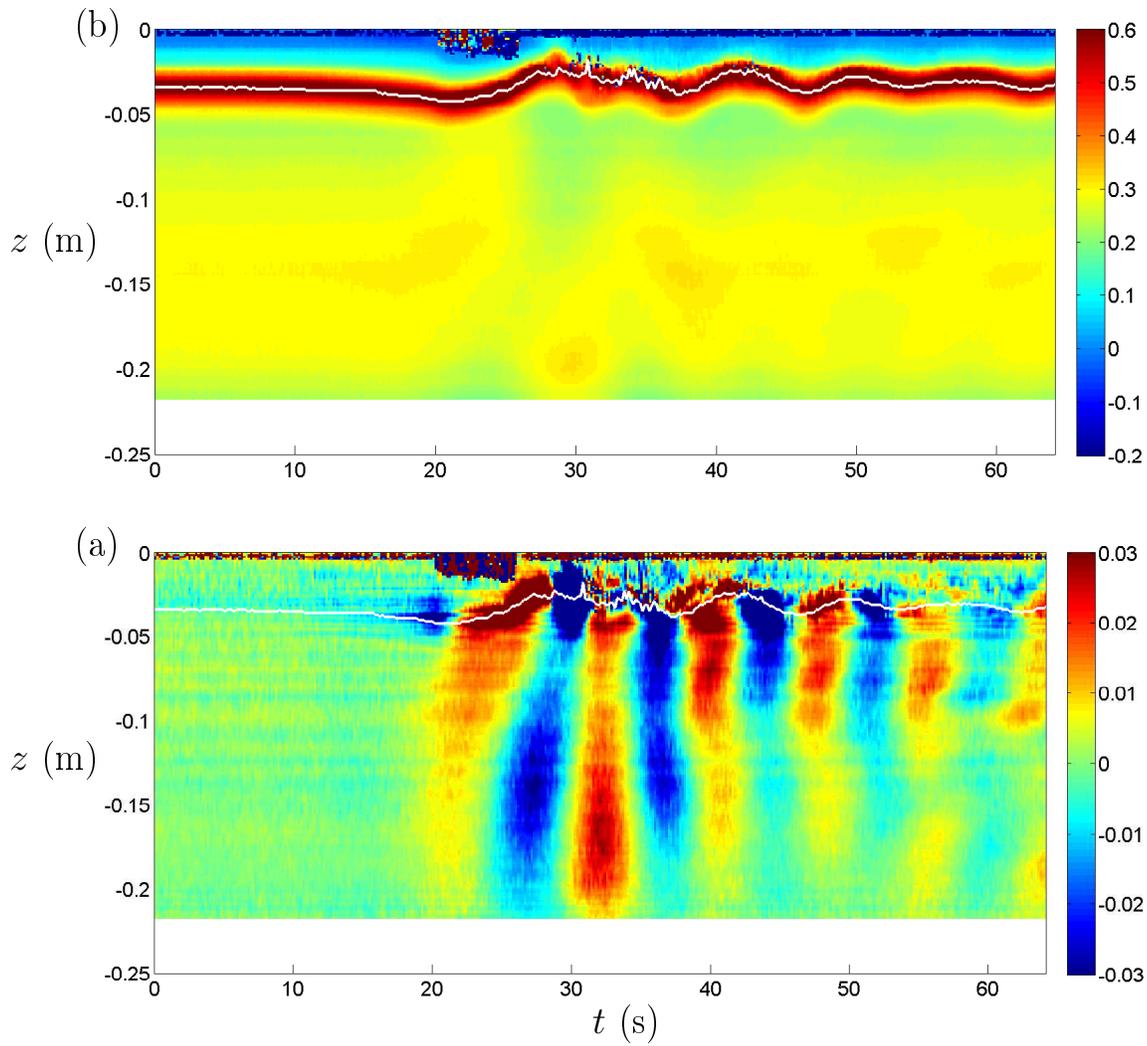


FIGURE 7.39 –  $Fr_h < 1$  Séries temporelles extraites à  $x = 0.67$  m pour (a)  $\partial_z \rho$  et (b)  $\partial_x \rho$ , en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad s}^{-1}$ )<sup>2</sup>.

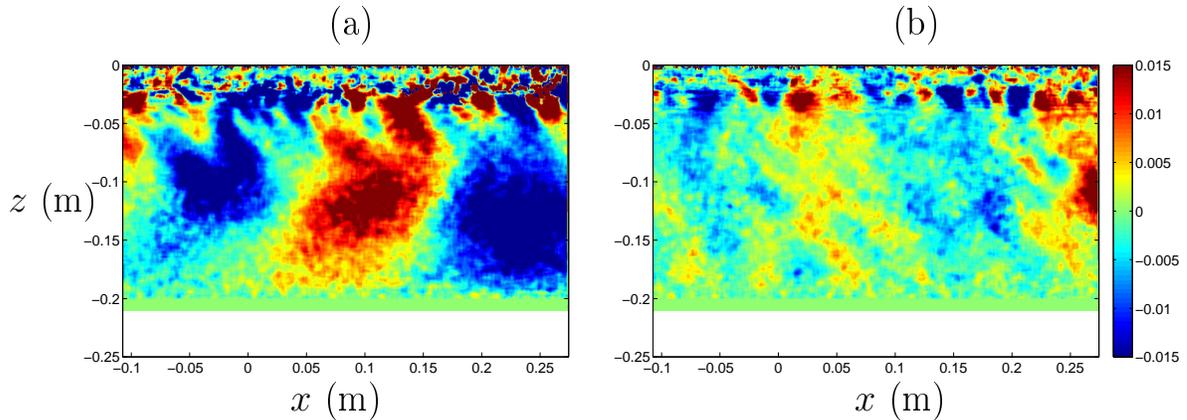


FIGURE 7.40 –  $Fr_h < 1$  Champs instantannés  $\partial_x \rho$  à (a)  $t = 32$  s et (b)  $t = 61$  s, en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad s}^{-1}$ )<sup>2</sup>.

Dans les deux cas, on observe que l’amplitude d’oscillation de la pycnocline (environ 0.01 m) est tout à fait comparable au cas sur-critique, confirmant ainsi que ce n’est pas les ondes interfaciales qui traduisent la dynamique particulière des eaux mortes pour cette configuration.

Cependant, les champs d’ondes internes observés sont particulièrement intenses, surtout à mesure que le bateau ralentit (figure 7.39), impliquant un plus grand transfert d’énergie vers les ondes. Leur structure spatiale met bien en évidence la dominance du mode 1 très proche du bateau (cf. figure 7.40 (a)) bien que d’autres modes soient présents comme on peut le voir à la figure 7.40 (b). De même, les petites structures émises par les zones turbulentes sont visibles mais d’amplitude négligeable devant la structure modale.

**Conclusion :** Le phénomène d’eaux mortes dans le cas d’une stratification continue a encore été mis en évidence, et la dynamique du bateau est cette fois-ci encore couplée à celle de l’onde interne la plus rapide se propageant dans le milieu considéré.

L’allure du champ d’ondes rayonné par un objet en mouvement est par ailleurs très différente selon le cas sous-critique ou sur-critique. Dans le premier cas, il est principalement composé des premiers modes verticaux associés à la stratification, tandis que dans le second cas, les ondes sont rayonnées par les perturbations turbulentes au niveau de la pycnocline. Ces dernières s’apparentent plus aux observations réalisées avec un objet tracté à vitesse constante dans un fluide stratifié [111].

Il est difficile de décrire plus en détails les champs rayonnés du fait de la nature non-stationnaire du phénomène et de la superposition de modes sur une large bande fréquentielle comme on peut l’observer sur la figure 7.41 où l’allure des spectres en fréquences associés aux séries temporelles pour les deux régimes étudiés est présentée. Aucune fréquence caractéristique ne semble remarquable dans la bande propagative  $[0, N/2\pi]$  Hz de la zone linéairement stratifié.

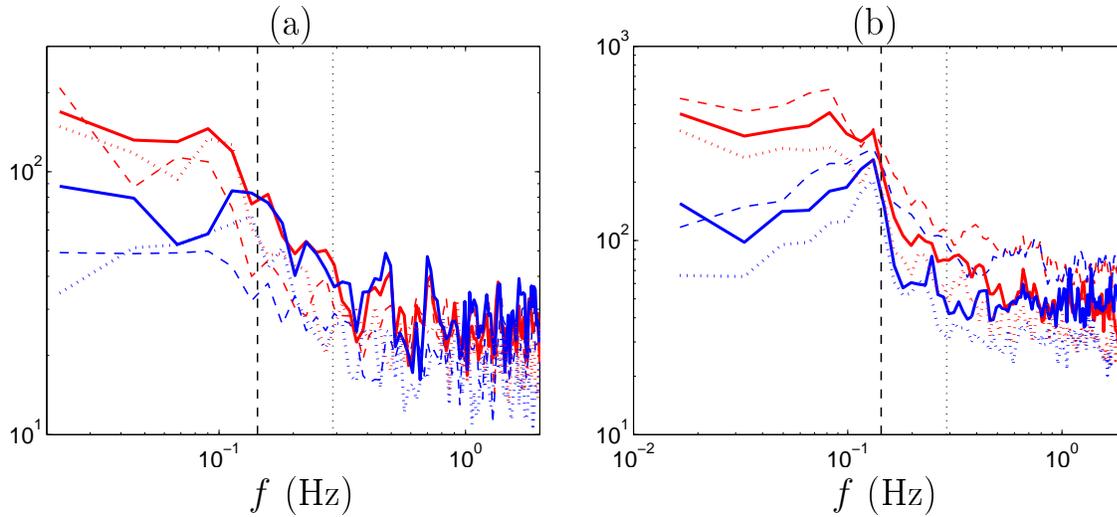


FIGURE 7.41 – Spectres temporels moyens associés aux diagrammes spatio-temporels de (a) la figure 7.36 et (b) figure 7.39. Les spectres rouges sont ici de  $\partial_z \rho$  et les bleus de  $\partial_x \rho$ . Le style des lignes sert à discriminer les différentes positions horizontales d'où ont été extraites les séries temporelles,  $x = 0.33$  m en pointillés,  $x = 0.50$  m en trait continu et  $x = 0.67$  m en tirets. Les lignes verticales indiquent les valeurs de  $N$  associées à la partie linéaire de la stratification (tirets) et la valeur maximale dans la pycnocline (pointillés).

## 7.5 Conclusion

La mise en place de l'expérience historique de Ekman, pour comprendre les observations réalisées par Nansen, a permis une approche ludique d'un phénomène atypique bien connu des marins.

Nous avons reproduit l'expérience historique d'Ekman, pour illustrer le phénomène d'eaux mortes. Grâce aux techniques expérimentales disponibles, il est possible d'obtenir des résultats quantitatifs décrivant non seulement la dynamique du bateau mais surtout la dynamique des vagues interfaciales par l'intermédiaire des diagrammes spatio-temporels.

L'onde solitaire créée à la proue et le train d'ondes à la poupe ont pu être caractérisés assez précisément dans la situation à deux couches. Nous proposons enfin un modèle hystérétique de la relation entre la force de trainée et la vitesse, qui permet de corriger le modèle défaillant d'Ekman.

L'extension au modèle à trois couches et au cas d'une stratification linéaire est tout à fait nouvelle. Elle a permis de mettre en évidence la génération de modes d'interfaces ou verticaux, analogues à ceux étudiés dans les chapitres 5 et 6.

Il serait désormais intéressant de pouvoir étendre notre étude au cas d'une géométrie tri-dimensionnelle, en prenant en compte à la fois les ondes divergentes et les ondes transverses. L'utilisation de la technique de PIV permettrait également un bilan complet des échanges énergétiques. Concernant la géométrie du bateau, l'influence de sa longueur

n'a pas pu être étudiée et pourrait jouer un rôle quant à l'amplitude maximale que peut atteindre le train d'ondes à la poupe du bateau. Nous restons dans l'attente de la confirmation d'une offre de partenariat avec Playmobil ©.

D'un point de vue de l'enseignant-chercheur, appréhender la mécanique des fluides non-homogènes est également une étape importante pour comprendre la complexité de l'environnement qui nous entoure, tels que l'océan, l'atmosphère mais aussi les lacs ; cette approche rend cela accessible aux étudiants.



# Conclusion

Dans le cadre de cette thèse, j'avais pour objectif d'étudier expérimentalement des structures linéaires et non-linéaires dans différents milieux stratifiés. La génération de structures linéaires a été réalisée grâce au générateur d'ondes, et les structures non-linéaires ont été rencontrées sous divers aspects, aussi bien sous forme de modes verticaux que d'ondes solitaires.

Plusieurs sujets ont été abordés au cours de ces trois années, afin d'appréhender la physique des ondes internes selon différents points de vue. J'ai eu la possibilité d'étudier des **problèmes fondamentaux** comme la réflexion d'une onde interne plane sur un plan, ou bien encore la diffraction des ondes internes (non abordée dans ce manuscrit). En parallèle, nous nous sommes penchés sur des questions plus proches de **situations océaniques** telles que l'interaction de la marée interne avec une montagne sous-marine ou la réflexion de faisceaux d'ondes internes à la pycnocline. Cet équilibre a permis de satisfaire ma curiosité de physicien tout en apportant une contribution au domaine de la géophysique. L'étude du phénomène d'eaux mortes a également permis de combiner la mise en place d'expériences ludiques avec un vrai questionnement scientifique.

L'aboutissement de ces différents projets a nécessité tout d'abord des développements conséquents dans les techniques d'analyse et de génération des ondes internes. Nous avons ainsi contribué à la **généralisation d'un procédé de génération d'ondes internes**, permettant de réaliser tout type d'ondes internes au laboratoire. Nous avons également appliqué pour la première fois aux ondes internes la technique de **démodulation complexe** qui s'est révélée particulièrement utile à l'analyse des champs d'ondes observés.

Je tiens à souligner les résultats que je considère comme les plus importants de cette thèse.

- Nous avons démontré expérimentalement que le **mécanisme de conversion de la marée interne par une topographie** est particulièrement efficace pour transférer de l'énergie vers des modes plus élevés. Nous discutons également la nécessité de modèles analytiques adaptés, décrivant notamment l'aspect non-linéaire de ce processus. Ainsi nous mettons en avant l'importance de ce mécanisme dans la dissipation des ondes internes, problème d'importance pour la compréhension du bilan énergétique de l'océan.

- Nous avons réalisé la première expérience démontrant la possibilité de **génération locale d'ondes solitaires par réflexion d'une onde interne au niveau d'une pycnocline**. Ce mécanisme original a fait l'objet d'études analytiques dont nous avons pu vérifier l'application dans le cadre de nos expériences.

- Nous avons apporté un point de vue plus général sur le **phénomène d'eaux-mortes** dont la découverte remonte au début du siècle dernier. En généralisant le problème à des stratifications plus complexes, nous avons pu mettre en avant la robustesse du phénomène mais également certaines inexactitudes dans l'interprétation qui en avait été faite.

Finalement, soulignons que les projets réalisés à la plateforme Coriolis ont toujours fait l'objet d'études préliminaires au laboratoire de l'ENS de Lyon, bien que l'ensemble de ces travaux ne soient pas systématiquement détaillés dans le manuscrit. J'ai trouvé personnellement ces deux méthodes de travail complémentaires et également formatrices. Les expériences à petite échelle permettent de tester des concepts ainsi que de développer des techniques originales ; c'est le cas par exemple de l'utilisation de colorant alimentaire ou encore de la technique « absolute schlieren ». Les expériences à grande échelle demandent, quant à elles, beaucoup de travail et une réflexion aboutie du projet *a priori* si l'on souhaite obtenir des résultats probants malgré le temps limité des expériences.

## Perspectives

Il est commun de dire dans le domaine de la recherche que les projets abordés soulèvent au moins autant de questions que le nombre de réponses que nous avons essayé d'apporter ; nous ne dérogeons pas à cette règle.

Des **effets tri-dimensionnels** lors de l'émission d'ondes internes ont été observés lors des expériences de conversion de la marée interne sur des topographies. Des effets analogues sont également présents à petite échelle. Cela nécessitera des mesures complémentaires, notamment de champs horizontaux à différentes profondeurs et pour différents confinements des ondes.

Une fois ces effets 3D à la génération compris et minimisés, il est souhaitable d'étudier l'influence d'une géométrie à trois dimensions dans les problèmes abordés au cours de cette thèse, plus particulièrement dans le cas de la conversion de la marée interne avec une topographie : un **mont gaussien axisymétrique** par exemple. L'évolution du sillage du bateau lors de l'étude du phénomène d'eaux-mortes à trois dimensions est également une perspective importante. La dispersion géométrique de l'énergie peut notamment rendre les effets non-linéaires moins importants.

De plus, certaines expériences effectuées à la plateforme Coriolis ont également été réalisées dans un référentiel en **rotation**, où la nature des écoulements est à trois dimen-

sions. Nous regrettons de ne pas avoir pu analyser suffisamment ces résultats mais une étude du générateur d'ondes en rotation est un préalable que nous n'avons pas pu mener à bien dans le temps imparti.

Au cours de la thèse, nous n'avons pas pu étudier les processus de **mélange**, qui sont notamment présents dans le cas des interactions ondes-topographie et dans le phénomène d'eaux mortes. Pour cela, des techniques innovantes sont nécessaires comme par exemple la technique de PIV 3D-3C, actuellement en cours de développement à la plateforme Coriolis et dont nous n'avons pas pu nous servir. Nous pensons que le mélange peut jouer un rôle important en terme de transfert énergétique que nous n'avons pas pu quantifier.

Il n'a également pas été possible de générer des **solibores** au laboratoire. Ces structures sporadiquement observées dans l'océan restent mal connues et nécessiteraient de nouveaux essais à plus grande échelle.

Nous regrettons également de ne pas avoir apporté de **modèle théorique** satisfaisant permettant de décrire le couplage dynamique entre le bateau et les ondes internes dans le cas du phénomène d'eaux-mortes. Mais nous espérons toujours pouvoir le faire.

Enfin, la modernisation progressive du laboratoire de l'ENS de Lyon permet d'utiliser plusieurs techniques d'acquisition de données (strioscopie synthétique, PIV, mesures continues de densité). Il serait intéressant de mettre en place une technique combinant mesures du **champ de vitesse et de densité simultanément**, afin de pouvoir quantifier les échanges énergétiques dans des processus non-linéaires.

Cependant nous avons bon espoir qu'un certain nombre de ces points seront abordés dans un avenir proche. Je devrais avoir la chance de participer à un projet d'expériences à grande échelle en cours d'élaboration, qui a pour but d'étudier la conversion de la marée barotrope par une topographie réaliste, avec une stratification complexe. Les effets de la rotation du référentiel et de la géométrie 3D de la topographie feront partie intégrante du dispositif expérimental. La génération de solitons devrait être combinée à la conversion de la marée permettant une analyse complète des processus linéaires et non-linéaires.



# Bibliographie

- [1] Website. <http://coriolis.legi.grenoble-inp.fr/>.
- [2] D. A. Aguilar and B. R. Sutherland. Internal wave generation from rough topography. *Physics of Fluids*, 18 :066603, 2006.
- [3] T. R. Akylas, R. H. J. Grimshaw, S. R. Clarke, and A. Tabaei. Reflecting tidal wave beams and generation of solitary waves in the ocean thermocline. *Journal of Fluid Mechanics*, 593 :297–313, 2007.
- [4] M.J. Alexander, J.H. Richter, and B.R. Sutherland. Generation and trapping of gravity waves from convection with comparison to parameterization. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 63 :2963–2977, 2006.
- [5] Global Ocean Associates. An atlas of internal solitary-like waves and their properties. Second edition. Website, 2004. <http://www.internalwaveatlas.com/>.
- [6] P. G. Baines. The reflexion of internal/inertial waves from bumpy surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 46 :273–291, 1971.
- [7] P. G. Baines. The reflexion of internal/inertial waves from bumpy surfaces. Part 2. Split reflexion and diffraction. *Journal of Fluid Mechanics*, 49 :113–131, 1971.
- [8] P. G. Baines. Topographic effects in stratified flows. Cambridge University Press, 1995.
- [9] P. G. Baines and K. P. Hoinka. Stratified flow over two-dimensional topography in fluid of infinite depth : a laboratory simulation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 42 :1614–1630, 1985.
- [10] P. G. Baines and F. Xin-Hua. Internal tide generation at a continental shelf/slope junction : a comparison between theory and a laboratory experiment. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 9 :297–314, 1985.

- [11] G. K. Batchelor. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, 1967.
- [12] T. H. Bell. Lee waves in stratified flows with simple harmonic time dependence. *Journal of Fluid Mechanics*, 67 :705–722, 1975.
- [13] J. M. Chomaz, P. Bonneton, and E. J. Hopfinger. The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 254 :1–21, 1993.
- [14] V. Croquette and H. Williams. Nonlinear waves of the oscillatory instability on finite convective rolls. *Physica D*, 37 :300–314, 1989.
- [15] S. B. Dalziel. Rayleigh-taylor instability : experiments with image analysis. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 20 :127–153, 1993.
- [16] S. B. Dalziel, M. Carr, J. K. Sveen, and P. A. Davies. Simultaneous synthetic schlieren and PIV measurements for internal solitary waves. *Measurement Science and Technology*, 18 :533–547, 2007.
- [17] S. B. Dalziel, G. O. Hughes, and B. R. Sutherland. Whole-field density measurements by "synthetic Schlieren". *Experiments in Fluids*, 28 :322–335, 2000.
- [18] T. Dauxois and W. R. Young. Near-critical reflection of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 390 :271–295, 1999.
- [19] I. P. D. De Silva, J. Imberger, and G. N. Ivey. Localized mixing due to a breaking internal waves ray at a sloping bed. *Journal of Fluid Mechanics*, 350 :1–27, 1997.
- [20] D. P. Delisi and I. Orlanski. On the role of density jumps in the reflection and breaking of internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 69 :445–464, 1975.
- [21] P. Echeverri, M. R. Flynn, T. Peacock, and K. B. Winters. Low-mode internal tide generation by topography : An experimental and numerical investigation. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009.
- [22] G. D. Egbert and R. Ray. Estimates of  $M_2$  tidal energy dissipation from TOPEX/Poseidon altimeter data. *Journal of Geophysical Research*, 106 :475–502, 2001.
- [23] G. D. Egbert and R. D. Ray. Semi-diurnal and diurnal tidal dissipation from TOPEX/Poseidon altimetry. *Geophysical Research Letters*, 30, 2003.

- [24] V. W. Ekman. *On dead water. Norw. N. Polar Exped. 1893-1896 : Sci Results, XV, Christiana.* PhD thesis, 1904.
- [25] E. V. Ermanyuk and N. V. Gavrilov. On internal waves generated by large-amplitude circular and rectilinear oscillations of a circular cylinder in a uniformly stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 613 :329–356, 2008.
- [26] A. Fincham and G. Delerce. Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids*, 29 :S1, 2000.
- [27] J. Fortuin. Theory and application of two supplementary methods of constructing density gradient columns. *Journal of Polymer Science*, 44 :505–515, 1960.
- [28] S. P. M. Ganzveles, F. S. W. van Nuland, L. R. M. Maas, and H. M. Toussaint. Swimming obstructed by dead-water. *Naturwissenschaften*, 96 :449–456, 2009.
- [29] N. B. Garnier, A. Chiffaudel, and F. Daviaud. Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1d thermocapillary flows. II. Convective/absolute transitions. *Physica D*, 174 :30–55, 2003.
- [30] N. B. Garnier, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and A. Prigent. Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1d thermocapillary flows. I. General presentation and periodic solutions. *Physica D*, 174 :1–29, 2003.
- [31] C. Garrett. Internal tide generation in the deep ocean. *Science*, 301 :1858–1859, 2003.
- [32] C. Garrett and E. Kunze. Internal tide generation in the deep ocean. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39 :57–87, 2007.
- [33] N. V. Gavrilov and E. V. Ermanyuk. Internal waves generated by circular translational motion of a cylinder in a linearly stratified fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 38 :224–227, 1997.
- [34] T. Gerkema. *Nonlinear Dispersive Internal Tides : Generation models for a rotating ocean.* PhD thesis, NIOZ, 1996.
- [35] T. Gerkema. Internal and interfacial tides : beam scattering and local generation of solitary waves. *Journal of Marine Research*, 59 :227–255, 2001.
- [36] T. Gerkema. Development of internal solitary waves in various thermocline regimes – a multi-modal approach. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 10 :397–405, 2003.

- [37] T. Gerkema, L. Gostiaux, M. Mercier, M. Mathur, J. Magalhães, T. Dauxois, and J. Da Silva. Soliton generation by internal-wave beams impinging on a pycnocline. laboratory experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, in preparation.
- [38] N. Gilbert. *Transition von der laminaren in die turbulente Kanalströmung*. PhD thesis, DFVLR Institut für Strömungsmechanik Göttingen, 1988.
- [39] A. E. Gill. *Atmosphere-ocean dynamics*. Academic Press (London), 1982.
- [40] E. Goldhahn and J. Seume. The background oriented schlieren technique : sensitivity, accuracy, resolution and application to a three-dimensional density field. *Experiments in Fluids*, 43 :241–249, 2007.
- [41] H. Görtler. Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 23 :65–71, 1943.
- [42] L. Gostiaux. *Etude expérimentale des ondes de gravité internes en présence de topographie. Émission, propagation, réflexion*. PhD thesis, ENS Lyon, 2006.
- [43] L. Gostiaux and T. Dauxois. Laboratory experiments on the generation of internal tidal beams over steep slopes. *Physics of Fluids*, 19 :028102, 2007.
- [44] L. Gostiaux, T. Dauxois, H. Didelle, J. Sommeria, and S. Viboud. Quantitative laboratory observations of internal wave reflection on ascending slopes. *Physics of Fluids*, 18 :056602, 2006.
- [45] L. Gostiaux, H. Didelle, S. Mercier, and T. Dauxois. A novel internal wave generator. *Experiments in Fluids*, 42 :123–130, 2007.
- [46] M. D. Greenslade. Drag on a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 418 :339–350, 2000.
- [47] N. Grisouard, C. Staquet, and T. Gerkema. Local generation of internal solitary waves in a pycnocline. *Journal of Fluid Mechanics*, submitted.
- [48] J. Hazewinkel, S. B. Dalziel, A. Doelman, and L. R. M. Maas. Tracer transport by internal wave beams. *Journal of Fluid Mechanics*, submitted.
- [49] K. R. Helfrich and W. K. Melville. Long nonlinear internal waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 38 :395–425, 2006.
- [50] D. F. Hill. General density gradients in general domains : the "two-tank" method revisited. *Experiments in Fluids*, 32 :434–440, 2002.

- [51] E. J. Hopfinger, J.-B. Flör, J.-M. Chomaz, and P. Bonneton. Internal waves generated by a moving sphere and its wake in a stratified fluid. *Experiments in Fluids*, 11 :255–261, 1991.
- [52] D. A. Horn, J. Imberger, and G. N. Ivey. The degeneration of large-scale interfacial gravity waves in lakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 434 :181–207, 2001.
- [53] D. A. Horn, J. Imberger, G. N. Ivey, and L. G. Redekopp. A weakly nonlinear model of long internal waves in closed basin. *Journal of Fluid Mechanics*, 467 :269–287, 2002.
- [54] P. Hosegood and H. Van Haren. Near-bed solibores over the continental slope in the faeroe-shetland channel. *Deep Sea Research Part II*, 51 :2943–2971, 2004.
- [55] B. A. Hughes and H. L. Grant. The effects of internal waves on surface wind waves. 1. Experimental measurements. *Journal of Geophysical Research*, 83 :443–454, 1978.
- [56] D. G. Hurley and G. Keady. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Part 2. Approximate viscous solution. *Journal of Fluid Mechanics*, 351 :119–138, 1997.
- [57] G. N. Ivey, K. B. Winters, and I. P. D. De Silva. Turbulent mixing in a sloping benthic boundary layer energized by internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 418 :59–76, 2000.
- [58] C.-H. Jiang and P. S. Marcus. Selection rules for the nonlinear interaction of internal gravity waves. *Physical Review Letters*, 102 :124502, 2009.
- [59] T. M. S. Johnston and M. A. Merrifield. Internal tide scattering at seamounts, ridges and islands. *Journal of Geophysical Research*, 108 (C6) :3180, 2003.
- [60] T. M. S. Johnston, M. A. Merrifield, and P.E. Holloway. Internal tide scattering at the line islands ridge. *Journal of Geophysical Research*, 108 (C11) :3365, 2003.
- [61] B. King, H. P. Zhang, and H. L. Swinney. Tidal flow over three-dimensional topography in a stratified fluid. *Physics of Fluids*, 21 :116601, 2009.
- [62] L. Kleiser and U. Schumann. Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows. In *Proceedings of third GAMM conference on numerical methods in fluid mechanics*, 1980.
- [63] L. Kleiser and U. Schumann. Spectral simulations of the laminar–turbulent transition process in plane poiseuille flow. In R. G. Voigt, D. Gottlieb, and M. Y.

- Hussaini, editors, *Spectral methods for partial differential equations*, pages 141–163. SIAM, Philadelphia, 1984.
- [64] F. P. A. Lam, L. R. M. Maas, and T. Gerkema. Spatial structure of tidal and residual currents as observed over the shelf break in the bay of biscay. *Deep Sea Research Part I*, 51 :1075–1096, 2004.
- [65] L. H. Larsen. Internal waves incident upon a knife edge barrier. *Deep-Sea Research*, 16 :411–419, 1969.
- [66] L. St. Laurent and C. Garrett. The role of internal tides in mixing the deep ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 32 :2882–2899, 2002.
- [67] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [68] S. G. Llewellyn Smith and W. R. Young. Tidal conversion at a very steep ridge. *Journal of Fluid Mechanics*, 495 :175–191, 2003.
- [69] R. R. Long. Film notes on stratified flow. In Encyclopaedia Britannica Educational Corporation, editor, *The NCFMF Book of Film Notes*. 1968.
- [70] L. R. M. Maas, D. Benielli, J. Sommeria, and F. P. A. Lam. Observation of an internal wave attractor in a confined stably stratified fluid. *Nature*, 388 :557–561, 1997.
- [71] L. R. M. Maas and H. van Haren. Worden mooi-weer verdrinkingen door dood-water veroorzaakt? *Meteorologica*, 15 :211–216, 2006.
- [72] J. P. Martin, D. L. Rudnick, and R. Pinkel. Spatially broad observations of internal waves in the upper ocean at the Hawaiian ridge. *Journal of Physical Oceanography*, 36 :1085–1103, 2006.
- [73] D. Martinand, Ph. Carrière, and P. A. Monkewitz. Three-dimensional global instability modes associated with a localized hot spot in Rayleigh–Bénard–Poiseuille convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 551 :275–301, 2006.
- [74] M. Mathur and T. Peacock. Internal wave propagation in nonuniform stratifications. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009.
- [75] R. Maugé and T. Gerkema. Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography : a multi-modal approach. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 15 :233–244, 2008.

- [76] A. D. McEwan and P. G. Baines. Shear fronts and an experimental stratified shear flow. *J. Fluid Mech.*, 63 :257–272, 1974.
- [77] M. Mercier, R. Vasseur, and T. Dauxois. Phénomène d’eaux mortes. Website, 2009. <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr>.
- [78] M. J. Mercier, N. B. Garnier, and T. Dauxois. Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform. *Physics of Fluids*, 20 :086601, 2008.
- [79] M. J. Mercier, D. Martinand, M. Mathur, L. Gostiaux, T. Peacock, and T. Dauxois. New wave generation. *Journal of Fluid Mechanics*, accepted, 2010.
- [80] P. Meunier, P. J. Diamessis, and G. R. Spedding. Self-preservation in stratified momentum wakes. *Physics of Fluids*, 18 :106601, 2006.
- [81] T. Miloh, M. P. Tulin, and G. Zilman. Dead-water effects of a ship moving in stratified seas. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 115 :105–110, 1993.
- [82] O. V. Motygin and N. G. Kuznetsov. The wave resistance of a two-dimensional body moving forward in a two-layer fluid. *Journal of Engineering Mathematics*, 32 :53–72, 1997.
- [83] D. E. Mowbray and B. S. H. Rarity. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 28 :1–16, 1967.
- [84] P. Müller and X. Liu. Scattering of internal waves at finite topography in two dimensions. Part I : Theory and case studies. *Journal of Physical Oceanography*, 30 :532–549, 2000.
- [85] P. Müller and X. Liu. Scattering of internal waves at finite topography in two dimensions. Part II : Spectral calculations and boundary mixing. *Journal of Physical Oceanography*, 30 :550–563, 2000.
- [86] P. Müller and N. Xu. Scattering of oceanic internal gravity waves off random bottom topography. *Journal of Physical Oceanography*, 22 :474–488, 1992.
- [87] W. Munk and C. Wunsch. Abyssal recipes II : energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Research*, 45 :1977–2010, 1998.
- [88] S. Naito. Wave generation and absorption - Theory and application. In *Proceedings of the Sixteenth (2006) International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 1–9, 2006.

- [89] F. Nansen. Farthest north : The epic adventure of a visionary explorer. Skyhorse Publishing, 1897.
- [90] J. D. Nash, E. Kunze, J. M. Toole, and R. W. Schmitt. Internal tide reflection and turbulent mixing on the continental slope. *Journal of Physical Oceanography*, 34 :1117–1134, 2004.
- [91] J. T. Nault and B. R. Sutherland. Internal wave transmission in non-uniform flows. *Physics of Fluids*, 19 :016601, 2007.
- [92] A. L. New and J. C. B. Da Silva. Remote sensing evidence for the local generation of internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep Sea Research Part I*, 49 :915–934, 2002.
- [93] A. L. New and R. D. Pingree. Large-amplitude internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep Sea Research*, 37 :513–524, 1990.
- [94] A. L. New and R. D. Pingree. Local generation of internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep Sea Research*, 39 :1521–1534, 1992.
- [95] D. Nicolaou, J. F. R. Garman, and T. N. Stevenson. Internal waves from a body accelerating in a thermocline. *Applied Scientific Research*, 55 :171–186, 1995.
- [96] D. Nicolaou, R. Liu, and T. N. Stevenson. The evolution of thermocline waves from an oscillatory disturbance. *Journal of Fluid Mechanics*, 254 :401–416, 1993.
- [97] J. Nycander. Generation of internal waves in the deep ocean by tides. *Journal of Geophysical Research*, 110 :C10028, 2005.
- [98] K. Onu, M. R. Flynn, and B. R. Sutherland. Schlieren measurement of axisymmetric internal wave amplitudes. *Experiments in Fluids*, 35 :24–31, 2003.
- [99] A. R. Osborne, T. L. Burch, and R. I. Scarlet. The influence of internal waves on deep-water drilling. *Journal of Petroleum Technology*, 30 :1497–1504, 1978.
- [100] C. Oster. Density gradients. *Scientific American*, 213 :70–76, 1965.
- [101] T. Peacock, M. Mercier, and T. Dauxois. A laboratory study of low-mode internal tide scattering by finite-amplitude topography. *Physics of Fluids*, 21 :121702, 2009.
- [102] T. Peacock and A. Tabei. Visualization of nonlinear effects in reflecting internal wave beams. *Physics of Fluids*, 17 :061702, 2005.

- [103] O. M. Phillips. Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves. *Physics of Fluids*, 6 :513–521, 1963.
- [104] R. D. Pingree and A. L. New. Abyssal penetration and bottom reflection of internal tidal energy in the Bay of Biscay. *Journal of Physical Oceanography*, 21 :28–39, 1991.
- [105] Civ Project. A free particle imaging velocimetry package. Website. <http://www.civproject.org/project.html>.
- [106] F. Pétrélis, S. Llewellyn Smith, and W. R. Young. Tidal conversion at a submarine ridge. *Journal of Physical Oceanography*, 36 :1053–1071, 2006.
- [107] R.D. Ray and G.T. Mitchum. Surface manifestation of internal tides in the deep ocean : observations from altimetry and island gauges. *Progress in Oceanography*, 40 :135–162, 1997.
- [108] H. F. Robey. The generation of internal waves by a towed sphere and its wake in a thermocline. *Physics of Fluids*, 9 :3353–3367, 1997.
- [109] R. M. Robinson. The effects of a vertical barrier on internal waves. *Deep-Sea Research*, 16 :421–429, 1969.
- [110] B. Rodenborn, D. Kiefer, H. P. Zhang, and H. L. Swinney. Harmonic generation by reflecting internal waves. *in preparation*, 2010.
- [111] J. Rottman, D. Broutman, G. Spedding, and P. Meunier. The internal wave field generated by the body and wake of a horizontally moving sphere in a stratified fluid. *APS Meeting Abstracts*, pages D6+, November 2004.
- [112] H. Sandstrom. The effect of boundary curvature on reflection of internal waves. *Mémoires Société Royale des Sciences de Liège, 6ème série*, tome IV :183–190, 1972.
- [113] O. D. Shishkina. Experimental investigation of the generation of internal waves by a vertical cylinder in a near-surface pycnocline. *Fluid Dynamics*, 37 :931–938, 2002.
- [114] J. C. B. Da Silva, A. L. New, and J. M. Magalhaes. Internal solitary waves in the Mozambique channel : observations and interpretation. *Journal of Geophysical Research*, 114 :C05001, 2009.
- [115] A. Tabaei and T. R. Akylas. Nonlinear internal gravity wave beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 482 :141–161, 2003.

- [116] A. Tabaei, T. R. Akylas, and K. G. Lamb. Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 526 :217–243, 2005.
- [117] N. H. Thomas and T. N. Stevenson. A similarity solution for viscous internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 54 :495–506, 1972.
- [118] S. A. Thorpe. On the shape of progressive internal waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 263 :563–614, 1968.
- [119] S. A. Thorpe. On the reflection of a train of finite-amplitude internal waves from a uniform slope. *Journal of Fluid Mechanics*, 178 :279–302, 1987.
- [120] S. A. Thorpe. Nonlinear reflection of internal waves at a density discontinuity at the base of a mixed layer. *Journal of Physical Oceanography*, 28 :1853–1860, 1998.
- [121] H. van Haren. Cruise report bsik/LOCO-IW09 : R/V Pelagia cruise 64PE308. Website, 2009. <http://www.nioz.nl/public/dmg/rpt/crs/64pe308.pdf>.
- [122] R. Vasseur. Ondes d’interface dans les fluides stratifiés. Master’s thesis, ENS Lyon, 2008.
- [123] B. Voisin. Limit states of internal wave beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 496 :243–293, 2003.
- [124] S. B. Vosper, L. P. Castro, W. H. Snyder, and S. D. Mobbs. Experimental studies of strongly stratified flow past three-dimensional orography. *Journal of Fluid Mechanics*, 390 :223–249, 1999.
- [125] R. L. Walterscheid, G. Schubert, and D. G. Brinkman. Small scale gravity waves in the upper mesosphere and lower thermosphere generated by deep tropical convection. *Journal of Geophysical Research*, 106(D23) :31825–31832, 2001.
- [126] C. Wunsch. Progressive internal waves on slopes. *Journal of Fluid Mechanics*, 35 :131–144, 1969.
- [127] C. Wunsch and R. Ferrari. Vertical mixing, energy and the general circulation of the oceans. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 :281–314, 2004.
- [128] C. Xiao-Gang and S. Jin-Bao. Second-order random wave solutions for interfacial internal waves in  $n$ -layer density-stratified fluid. *Chinese Physics*, 15 :756–766, 2006.
- [129] R. W. Yeung and T. C. Nguyen. Waves generated by a moving source in a two-layer ocean of finite depth. *Journal of Engineering Mathematics*, 35 :85–107, 1999.

- [130] H. P. Zhang, B. King, and H. L. Swinney. Experimental study of internal gravity waves generated by supercritical topography. *Experiments in Fluids*, 19 :096602, 2007.



## Publications et communications de la thèse

### Articles publiés :

1. **Matthieu J. Mercier, Nicolas B. Garnier and Thierry Dauxois**, Reflexion and Diffraction of Internal Waves analyzed with the Hilbert Transform, *Physics of Fluids* **20**, 086601 (2008).
2. **Thomas Peacock, Matthieu J. Mercier, Henri Didelle, Samuel Viboud, Thierry Dauxois**, A laboratory study of low-mode internal tide scattering by finite-amplitude topography, *Physics of Fluids*, **21**, 121702 (2009).
3. **Matthieu J. Mercier, Denis Martinand, Manikandan Mathur, Louis Gostiaux, Thomas Peacock, and Thierry Dauxois**, New wave generation, *Journal of Fluid Mechanics*, accepted (2010).

### Articles en préparation :

1. **Theo Gerkema, Louis Gostiaux, Matthieu J. Mercier, Manikandan Mathur, Jorge Magalhães, Thierry Dauxois and José Da Silva**, Soliton generation by internal-wave beams impinging on a pycnocline, laboratory experiments, *en preparation pour Journal of Fluid Mechanics*.
2. **Matthieu J. Mercier, Romain Vasseur, and Thierry Dauxois**, Resurrecting Dead-water, *en préparation pour Nonlinear Processes in Geophysics*.

### Proceedings :

1. **Matthieu Mercier, Nicolas Garnier and Thierry Dauxois**, Démodulation complexe de signaux expérimentaux appliquée aux ondes internes, *Comptes-Rendus de la 11<sup>ème</sup> Rencontre du Non-Linéaire*, 125–130 (2008).

### Communications orales (conférences, séminaires) :

1. **Rencontre du Non-Linéaire** (Paris), oral. *Démodulation complexe de signaux expérimentaux appliquée aux ondes internes*, 03/2008.
2. **EGU General Assembly** (Wien), poster. *Hilbert transform applied to internal waves issues*. Récompensé par le prix « AS (Atmospheric Sciences) EGU Young Scientist Outstanding Poster Presentation (YSOPP) », 04/2008.
3. **APS Division of Fluid Dynamics Meeting** (San Antonio), oral. *Analyzing emission, reflection and diffraction of internal waves using the Hilbert transform*, 11/2008.

4. **EGU General Assembly** (Wien), oral. *Experimental Study of Internal-Tide Scattering by 2D Topography*, 04/2009.
5. **Waves and Instabilities in Geophysical and Astrophysical Flows** (Porquerolles), oral. *Interfacial waves (generated by a boat) in stratified fluids*, 05/2009.
6. **APS Division of Fluid Dynamics Meeting** (Minneapolis), oral. *Internal-Tide Scattering by 2D Topography : Experimental Study*, 11/2009.
7. **Hydralab III : Young Researchers Workshop** (Hannover), oral. *New (internal) Wave Generation*, 02/2010.
8. **Coordinated Mathematical Modeling of Internal Waves** (Banff), oral. *Dead Water Phenomenon*, 04/2010.
9. **Nonlinear Dynamics Seminars**, Center for Nonlinear Dynamics (Austin), oral. *Internal wave generation : controlling spatial structures to investigate specific oceanic issues*, 04/2010.

#### Communications grand public :

1. <http://www.newscientist.com>, *Mysterious « dead water » effect caught on film*, 21/08/2008.
2. <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr>, *Phénomène d'eaux mortes*, 15/06/2009.
3. Quo, « *Esto no es un juego* », n° 162 p 98, 03/2009.