HAL
open science

Ondelettes pour la prise en compte de conditions aux limites en turbulence incompressible

Souleymane Kadri Harouna

To cite this version:

Souleymane Kadri Harouna. Ondelettes pour la prise en compte de conditions aux limites en turbulence incompressible. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2010. Français. NNT : . tel-00544373

HAL Id: tel-00544373

https://theses.hal.science/tel-00544373v1

Submitted on 7 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée et soutenue publiquement par

KADRI HAROUNA Souleymane

le 13 **Septembre** 2010

Ondelettes pour la prise en compte de conditions aux limites en turbulence incompressible

---

Thèse dirigée par **PERRIER Valérie** et codirigée par **EL HAJJI Saïd**

JURY

Mr.	PRUD'HOMME Christophe	Président
Mme.	BERTOLUZZA Silvia	Rapporteur
Mr.	LIANDRAT Jacques	Rapporteur
Mme.	PERRIER Valérie	Directrice de thèse
Mr.	EL HAJJI Saïd	Co-directeur de thèse
Mr.	MONASSE Pascal	Examinateur

Thèse préparée au sein du laboratoire Jean Kuntzmann (Université de Grenoble, CNRS)

dans **l'École Doctorale**

"Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique"

Remerciements :

Je tiens tout d'abord à remercier vivement mes deux directeurs de thèse Mme Valérie Perrier, Professeur Institut National Polytechnique de Grenoble, et Mr Saïd EL HAJJI, Professeur Université Mohamed V Rabat-Maroc, d'avoir encadré cette thèse. Plus particulièrement, un grand merci à Mme Valérie Perrier qui a su me laisser la liberté nécessaire à l'accomplissement de mes travaux, tout en y veillant de façon critique et avisée. J'ai beaucoup apprécié sa disponibilité, la clarté de ses explications, la simplicité avec laquelle elle m'a appris les bases de la théorie des ondelettes ainsi que leurs utilisations en mécanique de fluide et en calcul scientifique.

Je remercie également Mme Silvia BERTOLUZZA, Directeur de Recherche Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche del CNR-Pavia (Italie), et Mr Jacques LIANDRAT, Professeur École Centrale Marseille, de m'avoir fait l'honneur de rapporter sur cette thèse. Leurs remarques et suggestions m'ont été très bénéfiques.

Je souhaite aussi remercier Mr Christophe PRUD'HOMME, Professeur Université Joseph Fourier, d'avoir présidé le jury de cette thèse et Mr Pascal Monasse, Chercheur Ecole des Ponts ParisTech, d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie aussi tous ceux de la tour IRMA. En particulier Claudine MEYRIEUX, Juana DOS SANTOS et Catherine LAIOLO qui sans aucun doute m'ont beaucoup simplifié les tâches administratives et aidé lors de mes déplacements. Je remercie Franck PERIGNON, Frédéric AUDRA et Patrice NAVARRO qui ont résolu de façon efficace mes innombrables problèmes en informatique.

Une grande pensée à tous les doctorants du LJK, avec qui j'ai passé des moments très agréables, Roland DENIS et Brice BOYER je ne vous poserai plus des questions sur LINUX. Merci à Elie Bretin qui m'a aidé à comprendre et à apprivoiser MATLAB, nos discussions très chaudes m'ont beaucoup fait apprendre. Merci également à Erwan Deriaz sans qui, je ne saurais pas me poser certaines questions sur l'intérêt d'utiliser les bases d'ondelettes à divergence nulle.

Enfin merci à tous ceux de ma famille qui m'ont soutenu de près ou de loin, merci à Mr et Mme KADRI HAROUNA, merci à Nasser FANAMI, Bachir ABBA et Omar SAMNA qui m'ont beaucoup soutenu lors de ma première année à Grenoble. Merci également à ma femme Sallha qui m'a soutenu tout au long de cette thèse.

Résumé

Ce travail de thèse concerne les méthodes numériques à base d'ondelettes pour la simulation de la turbulence incompressible. L'objectif principal est la prise en compte de conditions aux limites physiques dans la résolution des équations de Navier-Stokes.

Contrairement aux travaux précédents où la *vorticité* était décomposée sur base d'ondelettes *classiques*, le point de vue qui est adopté ici vise à calculer le champ de *vitesse* de l'écoulement sous la forme d'une série d'ondelettes à divergence nulle. On est alors dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles en formulation *vitesse-pression*, pour lesquelles les conditions aux limites sur la *vitesse* s'écrivent explicitement, ce qui diffère de la formulation *vitesse-tourbillon*. Le principe de la méthode développée dans cette thèse consiste à injecter directement les conditions aux limites sur la base d'ondelettes. Ce travail prolonge la thèse de E. Deriaz réalisée dans le cas périodique.

La première partie de ce travail a donc été la définition et la mise en oeuvre de nouvelles bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^n$, permettant la prise en compte de conditions aux limites, à partir des travaux originaux de P. G. Lemarié-Rieusset, K. Urban, E. Deriaz et V. Perrier.

Dans une deuxième partie, des méthodes numériques efficaces utilisant ces nouvelles ondelettes sont proposées pour résoudre différents problèmes classiques : équation de la chaleur, problème de Stokes et calcul de la décomposition de Helmholtz-Hodge en non périodique. L'existence d'algorithmes rapides associés rend les méthodes compétitives.

La dernière partie est consacrée à la définition de deux nouveaux schémas de résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles par ondelettes, qui utilisent les ingrédients précédents. Des expériences numériques menées pour la simulation d'écoulement en cavité entraînée en dimension deux ou le problème de la reconnection de tubes de vortex en dimension trois montrent le fort potentiel des algorithmes développés.

Mots-clés : ondelettes, équations de Navier-Stokes incompressibles, conditions aux limites physiques.

Abstract

This work concerns wavelet numerical methods for the simulation of incompressible turbulent flow. The main objective of this work is to take into account physical boundary conditions in the resolution of Navier-Stokes equations on wavelet basis.

Unlike previous work where the vorticity field was decomposed in term of classical wavelet bases, the point of view adopted here is to compute the velocity field of the flow in its divergence-free wavelet series. We are then in the context of velocity-pressure formulation of the incompressible Navier-Stokes equations, for which the boundary conditions are written explicitly on the velocity field, which differs from the velocity-vorticity formulation. The principle of the method implemented is to incorporate directly the boundary conditions on the wavelet basis . This work extends the work of the thesis of E. Deriaz realized in the periodic case.

The first part of this work highlights the definition and the construction of new divergence-free and curl-free wavelet bases on $[0,1]^n$, which can take into account boundary conditions, from original works of P. G. Lemarie-Rieusset, K. Urban, E. Deriaz and V. Perrier.

In the second part, efficient numerical methods using these new wavelets are proposed to solve various classical problem : heat equation, Stokes problem and Helmholtz-Hodge decomposition in the non-periodic case. The existence of fast algorithms makes the associated methods more competitive.

The last part is devoted to the definition of two new numerical schemes for the resolution of the incompressible Navier-Stokes equations into wavelets, using the above ingredients. Numerical experiments conducted for the simulation of driven cavity flow in two dimensions or the issue of reconnection of vortex tubes in three dimensions show the strong potential of the developed algorithms.

Keywords : wavelet, incompressible Navier-Stokes equations, physical boundary conditions.

Table des matières

I Introduction **11**

II Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul **21**

1 Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^n$ **23**

1.1 Bases d'ondelettes 23

1.1.1 Analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ 24

1.1.2 Analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ 32

1.2 Espaces fonctionnels et ondelettes 34

1.3 Approximation linéaire et non-linéaire 39

1.4 Construction d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^n$ 46

1.4.1 Ondelettes à divergence nulle isotropes 46

1.4.2 Ondelettes à divergence et ondelettes à rotationnel nul anisotropes 53

1.4.3 Algorithmes rapides de décomposition et de reconstruction 57

1.5 Approximation non-linéaire sur base d'ondelettes à divergence nulle 61

2 Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul sur $[0,1]^n$ **65**

2.1 Analyse multirésolution sur l'intervalle 65

2.1.1 Fonction d'échelle sur $\mathbb{R}^+$ 66

2.1.2 Biorthogonalisation des fonctions d'échelle de bord 70

2.1.3 Base d'ondelettes sur $\mathbb{R}^+$ 75

2.2 Passage à l'intervalle $[0,1]$ 82

2.2.1 Prise en compte des conditions aux limites 86

2.3 Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul sur $[0,1]^n$ 90

2.3.1 Analyse multirésolution et commutation des projecteurs multi-échelles avec l'opérateur de dérivation sur $[0,1]$ 90

2.3.2 Ondelettes à divergence nulle sur $[0,1]^n$ 101

2.3.3 Ondelettes à rotationnel nul sur $[0,1]^n$ 107

2.3.4 Algorithme de décomposition et de reconstruction 112

2.3.5 Approximation non-linéaire 115

III Algorithmes pratiques **119**

3 Calculs pratiques et simulations numériques **121**
3.1 Fomules de quadrature 121
3.2 Calcul des termes de la matrice de masse et de la matrice de rigidité 124
3.3 Résolution de l'équation de la chaleur 131
3.3.1 Factorisation du noyau de la chaleur en dimension deux et trois 132
3.3.2 Une discrétisation variationnelle multi-échelles 134
3.4 Décomposition de Helmholtz-Hodge par ondelettes 141
3.4.1 Quelques généralités sur la décomposition de Helmholtz-Hodge 141
3.4.2 Calcul pratique par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge . . 145
3.5 Résolution du problème de Stokes 154
3.5.1 Les approches classiques 154
3.5.2 Méthode variationnelle dans $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ 154
3.5.3 Méthode de Gauge 156

IV Simulation numérique de la turbulence incompressible sur bases d'ondelettes **159**

4 Généralités sur la modélisation et la simulation des écoulements turbulents **161**
4.1 Modélisation des écoulements incompressibles et conditions aux limites 161
4.1.1 Conditions aux limites 162
4.2 Rappels sur des résultats d'existence et unicité des solutions pour les équations de Navier-Stokes 163
4.3 Généralités sur la simulation numérique de la turbulence 167

5 Simulation numérique directe par ondelettes des équations de Navier-Stokes **171**
5.1 Discrétisation des équations de Navier-Stokes 171
5.2 Rappels sur deux méthodes classiques 173
5.3 Nouveaux schémas par ondelettes 175
5.3.1 Schémas périodiques 175
5.3.2 Méthode de projection modifiée par ondelettes 177
5.3.3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes 178
5.4 Expériences numériques 178
5.4.1 Étude de l'erreur dans le cas périodique 178
5.4.2 Interaction de trois tourbillons (conditions aux limites périodiques) 179
5.4.3 Cavité entraînée 182
5.4.4 Cavité entraînée à grand Reynolds 187
5.4.5 Reconnection de tubes de vortex en dimension trois (cas périodiques) . . . 191
5.5 Méthode variationnelle multi-échelle 193

V Conclusion et perspectives **197**

Annexes **202**

Table des figures **203**

Première partie

Introduction

Introduction

La caractérisation et l'étude des propriétés des écoulements fluides sont des sujets qui préoccupent une vaste classe de scientifiques, dans des domaines de recherche très variés. Malgré plus d'un siècle d'efforts, la prédiction de la nature des écoulements turbulents est encore classée comme étant une question ouverte. La turbulence fait partie de la vie de tous les jours : la plupart des écoulements rencontrés dans la nature, dans les processus industriels ou dans des applications technologiques sont turbulents. La turbulence n'est pas une propriété intrinsèque du fluide, c'est un état qui se caractérise par des propriétés physiques telles que l'instationnarité, l'imprédictibilité, une forte interaction des échelles spatiales et temporelles de différents niveaux dans l'écoulement... La présence de phénomènes physiques très variés rend difficiles les expériences numériques dans des domaines d'application comme l'hydrologie, la météorologie, l'astrophysique etc. La maîtrise des schémas numériques performants est importante pour la construction de modèles de prévision opérationnels précis et efficaces.

Les équations qui modélisent mathématiquement les écoulements turbulents sont les équations de Navier-Stokes, qui se déduisent des lois newtoniennes dans le contexte de l'hydrodynamique. On s'intéresse dans ce travail à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles. La forme adimensionnée des équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide homogène est la suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide, $\mathbf{p}$ la pression, $\mathbf{f}$ la somme des forces extérieures et ν la viscosité cinématique (inversement proportionnelle au nombre de Reynolds). La présence du terme convectif $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ qui régit le caractère non-linéaire des équations est à l'origine des difficultés rencontrées dans la résolution théorique ou numérique du système. On ne connaît pas de solution analytique pour Navier-Stokes, sauf dans des cas très particuliers : les écoulements de Couette ou de Poiseuille. Les résultats mathématiques connus sur l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de Navier-Stokes ne sont que partiels et varient selon la dimension de l'espace considérée. Ainsi, la résolution numérique est un élément incontournable pour produire des résultats significatifs dans de nombreuses applications en ingénierie.

Le paramètre de contrôle dans les équations de Navier-Stokes est le nombre de Reynolds qui dépend de la taille et de la vitesse intrinsèque de l'écoulement. Plus ce nombre est grand, plus le fluide est sensible aux perturbations et produit de nombreux modes, ce qui le rend turbulent et chaotique. Les expériences numériques se heurtent alors au problème essentiel du très grand nombre de paramètres à gérer : celui-ci évoluant avec le nombre de Reynolds (de l'ordre de $Re^{\frac{6}{4}}$ en 2D et $Re^{\frac{9}{4}}$ en 3D). La situation est très défavorable pour la simulation des écoulements atmosphériques par exemple, ou les expériences en dimension trois.

Le principal enjeu des méthodes numériques est de fournir des schémas d'une grande précision mais peu coûteux en terme de calcul. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, la nature physique des solutions cherchées limite l'existence de méthodes optimales.

Pour simuler les équations de Navier-Stokes, on utilise couramment des méthodes de type éléments finis ou volume finis [57, 117], souvent couplées à des mailleurs adaptatifs pour tirer profit de la structure et de la géométrie de l'écoulement. Certains utilisent des méthodes purement lagrangiennes telles que des méthodes vortex ou particulaires [30], qui consistent à concentrer les particules de vorticité sur les lignes de courant caractéristiques de l'écoulement. On utilise aussi des méthodes spectrales [12,73] qui permettent de résoudre les équations sur la base de vecteurs propres telle que la base de Fourier, qui est une technique très répandue et bien adaptée aux conditions aux limites périodiques.

Pour réduire le coût des calculs, une autre alternative consiste à se tourner vers les méthodes LES (Large Eddy Simulation ou Simulation des Grandes Échelles) [84, 85, 102]. Dans cette approche, le principe de la méthode repose sur l'observation que les gros tourbillons sont très différents selon les géométries et leurs structures varient beaucoup avec le type d'écoulement considéré, tandis que les petits tourbillons ont un caractère beaucoup plus universel. La méthode consiste alors à calculer le mouvement instationnaire des gros tourbillons dans des réalisations particulières de l'écoulement, et à modéliser de façon statistique les petits tourbillons. À ces méthodes s'ajoutent les méthodes variationnelles multi-échelles (Variational Multiscale Method) développées par T.J.R Hughes et ses collaborateurs [66–69]. Le cadre d'application des méthodes LES ou variationnelles multi-échelles est généralement celui des méthodes éléments finis, spectrales ou pseudo-spectrales.

Dans ce contexte de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, les schémas par ondelettes font leur apparition à partir de 1996 (par exemple [15, 49, 59]). Les bases d'ondelettes, par leur double localisation espace-fréquence et leur caractère multi-échelle, fournissent des bases particulièrement bien adaptées aux structures cohérentes, tourbillons à grande durée de vie, qui font la dynamique des écoulements turbulents. L'idée de base des schémas ondelettes est de permettre une représentation de la solution à la fois compacte et non homogène : là où la solution est régulière, peu d'ondelettes suffisent à l'approcher, dans des zones de singularité, il faut ajouter des ondelettes de petite échelle pour augmenter la précision. Ainsi les schémas ondelettes se placent à mi-chemin

entre les méthodes spectrales (basées sur Fourier) et les méthodes de type élément finis. Dans le cadre des méthodes LES, une première méthode, la méthode CVS (Coherent Vortex Simulation) [47] propose une modélisation statistique des petits coefficients d'ondelettes.

Les méthodes classiques de résolution de Navier-Stokes incompressibles en ondelettes [15, 47, 49, 78] utilisent la formulation vitesse-tourbillon, ce qui permet l'obtention d'un système à deux équations : une sur la vorticité et l'autre sur la fonction courant. En dimension deux ces variables sont scalaires, mais deviennent vectorielles en dimension trois, ce qui n'apporte pas d'avantage par rapport à une formulation en vitesse-pression. De plus, les conditions aux limites sont imposées en général sur la vitesse et ne sont pas transposables aisément sur la fonction de courant et la vorticité [105]. Il est souvent plus facile d'utiliser une formulation vitesse-pression en non périodiques et alors les algorithmes sont identiques en dimension deux ou trois.

Le présent travail s'intéresse à la définition, l'étude et la mise en oeuvre de méthodes numériques pour résoudre les équations de Navier-Stokes en formulation vitesse-pression, à partir d'une discrétisation de la solution sur base d'ondelettes. En ce sens, les bases d'ondelettes à divergence nulle isotropes à support compact de P.G. Lemarié-Rieusset [79] ont joué un rôle prépondérant, et les résultats obtenus avec ces ondelettes ont conduit à des avancées significatives.

Les travaux de P.G. Lemarié-Rieusset ont été repris par K. Urban [115] qui propose une généralisation en introduisant des bases d'ondelettes à rotationnel nul. Dans le cadre de l'analyse des champs turbulents incompressibles ou la résolution du problème de Stokes, l'utilisation de ces nouvelles bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul par K. Urban et al. [32, 116] a mis en évidence leur potentiel pratique et l'intérêt qu'elles peuvent apporter dans la simulation numérique de la turbulence incompressible.

La construction des bases d'ondelettes à divergence nulle anisotropes introduite par E. Deriaz et V. Perrier [39, 40] est beaucoup plus pratique du point de vue numérique. Les travaux de E. Deriaz et V. Perrier se sont attachés à la prise en compte de l'incompressibilité du champ de vitesse par les ondelettes dans le cas périodique. La performance des algorithmes mis en oeuvre dans la résolution des équations de Navier-Stokes réside dans la façon originale de calculer la pression à partir d'une décomposition de Helmholtz-Hodge du terme non linéaire. Cela sort du cadre habituel de la formulation de Galerkin utilisée par K. Urban et al. [32] ou des méthodes classiques basées sur différences finies ou éléments finis [57].

Dans ce travail, on revient sur la construction des ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul anisotropes de E. Deriaz et V. Perrier, mais avec comme objectif leur généralisation et leur extension aux cas non périodiques sur l'hypercube $[0,1]^n$. Le but assigné à cette construction est que les ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul satisfassent les conditions aux limites

imposées le plus souvent à la vitesse d'un fluide confiné dans un domaine borné :

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} \cdot \vec{\tau} = 0$$

avec $\vec{\nu}$ et $\vec{\tau}$ les vecteurs unitaires respectivement normal et tangent au domaine. Dans la résolution numérique des problèmes, la technique adoptée pour la gestion des conditions aux limites physiques (Dirichlet, Neumann) est celle qui consiste à construire des ondelettes de bords [2, 25, 109] sur un intervalle, c'est une technique qui est très efficace pour des opérateurs elliptiques [28, 95].

Sur le plan théorique, le travail de A. Jouini et P.G. Lemarié-Rieusset [72] permet d'établir le cadre nécessaire pour construire sur $[0,1]^2$ des analyses multirésolution, qui ne sont pas à divergence nulle, mais dont les projecteurs multi-échelle conservent la propriété de divergence nulle. A. Jouini et P.G. Lemarié-Rieusset utilisent la construction d'analyse multirésolution de [25] pour avoir des analyses multirésolution reliées par dérivation / intégration sur $[0,1]$. Cette approche est poursuivie dans cette thèse dans le cas d'une construction pratique à partir des analyses multirésolution à reproduction polynomiale sur l'intervalle de [95], avec comme apport la construction des ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^n$.

Le calcul de la décomposition de Helmholtz-Hodge [63] est un outil numérique essentiel dont le champ d'application dépasse largement celui de la résolution des équations de Navier-Stokes. On retrouve cette notion par exemple en électrodynamique dans la résolution des équations de Maxwell [7] ou en infographie [113]. Dans le domaine fréquentiel, la décomposition de Helmholtz-Hodge se calcule facilement en utilisant le projecteur de Leray, le symbole de cet opérateur est un polynôme de degré nul dont on connaît l'expression analytique dans la base de Fourier. En général, sur des domaines bornés, on passe souvent par la résolution d'un problème de Poisson [57, 62]. Les méthodes de calcul de la décomposition de Helmholtz-Hodge par ondelettes à divergence nulle ont été introduites par E. Deriaz et V. Perrier [40, 42]. L'utilisation de leurs méthodes dans la simulation numérique directe de la turbulence donne de très bons résultats [41], similaires à ceux obtenus en spectral [15].

Pour calculer la décomposition de Helmholtz-Hodge par ondelettes, on part de l'observation que la matrice de masse de la base d'ondelettes à divergence nulle en dimension deux et celle de la base d'ondelettes à rotationnel nul en dimension supérieure ($n \geq 2$) sont équivalentes à la matrice du Laplacien scalaire. Ces matrices admettent alors un préconditionneur diagonal optimal en ondelettes [23]. Au lieu d'utiliser un algorithme itératif comme le font E. Deriaz et V. Perrier, la façon de faire utilisée dans ce travail pour calculer cette décomposition est d'inverser directement la matrice de masse de la base des ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul, en se servant de la structure tensorielle de la base pour faire les calculs avec les matrices des bases unidimensionnelles. L'intérêt de cette approche est qu'on retrouve le même ordre d'erreur donnée par la base dans le cas d'une approximation linéaire.

Les objectifs qui ont déterminé l'orientation du travail de recherche mené dans cette thèse sont la mise en oeuvre des algorithmes et méthodes numériques qui sont à la fois performants et efficaces pour simuler les écoulements fluides incompressibles sur base d'ondelettes, en imposant les conditions aux limites appropriées. Le plan proposé pour la réalisation de ce travail est le suivant :

La première partie de ce travail est consacrée à la construction des ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^n$. On présente brièvement au premier chapitre les résultats et notions jugés utiles pour comprendre la théorie générale des bases d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Une relecture de la construction des ondelettes à divergence nulle sur $\mathbb{R}^n$ est donnée à la fin de ce chapitre puis, la question de l'approximation non-linéaire sur base d'ondelettes à divergence nulle est abordée. Le deuxième chapitre traite de la construction des ondelettes sur l'intervalle $[0,1]$ pour la prise en compte des conditions aux limites et qui vérifient la propriété de dérivation, puis on introduit une nouvelle construction des ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur l'hypercube $[0,1]^n$.

La deuxième partie concerne les algorithmes pratiques mis en oeuvre dans les simulations numériques. On étudie dans cette partie la qualité de l'approximation des bases d'ondelettes construites en première partie. On présente aussi les techniques utilisées pour résoudre l'équation de la chaleur (partie diffusive de Navier-Stokes), pour calculer la décomposition de Helmholtz-Hodge ou résoudre le problème de Stokes.

La troisième partie introduit deux nouveaux schémas pour la résolution par ondelettes des équations de Navier-Stokes incompressibles avec des conditions aux limites non périodiques. Après une introduction succincte des modèles de fluides numériques utilisés, deux schémas, basés sur deux méthodes célèbres dans la résolution de Navier-Stokes sont proposés : méthode de projection à la Chorin et méthode de Gauge. Ces schémas sont comparés dans le cas d'une simulation numérique directe de la turbulence sur le carré $[0,1]^2$, avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes. On termine le chapitre sur la méthode variationnelle multi-échelle utilisant les bases d'ondelettes pour résoudre Navier-Stokes dans une simulation numérique directe.

Enfin, on présente les conclusions sur les résultats obtenus et les perspectives envisagées dans ce domaine de recherche.

Notations

Espaces

$\mathcal{C}^m(\Omega)$, m entier : espaces des fonctions m fois continuement différentiables sur Ω.
$\mathcal{C}^s(\Omega)$ ($s > 0$ non entier) : espaces de Hölder.
$L^p(\Omega)$: espaces de Lebesgue.
$W^{s,p}(\Omega)$: espaces de Sobolev ($H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$).
$B^s_{p,q}(\Omega)$: espaces de Besov.
$L^2_{div}(\Omega)$: espace des fonctions $f \in (L^2(\Omega))^n$ et à divergence nulle.
$\mathcal{H}_{div}(\Omega)$: la fermeture de $L^2_{div}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.
$\mathcal{H}^{\perp}_{div}(\Omega)$: espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à rotationnel nul sur Ω.
$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans l'ouvert Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$: espace des distributions sur Ω.
V_j et $\tilde{V}_j$: espaces à l'échelle j des analyses multirésolutions primale et duale.
W_j et $\tilde{W}_j$: espaces d'ondelettes à l'échelle j.
p' : exposant conjugué de $p \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Fonctions

$\varphi_{j,k} := 2^{j/2}\varphi(2^j. - k)$ et $\tilde{\varphi}_{j,k} := 2^{j/2}\tilde{\varphi}(2^j. - k)$, $k \in \mathbb{Z}$: fonctions d'échelle primales et duales sur $\mathbb{R}$, mises à l'échelle j en norme $L^2(\mathbb{R})$.
$\psi_{j,k} := 2^{j/2}\psi(2^j. - k)$ et $\tilde{\psi}_{j,k} := 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j. - k)$, $k \in \mathbb{Z}$: ondelettes primales et duales sur $\mathbb{R}$, mises à l'échelle j en norme $L^2(\mathbb{R})$.
$\Phi^\flat_{j,\ell} := 2^{j/2}\Phi^\flat_{j,\ell}(2^j.)$ et $\tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell} := 2^{j/2}\tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell}(2^j.)$, $0 \leq \ell \leq \tilde{r} - 1$: fonctions d'échelle de bord en 0 primales et duales, mises à l'échelle j en norme $L^2([0,1])$.
$\Psi^\flat_{j,\ell} := 2^{j/2}\Psi^\flat_{j,\ell}(2^j.)$ et $\tilde{\Psi}^\flat_{j,\ell} := 2^{j/2}\tilde{\Psi}^\flat_{j,\ell}(2^j.)$, $0 \leq \ell \leq p_0 - 1$: ondelettes de bord en 0 primales et duales, mises à l'échelle j en norme $L^2([0,1])$.
$\Phi^\sharp_{j,\ell} := 2^{j/2}\Phi^\sharp_{j,\ell}(2^j.)$ et $\tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell} := 2^{j/2}\tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell}(2^j.)$, $0 \leq \ell \leq \tilde{r} - 1$: fonctions d'échelle de bord en 1 primales et duales, mises à l'échelle j en norme $L^2([0,1])$.
$\Psi^\sharp_{j,\ell} := 2^{j/2}\Psi^\sharp_{j,\ell}(2^j.)$ et $\tilde{\Psi}^\sharp_{j,\ell} := 2^{j/2}\tilde{\Psi}^\sharp_{j,\ell}(2^j.)$, $0 \leq \ell \leq p_1 - 1$: ondelettes de bord en 1 primales et duales, mises à l'échelle j en norme $L^2([0,1])$.
$\langle f, g\rangle$: produit scalaire de dualité entre deux fonctions scalaires ($\int f\tilde{g}$ si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$).
$\langle f/g\rangle$: produit scalaire de dualité entre deux fonctions vectorielles ($\int f \cdot \tilde{g}$ si $f \in (L^p(\Omega))^n$ et $g \in (L^{p'}(\Omega))^n$).
$\mathbf{u}$: fonction vectorielle de $\Omega \to \mathbb{R}^n$.
$\mathbf{p}$: fonction scalaire de $\Omega \to \mathbb{R}$.
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$: produit tensoriel de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.
$\varphi^1_{j,k} \otimes \varphi^2_{j,k}$: produit tensoriel de deux fonctions (ou vecteurs) $\varphi^1_{j,k}$ et $\varphi^2_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathrm{Supp}(f)$: support de la fonction f.

Opérateurs
$\mathcal{P}_j$, $\tilde{\mathcal{P}}_j$, $\mathcal{Q}_j := \mathcal{P}_{j+1} - \mathcal{P}_j$ et $\tilde{\mathcal{Q}}_j := \tilde{\mathcal{P}}_{j+1} - \tilde{\mathcal{P}}_j$: projecteurs biorthogonaux sur V_j, $\tilde{V}_j$, W_j et $\tilde{W}_j$.
T^* : adjoint de l'opérateur T.
$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{div}(\mathbf{u})$, divergence du champ de vecteurs $\mathbf{u}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i}$$

$\nabla \mathbf{p}$, gradient du scalaire $\mathbf{p}$:

$$\nabla \mathbf{p} = (\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_n})$$

$\mathbf{rot}(\mathbf{u})$, rotationnel du champ de vecteur $\mathbf{u}$:

$$n = 2, \ \ \mathbf{u} \ \text{ un scalaire}, \ \ \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}); \quad \mathbf{u} \ \text{ un vecteur } \ \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_2}$$

$$n = 3, \ \ \mathbf{u} \ \text{ un vecteur}, \ \ \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = (\frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_2})$$

$\widehat{f}$, transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i<\xi/x>} dx$$

Ensembles
$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs.

Deuxième partie

Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul

Chapitre 1

Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^n$

Les premiers travaux sur les ondelettes à divergence nulle remontent à G. Battle et P. Federbush [4]. Dans [4], ces auteurs ont construit une base d'ondelettes à divergence nulle orthogonale pour étudier l'existence de solutions du système de Navier-Stokes incompressible. Ces travaux ont montré l'intérêt que peut apporter l'utilisation des ondelettes à divergence nulle dans l'étude de la turbulence incompressible et ont ouvert d'autres perspectives sur l'utilisation de ce nouveau type d'ondelettes. L'utilisation de la base construite par G. Battle et P. Federbush reste toutefois théorique, car les ondelettes de cette base ne sont pas à support compact. A peu près à la même époque, P.G. Lemarié-Rieusset a montré qu'il n'existe pas de base d'ondelettes à divergence nulle orthogonale et qui soit à support compact [80]. Alors il a construit dans [79] des bases d'ondelettes à divergence nulle biorthogonales qui sont à support compact. Sur la base des travaux de G. Battle, P. Federbush et de P.G. Lemarié-Rieusset, K. Urban fait une généralisation de la construction et introduit des nouvelles bases d'ondelettes à rotationnel nul [115]. La construction des bases d'ondelettes à divergence nulles anisotropes que nous allons présenter à la fin de ce chapitre a été faite un peu plus récemment par E. Deriaz et V. Perrier dans [39, 40]. Dans ce chapitre, nous allons présenter de manière concise des résultats généraux sur les ondelettes utiles dans la suite pour la construction d'ondelettes à divergence nulle et à support compact.

1.1 Bases d'ondelettes

Pour construire les bases d'ondelettes, nous adoptons le formalisme des analyses multirésolutions développé par S. Mallat dans [88]. Ce contexte conduit à des algorithmes de transformée en ondelettes rapide. On commence d'abord par définir les analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et donner un aperçu de leurs propriétés.

1.1.1 Analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

Définition 1.1.1
*Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ **(AMR)** est, par définition, une suite croissante $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels de $L^2(\mathbb{R})$ tels que :*
(i) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$
(ii) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ j \in \mathbb{Z}$, *on a :*

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$$

(iii) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ k \in \mathbb{Z}$, *on a :*

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$$

(iv) *Il existe une fonction φ telle que $\{\varphi(.-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz de V_0.*

La propriété de base de Riesz est un compromis qui permet de conserver l'équivalence en norme d'énergie $\|.\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Plus précisément : il existe deux constantes strictement positives C et C' telles que, pour toute suite réelle $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$C\|\alpha_k\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C'\|\alpha_k\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \tag{1.1.1}$$

La fonction φ est appelée fonction d'échelle. D'après la propriété (ii), il existe une suite réelle notée $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que φ vérifie la relation à deux échelles suivante :

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \varphi(2x-k) \tag{1.1.2}$$

En écrivant cette relation à deux échelles dans le domaine de Fourier [1], on obtient :

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \tag{1.1.3}$$

avec m_0 une fonction trigonométrique qui s'écrit :

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi} \tag{1.1.4}$$

La suite $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est appelée filtre d'échelle. La fonction φ est à support compact si et seulement si tous les termes de la suite $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont nuls sauf un nombre fini, voir page 408 de [76]. Dans ce cas,

1. La transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<\xi,x>}dx$$

m_0 est un polynôme trigonométrique appelé polynôme de raffinement associé au filtre $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Le paramètre j définit la résolution ou le niveau de détail. D'après la propriété d'emboîtement des espaces V_j, on peut décomposer l'espace V_{j+1} comme suit

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \tag{1.1.5}$$

Dans (1.1.5), l'espace W_j désigne un supplémentaire topologique direct de V_j dans V_{j+1}, qui n'est pas unique. Les ondelettes se définissent alors en cherchant une base inconditionnelle de l'espace W_j. Si $\{\varphi(. - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de V_0, l'ondelette $\psi \in W_0$ est définie par la relation à deux échelles qu'elle vérifie dans V_1 :

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) \tag{1.1.6}$$

De même si on écrit (1.1.6) dans le domaine de Fourier, on a :

$$\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \tag{1.1.7}$$

où m_1 une fonction trigonométrique qui s'écrit sous la forme :

$$m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{-ik\xi} \tag{1.1.8}$$

La suite $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est appelée filtre de détail. La famille $\{\psi(. - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz de W_0 et $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j. - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est une base de $L^2(\mathbb{R})$, appelée base d'ondelettes.

On n'est pas limité dans le choix de l'espace W_j, et en pratique il existe deux choix.

• **Le cas orthogonal :**
Les fonctions d'échelle $\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi(2^j. - k)$ forment une base orthogonale de V_j et W_j est le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \qquad \text{et} \qquad W_j = V_{j+1} \cap (V_j)^{\perp} \tag{1.1.9}$$

Si on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$, l'orthogonalité est définie sur la base des fonctions d'échelle $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de V_j et la base d'ondelettes $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j. - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de W_j par :

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}, \ \ \forall\, k, k' \in \mathbb{Z} \\
&\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{k,k'}\delta_{j,j'}, \ \ \forall\, j, j', k, k' \in \mathbb{Z} \\
&\langle \varphi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = 0, \ \ \forall\, k, k' \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Les deux filtres, d'échelle $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et de détail $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, sont aussi liés par :

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \tag{1.1.10}$$

Dans ce cas on parle d'analyse multirésolution orthogonale. Un procédé qui permet d'obtenir une telle analyse multirésolution est donné par le théorème suivant de [91] :

Théorème 1.1.1 *[91]*
Soit $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ de fonction d'échelle φ. Il existe alors deux constantes $c_1 \geq c_2 > 0$ telles que l'on ait, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$c_1 \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2} \leq c_2 \tag{1.1.11}$$

On définit ensuite $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{-1/2} \tag{1.1.12}$$

Alors $\{\phi(. - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0.

Exemple 1.1.1
L'exemple le plus simple d'analyse multirésolution orthogonale est celui de la base de Haar où :

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x), \quad \textit{avec} \;\; h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi(x) = \chi_{[0,1/2]}(x) - \chi_{[1/2,1]}(x), \quad \textit{avec} \;\; g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La fonction d'échelle φ et l'ondelette ψ sont tracées à la figure 1.2 ci-dessous.

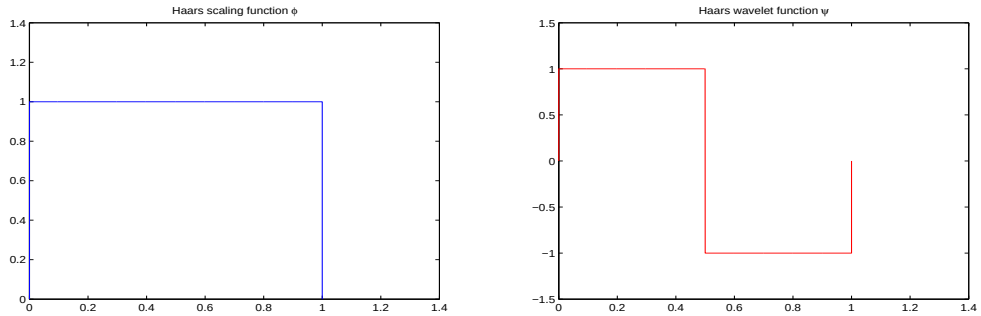

FIGURE 1.1 – Fonction d'échelle (à gauche) et ondelette (à droite) de Haar. Échelle $j = 0$.

Il existe d'autres familles d'ondelettes orthogonales plus régulières dont les formules analytiques ne sont pas si simples à établir, par exemple les ondelettes de Y. Meyer qui ne sont pas à support compact (voir [36, 76, 91]). Ces ondelettes sont indéfiniment dérivables et leur implémentation se fait dans le domaine fréquentiel.

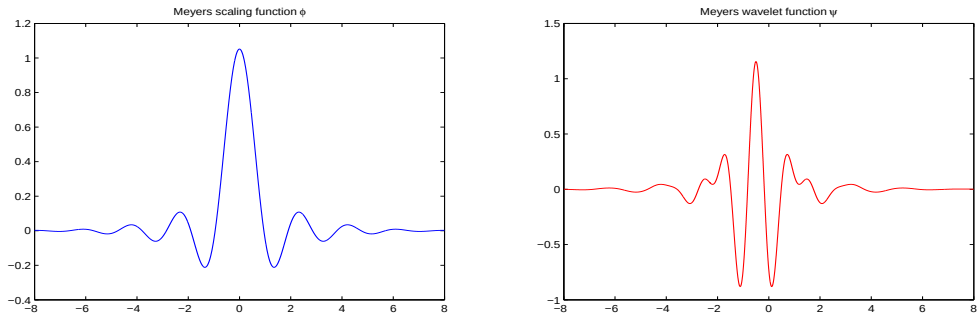

FIGURE 1.2 – Fonction d'échelle (à gauche) et ondelette (à droite) de Meyer [91]. Échelle $j = 0$.

• **Le cas biorthogonal :**
Il consiste à définir W_j comme étant un supplémentaire biorthogonal de V_j dans V_{j+1}, c'est à dire :

Définition 1.1.2
Soient V et $\tilde{V}$ deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les espaces V et $\tilde{V}$ sont biorthogonaux pour le produit scalaire de $\mathcal{H}$ si et seulement si : $\mathcal{H} = V \oplus (\tilde{V})^{\perp}$ (somme directe). Il existe alors $\{\varphi_k\}$ et $\{\tilde{\varphi}_k\}$ des bases respectives de V et $\tilde{V}$ telles que : $\langle \varphi_k, \tilde{\varphi}_{k'} \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{k,k'}$.

Ainsi, une analyse multirésolution biorthogonale (AMRB) de $L^2(\mathbb{R})$ sera la donnée de deux analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ notées $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ telles que :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \qquad \text{et} \qquad \tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$$

$$V_j \perp \tilde{W}_j, \qquad \tilde{V}_j \perp W_j, \qquad \tilde{W}_j \perp W_{j'},\ j \neq j'$$

Cela se traduit dans le choix des fonctions d'échelle et ondelettes par :

$$\begin{aligned} &\langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}, \ \ \forall\, k,\ k' \in \mathbb{Z} \\ &\langle \psi_{j',k}, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{k,k'}\delta_{j,j'}, \ \ \forall\, k, k', j, j' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k'} \rangle &= 0, \qquad \forall\, k,\ k' \in \mathbb{Z} \\ \langle \tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle &= 0, \qquad \forall\, k,\ k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Le fait de prendre $\{\tilde{V}_j\}_{j\mathbb{Z}}$ biorthogonal à $\{V_j\}_{j\mathbb{Z}}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ assure :

$$W_j = V_{j+1} \cap (\tilde{V}_j)^{\perp} \qquad \Leftrightarrow \qquad L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus (\tilde{V}_j)^{\perp} \tag{1.1.13}$$

Remarque 1.1.1
Les analyses multirésolution biorthogonales ont été introduites afin d'avoir des filtres miroirs conjugués à la fois symétriques et à supports compacts, propriétés qu'on ne peut pas avoir dans le cas orthogonal. Pour des compléments sur les ondelettes biorthogonales et leurs propriétés, on peut se référer à [25, 38, 72]. Ici, on se contente de citer quelques unes de leurs propriétés qui serviront ultérieurement à la construction des ondelettes vecteurs à divergence nulle. □

Exemple 1.1.2
Un exemple simple d'AMRB est celui de B-Splines biorthogonaux de degré $m \in \mathbb{N}$. Dans le domaine de Fourier, le B-spline de degré m est défini par :

$$\widehat{N}_m(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^{m+1}$$

Son polynôme de raffinement est : $m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^{m+1}$. On trace sur la figure 1.3 le graphe de la fonction d'échelle N_1 et de l'ondelette la plus courte associée. On trace également le graphe de la plus courte fonction d'échelle biorthogonale associée à N_1 qui correspond à $\tilde{m}_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^2 \left(1 + 2 \cdot \frac{1-\cos(\xi)}{2}\right)$ et de l'ondelette associée.

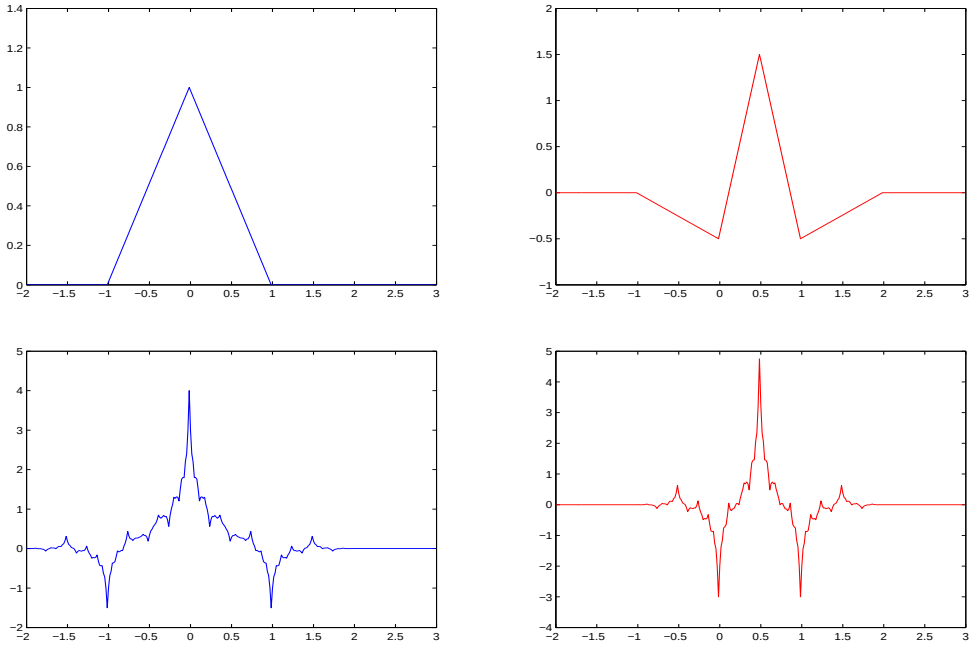

FIGURE 1.3 – Fonction d'échelle et ondelette B-Spline biorthogonales de degré 1 (première ligne) et leurs biorthogonales de plus court support (deuxième ligne).

Les ondelettes qui sont utilisées le plus souvent en pratique sont les ondelettes à supports compacts [25, 35] : il existe deux couples d'entiers (n_1, n_2) et $(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$ tels que les supports des fonctions d'échelle φ et $\tilde{\varphi}$ soient inclus respectivement dans les intervalles $[n_1, n_2]$ et $[\tilde{n}_1, \tilde{n}_2]$. Les relations à deux échelles que vérifient ces fonctions sont alors :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=n_1}^{n_2} h_k \varphi(2x - k) \qquad \tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=\tilde{n}_1}^{\tilde{n}_2} \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2x - k) \tag{1.1.14}$$

De même pour les ondelettes on a :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1-\tilde{n}_2}^{1-\tilde{n}_1} g_k \varphi(2x - k) \qquad g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \tag{1.1.15}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1-n_2}^{1-n_1} \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2x - k) \qquad \tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k} \tag{1.1.16}$$

Exemple 1.1.3
À titre d'exemple on prend $\varphi = N_1$, alors on a :

$$\mathrm{Supp}(\varphi) = [-1,1],\ \ \mathrm{Supp}(\psi) = [-1,2],\ \ \mathrm{Supp}(\tilde{\varphi}) = [-2,2]\ \ \textit{et}\ \ \mathrm{Supp}(\tilde{\psi}) = [-1,2]$$

De façon générale, pour les ondelettes on a :

$$\mathrm{Supp}(\psi) = [\frac{1-\tilde{n}_2+n_1}{2}, \frac{1-\tilde{n}_1+n_2}{2}]\ \ \textit{et}\ \ \mathrm{Supp}(\tilde{\psi}) = [\frac{1-n_2+\tilde{n}_1}{2}, \frac{1-n_1+\tilde{n}_2}{2}]$$

Dans la suite, les analyses multirésolution considérées seront biorthogonales et leurs fonctions d'échelle et ondelettes seront à support compact (sauf mention contraire).

Décompositions et reconstructions multi-échelles

Connaissant une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, l'analyse multi-échelles d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ donné consiste à décomposer f en une approximation grossière $f_0 \in V_0$ et une somme de tous les détails de f qui vivent dans les espaces W_j. Pour $j \in \mathbb{Z}$, à partir d'une approximation fine $f_{j+1} \in V_{j+1}$, on calcule l'approximation plus grossière $f_j \in V_j$ et le détail $w_j \in W_j$:

$$f_{j+1} = f_j + w_j$$

En itérant cette décomposition à deux échelles et prenant la limite pour $j \to \infty$, on arrive à la décomposition multi-échelles de f suivante :

$$f = f_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} w_j$$

Dans le cas des AMRBs, on commence par définir une suite de projections de f notée $(\mathcal{P}_j(f))_{j\in\mathbb{Z}}$ sur les espaces V_j par :

$$\mathcal{P}_j f = \sum_k \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k}\rangle \varphi_{j,k} \tag{1.1.17}$$

Connaissant une approximation grossière de f à une résolution $j_0 \geq 0$ donnée, pour tout $j \geq j_0$ on peut voir que formellement on a :

$$\mathcal{P}_j f = \mathcal{P}_{j_0} f + (\mathcal{P}_{j_0+1} - \mathcal{P}_{j_0})f + ... + (\mathcal{P}_j - \mathcal{P}_{j-1})f \tag{1.1.18}$$

Cela permet de définir une suite de projections de f notée $(\mathcal{Q}_j(f))_{j\in\mathbb{Z}}$ sur les espaces de détails W_j, définies par les formules :

$$\mathcal{Q}_j f = (\mathcal{P}_{j+1} - \mathcal{P}_j)f \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{Q}_j f = \sum_k \langle f, \tilde{\psi}_{j,k}\rangle \psi_{j,k} \tag{1.1.19}$$

La propriété de base de Riesz fait qu'on a la stabilité de ces projecteurs biorthogonaux dans $L^2(\mathbb{R})$ [90, 91] :

$$\|\mathcal{P}_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim \|\langle f, \tilde{\varphi}_{j,k}\rangle\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \qquad \text{et} \qquad \|\mathcal{Q}_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim \|\langle f, \tilde{\psi}_{j,k}\rangle\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \tag{1.1.20}$$

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que :

$$f = \sum_k \langle f, \tilde{\varphi}_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{j \geq 0} \sum_k \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \tag{1.1.21}$$

On appelle transformée en ondelettes de f l'application qui à f associe les coefficients de sa décomposition multi-échelles :

$$f \mapsto \{\langle f, \tilde{\varphi}_{0,k} \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle\}_{j \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \tag{1.1.22}$$

Une conséquence de la relation $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, de la densité des espaces $\overline{\cup V_j} = L^2(\mathbb{R})$ et $\cap V_j = \{0\}$ est que :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j, \qquad f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \tag{1.1.23}$$

Ce qui permet aussi de définir la décomposition en ondelettes de f comme étant l'application qui à f lui fait correspondre les coefficients de sa projection sur la base d'ondelettes :

$$f \mapsto \{\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \tag{1.1.24}$$

La recomposition multi-échelles consiste alors à faire le travail inverse. On cherche à calculer f à partir de son approximation la plus grossière et de tous ses détails. Cela est rendu possible grâce aux relations de recomposition satisfaites par φ et $\tilde{\varphi}$:

$$\varphi_{j+1,m} = \sum_k \tilde{h}_{m-2k} \varphi_{j,k} + \sum_k \tilde{g}_{m-2k} \psi_{j,k} \tag{1.1.25}$$

$$\tilde{\varphi}_{j+1,m} = \sum_k h_{m-2k} \tilde{\varphi}_{j,k} + \sum_k g_{m-2k} \tilde{\psi}_{j,k} \tag{1.1.26}$$

En pratique, pour aboutir à la décomposition ou à la reconstruction d'un signal f, on utilise le plus souvent un algorithme en cascade dû à S. Mallat [88].

Transformée en ondelettes rapide

L'algorithme de transformée en ondelettes rapide permet de calculer la suite des coefficients $\{c_{j,k} = \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{d_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle,\ k \in \mathbb{Z}\}$ à partir des $\{c_{j+1,k},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pour y parvenir, on utilise les relations à deux échelles suivantes :

$$c_{j,k} = \sum_l \tilde{h}_{l-2k} c_{j+1,l} \qquad \text{et} \qquad d_{j,k} = \sum_l \tilde{g}_{l-2k} c_{j+1,l} \tag{1.1.27}$$

On peut résumer cet algorithme schématiquement par :

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_J & \rightarrow & c_{J-1} & \rightarrow & c_{J-2} & \rightarrow & \dots & c_1 & \rightarrow & c_0 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \searrow & \\ & & d_{J-1} & & d_{J-2} & & \dots & d_1 & & d_0 \end{array}$$

La transformée inverse se calcule en utilisant la relation de recomposition suivante :

$$c_{j+1,k} = \sum_l h_{k-2l} c_{j,l} + \sum_l g_{k-2l} d_{j,l} \tag{1.1.28}$$

Son algorithme correspond aussi schématiquement à :

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_0 & \rightarrow & c_1 & \rightarrow & c_2 & \rightarrow & \dots & c_{J-1} & \rightarrow & c_J \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \nearrow & \\ d_0 & & d_1 & & d_2 & & \dots & d_{J-1} & & \end{array}$$

1.1.2 Analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$

Pour construire une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$, une façon simple de faire est de partir d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et d'adapter les formules et théorèmes précédents. On peut aussi utiliser le produit tensoriel de n analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. C'est cette dernière technique que nous adoptons car elle conduit à des bases séparables d'ondelettes à support compact et qui sont plus simples à manipuler en pratique. La construction est la suivante :
Soit $\Omega_n = \{0,1\}^n$ l'ensemble des 2^n suites $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ et $\Omega_n^* = \Omega_n \setminus (0, \dots, 0)$. Partant d'une analyse multirésolution biorthogonale à support compact de $L^2(\mathbb{R})$ formée par les espaces $\{V_j,\ \tilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, on définit les espaces $V_j^{\omega_i}$ par :

$$V_j^{\omega_i} = V_j,\ \text{si } \omega_i = 0 \qquad \text{et} \qquad V_j^{\omega_i} = W_j,\ \text{si } \omega_i = 1$$

$$\tilde{V}_j^{\omega_i} = \tilde{V}_j,\ \text{si } \omega_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{V}_j^{\omega_i} = \tilde{W}_j,\ \text{si } \omega_i = 1$$

et de même on pose :

$$\psi^{\omega_i} = \varphi,\ \text{si } \omega_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi^{\omega_i} = \psi,\ \text{si } \omega_i = 1$$

$$\tilde{\psi}^{\omega_i} = \tilde{\varphi},\ \text{si } \omega_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi}^{\omega_i} = \tilde{\psi},\ \text{si } \omega_i = 1$$

Comme le produit tensoriel a les propriétés algébriques d'une multiplication, une analyse multirésolution biorthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est donnée par les espaces définis par :

$$\mathbf{V}_j = V_j \otimes ... \otimes V_j \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathbf{V}}_j = \tilde{V}_j \otimes ... \otimes \tilde{V}_j$$

$$\mathbf{W}_j = \sum_\omega \mathbf{W}_j^\omega \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathbf{W}}_j = \sum_\omega \tilde{\mathbf{W}}_j^\omega$$

où

$$\mathbf{W}_j^\omega = V_j^{\omega_1} \otimes ... \otimes V_j^{\omega_n} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathbf{W}}_j^\omega = \tilde{V}_j^{\omega_1} \otimes ... \otimes \tilde{V}_j^{\omega_n}$$

pour $j \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \Omega_n^*$. A ces espaces on associe les fonctions d'échelle conjuguées $(\Phi, \tilde{\Phi})$ et les ondelettes conjuguées $(\Psi^\omega, \tilde{\Psi}^\omega)$ qui sont à support compact :

$$\Phi := \varphi \otimes ... \otimes \varphi \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Phi} := \tilde{\varphi} \otimes ... \otimes \tilde{\varphi} \tag{1.1.29}$$

$$\Psi^\omega := \psi^{\omega_1} \otimes ... \otimes \psi^{\omega_n} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Psi}^\omega := \tilde{\psi}^{\omega_1} \otimes ... \otimes \tilde{\psi}^{\omega_n} \tag{1.1.30}$$

Les projecteurs obliques $\mathbf{P}_j$ sur $\mathbf{V}_j$ et $\mathbf{Q}_j^\omega$ sur $\mathbf{W}_j^\omega$ sont définis par :

$$\mathbf{P}_j(f) = (\mathcal{P}_j \otimes ... \otimes \mathcal{P}_j)(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \tilde{\Phi}_{j,k} \rangle \Phi_{j,k}, \tag{1.1.31}$$

$$\mathbf{Q}_j^\omega(f) = (\mathcal{Q}_j^{\omega_1} \otimes ... \otimes \mathcal{Q}_j^{\omega_n})(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \tilde{\Psi}_{j,k}^\omega \rangle \Psi_{j,k}^\omega \tag{1.1.32}$$

Avec une définition analogue pour les projecteurs $\tilde{\mathbf{P}}_j$ sur $\tilde{\mathbf{V}}_j$ et $\tilde{\mathbf{Q}}_j^\omega$ sur $\tilde{\mathbf{W}}_j^\omega$.

Une autre construction consiste à faire le produit tensoriel entre des ondelettes qui vivent à des résolutions différentes, issues de n analyses multirésolution biorthogonales $\{V_j^1, \ldots, V_j^n\}_{j \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j^1, \ldots, \tilde{V}_j^n\}_{j \in \mathbb{Z}}$: c'est le cas anisotrope. Et au lieu d'avoir $2^n - 1$ ondelettes, on aura une seule ondelette analysante qui dépend de n paramètres de direction. Si on note $(\varphi^i, \tilde{\varphi}^i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\psi^i, \tilde{\psi}^i)_{1 \leq i \leq n}$ les n fonctions d'échelle et les n ondelettes associées respectivement à ces n analyses multirésolution, sur $\mathbb{R}^n$ les fonctions d'échelle et ondelettes biorthogonales anisotropes sont données par :

$$\Phi_{j,\mathbf{k}} := \varphi_{j,k_1}^1 \otimes ... \otimes \varphi_{j,k_n}^n \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Phi}_{j,\mathbf{k}} := \tilde{\varphi}_{j,k_1}^1 \otimes ... \otimes \tilde{\varphi}_{j,k_n}^n \tag{1.1.33}$$

$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \psi_{j_1,k_1}^1 \otimes ... \otimes \psi_{j_n,k_n}^n \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \tilde{\psi}_{j_1,k_1}^1 \otimes ... \otimes \tilde{\psi}_{j_n,k_n}^n \tag{1.1.34}$$

pour $j \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{j},\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$.

Exemple 1.1.4
On donne un exemple en dimension $n = 2$. Par produit tensoriel, on construit les espaces $\mathbf{V}_j$ suivants :

$$\mathbf{V}_j = V_j \otimes V_j, \quad \mathbf{V}_j = (V_{j-1} \oplus W_{j-1}) \otimes (V_{j-1} \oplus W_{j-1})$$

ce qui donne :

$$\mathbf{V}_j = (V_{j-1} \otimes V_{j-1}) \oplus (V_{j-1} \otimes W_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes V_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes W_{j-1})$$

Donc dans le cas isotrope on a une fonction d'échelle : $\Phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$, et trois ondelettes : $\Psi^{(0,1)}(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, $\Psi^{(1,0)}(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ et $\Psi^{(1,1)}(x,y) = \psi(x)\psi(y)$. On trace sur la figure 1.4 les isosurfaces de ces fonctions, dans le cas où φ est une fonction d'échelle de Daubechies [36] qui a une capacité de reproduction polynomiale jusqu'au degré $r = 3$.

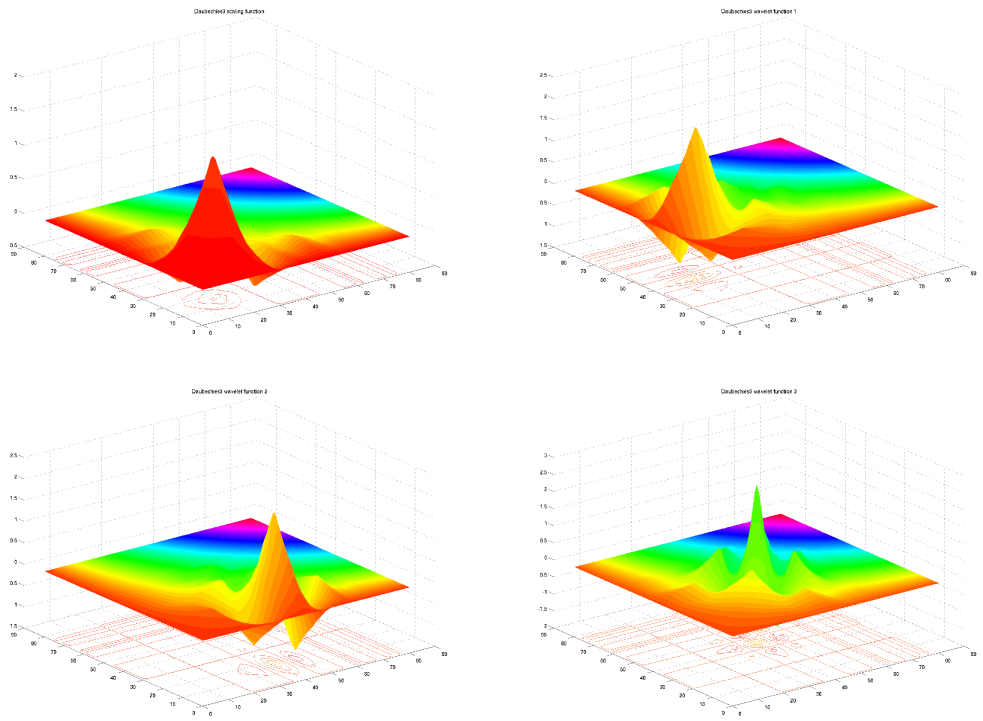

FIGURE 1.4 – Première ligne, isosurface de la fonction d'échelle $\Phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$ (à gauche) et celle de l'ondelette $\Psi^1(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ (à droite). Deuxième ligne, isosurface de l'ondelette $\Psi^2(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ (à gauche) et celle de l'ondelette $\Psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies de reproduction polynomiale $r = 3$. Le cas anisotrope utilise une seule ondelette : $\Psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$.

1.2 Espaces fonctionnels et ondelettes

Les bases d'ondelettes sont choisies dans de nombreuses applications à cause de leur bonne propriété de localisation spatiale ou d'interpolation. Elles permettent d'approcher des fonctions régulières avec peu de coefficients d'ondelettes. Il existe de plus un certain nombre de propriétés et critères qui permettent de mesurer la qualité de l'approximation donnée en analyse multi-échelles ou de relier la décroissance des coefficients d'ondelettes à la régularité de la fonction à analyser. Ces propriétés sont reliées à la régularité de l'analyse multirésolution choisie, à la décroissance à l'infini de la fonction d'échelle φ et aussi à la taille de son support.

Définition 1.2.1 *[91]*
Une analyse multirésolution $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ est dite α-régulière ($\alpha \in \mathbb{N}$) si l'on peut choisir la

fonction d'échelle φ de sorte que l'on ait :

$$\exists\, C_m > 0 \ \textit{telle que} \ : \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi^{(k)}(x)| \leq C_m(1+|x|)^{-m} \tag{1.2.1}$$

pour tout $k \leq \alpha$ et pour tout entier $m \in \mathbb{N}$.

On tient aussi compte du nombre de moments nuls dont dispose l'ondelette $\tilde{\psi}$. Cette propriété permet de quantifier les oscillations de l'ondelette $\tilde{\psi}$ et de reconnaître directement la capacité de reproduction polynomiale dont dispose la fonction d'échelle φ.

Définition 1.2.2
On dit que l'ondelette $\tilde{\psi}$ possède r moments nuls si :

$$\int x^q \tilde{\psi}(x)dx = 0 \qquad 0 \leq q \leq r-1 \tag{1.2.2}$$

La propriété de α-régularité montre la latitude dont disposent les bases d'ondelettes dans la représentation des fonctions régulières alors que les moments nuls sont reliés à la décroissance des coefficients d'ondelettes. Ces deux propriétés sont beaucoup exploitées dans la théorie de l'approximation où on cherche à relier la régularité d'un signal $f \in X$ (X un espace de Banach quelconque) au taux d'approximation de f en norme de X notée $\|.\|_X$ donné par une analyse multirésolution α-régulière $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de X. A une échelle de résolution j donnée, en général ce taux est mesuré par :

$$\inf_{g_j \in V_j} \|f - g_j\|_X$$

Dans ce travail, on s'intéresse principalement aux espaces fonctionnels qui interviennent dans la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. Notre motivation est de faire ressortir la marge d'erreur numérique commise en projetant la solution des équations sur base d'ondelettes. En effet, les bases d'ondelettes à divergence nulle se sont avérées être des bases adaptées à la résolution du système de Navier-Stokes [4, 48], surtout pour les solutions "*milde*" ou intégrales étudiées par M. Cannone [11]. L'espace X sera un des quatre espaces fonctionnels ci-dessous dont on rappelle la définition à l'aide des critères sur coefficients d'ondelettes, qui permettent des équivalences en normes discrètes. Soit $S'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées, un sous-espace X sera défini par sa norme :

$$X = \{f \in S'(\mathbb{R}) : \ \|f\|_X < \infty\}$$

On commence par se donner deux analyses multirésolution biorthogonales $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ à support compact. Soient $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ leurs bases d'ondelettes respectives, avec : $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j. - k)$ et $\tilde{\psi}_{j,k} = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j. - k)$. On suppose que ces analyses multirésolution ont respectivement $\alpha > 0$ et $\tilde{\alpha} > 0$ pour régularités, r et $\tilde{r}$ moments nuls. Si $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, on supposera $\tilde{\varphi} \in L^{p'}(\mathbb{R})$ où p' est le conjugué harmonique de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ [23]. L'étude des fonctions se fera dans l'analyse multirésolution $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. On notera s l'indice de régularité des fonctions à analyser.

Cet indice est supposé inférieur à la régularité de l'analyse multirésolution choisie et de plus les ondelettes biorthogonales $\tilde{\psi}_{j,k}$ vérifient la condition de moments nuls :

$$0 \leq s < \alpha \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_{j,k}(x) x^k dx = 0, \quad \text{pour} \ \ 0 \leq k \leq \lfloor s \rfloor \tag{1.2.3}$$

(a) Les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ sont définis par $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty$ où $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ est la norme :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

On a la modification habituelle si $p = \infty$:

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \sup_{x \in \mathbb{R}} ess |f(x)|$$

Si on exclut les cas où $p = 1$ et $p = \infty$ (les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$ n'ont pas de bases inconditionnelles [91]), pour une série d'ondelettes notée

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k},$$

on a :

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 |\psi_{j,k}(x)|^2 \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}) \tag{1.2.4}$$

On peut définir ces espaces en utilisant la localisation des supports des ondelettes $\psi_{j,k}$ et $\tilde{\psi}_{j,k}$ [76, 91]. Soient $I_{j,k}$ les intervalles dyadiques de la forme $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+m)2^{-j}[$ où $k, j \in \mathbb{Z}$ et m un entier assez grand pour que les supports de $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ et $2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j x - k)$ soient inclus dans $I_{j,k}$. Si $|I_{j,k}|$ est la longueur de l'intervalle $I_{j,k}$ et $\chi_{I_{j,k}}$ sa fonction indicatrice, alors :

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 |I_{j,k}|^{-1} \chi_{I_{j,k}}(x) \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}) \tag{1.2.5}$$

(b) Les espaces de Hölder-Zygmund $\mathcal{C}^s(\mathbb{R})$

Pour une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on définit son module de continuité par :

$$\forall\, h \geq 0, \qquad \omega_f(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ |x - y| \leq h\} \tag{1.2.6}$$

Pour $0 < s < 1$, l'espace de Hölder $\mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ est, par définition, l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ dont le module de continuité vérifie $\omega_f(h) \leq Ch^s$ pour une certaine constante $C > 0$. La norme de $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ est :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \sup_{0<h\leq 1} \omega_f(h) h^{-s} \tag{1.2.7}$$

L'espace $\mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R})}$. Si $s = 1$, on remplace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ par la classe de Zygmund définie comme étant l'ensemble des fonctions continues et bornées telles qu'il existe une constante $C > 0$ qui vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, h \in \mathbb{R},\ \ |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq C|h| \tag{1.2.8}$$

Enfin si $m < s \leq m+1$, on écrira $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ au sens classique, et si toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont dans $\mathcal{C}^{s-m}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.2.1
Une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ si et seulement si, dans une analyse multirésolution de régularité $\alpha > s$ dont les ondelettes biorthogonales $\tilde{\psi}_{j,k}$ ont $\lfloor \alpha \rfloor + 1$ moments nuls, les coefficients d'ondelettes

$$c_k = \int_{\mathbb{R}} f(x)\tilde{\varphi}(x-k)dx \qquad \textit{et} \qquad d_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\tilde{\psi}_{j,k}(x)dx,\ j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z} \tag{1.2.9}$$

vérifient :

$$|c_k| \leq C_0 \qquad \textit{et} \qquad |d_{j,k}| \leq C_1 2^{-j(s+1/2)},\ j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z} \tag{1.2.10}$$

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [91], ou dans [76, 88] avec une version qui caractérise plus des analyses locales.

(c) Les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R})$

Ces espaces permettent de mesurer la régularité s d'une fonction f qui est p-fois intégrable ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à s. Le cas qui nous intéresse est celui où $1 < p < \infty$. Pour des régularités entières $s \geq 0$, on définit ces espaces grâce à la norme de Sobolev suivante :

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R})} := \sum_{0\leq k\leq s} \|f^{(k)}\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{1.2.11}$$

On peut aussi définir ces espaces pour les cas limites : $p = \infty$ ou $0 \leq p \leq 1$, mais des précisions supplémentaires sont nécessaires [1]. Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit $W^{s,p}(\mathbb{R})$ par :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) :\ (1-\Delta)^{s/2} f \in L^p(\mathbb{R})\} \tag{1.2.12}$$

Pour $p = 2$, on remplacera dans les notations $W^{s,2}(\mathbb{R})$ par $H^s(\mathbb{R})$. Comme dans le cas des espaces de Lebesgue, pour une série d'ondelettes donnée, on peut caractériser la norme de $W^{s,p}(\mathbb{R})$ de cette série par un critère sur la série des coefficients :

Théorème 1.2.2 *[76, 91]*
Soient $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ deux analyses multirésolution biorthogonales de $L^2(\mathbb{R})$ de régularités respectives α et $\tilde{\alpha}$, de fonctions d'échelle respectives $\varphi \in W^{s,p}(\mathbb{R})$ et $\tilde{\varphi} \in W^{-s,p'}(\mathbb{R})$ pour $0 \leq s < \alpha$ et $1 < p < \infty$. On suppose que les ondelettes associées $\psi_{j,k}$ et $\tilde{\psi}_{j,k}$ ont respectivement $\lfloor\tilde{\alpha}\rfloor + 1$ et $\lfloor\alpha\rfloor + 1$ moments nuls. Alors, la famille $\{\varphi_k,\ \psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de $W^{s,p}(\mathbb{R})$ et la série d'ondelettes f appartient à $W^{s,p}(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\left(\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} (1+4^{js})|\langle f, \tilde{\psi}_{j,k}\rangle|^2 |\psi_{j,k}(x)|^2\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}) \tag{1.2.13}$$

(d) Les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R})$

Les espaces de Besov peuvent être interprétés comme une généralisation des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ ou de Hölder $C^s(\mathbb{R})$ dans la mesure où ils permettent de quantifier la régularité s d'une fonction p-fois intégrable en apportant une correction q à cette régularité : $H^s(\mathbb{R}) = B^s_{2,2}(\mathbb{R})$ et $C^s(\mathbb{R}) = B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Ces espaces apparaissent aussi de façon naturelle par interpolation réelle entre espaces de Sobolev. Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $Y \subset X$ avec injection continue et dense. Pour $\theta \in]0,1[$ et $q \in [1,+\infty]$, on définit les espaces intermédiaires (espaces d'interpolation) $Y \subset [X,Y]_{\theta,q} \subset X$ comme l'ensemble des fonctions f telles que la fonctionnelle

$$\|f\|_{[X,Y]_{\theta,q}} = \|t^{-\theta}K(f,t)\|_{L^q(]0,1[,dt/t)} \qquad \text{avec} \qquad K(f,t) = \inf_{g\in Y}[\|f-g\|_X + t\|g\|_Y] \tag{1.2.14}$$

soit finie. Alors, $B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ est défini par :

$$[W^{t,p}(\mathbb{R}), W^{r,p}(\mathbb{R})]_{\theta,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}),\ s = (1-\theta)t + \theta r \tag{1.2.15}$$

Remarque 1.2.1
Les espaces de Besov, contrairement aux espaces de Sobolev d'indice $p \neq 2$, sont stables par interpolation

$$[B^t_{p,q_1}(\mathbb{R}),\ B^r_{p,q_2}(\mathbb{R})]_{\theta,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}),\ \ s = (1-\theta)t + \theta r$$

quels que soient q_1 et q_2. Pour $p \in]1,\infty[$, on a :

$$L^p(\mathbb{R}) \subset B^0_{p,\infty}(\mathbb{R})$$

Si $s > 0$ et $p \in]1,\infty[$, on a :

$$B^s_{p,\min(p,2)}(\mathbb{R}) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}) \subset B^s_{p,\max(p,2)}(\mathbb{R})$$

□

Cette définition des espaces de Besov n'est pas unique. Il en existe d'autres que l'on peut trouver dans [43,114]. De même, pour une série d'ondelettes on peut définir un critère sur son appartenance à un Besov. Soient $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ deux analyses multirésolution biorthogonales telles qu'elles vérifient les hypothèses du théorème 1.2.2. Pour une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$, on rappelle sa projection sur les ondelettes $\psi_{j,k}$ à l'échelle j :

$$\mathcal{Q}_j(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k}\rangle \psi_{j,k}$$

Ce qui permet d'écrire la série d'ondelettes $f = \sum_{j,k} d_{j,k}\psi_{j,k}$ sous la forme :

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{Q}_j(f)$$

Proposition 1.2.1
On suppose les hypothèses du théorème 1.2.2, avec $\varphi \in B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\tilde{\varphi} \in B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R})$ pour $0 < s < \alpha$ et $1 \leq p, q < +\infty$. Alors une série d'ondelettes f appartient à l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite $\{2^{j(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\mathcal{Q}_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R})})\}_{j\in\mathbb{Z}}$ appartient à $l^q(\mathbb{Z})$. En outre la norme de f dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ est équivalente à :

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{\varphi}_k\rangle|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jq(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k}\rangle|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

Cette proposition est un cas particulier du théorème 5 (page 491) de [76]. Une preuve dans le cas particulier des analyses multirésolution orthogonales est donnée par Y. Meyer dans [91].

1.3 Approximation linéaire et non-linéaire

Sous des hypothèses de régularité de l'analyse multirésolution considérée et de stabilité des projecteurs multi-échelles qu'elle engendre, il existe des résultats d'approximation linéaire (projection) ou non-linéaire. Nous rappelons ici ceux qui nous seront utiles. Auparavant, il est nécessaire de préciser les notations qui seront utilisées. Nous utilisons des analyses multirésolution biorthogonales à supports compacts :

$$\mathrm{Supp}(\varphi) = [n_1, n_2] \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}(\psi) = [\frac{1-\tilde{n}_2+n_1}{2}, \frac{1-\tilde{n}_1+n_2}{2}]$$

$$\mathrm{Supp}(\tilde{\varphi}) = [\tilde{n}_1, \tilde{n}_2] \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}(\tilde{\psi}) = [\frac{1-n_2+\tilde{n}_1}{2}, \frac{1-n_1+\tilde{n}_2}{2}]$$

On notera par $\mathcal{I}$ la collection de tous les intervalles dyadiques de la forme $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+m)2^{-j}[$ où $k, j \in \mathbb{Z}$ et m un entier assez grand pour que les supports de $2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$ et $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$

soient inclus dans $I_{j,k}$. Cela est possible si l'on suppose que $1-\tilde{n}_2+n_1 \geq 0$ et $1-n_2+\tilde{n}_1 \geq 0$, parce que les fonctions sont à support compact. Si besoin on peut prendre comme fonctions de départ les fonctions dont les supports sont contenus dans $[0,m]$. Pour simplifier les notations, on notera le plus souvent I au lieu de $I_{j,k}$ et on notera φ_I et ψ_I respectivement $2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$ et $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ telles que leurs supports sont contenus dans I. On fera de même pour les fonctions biorthogonales. On notera $|I|=2^{-j}$ la longueur de I modulo l'entier m pour simplifier, ce qui ne change pas le sens des estimations à venir. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la décomposition en série d'ondelettes de f s'écrira alors :

$$f=\sum_{I\in\mathcal{I}}\langle f,\tilde{\psi}_I\rangle\psi_I \tag{1.3.1}$$

que l'on peut coupler pour tout $j_0 \geq 1$, avec l'identité :

$$f=\sum_{|I|=2^{-j_0}}\langle f,\tilde{\varphi}_I\rangle\varphi_I+\sum_{|I|\leq 2^{-j_0}}\langle f,\tilde{\psi}_I\rangle\psi_I \tag{1.3.2}$$

En dimension $n \geq 2$, $\mathcal{I}$ sera la collection de tous les cubes dyadiques de la forme $I_{j,k}=2^{-j}([0,m]^n+\mathbf{k})$ où $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n$ et $j\in\mathbb{Z}$. Pour une question de simplicité, nous allons considérer des analyses multirésolutions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ isotropes (le cas anisotrope se traite de façon similaire). Dans ce cas, on rappelle que $L^2(\mathbb{R}^n)$ est caractérisé par 2^n-1 ondelettes, et la décomposition de $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ en série d'ondelettes s'écrit :

$$f=\sum_{\omega\in\Omega^*}\sum_{I\in\mathcal{I}}\langle f,\tilde{\Psi}_I^\omega\rangle\Psi_I^\omega \tag{1.3.3}$$

Il est aussi facile de voir que pour $j\geq 0$, l'espace $\mathbf{V}_j$ correspond à :

$$\mathbf{V}_j=\mathrm{Vect}\{\Psi_{\ell,\mathbf{k}}^\omega:\ \ell\leq j-1,\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n,\ \omega\in\Omega^*\} \tag{1.3.4}$$

et

$$\mathbf{P}_j(f)=\sum_{\omega\in\Omega^*}\sum_{\ell\leq j-1}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\langle f,\tilde{\Psi}_{\ell,\mathbf{k}}^\omega\rangle\Psi_{\ell,\mathbf{k}}^\omega \tag{1.3.5}$$

De même, on remarque que si les analyses multirésolution biorthogonales $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ vérifient les hypothèses du théorème 1.2.2 ou celles de la proposition 1.2.1, alors les analyses multirésolution biorthogonales $\{\mathbf{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\mathbf{V}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ construites d'après leur produit tensoriel vérifient aussi ces hypothèses.

Avec les conventions précédentes, pour $1<p<+\infty$, on écrit

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\sim\left\|\left[\sum_{\omega\in\Omega^*}\sum_{I\in\mathcal{I}}\Big(|I|^{-\frac{1}{2}}|\langle f,\tilde{\Psi}_I^\omega\rangle|\chi_I(.)\Big)^2\right]^{1/2}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.3.6}$$

et pour tout $s \geq 0$ et $1 < p < +\infty$

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \sim \left\| \left[\sum_{\omega \in \Omega^*} \sum_{I \in \mathcal{I}} \left(|I|^{-\frac{s}{n}-\frac{1}{2}} |\langle f, \tilde{\Psi}_I^\omega \rangle| \chi_I(.) \right)^2 \right]^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.3.7}$$

Puis si $s > n(1/p - 1)$ et pour $0 < p, q \leq +\infty$, on peut voir dans [8, 91] que $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left[\sum_{\omega \in \Omega^*} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (|I|^{-\frac{s}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} |\langle f, \tilde{\Psi}_I^\omega \rangle|)^p \right)^{q/p} \right]^{1/q} < +\infty \tag{1.3.8}$$

• Approximation linéaire

Dans le cas de l'approximation linéaire, l'essentiel des résultats sont donnés par le théorème suivant [23, 54, 88] :

Théorème 1.3.1
Soient $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\mathbf{V}}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ deux analyses multirésolutions biorthogonales de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à support compact, de régularités respectives α et $\tilde{\alpha}$ et dont les bases d'ondelettes biorthogonales associées ont respectivement $\lfloor \tilde{\alpha} \rfloor + 1$ et $\lfloor \alpha \rfloor + 1$ moments nuls.

(i) *La propriété de densité donne :*

$$\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \lim_{j \to +\infty} \|f - \mathbf{P}_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

(ii) *Si de plus $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, pour $0 \leq s < \alpha$, alors on a :*

$$|\langle f, \tilde{\Psi}^\omega_{j,k} \rangle| \leq C 2^{-jn(\frac{s}{n}+\frac{1}{2})}$$

(iii) *On a l'inégalité de type Jackson pour tout $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, $0 \leq s < \alpha$:*

$$\|f - \mathbf{P}_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-sj} \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

(iv) *Une inégalité de type Bernstein pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, $0 \leq s < \alpha$:*

$$\|\mathbf{P}_j(f)\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{js} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(vi) *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et si $\|f - \mathbf{P}_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-js}$ pour tout $j \geq 0$, alors $f \in W^{s-\epsilon,p}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $0 < \epsilon < s$.*

Les résultats (iii) et (iv) du théorème 1.3.1 restent valables si on remplace les espaces de Sobolev par des Besov [22, 23]. On parlera de ces résultats dans le cas de l'approximation non linéaire.

• Approximation non linéaire

Maintenant on définit l'approximation non-linéaire sur une base d'ondelettes quelconque de $L^p(\mathbb{R}^n)$ notée $\{\Psi_I^\omega\}_{\omega\in\Omega^*, I\in\mathcal{I}}$, $1 < p < +\infty$. On considère les ensembles Σ_N suivants :

$$\Sigma_N = \{f = \sum_{I\in\Lambda} d_I \Psi_I^\omega : \ \Lambda \subset \mathcal{I} \ et \ Card(\Lambda) \leq N, d_I \in \mathbb{R}\}, \qquad N \geq 0 \tag{1.3.9}$$

On remarque alors que la famille des ensembles Σ_N n'est pas stable par combinaison linéaire car : $\Sigma_N + \Sigma_N \subset \Sigma_{2N}$, ce qui veut dire les Σ_N ne sont pas des espaces vectoriels. Si $f = \sum \langle f, \tilde{\Psi}_I^\omega \rangle \Psi_I^\omega \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors le meilleur algorithme qui donne l'approximation en Ntermes de f est celui qui garde les N plus grands coefficients d'ondelettes avec la norme $\|.\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. On suppose alors que les coefficients de la série d'ondelettes de f sont ordonnés comme suit :

$$\|\langle f, \tilde{\Psi}_{I_1}^{\omega_1} \rangle \Psi_{I_1}^{\omega_1}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \|\langle f, \tilde{\Psi}_{I_2}^{\omega_2} \rangle \Psi_{I_2}^{\omega_2}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \dots \tag{1.3.10}$$

On notera $\sigma(f, \Sigma_N)_{L^p}$ le taux d'approximation de f en norme $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans Σ_N :

$$\sigma(f, \Sigma_N)_{L^p} := \inf_{g\in\Sigma_N} \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Alors, pour $\sigma(f, \Sigma_N)_{L^p}$, on a une inégalité de type Jackson dans $B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n)$:

Proposition 1.3.1
Soit $\{\Psi_I^\omega\}_{\omega\in\Omega^*, I\in\mathcal{I}}$ une base d'ondelettes à support compact de $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in]1, +\infty[$, de régularité α et dont les ondelettes biorthogonales ont $\lfloor\alpha\rfloor + 1$ moments nuls. Soit $0 < q < p$ et $0 < s < \alpha$ tel que $\frac{s}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Alors pour tout $f \in B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\sigma(f, \Sigma_N)_{L^p} \leq CN^{-\frac{s}{n}} \|f\|_{B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.3.11}$$

On a aussi une estimation du type Bernstein dans ce contexte d'approximation non-linéaire :

Proposition 1.3.2
Soit $\{\Psi_I^\omega\}_{\omega\in\Omega^*, I\in\mathcal{I}}$ une base d'ondelettes à support compact de $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in]1, +\infty[$, de régularité α et dont les ondelettes biorthogonales ont $\lfloor\alpha\rfloor + 1$ moments nuls. Soit $0 < q < p$ et $0 < s < \alpha$ tel que $\frac{s}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Alors,

$$\|f\|_{B^s_{q,q}} \leq CN^{\frac{s}{n}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.3.12}$$

pour tout $f \in \Sigma_N$ et pour $N \geq 1$.

Pour la preuve de ces deux dernières propositions, on peut se référer à [54, 65]. Dans notre cas, on donnera des éléments de preuves dans la partie réservée aux ondelettes à divergence nulle.

Exemple 1.3.1
Pour illustrer l'adaptativité des bases d'ondelettes, on étudie la fonction $f(x) = \sqrt{|\cos(2\pi x)|}$ *sur la base de Haar et de Daubechies à trois moments nuls (exemple tiré de [23]). Sur l'intervalle* $[0, 1]$*,* f *admet deux demi-tangentes à gauche et à droite aux points* $1/4$ *et* $3/4$*, ce qui explique sa non dérivabilité en tout point mais elle est* $1/2$*-Hölderienne. On a choisi* $N = 2^{13}$*. Les courbes d'erreur d'approximation non linéaire en norme* ℓ^2 *donne une décroissance de l'ordre* N^{-1} *et* N^{-3} *dans le cas de la base de Haar et de Daubechies respectivement. On voit de même la localisation des singularités à des échelles plus grossières et la décroissance des coefficients d'ondelettes.*

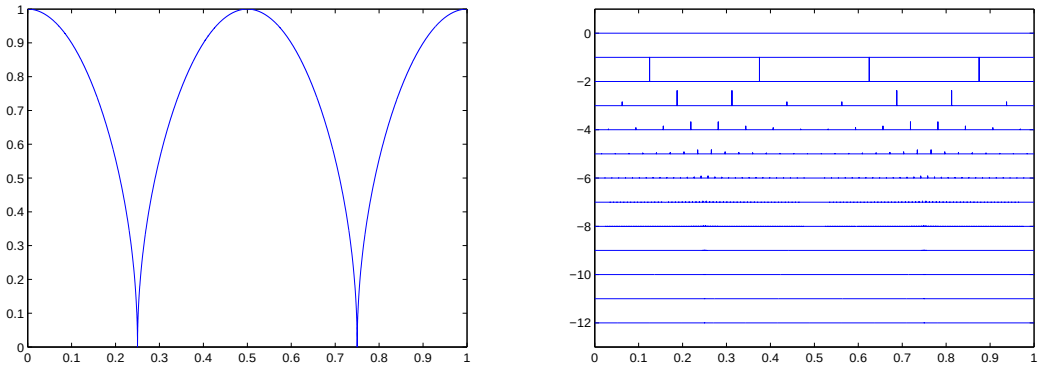

FIGURE 1.5 – Graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{|\cos(2\pi x)|}$ échantillonnée sur $N = 8192$ points (à gauche), ses coefficients d'ondelettes dans la base de Haar (à droite) : la position x en abscisses et la résolution j en ordonnées.

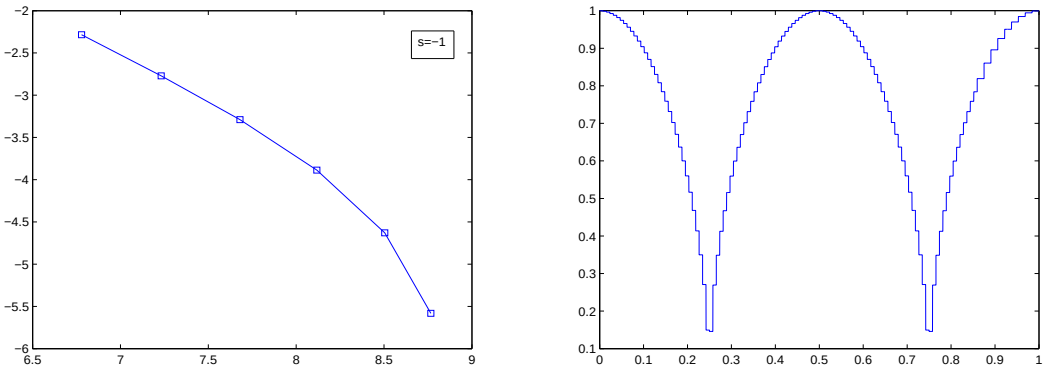

FIGURE 1.6 – Courbe d'erreur ℓ^2 en fonction du nombre N de coefficients d'ondelettes retenus (à gauche) : l'échelle loglog. Fonction reconstituée à partir des 120 plus gros coefficients (à droite). Cas de la base de Haar.

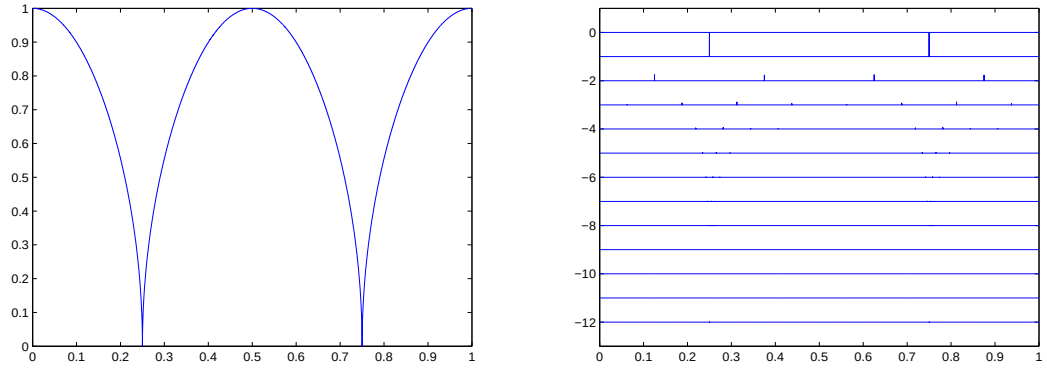

FIGURE 1.7 – Graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{|\cos(2\pi x)|}$ échantillonnée sur $M = 8192$ points (à gauche), ses coefficients d'ondelettes dans la base de Daubechies $r = 3$ (à droite) : position x en abscisse et résolution j en ordonnée.

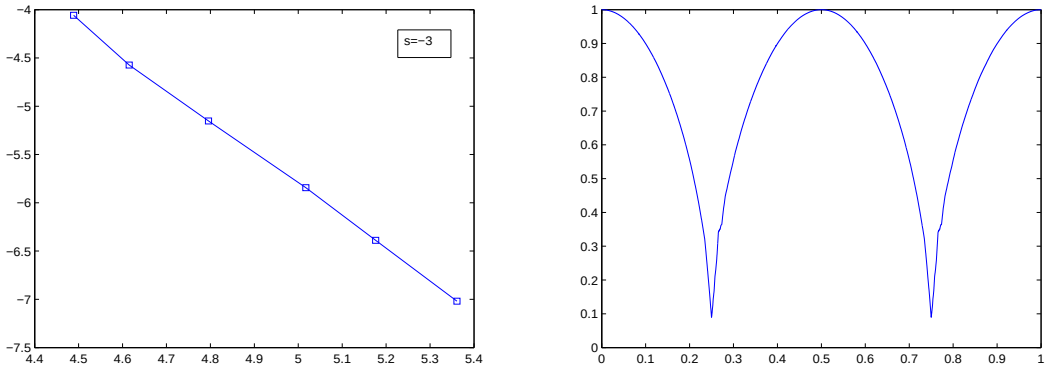

FIGURE 1.8 – Courbe d'erreur ℓ^2 en fonction du nombre N de coefficients d'ondelettes retenus (à gauche) : l'échelle loglog. Fonction reconstituée à partir des 60 plus gros coefficients (à droite). Cas de la base de Daubechies $r = 3$.

1.4 Construction d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle dans cette partie la construction des ondelettes à divergence nulle isotropes à supports compacts de P.G. Lemarié Rieusset [79]. On introduira ensuite la construction des ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul anisotropes de E. Deriaz [40] basée sur la construction originale de P.G. Lemarié Rieusset [79] et celle de K. Urban [115]. Ces ondelettes anisotropes sont plus simples à manipuler et permettent d'analyser le caractère anisotrope de la turbulence dans les simulations numériques [39].

1.4.1 Ondelettes à divergence nulle isotropes

La construction des ondelettes vecteurs à divergence suit deux étapes principales :

(a) La construction d'une analyse multirésolution de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ telle que pour toute fonction $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ à divergence nulle : $\nabla \cdot \vec{f} = 0$, on puisse conserver cette propriété sur les projecteurs multi-échelles $\vec{\mathbf{P}}_j(\vec{f})$ définis par l'AMR :

$$\nabla \cdot \vec{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}}_j(\vec{f}) = 0 \tag{1.4.1}$$

(b) La construction des ondelettes à divergence nulle en prenant le rotationnel d'une combinaison de produit tensoriel des ondelettes 1D bien choisie.

La construction d'analyse multirésolution vérifiant (a) est rendue possible par le fait que si on dérive une fonction d'échelle régulière, cette dérivée s'exprime comme différence de deux fonctions d'échelle. Pour le cas biorthogonal, on rappelle la proposition fondamentale de P.G. Lemarié-Rieusset [79].

Proposition 1.4.1
Soient $\{V_j^1\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j^1\}_{j\in\mathbb{Z}}$ deux analyses multirésolutions biorthogonales de $L^2(\mathbb{R})$ dont les fonctions d'échelle conjuguées $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$ sont à support compact. Soient m_0^1 et $\tilde{m}_0^1$ leurs polynômes de raffinement respectifs. Si la fonction d'échelle $\varphi^1 \in C^{1+\epsilon}$ pour un $\epsilon > 0$, alors :
(i) *La dérivée $\frac{d}{dx}\varphi^1$ peut s'écrire :*

$$\frac{d}{dx}\varphi^1(x) = \varphi^0(x) - \varphi^0(x-1) \tag{1.4.2}$$

où φ^0 est une fonction d'échelle à support compact dont le polynôme de raffinement est donné par :

$$m_0^0(\xi) = \frac{2}{1-e^{-i\xi}} m_0^1(\xi) \tag{1.4.3}$$

(ii) *La primitive* $\int_{-\infty}^{x} \tilde{\varphi}^1(t)dt$ *satisfait :*

$$\int_{x}^{x+1} \tilde{\varphi}^1(t)dt = \tilde{\varphi}^0(x) \tag{1.4.4}$$

avec $\tilde{\varphi}^0$ *une fonction d'échelle à support compact de polynôme de raffinement :*

$$\tilde{m}_0^0(\xi) = \frac{1+e^{i\xi}}{2}\tilde{m}_0^1(\xi) \tag{1.4.5}$$

(iii) φ^0 *et* $\tilde{\varphi}^0$ *sont des fonctions d'échelle conjuguées à supports compacts pour des analyses multirésolutions biorthogonales* $\{V_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *et* $\{\tilde{V}_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$.
De plus, les projecteurs obliques $\mathcal{P}_j^1$ *sur* V_j^1 *suivant la direction de* $(\tilde{V}_j^1)^\perp$, *et* $\mathcal{P}_j^0$ *sur* V_j^0 *suivant la direction* $(\tilde{V}_j^0)^\perp$ *vérifient :*

$$\frac{d}{dx} \circ \mathcal{P}_j^1 = \mathcal{P}_j^0 \circ \frac{d}{dx} \tag{1.4.6}$$

(iv) *Les ondelettes biorthogonales* ψ^0 *et* $\tilde{\psi}^0$ *associées à* φ^0 *et à* $\tilde{\varphi}^0$ *satisfont :*

$$\psi^0(x) = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\psi^1(x) \qquad \textit{et} \qquad \tilde{\psi}^0(x) = -4\int_{-\infty}^{x} \tilde{\psi}^1(t)dt \tag{1.4.7}$$

Preuve :
Nous rappelons seulement la preuve du point (iii) compte tenu de son importance [79]. Le reste se démontre dans le domaine de Fourier. Par changement d'échelle, il suffit de démontrer qu'on a bien : $\frac{d}{dx} \circ \mathcal{P}_0^1 = \mathcal{P}_0^0 \circ \frac{d}{dx}$.
Or,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\mathcal{P}_0^1(f) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_k^1\rangle \varphi_k^1\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_k^1\rangle \frac{d}{dx}\varphi_k^1 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_k^1\rangle (\varphi_k^0 - \varphi_{k+1}^0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_k^1 - \tilde{\varphi}_{k-1}^1\rangle \varphi_k^0 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, -\frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_k^0\rangle \varphi_k^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{d}{dx}f, \tilde{\varphi}_k^0\rangle \varphi_k^0 = \mathcal{P}_0^0(\frac{d}{dx}f)
\end{aligned}$$

■

Les équations (1.4.3) et (1.4.5) donnent les relations entre les filtres primaires et dérivés dans le domaine de Fourier. Mais il est plus simple de calculer les nouveaux filtres de φ^0 et $\tilde{\varphi}^0$ sans passer par Fourier, en utilisant le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.1
Soit φ^1 une fonction d'échelle à support compact $[0, L]$. La fonction φ^0 définie par

$$\varphi^1(x) = \int_{x-1}^{x} \varphi^0(t)dt$$

est une fonction d'échelle de support $[0, L-1]$ et les filtres respectifs associés $\{h_k^1\}$ et $\{h_k^0\}$ sont reliés par :

$$h_k^1 = \begin{cases} \frac{h_0^0}{2} & k = 0 \\ \frac{h_{k-1}^0 + h_k^0}{2} & k = 1, \ldots, L-1 \\ \frac{h_{L-1}^0}{2} & k = L \end{cases}$$

Preuve :
La relation sur les supports est une conséquence de la définition. La relation entre les filtres vient d'un calcul direct. Si on injecte la relation à deux échelles satisfaite par φ^0 :

$$\varphi^0(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k^0 \, \varphi^0(2t - k)$$

on obtient

$$\varphi^1(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{h_k^0}{2} \left(\int_{2x-k-1}^{2x-k} \varphi^0(t)dt + \int_{2x-k-2}^{2x-k-1} \varphi^0(t)dt \right)$$

Ce qui donne :

$$\varphi^1(x) = \sqrt{2}\frac{h_0^0}{2}\varphi^1(2x) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{L-1} \frac{h_{k-1}^0 + h_k^0}{2}\varphi^1(2x-k) + \sqrt{2}\frac{h_{L-1}^0}{2}\varphi^1(2x-L)$$

d'où l'algorithme. ■

De même, on déduit un algorithme similaire entre les fonctions d'échelle biorthogonales $\tilde{\varphi}^1$ et $\tilde{\varphi}^0$.

(a) Analyse multirésolution préservant la divergence nulle

A l'aide de la proposition 1.4.1, on construit une analyse multirésolution qui conserve la propriété $(1.4.1)$ de divergence nulle sur les projecteurs multi-échelles. Cette construction se fait de la manière suivante :
Soient $\{V_j^1, \tilde{V}_j^1\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{V_j^0, \tilde{V}_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ deux paires d'analyses multirésolution biorthogonales de

$L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés de la proposition 1.4.1. Pour $1 \leq i \leq n$, $j \in \mathbb{Z}$, on définit les espaces $\mathbf{V}_j^i$ et $\tilde{\mathbf{V}}_j^i$ par :

$$\mathbf{V}_j^i = V_j^{\delta_{1,i}} \otimes \cdots \otimes V_j^{\delta_{n,i}} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathbf{V}}_j^i = \tilde{V}_j^{\delta_{1,i}} \otimes \cdots \otimes \tilde{V}_j^{\delta_{n,i}} \tag{1.4.8}$$

$\delta_{k,i}$ désigne le symbole de Kronecker. Il est clair que, à i fixé, les espaces $\{\mathbf{V}_j^i, \tilde{\mathbf{V}}_j^i\}_{j\in\mathbb{Z}}$ forment une analyse multirésolution biorthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n)$. De même on définit leurs projecteurs obliques respectifs $\mathbf{P}_j^i$ et $\tilde{\mathbf{P}}_j^i$ par :

$$\mathbf{P}_j^i = \mathcal{P}_j^{\delta_{1,i}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_j^{\delta_{n,i}} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathbf{P}}_j^i = \tilde{\mathcal{P}}_j^{\delta_{1,i}} \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathcal{P}}_j^{\delta_{n,i}} \tag{1.4.9}$$

Pour $\omega \in \Omega^*$, les espaces d'ondelettes $\{\mathbf{W}_j^{i,\omega}, \tilde{\mathbf{W}}_j^{i,\omega} \ : \ 1 \leq i \leq n\}_{j\in\mathbb{Z}}$ correspondent à :

$$\mathbf{W}_j^{i,\omega} = W_j^{\delta_{1,i},\,\omega_1} \otimes \cdots \otimes W_j^{\delta_{n,i},\,\omega_n} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathbf{W}}_j^{i,\omega} = \tilde{W}_j^{\delta_{1,i},\,\omega_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{W}_j^{\delta_{n,i},\,\omega_n} \tag{1.4.10}$$

où

$$W_j^{\delta_{j,i},\,\omega_k} = V_j^{\delta_{j,i}}, \text{ si } \omega_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{W}_j^{\delta_{j,i},\,\omega_k} = \tilde{V}_j^{\delta_{j,i}}, \text{ si } \omega_k = 0 \tag{1.4.11}$$

$$W_j^{\delta_{j,i},\,\omega_k} = W_j^{\delta_{j,i}}, \text{ si } \omega_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{W}_j^{\delta_{j,i},\,\omega_k} = \tilde{W}_j^{\delta_{j,i}}, \text{ si } \omega_k = 1 \tag{1.4.12}$$

et on note $\{\Psi_{j,k}^{i,\omega}, \tilde{\Psi}_{j,k}^{i,\omega} \ : \ 1 \leq i \leq n\}_{\omega\in\Omega^*, j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n}$ les ondelettes associées et $\{\mathbf{Q}_j^{i,\omega}, \tilde{\mathbf{Q}}_j^{i,\omega} \ : \ 1 \leq i \leq n\}_{\omega\in\Omega^*, j\in\mathbb{Z}}$ les projecteurs obliques associés à ces espaces.

On construit alors deux analyses multirésolution vectorielles biorthogonales de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$, qu'on note $\{\vec{\mathbf{V}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{\vec{\tilde{\mathbf{V}}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$, avec :

$$\vec{\mathbf{V}}_j = \mathbf{V}_j^1 \times \cdots \times \mathbf{V}_j^n \qquad \text{et} \qquad \vec{\tilde{\mathbf{V}}}_j = \tilde{\mathbf{V}}_j^1 \times \cdots \times \tilde{\mathbf{V}}_j^n \tag{1.4.13}$$

et on associe de manière naturelle aux espaces $\vec{\mathbf{V}}_j$ et $\vec{\tilde{\mathbf{V}}}_j$ les projecteurs obliques suivants :

$$\vec{\mathbf{P}}_j = (\mathbf{P}_j^1, \ldots, \mathbf{P}_j^n) \qquad \text{et} \qquad \vec{\tilde{\mathbf{P}}}_j = (\tilde{\mathbf{P}}_j^1, \ldots, \tilde{\mathbf{P}}_j^n) \tag{1.4.14}$$

Proposition 1.4.2 *[79]*
Les analyses multirésolution vectorielle $\{\vec{\mathbf{V}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ et scalaire $\{\mathbf{V}_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifient :

$$\nabla \cdot (\vec{\mathbf{P}}_j(\vec{f})) = \mathbf{P}_j^0(\nabla.\vec{f}) \tag{1.4.15}$$

avec $\mathbf{P}_j^0$ défini par (1.4.9) : $\mathbf{P}_j^0 = \mathcal{P}_j^0 \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_j^0$.

Cette proposition est immédiate grâce à la formule de commutation (1.4.6). Dans $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ on définit l'espace $L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$ de fonctions à divergence nulle :

$$L^2_{div}(\mathbb{R}^n) = \{\vec{f} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n : \nabla.\vec{f} = 0\} \tag{1.4.16}$$

Alors les espaces fermés $\vec{\mathbf{V}}_j \cap L^2_{div}(\mathbb{R}^n)^n$ et $\vec{\mathbf{P}}_j[L^2_{div}(\mathbb{R}^n)]$ coïncident. En particulier si $\vec{f} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$, les projections $\vec{\mathbf{P}}_j(\vec{f})$ approchent $\vec{f}$ dans $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ quand le paramètre j devient grand. Ainsi on a construit une analyse multirésolution de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ qui conserve la propriété de divergence nulle :

$$\forall\ \vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n),\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}}_j(\vec{f}) = 0 \tag{1.4.17}$$

(b) **Ondelettes à divergence nulle isotropes**

Pour $\omega \in \Omega^*$, on introduit les projecteurs obliques $\vec{\mathbf{Q}}^\omega_j$ sur l'espace d'ondelettes vectorielles $\vec{\mathbf{W}}_j$ associé à $\vec{\mathbf{V}}_j$, définis par :

$$\vec{\mathbf{Q}}^\omega_j(\vec{f}) = (\mathbf{Q}^{1,\omega}_j(f_1), \ldots, \mathbf{Q}^{n,\omega}_j(f_n)) \tag{1.4.18}$$

de sorte que :

$$\vec{\mathbf{P}}_{j+1} = \vec{\mathbf{P}}_j + \sum_{\omega \in \Omega^*} \vec{\mathbf{Q}}^\omega_j \tag{1.4.19}$$

et l'espace $L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$ se décompose sur les sous-espaces $\vec{\mathbf{Q}}^\omega_j[L^2_{div}(\mathbb{R}^n)]$, $j \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.4.1
(i) *Il existe* $(n-1)(2^n-1)$ *fonctions à divergence nulle* $\Psi^{div}_{\omega,i}$ *de* $L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$ *à support compact telles qu'on ait de manière unique :*

$$\forall \vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n), \vec{f} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega^*_n} \sum_{,k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \vec{f}/\tilde{\Psi}^{div}_{\omega,i,j,k}\rangle \Psi^{div}_{\omega,i,j,k} \tag{1.4.20}$$

(ii) *Pour une constante* $C > 0$ *indépendante de* $\vec{f}$,

$$\frac{1}{C}\|\vec{f}\|_{L^2_{div}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega^*_n} \sum_{,k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{i=1}^{n-1} |\langle \vec{f}/\tilde{\Psi}^{div}_{\omega,i,j,k}\rangle|^2 \right)^{1/2} \leq C\|\vec{f}\|_{L^2_{div}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.4.21}$$

(iii) *Si* $\varphi^1 \in C^{s+1+\epsilon}$ *pour un* $s > 0$, *alors :*

$$\vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n) \cap (H^s(\mathbb{R}^n))^n \Leftrightarrow \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega^*_n} \sum_{,k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{i=1}^{n-1} (1+4^{js})|\langle \vec{f}/\tilde{\Psi}^{div}_{\omega,i,j,k}\rangle|^2 < +\infty \tag{1.4.22}$$

Preuve :
Pour démontrer le point (i), il suffit d'exhiber une base de Riesz des espaces $\vec{\mathbf{Q}}^\omega_j[L^2_{div}(\mathbb{R}^n)]$ et

cela se fait par construction [79]. On choisit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\omega_{i_0} = 1$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$, on construit les fonctions $\Psi^{div}_{\omega,i} = (\Psi^{div}_{\omega,i,1}, \ldots, \Psi^{div}_{\omega,i,n})$ comme suit

$$\Psi^{div}_{\omega,i,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \notin \{i, i_0\} \\ \Psi^{i,\omega} & \text{si } \ell = i \\ \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n & \text{si } \ell = i_0 \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \eta_j = \psi^{0\ \omega_j} & \text{si } j \neq i, i_0 \\ \eta_{i_0} = -\frac{1}{4}\psi^1 \\ \eta_i = \frac{d}{dx}(\psi^{1\ \omega_i}) \end{cases}$$

Il est évident que les $\Psi^{div}_{\omega,i}$ sont à divergence nulle et que leurs translatées et dilatées $\{\Psi^{div}_{\omega,i,j,k} : 1 \leq i \leq n-1\}_{\omega\in\Omega^*, j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n}$ engendrent des bases de Riesz pour les espaces $\vec{\mathbf{Q}}^{\omega}_j[(L^2_{div}(\mathbb{R}^n)^n)]$. Pour construire les fonctions $\tilde{\Psi}^{div}_{\omega,i}$ biorthogonales aux ondelettes à divergence nulle $\Psi^{div}_{\omega,i}$, il suffit de remplacer les fonctions φ et ψ par leurs biorthogonales $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ dans la construction des $\Psi^{div}_{\omega,i}$ précédente.

Le point (ii) se démontre composante par composante et selon chaque direction, et est classique dans la théorie des ondelettes.

Pour le point (iii), nous allons donner une preuve qui est plus générale que celle donnée par P.G. Lemarié-Rieusset [79], qui s'est limité aux indices s entiers. De plus, on montre que les dérivées fractionnaires de ces ondelettes à divergence nulle sont aussi à divergence nulle. La preuve est constructive. Pour $1 \leq i \leq n-1$, on définit les fonctions $\{\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}\}_{\omega\in\Omega^*, j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n}$ par :

$$\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}(x) = 2^{nj/2}\Psi^{s,div}_{\omega,i}(2^j x - k) \qquad \text{avec} \qquad \widehat{\Psi^{s,div}_{\omega,i}}(\xi) = |\xi|^s \widehat{\Psi^{div}_{\omega,i}}(\xi)$$

Les fonctions $\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}$ sont bien définies, appartiennent à $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ car, par hypothèse, les $\Psi^{div}_{\omega,i,j,k}$ sont dans $(H^s(\mathbb{R}^n))^n$ et vérifient la propriété de divergence nulle :

$$\xi.\widehat{\Psi^{s,div}_{\omega,i}}(\xi) = \xi.|\xi|^s\widehat{\Psi^{div}_{\omega,i}}(\xi) = |\xi|^s\xi.\widehat{\Psi^{div}_{\omega,i}}(\xi) = 0$$

Par définition, on a $\widehat{\Psi^{s,div}_{\omega,i}}(0) = 0$, donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}(x)dx = 0$$

Par Parseval, on construit les duales $\tilde{\Psi}^{-s,div}_{\omega,i}$ de manière analogue à partir des $\tilde{\Psi}^{div}_{\omega,i}$ puisque :

$$\langle \Psi^{s,div}_{\omega,i} / \tilde{\Psi}^{-s,div}_{\omega,j} \rangle = \langle \Psi^{div}_{\omega,i} / \tilde{\Psi}^{div}_{\omega,j} \rangle = \delta_{i,j}$$

De plus, cette famille de fonctions est une partie totale de $L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$. Pour le voir, soit $\mathbf{V} = \mathrm{Vect}\{\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}\}_{\omega\in\Omega^*, j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n}$ et $\tilde{\mathbf{V}}$ l'espace biorthogonal correspondant. Par définition de la biorthogonalité, on a :

$$(L^2(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{V} \bigoplus \tilde{\mathbf{V}}^{\perp}$$

Soit $\vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\vec{f}$ soit orthogonale à $\mathbf{V}$, alors : $\langle \vec{f}/\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}\rangle = 0$. Ce qui veut dire que la projection biorthogonale de $\vec{f}$ sur $\tilde{\mathbf{V}}$ est nulle, donc $\vec{f} \in \tilde{\mathbf{V}}^{\perp}$ et on en déduit que $\vec{f} \in \mathbf{V}^{\perp} \cap \tilde{\mathbf{V}}^{\perp}$. De plus, la distribution $(-\Delta)^{s/2}\vec{f}$ est dans $(H^{-s}(\mathbb{R}^n))^n$ (comme $\vec{f} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$, il suffit de remarquer que $(1+|\xi|^2)^{-s}|\xi|^{2s} < 1$) et elle vérifie :

$$\langle \vec{f}/\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (-\Delta)^{s/2}\vec{f}/\Psi^{div}_{\omega,i,j,k}\rangle = 0 \tag{1.4.23}$$

Comme les $\Psi^{div}_{\omega,i,j,k}$ forment une base de $L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$, en prenant $\vec{f}$ comme fonction test, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{\vec{f}(\xi)}|^2 d\xi = 0 \tag{1.4.24}$$

ce qui veut dire $\vec{f} = \vec{0}$. Pour la suite, on aura besoin du Lemme suivant (Lemme de vaguelettes) :

Lemme 1.4.1 *[79]*
Soit $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, de classe $\mathcal{C}^{\epsilon}$ pour un $\epsilon > 0$, tel que $\int_{\mathbb{R}} \theta(x)dx = 0$; alors il existe une constante $C(\theta) > 0$ telle que :

$$\forall\, (\lambda_{j,k}) \in \ell^2(\mathbb{Z}^2),\ \|\sum_{j,k} \lambda_{j,k}\theta_{j,k}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\theta)\|\lambda_{j,k}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)} \tag{1.4.25}$$

Les propriétés des fonctions $\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}$ citées plus haut font que ces fonctions vérifient les hypothèses du lemme 1.4.1 exceptée la condition d'être $\mathcal{C}^{\epsilon}$. Pour avoir cette dernière condition, on utilise le théorème d'injection de Sobolev : $H^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{m-n/2}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $r > 0$, on a :

$$\|\Psi^{s,div}_{\omega,i}\|_{(H^{r-s}(\mathbb{R}^n))^n} \leq \|\Psi^{div}_{\omega,i}\|_{(H^r(\mathbb{R}^n))^n}$$

Alors, pour $\epsilon = r - s - \frac{n}{2} > 0$, les fonctions $\Psi^{s,div}_{\omega,i}$ sont dans $\mathcal{C}^{\epsilon}$. En utilisant le lemme 1.4.1 précédent, on déduit que :

$$\|\sum \alpha_{\omega,i,j,k}\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}\|_{(L^2(\mathbb{R}^n))^n} \leq C(\psi)\left(\sum |\alpha_{\omega,i,j,k}|^2\right)^{1/2} \tag{1.4.26}$$

et un argument de dualité donne :

$$\|\sum \alpha_{\omega,i,j,k}\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}\|_{(L^2(\mathbb{R}^n))^n} \sim \left(\sum |\alpha_{\omega,i,j,k}|^2\right)^{1/2} \tag{1.4.27}$$

Puisque les $\Psi^{div}_{\omega,i,j,k}$ forment aussi une base de Riesz, l'équation (1.4.27) entraîne :

$$\|\sum \alpha_{\omega,i,j,k}\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}\|_{(L^2(\mathbb{R}^n))^n} \sim \|\sum \alpha_{\omega,i,j,k}\Psi^{div}_{\omega,i,j,k}\|_{(L^2(\mathbb{R}^n))^n}$$

Pour $s \geq 0$, la norme de $\vec{f}$ dans $(H^s(\mathbb{R}^n))^n$ est équivalente à $\|\vec{f}\|_{(L^2(\mathbb{R}^n))^n} + \|(-\Delta)^{s/2}\vec{f}\|_{(L^2(\mathbb{R}^n))^n}$ et que $(-\Delta)^{s/2}\sum \alpha_{\omega,i,j,k}\Psi^{div}_{\omega,i,j,k} = \sum \alpha_{\omega,i,j,k}2^{js}\Psi^{s,div}_{\omega,i,j,k}$, alors (iii) découle directement de l'évaluation de ces deux dernières normes. ■

Remarque 1.4.1
La dernière partie de la preuve est une adaptation de la preuve générale de Y. Meyer [91] pour caractériser la norme des espaces de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ d'une série d'ondelettes.

1.4.2 Ondelettes à divergence et ondelettes à rotationnel nul anisotropes

Les bases d'ondelettes à divergence nulle anisotropes introduites dans [40] sont très simples à utiliser en pratique. Dans la suite de ce travail, tous les algorithmes numériques seront fondés sur l'utilisation de ces bases anisotropes. Dans ce cadre on dispose de moins de fonctions analysantes.

Ondelettes à divergence nulle anisotropes

On garde les mêmes notations que celles de la section précédente. Dans l'analyse multirésolution formée par $\{\vec{\mathbf{V}}_j\}_{j\in Z}$ où :

$$\vec{\mathbf{V}}_j = \mathbf{V}_j^1 \times \cdots \times \mathbf{V}_j^n, \tag{1.4.28}$$

il a été prouvé dans [39,40] qu'on pouvait construire $n-1$ ondelettes à divergence nulle anisotropes notées $\{\Psi^{div}_{i,\mathbf{j},\mathbf{k}}\}_{i=1,n-1}$. Ces ondelettes sont telles que pour toute fonction $\vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique suite réelle notée $\{d^{div}_{i,\mathbf{j},\mathbf{k}}\}_{i=1,n-1}$ telle que :

$$\vec{f} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \sum_{i=1}^{n-1} d^{div}_{i,\mathbf{j},\mathbf{k}} \Psi^{div}_{i,j,k} \tag{1.4.29}$$

De même, on peut construire $n-1$ fonctions d'échelle notées $\{\Phi^{div}_{i,j,\mathbf{k}}\}_{i=1,n-1}$ telles que :

$$\vec{\mathbf{P}}^{div}_j(\vec{f}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{i=1}^{n-1} c^{div}_{i,j,\mathbf{k}} \Phi^{div}_{i,j,\mathbf{k}} \tag{1.4.30}$$

Ces fonctions d'échelle et ondelettes à divergence nulle anisotropes sont données par leurs formules analytiques suivantes :

• Pour $n = 2$ et $\mathbf{k},\ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2$:

$$\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} \varphi^1_{j,k_1} \otimes (\varphi^1_{j,k_2})' \\ -(\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \varphi^1_{j,k_2} \end{array} \right. \tag{1.4.31}$$

et

$$\Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} 2^{j_2}\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \\ -2^{j_1}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \end{array} \right. \tag{1.4.32}$$

Ces fonctions sont dans l'analyse multirésolution de $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$ formée par les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j = (V^1_j \otimes V^0_j) \times (V^0_j \otimes V^1_j)$, ce qui facilite les calculs des coefficients.

• Pour $n = 3$ et $\mathbf{k},\ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3$:

$$\Phi^{div}_{1,j,\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} \varphi^1_{j,k_1} \otimes (\varphi^1_{j,k_2})' \otimes (\varphi^1_{j,k_3})' \\ -(\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \varphi^1_{j,k_2} \otimes (\varphi^1_{j,k_3})' \\ 0 \end{array} \right. \tag{1.4.33}$$

$$\Phi^{div}_{2,j,\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} 0 \\ (\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \varphi^1_{j,k_2} \otimes (\varphi^1_{j,k_3})' \\ -(\varphi^1_{j,k_1})' \otimes (\varphi^1_{j,k_2})' \otimes \varphi^1_{j,k_3} \end{array} \right. \tag{1.4.34}$$

$$\Phi^{div}_{3,j,\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} -\varphi^1_{j,k_1} \otimes (\varphi^1_{j,k_2})' \otimes (\varphi^1_{j,k_3})' \\ 0 \\ (\varphi^1_{j_1,k_1})' \otimes (\varphi^1_{j_2,k_2})' \otimes \varphi^1_{j_3,k_3} \end{array} \right. \tag{1.4.35}$$

et

$$\Psi^{div}_{1,\mathbf{j},\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} 2^{j_2}\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \otimes \psi^0_{j_3,k_3} \\ -2^{j_1}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \otimes \psi^0_{j_3,k_3} \\ 0 \end{array} \right. \tag{1.4.36}$$

$$\Psi^{div}_{2,\mathbf{j},\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} 0 \\ 2^{j_3}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \otimes \psi^0_{j_3,k_3} \\ -2^{j_2}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \otimes \psi^1_{j_3,k_3} \end{array} \right. \tag{1.4.37}$$

$$\Psi^{div}_{3,\mathbf{j},\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} -2^{j_3}\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \otimes \psi^0_{j_3,k_3} \\ 0 \\ 2^{j_1}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \otimes \psi^1_{j_3,k_3} \end{array} \right. \tag{1.4.38}$$

De même, ces fonctions sont dans l'analyse multirésolution de $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$ formée par les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j = (V^1_j \otimes V^0_j \otimes V^0_j) \times (V^0_j \otimes V^1_j \otimes V^0_j) \times (V^0_j \otimes V^0_j \otimes V^1_j)$, ce qui rend encore facile les calculs des coefficients sur ces espaces. Cette construction se généralise facilement à des dimensions supérieures avec :

$$\Phi^{div}_{i,j,\mathbf{k}} := \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{ligne } i \ \rightarrow \\ \text{ligne } i+1 \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \cdots \otimes (\varphi^1_{j,k_{i-1}})' \otimes \varphi^1_{j,k_i} \otimes (\varphi^1_{j,k_{i+1}})' \otimes \cdots \otimes (\varphi^1_{j,k_n})' \\ -(\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \cdots \otimes (\varphi^1_{j,k_i})' \otimes \varphi^1_{j,k_{i+1}} \otimes (\varphi^1_{j,k_{i+2}})' \otimes \cdots \otimes (\varphi^1_{j,k_n})' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right. \tag{1.4.39}$$

et

$$\Psi^{div}_{i,\mathbf{j},\mathbf{k}} := \begin{array}{c} \text{ligne } i \ \rightarrow \\ \text{ligne } i+1 \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2^{j_{i+1}}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \cdots \otimes \psi^0_{j_{i-1},k_{i-1}} \otimes \psi^1_{j_i,k_i} \otimes \psi^0_{j_{i+1},k_{i+1}} \otimes \cdots \otimes \psi^0_{j_n,k_n} \\ -2^{j_i}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \cdots \otimes \psi^0_{j_i,k_i} \otimes \psi^1_{j_{i+1},k_{i+1}} \otimes \psi^0_{j_{i+2},k_{i+2}} \otimes \ldots \psi^0_{j_n,k_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right. \tag{1.4.40}$$

Pour construire ces fonctions, on s'est simplement servi du fait que la divergence du rotationnel d'un champ de vecteur si elle existe est nulle. On tient aussi à préciser que ces bases sont des bases biorthogonales.

Remarque 1.4.2
Une des propriétés de cette construction d'ondelettes à divergence nulle est qu'en dimension deux ou trois, il est facile de voir que les fonctions d'échelle et ondelettes des analyses multirésolution duales $(\tilde{V}^1_j \otimes \tilde{V}^0_j) \times (\tilde{V}^0_j \otimes \tilde{V}^1_j)$ *et* $(\tilde{V}^1_j \otimes \tilde{V}^0_j \otimes \tilde{V}^0_j) \times (\tilde{V}^0_j \otimes \tilde{V}^1_j \otimes \tilde{V}^0_j) \times (\tilde{V}^0_j \otimes \tilde{V}^0_j \otimes \tilde{V}^1_j)$ *sont à rotationnel nul. Par exemple en dimension deux, la définition de cette fonction donne :*

$$\vec{\tilde{\Psi}}(x,y) := \left| \begin{array}{l} \tilde{\psi}^1(x)\tilde{\psi}^0(y) \\ \tilde{\psi}^0(x)\tilde{\psi}^1(y) \end{array} \right.$$

et comme

$$\frac{d}{dx}\tilde{\psi}^0(x) = -4\tilde{\psi}^1(x),$$

on retrouve finalement :

$$\mathbf{rot}\vec{\tilde{\Psi}}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[\tilde{\psi}^0(x)\tilde{\psi}^1(y)] - \frac{\partial}{\partial y}[\tilde{\psi}^1(x)\tilde{\psi}^0(y)] = 0$$

de même en dimension trois on retrouve :

$$\vec{\tilde{\Psi}} = \left| \begin{array}{l} \tilde{\psi}^1(x)\tilde{\psi}^0(y)\tilde{\psi}^0(z) \\ \tilde{\psi}^0(x)\tilde{\psi}^1(y)\tilde{\psi}^0(z) \\ \tilde{\psi}^0(x)\tilde{\psi}^0(y)\tilde{\psi}^1(z) \end{array} \right. , \quad \mathbf{rot}\ \vec{\tilde{\Psi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant les ondelettes duales, on aboutit à un algorithme rapide pour calculer la transformée en ondelettes à divergence nulle, dans le cas de l'analyse des champs de vecteurs à divergence nulle. Et on peut faire de même pour les champs à rotationnel nul. □

Exemple 1.4.1
On trace comme exemple les champs de vecteurs de la fonction d'échelle à divergence nulle $\mathbf{rot}\ [\varphi^1 \otimes \varphi^1]$ *et de l'ondelette associée* $\mathbf{rot}\ [\psi^1 \otimes \psi^1]$*, avec* φ^1 *le B-Spline de degré* 3*.*

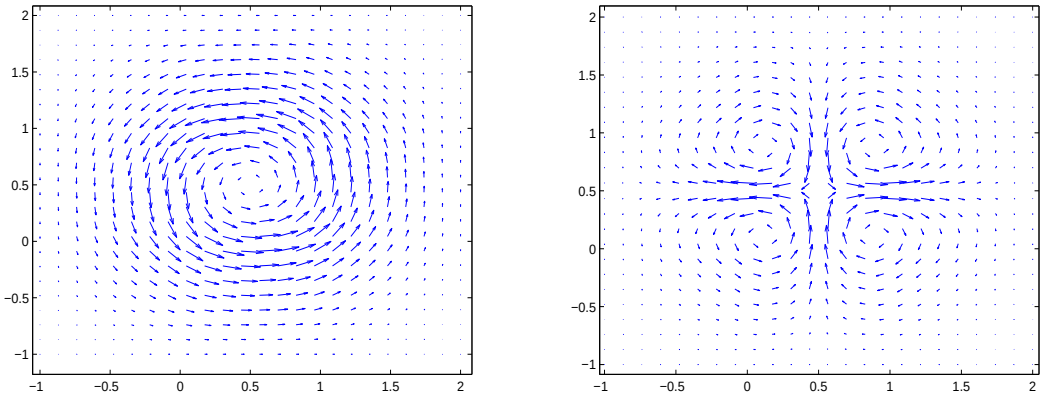

FIGURE 1.9 – Champs de vecteurs de la fonction d'échelle à divergence nulle $\mathbf{rot}\ [\varphi^1 \otimes \varphi^1]$ (à gauche) et de l'ondelette associée $\mathbf{rot}\ [\psi^1 \otimes \psi^1]$ (à droite), construites à partir des splines biorthogonales à trois moments nuls.

Ondelettes à rotationnel nul anisotropes

On va se restreindre seulement aux cas où $n = 2$ et $n = 3$ car ce sont ces cas qui seront utilisés en pratique. Comme en (1.4.16), on définit l'espace des fonctions à rotationnel nul $L^2_{rot}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$L^2_{rot}(\mathbb{R}^n) = \{\vec{f} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n \ : \ \mathbf{rot}\ \vec{f} = 0\} \tag{1.4.41}$$

Alors pour construire une analyse multirésolution de $L^2_{rot}(\mathbb{R}^n)$, il suffit de considérer le gradient des analyses multirésolution formées par $\{V^1_j \otimes V^1_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ si $n = 2$ et $\{V^1_j \otimes V^1_j \otimes V^1_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ si $n = 3$.

• Pour $n = 2$ et $\mathbf{k},\ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2$:

$$\Phi^{rot}_{j,\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} (\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \varphi^1_{j,k_2} \\ \varphi^1_{j,k_1} \otimes (\varphi^1_{j,k_2})' \end{array} \right. \tag{1.4.42}$$

et

$$\Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} 2^{j_1}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \\ 2^{j_2}\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \end{array} \right. \tag{1.4.43}$$

• Pour $n = 3$ et $\mathbf{k},\ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3$:

$$\Phi^{rot}_{j,\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} (\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \varphi^1_{j,k_2} \otimes \varphi^1_{j,k_3} \\ \varphi^1_{j,k_1}(x)(\varphi^1_{j,k_2})' \otimes \varphi^1_{j,k_3} \\ \varphi^1_{j,k_1} \otimes \varphi^1_{j,k_2} \otimes (\varphi^1_{j,k_3})' \end{array} \right. \tag{1.4.44}$$

et

$$\Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \left| \begin{array}{l} 2^{j_1}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \otimes \psi^1_{j_3,k_3} \\ 2^{j_2}\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \otimes \psi^1_{j_3,k_3} \\ 2^{j_3}\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \otimes \psi^0_{j_3,k_3} \end{array} \right.$$

De même, si $n > 3$ on généralise cette construction par :

$$\Phi^{rot}_{j,\mathbf{k}} = \nabla[\varphi^1_{j,k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^1_{j,k_n}] \text{ et } \Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \nabla[\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \cdots \otimes \psi^1_{j_n,k_n}] \tag{1.4.45}$$

Exemple 1.4.2
On reprend les fonctions de l'exemple 1.4.1. On trace le champ de vecteur de $\nabla[\varphi^1 \otimes \varphi^1]$ *et* $\nabla[\psi^1 \otimes \psi^1]$.

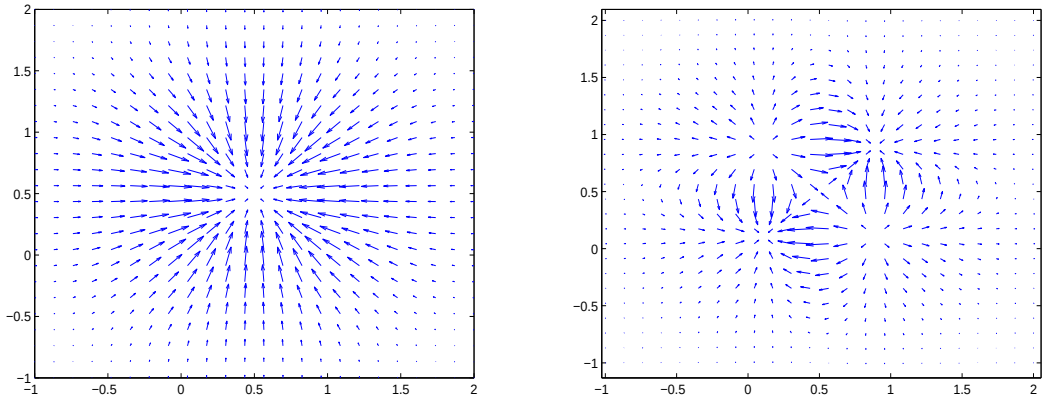

FIGURE 1.10 – Champs de vecteurs de la fonction d'échelle à rotationnel nul $\nabla[\varphi^1 \otimes \varphi^1]$ (à gauche) et de l'ondelette associée $\nabla[\psi^1 \otimes \psi^1]$ (à droite), construites à partir des splines biorthogonales à trois moments nuls.

1.4.3 Algorithmes rapides de décomposition et de reconstruction

Nous allons décrire ici comment calculer la décomposition en ondelettes à divergence nulle anisotropes d'un champ de vecteur $\mathbf{u} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$. La démarche que nous allons suivre conduit à des résultats identiques à ceux de E. Deriaz [39]. À la différence de [39], nous allons nous servir de fonctions biorthogonales pour déduire les algorithmes de décomposition ou de reconstruction. Nous traiterons seulement le cas $n = 2$, la généralisation à des dimensions supérieures étant immédiate. L'algorithme décrit ci-dessous permettra l'analyse de champs turbulents et la mesure de la qualité de compression fournie par les ondelettes à divergence nulle.

On considère les fonctions d'échelle à divergence nulle $\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$ et les ondelettes à divergence nulle $\Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ normalisées suivantes :

$$\Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} \left| \begin{array}{l} 2^{j_2}\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \\ -2^{j_1}\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Phi^{div}_{j,\mathbf{k}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{l} \varphi^1_{j,k_1} \otimes (\varphi^1_{j,k_2})' \\ -(\varphi^1_{j,k_1})' \otimes \varphi^1_{j,k_2} \end{array} \right. \tag{1.4.46}$$

On démontre alors la proposition suivante :

Proposition 1.4.3
Soient les fonctions $\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}}$ et les ondelettes $\tilde{\Psi}^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ définies par :

$$\tilde{\Psi}^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} \left| \begin{array}{l} 2^{j_2}\tilde{\psi}^1_{j_1,k_1} \otimes \tilde{\psi}^0_{j_2,k_2} \\ -2^{j_1}\tilde{\psi}^0_{j_1,k_1} \otimes \tilde{\psi}^1_{j_2,k_2} \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{l} \tilde{\varphi}^1_{j,k_1} \otimes \tilde{\gamma}_{j,k_2} \\ -\tilde{\gamma}_{j,k_1} \otimes \tilde{\varphi}^1_{j,k_2} \end{array} \right. \tag{1.4.47}$$

où $\tilde{\gamma}_{j,k}$ est la duale $L^2(\mathbb{R})$ de $(\varphi^1_{j,k})'$ définie formellement par :

$$\widehat{\tilde{\gamma}_{j,k}}(\xi) := -\frac{1}{i\xi}\widehat{\tilde{\varphi}^1_{j,k}}(\xi) \tag{1.4.48}$$

Alors, $\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}}$ et $\tilde{\Psi}^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ sont biorthogonales pour le produit scalaire de $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$ aux fonctions d'échelle $\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$ et aux ondelettes $\Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$.

Preuve :
Cette proposition est immédiate, il suffit de calculer les produits scalaires correspondants, en remarquant que :

$$\langle (\varphi^1_{j,k})', \tilde{\gamma}_{j,k'} \rangle = -\langle \varphi^1_{j,k}, (\tilde{\gamma}_{j,k'})' \rangle = \langle \varphi^1_{j,k}, \tilde{\varphi}^1_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}$$

■

Remarque 1.4.3
Par définition, les fonctions $\tilde{\Psi}^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ sont à support compact et de moyenne nulle, donc des ondelettes. Par contre, les fonctions $\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}}$ ne sont pas à support compact vu que les $\tilde{\gamma}_{j,k}$ ne le sont pas. □

Comme les ondelettes $\Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ forment une base de $L^2_{div}(\mathbb{R}^2)$, alors, tout champ de vecteur $\mathbf{u} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^2)$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \langle \mathbf{u}/\tilde{\Psi}^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{1.4.49}$$

Pour calculer les coefficients $[d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$, on utilise le fait que $\mathbf{u}$ appartient à l'analyse multirésolution de $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$ formée par les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j = (V^1_j \otimes V^0_j) \times (V^0_j \otimes V^1_j)$ et que sur la base d'ondelettes de cette analyse multirésolution, ses composantes $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ s'écrivent :

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\, \psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{u}_2 = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\, \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \tag{1.4.50}$$

Avec les nouvelles fonctions à divergence nulle et leurs biorthogonales, un calcul simple donne les algorithmes de calculs suivants :

Proposition 1.4.4
Les coefficients d'ondelettes $[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ et $[d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ sont reliés aux $[d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ par :
(i) *Décomposition*

$$d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \langle \mathbf{u}/\tilde{\Psi}^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\rangle = \frac{2^{j_2}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}} - \frac{2^{j_1}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{1.4.51}$$

(ii) *Recomposition*

$$d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \frac{2^{j_2}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \qquad \textit{et} \qquad d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = -\frac{2^{j_1}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{1.4.52}$$

On peut aussi vouloir calculer les coefficients d'échelle à divergence nulle.

Proposition 1.4.5
Soit $\mathbf{u} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^2) \cap \vec{\mathbf{V}}_j$ un champ de vecteurs dont les composantes $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ s'écrivent :

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} c^1_{j,\mathbf{k}}\, \varphi^1_{j,k_1} \otimes \varphi^0_{j,k_2} \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{u}_2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} c^2_{j,\mathbf{k}}\, \varphi^0_{j,k_1} \otimes \varphi^1_{j,k_2} \tag{1.4.53}$$

Alors, on a de manière unique :

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} c^{div}_{j,\mathbf{k}}\, \Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$$

avec

$$c^{div}_{j,\mathbf{k}} = \langle \mathbf{u}/\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}}\rangle = \left(\sum_{k'_2=-\infty}^{k_2} 2^{-j} c^1_{j,k_1,k'_2}\right) - \left(\sum_{k'_1=-\infty}^{k_1} 2^{-j} c^2_{j,k'_1,k_2}\right) \tag{1.4.54}$$

Preuve :
Comme les $\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}}$ sont biorthogonales aux $\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$, donc on a : $c^{div}_{j,\mathbf{k}} = \langle \mathbf{u}/\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}}\rangle$. D'après leur définition, toutes les fonctions $\varphi^0_{j,k}$ peuvent s'écrire :

$$\varphi^0_{j,k} = 2^{-j} \sum_{n=k}^{+\infty} (\varphi^1_{j,n})' \tag{1.4.55}$$

Le calcul du produit scalaire $\langle \mathbf{u}/\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}} \rangle$ donne :

$$\langle \mathbf{u}/\tilde{\Phi}^{div}_{j,\mathbf{k}} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \tilde{\varphi}^1_{j,k_1} \otimes \tilde{\gamma}_{j,k_2} \rangle - \langle \mathbf{u}_2, \tilde{\gamma}_{j,k_1} \otimes \tilde{\varphi}^1_{j,k_2} \rangle$$

et

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1, \tilde{\varphi}^1_{j,k_1} \otimes \tilde{\gamma}_{j,k_2} \rangle &= \sum_{\mathbf{k}'} c^1_{k'_1,k'_2} \langle \varphi^1_{j,k'_1}, \tilde{\varphi}^1_{j,k_1} \rangle \langle \varphi^0_{j,k'_2}, \tilde{\gamma}_{j,k_2} \rangle \\ &= \sum_{k'_2 \in \mathbb{Z}} c^1_{k_1,k'_2} \langle 2^{-j} \sum_{n=k'_2}^{+\infty} (\varphi^1_{j,n})', \tilde{\gamma}_{j,k_2} \rangle = \sum_{k'_2=-\infty}^{k_2} 2^{-j} c^1_{k_1,k'_2} \end{aligned}$$

En calculant $\langle \mathbf{u}_2, \tilde{\gamma}_{j,k_1} \otimes \tilde{\varphi}^1_{j,k_2} \rangle$ de la même façon, on démontre la formule $(1.4.54)$. ■

De façon similaire, on déduit les algorithmes de calcul de coefficients d'ondelettes à rotationnel nul. On considère l'analyse multirésolution de $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$ engendrée par les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j = (V^0_j \otimes V^1_j) \times (V^1_j \otimes V^0_j)$. Pour $\mathbf{u} \in L^2_{rot}(\mathbb{R}^2)$, on note $[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ et $[d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ les coefficients de la décomposition de ses composantes respectives $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sur la base d'ondelettes associée aux $\vec{\mathbf{V}}_j$. Comme $\mathbf{u}$ est dans $L^2_{rot}(\mathbb{R}^2)$, on peut aussi l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\mathbb{Z}^2} d^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \, \Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$$

Avec une adaptation des notations, on aboutit à :

Proposition 1.4.6
Les coefficients d'ondelettes $[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ et $[d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ sont reliés aux $[d^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ par :
(i) *Décomposition*

$$d^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \langle \mathbf{u}/\tilde{\Psi}^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle = \frac{2^{j_1}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}} + \frac{2^{j_2}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{1.4.56}$$

(ii) *Recomposition*

$$d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \frac{2^{j_1}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \qquad \textit{et} \qquad d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \frac{2^{j_2}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} d^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{1.4.57}$$

1.5 Approximation non-linéaire sur base d'ondelettes à divergence nulle

Pour établir les résultats d'approximation non-linéaire sur base d'ondelettes à divergence nulle, on a besoin d'un certain nombre de conditions de régularité et de moments nuls sur ces ondelettes. Ces conditions sont satisfaites une fois que les analyses multirésolution scalaires $\{\mathbf{V}_j^k : 1 \leq k \leq n\}_{j\in\mathbb{Z}}$ utilisées pour construire les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j$ les vérifient. Pour tout k, on suppose alors que les analyses multirésolution $\{\mathbf{V}_j^k\}$ et leurs biorthogonales respectives sont suffisamment régulières. On désigne par α la plus petite régularité et par r le plus petit nombre de moments nuls qui leur sont associés, respectivement $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{r}$ pour les biorthogonales. De plus, on suppose que chaque $\{\mathbf{V}_j^k\}$ vérifie les estimations de type Jackson et de type Bernstein de la section précédente.

Pour établir les estimations, on n'utilisera que des bases d'ondelettes à divergence nulle isotropes, le cas anisotrope se traite de manière similaire. De façon commode, on change aussi les notations. Pour tout champ de vecteurs à divergence nulle $\vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n)^n$, sa série d'ondelettes à divergence nulle sera notée :

$$\vec{f} = \sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{\omega\in\Omega_n^*} \sum_{i=1}^{n-1} d^{div}_{\omega,i,I} \Psi^{div}_{\omega,i,I} \tag{1.5.1}$$

de telle sorte que, pour tout $I \in \mathcal{I}$, le volume du support de la k ième composante $[\Psi^{div}_{\omega,i,I}]_k$ de l'ondelette $\Psi^{div}_{\omega,i,I}$ soit de l'ordre de 2^{-nj} ($|I| = 2^{-nj}$) pour $1 \leq k \leq n$. Pour $N \geq 1$, on notera Σ_N^{div} l'espace engendré par au plus $N(n-1)(2^n-1)$ ondelettes à divergence nulle :

$$\Sigma_N^{div} = \{\vec{g}_N = \sum_{I\in\Lambda} \sum_{\omega} \sum_{i} d^{div}_{\omega,i,I} \Psi^{div}_{\omega,i,I} : \Lambda \subset \mathcal{I} \; et \; Card(\Lambda) \leq N\}, \qquad N \geq 0 \tag{1.5.2}$$

L'erreur d'approximation non-linéaire de $\vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n)$ sur cette base à divergence nulle sera noté $\sigma(\vec{f}, \Sigma_N^{div})_{L^p}$:

$$\sigma(\vec{f}, \Sigma_N^{div})_{L^p} := \inf_{\vec{g}_N \in \Sigma_N^{div}} \|\vec{f} - \vec{g}_N\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} \tag{1.5.3}$$

Proposition 1.5.1
Soit $p \in]1, +\infty[$, $0 < q < p$ et $0 < s < \alpha$ tel que $\frac{s}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Alors pour tout $\vec{f} \in L^2_{div}(\mathbb{R}^n) \cap (B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n))^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sigma(\vec{f}, \Sigma_N^{div})_{L^p} \leq C N^{-\frac{s}{n}} \|\vec{f}\|_{(B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n))^n} \tag{1.5.4}$$

Preuve :

Comme on retient les plus grands coefficients, on suppose que ces coefficients d'ondelettes $d^{div}_{\omega,i,I}$ sont déjà ordonnés comme suit :

$$\|d^{div}_{\omega,i,I_1}\Psi^{div}_{\omega,i,I_1}\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} \geq \|d^{div}_{\omega,l,I_2}\Psi^{div}_{\omega,l,I_2}\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} \geq \dots \tag{1.5.5}$$

et pour tout $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$, on a :

$$\vec{f} \in (B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n))^n \Leftrightarrow f_k \in B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n),\ \forall k$$

Chaque composante f_k est donnée par :

$$f_k = \sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{\omega\in\Omega^*_n} \sum_{i=1}^{n-1} d^{div}_{\omega,i,I}[\Psi^{div}_{\omega,i,I}]_k, \qquad 1 \leq k \leq n$$

Alors pour démontrer cette proposition il suffit de prouver l'inégalité composante par composante. Or, pour $1 \leq i \leq n$ d'après la proposition 1.3.1, on a la majoration suivante :

$$\inf_{\vec{g}_N\in\Sigma^{div}_N} \|f_i - [\vec{g}_N]_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq CN^{-\frac{s}{n}}\|f_i\|_{B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.5.6}$$

De la définition de la norme $\|.\|_{(B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n))^n}$ et de cette dernière équation, on déduit la proposition en faisant la somme et en gardant la plus grande des constantes qui sont devant. ■

On terminera cette section avec l'inégalité suivante de type Bernstein sur la base d'ondelettes à divergence nulle.

Proposition 1.5.2
Soit $p \in]1, +\infty[$, $0 < q < p$ et $0 < s < \alpha$ tel que $\frac{s}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Alors, pour une constante positive $C > 0$ on a :

$$\|\vec{f}\|_{(B^s_{q,q})^n} \leq CN^{\frac{s}{n}}\|\vec{f}\|_{(L^p(\mathbb{R}^n))^n} \tag{1.5.7}$$

pour tout $\vec{f} \in \Sigma^{div}_N$, $N \geq 1$.

Pour démontrer cette dernière proposition, il suffit de remarquer qu'on peut utiliser l'estimation donnée par la proposition 1.3.2 sur chaque composante de $\vec{f}$.

Exemple 1.5.1
On donne un exemple de décomposition en ondelettes à divergence nulle d'un champ de vecteur $\mathbf{u}$ *périodique à divergence nulle issu d'une simulation numérique. Les ondelettes analysantes sont celles de Daubechies orthogonales à quatre moments nuls ($r = 4$) pour ψ^1. Les ψ^0 sont calculées par dérivation. La résolution maximale est $J = 10$. Puis on trace la carte des coefficients d'ondelettes à divergence nulle normalisés d'un facteur 2^J et la courbe d'erreur d'approximation non linéaire sur chacune des composantes en échelle logarithmique. La pente observée sur la figure 1.12 est de l'ordre de 0.8, ce qui donne une régularité de 1.6 pour le champ. De même on constate que ce champ est dans $(B^s_{q,q}(\mathbb{R}^n))^n$ pour $s = 1.6$ et $q = 1/1.3$.*

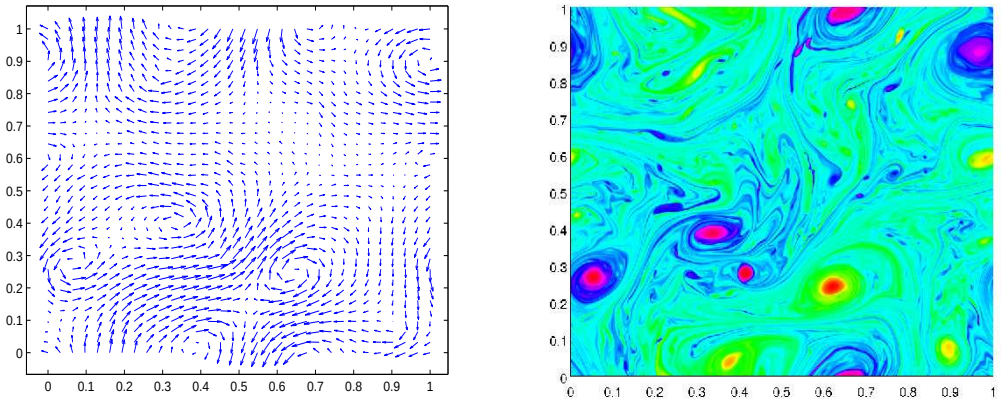

FIGURE 1.11 – Champ de vecteurs périodique à divergence turbulent (à droite), champ scalaire de vorticité suréchantillonné associé (à gauche). La résolution est $J = 10$.

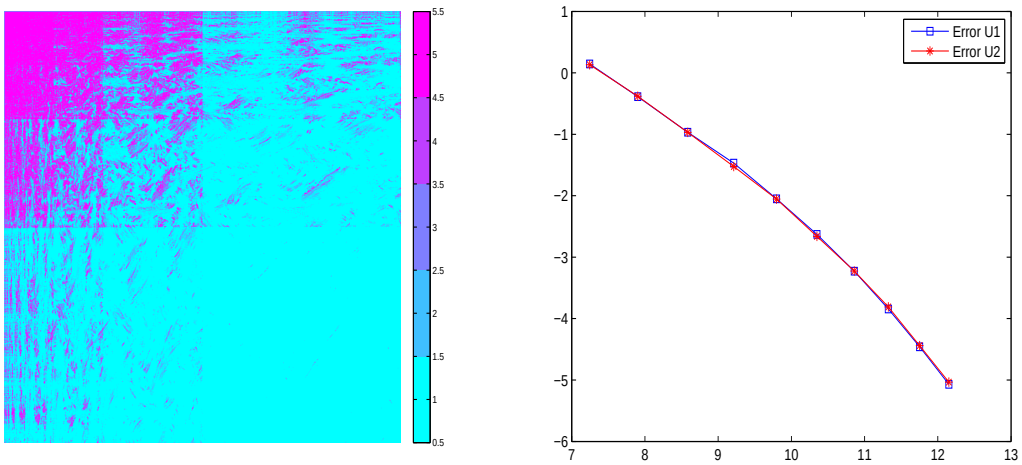

FIGURE 1.12 – Coefficients de la décomposition en ondelettes à divergence normalisés (à gauche) et courbe d'erreur d'approximation non linéaire (à droite).

Exemple 1.5.2
Dans cet exemple, on étudie la projection du champ de vecteurs $\mathbf{u} = \mathbf{rot}[\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)]$ *en fonction de la résolution* J*. Comme le champ est assez régulier, la pente de la courbe de l'erreur* ℓ^2 *en fonction de la résolution* J *en échelle logarithmique donne les moments des ondelettes utilisées,*

ici ψ^1 *a* 5 *moments nuls tandis que* ψ^0 *a* 4*.*

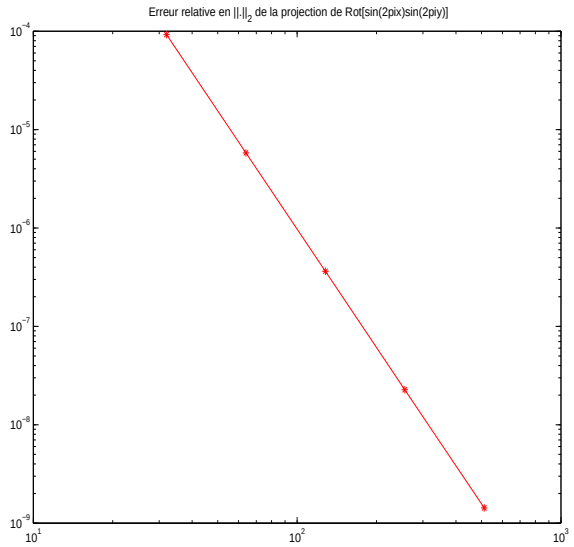

FIGURE 1.13 – Erreur à l'échelle logarithmique de la projection de $\mathbf{rot}[\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)]$ sur $\mathbf{V}_{\mathbf{j}}^{div}$ en fonction de J. Avec ψ^1 générateur orthogonal de Daubechies $r = 5$.

Chapitre 2

Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul sur $[0,1]^n$

Comme dans le cas de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$, le principe de construction des ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul dans $(L^2([0,1]^n))^n$ repose sur la construction d'une analyse multirésolution de $(L^2([0,1]^n))^n$ qui vérifie la propriété de commutation des projecteurs multi-échelles avec l'opérateur de dérivation sur $[0,1]$. Dans cette partie, on propose une construction pratique de telles analyses multirésolutions. Cette construction entre dans le cadre théorique de la construction faite par A. Jouini et P.G. Lemarié-Rieusset dans [72], toutefois elle utilise des générateurs biorthogonaux quelconques alors que celle de A. Jouini et P.G. Lemarié-Rieusset utilise les générateurs orthogonaux à supports compacts de Daubechies. L'apport essentiel de notre construction est qu'en dépit du fait qu'elle permet d'approximer les fonctions à divergence nulle ou à rotationnel nul de $(L^2([0,1]^n))^n$, elle fournit une nouvelle classe d'analyses multirésolutions à divergence nulle ou à rotationnel nul avec des conditions aux limites physiques. Avant de construire les ondelettes à divergence nulle sur le cube $[0,1]^n$, on rappelle l'essentiel des propriétés et la construction d'analyses multirésolution sur l'intervalle utiles pour la suite.

2.1 Analyse multirésolution sur l'intervalle

L'utilisation des analyses multirésolutions de $L^2(\mathbb{R})$ de la section précédente reste limitée en pratique, puisque les signaux qu'on cherche à analyser sont de taille finie. La construction d'analyse multirésolution sur des compacts de $\mathbb{R}$ a fait l'objet de nombreux travaux dont on ne cite ici que ceux qui nous ont inspirés [2, 26, 92]. Le cas qui nous intéresse est celui des analyses multirésolution biorthogonales, utiles pour la construction des ondelettes vecteurs à divergence nulle ou à rotationnel nul sur le carré. La démarche que nous allons suivre dans cette section est celle de P. Monasse et V. Perrier [95] que l'on va généraliser au cas biorthogonal de manière aisée, puis pour la construction des ondelettes nous nous inspirons de la construction de A. Tabacco [109].

2.1.1 Fonction d'échelle sur $\mathbb{R}^+$

Soient $\Big(V_j(\mathbb{R}), \tilde{V}_j(\mathbb{R})\Big)_{j\in\mathbb{Z}}$ deux analyses multirésolutions biorthogonales *régulières* de $L^2(\mathbb{R})$, associées aux fonctions d'échelle conjuguées φ et $\tilde{\varphi}$ de supports compacts $[n_1, n_2]$ et $[\tilde{n}_1, \tilde{n}_2]$ respectivement. On suppose aussi que leurs ondelettes correspondantes ψ et $\tilde{\psi}$ ont chacune respectivement $\tilde{r}$ et r moments nuls :

$$\int x^q \psi(x)dx = 0,\ q = 0, \dots, \tilde{r}-1 \qquad \text{et} \qquad \int x^q \tilde{\psi}(x)dx = 0,\ q = 0, \dots, r-1 \tag{2.1.1}$$

Dans la suite, on supposera toujours que $\tilde{r} \geq r$. Si tel n'est pas le cas, il suffit simplement d'échanger le rôle entre les deux analyses multirésolutions. La construction d'analyse multirésolution sur $\mathbb{R}^+$ sera donnée seulement pour la base primaire. Pour ce qui est de la base duale, on sous-entend qu'elle sera faite de façon similaire. D'autre part, pour profiter des avantages de la symétrie il sera préférable dans certains cas de considérer les fonctions d'échelle qui gardent le mieux cette propriété par rapport à leurs supports. Pour construire une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^+)$, l'idée essentielle est prendre une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ et de garder toutes les fonctions de base dont le support est inclus dans $\mathbb{R}^+$, puis de compléter cette base par des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ qui permettent une reproduction polynomiale identique sur $\mathbb{R}^+$. Soit $\delta_0 \geq 0$ un paramètre entier et pour $j \geq 0$, on note $V_j^{int}(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble de toutes les fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ telles que leurs supports soient inclus dans l'intervalle $[2^{-j}\delta_0, +\infty[$. Comme φ est à support dans $[n_1, n_2]$, un calcul simple montre que :

$$V_j^{int}(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\varphi_{j,k}\ :\ k \geq k_0 = \delta_0 - n_1\} \tag{2.1.2}$$

En choisissant un autre paramètre $\tilde{\delta}_0 \geq 0$, on définit de même l'espace $\tilde{V}_j^{int}(\mathbb{R}^+)$. Soit $V_j(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}^+}$ l'espace engendré par les restrictions des $\varphi_{j,k}$ à $\mathbb{R}^+$:

$$V_j(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}^+} = \mathrm{Vect}\{\varphi_{j,k}\ \chi_{\mathbb{R}^+}\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Définition 2.1.1
Une analyse multirésolution biorthogonale de $L^2(\mathbb{R}^+)$ associée au couple $(\varphi, \tilde{\varphi})$ est une famille d'espaces notés $V_j(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{R}^+)$ telle que :
(i) $V_j(\mathbb{R}^+) \subset V_{j+1}(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{R}^+) \subset \tilde{V}_{j+1}(\mathbb{R}^+)$, $\forall\, j \in \mathbb{Z}$
(ii) $V_j^{int}(\mathbb{R}^+) \subset V_j(\mathbb{R}^+) \subset V_j(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}^+}$ et $\tilde{V}_j^{int}(\mathbb{R}^+) \subset \tilde{V}_j(\mathbb{R}^+) \subset \tilde{V}_j(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}^+}$
(iii) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j(\mathbb{R}^+)$ et $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{V}_j(\mathbb{R}^+)$ sont denses dans $L^2(\mathbb{R}^+)$
(iv) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les espaces $V_j(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{R}^+)$ sont biorthogonaux pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Dans la définition des espaces $V_j(\mathbb{R}^+)$, on souhaite garder l'ordre d'approximation polynomiale donné par les fonctions d'échelle $\varphi(x-k)$ sur $\mathbb{R}$. La propriété de régularité de la fonction φ et des moments nuls de l'ondelette biorthogonale $\tilde{\psi}$ se traduisent par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \frac{x^\ell}{\ell!} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_\ell(k)\varphi(x-k), \qquad \forall\, \ell = 0, \dots, r-1 \tag{2.1.3}$$

Les coefficients $\tilde{p}_\ell(k) = \langle \tilde{\varphi}_k, \frac{x^\ell}{\ell!} \rangle$ sont des polynômes de degré ℓ en k et ils sont donnés par l'équation :

$$\tilde{p}_\ell(k) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{C_{\ell-n}}{n!} k^n \tag{2.1.4}$$

avec :

$$C_m = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{m!} \tilde{\varphi}(x) dx \tag{2.1.5}$$

Les moments C_m peuvent se calculer récursivement selon l'algorithme :

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_\ell = \frac{1}{2^\ell - 1} \sum_{k=1}^{\ell} M_k C_{\ell-k} \end{cases} \tag{2.1.6}$$

avec les constantes M_k données par :

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=\tilde{n}_1}^{\tilde{n}_2} \tilde{h}_m \frac{m^k}{k!} \tag{2.1.7}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on peut écrire :

$$\frac{x^\ell}{\ell!} = \sum_{k=1-n_2}^{k_0-1} \tilde{p}_\ell(k) \varphi(x-k) \chi_{[0,+\infty[}(x) + \sum_{k \geq k_0}^{+\infty} \tilde{p}_\ell(k) \varphi(x-k), \qquad \forall\, \ell = 0, \ldots, r-1$$

Cette propriété de reproduction polynomiale au bord 0 sera conservée dans $V_j(\mathbb{R}^+)$ grâce aux nouvelles fonctions d'échelle de bord que l'on va définir. Par changement d'échelle, comme on va le voir, il suffit de définir celles qui sont dans $V_0(\mathbb{R}^+)$. Ces fonctions de bord seront définies comme étant les reproductions tronquées des monômes de degré inférieur ou égal à $r-1$ par les fonctions d'échelle φ_k, telles que leurs supports rencontrent l'intervalle $[0, \delta_0]$.

Définition 2.1.2
Pour $0 \leq \ell \leq r-1$, on définit les fonctions d'échelle de bord en 0, notées Φ_ℓ, par :

$$\Phi_\ell(x) = \sum_{k=1-n_2}^{k_0-1} \tilde{p}_\ell(k) \varphi(x-k) \chi_{[0,+\infty[}(x), \qquad 0 \leq \ell \leq r-1 \tag{2.1.8}$$

L'espace $V_0(\mathbb{R}^+)$ est alors défini par :

$$V_0(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\Phi_\ell :\ 0 \leq \ell \leq r-1\} \oplus Vect\{\varphi_k : k \geq k_0 = \delta_0 - n_1\} \tag{2.1.9}$$

De manière générale on définit dans $V_j(\mathbb{R}^+)$ les fonctions $\Phi_{j,\ell}$ comme étant les dilatées des Φ_ℓ :

$$\Phi_{j,\ell}(x) = 2^{j/2}\Phi_\ell(2^j x)$$

D'après cette définition, il est facile de voir qu'on garde le même nombre de fonctions d'échelle de bord indépendamment de l'échelle j choisie. Pour des explications plus précises de ce choix, voir [86, 95, 109].

Remarque 2.1.1
Par construction les fonctions d'échelle de bord Φ_ℓ conservent la propriété de reproduction polynomiale et elles ont la même régularité que les fonctions de départ φ_k sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, il existe d'autres constructions dans [2, 90] qui permettent de conserver d'autres propriétés telles que la symétrie ou celle de [37] dont le souci est d'adapter la base à une topologie plus complexe. □

Un des avantages de cette construction est que les fonctions d'échelle de bord vérifient une relation matricielle à deux échelles simple à exprimer. Cette relation est fondamentale dans l'implémentation des algorithmes numériques. Dans $V_0(\mathbb{R}^+)$ cette relation est donnée par la proposition ci-dessous [95].

Proposition 2.1.1
(i) Pour $0 \leq \ell \leq r-1$, les fonctions de bord Φ_ℓ sont linéairement indépendantes.
(ii) Il existe une matrice notée B de taille $r \times (n_2 + k_0 - 1)$ et une matrice notée D de taille $r \times r$ telles que :

$$\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{r-1} \end{pmatrix} (\frac{x}{2}) = D \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{r-1} \end{pmatrix} (x) + B \begin{pmatrix} \varphi_{k_0} \\ \vdots \\ \varphi_{n_2+2k_0-2} \end{pmatrix} (x) \tag{2.1.10}$$

avec :

$$D_{i,j} = \delta_{i-j}/2^{i-1}, \qquad 1 \leq i,j \leq r \tag{2.1.11}$$

$$B_{i+1,j-k_0+1} = \frac{\tilde{p}_i(j)}{2^i} - \sqrt{2}\sum_{m=k_0}^{\lfloor \frac{j-n_1}{2} \rfloor} \tilde{p}_i(m) h_{j-2m} \tag{2.1.12}$$

pour $i = 0, \ldots, r-1$ et $j = k_0, \ldots, n_2 + 2k_0 - 2$, avec $\lfloor x \rfloor$ qui désigne la partie entière de x.
(iii) Les espaces $(V_j(\mathbb{R}^+))_{j\in\mathbb{Z}}$ définis par :

$$V_j(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\Phi_{j,\ell} :\ 0 \leq \ell \leq r-1\} \oplus Vect\{\varphi_{j,k} :\ k \geq k_0 = \delta_0 - n_1\} \tag{2.1.13}$$

forment une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

De plus, on peut voir que :

$$\frac{\tilde{p}_k(k)}{2^k} = \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_k(m) h_{k-2m} \tag{2.1.14}$$

ce qui permet de déduire une formule plus simple pour le calcul des termes de la matrice B :

$$B_{i+1,j-k_0+1} = \sqrt{2} \sum_{m=\lfloor \frac{j-n_2}{2} \rfloor}^{k_0-1} \tilde{p}_i(m) h_{j-2m} \tag{2.1.15}$$

Une construction analogue à celle des espaces $V_j(\mathbb{R}^+)$, avec le paramètre $\tilde{\delta}_0$ et la fonction d'échelle biorthogonale $\tilde{\varphi}$ donne une nouvelle analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^+)$ engendrée par les espaces $\tilde{V}_j(\mathbb{R}^+)$.

Les fonctions d'échelle intérieures des analyses multirésolutions engendrées par $V_j(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{R}^+)$ vérifient :

$$\langle \varphi_k, \tilde{\varphi}_{k'} \rangle = \delta_{k-k'}, \ \ \forall\, k,\ k' \geq k^* \ \text{ où } \ k^* = \max\{k_0, \tilde{k}_0\} \tag{2.1.16}$$

Pour avoir une analyse multirésolution biorthogonale de $L^2(\mathbb{R}^+)$, il suffit alors de biorthogonaliser les fonctions de bord et un nombre fini de fonctions intérieures près de bord en 0. Plus précisément, on aura à rendre biorthogonaux les deux ensembles de fonctions suivants :

$$\{\Phi_\ell,\ \ell = 0, \ldots, r-1\} \cup \{\varphi_k,\ k = k_0, \ldots, k^* - 1\}$$

et

$$\{\tilde{\Phi}_\ell,\ \ell = 0, \ldots, \tilde{r}-1\} \cup \{\tilde{\varphi}_k, k = \tilde{k}_0, \ldots, k^* - 1\}$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$, on définit les espaces de bord $V_j^b(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_j^b(\mathbb{R}^+)$ comme étant les espaces engendrés par ces fonctions :

$$V_j^b(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\Phi_{j,\ell} :\ 0 \leq \ell \leq r-1\} \oplus \mathrm{Vect}\{\varphi_{j,k} :\ k = k_0, \ldots, k^* - 1\} \tag{2.1.17}$$

et

$$\tilde{V}_j^b(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\Phi}_{j,\ell} :\ 0 \leq \ell \leq \tilde{r}-1\} \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\varphi}_{j,k} :\ k = \tilde{k}_0, \ldots, k^* - 1\} \tag{2.1.18}$$

Un calcul simple donne :

$$\dim V_j^b(\mathbb{R}^+) = \dim \tilde{V}_j^b(\mathbb{R}^+) \tag{2.1.19}$$

Remarque 2.1.2
En pratique, on impose le choix des paramètres entiers δ_0 et $\tilde{\delta}_0$ tels qu'ils vérifient :

$$\tilde{k}_0 - \tilde{r} = k_0 - r \tag{2.1.20}$$

Ce choix donne $k^* = \tilde{r}$ et permet d'assurer l'égalité des dimensions lors du passage sur l'intervalle $[0,1]$.

Comme on a supposé $\tilde{r} \geq r$, on peut ordonner les bases de fonctions déchelle de $V_0(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_0(\mathbb{R}^+)$ de la manière suivante :

$$V_0(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\Phi_0, \ldots, \Phi_{r-1}\} \oplus \mathrm{Vect}\{\varphi_{k^*+k-\tilde{r}},\ k \geq r\}$$

et

$$\tilde{V}_0(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\Phi}_0, \ldots, \tilde{\Phi}_{\tilde{r}-1}\} \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\varphi}_{k^*+k-\tilde{r}},\ k \geq \tilde{r}\}$$

Si on note sans distinction ces fonctions des bases φ_k et $\tilde{\varphi}_k$ en posant :

$$V_0(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\varphi_k,\ k \geq 0\} \qquad \text{et} \qquad \tilde{V}_0(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\varphi}_k,\ k \geq 0\} \tag{2.1.21}$$

la relation à deux échelles (2.1.10) que vérifient les fonctions de bord combinée à celle des fonctions intérieures fait qu'il existe des matrices notées H et $\tilde{H}$ telles que l'on puisse écrire :

$$\varphi_k = \sum_{m=0}^{+\infty} H_{k,m}\varphi_{1,m} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\varphi}_k = \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{H}_{k,m}\tilde{\varphi}_{1,m} \tag{2.1.22}$$

Si les bases ont été biorthogonalisées, il est facile de voir que :

$$H \cdot (\tilde{H})^T = I \tag{2.1.23}$$

Alors la biorthogonalisation consiste à trouver les bonnes matrices H et $\tilde{H}$ qui vérifient l'équation (2.1.23) précédente.

2.1.2 Biorthogonalisation des fonctions d'échelle de bord

Les fonctions d'échelle de bord de la section précédente ne sont pas biorthogonales. Dans cette partie nous expliquons les techniques utilisées pour obtenir des bases biorthogonales de $L^2(\mathbb{R}^+)$. Ce problème de la biorthogonalisation de fonctions de bord pour n'importe quel type de générateur d'analyses multirésolutions biorthogonales reste encore un problème ouvert. En effet, on ne dispose pas de preuve qui montre l'inversibilité de la matrice de terme général $\langle \Phi_\ell, \tilde{\Phi}_{\ell'} \rangle$, pour les fonctions de bord de V_j^b et $\tilde{V}_j^b$. On sait résoudre le problème seulement dans le cas orthogonal où la matrice de Gram est symétrique définie positive [2, 95], ou celui des générateurs B-Splines biorthogonaux dont une preuve est donnée dans [33]. Dans ce travail, on va présenter quelques techniques utilisées en pratique pour remédier à ce problème.

On considère dans un premier temps le cas des générateurs orthogonaux, c'est à dire $\varphi = \tilde{\varphi}$ et $r = \tilde{r}$. Et on note $G^{\Phi,\Phi}$ la matrice de Gram des fonctions d'échelle de bord en 0 :

$$[G^{\Phi,\Phi}]_{l,k} = \langle \Phi_l, \Phi_k \rangle, \;\; 0 \leq l, k \leq r-1 \tag{2.1.24}$$

Dans ces conditions, la matrice $G^{\Phi,\Phi}$ est symétrique définie positive. On peut procéder à une orthogonalisation de type Gram ou de type Gram-Schmidt [2, 95]. Pour avoir des fonctions de bord orthogonales, dans les deux cas la méthode consiste à la recherche d'une matrice inversible notée A qui satisfait :

$$I = AG^{\Phi,\Phi}A^T \tag{2.1.25}$$

Le procédé de Gram revient à choisir la matrice A comme :

$$A = \left(G^{\Phi,\Phi}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.1.26}$$

Pour Gram-Schmidt, il suffit de considérer la décomposition de Cholesky de la matrice $G^{\Phi,\Phi}$ suivante :

$$G^{\Phi,\Phi} = LL^T$$

Ceci n'est rien d'autre qu'une décomposition de type LU appliquée à la matrice $G^{\Phi,\Phi}$ qui est symétrique définie positive [20]. Alors, on pose :

$$A = L^{-1}$$

La nouvelle famille de fonctions d'échelle de bord orthogonales, notée aussi Φ_ℓ pour alléger la notation, est obtenue en considérant les fonctions :

$$\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{r-1} \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{r-1} \end{pmatrix} \tag{2.1.27}$$

Dans le cas biorthogonal, comme en général $r \neq \tilde{r}$, la matrice $G^{\Phi,\tilde{\Phi}}$ de terme général :

$$[G^{\Phi,\tilde{\Phi}}]_{l,k} = \langle \Phi_l, \tilde{\Phi}_k \rangle, \;\; 0 \leq l \leq r-1 \;\text{ et }\; 0 \leq k \leq \tilde{r}-1 \tag{2.1.28}$$

n'est plus une matrice carrée, d'où surgit une première difficulté. Même dans les cas où $r = \tilde{r}$, on ne peut s'assurer de la non-singularité de cette matrice pour n'importe quel type de générateur d'analyse multirésolution biorthogonaux φ et $\tilde{\varphi}$. Pour rendre carrée cette matrice, on ajoute des fonctions intérieures en ajustant les paramètres δ_0 et $\tilde{\delta}_0$ [2]. Ce qui revient à remplacer la matrice $G^{\Phi,\tilde{\Phi}}$ par celle des fonctions de bases des espaces $V_j^b(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_j^b(\mathbb{R}^+)$ définies en $(2.1.17)$ et $(2.1.18)$. Ensuite on peut tester numériquement la non-singularité de cette matrice. Si cette matrice est inversible, la façon la plus générale de rendre les fonctions d'échelle de $V_j^b(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_j^b(\mathbb{R}^+)$

biorthogonales est de procéder à une factorisation du type LU sur la matrice complétée, notée aussi $G^{\Phi,\tilde{\Phi}}$:

$$G^{\Phi,\tilde{\Phi}} = LU \tag{2.1.29}$$

et pour que l'on ait :

$$I = AG^{\Phi,\tilde{\Phi}}\tilde{A}^T \tag{2.1.30}$$

il suffit alors de poser :

$$A = L^{-1} \qquad \text{et} \qquad \tilde{A} = U^{-T} \tag{2.1.31}$$

Ainsi on obtient deux classes de fonctions de bord localisées en 0 biorthogonales que l'on notera encore $\{\Phi_\ell\}_{\ell=0,\dots,k^*-1}$ et $\{\tilde{\Phi}_\ell\}_{\ell=0,\dots,k^*-1}$ définies par :

$$\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{r+k^*-k_0-1} \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{r-1} \\ \varphi_{k_0} \\ \vdots \\ \varphi_{k^*-1} \end{pmatrix} \tag{2.1.32}$$

et

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_{\tilde{r}+k^*-\tilde{k}_0-1} \end{pmatrix} := \tilde{A} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 \\ \vdots \\ \Phi_{\tilde{r}-1} \\ \tilde{\varphi}_{\tilde{k}_0} \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_{k^*-1} \end{pmatrix} \tag{2.1.33}$$

Ce choix de la biorthogonalisation n'est pas unique, d'ailleurs en pratique il est plus simple de poser :

$$\tilde{A} = \left(G^{\Phi,\tilde{\Phi}}\right)^{-T} \qquad \text{et} \qquad A = I \tag{2.1.34}$$

Dans ce travail, on utilisera en pratique l'orthogonalisation de type Gram $(2.1.26)$ pour les générateurs orthogonaux et la biorthogonalisation définie en $(2.1.34)$ pour les générateurs biorthogonaux, compte tenu de leur simplicité.

Remarque 2.1.3
La base des monômes $\frac{x^\ell}{\ell!}$ n'est pas très stable, cela augmente le conditionnement de la matrice $G^{\Phi,\tilde{\Phi}}$ en fonction de r et $\tilde{r}$. Pour avoir un meilleur conditionnement, une alternative consiste à prendre la base des polynômes de Lagrange, qui est plus stable, et d'orthonormaliser entre elles les fonctions d'échelle de bord de la base primale et celles de la base duale [89,90]. On peut aussi

utiliser les polynômes de Chebychev, ce qui donne un meilleur conditionnement de la matrice en norme L^∞ [116].

□

Exemple 2.1.1
On trace sur la figure 2.1 une fonction d'échelle intérieure et les trois fonctions d'échelle de bord en 0 dans le cas du générateur orthogonal de Daubechies φ avec $r = 3$ capacité de reproduction polynomiale. Le support de φ est inclus dans $[-r+1, r]$ et le paramètre entier correspond à $\delta_0 = 2$. Un procédé de type Gram est utilisé pour orthonormaliser les fonctions de bord.
Sur les figures 2.2 et 2.3, on trace les fonctions d'échelle intérieures biorthogonales φ et $\tilde{\varphi}$ et les six fonctions de bords dans le cas des générateurs biorthogonaux B-Spline $(3, 3)$. Les paramètres des supports sont $n_1 = -1$, $n_2 = 2$, $r = 3$, $\tilde{n}_1 = -3$, $\tilde{n}_2 = 4$ et $\tilde{r} = 3$. On a choisi $\tilde{\delta}_0 = 0$ ce qui donne $\delta_0 = 2$, et permet de minimiser le nombre des fonctions $\tilde{\varphi}$ modifiées au bord. On a utilisé la biorthogonalisation définie par l'équation (2.1.34) pour biorthogonaliser les fonctions de bord.

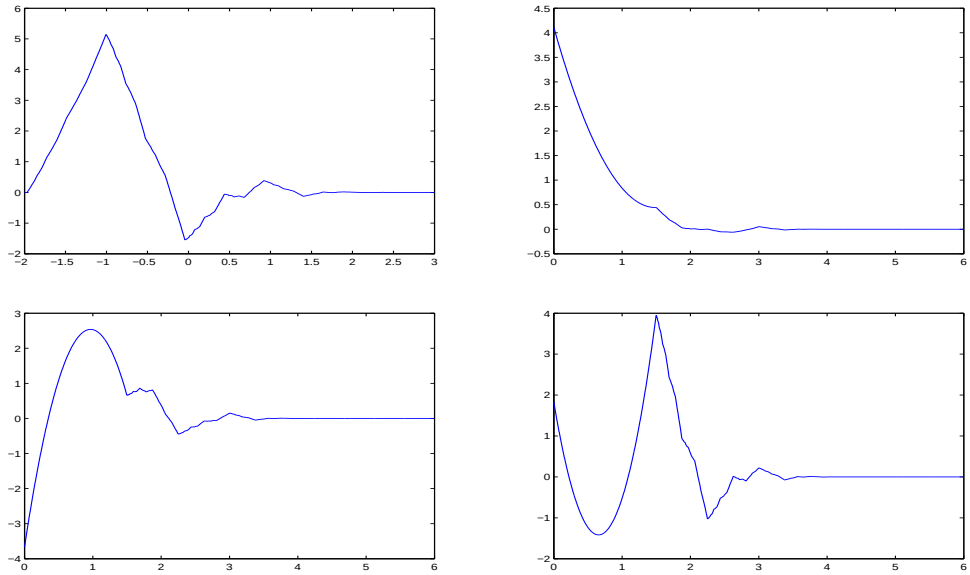

FIGURE 2.1 – Fonction d'échelle intérieure (1ère ligne à gauche) et les trois fonctions de bord en 0. Cas du générateur orthogonal de Daubechies à trois moments nuls.

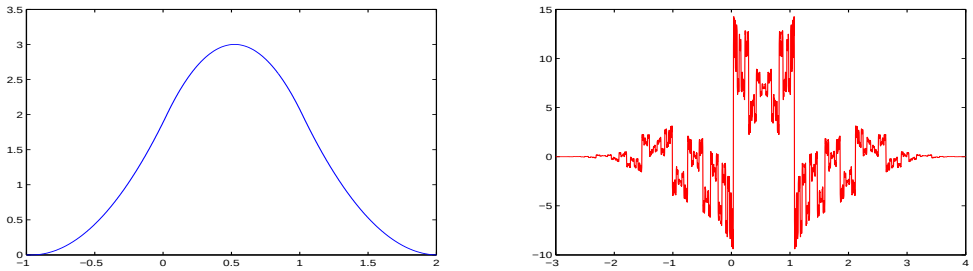

FIGURE 2.2 – Fonctions d'échelle biorthogonales, cas des générateurs B-Spline biorthogonaux à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$.

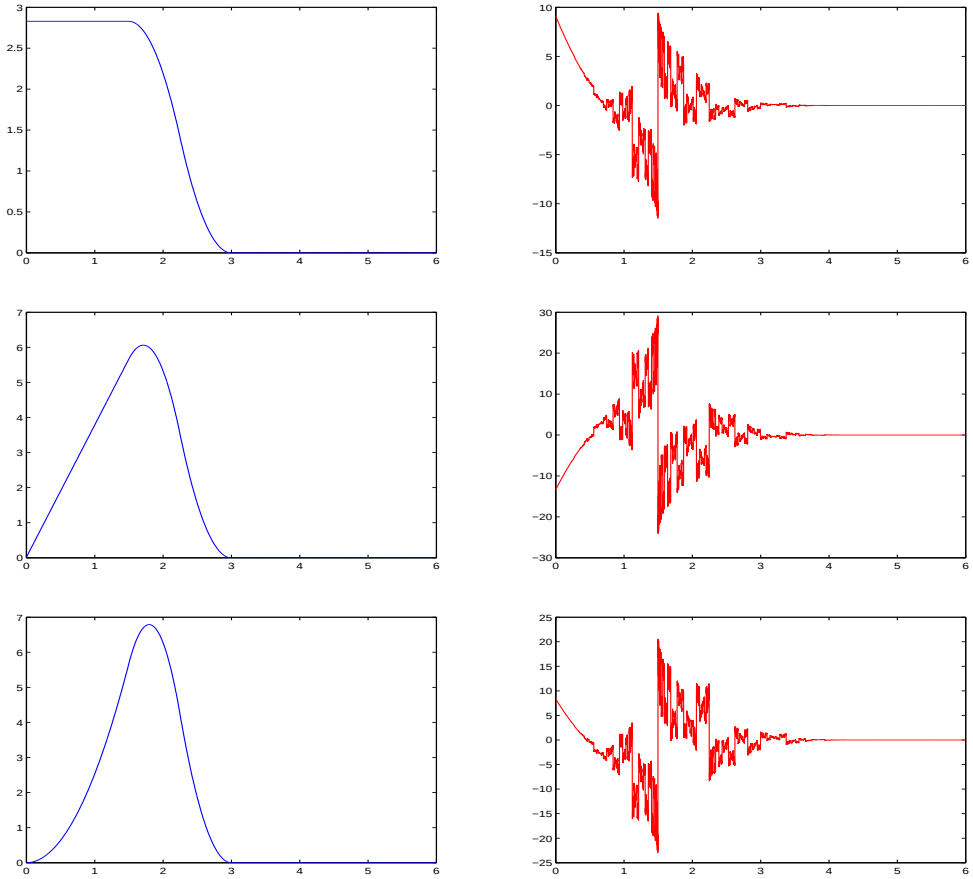

FIGURE 2.3 – Fonctions d'échelle de bord biorthogonales en 0. Cas des générateurs B-Spline biorthogonaux à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$.

2.1.3 Base d'ondelettes sur $\mathbb{R}^+$

Dans cette partie, on construit les bases d'ondelettes biorthogonales associées aux fonctions d'échelle sur la demi-droite. Pour construire ces ondelettes, il existe plusieurs façons de procéder. Dans tous les cas on cherche des bases qui vont engendrer les espaces $W_j(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{W}_j(\mathbb{R}^+)$ définis par :

$$W_j(\mathbb{R}^+) = V_{j+1}(\mathbb{R}^+) \cap (\tilde{V}_j(\mathbb{R}^+))^\perp \text{ et } \tilde{W}_j(\mathbb{R}^+) = \tilde{V}_{j+1}(\mathbb{R}^+) \cap (V_j(\mathbb{R}^+))^\perp \tag{2.1.35}$$

Une conséquence directe est que :

$$W_j(\mathbb{R}^+) \perp \tilde{V}_j(\mathbb{R}^+) \text{ et } \tilde{W}_j(\mathbb{R}^+) \perp V_j(\mathbb{R}^+)$$

Par invariance et par dilatation, il suffit de construire les ondelettes de $W_0(\mathbb{R}^+)$. On commence d'abord par définir les ondelettes $\psi(. - k)$ intérieures. D'après la relation à deux échelles satisfaite par l'ondelette $\psi_k = \psi(. - k)$:

$$\psi_k(x) = \sum_{m=1-\tilde{n}_2+2k}^{1-\tilde{n}_1+2k} g_{m-2k}\varphi_{1,m}(x)$$

on déduit directement que pour tout entier k tel que :

$$k \geq p_0 \qquad \text{où} \qquad p_0 = \lfloor \frac{\tilde{n}_2 + k_0 - 1}{2} \rfloor, \tag{2.1.36}$$

les ondelettes $\psi(.-k)$ s'écrivent comme combinaison linéaire des fonctions d'échelle de $V_1^{int}(\mathbb{R}^+)$, fonctions de de $V_1(\mathbb{R}^+)$ dont le support est inclus dans l'intervalle $[\delta_0, +\infty[$. On définit alors comme pour le cas des fonctions d'échelle l'ensemble des ondelettes intérieures $W_0^{int}(\mathbb{R}^+)$ par :

$$W_0^{int}(\mathbb{R}^+) = \text{Vect}\{\psi(. - k) : \ k \geq p_0\} \tag{2.1.37}$$

Les ondelettes de bord seront alors une base de l'espace qui complète les ondelettes intérieures dans $W_0(\mathbb{R}^+)$. Plus précisément on cherche une base de l'espace :

$$V_1(\mathbb{R}^+) \setminus (V_0(\mathbb{R}^+) \oplus W_0^{int}(\mathbb{R}^+)) \tag{2.1.38}$$

La dimension de l'espace qu'on cherche à engendrer par les ondelettes de bord est exactement p_0 (voir [2, 86, 90]), et les fonctions de $V_1(\mathbb{R}^+)$ reproduites par ces ondelettes de bord sont des fonctions d'échelle intérieures [2, 90, 109]. C'est une conséquence de la relation de recomposition (1.1.25) qu'on écrit de façon plus explicite :

$$\sqrt{2}\varphi(2x - m) = \sum_{k=\lfloor \frac{m-\tilde{n}_2}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m-\tilde{n}_1}{2} \rfloor} \tilde{h}_{m-2k}\varphi(x - k) + \sum_{k=\lfloor \frac{m+n_1-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m+n_2-1}{2} \rfloor} \tilde{g}_{m-2k}\psi(x - k) \tag{2.1.39}$$

Cette dernière relation permet de dire que pour les indices $m \geq \tilde{n}_2 + 2k_0 - 1$, toutes les fonctions $\varphi_{1,m}$ sont des combinaisons linéaires des fonctions d'échelle intérieures de $V_0^{int}(\mathbb{R}^+)$ et des ondelettes intérieures de $W_0^{int}(\mathbb{R}^+)$. Pour définir les ondelettes de bord Ψ_ℓ, il suffit de prendre une fonction sur deux parmi les fonctions d'échelle intérieures manquantes $\{\varphi_{1,k},\ k_0 \leq k \leq \tilde{n}_2 + 2k_0 - 2\}$ de $V_1(\mathbb{R}^+)$, puis leur soustraire leurs projections sur $V_0(\mathbb{R}^+)$ [2, 90]. Ce qui permet cette première définition des ondelettes de bord :

Définition 2.1.3
Soit $p_0 = \lfloor \frac{\tilde{n}_2 + k_0 - 1}{2} \rfloor$ et pour $\ell = 0, \ldots, p_0 - 1$, les ondelettes de bord Ψ_ℓ sont définies par l'équation :

$$\Psi_\ell(x) = \sqrt{2}\left(I - \mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)}\right)(\varphi(2x - k_\ell))\,|_{[0,+\infty[}, \qquad k_\ell = 2k_0 + \tilde{n}_2 + 2(\ell - p_0) \tag{2.1.40}$$

Ici I désigne l'opérateur identité.

Proposition 2.1.2
Pour $0 \leq \ell \leq p_0 - 1$, les ondelettes Ψ_ℓ forment une famille libre de dimension p_0. En plus on a :

$$\mathrm{Vect}\{\Psi_\ell :\ 0 \leq \ell \leq p_0 - 1\} \perp \tilde{V}_0(\mathbb{R}^+) \tag{2.1.41}$$

Preuve :
Nous allons montrer seulement que cette famille est libre, le reste se déduit de la construction des Ψ_ℓ. Pour cela, il suffit juste d'utiliser la définition :

$$\sum_{\ell=0}^{p_0-1} \lambda_\ell \Psi_\ell = \sum_{\ell=0}^{p_0-1} \lambda_\ell \varphi_{1,k_\ell} - \sum_{\ell=0}^{p_0-1} \lambda_\ell \mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)}(\varphi_{1,k_\ell}) \tag{2.1.42}$$

Comme $\mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)}(\varphi_{1,k_\ell}) \in V_0(\mathbb{R}^+) \subset V_1(\mathbb{R}^+)$, alors on peut écrire :

$$\mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)}(\varphi_{1,k_\ell}) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k^\ell \varphi_{1,k}$$

où on a noté $\varphi_{1,k}$ les fonctions de $V_1(\mathbb{R}^+)$ sans distinction. En substituant cette dernière relation dans $(2.1.42)$, on trouve :

$$\sum_{\ell=0}^{p_0-1} \left(\lambda_\ell - \sum_{k=0}^{p_0-1} \lambda_k \alpha_{k_\ell}^k\right) \varphi_{1,k_\ell} - \sum_{k \neq k_\ell} \left(\sum_{\ell=0}^{p_0-1} \lambda_\ell \alpha_k^\ell\right) \varphi_{1,k}$$

Une combinaison linéaire des fonctions Ψ_ℓ est nulle, si et seulement si, pour tout $k \neq k_\ell$ et $0 \leq \ell \leq p_0 - 1$, on a :

$$\lambda_\ell - \sum_{k=0}^{p_0-1} \lambda_k \alpha_{k_\ell}^k = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{\ell=0}^{p_0-1} \lambda_\ell \alpha_k^\ell = 0$$

De part leurs définitions, les coefficients (α_k^ℓ) ne sont pas nuls, et ils ne peuvent pas êtres tous proportionnels ou égaux à la fois. Alors, la seule solution qui soit compatible aux deux systèmes précédents est $\lambda_\ell = 0$, $0 \leq \ell \leq p_0 - 1$. Ce qui montre le résultat. ■

Remarque 2.1.4
L'idée de prendre une fonction sur deux parmi les fonctions manquantes, proposée pour la première fois dans [2], vient du fait que si l'on écrit la relation de recomposition pour $k = k_0, \ldots, \tilde{n}_2 + 2k_0 - 2$, on retrouve cette série d'égalités :

$$\varphi_{1,\tilde{n}_2+2k_0-2} = \tilde{h}_{\tilde{n}_2}\varphi_{0,k_0-1} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-2}\varphi_{0,k_0} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-4}\varphi_{0,k_0+1} + \ldots$$

$$\varphi_{1,\tilde{n}_2+2k_0-3} = \tilde{h}_{\tilde{n}_2-1}\varphi_{0,k_0-1} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-3}\varphi_{0,k_0} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-5}\varphi_{0,k_0+1} + \ldots$$

$$\varphi_{1,\tilde{n}_2+2k_0-4} = \tilde{h}_{\tilde{n}_2}\varphi_{0,k_0-2} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-2}\varphi_{0,k_0-1} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-4}\varphi_{0,k_0} + \ldots$$

et ainsi de suite. Comment se termine cette série dépend de la parité de $k_0 - \tilde{n}_2$. Si $k_0 - \tilde{n}_2 = 2t_0$, on retrouve finalement :

$$\varphi_{1,k_0+1} = \tilde{h}_{\tilde{n}_2-1}\varphi_{0,t_0+1} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-3}\varphi_{0,t_0+2} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-5}\varphi_{0,t_0+3} + \ldots$$

$$\varphi_{1,k_0} = \tilde{h}_{\tilde{n}_2}\varphi_{0,t_0} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-2}\varphi_{0,t_0+1} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-4}\varphi_{0,t_0+2} + \ldots$$

par contre si $k_0 - \tilde{n}_2 = 2t_0 - 1$, on retrouve :

$$\varphi_{1,k_0+1} = \tilde{h}_{\tilde{n}_2}\varphi_{0,t_0} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-2}\varphi_{0,t_0+1} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-4}\varphi_{0,t_0+2} + \ldots$$

$$\varphi_{1,k_0} = \tilde{h}_{\tilde{n}_2-1}\varphi_{0,t_0} + \tilde{h}_{\tilde{n}_2-3}\varphi_{0,t_01} + \tilde{h}_{vn_2-5}\varphi_{0,t_0+2} + \ldots$$

L'apport de la correction grossière sur les fonctions intérieures assure leur indépendance linéaire vis à vis des autres fonctions non choisies dans $V_1(\mathbb{R}^+)$. □

Par une procédure analogue, on construit $\tilde{p}_0 = \lfloor \frac{n_2+\tilde{k}_0-1}{2} \rfloor$ ondelettes de bord dans l'analyse multirésolution duale et on définit l'espace $\tilde{W}_0(\mathbb{R}^+)$ de façon similaire. Soit p^* l'entier défini par :

$$p^* = \max\{p_0, \tilde{p}_0\} \tag{2.1.43}$$

Par analogie au cas des fonctions d'échelle, on définit les familles d'ondelettes de bord suivantes :

$$\{\Psi_\ell;\ \ell = 0, \ldots, p_0 - 1\} \cup \{\psi(. - k);\ k = p_0, \ldots, p^* - 1\} \tag{2.1.44}$$

et

$$\{\tilde{\Psi}_\ell;\ \ell = 0, \ldots, \tilde{p}_0 - 1\} \cup \{\tilde{\psi}(. - k);\ k = \tilde{p}_0, \ldots, p^* - 1\} \tag{2.1.45}$$

De même, on définit les espaces d'ondelettes de bord $W_0^b(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{W}_0^b(\mathbb{R}^+)$ par :

$$W_0^b(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\Psi_\ell;\ \ell = 0, \ldots, p_0 - 1\} \oplus \mathrm{Vect}\{\psi(. - k);\ k = p_0, \ldots, p^* - 1\} \tag{2.1.46}$$

et

$$\tilde{W}_0^b(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\Psi}_\ell;\ \ell = 0, \ldots, \tilde{p}_0 - 1\} \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\psi}(. - k);\ k = \tilde{p}_0, \ldots, p^* - 1\} \tag{2.1.47}$$

On adapte aussi les définitions des $W_0^{int}(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{W}_0^{int}(\mathbb{R}^+)$ comme pour le cas des fonctions d'échelle.

Nouvelle définition d'ondelettes de bord

La définition 2.1.3 des ondelettes de bord peut engendrer des filtres de bord dont les supports peuvent devenir très grands en fonction de p^*. Ce qui augmente la complexité de l'algorithme de transformée en ondelettes rapide sur l'intervalle : au bord on fait une multiplication matrice-vecteur. D'où l'intérêt d'avoir des filtres de bord bien localisés. Par construction, on voit que les ondelettes de bord de $W_0^b(\mathbb{R}^+)$ sont biorthogonales aux autres fonctions d'échelle intérieures de $\tilde{V}_0(\mathbb{R}^+)$, mais on ne peut pas garantir leur biorthogonalité vis à vis des autres ondelettes intérieures de $\tilde{W}_0(\mathbb{R}^+)$. Pour résoudre ce problème, on propose une nouvelle définition des ondelettes de bord Ψ_ℓ de $W_0^b(\mathbb{R}^+)$, en leur enlevant leurs projections sur les ondelettes intérieures de $\tilde{W}_0^{int}(\mathbb{R}^+)$ [109] :

Définition 2.1.4

$$\Psi_\ell(x) := \sqrt{2}\left(I - \mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)} - \mathcal{Q}_0\right)(\varphi(2x - k_\ell))\,|_{[0,+\infty[} \qquad \ell = 0, \ldots, p_0 - 1 \tag{2.1.48}$$

Ici $\mathcal{Q}_0$ est l'opérateur de projection sur les ondelettes intérieures de $W_0^{int}(\mathbb{R}^+)$:

$$\mathcal{Q}_0(f) = \sum_{k \geq p^*} \langle f, \tilde{\psi}_k \rangle \psi_k \tag{2.1.49}$$

On procède de même pour les ondelettes $\tilde{\Psi}_\ell$. La propriété de biorthogonalité est toujours conservée entre les ensembles des ondelettes intérieures de deux analyses multirésolution sur $\mathbb{R}^+$. Pour rendre biorthogonales les ondelettes de bord de $W_0^b(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{W}_0^b(\mathbb{R}^+)$, il est possible de procéder comme pour les fonctions d'échelle. On va chercher une matrice notée E qui satisfait la condition :

$$E G^{\Psi,\tilde{\Psi}} \tilde{E}^T = I \tag{2.1.50}$$

avec

$$[G^{\Psi,\tilde{\Psi}}]_{k,l} = \langle \Psi_k, \tilde{\Psi}_l \rangle, \qquad 0 \leq k,\ l \leq p^* - 1 \tag{2.1.51}$$

Remarque 2.1.5
L'existence d'une telle matrice E est assurée par l'inversibilité de la matrice $G^{\Psi,\tilde{\Psi}}$. Celle-ci est obtenue dès que la matrice $G^{\Phi,\tilde{\Phi}}$ des fonctions d'échelle est inversible [2]. □

On note sans distinction les ondelettes de $W_0(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{W}_0(\mathbb{R}^+)$ par ψ_k et $\tilde{\psi}_k$ respectivement et on pose :

$$W_0(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\psi_k,\ k \geq 0\} \qquad \text{et} \qquad \tilde{W}_0(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\psi}_k,\ k \geq 0\} \tag{2.1.52}$$

Les ondelettes de bord ainsi définies vérifient une relation à deux échelle :

Proposition 2.1.3
Il existe des matrices notées G et $\tilde{G}$ telles que, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{+\infty} G_{m,k}\varphi_{1,k} \qquad \textit{et} \qquad \tilde{\psi}_m = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{G}_{m,k}\tilde{\varphi}_{1,k} \tag{2.1.53}$$

où $\varphi_{1,k}$ et $\tilde{\varphi}_{1,k}$ sont les fonctions d'échelle de $V_1(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_1(\mathbb{R}^+)$ notées avec la convention faite en (2.1.22).

La proposition 2.1.3 va se déduire des calculs que nous allons détailler ci-dessous. Ces calculs vont justifier aussi le choix de la deuxième définition 2.1.4 pour la construction des ondelettes de bord. On commence par calculer les coefficients de la projection $\mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)}(\varphi_{1,k_\ell})$, et pour cela on utilise les notations de l'équation (2.1.21) :

$$\mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)}(\varphi_{1,k_\ell}) = \sum_{k\geq 0} \langle \varphi_{1,k_\ell}, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_k \tag{2.1.54}$$

Pour $0 \leq \ell \leq p_0 - 1$, on définit les indices k_ℓ suivants :

$$k_\ell = 2k_0 + \tilde{n}_2 + 2(\ell - p_0), \qquad 0 \leq \ell \leq p_0 - 1$$

Par construction, on a $k_\ell \geq k_0$, ce qui permet de déduire :

$$\langle \varphi_{1,k_\ell}, \tilde{\varphi}_k \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{H}_{k,n} \langle \varphi_{1,k_\ell}, \tilde{\varphi}_{1,n} \rangle = \tilde{H}_{k,k_\ell - k^* + \tilde{r}} \tag{2.1.55}$$

et

$$\mathcal{Q}_0(\varphi_{1,k_\ell}) = \sum_{k\geq p^*} \tilde{g}_{k_\ell - 2k}\psi_k \tag{2.1.56}$$

On définit les filtres de bord associés aux ondelettes de bord Ψ_ℓ et $\tilde{\Psi}_\ell$ par :

$$\Psi_\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} G_{\ell,k}\varphi_{1,k},\ 0 \leq \ell \leq p_0 - 1 \ \text{ et } \ \tilde{\Psi}_\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{G}_{\ell,k}\tilde{\varphi}_{1,k},\ 0 \leq \ell \leq \tilde{p}_0 - 1 \tag{2.1.57}$$

Si on insère les résultats des projections $\mathcal{P}_{V_0(\mathbb{R}^+)}(\varphi_{1,k_\ell})$ et $\mathcal{Q}_0(\varphi_{1,k_\ell})$ dans la définition 2.1.4 des ondelettes de bord, on trouve des expressions analytiques pour les filtres G et $\tilde{G}$ au bord. Ces expressions correspondent aux :

$$G_{\ell,k} = \delta_{k_\ell - k^* + \tilde{r},k} - \sum_{n\geq 0} \tilde{H}_{n,k_\ell - k^*+\tilde{r}} H_{n,k} - \sum_{n\geq p^*} \tilde{g}_{k_\ell - 2n} g_{k+k^*-\tilde{r}-2n},\ 0 \leq \ell \leq p_0 - 1$$

et

$$\tilde{G}_{\ell,k} = \delta_{\tilde{k}_\ell - k^* + \tilde{r},k} - \sum_{n\geq 0} H_{n,\tilde{k}_\ell - k^*+\tilde{r}} \tilde{H}_{n,k} - \sum_{n\geq p^*} g_{\tilde{k}_\ell - 2n} \tilde{g}_{k+k^*-\tilde{r}-2n},\ 0 \leq \ell \leq \tilde{p}_0 - 1$$

Ces deux dernières relations se simplifient si on insère la relation de biorthogonalité discrète ci-dessous :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tilde{h}_{k-2n} h_{m-2n} + \tilde{g}_{k-2n} g_{m-2n}) = \delta_{k-m}, \tag{2.1.58}$$

compte tenu de la définition des filtres des fonctions d'échelle H et $\tilde{H}$ pour les valeurs de $k \geq \tilde{r}$:

$$\forall\ k \geq \tilde{r},\ H_{k,n} = h_{n+\tilde{r}-k^*-2k} \qquad \text{et} \qquad \tilde{H}_{k,n} = \tilde{h}_{n+\tilde{r}-k^*-2k} \tag{2.1.59}$$

On retrouve finalement ces expressions, beaucoup plus simples à évaluer numériquement, pour les filtres d'ondelettes G et $\tilde{G}$ au bord :

$$G_{\ell,k} = -\sum_{n=0}^{\tilde{r}-1} \tilde{H}_{n,k_\ell - k^*+\tilde{r}} H_{n,k} + \sum_{n\leq k^*-1} \tilde{h}_{k_\ell - 2n} h_{k+k^*-\tilde{r}-2n} + \sum_{n\leq p^*-1} \tilde{g}_{k_\ell - 2n} g_{k+k^*-\tilde{r}-2n},$$

et

$$\tilde{G}_{\ell,k} = -\sum_{n=0}^{\tilde{r}-1} H_{n,\tilde{k}_\ell - k^*+\tilde{r}} \tilde{H}_{n,k} + \sum_{n\leq k^*-1} h_{\tilde{k}_\ell - 2n} \tilde{h}_{k+k^*-\tilde{r}-2n} + \sum_{n\leq p^*-1} g_{\tilde{k}_\ell - 2n} \tilde{g}_{k+k^*-\tilde{r}-2n}$$

L'intérêt de ces deux dernières relations, est de voir qu'on a une limite supérieure pour la taille des filtres G et $\tilde{G}$ aux bords. On voit aussi que cette limite est conditionnée par la taille des filtres H et $\tilde{H}$ des fonctions d'échelle au bord [109].
Comme on a supposé les bases de $V_1(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{V}_1(\mathbb{R}^+)$ biorthogonales pour faire ces calculs, par simple substitution, on voit que le calcul de la matrice de Gram des ondelettes ψ_k et $\tilde{\psi}_k$ revient à calculer le produit des matrices suivant :

$$G^{\Psi,\tilde{\Psi}} = G.\tilde{G}^T \tag{2.1.60}$$

Le calcul de la matrice de Gram des ondelettes de bord, pour la biorthogonalisation, revient alors à calculer les (p^*, p^*) termes de la matrice $G.\tilde{G}^T$. En pratique, ce calcul ne pose pas de problème dans la mesure où on connaît les expressions analytiques.

Exemple 2.1.2
On trace les ondelettes associées aux fonctions d'échelles de l'exemple 2.1.1. Sur la figure 2.4, on trace l'ondelette intérieure et les trois ondelettes de bord. De même on trace les ondelettes intérieures biorthogonales ψ et $\tilde{\psi}$ sur la figure 2.5, ainsi que les trois ondelettes de bord primaires et les trois ondelettes biorthogonales sur la figure 2.5.

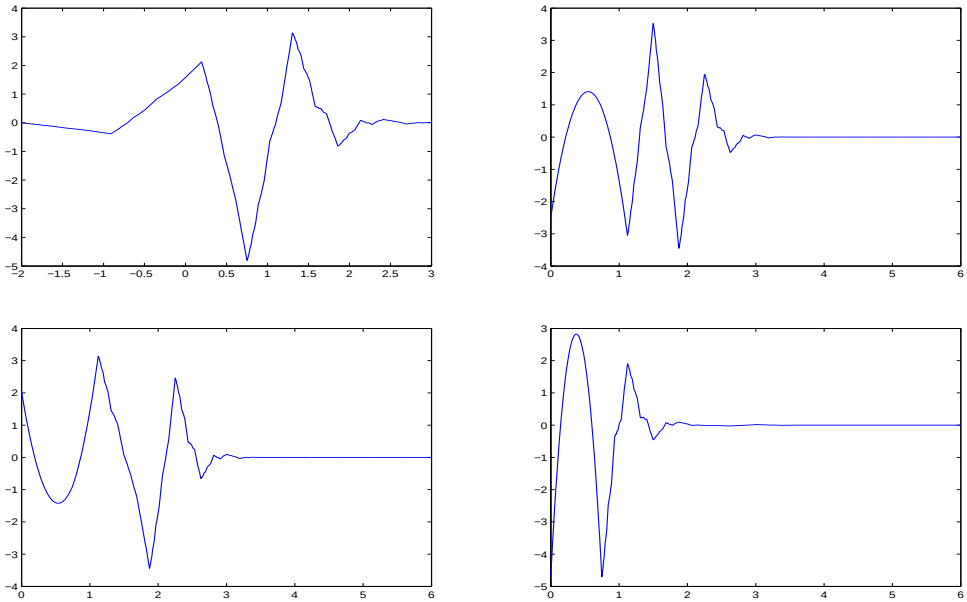

FIGURE 2.4 – Ondelette intérieure et les trois ondelettes de bord en 0. Cas du générateur orthogonal de Daubechies $(r = 3)$ associé aux fonctions d'échelle de la figure Fig 2.1.

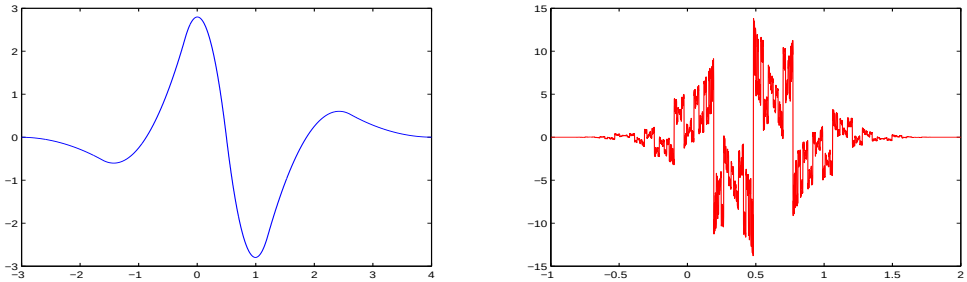

FIGURE 2.5 – Ondelettes biorthogonales associées aux générateurs B-Spline à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$.

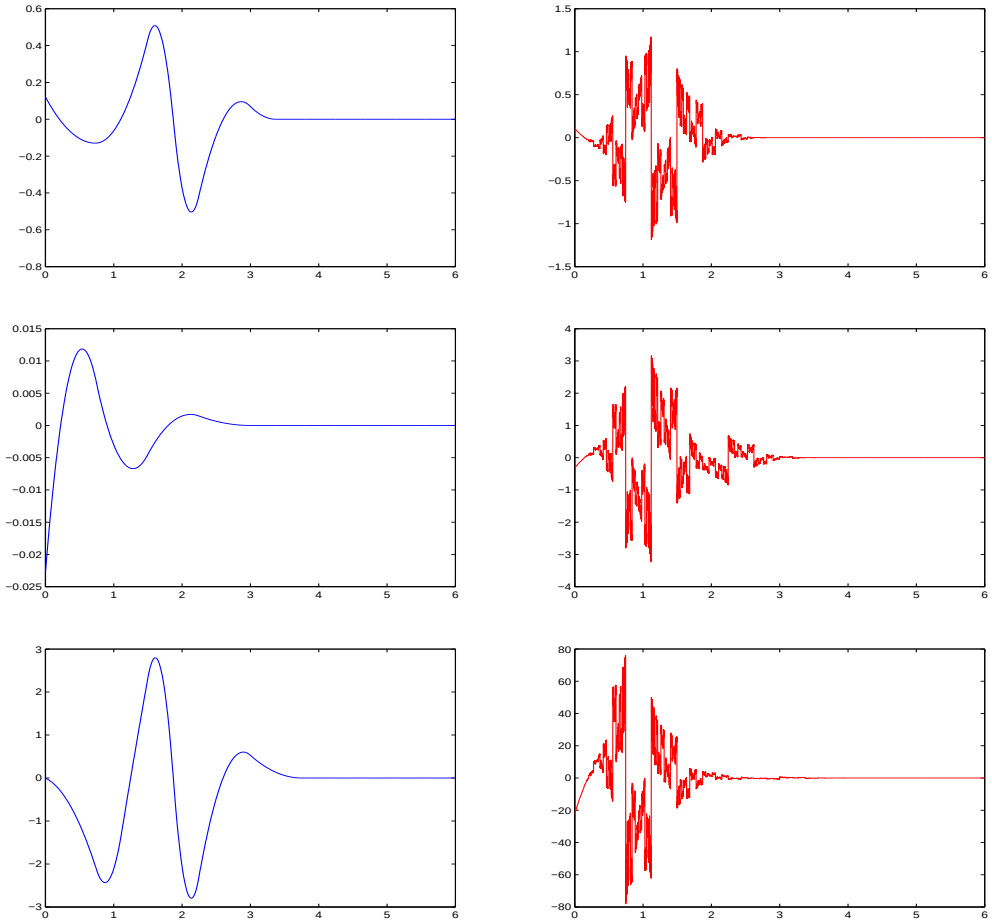

FIGURE 2.6 – Ondelettes de bord biorthogonales en 0 associées aux générateurs B-Spline à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$.

2.2 Passage à l'intervalle $[0,1]$

Nous allons voir comment adapter la construction faite sur $\mathbb{R}^+$ au cas de l'intervalle $[0,1]$. On commence par introduire l'opérateur de changement de variable noté T de [95] qui permet de faire une symétrisation de la construction entre l'intervalle $[0,+\infty[$ et l'intervalle $]-\infty,1]$:

$$\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ Tf(x) = f(1-x) \tag{2.2.1}$$

A l'aide de ce changement de variable, on définit des nouvelles fonctions d'échelle $T\varphi$ et $T\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$. Il est facile de vérifier que $T\varphi$ et $T\tilde{\varphi}$ ont respectivement $[1-n_2, 1-n_1]$ et $[1-\tilde{n}_2, 1-\tilde{n}_1]$ pour

supports et que ces nouvelles fonctions sont biorthogonales entre elles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T\varphi_k T\tilde{\varphi}_l dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(1-x-k)\tilde{\varphi}(1-x-l)dx = \delta_{k,l}, \ \ \forall k, \ l \in \mathbb{Z} \tag{2.2.2}$$

Avec les fonctions $T\varphi$ et $T\tilde{\varphi}$ on construit une nouvelle analyse multirésolution biorthogonale de $L^2(\mathbb{R}^+)$ de la façon décrite dans la section précédente. Pour avoir une analyse multirésolution de $L^2(]-\infty,1])$, il suffit tout simplement d'appliquer l'opérateur T à cette nouvelle analyse multirésolution. Alors, la construction d'une analyse multirésolution de $L^2([0,1])$ se fait en gardant un nombre fini de fonctions bien choisies qui sont dans les deux analyses multirésolution de $L^2([0,+\infty[)$ et $L^2(]-\infty,1])$. Pour être plus précis, on se fixe un couple de paramètres entiers (δ_0,δ_1). Comme les fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ sont à supports compacts, il existe un entier $j \geq 0$ tel que, au moins une de ces fonctions a son support inclus dans l'intervalle $[\frac{\delta_0}{2^j}, 1-\frac{\delta_1}{2^j}]$. En raisonnant sur la taille des supports, par simple calcul, on voit que :

$$\frac{n_2-n_1}{2^j} \leq 1 - \frac{\delta_1}{2^j} - \frac{\delta_0}{2^j} \Rightarrow j \geq \log_2(n_2+\delta_1+\delta_0-n_1) \tag{2.2.3}$$

Soit j_{min} le plus petit des entiers positifs tels que l'équation (2.2.3) ait lieu. Pour $j > j_{min}$ assez grand, on peut définir les ensembles d'indices suivants :
L'ensemble S_j^{int} d'indices des fonctions dont les supports sont inclus dans l'intervalle $[\frac{\delta_0}{2^j}, 1-\frac{\delta_1}{2^j}]$:

$$S_j^{int} = \{k_0 \leq k \leq 2^j - k_1\}$$

où on a posé :

$$k_0 = \delta_0 - n_1 \qquad \text{et} \qquad k_1 = \delta_1 + n_2 \tag{2.2.4}$$

L'ensemble $S_j^\flat$ d'indices des fonctions dont les supports rencontrent l'intervalle $[0, \frac{\delta_0}{2^j}]$ et l'ensemble $S^\sharp$ d'indices des fonctions dont les supports rencontrent l'intervalle $[1-\frac{\delta_1}{2^j}, 1]$:

$$S_j^\flat = \{1-n_2 \leq k \leq k_0 - 1\} \qquad \text{et} \qquad S_j^\sharp = \{2^j - \delta_1 - n_2 + 1 \leq k \leq 2^j - n_1 - 1\}$$

La propriété de reproduction polynomiale des fonctions $\varphi_{j,k}$ fait que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \ell \leq r-1$ et $j > j_{min}$, on a :

$$\frac{2^{j/2}(2^j x)^\ell}{\ell!} = \sum_{k \in S_j^\flat} \langle \frac{x^\ell}{\ell!}, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_{j,k}(x)\chi_{[0,1]} + \sum_{k \in S_j^{int}} \langle \frac{x^\ell}{\ell!}, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_{j,k}(x) + \sum_{k \in S_j^\sharp} \langle \frac{x^\ell}{\ell!}, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_{j,k}(x)\chi_{[0,1]} \tag{2.2.5}$$

Ce qui permet de définir les fonctions d'échelle de bord en 0 notées $\Phi_{j,\ell}^\flat = 2^{j/2}\Phi_\ell^\flat(2^j.)$ et celles en 1 notées $\Phi_{j,\ell}^\sharp = 2^{j/2}\Phi_\ell^\sharp(2^j.)$, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \ell \leq r-1$ et $j > j_{min}$, par :

$$\frac{2^{j/2}(2^j x)^\ell}{\ell!} = 2^{j/2}\Phi_\ell^\flat(2^j x) + \sum_{k \in S_j^{int}} \tilde{p}_\ell(k)\ \varphi_{j,k}(x) + 2^{j/2}\Phi_\ell^\sharp(2^j(1-x)) \tag{2.2.6}$$

Remarque 2.2.1
Les fonctions d'échelle de bord $\Phi^{\sharp}_{j,\ell}$ correspondent aux fonctions d'échelle de bord de l'analyse multirésolution de $L^2(]-\infty,0])$ construite avec $T\varphi$ et $T\tilde{\varphi}$. □

Pour construire l'analyse multirésolution biorthogonale, on introduit des nouveaux paramètres $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1)$ tels que :

$$\tilde{k}_0 - \tilde{r} = k_0 - r \qquad \text{et} \qquad \tilde{k}_1 - \tilde{r} = k_1 - r \tag{2.2.7}$$

pour assurer l'égalité des dimensions. De même, pour $j > \tilde{j}_{min}$ assez grand on construit de manière analogue une analyse multirésolution de $[0,1]$, de nouveaux paramètres $\tilde{k}_0$ et $\tilde{k}_1$, en remplaçant φ par $\tilde{\varphi}$ et r par $\tilde{r}$. On note $V_j([0,1])$ et $\tilde{V}_j([0,1])$ les espaces issus de ces deux analyses multirésolution :

$$V_j([0,1]) = \mathrm{Vect}\{\Phi^{\flat}_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq r-1} \oplus \mathrm{Vect}\{\varphi_{j,k};\ k \in S_j^{int}\} \oplus \mathrm{Vect}\{\Phi^{\sharp}_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq r-1} \tag{2.2.8}$$

$$\tilde{V}_j([0,1]) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\Phi}^{\flat}_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq \tilde{r}-1} \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\varphi}_{j,k};\ k \in \tilde{S}_j^{int}\} \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\Phi}^{\sharp}_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq \tilde{r}-1} \tag{2.2.9}$$

On biorthogonalise les bases de $V_j([0,1])$ et $\tilde{V}_j([0,1])$ comme décrit précédemment.

Proposition 2.2.1
Soient (δ_0, δ_1) et $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1)$ deux couples d'entiers positifs qui vérifient l'équation (2.2.7). Pour $j >$ max$\{j_{min}, \tilde{j}_{min}\}$ assez grand, où :

$$j_{min} > \log_2(k_1 + k_0 - 2) \qquad \textit{et} \qquad \tilde{j}_{min} > \log_2(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_0 - 2), \tag{2.2.10}$$

les espaces $V_j([0,1])$ et $\tilde{V}_j([0,1])$ forment une analyse multirésolution biorthogonale de $L^2([0,1])$ au sens de la définition 2.1.1.

Cette proposition a été démontrée par L. Andersson et al. dans [2] et reprise plus en détail par R. Masson dans [90].

La base d'ondelettes associée est aussi constituée des ondelettes de bord en 0, des ondelettes internes et des ondelettes de bord en 1. Une fois qu'on a défini les ondelettes internes, comme on est en dimension finie, il est plus facile de calculer le nombre d'ondelettes à rajouter à chaque bord.

Remarque 2.2.2
Comme les paramètres (δ_0, δ_1) et $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1)$ vérifient (2.2.7), un calcul direct donne :

$$\dim(V_j([0,1])) = 2^j - k_1 - k_0 + 1 + 2r = 2^j - \tilde{k}_1 - \tilde{k}_0 + 1 + 2\tilde{r} = \dim(\tilde{V}_j([0,1])) \tag{2.2.11}$$

Ce qui permet de déduire :

$$\dim(W_j([0,1])) = \dim(V_{j+1}([0,1])) - \dim(V_j([0,1])) = 2^j \tag{2.2.12}$$

□

Pour définir les ondelettes internes, une démarche analogue à celle sur $\mathbb{R}^+$ permet de définir $W_j^{int}([0,1])$ comme :

$$W_j^{int}([0,1]) = \mathrm{Vect}\{\psi_k;\ p_0 \leq k \leq 2^j - p_1 - 1\} \tag{2.2.13}$$

avec :

$$p_0 = \lfloor \frac{\tilde{n}_2 + k_0 - 1}{2} \rfloor \qquad\qquad p_1 = \lfloor \frac{k_1 - \tilde{n}_1 + 1}{2} \rfloor$$

Ce calcul est bien compatible avec le résultat annoncé sur $\mathbb{R}^+$. En fait, il est démontré dans [90] que pour avoir une base de l'espace d'ondelettes sur $[0,1]$ noté $W_j([0,1])$, il suffit de rajouter p_0 ondelettes de bord notées $\Psi^\flat_{j,\ell}$ en 0 et p_1 ondelettes de bord notées $\Psi^\sharp_{j,\ell}$ en 1 aux ondelettes intérieures de $W_j^{int}([0,1])$. La construction de ces ondelettes de bords utilise la définition 2.1.4, que ce soit au bord 0 ou au bord 1. De même, on construit l'espace $\tilde{W}_j^{int}([0,1])$ de paramètres $\tilde{p}_0$ et $\tilde{p}_1$, et les ondelettes de bords $\tilde{\Psi}^\flat_{j,\ell}$ et $\tilde{\Psi}^\flat_{j,\ell}$. Les espaces d'ondelettes biorthogonaux $W_j([0,1])$ et $\tilde{W}_j([0,1])$ correspondent aux :

$$W_j([0,1]) = \mathrm{Vect}\{\Psi^\flat_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq p_0-1} \oplus W_j^{int}([0,1]) \oplus \mathrm{Vect}\{\Psi^\sharp_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq p_1-1}$$

et

$$\tilde{W}_j([0,1]) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\Psi}^\flat_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq \tilde{p}_0-1} \oplus \tilde{W}_j^{int}([0,1]) \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\Psi}^\sharp_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq \tilde{p}_1-1}$$

Exceptées les ondelettes intérieures, les ondelettes de bords de $W_j([0,1])$ et $\tilde{W}_j([0,1])$ ne sont pas biorthogonales. Pour avoir des bases d'ondelettes biorthogonales, on utilise la technique de biorthogonalisation décrite dans le cas des fonctions d'échelle.

Exemple 2.2.1 *On trace les fonctions d'échelle de bord orthogonales en* 1 *ainsi que les ondelettes associées au générateur de l'exemple 2.1.1. Pour les générateurs biorthogonaux, il suffit de prendre leurs symétriques.*

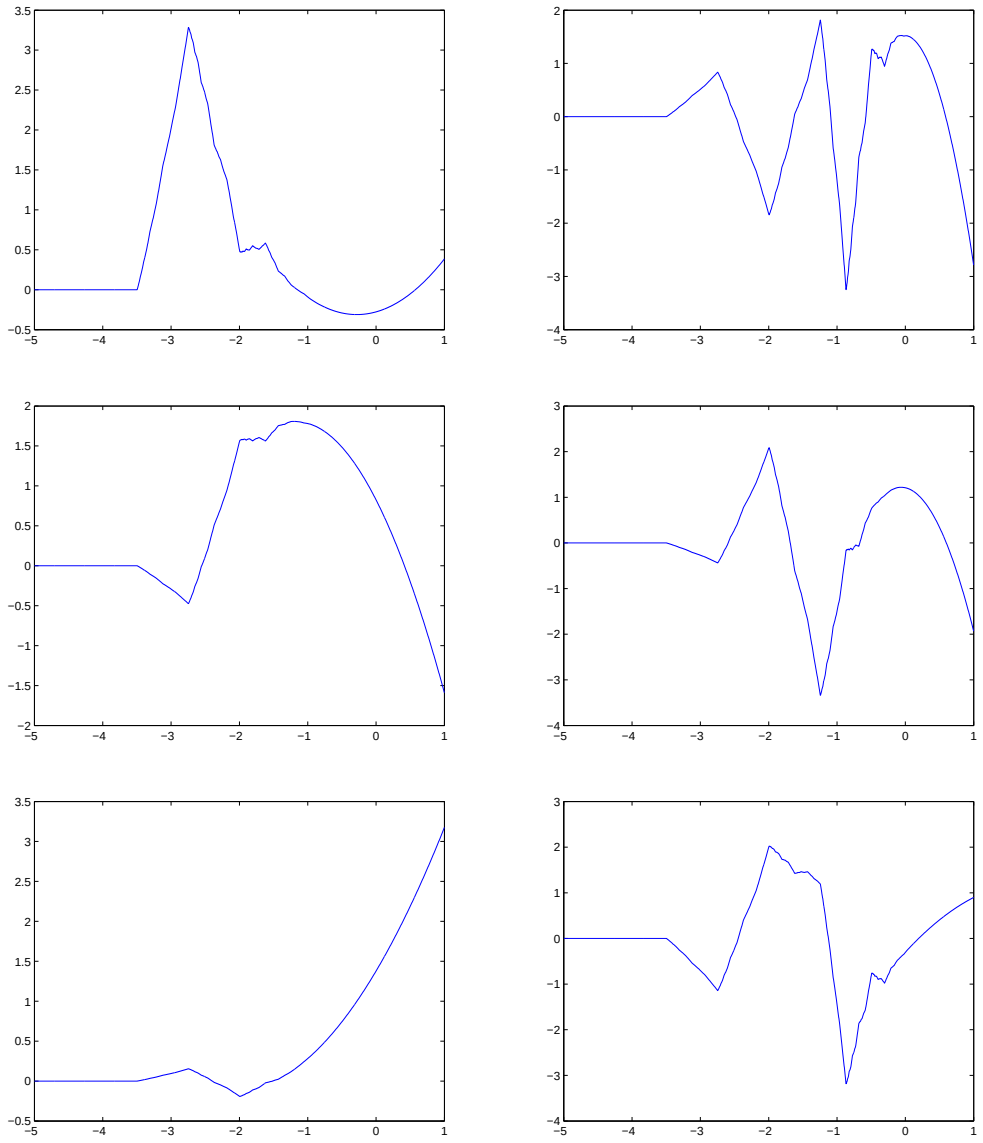

FIGURE 2.7 – Fonctions d'échelle de bord en 1 ($1^{\text{ère}}$ colonne) et ondelettes de bord en 1 ($2^{\text{ème}}$ colonne), en allant de la gauche vers la droite. Cas de générateur orthogonal de Daubechies $(r = 3)$.

2.2.1 Prise en compte des conditions aux limites

Dans les simulations numériques, les conditions aux limites imposées à la solution du problème sont souvent de type Dirichlet ou Neumann. On peut aussi vouloir imposer des conditions aux

limites mixtes de type Robin. Comme on veut générer des espaces vectoriels, on suppose alors que les conditions aux limites sont homogènes. Pour simplifier, on va traiter seulement le cas du bord 0, par symétrie on déduit les résultats du bord 1.

Considérons une analyse multirésolution de $L^2([0,1])$ qui dispose de $r > 0$ capacité de reproduction polynomiale. Si on veut résoudre un problème avec des conditions aux limites homogènes du type :

$$\frac{d^k f}{dx^k}(0) = 0, \qquad \forall\, k \leq r-1 \tag{2.2.14}$$

il suffit de trouver une approximation de f dans $V_j([0,1)$ qui vérifie la condition 2.2.14. Or, par construction, les fonctions d'échelle de bord $\Phi^\flat_{j,\ell}$ sont polynomiales de degré ℓ en 0. Pour tout $k \leq r-1$, si on enlève de la base de $V_j([0,1)$ la fonction de bord de degré $\ell = k$ en 0, on constate que les dérivées d'ordre k des autres fonctions de bord restantes sont nulles en 0 : c'est soit une combinaison des dérivées des fonctions intérieures si $\ell < k$, soit ce sont des polynômes de degré $(\ell - k)$ en 0 si $\ell > r$. Ainsi, dans $V_j([0,1])$ pour imposer la condition 2.2.14, on retire de la base de $V_j([0,1])$ la fonction de bord $\Phi^\flat_{j,k}$, d'indice $\ell = k$: cela avant biorthogonalisation [17, 95]. On procède de même dans $\tilde{V}_j([0,1])$ pour avoir l'égalité de dimension. On obtient alors deux analyses multirésolution de $L^2([0,1])$ qui vérifient chacune l'équation (2.2.14). Dans tous les cas, on garde l'égalité des dimensions en retirant autant de fonctions de $\tilde{V}_j([0,1])$ que celles enlevées de $V_j([0,1])$.
En gardant les notations de la section précédente, une analyse multirésolution biorthogonale de $L^2([0,1])$ qui vérifie (2.2.14) est engendrée par les espaces :

$$V_j^{(k)}([0,1]) = \{\Phi^\flat_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq r-1,\ell\neq k} \oplus \{\varphi_{j,k}\}_{k_0\leq k\leq 2^j-k_1} \oplus \{\Phi^\sharp_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq r-1}$$

$$\tilde{V}_j^{(k)}([0,1]) = \{\tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq \tilde{r}-1,\ell\neq k} \oplus \{\tilde{\varphi}_{j,k}\}_{\tilde{k}_0\leq k\leq 2^j-\tilde{k}_1} \oplus \{\tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq \tilde{r}-1}$$

Le nombre d'ondelettes de bord de $W_j^{(k)}([0,1])$ et $\tilde{W}_j^{(k)}([0,1])$ reste inchangé par rapport au nombre d'ondelettes de bords de $W_j([0,1])$ et $\tilde{W}_j([0,1])$. De plus, les ondelettes de bord de $W_j^{(k)}([0,1])$ et $\tilde{W}_j^{(k)}([0,1])$ vérifient les conditions aux limites par construction.

Remarque 2.2.3
Dans le cas de conditions aux limites non homogènes, en pratique pour construire les opérateurs de relèvement, on utilise les techniques décrites dans [90]. □

Exemple 2.2.2
Comme exemple de fonctions d'échelle et ondelettes avec conditions aux limites, on reprend celui de générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$ présenté précédemment. On garde les mêmes paramètres entiers que dans les exemples précédents. En imposant Dirichlet homogène, on obtient deux fonctions d'échelle et trois ondelettes à chaque bord. Sur la figure 2.8 on trace les fonctions d'échelle et sur la figure 2.9 on trace les ondelettes, satisfaisant les conditions aux limites de Dirichlet homogènes en 0 et en 1.

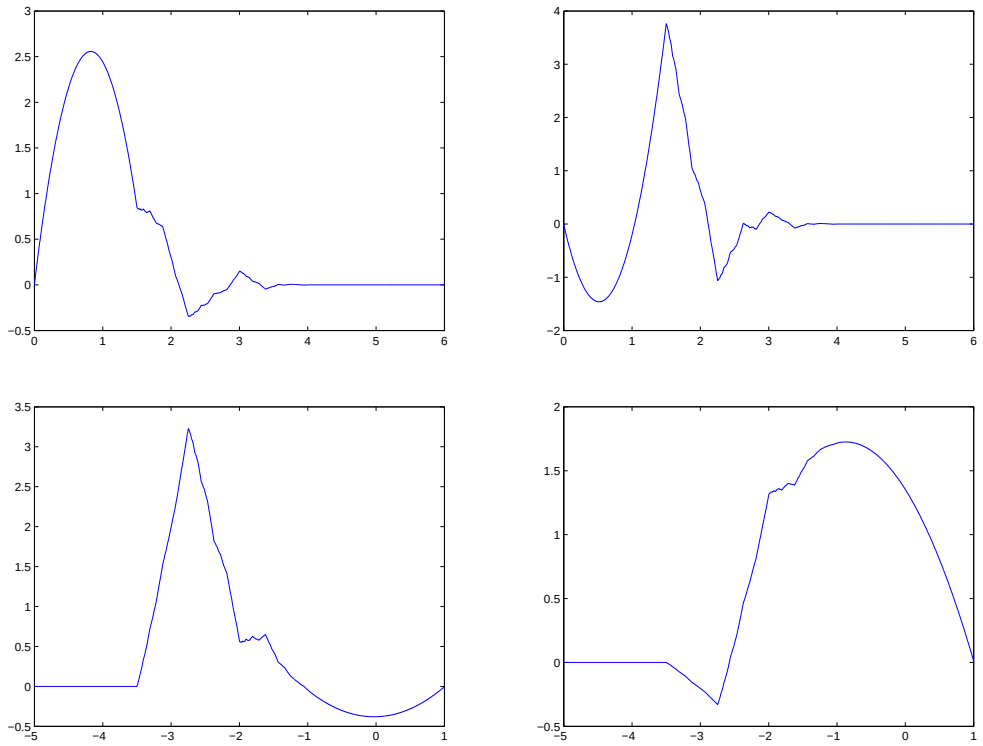

FIGURE 2.8 – Fonctions d'échelle de bord avec condition de Dirichlet homogène en 0 (1ère ligne) et en 1 (2ème ligne). Cas du générateur orthogonal de Daubechies à trois moments nuls $(r = 3)$.

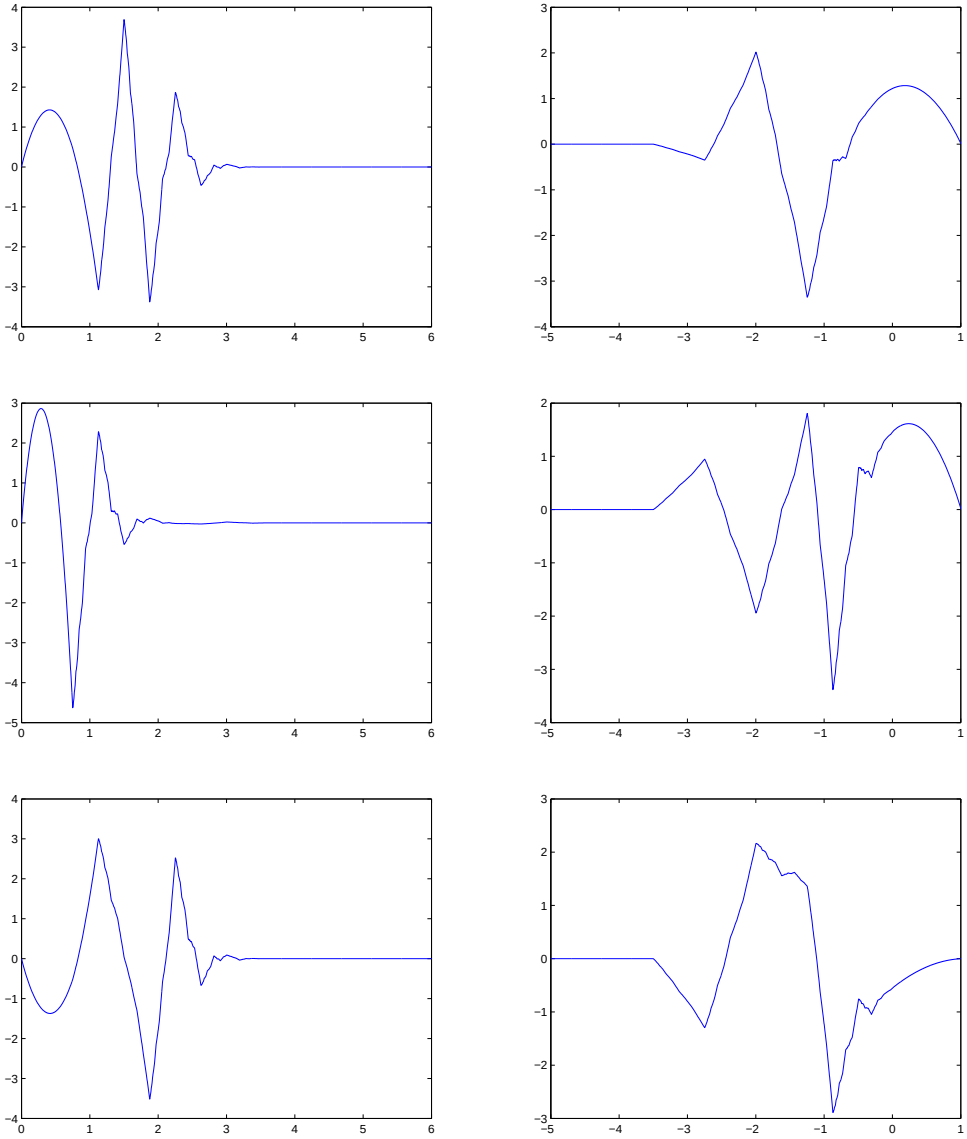

FIGURE 2.9 – Ondelettes de bord avec condition de Dirichlet homogène en 0 (1ère colonne) et en 1 (2ème colonne). Cas du générateur orthogonal de Daubechies à trois moments nuls $(r = 3)$.

2.3 Ondelettes à divergence nulle et ondelettes à rotationnel nul sur $[0,1]^n$

Dans cette partie, nous allons présenter une construction pratique d'ondelettes vecteurs à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^n$, qui peuvent vérifier des conditions aux limites physiques. La démarche à suivre est identique à celle décrite dans le cas de la construction sur $\mathbb{R}^n$. Les étapes principales de cette construction sont :

- Construction sur $[0,1]$ d'analyses multirésolution biorthogonales notées $V_j^1([0,1])$ et $\tilde{V}_j^1([0,1])$, avec $V_j^1([0,1])$ dérivable.

- Construction sur $[0,1]$ d'analyses multirésolution biorthogonales notées $V_j^0([0,1])$ et $\tilde{V}_j^0([0,1])$ reliées à $V_j^1([0,1])$ et $\tilde{V}_j^1([0,1])$ par dérivation, telles que les projecteurs biorthogonaux associés commutent avec l'opérateur de dérivation de la façon suivante :

$$\frac{d}{dx} \circ \mathcal{P}_j^1 = \mathcal{P}_j^0 \circ \frac{d}{dx} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dx} \circ \mathcal{Q}_j^1 = \mathcal{Q}_j^0 \circ \frac{d}{dx} \tag{2.3.1}$$

- Construction d'analyse multirésolution vectorielle $\vec{\mathbf{V}}_j$ de $(L^2([0,1]^n))^n$, qui permet l'étude de fonctions à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^n$, par combinaison et produit tensoriel de $V_j^1([0,1])$ et $V_j^0([0,1])$.

- Construction dans l'analyse multirésolution $\vec{\mathbf{V}}_j$ des fonctions d'échelle et ondelettes vecteurs à divergence nulle ou à rotationnel nul, selon le cas.

2.3.1 Analyse multirésolution et commutation des projecteurs multi-échelles avec l'opérateur de dérivation sur $[0,1]$

La construction d'analyses multirésolutions reliées par dérivation a été déjà faite par A. Jouini et P-G. Lemarié-Rieusset dans [72] à partir des générateurs orthogonaux de Daubechies. Ici on va présenter l'essentiel des résultats de [72], en l'étendant au cas de générateurs biorthogonaux quelconques.

On considère deux paires de générateurs biorthogonaux $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$ et $(\varphi^0, \tilde{\varphi}^0)$, supposées vérifier les relations de dérivation de la proposition 1.4.1. Avec des paramètres entiers (δ_0, δ_1) et $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1)$, on construit deux analyses multirésolution biorthogonales de $L^2([0,1])$, de la façon décrite à la

section 2.2, et on note $V_j^1([0,1])$ et $\tilde{V}_j^1([0,1])$ les espaces associés :

$$V_j^1([0,1]) = \mathrm{Vect}\{\Phi_{j,\ell}^{1\flat}\}_{0\le\ell\le r-1} \oplus \mathrm{Vect}\{\varphi_{j,k}^1\}_{k_0\le k\le 2^j-k_1} \oplus \mathrm{Vect}\{\Phi_{j,\ell}^{1\sharp}\}_{0\le\ell\le r-1}$$

$$\tilde{V}_j^1([0,1]) = \mathrm{Vect}\{\tilde{\Phi}_{j,\ell}^{1\flat}\}_{0\le\ell\le \tilde{r}-1} \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\varphi}_{j,k}^1\}_{\tilde{k}_0\le k\le 2^j-\tilde{k}_1} \oplus \mathrm{Vect}\{\tilde{\Phi}_{j,\ell}^{1\sharp}\}_{0\le\ell\le \tilde{r}-1}$$

En gardant les mêmes paramètres (δ_0,δ_1) utilisés dans la construction de $V_j^1([0,1])$, on construit l'analyse multirésolution de $L^2([0,1])$ associée à φ^0 et d'espace $V_j^0([0,1])$ telle que :

$$\dim V_j^0([0,1]) = \dim V_j^1([0,1]) - 1 \tag{2.3.2}$$

La relation $(2.3.2)$ est une conséquence de la proposition 1.4.1 et de propriétés suivantes :

Propriété 2.3.1
Soient $(\varphi^1,\tilde{\varphi}^1)$ et $(\varphi^0,\tilde{\varphi}^0)$ deux paires de générateurs biorthogonaux à support compact et reliées par dérivation/intégration :

$$\frac{d}{dx}\varphi^1(x) = \varphi^0(x) - \varphi^0(x-1) \quad \textit{et} \quad \int_x^{x+1} \tilde{\varphi}^1(t)dt = \tilde{\varphi}^0(x)$$

Alors, on a :
(i) *Relation entre les supports*

$$\mathrm{Supp}\ \varphi^1 = [n_1,n_2] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Supp}\ \varphi^0 = [n_1,n_2-1]$$

$$\mathrm{Supp}\ \tilde{\varphi}^1 = [\tilde{n}_1,\tilde{n}_2] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Supp}\ \tilde{\varphi}^0 = [\tilde{n}_1-1,\tilde{n}_2]$$

(ii) *Moments nuls*

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\tilde{\psi}^1(x)dx = 0,\ 0\le k\le r-1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} x^k\tilde{\psi}^0(x)dx = 0,\ 0\le k\le r-2$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\psi^1(x)dx = 0,\ 0\le k\le \tilde{r}-1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} x^k\psi^0(x)dx = 0,\ 0\le k\le \tilde{r}$$

De plus, ces propriétés font que si l'on construit l'espace $\tilde{V}_j^0([0,1])$ avec les mêmes paramètres $(\tilde{\delta}_0,\tilde{\delta}_1)$ que $\tilde{V}_j^1([0,1])$, on a :

$$\dim \tilde{V}_j^0([0,1]) = \dim \tilde{V}_j^1([0,1]) + 1 \tag{2.3.3}$$

En imposant une condition de Dirichlet homogène dans $\tilde{V}_j^0([0,1])$, ce qui revient à enlever deux fonctions de bord dont une en 0 et l'autre en 1, on a :

$$\dim V_j^0([0,1]) = \tilde{V}_j^0([0,1]) \tag{2.3.4}$$

Alors, on construit ainsi un espace biorthogonal à $V_j^0([0,1])$ dans $L^2([0,1])$.

Proposition 2.3.1
Soient $V_j^1([0,1])$ et $V_j^0([0,1])$ deux analyses multirésolution de $L^2([0,1])$ construites avec les mêmes paramètres entiers (δ_0, δ_1) et dont les générateurs (φ^1, φ^0) associés sont reliés par dérivation :

$$\frac{d}{dx}\varphi^1(x) = \varphi^0(x) - \varphi^0(x-1)$$

Pour $0 \leq \ell \leq r-1$, les fonctions d'échelle de bord de $V_j^1([0,1])$, définies par $(2.2.6)$, sont reliées à celles de $V_j^0([0,1])$ par :

$$\begin{aligned} &2^{-j}(\Phi_{j,0}^{1\flat})' = -\varphi_{j,k_0}^0, && 2^{-j}(\Phi_{j,\ell}^{1\flat})' = \Phi_{j,\ell-1}^{0\flat} - \tilde{p}_\ell^1(k_0-1)\,\varphi_{j,k_0}^0 \\ &2^{-j}(\Phi_{j,0}^{1\sharp}(1-.))' = \varphi_{j,2^j-k_1+1}^0, && 2^{-j}(\Phi_{\ell}^{1\sharp}(1-.))' = \Phi_{j,\ell-1}^{0\sharp}(1-.) + \tilde{p}_\ell^1(2^j-k_1+1)\,\varphi_{j,2^j-k_1+1}^0 \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

De même, pour $0 \leq \ell \leq \tilde{r}$, les fonctions d'échelle de bords de leurs espaces biorthogonaux respectifs $\tilde{V}_j^1([0,1])$ et $\tilde{V}_j^0([0,1])$ construits avec les mêmes paramètres $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1)$ vérifient :

$$\begin{aligned} &2^{-j}(\tilde{\Phi}_{j,0}^{0\flat})' = -\tilde{\varphi}_{j,\tilde{k}_0}^1, && 2^{-j}(\tilde{\Phi}_{j,\ell}^{0\flat})' = \tilde{\Phi}_{j,\ell-1}^{1\flat} - p_\ell^0(\tilde{k}_0)\,\tilde{\varphi}_{j,\tilde{k}_0}^1 \\ &2^{-j}(\tilde{\Phi}_{j,0}^{0\sharp}(1-.))' = \tilde{\varphi}_{j,2^j-\tilde{k}_1}^1, && 2^{-j}(\tilde{\Phi}_{j,\ell}^{0\sharp}(1-.))' = \tilde{\Phi}_{j,\ell-1}^{1\sharp}(1-.) + p_\ell^0(2^j-\tilde{k}_1)\tilde{\varphi}_{j,2^j-\tilde{k}_1}^1 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Preuve :
Pour démontrer cette proposition, il suffit juste de différentier la relation de reconstruction polynomiale sur $[0,1]$, dans chacun des cas. On va démontrer seulement la relation 2.3.5, la deuxième se démontre de la même façon. Le cas $\ell = 0$ est évident, c'est une propriété des supports. Pour $\ell = 1, \ldots, (r-1)$ et $j \geq j_{min}$, sur $[0,1]$ la relation de reconstruction polynomiale donne :

$$\frac{2^{j/2}(2^j x)^\ell}{\ell!} = \Phi_{j,\ell}^{1\flat}(x) + \sum_{k=k_0}^{2^j-k_1} \tilde{p}_\ell^1(k)\,\varphi_{j,k}^1(x) + \Phi_{j,\ell}^{1\sharp}(1-x)$$

En dérivant cette équation, on retrouve :

$$\frac{2^{j/2}(2^j x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} = 2^{-j}(\Phi_{j,\ell}^{1\flat}(x))' + \sum_{k=k_0}^{2^j-k_1} \tilde{p}_\ell^1(k)\,[\varphi_{j,k}^0(x) - \varphi_{j,k+1}^0(x)] + 2^{-j}(\Phi_{j,\ell}^{1\sharp}(1-x))' \tag{2.3.7}$$

Une fois arrangée cette relation donne :

$$\begin{aligned} \frac{2^{j/2}(2^j x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} &= 2^{-j}(\Phi_{j,\ell}^{1\flat}(x))' + \tilde{p}_\ell^1(k_0-1)\varphi_{j,k_0}^0(x) \\ &+ \sum_{k=k_0}^{2^j-k_1+1} [\tilde{p}_\ell^1(k) - \tilde{p}_\ell^1(k-1)]\,\varphi_{j,k}^0(x)] \\ &-\tilde{p}_\ell^1(2^j-k_1+1)\varphi_{j,2^j-k_1+1}^0(x) + 2^{-j}(\Phi_{j,\ell}^{1\sharp}(1-x))' \end{aligned}$$

et comme

$$\tilde{p}^0_{\ell-1}(k) = \langle \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}, \tilde{\varphi}^0_k \rangle = -\langle \frac{x^\ell}{\ell!}, \tilde{\varphi}^1_{k-1} - \tilde{\varphi}^1_k \rangle = \tilde{p}^1_\ell(k) - \tilde{p}^1_\ell(k-1),$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{j/2}(2^j x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} = 2^{-j}(\Phi^{1\flat}_{j,\ell}(x))' + \tilde{p}^1_\ell(k_0-1)\varphi^0_{j,k_0}(x) \\
&+ \sum_{k=k_0}^{2^j-k_1+1} \tilde{p}^0_\ell(k)\varphi^0_{j,k}(x) \\
&-\tilde{p}^1_\ell(2^j-k_1+1)\varphi^0_{j,2^j-k_1+1}(x) + 2^{-j}(\Phi^{1\sharp}_{j,\ell}(1-x))'
\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que :

$$\frac{2^{j/2}(2^j x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} = \Phi^{0\flat}_{j,\ell-1}(x) + \sum_{k=k_0}^{2^j-k_1+1} \tilde{p}^0_\ell(k)\ \varphi^0_{j,k}(x) + \Phi^{0\sharp}_{j,\ell-1}(1-x)$$

d'où on conclut les résultats de (2.3.5) en égalisant ces deux dernières relations. ■

Le fait d'imposer une condition au limite de Dirichlet homogène à l'espace $\tilde{V}^0_j([0,1])$ permet d'obtenir des résultats sur la commutation de l'opérateur de dérivation avec les projecteurs multi-échelles.

Proposition 2.3.2
Soient $(V^1_j([0,1]), \tilde{V}^1_j([0,1]))$ et $(V^0_j([0,1]), \tilde{V}^0_j([0,1]))$ deux paires d'analyses multirésolutions biorthogonales de $L^2([0,1])$ qui vérifient la proposition 2.3.1, avec $\tilde{V}^0_j([0,1]) \subset H^1_0([0,1])$. On note par $(\mathcal{P}^1_j, \tilde{\mathcal{P}}^1_j)$ et $(\mathcal{P}^0_j, \tilde{\mathcal{P}}^0_j)$ leurs projecteurs multi-échelles obliques respectifs. Alors, on a :

(i) $\frac{d}{dx}V^1_j([0,1]) = V^0_j([0,1])$ *et* $\frac{d}{dx} \circ \mathcal{P}^1_j f = \mathcal{P}^0_j \circ \frac{d}{dx} f,\ \ \forall\, f \in H^1([0,1])$

(ii) $\int_0^x \tilde{V}^1_j([0,1]) = \tilde{V}^0_j([0,1])$ *et* $\frac{d}{dx} \circ \tilde{\mathcal{P}}^0_j f = \tilde{\mathcal{P}}^1_j \circ \frac{d}{dx} f,\ \ \forall\, f \in H^1_0([0,1])$

(iii) $V^0_j([0,1]) = \{f \in L^2([0,1]) :\ \exists\, g \in V^1_j([0,1]),\ g' = f\}$

(iv) $\tilde{V}^0_j([0,1]) = \{f \in L^2([0,1]) :\ f' \in \tilde{V}^1_j([0,1]),\ f(0) = f(1) = 0\}$

Preuve :
Les relations $\frac{d}{dx}V^1_j([0,1]) = V^0_j([0,1])$ et $\int_0^x \tilde{V}^1_j([0,1]) = \tilde{V}^0_j([0,1])$ sont une conséquence de la définition des fonctions des bases, et elles sont démontrées au niveau de la proposition 2.3.1.

Le fait qu'on impose une condition de Dirichlet à $\tilde{V}_j^0([0,1])$ veut dire qu'on est bien dans le cas des analyses multirésolutions biorthogonales de [72], ce qui permet de retrouver (iii) et (iv). En utilisant (iii) et (iv), on a forcement la propriété de commutation : $\frac{d}{dx} \circ \mathcal{P}_j^1 f = \mathcal{P}_j^0 \circ \frac{d}{dx} f$, pour tout $f \in H^1([0,1])$. La relation de commutation $\frac{d}{dx} \circ \tilde{\mathcal{P}}_j^0 f = \tilde{\mathcal{P}}_j^1 \circ \frac{d}{dx} f$ pour tout $f \in H_0^1([0,1])$ est un cas particulier de la première. En effet, si on adapte les conventions de notations faites en (2.1.22) et (2.1.52) à l'intervalle, et on note $(\varphi_{j,k}^1, \tilde{\varphi}_{j,k}^1)$ et $(\varphi_{j,k}^0, \tilde{\varphi}_{j,k}^0)$ les bases de $(V_j^1([0,1]), \tilde{V}_j^1([0,1]))$ et $(V_j^0([0,1]), \tilde{V}_j^0([0,1]))$ respectivement (une fois les bases biorthogonalisées), d'après (i) et (ii), il existe des matrices qu'on note ici A^0 et B^0 telles que :

$$\frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_{j,k}^0 = \sum_n A_{k,n}^0 \tilde{\varphi}_{j,n}^1 \quad \text{et} \quad -\int_0^x \varphi_{j,k}^0 = \sum_m B_{k,m}^0 \varphi_{j,m}^1 \tag{2.3.8}$$

Par la biorthogonalité des bases, on a :

$$-\langle \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_{j,k}^0, \int_0^x \varphi_{j,k'}^0 \rangle = \delta_{k-k'} = \sum_n A_{k,n}^0 B_{k',n}^0 = [A^0 B^{0T}]_{k,k'} \tag{2.3.9}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tilde{\mathcal{P}}_j^0(f) &= \sum_k \langle f, \varphi_{j,k}^0 \rangle \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_{j,k}^0 = \sum_n \sum_m \sum_k B_{k,m}^0 A_{k,n}^0 \langle \frac{d}{dx} f, \varphi_{j,m}^1 \rangle \tilde{\varphi}_{j,n}^1 \\ &= \sum_n \sum_m \delta_{n-m} \langle \frac{d}{dx} f, \varphi_{j,m}^1 \rangle \tilde{\varphi}_{j,n}^1 = \sum_n \langle \frac{d}{dx} f, \varphi_{j,n}^1 \rangle \tilde{\varphi}_{j,n}^1 = \tilde{\mathcal{P}}_j^1(\frac{d}{dx} f)\end{aligned}$$

■

Les espaces d'ondelettes des analyses multirésolution biorthogonales $(V_j^1([0,1]), \tilde{V}_j^1([0,1]))$ et $(V_j^0([0,1]), \tilde{V}_j^0([0,1]))$ précédentes sont définis par :

$$W_j^1([0,1]) = V_{j+1}^1([0,1]) \cap (\tilde{V}_j^1([0,1]))^\perp \qquad W_j^0([0,1]) = V_{j+1}^0([0,1]) \cap (\tilde{V}_j^0([0,1]))^\perp$$

et

$$\tilde{W}_j^1([0,1]) = \tilde{V}_{j+1}^1([0,1]) \cap (V_j^1([0,1]))^\perp \qquad \tilde{W}_j^0([0,1]) = \tilde{V}_{j+1}^0([0,1]) \cap (V_j^0([0,1]))^\perp$$

Dans ces conditions, il est aussi facile de vérifier que ces espaces d'ondelettes sont reliés par dérivation :

Corollaire 2.3.1
Les espaces d'ondelettes associés aux analyses multirésolutions de la proposition 2.3.2 vérifient :

$$\frac{d}{dx} W_j^1([0,1]) = W_j^0([0,1]) \ \textit{ et } \ \frac{d}{dx}\tilde{W}_j^0([0,1]) = \tilde{W}_j^1([0,1])$$

Preuve :
Soit $w_j^1 \in W_j^1([0,1])$ alors,

$$\mathcal{P}_j^0(\frac{d}{dx}w_j^1) = \frac{d}{dx}\mathcal{P}_j^1(w_j^1) = 0$$

ce qui veut dire $\frac{d}{dx}w_j^1 \in (\tilde{V}_j^0([0,1]))^\perp$. En plus,

$$\frac{d}{dx}w_j^1 \in \frac{d}{dx}V_{j+1}^1([0,1]) = V_j^0([0,1]) \oplus \frac{d}{dx}W_j^1([0,1]) = V_{j+1}^0([0,1])$$

comme $W_j^0([0,1]) = V_{j+1}^0([0,1]) \cap (\tilde{V}_j^0([0,1]))^\perp$, on déduit alors $\frac{d}{dx}W_j^1([0,1]) \subset W_j^0([0,1])$ et un argument de dimension donne :

$$\frac{d}{dx}W_j^1([0,1]) = W_j^0([0,1])$$

Pour la deuxième égalité, on démontre de la même manière. ■

L'important pour la suite est de construire des bases d'ondelettes qui seront reliées par une relation de dérivation identique à celle des ondelettes sur $\mathbb{R}$:

$$\psi^0(x) = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\psi^1(x) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi}^0(x) = -4\int_{-\infty}^{x}\tilde{\psi}^1(t)dt$$

Or, même si les ondelettes intérieures ont les mêmes propriétés que les ondelettes sur $\mathbb{R}$, la construction d'ondelettes sur l'intervalle $[0,1]$ décrite dans la section 2.1.3, ne conduit pas à des ondelettes de bord reliées par une telle propriété de dérivation. Ce que l'on propose ici, c'est une construction directe des bases biorthogonales par intégration/dérivation comme dans [21, 72]. La proposition suivante permet de définir directement ces bases d'ondelettes biorthogonales sur l'intervalle $[0,1]$:

Proposition 2.3.3
Soient $\{\Psi_{j,k}^1\}$ et $\{\tilde{\Psi}_{j,k}^1\}$ des bases d'ondelettes biorthogonales de $W_j^1([0,1])$ et $\tilde{W}_j^1([0,1])$ telles que les espaces $V_j^1([0,1])$ et $\tilde{V}_j^1([0,1])$ vérifient les conditions de la proposition 2.3.2. Par intégration par partie, les fonctions :

$$\Psi_{j,k}^0 = 2^{-j}\frac{d}{dx}\Psi_{j,k}^1 \qquad \textit{et} \qquad \tilde{\Psi}_{j,k}^0 = -2^j\int_0^x \tilde{\Psi}_{j,k}^1 \tag{2.3.10}$$

forment des bases d'ondelettes biorthogonales de $W_j^0([0,1])$ et $\tilde{W}_j^0([0,1])$ respectivement.

Ceci se présente comme une modification par rapport aux ondelettes construites habituellement dans la section 2.1.3. La question maintenant est de savoir si ces nouvelles ondelettes vérifient des relations à deux échelles l simples. En effet, considérons la relation à deux échelle satisfaite par

$\psi^1_{j,k}$ avec les conventions faites en (2.1.22) et (2.1.52) adaptées aux fonctions sur l'intervalle : $\psi^1_{j,k} = \sum_n G^1_{k,n}\varphi^1_{j+1,k}$. Si on note A^1 la matrice définie par : $\frac{d}{dx}\varphi^1_{j,k} = \sum_n A^1_{k,n}\varphi^0_{j,n}$, alors on a :

$$2^j\psi^0_{j,k} \quad = \quad \sum_n\sum_m G^1_{k,n}A^1_{n,m}\varphi^0_{j+1,m} = \sum_m [G^1A^1]_{k,m}\varphi^0_{j+1,m} = 2^j\sum_m G^0_{k,m}\varphi^0_{j+1,m}$$

Ceci donne accès directement au filtre de $\psi^0_{j,k}$. De même on retrouve :

$$\frac{d}{dx}\tilde{\psi}^0_{j,k} = \sum_m\sum_n \tilde{G}^0_{k,m}A^0_{m,n}\tilde{\varphi}^1_{j+1,n} = \sum_n [\tilde{G}^0A^0]_{k,n}\tilde{\varphi}^1_{j+1,n} = -2^j\sum_n \tilde{G}^1_{k,n}\tilde{\varphi}^1_{j+1,n}$$

en tenant compte de la relation qui existe entre A^0 et B^0, on obtient en résumé :

$$G^0 = 2^{-j}G^1A^1 \ \text{ et } \ \tilde{G}^0 = -2^j\tilde{G}^1B^{0T} \tag{2.3.11}$$

En pratique, cette technique s'avère très utile. Elle permet un calcul direct des filtres de ψ^0 et $\tilde{\psi}^0$, par la multiplication des matrices creuses.

Propriété 2.3.2
Une fois qu'on a biorthogonalisé les ondelettes $\psi^1_{j,k}$ et $\tilde{\psi}^1_{j,k}$, les ondelettes $\psi^0_{j,k}$ et $\tilde{\psi}^0_{j,k}$ construites ainsi sont directement biorthogonales. Leurs filtres sont alors donnés par la relation matricielle (2.3.11).

Exemple 2.3.1
L'exemple le plus simple d'analyses multirésolutions reliées par dérivation/intégration est celui des générateurs B-Spline biorthogonaux. On reprend dans cet exemple les générateurs biorthogonaux B-Spline à trois moments nuls de l'exemple 2.1.1, qu'on note φ^1, $\tilde{\varphi}^1$, ψ^1 et $\tilde{\psi}^1$. Alors, si on dérive (φ^1,ψ^1) et on intègre $(\tilde{\varphi}^1,\tilde{\psi}^1)$ on retrouve les générateurs B-Spline biorthogonaux (φ^0,ψ^0) et $(\tilde{\varphi}^0,\tilde{\psi}^0)$ à deux et quatre moments nuls respectivement. Dans $\tilde{V}^0_j([0,1])$ on n'aura que trois fonctions de bord à chaque bord, car cet espace doit vérifier une condition au limite de Dirichlet homogène. Les ondelettes de $W^0_j([0,1])$ et $\tilde{W}^0_j([0,1])$ sont obtenues en dérivant celles de $W^1_j([0,1])$ et en intégrant celles de $\tilde{W}^1_j([0,1])$ respectivement, ce qui nous ramène à trois ondelettes de bord à chaque bord. On ne trace ici que les fonctions associées aux générateurs (φ^0,ψ^0) et $(\tilde{\varphi}^0,\tilde{\psi}^0)$, pour les autres fonctions voir l'exemple 2.1.1. Comme ces générateurs sont symétriques, on obtient alors les fonctions de bord en 1 par symétrie de celles qui sont en 0 et vice versa. On trace également les coefficients $\langle\frac{d}{dx}\varphi^1_{j,k},\tilde{\varphi}^0_{j,k'}\rangle$ de la matrice A^1, les coefficients $\langle-\int_0^x\varphi^0_{j,k},\tilde{\varphi}^1_{j,k'}\rangle$ de la matrice B^0, ainsi que les filtres d'ondelettes G^0_j et $\tilde{G}^0_j$ donnés par la formule (2.3.11), dans le cas $j=6$.

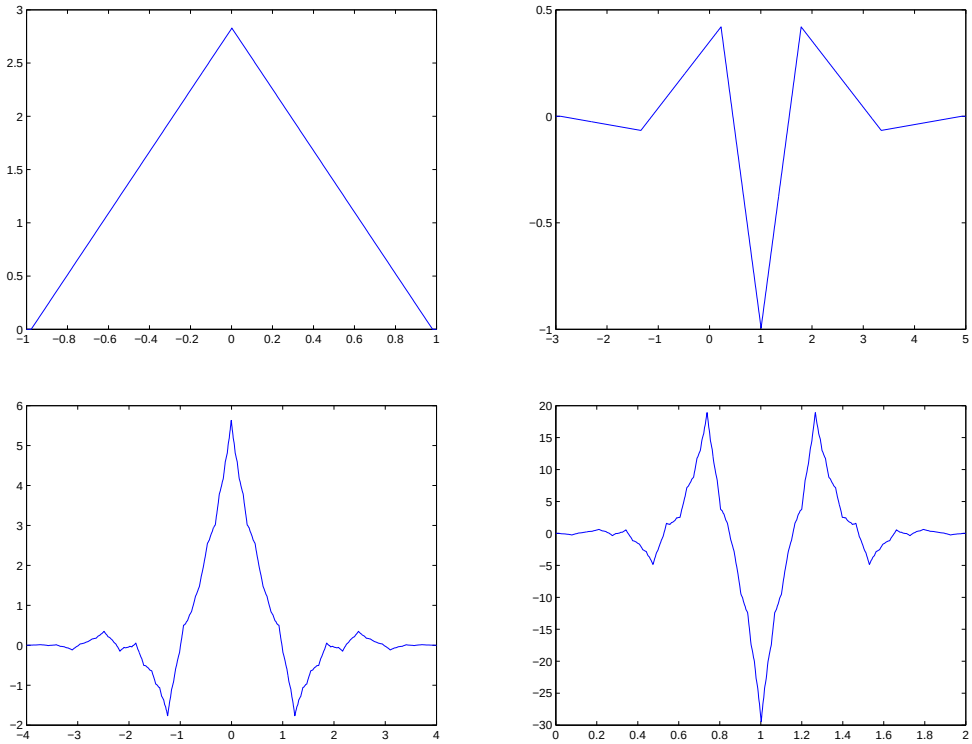

FIGURE 2.10 – Fonctions d'échelle φ^0 et $\tilde{\varphi}^0$ (première colonne) et ondelettes ψ^0 et $\tilde{\psi}^0$ (deuxième colonne). Cas des générateurs biorthogonaux B-Spline $r = 2$ et $\tilde{r} = 4$.

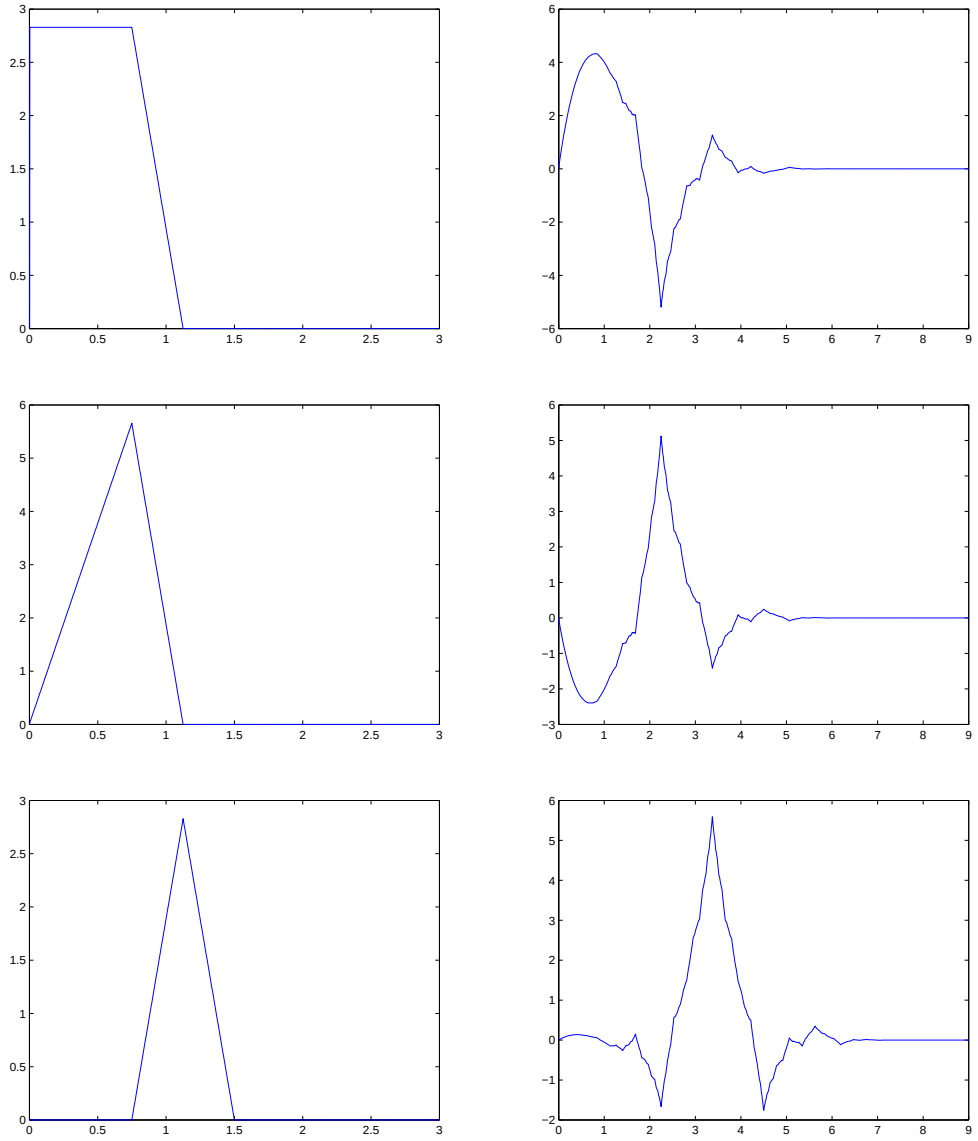

FIGURE 2.11 – Fonctions d'échelle du bord gauche $\Phi_\ell^{0\flat}$ (première colonne) et fonctions d'échelle de bord biorthogonales $\tilde{\Phi}_\ell^{0\flat}$ (deuxième colonne).

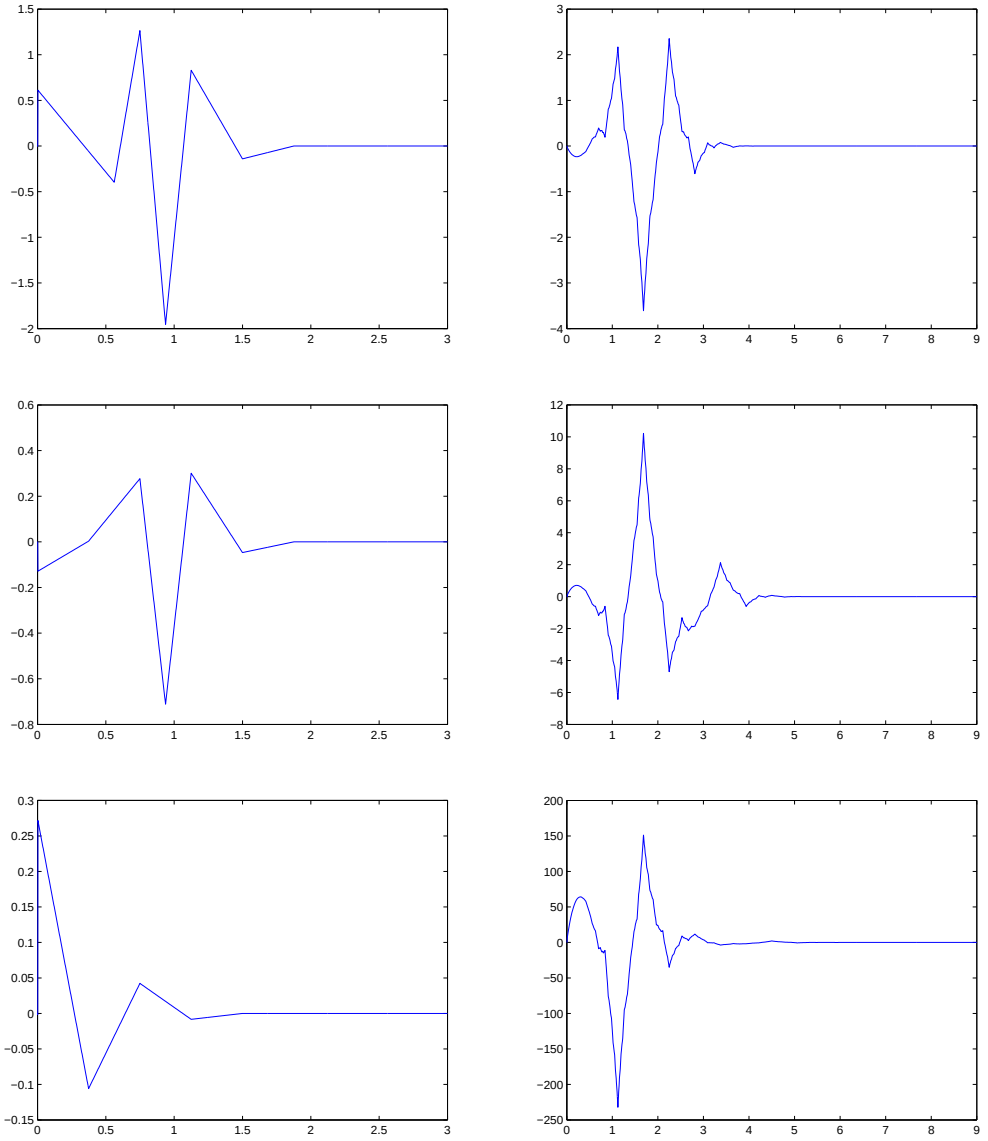

FIGURE 2.12 – Ondelettes du bord gauche $\Psi_\ell^{0\flat}$ (première colonne) et ondelettes de bord biorthogonales $\tilde{\Psi}_\ell^{0\flat}$ (deuxième colonne).

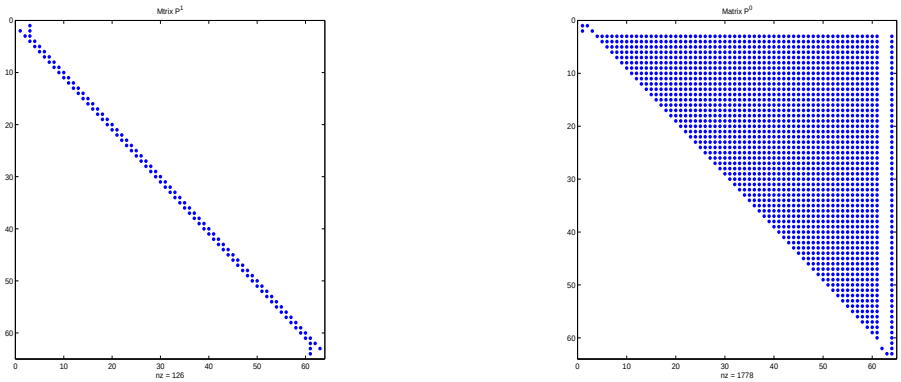

FIGURE 2.13 – Structure des matrices de changement de base A^1 (à gauche) et B^0 (à droite) : pour $j = 6$.

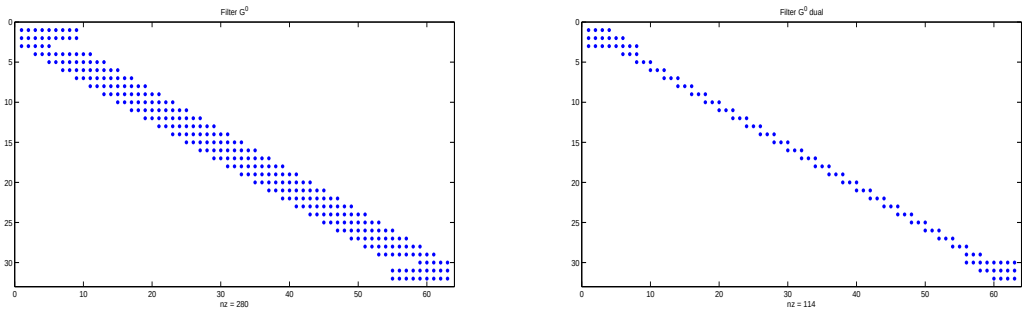

FIGURE 2.14 – Structure des filtres d'ondelettes G_j^0 (à gauche) et $\tilde{G}_j^0$ (à droite) : pour $j = 6$.

2.3.2 Ondelettes à divergence nulle sur $[0,1]^n$

Dans cette partie, nous allons proposer une nouvelle construction d'ondelettes vecteurs à divergence nulle sur $[0,1]^n$, qui vérifient des conditions aux limites physiques. Notre point de départ sera le résultat de A. jouini et P-G. Lemarié-Rieusset dans [72], qui permet d'utiliser les analyses multirésolutions reliées par dérivation/intégration pour construire une analyse multirésolution dans laquelle on peut étudier les fonctions à divergence nulle de $(L^2([0,1]^n))^n$. On note par $L^2_{div}([0,1]^n)$ l'espace des fonctions à divergence nulle sur $[0,1]^n$ suivant :

$$L^2_{div}([0,1]^n) = \{\vec{f} \in (L^2([0,1]^n))^n \ : \nabla.\vec{f} = 0\} \tag{2.3.12}$$

les dérivations sont prises au sens des distributions afin de donner un sens au terme $\nabla.\vec{f}$. Pour faire plus simple, on présentera la construction en détail en dimension deux ($n = 2$), et un cheminement sera donné en dimension trois ($n = 3$). Pour ce qui est des dimensions supérieures, la généralisation se fait comme dans la section 1.4.

Soient $V^1_j([0,1])$ et $V^0_j([0,1])$ deux analyses multirésolutions de $L^2([0,1])$ qui vérifient la proposition 2.3.2, on note $\mathcal{P}^1_j$ et $\mathcal{P}^0_j$ leurs projecteurs obliques respectifs. Sans risque de confusion, on notera dans la suite V^1_j et V^0_j ces espaces, puis W^1_j et W^0_j les espaces d'ondelettes qui leur sont associés respectivement. Alors, l'analyse multirésolution de $(L^2([0,1]^2)^2$ formée par les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j$ suivants :

$$\vec{\mathbf{V}}_j = \left(V^1_j \otimes V^0_j\right) \times \left(V^0_j \otimes V^1_j\right) \tag{2.3.13}$$

permet d'étudier les fonctions à divergence nulle de $(L^2_{div}([0,1]^2)^2$. Pour le voir, on pose :

$$\vec{\mathbf{P}}_j = (\mathcal{P}^1_j \otimes \mathcal{P}^0_j, \mathcal{P}^0_j \otimes \mathcal{P}^1_j), \qquad \mathbf{P}^1_j = \mathcal{P}^1_j \otimes \mathcal{P}^1_j \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}^0_j = \mathcal{P}^0_j \otimes \mathcal{P}^0_j \tag{2.3.14}$$

Par analogie avec ce qui se passe sur $\mathbb{R}$, la propriété de commutation des projecteurs multi-échelles avec l'opérateur de dérivation énoncée par la proposition 2.3.2 fait que :

$$\forall\ \vec{f} \in (L^2([0,1]^2)^2, \ \ \nabla.(\vec{\mathbf{P}}_j(\vec{f})) = \mathbf{P}^0_j(\nabla.\vec{f}) \tag{2.3.15}$$

Ce qui veut dire $\forall\ \vec{f} \in L^2_{div}([0,1]^2)$, on a :

$$\nabla.(\vec{\mathbf{P}}_j(\vec{f})) = \mathbf{P}^0_j(\nabla.\vec{f}) = 0 \tag{2.3.16}$$

Ainsi on a un processus d'approximation interne des fonctions à divergence nulle de $L^2_{div}([0,1]^2)$ quand j devient grand. Les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j$ ont bien d'autres propriétés sur lesquelles on ne s'attardera pas ici, voir [72]. Pour construire les fonctions d'échelle et les ondelettes à divergence nulle, un calcul simple montre que les fonctions d'échelle et ondelettes qui sont dans $\mathbf{rot}\ (V^1_j \otimes V^1_j)$, $\mathbf{rot}\ (V^1_j \otimes W^1_j)$, $\mathbf{rot}\ (W^1_j \otimes V^1_j)$ et $\mathbf{rot}\ (W^1_j \otimes W^1_j)$ appartiennent à $L^2_{div}([0,1]^2)$. Mais, cette famille de fonctions n'est pas libre, de plus ces fonctions peuvent prendre des valeurs arbitraires

aux bords. Pour obtenir une famille libre, une solution consiste à imposer des conditions aux limites. Celle qui paraît la plus naturelle et qui vient des applications est celle de non pénétration au domaine (*non-slip boundary condition*). Si on note $\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$ les fonctions d'échelle à divergence nulle et $\Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ les ondelettes associées, la condition de non pénétration se traduit sur ces fonctions à divergence nulle par :

$$\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}.\vec{\nu} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}.\vec{\nu} = 0 \tag{2.3.17}$$

où $\vec{\nu}$ est le vecteur normal unitaire extérieur. Un constat qu'on peut faire est que, ces fonctions à divergence nulle ne peuvent pas engendrer une analyse multirésolution de $L^2_{div}([0,1]^2)$ tout entier, cet espace contient le gradient des fonctions harmoniques. Par contre elles peuvent engendrer une pour l'espace des fonctions à divergence nulle qui intervient dans la décomposition de Helmholtz-Hodge suivante [29, 57] :

$$(L^2([0,1]^2))^2 = \mathcal{H}_{div}([0,1]^2) \oplus \mathcal{H}^{\perp}_{div}([0,1]^2) \tag{2.3.18}$$

avec :

$$\mathcal{H}_{div}([0,1]^2) = \{\mathbf{u} \in L^2_{div}([0,1]^2) : \ \mathbf{u}\cdot\vec{\nu} = 0\}$$

et

$$\mathcal{H}^{\perp}_{div}([0,1]^2) = \{\nabla q \ : \ q \in H^1([0,1]^2)\}$$

De plus, si un champ de vecteur $\mathbf{u}$ de $L^2_{div}([0,1]^2)$ vérifie :

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}\chi \quad \text{et} \quad \mathbf{u}\cdot\vec{\nu} = 0, \tag{2.3.19}$$

il est montré dans [57] qu'il existe un unique χ de $H^1_0([0,1]^2)$ vérifiant l'équation (2.3.19). Ainsi, pour construire une analyse multirésolution de $\mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$ constituée de fonctions à divergence nulle, il suffit de considérer le rotationnel d'une analyse multirésolution "*régulière*" de $H^1_0([0,1]^2)$: c'est la démarche que nous allons adopter dans la suite.

Soit $V^D_j = V^1_j([0,1]) \cap H^1_0([0,1])$ l'espace des fonctions $1D$ nulles en 0 et 1, qui sont à une échelle $j \geq j_{min}$ (pour une telle construction voir section 2.2.1). On note $\{\varphi^D_{j,k}\}$ la base de fonctions d'échelle de V^D_j. On définit maintenant les espaces $\mathbf{V}^{div}_j$ par :

$$\mathbf{V}^{div}_j = \mathrm{Vect}\{\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}\} \qquad \text{où} \qquad \Phi^{div}_{j,\mathbf{k}} := \mathbf{rot}\,[\varphi^D_{j,k_1} \otimes \varphi^D_{j,k_2}] \tag{2.3.20}$$

On a évidemment la propriété d'espaces emboîtés :

Propriété 2.3.3
Les espaces $\mathbf{V}^{div}_j$ et $\mathbf{rot}(V^D_j \otimes V^D_j)$ coïncident et ils forment une suite d'espaces emboîtés :

$$\mathbf{V}^{div}_j = \mathbf{rot}(V^D_j \otimes V^D_j) \quad \textit{et} \quad \mathbf{V}^{div}_j \subset \mathbf{V}^{div}_{j+1}$$

On définit alors l'espace d'ondelettes W_j^D par : $V_{j+1}^D = V_j^D \oplus W_j^D$ et on note $\{\psi_{j,k}^D\}$ sa base d'ondelettes. Par tensorisation, on construit trois types d'espaces d'ondelettes à divergence nulle anisotropes. Pour $\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \{j_{min}, \cdots\}^2$, ces espaces sont donnés par :

$$\mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,1} = \mathbf{rot}(V_{j_{min}}^D \otimes W_{j_2}^D), \;\; \mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,2} = \mathbf{rot}(W_{j_1}^D \otimes V_{j_{min}}^D), \;\; \text{et} \;\; \mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,3} = \mathbf{rot}(W_{j_1}^D \otimes W_{j_2}^D)$$

Aux espaces $\{\mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,\epsilon}\}_{\epsilon=1,2,3}$, on associe la famille d'ondelettes vecteurs à divergence nulle suivante :

$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,1} := \mathbf{rot}\,[\varphi_{j_{min},k_1}^D \otimes \psi_{j_2,k_2}^D], \; \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,2} := \mathbf{rot}\,[\psi_{j_1,k_1}^D \otimes \varphi_{j_{min},k_2}^D], \; \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3} := \mathbf{rot}\,[\psi_{j_1,k_1}^D \otimes \psi_{j_2,k_2}^D]$$

et l'on pose :

$$\mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,1} = \mathrm{Vect}\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,1}\}, \;\; \mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,2} = \mathrm{Vect}\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,2}\}, \;\; \text{et} \;\; \mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,3} = \mathrm{Vect}\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3}\}$$

Afin de construire un système biorthogonal avec les fonctions d'échelle $\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div}$ et les ondelettes $\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\}_{\epsilon=1,2,3}$ à divergence, on les renormalise comme suit :

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div} := \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div}, \qquad \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,1} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_2}+1}}\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,1}$$
$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,2} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+1}}\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,2}, \qquad \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}}\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3}$$

Alors, les fonctions biorthogonales aux nouvelles fonctions à divergence nulle normalisées sont données par :

$$\tilde{\Phi}_{j,\mathbf{k}}^{div} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_{j,k_1}^D \otimes \tilde{\gamma}_{j,k_2} \\ -\tilde{\gamma}_{j,k_1} \otimes \tilde{\varphi}_{j,k_2}^D \end{array} \right. , \;\; \tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,1} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_2}+1}} \left| \begin{array}{l} 2^{j_2}\tilde{\varphi}_{j_{min},k_1}^D \otimes \tilde{\psi}_{j_2,k_2}^0 \\ -\tilde{\gamma}_{j_{min},k_1} \otimes \tilde{\psi}_{j_2,k_2}^D \end{array} \right.$$

$$\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,2} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+1}} \left| \begin{array}{l} \tilde{\psi}_{j_1,k_1}^D \otimes \tilde{\gamma}_{j_{min},k_2} \\ -2^{j_1}\tilde{\psi}_{j_1,k_1}^0 \otimes \tilde{\varphi}_{j_{min},k_2}^D \end{array} \right. , \;\; \tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3} := \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} \left| \begin{array}{l} 2^{j_2}\tilde{\psi}_{j_1,k_1}^D \otimes \tilde{\psi}_{j_2,k_2}^0 \\ -2^{j_1}\tilde{\psi}_{j_1,k_1}^0 \otimes \tilde{\psi}_{j_2,k_2}^D \end{array} \right.$$

où on a posé : $\tilde{\gamma}_{j,k} = -\int_0^x \tilde{\varphi}_{j,k}^D$, ce qui correspond à la biorthogonale de $\frac{d}{dx}\varphi_{j,k}^D$.

Proposition 2.3.4
Pour $j \geq j_{min}$ et $\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \{j_{min}, \cdots\}^2$, le système des fonctions $\{\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div}, \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon} : \epsilon = 1,2,3\}$ est biorthogonal au système des fonctions $\{\tilde{\Phi}_{j,\mathbf{k}}^{div}, \tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon} : \epsilon = 1,2,3\}$ dans $(L^2([0,1]^2))^2$.

Cette proposition est évidente, il faut juste calculer les produits scalaires. Une propriété très importante est que les espaces $\mathbf{V}_j^{div}$ forment une analyse multirésolution de $\mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$.

Proposition 2.3.5
Les espaces $\{\mathbf{V}_j^{div}\}$ *et* $\{\mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div,\epsilon}\}_{\epsilon=1,2,3}$ *vérifient :*
(i) $\mathbf{V}_{j_{min}}^{div} \subset \cdots \subset \mathbf{V}_j^{div} \subset \mathbf{V}_{j+1}^{div} \subset \cdots \subset \mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$ *et* $\overline{\cup \mathbf{V}_j^{div}} = \mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$
(ii) $\mathbf{V}_j^{div} = \mathbf{V}_{j_{min}}^{div} \bigoplus_{j_{min} \leq j_1, j_2 \leq j-1} (\bigoplus_{\epsilon=1,2,3} \mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{div\ \epsilon})$
(iii) $\dim \mathbf{V}_j^{div} = (\dim V_j^D)^2 = (2^j - k_0 - k_1 + 2r - 1)^2$
(iv) *La famille* $\{\Phi_{j_{min},\mathbf{k}}^{div}, \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon},\ \epsilon = 1,2,3\}_{j_1,j_2 \geq j_{min}}$ *est une base de Riesz de* $\mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$.

Preuve :
(i) On va d'abord démontrer l'égalité : $\mathbf{V}_j^{div} = \vec{\mathbf{V}}_j \cap \mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$.
Une première inclusion est assurée par la proposition 2.3.2 : $\mathbf{V}_j^{div} \subset \vec{\mathbf{V}}_j \cap \mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$.
Pour démontrer l'inclusion inverse, soit $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{div}([0,1]^2) \cap \vec{\mathbf{V}}_j$. Comme $\mathbf{u} \in \vec{\mathbf{V}}_j$, alors on a : $\mathbf{u} = \vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{u})$.
De plus, d'après [57], $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$ signifie : $\exists\ \chi \in H_0^1([0,1]^2)$ telle que $\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ (\chi)$. Dans l'analyse multirésolution de $H_0^1([0,1]^2)$ formée par $V_j^D \otimes V_j^D$, la fonction courant χ se décompose de manière unique sous la forme :

$$\chi = \mathbf{P}_j^D(\chi) + \sum_{j_1,j_2 \geq j} \left(\mathbf{Q}_{j_1}^D(\chi) + \mathbf{Q}_{j_2}^D(\chi) + \mathbf{Q}_{j_1,j_2}^D(\chi)\right)$$

avec

$$\mathbf{P}_j^D(\chi) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \varphi_{j,k_1}^D \otimes \varphi_{j,k_2}^D,\ \ \mathbf{Q}_{j_1}^D(\chi) = \sum_{j_2,\geq j,\mathbf{k}} d_{j_1,\mathbf{k}}^1 \psi_{j_1,k_1}^D \otimes \varphi_{j,k_2}^D$$
$$\mathbf{Q}_{j_2}^D(\chi) = \sum_{j_1,\geq j,\mathbf{k}} d_{j_1,\mathbf{k}}^2 \varphi_{j,k_1}^D \otimes \psi_{j_2,k_2}^D,\ \ \mathbf{Q}_{j_1,j_2}^D(\chi) = \sum_{j_1,j_2 \geq j,\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^3 \psi_{j_1,k_1}^D \otimes \psi_{j_2,k_2}^D$$

Comme $\mathbf{u} = \mathbf{rot}\ (\chi) \in \vec{\mathbf{V}}_j$, cela implique :

$$\mathbf{u} = \vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{u}) = \vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{rot}\ (\chi)) = \vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{rot}[\mathbf{P}_j^D(\chi)]) = \mathbf{rot}[\mathbf{P}_j^D(\chi)]$$

car $\mathbf{rot}[\mathbf{P}_j^D(\chi)] \in \vec{\mathbf{V}}_j$ d'après la proposition 2.3.2. D'autre part :

$$\vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{rot}[\mathbf{Q}_{j_1}^D(\chi)]) = 0,\quad \vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{rot}[\mathbf{Q}_{j_2}^D(\chi)]) = 0,\quad \vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{rot}[\mathbf{Q}_{j_1,j_2}^D(\chi)]) = 0$$

d'où :

$$\mathbf{rot}\ (\chi) = \vec{\mathbf{P}}_j(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{rot}\ [\mathbf{P}_j^D(\chi)]$$

ainsi on déduit que $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_j^{div}$ par construction de $\mathbf{V}_j^{div}$, et donc $\mathcal{H}_{div}([0,1]^2) \cap \vec{\mathbf{V}}_j \subset \mathbf{V}_j^{div}$ et on a l'égalité.
Les espaces $\mathcal{H}_{div}([0,1]^2) \cap \vec{\mathbf{V}}_j$ forment une analyse multirésolution de $\mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$ au sens classique [72], on obtient facilement le points (i).

Le point (ii) utilise la propriété 2.3.3 pour avoir la décomposition de $\mathbf{V}_j^{div}$ suivante :

$$\mathbf{V}_j^{div} = \mathbf{rot}\left[V_{j_{min}}^D \otimes V_{j_{min}}^D \bigoplus_{j_{min}\leq j_1,j_2\leq j-1} (V_{j_{min}}^D \otimes W_{j_2}^D \oplus W_{j_1}^D \otimes V_{j_{min}}^D \oplus W_{j_1}^D \otimes W_{j_2}^D)\right]$$

Pour démontrer le point (iii), on utilise d'une part l'indépendance linéaire des fonctions $(\varphi_{j,k}^D)'$, ce qui garantit celle des fonctions $\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div}$, et d'autre part la définition des espaces $\mathbf{V}_j^{div}$ qui donne : $\dim \mathbf{V}_j^{div} = \dim(V_j^D \otimes V_j^D)$, et comme $\dim V_j^D = 2^j - k_0 - k_1 + 2r - 1$, on en déduit le résultat.

Pour le point (iv), on va utiliser le fait que les ondelettes $\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}$ forment un système biorthogonal de vaguelettes à supports compacts, voir la définition au lemme 1.4.1. Par définition, les fonctions d'échelle et les ondelettes à divergence nulle sont dans $(L^2([0,1]^2))^2$ et sont de moyenne nulle. La régularité höldérienne découle de celle des fonctions de base $1D$. Alors, l'opérateur $T : \ell^2(\mathbb{Z}^2) \to (L^2([0,1]^2)^2$ qui à $\{\lambda_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon}\}$ lui associe $T(\lambda_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon})$ défini par :

$$T(\lambda_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon}) = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon} \lambda_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon} \tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}$$

est borné d'après le lemme 1.4.1 :

$$\| \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon} \lambda_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon} \tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon} \|_{(L^2([0,1]^2)^2} \leq C_1 \|\lambda_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)}$$

Son adjoint, l'opérateur $T^* : (L^2([0,1]^2)^2 \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ qui à $\vec{f}$ lui associe la suite $T^*(\vec{f}) = \{\langle \vec{f}/\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\rangle\}$ est aussi borné :

$$\|\langle \vec{f}/\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\rangle\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)} \leq C_2 \|\vec{f}\|_{(L^2([0,1]^2)^2}$$

Pour tout $\vec{f}$ telle que :

$$\vec{f} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon} \langle \vec{f}/\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\rangle \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon},$$

on peut écrire :

$$\frac{1}{C_2}\|\langle \vec{f}/\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\rangle\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)} \leq \| \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\epsilon} \langle \vec{f}/\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\rangle \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon} \|_{(L^2([0,1]^2)^2} \leq C_3 \|\langle \vec{f}/\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\rangle\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^2)}$$

où C_3 est la constante donnée par le lemme 1.4.1 avec la base des $\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}$. Si $\vec{f} \in \mathcal{H}_{div}([0,1]^2)$, on a :

$$\vec{f} = \sum_{\mathbf{k}} \langle \vec{f}/\tilde{\Phi}_{j_{min},\mathbf{k}}^{div}\rangle \Phi_{j_{min},\mathbf{k}}^{div} + \sum_{j_1,j_2\geq j_{min},\mathbf{k}} \left(\sum_{\epsilon=1,2,3} \langle \vec{f}/\tilde{\Psi}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon}\rangle \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,\epsilon} \right)$$

et comme la norme $\|\vec{f}\|^2_{(L^2([0,1]^2)^2}$ est équivalente à :

$$\|\sum_{\mathbf{k}}\langle\vec{f}/\tilde{\Phi}^{div}_{j_{min},\mathbf{k}}\rangle\Phi^{div}_{j_{min},\mathbf{k}}\|^2_{(L^2([0,1]^2)^2}+\|\sum_{j_1,j_2\geq j_{min},\mathbf{k}}\left(\sum_{\epsilon=1,2,3}\langle\vec{f}/\tilde{\Psi}^{div,\epsilon}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\rangle\Psi^{div,\epsilon}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\right)\|^2_{(L^2([0,1]^2)^2}$$

on déduit alors la propriété de l'équivalence en norme d'énergie de la base de Riesz. ■

Remarque 2.3.1
La relation de dérivation de la proposition 2.3.2 fait que $\mathbf{V}^{div}_j\subset\vec{\mathbf{V}}_j$, ce qui permet un calcul rapide des coefficients sur cette base.
Les fonctions $\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$ ne sont pas des fonctions d'échelle au sens classique car on n'a pas la stabilité ℓ^2 :

$$\|\sum_{\mathbf{k}}c^{div}_{j,\mathbf{k}}\frac{\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}}{\|\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}\|_{L^2}}\|_{(L^2(\Omega))^2}\sim(\sum_{\mathbf{k}}|c^{div}_{j,\mathbf{k}}|)^{1/2}$$

avec des constantes indépendantes de j. Il suffit de considérer la fonction :

$$\mathbf{u}=\sum_{k_0\leq\ell_1,\ell_2\leq 2^j-k_1}\Phi^{div}_{j,\ell_1,\ell_2},$$

alors on a :

$$\left(\sum|c^{div}_{j,\mathbf{k}}|^2\right)^{1/2}\sim 2^j\ \ \textit{tandis que}\ \ (\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^2}/\|\Phi^{div}_{j,0}\|_{L^2})\sim 2^{j/2}$$

□

Extension au cas 3D

Le passage en dimension trois $(n=3)$, commence aussi par la construction de l'analyse multirésolution formée par :

$$\vec{\mathbf{V}}_j=\left(V^1_j\otimes V^0_j\otimes V^0_j\right)\times\left(V^0_j\otimes V^1_j\otimes V^0_j\right)\times\left(V^0_j\otimes V^0_j\otimes V^1_j\right)$$

qui permet d'étudier les fonctions à divergence nulle de $L^2_{div}([0,1]^3$. Comme dans le cas de la dimension deux, il est facile de remarquer que les fonctions qui sont dans $\mathbf{rot}[(V^0_j\otimes V^1_j\otimes V^1_j)\times\{0\}\times\{0\}]$, $\mathbf{rot}[\{0\}\times\{0\}\times(V^1_j\otimes V^1_j\otimes V^0_j)]$ et $\mathbf{rot}[\{0\}\times(V^1_j\otimes V^0_j\otimes V^1_j)\times\{0\}]$ appartiennent à $L^2_{div}([0,1]^3)\cap\vec{\mathbf{V}}_j$. En imposant la condition de non pénétration au domaine, on construit trois fonctions d'échelle à divergence nulle sur $[0,1]^3$:

$$\Phi^{div}_{1,j,\mathbf{k}}:=\mathbf{rot}\left|\begin{array}{l}0\\0\\\varphi^D_{j,k_1}\otimes\varphi^D_{j,k_2}\otimes(\varphi^D_{j,k_3})'\end{array}\right.=\left|\begin{array}{l}\varphi^D_{j,k_1}\otimes(\varphi^D_{j,k_2})'\otimes(\varphi^D_{j,k_3})'\\-(\varphi^D_{j,k_1})'\otimes\varphi^D_{j,k_2}\otimes(\varphi^D_{j,k_3})'\\0\end{array}\right.\tag{2.3.21}$$

$$\Phi^{div}_{2,j,\mathbf{k}} := \mathbf{rot} \left| \begin{array}{l} (\varphi^D_{j,k_1})' \otimes \varphi^D_{j,k_2} \otimes \varphi^D_{j,k_3} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ (\varphi^D_{j,k_1})' \otimes \varphi^D_{j,k_2} \otimes (\varphi^D_{j,k_3})' \\ -(\varphi^D_{j,k_1})' \otimes (\varphi^D_{j,k_2})' \otimes \varphi^D_{j,k_3} \end{array} \right. \tag{2.3.22}$$

$$\Phi^{div}_{3,j,\mathbf{k}} := \mathbf{rot} \left| \begin{array}{l} 0 \\ \varphi^D_{j,k_1} \otimes (\varphi^D_{j,k_2})' \otimes \varphi^D_{j,k_3} \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} -\varphi^D_{j,k_1} \otimes (\varphi^D_{j,k_2})' \otimes (\varphi^D_{j,k_3})' \\ 0 \\ (\varphi^D_{j,k_1})' \otimes (\varphi^D_{j,k_2})' \otimes \varphi^D_{j,k_3} \end{array} \right. \tag{2.3.23}$$

On précise que ces fonctions d'échelle sont liées entre elles, propriété analogue à celle des fonctions d'échelle à divergence nulle sur $\mathbb{R}^3$. À ces fonctions d'échelle, on associe 21 ondelettes génératrices à divergence nulle anisotropes différentes. Ces ondelettes sont construites en prenant le rotationnel des sept types d'ondelettes qui sont dans chacun des espaces $(V^0_j \otimes V^D_j \otimes V^D_j) \times \{0\} \times \{0\}$, $\{0\} \times \{0\} \times (V^D_j \otimes V^D_j \otimes V^0_j)$ et $\{0\} \times (V^D_j \otimes V^0_j \otimes V^D_j) \times \{0\}$.
Pour avoir une analyse multirésolution de $\mathcal{H}_{div}([0,1]^3)$, il suffit d'en extraire une base. Ainsi on retrouve des propriétés similaires à celles annoncées par la proposition 2.3.5.

2.3.3 Ondelettes à rotationnel nul sur $[0,1]^n$

On propose dans cette section une nouvelle construction d'ondelettes vecteurs à rotationnel nul de $(L^2([0,1]^2))^2$, qui vérifient des conditions aux limites. D'après les résultats de la décomposition de Helmholtz-Hodge de [57], l'espace $\mathcal{H}^{\perp}_{div}([0,1]^2)$ peut s'écrire :

$$\mathcal{H}^{\perp}_{div}([0,1]^2) = \{\nabla q : \ q \in H^1([0,1]^2)\} \tag{2.3.24}$$

Alors, pour avoir une analyse multirésolution de $\mathcal{H}^{\perp}_{div}([0,1]^2)$, on va considérer le gradient d'une analyse multirésolution régulière de $H^1([0,1]^2)$. Soit $\mathbf{V}^{\nabla}_j$ l'espace défini par :

$$\mathbf{V}^{\nabla}_j = \mathrm{Vect}\{\Phi^{\nabla}_{j,\mathbf{k}}\}, \qquad \Phi^{\nabla}_{j,\mathbf{k}} := \nabla[\varphi^1_{j,k_1} \otimes \varphi^1_{j,k_2}] \tag{2.3.25}$$

La famille des fonctions $\{\Phi^{\nabla}_{j,\mathbf{k}}\}$ données par l'équation (2.3.25) est liée : les $(\varphi^1_{j,k})'$ sont liées. Pour construire une base de $\mathbf{V}^{\nabla}_j$ il suffit d'enlever une fonction à un des deux bords (ce qui revient à imposer une condition aux limite nulle en 0 ou 1 dans l'espace V^1_j). Par exemple en 1. On note alors $\varphi^{D^+}_{j,k}$ les fonctions d'échelle 1D ainsi obtenues et qui engendrent l'espace $V^{D^+}_j$ des fonctions de V^1_j nulles en 1. Les ondelettes de $W^{D^+}_j = V^{D^+}_{j+1} \setminus V^{D^+}_j$ seront notées $\psi^{D^+}_{j,k}$.

Avec ces considérations, on peut définir des espaces d'ondelettes à rotationnel nul anisotropes $\{\mathbf{W}^{\nabla,\epsilon}_{\mathbf{j}}\}_{\epsilon=1,2,3}$ engendrés par des familles libres. Pour $\mathbf{j} = (j_1, j_2) \in \{j_{min}, \cdots\}^2$, ces espaces sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{\nabla,1}_{\mathbf{j}} &= \mathrm{Vect}\{\Psi^{\nabla,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\}, \quad \Psi^{\nabla,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \nabla[\varphi^{D^+}_{j_{min},k_1} \otimes \psi^{D^+}_{j_2,k_2}] \\
\mathbf{W}^{\nabla,2}_{\mathbf{j}} &= \mathrm{Vect}\{\Psi^{\nabla,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\}, \quad \Psi^{\nabla,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \nabla[\psi^{D^+}_{j_1,k_1} \otimes \varphi^{D^+}_{j_{min},k_2}] \\
\mathbf{W}^{\nabla,3}_{\mathbf{j}} &= \mathrm{Vect}\{\Psi^{\nabla,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\}, \quad \Psi^{\nabla,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} := \nabla[\psi^{D^+}_{j_1,k_1} \otimes \psi^{D^+}_{j_2,k_2}]
\end{aligned}$$

De même les espaces $\mathbf{V}_j^{\nabla}$ forment une analyse multirésolution de $\mathcal{H}_{div}^{\perp}([0,1]^2)$ au sens suivant :

Proposition 2.3.6
Les espaces $\mathbf{V}_j^{\nabla}$ vérifient :
(i) $\mathbf{V}_{j_{min}}^{\nabla} \subset \cdots \subset \mathbf{V}_j^{\nabla} \subset \mathbf{V}_{j+1}^{\nabla} \subset \cdots \subset \mathcal{H}_{div}^{\perp}([0,1]^2)$ *et* $\overline{\cup \mathbf{V}_j^{\nabla}} = \mathcal{H}_{div}^{\perp}([0,1]^2)$
(ii) $\mathbf{V}_j^{\nabla} = \mathbf{V}_{j_{min}}^{\nabla} \bigoplus_{j_{min} \leq j_1, j_2 \leq j-1} (\bigoplus_{\epsilon=1,2,3} \mathbf{W}_{\mathbf{j}}^{\nabla,\epsilon})$
(iii) $(\dim \mathbf{V}_j^{\nabla}) = (\dim V_j^{D+})^2 = (2^j - k_1 - k_0 + 2r - 1)^2$
(iv) La famille $\{\Phi_{j_{min},\mathbf{k}}^{\nabla}, \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\nabla,\epsilon},\ \epsilon = 1,2,3\}_{j_1,j_2 \geq j_{min}}$ *est une base de Riesz de* $\mathcal{H}_{div}^{\perp}([0,1]^2)$.

Cette proposition se démontre comme la proposition 2.3.5. Toujours la relation de dérivation de la proposition 2.3.2 assure que $\mathbf{V}_{\mathbf{j}}^{\nabla} \subset (V_j^0 \otimes V_j^1) \times (V_j^1 \otimes V_j^0)$, d'où on peut calculer facilement les coefficients d'ondelettes sur cette base.

Remarque 2.3.2
Comme pour le cas des ondelettes à divergence nulle, en renormalisant les fonctions, on peut construire un système de fonctions biorthogonales à celui des ondelettes à rotationnel nul, dans $(L^2([0,1]^2))^2$. □

Exemple 2.3.2
On garde toujours l'exemple du B-Spline biorthogonal à trois moments nuls. Sur le carré, on précise que si l'on prend le rotationnel ou le gradient d'une fonction scalaire 2D qui s'écrit comme produit tensoriel d'une fonction intérieure 1D et d'une fonction de bord 1D, sauf pour $\ell = 0$*, on retrouve une fonction qui touche encore le bord. Donc on a* $4(r-1)[2^j - k_1 - k_0 + r]$ *fonctions à divergence nulle de bord dans* $\mathbf{V}_j^{div}$ *et* $(2r-1)[2(2^j - k_1 - k_0 + 1) + 2r - 1]$ *fonctions à rotationnel nul de bord dans* $\mathbf{V}_j^{\nabla}$*. À titre d'exemple on trace le champ de vecteurs des fonctions d'échelle et ondelettes de bords au coin* $(0,0)$ *construites à partir du rotationnel ou du gradient de fonctions d'échelle ou ondelettes de bord de* V_j^D *tensoriel elle même.*

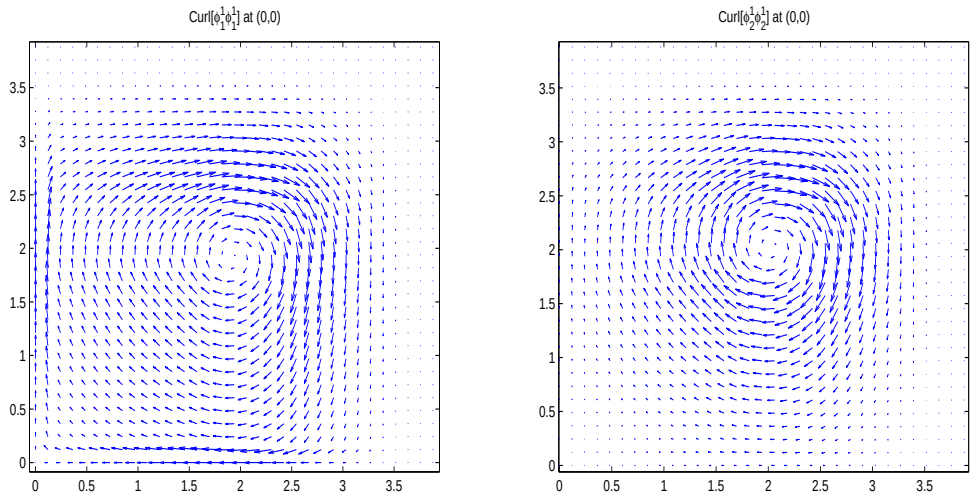

FIGURE 2.15 – Champ de vecteurs de $\mathbf{rot}[\Phi_1^{1\flat} \otimes \Phi_1^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\mathbf{rot}[\Phi_2^{1\flat} \otimes \Phi_2^{1\flat}]$ à droite.

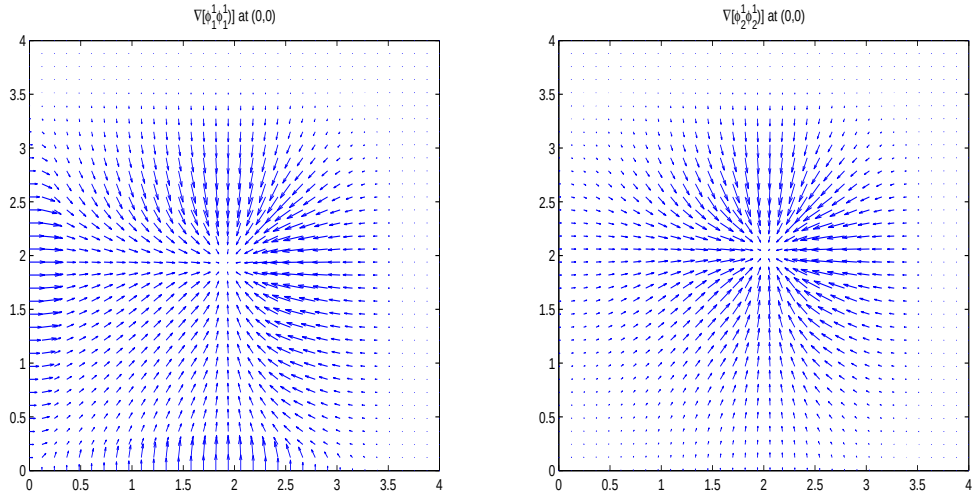

FIGURE 2.16 – Champ de vecteurs de $\nabla[\Phi_1^{1\flat} \otimes \Phi_1^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\nabla[\Phi_2^{1\flat} \otimes \Phi_2^{1\flat}]$ à droite.

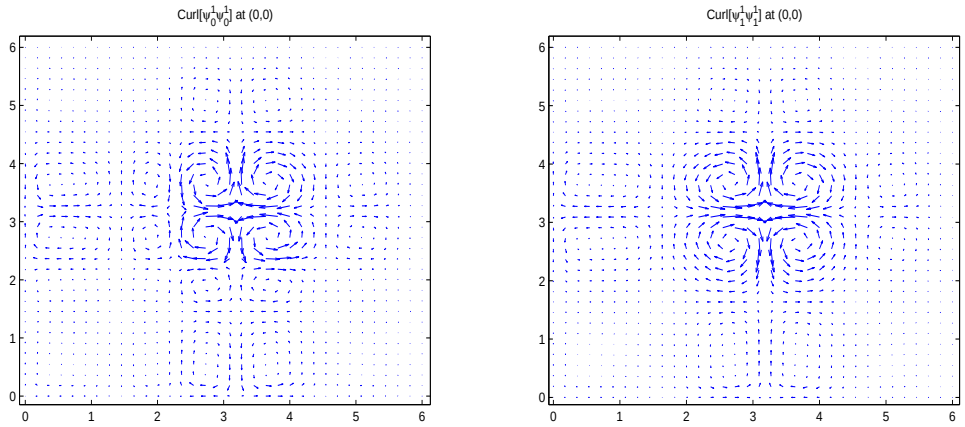

FIGURE 2.17 – Champ de vecteurs de $\mathbf{rot}[\Psi_0^{1\flat} \otimes \Psi_0^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\mathbf{rot}[\Psi_1^{1\flat} \otimes \Psi_1^{1\flat}]$ à droite.

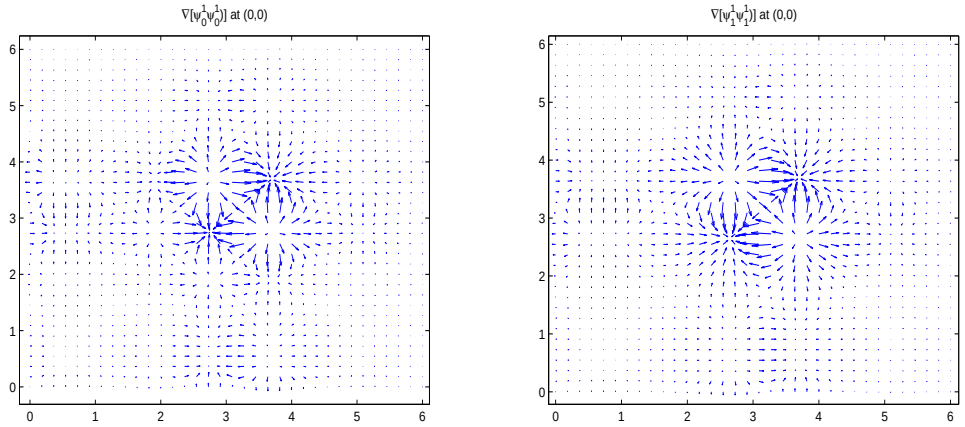

FIGURE 2.18 – Champ de vecteurs de $\nabla[\Psi_0^{1\flat} \otimes \Psi_0^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\nabla[\Psi_1^{1\flat} \otimes \Phi_1^{1\flat}]$ à droite.

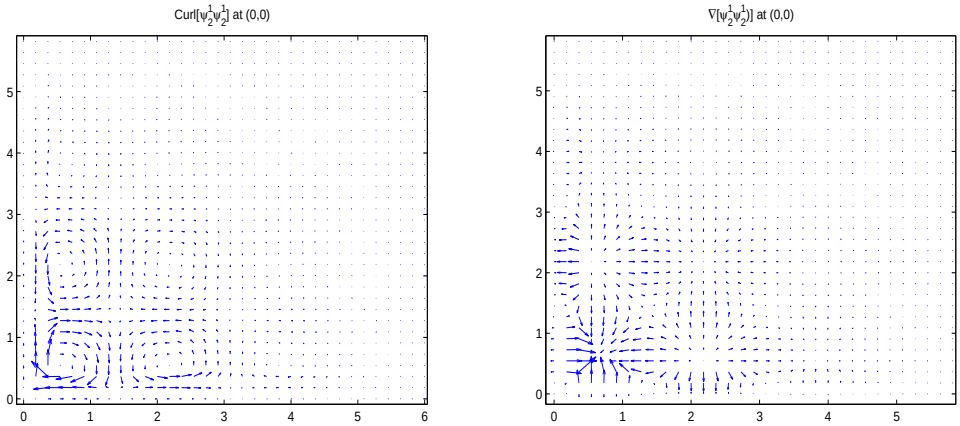

FIGURE 2.19 – Champ de vecteurs de $\mathbf{rot}[\Psi_2^{1\flat} \otimes \Psi_2^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\nabla[\Psi_2^{1\flat} \otimes \Psi_2^{1\flat}]$ à droite.

2.3.4 Algorithme de décomposition et de reconstruction

On présente dans cette section un algorithme efficace pour calculer les coefficients d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul d'une fonction $\mathbf{u}$ de $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ ou de $\mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega)$. Cet algorithme ne sera présenté que dans le cas des ondelettes à divergence nulle ; celui des ondelettes à rotationnel nul est juste une adaptation en changeant le rôle des fonctions des bases de $V_j^1([0,1])$ et $V_j^0([0,1])$.

Calcul des coefficients d'échelle à divergence nulle

Soit $\mathbf{u}$ un champ à divergence nulle de $\mathbf{V}_j^{div}$, comme $\mathbf{u} \in \vec{\mathbf{V}}_j$ d'après la proposition 2.3.2, les composantes de $\mathbf{u}$ s'écrivent :

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{\mathbf{k}} c_{j,\mathbf{k}}^1 \, \varphi_{j,k_1}^1 \otimes \varphi_{j,k_2}^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \sum_{\mathbf{k}} c_{j,\mathbf{k}}^2 \, \varphi_{j,k_1}^0 \otimes \varphi_{j,k_2}^1$$

En utilisant la relation de dérivation qui existe entre $V_j^1([0,1])$ et $V_j^0([0,1])$: $\frac{d}{dx} V_j^1([0,1]) = V_j^0([0,1])$, on peut écrire aussi $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_1 = -\sum_{\mathbf{k}} [(c_{j,\mathbf{k}}^1) B^0]_{\mathbf{k}} \, \varphi_{j,k_1}^1 \otimes (\varphi_{j,k_2}^1)' \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = -\sum_{\mathbf{k}} [B^{0\,T}(c_{j,\mathbf{k}}^2)]_{\mathbf{k}} \, (\varphi_{j,k_1}^1)' \otimes \varphi_{j,k_2}^1 \tag{2.3.26}$$

Alors, un calcul direct donne :

$$\langle \mathbf{u} / \tilde{\Phi}_{j,\mathbf{k}}^{div} \rangle = 2^{-1/2} \left[B^{0\,T}(c_{j,\mathbf{k}}^2) - (c_{j,\mathbf{k}}^1) B^0 \right]_{\mathbf{k}} \tag{2.3.27}$$

Cela permet d'écrire :

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}} c_{j,\mathbf{k}}^{div} \Phi_{j,\mathbf{k}}^{div} \qquad \text{avec} \qquad 2^{1/2}(c_{\mathbf{k}}^{div}) = B^{0\,T}(c_{j,\mathbf{k}}^2) - (c_{j,\mathbf{k}}^1) B^0 \tag{2.3.28}$$

Inversement, on calcule les coefficients $(c_{j,\mathbf{k}}^1)$ et $(c_{j,\mathbf{k}}^2)$ à partir de ceux des fonctions d'échelle à divergence nulle $(c_{j,\mathbf{k}}^{div})$ par :

$$(c_{j,\mathbf{k}}^1) = 2^{-1/2}(c_{j,\mathbf{k}}^{div}) A^1 \qquad \text{et} \qquad (c_{j,\mathbf{k}}^1) = -2^{-1/2} A^{1\,T}(c_{j,\mathbf{k}}^{div}) \tag{2.3.29}$$

On rappelle que A^1 est la matrice des coefficients $\langle \frac{d}{dx}\varphi_{j,k}^1, \tilde{\varphi}_{j,k'}^0 \rangle$ et B^0 la matrice des coefficients $\langle -\int_0^x \varphi_{j,k}^0, \tilde{\varphi}_{j,k'}^1 \rangle$.

Calcul des coefficients d'ondelettes à divergence nulle

Comme dans le cas des fonctions d'échelle, on part de la décomposition de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sur la base d'ondelettes associées aux espaces $\vec{\mathbf{V}}_j$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 = &\sum_{\mathbf{k}} c_{j_{min},\mathbf{k}}^1 \, \varphi_{j_{min},k_1}^1 \otimes \varphi_{j_{min},k_2}^0 + \sum_{j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} d_{j_2,\mathbf{k}}^{1,1} \, \varphi_{j_{min},k_1}^1 \otimes \psi_{j_2,k_2}^0 \\ &+ \sum_{j_1 \geq j_{min},\mathbf{k}} d_{j_1,\mathbf{k}}^{1,2} \, \psi_{j_1,k_1}^1 \otimes \varphi_{j_{min},k_2}^0 + \sum_{j_1,j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{1,3} \, \psi_{j_1,k_1}^1 \otimes \psi_{j_2,k_2}^0\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{\mathbf{k}} c^2_{j_{min},\mathbf{k}}\, \varphi^0_{j_{min},k_1} \otimes \varphi^1_{j_{min},k_2} + \sum_{j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} d^{2,1}_{j_2,\mathbf{k}}\, \varphi^0_{j_{min},k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2}$$
$$+ \sum_{j_1 \geq j_{min},\mathbf{k}} d^{2,2}_{j_1,\mathbf{k}} \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \varphi^1_{j_{min},k_2} + \sum_{j_1,j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\, \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2}$$

En utilisant encore relation de dérivation qui existe entre les espaces $V^1_j([0,1])$ et $V^0_j([0,1])$, on écrit $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_1 = -\sum_{\mathbf{k}} [(c^1_{j,\mathbf{k}})B^0]_{\mathbf{k}}\, \varphi^1_{j_{min},k_1} \otimes (\varphi^1_{j_{min},k_2})' + \sum_{j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} d^{1,1}_{j_2,\mathbf{k}}\, \varphi^1_{j_{min},k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2}$$
$$- \sum_{j_1 \geq j_{min},\mathbf{k}} [(d^{1,2}_{j_1,\mathbf{k}})B^0]_{\mathbf{k}}\, \psi^1_{j_1,k_1} \otimes (\varphi^1_{j_{min},k_2})' + \sum_{j_1,j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} d^{1,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\, \psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2}$$

et

$$\mathbf{u}_2 = -\sum_{\mathbf{k}} [B^{0\,T}(c^2_{j,\mathbf{k}})]_{\mathbf{k}}\, (\varphi^1_{j_{min},k_1})' \otimes \varphi^1_{j_{min},k_2} - \sum_{j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} [B^{0\,T}(d^{2,1}_{j_2,\mathbf{k}})]_{\mathbf{k}}\, (\varphi^1_{j_{min},k_1})' \otimes \psi^1_{j_2,k_2}$$
$$+ \sum_{j_1 \geq j_{min},\mathbf{k}} d^{2,2}_{j_1,\mathbf{k}} \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \varphi^1_{j_{min},k_2} + \sum_{j_1,j_2 \geq j_{min},\mathbf{k}} d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\, \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2}$$

Alors, avec les écritures de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ précédentes, par un calcul simple on en déduit :

$$\langle \mathbf{u}/\tilde{\Psi}^{div,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4^{j_2}+1}} [2^{j_2}(d^{1,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) - B^{0\,T}(d^{2,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})]_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{2.3.30}$$

$$\langle \mathbf{u}/\tilde{\Psi}^{div,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+1}} [(d^{1,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})B^0 - 2^{j_1}(d^{2,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})]_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{2.3.31}$$

$$\langle \mathbf{u}/\tilde{\Psi}^{div,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} [2^{j_2}(d^{1,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) - 2^{j_1}(d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})]_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \tag{2.3.32}$$

La reconstruction se fait avec :

$$(d^{1,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = \frac{2^{j_2}}{\sqrt{4^{j_2}+1}} (d^{div,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) \quad \text{et} \quad (d^{2,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = -\frac{1}{\sqrt{4^{j_2}+1}} A^{1\,T}(d^{div,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) \tag{2.3.33}$$

$$(d^{1,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = \frac{1}{\sqrt{4^{j_1}+1}} (d^{div,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) A^1 \quad \text{et} \quad (d^{2,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = -\frac{2^{j_1}}{\sqrt{4^{j_1}+1}} (d^{div,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) \tag{2.3.34}$$

$$(d^{1,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = \frac{2^{j_2}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} (d^{div,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) \quad \text{et} \quad (d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = -\frac{2^{j_1}}{\sqrt{4^{j_1}+4^{j_2}}} (d^{div,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) \tag{2.3.35}$$

Les changements de bases décrits ci-dessus sont similaires aux changements de bases décrits sur $\mathbb{R}^n$ et on peut les étendre facilement à la dimension trois ($n = 3$).

Exemple 2.3.3
Dans cet exemple, on trace la carte des coefficients de la décomposition sur les fonctions d'échelle et ondelettes à divergence nulle d'un champ issu d'une simulation numérique. La résolution maximale est $J = 8$, les coefficients d'ondelettes ont été renormalisés à 2^J près afin de les observer à une même échelle de couleur, pour $j_{min} \leq j_1, j_2 \leq J - 1$.

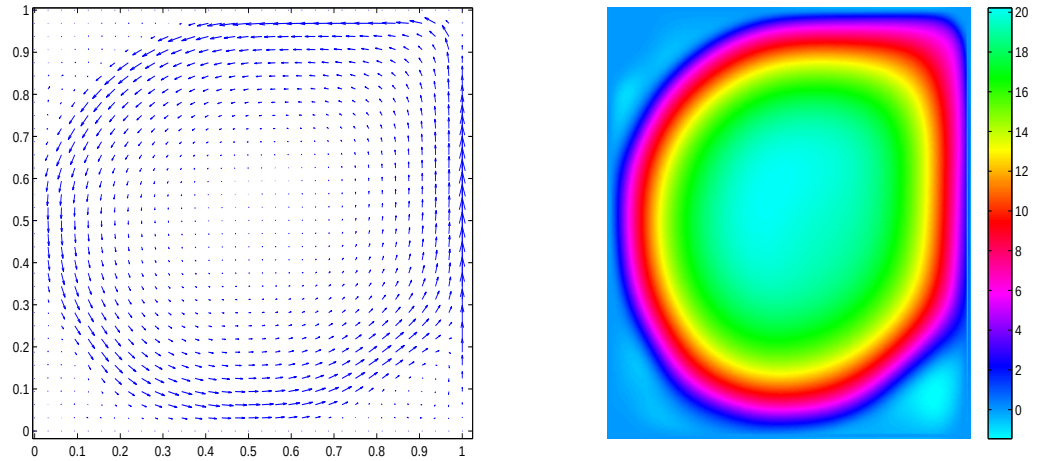

FIGURE 2.20 – Champ de vecteurs test (à gauche), coefficients d'échelle à divergence nulle dans $\mathbf{V}_8^{div}$ (à droite).

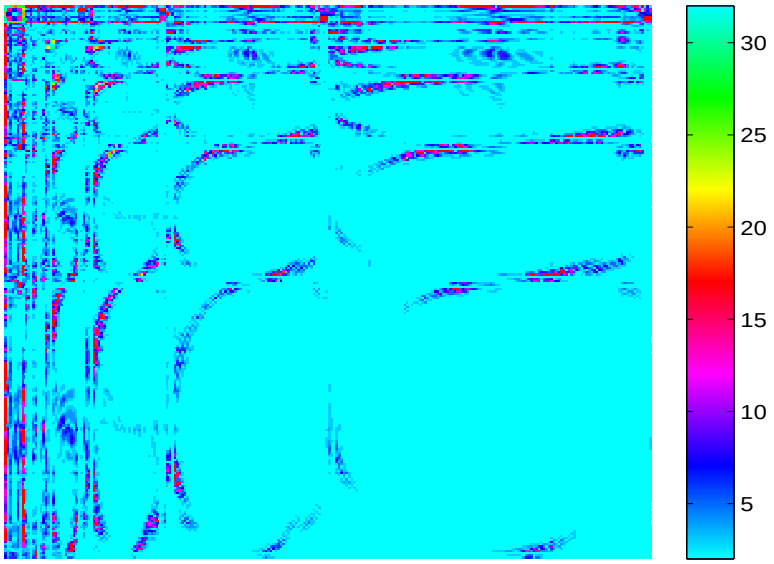

FIGURE 2.21 – Carte des coefficients d'échelle et d'ondelettes à divergence nulle contenus dans $\mathbf{V}_8^{div}$ suivant la décomposition donnée par la proposition 2.3.5 avec $j_{min} = 3$.

2.3.5 Approximation non-linéaire

Les résultats d'approximation non-linéaire obtenus dans la section 1.5 (cas périodique) sont aussi valables sur la base d'ondelettes à divergence nulle construites sur le carré $[0,1]^2$. Pour prouver ces résultats, on peut suivre le même cheminement qu'en section 1.5. Dans cette section, on va seulement traiter un exemple numérique.

Il faut aussi préciser que, pour un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_j^{div}$ à divergence nulle, faire un seuillage des coefficients d'ondelettes à divergence nulle de $\mathbf{u}$ revient à faire un seuillage des coefficients d'ondelettes des composantes $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ de $\mathbf{u}$, sur la base d'ondelettes associée à l'analyse multirésolution des $\vec{\mathbf{V}}_j$. En effet, considérons par exemple les coefficients $[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3}]$ qui sont supérieurs à un certain seuil $\epsilon > 0$ donné :

$$\forall\, \mathbf{j},\ \mathbf{k},\ \ |d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3}| > \epsilon \tag{2.3.36}$$

Alors, si on a N coefficients $[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3}]$ qui vérifient l'équation $(2.3.36)$, la relation $(2.3.35)$ de recomposition permet de définir N coefficients d'ondelettes $[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{1,3}]$ pour $\mathbf{u}_1$ et N coefficients d'ondelettes

$[d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ pour $\mathbf{u}_2$ tels que :

$$\forall\, \mathbf{j},\ \mathbf{k},\ \ |d^{1,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}| > \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad |d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}| > \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

De plus, si les coefficients $[d^{div,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ sont ordonnés, par ordre décroissant en valeur absolue, les N coefficients $[d^{1,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ et $[d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ définis à partir des N coefficients $[d^{div,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ suivent le même ordre.

La question est de savoir si les N coefficients $[d^{1,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ et $[d^{2,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ sont les N plus grands coefficients en valeur absolue qui seront définis avec le seuil $\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, si on 'est pas parti des coefficients $[d^{div,3}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$. Pour répondre à cela, comme les suites des coefficients sont ordonnées, il suffit de prendre $\epsilon = 0$ et de regarder la suite de tous les coefficients obtenus avec $(2.3.35)$.

Exemple 2.3.4
On reprend le champ de vecteurs de l'exemple précédent $2.3.3$*, analysé toujours avec les ondelettes à divergence nulle construites à partir des générateurs B-Spline biorthogonaux à trois moments nuls. C'est un champ qui a une régularité supérieure à celle des bases analysantes, on retrouve alors la décroissance maximale fournie par ces bases. Sur la figure* 2.22*, on trace l'erreur en norme* ℓ^2 *sur les valeurs aux point de grille de* $\mathbf{u}_1$ *dans* $V^1_j \otimes V^0_j$ *et* $\mathbf{u}_2$ *dans* $V^0_j \otimes V^1_j$*, avec* $j_{min} = 4$*. La figure* 2.23 *représente les résidus de l'erreur de* $\mathbf{u}$ *reconstruite avec seulement* 22% *de ses coefficients à divergence nulle. On remarque que cette erreur est beaucoup plus importante aux bords.*

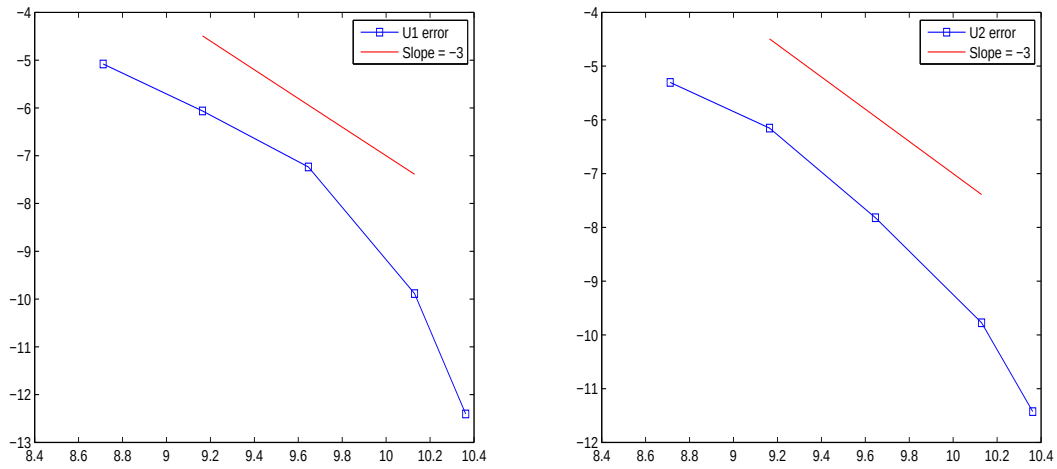

FIGURE 2.22 – Erreur d'approximation non linéaire en fonction des plus gros coefficients d'ondelettes à divergence nulle retenus, sur $\mathbf{u}_1$ (à gauche) et sur $\mathbf{u}_2$ (à droite) : échelle logarithmique.

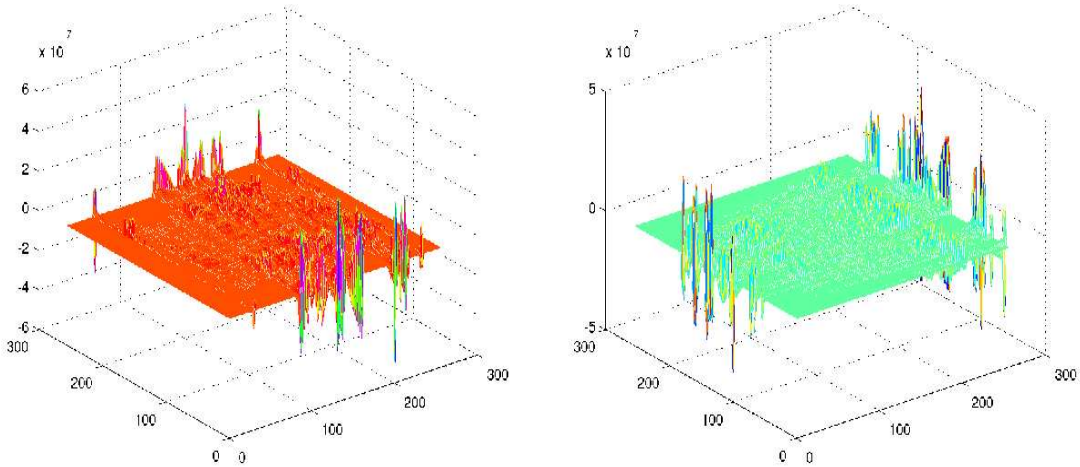

FIGURE 2.23 – Résidus de la solution reconstruite avec 22% des coefficients d'ondelettes à divergence nulle : sur $\mathbf{u}_1$ à gauche et sur $\mathbf{u}_2$ à droite. Au total on a 256^2 coefficients.

Troisième partie

Algorithmes pratiques

Chapitre 3

Calculs pratiques et simulations numériques

Les bases d'ondelettes construites dans les deux chapitres précédents ont pour objectif de servir à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDPs). Elles peuvent aussi être appliquées à l'analyse de signaux numériques ou à l'étude de champs turbulents incompressibles. Dans la résolution numérique des EDPs, le plus souvent on discrétise les équations sous forme variationnelle en utilisant une méthode de type Galerkin ou Pétrov-Galerkin [45]. Cela nécessite le calcul des matrices des opérateurs de dérivation sur une base d'approximation bien choisie, dans ce cas la base d'ondelettes. En plus, pour des données discrètes des problèmes à résoudre, on aurait besoin des formules efficaces pour calculer les projecteurs multi-échelles $\mathcal{P}_j$ sur les espaces V_j de l'analyse multirésolution choisie.
L'objectif de la section est d'établir les outils et formules nécessaires pour effectuer les calculs de ces projections ou des matrices des opérateurs différentiels. On va se limiter au cas de la dimension un, l'extension à des dimensions plus grandes se fait de façon naturelle : puisque les bases sont construites par produit tensoriel. Plus particulièrement, les matrices à calculer seront celles de la projection $\mathcal{P}_j(\frac{d^k}{dx^k})$ ou $\mathcal{Q}_j(\frac{d^k}{dx^k})$. On prend $k = 1$ pour simplifier, le calcul sur des indices de dérivations supérieurs se fera de manière analogue [6].

3.1 Fomules de quadrature

Soient $V_j([0,1])$ et $\tilde{V}_j([0,1])$ deux analyses multirésolutions biorthogonales de $L^2([0,1])$. On note respectivement $\{\Phi^\flat_{j,\ell}, \Phi^\sharp_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq r-1}$ et $\{\tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell}, \tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell}\}_{0\leq\ell\leq\tilde{r}-1}$ leurs fonctions d'échelle de bords, $\{\varphi_{j,k}\}_{k_0\leq k\leq 2^j-k_1}$ et $\{\tilde{\varphi}_{j,k}\}_{\tilde{k}_0\leq k\leq 2^j-\tilde{k}_1}$ celles qui sont à l'intérieur, voir section 2.2. Pour initialiser l'algorithme de transformée en ondelettes, un des problèmes qu'on rencontre en pratique c'est de

définir une approximation grossière $\mathcal{P}_j(f)$ ou $\tilde{\mathcal{P}}_j(f)$ de $f \in L^2([0,1])$, avec :

$$\mathcal{P}_j(f) = \sum_{\ell=0}^{r-1} \langle f, \tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell} \rangle \Phi^\flat_{j,\ell} + \sum_{k=k_0}^{2^j-k_1} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{\ell=0}^{r-1} \langle f, \tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell} \rangle \Phi^\sharp_{j,\ell}$$

et

$$\tilde{\mathcal{P}}_j(f) = \sum_{\ell=0}^{\tilde{r}-1} \langle f, \Phi^\flat_{j,\ell} \rangle \tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell} + \sum_{k=\tilde{k}_0}^{2^j-\tilde{k}_1} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \tilde{\varphi}_{j,k} + \sum_{\ell=0}^{\tilde{r}-1} \langle f, \Phi^\sharp_{j,\ell} \rangle \tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell}$$

Le problème considéré est alors le calcul des produits scalaires qui interviennent dans $\mathcal{P}_j(f)$ et $\tilde{\mathcal{P}}_j(f)$ à partir des valeurs de f sur le réseau $k2^{-j},\ k \in \mathbb{Z}$. Pour calculer ces produits scalaires on a choisi de généraliser au cas biorthogonal quelconque les techniques introduites dans [95, 110]. Ces techniques consistent à définir une formule de quadrature qui soit exacte pour des monônes jusqu'à un certain degré. On va établir les formules pour $\langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle$, $\langle f, \tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell} \rangle$ et $\langle f, \tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell} \rangle$, pour ce qui est de $\tilde{\mathcal{P}}_j(f)$ les formules s'adaptent facilement. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ le plus haut degré d'exactitude souhaité. Selon que l'on veut faire le calcul avec une fonction de bord ou intérieure, on considère les deux suites suivantes :

$$\begin{aligned} x_p &= -\lfloor q/2 \rfloor + p \\ y_p &= p \end{aligned}$$

La formule de quadrature est définie au moyen des poids telle que :

$$\begin{aligned} \langle f, \tilde{\Phi}^\flat_{j,\ell} \rangle &\approx 2^{-j/2} \sum_{p=0}^{q} \alpha^\flat_{p,\ell} f(\frac{y_p}{2^j}) \\ \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle &\approx 2^{-j/2} \sum_{p=0}^{q} \alpha_p f(\frac{k+x_p}{2^j}) \\ \langle f, \tilde{\Phi}^\sharp_{j,\ell} \rangle &\approx 2^{-j/2} \sum_{p=0}^{q} \alpha^\sharp_{p,\ell} f(\frac{2^j-y_p}{2^j}) \end{aligned}$$

Les poids $\{\alpha^\flat_{p,\ell}, \alpha_p, \alpha^\sharp_{p,\ell} :\ 0 \le \ell < \tilde{r}\}_{0 \le p \le q}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}^\flat_\ell(x) Q(x) dx = \sum_{p=0}^{q} \alpha^\flat_{p,\ell} Q(y_p), \quad 0 \le \ell < \tilde{r} \\ &\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x) Q(x) dx = \sum_{p=0}^{q} \alpha_p Q(x_p) \\ &\int_{-\infty}^{1} \tilde{\Phi}^\sharp_\ell(1-x) Q(x) dx = \sum_{p=0}^{q} \alpha^\sharp_{p,\ell} Q(1-y_p), \quad 0 \le \ell < \tilde{r} \end{aligned}$$

avec $Q(x)$ un polynôme de degré au plus q. Les valeurs de ces poids sont facilement calculables, car on sait calculer les moments de $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\Phi}_\ell^\flat$ et $\tilde{\Phi}_\ell^\sharp$ d'après l'équation (2.1.6), pour plus de détail voir [95].

Dans le cas périodique, le calcul de ces produits scalaires est beaucoup plus simple, on sait montrer qu'il revient à faire une convolution discrète entre les valeurs de f et un filtre discret obtenu à partir d'une fonction cardinal de Lagrange [98].

Exemple 3.1.1
Sur la figure 3.1, on compare les valeurs aux points de la projection de $\sin(4\pi x)$ *dans* V_{13} *obtenue par quadrature, dans le cas périodique. On a utilisé les ondelettes orthogonales de Daubechies à trois moments nuls :* $r = 3$. *Sur la figure 3.2, on compare les valeurs aux points de la projection de* $\sin(2\pi x)\sin(50x)$ *dans* V_{13} *obtenue par quadrature, dans le cas non périodique. On utilise les B-Splines biorthogonales avec* $r = \tilde{r} = 3$. *Sur la figure 3.3 on compare les valeurs aux points de la projection de* $\sin(2\pi x)\sin(50x)$ *dans* V_{13}, *avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, puis on trace l'erreur d'interpolation obtenue dans* V_8. *Les générateurs d'ondelettes utilisés sont toujours ceux de Daubechies à trois moments nuls :* $r = 3$. *Dans tous les cas, les convergences souhaitées sont obtenues, seulement avec des ordres qui sont plus élevés aux bords.*

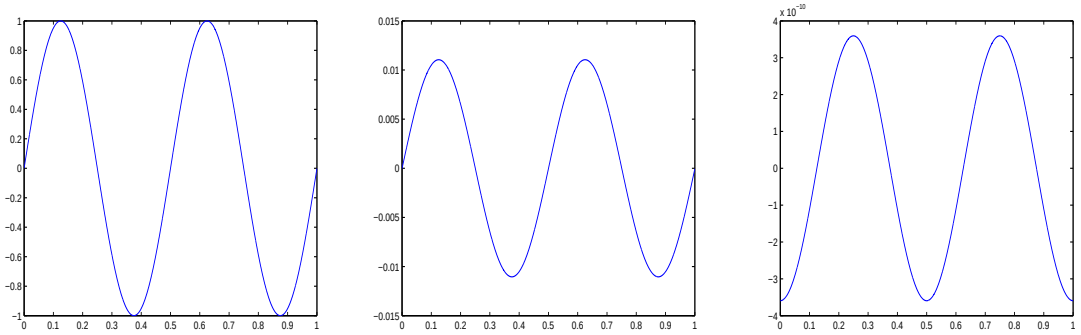

FIGURE 3.1 – $f(x) = \sin(4\pi x)$ échantillonné sur 2^{13} points (à gauche), sa projection dans V_{13} (au centre) et l'erreur des valeurs aux points de la projection. Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$ (en périodique).

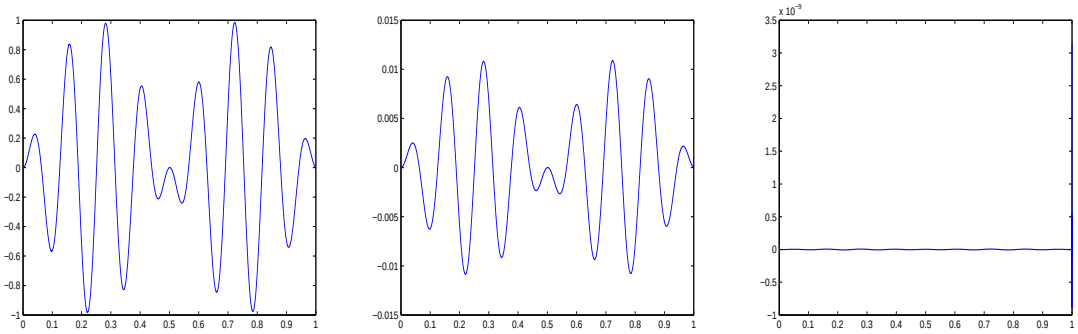

FIGURE 3.2 – $f(x) = \sin(2\pi x)\sin(50x)$ échantillonné sur 2^{13} points (à gauche), sa projection dans V_{13} (au centre) et l'erreur des valeurs aux points de la projection. Cas des générateurs biorthogonaux B-Splines $r = \tilde{r} = 3$ (sans conditions aux limites).

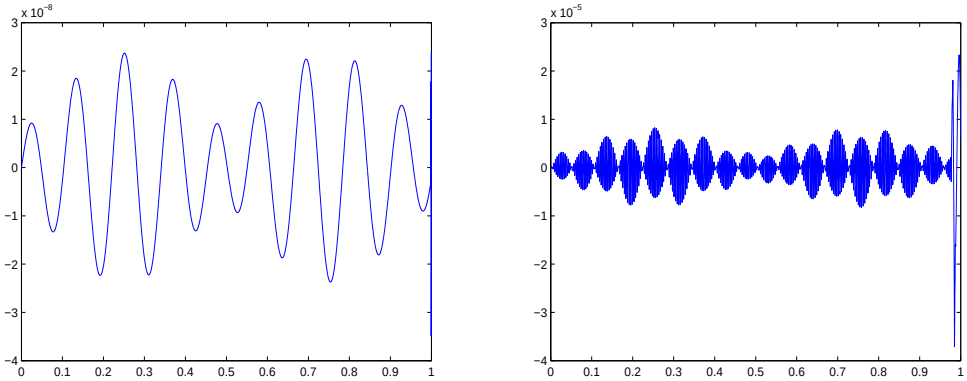

FIGURE 3.3 – Erreur sur les valeurs aux points de la projection de $f(x) = \sin(2\pi x)\sin(50x)$ dans V_{13} (à gauche) et l'erreur d'interpolation dans V_8 (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$ (Dirichlet homogène).

3.2 Calcul des termes de la matrice de masse et de la matrice de rigidité

Pour commencer, on va définir ce qu'on entend par matrice de masse et matrice de rigidité d'une base d'ondelettes. On considère d'abord le cas des analyses multirésolutions de $L^2(\mathbb{R})$, le cas de l'intervalle $[0, 1]$ sera traité en fin de section.

Définition 3.2.1

Soit $\mathcal{B} = \{\psi_{j,k}\}_{j,\, k\in\mathbb{Z}}$ une bases d'ondelettes "régulière" de $L^2(\mathbb{R})$. On appelle matrice de masse de la base $\mathcal{B}$, qu'on note $\mathbf{M}$, la matrice de termes généraux $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle$:

$$\forall j,\ j',\quad \mathbf{M}_{k,k'} = \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k} \cdot \psi_{j',k'} dx$$

On appelle matrice de rigidité (matrice de raideur) de la base $\mathcal{B}$, qu'on note $\mathbf{R}$, la matrice de termes généraux $\langle \frac{d}{dx}\psi_{j,k}, \frac{d}{dx}\psi_{j',k'}\rangle$:

$$\forall j,\ j',\quad \mathbf{R}_{k,k'} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(\psi_{j,k}) \cdot \frac{d}{dx}(\psi_{j',k'}) dx$$

Cette définition est "*valable*" pour toute autre base d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, en particulier pour les analyses multirésolutions de $L^2(\Omega)$ (Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$), seulement on doit remplacer l'opérateur $\frac{d}{dx}$ par ∇ si $n \geq 2$. Comme les bases qu'on utilise sont construites par produit tensoriel, les résultats des calculs qu'on va donner sont ceux établis en dimension un.

Depuis les travaux de G. Beylkin [6] et de W. Dahmen et C.A. Michelli [34], on sait calculer de manière exacte les termes de la forme : $\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j',k'}\rangle$ et $\langle \varphi_{j,k}, \frac{d}{dx}\varphi_{j',k'}\rangle$, pour une fonction d'échelle φ à support compact. Les calculs des termes $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle$ et $\langle \psi_{j,k}, \frac{d}{dx}\psi_{j',k'}\rangle$ sur l'ondelette associée se déduisent directement par transformée en ondelettes.

<u>Les termes de la matrice de masse :</u>

Pour calculer les termes de la matrice $\mathbf{M}$, on utilise essentiellement la relation à deux échelles satisfaite par la fonction d'échelle φ. Dans la proposition 3.2.1 ci-dessous, on donne une version simple des résultats obtenus dans [6] et [34] qui permettent de calculer les termes de cette matrice pour une base des fonctions d'échelle à support compact.

Proposition 3.2.1
Soit φ une fonction d'échelle de $L^2(\mathbb{R})$ et soit I_φ sa fonction de corrélation au point x définie par :

$$I_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\varphi(y-x)dy \tag{3.2.1}$$

Alors, la fonction I_φ satisfait une relation à deux échelles :

$$I_\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} i_k I_\varphi(2x-k) \tag{3.2.2}$$

avec

$$i_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_l h_{l-k} \tag{3.2.3}$$

et

$$I_\varphi(m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} i_{2m-k} I_\varphi(k) \tag{3.2.4}$$

Preuve :
En substituant la relation d'échelle satisfaite par φ dans (3.2.1), on trouve

$$I_\varphi(x) = 2\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_l h_m \int_{\mathbb{R}} \varphi(2y-l)\varphi(2y-2x-m)dy$$

Un changement de variable dans l'intégrale donne :

$$I_\varphi(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_l h_m I_\varphi(2x-(l-m))$$

D'où le résultat en décalant l'indice de sommation. Pour avoir (3.2.4) il suffit d'évaluer I_φ aux points entiers. ■

Soit φ à support compact dont la relation à deux échelles s'écrit :

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{L-1} h_k \varphi(2x-k),$$

Par définition, pour tout entier $m \leq L-1$ et $m \geq L-1$, on a : $I_\varphi(m) = 0$, puisque le support de φ est $[0, L-1]$. De plus, si on définit la matrice A_φ par :

$$A_\varphi = \left(\sum_l h_l h_{l+j-2i}\right)_{2-L\leq i,j\leq L-2} \tag{3.2.5}$$

d'après l'équation (3.2.4), on voit que le vecteur $(I_\varphi(m))^T_{2-L\leq m\leq L-2}$ est un vecteur propre de la matrice A_φ associé à la valeur propre $\lambda = 1$. On a ainsi ramené le calcul de $I_\varphi(m)$ à un problème aux valeurs propres, plus simple à résoudre numériquement.

On peut aussi calculer les $I_\varphi(m)$ dans le domaine de Fourier. En effet, par Parseval on a :

$$I_\varphi(m) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x-m)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-i\xi m} d\xi \tag{3.2.6}$$

En échantillonnant, on trouve :

$$I_\varphi(m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+2\pi k)|^2 e^{-i\xi m} d\xi \tag{3.2.7}$$

Cela veut dire que les $I_\varphi(m)$ sont les coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique θ :

$$\theta(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \tag{3.2.8}$$

Pour chercher la fonction θ, on introduit l'opérateur de transition T associé à φ [64, 76] :

$$(T\mu)(\xi) = |m_0(\frac{\xi}{2})|^2\mu(\frac{\xi}{2}) + |m_0(\frac{\xi}{2}+\pi)|^2\mu(\frac{\xi}{2}+\pi) \tag{3.2.9}$$

avec m_0 le polynôme de raffinement de φ et μ un polynôme trigonométrique en ξ de la forme :

$$\mu(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}, \quad c_k \in \mathbb{R}$$

Alors, θ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda = 1$. En effet, la relation à deux échelles $\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ donne :

$$\begin{aligned}\theta(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_0(\frac{\xi}{2}+k\pi)|^2|\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}+k\pi)|^2\\ &= |m_0(\frac{\xi}{2})|^2\theta(\frac{\xi}{2}) + |m_0(\frac{\xi}{2}+\pi)|^2\theta(\frac{\xi}{2}+\pi)\end{aligned}$$

ce qui traduit bien : $(T\theta)(\xi) = \theta(\xi)$. Pour plus de détail et la justification des calculs, voir [64, 76].

Les termes de la matrice de rigidité :

Pour calculer les termes de la matrice de rigidité, on aurait besoin de la proposition suivante [6] :

Proposition 3.2.2 *[6]*
Soit J_φ la fonction de corrélation entre φ et sa dérivée φ' définie par :

$$J_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\varphi'(y-x)dy \tag{3.2.10}$$

Alors, la fonction J_φ vérifie une relation à deux échelles :

$$J_\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} j_k J_\varphi(2x-k) \tag{3.2.11}$$

avec

$$j_k = 2i_k, \qquad i_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_l h_{l-k} \tag{3.2.12}$$

Les valeurs de J_φ sur les entiers vérifient :

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} l J_\varphi(l) = -1 \tag{3.2.13}$$

Preuve :
La relation (3.2.11) est une conséquence directe de la relation d'échelle. Pour démontrer la relation (3.2.13), il faut faire intervenir le fait que les moments de φ vérifient :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} l^m \varphi(x-l) = x^m + \sum_{l=1}^{m} (-1)^l C_m^l x^{m-l} \int \varphi(x) x^l dx \tag{3.2.14}$$

■

Dans le calcul de $J_{\varphi'}$, on voit l'apparition d'un facteur en puissance de 2 par rapport aux formules données par la proposition 3.2.1. Avec un raisonnement analogue à celui de la proposition 3.2.1, on montre que les valeurs de $J_{\varphi'}$ sur les entiers peuvent être obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres. De manière générale, on calcule J_{φ^k} en cherchant le vecteur propre de A_φ associé à $\lambda = 2^k$. Pour calculer les termes $\langle \frac{d}{dx}\varphi_k, \frac{d}{dx}\varphi_{k'} \rangle$, les termes de la matrice de rigidité, il suffit de chercher le vecteur propre associé à $\lambda = 2^2$. Comme il n'est pas unique, il faut utiliser une condition de compatibilité analogue à $(3.2.13)$, voir [6].

Pour les ondelettes, par exemple connaissant les valeurs de I_φ et J_φ, la relation à deux échelles satisfaite par ψ donne :

$$I_\psi(m) = \sum_k \sum_l g_k g_{l-2m} I_\varphi(l-k)$$

et

$$J_\psi(m) = \sum_k \sum_l g_k g_{l-2m} J_\varphi(l-k)$$

Sur l'intervalle $[0,1]$

On garde les notations introduites à la section 3.1. Pour des analyses multirésolutions orthogonales, les calculs des termes des matrices de masse et de rigidité sont donnés en détail dans [95]. Dans le cas biorthogonal quelconque, on va encore se servir de la relation à deux échelles pour obtenir des résultats similaires à ceux de [95]. Pour les fonctions intérieures, pas de changement on peut toujours utiliser les propositions $(3.2.1)$ et $(3.2.2)$. Pour les fonctions de bords, on va considérer par exemple celles qui sont en 0 et par changement d'échelle se place à $j = 0$. Comme ces dernières vérifient une relation à deux échelles donnée par (2.1.1), si on note A^Φ la matrice de Gram des fonctions de bord en 0, par simple substitution on a :

$$2A^\Phi = DA^\Phi D^T + DB^\Phi B^T + B(B^\Phi)^T D^T + BB^\varphi B^T \tag{3.2.15}$$

avec

$$A^\Phi_{k,k'} = \langle \Phi^\flat_k, \Phi^\flat_{k'} \rangle, \quad B^\Phi_{k,k'} = \langle \Phi^\flat_k, \varphi_{k'} \rangle, \quad B^\varphi_{k,k'} = \langle \varphi_k, \varphi_{k'} \rangle \tag{3.2.16}$$

Les matrices D et B sont celles données par la proposition $(2.1.1)$. Le calcul des termes de la matrice B^Φ, produit scalaire entre une fonction de bord et une fonction intérieure, ne présente

pas de difficulté. En utilisant la définition de fonctions de bord, on se ramène au calcul d'une combinaison des produits scalaires des fonctions d'échelle sur $\mathbb{R}$. En plus, les propriétés de la matrice D font que le système défini par l'équation (3.2.15) se résout par une simple division matricielle [95].

De même, la matrice de rigidité des fonctions de bord en 0, qu'on note R^{Φ}, vérifie cette relation :

$$\frac{1}{2}R^{\Phi} = DR^{\Phi}D^T + DK^{\Phi}B^T + B(K^{\Phi})^T D^T + BR^{\varphi}B^T \tag{3.2.17}$$

avec

$$R^{\Phi}_{k,k'} = \langle \frac{d}{dx}\Phi^{\flat}_k, \frac{d}{dx}\Phi^{\flat}_{k'}\rangle, \;\; K^{\Phi}_{k,k'} = \langle \frac{d}{dx}\Phi^{\flat}_k, \frac{d}{dx}\varphi_{k'}\rangle, \;\; R^{\varphi}_{k,k'} = \langle \frac{d}{dx}\varphi_k, \frac{d}{dx}\varphi_{k'}\rangle \tag{3.2.18}$$

Le cas des fonctions de bord en 1 se traite de façon similaire, par symétrie.

Remarque 3.2.1
La résolution du système (3.2.17) doit se faire avec un peu plus de précaution : on ne peut pas appliquer une simple division matricielle. Il existe des termes qu'il faut calculer analytiquement [95], toute fois on peut les remplacer par des constantes dans (3.2.17) et faire une division. □

Pour illustrer les calculs en dimensions supérieures, considérons la base des fonctions d'échelle à divergence nulle sur $\mathbb{R}^2$, et soit $\mathbb{M}^{\mathrm{div}}$ la matrice de masse de cette base. C'est une matrice qui dépend de quatre paramètres. À une échelle j fixée, par définition on a :

$$[\mathbb{M}^{\mathrm{div}}]_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi^{div}_{j,\mathbf{k}} \cdot \Phi^{div}_{j,\mathbf{k}'} dxdy, \;\; \mathbf{k} = (k_1, k_2), \;\; \mathbf{k}' = (k'_1, k'_2) \tag{3.2.19}$$

En utilisant la définition des fonctions $\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$, on retrouve :

$$[\mathbb{M}^{\mathrm{div}}]_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \langle \varphi^1_{j,k_1}, \varphi^1_{j,k'_1}\rangle \langle (\varphi^1_{j,k_2})', (\varphi^1_{j,k'_2})'\rangle + \langle (\varphi^1_{j,k_1})', (\varphi^1_{j,k'_1})'\rangle \langle \varphi^1_{j,k_2}, \varphi^1_{j,k'_2}\rangle \tag{3.2.20}$$

Si on note $\mathbf{M}^1$ et $\mathbf{R}^1$ les matrices de masse et de rigidité de la base $(\varphi^1_{j,k})$, on voit que $(3.2.19)$ peut s'écrire comme :

$$[\mathbb{M}^{\mathrm{div}}]_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \mathbf{M}^1_{k_1,k'_1}\mathbf{R}^1_{k_2,k'_2} + \mathbf{R}^1_{k_1,k'_1}\mathbf{M}^1_{k_2,k'_2} \tag{3.2.21}$$

On reviendra plus en détail sur le calcul et l'utilisation de cette matrice dans la partie réservée à la décomposition de Helmholtz-Hodge.

Exemple 3.2.1
On prend l'exemple de l'analyse multirésolution sur l'intervalle construite à partir du générateur

orthogonal de Daubechies à trois moments nuls, avec conditions aux limites de Dirichlet homogène. Sur la figure 3.4, on trace les coefficients non nuls de la matrice de rigidité des fonctions d'échelle et d'ondelettes, dans ce cas, la matrice de masse est l'identité. Sur la figure 3.5, on trace la matrice de masse des fonctions d'échelle et celle des ondelettes à divergence nulle construites à partir de cette analyse multirésolution. La matrices $\mathbb{M}^{\mathrm{div}}$ *correspondent à la matrice du Laplacien scalaire* $2D$ *avec conditions aux limites de Dirichlet homogène.*

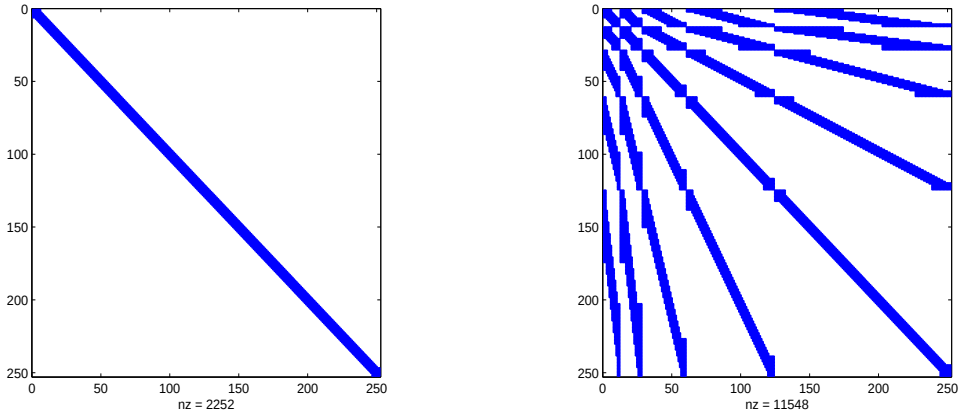

FIGURE 3.4 – Matrices de raideur des fonctions d'échelle (à gauche) et celle des ondelettes (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$, avec conditions aux limites de Dirichlet homogène.

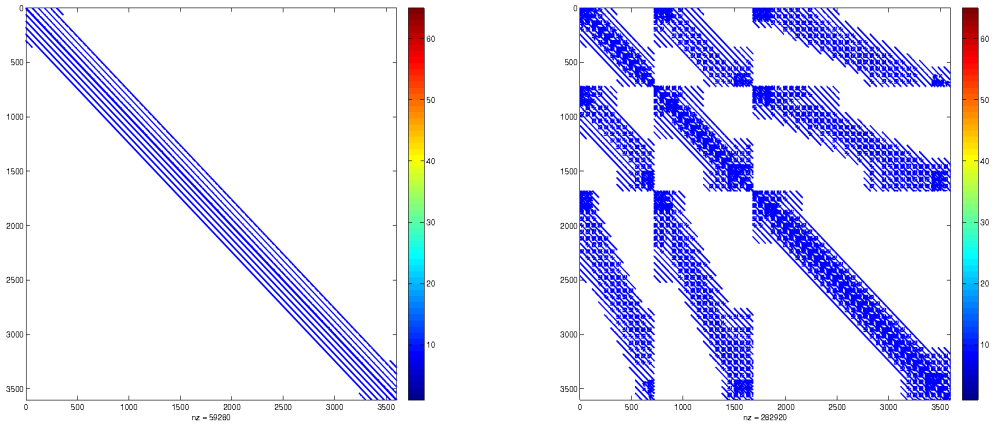

FIGURE 3.5 – Matrice de masse des fonctions d'échelle à divergence nulle (à gauche) et celle des ondelettes (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$, $\mathbf{j} = (6, 6)$ et $j_{min} = 4$.

3.3 Résolution de l'équation de la chaleur

On se propose dans cette partie de résoudre numériquement le problème de Cauchy lié à l'équation de la chaleur dans un domaine "*régulier*" Ω de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,\ 3)$:

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = f \tag{3.3.1}$$

avec $\mathbf{u}_0$ donnée initiale connue et des conditions aux limites fixées au préalable. Le facteur ν représente le coefficient de diffusion qui est supposé constant, f est le terme source. Le problème de la chaleur est classique dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Pour des résultats théoriques généraux sur l'étude mathématique de ce problème, on peut consulter [46]. L'équation (3.3.1) présente une dérivée d'ordre un en temps et des dérivées d'ordre deux en espace. Pour résoudre cette équation en pratique, on doit discrétiser les dérivées spatiale et temporelle. On va utiliser une méthode de type Galerkin sur base d'ondelettes pour la discrétisation spatiale et un schéma de type Euler implicite en différences finies pour la discrétisation en temps. Ce choix de méthode conduit à la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps. Afin d'éviter des calculs avec des grandes matrices de dimensions deux ou trois, on a choisi la technique utilisée dans [14, 15] qui consiste à factoriser le noyaux de la chaleur. Les résultats obtenus dans [14, 15] utilisent une discrétisation de l'opérateur en différence finie, puis une projection en bases d'ondelettes périodiques. Dans ce travail, on discrétise directement l'opérateur sur une base d'ondelettes vérifiant des conditions aux limites périodiques ou non périodiques. On montre sur la base des résultats numériques que cette technique s'étend facilement à des dimensions supérieures $(n = 3)$, et qu'elle peut s'appliquer dans le cadre d'une discrétisation variationnelle multi-échelle du problème [9, 66, 67].

3.3.1 Factorisation du noyau de la chaleur en dimension deux et trois

Tout au long de cette section, sauf mention contraire, $\mathbf{u}_n$ sera la n-ième solution donnée par l'algorithme en temps appliqué à l'équation $(3.3.1)$:

$$\forall\, n \geq 0, \;\; \mathbf{u}_n = \mathbf{u}(x, n\delta t),$$

δt est le pas de temps choisi. Une discrétisation en temps, avec un schéma d'Euler implicite, en différences finies de l'équation (3.3.1) donne :

$$(1 - \nu\delta t\Delta)\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \delta t f \tag{3.3.2}$$

La technique de factorisation consiste à remplacer le schéma $(3.3.2)$ par l'application d'un schéma unidimensionnel du même type selon chaque direction. C'est une technique inspirée des méthodes de résolution utilisant des directions alternées de [97]. En dimension deux et trois, la factorisation du schéma (3.3.2) revient à :

$$(1 - \nu\delta t\frac{\partial^2}{\partial x^2})(1 - \nu\delta t\frac{\partial^2}{\partial y^2})\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \delta t f \tag{3.3.3}$$

et

$$(1 - \nu\delta t\frac{\partial^2}{\partial x^2})(1 - \nu\delta t\frac{\partial^2}{\partial y^2})(1 - \nu\delta t\frac{\partial^2}{\partial z^2})\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \delta t f \tag{3.3.4}$$

Les schémas (3.3.3) et (3.3.4) sont inconditionnellement stables, de précision $O(\delta t)$ (voir [14] p.79). Pour la discrétisation spatiale, on va supposer que la solution $\mathbf{u}$ cherchée est dans espace X, avec X un de ces espaces : $H^1_{\text{per}}(\Omega)$ ou $H^1_0(\Omega)$, selon les conditions aux limites fixées. La méthode de Galerkin consiste à approcher le problème continu de dimension infinie par un problème discret de dimension finie, et cela en définissant des espaces d'approximation de dimension finie X_h de X tels que :

$$X_h \subset X \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} X_h = X$$

Dans notre cas, les espaces X_h seront des analyses multirésolutions de X :

$$X_h = \mathbf{V}_j \quad \text{avec} \quad h = 2^{-j}$$

Alors, la solution $\mathbf{u}$ est calculée sur la base des fonctions d'échelle $\Phi_{j,\mathbf{k}}$ de $\mathbf{V}_j$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t)\Phi_{j,\mathbf{k}}$$

ou sur la base d'ondelettes $\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ de $\mathbf{V}_j$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t)\Phi_{j_0,\mathbf{k}} + \sum_{j_0 \leq |\mathbf{j}| \leq j-1} \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(t)\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$$

On rappelle que les bases d'ondelettes utilisées sont construites par produit tensoriel des bases unidimensionnelles. Dans ces conditions, la méthode de Galerkin appliquée aux schémas (3.3.3) et (3.3.4) donne :

$$\mathbf{A}_{\nu\delta t}\mathbf{u}_{n+1}\mathbf{A}_{\nu\delta t}^T = \mathbf{M}\mathbf{u}_n\mathbf{M}^T + \delta t\mathbf{M}f\mathbf{M}^T \tag{3.3.5}$$

et

$$(\mathbf{A}_{\nu\delta t}\mathbf{u}_{n+1}\mathbf{A}_{\nu\delta t}^T)\mathbf{A}_{\nu\delta t} = (\mathbf{M}\mathbf{u}_n\mathbf{M}^T)\mathbf{M} + \delta t(\mathbf{M}f\mathbf{M}^T)\mathbf{M} \tag{3.3.6}$$

avec $\mathbf{u}_n$ la matrice des coefficients $c_{j,\mathbf{k}}(n\delta t)$ et $d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(n\delta t)$. La matrice $\mathbf{A}_{\nu\delta t}$ est celle de l'opérateur unidimensionnel $(1 - \nu\delta t\frac{\partial^2}{\partial x^2})$, elle correspond à : $\mathbf{A}_{\nu\delta t} = \mathbf{M} - \nu\delta t\mathbf{R}$ où on a noté $\mathbf{M}$ et $\mathbf{R}$ respectivement les matrices de masse et de raideur des bases unidimensionnelles.

Pour la complexité numérique, par exemple en dimension deux, si c est le nombre d'éléments non nuls de la matrice $\mathbf{A}_{\nu\delta t}$ et P ceux de la matrice des coefficients $\mathbf{u}_n$, la complexité théorique d'une itération est de $O(cP)$ opérations. Cette complexité est beaucoup moins importante par rapport à d'autres méthodes : en différences finies on a $O(\ell N^2)$ opération avec ℓ la largeur de la bande de $\mathbf{A}_{\nu\delta t}$ et N l'ordre de la matrice $\mathbf{u}_n$ dans la cas d'une factorisation LU. Pour plus de précision sur les calculs et l'étude de la complexité des schémas précédents, on peut se référer à [14].

En pratique, le domaine de calcul Ω considéré est $[0,1]^n$, avec $n = 2$ ou $n = 3$. Pour imposer des conditions aux limites non périodiques, comme la géométrie est simple, on construit des opérateurs de relèvement dans le cas non homogène [90].

Exemple 3.3.1
Selon la dimension d'espace, on a testé la méthode sur les deux solutions exactes :

$$\mathbf{u}(x,y,t) = \frac{1}{8\pi^2\nu}(1 - e^{-8\pi^2\nu t})\sin(2\pi x)\sin(2\pi y), \quad \textit{cas } 2D$$
$$\mathbf{u}(x,y,z,t) = \frac{1}{12\pi^2\nu}(1 - e^{-12\pi^2\nu t})\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z), \quad \textit{cas } 3D$$

avec respectivement : $f(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ *et* $f(x,y,z) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)$. *Les résolutions choisies sont* $j = 8$ *pour le cas* $2D$ *et* $j = 5$ *pour le cas* $3D$. *Le temps final de calcul est fixé à* $t = 0.02$, *la viscosité* $\nu = 1$. *La base d'ondelettes est celle du générateur orthogonal de Daubechies à quatre moments nuls. On présente sur la figure 3.6 la norme* ℓ^2 *du résidu en fonction du pas de temps* δt. *On a multiplié l'erreur* $3D$ *par* 10 *afin de tracer les deux courbes sur le même graphe, car dans ce cas l'erreur* $2D$ *est beaucoup plus importante. On observe une pente de l'ordre de* 1 *dans les deux cas, ce qui est conforme au résultat escompté.*

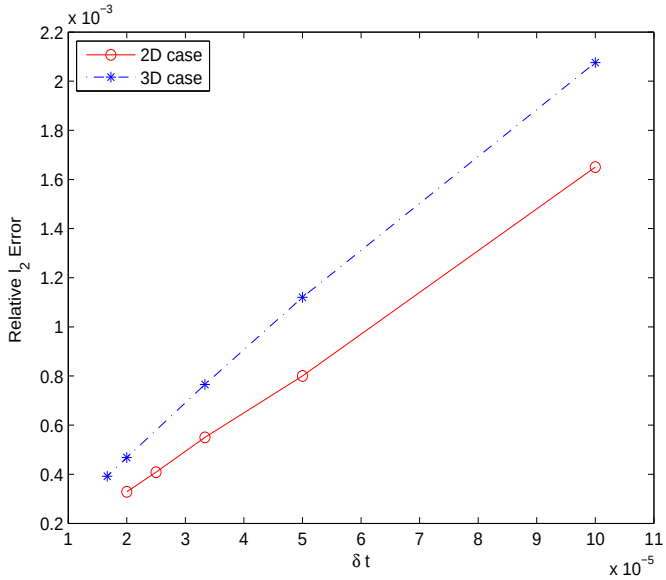

FIGURE 3.6 – Erreur ℓ^2 en fonction du pas de temps. La courbe en pointillé correspond à la dimension trois.

3.3.2 Une discrétisation variationnelle multi-échelles

Dans cette partie, on va décrire comment on peut résoudre l'équation de la chaleur $(3.3.1)$ en utilisant une formulation variationnelle multi-échelles du problème. Pour cela, on considère le problème dans le cas $1D$. La méthode variationnelle multi-échelle introduite par F. Brezzi [9] et J.R. Hughes et al. [66, 67] appliquée à notre problème peut se résumer comme suit.

On suppose que la solution $\mathbf{u}$ se décompose en :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^c + \mathbf{u}^f \tag{3.3.7}$$

où $\mathbf{u}^c$ est une approximation grossière de $\mathbf{u}$, tandis que $\mathbf{u}^f$ représente la partie hautes fréquences qui vit à des échelles plus fines.

Puis on discrétise l'équation (3.3.1) de deux façons : une en testant avec des fonctions qui sont à la même échelle que $\mathbf{u}^c$ et une autre avec les fonctions de même échelle que $\mathbf{u}^f$.

La décomposition (3.3.7) est classique dans la théorie des ondelettes. Dans une analyse multi-résolution quelconque de $L^2(\Omega)$, de projecteurs multi-échelle $\mathcal{P}_j$ et $\mathcal{Q}_j$, on peut écrire :

$$\mathbf{u} = \mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}) + \sum_{j \geq j_0} \mathcal{Q}_j(\mathbf{u}) \tag{3.3.8}$$

Alors, on peut définir de façon naturelle $\mathbf{u}^c$ et $\mathbf{u}^f$ par :

$$\mathbf{u}^c = \mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^f = \sum_{j \geq j_0} \mathcal{Q}_j(\mathbf{u}) \tag{3.3.9}$$

Comme $\mathbf{u}$ dépend du temps, on considère l'équation discrétisée en temps par le shéma d'Euler implicite $(3.3.2)$, et on introduit les notations suivantes :

$$\mathcal{L} = 1 - \delta t \nu \Delta, \quad \mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}_n) = \sum_k c_k(n\delta t)\varphi_{j_0,k} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_{j_0}(\mathbf{u}_n) = \sum_{j \geq j_0, k} d_{j,k}(n\delta t)\psi_{j,k} \tag{3.3.10}$$

En prenant comme fonctions test les fonctions d'échelle $\varphi_{j_0,k}$ et les ondelettes $\psi_{j,k}$ dans $(3.3.2)$, on trouve :

$$\mathcal{L}\mathbf{u}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{j_0}(\mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{j_0}(f_n) \\ \mathcal{P}_{j_0}(f_n) \end{pmatrix} \tag{3.3.11}$$

avec

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}_{j_0}\mathcal{L}\mathcal{Q}_{j_0}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{Q}_{j_0}\mathcal{L}\mathcal{P}_{j_0}, \quad \mathcal{C} = \mathcal{P}_{j_0}\mathcal{L}\mathcal{Q}_{j_0} \ \text{ et } \ \mathcal{D} = \mathcal{P}_{j_0}\mathcal{L}\mathcal{P}_{j_0} \tag{3.3.12}$$

et le terme source f_n qui correspond à :

$$f_n = \mathbf{u}_n + \delta t f$$

L'équation (3.3.11) est un système en $\mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}_{n+1})$ et $\mathcal{Q}_{j_0}(\mathbf{u}_{n+1})$. Un calcul direct donne :

$$(\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})\mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathcal{P}_{j_0}(f_n) - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{Q}_{j_0}(f_n)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{Q}_{j_0}(\mathbf{u}_{n+1}) = -\mathcal{B}\mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}_{n+1}) + \mathcal{Q}_{j_0}(f_n)$$

La matrice $(\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})$ n'est rien d'autre que le complément de Schur de la matrice de l'opérateur $\mathcal{L}$. La difficulté réside maintenant dans le calcul de $\mathcal{A}^{-1}$, compte tenu de la taille de cette matrice et des niveaux d'échelle qu'elle renferme . Une technique introduite par A. Chertock et D. Levy dans [16] consiste à projeter cette matrice sur des matrices bandes. Le critère choisi pour la projection est que la matrice bande issue de la projection doit donner le même résultat que la projetée sur un sous espace de dimension égale à la largeur de la bande choisie. Plus la taille de la bande est grande, plus la qualité d'approximation sur la solution est meilleure [16].

Dans le cas de l'opérateur de la chaleur, $\mathcal{A}$ est une matrice bande par bloc et à diagonale fortement dominante, par contre son inverse $\mathcal{A}^{-1}$ est en général pleine. Avant de calculer cet inverse, on se sert des propriétés d'approximation non linéaire des bases d'ondelettes pour approcher $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^\epsilon$:

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \mathcal{A}^\epsilon_{i,j} = \begin{cases} \mathcal{A}_{i,j} & \text{si } |\mathcal{A}_{i,j}| > \epsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.3.13}$$

Ainsi, l'erreur numérique introduite au niveau des petites échelles reste du même ordre que l'erreur globale obtenue sans approximation.

La résolution du système $(3.3.11)$ demande l'inversion d'une matrice. Afin d'éviter ce calcul à chaque pas de temps, les inverses de $\mathcal{A}^\epsilon$ et $(\mathcal{D} - \mathcal{C}(\mathcal{A}^\epsilon)^{-1}\mathcal{B})$ sont calculés au début, puis stockés. Cela permet de réduire le calcul de $\mathbf{u}_{n+1}$ à chaque étape à une multiplication matrice vecteur. La complexité numérique de cette étape reste alors la même que ce soit dans le cas du découplage multi-échelle ou celui où on a inversé directement la matrice de $\mathcal{L}$ toute entière, moyennant l'approximation $(3.3.13)$. Le gain de la méthode multi-échelle est alors dans le calcul des inverses de $\mathcal{A}^\epsilon$ et $(\mathcal{D} - \mathcal{C}(\mathcal{A}^\epsilon)^{-1}\mathcal{B})$ qui est beaucoup moins cher par rapport à celui de la matrice de $\mathcal{L}$.

Exemple 3.3.2
Dans cet exemple on montre l'efficacité de la méthode multi-échelles dans le cas $1D$, sur la solution exacte $\mathbf{u}(x,t) = e^{-t}\sin(16\pi x)$. Les paramètres sont $j = 10$, $t = 0.01$, $\nu = 1/(16^2\pi^2)$ et $\delta t = 0.01/80$. La base d'ondelettes choisie est celle de Daubechies orthogonale à quatre moments nuls $(r = 4)$. Sur la figure 3.7, on trace l'erreur relative sur la solution calculée en fonction du pourcentage des coefficients non nuls de la matrice de $\mathcal{L}$ retenus, après un seuillage dans le cas d'une méthode standard. De même, pour $\epsilon = 10^{-5}\max|\mathcal{A}|$ le plus grand seuil choisi, on trace l'erreur relative donnée par la méthode multi-échelle en fonction de j_0, cette fois ci le seuillage ce fait seulement sur $\mathcal{A}$. Sur la figure 3.8, on trace les différentes solutions $\mathbf{u}^c$ et $\mathbf{u}^f$, ainsi que le résidus total. On voit alors qu'on a une meilleure solution avec la méthode multi-échelle, ce qui est naturelle car plus j_0 est grand, plus on réduit notre seuillage des coefficients.

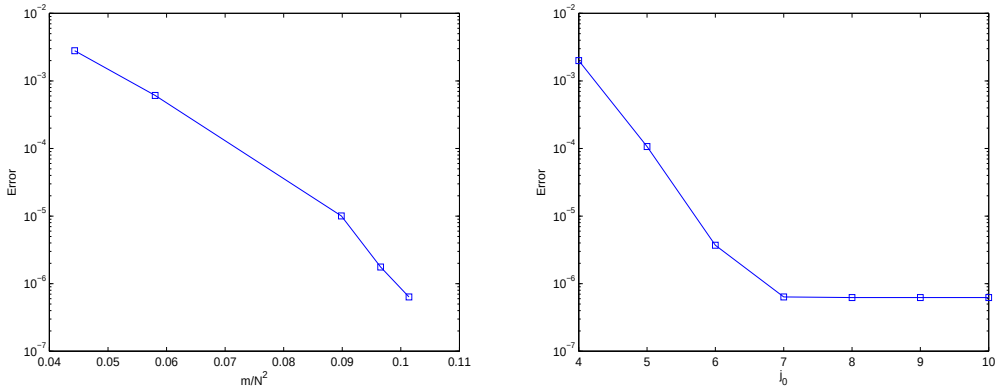

FIGURE 3.7 – Erreur relative ℓ^2 en fonction du pourcentage des coefficients non nuls de la matrice de $\mathcal{L}$, méthode standard (à gauche), erreur relative ℓ^2 en fonction de j_0 dans la méthode multi-échelle : $\epsilon = 10^{-5}\max|\mathcal{A}|$. Échelle logarithmique pour les erreurs.

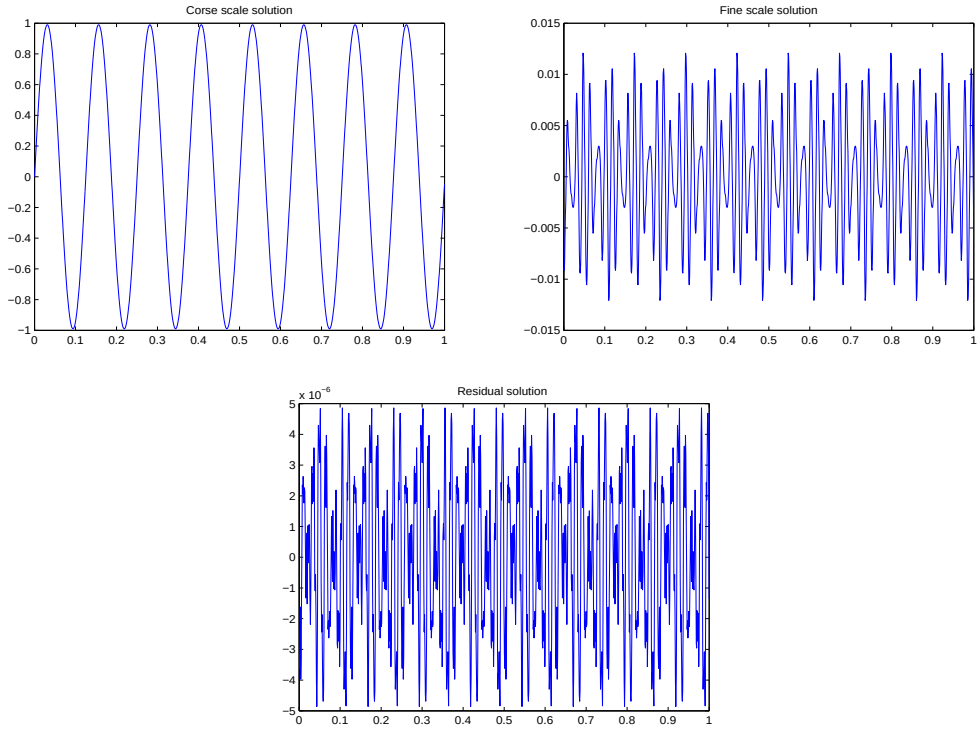

FIGURE 3.8 – $\mathbf{u}^c$ en haut (à gauche), $\mathbf{u}^f$ (à droite) et le résidu en bas : $j = 10$ et $j_0 = 6$.

L'extension de la méthode multi-échelle à la dimension deux se présente avec quelques modifications. Compte tenu de la structure tensorielle des bases, pour j_0 fixé, on décompose la solution $\mathbf{u}$ comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^c + \mathbf{u}^{cf} + \mathbf{u}^{fc} + \mathbf{u}^f \tag{3.3.14}$$

avec

$$\mathbf{u}^c = \mathcal{P}_{j_0} \otimes \mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}), \;\; \mathbf{u}^{cf} = \mathcal{P}_{j_0} \otimes \mathcal{Q}_{j_0}(\mathbf{u}), \;\; \mathbf{u}^{fc} = \mathcal{Q}_{j_0} \otimes \mathcal{P}_{j_0}(\mathbf{u}) \;\text{ et }\; \mathbf{u}^f = \mathcal{Q}_{j_0} \otimes \mathcal{Q}_{j_0}(\mathbf{u})$$

On suppose la convention dans les notations introduite en $(3.3.10)$. Si on applique la factorisation (3.3.3) à l'équation (3.3.1), on retrouve :

$$\mathcal{L}\mathbf{u}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^f_{n+1} & \mathbf{u}^{fc}_{n+1} \\ \mathbf{u}^{cf}_{n+1} & \mathbf{u}^c_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^f_n & f^{fc}_n \\ f^{cf}_n & f^c_n \end{pmatrix} \tag{3.3.15}$$

où on a posé :

$$f^f_n = \mathbf{u}^f_n + \delta t f^f, \;\; f^{cf}_n = \mathbf{u}^{cf}_n + \delta t f^{cf}, \;\; f^{fc}_n = \mathbf{u}^{fc}_n + \delta t f^{fc} \;\text{ et }\; f^c_n = \mathbf{u}^c_n + \delta t f^c$$

Pour la résolution, on décompose le système (3.3.15) en deux sous-systèmes matriciels :

$$(S1)\left\{\begin{array}{l}\mathcal{A}(\mathbf{u}^f_{n+1}\mathcal{A}+\mathbf{u}^{fc}_{n+1}\mathcal{C})+\mathcal{B}(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{A}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{C})=f^f_n\\ \\ \mathcal{C}(\mathbf{u}^f_{n+1}\mathcal{A}+\mathbf{u}^{fc}_{n+1}\mathcal{C})+\mathcal{D}(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{A}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{C})=f^{cf}_n\end{array}\right.$$

et

$$(S2)\left\{\begin{array}{l}\mathcal{A}(\mathbf{u}^f_{n+1}\mathcal{B}+\mathbf{u}^{fc}_{n+1}\mathcal{D})+\mathcal{B}(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{B}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{D})=f^{fc}_n\\ \\ \mathcal{C}(\mathbf{u}^f_{n+1}\mathcal{B}+\mathbf{u}^{fc}_{n+1}\mathcal{D})+\mathcal{D}(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{B}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{D})=f^{c}_n\end{array}\right.$$

Puis on prend comme inconnues dans $(S1)$ et $(S2)$ les termes entre parenthèses, ce qui permet d'écrire d'une part :

$$(S'1)\left\{\begin{array}{l}(\mathbf{u}^f_{n+1}\mathcal{A}+\mathbf{u}^{fc}_{n+1}\mathcal{C})=\mathcal{A}^{-1}(f^f_n-\mathcal{B}(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{A}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{C}))\\ \\ (\mathcal{D}-\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{A}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{C})=f^{cf}_n-\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}f^f_n\end{array}\right.$$

et de l'autre part :

$$(S'2)\left\{\begin{array}{l}(\mathbf{u}^f_{n+1}\mathcal{B}+\mathbf{u}^{fc}_{n+1}\mathcal{D})=\mathcal{A}^{-1}(f^{fc}_n-\mathcal{B}(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{B}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{D}))\\ \\ (\mathcal{D}-\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})(\mathbf{u}^{cf}_{n+1}\mathcal{B}+\mathbf{u}^{c}_{n+1}\mathcal{D})=f^{c}_n-\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}f^{fc}_n\end{array}\right.$$

La dernière étape consiste alors à résoudre les systèmes $(S'1)$ et $(S'2)$, cette étape se fait de manière analogue par transposition.

On reconnaît facilement que dans la résolution des systèmes précédents, on a appliqué deux fois de suite la technique utilisée dans le cas 1D, où cette fois les inconnues sont des matrices. En fait, exceptés les produits entre les différentes matrices, la complexité de la méthode est la même que celle obtenue dans le cas de la dimension un : les matrices à inverser sont les mêmes.
En plus, on peut étendre cette technique de façon similaire en dimension trois ou plus, il suffit d'écrire dans chaque cas les bons systèmes.

Exemple 3.3.3
Dans cet exemple on résout (3.3.1) avec comme condition initiale un bruit blanc aléatoire gaussien avec $f=0$. Les paramètres sont $j=10$, $j_0=6$, $t=0.5$, $\nu=1/8\pi^2$ et $\delta t=t/100$. Notre solution de référence est la solution calculée dans tout V_j sans approximation et sans séparation d'échelle. Les ondelettes utilisées sont celles de l'exemple 3.3.2. Les résultats d'erreur sont les mêmes que ceux obtenus en dimension un.

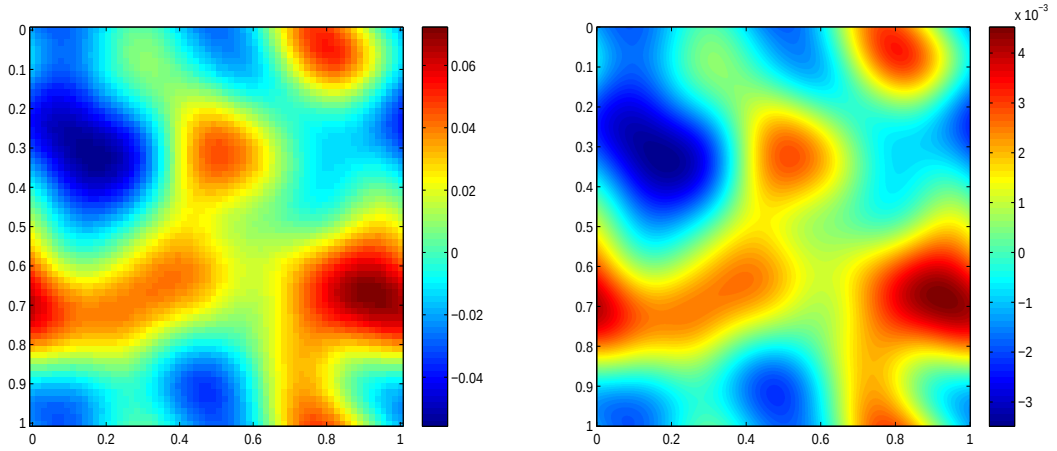

FIGURE 3.9 – Solution $\mathbf{u}^c$ à $t = 0.5$ dans V_{j_0} (à gauche) et sa reconstruction par transformée en ondelettes inverse dans V_j (à droite) où $j_0 = 6$ et $j = 10$. Condition initiale bruit blanc, $f = 0$, $\nu = 1/8\pi^2$ et $\delta t = t/100$.

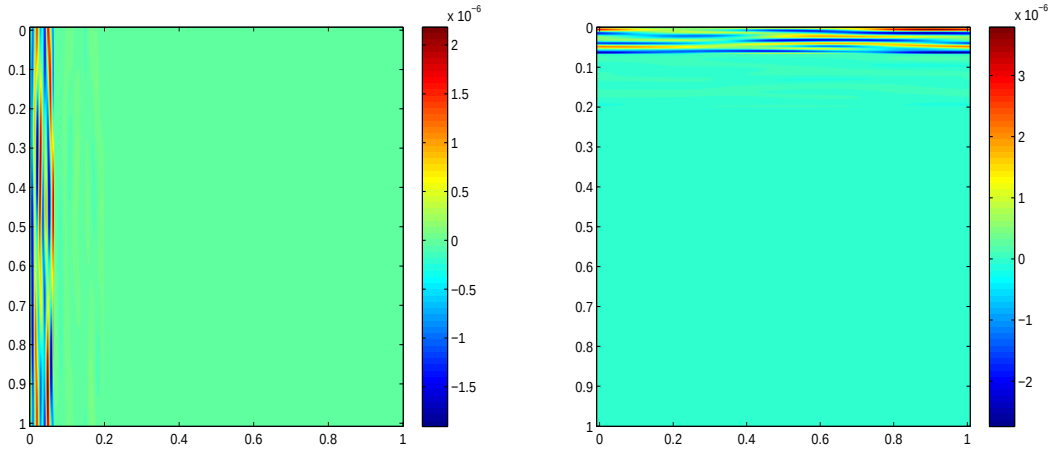

FIGURE 3.10 – Les solutions $\mathbf{u}^{fc}$ (à gauche) et $\mathbf{u}^{cf}$ (à droite) à $t = 0.5$. Condition initiale bruit blanc, $f = 0$, $\nu = 1/8\pi^2$ et $\delta t = t/100$.

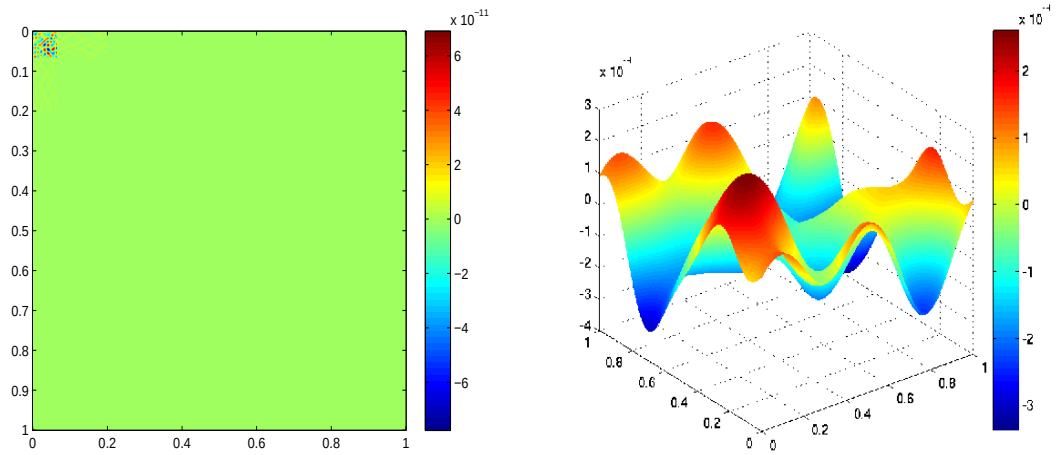

FIGURE 3.11 – Solutions $\mathbf{u}^f$ à $t = 0.5$ (à gauche), résidu de l'erreur entre u^c et la solution de référence dans V_j (à droite). Condition initiale bruit blanc, $f = 0$, $\nu = 1/8\pi^2$ et $\delta t = t/100$.

3.4 Décomposition de Helmholtz-Hodge par ondelettes

La décomposition de Helmholtz-Hodge est un outil très puissant dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, comme par exemple les équations de Navier-Stokes incompressibles. Sans faire l'ensemble de cette théorie, on donne dans cette partie l'essentiel des résultats et définitions qui nous seront utiles pour la suite [19, 57]. On parlera en suite du calcul de cette décomposition en utilisant les bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul.

Définition 3.4.1
Soit Ω un ouvert "régulier" de $\mathbb{R}^n$. La décomposition de Helmholtz-Hodge d'un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$ consiste à décomposer $\mathbf{u}$ en une partie irrotationnelle et une partie solénoïdale :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \mathbf{u}_{\mathrm{rot}} \tag{3.4.1}$$

avec

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}_{\mathrm{div}}) = 0 \qquad \mathbf{rot}(\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}) = 0$$

La question qui est posée est le calcul de $\mathbf{u}_{\mathrm{div}}$ ou $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ par une méthode efficace. Avant d'arriver à cette question, commençons par rappeler quelques généralités.

3.4.1 Quelques généralités sur la décomposition de Helmholtz-Hodge

Si le domaine de calcul est $\Omega = \mathbb{R}^n$ tout entier, ou $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ avec des conditions aux limites périodiques, on peut explicitement faire le calcul dans le domaine de Fourier. Soit $\mathbf{u} : (\mathbb{R}^n)^n \to (\mathbb{R}^n)^n$ de composantes $\mathbf{u}_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, on définit la transformée de Fourier de $\mathbf{u}$ par :

$$\widehat{\mathbf{u}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{u}(x) e^{-i<\xi/x>} dx$$

Alors, la transformée de Fourier d'un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ est aussi un champ de vecteurs $\widehat{\mathbf{u}} : (\mathbb{R}^n)^n \to (\mathbb{R}^n)^n$ de composantes $\widehat{\mathbf{u}}_i$, $i = 1, \ldots, n$.
D'après la définition de l'opérateur $\mathbf{div}(\mathbf{u}) = \nabla.\mathbf{u}$, un champ de vecteur $\mathbf{u}$ est à divergence nulle si et seulement si :

$$i\xi.\widehat{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.4.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, pour toutes les fréquences ξ, le vecteur $\widehat{\mathbf{u}}$ est orthogonal à ξ. De façon similaire, un champ de vecteur $\mathbf{u}$ est à rotationnel nul si et seulement si :

$$i\xi \wedge \widehat{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.4.3}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, pour toutes les fréquences ξ, le vecteur $\hat{\mathbf{u}}$ est parallèle à ξ. En particulier, si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux champs de vecteurs de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ dont l'un à divergence nulle et l'autre à rotationnel nul, d'après la formule de Plancherel il en découle que :

$$\langle \mathbf{u}/\mathbf{v} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\mathbf{u}}/\widehat{\mathbf{v}} \rangle = 0$$

Ce qui permet d'obtenir la décomposition de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ en deux parties orthogonales :

$$(L^2(\mathbb{R}^n))^n = (L^2_{div}(\mathbb{R}^n))^n \oplus (L^2_{rot}(\mathbb{R}^n))^n \tag{3.4.4}$$

avec

$$(L^2_{div}(\mathbb{R}^n))^n = \{\mathbf{u} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n : \nabla.\mathbf{u} = 0\} \text{ et } (L^2_{rot}(\mathbb{R}^n))^n = \{\mathbf{u} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n : \nabla \wedge \mathbf{u} = 0\}$$

De plus, pour toute fréquence $\xi \neq 0$ et $\mathbf{u} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ on peut écrire formellement :

$$\widehat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\xi|^2}\xi(\xi.\widehat{\mathbf{u}}) + [\widehat{\mathbf{u}} - \frac{1}{|\xi|^2}\xi(\xi.\widehat{\mathbf{u}})] \tag{3.4.5}$$

Un retour en variables spatiales donne la décomposition de $\mathbf{u}$ ci-dessous, qui est sa décomposition de Helmholtz-Hodge :

$$\mathbf{u} = \Delta^{-1}\nabla(\nabla.\mathbf{u}) + [\mathbf{u} - \Delta^{-1}\nabla(\nabla.\mathbf{u})] \tag{3.4.6}$$

où la première composante est à rotationnel nul tandis que la deuxième composante est à divergence nulle.
On justifie ces définitions formelles en introduisant un opérateur pseudo-différentiel, le projecteur de Leray noté $\mathbb{P}$ dont le symbole matriciel est donné par :

$$\widehat{\mathbb{P}}_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2} \tag{3.4.7}$$

c'est un polynôme de degré nul, borné dans le domaine de Fourier. C'est aussi la matrice de passage : $\widehat{\mathbf{u}} \to \widehat{\mathbb{P}(\mathbf{u})}$. Par Pythagore, il est facile de voir que pour tout s on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{\mathbf{u}}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\left(|\frac{1}{|\xi|^2}\xi(\xi.\widehat{\mathbf{u}})|^2 + |\widehat{\mathbf{u}} - \frac{1}{|\xi|^2}\xi(\xi.\widehat{\mathbf{u}})|^2\right)d\xi \tag{3.4.8}$$

d'où

$$\|\mathbb{P}(\mathbf{u})\|_{(H^s(\mathbb{R}^n))^n} \leq \|\mathbf{u}\|_{(H^s(\mathbb{R}^n))^n} \tag{3.4.9}$$

Ainsi le projecteur de Leray est un opérateur continu dans les espaces de Sobolev $(H^s(\mathbb{R}^n))^n$. Une conséquence du théorème de Hörmander-Mihlin [70] est que le projecteur de Leray est continu sur les espaces de Lebesgue $(L^p(\mathbb{R}^n))^n$ pour $p \in]1, +\infty[$.

Sur un domaine borné Ω connexe *"régulier"* de $\mathbb{R}^n$, en général on calcule la décomposition de Helmholtz-Hodge de $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$ en résolvant un problème de Poisson :

$$\Delta p = f \tag{3.4.10}$$

La solution de cette équation est un champ de potentiel dont la distribution de charges est donnée par la fonction f.

Il est connu dans [57] que si un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ est à divergence nulle cela implique l'existence d'une fonction courant χ telle que :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \chi \tag{3.4.11}$$

De même si un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ est à rotationnel nul, alors il existe un champ de potentiel q tel que :

$$\mathbf{u} = \nabla q \tag{3.4.12}$$

Avec les notations et définitions introduites par les équations (3.4.11) et (3.4.12), on voit que la décomposition de Helmholtz-Hodge de $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$ est équivalente à :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \chi + \nabla q \tag{3.4.13}$$

Le calcul de q conduit à la résolution d'une équation de Poisson sur la divergence de $\mathbf{u}$:

$$\Delta q = \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{3.4.14}$$

On sait résoudre ce dernier problème sous certaines hypothèses de régularité sur la frontière du domaine Ω et en imposant les conditions aux limites appropriées [57]. Pour des contre-exemples de la non existence de solution au problème de Poisson ou de la décomposition de Helmholtz-Hodge, sur des domaines Ω qui ne sont pas *"assez réguliers"*, on peut consulter [62].

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et suffisamment *"régulier"*. Pour donner une justification rigoureuse de la décomposition de Helmholtz-Hodge sur Ω, on se base sur les résultats fondamentaux de [29, 57].
On commence d'abord par définir le cadre fonctionnel nécessaire et ainsi introduire certains espaces qui serviront dans la suite. Soit γ_0 l'opérateur de trace :

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 & : & H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) \\ & & p \mapsto p_{|\partial\Omega} \end{array} \tag{3.4.15}$$

et on note par $H^{1/2}(\Omega)$ l'image de $H^1(\Omega)$ par γ_0. Soient $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{V}$ les espaces de fonctions test suivants :

$$\mathcal{E}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in (\mathcal{C}_o^\infty(\Omega))^n \ : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$$

Proposition 3.4.1
Soit $\vec{\nu}$ la normale extérieure à Ω. Il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : \mathcal{E}(\Omega) \to H^{-1/2}(\Omega)$ tel que :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \vec{\nu} \tag{3.4.16}$$

pour tout $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}_o^\infty(\Omega))^n$. Et pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $q \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Stokes suivante :

$$\langle \mathbf{u}/\nabla q \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle = \langle \gamma(\mathbf{u}), \gamma_0(q) \rangle \tag{3.4.17}$$

On peut trouver une preuve de cette proposition dans [29], elle utilise le fait qu'il existe un opérateur de relèvement $l_\Omega : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ qui satisfait [87] :

$$\gamma_0 l_\Omega = Id \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

La proposition 3.4.1 permet de définir trois espaces orthogonaux qui sont :

$$\mathcal{H}_{div}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \ \gamma(\mathbf{u}) = 0\} \tag{3.4.18}$$

espace de fonctions à divergence nulle sur Ω,

$$\vec{H}_1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \mathbf{u} = \nabla q, \ q \in H_0^1(\Omega)\} \tag{3.4.19}$$

espace de fonctions à rotationnel nul sur Ω,

$$\vec{H}_2(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \mathbf{u} = \nabla q, \ q \in H^1(\Omega) \text{ et } \Delta q = 0\}, \tag{3.4.20}$$

espace de fonctions qui sont à la fois à rotationnel et à divergence nulle sur Ω.

Proposition 3.4.2 *[29]*
Soit Ω un ouvert borné connexe de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :

$$\mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \mathbf{u} = \nabla q, \ q \in H^1(\Omega)\}$$

Et en particulier :

$$(L^2(\Omega))^n = \mathcal{H}_{div}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega) \qquad et \qquad \mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega) = \vec{H}_1(\Omega) \oplus \vec{H}_2(\Omega)$$

sommes directes orthogonales.

Preuve :
L'orthogonalité des espaces est une conséquence directe de la proposition $3.4.1$. Pour la décomposition, soit $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$ un champ de vecteur quelconque. Sur la divergence de $\mathbf{u}$, on considère ce problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \Delta q_1 = \nabla \cdot \mathbf{u} \in H^{-1}(\Omega) \\ q_1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.4.21}$$

D'après [29, 57] le problème $(3.4.21)$ admet une unique solution q_1 et l'on pose $\mathbf{u}_1 = \nabla q_1$. Par définition, il est facile de vérifier que la solution $\mathbf{u}_1 \in \vec{H}_1(\Omega)$ et que la différence $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \in \mathcal{E}(\Omega)$ car :

$$\nabla.(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) = \nabla.\mathbf{u} - \Delta q_1 = 0$$

En plus, en vertu de la proposition $3.4.1$, $\mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ vérifie la condition de *"compatibilité"* suivante :

$$\langle \gamma(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1), 1 \rangle = 0 \tag{3.4.22}$$

Puis, on considère un deuxième problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta q_2 = 0 \\ q_2 \in H^1(\Omega),\ \frac{\partial q_2}{\partial \vec{\nu}} = \gamma(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \end{cases} \tag{3.4.23}$$

Par la condition de *"compatibilité"* donnée en (3.4.22), à une constante additive près il existe un unique $q_2 \in H^1(\Omega)$ solution du problème de Neumann $(3.4.23)$. On pose $\mathbf{u}_2 = \nabla q_2$. Alors on vérifie facilement que $\mathbf{u}_2 \in \vec{H}_2(\Omega)$ et le champ de vecteurs $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \mathcal{E}(\Omega)$, il satisfait la condition : $\gamma(\mathbf{u}_0) = 0$. En effet,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = \nabla \cdot \mathbf{u} - \Delta q_1 - \Delta q_2 = \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

et

$$\gamma(\mathbf{u}_0) = \gamma(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) - \gamma(\mathbf{u}_2) = \gamma(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) - \frac{\partial q_2}{\partial \vec{\nu}} = 0$$

pour avoir la décomposition, il suffit d'écrire $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$, ce qui achève la preuve. ■

Cette proposition garantit la réalisation de la décomposition de Hodge-Helmholtz sur Ω. De plus elle précise que les champs à divergence nulle issus de cette décomposition vérifient toujours la condition de non perméabilité au domaine Ω, à savoir : $\gamma(\mathbf{u}) = 0$.

Remarque 3.4.1
La condition $\gamma(\mathbf{u}) = 0$ est assurée sur un champ à divergence nulle $\mathbf{u} = \nabla \wedge \chi$ dès que la fonction courant $\chi \in H_0^1(\Omega)$ [57]. Cette dernière condition est très importante pour la construction des ondelettes à divergence nulle, elle assure l'indépendance des fonctions génératrices des base. □

3.4.2 Calcul pratique par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

On a vu sur $\mathbb{R}^n$ dans la section précédente que le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ a une expression analytique dans le domaine Fourier (3.4.7). Pour des champs périodiques, il est grâce à cette formulation facile de calculer leurs décompositions de Helmholtz-Hodge. De même, en ondelettes périodiques, il existe des techniques qui permettent de calculer ce projecteur. Ces méthodes utilisent des projections successives sur des ondelettes à divergence nulle et des ondelettes à rotationnel nul, en anisotrope [42].
On présente ici un algorithme numérique pratique permettant de calculer la décomposition de Helmholtz-Hodge d'un champ de vecteur $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$ où $\Omega = [0,1]^n$. Cet algorithme est fondé sur l'utilisation des bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul construites aux chapitres précédents qui engendrent des analyses multirésolutions pour $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega)$. Les méthodes de calcul utilisées sont beaucoup plus directes et s'appliquent aussi dans le cas périodique. On va se limiter à $n = 2, 3$, une généralisation à des dimensions supérieures se fait de manière aisée. Des résultats des tests numériques montreront le potentiel, l'efficacité et la précision de la méthode.

Description de la méthode :

Soit $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$, on sait que $\mathbf{u}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{div}} + \mathbf{u}_{\text{rot}}$$

avec $\mathbf{u}_{\text{div}} \in \mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathbf{u}_{\text{rot}} \in \mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega)$, où est l'espace défini par (3.4.18) :

$$\mathcal{H}_{div}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \ \gamma(\mathbf{u}) = 0\}$$

On note $\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}\}$ et $\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{rot}\}$ les bases d'ondelettes respectives de $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega)$.
Pour calculer $\mathbf{u}_{\text{div}}$ par exemple, les méthodes habituelles de calcul en éléments finis passe par la résolution de l'équation de Poisson [57]. D'autres méthodes proposées dans [113] consistent à minimiser une fonctionnelle d'énergie F :

$$F(\mathbf{u}_{\text{div}}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_{\text{div}} - \mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^n} = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{u}_{\text{div}} - \mathbf{u})^2 dx \tag{3.4.24}$$

Mais la difficulté de la méthode utilisée dans [113] réside dans le fait qu'il n'existe pas de bases explicites des espaces $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega)$ comme en ondelettes. Il faut définir les opérateurs de dérivation de manière discrète et à la fin on revient aussi sur la résolution de l'équation de Poisson.

Dans ce cas présent, on va chercher $\mathbf{u}_{\text{div}}$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_{\text{div}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div} \tag{3.4.25}$$

Par orthogonalité des espaces $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{div}^{\perp}(\Omega)$, le calcul de $\mathbf{u}_{\text{div}}$ se ramène à la résolution du système linéaire :

$$\forall\, \mathbf{j}',\ \mathbf{k}', \quad \int_\Omega \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div} \cdot \mathbf{u} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \int_\Omega \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div} \cdot \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div} \tag{3.4.26}$$

Comme on peut le voir, la solution du système (3.4.26) est le minimum de F cherché dans [113]. En effet, pour chercher ce minimum, la condition nécessaire est :

$$\frac{dF(\mathbf{u}_{\text{div}})}{d\mathbf{u}_{\text{div}}} = 0 \tag{3.4.27}$$

Si on remplace $\mathbf{u}_{\text{div}}$ par son expression donnée en (3.4.25), on retrouve :

$$\frac{\partial F(d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}})}{\partial d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}}} = \int_\Omega \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div} \left(\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div} - \mathbf{u} \right) = 0, \qquad \forall\, \mathbf{j}, \mathbf{k} \tag{3.4.28}$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît exactement le système (3.4.26). La matrice de ce système est la matrice de Gram de la base des ondelettes à divergence nulle, symétrique définie

positive. En pratique, ce problème de dimension infinie est approché en dimension finie car les ondelettes forment une analyse multirésolution de $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$. Pour prouver l'efficacité de la méthode, des courbes d'erreurs sur la précision de cette projection seront données en fin de section.

On peut choisir de calculer, au lieu de la partie à divergence nulle, la partie à rotationnel nul $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$. L'intérêt de ce choix est que pour des dimensions supérieures $n > 2$, on a une seule ondelette à rotationnel nul anisotrope génératrice tandis qu'on a $n-1$ ondelettes à divergence nulle. Outre cela, la matrice de Gram des ondelettes à rotationnel nul dont les termes sont de la forme :

$$\int_\Omega \Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \cdot \Psi^{rot}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'} = \int_\Omega \nabla[\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \cdots \otimes \psi^1_{j_n,k_n}] \cdot \nabla[\psi^1_{j'_1,k'_1} \otimes \cdots \otimes \psi^1_{j'_n,k'_n}] \tag{3.4.29}$$

n'est rien d'autre que la matrice standard du Laplacien scalaire sur la base des ondelettes $\{\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \cdots \otimes \psi^1_{j_n,k_n}\}_{\mathbf{j},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}$. Cette matrice admet un préconditionneur diagonal explicite en ondelettes [24, 27, 28], ce qui permet d'avoir un algorithme efficace pour l'inverser.
Un cas spécifique à la dimension $n = 2$, la matrice de Gram des ondelettes à divergence nulle et la matrice de Gram des ondelettes à rotationnel nul sont identiques car :

$$\text{Si } n = 2, \ \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega) \quad \int_\Omega \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \tag{3.4.30}$$

Cette relation reste vraie même dans le cas périodique. L'égalité des matrices découle de la construction des fonctions des bases.

Mise en oeuvre de la méthode :

On va décrire maintenant comment on résout en pratique le système linéaire donné par l'équation (3.4.26). Pour faire plus simple, on se place dans $(L^2(\Omega))^2$ pour $n = 2$. L'extension au cas $n = 3$ est immédiate. Ce qui sera mis en avant dans cette partie, c'est la structure tensorielle des bases et la relation de dérivation de la proposition 2.3.2. Soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteur régulier de $(L^2(\Omega))^2$. À une échelle j donnée, on calcule sa projection dans $(V^1_j \otimes V^0_j) \times (V^0_j \otimes V^1_j)$ grâce aux formules de quadrature de la section 3.1, et on note cette projection $\mathbf{u}^j$. D'après la décomposition de Helmholtz-Hodge dans $(L^2(\Omega))^2$, $\mathbf{u}^j$ s'écrit :

$$\mathbf{u}^j = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$$

et on cherche $\mathbf{u}_{\mathrm{div}}$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_{\mathrm{div}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}, \ \text{ avec } \ |\mathbf{j}| \leq j$$

En utilisant l'orthogonalité de la décomposition dans $(L^2(\Omega))^2$: $\langle \mathbf{u}_{\mathrm{rot}} / \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle = 0$, et le système (3.4.26), on se ramène à résoudre :

$$\left(\langle \mathbf{u}^j / \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle \right) = \mathbb{M}^{\mathrm{div}} \left(d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \right) \qquad \text{avec} \qquad \mathbb{M}^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{j}',\mathbf{k}'} = \langle \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} / \Psi^{div}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'} \rangle$$

En pratique, on peut inverser ce système en utilisant des méthodes itératives telles que le gradient conjugué (avec un préconditionneur diagonal en ondelettes). Dans ce travail, on ne stocke jamais la matrice de masse $\mathbb{M}^{\mathrm{div}}$, on utilise la structure tensorielle des bases pour simplifier les calculs en ne se servant que des matrices des fonctions 1D.

• **Calcul du second membre :**
On rappelle que $\mathbf{u}^j \in (V_j^1 \otimes V_j^0) \times (V_j^0 \otimes V_j^1)$. Alors, on part de la décomposition de $\mathbf{u}^j = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ suivante :

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \text{ et } \mathbf{u}_2 = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2}$$

À $\mathbf{j}'$ et $\mathbf{k}'$ fixés, on a :

$$\langle \mathbf{u}^j / \Psi^{div}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'} \rangle = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \langle \psi^1_{j_1,k_1}, \psi^1_{j'_1,k'_1} \rangle \langle \psi^0_{j_2,k_2}, \frac{d}{dy}(\psi^1_{j'_2,k'_2}) \rangle - \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \langle \psi^0_{j_1,k_1}, \frac{d}{dx}(\psi^1_{j'_1,k'_1}) \rangle \langle \psi^1_{j_2,k_2}, \psi^1_{j'_2,k'_2} \rangle$$

Sous forme matricielle cela s'écrit :

$$[\langle \mathbf{u}^j / \Psi^{div}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'} \rangle] = \mathbf{M^1} [d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}] (\mathbf{A^0})^T - \mathbf{A^0} [d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}] \mathbf{M^1} \tag{3.4.31}$$

La matrice $\mathbf{M^1}$ est la matrice de Gram de la base d'ondelettes $\{\psi^1_{j,k}\}$, la matrice $\mathbf{A^0}$ a pour terme général :

$$\langle \psi^0_{j_2,k_2}, \frac{d}{dy}(\psi^1_{j'_2,k'_2}) \rangle$$

Cette matrice se décompose en produit d'une matrice creuse qu'on note $\mathbf{C^0}$ avec la matrice de Gram de la base d'ondelettes $\{\psi^0_{j,k}\}$ notée $\mathbf{M}^0$:

$$\mathbf{A^0} = \mathbf{M^0} (\mathbf{C}^0)^T$$

Les termes de la matrice $\mathbf{C^0}$ sont définis par :

$$\frac{d}{dx} \psi^1_{j,k} = \sum_{j,n} \mathbf{C}^0_{j,k,n} \psi^0_{j,n}$$

Remarque 3.4.2
Les relations de dérivation qui existent entre les fonctions de bases font que la matrice $\mathbf{C}^0$ est diagonale dans le cas des ondelettes et elle contient deux diagonales pour les fonctions d'échelle intérieures. Sur l'intervalle, sa taille aux bord n'excède pas celle des filtres des bords. □

• **Décomposition de la matrice $\mathbb{M}^{\mathrm{div}}$:**
D'après la structure tensorielle des bases, les termes généraux de la matrice de Gram $\mathbb{M}^{\mathrm{div}}$ vérifient cette équation :

$$\langle \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} / \Psi^{div}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'} \rangle = \langle \psi^1_{j_1,k_1}, \psi^1_{j'_1,k'_1} \rangle \langle \frac{d}{dy}(\psi^1_{j_2,k_2}), \frac{d}{dy}(\psi^1_{j'_2,k'_2}) \rangle + \langle \frac{d}{dx}(\psi^1_{j_1,k_1}), \frac{d}{dx}(\psi^1_{j'_1,k'_1}) \rangle \langle \psi^1_{j_2,k_2}, \psi^1_{j'_2,k'_2} \rangle$$

Cela permet de décomposer le produit de $\mathbb{M}^{\mathrm{div}}$ avec le vecteur $(d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})$ dans le premier membre du système 3.4.26, en un produit des matrices de taille $(\dim(V^1_j))^2$. Sous forme matricielle cette décomposition est :

$$[\mathbb{M}^{\mathrm{div}}(d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})] = \mathbf{M^1}[d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{R^1} + \mathbf{R^1}[d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{M^1} \tag{3.4.32}$$

avec les termes de la matrice $\mathbf{R^1}$ qui sont définis par :

$$\mathbf{R^1}_{k_1,k'_1} = \langle \frac{d}{dx}(\psi^1_{j_1,k_1}), \frac{d}{dx}(\psi^1_{j'_1,k'_1})\rangle$$

c'est la matrice de raideur de la base d'ondelettes $\{\psi^1_{j,k}\}$.

Si on suppose $\mathbf{u}^j$ à divergence nulle, alors on a une relation simple entre ses coefficients $\{d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}, d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\}$ et ses coefficients sur les fonctions à divergence nulle $\{d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\}$:

$$[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}] = [d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}](\mathbf{C}^0)^T \qquad \text{et} \qquad [d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}] = -\mathbf{C}^0[d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}] \tag{3.4.33}$$

Plus généralement, connaissant les coefficients $d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$, l'équation (3.4.33) permet de retrouver les coefficients de $\mathbf{u}_{\mathrm{div}}$ dans les bases de $(V^1_j \otimes V^0_j)$ et $(V^0_j \otimes V^1_j)$: c'est en quelque sorte la relation de recomposition.

En dimension trois $n = 3$, on a choisi d'utiliser les ondelettes à rotationnel nul. Ce choix est motivé par le fait qu'on a une seule ondelette génératrice à rotationnel nul anisotrope. En plus, on dispose d'un préconditionneur diagonal explicite en ondelettes de la matrice de Gram des ondelettes à rotationnel nul : c'est en fait la matrice standard du Laplacien scalaire.
Pour calculer $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$, on part cette fois-ci d'une approximation de $\mathbf{u}^j$ dans $(V^0_j \otimes V^1_j \otimes V^1_j) \times (V^1_j \otimes V^0_j \otimes V^1_j) \times (V^1_j \otimes V^1_j \otimes V^0_)$, et on cherche $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_{\mathrm{rot}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \nabla[\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \otimes \psi^1_{j_3,k_3}] = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$$

De même, par orthogonalité de la décomposition dans $(L^2(\Omega))^3$, on obtient le système suivant :

$$\langle \mathbf{u}^j / \Psi^{rot}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}\rangle = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \langle \Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} / \Psi^{rot}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}\rangle \Leftrightarrow (\langle \mathbf{u} / \Psi^{rot}_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}\rangle) = \mathbb{M}^{\mathrm{rot}}(d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) \tag{3.4.34}$$

où $\mathbb{M}^{\mathrm{rot}}$ est la matrice de Gram de la base d'ondelettes $\{\Psi^{rot}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\}$, dont les termes généraux sont donnés par (3.4.29). Le système $(3.4.34)$ admet, quelque soit la dimension, un préconditionneur diagonal optimal en ondelettes [90]. En pratique, on résout $(3.4.34)$ avec un gradient conjugué. La structure tensorielle des bases permet de ramener les calculs sur des matrices des fonctions unidimensionnelles. En terme de complexité théorique, si r est le nombre d'éléments non nuls de la matrice $\mathbf{R}^1$ par ligne et $N = 2^J$, alors le coût d'une étape du gradient conjugué est de $O(rN^n)$ opérations, avec $n = 2$ ou $n = 3$ la dimension d'espace et J la plus grande résolution.

Exemple 3.4.1
Dans cet exemple on illustre des résultats de la décomposition de Helmholtz-Hodge dans le cas périodique et non périodique. Pour le cas périodique, le champ 2D analysé est le terme non linéaire $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ *du champ turbulent de l'exemple 1.5.1. Sur la figure 3.12 on trace la vorticité initiale correspondante et la pression associée à* $\nabla p = \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$*, calculée après une décomposition de Helmholtz-Hodge et à une constante d'intégration près. On étudie aussi l'erreur relative en norme* ℓ^2 *sur la partie à divergence nulle du champ* $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ *où :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1(x,y,z) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2\pi/3)\sin(2\pi x)\cos(2\pi y)\cos(2\pi z) + \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)\\
\mathbf{u}_2(x,y,z) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2\pi/3)\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\cos(2\pi z) + \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)\sin(2\pi z)\\
\mathbf{u}_3(x,y,z) &= \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\cos(2\pi z)
\end{aligned}$$

Les bases d'ondelettes $\{\psi^1_{j,k}, \tilde{\psi}^1_{j,k})\}$ *utilisées sont celles des B-Splines à trois moments nuls :* $r = \tilde{r} = 3$*. On précise qu'en 3D, c'est la partie à rotationnel nul* $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ *qui est calculée, pour avoir* $\mathbf{u}_{\mathrm{div}}$ *on fait* $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ *composante par composante. On trace sur les figures 3.13 et 3.14 la courbe d'erreur obtenue en fonction du nombre de points par direction, et les résultats de décomposition d'un champ aléatoire 3D.*
Dans le cas non périodique, le champ analysé a été construit à la main et il ne vérifie pas la condition de divergence nulle ou de rotationnel nul, comme on peut le voir sur la figure 3.15. Sur la figure 3.16, on trace les résultats de la décomposition. La figure 3.17 présente les courbes d'erreurs ℓ^2 *de la projection à divergence nulle de*

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}[\cos(4\pi x)x(1-x)\cos(4\pi y)y(1-y)] \ \textit{dans} \ (H^1([0,1]^2))^2$$

et de

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}[\sin(4\pi x)x^3(1-x)^3\sin(4\pi y)y^3(1-y)^3] \ \textit{dans} \ (H^1_0([0,1]^2))^2$$

Les ondelettes à divergence nulle sur l'intervalle ont été construites à partir des B-Splines biorthogonaux : $r = \tilde{r} = 3$*. Dans les deux cas, les ordres de convergence sont atteints, même si on constate que l'erreur sur* $\mathbf{v}$ *est beaucoup moins importante.*

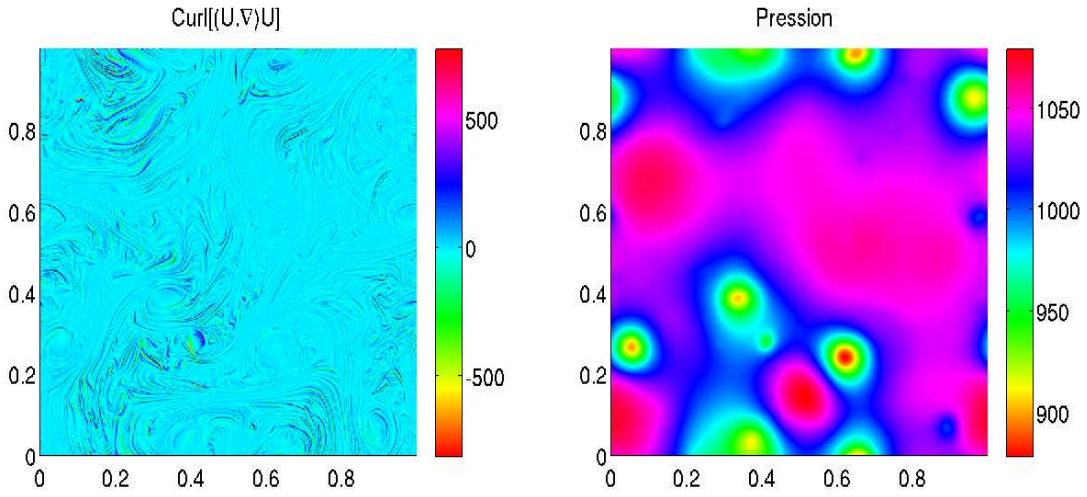

FIGURE 3.12 – Vorticité $\mathbf{rot}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]$ (à gauche) et la pression p (à droite) à une constante près : $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ avec $\nabla\, p = \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$.

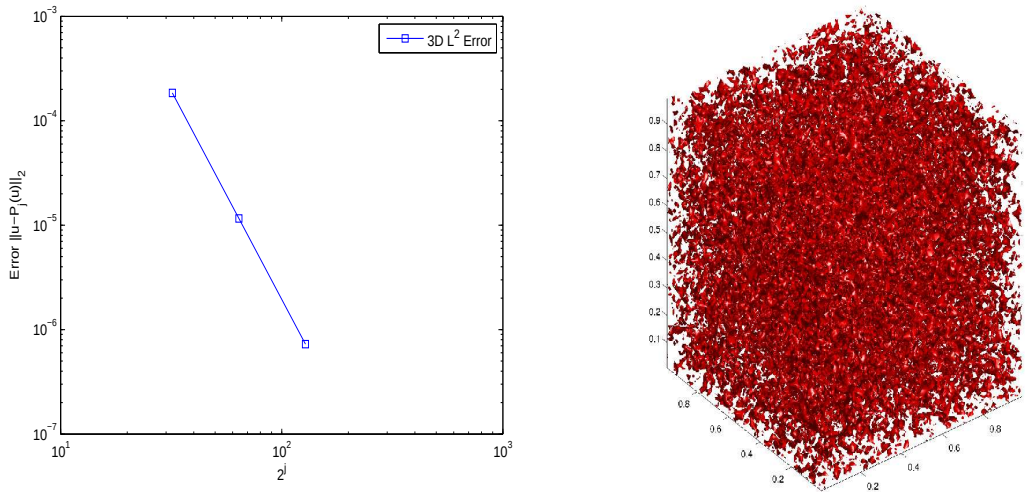

FIGURE 3.13 – Erreur relative ℓ^2 en échelle logarithmique de la projection 3D (à gauche), isosurface $81.6686/2 = \|\mathbf{rot}(\mathbf{u})\|/2$ de la vorticité $\mathbf{rot}[\mathbf{u}]$ du champ initial $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}$, avec $\mathbf{v}$ bruit blanc aléatoire (à droite).

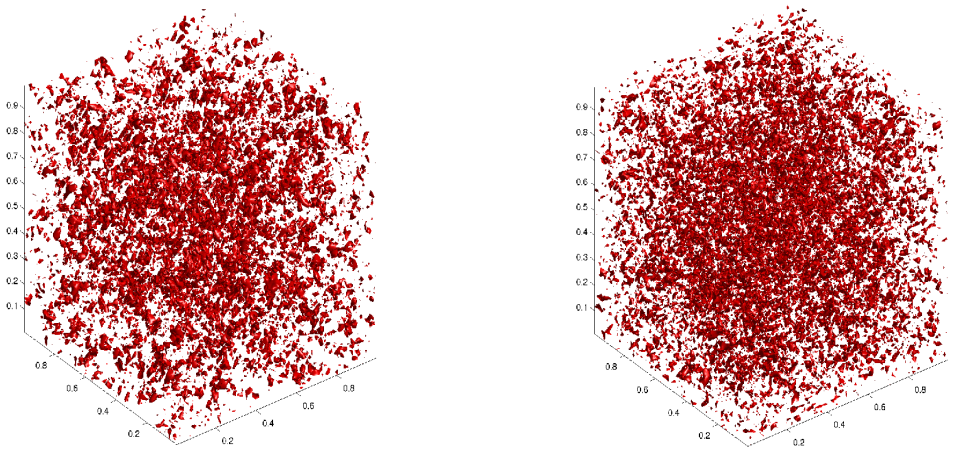

FIGURE 3.14 – Isosurface $45.8139/2 = \|\mathbf{rot}(\mathbf{u}_{\mathrm{div}})\|/2$ de la vorticité $\mathbf{rot}[\mathbf{u}_{\mathrm{div}}]$ (à gauche), isosurface $68.5807/2 = \|\mathbf{rot}(\mathbf{u}_{\mathrm{rot}})\|/2$ de la vorticité $\mathbf{rot}[\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}]$ (à droite).

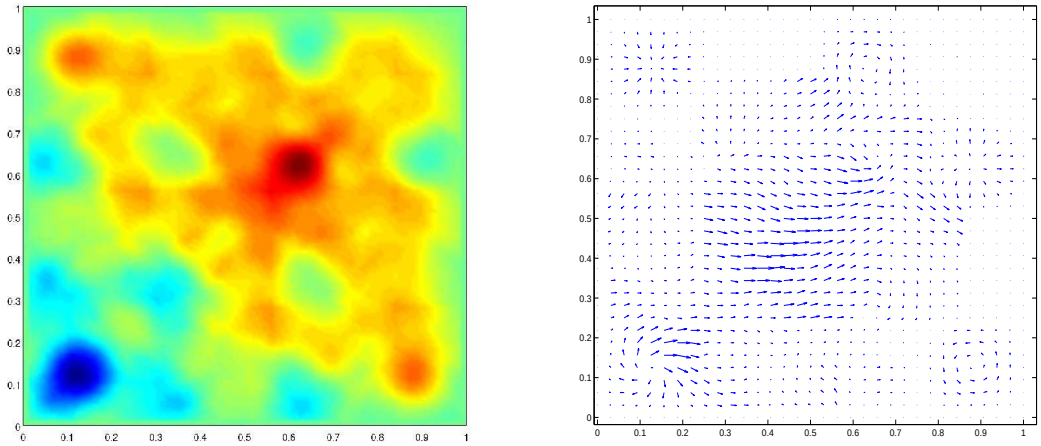

FIGURE 3.15 – Somme des coefficients $[d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} + d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ (à gauche) et champ de vecteurs $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ (à droite).

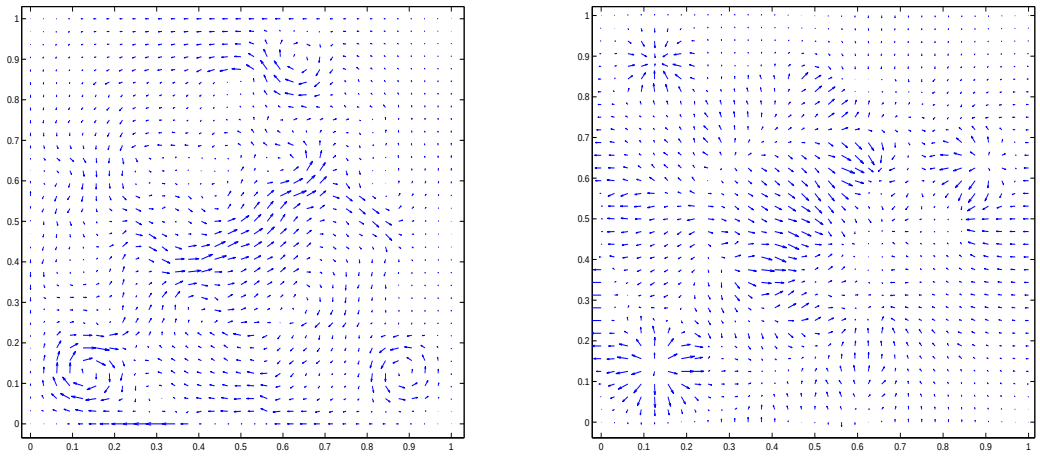

FIGURE 3.16 – Champ de vecteurs $\mathbf{u}_{\mathrm{div}}$ (à gauche) et champ de vecteurs $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ (à droite).

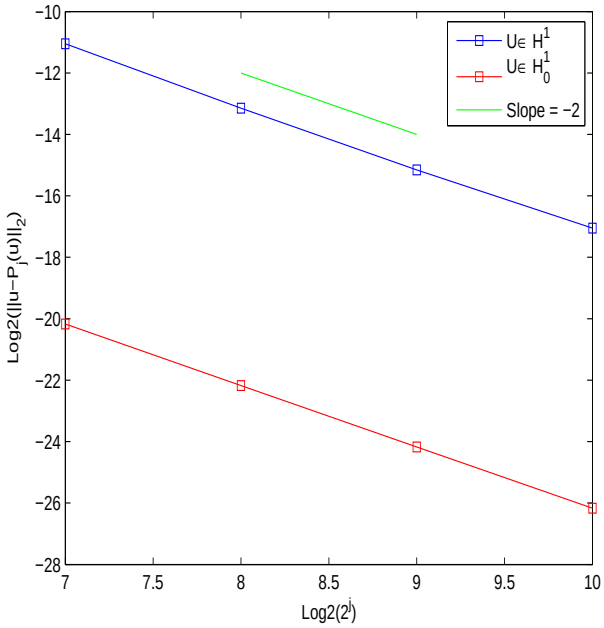

FIGURE 3.17 – Erreur de la projection à divergence nulle sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, échelle logarithmique ($\log_2$). La courbe sur $\mathbf{u}$ est au dessus de celle sur $\mathbf{v}$.

3.5 Résolution du problème de Stokes

3.5.1 Les approches classiques

Le système de Stokes est un modèle simple d'écoulement stationnaire incompressible visqueux. Il représente la forme linéarisée des équations de Navier-Stokes, on parlera de l'origine des équations de ce système dans la partie modélisation (section 4.1). Si le fluide est contenu dans un sous-domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, en variables primitives, c'est à dire la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression $\mathbf{p}$, ce système s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = f \ \text{ dans } \ \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \\ \mathbf{u} = g \ \text{ sur } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5.1}$$

f désigne la somme des forces extérieures. Dans la suite, on considérera $g = 0$ et on peut ramener le cas général sous cette forme en utilisant des relèvements aux bords. Afin d'écrire une formulation faible du problème $(3.5.1)$, on commence par définir les espaces fonctionnels qui seront utilisés. On suppose le domaine Ω "*assez régulier*" et on note $\vec{X}$ l'espace de Sobolev $(H_0^1(\Omega))^n$, $\vec{X}'$ son dual $(H^{-1}(\Omega))^n$ et $L_0^2(\Omega)$ sera le sous espace de $L^2(\Omega)$ de fonctions à valeur moyenne nulle.

Étant donné $(f, g) \in \vec{X}' \times L_0^2(\Omega)$, la formulation variationnelle du problème de Stokes en variables primitives revient à chercher $(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in \vec{X} \times L_0^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} \langle \nabla \mathbf{u} / \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, \mathbf{p} \rangle = < f, \mathbf{v} >_{\vec{X}', \vec{X}} \ \text{ pour tout } \ \mathbf{v} \in \vec{X} \\ \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{q} \rangle = 0 \ \text{ pour tout } \ \mathbf{q} \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.5.2}$$

La formulation $(3.5.2)$ est un problème mixte de point selle. Dans des discrétisations de type Galerkin, une des difficultés principales dans la résolution du problème de Stokes, c'est de définir les bons espaces d'approximation de $\vec{X}$ et $L_0^2(\Omega)$ qui vérifient sous forme discrète la condition Inf-Sup [57] :

$$\inf_{\mathbf{q} \in L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \vec{X}} \frac{\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\vec{X}} \|\mathbf{q}\|_{L_0^2(\Omega)}} \geq \beta > 0 \tag{3.5.3}$$

C'est cette condition qui permet de démontrer le caractère bien posé du problème [57]. Les méthodes d'ondelettes classiques permettent d'obtenir cette condition avec pour espaces d'approximation des analyses multirésolutions ordinaires de $\vec{X}$ et $L_0^2(\Omega)$. Les résultats obtenus sur ces bases dans les simulations numériques sont satisfaisants et pour plus de détails voir [90].

3.5.2 Méthode variationnelle dans $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$

La condition d'incompressibilité fait que la solution $\mathbf{u}$ appartient à $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$, alors il est naturel de prendre comme fonction test dans la formulation variationnelle les fonctions de $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ [83]. C'est dans ce contexte que l'utilisation de bases d'ondelettes à divergence nulle est apparue [32,

116]. L'espace utilisé dans cette formulation est celui de fonctions à divergence nulle $\mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$ suivant :

$$\mathcal{H}_{div,0}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^n \ : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

et sur cet espace on définit une forme bilinéaire $\mathbf{a}(.,.)$ continue par :

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_{div,0}(\Omega), \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{u}_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{v}_j dx$$

Alors, en prenant $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$ comme fonction test dans $(3.5.2)$, on élimine la pression $\mathbf{p}$, et la nouvelle formulation variationnelle revient à trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$ tel que :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =< f, \mathbf{v} > \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{H}_{div,0}(\Omega) \tag{3.5.4}$$

La forme bilinéaire $\mathbf{a}(.,.)$ est coercive sur $\mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$ [57], par Lax-Milgram, le problème $(3.5.4)$ admet une unique solution. La pression $\mathbf{p}$ associée est calculée à partir de la solution $\mathbf{u}$ par :

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, \mathbf{p} \rangle =< f, \mathbf{v} > -\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^n \setminus \mathcal{H}_{div,0}(\Omega) \tag{3.5.5}$$

La résolution numérique du problème $(3.5.4)$ se fait par une méthode de Galerkin. La base de $\mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$ choisie pour la discrétisation est ici celle d'ondelettes à divergence nulle. On se fixe une analyse multirésolution $\{\mathbf{V}_j^{div}\}_{j \geq j_{min}}$ de $\mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$ (voir section 2.3), dont on note sans distinction $\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}$ les fonctions d'échelle et les ondelettes à divergence nulle. La solution approchée $\mathbf{u}_j \in \mathbf{V}_j^{div}$ est cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div} \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}$$

Cette approximation introduite dans $(3.5.4)$ permet de ramener le calcul de coefficients $[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}]$ à la résolution d'un système linéaire :

$$\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div} \mathbf{a}(\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}, \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div}) =< f, \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div} >, \quad \forall \ \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div} \in \mathcal{H}_{div,0}(\Omega) \tag{3.5.6}$$

Les coefficients $\mathbf{a}(\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}, \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div})$ correspondent aux termes de la matrice de rigidité de la base d'ondelettes à divergence nulle, on les calcule facilement, de manière exacte à partir de la base unidimensionnelle utilisée pour construire les $\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}$. Par exemple en dimension deux d'espace, avec les notations de la section 2.3, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div,3}, \Psi_{\mathbf{j}',\mathbf{k}'}^{div,3}) \quad &= \quad 2 < (\psi_{j_1,k_1}^D)', (\psi_{j_1',k_1'}^D)' >< (\psi_{j_2,k_2}^D)', (\psi_{j_2',k_2'}^D)' > \\
&+ < \psi_{j_1,k_1}^D, \psi_{j_1',k_1'}^D >< (\psi_{j_2,k_2}^D)'', (\psi_{j_2',k_2'}^D)'' > + < (\psi_{j_1,k_1}^D)'', (\psi_{j_1',k_1'}^D)'' >< \psi_{j_2,k_2}^D, \psi_{j_2',k_2'}^D >
\end{aligned}$$

et on fait de même pour les ondelettes $\Psi^{div,1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$, $\Psi^{div,2}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ et les fonctions d'échelle $\Phi^{div}_{j,\mathbf{k}}$. Alors, en terme de matrices, le système $(3.5.6)$ s'écrit :

$$2.\mathbf{R}[d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{R} + \mathbf{M}[d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{R}_b + \mathbf{R}_b[d^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{M} = [< f, \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} >] \tag{3.5.7}$$

où $\mathbf{M}$ est la matrice de masse et $\mathbf{R}$ la matrice de rigidité de la base $\{\varphi^D_{j_{min},k},\ \psi^D_{j,k}\}$, la matrice $\mathbf{R}_b$ est celle du bilaplacien sur cette base.

Pour résoudre le système $(3.5.7)$, on peut utiliser des méthodes itératives, par exemple la méthode du gradient conjugué, car ce système admet un préconditionneur explicite [116].

3.5.3 Méthode de Gauge

Une autre méthode utilisée dans ce travail pour la résolution du problème de Stokes est la méthode de Gauge [13, 44], elle utilise la décomposition de Helmholtz-Hodge définie à la section 3.4. Cette méthode consiste à définir une nouvelle variable $\mathbf{m}$ en posant :

$$\mathbf{m} = \mathbf{u} + \nabla\chi$$

Puis, on introduit ce changement de variable dans $(3.5.1)$ par :

$$-\Delta\mathbf{m} + \nabla(\mathbf{p} + \Delta\chi) = f, \ \text{ dans } \ \Omega \tag{3.5.8}$$

Si la pression $\mathbf{p}$ est choisie telle que : $\mathbf{p} = -\Delta\chi$, alors l'équation $(3.5.8)$ n'est rien d'autre qu'un problème de Poisson.

$$-\Delta\mathbf{m} = f \ \text{ dans } \ \Omega \tag{3.5.9}$$

et la vitesse $\mathbf{u}$ est donnée par : $\mathbf{u} = \mathbb{P}(\mathbf{m})$, avec $\mathbb{P}$ le projecteur orthogonal de $(L^2(\Omega))^n$ sur $\mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$. Pour résoudre ce problème, il faut aussi imposer des conditions aux limites. Un des avantages de cette méthode est qu'on est pas limité dans le choix de conditions aux limites, on peut imposer :

$$\mathbf{m}\cdot\vec{\nu} = 0 \qquad \frac{\partial\chi}{\partial\vec{\nu}} = 0 \qquad \mathbf{m}\cdot\vec{\tau} = \frac{\partial\chi}{\partial\vec{\tau}}$$

ou

$$\mathbf{m}\cdot\vec{\tau} = 0 \qquad \mathbf{m}\cdot\vec{\nu} = \frac{\partial\chi}{\partial\vec{\nu}} \qquad \chi_{|\partial\Omega} = 0$$

les vecteurs $\vec{\nu}$ et $\vec{\tau}$ sont respectivement le vecteur normal unitaire sortant et le vecteur unitaire tangent à la frontière $\partial\Omega$.

Pour résoudre numériquement le problème de Poisson $(3.5.9)$, on utilise aussi une méthode de Galerkin. Comme on est en vectoriel, il serait plus simple de résoudre composante par composante. On a vu au niveau de la section 3.4 que la matrice qu'on inverse dans le calcul de $\mathbb{P}(\mathbf{m})$ est équivalente à la matrice d'un Laplacien scalaire sur une base d'ondelettes standard, c'est cette base

qui sera utilisée pour la discrétisation des composantes de $\mathbf{m}$. En dimension deux, on va chercher chaque composante de la solution approchée sous la forme :

$$\mathbf{m}_j^1 = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \psi^D_{j_1,k_1} \otimes \psi^D_{j_2,k_2} \text{ et } \mathbf{m}_j^2 = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \psi^D_{j_1,k_1} \otimes \psi^D_{j_2,k_2} \tag{3.5.10}$$

et le calcul de coefficients $[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ et $[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ se ramène aussi à la résolution de deux systèmes linéaires, qu'on écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{M} + \mathbf{M}[d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{R} = [< f^1, \psi^D_{j_1,k_1} \otimes \psi^D_{j_2,k_2} >] \tag{3.5.11}$$

et

$$\mathbf{R}[d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{M} + \mathbf{M}[d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{R} = [< f^2, \psi^D_{j_1,k_1} \otimes \psi^D_{j_2,k_2} >] \tag{3.5.12}$$

Finalement, pour résoudre le problème de Stokes, on doit inverser trois fois de suite la même matrice : résolution des systèmes $(3.5.12)$ et $(3.5.11)$ et le calcul de $\mathbb{P}(\mathbf{m})$.

À titre de comparaison, la formulation variationnelle dans $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ à l'avantage d'être moins coûteuses dans le cas stationnaire : on inverse une seule matrice à savoir la matrice de raideur des ondelettes à divergence nulle. En revanche, dans le cas non stationnaire l'équation $(3.5.9)$ devient

$$\partial_t \mathbf{m} - \Delta \mathbf{m} = f \text{ dans } \Omega$$

Alors, on peut tirer avantage de la technique de factorisation du noyau de chaleur au niveau de la méthode de Gauge. Dans ce cas, on inverse une seule fois la matrice de l'opérateur de la chaleur sur la base unidimensionnelle, et on l'utilise selon les directions. La seule matrice à inverser à chaque pas de temps est celle utilisée dans le calcul de $\mathbb{P}(\mathbf{m})$. Par contre, dans la formulation variationnelle dans $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$, à chaque pas de temps on doit inverser la matrice de l'opérateur la chaleur discrétisé sur la base d'ondelettes à divergence nulle. Si on écrit sous forme matricielle le système à résoudre, il est facile de voir qu'une seule étape du gradient conjugué avec cette matrice coûte trois fois plus chère qu'une étape dans le calcul de $\mathbb{P}(\mathbf{m})$.

Exemple 3.5.1
Le but de cet exemple est de tester la précision numérique de notre schéma utilisant la méthode de Gauge, pour une discrétisation des équations sur une base d'ondelettes standard de $\vec{\mathbf{V}}_j = (V_j^1 \otimes V_j^0) \times (V_j^0 \otimes V_j^1)$. *Et, le calcul de* $\mathbb{P}(\mathbf{m})$ *se fait avec les ondelettes à divergence nulle. Comme solution de référence on prend le cas test de [44] :*

$$\mathbf{u}_1(x,y,t) = -\cos(t)\sin^2(\pi x)\sin(2\pi y) \quad \textit{et} \quad \mathbf{u}_2(x,y,t) = \cos(t)\sin(2\pi x)\sin^2(\pi y)$$

La variable de Gauge χ *correspondante est :* $\chi(x,y,t) = \cos(t)(2+\cos(\pi x))(2+\cos(\pi y))/4$. *Le terme de forçage* f *est calculé à partir de ces données, pour* $t = 0$. *Les générateurs d'ondelettes biorthogonaux utilisés sont les B-Splines à trois moments nuls, dans tous les cas, les ordres de convergence sont obtenus.*

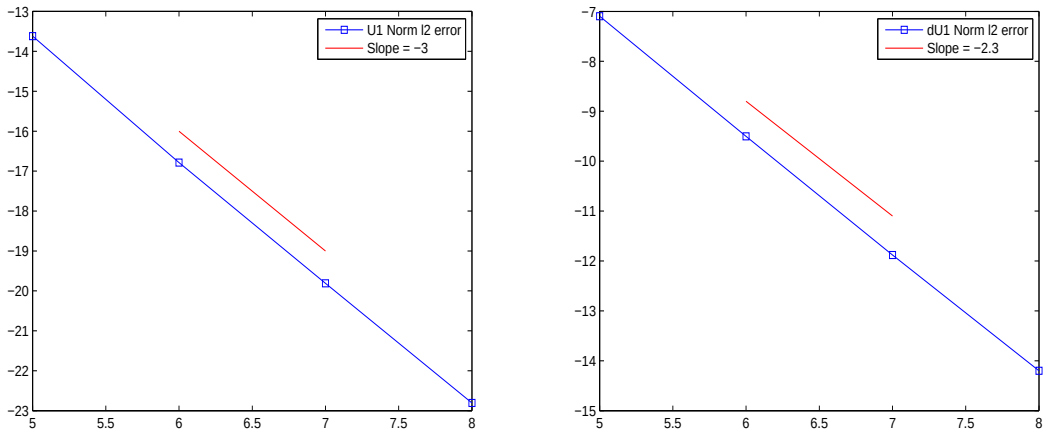

FIGURE 3.18 – Erreur relative ℓ^2 sur $\mathbf{u}$ dans $\vec{\mathbf{V}}_j$ en fonction de j (à gauche) et celle sur $\nabla\mathbf{u}$ (à droite), échelle logarithmique : $\log_2$.

Quatrième partie

Simulation numérique de la turbulence incompressible sur bases d'ondelettes

Chapitre 4

Généralités sur la modélisation et la simulation des écoulements turbulents

Les écoulements turbulents sont très présents dans la vie quotidienne : météorologie, hydrologie, océanographie, etc. Pourtant, la turbulence reste encore un vaste champ disciplinaire qui continue de susciter beaucoup d'intérêts pour un grand nombre des scientifiques. Ces dernières décennies, l'étude des phénomènes turbulents a connu des avancées remarquables et a permis la réalisation des nombreux progrès dans des domaines tels que l'aérodynamique, la géophysique, l'océanographie ...

Dans cette partie, on s'intéresse à la simulation numérique d'un fluide Newtonien visqueux incompressible [84] : on suppose que le tenseur de contraintes de Cauchy du fluide dépend linéairement du tenseur du taux de déformation. On va présenter les modèles mathématiques utilisés pour décrire le mouvement d'un tel fluide [108]. Puis on parlera des classes de solutions mathématiques associées à ces modèles dans un cadre fonctionnel bien défini. Il s'agira en particulier des solutions faibles à la Leray [83] et des solutions intégrales ou fortes "*milde*" à la Kato [11, 74].

4.1 Modélisation des écoulements incompressibles et conditions aux limites

On adopte la formulation eulerienne pour décrire le mouvement d'un fluide, elle consiste à se fixer à un endroit donné d'un repère dans le référentiel galiléen et de regarder les particules fluides passer. À un instant $t \geq 0$ donné, on suppose que le fluide occupe un domaine $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), de frontière $\partial\Omega(t)$ et dans lequel la matière est homogène et distribuée de manière uniforme. Les particules fluides en mouvement contenues dans $\Omega(t)$ seront caractérisées par leur vitesse $\mathbf{u}(x, t)$, leur densité massique $\rho(x, t)$ et la pression $\mathbf{p}(x, t)$ qui s'exerce sur elles.

Un fluide visqueux et incompressible est décrit par les équations suivantes, dites de Navier-Stokes [1] avec densité variable :

$$\rho\left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) - \mu\Delta\mathbf{u} = \rho g - \nabla\mathbf{p} \tag{4.1.1}$$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0 \tag{4.1.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{4.1.3}$$

g représente la force de gravité. Ces équations sont déduites dans le contexte d'hydrodynamique et sous certaines hypothèses sur la nature du fluide [84]. La première équation traduit la conservation du moment cinétique, la deuxième traduit la conservation de la masse et la dernière traduit la conservation du volume ou la condition d'incompressibilité.

Le fluide est dit **homogène** si sa densité est indépendante de la position choisie. Alors, l'équation de la conservation de la masse se réduit à $\partial_t\rho = 0$, cela signifie $\rho = \rho_0$ une constante indépendante de la position et du temps t. Un fluide visqueux incompressible et homogène est donc décrit par les équations suivantes, dites de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}&\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} = g - \nabla\mathbf{p}^*\\ &\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\end{aligned}$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ est la viscosité cinématique du fluide, $\mathbf{p}^*$ est la pression normalisée.

Lorsqu'on se limite aux écoulements stationnaires et très visqueux, c'est à dire, quand la vitesse ne varie pas avec le temps, on obtient les équations suivantes, dites de Stokes :

$$\begin{aligned}&-\nu\Delta\mathbf{u} = g - \nabla\mathbf{p}^*\\ &\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\end{aligned}$$

4.1.1 Conditions aux limites

Pour résoudre le problème de Cauchy associé aux équations de Navier-Stokes et Stokes, on aurait besoin d'un certain nombre de données initiales et des conditions aux limites. Considérons un fluide remplissant un domaine Ω, comme ces équations font intervenir des dérivées d'ordre un en temps sur $\mathbf{u}$ et ρ, alors on suppose connues leurs valeurs à $t = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x,0) &= \mathbf{u}_0(x), \quad \forall x\in\Omega\\ \rho(x,0) &= \rho_0(x), \quad \forall x\in\Omega\end{aligned}$$

En plus, si le fluide est confiné dans le domaine Ω, sans traverser le bord du domaine $\partial\Omega$, la vitesse $\mathbf{u}$ du fluide est alors tangente à la paroi :

$$\mathbf{u}\cdot\vec{\nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{4.1.4}$$

1. Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836) et George Gabriel Stokes (1819–1903).

Les équations de Navier-Stokes, ou de Stokes font intervenir des dérivées d'ordre deux de $\mathbf{u}$ en espace, et on a besoin de trois conditions scalaires sur chacune des composantes de $\mathbf{u}$. Le frottement visqueux entraîne l'absence de glissement sur la paroi :

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

On peut également vouloir étudier une région particulière du fluide. Alors, le fluide peut traverser le bord $\partial\Omega$. Pour les équations de Navier-Stokes ou de Stokes, on suppose connues les entrées et sorties du fluide, donc la vitesse $\mathbf{u}$ sur le bord :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

où $\mathbf{u}_b$ est une fonction donnée sur $\partial\Omega$. Il résulte de l'incompressibilité du fluide que la différence des entrées et sorties du fluide est nulle ; plus précisément :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \vec{\nu} ds = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx = 0$$

Donc $\mathbf{u}_b$ doit vérifier cette condition dite de "*compatibilité*" :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_b \cdot \vec{\nu} ds = 0$$

Remarque 4.1.1
Plus généralement on peut choisir des entrées dépendant du temps, c'est à dire :

$$\mathbf{u}(s,t) = \mathbf{u}_b(s,t), \ \ \forall s \in \partial\Omega, \ \ \forall\, t > 0.$$

La compatibilité avec l'incompressibilité devient :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_b(s,t) \cdot \vec{\nu}(s) ds = 0, \ \ \forall\, t > 0.$$

□

4.2 Rappels sur des résultats d'existence et unicité des solutions pour les équations de Navier-Stokes

On présente dans cette section un résumé sur certains résultats d'existence et d'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles. On commence par la formulation faible due à J. Leray [83], dans le cas d'un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) et de frontière $\partial\Omega$

assez "*régulière*". Pour un fluide visqueux homogène, les équations de Navier-Stokes (NS) qu'on considérera dans la suite sont :

$$\begin{aligned}
&\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = f, \text{ sur } \Omega \times]0, T[\\
&\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ sur } \Omega \times]0, T[\\
&\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, \text{ sur } \Omega \times \{0\} \\
&\mathbf{u} = \mathbf{u}_b, \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[
\end{aligned}$$

f est la somme des forces extérieures, $\mathbf{u}_0$ la condition initiale et $\mathbf{u}_b$ la vitesse aux bords de Ω. Sans perte de généralité, on suppose la force f nulle. Le système (NS) est un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires dont les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression $\mathbf{p}$. Pour la résolution du système (NS), on commence par se fixer un cadre fonctionnel. Soit l'espace $\mathcal{V}$ suivant :

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in (\mathcal{D}(\Omega))^n, \ \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$$

l'espace des fonctions test, où $\mathcal{D}(\Omega)$ représente l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. On rappelle que l'adhérence de $\mathcal{V}$ dans $(L^2(\Omega))^n$ est $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$. L'espace $\mathcal{H}^m_{div,0}(\Omega)$ sera l'adhérence de $\mathcal{V}$ dans $(H^m_0(\Omega))^n$, avec m un entier positif ($m \in \mathbb{N}^*$). Munis respectivement de la norme $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|.\|_{H^m_0(\Omega)}$, les espaces $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathcal{H}^m_{div,0}(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert. Le lecteur intéressé pourra trouver d'autres propriétés des espaces $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathcal{H}^m_{div,0}(\Omega)$ dans [29, 112].

Solutions faibles de Leray

La théorie des solutions faibles des équations de Navier-Stokes a commencé à partir des travaux de J. Leray [83], où il prouve l'existence de solutions au sens des distributions en tout temps pour une donnée initiale $L^2(\Omega)^n$. On s'inspire de [81] afin de décrire l'essentiel des idées de J. Leray. Soit $\mathbf{u}$ une solution des équations de Navier-Stokes suffisamment régulière et qui peut jouer le rôle de fonction test pour $\partial_t \mathbf{u}$ dans (NS), de manière formelle on obtient :

$$\partial_t |\mathbf{u}|^2 = 2\partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 2\nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\nabla \otimes \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - 2\nabla \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$$

Une intégration contre une fonction test $\phi \in \mathcal{D}(]0, T[\times\Omega)$ donne :

$$\int_0^T \int_\Omega \left(|\mathbf{u}|^2 \partial_t \phi - 2\nu |\nabla \otimes \mathbf{u}|^2 \phi + \nu |\mathbf{u}|^2 \Delta \phi + (|\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{p})(\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi \right) dxdt = 0$$

Si $\mathbf{u}$ est une fonction intégrable ($\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ par exemple) pour laisser tendre $\phi(x, s)$ vers $\chi_{]0,t[}(s)$, on a :

$$\forall\, t > 0, \ \ \int_\Omega |\mathbf{u}(x, t)|^2 dx + 2\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \otimes \mathbf{u}(x, s)|^2 dxds = \int_\Omega |\mathbf{u}(x, 0)|^2 dx$$

Malheureusement, pour une donnée initiale $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^3$, on ne sait pas construire de solutions suffisamment régulières pour justifier les calculs formels précédents. Pour obtenir des solutions

régulières, J. Leray [83] a essayé d'atténuer la non linéarité par régularisation et il transforme la première équation de (NS) en :

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot ((\mathbf{u} * \omega_\epsilon) \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = f \tag{4.2.1}$$

$\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$ est une fonction d'intégrale égale à 1 et la suite $\omega_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\omega(\frac{x}{\epsilon})$ tend vers la masse de Dirac quand ϵ tend vers 0. Alors, à une donnée initiale $\mathbf{u}_0 \in (L^2(\Omega))^3$, on peut associer une solution régulière $(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon)$ et obtenir les égalités :

$$\int_0^T \int_\Omega \left(|\mathbf{u}_\epsilon|^2 \partial_t \phi - 2\nu |\nabla \otimes \mathbf{u}_\epsilon|^2 \phi + \nu |\mathbf{u}_\epsilon|^2 \Delta \phi + (|\mathbf{u}_\epsilon|^2((\mathbf{u}_\epsilon * \omega) \cdot \nabla)\phi + 2\mathbf{p}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon \cdot \nabla)\phi\right) dxdt = 0$$

et

$$\forall\, t > 0, \quad \int_\Omega |\mathbf{u}_\epsilon(x,t)|^2 dx + 2\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \otimes \mathbf{u}_\epsilon(x,s)|^2 dxds = \int_\Omega |\mathbf{u}(x,0)|^2 dx$$

Un argument de compacité faible permet de faire converger la suite $\mathbf{u}_\epsilon$ vers une solution de Navier-Stokes (NS). Cependant, le terme non linéaire $\nabla \otimes \mathbf{u}_\epsilon$ ne converge que faiblement, ce qui contraint de remplacer la dernière égalité d'énergie en une inégalité. On obtient alors le théorème d'existence des solutions faibles de Leray suivant :

Théorème 4.2.1
Si $\mathbf{u}_0 \in (L^2(\Omega))^n$ vérifie $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$, il existe une solution faible $\mathbf{u} \in L^2(]0,T[, \mathcal{H}^1_{div,0}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[, \mathcal{H}_{div}(\Omega))$ des équations de Navier-Stokes sur $]0,T[\times\Omega$ telle que :

$$\lim_{t \to 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_{(L^2(\Omega))^n} = 0$$

De plus, on peut imposer à cette solution l'inégalité d'énergie suivante :

$$\forall\, t > 0, \quad \|\mathbf{u}(x,t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + 2\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \otimes \mathbf{u}(x,s)|^2 dxds \leq \|\mathbf{u}(x,0)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}$$

et pour $\phi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega),\ \phi > 0$, on a l'inégalité d'énergie locale suivante :

$$2\nu \int_0^T \int_\Omega |\nabla \otimes \mathbf{u}|^2 \phi dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega \left(|\mathbf{u}|^2(\partial_t \phi + \nu \Delta \phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi) + 2\mathbf{p}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi\right) dxdt$$

Le problème de l'unicité et de la régularité des solutions faibles de Leray du théorème 4.2.1 reste encore ouvert. Seulement en dimension deux d'espace ($n = 2$), on sait montrer l'existence et l'unicité de ces solutions. En dimension trois, il existe quelques résultats partiels sur l'unicité [107, 118]. En fait, on ne sait toujours pas si les solutions faibles de Leray sont uniques, ou quelles sont les hypothèses qui peuvent les rendre uniques.

Solutions fortes de Kato

L'idée des solutions "*milds*" ou solutions intégrales de Navier-Stokes introduite par T. Kato [50, 74] n'utilise pas l'inégalité d'énergie de J. Leray. On transforme les équations (NS) de Navier-Stokes en un système d'opérateurs afin d'éliminer la pression :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} = \nu \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbb{P}[\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})], \quad x \in \Omega, \ t \in [0, T] \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Les opérateurs $\mathbf{A}$ et $\mathbb{P}$ sont définis par :

$$\mathbf{A} = -\mathbb{P}\Delta \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \nabla \frac{1}{\Delta}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

$\mathbf{A}$ est l'opérateur de Stokes [29] et $\mathbb{P}$ le projecteur de Leray. C'est l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace des fonctions à divergence nulle $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$:

$$\mathbb{P} : (L^2(\Omega))^n \to \mathcal{H}_{div}(\Omega)$$

Le système $(4.2.2)$ se résout en :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, t) = S(x, t)\mathbf{u}_0(x) - \int_0^t S(x, t - s)\mathbb{P}[\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})](x, s)ds \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0(x) = 0 \end{cases} \tag{4.2.3}$$

où $S(x, t)$ est le semi-groupe (opérateur de convolution) associé à l'opérateur de Stokes [56]. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, $S(x, t)$ est le noyau de la chaleur et vaut :

$$S(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \tag{4.2.4}$$

Le résultat phare dans la recherche de solutions dans $(L^n(\mathbb{R}^n))^n$ sous la forme intégrale (4.2.3) est dû à Kato [74] :

Théorème 4.2.2
Il existe une constante ϵ_0 telle que l'on ait le résultat suivant : soit $\mathbf{u}_0$ un champ de vecteur à divergence nulle de $(L^n(\mathbb{R}^n))^n$. Alors il existe un temps T et une solution $\mathbf{u}$ unique de $(4.2.3)$ associée à $\mathbf{u}_0$ tels que :

$$\mathbf{u} \ \in \mathcal{C}([0, T], \ L^n(\mathbb{R}^n)) \ \ \textit{et} \ \ t^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}(t)\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^n} \in L^\infty(]0, T]).$$

En outre, si $\|\mathbf{u}\|_{(L^n(\mathbb{R}^n))^n} \leq \epsilon_0$, alors la solution est globale et l'on a :

$$\mathbf{u} \ \in \mathcal{C}_b([0, +\infty[, \ L^n(\mathbb{R}^n)) \ \ \textit{et} \ \ t^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}(t)\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^n} \in L^\infty(]0, +\infty[).$$

La preuve du théorème $4.2.2$ n'utilise pas l'inégalité d'énergie comme dans le cas du théorème de Leray $4.2.1$. Pour démontrer ce résultat, on utilise plutôt un théorème de point fixe en posant :

$$\mathbf{u}(x,t) = S(x,t)\mathbf{u}_0(x) - B(\mathbf{u},\mathbf{u})(x,t)$$

avec

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u})(x,t) = -\int_0^t S(x,t-s)\mathbb{P}[(\mathbf{u}(x,s)\cdot\nabla])\mathbf{u}(x,s)]ds \tag{4.2.5}$$

Ensuite, on utilise des estimations de type $L^p - L^q$ classiques [31] sur le semi-groupe $S(x,t)$ et son caractère régularisant pour aboutir à un résultat d'existence et d'unicité sur un temps T. L'hypothèse $\|\mathbf{u}\|_{(L^n(\mathbb{R}^n))^n} \leq \epsilon_0$ permet de globaliser [11].

La recherche de solutions du système de Navier-Stokes sous la forme intégrale (4.2.3) est toujours un domaine de recherche très actif. Parmi les apports qui ont joué des rôles décisifs, on peut citer les travaux de F. Planchon [100] qui montrent que l'on pouvait atténuer l'hypothèse sur le contrôle au voisinage de $t = 0$ du théorème 4.2.2 de Kato. Un peu plus tard, G. Furioli et al. [51] obtiennent l'unicité de la solution à partir de la seule hypothèse de continuité $\mathcal{C}([0,T],(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$. Les résultats de G. Furioli et al. se basent sur le fait que l'opérateur $B(\mathbf{u},\mathbf{u})$ défini en $(4.2.5)$ se comporte comme les fluctuations de la solution $\mathbf{u}$, et qu'il est beaucoup plus simple à manipuler dans les espaces de Besov : ils montrent ainsi qu'il est continu de $L^\infty(]0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3) \times L^\infty(]0,T[,(L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ dans $L^\infty(]0,T[,(\dot{B}^{1/2}_{2,\infty}(\mathbb{R}^3))^3)$. Les travaux de Y. Meyer [93] montrent que la distinction entre les fluctuations et tendance de G. Furioli et al. n'était pas utile si on l'on remplaçait l'espace de Besov Homogène $\dot{B}^{1/2}_{2,\infty}(\mathbb{R}^3)$ par l'espace de Lorentz $L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$.

En ce qui concerne le comportement asymptotique en temps long des solutions, les travaux de T. Gallay et C.E. Wayne [52, 53] apportent des éclaircissements nouveaux très précis. La preuve de tous ces résultats demande l'utilisation d'outils d'analyse harmonique avancés, le lecteur intéressé peut se référer aux [11, 82].

4.3 Généralités sur la simulation numérique de la turbulence

La simulation numérique de la turbulence incompressible utilise essentiellement les équations de Navier-Stokes (NS). Dans ces équations, si on regarde l'équation sur le bilan de la conservation de la quantité du mouvement :

$$\partial_t\mathbf{u} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla\mathbf{p} = f \tag{4.3.1}$$

on remarque que la réponse du fluide aux forces extérieures est de deux natures différentes. Le fluide peut réagir sous l'effet de la force créée par les frictions moléculaires qui existent entre les

particules fluides en mouvement ou par simple effet d'inertie. Les forces de frictions sont très importantes dans le cas des fluides à forte viscosité moléculaire. Ces forces ont souvent tendance à ramener le fluide dans un état où l'homogénéité spatiale est prépondérante, on parle alors d'écoulements laminaires. Les forces d'inerties, qui sont des forces dues à l'entraînement du fluide par son propre mouvement, sont d'autant plus importantes que la vitesse du fluide est très grande. Plus ces forces sont importantes, plus le fluide est dans un état d'une grande inhomogénéité spatiale. L'importance relative des effets inertiels $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ sur les effets visqueux $\nu\Delta\mathbf{u}$ est mesurée par le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{u_0 \ell_0}{\nu} \tag{4.3.2}$$

avec ℓ_0 la taille caractéristique des plus grandes structures présentes dans l'écoulement et u_0 est l'ordre de grandeur des plus grandes vitesses dans l'écoulement. Le régime d'un fluide est intrinsèquement lié à ce nombre de Reynolds : plus ce nombre est important, plus le fluide est dans un régime turbulent, avec une gamme d'interaction entre les différentes échelles qui devient de plus en plus importante. Ces interactions entre les échelles créent d'importants échanges d'énergie entre les structures tourbillonnaires contenues dans le fluide. Pour décrire ce mécanisme, on va se placer dans le cadre de la théorie de A. N. Kolmogorov [2] [77].

Soit t_ℓ le temps de retournement d'un tourbillon de taille ℓ et de vitesse $\mathbf{u}_\ell$, par définition on a :

$$t_\ell = \frac{\ell}{\mathbf{u}_\ell}$$

Pendant t_ℓ un tourbillon de taille ℓ va subir des déformations et exciter des tourbillons plus petits par friction, tout en cédant une partie de son énergie cinétique relative. Soit ϵ_ℓ la quantité moyenne de l'énergie cinétique perdue par les tourbillons de taille ℓ au cours du temps t_ℓ. A. N. Kolmogorov dit que ϵ_ℓ est une fonction de l'énergie cinétique du tourbillon et du temps t_ℓ :

$$\epsilon_\ell \sim \frac{\mathbf{u}_\ell^3}{\ell}$$

ici le symbole $\sim$ veut dire proportionnel. Si ℓ tend vers zéro, la quantité ϵ_ℓ tend vers le taux moyen de dissipation de l'énergie ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = -\frac{dE}{dt} \tag{4.3.3}$$

avec $E(t)$ l'énergie cinétique moyenne. À une même échelle considérée, on a :

$$\epsilon_\ell = \epsilon_0$$

c'est à dire il n'y a pas de création d'énergie et la diffusion moléculaire est négligeable. Si le système est dans un état statistiquement stationnaire, ce qui est bien le cas dans les hypothèses de

2. Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903–1987) : mathématicien russe.

Kolmogorov, pour le maintenir en mouvement, le dispositif d'agitation lui injecte constamment de l'énergie sous forme d'énergie cinétique. Cette énergie sera ensuite dissipée au niveau des échelles où le terme visqueux est plus important sous forme de chaleur. En regardant ce processus à toutes les échelles, on aboutit à la cascade d'énergie décrite par L.F. Richardson [101].

La cascade d'énergie se poursuit jusqu'à une échelle η, dite échelle de Kolmogorov. C'est l'échelle de dissipation visqueuse où le temps de diffusion moléculaire est du même ordre que le temps de retournement tourbillonnaire :

$$\frac{\eta^2}{\nu} \simeq \epsilon_0^{-\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \eta \simeq \epsilon_0^{-\frac{1}{4}} \nu^{\frac{3}{4}} \tag{4.3.4}$$

ce qui permet de déduire :

$$t_\eta \sim \epsilon_0^{-\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}$$

Comme le taux de dissipation ϵ_0 est fixé par les grandes échelles

$$\epsilon_0 \sim \frac{u_0^3}{\ell_0},$$

on voit que dans un écoulement homogène isotrope, on va avoir des structures tourbillonnaires à toutes les échelles entre ℓ_0 et l'échelle :

$$\left(\frac{\nu}{u_0 \ell_0}\right)^{\frac{3}{4}} \ell_0 = Re^{-\frac{3}{4}} \ell_0 \tag{4.3.5}$$

D'après l'équation $(4.3.5)$, il est facile de voir qu'en terme de degré de liberté, pour simuler toutes les échelles d'un écoulement, on aura besoin d'un maillage dont le nombre de points est proportionnel à $Re^{\frac{6}{4}}$ en 2D et proportionnel à $Re^{\frac{9}{4}}$ en 3D. Les bases d'ondelettes sont alors utilisées dans le but de réduire cette complexité.

Chapitre 5

Simulation numérique directe par ondelettes des équations de Navier-Stokes

La simulation numérique directe consiste à résoudre intégralement les équations de Navier-Stokes, ce qui revient à simuler toutes les échelles contenues dans l'écoulement. Cette approche a l'avantage d'être précise mais elle est très coûteuse en mémoire CPU et en temps de calcul. Un maillage qui permet de prendre en compte toutes les structures aura un nombre de points de l'ordre de $Re^{\frac{6}{4}}$ dans le cas 2D et $Re^{\frac{9}{4}}$ en 3D. De même, on peut montrer que le temps de calcul nécessaire pour une telle simulation est proportionnel à $Re^{\frac{11}{4}}$ [71]. Alors, la recherche de méthodes de calculs pour la simulation numérique directe à moindre coût s'est avérée indispensable. C'est dans ce contexte que les schémas de discrétisation par ondelettes ont fait leur apparition. Comme travaux pionniers, on peut citer entre autres [15, 49, 60, 78].

Dans ce chapitre on propose de nouveaux schémas par ondelettes, pour la simulation numérique directe, qui peuvent être utilisés dans le cas périodique ou non périodique.

5.1 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Dans la résolution du système de Navier-Stokes (NS), pour faire disparaître le terme de pression, les algorithmes à base d'ondelettes [15, 47, 78] ou encore les méthodes spectrales ou pseudo-spectrales [30,103] utilisent le plus souvent la formulation vitesse-tourbillon. En posant $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$, et en considérant le rotationnel du système (NS), on trouve :

$$\partial_t \omega - \nu \Delta \omega = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega + (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{5.1.1}$$

En dimension deux d'espace, l'équation $(5.1.1)$ se simplifie en une équation de transport dif-

fusion :

$$\partial_t \omega - \nu \Delta \omega = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega$$

Le terme de "*stretching*" $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$ disparaît en 2D, mais l'équation reste encore non linéaire, et le terme non linéaire contient un opérateur pseudo-différentiel non local, tout comme le système de Navier-Stokes (NS) d'origine.

Un autre avantage de la formulation $(5.1.1)$ est qu'on est pas limité dans le choix de méthode pour résoudre le problème de diffusion (équation de la chaleur) ou celui de la convection (équation de transport). On peut par exemple choisir de traiter le terme non linéaire par un schéma en temps explicite et le système (NS) se ramène à une équation de la chaleur. Le calcul de la vitesse $\mathbf{u}$ est dans ce cas résolu par la résolution d'un problème de Poisson.

L'intérêt de l'utilisation de la base d'ondelettes apparaît dans l'approximation de la vorticité ω et dans la discrétisation de l'opérateur de la chaleur ou de Poisson. Les méthodes de [15, 47, 49, 78] sont très efficaces, par contre leur complexité de calcul augmente en fonction de la dimension : en dimension trois ou plus, la vorticité ω n'est plus une quantité scalaire, c'est un vecteur. À cela s'ajoute le fait que la prise en compte de conditions aux limites non périodiques n'est pas triviale.

Dans ce travail, on utilise la formulation vitesse-pression. Pour éliminer le terme de pression, on utilise la projection sur la base d'ondelettes à divergence nulle. En projetant le système (NS) sur l'espace de fonctions à divergence nulle, avec des conditions aux limites périodiques on retrouve :

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\mathbb{P}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}], \tag{5.1.2}$$

le gradient de pression est donné par :

$$\nabla \mathbf{p} = \mathbb{P}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{5.1.3}$$

En non périodique, on a :

$$\partial_t \mathbf{u} = -\mathbb{P}[-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}], \tag{5.1.4}$$

de même, on retrouve le gradient de pression par :

$$\nabla \mathbf{p} = \mathbb{P}[-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] + \nu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{5.1.5}$$

Pour résoudre le système de Navier-Stokes (NS) sous cette forme, il faut donc être capable :

(i) de calculer le projecteur $\mathbb{P}$ dans la discrétisation choisie.

(ii) de résoudre ensuite l'équation de la chaleur.

L'originalité de ce travail sera d'imposer des conditions aux limites non périodiques. Pour satisfaire le premier point (i), on utilisera les algorithmes de la section 3.4 qui permettent le calcul

de la décomposition de Helmholtz-Hodge en utilisant les ondelettes à divergence nulle de bords, et ainsi on obtient $\mathbb{P}$ avec des conditions aux limites non périodiques. Pour le deuxième point (ii), on fera appel à la méthode de résolution du problème de la chaleur par factorisation du noyau décrite à la section 3.3. On utilisera des analyses multirésolution classiques sur l'intervalle à reproduction polynomiale, les conditions aux limites seront incorporées directement à la base d'ondelettes utilisée pour la discrétisation. Plus précisément, si $\vec{X}$ est l'espace dans lequel on cherche à calculer la solution $\mathbf{u}$, pour la discrétisation du problème on prendra une analyse multirésolution $\{\vec{\mathbf{V}}_j\}$ de $\vec{X}$ et la solution approchée $\mathbf{u}_j \in \vec{\mathbf{V}}_j$ à l'instant t sera cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}_j(x,t) = \sum_{|\mathbf{j}|<j,\ \mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(t)\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(x) \tag{5.1.6}$$

où $\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\}_{|\mathbf{j}|<j}$ est la base d'ondelettes associée aux $\vec{\mathbf{V}}_j$. Comme on va le voir, cela permet de réduire les étapes de certains algorithmes connus, par conséquent de réduire le coût des calculs.

5.2 Rappels sur deux méthodes classiques

On rappelle dans cette partie deux méthodes classiques de discrétisation en temps, que nous adapterons ensuite pour utiliser une discrétisation spatiale de type Galerkin sur base d'ondelettes.

Pour la résolution des équations de Navier-Stokes (NS) en formulation vitesse-pression, une méthode souvent utilisée est la **méthode de projection** de A. Chorin [18], R. Temam [111] et K. Goda [58]. C'est une méthode de splitting en temps qui permet de découpler le calcul de la vitesse de celui de la pression. Soit δt le pas de temps choisi pour la discrétisation, à l'étape $n \geq 0$, on notera $\mathbf{u}_n(x) \simeq \mathbf{u}_j(x, n\delta t)$ la solution approchée et $\mathbf{p}_n(x) \simeq \mathbf{p}_j(x, n\delta t)$ la pression approchée. Si le terme de diffusion est traité de façon implicite, comme par exemple dans un schéma d'Euler implicite, les principales étapes de la méthode de projection s'écrivent :

- Calcul de la vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^*-\mathbf{u}_n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{u}^* + (\mathbf{u}_n\cdot\nabla)\mathbf{u}_n = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.1}$$

- Calcul de la pression :

$$\begin{cases} \delta t\Delta\mathbf{p}_{n+1} - \nabla\cdot\mathbf{u}^* = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla\mathbf{p}_{n+1} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.2}$$

- Calcul de la vitesse :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}^* - \delta t\nabla\mathbf{p}_{n+1} \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.3}$$

La précision en temps de ce schéma est limitée, il suppose les dérivées d'ordre trois de la pression $\mathbf{p}_{n+1}$ négligeables [103]. Cependant, plusieurs améliorations ont été apportées afin d'augmenter sa précision, voir [10]. Des preuves sur l'analyse et la convergence de certains de ces schémas sont données dans [61, 99].

Les méthodes de projection sont des méthodes à pas fractionnaires, ce qui induit une erreur de fractionnement irréductible qui limite la précision des algorithmes. Alors, on a exploré comme alternative une nouvelle méthode de discrétisation dite **méthode de Gauge** [13, 44]. Comme dans le cas du problème de Stokes (section 3.5), on introduit une nouvelle variable non physique χ, appelée variable de Gauge par :

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} + \nabla\chi$$

Ce changement de variable introduit dans le système de Navier-Stokes (NS) permet de retrouver l'équation sur la dynamique de $\mathbf{a}$:

$$\partial_t \mathbf{a} + \nu\Delta\mathbf{a} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla\mathbf{p} + \nabla(-\partial_t\chi + \nu\Delta\chi) = 0 \tag{5.2.4}$$

Si la pression $\mathbf{p}$ satisfait :

$$\mathbf{p} = \partial_t\chi - \nu\Delta\chi \tag{5.2.5}$$

alors, l'équation $(5.2.4)$ devient :

$$\partial_t \mathbf{a} + \nu\Delta\mathbf{a} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = 0 \tag{5.2.6}$$

ce qui est une simple équation de diffusion avec comme terme source le terme non linéaire $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$. Une autre analogie avec les équations de Stokes, on est encore libre dans le choix des conditions aux limites pour les variables $\mathbf{a}$ et χ, on peut imposer :

$$\frac{\partial\chi}{\partial\vec{\nu}} = 0 \qquad \mathbf{a}\cdot\vec{\nu} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\nu} \qquad \mathbf{a}\cdot\vec{\tau} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\tau} + \frac{\partial\chi}{\partial\vec{\tau}} \tag{5.2.7}$$

ou

$$\frac{\partial\chi}{\partial\vec{\tau}} = 0 \qquad \mathbf{a}\cdot\vec{\nu} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\nu} + \frac{\partial\chi}{\partial\vec{\nu}} \qquad \mathbf{a}\cdot\vec{\tau} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\tau} \tag{5.2.8}$$

$\vec{\nu}$ et $\vec{\tau}$ sont les vecteurs unitaires normal et tangent à $\partial\Omega$ respectivement. Avec le choix des conditions aux limites $(5.2.7)$ et un schéma d'Euler implicite en temps, une discrétisation possible de cette méthode s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{a}_n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{a}_{n+1} + (\mathbf{u}_n\cdot\nabla)\mathbf{u}_n = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{a}_{n+1}\cdot\vec{\nu} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\nu}, \quad \mathbf{a}_{n+1}\cdot\vec{\tau} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\tau} + \frac{\partial\chi_{n+1}}{\partial\vec{\tau}} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.9}$$

et

$$\begin{cases} \Delta\chi_{n+1} = \nabla\cdot\mathbf{a}_{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\chi_{n+1}}{\partial\vec{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2.10}$$

avec $\mathbf{a}_n(x) \simeq \mathbf{a}_j(x, n\delta t)$ et $\chi_n(x) \simeq \chi_j(x, n\delta t)$. La vitesse $\mathbf{u}_{n+1}$ est donnée par :

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} + \nabla\chi_{n+1} \tag{5.2.11}$$

La résolution du système $(5.2.9)$ n'est pas évidente, on ne connaît pas χ_{n+1}. Pour y remédier, on passe souvent par une extrapolation de la valeur de $\frac{\partial\chi_{n+1}}{\partial\vec{\tau}}$ entre deux étapes précédentes, cela réduit la précision de cette méthode. Si on remplace $\frac{\partial\chi_{n+1}}{\partial\vec{\tau}}$ par $\frac{\partial\chi_n}{\partial\vec{\tau}}$ dans $(5.2.9)$, ce qui revient à un traitement explicite des conditions aux limites, on arrive à prouver dans [96, 119] que la méthode de Gauge est convergente d'ordre 1 en temps avec des estimations optimales pour la vitesse, sous la contrainte CFL $\delta t/\delta x \leq C$, en différences finies en espace.

5.3 Nouveaux schémas par ondelettes

Avec des discrétisation en espace de type différences finies, éléments finis ou éléments spectraux, la résolution des problèmes (5.2.2) et (5.2.3) utilise un solveur de Poisson. On propose d'utiliser une discrétisation en espace sur base d'ondelettes et d'introduire une variante de la méthode de projection, en remplaçant le couplage entre les équations (5.2.2) et (5.2.3) par une décomposition de Helmholtz-Hodge. En effet, le coût de cette décomposition ne dépasse pas celui de la résolution d'une équation de Poisson scalaire. Les schémas de résolution proposés dépendent aussi de type des conditions aux limites.

5.3.1 Schémas périodiques

En périodique, le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ commute avec le Laplacien. Dans ces conditions, les schémas de discrétisation en temps qu'on propose sont les suivants :

• **Euler implicite** pour la diffusion et **Euler explicite** pour la convection :

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{u}_{n+1} + \mathbb{P}[(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n] = 0 \tag{5.3.1}$$

• **Crank-Nicolson** pour la diffusion et **Adams-Bashforth** pour la convection :

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\delta t} - \frac{\nu\Delta}{2}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) + \mathbb{P}[(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}] = 0 \tag{5.3.2}$$

avec :

$$(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2} = \frac{3}{2}(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{n-1} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n-1}$$

Le traitement explicite ou semi-implicite du terme non linéaire fait que ces schémas sont convergents sous une contrainte CFL : $\delta t \leq C(\delta x)^2$ ou $\delta t \leq C(\delta x^2)^{4/3}$, voir [41].

• **Discrétisation en espace :**

La discrétisation en espace qu'on propose utilise l'analyse multirésolution de $(L^2_{per}(\Omega))^n$ dans laquelle vivent les ondelettes à divergence nulle de $L^2_{div}(\Omega)$. Cela permet d'éviter le calcul de plusieurs matrices de masse et de rigidité, avec des générateurs différents. En dimension deux, cette analyse multirésolution est formée par les espaces $\vec{\mathbf{V}}_j = (V_j^1 \otimes V_j^0) \times (V_j^0 \otimes V_j^1)$. Alors, à une résolution j donnée, les composantes de la solution $\mathbf{u}_n$ sont cherchées sous la forme :

$$\mathbf{u}_n^1 = \sum_{|\mathbf{j}|<j,\ \mathbf{k}} d^{1,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\ \psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_n^2 = \sum_{|\mathbf{j}|<j,\ \mathbf{k}} d^{2,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\ \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2} \tag{5.3.3}$$

Les calculs des projections $\mathbb{P}[(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n]$ et $\mathbb{P}[(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}]$ se font en deux étapes. On calcule d'abord $(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n$ et $(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}$ en différences finies sur les points de la grille, ensuite on projette sur les ondelettes à divergence nulle et par changement de base, on se ramène sur la base des $\{\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2}\}$ et $\{\psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2}\}$, selon chaque composante de $\mathbf{u}_n$.

Pour la résolution du problème de diffusion, avec les techniques de la section 3.3, le calcul de coefficients $[d^{1,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ et $[d^{2,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ revient à la résolution d'un système matriciel :

- Méthode d'Euler

$$\mathcal{A}^1_{\delta t}\ [d^{1,n+1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{A}^0_{\delta t} = \mathbf{M}^1\ [d^{1,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathbf{M}^0 - \delta t \mathbf{M}^1\ (\mathbb{P}[(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n]_1)\ \mathbf{M}^0 \tag{5.3.4}$$

et

$$\mathcal{A}^0_{\delta t}\ [d^{2,n+1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{A}^1_{\delta t} = \ \mathbf{M}^0\ [d^{2,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathbf{M}^1 - \delta t \mathbf{M}^0\ (\mathbb{P}[(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n]_2)\ \mathbf{M}^1 \tag{5.3.5}$$

- Méthode de Crank-Nicolson

$$\mathcal{A}^1_{\frac{\delta t}{2}}\ [d^{1,n+1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{A}^0_{\frac{\delta t}{2}} = \mathcal{R}^1_{\frac{\delta t}{2}}\ [d^{1,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{R}^0_{\frac{\delta t}{2}} - \delta t \mathbf{M}^1\ (\mathbb{P}[(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}]_1)\ \mathbf{M}^0 \tag{5.3.6}$$

et

$$\mathcal{A}^0_{\frac{\delta t}{2}}\ [d^{2,n+1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{A}^1_{\frac{\delta t}{2}} = \mathcal{R}^0_{\frac{\delta t}{2}}\ [d^{2,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{R}^1_{\frac{\delta t}{2}} - \delta t \mathbf{M}^0\ (\mathbb{P}[(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}]_2)\ \mathbf{M}^1 \tag{5.3.7}$$

où les matrices $\mathbf{M}^\epsilon$, $\mathcal{A}^\epsilon_{\delta t}$, $\mathcal{A}^\epsilon_{\frac{\delta t}{2}}$ et $\mathcal{R}^\epsilon_{\frac{\delta t}{2}}$ sont respectivement la matrice de masse, la matrice de l'opérateur $(1 - \nu\delta t\Delta)$, la matrice de l'opérateur $(1 - \frac{\nu\delta t}{2}\Delta)$ et la matrice de l'opérateur $(1 + \frac{\nu\delta t}{2}\Delta)$ sur la base 1D de $\{V^\epsilon_j\}_{\epsilon=0,1}$ (fonctions d'échelle ou ondelettes).

En récapitulant, les différentes étapes des schémas proposés sont les suivantes :

Partant de $\mathbf{u}_n$ et $\mathbf{u}_{n-1}$, connus aux points de la grille $(\mathbf{k}2^{-j})$ de Ω,

1. On calcule en différences finies les termes $(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n$ ou $(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}$, et on projette sur la base d'ondelettes $(\psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2}, \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2})$. Le coût de cette étape est de $O(N^2)$, avec

$N = 2^J$ et J étant la résolution la plus fine.

2. On calcule la décomposition de Helmholtz-Hodge de $(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n$ ou $(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}$. Le coût de cette étape est de $O(cN^2)$, avec c le nombre d'éléments par ligne de la matrice de raideur de la base d'ondelettes en 1D considérée.

3. Enfin, on résout l'équation de la chaleur donnée par $(5.3.1)$ et $(5.3.2)$, le coût de cette étape est aussi de $O(cN^2)$ opérations.

Sauf prise en compte effective de l'adaptativité (i.e des coefficients d'ondelettes négligeables de la solution), cette complexité reste inchangée que ce soit sur la base d'ondelettes ou des fonctions d'échelle, seule la constante c varie. On précise que le coût d'une transformée en ondelettes en dimension deux est de l'ordre $O(2rN^2)$, r étant la largeur maximale des filtres utilisés, celui de la transformée de Fourier rapide est de l'ordre $O(N^2 \log(N))$. Cela veut dire qu'on est en $O(N^2 \log(N))$ opérations au minimum en Fourier avec les schémas précédents, ce qui est plus coûteux qu'en ondelettes pour des grandes valeurs de N.

5.3.2 Méthode de projection modifiée par ondelettes

Pour calculer $\mathbf{u}_{n+1}$, en plus de la résolution du problème de Poisson $(5.2.2)$, la méthode de projection habituelle demande au préalable le calcul de $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ et $\nabla \mathbf{p}_{n+1}$. En général, ces calculs sont effectués en différences finies, ce qui peut altérer la précision du schéma. Ce que l'on propose ici c'est d'introduire directement, dès la première étape, la décomposition de Helmholtz-Hodge de $\mathbf{u}^*$. Notre algorithme de discrétisation en temps est le suivant :

$$(MP) \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_n}{\delta t} - \frac{\nu\Delta}{2}(\mathbf{u}^* + \mathbf{u}_n) + (\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{u}^*) \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.3.8}$$

avec $\mathbb{P}$ le projecteur orthogonal de $(L^2(\Omega))^n$ sur $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$. Compte tenu du traitement implicite de la diffusion, la présence du terme non linéaire $(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2}$, traité en semi-explicite, impose une contrainte CFL de stabilité sur le pas de temps, analogue au cas périodique.

La méthode de discrétisation en espace qu'on utilise est similaire à celle utilisée dans le cas périodique, il suffit d'adapter les notations avec les bases d'ondelettes considérées. On rappelle que pour traiter les conditions aux limites dans le cas non homogène, on fait recours à des relèvements construits sur la base des fonctions d'échelle $(\varphi^1_{j,k_1} \otimes \varphi^0_{j,k_2}, \varphi^0_{j,k_1} \otimes \varphi^1_{j,k_2})$ [90]. On cherche une

fonction R_g sous la forme :

$$R_g := \sum_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \varphi^1_{j,k_1} \otimes \varphi^0_{j,k_2} \\ \varphi^0_{j,k_1} \otimes \varphi^1_{j,k_2} \end{pmatrix} \tag{5.3.9}$$

telle que :

$$R_g|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b \ \text{ et } \int_{\partial\Omega} \vec{\nu} \cdot R_g ds = 0$$

Ensuite, on fait un changement de variable dans (MP) en posant : $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* - R_g$, ce qui ramène à des conditions aux limites homogènes sur $\tilde{\mathbf{u}}$.

Remarque 5.3.1
Dans le calcul du projecteur $\mathbb{P}$ on n'utilise pas de relèvements, car si $\mathbf{u}$ est dans $H^1_0(\Omega)$ alors $\mathbb{P}(\mathbf{u}) \in H^1_0(\Omega)$, de même avec la condition de glissement ($\vec{\nu} \cdot \mathbf{u} = 0$) car on sait construire la base de fonctions à divergence nulle qui vérifie cette condition. □

5.3.3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

En utilisant le projecteur $\mathbb{P}$, l'algorithme de la **méthode de Gauge** se réduit à :

$$(MG) \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{a}_n}{\delta t} - \frac{\nu\Delta}{2}(\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n) + (\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1/2} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{a}_{n+1} \cdot \vec{\nu} = \mathbf{u}_b \cdot \vec{\nu}, \quad \mathbf{a}_{n+1} \cdot \vec{\tau} = \mathbf{u}_b \cdot \vec{\tau} + \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \vec{\tau}} & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{a}_{n+1}) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.3.10}$$

Cet algorithme est aussi convergent sous une contrainte CFL. Pour la discrétisation en espace, on peut utiliser l'analyse multirésolution de $(L^2(\Omega))^n$ qui contient les ondelettes à divergence nulle, comme pour la méthode de projection.

5.4 Expériences numériques

On présente dans cette partie des résultats numériques pour illustrer le potentiel des algorithmes de la section précédente sur bases d'ondelettes. On commence d'abord par le cas périodique, puis on présente des tests sur la cavité entraînée et, en 3D des testes sur le problème de reconnection de tubes de vorticité.

5.4.1 Étude de l'erreur dans le cas périodique

En dimension deux ($n = 2$), afin de valider la précision des schémas en espace, une étude d'erreur est effectuée. On étudie l'erreur numérique du schémas de Crank-Nicolson $5.3.2$ en fonction

de la résolution J. Comme solution exacte des équations de Navier-Stokes on a pris les vortex de Taylor [73] :

$$\mathbf{u}_1(x,y,t) = -\cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t}$$
$$\mathbf{u}_2(x,y,t) = \sin(x)\cos(y)e^{-2\nu t}$$

Le pas de temps choisi pour la simulation est $\delta t = 5\ 10^{-3}$, la viscosité vaut $\nu = \frac{1}{8\pi^2}$ de telle sorte que $Re = 1$, le temps final est $t = 10^{-1}$. Pour cette solution, le terme source associé est nul et le gradient de pression correspond exactement au terme $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$. Sur la Figure 5.4 ci-dessous on trace l'erreur sur les valeurs aux points de la grille de la solution calculée en normes $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$. L'analyse multirésolution $\{\ V_j^1, \tilde{V}_j^1\}$ choisie est celle des générateurs B-Spline biorthogonaux à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$.

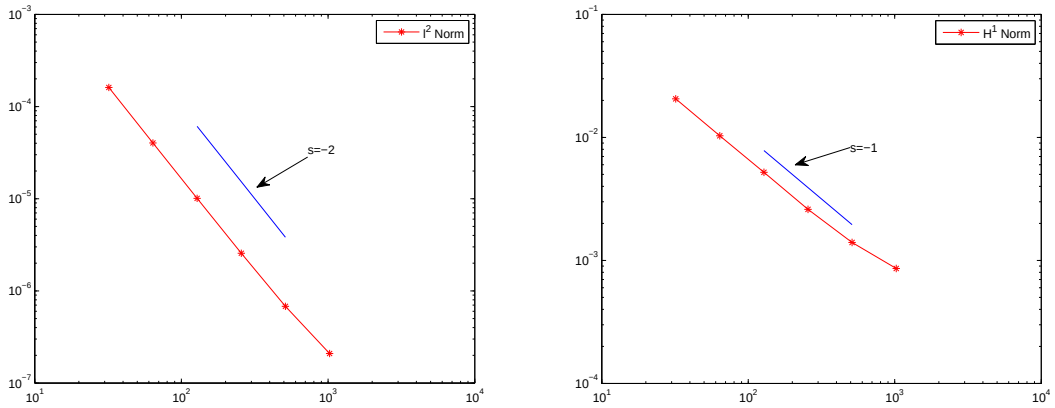

FIGURE 5.1 – Erreur L^2 à gauche et H^1 à droite, entre la solution exacte et la solution du schéma $(5.3.2)$. Échelle logarithmique.

Le comportement théorique de cette erreur est de la forme $O(2^{-nJ})$ [57]. On observe une pente de l'ordre de $\alpha \simeq -1.98$ pour la courbe de la norme L^2 et $\alpha = -0.97$ pour celle de la norme H^1, ce qui est conforme au résultat théorique : $n = -2$ en norme L^2 et $n = -1$ en norme H^1.

Remarque 5.4.1
On a reproduit cette expérience en dimension trois, en prenant comme solution exacte les vortex de Taylor avec la troisième composante qui est nulle. On retrouve le même ordre d'erreur. □

5.4.2 Interaction de trois tourbillons (conditions aux limites périodiques)

Il s'agit d'un écoulement 2D non forcé sur une boite de calcul de taille $2\pi \times 2\pi$ adimensionnée. Cette expérience est classique et permet de valider de nouveau schémas pour Navier-Stokes avec

des conditions aux limites périodiques [106]. Le profil des tourbillons suit une loi gaussienne : $\omega = Ae^{-r^2/\sigma^2}$. Les paramètres des trois tourbillons considérés sont les suivants :

tourbillon 1 : position : $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$, amplitude : $A = \pi$, écart type : $\sigma = \frac{1}{\pi}$

tourbillon 2 : position : $(\frac{5\pi}{4}, \pi)$, amplitude : $A = \pi$, écart type : $\sigma = \frac{1}{\pi}$

tourbillon 3 : position : $(\frac{5\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{2\sqrt{2}})$, amplitude : $A = -\frac{\pi}{2}$, écart type : $\sigma = \frac{1}{\pi}$

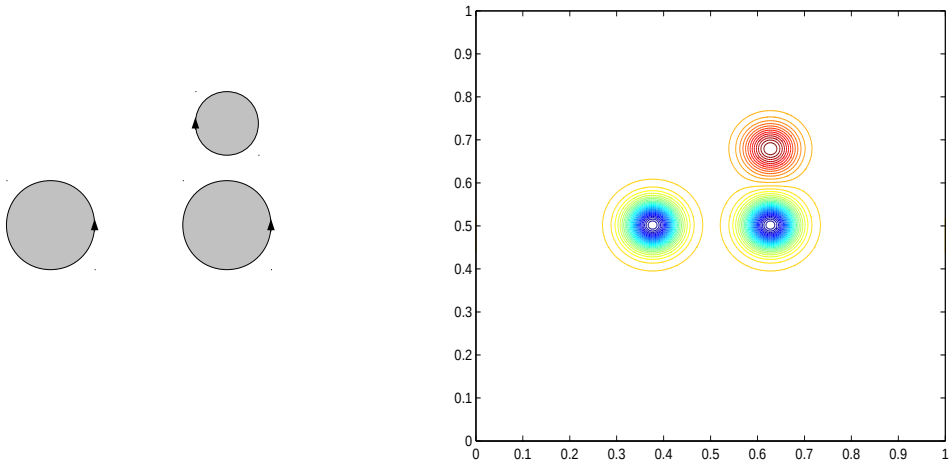

FIGURE 5.2 – Sens de rotation des trois tourbillons (à gauche) et isocontours de la vorticité à $t = 0$ (à droite).

Le pas de temps est $\delta t = 2.5\ 10^{-3}$, la viscosité $\nu = 3.8\ 10^{-6}$. L'analyse multirésolution $\{\ V_j^1, \tilde{V}_j^1\}$ choisie est celle des générateurs B-Spline biorthogonaux à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$, avec une résolution maximale de $J = 8$. On obtient les mêmes résultats que E. Deriaz dans [39] dont on trace les contours de la vorticité à différentes étapes de la simulation : $t = 10$, $t = 20$, $t = 30$ et $t = 40$.

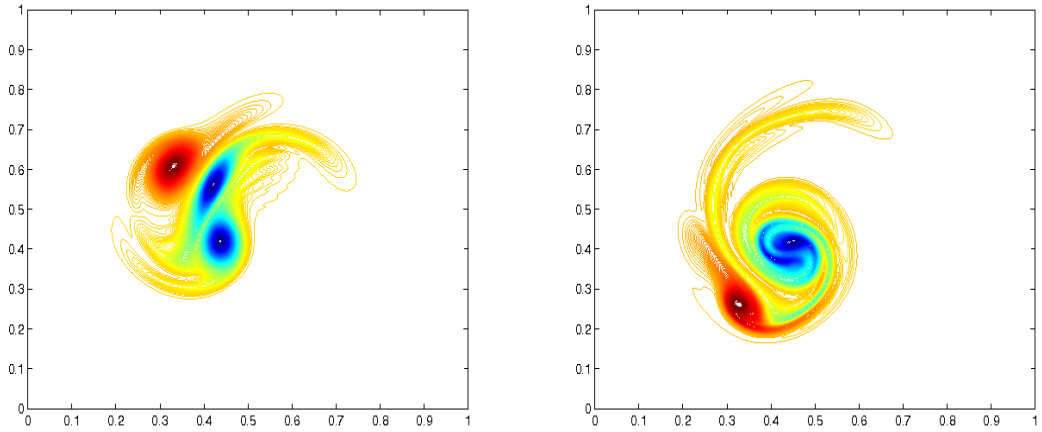

FIGURE 5.3 – Isocontours de la vorticité à $t = 10$ (à gauche) et $t = 20$ (à droite).

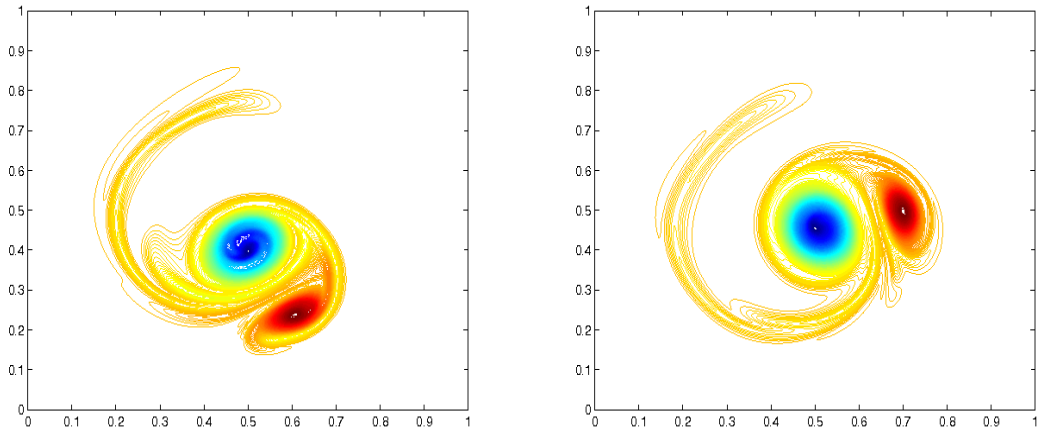

FIGURE 5.4 – Isocontours de la vorticité à $t = 30$ (à gauche) et $t = 40$ (à droite).

On considère ensuite l'évolution des coefficients d'ondelettes à divergence nulle anisotropes de la solution qui sont au dessus de certains seuils. Les seuils choisis sont $\epsilon = 8\ 10^{-4}$, $\epsilon = 16\ 10^{-4}$ et $\epsilon = 32\ 10^{-4}$. On trace sur la figure 5.5 les trois courbes correspondantes, on observe que le pourcentage des coefficients de petites échelles augmente jusqu'à un certain temps ($t \simeq 20$), puis il décroît, cela traduit comment l'écoulement devient complexe au cours du temps. Cette courbe traduit la possibilité d'adaptativité des bases d'ondelettes à divergence nulle dans la prise en compte

des petites échelles de l'écoulement. Des résultats similaires existent, qui traduisent le nombre de coefficients d'ondelettes activées, dans le cas des méthodes purement adaptatives étudiées par M. Griebel et F. Koster [59].

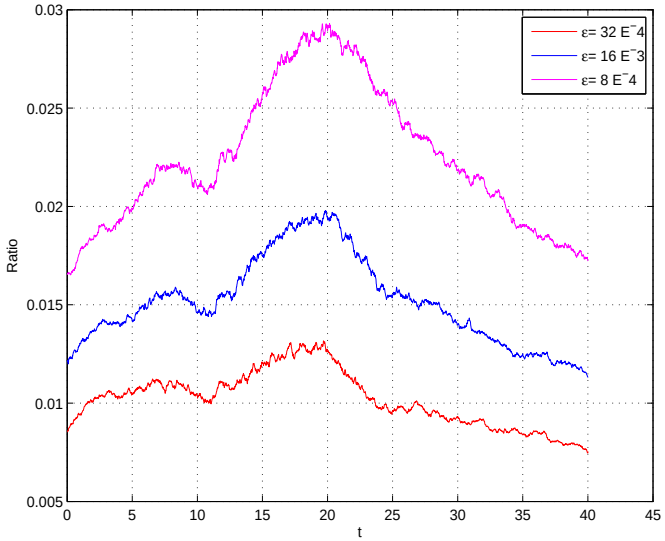

FIGURE 5.5 – Évolution du pourcentage des coefficients d'ondelettes à divergence nulle retenus en fonction du temps. Au total on a 2^{16}.

5.4.3 Cavité entraînée

Les résultats sur l'étude d'erreur de la précision en espace des schémas (MP) et (MG) sont analogues à ceux du cas périodique. Pour la méthode de Gauge, une étude a été déjà faite au niveau de la section 3.5. Dans cette sous-section, on présente quelques résultats qui permettent de valider les algorithmes sur un cas test bien connu.

Pour valider les algorithmes (MP) et (MG) avec des conditions aux limites physiques, on s'est intéressé au problème d'écoulement dans une cavité entraînée. On présente des simulations avec une vitesse initiale nulle dans tout le domaine $\Omega = [0,1]^2$ sauf en $y = 1$ où on prend : $\mathbf{u}_1 = x^2(1-x)^2$. C'est un écoulement qui reste laminaire pour des nombres de Reynolds faibles : $Re < 10000$. Ce test est couramment utilisé dans la littérature, ce qui permet de comparer les résultats avec d'autres méthodes. L'état de convergence statistique de cet écoulement se caractérise par un vortex au centre créé par la vorticité primaire et suivant le nombre de Reynolds la vorticité secondaire crée ou pas des vortex dans trois angles de la cavité.

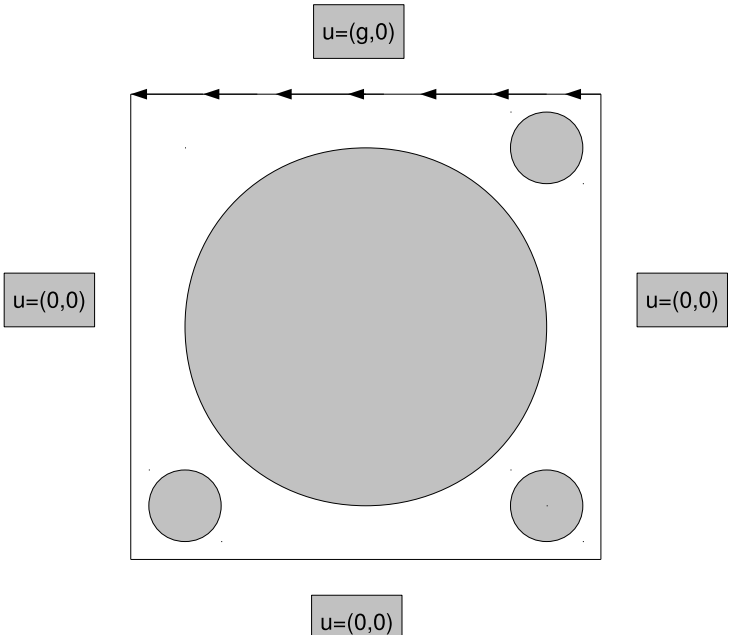

FIGURE 5.6 – État statistique de convergence dans une cavité entraînée.

La validation s'est effectuée en deux étapes. On a comparé d'abord les résultats obtenus avec la méthode de projection modifiée (MP) aux résultats très connus de U. Ghia et al. [55]. En suite, on a comparé les deux méthodes (MP) et (MG) pour des nombres Reynolds modérés. Pour ce qui est de la comparaison avec les données de [55], on a pris $\mathbf{u}_1 = 1$, $Re = 1000$ et $j = 7$. La base utilisée est celle des fonctions d'échelle B-Splines biorthogonaux à trois moments nuls. Sur la figure 5.7, on a tracé les profils des vitesses horizontale et verticale au centre de la cavité au temps $t = 30$, auxquels on a superposé les résultats de [55] obtenus avec le même Reynolds. Cela atteste la convergence de la méthode (MP) au bon résultat.

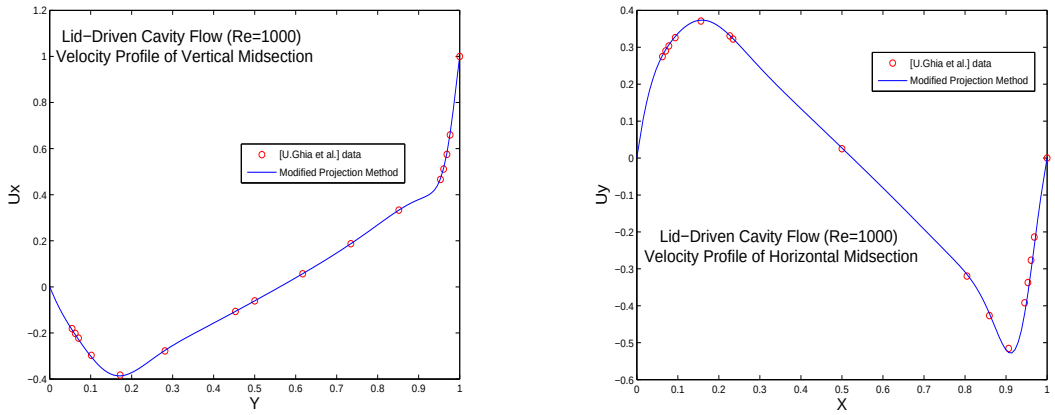

FIGURE 5.7 – Profils de la vitesse verticale au centre (à gauche) et celui de la vitesse horizontale (à droite) : méthode de projection (MP) avec $\nu = 1/1000$, $\mathbf{u}_1 = 1$ et $J = 7$.

Pour la comparaison des méthodes proposées en (MP) et (MG), on s'est limité aux nombres de Reynolds $Re = 500$ et $Re = 2000$. Les simulations effectuées permettent de retrouver l'état statistique de convergence et montrent ainsi la validation et la faisabilité de ces méthodes sur bases d'ondelettes. Dans les deux cas, le terme non linéaire est traité de manière explicite en différences fines d'ordre deux avec une extrapolation du même ordre des dérivées situées sur les points des extrémités de la grille de calcul. Le pas de temps est imposé par la condition CFL : $\delta t = 8\ 10^{-3}$ et on a pris comme résolution $J = 7$. Les générateurs d'ondelettes sont les B-Splines biorthogonaux à trois moments nuls.

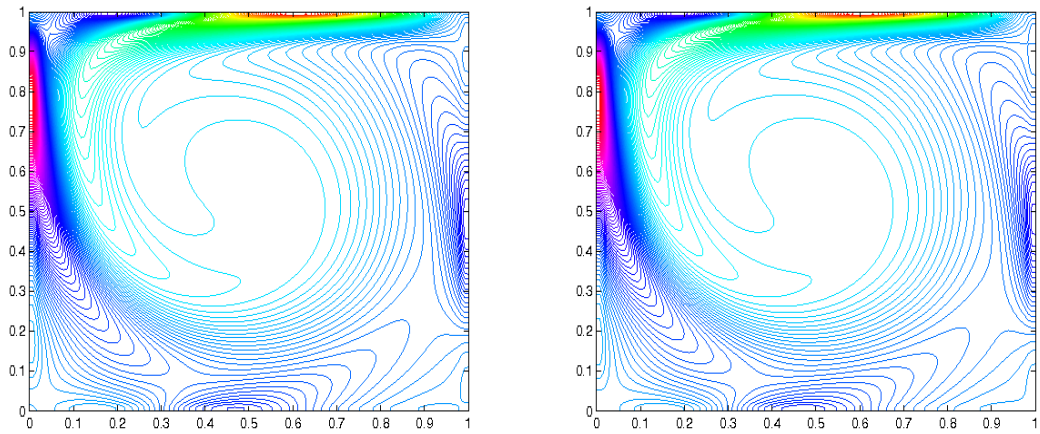

FIGURE 5.8 – Isocontours de la vorticité à $t = 20$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/500$ et $J = 7$.

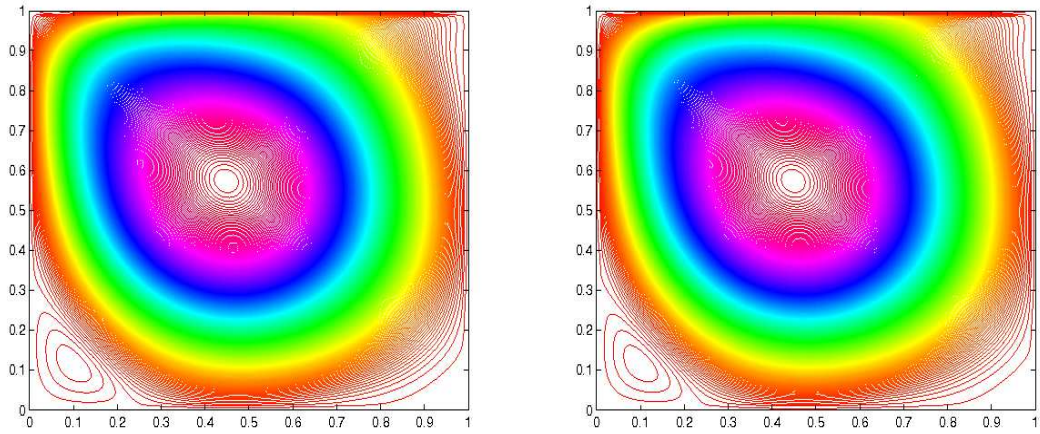

FIGURE 5.9 – Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 20$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/500$ et $J = 7$.

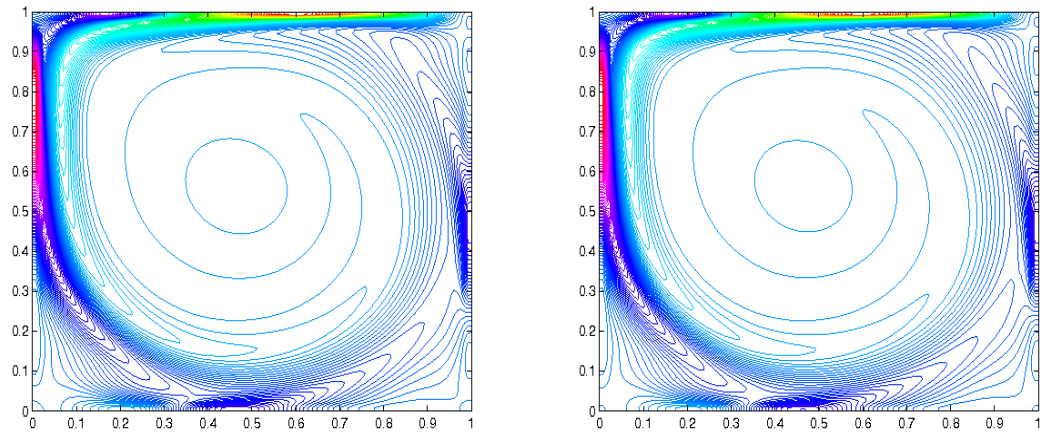

FIGURE 5.10 – Isocontours de la vorticité à $t = 30$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/2000$ et $J = 7$.

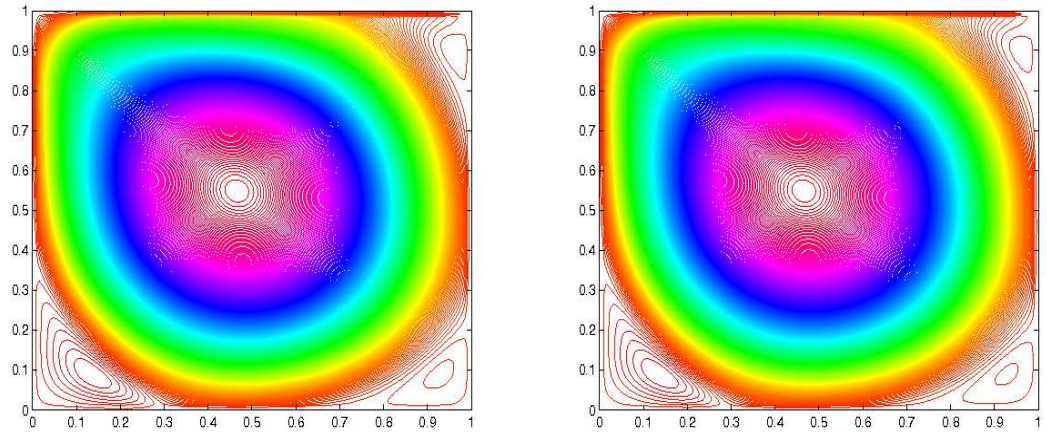

FIGURE 5.11 – Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 30$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/2000$ et $J = 7$.

De ces simulations, il ressort que les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats numériques. On a vu que dans l'algorithme (MG), pour imposer les conditions aux limites, il faut connaître la valeur de χ_{n+1}. En pratique cette valeur est obtenue par extrapolation entre χ_n et χ_{n-1}, c'est un inconvénient de la méthode de Gauge.

La méthode de projection ne demande un traitement astucieux des conditions aux limites comme la méthode de Gauge. Ainsi, pour des raisons de simplicité et d'implémentation, on préfère plus la méthode de projection (MP) par rapport à la méthode de Gauge (MG).

5.4.4 Cavité entraînée à grand Reynolds

On présente ici des résultats de simulation avec un nombre de Reynolds élevé : $Re = 10^4$. On a gardé les mêmes bases d'ondelettes et augmenté la résolution : $J = 8$. On a utilisé la méthode de projection (MP) dans la résolutions des équations.

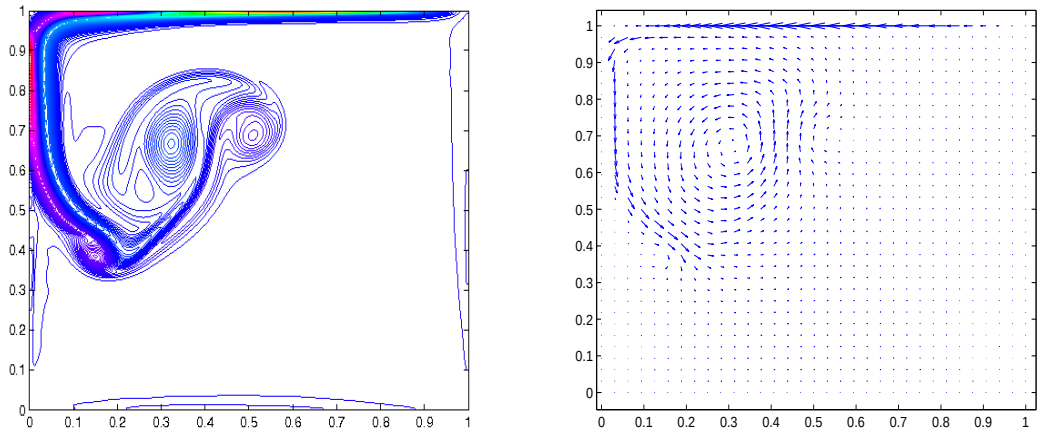

FIGURE 5.12 – Isocontours de la vorticité à $t = 10$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$.

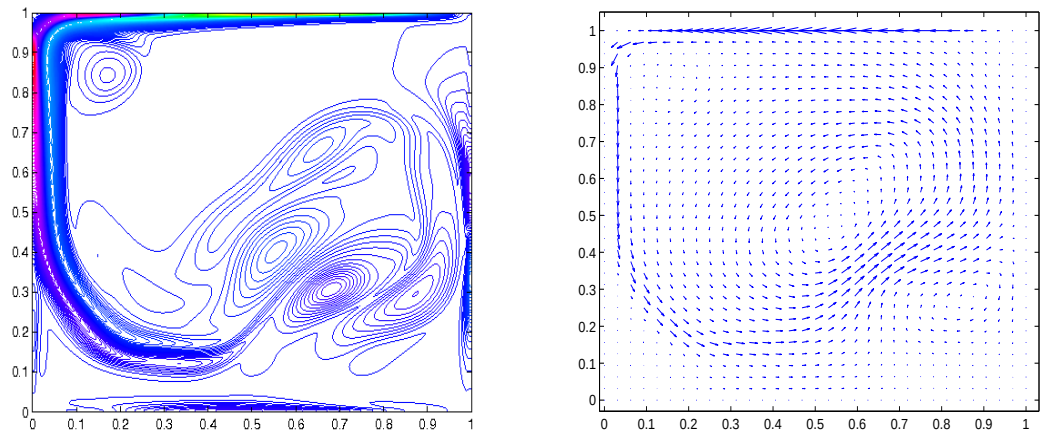

FIGURE 5.13 – Isocontours de la vorticité à $t = 20$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$.

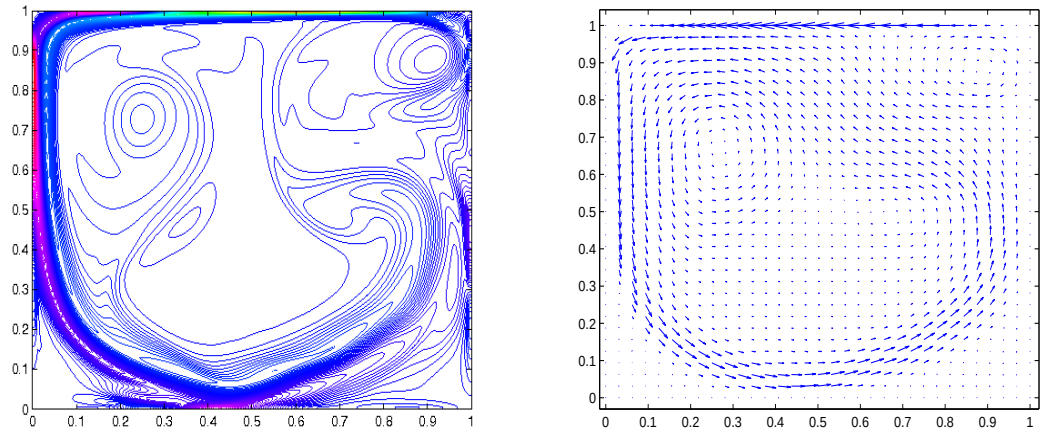

FIGURE 5.14 – Isocontours de la vorticité à $t = 30$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$.

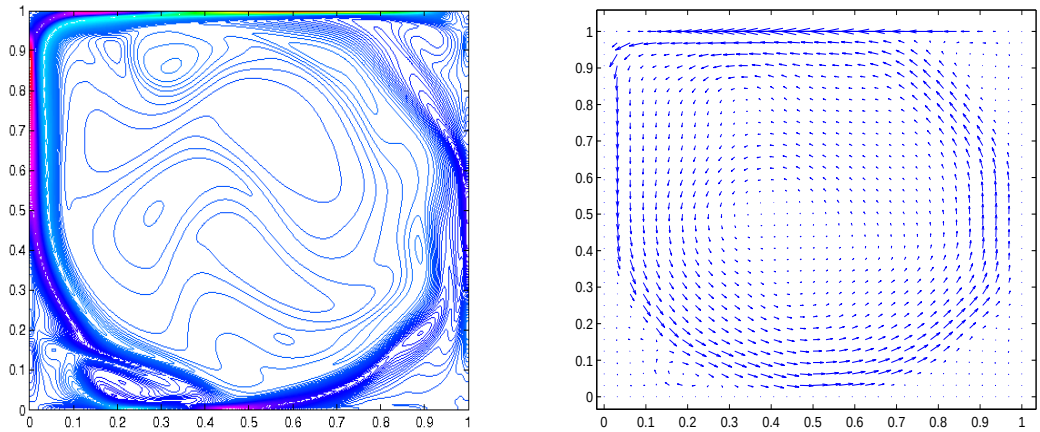

FIGURE 5.15 – Isocontours de la vorticité à $t = 50$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$.

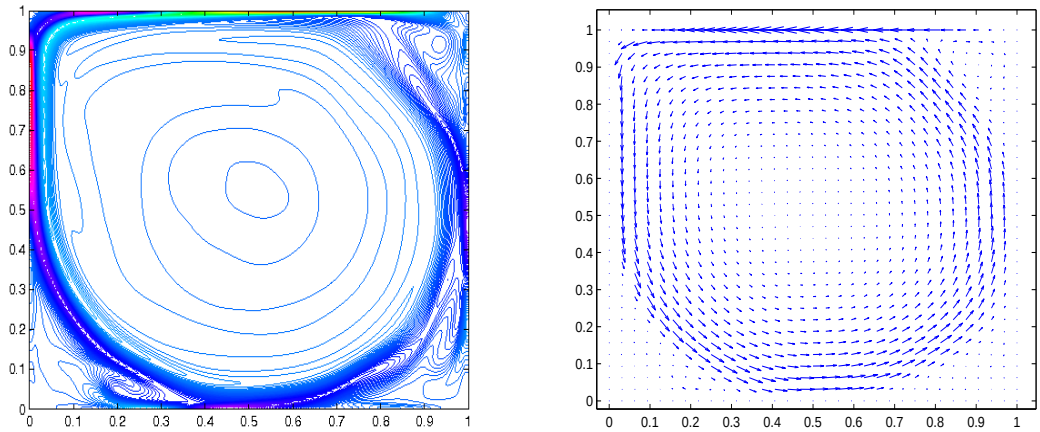

FIGURE 5.16 – Isocontours de la vorticité à $t = 80$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$.

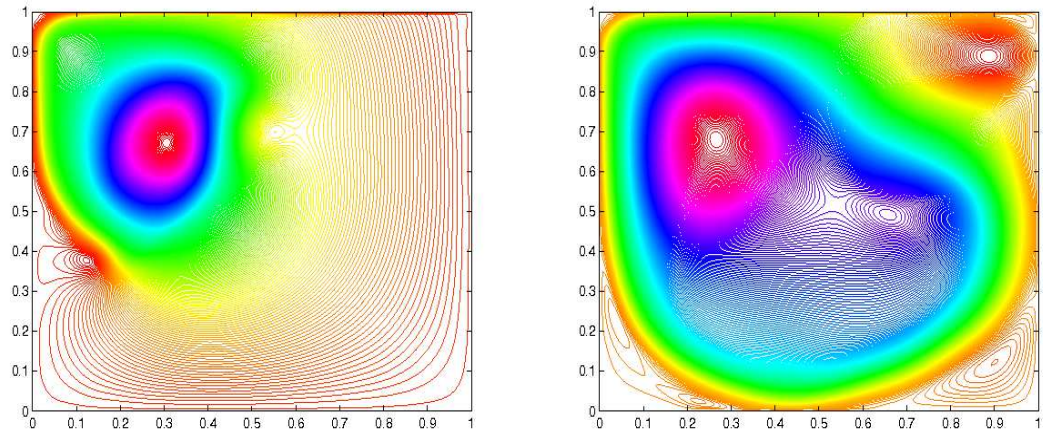

FIGURE 5.17 – Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 10$ (à gauche) et à $t = 30$ (à droite) : $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$.

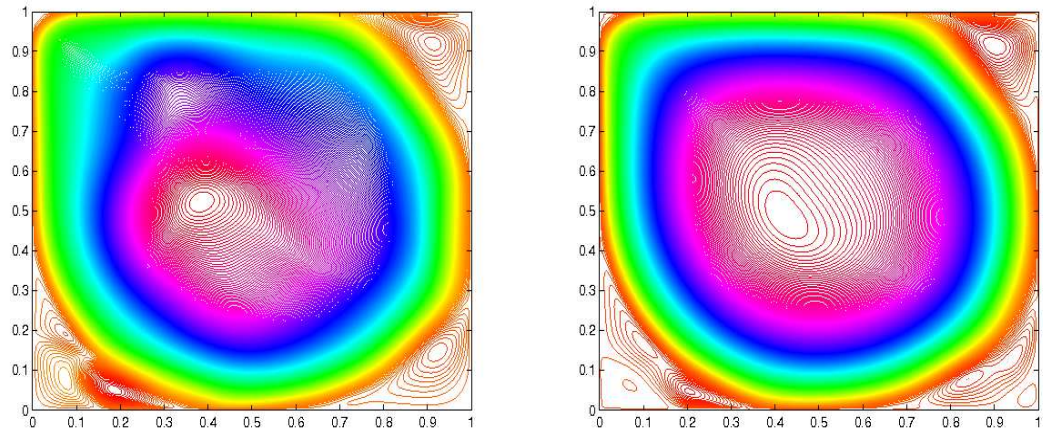

FIGURE 5.18 – Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 50$ (à gauche) et à $t = 80$ (à droite) : $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$.

5.4.5 Reconnection de tubes de vortex en dimension trois (cas périodiques)

Afin de valider la méthode en dimension trois, on s'est intéressé à la simulation d'une paire de tourbillons contrarotatifs soumis à une instabilité de type crow [94]. En coordonnées cylindriques (x, r, θ), les profils choisis pour la vitesse $\mathbf{u}_\theta(r)$ et la vorticité $\omega_x(r)$ sont :

$$\mathbf{u}_\theta(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - \exp(-r^2/r_0^2)\right), \quad \omega_x(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r_0}\exp(-r^2/r_0^2) \tag{5.4.1}$$

Γ_0 est la circulation et r_0 est le rayon du centre de la vorticité.

Pour observer l'instabilité, on perturbe explicitement les centres des tourbillons en introduisant une perturbation à grande longueur d'onde de type Crow. Comme paramètres pour cette perturbation, on prend : l'amplitude de la perturbation, l'angle θ du plan de la perturbation, le déphasage φ et le nombre d'onde longitudinale k, voir figure 5.22.

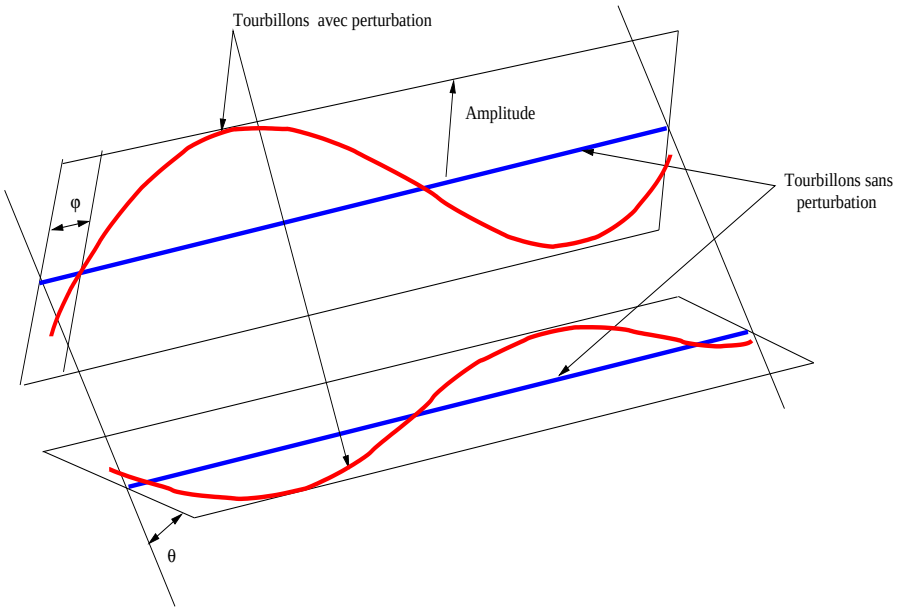

FIGURE 5.19 – Perturbation de type Crow.

Dans le plan transversal, les coordonnées de coeur du tourbillon perturbé sont :

$$y = y_0 + \text{Amplitude}.\sin(kx + \varphi).\cos(\theta)$$

$$z = z_0 + \text{Amplitude}.\cos(kx + \varphi)$$

Le domaine de calcul est $[0, 1]^3$, avec un maillage régulier et uniforme, et les conditions aux limites sont périodiques dans chaque direction. La condition initiale est calculée sur $\Omega = [-Lx/2, Lx/2]\times$

$[-Ly/2, Ly/2] \times [-Lz/2, Lz/2]$, avec : $Lx = 7.5$, $Ly = 6$, $Lz = 5$, $\Gamma_0 = 1$ et $r_0 = 0.2$. Les coordonnées du centre sont $(y_0, z_0) = (2.5, 2.5)$ pour le premier tourbillon et, $(y_0, z_0) = (3.5, 2.5)$ pour le deuxième tourbillon. La viscosité ν est fixée à : $\nu = 1/2500$. Les paramètres de la perturbation sont : Amplitude $= 0.4$, $k = 1$, $\varphi = 0$ et $\theta = \pi/4$.

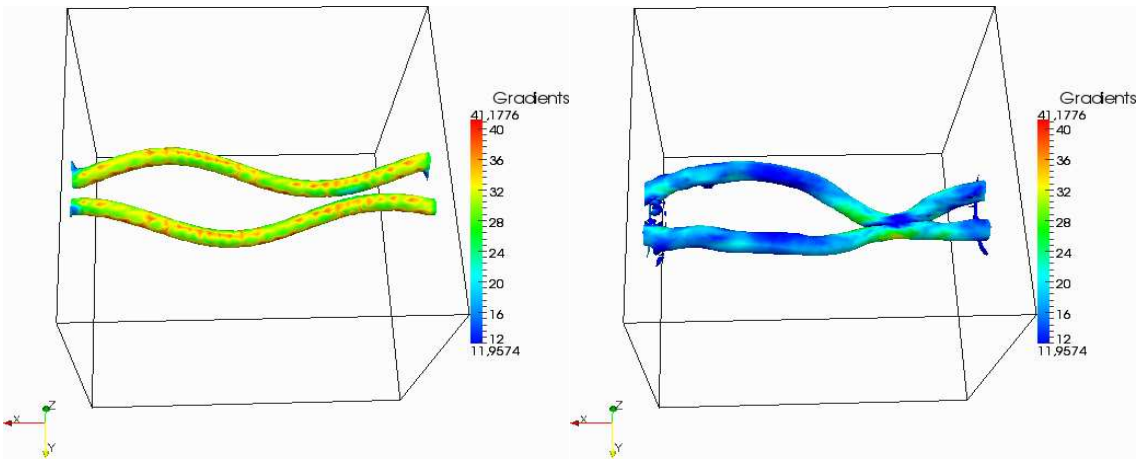

FIGURE 5.20 – Isosurface du module de la vorticité $|\omega| = 26$ à $t = 0$ (à gauche) et à $t = 0.36$ (à droite).

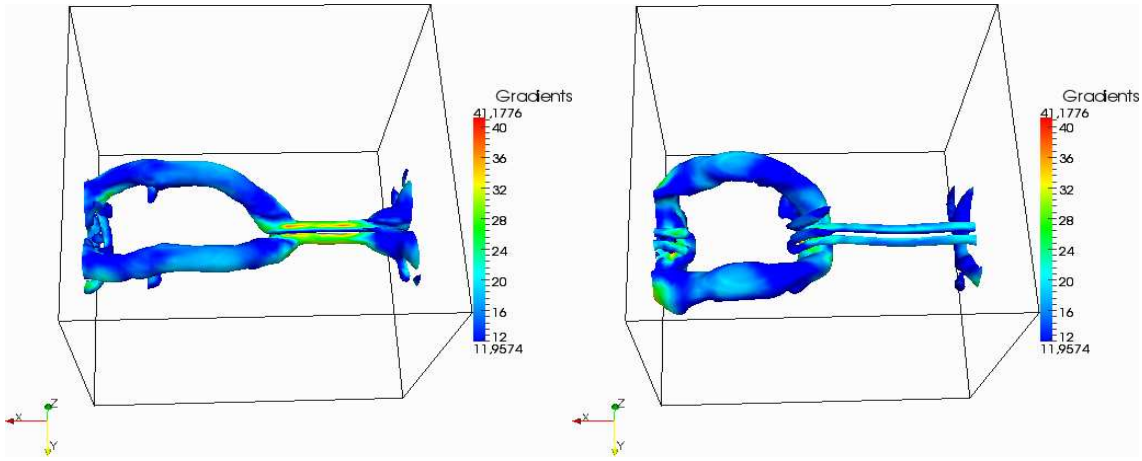

FIGURE 5.21 – Isosurface du module de la vorticité $|\omega| = 26$ à $t = 0.76$ (à gauche) et à $t = 1.12$ (à droite).

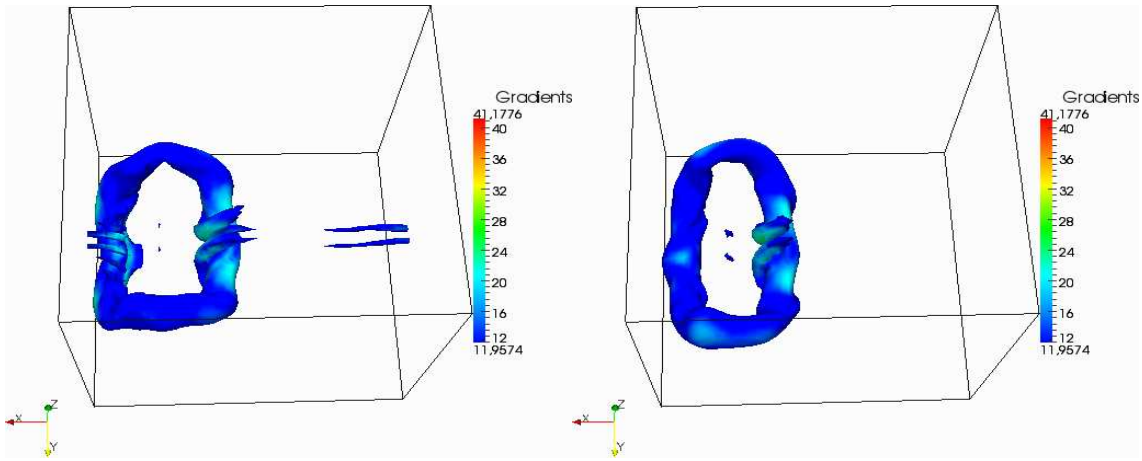

FIGURE 5.22 – Isosurface du module de la vorticité $|\omega| = 26$ à $t = 1.48$ (à gauche) et à $t = 1.7$ (à droite).

5.5 Méthode variationnelle multi-échelle

On étend dans cette partie la méthode variationnelle multi-échelle décrite à la section 3.3.2 aux équations de Navier-Stokes incompressibles. L'objectif visé est de fournir une discrétisation muli-échelle en fonctions d'échelle et ondelettes des équations de Navier-Stokes. Cependant, on ne va pas introduire des modèles de turbulence comme le font J.R. Hughes et al. [66, 67].

Dans les algorithmes de résolution de Navier-Stokes précédents, comme le terme non linéaire $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ est traité en différences finies explicites, à chaque pas de temps les calculs à faire sont la résolution d'une équation de la chaleur et la projection sur l'espace de fonctions à divergence nulle. Pour la discrétisation multi-échelle de l'équation de la chaleur, il suffit d'appliquer les techniques décrites à la section 3.3.2 composante par composante. La seule difficulté est alors le calcul de $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ ou $\mathbb{P}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]$ en formulation multi-échelle, c'est ce qu'on va décrire ci-dessous.

Soit $\{\mathbf{V}_j^{div}\}$ une analyse multirésolution de l'espace $\vec{X}$ de fonctions à divergence nulle, et de projecteurs multi-échelle $\mathbf{P}_j^{div}$. Pour $j_0\in\mathbb{N}^*$, toute fonction $\mathbf{u}\in\vec{X}$ peut être décomposée en une approximation grossière $\mathbf{P}_{j_0}^{div}(\mathbf{u})$ et la somme de tous ses détails :

$$\mathbf{u}=\mathbf{P}_{j_0}^{div}(\mathbf{u})+\sum_{j\geq j_0}\mathbf{Q}_j^{div}(\mathbf{u}),\quad \text{avec}\quad \mathbf{Q}_j^{div}(\mathbf{u})=\mathbf{P}_{j+1}^{div}(\mathbf{u})-\mathbf{P}_j^{div}(\mathbf{u}) \tag{5.5.1}$$

On note :

$$\mathbf{u}^c=\mathbf{P}_{j_0}^{div}(\mathbf{u})\quad\text{et}\quad \mathbf{u}^f=\sum_{j\geq j_0}\mathbf{Q}_j^{div}(\mathbf{u})$$

Par définition, $\mathbf{P}_j^{div}$ est le projecteur orthogonal sur les fonctions d'échelle à divergence nulle :

$$\mathbf{P}_j^{div}(\mathbf{u})=\sum_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div},\quad \mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n),$$

de même $\sum_{j\geq j_0}\mathbf{Q}_j^{div}$ est le projecteur sur toutes les ondelettes à l'échelle $\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_n)$ telle que : $j_i\geq j$ pour $0\leq i\leq n$. On précise qu'en dimension n, même dans le cas anisotrope si $j_0\neq 0$, il existe $(n-1)(2^n-1)$ ondelettes à divergence nulle différentes :

$$\sum_{j\geq j_0}\mathbf{Q}_j^{div}(\mathbf{u})=\sum_{\ell,\mathbf{j},\mathbf{k}}d_{\ell,\mathbf{j},\mathbf{k}}\Psi_{\ell,\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div},$$

ℓ est l'indice sur le type d'ondelette.

Pour calculer $\mathbf{u}_{\text{div}}=\mathbb{P}(\mathbf{v})$, pour un $\mathbf{v}$ quelconque, on teste $\mathbf{v}$ d'une part contre toutes les fonctions d'échelle $\Phi_{j_0,\mathbf{k}}^{div}$ et d'autre part contre toutes les ondelettes $\Psi_{\ell,\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}$, cela permet l'obtention de deux systèmes d'équations à résoudre :

$$\langle\mathbf{v}/\Phi_{j_0,\mathbf{k}}^{div}\rangle=\langle\mathbf{u}_{\text{div}}^c/\Phi_{j_0,\mathbf{k}}^{div}\rangle+\langle\mathbf{u}_{\text{div}}^f/\Phi_{j_0,\mathbf{k}}^{div}\rangle \tag{5.5.2}$$

$$\langle\mathbf{v}/\Psi_{\ell,\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}\rangle=\langle\mathbf{u}_{\text{div}}^c/\Psi_{\ell,\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}\rangle+\langle\mathbf{u}_{\text{div}}^f/\Psi_{\ell,\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div}\rangle \tag{5.5.3}$$

On résout les équations $(5.5.2)$ et $5.5.3$ par les techniques habituelles en utilisant le complément de Schur comme à la section 3.3.2. On fait de même pour $\mathbb{P}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]$.

Pour calculer la décomposition de Helmholtz-Hodge, on a vu en section 3.4 qu'on doit inverser la matrice de Gram de la base d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul. À une résolution j donnée, l'intérêt de cette méthode est alors dans le fait qu'on résout deux systèmes couplés de petite taille (la taille dépend de $j_0 < j$), au lieu de résoudre le grand système donné en section 3.4.

Comme $\mathbf{u}^f$ est dans un espace de dimension infinie, dans la résolution de Navier-Stokes en pratique, on peut améliorer cette méthode en ajoutant aussi des modèle de turbulence [66, 67].

Exemple 5.5.1
Dans cet exemple, on trace le spectre d'énergie et la décroissance de cette énergie en fonction du temps. Les paramètres de la simulation sont ceux de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Le profil de la vitesse initiale est donné par :

$$\mathbf{u}_1(x,y) = \frac{U_0}{2}(\delta_0 + \tanh \frac{P_0(1-\sqrt{x^2+y^2})}{2R_0} \quad \textit{et} \quad \mathbf{u}_2 = 0$$

Le domaine de calcul est $[0,2] \times [0,1]$, *avec* $U_0 = 0.1035$, $R_0 = 0.25$, $P_0 = 30$ *et* $\delta_0 = 1$. *Le pas de temps choisi est* $\delta t = 0.01$ *et la viscosité* $\nu = 5.10^{-5}$. *Les algorithmes de calcul utilisent les générateurs biorthogonaux B-Spline (3,3) sur une résolution maximale* $J = 9$.

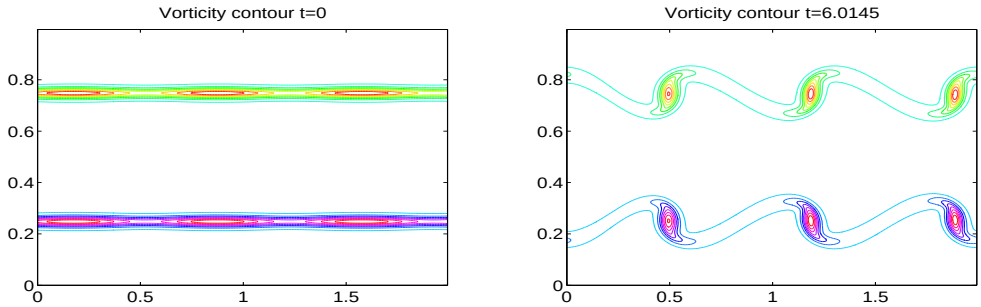

FIGURE 5.23 – Isocontours de la vorticité à $t = 0$ (à gauche) et à $t = 6$ (à droite) : pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz 2D avec $\nu = 5.10^{-5}$.

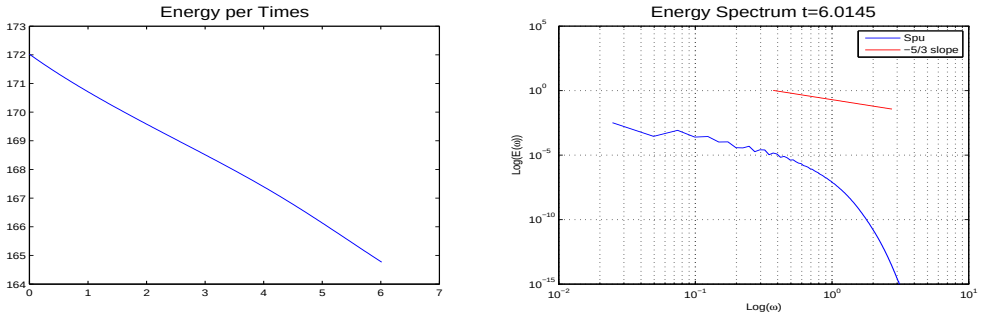

FIGURE 5.24 – Évolution de la norme L^2 (à gauche) et spectre d'énergie à $t = 6$ (à droite) : pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz 2D avec $\nu = 5.10^{-5}$.

Cinquième partie

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans ce travail de thèse, on s'est concentré sur la définition et la mise en oeuvre de bases d'ondelettes pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles avec des conditions aux limites "physiques". On sait que dans le cas périodique, les méthodes spectrales basées sur Fourier fournissent des algorithmes numériques optimaux. Cependant, ces méthodes sont très défavorables pour la gestion des conditions aux limites non périodiques. À l'opposé, les méthodes par éléments finis ou différences finies intègrent facilement des conditions aux limites, mais les algorithmes sont plus coûteux.

Ces dernières décennies, l'utilisation des bases d'ondelettes dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles s'est beaucoup développée. Les bases d'ondelettes, par leur caractère de double localisation temps-fréquence, permettent d'avoir des discrétisations creuses et adaptatives pour une vaste classe d'opérateurs différentiels et intégro-différentiels, et fournissent également des préconditionneurs diagonaux optimaux pour les opérateurs elliptiques. La résolution de problèmes avec conditions aux limites se fait en général en utilisant les ondelettes de bords. Pour les équations de Navier-Stokes, ces techniques sont encore au niveau de la faisabilité.

Dans ce travail de thèse, on a repris en détail la construction d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ dans le cas anisotrope. En se servant de leur structure biorthogonale on a su retrouver, à partir des bases biorthogonales correspondantes, les algorithmes rapides associés qui sont connus dans l'analyse des champs à divergence nulle ou à rotationnel nul. L'utilisation de ces algorithmes a permis d'établir des estimations classiques en approximation non linéaire sur base d'ondelettes à divergence nulle.

À partir des analyses multirésolution sur l'intervalle, on a construit des nouvelles ondelettes vecteurs à divergence nulle ou à rotationnel nul sur l'hypercube $[0,1]^n$ adaptées à la prise en compte de conditions aux limites non périodiques. Ces nouvelles bases d'ondelettes à divergence nulle permettent d'analyser des champs turbulents incompressibles et on a mis en oeuvre des algorithmes rapides associés. Le caractère adaptatif de ces bases a été étudié dans le contexte de l'approximation non linéaire par ondelettes à divergence nulle. La définition d'un nouvel algorithme performant pour calculer la décomposition de Helmholtz-Hodge a permis d'étendre le champ d'applications que peut couvrir l'utilisation de ces nouvelles ondelettes.

La résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles en ondelettes par la méthode de projection est plus facile en périodique, son extension au cas général pose problème à cause des effets de bords. L'utilisation d'ondelettes à divergence nulle de bords dans le calcul de la décomposition de Helmholtz-Hodge a permis de contourner cette difficulté et de définir de nouvelles méthodes de résolution. En simplifiant la méthode de projection et la méthode de Gauge, on a ainsi défini deux nouveaux schémas de résolution qui gardent la même complexité numérique par rapport au cas périodique. La validation de ces schémas sur des cas test bien connus a donné des résultats convaincants. Pour ce type de simulation, les ondelettes offrent de représentations creuses pour les fonctions et les matrices d'opérateurs, ce qui réduit beaucoup le nombre de degrés de liberté. Cependant, le calcul effectif du terme non linéaire $\mathbb{P}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]$ en ondelettes pose problème. On peut alors envisager de faire des simulations avec des résolutions plus élevées, mais dans ce cas, les méthodes doivent être optimisées.

Comme toutes les méthodes d'ondelettes, les méthodes présentées dans ce travail n'utilisent que des géométries simples comme $[0,1]^n$. C'est le principal inconvénient des bases d'ondelettes qui sont construites par produit tensoriel. On retrouve les mêmes limitations que pour les méthodes spectrales. Pour résoudre des problèmes dans des géométries complexes, les approches les plus connues sont les techniques de pénalisation du volume [75, 104] et celles d'extension du domaine [3].

Sachant que la résolution du Laplacien ne poserait pas de problème, une première perspective serait l'étude du calcul de projecteur $\mathbb{P}$ par ondelettes à divergence nulle, dans le cas d'une pénalisation du volume. Cela est envisageable vu que la matrice de masse des ondelettes à divergence nulle 2D ou celle des ondelettes à rotationnel nul en dimension supérieures, correspondent à la matrice standard d'un Laplacien scalaire.

L'utilisation des ondelettes de bords s'est avérée très efficace pour les opérateurs elliptiques dans des méthodes de décomposition de domaine conforme [90] et non conforme de type mortar [5]. Comme les propriétés des opérateurs de divergence et du rotationnel sont indépendantes du repère choisi, la technique de décomposition de domaine est ainsi une piste prometteuse. Pour construire les ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur les sous-domaines, on peut étudier les difféomorphismes locaux qui peuvent être utilisés pour conserver ces propriétés et avoir les recollements adéquats sur les facettes.

L'idée principale des méthodes multi-échelles est de décomposer la solution selon ses composantes hautes fréquences et basses fréquences. Les bases d'ondelettes sont très performantes pour ce genre de décomposition. Les algorithmes de discrétisations variationnelles multi-échelles peuvent donc s'appliquer facilement sur bases d'ondelettes. Dans la simulation des équations de Navier-Stokes, on peut envisager de faire une simulation des grandes échelles en suivant l'approche de J.R. Hughes et al. [66, 68, 69]. Une prochaine étape serait alors l'étude et la définition des mo-

dèles de sous-maille avec des conditions aux limites non périodiques, sur bases d'ondelettes. Dans cette direction, un algorithme de simulation directe à été introduit au niveau du dernier chapitre. L'intérêt de cet algorithme c'est qu'on peut facilement le paralléliser comme dans les méthodes classiques.

La décomposition de Helmholtz-Hodge intervient dans de nombreux domaines : électromagnétisme, visualisation scientifique, médecine, etc. Ainsi, les ondelettes à divergence nulle vérifiant des conditions aux limites pourraient trouver naturellement d'autres champs d'applications. On peut citer par exemple leur application dans un travail de E. Deriaz et J.L. Starck récent pour la reconstruction des cartes du ciel dans des problèmes d'astrophysique. Ces ondelettes permettent de reconstruire les différents modes en "weak lensing" en réduisant les effets de bords.

Table des figures

1.1 Fonction d'échelle (à gauche) et ondelette (à droite) de Haar. Échelle $j = 0$. 26
1.2 Fonction d'échelle (à gauche) et ondelette (à droite) de Meyer [91]. Échelle $j = 0$. 27
1.3 Fonction d'échelle et ondelette B-Spline biorthogonales de degré 1 (première ligne) et leurs biorthogonales de plus court support (deuxième ligne). 29
1.4 Première ligne, isosurface de la fonction d'échelle $\Phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$ (à gauche) et celle de l'ondelette $\Psi^1(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ (à droite). Deuxième ligne, isosurface de l'ondelette $\Psi^2(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$ (à gauche) et celle de l'ondelette $\Psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$ (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies de reproduction polynomiale $r = 3$. Le cas anisotrope utilise une seule ondelette : $\Psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$. 34
1.5 Graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{|\cos(2\pi x)|}$ échantillonnée sur $N = 8192$ points (à gauche), ses coefficients d'ondelettes dans la base de Haar (à droite) : la position x en abscisses et la résolution j en ordonnées. 43
1.6 Courbe d'erreur ℓ^2 en fonction du nombre N de coefficients d'ondelettes retenus (à gauche) : l'échelle loglog. Fonction reconstituée à partir des 120 plus gros coefficients (à droite). Cas de la base de Haar. 44
1.7 Graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{|\cos(2\pi x)|}$ échantillonnée sur $M = 8192$ points (à gauche), ses coefficients d'ondelettes dans la base de Daubechies $r = 3$ (à droite) : position x en abscisse et résolution j en ordonnée. 44
1.8 Courbe d'erreur ℓ^2 en fonction du nombre N de coefficients d'ondelettes retenus (à gauche) : l'échelle loglog. Fonction reconstituée à partir des 60 plus gros coefficients (à droite). Cas de la base de Daubechies $r = 3$. 45
1.9 Champs de vecteurs de la fonction d'échelle à divergence nulle $\mathbf{rot}\ [\varphi^1 \otimes \varphi^1]$ (à gauche) et de l'ondelette associée $\mathbf{rot}\ [\psi^1 \otimes \psi^1]$ (à droite), construites à partir des splines biorthogonales à trois moments nuls. 56
1.10 Champs de vecteurs de la fonction d'échelle à rotationnel nul $\nabla[\varphi^1 \otimes \varphi^1]$ (à gauche) et de l'ondelette associée $\nabla[\psi^1 \otimes \psi^1]$ (à droite), construites à partir des splines biorthogonales à trois moments nuls. 57
1.11 Champ de vecteurs périodique à divergence turbulent (à droite), champ scalaire de vorticité suréchantillonné associé (à gauche). La résolution est $J = 10$. 63

1.12 Coefficients de la décomposition en ondelettes à divergence normalisés (à gauche) et courbe d'erreur d'approximation non linéaire (à droite). 63
1.13 Erreur à l'échelle logarithmique de la projection de $\mathbf{rot}[\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)]$ sur $\mathbf{V}_{\mathbf{j}}^{div}$ en fonction de J. Avec ψ^1 générateur orthogonal de Daubechies $r = 5$. . . . 64

2.1 Fonction d'échelle intérieure ($1^{\text{ère}}$ ligne à gauche) et les trois fonctions de bord en 0. Cas du générateur orthogonal de Daubechies à trois moments nuls. 73
2.2 Fonctions d'échelle biorthogonales, cas des générateurs B-Spline biorthogonaux à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$. 74
2.3 Fonctions d'échelle de bord biorthogonales en 0. Cas des générateurs B-Spline biorthogonaux à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$. 74
2.4 Ondelette intérieure et les trois ondelettes de bord en 0. Cas du générateur orthogonal de Daubechies $(r = 3)$ associé aux fonctions d'échelle de la figure Fig 2.1. . 81
2.5 Ondelettes biorthogonales associées aux générateurs B-Spline à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$. 81
2.6 Ondelettes de bord biorthogonales en 0 associées aux générateurs B-Spline à trois moments nuls : $r = \tilde{r} = 3$. 82
2.7 Fonctions d'échelle de bord en 1 ($1^{\text{ère}}$ colonne) et ondelettes de bord en 1 ($2^{\text{ème}}$ colonne), en allant de la gauche vers la droite. Cas de générateur orthogonal de Daubechies $(r = 3)$. 86
2.8 Fonctions d'échelle de bord avec condition de Dirichlet homogène en 0 (1ère ligne) et en 1 (2ème ligne). Cas du générateur orthogonal de Daubechies à trois moments nuls $(r = 3)$. 88
2.9 Ondelettes de bord avec condition de Dirichlet homogène en 0 (1ère colonne) et en 1 (2ème colonne). Cas du générateur orthogonal de Daubechies à trois moments nuls $(r = 3)$. 89
2.10 Fonctions d'échelle φ^0 et $\tilde{\varphi}^0$ (première colonne) et ondelettes ψ^0 et $\tilde{\psi}^0$ (deuxième colonne). Cas des générateurs biorthogonaux B-Spline $r = 2$ et $\tilde{r} = 4$. 97
2.11 Fonctions d'échelle du bord gauche $\Phi_\ell^{0\flat}$ (première colonne) et fonctions d'échelle de bord biorthogonales $\tilde{\Phi}_\ell^{0\flat}$ (deuxième colonne). 98
2.12 Ondelettes du bord gauche $\Psi_\ell^{0\flat}$ (première colonne) et ondelettes de bord biorthogonales $\tilde{\Psi}_\ell^{0\flat}$ (deuxième colonne). 99
2.13 Structure des matrices de changement de base A^1 (à gauche) et B^0 (à droite) : pour $j = 6$. 100
2.14 Structure des filtres d'ondelettes G_j^0 (à gauche) et $\tilde{G}_j^0$ (à droite) : pour $j = 6$. 100
2.15 Champ de vecteurs de $\mathbf{rot}[\Phi_1^{1\flat} \otimes \Phi_1^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\mathbf{rot}[\Phi_2^{1\flat} \otimes \Phi_2^{1\flat}]$ à droite. 109
2.16 Champ de vecteurs de $\nabla[\Phi_1^{1\flat} \otimes \Phi_1^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\nabla[\Phi_2^{1\flat} \otimes \Phi_2^{1\flat}]$ à droite. . . 109
2.17 Champ de vecteurs de $\mathbf{rot}[\Psi_0^{1\flat} \otimes \Psi_0^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\mathbf{rot}[\Psi_1^{1\flat} \otimes \Psi_1^{1\flat}]$ à droite. 110
2.18 Champ de vecteurs de $\nabla[\Psi_0^{1\flat} \otimes \Psi_0^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\nabla[\Psi_1^{1\flat} \otimes \Phi_1^{1\flat}]$ à droite. . 110
2.19 Champ de vecteurs de $\mathbf{rot}[\Psi_2^{1\flat} \otimes \Psi_2^{1\flat}]$ à gauche et celui de $\nabla[\Psi_2^{1\flat} \otimes \Psi_2^{1\flat}]$ à droite. . 111

2.20 Champ de vecteurs test (à gauche), coefficients d'échelle à divergence nulle dans $\mathbf{V}_8^{div}$ (à droite). 114
2.21 Carte des coefficients d'échelle et d'ondelettes à divergence nulle contenus dans $\mathbf{V}_8^{div}$ suivant la décomposition donnée par la proposition 2.3.5 avec $j_{min} = 3$. . . . 115
2.22 Erreur d'approximation non linéaire en fonction des plus gros coefficients d'ondelettes à divergence nulle retenus, sur $\mathbf{u}_1$ (à gauche) et sur $\mathbf{u}_2$ (à droite) : échelle logarithmique. 117
2.23 Résidus de la solution reconstruite avec 22% des coefficients d'ondelettes à divergence nulle : sur $\mathbf{u}_1$ à gauche et sur $\mathbf{u}_2$ à droite. Au total on a 256^2 coefficients. . . 117

3.1 $f(x) = \sin(4\pi x)$ échantillonné sur 2^{13} points (à gauche), sa projection dans V_{13} (au centre) et l'erreur des valeurs aux points de la projection. Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$ (en périodique). 123
3.2 $f(x) = \sin(2\pi x)\sin(50x)$ échantillonné sur 2^{13} points (à gauche), sa projection dans V_{13} (au centre) et l'erreur des valeurs aux points de la projection. Cas des générateurs biorthogonaux B-Splines $r = \tilde{r} = 3$ (sans conditions aux limites). . . . 124
3.3 Erreur sur les valeurs aux points de la projection de $f(x) = \sin(2\pi x)\sin(50x)$ dans V_{13} (à gauche) et l'erreur d'interpolation dans V_8 (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$ (Dirichlet homogène). 124
3.4 Matrices de raideur des fonctions d'échelle (à gauche) et celle des ondelettes (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$, avec conditions aux limites de Dirichlet homogène. 130
3.5 Matrice de masse des fonctions d'échelle à divergence nulle (à gauche) et celle des ondelettes (à droite). Cas du générateur orthogonal de Daubechies $r = 3$, $\mathbf{j} = (6, 6)$ et $j_{min} = 4$. 131
3.6 Erreur ℓ^2 en fonction du pas de temps. La courbe en pointillé correspond à la dimension trois. 134
3.7 Erreur relative ℓ^2 en fonction du pourcentage des coefficients non nuls de la matrice de $\mathcal{L}$, méthode standard (à gauche), erreur relative ℓ^2 en fonction de j_0 dans la méthode multi-échelle : $\epsilon = 10^{-5} \max |\mathcal{A}|$. Échelle logarithmique pour les erreurs. 136
3.8 $\mathbf{u}^c$ en haut (à gauche), $\mathbf{u}^f$ (à droite) et le résidu en bas : $j = 10$ et $j_0 = 6$. 137
3.9 Solution $\mathbf{u}^c$ à $t = 0.5$ dans V_{j_0} (à gauche) et sa reconstruction par transformée en ondelettes inverse dans V_j (à droite) où $j_0 = 6$ et $j = 10$. Condition initiale bruit blanc, $f = 0$, $\nu = 1/8\pi^2$ et $\delta t = t/100$. 139
3.10 Les solutions $\mathbf{u}^{fc}$ (à gauche) et $\mathbf{u}^{cf}$ (à droite) à $t = 0.5$. Condition initiale bruit blanc, $f = 0$, $\nu = 1/8\pi^2$ et $\delta t = t/100$. 139
3.11 Solutions $\mathbf{u}^f$ à $t = 0.5$ (à gauche), résidu de l'erreur entre u^c et la solution de référence dans V_j (à droite). Condition initiale bruit blanc, $f = 0$, $\nu = 1/8\pi^2$ et $\delta t = t/100$. 140
3.12 Vorticité $\mathbf{rot}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]$ (à gauche) et la pression p (à droite) à une constante près : $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{div}} + \mathbf{u}_{\text{rot}}$ avec $\nabla\, p = \mathbf{u}_{\text{rot}}$. 151

3.13 Erreur relative ℓ^2 en échelle logarithmique de la projection 3D (à gauche), isosurface $81.6686/2 = \|\mathbf{rot}(\mathbf{u})\|/2$ de la vorticité $\mathbf{rot}[\mathbf{u}]$ du champ initial $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}$, avec $\mathbf{v}$ bruit blanc aléatoire (à droite). 151
3.14 Isosurface $45.8139/2 = \|\mathbf{rot}(\mathbf{u}_{\mathrm{div}})\|/2$ de la vorticité $\mathbf{rot}[\mathbf{u}_{\mathrm{div}}]$ (à gauche), isosurface $68.5807/2 = \|\mathbf{rot}(\mathbf{u}_{\mathrm{rot}})\|/2$ de la vorticité $\mathbf{rot}[\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}]$ (à droite). 152
3.15 Somme des coefficients $[d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} + d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]$ (à gauche) et champ de vecteurs $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ (à droite). 152
3.16 Champ de vecteurs $\mathbf{u}_{\mathrm{div}}$ (à gauche) et champ de vecteurs $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ (à droite). 153
3.17 Erreur de la projection à divergence nulle sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, échelle logarithmique ($\log_2$). La courbe sur $\mathbf{u}$ est au dessus de celle sur $\mathbf{v}$. 153
3.18 Erreur relative ℓ^2 sur $\mathbf{u}$ dans $\vec{\mathbf{V}}_j$ en fonction de j (à gauche) et celle sur $\nabla\mathbf{u}$ (à droite), échelle logarithmique : $\log_2$. 158

5.1 Erreur L^2 à gauche et H^1 à droite, entre la solution exacte et la solution du schéma $(5.3.2)$. Échelle logarithmique. 179
5.2 Sens de rotation des trois tourbillons (à gauche) et isocontours de la vorticité à $t = 0$ (à droite). 180
5.3 Isocontours de la vorticité à $t = 10$ (à gauche) et $t = 20$ (à droite). 181
5.4 Isocontours de la vorticité à $t = 30$ (à gauche) et $t = 40$ (à droite). 181
5.5 Évolution du pourcentage des coefficients d'ondelettes à divergence nulle retenus en fonction du temps. Au total on a 2^{16}. 182
5.6 État statistique de convergence dans une cavité entraînée. 183
5.7 Profils de la vitesse verticale au centre (à gauche) et celui de la vitesse horizontale (à droite) : méthode de projection (MP) avec $\nu = 1/1000$, $\mathbf{u}_1 = 1$ et $J = 7$. . . . 184
5.8 Isocontours de la vorticité à $t = 20$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/500$ et $J = 7$. 185
5.9 Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 20$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/500$ et $J = 7$. 185
5.10 Isocontours de la vorticité à $t = 30$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/2000$ et $J = 7$. 186
5.11 Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 30$: à gauche méthode de projection (MP) et à droite méthode de Gauge (MG), $\nu = 1/2000$ et $J = 7$. 186
5.12 Isocontours de la vorticité à $t = 10$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$. 187
5.13 Isocontours de la vorticité à $t = 20$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$. 188
5.14 Isocontours de la vorticité à $t = 30$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$. 188

5.15 Isocontours de la vorticité à $t = 50$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$. 189
5.16 Isocontours de la vorticité à $t = 80$ (à gauche), champ de vecteurs de la vitesse $\mathbf{u}$ (à droite) obtenus par le schéma $(5.3.8)$: $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$. 189
5.17 Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 10$ (à gauche) et à $t = 30$ (à droite) : $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$. 190
5.18 Isocontours des coefficients d'échelle à divergence nulle à $t = 50$ (à gauche) et à $t = 80$ (à droite) : $\nu = 10^{-4}$ et $J = 8$. 190
5.19 Perturbation de type Crow. 191
5.20 Isosurface du module de la vorticité $|\omega| = 26$ à $t = 0$ (à gauche) et à $t = 0.36$ (à droite). 192
5.21 Isosurface du module de la vorticité $|\omega| = 26$ à $t = 0.76$ (à gauche) et à $t = 1.12$ (à droite). 193
5.22 Isosurface du module de la vorticité $|\omega| = 26$ à $t = 1.48$ (à gauche) et à $t = 1.7$ (à droite). 193
5.23 Isocontours de la vorticité à $t = 0$ (à gauche) et à $t = 6$ (à droite) : pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz 2D avec $\nu = 5.10^{-5}$. 195
5.24 Évolution de la norme L^2 (à gauche) et spectre d'énergie à $t = 6$ (à droite) : pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz 2D avec $\nu = 5.10^{-5}$. 196

Bibliographie

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic press, 1978.

[2] L. Andersson, N. Hall, B. Jawerth, and G. Peters. Wavelets on closed subsets of the real line. *Recents Advances in Wavelets Analysis, (L.L. Schumaker and G. Webb eds)*, Academic Press :1–61, 1993.

[3] J. Baccou and J. Liandrat. Definition and analysis of a wavelet/fictitious domain solver for the 2D-heat equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16(6) :1–27, 2006.

[4] G. Battle and P. Federbush. Divergence-free vector wavelets. *Michigan Math. Journ*, 40 :181– 195, 1993.

[5] S. Bertoluzza, S. Falletta, and V. Perrier. The Mortar Wavelet Method : Implementation and Numerical Tests. Rapport de recherche 1308, Istituto di Analisi Numerica - CNR, Pavie, Italie, 2002.

[6] G. Beylkin. On the representation of operator in bases of compactly supported wavelets. *SIAM J. Numer. Anal*, 6(6) :1716–1740, December 1992.

[7] M.S. Birman and M.Z. Solomyak. L^2-theory of the Maxwell operator in arbitrary domains. *Russian Math. Surveys*, 42(6) :75–96, 1987.

[8] G. Bourdaud. Ondelettes et espaces de Besov. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 11(3) :477–512, 1995.

[9] F. Brezzi. Interacting with the subgrid world. *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, 420, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[10] D. L. Brown, R. Cortez, and M. L. Minion. Accurate Projection Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phy.*, 168 :464–499, 2001.

[11] M. Cannone. *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes* . Diderot Editeur, Paris, 1995.

[12] C. G. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods : Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2007.

[13] P. Caussignac. A gauge finite element method for the 2D Navier–Stokes problem. *Appl. Num. Maths.*, 58(10) :1413–1433, 2008.

[14] P. Charton. *Produits de matrices rapides en bases d'ondelettes : application à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université Paris XIII, Janvier 1996.

[15] P. Charton and V. Perrier. A pseudo wavelet scheme for the two-dimensional navier-stokes equations. *Math. Appli. Comput*, 15 :139–160, 1996.

[16] A. Chertock and D. Levy. On wavelet-based numerical homogenization. *SIAM Multiscale Model. Simul.*, 3(1) :65–88, 2004.

[17] G. Chiavassa and J. Liandrat. On the Effective Construction of Compactly Supported Wavelets Satisfying Homogeneous Boundary Conditions on the Interval. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 4, 1997.

[18] A.J. Chorin. Numerical simulation of the navier-stokes equation. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.

[19] A.J. Chorin and J.E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, New York NY, 1993.

[20] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. ISBN 2-226-68893-1. Masson, 1982.

[21] Z. Cieselski and T. Figiel. Spline bases in classical function spaces on compact manifolds. *part II, Studia Math.*, LXXVCI :95–136, 1983.

[22] A. Cohen. Nonlinear wavelet approximation and image compression. *Approximation Theory VIII, C.K. Chui and L.L. Schumaker eds., World Scientific*, 2 :17–38, 1995.

[23] A. Cohen. *Numerical Analysis of Wavelet Methods*. Elsevier ISBN :0-444-51124-5, 2003.

[24] A. Cohen, W. Dahmen, and R. Devore. Adaptive Wavelet Methods for Elliptic Operator Equations - Convergence Rates. *Math. Comp*, 70 :27–75, 1999.

[25] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appli. Maths*, 45 :485–560, 1992.

[26] A. Cohen, I. Daubechies, and P. Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transform. *Aplli. Comput. Harmon. Anal*, 1 :54–81, 1993.

[27] A. Cohen and R. Masson. Wavelet Methods for Second Order Elliptic Problems, Preconditioning and Adaptivity. *SIAM J. Sci. Comp*, 21 :1006–1026, 1997.

[28] A. Cohen and R. Masson. Wavelet Adaptive Method for Second Order Elliptic Problems Boundary Conditions and Domain Decomposition. *Numer. Maths.*, 86 :193–238, 2000.

[29] P. Constantin and C. Foias. *Navier-Stokes Equations*. Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago Press, 1989.

[30] G.H. Cottet and P.D. Koumoutsakos. *Vortex methods : theory and practice*. Cambridge University Press, 2001.

[31] T. Coulhon and D. Lamberton. Quelques Remarques Sur La Regularite L^p Du Semi-Groupe De Stokes. *Comm. in Partial Diff. Eqs*, 17(1) :287–304, 1992.

[32] W. Dahmen, A. Kunoth, and K. Urban. A wavelet Galerkin method for the Stokes equations. *Computing*, 56(3) :259–301, 1996.

[33] W. Dahmen, A. Kunoth, and K. Urban. Biorthogonal Spline-wavelets on the interval-stability and moment conditions. *Appli. Comput. Harmon. Anal*, 6 :132–196, 1999.

[34] W. Dahmen and C.A Micchelli. Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets. *SIAM J. Numer. Anal*, 30 :507–537, April 1993.

[35] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. on Pure and Appli. Maths.*, 41 :909–996, 1988.

[36] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Number 61 in CBMS/NSF Series in Applied Math. SIAM, 1992.

[37] I. Daubechies, I. Guskov, P. Schröder, and W. Sweldens. Wavelet on Irregualar Point Set. *Phil. Trans. R.Soc. Lond.A*, 357 :2397–2413, 1999.

[38] B. Delyon. Ondelettes orthogonales et biorthogonales. *Notes de cours, sept 2003, université de Rennes* 1, 2003.

[39] E. Deriaz. *Ondelettes pour la Simulation des Ecoulements Fluides Incompressibles en Turbulence*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Février 2006.

[40] E. Deriaz and V. Perrier. Divergence-free and Curl-free wavelets in 2D and 3D, application to turbulence. *J. of Turbulence*, 7 :1–37, 2006.

[41] E. Deriaz and V. Perrier. Direct Numerical Simulation of Turbulence using divergence-free Wavelet. *SIAM Multi. Mod. and Simul.*, 7(3) :1101–1129, 2008.

[42] E. Deriaz and V. Perrier. Orthogonal Helmholtz decomposition in arbitrary dimension using divergence-free and curl-free wavelets. *Appli. Comput. Harmon. Anal.*, 26(2) :249–269, 2009.

[43] R. Devore and G.G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer Verlag, Berlin, 1993.

[44] W. E and J-G. Liu. Gauge method for viscous incompressible flows. *Comm. Maths. Sci.*, 1 :317–332, 2003.

[45] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Series*. Springer-Verlag, New York, 2004.

[46] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1998. ISBN 0-8218-0772-2.

[47] M. Farge and K. Schneider. Coherent Vortex Simulation (CVS), A Semi-Deterministic Turbulence Model Using Wavelets. *Flow, Turbulence and Combustion*, 66 :393–426, 2001.

[48] P. Federbush. Navier and Stokes meet the wavelet. *Comm. Maths. Phys*, 155 :219– 248, 1993.

[49] J. Fröhlich and K. Schneider. Numerical simulation of decaying turbulence in an adaptive wavelet basis. *Appl. Compt. Harmon. Anal*, 3 :393–397, 1996.

[50] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16 :269– 315, 1964.

[51] G. Furioli, P.-G. Lemarié, and E. Terraneo. Unicité des solutions mild des équations de Navier-Stokes dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites. *Revista Matematica Iberoamericana*, 16 :605– 667, 2000.

[52] T. Gallay and C. E. Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Comm. Math. Phys.*, 255 :97–129, 2005.

[53] T. Gallay and C. E. Wayne. Long-time asymptotics of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. *Z. Angew. Math. Mech.*, 86 :256–267, 2006.

[54] G. Garrigós and E. Hernández. Sharp Jackson and Bernstein inequalities for $N-$term approximation in sequence spaces with applications. *Indiana University Mathematics Journal*, 53(6) :1741–1764, 2004.

[55] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48 :387–411, 1982.

[56] Y. Giga. Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes systems. *J. Diff.Equat.*, 62 :186– 212, 1986.

[57] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag., 1986.

[58] K. Goda. A multistep technique with implicite difference schemes for calculating two or three-dimensional cavity flow. *J. Comp. Phys.*, 30 :76–95, 1979.

[59] M. Griebel and F. Koster. *Adaptive wavelet solver for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations*. in J. Malek, M. Rokyta (Eds.), Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Springer Verlag, 2000.

[60] M. Griebel and F. Koster. *Adaptive wavelet solvers for the unsteady incompressible Navier Stokes equations*. In J. Malek and J. Necas and M. Rokyta, editors, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Lecture Notes of the Sixth International School "Mathematical Theory in Fluid Mechanics", Paseky, Czech Republic, September 1999. Springer Verlag, 2000.

[61] J. L. Guermond. Sur l'approximation des équations de Navier-Stokes par une méthode de projection. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.319 :887–892, 1994.

[62] P. Hajlasz. A contrexample to the L^p-Hodge decomposition. *Banach Center of Publication, Polish Academy of Sciences*, 33, 1996.

[63] H.v. Helmholtz. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Crelles J.*, 55(25), 1858.

[64] L. Hervé. Transformée en paquets d'ondelettes des signaux stationnaires : comportement asymptotique des densités spectrales. *Revista Matemática Iberoamericana*, 12(3), 1996.

[65] C. Hsio, B. Jawerth, B.J Lucier, and X.M. Yu. Near optimal compression of almost optimal wavelet expansions. *Wavelets : mathematiques and applications, Stud. Adv. Math., CRC, Boca Raton, FL*, 1994.

[66] T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput Methods Appli. Mech. Eng*, 127 :387–401, 1995.

[67] T. J. R. Hughes, G. R. Feijòo, L. Mazzei, and J. B. Quincy. The variational multiscale method, a paradigm for computational mechanics. *Comput Methods Appli. Mech. Eng*, 166 :3–24, 1998.

[68] T. J. R. Hughes, L. Mazzei, and K. E. Jansen. Large eddy simulation and the variational multiscale method. *Comput Visual Sci*, 3 :47–59, 2000.

[69] T. J. R. Hughes, G. N. Wells, and A. A. Wray. Energy transfers and spectral eddy viscosity in large-eddy simulations of homogeneous isotropic turbulence : comparison of dynamic smagorinsky and multiscale models over a range of discretizations. *Physics of Fluids*, 16(11) :4044–4052, 2004.

[70] L. Hörmander. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta. Maths.*, 104 :93–140, 1960.

[71] D. Jiroveanu. *Analyse théorique et numérique de certains modèles de viscosité turbulente*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Juillet 2002.

[72] A. Jouini and P.G. Lemarié-Rieusset. Analyse multirésolution biorthogonale, sur l'intervalle et applications. *Annales de l' I.H.P., section C*, 10 :453–476, 1993.

[73] G. Karniadakis and S. Sherwin. *Spectral/hp Element Methods For Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Usa, 2005.

[74] T. Kato. Strong L^p solution of the Navier-Stokes equation in R^m with application to weak solution. *Mathematische Zeitschrift*, 187 :471–480, 1984.

[75] G.H. Keetels, U. D'Ortona, W. Kramer, H.J.H. Clercx, K. Schneider, and G.J.F. van Heijst. Fourier spectral and wavelet solvers for the incompressible Navier-Stokes equations with volume-penalization : Convergence of a dipole-wall collision. *Jour. of Comput. Physics*, 227(2) :919–945, 2007.

[76] J.P. Khane and P.G. Lemarié-Rieusset. *Séries de Fourier et Ondelettes*. Cassini, 1998.

[77] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30(4) :301–305, 1941.

[78] F. Koster, M. Griebel, N. Kevlahan, M. Farge, and K. Schneider. Towards an adaptive wavelet-based 3D Navier-Stokes solver. In E.H. Hirschel, editor, *Numerical flow simulation I, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 66*, pages 339–364. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1998.

[79] P.G. Lemarié-Rieusset. Analyses multirésolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle. *Revista Matematica Iberoamericana*, 8 :221–237, 1992.

[80] P.G. Lemarié-Rieusset. Un théorème d'inexistence pour les ondelettes vecteurs à divergence nulle. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 319 :811–813, 1994.

[81] P.G. Lemarié-Rieusset. Cinq petits théorèmes d'unicité L^3 des solutions des équations de Navier-Stokes sur R^3. *Prépublication d'Evry 90*, 1998.

[82] P.G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 431. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[83] J. Leray. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, 63 :193–248, 1933.

[84] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[85] M. Lesieur, O. Métais, and P. Comte. *Large Eddy Simulation of Turbulence*. p.320. Cambridge University Press, 2005.

[86] L. Levaggi and A. Tabacco. Wavelets on the interval and related topics. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 7(2) :123– 160, 1999.

[87] J. L. Lions. *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*. Presse de l'Université de Montreal, 1965.

[88] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Edition de l'école polytechnique, 2000.

[89] R. Masson. Biorthogonal Spline Wavelets on the Interval for the Resolution of Boundary Problems. *M3AS*, 6(6) :749–791, 1996.

[90] R. Masson. *Méthodes d'Ondelettes en Simulation Numérique pour des Problèmes Elliptiques et Point Selle*. PhD thesis, Université Paris 6, Juillet 1999.

[91] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs I : Ondelettes*. Paris : Hermann, 1990.

[92] Y. Meyer. Ondelettes sur l'intervalle. *Revista Matematica Iberoamericana*, 7(2) :115–133, 1991.

[93] Y. Meyer. Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations. *Current developments in mathematics 1996, International Press*, PO Box 38-2872, Cambridge, MA :02238–2872, 1999.

[94] C.-E. Moldoveanu. *Simulation des Grandes Échelles de Tourbillons Longitudinaux Soumis à une Turbulence Extérieure Intense*. PhD thesis, Université de Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse, December 2007.

[95] P. Monasse and V. Perrier. Orthogonal Wavelet Bases Adapted For Partial Differential Equations With Boundary Conditions. *SIAM J. Maths. Anal*, 29 :1040–1065, July 1998.

[96] R.H. Nochetto and J-H. Pyo. Error estimates for semi-discrete Gauge methods for the Navier-Stokes equations. *Maths. Comput.*, 74 :521–542, 2004.

[97] D. W. Peaceman and H. H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Ind. Appl. Maths.*, 3 :28–42, 1955.

[98] V. Perrier and C. Basdevant. La décomposition en ondelettes périodiques, un outils pour l'analyse de champs inhomogènes. théorie et algorithme. *La recherche aérospatiale*, (Mai-Juin)(3) :53–67, 1989.

[99] O. Pironneau. Conditions aux limites sur la pression pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 303(9) :403–406, 1986.

[100] F. Planchon. *Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Paris, 1996.

[101] L. F. Richardson. *Weather prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, 1992.

[102] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[103] M. L. Ould Salihi. *Couplage de méthodes numériques en simulation directe d'écoulements incompressibles*. PhD thesis, Université de Grenoble I, Octobre 1998.

[104] K. Schneider and M. Farge. Numerical simulation of the transient flow behaviour in tube bundles using a volume penalisation method. *Journal of Fluids and Structures*, 20(4) :555–566, 2005.

[105] K. Schneider, M. Farge, F. Koster, and M. Griebel. Adaptive wavelet methods for the Navier-Stokes equations. *Num. Flow Simul. II*, 75 :303–318, 2001.

[106] K. Schneider, N. Kevlahan, and M. Farge. Comparison of an Adaptive Wavelet method and Nonlinearly Filtered Pseudospectral Methods for Two Diemensional Turbulence. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 9, 1997.

[107] J. Serrin. On the interior regularity of weak solutions of the navier-stokes equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, pages 187–195, 1962.

[108] J. Simon. *Équation de Navier-Stokes*. Cours de DEA 2002-2003, http ://wwwlma.univ-bpclermont.fr/simon, 2003.

[109] G-T. Stefano and A. Tabacco. Wavelet on the interval with optimal localisation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 10(3) :441– 462, 2000.

[110] W. Sweldens and R. Piessens. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31 :1240–1264, 1994.

[111] R. Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnarires. *II. Arch. Rational Mech. Anal.*, 33 :177–385, 1969.

[112] R. Temam. *Navier-Stokes Equations and Nonlineair Functional Analysis* . Second Edition, CBMS-NSF, 1995.

[113] Y. Tong, S. Lombeyda, A.N. Hirani, and M. Desbrun. Discrete multiscale vector field decomposition. *ACM Press. NY USA*, 22 :445– 452, July 2003.

[114] H. Triebel. *Theory of function spaces*. Birkhäuser, Basel, 1983.

[115] K. Urban. Wavelet bases in H(div) and H($curl$). *Maths of Computation*, 70 :739–766, May 2000.

[116] K. Urban. *Wavelets in Numerical Simulation*. Springer, 2002.

[117] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics - The finite volume method*. Pearson Education Limited, 1995.

[118] W. Von Wahl. *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations*. Vieweg & Sohn,Wiesbaden, 1985.

[119] C. Wang and J-L. Liu. Convergence of Gauge method for incompressible flow. *Maths. of Comput.*, 69(232) :1385–1407, May 2000.