



**HAL**  
open science

# Un nouveau système de trafic aérien à taux de conflits potentiels et consommation énergétique réduits

D. Prot

► **To cite this version:**

D. Prot. Un nouveau système de trafic aérien à taux de conflits potentiels et consommation énergétique réduits. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2009. Français. NNT: . tel-00545105

**HAL Id: tel-00545105**

**<https://theses.hal.science/tel-00545105v1>**

Submitted on 9 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





# Résumé

Dans cette thèse, nous proposons l'étude d'un nouveau système de trafic aérien, caractérisé par un très haut degré d'organisation. Dans ce système, les avions sont assujettis à suivre des points mobiles fictifs durant leur trajet. Ces points mobiles sont organisés et séquencés de façon à éviter les conflits entre avions, notamment lorsque ces derniers convergent vers une même intersection. Cette thèse propose la modélisation d'un problème sous-jacent à ce paradigme. Ce problème peut être vu comme la recherche d'un stable dans un graphe infini sous certaines contraintes. Après une étude théorique de ce problème, nous proposons une heuristique de résolution, amenant à présenter un système global de trafic aérien, puis nous exposons des résultats numériques.

**Mots-clés :** Recherche opérationnelle, Optimisation, Théorie des graphes, Trafic aérien, Conflits

# Abstract

In this PhD, we propose the study of a new air traffic system, characterized by a high level of organization. Aircraft are compelled to follow immaterial moving points during their flight. These moving points are organized and sequenced in order to avoid conflicts between aircraft. We consider an underlying problem of this paradigm. It can be seen as a maximum independent set problem on an infinite graph under constraints. We first give theoretical results on this problem and make links with the colouration problem; then we propose resolution heuristics, leading to a global air traffic system. Finally, we develop these heuristics and expose numerical results.

**Keywords:** Operational research, Optimization, Graph theory, Air traffic, Conflicts



# Remerciements

*Nous avons du retard sur nos poursuivants*<sup>1</sup>

Je tiens à remercier dans un premier temps Rémy Fondacci, qui a eu l'idée originelle du paradigme que nous proposons dans cette thèse. Les discussions que nous avons eues sur les tire-fesses, qui ont dû céder leur place aux points mobiles, ont été nombreuses et fructueuses et ont fortement orienté mes recherches. Je remercie également Sophie Constans, sur qui j'ai pu compter en permanence pendant ces trois années. Merci d'avoir écouté et pris le temps de répondre à toutes mes questions, aussi nombreuses et variées furent-elles. Je remercie enfin Christophe Rapine qui a joué le rôle de directeur de thèse souhaité, à mon avis, par beaucoup de doctorants, à savoir être présent durant les trois années, s'intéresser au sujet et orienter les recherches tout en me laissant de la liberté.

Je tiens à remercier Yannick Frein d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance de thèse. Je remercie également les deux rapporteurs, Olivier Goldschmidt et Frédéric Semet, d'avoir accepté ce long travail de relecture et proposé des perspectives intéressantes pouvant amener à améliorer le système que l'on propose. Merci enfin à Jean-Louis Pirat d'avoir accepté d'être examinateur et apporté son point de vue opérationnel sur les travaux que j'ai effectués.

Je remercie tous les membres du LICIT que j'ai cotoyés tous les jours pour leur accueil, et plus particulièrement les doctorant(e)s avec lesquels j'ai passé le plus de temps : ma co-bureau Aurélie, le sage Norbert et Romain l'autre Damien. Merci aussi à tous ceux et toutes celles qui m'ont aidé, qu'ils ou elles soient stagiaires ou informaticien(ne)s.

Je ne peux finir ces remerciements sans imiter le discours magnifiquement formaté des sportifs : "Je tiens à remercier le coach (le plus important, c'est le collectif), ma famille (merci papa, merci maman, sans vous je ne serais pas là...), mon entourage, ma femme, notre enfant. Sans vous rien de tout cela n'aurait été possible."

---

<sup>1</sup>N'ayant trouvé aucune citation impérissable et adaptée, autant en prendre une que tout le monde oubliera. Je remercie Didier Deschamps de m'avoir détendu le jour de ma soutenance grâce à cette phrase abracadabrantesque.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Evolution nécessaire du système de trafic aérien</b>	<b>13</b>
1.1 Système aérien actuel . . . . .	13
1.1.1 L'organisation de l'espace . . . . .	13
1.1.2 La gestion du trafic aérien . . . . .	14
1.1.3 Le travail des contrôleurs aériens . . . . .	15
1.2 Limites du système . . . . .	15
1.3 Evolution du système de trafic aérien . . . . .	17
1.4 Positionnement du paradigme . . . . .	18
<b>2 Un paradigme organisé pour le trafic aérien</b>	<b>19</b>
2.1 Description du paradigme . . . . .	19
2.2 Etat de l'art . . . . .	22
2.2.1 Améliorer le réseau de routes . . . . .	22
2.2.2 Étude dynamique du système aérien . . . . .	22
2.2.3 Vers une optimisation 4D . . . . .	23
2.2.4 Approches combinatoires . . . . .	23
2.2.5 Position de la thèse par rapport à l'état de l'art . . . . .	25
2.3 Conditions de l'étude . . . . .	25
2.4 Définition du problème de la densité maximum . . . . .	29
2.5 Problèmes opérationnels posés . . . . .	32
<b>3 Problème de la densité maximum</b>	<b>35</b>
3.1 Présentation des graphes . . . . .	35
3.1.1 Poids des cycles dans le graphe des axes . . . . .	37
3.1.2 Lien entre le graphe des axes et le graphe des conflits . . . . .	40
3.2 Résultats sur le graphe des axes . . . . .	44
3.2.1 Graphe des axes et cycles . . . . .	44
3.2.2 D'un cycle vers une base de cycles . . . . .	50
3.2.3 Caractérisation des solutions $\frac{1}{2}$ -denses . . . . .	51
3.2.4 Calcul en temps polynômial de $w(G^A)$ . . . . .	54
3.2.5 Graphe des axes et planarité . . . . .	56



3.3	Résultats sur le graphe des conflits . . . . .	57
3.3.1	Problème de la densité maximum et coloration . . . . .	57
3.3.1.1	Bornes inférieures au problème de la densité maximum . . . . .	57
3.3.1.2	Bornes supérieures au problème de la densité maximum . . . . .	60
3.3.2	Etude du graphe des conflits biparti . . . . .	64
3.3.2.1	Une autre caractérisation des solutions $\frac{1}{2}$ -denses . . . . .	66
3.3.2.2	Comment reconnaître un graphe des conflits biparti? . . . . .	67
3.4	Synthèse des résultats . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Recherche de solutions opérationnelles</b>	<b>75</b>
4.1	Structures . . . . .	75
4.1.1	Treillis dans le plan . . . . .	75
4.1.1.1	Structure à deux paires de directions . . . . .	76
4.1.1.2	Structures à trois paires de directions . . . . .	76
4.1.1.3	Structures à quatre paires de directions . . . . .	79
4.1.2	Capacités des différentes structures . . . . .	80
4.1.3	Problème de la sphère : déformation des structures . . . . .	82
4.2	Présentation d'une heuristique pour le problème de l'ensemble d'axes $\frac{1}{k}$ -denses maximum . . . . .	89
4.2.1	Se ramener à un problème de stable maximum . . . . .	89
4.2.2	Discussion sur la qualité d'une solution exactement $\frac{1}{k}$ -dense . . . . .	92
4.2.2.1	Propagation de l'existence de solutions exactement denses . . . . .	92
4.2.2.2	Solutions optimales non exactement denses . . . . .	94
4.2.2.3	Généralisation sur les solutions non exactement denses . . . . .	96
4.2.3	Heuristiques de stable maximum . . . . .	99
4.2.3.1	Recherche d'un stable maximal initial . . . . .	100
4.2.3.2	Recherche locale autour du stable initial . . . . .	101
4.3	Synthèse . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>109</b>
5.1	Description des données . . . . .	109
5.2	Affectation des plans de vol à un ou des treillis . . . . .	110
5.2.1	Conditions d'affectation d'un vol à un treillis . . . . .	112
5.2.2	Résultats des simulations . . . . .	112
5.3	Affectation des plans de vol à des axes de points mobiles en orthodromie . . . . .	115
5.3.1	Résultats des différentes heuristiques de stable maximum . . . . .	116
5.3.2	Résultats des simulations . . . . .	119
5.4	Affectation des plans de vol à une combinaison d'axes en orthodromie et de treillis . . . . .	123
	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>





# Liste des algorithmes

1	Algorithme de reconnaissance d'un graphe des conflits biparti . . . . .	71
2	Algorithme de recherche exacte d'un stable maximum . . . . .	102
3	Algorithme glouton aléatoire de stable maximum . . . . .	103
4	Algorithme glouton de stable maximum avec choix du degré minimum . . .	103
5	Algorithme glouton aléatoire de stable maximum avec Recherche Locale . .	104
6	Algorithme de recherche locale ponctuelle . . . . .	104
7	Algorithme de recherche locale ponctuelle optimale . . . . .	106
8	Algorithme de recherche locale étendue optimale . . . . .	107



# Introduction

Dans le système actuel de circulation aérienne, le contrôle aérien a pour but d'éviter les conflits (collisions potentielles) et est effectué par des opérateurs humains, les contrôleurs aériens, aidés par des outils informatiques. Chaque équipe de contrôleurs est en charge de la surveillance d'un volume élémentaire d'espace appelé secteur, chaque secteur étant caractérisé par une capacité qui est le nombre maximum d'avions par unité de temps qu'il peut accueillir. Les prévisions de croissance du trafic aérien tablent sur un doublement du nombre d'avions en vingt ans [30]. Cette hausse du trafic implique évidemment la nécessité d'accroître les capacités des secteurs en réduisant la charge de travail des contrôleurs, et notamment le nombre de conflits qu'ils ont à gérer. Les solutions actuelles, consistant à retarder les avions au sol ou à diviser les secteurs, ne sont pas compatibles avec une telle augmentation.

Afin d'améliorer la gestion du trafic aérien à l'horizon 2020, le projet SESAR (Single European Sky ATM Research) a été lancé en 2004 au niveau européen. Ce projet vise à moderniser l'infrastructure de gestion du trafic aérien. Les principaux objectifs sont notamment de réduire l'impact environnemental de 10% et de tripler la capacité du ciel européen, tout en maintenant la sécurité actuelle.

Cette thèse propose l'étude d'un nouveau système de circulation aérienne au niveau européen, en accord avec les motivations fondamentales de SESAR, à savoir la réduction de la quantité de conflits et de la consommation. Pour cela, nous proposons un paradigme fortement contraint et caractérisé par une grande organisation. Ce type de paradigme, peu étudié jusqu'à présent, est à l'opposé des principes du Free Flight [7], dont on peut douter qu'ils soient compatibles avec une forte croissance de la densité du trafic dans certaines régions. Ce choix vient du fait que la capacité du réseau est d'autant plus grande que la liberté des avions est faible. Dans notre système, les avions sont assujettis à suivre des points mobiles fictifs et réguliers durant une grande partie de leur trajet, voire la totalité. Les points mobiles sont organisés de telle sorte qu'il n'y ait que peu de conflits entre les avions et que les avions consomment moins qu'actuellement sur la globalité de leur trajet, notamment grâce à un raccourcissement de la distance parcourue et à la possibilité de suivre des routes à consommation optimale.

Cette thèse est organisée de la façon suivante :

- Le chapitre 1 décrit dans un premier temps le système aérien actuel et ses limites ; les évolutions envisagées du système sont ensuite présentées, ainsi que la position de cette thèse par rapport à ces évolutions.

- Dans le chapitre 2, nous exposons de manière plus approfondie notre paradigme à la section 2.1, en décrivant l’organisation des points mobiles. La section 2.2 est consacrée à l’état de l’art des études visant à réduire le nombre de conflits entre les avions et/ou à augmenter la capacité du ciel européen. Nous présentons dans la section 2.3 deux conditions sur les points mobiles, appelées condition d’unicité et condition de périodicité, dans lesquelles nous nous plaçons. Nous montrons que ces conditions sont, d’un point de vue opérationnel, complètement réalisables. La section 2.4 définit de façon complète le problème de la densité maximum, qui est le coeur de la thèse. Nous définissons aussi un problème connexe, le problème de l’ensemble d’axes  $\frac{1}{k}$ –denses maximum, auquel nous apportons des solutions opérationnelles à la section 4.2. Enfin, nous répondons à un certain nombre de questions sur la mise en place opérationnelle de notre paradigme dans la section 2.5.
- Le chapitre 3 est pleinement consacré au problème de la densité maximum. Ce problème est modélisé par deux graphes, le graphe des axes et le graphe des conflits, qui sont présentés à la section 3.1. Dans la section 3.2, nous exprimons de nombreux résultats obtenus sur le graphe des axes, qui marquent notamment l’importance des cycles dans ce graphe. Dans la section 3.3, nous proposons des résultats sur le problème de la densité maximum à l’aide de la modélisation par le graphe des conflits. Nous trouvons notamment des bornes à ce problème, permettant de faire un lien avec la coloration. Une synthèse des différents résultats obtenus est présentée à la section 3.4.
- Le chapitre 4 est consacré à la recherche de solutions opérationnelles. Dans la section 4.1, en utilisant les résultats obtenus à la section 3.2, nous proposons un réseau de routes, avec des points mobiles, extrait d’un pavage du plan par des hexagones et des triangles. Dans la section 4.2, nous étudions le problème de l’ensemble d’axes  $\frac{1}{k}$ –dense maximum, en nous ramenant à un problème de stable maximum, pour lequel différentes heuristiques sont proposées.
- Enfin, dans le chapitre 5, nous fournissons les résultats numériques des solutions opérationnelles proposées au chapitre 4 sur une journée réelle de trafic européen. La section 5.2 expose les résultats obtenus sur le treillis alors que la section 5.3 s’attache aux simulations basées sur les heuristiques de stable maximum. La section 5.4 propose de combiner les deux méthodes afin de pouvoir gérer la totalité du trafic européen.

# Chapitre 1

## Evolution nécessaire du système de trafic aérien

Dans ce premier chapitre, nous décrivons l'organisation du système aérien actuel dans la section 1.1, avant de pointer les limites auquel il est confronté dans la section 1.2. Les évolutions de ce système, et plus particulièrement le projet SESAR, sont présentées dans la section 1.3. Enfin, nous positionnons le sujet de cette thèse par rapport à ces évolutions dans la section 1.4.

### 1.1 Système aérien actuel

#### 1.1.1 L'organisation de l'espace

Cette partie s'appuie sur le livre de Georges Maignan [27]. Ce livre est paru en 1991 mais les principes généraux n'ont pas fondamentalement changé depuis cette date.

L'espace aérien européen est composé notamment de routes aériennes. Les avions commerciaux suivent pour la plupart des tronçons de ces routes, ce qui explique pourquoi un avion peut changer sa trajectoire de 30 ou 40° en certains points de raccordement de plusieurs tronçons. Historiquement, ce réseau de routes a été créé car les avions suivaient des balises au sol appelés VOR, qui étaient notamment placées aux intersections des routes. Même si les moyens actuels de navigation de surface permettent de s'affranchir du suivi de points balisés au sol, un réseau maillé existe toujours aujourd'hui car il facilite le travail des contrôleurs aériens, en limitant le nombre de points à surveiller par rapport à un réseau où tous les avions voleraient de façon directe entre leur origine et leur destination.

Un pilote, s'il vole au-dessus de la couche de libre circulation, a l'obligation de respecter certains niveaux de croisière, appelés *niveaux de vol* (ou FL pour Flight Level). Un niveau de vol est une altitude, en centaines de pieds, au-dessus d'une surface isobare de référence (1013.25 hPa). Certaines règles existent pour voler sur ces différents niveaux de vols. Par exemple, pour un vol aux instruments (IFR), le niveau de vol doit correspondre à un nombre impair de milliers de pieds (FL 310, FL 330,...) si la route est comprise entre 0 et



179° par rapport au Nord, et à un nombre pair (FL 320, FL 340,...) si elle est comprise entre 180 et 359°.

Enfin, l'espace est décomposé en secteurs de contrôle. Ces secteurs sont des volumes, avec un plancher et un plafond, et servent à la gestion du trafic aérien. Un avion, le long de son trajet, traverse de nombreux secteurs et est mis en relation avec les équipes de contrôleurs en charge de la sécurité du trafic dans les différents secteurs sur des fréquences radios différentes.

### 1.1.2 La gestion du trafic aérien

Les avions commerciaux doivent déposer un *plan de vol* (PLN) auprès des autorités de contrôle; ce plan de vol consiste en un ensemble de données, parmi lesquelles on trouve les aéroports d'origine et de destination, les routes aériennes empruntées et les balises survolées, l'heure de départ souhaitée, le niveau de vol de croisière, le type d'appareil et le nom de la compagnie. En 2007, on compte environ 35000 plans de vol par jour avec 15000 Origines-Destinations (ODs) différentes sur l'espace aérien européen.

Afin d'éviter les collisions entre les avions, il existe des espacements de sécurité à respecter. Ainsi, deux avions doivent être séparés verticalement de 1000 pieds, ce qui correspond à la distance entre deux niveaux de vol. S'ils ne le sont pas, une séparation horizontale de 5 miles nautiques (NM) est nécessaire pour les vols IFR dans l'espace en route. Lorsque deux avions ne respectent pas ces distances de sécurité, on dit qu'ils sont en *conflit*.

La résolution des conflits est un des problèmes majeurs de la gestion du trafic aérien. Afin d'éviter les conflits entre avions, plusieurs niveaux d'action hiérarchisés (appelés couramment *filtres*) existent :

- Le filtre ATFM (Air Traffic Flow Management) stratégique : appliqué plus de 6 mois avant les vols, il a pour but d'organiser le trafic de façon macroscopique. Pendant cette phase, sont notamment publiés les schémas de routage (routing schemes) et les plans de capacité de chaque centre de contrôle (capacity plans).
- Le filtre ATFM pré-tactique : appliqué un ou deux jours avant les vols, il consiste à organiser une journée de trafic. En tenant compte des plans de vols déposés, de la capacité de contrôle des secteurs, des mesures de gestion des flux sont mises en place. Elles consistent en général en l'identification de secteurs saturés qui seront régulés.
- Le filtre ATFM tactique : le but de ce filtre est de protéger les contrôleurs de la surcharge de travail. L'ATFM tactique attribue des créneaux de décollage à certains vols traversant la régulation en place. Ces créneaux sont composés d'une heure prévue de décollage et d'une marge autour (5 minutes avant, 10 minutes après). Ils tiennent notamment compte de la quantité de trafic, de la capacité de contrôle, et des autres heures de décollage demandées.
- Le filtre ATC (Air Traffic Control) : le contrôle aérien est un service d'anticollision fourni aux avions par les contrôleurs aériens. L'objectif de ce service est de faire passer le trafic en toute sécurité et dans des conditions économiques optimales. Afin de maintenir une distance de sécurité entre les avions, le service peut proposer un changement de cap d'un avion, un changement de niveau de vol, ou une modification

de la vitesse. Ce processus est effectué tout au long de la période de trafic considérée, et est donc temps-réel.

- Le filtre d’urgence : il n’intervient qu’en cas de défaillance du système de contrôle. Le *filet de sauvegarde* est un outil permettant au contrôleur de connaître les paires d’avions qui seront en conflit à un horizon de quelques minutes si aucune action n’est faite. Au niveau des avions, le TCAS (Traffic Collision Avoidance System) permet d’éviter une collision entre deux avions, en proposant une résolution du conflit (par ordre de changement d’altitude aux deux avions).

### 1.1.3 Le travail des contrôleurs aériens

Différents types de contrôleurs aériens existent. Le plus connu de tous est celui qui travaille dans une tour de contrôle. Son métier consiste à diriger les avions qui arrivent sur les aéroports et en repartent. Il existe aussi le contrôle d’approche, dont le but est d’assurer les services de la circulation aérienne aux abords des aéroports, de façon notamment à optimiser l’utilisation des pistes d’atterrissage. Cependant les avions ne sont pas contrôlés uniquement aux alentours des aéroports, mais sur quasiment tout l’espace. Pour cela, différents centres de contrôles s’occupent chacun d’une partie du territoire. La France, par exemple, est divisée en cinq centres (CRNA) : le CRNA Nord d’Athis-Mons, le CRNA Est de Reims, le CRNA Sud-Est d’Aix-En-Provence, le CRNA Sud-Ouest de Bordeaux et le CRNA Ouest de Brest. Pour chaque centre, des *secteurs de contrôle* sont définis, et attribués à des équipes de contrôleurs. Chaque secteur est caractérisé par sa capacité, qui est le nombre maximal d’avions par unité de temps qu’il peut accueillir. Si les tours amènent les avions vers les terrains d’atterrissage puis les font redécoller vers leur destination, les centres en route finissent de guider les appareils vers leur niveau de croisière, commencent à les faire descendre vers leur terrain de destination ou encore les surveillent lorsqu’ils sont sur les routes aériennes. Cette partie pourrait sembler plus simple que le contrôle d’approche ou le contrôle terminal mais la difficulté est tout aussi importante. En effet, il faut gérer des avions dont les vitesses peuvent être différentes, tout comme leurs performances en montée et en descente. Il faut aussi faire face à la proximité des aéroports, ce qui implique que des flux de montée peuvent interférer avec des flux de descente, ou bien même avec des avions en croisière. Les avions sont aussi contrôlés au-dessus des eaux internationales, notamment l’océan Atlantique, mais pas de la même façon. Il n’existe pas de couverture radar, mais les avions suivent des tracks parallèles sur lesquels ils sont séquencés avec des séparations supérieures à celles de l’espace en route, et reportent régulièrement leur position par radio aux centres de contrôles en charge.

## 1.2 Limites du système

Lorsque le trafic augmente de manière durable, la solution habituelle de régulation consistant à retarder les vols au sol ne suffit plus. Il est alors nécessaire d’augmenter la capacité en divisant en deux certains secteurs et en recrutant des contrôleurs. Malheureusement,

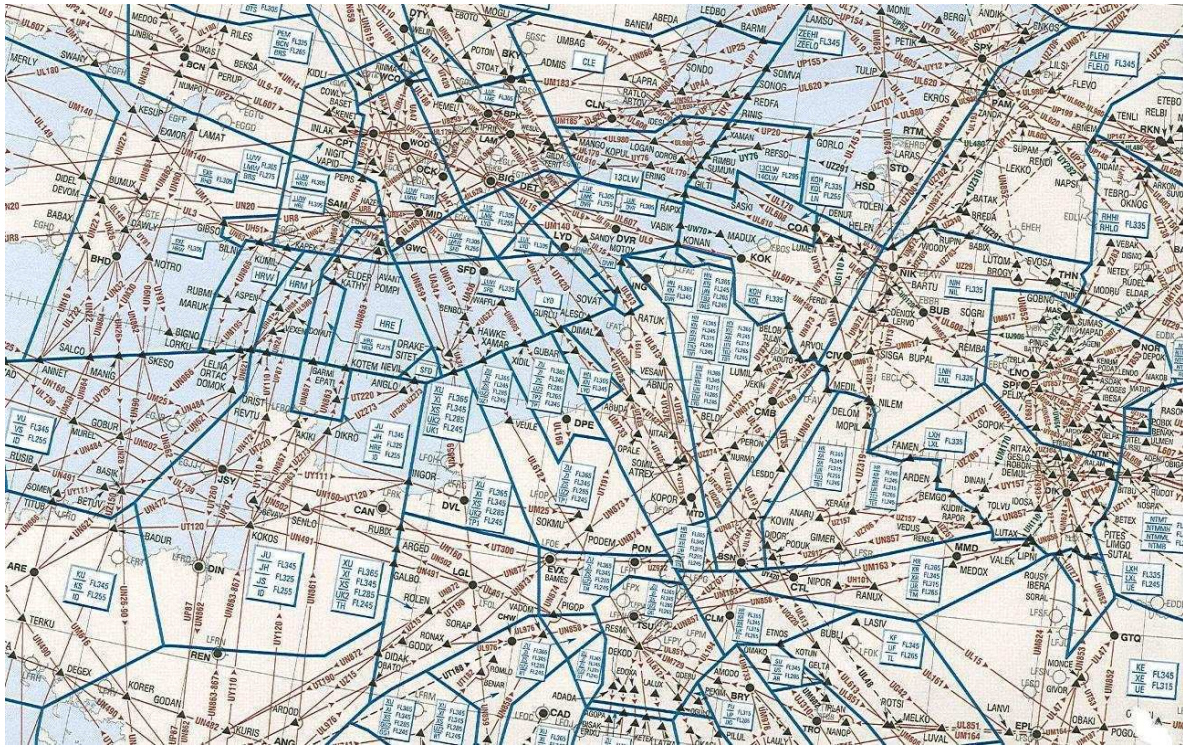


FIG. 1.1 – Extrait d’une carte de navigation aérienne de 2007 (région du Bénélux) ; les aéroports sont représentés par des cercles, les frontières des secteurs par des traits bleus épais, et les routes par des traits fins.

cette méthode par division ne peut se poursuivre indéfiniment, car il existe une taille minimale pour les secteurs en dessous de laquelle ceux-ci deviennent incontrôlables, les avions restant trop peu de temps à l’intérieur. C’est notamment le cas dans la région du Benelux, comme le montre la figure 1.1 qui permet de se faire une idée de la complexité du contrôle aérien. Le trafic aérien européen a augmenté de 4,1% en 2006 [28] et de 5,3% en 2007 [29]. Même si l’augmentation a marqué le pas en 2008 (0,4%) et risque d’être légèrement négative en 2009, les estimations actuelles prévoient que le nombre de mouvements d’avions soit multiplié par 2 au cours des deux prochaines décennies [30] ; il est donc clair que le système de circulation aérien par contrôle sectorisé ne pourra pas être viable à long terme.

Dans ce système de trafic aérien, il ne faut bien sûr pas oublier les retards, l’une des principales sources de mécontentement des usagers. En 2008, plus de 20% des vols ont eu au moins 15 minutes de retard à l’arrivée, pour un coût aux compagnies estimé à environ 1,5 milliard d’euros. Même si la cause essentielle de ces retards n’est plus aujourd’hui la gestion du trafic aérien, grâce à de récents efforts ayant permis des gains de capacité, la croissance du trafic reposera inévitablement le problème dans les années à venir.

Le réseau de routes actuel engendre également un rallongement de la distance parcourue par les avions. En effet, ceux-ci ne peuvent pas suivre une orthodromie, c’est-à-dire le plus



court chemin entre deux points sur la sphère, entre leur origine et leur destination. La différence de distance globale parcourue a été de 5,6% en 2008, ce qui représente environ 500 millions de kilomètres additionnels, et environ 9 millions de tonnes de  $CO_2$  émises [30]. Cette distance supplémentaire a aussi été chiffrée en termes de coût pour les compagnies (en additionnant le coût du temps et celui du carburant) et a été estimée à 2,7 milliards d'euros pour l'année 2008.

### 1.3 Evolution du système de trafic aérien

Le programme SESAR (Single European Sky ATM Research) [1] [2] est un projet européen visant à améliorer la gestion du trafic aérien à l'horizon 2020, en créant un *ciel européen unique*. D'un point de vue technologique, ce projet prévoit l'intégration des télécommunications et de la navigation par satellite, en se servant notamment de GALILEO [3]. A l'heure actuelle, les contrôleurs aériens donnent des instructions aux pilotes par une liaison radio VHF. L'un des principes développé dans SESAR est le rôle central de la trajectoire (*business trajectory*). Dans ce concept, la trajectoire 4D de vol optimale d'un appareil est définie par les usagers et les prestataires de service de gestion du trafic aérien (ANSP). Ceci mettrait fin au système de routes aériennes et permettrait de réduire la consommation et le temps de parcours des avions. Dans ses objectifs chiffrés, SESAR prévoit de tripler la capacité du système européen de gestion du trafic aérien, et de réduire de 10% par vol les incidences sur l'environnement. Pour satisfaire ces objectifs, SESAR propose une base de données appelée SWIM (System Wide Information Management), qui sera dédiée à la gestion du trafic aérien. Cette base sera ouverte à tous les acteurs jouant un rôle dans cette gestion, aussi bien les compagnies aériennes que les ANSP. Cette base contiendra toutes les informations nécessaires sur les positions des appareils et leurs caractéristiques et permettra de partager les informations sur la Business Trajectory ; seront notamment incluses en temps réel les masses des avions, les réserves en carburant et les heures prévues d'arrivées.

Le groupe ACARE (Advisory Council for Aeronautics Research in Europe), qui a largement inspiré le programme SESAR, propose de créer des trajectoires 4D de la manière suivante [8] : « *The 4D trajectory is the basis of a contract between the aircraft operator and the ATM services. Changes to this trajectory are kept to the minimum. The 4D-trajectory is as conflict-free as possible, remaining conflicts being solved either automatically or manually through ground operators' intervention.* » Les conclusions du rapport d'examen des performances 2005 [13] vont dans le même sens ; la commission suggère « *des changements plus radicaux de la structure de l'espace aérien civil et militaire* » afin de pouvoir « *traiter les questions liées à l'organisation et à l'utilisation stratégiques de l'espace aérien.* » Ce rapport préconise la mise en place, à moyen ou à long terme, d'un « *plan-cadre visant à restructurer l'espace aérien européen, compte tenu des impératifs à la fois civils et militaires.* » La commission conclut que, « *dans les cas compatibles avec les prescriptions de sécurité et de capacité, rien ne devrait être négligé pour réduire les inefficacités des trajectoires en route, et atténuer d'autant l'incidence environnementale.* »

## 1.4 Positionnement du paradigme

Nous proposons dans cette thèse l'étude d'un nouveau système de circulation aérienne, en cohérence avec le projet SESAR décrit ci-avant mais dont la mise en oeuvre ne peut être envisagée qu'à très long terme, au-delà de la version initiale de SESAR prévue pour 2020. L'idée principale est de réduire la quantité de conflits et d'essayer, dans la mesure du possible, de voler sur des routes à consommation optimale afin de diminuer l'impact environnemental. Pour cela, nous proposons de définir des points mobiles fictifs et réguliers auxquels sont assujettis les avions durant la plus grande partie de leur trajet, voire la totalité. Les points mobiles peuvent avoir deux états : autorisé ou interdit. Seuls les points mobiles autorisés ont le droit d'accueillir un avion. Autrement dit, un avion ne peut pas se trouver sur un point mobile interdit, ni en-dehors des points mobiles. Le statut des points mobiles est organisé d'une façon telle qu'il n'y a que peu de conflit entre les points mobiles autorisés, et donc encore moins entre les avions. Le travail des contrôleurs se réduira ainsi à résoudre les conflits résiduels.

Le système que nous proposons est fortement organisé, notamment temporellement, puisqu'il impose aux avions de suivre un ensemble de points 4D. Nous nous plaçons donc à l'opposé du Free Flight [7] et du Free Routing [4][6][7]; dans le Free Flight, les avions peuvent prendre n'importe quelle route et assurent directement leur séparation, alors que dans le Free Routing les avions restent sous l'autorité des contrôleurs. Ces approches laissent beaucoup de libertés aux avions, et ne pourront probablement pas être appliquées dans des régions où la densité de trafic est très importante, comme la région du Benelux. Notre paradigme, au contraire, impose des profils de vitesses aux avions, ce qui permet d'augmenter la capacité du réseau.

# Chapitre 2

## Un paradigme organisé pour le trafic aérien

Ce chapitre a pour but d'exposer notre paradigme d'un point de vue opérationnel. Pour cela, nous le décrivons dans la section 2.1, et définissons notamment les notions d'axes et de points mobiles. La section 2.2 est dédiée à l'état de l'art des études dont le but est d'augmenter la capacité de l'espace européen et/ou de réduire le nombre de conflits. Notre paradigme est régi par deux conditions, appelées condition d'unicité et condition de périodicité, qui sont décrites à la section 2.3. Nous montrons que ces deux conditions sont opérationnellement concevables. Nous définissons dans la section 2.4 le problème central de notre thèse, appelé *problème de la densité maximum*, ainsi qu'un problème connexe, le *problème de l'ensemble d'axes  $\frac{1}{k}$ -denses maximum*. Enfin, dans la section 2.5, de nombreuses réponses sont proposées aux questions relatives à la mise en place opérationnelle de notre paradigme.

### 2.1 Description du paradigme

Dans cette thèse, nous envisageons un nouveau système de trafic aérien, caractérisé par un très haut degré d'organisation, à l'opposé du Free Flight [10]. Le concept fondamental de notre système est d'assujettir les avions à suivre des points mobiles fictifs durant une grande partie ou la totalité de leur trajet. D'un point de vue opérationnel, on peut supposer qu'une nouvelle génération de pilote automatique pourra suivre de façon précise des consignes 4D, et en particulier les points mobiles de notre paradigme. Ces points mobiles sont organisés et séquencés de façon à éviter les conflits entre avions, notamment lorsque ces derniers convergent vers une même intersection.

Nous introduisons les définitions suivantes, utilisées tout au long de la thèse :

**Définition 1** On appelle **axe** un ensemble constitué d'une origine, d'une destination et d'un profil tridimensionnel pour aller de l'origine vers la destination.

**Définition 2** Sur chaque axe  $i$  sont générés de façon régulière des **points mobiles**, qui se déplacent avec le même profil de vitesse  $v_i$ . Ce profil dépend du temps et est donné dans un repère fixe par rapport à la Terre. Ainsi, pour chaque axe, le temps séparant deux points mobiles successifs au passage d'un même point donné quelconque est constant. On l'appelle **période de points mobiles** et on le note  $T_i$ . Il faut noter qu'à l'instant  $t = 0$  il n'y a pas nécessairement un point mobile à l'origine de l'axe. On appelle **phase à l'origine** le temps entre l'instant initial et l'apparition du premier point mobile à l'origine. On note  $\Delta T_i$  la phase à l'origine de l'axe  $i$ .

**Définition 3** On note  $p(i, x)$  le  $x^{\text{ème}}$  point mobile de l'axe  $i$ .

La figure 2.1 illustre les notations définies ci-dessus. Il est important de noter que nous nous plaçons à un horizon de temps de l'ordre d'une journée, ce qui peut être considéré comme un horizon de temps infini.

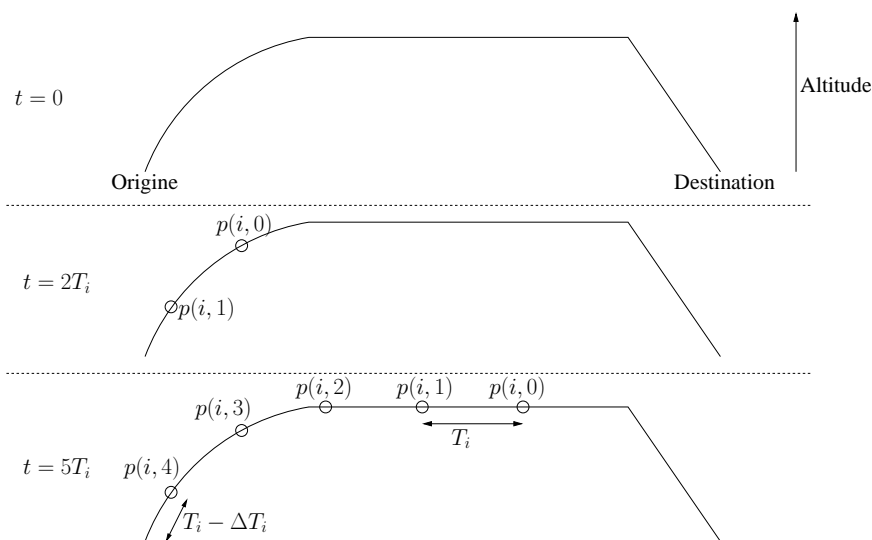


FIG. 2.1 – Coupe verticale du profil d'un axe  $i$  à trois instants de temps différents

Les origines et les destinations des axes sont repérées par leurs coordonnées géographiques, qui peuvent correspondre à des aéroports. Si ce n'est pas le cas, l'axe correspondant peut être défini uniquement à un niveau de vol donné, et joue le même rôle que les routes actuelles. Les avions qui empruntent ces axes ne suivent alors pas des points mobiles sur la totalité de leur trajet. Dans le cas où un axe relie deux aéroports, il est important de remarquer que cet axe ne suit pas forcément une orthodromie entre l'aéroport d'origine et celui de destination. Il est parfaitement possible qu'un avion veuille suivre une route à consommation optimale relativement aux vents prévus, ou qu'il doive éviter certaines zones (pour cause d'orages, d'interdiction de survol d'une zone militaire,...). De la même manière, il est tout à fait envisageable qu'un avion ne suive pas un même niveau de vol durant toute

sa phase de croisière, et qu'il profite de sa perte de masse (liée à la consommation) pour voler à des niveaux de vols de plus en plus élevés. Dans cette thèse, pour plus de lisibilité, nous représentons les axes par des lignes droites<sup>1</sup> orientées et les points mobiles par des cercles, comme dans la figure 2.2.

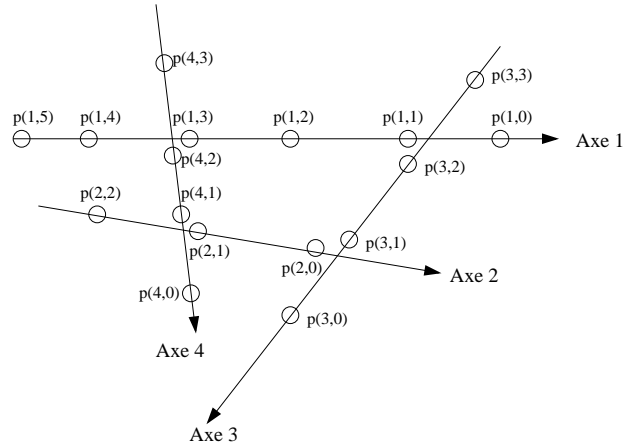


FIG. 2.2 – Représentation des axes

Le fait que les avions suivent chacun leur propre trajectoire engendre un nombre d'intersections spatiales bien plus important que dans le système actuel. C'est pourquoi nous proposons une approche dans laquelle le trafic est complètement organisé, et les heures de passage des avions au-dessus des points d'intersection assurent un taux de conflit le plus faible possible. Pour cela, nous définissons des *statuts* pour les points mobiles. Si un point mobile a le statut *autorisé*, il est possible d'assujettir un avion à suivre ce point mobile. A l'inverse, si un point mobile est *interdit*, aucun avion ne peut se lier à lui. Un avion ne peut pas non plus se situer entre deux points mobiles.

La création d'un tel système peut être décomposée en plusieurs sous-problèmes. Le premier consiste à définir l'ensemble des axes du système. Pour chaque axe, il faut ensuite choisir un profil de vitesse, une période de points mobiles, et une phase à l'origine. La résolution de ces problèmes permet de définir de façon complète l'évolution de tous les points mobiles sur un horizon de temps infini. Il reste alors à résoudre le dernier problème, qui consiste à affecter le statut autorisé/interdit à chaque point mobile afin de pouvoir gérer le volume de trafic attendu et d'avoir un taux de conflit le plus faible possible. Ce dernier problème, que l'on appelle par la suite *problème de la densité maximum*, est le sujet principal de cette thèse. Il est défini plus complètement à la section 2.4 (page 29).

---

<sup>1</sup>Dans le cas où les axes sont des orthodromies, la représentation par des lignes droites reste une approximation puisque la projection d'une orthodromie dans le plan est une courbe.



## 2.2 Etat de l'art

Afin d'augmenter la capacité du ciel européen et/ou de réduire le nombre de conflits entre les avions, de nombreuses études sont menées. Nous présentons dans la section 2.2.1 celles qui essaient de créer un réseau de routes plus performant. La section 2.2.2 est dédiée aux approches dynamiques, dont le but est principalement de réduire le nombre de conflits. Les approches tenant compte du temps et de l'espace sont ensuite étudiées dans la section 2.2.3. Enfin, nous présentons des approches d'optimisation combinatoire, fortement liées à la théorie des graphes, dans la section 2.2.4.

### 2.2.1 Améliorer le réseau de routes

Plusieurs articles s'intéressent à la modification du réseau de routes actuel, afin de le rendre plus efficace. Dans [21], l'idée est de créer un réseau prioritaire de routes directes entre les principales zones terminales (TMA) européennes, et d'y affecter un certain pourcentage du trafic total. Ce réseau est sans conflit et prioritaire, entraînant en théorie une diminution du nombre d'avions à surveiller pour les contrôleurs. Hering [22] propose de tenir compte du fait que 20% du trafic européen est intercontinental, c'est-à-dire avec l'origine et/ou la destination hors de l'Europe. Cela engendre la création de deux axes d'autoroute (un axe Dublin-Athènes, un axe Madrid-Milan-Stockholm), pour lesquels l'auteur définit au moins 2 voies dans chaque sens de circulation, et 8 points d'entrée/sortie.

Irvine et Hering [23] construisent un treillis sur une région dense de l'Europe (cf figure 2.3). Cette structure est composée verticalement de 9 niveaux de vol successifs (du FL300 au FL380). Sur chaque niveau de vol, les avions peuvent voler sur une paire de directions, composée d'une direction alternée avec son opposée. Entre deux niveaux successifs, les directions changent de  $45^\circ$ . Il faut donc 4 niveaux de vol avant de retrouver la direction initiale. Le fait d'avoir 9 niveaux de vol dans ce treillis permet de répéter les mêmes directions à 2 niveaux de vol différents (et même 3 pour les directions du FL300). Les résultats numériques sont pour le moment limités, puisque les auteurs concluent sur une augmentation de 1,3% de la consommation et de 5% du nombre de conflits.

### 2.2.2 Étude dynamique du système aérien

Une autre possibilité pour réduire le nombre de conflits consiste à jouer sur la vitesse des avions à court terme. Villiers [33] recommande une approche subliminale du contrôle pour résoudre les conflits. Cela pourrait consister à modifier légèrement la vitesse des avions, de sorte que le changement ne soit pas perçu par le contrôleur et que les conflits soient évités. Constans et al. [14] proposent de minimiser une quantité de conflit potentiel, dans une boucle de commande à horizon glissant, en modifiant les vitesses des avions. A chaque itération, un sous-problème d'optimisation est résolu en utilisant la programmation linéaire. Les résultats donnés considèrent uniquement une partie du trafic journalier européen, et la quantité de conflit diminue de 6% à 20%.

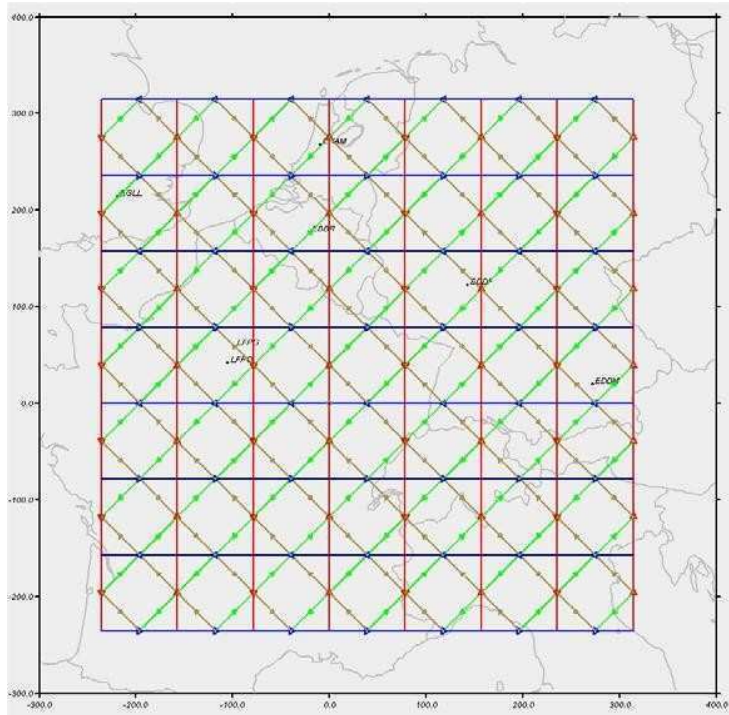


FIG. 2.3 – Treillis utilisé dans [23]

### 2.2.3 Vers une optimisation 4D

Des études récentes proposent d'améliorer le système de trafic aérien actuel en jouant non seulement sur la dimension spatiale, mais aussi sur la dimension temporelle. Gianazza [20] découpe ainsi les trajectoires des avions en segments d'une certaine longueur, auxquels sont associés des intervalles de temps pendant lesquels ils sont occupés par un avion. Le but est ensuite de trouver des trajectoires 4D, séparées les unes des autres, pour les principaux flux en utilisant un algorithme A\*. Les résultats sont pour le moment limités, puisqu'ils ne concernent que 7,3% du trafic européen et le temps de calcul est de plus de 24 heures. Dans sa thèse [31], Richard se place dans le cadre de la régulation à court terme du trafic aérien et détermine les trajectoire 4D des vols, tout en respectant les capacités des secteurs et en minimisant les coûts des trajectoires (surconsommation, retard à l'arrivée, propagation des retards). La modélisation de ce problème en programme linéaire mixte est résolue à l'aide d'une technique de génération de colonnes et de branch-and-bound.

### 2.2.4 Approches combinatoires

Certains auteurs essaient d'améliorer le système actuel en se basant sur des approches combinatoires de recherche opérationnelle. Ainsi, Fondacci et al. [18] étudient de façon plus précise la dimension verticale des vols. Pour cela, ils supposent que les avions peuvent

changer de niveau de vol pendant leur phase de croisière, en se limitant à  $N = 2$  niveaux. Ils essaient de minimiser le nombre de changements de niveau des avions afin qu'il ne reste aucune intersection entre les flux d'avions. Les auteurs montrent que ce problème peut se réduire au problème de Via Minimization et proposent un algorithme optimal, basé sur l'algorithme de Barahona [9]. Les auteurs examinent aussi le problème consistant à minimiser le nombre de niveaux de vol afin que deux ODs (Origine-Destination) au même niveau de vol ne s'intersectent pas. Ce problème s'apparente à un problème de coloration, amenant les auteurs à utiliser deux heuristiques. La première utilise des cliques maximales, et est donc elle-même basée sur des heuristiques de cliques. L'heuristique de coloration affecte ensuite à chaque segment (qui représente une OD) de la clique maximale (appelé segment maître) une couleur, et essaie de colorer le plus de segments possible en cette couleur. L'heuristique ainsi obtenue est de complexité  $O(n^5)$  ou  $O(n^4 \log \log n)$  selon l'heuristique de clique utilisée. Dans la seconde heuristique, les segments maîtres sont obtenus en essayant de diviser au mieux l'espace. Cette heuristique a pour complexité  $O(n^3)$ . Les auteurs étudient aussi le problème visant à affecter un niveau de vol à chaque flux d'avions de façon à minimiser le nombre d'intersections sur chaque niveau de vol, en utilisant des heuristiques de N-coups. Barnier et Brisset [11] étudient le même problème, mais en utilisant un algorithme de clique et de la programmation par contraintes. Dans sa thèse [20], Gianazza utilise un algorithme A\* afin de calculer des trajectoires 3D, séparées les unes des autres, pour les principaux flux de trafic.

Ces approches visent principalement à réduire le nombre d'intersections entre les différentes routes aériennes, et il est intéressant de noter que les problèmes associés peuvent être placés dans le domaine de la théorie des graphes d'intersections. Si  $M$  est une famille d'ensembles  $\{M_i, i = 1, \dots, n\}$ , on appelle graphe d'intersections de  $M$  le graphe  $G = (V, E)$ , où chaque ensemble  $M_i$  de  $M$  définit un sommet  $v_i$  du graphe, et tel que

$$\forall i, \forall j, i \neq j, v_i v_j \in E \iff M_i \cap M_j \neq \emptyset$$

Suivant la géométrie des éléments de  $M$ , différents noms sont donnés aux classes de graphes construites. Une liste assez complète des classes est donnée par Kratochvil [24]. La classe **SEG** est la classe de graphes d'intersections pour laquelle chaque élément  $M_i$  est un segment dans le plan. En prenant leur projection, on peut considérer que les ODs sont des segments du plan. On peut ainsi construire un graphe d'intersections de segments, comme sur la figure 2.4.

Le problème qui consiste à affecter différents niveaux de vol aux ODs qui s'intersectent revient donc à résoudre un problème de  $\chi$ -coloration dans le graphe d'intersections.

Ehrlich et al. [16] montrent que le problème de  $\chi$ -coloration reste NP-difficile, pour  $\chi \geq 3$ , dans la classe **SEG**. Kratochvil et Nesetril [25] prouvent que le problème de stable maximum est NP-complet dans la classe **SEG**, y compris lorsque les segments n'ont que deux directions possibles. Ils démontrent aussi que le problème de clique maximum est polynômial pour la classe **SEG** lorsque le nombre de directions est fini, en exposant un algorithme en  $O(n^{k+1})$  pour  $k$  directions. En revanche, le problème de clique maximum pour un nombre non borné de directions dans la classe **SEG** reste un problème ouvert à ce jour.

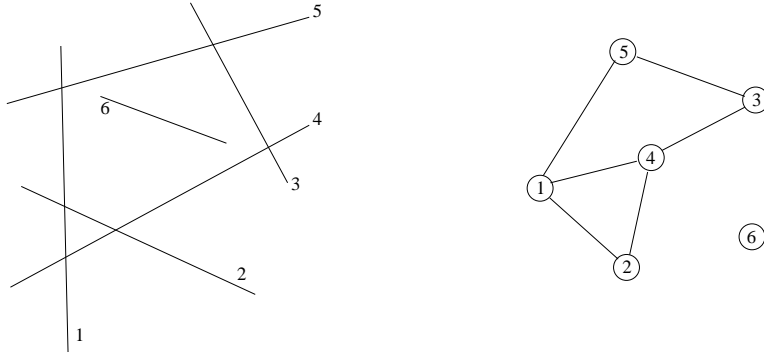


FIG. 2.4 – ODs projetées dans le plan et le graphe d'intersections associé

### 2.2.5 Position de la thèse par rapport à l'état de l'art

La modélisation des problèmes de trafic aérien avec les graphes de segments ne permet pas de tenir compte de la temporalité du problème, tout comme les études présentées dans la section 2.2.1. Dans cette thèse, nous proposons une autre modélisation à l'aide de deux graphes prenant en considération les aspects spatiaux et temporels. Nous nous situons dans le cadre d'une optimisation quadridimensionnelle, en proposant de jouer sur les trajectoires et les vitesses des avions. Alors que Richard [31] s'attache à optimiser à court terme, le travail présenté ici se place à un horizon de temps infini, ou de façon plus opérationnelle à l'horizon d'une journée. En se plaçant à un horizon faible, Richard peut s'affranchir des incertitudes liées notamment aux conditions météorologiques et aux retards. Au contraire, les solutions proposées par Gianazza [20] ne sont pas forcément réactives face aux incertitudes. L'approche proposée dans cette thèse permet d'être robuste aux perturbations ; en effet, l'une des idées principales consiste à garantir des créneaux de décollage de façon périodique pour chaque vol. Cette possibilité est modélisée par la notion de densité qui est introduite à la section 2.4.

## 2.3 Conditions de l'étude

Dans notre étude, nous nous plaçons sous deux conditions, réalisables opérationnellement. Elles concernent la structure des axes de points mobiles et plus précisément les espacements entre les points mobiles.

**Condition 1** *La période de points mobiles est la même pour tous les axes. Elle est notée  $T$ .*

Cette condition, que l'on appelle *condition de périodicité*, engendre une périodicité des conflits ; en effet, si les points mobiles  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$  sont en conflit <sup>2</sup> à un instant  $t$ ,

---

<sup>2</sup>On dit que deux points mobiles sont en conflit de la même façon que deux avions sont en conflit, c'est-à-dire si ils ne respectent pas les normes de séparation.

alors  $p(i, x + z)$  et  $p(j, y + z)$  sont en conflit à l'instant  $t + zT$ , pour tout  $z \in \mathbb{Z}$ . Cette condition permet de simplifier la structure du *graphe des conflits* que nous introduisons dans la section 3.1.

D'un point de vue opérationnel, même si cette condition semble très restrictive au premier abord, ce n'est en réalité pas le cas. En effet, les vitesses peuvent être différentes d'un axe à l'autre, et même pour un axe donné. La seule contrainte fixée ici est que le temps entre toute paire de points mobiles consécutifs soit le même, pour tout axe.

La deuxième condition, la *condition d'unicité* peut s'énoncer de la manière suivante :

**Condition 2** *Un point mobile  $p(i, x)$  d'un axe  $i$  ne peut pas être en conflit avec plus d'un point mobile d'un autre axe  $j$ .*

Pour satisfaire cette condition d'unicité, il est nécessaire d'imposer une distance suffisante entre deux points mobiles consécutifs. Cette distance, appelée *distance inter-points mobiles*, est notée  $D$ . Pour calculer cette distance, nous supposons que la vitesse sur les deux axes est identique, nous la notons  $v$ . Cette condition n'est en pratique pas très contraignante, car les avions volant au même niveau de vol sont souvent à des vitesses similaires. Cette vitesse  $v$  permet de faire le lien entre la distance inter-points mobiles et la période, puisqu'on a  $D = Tv$ .

On note  $t_{i,x,j}$  et  $t_{j,y,i}$  les temps de passage au point d'intersection  $I_{i,j}$  des points mobiles  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$ . D'après la condition de périodicité, en comparant les différences de temps de passage ( $t_{i,x,j} - t_{j,y,i}$ ) au point d'intersection pour toute paire de points mobiles  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$ , on s'aperçoit que ces différences sont identiques, à un nombre de périodes  $T$  de points mobiles près. On note  $\delta T$  la différence qui est comprise entre 0 et  $T$ . On a donc  $(t_{i,x,j} - t_{j,y,i}) = \delta T + kT$ . Autrement dit,  $\delta T$  est le reste de la division de  $(t_{i,x,j} - t_{j,y,i})$  par  $T$ .

**Définition 4** *On appelle **déphasage** entre deux axes le rapport  $\frac{\delta T}{T}$ .*

La distance minimum nécessaire  $D$  dépend de l'angle non orienté  $\theta$  entre les axes, du déphasage entre les axes et de la distance de séparation que l'on souhaite obtenir. Ces notions sont représentées sur la figure 2.5.

Afin de calculer la distance minimum nécessaire pour respecter la condition d'unicité, nous nous plaçons dans un repère où l'axe des abscisses est confondu avec l'un des deux axes, que l'on note axe 1. L'autre axe (l'axe 2) représente l'axe des ordonnées, et forme donc un angle  $\theta$  non nul avec l'axe des abscisses. On place un point mobile de l'axe 1 à l'origine du repère et on suppose que l'on est à un instant  $t = 0$ . Le point mobile ainsi défini est noté  $p(1, 0)$ . Ses coordonnées dans le temps sont notées  $(x_{1,0}(t), y_{1,0}(t))$ . Nous allons calculer la distance minimum de  $p(1, 0)$  à chaque point mobile de l'axe 2. Comme il faut qu'un seul conflit intervienne au maximum entre  $p(1, 0)$  et un point mobile de l'axe 2, il est nécessaire que la deuxième plus petite distance entre  $p(1, 0)$  et un point mobile de l'axe 2 soit supérieure à la distance de séparation  $D_s$ .

Dans un premier temps, prenons un point mobile  $p(2, z)$  quelconque de l'axe 2, se situant à une ordonnée  $d_2^0$ , et notons ses coordonnées  $(x_{2,z}(t), y_{2,z}(t))$ . Soient  $p(2, 0)$  et  $p(2, 1)$  les

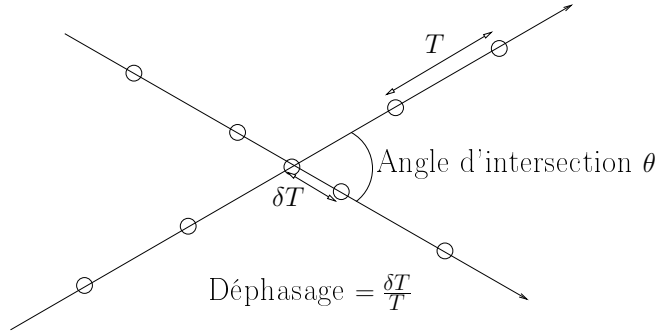


FIG. 2.5 – Déphasage et angle d'intersection

points mobiles de l'axe 2 pour lesquels on a respectivement  $d_2^o = \delta T v$  et  $d_2^o = (\delta T - T)v$  à l'instant  $t = 0$ .

Les coordonnées de  $p(1, 0)$  à l'instant  $t$  s'écrivent :

$$\begin{cases} x_{1,0}(t) = tv \\ y_{1,0}(t) = 0 \end{cases}$$

Celles de  $p(2, z)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} x_{2,z}(t) = 0 \\ y_{2,z}(t) = d_2^o + tv \end{cases}$$

Nous calculons la distance  $d(0, z, t)$  entre  $p(2, z)$  et  $p(1, 0)$  à l'instant  $t$ .

$$\begin{aligned} d(0, z, t)^2 &= ((d_2^o + tv) \cos \theta - tv)^2 + ((d_2^o + tv) \sin \theta)^2 \\ d(0, z, t)^2 &= (d_2^o + tv)^2 + (tv)^2 - 2tv(d_2^o + tv) \cos \theta \\ d(0, z, t)^2 &= t^2(2v^2 - 2v^2 \cos \theta) + t(2d_2^o v - 2d_2^o v \cos \theta) + (d_2^o)^2 \end{aligned}$$

Le carré de la distance  $d(0, z, t)$  s'écrit comme un polynôme  $At^2 + Bt + C$  du temps  $t$  du second degré avec un coefficient  $A$  strictement positif car  $\theta \neq 0$ . Donc la distance minimum est atteinte en  $t = \frac{-B}{2A} = \frac{-d_2^o}{2v}$ . La distance minimum vaut donc  $d(0, z, \frac{-d_2^o}{2v})$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
d\left(0, z, \frac{-d_2^\circ}{2v}\right)^2 &= \left(\frac{-d_2^\circ}{2v}\right)^2 (2v^2 - 2v^2 \cos \theta) + \left(\frac{-d_2^\circ}{2v}\right) (2d_2^\circ v - 2d_2^\circ v \cos \theta) + (d_2^\circ)^2 \\
d\left(0, z, \frac{-d_2^\circ}{2v}\right)^2 &= (d_2^\circ)^2 \frac{1 - \cos \theta}{2} - (d_2^\circ)^2 (1 - \cos \theta) + (d_2^\circ)^2 \\
d\left(0, z, \frac{-d_2^\circ}{2v}\right)^2 &= (d_2^\circ)^2 \frac{1 + \cos \theta}{2} \\
d\left(0, z, \frac{-d_2^\circ}{2v}\right)^2 &= (d_2^\circ)^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
d\left(0, z, \frac{-d_2^\circ}{2v}\right) &= \left|d_2^\circ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

D'après la définition de  $\delta T$  et du déphasage, les deux points mobiles de l'axe 2 engendrant les deux plus faibles valeurs de  $d_2^\circ$ , en valeur absolue, sont les points  $p(2, 0)$  et  $p(2, 1)$ . Les distances à  $p(1, 0)$  associées sont  $|\delta T v \cos(\frac{\theta}{2})|$  et  $|(\delta T - T)v \cos(\frac{\theta}{2})|$ . Parmi ces deux valeurs, une seule a le droit d'être inférieure à la distance de séparation  $D_s$ , ce qui nous amène à définir la distance inter-points mobiles  $D$  :

$$\begin{aligned}
\max\left(\left|\delta T v \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|, \left|(\delta T - T)v \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right) &= D_s \\
\max(\delta T, T - \delta T) v \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= D_s \\
T v \max\left(\frac{\delta T}{T}, 1 - \frac{\delta T}{T}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= D_s \\
D &= \frac{D_s}{\max\left(\frac{\delta T}{T}, 1 - \frac{\delta T}{T}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{2.1}
\end{aligned}$$

La figure 2.6 représente la distance inter-points mobiles  $D$  en fonction du déphasage  $\frac{\delta T}{T}$  et de l'angle d'intersection  $\theta$ , en supposant que la distance de séparation est celle actuellement utilisée, soit 5NM.

On se rend compte qu'il suffit d'une distance de 20NM pour pouvoir gérer n'importe quel déphasage et des angles allant jusqu'à  $120^\circ$ . La distance minimum devient 30NM pour des angles inférieurs à  $140^\circ$ . Pour une vitesse de croisière standard d'environ 420NM par heure, cela correspond à des périodes de points mobiles inférieures à 5 minutes, ce qui semble plus que raisonnable en pratique. Des angles d'intersections trop importants provoquent le non-respect de cette condition d'unicité. Il est cependant possible, en partitionnant les axes selon le cap entre leur origine et leur destination, d'obtenir des sous-ensembles d'axes pour lesquels cette condition est vérifiée.

Il est très intéressant de noter que la gestion du déphasage peut amener un gain non négligeable sur la distance inter-points mobiles. En effet, il existe un facteur 2 entre le



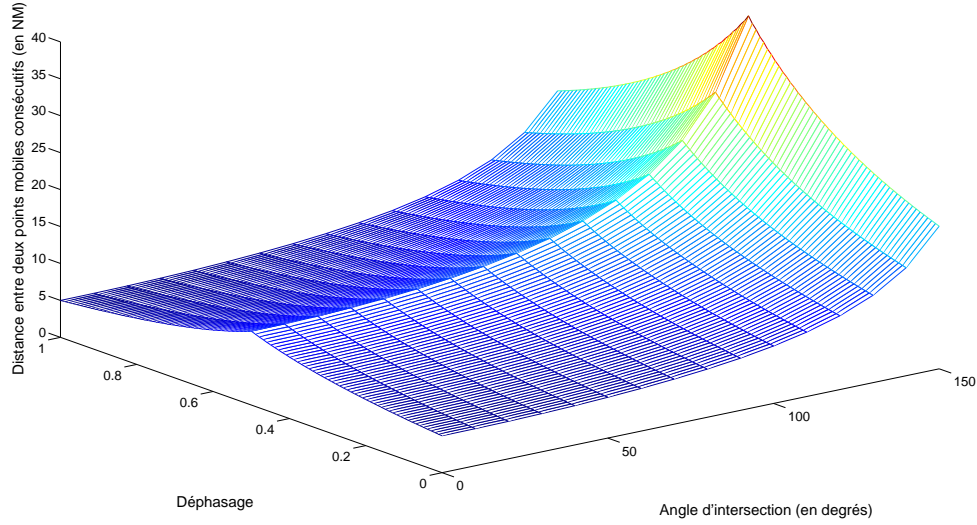


FIG. 2.6 – Distance inter-points mobiles  $D$  (NM) entre deux points mobiles consécutifs pour respecter la condition d’unicité

meilleur déphasage (0) et le pire déphasage ( $\frac{1}{2}$ ). Autrement dit, si il est possible de trouver un réseau d’axes avec un déphasage proche de 0 ou de 1 pour tous les axes, il est envisageable de réduire la distance inter-points mobiles et ainsi d’augmenter la capacité du réseau.

Les conditions 1 et 2 impliquent que, si les points mobiles  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$  sont en conflit, alors chaque point mobile  $p(i, x + \lambda)$  de l’axe  $i$  sera en conflit avec  $p(j, y + \lambda)$  sur l’axe  $j$ , et uniquement avec ce point mobile de l’axe  $j$ . Cela nous permet de définir de façon unique la quantité  $\Delta_{i,j}$  :

**Définition 5** Pour chaque intersection  $I_{i,j}$  entre deux axes  $i$  et  $j$ , on note  $\Delta_{i,j}$  la différence  $(y - x)$  pour laquelle  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$  sont en conflit.

## 2.4 Définition du problème de la densité maximum

Nous supposons ici que l’évolution des points mobiles dans le temps et l’espace est connue, et nous nous intéressons au problème, que l’on appelle **problème de la densité maximum**, consistant à affecter à chaque point mobile un statut autorisé/interdit afin de maximiser la densité de points mobiles sous contrainte qu’il n’y ait pas de conflit entre



les points mobiles autorisés. Nous définissons ici de façon précise la fonction objectif et les contraintes du problème.

Une solution du problème est dite réalisable si, pour toute paire de points mobiles en conflit, ceux-ci n'ont pas tous les deux le statut autorisé; l'utilisation simultanée de ces deux points mobiles engendrerait en effet un conflit entre les deux avions correspondants. Il est à noter que cette définition de la réalisabilité implique que nous cherchons à avoir un taux de conflit nul, même si cela peut réduire de façon préjudiciable l'espace des solutions.

Il existe plusieurs moyens de définir la fonction objectif de notre problème. La première, qui est la plus naturelle, consiste à étudier le *taux d'occupation*, défini sur un axe comme le rapport entre le nombre de points mobiles autorisés et le nombre total de points mobiles de l'axe. Il est alors possible d'essayer de maximiser le taux global d'occupation, défini comme la moyenne des taux d'occupation par axe. Cela revient à maximiser la capacité du réseau, ce qui semble en théorie répondre à nos attentes. Cependant, ce critère pose des problèmes dans un certain nombre de cas. Celui de la figure 2.2 en est un exemple. En effet, maximiser le taux global d'occupation sur cet exemple aboutit à un taux de  $\frac{1}{2}$  pour lequel tous les points mobiles des axes 1 et 2 sont autorisés, et tous ceux des axes 3 et 4 sont interdits (ou vice-versa). Cela implique donc qu'aucun avion ne peut voler sur les axes 3 et 4, ce qui est bien sûr inadmissible d'un point de vue opérationnel.

Pour éviter cet obstacle, il est envisageable d'essayer de maximiser le plus petit taux d'occupation par axe, mais un problème presque similaire se pose. En effet, une solution optimale peut contenir un nombre  $N$  arbitrairement grand de points mobiles consécutifs interdits puis  $N$  points mobiles consécutifs autorisés. D'un point de vue opérationnel, cela signifie que l'axe serait inutilisable pendant un temps arbitrairement long, ce qui paraît encore une fois inacceptable.

Face au manque de pertinence de la notion de taux d'occupation, nous présentons celle de *densité* comme critère d'optimisation.

**Définition 6** *On dit qu'une solution a une densité de  $\frac{1}{k}$  (ou qu'elle est  $\frac{1}{k}$ -dense) si, pour toute fenêtre de  $k$  points mobiles successifs sur tout axe, il existe au moins un point mobile autorisé.*

Autrement dit, il n'y a jamais plus de  $(k - 1)$  points mobiles interdits consécutifs. D'un point de vue opérationnel, cela garantit un point mobile autorisé toutes les  $k$  périodes de points mobiles.

Il est intéressant de noter le lien entre la densité et le taux d'occupation global, puisqu'une solution  $\frac{1}{k}$ -dense garantit un taux d'occupation global d'au moins  $\frac{1}{k}$ . La densité se comporte donc comme une borne inférieure du taux d'occupation global.

**Définition 7** *On dit qu'une solution est **exactement**  $\frac{1}{k}$ -dense si chaque point mobile autorisé est suivi par exactement  $(k - 1)$  points mobiles interdits quel que soit l'axe.*

Cela signifie qu'une solution exactement  $\frac{1}{k}$ -dense a un taux d'occupation global de  $\frac{1}{k}$ . La figure 2.2 a une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense, qui est représentée sur la figure 2.7; les points

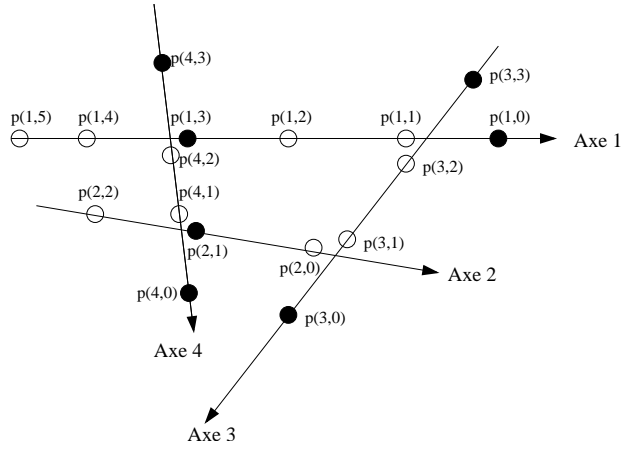


FIG. 2.7 – Une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour la représentation des axes définie sur la figure 2.2

mobiles autorisés sont représentés par des disques noirs, et les points mobiles interdits par des disques blancs.

Le problème d'affectation que nous étudions dans cette thèse peut maintenant être défini de façon complète, par la formulation suivante :

**PROBLÈME DE LA DENSITÉ MAXIMUM**

INSTANCE : Un ensemble de  $n$  axes, constitués chacun d'un profil 4D, d'une période de points mobiles et d'une phase à l'origine.

SOLUTION : Une affectation réalisable des statuts des points mobiles.

MESURE : Densité de la solution.

SENS : Maximisation

D'un point de vue opérationnel, ce problème peut parfois avoir comme solution optimale une densité nulle, car deux axes ne satisfont pas la condition d'unicité. En effet, si on suppose par exemple qu'une origine-destination est affectée en orthodromie au même niveau de vol que la destination-origine correspondante, il est évident que les points mobiles du premier axe sont en conflit durant leur trajet avec les points mobiles de l'autre axe. Cela nous amène à poser un problème connexe au problème de la densité maximum, pour lequel il faut choisir un sous-ensemble des axes qui soit  $\frac{1}{k}$ -dense. La formulation est la suivante :

**PROBLÈME DE L'ENSEMBLE D'AXES  $\frac{1}{k}$ -DENSES MAXIMUM**

INSTANCE : Un ensemble de  $n$  axes, constitués chacun d'un profil 4D, d'une période de points mobiles et d'une phase à l'origine, et un entier  $k$ .

SOLUTION : Un sous-ensemble des axes et une affectation  $\frac{1}{k}$ -dense sur ce sous-ensemble.

MESURE : Nombre d'axes dans le sous-ensemble.

SENS : Maximisation

## 2.5 Problèmes opérationnels posés

La mise en pratique opérationnelle de ce paradigme peut susciter de nombreuses questions, auxquelles nous essayons de répondre dans cette section.

La première question qui se pose est de savoir comment faire face à l'incertitude. Celle-ci peut avoir plusieurs causes, impliquant différentes solutions. Pour tenir compte des vents, on peut dans un premier temps utiliser les vents dominants, prévisibles la veille, afin de modifier les profils 4D des points mobiles. Cela n'enlève évidemment pas l'incertitude, mais la réduit de façon importante. Pour tenir compte d'incertitudes de moyenne amplitude, comme la différence entre les vents prévus et les vents réalisés, il est possible de définir les profils de vitesses des points mobiles assez loin des limites de performances des avions. Ainsi, si nécessaire, un avion peut ralentir ou accélérer afin de suivre le point mobile auquel il est assigné. Il reste à tenir compte des incertitudes de plus faible amplitude, qui peuvent notamment être dues aux performances du matériel permettant l'assujettissement des avions aux points mobiles. Pour remédier à cette difficulté, il est possible de définir une distance de séparation entre les points mobiles  $D_s$  plus importante. Par exemple, si cette distance est de 7NM, cela signifie qu'un avion peut avoir une marge de  $\pm 1$ NM par rapport au point mobile auquel il est assujéti. Cette possibilité implique une augmentation de la période de points mobiles et donc une réduction de la capacité des axes de points mobiles. Cette diminution ne prète pas à conséquence, car nous utilisons des axes qui contiennent bien plus de points mobiles autorisés que d'avions susceptibles de les utiliser. Les phénomènes météorologiques plus violents et plus difficiles à prévoir, comme les orages, sont plus délicats. Nous pouvons envisager que les avions soient guidés manuellement par les contrôleurs au travers des axes de points mobiles, ou que les avions soient contraints de rejoindre un point mobile autorisé libre sur un axe contournant la zone d'orages.

Il est légitime de se demander si les deux conditions d'étude décrites à la section 2.3 sont réalisables d'un point de vue opérationnel, car de nombreux résultats en découlent. La condition de périodicité provient du fait que les axes sont utilisés par des types d'avion ayant des performances du même ordre de grandeur, ce qui implique que les avions d'un axe peuvent être assujettis à suivre des points 4D identiques. Pour satisfaire la condition d'unicité, il faut que la distance inter-points mobile  $D$  soit assez élevée. Cette distance croît avec l'angle d'intersection, ce qui peut provoquer une violation de cette condition si des angles d'intersection trop importants interviennent. Il est cependant possible de partitionner les axes selon le cap orthodromique entre leur origine et leur destination, afin d'obtenir des sous-ensembles d'axes pour lesquels les angles ne sont pas trop importants. Il est ainsi évident que deux avions effectuant le trajet opposé en suivant la même route posent problème. Nous les affectons à deux niveaux de vols différents, comme cela est le cas aujourd'hui.

Enfin, se pose la question de savoir comment passer d'une journée de trafic à la suivante. Cette opération est essentielle, puisqu'elle permet de tenir uniquement compte des plans de vol du jour et puisqu'elle permet d'ajuster les profils 4D des points mobiles en tenant compte des vents afin de se rapprocher le plus possible d'une route à consommation optimale. Pour effectuer ce transfert, cette mission sera dédiée aux contrôleurs ; en deman-

dant aux pilotes de modifier légèrement leur vitesse et/ou leur trajectoire, cela permet de rattraper (ou de se laisser rattraper par) un point mobile autorisé libre. Cette mission peut aussi être effectuée au niveau du pilote si on suppose que les avions sont équipés d'un pilote automatique permettant de récupérer un point mobile.



# Chapitre 3

## Problème de la densité maximum

Ce chapitre est entièrement dédié à l'étude théorique du problème de la densité maximum, défini à la section 2.4. Etant donné un ensemble d'axes, ce problème a pour objectif de trouver l'affectation des statuts des points mobiles la plus dense possible tout en évitant que deux points mobiles autorisés soient en conflit. La section 3.1 présente les deux principaux graphes modélisant ce problème, ainsi que les liens existant entre eux. Dans les sections 3.2 et 3.3, nous exposons les résultats obtenus sur les deux graphes, montrant ainsi l'utilité des deux représentations.

### 3.1 Présentation des graphes

Nous introduisons dans cette section deux graphes utiles à l'étude du problème de la densité maximum. Le *graphe des conflits* représente les relations de conflit entre les paires de points mobiles. Le *graphe des axes* est une représentation condensée du problème, moins intuitive que le graphe des conflits. Les définitions qui suivent sont illustrées par les figures 3.1 à 3.3.

**Définition 8** On appelle **graphe des conflits** le graphe  $G^C = (V^C, E^C)$  où  $V^C$  est l'ensemble des points mobiles et  $E^C$  l'ensemble des couples de points mobiles en conflit.

Un stable dans le graphe des conflits correspond de façon évidente à un ensemble de points mobiles sans aucun conflit. Pour le problème de la densité maximum, il est donc possible d'affecter le statut autorisé à chaque point mobile présent dans un stable du graphe des conflits. Le problème de l'ensemble d'axes  $\frac{1}{k}$ -denses maximum peut s'apparenter à un problème de stable maximum, comme nous le verrons dans la section 4.2. Le problème du stable maximum est NP-Complet dans le cas général [19] mais aussi dans le cas de la classe **SEG** [25]. De plus, le graphe des conflits est un graphe infini puisqu'on se place à un horizon de temps infini, ce qui rend encore plus difficile la recherche d'un stable maximum. Enfin, dans le problème de la densité maximum, nous ne recherchons pas un stable maximum, mais une solution  $\frac{1}{k}$ -dense. En effet, si l'on cherche un stable maximum sur le graphe de la figure 3.2, qui est une chaîne, on sélectionne tous les points mobiles des

axes 1 et 2, et on obtient une solution non optimale du problème de la densité maximale, puisque les axes 3 et 4 n'ont aucun point mobile autorisé.

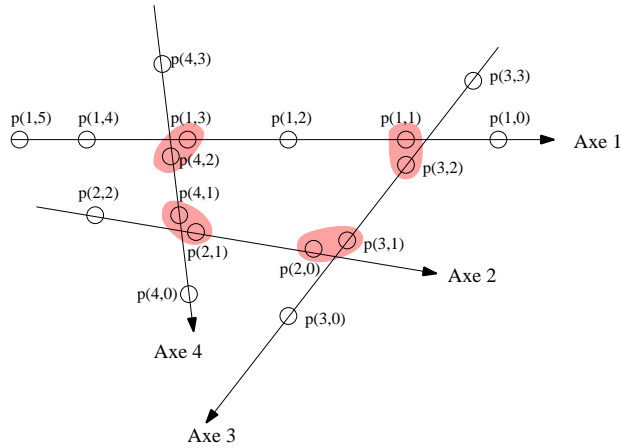


FIG. 3.1 – Une représentation des axes pour le problème de densité maximum

Le fait que le graphe des conflits soit infini nous incite à définir une autre modélisation du problème, plus condensée. Considérons une représentation des axes comme celle définie sur la figure 3.1.

**Définition 9** Pour chaque intersection  $I_{i,j}$  où au moins deux points mobiles des axes  $i$  et  $j$  sont en conflit, on choisit arbitrairement un couple de points mobiles en conflit à cette intersection. Ces deux points mobiles sont appelés **points mobiles de référence** de l'axe  $i$  (resp.  $j$ ) pour l'intersection  $I_{i,j}$ .

Des couples de points mobiles de référence sont entourés sur la figure 3.1.

**Définition 10** On appelle **graphe des axes** le graphe orienté  $G^A = (V^A, A^A)$  où chaque sommet correspond à une intersection  $I_{i,j}$  où un conflit entre points mobiles se produit. Un arc  $a = (I_{i,j}, I_{i,k})$  existe si les intersections  $I_{i,j}$  et  $I_{i,k}$  sont consécutives sur l'axe  $i$ . On dit que l'arc  $a$  est **associé** à l'axe  $i$ . En notant  $r_{i,l}$  l'indice du point mobile de référence de l'axe  $i$  pour l'intersection  $I_{i,l}$ , le poids de l'arc  $a$  est défini par  $w_a = r_{i,k} - r_{i,j}$ .

Les points mobiles de référence à l'intersection  $I_{i,j}$  sont donc notés  $p(i, r_{i,j})$  (resp.  $p(j, r_{j,i})$ ) pour l'axe  $i$  (resp.  $j$ ). La valeur du poids d'un arc  $a = (I_{i,j}, I_{i,k})$  dans le graphe des axes correspond au nombre de périodes de points mobiles séparant le point mobile de référence de l'axe  $i$  en  $I_{i,j}$  du point mobile de référence de l'axe  $i$  en  $I_{i,k}$ . La figure 3.3 représente le graphe des axes associé à la représentation des axes de la figure 3.1. Par exemple, à l'intersection  $I_{1,4}$  (resp.  $I_{1,3}$ ) nous avons choisi  $p(1, 3)$  et  $p(4, 2)$  (resp.  $p(1, 1)$  et  $p(3, 2)$ ) comme points mobiles de référence, ce qui implique que le poids de l'arc  $(I_{1,4}, I_{1,3})$  est de  $(3 - 1) = 2$ .

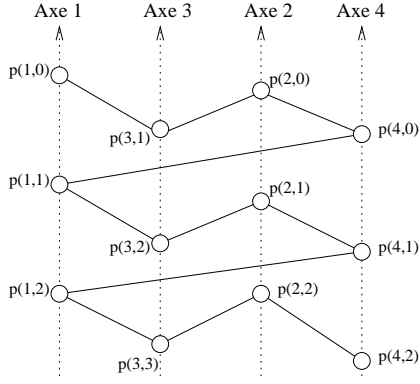


FIG. 3.2 – Graphe des conflits de la représentation des axes définie sur la figure 3.1

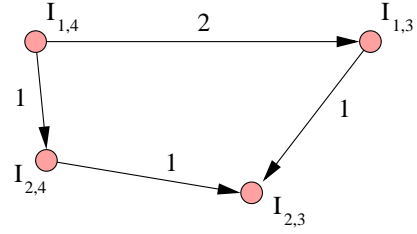


FIG. 3.3 – Graphe des axes de la représentation des axes définie sur la figure 3.1

### 3.1.1 Poids des cycles dans le graphe des axes

Les cycles dans le graphe des axes jouent un rôle primordial dans la recherche de solutions  $\frac{1}{k}$ -denses, et notamment leur longueur et le poids des arcs qui les composent.

**Définition 11** On appelle *longueur d'un cycle* le nombre d'arcs le composant.

**Définition 12** Soient un graphe  $G = (V, A)$  orienté et pondéré, un cycle  $C$  et une orientation. On appelle *poids d'un cycle*  $w(C)$  dans  $G$  la différence entre la somme des poids des arcs du cycle suivant l'orientation et la somme des poids des arcs du cycle dont la direction est opposée à l'orientation.

Pour simplifier l'écriture, on définit une indicatrice  $\mathbb{1}(a, C)$ , qui vaut 1 si l'arc  $a$  a la même orientation que  $C$ ,  $-1$  si leur direction est opposée, et 0 si l'arc n'appartient pas au cycle. On écrit ainsi le poids du cycle sous la forme :

$$w(C) = \sum_{a \in A^4} \mathbb{1}(a, C) w_a$$

Il est évident que le choix de l'orientation est arbitraire, et qu'un cycle engendre, selon l'orientation, deux poids opposés. On peut donc définir le *poids positif* d'un cycle. Sur la figure 3.3, le graphe des axes est un cycle élémentaire dont le poids, pris dans le sens anti-trigonométrique, vaut  $2 + 1 - 1 - 1 = 1$ .

La définition du graphe des axes peut sembler impropre, du fait que les points mobiles sont choisis de façon arbitraire, et qu'il existe ainsi une infinité de pondérations possibles pour le graphe des axes pour une même représentation des axes. Les figures 3.4 à 3.7 illustrent deux exemples de choix de points mobiles de référence menant à deux pondérations différentes du graphe des axes, alors qu'il s'agit de la même instance.

En étudiant de façon plus précise les deux graphes des axes générés, on constate que le poids du cycle vaut  $2 + 2 - 3 = 0 + 2 - 1 = 1$  dans les deux cas. On peut en fait généraliser cet exemple, et montrer le lemme suivant.



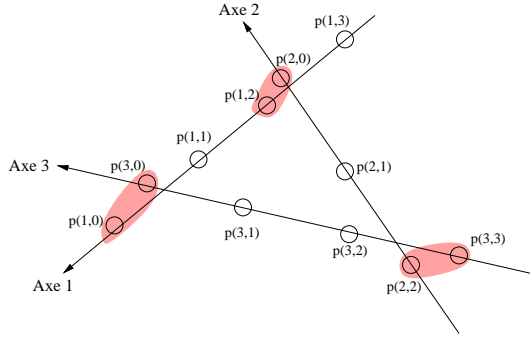


FIG. 3.4 – Premier choix des points mobiles de référence

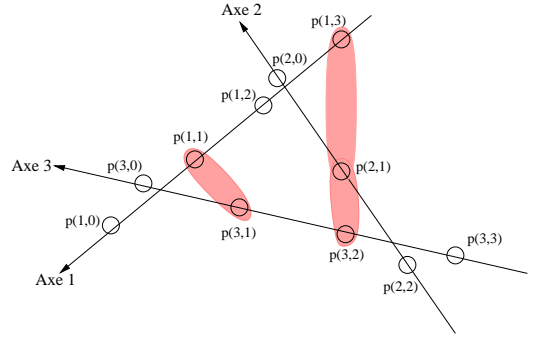


FIG. 3.5 – Second choix des points mobiles de référence

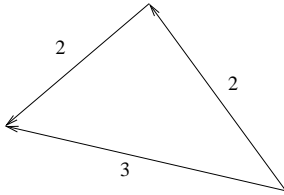


FIG. 3.6 – Graphe des axes associé au premier choix

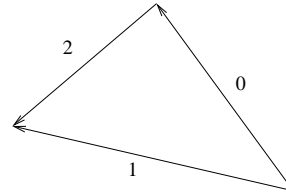


FIG. 3.7 – Graphe des axes associé au second choix

**Lemme 1** *Le poids d'un cycle dans le graphe des axes est indépendant du choix des points mobiles de référence.*

**Preuve** Soient un cycle élémentaire  $C = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, e_0)$  de taille  $n$  dans le graphe des axes  $G^A$  et une orientation. Chaque arête  $e_i$  du cycle correspond à un arc  $a_i$  de  $G^A$ , dont le poids est noté  $w(a_i)$ . Avec la notation d'indicatrice définie ci-dessus, on peut donc écrire que le poids du cycle est :

$$w(C) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \mathbb{1}(a_i, C) w(a_i)$$

Afin de simplifier les écritures, on suppose, sans perte de généralité, que tout arc  $a_i$  est associé à l'axe  $i$ , pour  $i = 0, \dots, (n-1)$ . Cela revient à dire qu'un point mobile de l'axe  $i$  est en conflit avec un point mobile de l'axe  $(i+1)$  et un point mobile de l'axe  $(i-1)$ , modulo  $n$ .

Dans toute la suite de la démonstration, tous les indices sont modulo  $n$ , même s'ils ne sont pas marqués comme tels, afin de ne pas alourdir la notation. Soient  $r_{i,i+1}$  et  $r_{i+1,i}$  les indices des points mobiles de référence des axes  $i$  et  $i+1$  pour l'intersection  $I_{i,i+1}$ . Par définition du poids d'un arc, si  $a_i$  est orienté dans le sens du cycle, alors son poids vaut  $w(a_i) = r_{i,i+1} - r_{i,i-1}$ . Si l'arc  $a_i$  est dans le sens opposé au cycle, alors son poids est

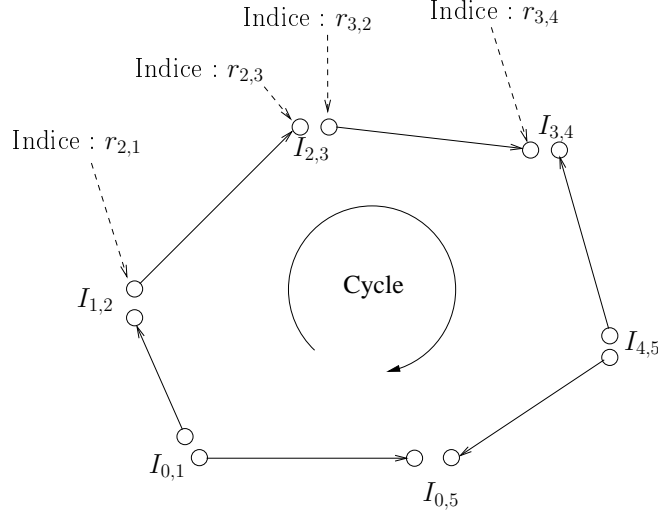


FIG. 3.8 – Indépendance du poids d'un cycle

$w(a_i) = r_{i,i-1} - r_{i,i+1}$ . On peut donc écrire, dans tous les cas que le poids de  $a_i$  vaut :

$$w(a_i) = \mathbb{1}(a_i, C)(r_{i,i+1} - r_{i,i-1})$$

En remplaçant  $w(a_i)$  par sa valeur dans l'équation du poids du cycle, on obtient :

$$\begin{aligned} w(C) &= \sum_{i=0}^{i=n-1} \mathbb{1}(a_i, C)^2 (r_{i,i+1} - r_{i,i-1}) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (r_{i,i+1} - r_{i,i-1}) \\ w(C) &= \sum_{i=0}^{i=n-1} r_{i,i+1} - \sum_{i=0}^{i=n-1} r_{i,i-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} r_{i,i+1} - \sum_{i=0}^{i=n-1} r_{i+1,i} \\ w(C) &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (r_{i,i+1} - r_{i+1,i}) \end{aligned}$$

Par définition, les points mobiles  $p(i, r_{i,i+1})$  et  $p(i+1, r_{i+1,i})$  sont en conflit en  $I_{i,i+1}$ . En utilisant les conditions 1 et 2 de périodicité et d'unicité, on sait que  $p(i, r_{i,i+1})$  est en conflit uniquement avec le point mobile  $p(i+1, r_{i,i+1} + \Delta_{i,i+1})$  de l'axe  $(i+1)$ , où  $\Delta_{i,i+1}$  est présenté à la définition 5. Par suite, on  $r_{i+1,i} = r_{i,i+1} + \Delta_{i,i+1}$  et donc :

$$w(C) = \sum_{i=0}^{i=n-1} -\Delta_{i,i+1}$$

Les  $\Delta_{i,i+1}$  étant complètement indépendants des points mobiles de référence, on obtient donc que le poids  $w(C)$  du cycle  $C$  est bien indépendant du choix des points mobiles de référence. ■

Grâce à ce lemme, nous pouvons introduire la définition suivante :

**Définition 13** On note  $w(G^A)$  le plus petit poids strictement positif d'un cycle dans le graphe des axes.

Il est possible que le graphe des axes ne contiennent pas de cycle de poids strictement positif, auquel cas nous prenons par convention  $w(G^A) = +\infty$ . Nous montrons dans la section suivante que  $w(G^A)$  a aussi une interprétation dans le graphe des conflits.

### 3.1.2 Lien entre le graphe des axes et le graphe des conflits

Nous nous intéressons au lien existant entre le graphe des axes et le graphe des conflits. Nous supposons que le graphe des axes est connexe dans cette section. S'il ne l'est pas, il suffit d'étudier le problème sur les différentes composantes connexes du graphe des axes. Nous présentons d'abord quelques lemmes, qui nous permettent d'aboutir au théorème 1.

**Lemme 2** Si les points mobiles  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$  appartiennent à une même composante connexe  $C$  dans le graphe des conflits, alors  $p(i, x + z)$  et  $p(j, y + z)$  sont dans une même composante connexe  $C'$ , pour tout  $z \in \mathbb{Z}$ .

**Preuve**  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$  étant dans la même composante connexe  $C$ , il existe une chaîne  $(p(i, x), p(i_1, x_1), \dots, p(i_k, x_k), p(j, y))$ . Or, si  $p(i, x)$  et  $p(i_1, x_1)$  sont en conflit, alors  $p(i, x+1)$  et  $p(i_1, x_1 + 1)$  le sont aussi d'après la condition 1 de périodicité. En appliquant cette propriété à tous les éléments de la chaîne, on obtient l'existence d'une chaîne entre  $p(i, x+1)$  et  $p(j, y + 1)$ . En appliquant ce résultat  $z$  fois, on obtient une chaîne entre  $p(i, x + z)$  et  $p(j, y + z)$ . ■

**Lemme 3** Dans le graphe des conflits, les points mobiles  $p(i, x)$  et  $p(i, y)$  sont dans la même composante connexe  $C$  pour tout axe  $i$  si et seulement si les points mobiles  $p(i_0, x)$  et  $p(i_0, y)$  sont dans la même composante connexe  $C'$ , pour un axe  $i_0$  donné.

**Preuve** La condition nécessaire est triviale, nous ne prouvons donc que la condition suffisante. On suppose donc que les points mobiles  $p(i_0, x)$  et  $p(i_0, y)$  sont dans la même composante connexe dans le graphe des conflits. Le graphe des axes étant connexe, il existe un chemin dans le graphe des axes qui relie une intersection de l'axe  $i_0$  à une intersection de l'axe  $i$ . Cela implique qu'il existe une chaîne dans le graphe des conflits entre un point mobile de l'axe  $i_0$  et un point mobile de l'axe  $i$ . En appliquant le lemme 2, cela signifie qu'il existe un indice  $z$  pour lequel  $p(i_0, x)$  et  $p(i, z)$  sont dans la même composante connexe dans le graphe des conflits. D'après le lemme 2, on en déduit que  $p(i_0, y)$  et  $p(i, z + y - x)$  sont dans la même composante connexe. En combinant les trois relations, on obtient que  $p(i, z + y - x)$  et  $p(i, z)$  sont dans la même composante connexe. On applique à nouveau le lemme 2, qui permet de conclure que  $p(i, y)$  et  $p(i, x)$  sont dans la même composante connexe. ■

Sans perte de généralité, nous supposons qu'il existe un cycle de poids  $w(G^A)$  dans le graphe des axes, incluant l'axe 1. Cela nous permet de définir les différentes composantes connexes du graphe des conflits de la façon suivante :

**Définition 14** On note  $C_x$  la composante connexe à laquelle appartient le point mobile  $p(1, x)$  dans le graphe des conflits.

Il est facile de montrer que les différentes composantes connexes sont isomorphes. En effet, la simple utilisation du lemme 2 permet de montrer que  $p(i, y) \in C_x$  si et seulement si  $p(i, y - x) \in C_0$ . Ceci implique que  $C_x$  est isomorphe à  $C_0$ , quel que soit  $x$ . Le graphe des conflits de la figure 3.2 est par exemple composé d'une unique composante  $C_0$ , alors que celui de la figure 3.9 est composé de trois composantes connexes isomorphes. Sachant

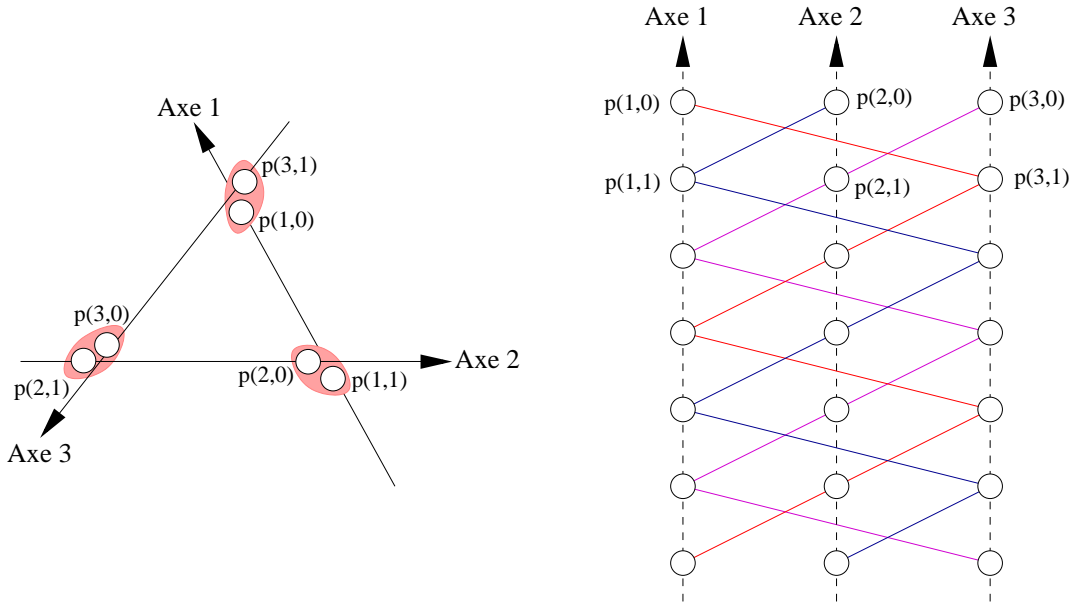


FIG. 3.9 – Une représentation des axes et les trois composantes connexes isomorphe du graphe des conflits correspondant

que les composantes connexes sont isomorphes, il est intéressant de pouvoir les dénombrer. Ceci n'est pas trivial dans notre cas, puisque le graphe des conflits est un graphe infini. Le lemme 4 joue un rôle central dans ce calcul :

**Lemme 4** Les points mobiles  $p(i, x)$  et  $p(i, y)$  sont dans la même composante connexe dans le graphe des conflits si et seulement si il existe un cycle dans le graphe des axes de poids positif  $|y - x|$ .

**Preuve** La figure 3.10 illustre la preuve qui suit. Rappelons que le choix des points mobiles de référence n'influe pas sur le poids d'un cycle dans le graphe des axes. Nous allons donc

les choisir de façon opportune. Dans un premier temps, remarquons que si deux points mobiles sont adjacents dans le graphe des conflits, alors il existe un point d'intersection entre les 2 axes correspondants et donc un sommet dans le graphe des axes. Ainsi, si l'on considère un chemin  $p(a, \alpha), p(b, \beta), p(c, \gamma)$  de longueur 2 dans le graphe des conflits, il existe deux intersections  $I_{a,b}$  et  $I_{b,c}$  dans le graphe des axes. Il faut noter que ces deux intersections ne sont pas forcément consécutives sur l'axe  $b$ ; cependant, le poids du chemin allant de  $I_{a,b}$  à  $I_{b,c}$  sur l'axe  $b$  ne dépend que des points mobiles de référence définis en  $I_{a,b}$  et  $I_{b,c}$ , car les indices des points mobiles de référence des intersections intermédiaires s'annulent deux à deux.

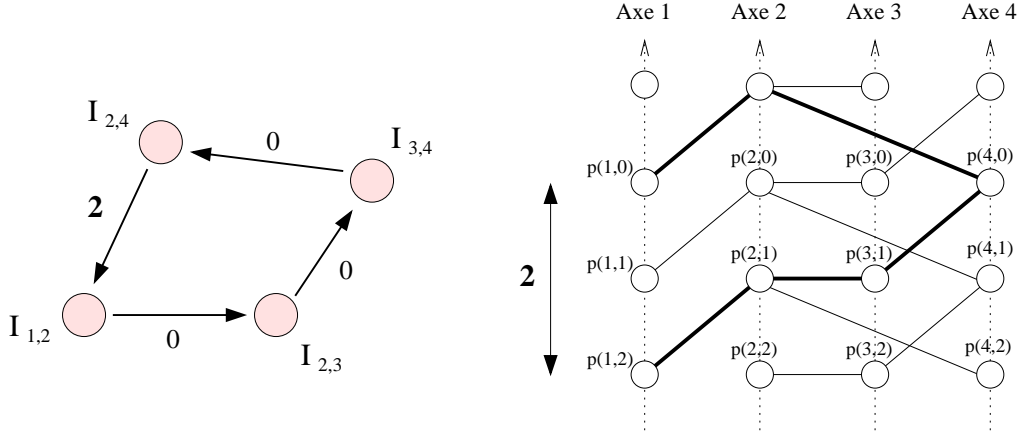


FIG. 3.10 – Illustration du lemme 4

Considérons maintenant un chemin  $Q = (p(i, x), p(j_1, z_1), p(j_2, z_2), \dots, p(j_n, z_n), p(i, y))$  dans le graphe des conflits. Il est évident que ce chemin engendre un cycle  $C$  dans le graphe des axes, dont la liste non exhaustive des sommets est  $\{I_{i,j_1}, I_{j_1,j_2}, \dots, I_{j_n,i}\}$ . Pour chaque intersection  $I_{j_k,j_{k+1}}$ , nous prenons comme points mobiles de référence  $p(j_k, z_k)$  et  $p(j_{k+1}, z_{k+1})$ . Pour l'intersection  $I_{i,j_1}$  (resp.  $I_{j_n,i}$ ), les points mobiles de référence sont  $p(i, x)$  et  $p(j_1, z_1)$  (resp.  $p(j_n, z_n)$  et  $p(i, y)$ ). Calculons maintenant le poids  $w(C)$  du cycle  $C$  :

$$w(C) = (z_1 - z_1) + (z_2 - z_2) + \dots + (z_n - z_n) + (y - x)$$

$$w(C) = y - x$$

On obtient donc bien un cycle dans le graphe des axes de poids  $(y - x)$ . En choisissant correctement l'orientation, on obtient un cycle de poids positif  $|y - x|$ .

Montrons maintenant la réciproque. Soient un cycle  $C$  de poids positif  $w(C)$  dans le graphe des axes, et un axe  $i_0$  inclus dans le cycle  $C$ . Pour plus de simplicité, considérons que les axes sont indexés dans l'ordre croissant, c'est-à-dire qu'on peut écrire  $C = (I_{i_0,i_0+1}, I_{i_0+1,i_0+2}, \dots, I_{k,i_0})$ . Considérons le point mobile  $q_{i_0} = p(i_0, 0)$ . L'existence de  $I_{i_0,i_0+1}$  dans le graphe des axes implique que  $q_{i_0}$  est en conflit avec  $q_{i_0+1} = p(i_0 + 1, \Delta_{i_0,i_0+1})$ . De la même façon,  $q_{i_0+1}$  est en conflit avec  $q_{i_0+2} = p(i_0 + 2, \Delta_{i_0,i_0+1} + \Delta_{i_0+1,i_0+2})$ . On définit ainsi un chemin

$Q = (q_{i_0}, \dots, q_{k+1})$  dans le graphe des conflits, avec  $q_{k+1}$  le point mobile de l'axe  $i_0$  d'indice  $\Delta_{i_0, i_0+1} + \Delta_{i_0+1, i_0+2} + \dots + \Delta_{k-1, k} + \Delta_{k, i_0}$ . Dans la démonstration du lemme 1, nous avons vu que cette valeur était précisément  $w(C)$ . Donc  $p(i_0, 0)$  et  $p(i_0, w(C))$  sont dans la même composante connexe. Les lemmes 2 et 3 nous permettent de conclure que  $p(i, x)$  et  $p(i, x + w(C))$  sont dans la même composante connexe dans le graphe des conflits, pour tout axe  $i$ . ■

Le lemme 4 a pour conséquence le théorème suivant :

**Théorème 1** *Pour toute paire d'indices  $x$  et  $y$ , les composantes connexes  $C_x$  et  $C_y$  sont égales si et seulement si  $(x - y)$  est nul, modulo  $w(G^A)$ . Le graphe des conflits admet donc  $w(G^A)$  composantes connexes.*

**Preuve** D'après le lemme 4,  $p(1, x)$  et  $p(1, x + w(G^A))$  sont dans la même composante connexe. Si  $x = y$  modulo  $w(G^A)$ , cela implique directement que  $C_x = C_y$ .

Inversement, supposons que  $C_x = C_y$ , avec  $x < y$ . Par définition, il existe donc un chaîne  $P_0$  entre  $p(1, x)$  et  $p(1, y)$  dans le graphe des conflits. Soit  $r$  un axe appartenant au cycle ayant le plus petit poids strictement positif dans le graphe des axes. En utilisant la définition 13 et le lemme 4, on montre qu'il existe un chemin  $P_1$  dans le graphe des conflits entre  $p(r, z)$  et  $p(r, z + w(G^A))$ , pour tout  $z \in \mathbb{Z}$ . Le graphe des axes étant connexe, il existe un indice  $z$  pour lequel  $p(1, x)$  et  $p(r, z)$  sont dans la même composante connexe ; on note  $P_2$  le chemin reliant  $p(1, x)$  et  $p(r, z)$  dans le graphe des conflits. Soit  $d = \text{pgcd}((y - x), w(G^A))$  le plus grand diviseur commun (pgcd) à ces deux poids. D'après le théorème de Bezout, on sait qu'il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $d = u(y - x) + vw(G^A)$ . Nous construisons le chemin suivant dans le graphe des conflits (représenté sur la figure 3.11) :

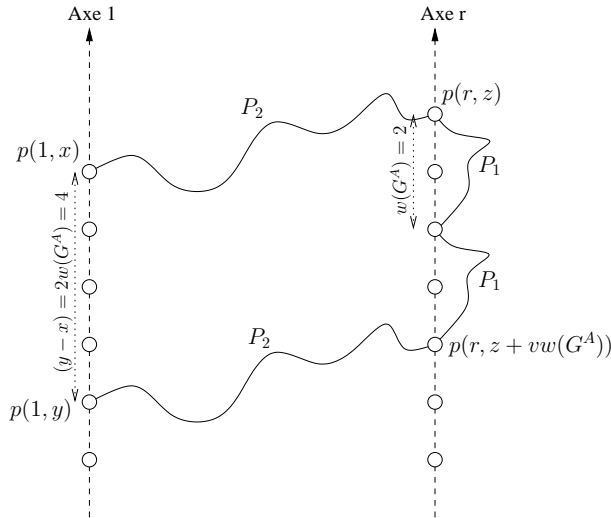


FIG. 3.11 – Cas  $w(G^A) = 2$  et  $y - x = 4$  pour le théorème 1

- En commençant au point mobile  $p(1, x)$ , on utilise le chemin  $P_2$  pour rallier  $p(r, z)$ .
- En utilisant  $v$  fois le chemin  $P_1$ , on se déplace jusqu'à  $p(r, z + vw(G^A))$ .
- On retourne sur l'axe 1 en utilisant le chemin inverse à  $P_2$ , ce qui fait qu'on se trouve au point mobile  $p(1, x + vw(G^A))$ .
- On utilise  $u$  fois le chemin  $P_0$ , ce qui nous amène en  $p(1, x + d)$ .

Nous obtenons de cette manière un chemin entre  $p(1, x)$  et  $p(1, x + d)$  dans le graphe des conflits. Cela implique, d'après le lemme 4, un cycle de poids  $d$  dans le graphe des axes. Par définition de  $w(G^A)$ , on sait que  $w(G^A) \leq d$ . Or, comme  $d$  est le pgcd de  $w(G^A)$  et  $(y - x)$ , il est strictement inférieur à  $w(G^A)$  sauf si  $(y - x)$  est un multiple de  $w(G^A)$ . On en déduit donc que  $d = w(G^A)$  et que  $(y - x)$  est un multiple de  $w(G^A)$ , ce qui revient à dire que  $x = y$  modulo  $w(G^A)$ . ■

Nous venons de prouver un lien très fort entre le graphe des axes et le graphe des conflits, puisque le plus petit poids strictement positif d'un cycle dans le graphe des axes équivaut au nombre de composantes connexes du graphe des conflits. Pour cette raison, nous notons cette quantité aussi bien  $w(G^A)$  que  $w(G^C)$ , selon le contexte.

## 3.2 Résultats sur le graphe des axes

Dans cette section, nous nous intéressons de façon plus précise à la structure du graphe des axes, et à ses conséquences sur le problème de la densité maximum. Dans la section 3.2.1, nous étudions le cas simple où le graphe des axes est un cycle élémentaire. Dans les sections 3.2.3 et 3.2.4, nous élargissons l'étude aux graphes des axes généraux à l'aide des cycles fondamentaux définis à la section 3.2.2.

### 3.2.1 Graphe des axes et cycles

Cette section est dédiée à l'étude du problème de la densité maximum dans le cas où le graphe des axes est un cycle élémentaire de  $n$  arcs, faisant intervenir les axes d'indices 1 à  $n$ . Sans perte de généralité, on suppose que les intersections ont lieu entre des axes d'indices successifs, c'est-à-dire que l'axe  $k$  croise les axes  $(k - 1)$  et  $(k + 1)$ , pour  $k$  variant entre 2 et  $(n - 1)$ . De plus, l'axe  $n$  intersecte l'axe 1. La figure 3.12 illustre ces propos. On note  $w(G^A)$  et  $L(G^A)$  le poids positif et la longueur du cycle dans le graphe des axes.

Les résultats énoncés sont assez intuitifs et ne sont pas prouvés de façon formelle, mais ils permettent de noter l'importance du rôle d'un cycle dans le graphe des axes. D'après le théorème 1, le graphe des conflits admet  $w(G^A)$  composantes connexes,  $w(G^A)$  étant le plus petit poids strictement positif d'un cycle dans le graphe des axes. Dans le cas où le graphe des axes est uniquement composé d'un cycle élémentaire, il suffit donc d'étudier le poids de ce cycle.

La structure du graphe des conflits associé est assez facile à déterminer. Elle est représentée sur la figure 3.13. En effet, nous savons d'après la section 3.1.2 que les composantes connexes du graphe des conflits sont isomorphes, il suffit donc de déterminer la

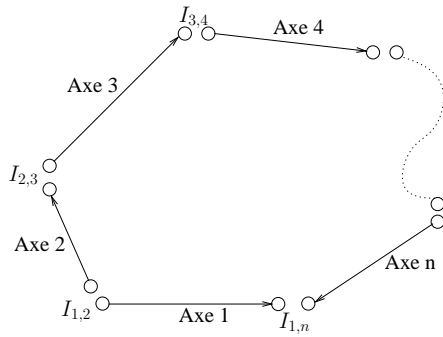


FIG. 3.12 – Etude du cas où le graphe des axes est un cycle élémentaire : graphe des axes

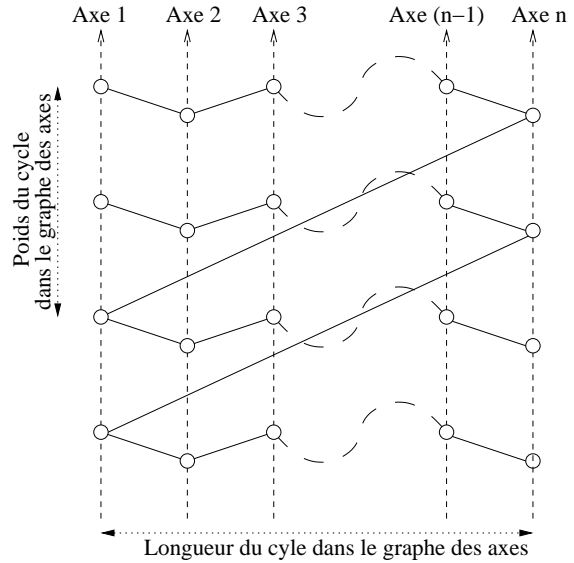


FIG. 3.13 – Etude du cas où le graphe des axes est un cycle élémentaire : graphe des conflits

structure de l'une d'entre elles. D'après l'existence des intersections  $I_{k,k+1}$ , il y a une arête entre un point mobile de l'axe  $k$  et un point mobile de l'axe  $(k + 1)$ , pour  $k$  variant de 1 à  $(n - 1)$ . Cela crée donc une chaîne  $p(1, x_1), p(2, x_2), \dots, p(n, x_n)$  dans le graphe des conflits. En utilisant le lemme 4, on peut dire que  $p(1, x_1)$  et  $p(1, x_1 + w(G^A))$  sont dans la même composante connexe. De plus, il y a une intersection  $I_{1,n}$ , ce qui implique que  $p(n, x_n)$  est en conflit avec  $p(1, x_1 + w(G^A))$ . Les autres composantes connexes sont construites par isomorphisme. Dans la figure 3.13, la longueur (resp. le poids) du cycle dans le graphe des axes est représenté de façon horizontale (resp. verticale) dans le graphe des conflits.

Dans le cas où le poids  $w(G^A)$  du cycle dans le graphe des axes est non nul, le graphe des conflits est donc constitué de  $w(G^A)$  chaînes. Selon les parités de la longueur  $L(G^A)$  et du poids  $w(G^A)$  du cycle dans le graphe des axes, plusieurs cas de figures peuvent se présenter. Nous classons ces possibilités par qualité décroissante de la solution.

**Propriété 1** Si le graphe des axes est un cycle de longueur paire et de poids pair, alors il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense.

La démonstration est immédiate et illustrée par la figure 3.14. Il suffit de colorer en noir (pour le statut autorisé) et en blanc (pour le statut interdit) la première composante connexe du graphe des conflits, puis de prendre la coloration contraire pour la composante connexe isomorphe suivante. Si l'on suppose, sans perte de généralité, que le point mobile  $p(1, x)$  a le statut autorisé, alors, d'après la parité de  $L(G^A)$ ,  $p(1, x + w(G^A))$  a le statut autorisé. Or,  $w(G^A)$  étant pair, on sait que  $p(1, x + w(G^A) - 1)$  a le statut interdit. La solution ainsi obtenue est bien  $\frac{1}{2}$ -dense.

**Propriété 2** Si le graphe des axes est un cycle de longueur impaire et de poids impair, alors il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense.



La démonstration est similaire à la précédente, et un exemple est donné sur la figure 3.15.

**Propriété 3** *Si le graphe des axes est un cycle de longueur paire et de poids impair, alors il existe une solution  $\frac{1}{3}$ -dense.*

La démonstration est ici un peu plus technique. Pour les cas où  $w(G^A)$  est impaire et  $w(G^A) \neq 1$ , la méthode précédente fonctionne et est illustrée sur la figure 3.16.

Il existe un problème lorsque  $w(G^A) = 1$ . Il s'agit en fait de la même difficulté que celle qui est décrite à la section 2.4 lors de l'introduction de la notion de  $\frac{1}{k}$ -densité au détriment du taux d'occupation. Pour remédier à ce problème, on colore le graphe des conflits d'une autre manière. On introduit une troisième couleur (le bleu) qui représente des points mobiles interdits qui jouent un rôle spécial. On colore la chaîne en alternant noir et blanc, et en insérant un point bleu tous les  $L(G^A) + 1$  points mobiles. Par exemple, si  $L(G^A) = 4$ , en notant 0 (resp. 1 et 2) le noir (resp. le blanc et le bleu) la chaîne est colorée :  $(0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, \dots)$ . La figure 3.17 illustre cette construction avec  $L(G^A) = 6$ . Il est facile de voir que cette construction donne bien une solution  $\frac{1}{3}$ -dense.

**Propriété 4** *Si le graphe des axes est un cycle de longueur impaire et de poids pair, alors il existe une solution  $\frac{1}{3}$ -dense.*

Dans le cas où le poids est pair et différent de 0, la construction proposée à la propriété 1 fonctionne et est présentée sur la figure 3.18.

Lorsque le poids  $w(G^A)$  est nul, le graphe des conflits est composé d'une infinité de composantes connexes, chacune étant un cycle de longueur  $L(G^A)$ , donc de taille impaire. Pour colorer le cycle de la première composante connexe, nous utilisons à nouveau une troisième couleur en un des sommets du cycle. Les autres composantes connexes sont colorées en appliquant une permutation circulaire d'ordre 1. Par exemple, si un cycle est coloré  $(0, 1, 0, 1, 2)$  alors le cycle suivant est coloré  $(2, 0, 1, 0, 1)$ . Cette construction est présentée sur la figure 3.19.

Nous résumons tous les résultats de cette partie dans le tableau 3.1. Lorsque  $w(G^A)$  et  $L(G^A)$  ont la même parité, on se rend compte qu'il existe des solutions  $\frac{1}{2}$ -denses.

$w(G^A)$	pair	impair	impair, $\neq 1$	1	pair, $> 0$	0
$L(G^A)$	pair	impair	pair	pair	impair	impair
Densité optimale	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

TAB. 3.1 – Problème de la densité maximum lorsque le graphe des axes est un cycle

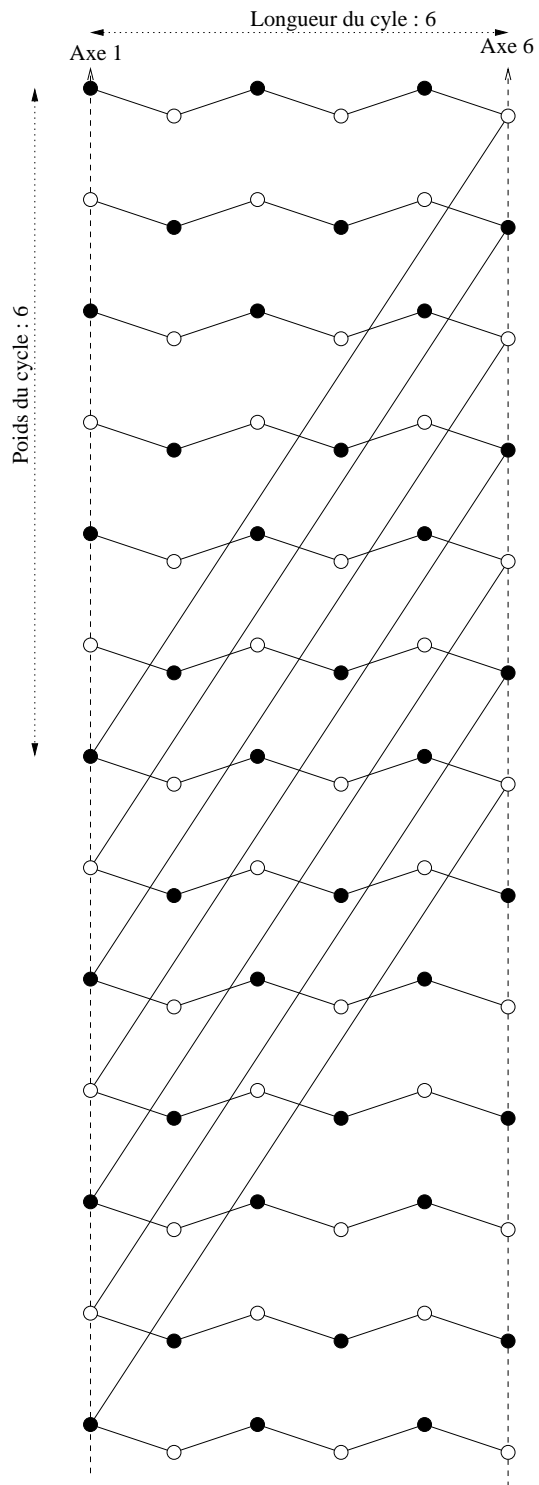


FIG. 3.14 – Graphe des conflits pour un cycle de longueur paire de poids pair

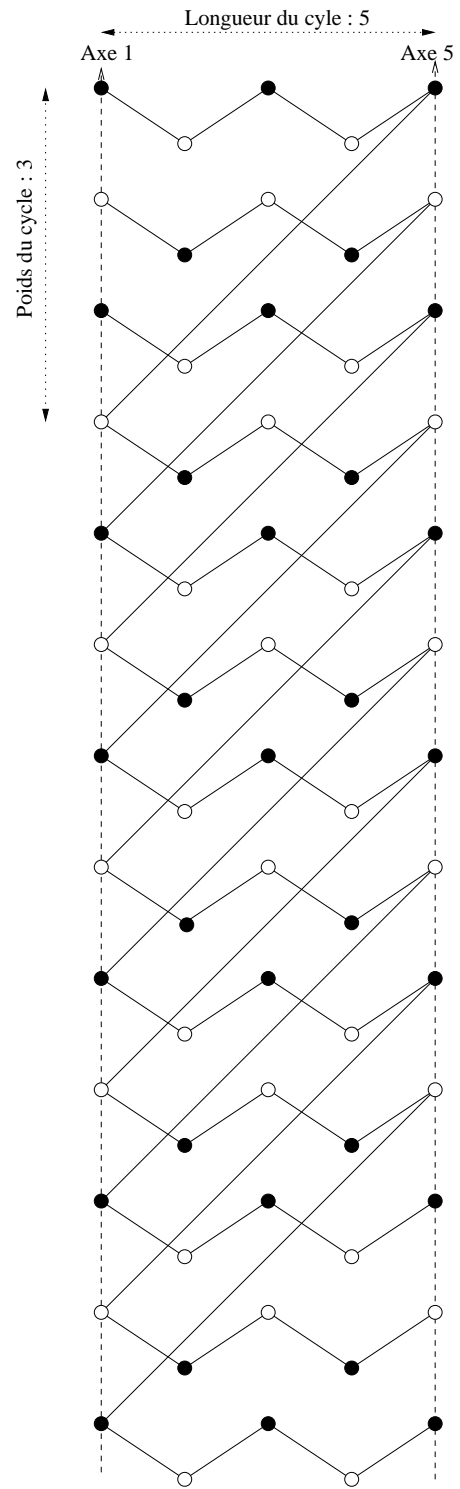


FIG. 3.15 – Graphe des conflits pour un cycle de longueur impaire de poids impair

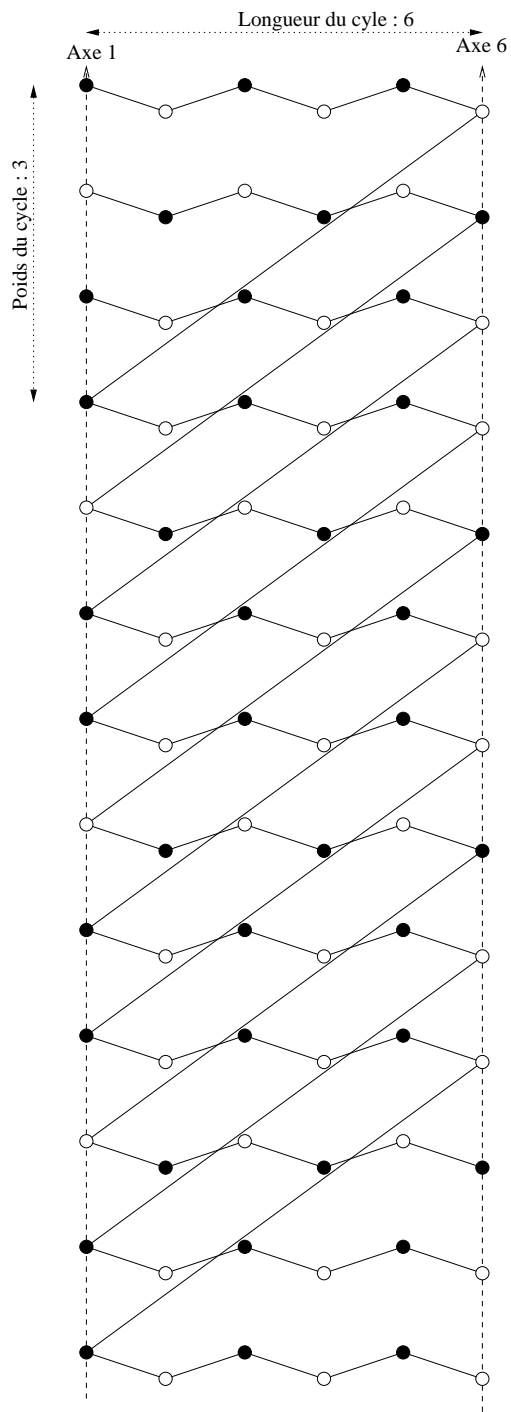


FIG. 3.16 – Graphe des conflits pour un cycle de longueur paire de poids impair différent de 1

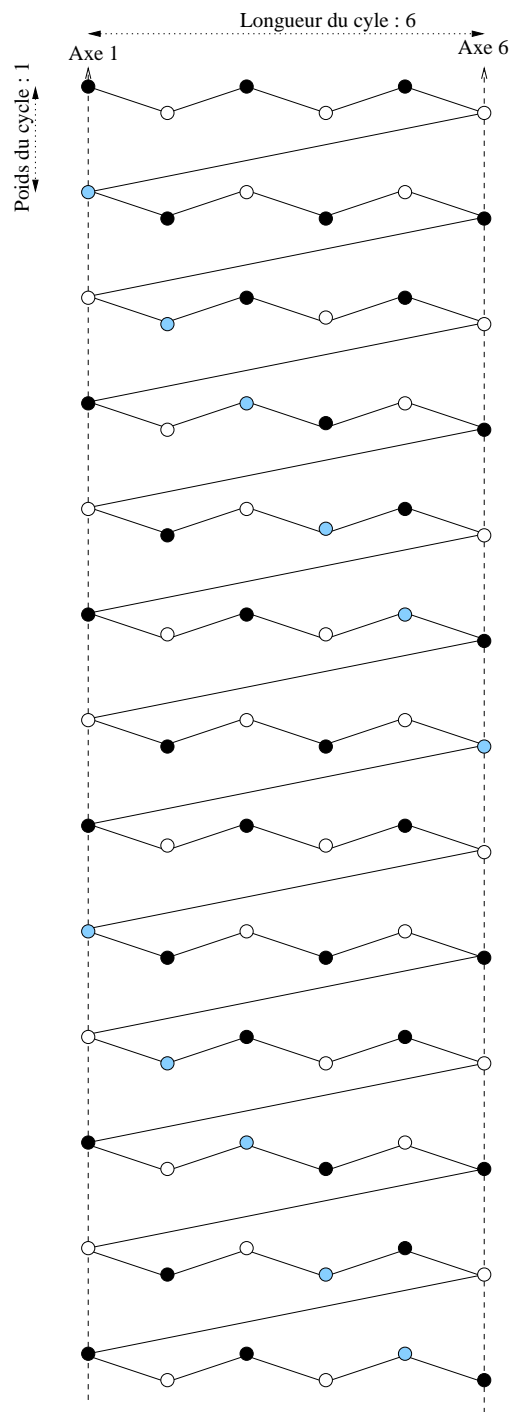


FIG. 3.17 – Graphe des conflits pour un cycle de longueur paire de poids 1

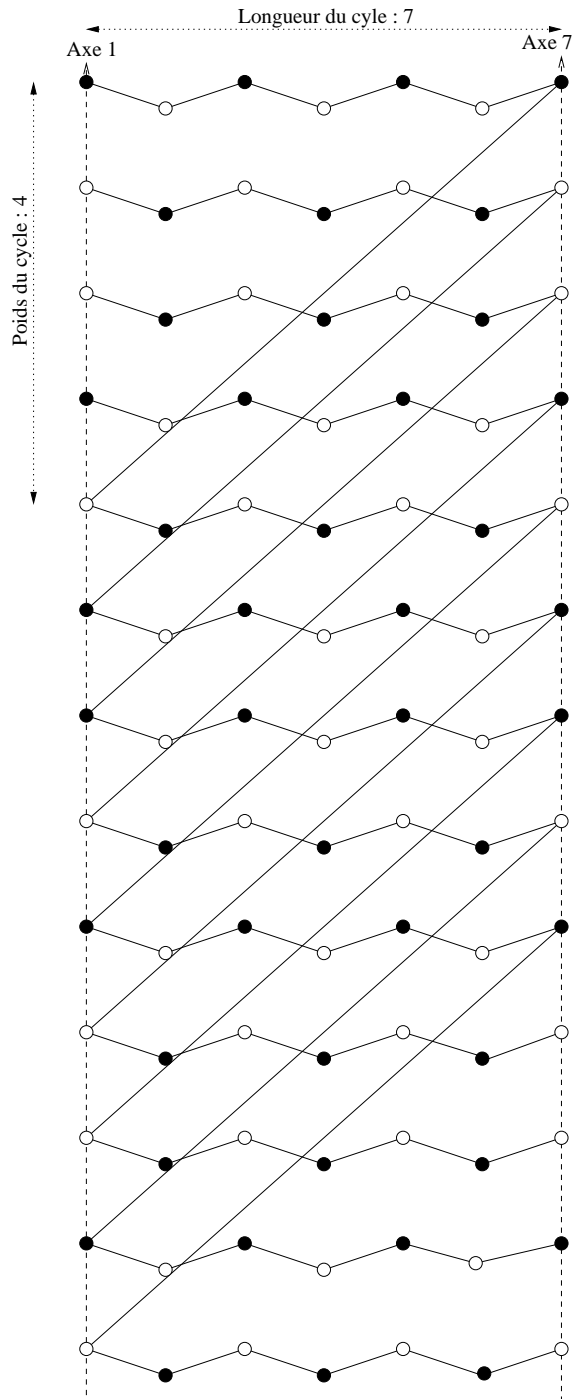


FIG. 3.18 – Graphe des conflits pour un cycle de longueur impaire de poids pair

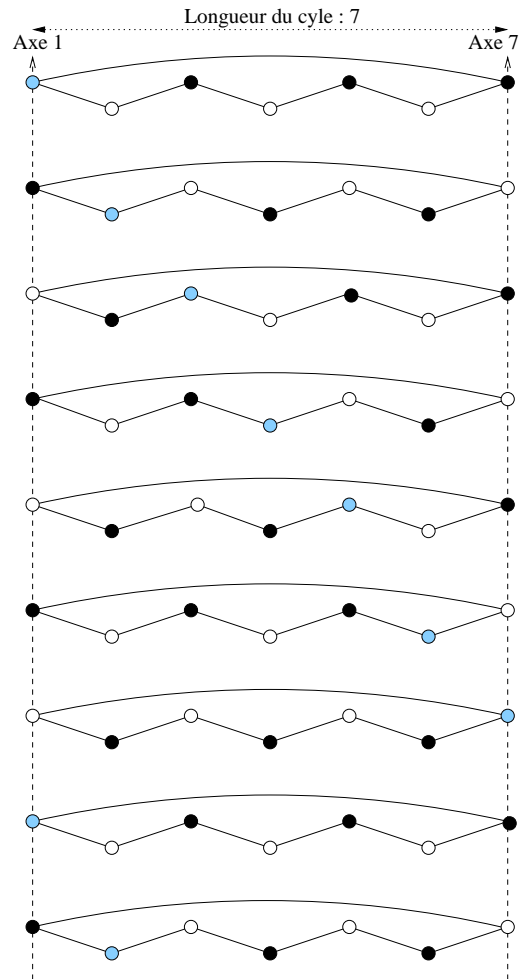


FIG. 3.19 – Graphe des conflits pour un cycle de longueur impaire de poids nul

### 3.2.2 D'un cycle vers une base de cycles

Dans la section précédente, nous avons supposé que le graphe des axes était composé d'un unique cycle. Nous définissons dans cette partie une base de cycles d'un graphe  $G$ , qui permet de décrire tout cycle comme une combinaison linéaire de cycles de cette base.

**Définition 15** Pour un graphe  $G = (V, E)$ , si l'on considère l'addition définie comme une différence symétrique, l'espace puissance de  $E$  est un espace vectoriel de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On l'appelle l'**espace binaire des arêtes**, et il est de dimension  $|E|$ .

**Définition 16** L'**espace binaire des cycles** est un sous-espace de l'espace binaire des arêtes. Il est défini comme le sous-espace des ensembles d'arêtes des cycles du graphe.

L'ensemble des cycles n'est pas utile pour définir l'espace binaire des cycles, il suffit d'en extraire une base. Pour cela, nous utilisons la définition d'un cycle fondamental, qui est la suivante [15] :

**Définition 17** Soient un graphe  $G = (V, E)$ , un arbre couvrant  $T(G)$  et une arête  $e \in E \setminus T$ . Il existe un unique cycle  $\mathcal{C}(e)$  dans  $G' = (V, T + e)$ , qui est appelé **cycle fondamental**.

Par construction, le cycle fondamental est élémentaire. Pour un graphe  $G$  et un arbre couvrant  $T(G)$  donnés, il est possible de construire  $(m - n + 1)$  cycles fondamentaux, où  $m = |E|$  et  $n = |V|$ .

**Propriété 5** Soient un graphe  $G = (V, E)$  et un arbre couvrant  $T(G)$ . L'ensemble des  $(m - n + 1)$  cycles fondamentaux ainsi définis forme une base  $\mathcal{B}$  de l'espace binaire des cycles de  $G$ .

Sur la figure 3.20 un graphe et un arbre couvrant sont dessinés. Les 3 cycles fondamentaux associés sont représentés sur les figures 3.21 à 3.23. Pour construire le cycle de la figure 3.24, il faut faire la somme des 3 cycles fondamentaux.

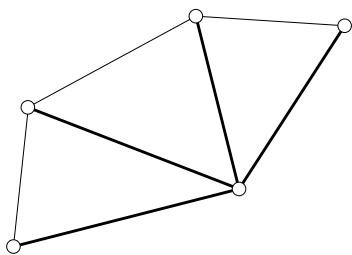


FIG. 3.20 – Graphe  $G$  et un arbre couvrant  $T$  (avec les arêtes en gras)

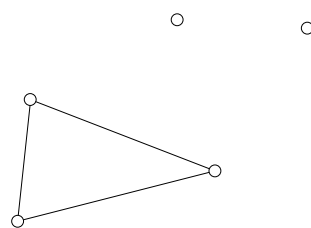


FIG. 3.21 – Premier cycle fondamental

Pour obtenir une base  $\mathcal{B}$  de l'espace binaire des cycles de  $G$ , il faut donc d'abord trouver un arbre couvrant, ce qui peut être fait en  $\max(O(n \log n), O(m))$ . Puis, pour trouver

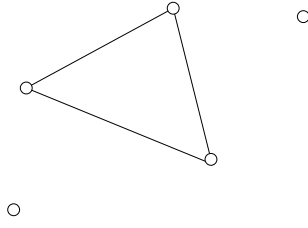


FIG. 3.22 – Second cycle fondamental

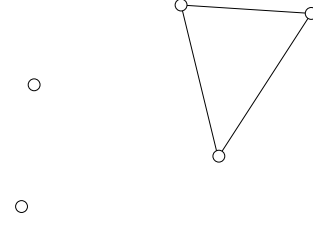


FIG. 3.23 – Troisième cycle fondamental

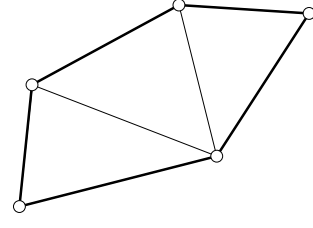


FIG. 3.24 – Somme des 3 cycles fondamentaux

chacun des  $(m - n + 1)$  cycles fondamentaux, une complexité de  $O(n)$  est nécessaire. Cela donne donc une complexité globale en  $O(mn)$ .

Ces cycles fondamentaux vont nous être utiles dans les sections qui suivent, car ils permettent de décrire tous les cycles d'un graphe avec un nombre polynômial de cycles.

### 3.2.3 Caractérisation des solutions $\frac{1}{2}$ -denses

Nous montrons d'abord une première propriété liant un cycle avec les cycles fondamentaux qui le composent, puis un lemme sur la structure d'un cycle élémentaire pour obtenir une solution  $\frac{1}{2}$ -dense, et enfin un théorème sur la nature de l'ensemble des cycles fondamentaux. Par abus de langage, on dira qu'un cycle dans le graphe des axes est  $\frac{1}{k}$ -dense si les axes qui le composent sont  $\frac{1}{k}$ -denses.

**Propriété 6** *Un cycle a la même parité en longueur (resp. en poids) que la parité de la somme des longueurs (resp. des poids) des cycles fondamentaux qui le compose.*

Si on note  $C$  un cycle de longueur  $L$  et de poids  $w$ , et  $C_i, i = 0, \dots, r$  les cycles fondamentaux qui le compose avec  $L_i$  et  $w_i$  les longueurs et les poids des cycles fondamentaux, cela signifie que  $L = \sum_{i=0}^{i=r} L_i \pmod 2$  et  $w = \sum_{i=0}^{i=r} w_i \pmod 2$ . La démonstration est assez évidente, car l'addition a lieu dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , donc seuls sont présents dans le cycle  $C$  les arcs qui ont été utilisés un nombre impair de fois.

Afin de caractériser les graphes des axes admettant une solution  $\frac{1}{2}$ -dense, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 5** *Si un cycle élémentaire  $C$  de poids  $w$  et de longueur  $L$  est  $\frac{1}{2}$ -dense alors  $L$  et  $w$  ont la même parité.*

**Preuve** La preuve est illustrée par la figure 3.25. On note  $w_0$  à  $w_{L-1}$  les poids des arcs  $a_0$  à  $a_{L-1}$  du cycle élémentaire, et on se place sur le point mobile situé sur l'arc  $a_0$  au point d'intersection  $I_{0,L-1}$ . On suppose, sans perte de généralité, que ce point mobile est de statut 0 (correspondant au statut autorisé). En colorant de proche en proche les points mobiles de l'arc  $a_0$ , on obtient que le statut du point  $I_{0,1}$  de l'arc  $a_0$  est  $(0 + w_0) = w_0 \pmod 2$ . Au point  $I_{0,1}$ , ce point mobile de  $a_0$  est en conflit avec un point mobile de  $a_1$ ,

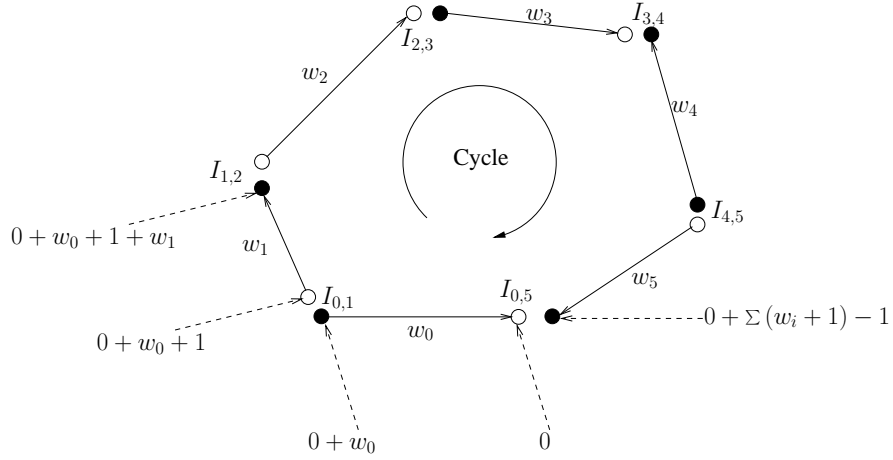


FIG. 3.25 – Cycle élémentaire  $\frac{1}{2}$ -dense

ce qui engendre que ce dernier doit être de statut opposé au premier. Le point mobile de  $a_1$  en  $I_{0,1}$  est donc de statut  $(w_0 + 1) \bmod 2$ . En raisonnant de la même façon, on obtient que le point mobile de  $a_1$  en  $I_{1,2}$  a pour statut  $(w_0 + 1 + w_1) \bmod 2$ . En itérant de proche en proche, on aboutit au fait que le point mobile de  $a_{L-1}$  en  $I_{0,L-1}$  a pour statut  $(w_0 + 1 + w_1 + 1 + \dots + w_{L-2} + 1 + w_{L-1}) \bmod 2$ , soit  $\left(\sum_{i=0}^{i=L-1} w_i + L - 1\right) \bmod 2$ . Pour que le graphe soit  $\frac{1}{2}$ -dense, il faut donc que ce dernier point mobile ne soit pas en conflit avec le point mobile de  $a_0$  en  $I_{0,L-1}$ . Cela revient à dire que  $\left(\sum_{i=0}^{i=L-1} w_i + L - 1\right) = 0 + 1 \bmod 2$ , et donc que  $w = \sum_{i=0}^{i=L-1} w_i = L \bmod 2$ . ■

A première vue, il semble étonnant que le lemme 5 ne soit pas une équivalence au regard de la preuve. Même si cela n'est pas intuitif, il existe bien des cycles élémentaires ayant la même parité en poids et en longueur mais pour lesquels il n'existe pas de solution  $\frac{1}{2}$ -dense. La figure 3.26 en est un exemple, puisque le cycle  $C_1$  a une longueur de 12 et un poids de 10. Ceci vient du fait que d'autres cycles élémentaires, n'ayant pas la même parité de longueur et de poids, peuvent être inclus dans le cycle qu'on étudie. Dans notre exemple, ce sont les cycles  $C_2$  et  $C_3$  qui posent problème, puisqu'ils ont chacun un poids de 1 et une longueur de 4.

Même si, de façon locale, un cycle fondamental de poids  $w$  et de longueur  $L$ , avec  $w + L$  pair, n'admet pas nécessairement de solution  $\frac{1}{2}$ -dense, on peut montrer que, de façon globale, si chaque cycle fondamental a son poids et sa longueur de même parité, alors il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. On montre même l'équivalence dans le théorème suivant :

**Théorème 2** *Il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si tous les cycles fondamentaux formant une base des cycles ont leur poids et leur longueur de même parité dans le graphe des axes.*

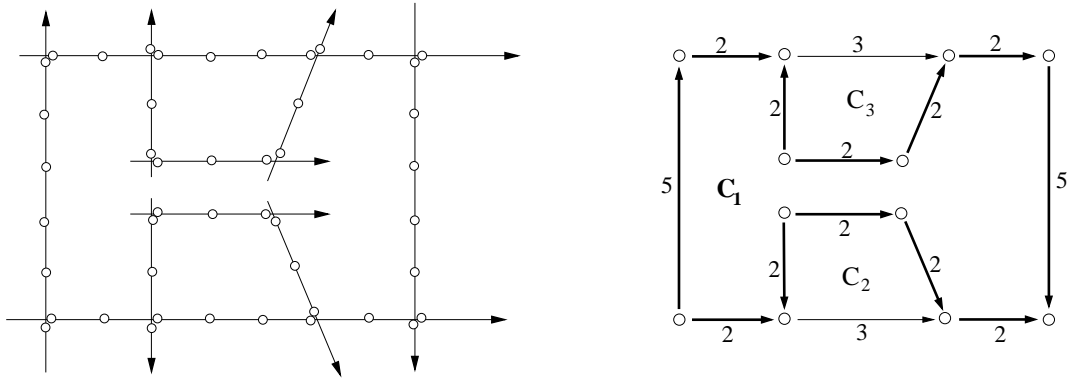


FIG. 3.26 – Représentation des axes et graphe des axes : le cycle fondamental  $C_1$  (en gras) vérifie bien  $L + w$  paire mais n'est pas  $\frac{1}{2}$ -dense

**Preuve** Pour montrer ce théorème, il est important de noter que la condition “tous les cycles fondamentaux ont leur poids et leur longueur de même parité” est équivalente à “tous les cycles ont leur poids et leur longueur de même parité”. Le résultat dans un sens est immédiat (un cycle fondamental est un cycle), et presque direct dans l'autre sens, puisqu'il suffit d'appliquer la propriété 6.

S'il existe un cycle fondamental (donc élémentaire) pour lequel le poids et la longueur sont de parités opposées, d'après le lemme précédent, il n'est pas  $\frac{1}{2}$ -dense. Donc il n'existe pas de solution  $\frac{1}{2}$ -dense à notre problème.

Inversement, supposons que chaque cycle fondamental a son poids et sa longueur de même parité et essayons de construire une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. Pour cela, on choisit un premier axe, numéroté 1 sur lequel on construit une solution  $\frac{1}{2}$ -dense en donnant à un point mobile sur deux le statut autorisé. On choisit ensuite un deuxième axe, connexe à l'axe 1 en  $I_{1,2}$ . Comme il ne faut pas de conflit en  $I_{1,2}$ , on affecte un statut différent aux deux points mobiles de référence des axes 1 et 2 en  $I_{1,2}$  et on étend sur le reste de l'axe 2. On suppose que, de cette façon, on a pu trouver une solution pour  $(i - 1)$  axes et on va montrer qu'on peut étendre notre affectation à l'axe  $i$ . Pour cela, supposons que ce n'est pas possible. Cette démonstration s'appuie sur la figure 3.27.

On choisit les statuts de points mobiles sur l'axe  $i$  en fonction des conflits qui sont générés à la première intersection entre l'axe  $i$  et un des  $(i - 1)$  premiers axes, noté  $i_0$ . On est donc sûr qu'il n'existe pas de conflit entre deux points mobiles autorisés de l'axe  $i$  et de l'axe  $i_0$  qu'il rencontre. Comme on suppose qu'il n'est pas possible d'étendre l'affectation à l'axe  $i$ , cela signifie qu'il existe une intersection  $I_{i,b}$  entre l'axe  $i$  et un axe  $b$  pour laquelle les deux points mobiles de référence, d'indices  $r_{i,b}$  et  $r_{b,i}$ , ont le même statut. Soit  $a$  l'axe coupant l'axe  $i$  juste avant l'axe  $b$  (il en existe forcément un puisqu'il n'y a pas de conflit entre deux points mobiles de même statut entre l'axe  $i$  et l'axe  $i_0$ ). Soit  $e$  l'arc de l'axe  $i$  entre les points mobiles d'indice  $r_{i,a}$  et  $r_{i,b}$ . Dans le graphe composé des  $(i - 1)$  premiers axes auquel on ajoute  $e$ , considérons un cycle  $C$  qui contienne  $e$ . Ce cycle existe forcément,



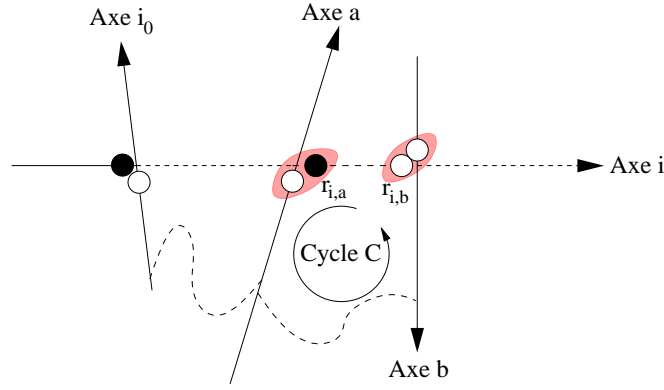


FIG. 3.27 – Illustration de la démonstration du théorème 2

puisque les  $(i - 1)$  premiers axes sont connexes par construction. Si on essaie maintenant de calculer le poids de ce cycle de la même façon que dans le lemme 5, on obtient que ce cycle de poids  $w$  et de longueur  $L$  satisfait l'équation  $w + L = 1 \pmod 2$ , ce qui contredit nos hypothèses. Il est donc possible d'étendre l'affectation à l'axe  $i$ . En itérant de la sorte sur tous les axes, on construit bien une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. ■

Nous venons donc de montrer qu'il est facile de savoir si notre problème admet une solution  $\frac{1}{2}$ -dense, puisqu'il suffit de regarder le poids et la longueur de chaque cycle fondamental du graphe des axes. En supposant que les poids et les longueurs sont aléatoires, sachant que la base  $\mathcal{B}$  est de dimension  $(m - n + 1)$ , la probabilité d'avoir une solution  $\frac{1}{2}$ -dense n'est que de  $\frac{1}{2^{m-n+1}}$ . Ce résultat nous incite à ne pas choisir au hasard les axes, et est l'un des points théoriques important pris en compte dans la recherche d'une solution opérationnelle dans le chapitre 4.

### 3.2.4 Calcul en temps polynômial de $w(G^A)$

Par définition,  $w(G^A)$  est le plus petit poids strictement positif d'un cycle dans le graphe des axes. En utilisant cette définition, le calcul de  $w(G^A)$  semble difficile, car le nombre de cycles dans un graphe complet est factoriel. Dans cette section, on montre qu'il suffit en fait de ne tenir compte que d'un nombre faible de cycles, les  $(m - n + 1)$  cycles fondamentaux du graphe des axes formant une base des cycles. On note  $C_i$  le cycle fondamental  $i$  et  $w_i$  son poids positif.

**Théorème 3** *Le plus petit poids strictement positif d'un cycle dans le graphe des axes est égal au plus grand diviseur commun des poids non nuls des cycles fondamentaux du graphe des axes, soit  $w(G^A) = \text{pgcd}(w_i \neq 0)$ .*

**Preuve** On pose  $d = \text{pgcd}(w_i \neq 0)$ .

On montre d'abord que  $w(G^A)$  est un multiple de  $d$ . Pour cela, considérons un cycle  $C$  de poids  $w(G^A)$ . Les cycles fondamentaux formant une base des cycles, ce cycle peut être écrit comme une combinaison linéaire des cycles fondamentaux, et son poids  $w(G^A)$  est une combinaison linéaire des poids  $w_i$ . Comme les  $w_i$  sont par définition divisibles par  $d$ , on en déduit immédiatement que  $w(G^A)$  est un multiple de  $d$ . Un exemple de décomposition des poids d'un cycle en combinaison linéaire de poids de cycles fondamentaux est donné sur la figure 3.28

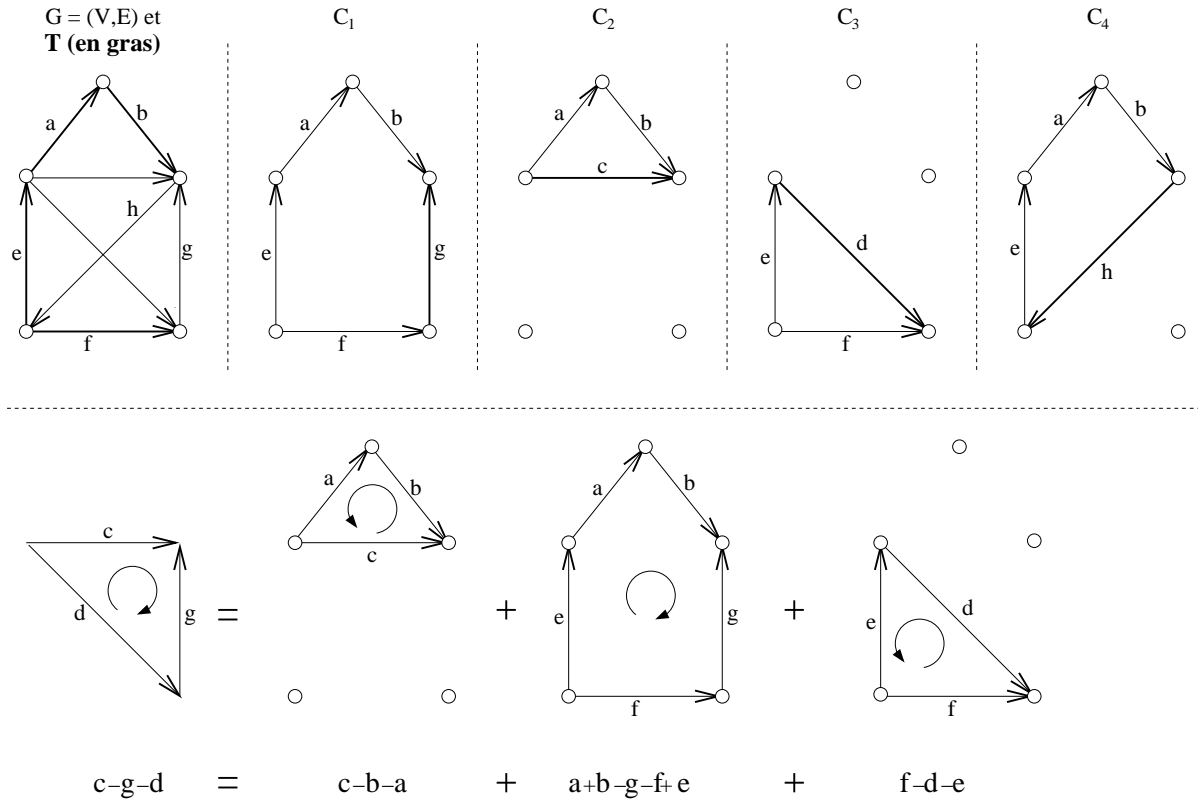


FIG. 3.28 – Décomposition d'un cycle  $C$  en cycles fondamentaux ; la base  $\mathcal{B}$  est formée des 4 cycles fondamentaux  $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

Montrons maintenant que  $w(G^A) \leq d$ . Pour cela, on va exposer un cycle de poids  $d$  dans le graphe des axes. D'après le théorème de Bezout, on sait qu'il existe des  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  tels que  $\sum_i \lambda_i w_i = d$ . On note  $P_{i,i+1}$  un chemin de poids  $p_{i,i+1}$  permettant d'aller du cycle fondamental  $C_i$  au cycle fondamental  $C_{i+1}$ . On appelle  $P_{i+1,i}$  le chemin inverse (donc de poids  $-p_{i+1,i}$ ) permettant d'aller de  $C_{i+1}$  à  $C_i$ .

La construction du cycle est la suivante :

- On part de l'origine du chemin  $P_{1,2}$ . On parcourt  $\lambda_1$  fois le cycle  $C_1$ , puis on emprunte le chemin  $P_{1,2}$ .
- On parcourt  $\lambda_2$  fois le cycle  $C_2$ , puis on emprunte le chemin  $P_{2,3}$ .

- ...
- On parcourt  $\lambda_{n-1}$  fois le cycle  $C_{n-1}$ , puis on emprunte le chemin  $P_{n-1,n}$ .
- On parcourt  $\lambda_n$  fois le cycle  $C_n$ .
- On parcourt le chemin  $P_{n,n-1}$ .
- On parcourt le chemin  $P_{n-1,n-2}$ .
- ...
- On parcourt le chemin  $P_{2,1}$ .

On vient donc de construire un cycle. Regardons maintenant le poids  $p$  de ce cycle. Il suffit de sommer les différentes étapes, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 p &= \lambda_1 w_1 + p_{1,2} + \lambda_2 w_2 + p_{2,3} + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1} + p_{n-1,n} + \lambda_n w_n \\
 &\quad + p_{n,n-1} + p_{n-1,n-2} + \dots + p_{2,1} \\
 &= \sum_i \lambda_i w_i \\
 &= d
 \end{aligned}$$

Le cycle construit est donc de poids  $d$ , ce qui implique que  $w(G^A) \leq d$ , par définition de  $w(G^A)$ . Comme on avait précédemment montré que  $w(G^A)$  est un multiple de  $d$ , cela permet de conclure que  $w(G^A) = d$ , et donc que  $w(G^A)$  est le pgcd des poids non nuls des cycles fondamentaux du graphe des axes. ■

### 3.2.5 Graphe des axes et planarité

A première vue, il semble que le graphe des axes soit un graphe planaire, puisque les sommets de ce graphe sont sur des points d'intersections entre deux axes. Mais il faut faire très attention, car tous les points d'intersections ne sont pas forcément des sommets dans ce graphe. En effet, seuls les points d'intersection entre axes où il existe un conflit entre deux points mobiles correspondent à des sommets dans le graphe des axes. Il est néanmoins intéressant d'observer ce qui se passe lorsque le graphe des axes est planaire, notamment ce que cela implique pour les résultats des sections 3.2.3 et 3.2.4. Lorsque le graphe est planaire, d'après la formule d'Euler, on sait que  $n - m + f = 2$  où  $f$  est le nombre de faces. Il faut donc  $f - 1$  cycles pour former une base des cycles. Cette base est constituée de  $f - 1$  des  $f$  faces du graphe planaire, le plus simple étant bien évidemment de ne pas utiliser la face externe. On peut ainsi prouver qu'il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si toute face a son poids et sa longueur de même parité dans le graphe des axes. De la même façon,  $w(G^A)$  n'est rien d'autre que le plus grand diviseur commun des poids non nuls des faces du graphe des axes. La construction du théorème 3 devient ainsi plus explicite, puisque le poids d'un cycle se décompose en somme des poids des faces internes à ce cycle, comme le montre la figure 3.29.

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8$$

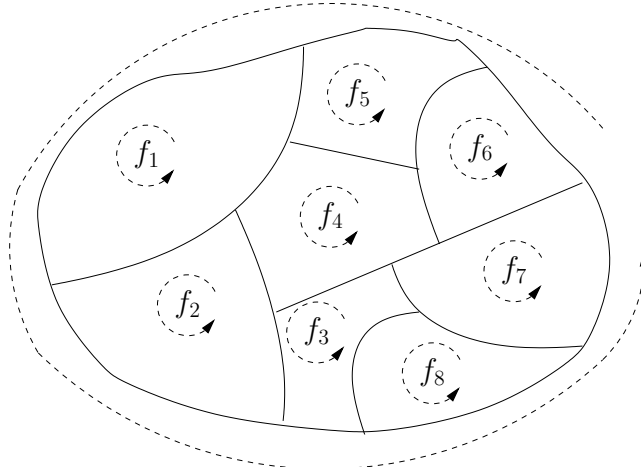


FIG. 3.29 – Décomposition du poids d’un cycle en somme des poids des faces dans le cas où le graphe des axes est planaire

### 3.3 Résultats sur le graphe des conflits

Dans cette section, nous nous concentrons sur l’étude du problème de la densité maximum à travers sa modélisation par le graphe des conflits. Dans la section 3.3.1, nous exprimons des bornes sur la qualité de la solution. Ces bornes permettent de faire le lien entre la densité d’une solution et la coloration du graphe des conflits. Nous traitons dans la section 3.3.2 le cas particulier des graphes des conflits bipartis. Enfin, la section 3.3.2.2 présente un algorithme polynômial de reconnaissance des graphes de conflits bipartis, qui sont, rappelons le, des graphes infinis.

#### 3.3.1 Problème de la densité maximum et coloration

L’approche du problème de la densité maximum par des techniques de coloration du graphe des conflits semble assez naturel, puisqu’une solution de notre problème doit être un stable, et une coloration n’est rien d’autre qu’une partition d’un graphe en plusieurs stables. Nous montrons que la densité d’une solution du problème de densité maximum est, dans certains cas, liée au nombre chromatique  $\chi$  du graphe des conflits.

##### 3.3.1.1 Bornes inférieures au problème de la densité maximum

Nous présentons dans cette section deux bornes inférieures au problème de la densité maximum. La première borne est assez triviale, tandis que la seconde permet de souligner le lien entre la densité d’une solution et la coloration du graphe des conflits.

**Théorème 4** *Pour toute représentation comprenant  $n$  axes, il existe une solution exactement  $\frac{1}{n}$ -dense.*

**Preuve** La preuve se fait par construction. Comme nous cherchons une solution exactement  $\frac{1}{n}$ -dense, il existe un unique point mobile autorisé par axe pour tout intervalle de  $n$  points mobiles consécutifs. Il suffit donc de donner l'indice du point mobile autorisé pour l'intervalle d'indice  $[1, n]$ . Nous procédons de la façon suivante :

- On choisit de façon arbitraire une solution exactement  $\frac{1}{n}$ -dense pour l'axe 1. On note  $\eta_1$  l'indice du point mobile autorisé de l'axe 1 appartenant à l'intervalle  $[1, n]$ . Par conséquent tous les points mobiles  $p(1, \eta_1 + zn)$ , pour  $z \in \mathbb{Z}$ , ont le statut autorisé, et tous les autres points mobiles de l'axe 1 ont le statut interdit. Tout axe  $j$  intersectant l'axe 1 a ainsi des points mobiles interdits, sous peine d'avoir des conflits. Si  $p(1, \eta_1)$  est en conflit avec  $p(j, x)$ , alors l'ensemble des points mobiles de l'axe  $j$  en conflit avec un point mobile autorisé de l'axe 1 est  $\{p(j, x + zn), z \in \mathbb{Z}\}$ , grâce aux conditions 1 et 2. Autrement dit, une solution  $\frac{1}{n}$ -dense sur l'axe 1 peut interdire au plus un indice dans l'intervalle  $[1, n]$  par axe.
- De façon générale, pour le  $i^{\text{ème}}$  axe, on définit une solution exactement  $\frac{1}{n}$ -dense en choisissant, de façon arbitraire, un indice disponible dans l'intervalle  $[1, n]$ . Comme les  $(i - 1)$  étapes précédentes ont interdit au plus  $(i - 1)$  indices dans l'intervalle  $[1, n]$ , un tel choix est toujours possible.

Cette construction génère donc une solution exactement  $\frac{1}{n}$ -dense pour une représentation avec  $n$  axes. ■

Ce premier résultat donne une borne inférieure au problème de la densité maximum ; cette borne dépend du nombre d'axes présents dans le problème. Dans le cas de la circulation aérienne, nous avons à traiter un nombre de vols très important, de l'ordre de 35000 par jour, avec environ 15000 origines-destinations différentes. Cette borne ne peut donc pas être satisfaisante d'un point de vue opérationnel. Nous présentons dans le théorème 5 une borne qui est liée au nombre chromatique  $\chi$  du graphe des conflits.

**Théorème 5** *Si le graphe des conflits est  $\chi$ -colorable et  $w(G^C) \geq \chi$  alors il existe une solution  $\frac{1}{2\chi-1}$ -dense.*

**Preuve** Soit une coloration  $\mu : V^C \rightarrow [0, \chi - 1]$  du graphe des conflits  $G^C$ . On utilise cette coloration pour colorer uniquement la composante connexe  $C_0$ . La figure 3.30 propose une 3-coloration de la composante connexe  $C_0$  d'un graphe des conflits. Il est important de noter que, par définition, on peut colorer de façon indépendante les différentes composantes connexes  $C_\alpha$ . On note  $\lambda_\alpha$  la coloration de la composante  $C_\alpha$  et  $\lambda$  la coloration globale, composée des différentes  $\lambda_\alpha$ . On rappelle que les composantes connexes sont isomorphes, et plus précisément que la fonction  $\varphi_\alpha : p(i, x) \mapsto p(i, x - \alpha)$  est une bijection de  $C_\alpha$  vers  $C_0$ . Pour toute permutation  $\pi$  de  $[0, \chi - 1]$ , la fonction  $\pi \circ \mu \circ \varphi_\alpha$  est une coloration propre de la composante connexe  $C_\alpha$ . Dans notre cas, nous prenons comme permutation  $\pi$  la simple translation  $\varphi_\alpha^{-1}$  modulo  $\chi$ , c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in [0, w(G^C)], \forall p(i, x) \in C_\alpha, \lambda_\alpha(p(i, x)) = [\mu(p(i, x - \alpha)) + \alpha] \bmod \chi$$

Autrement dit, la couleur  $c + \alpha \pmod{\chi}$  dans la composante connexe  $C_\alpha$  joue le rôle de la couleur  $c$  dans la composante connexe  $C_0$ . La figure 3.31 propose la coloration des composantes  $C_1$  et  $C_2$  en utilisant la méthode définie ci-avant.

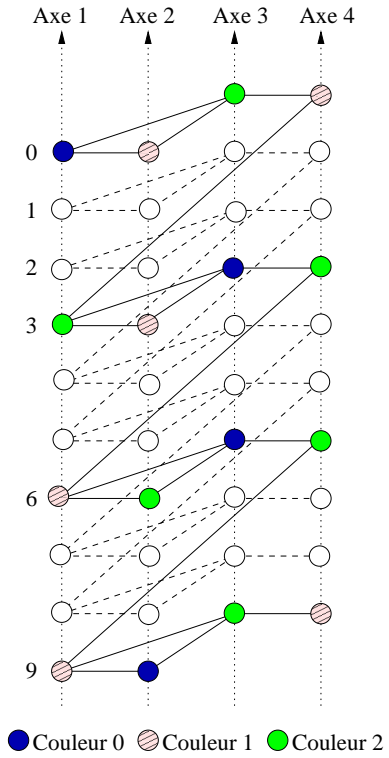


FIG. 3.30 – Une 3-coloration de  $C_0$

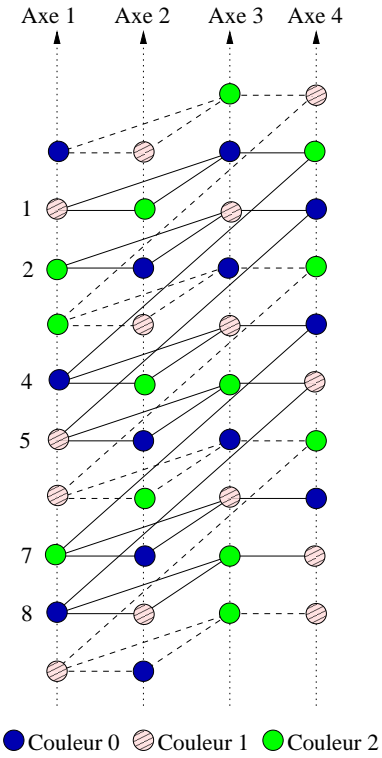


FIG. 3.31 – Coloration des autres composantes connexes

Pour définir une affectation des statuts autorisé/interdit aux points mobiles, il suffit de choisir une couleur  $c$  comme étant autorisée, les autres couleurs représentant les points mobiles interdits. Par définition, cette solution est réalisable, puisqu'une couleur est un stable du graphe des conflits  $G^C$ . Par exemple, sur la figure 3.31, on peut arbitrairement choisir la couleur 0. Dans ce cas, on obtient une solution  $\frac{1}{4}$ -dense. On peut noter ici l'importance du choix de la couleur car, en choisissant la couleur 1 ou 2, on obtient une solution de densité  $\frac{1}{5}$ .

Même si le choix de la couleur est important, on montre maintenant que, quelle que soit la couleur  $c$  choisie, cela définit une solution au moins  $\frac{1}{2\chi-1}$ -dense. Une condition suffisante est de prouver que chaque couleur est présente au moins une fois sur toute séquence de  $(2\chi - 1)$  points mobiles consécutifs. On considère une suite  $p(i, x), \dots, p(i, x + 2\chi - 2)$  quelconque de  $(2\chi - 1)$  points mobiles consécutifs sur un axe  $i$ . Si aucun de ces points mobiles n'appartient à  $C_0$ , on peut écrire que  $\lambda(p(i, k + 1)) = [\lambda(p(i, k)) + 1] \pmod{\chi}$  pour tout  $k$  appartenant à  $[x, x + 2\chi - 3]$ . Toutes les couleurs sont ainsi parcourues par les  $\chi$  premiers points mobiles de l'intervalle. Comme  $\chi \leq 2\chi - 1$  pour  $\chi \geq 1$ , il existe au

moins un point mobile de chaque couleur sur cet intervalle. Supposons maintenant qu'il existe un point mobile de la suite  $p(i, x), \dots, p(i, x + 2\chi - 2)$  qui appartienne à  $C_0$ ; on note  $y_0$  l'indice du premier point mobile de la suite qui est dans  $C_0$ . De la même façon que précédemment, dans le cas où  $y_0 > x + \chi - 1$ , on peut conclure que chaque point mobile  $p(i, x), \dots, p(i, x + \chi - 1)$  est affecté à une couleur différente. Il reste donc à étudier le cas où  $y_0 \leq x + \chi - 1$ . Dans ce cas, l'intervalle  $I = [y_0, x + 2\chi - 2]$  est de longueur au moins  $\chi$ . De plus, d'après le théorème 1,  $y_0$  est le seul indice de l'intervalle  $[y_0, y_0 + w(G^C) - 1]$  dont le point mobile correspondant de l'axe  $i$  appartienne à  $C_0$ . Or, par hypothèse, on sait que  $w(G^C) \geq \chi$ . Donc a fortiori  $y_0$  est le seul indice de  $[y_0, y_0 + \chi - 1]$  dont le point mobile associé soit dans  $C_0$ . Cela signifie donc que, pour cet intervalle de longueur  $\chi$ , toutes les couleurs sont utilisées exactement une fois. En choisissant une couleur pour le statut autorisé des points mobiles, on obtient bien une solution  $\frac{1}{2\chi-1}$ -dense. ■

Cette preuve montre que toute couleur peut jouer le rôle de statut autorisé. De plus, le choix de la coloration de  $C_0$  est complètement arbitraire, de même que le fait de choisir une translation  $\varphi_\alpha^{-1}$  parmi l'ensemble des permutations  $\pi$  possibles. Tous ces choix nous laissent penser qu'il est en fait possible d'obtenir des résultats plus forts sur la densité d'une solution. Nous posons la conjecture suivante :

**Conjecture 1** *Si le graphe des conflits est  $\chi$ -colorable et  $w(G^C) \geq \chi$ , alors il existe une solution  $\frac{1}{\chi+1}$ -dense.*

Cette conjecture est évidemment vérifiée pour  $\chi = 2$  puisque  $2\chi - 1 = \chi + 1$ .

### 3.3.1.2 Bornes supérieures au problème de la densité maximum

Dans cette section, nous apportons des résultats moins positifs sur la densité d'une solution, puisque nous proposons des bornes supérieures au problème de la densité maximum. La première borne confirme le lien fort qui existe entre densité et nombre chromatique  $\chi$  du graphe des conflits :

**Théorème 6** *Si il existe une solution  $\frac{1}{k}$ -dense au problème de la densité maximum, alors le graphe des conflits est  $k$ -colorable.*

**Preuve** Soit  $N_0$  l'ensemble des points mobiles autorisés dans une solution  $\frac{1}{k}$ -dense. Cet ensemble est un stable, puisque deux points mobiles ayant le statut autorisé ne peuvent pas être en conflit. Notons  $N_l$  l'ensemble des points mobiles définis par :

$$N_l = \{p(i, j) | p(i, j - l) \in N_0 \wedge p(i, j) \notin \{N_0, N_1, \dots, N_{l-1}\}\}$$

On définit cet ensemble pour  $l$  allant de 1 à  $(k - 1)$ . Par construction, les  $N_l$  sont isomorphes à des sous-ensembles de  $N_0$ , ils forment donc des stables dans le graphe des conflits. On peut noter que  $N_p$  et  $N_q$  sont disjoints si  $p \neq q$ , puisqu'une condition nécessaire pour qu'un point mobile appartienne  $N_l$  est qu'il soit exclus de tous les ensembles  $N_0$  à  $N_{l-1}$ . Pour conclure que  $N_0, \dots, N_{k-1}$  forment une partition du graphe des conflits, il nous

reste à montrer que la réunion des  $N_l$  est l'ensemble des points mobiles. Soit  $\Omega$  cette réunion :

$$\Omega = \bigcup_{l=0:k-1} N_l$$

Prenons un point mobile  $p(j, t)$  quelconque et montrons qu'il appartient à  $\Omega$ . La solution étant  $\frac{1}{k}$ -dense, il existe un point mobile  $p(j, s)$  dans  $N_0$  tel que la distance  $d = t - s$  vérifie l'inégalité  $0 \leq d \leq k - 1$ . Par construction, le point mobile  $p(j, t)$  est soit dans un des ensembles  $N_0, \dots, N_{d-1}$ , soit dans l'ensemble  $N_d$ .

Les  $N_l$  forment donc une partition du graphe des conflits en  $k$  stables, ce qui revient à dire que le graphe des conflits est  $k$ -colorable. ■

Nous tirons comme corollaire direct une borne supérieure au problème de la densité maximum :

**Corollaire 1** *Soit  $\chi$  le nombre chromatique du graphe des conflits  $G^C$ . La densité de toute solution réalisable du problème de la densité maximum est inférieure ou égale à  $\frac{1}{\chi}$ .*

Ce corollaire nous donne une borne supérieure sur la densité maximum d'une solution. Par exemple, si le graphe des conflits n'est pas biparti, il n'est pas possible de trouver de solution avec une densité supérieure à  $\frac{1}{3}$ .

Dans la section 3.3.1.1, nous avons montré que si  $w(G^C) \geq \chi$  alors il existe une solution  $\frac{1}{2\chi-1}$ -dense, et émis la conjecture qu'une solution  $\frac{1}{\chi+1}$ -dense existe, ce qui réduirait à 1 l'écart entre les bornes supérieure et inférieure. Lorsque  $w(G^C) < \chi$ , les résultats obtenus sont moins encourageants. Le théorème qui suit montre que la densité maximum peut être arbitrairement faible :

**Théorème 7** *Pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe une instance pour laquelle aucune solution  $\frac{1}{k}$ -dense n'existe, même si le graphe des conflits associé est biparti.*

**Preuve** Dans un premier temps, nous construisons un graphe des conflits biparti qui n'admet pas de solution  $\frac{1}{k}$ -dense, puis nous exposons la représentation par axe correspondante.

Le graphe des conflits est constitué de  $k$  axes du côté gauche, notés  $a_0, \dots, a_{k-1}$ , et de  $K = k^k$  axes du côté droit, notés  $b_0, \dots, b_{K-1}$ . L'idée de base est de bloquer toute solution  $\frac{1}{k}$ -dense sur les axes de gauche en se servant des axes de droite. Plus précisément, toute solution  $\frac{1}{k}$ -dense sur la partie gauche engendrera  $k$  points mobiles interdits successifs sur un axe de droite.

Soit l'intervalle d'indices  $I = [0, 1, \dots, k - 1]$ . Toute solution  $\frac{1}{k}$ -dense a au moins un point mobile de chaque axe dont l'indice appartient à  $I$ . On peut donc associer à chaque solution  $\frac{1}{k}$ -dense un  $k$ -uplet  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  de  $I^k$  représentant le plus petit indice des points mobiles autorisés des axes  $a_0, \dots, a_{k-1}$ . Autrement dit, pour tout  $i \in I$ , le point mobile  $p(a_i, x_i)$  a le statut autorisé, alors que les points mobiles  $p(a_i, x_l)$  ont le statut



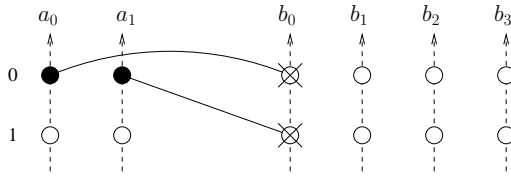


FIG. 3.32 – Construction pour  $x = (0, 0)$

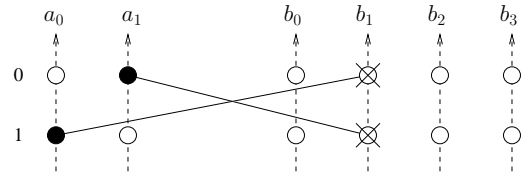


FIG. 3.33 – Construction pour  $x = (1, 0)$

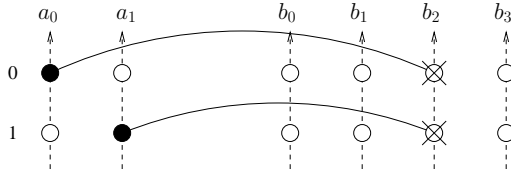


FIG. 3.34 – Construction pour  $x = (0, 1)$

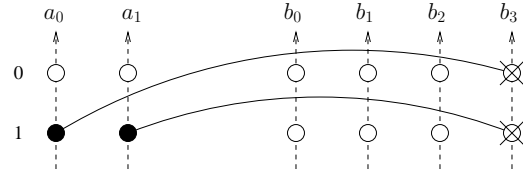


FIG. 3.35 – Construction pour  $x = (1, 1)$

interdit pour  $0 \leq l < i$ . Ce  $k$ -uplet peut être vu comme l'écriture en base  $k$  du nombre  $x = x_0 + x_1k + \dots + x_{k-1}k^{k-1}$ . Le nombre distinct de  $k$ -uplets est donc évidemment  $k^k$ , ce qui correspond au nombre d'axes présents du côté droit. Pour chaque  $k$ -uplet  $x = (x_0, \dots, x_{k-1})$ , on crée une arête entre les points mobiles  $p(a_l, x_l)$  et  $p(b_x, l)$ ,  $l$  variant entre 0 et  $(k-1)$ . De cette façon, on bloque  $k$  points mobiles successifs sur l'axe  $b_x$ . Les figures 3.32 à 3.35 détaillent la construction pour  $k = 2$ . Afin d'obtenir le graphe des conflits, on répète les conflits générés de façon périodique. Le graphe résultant pour  $k = 2$  est représenté sur la figure 3.36. Le graphe obtenu est bien biparti, puisqu'il n'y a pas d'arête entre deux sommets situés du même côté. De plus, ce graphe respecte bien la condition d'unicité, qui exige qu'un point mobile de l'axe  $i$  soit en conflit avec au plus un point mobile d'un autre axe  $j$ . En effet, un nombre  $x$  possède une unique représentation dans une base  $k$ .

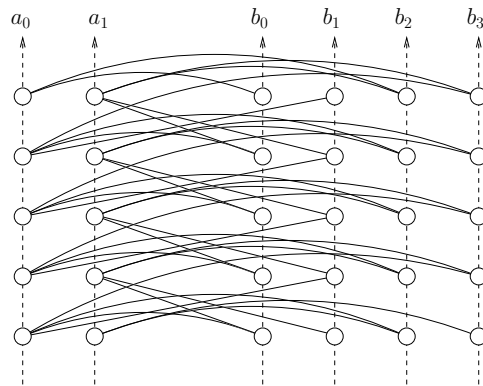


FIG. 3.36 – Graphe des conflits pour  $k = 2$

Il est clair qu'il n'existe pas de solution  $\frac{1}{k}$ -dense pour ce graphe des conflits, puisque toute solution  $\frac{1}{k}$ -dense sur les axes situés à gauche engendre  $k$  points mobiles consécutifs

interdits sur un axe du côté droit.

Pour compléter la démonstration, nous devons maintenant trouver une instance du problème de la densité maximum dont le graphe des conflits est celui présenté ci-avant. Cette représentation peut être obtenue de la façon suivante : les axes présents sur le côté gauche du graphe des conflits sont représentés verticalement, et ceux du côté droit horizontalement. A chaque intersection, un point mobile de chaque axe est présent. Il n'y a pas de point mobile entre les intersections sur les axes  $b_j$ . Le nombre de points mobiles entre les intersections consécutives est choisi en accord avec le graphe des conflits pour les axes  $a_i$ . On note  $\gamma_{i,j}$  l'indice du point mobile de l'axe  $b_j$  tel que  $p(a_i, 0)$  et  $p(b_j, \gamma_{i,j})$  soient en conflit. On doit donc construire notre instance de telle façon que  $\Delta_{a_i, b_j} = \gamma_{i,j}$  pour tous les axes. Supposons que l'instance a été construite jusqu'à l'axe  $b_j$  et qu'on veuille construire l'axe  $b_{j+1}$ . On représente l'axe  $b_{j+1}$  horizontalement, et on place  $n$  points mobiles sur l'axe  $a_0$  entre les intersections de  $a_0$  avec  $b_j$  et  $b_{j+1}$ . La vitesse n'étant pas forcément constante sur un axe, on peut disposer un nombre différent de points mobiles entre les intersections d'un autre axe  $a_i$  avec les axes  $b_j$  et  $b_{j+1}$ . On place plus précisément  $(n + \gamma_{i,j} - \gamma_{i,j+1})$  points mobiles sur l'axe  $a_i$  entre les intersections de l'axe  $a_i$  avec les axes  $b_j$  et  $b_{j+1}$ . La figure 3.37 décrit cette situation. Comme la représentation doit correspondre au graphe des conflits jusqu'à l'axe  $b_j$ , il y a un conflit entre  $p(a_i, i)$  et  $p(b_j, i + \gamma_{i,j})$ . Si l'on regarde ce qui se passe à l'intersection des axes  $a_i$  et  $b_{j+1}$ , on observe un conflit entre  $p(b_{j+1}, i + n)$  et  $p(a_i, (i - \gamma_{i,j}) + (n + \gamma_{i,j} - \gamma_{i,j+1}))$ ; ceci implique que  $\Delta_{a_i, b_{j+1}} = \gamma_{i,j+1}$ , et on obtient donc bien le résultat escompté.

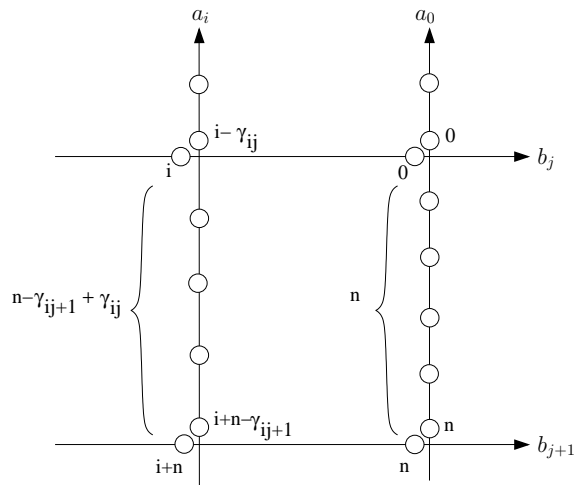


FIG. 3.37 – Construction de l'instance : ajout de l'axe  $b_{j+1}$

Pour que cette construction soit valide, il suffit de prendre  $n$  assez grand pour que  $n + \gamma_{i,j} - \gamma_{i,j+1}$  soit positif. Il est important de noter que ce nombre  $n$  n'est pas forcément le même entre deux intersections consécutives. Comme on a  $-k^k < \gamma_{i,j} < k^k$ , il suffit de prendre  $n$  plus grand que  $2(k^k - 1)$  pour être sûr d'avoir une construction valide. L'exemple

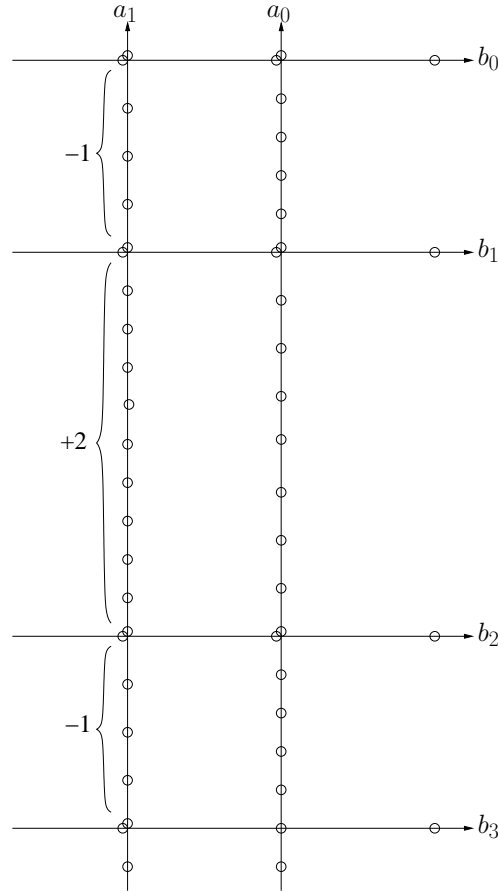


FIG. 3.38 – Une instance correspondant au graphe des conflits de la figure 3.36

pour  $k = 2$  est donné sur la figure 3.38. Les valeurs de  $\gamma_{i,j+1} - \gamma_{i,j}$  sont représentées entre les intersections consécutives de l'axe  $a_1$  avec les axes  $b_j$ . ■

Ce théorème 7 prouve qu'il n'est pas possible de garantir une densité minimale dans le cas général. Bien que très négatif sur la dégradation possible de la densité des solutions, il ne remet pas en cause la recherche de solution  $\frac{1}{k}$ -denses, avec des valeurs de  $k$  faibles. En effet, pour ce théorème, l'instance construite dans la preuve contient  $(k^k + k)$  axes. Ainsi, l'instance non  $\frac{1}{5}$ -dense contient 3130 axes.

### 3.3.2 Etude du graphe des conflits biparti

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où le graphe des conflits est 2-colorable, c'est-à-dire biparti. D'après le corollaire 1, on sait qu'on ne peut pas espérer mieux que des solutions  $\frac{1}{2}$ -denses. Le théorème 7 implique qu'il existe des graphes des conflits bipartis pour lesquels la densité peut être arbitrairement proche de 0. A l'inverse, le théorème 5 prouve que, si  $w(G^C) \geq 2$ , il existe une solution  $\frac{1}{3}$ -dense. Cela signifie que tout graphe

des conflits biparti avec plus d'une composante connexe admet une solution de densité  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{3}$ . Nous caractérisons de façon précise les solutions  $\frac{1}{2}$ -denses dans la section 3.3.2.1 par rapport à la structure du graphe des conflits. Pour cela, nous présentons d'abord deux lemmes préliminaires.

**Lemme 6** *Il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si il existe une solution exactement  $\frac{1}{2}$ -dense.*

**Preuve** Si il existe une solution exactement  $\frac{1}{2}$ -dense, cette solution est, par définition,  $\frac{1}{2}$ -dense. Montrons la réciproque. S'il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense, cela signifie que, pour tout axe, chaque point mobile interdit est entouré par deux points mobiles autorisés. Or il ne peut pas y avoir deux points mobiles autorisés successifs sur un axe  $r$ , car cela impliquerait deux points mobiles interdits sur tout axe en conflit avec l'axe  $r$ . Comme il ne peut y avoir successivement deux points mobiles de même statut, la solution est bien exactement  $\frac{1}{2}$ -dense. ■

Comme une solution  $\frac{1}{2}$ -dense est exactement  $\frac{1}{2}$ -dense, la solution opposée, consistant à inverser les statuts autorisés et interdits, est aussi  $\frac{1}{2}$ -dense. Une solution  $\frac{1}{2}$ -dense définit donc une 2-coloration  $\lambda : V^C \mapsto \{0, 1\}$  du graphe des conflits. De la même façon, une 2-coloration définit une solution du problème, en prenant par convention la couleur 1 comme statut autorisé. Par abus de langage, on parle donc de densité d'une coloration, au lieu de densité de la solution induite par la coloration.

Le lemme qui suit donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 2-coloration soit  $\frac{1}{2}$ -dense.

**Lemme 7** *Une 2-coloration est  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si cette 2-coloration est exactement  $\frac{1}{2}$ -dense sur un axe  $i_0$  donné.*

**Preuve** Ce lemme provient du fait que la 2-coloration d'une composante connexe est définie de façon totale par le choix d'une couleur pour un unique sommet. En effet, comme les couleurs doivent alterner le long de tout chemin, deux sommets sont de la même couleur si et seulement si la longueur d'un chemin les reliant est paire. Soient  $p(i, x)$  et  $p(i, x + 1)$  deux points mobiles successifs d'un axe  $i$ , et  $C_\alpha$  la composante connexe à laquelle appartient  $p(i, x)$ . Le graphe des axes étant supposé connexe, on sait qu'il existe un indice  $y$  pour lequel  $p(i_0, y) \in C_\alpha$ . Il existe donc un chemin  $P$  entre  $p(i, x)$  et  $p(i_0, y)$ . En utilisant le lemme 2, on en déduit l'existence d'un chemin isomorphe  $P'$  entre  $p(i, x + 1)$  et  $p(i_0, y + 1)$ . En notant  $l$  la longueur du chemin  $P$ , on en déduit que  $\lambda(p(i, x)) = \lambda(p(i_0, y)) + l \pmod{2}$  et  $\lambda(p(i, x + 1)) = \lambda(p(i_0, y + 1)) + l \pmod{2}$ . Comme l'axe  $i_0$  est exactement  $\frac{1}{2}$ -dense, on en déduit que l'axe  $i$  l'est aussi. ■

Ces deux lemmes aident à la démonstration d'une caractérisation des solutions  $\frac{1}{2}$ -denses dans le graphe des conflits, présentée dans la section suivante.

### 3.3.2.1 Une autre caractérisation des solutions $\frac{1}{2}$ -denses

Dans la section 3.2.3, nous avons montré qu'il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si tout cycle fondamental du graphe des axes a son poids et sa longueur de même parité. Nous montrons, dans le théorème 8, une autre caractérisation des solutions  $\frac{1}{2}$ -denses, qui s'appuie sur le graphe des conflits  $G^C$ . Pour cela, nous avons besoin d'une définition supplémentaire :

**Définition 18** On définit  $L(G^C)$  comme la longueur du plus court chemin entre  $p(1, 0)$  et  $p(1, w(G^C))$  dans le graphe des conflits  $G^C$ .

D'après le théorème 6, il est évident qu'avoir un graphe des conflits biparti est une condition nécessaire pour pouvoir obtenir une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. Cela implique que tous les chemins entre deux points du graphe des conflits ont la même parité. On peut donc écrire que, pour toute 2-coloration  $\lambda$ , on a  $\lambda(p(1, w(G^C))) = \lambda(p(1, 0)) + L(G^C) \pmod{2}$ . On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 8** Il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si le graphe des conflits est biparti et les parités de  $w(G^C)$  et  $L(G^C)$  sont identiques.

**Preuve** Supposons qu'il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. D'après le lemme 6, on sait que la solution est exactement  $\frac{1}{2}$ -dense. Si on note  $\lambda$  la coloration associée, pour tout indice  $x$ , on a  $\lambda(p(1, x)) = \lambda(p(1, 0)) + x \pmod{2}$ , puisque les deux couleurs doivent alterner à chaque point mobile sur un axe donné. De plus, comme  $\lambda$  est une coloration propre, elle doit vérifier  $\lambda(p(1, w(G^C))) = \lambda(p(1, 0)) + L(G^C) \pmod{2}$ . En prenant  $x = w(G^C)$ , on en déduit que  $w(G^C) = L(G^C) \pmod{2}$ .

Inversement, supposons que  $w(G^C) + L(G^C) = 0 \pmod{2}$ . Le graphe des conflits étant biparti, chaque composante connexe  $C_\alpha$  peut être colorée en deux couleurs. Soit  $(A_0, \overline{A_0})$  la bipartition de  $C_0$ . Pour  $\alpha \in [1, w(G^C) - 1]$  on note  $(A_\alpha, \overline{A_\alpha})$  la partition isomorphe à  $(A_0, \overline{A_0})$  de la composante connexe  $C_\alpha$ . Pour chaque composante connexe, on choisit un stable  $X_\alpha \in \{A_\alpha, \overline{A_\alpha}\}$ . Cela implique que  $X = \bigcup_{\alpha=0}^{\alpha=w(G^C)-1} X_\alpha$  et son complémentaire  $\overline{X} = V^C \setminus X$  sont deux stables dans le graphe des conflits. Ainsi, quel que soit le choix des  $X_\alpha$ , on obtient une 2-coloration du graphe des conflits. Nous prouvons ici que la 2-coloration qui suit est  $\frac{1}{2}$ -dense :

$$\begin{cases} X_{2\beta} = A_{2\beta} \\ X_{2\beta+1} = \overline{A_{2\beta+1}} \end{cases} \quad (3.1)$$

Par construction, les couleurs alternent pour les points mobiles  $p(1, 0)$  à  $p(1, w(G^C) - 1)$ . Pour conclure, il faut donc vérifier que  $p(1, w(G^C) - 1)$  et  $p(1, w(G^C))$  sont de couleurs différentes. La construction de  $X$  implique que  $\lambda(p(1, w(G^C) - 1)) = \lambda(p(1, 0)) + w(G^C) - 1 \pmod{2}$ . De plus,  $L(G^C)$  étant la longueur d'un chemin entre  $p(1, 0)$  et  $p(1, w(G^C))$ , on a  $\lambda(p(1, w(G^C))) = \lambda(p(1, 0)) + L(G^C) \pmod{2}$ . En se servant de l'hypothèse que  $w(G^C) = L(G^C) \pmod{2}$ , on en déduit que  $\lambda(p(1, w(G^C) - 1)) + \lambda(p(1, w(G^C))) = 1 \pmod{2}$ , donc que les points mobiles  $p(1, w(G^C) - 1)$  et  $p(1, w(G^C))$  ont des couleurs différentes. Le lemme 7 permet de conclure que la solution est  $\frac{1}{2}$ -dense. ■

Les figures 3.39 à 3.41 illustrent le théorème 8. Le graphe des axes de l'instance est un cycle élémentaire de poids  $w(G^A) = 1$ , le graphe des conflits est composé de  $w(G^C) = w(G^A) = 1$  composante connexe; il est clairement biparti, avec  $L(G^C) = 3$ . L'instance admet donc une solution  $\frac{1}{2}$ -dense.

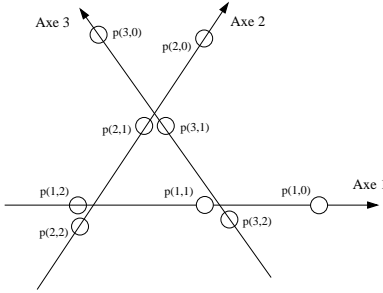


FIG. 3.39 – Une instance avec 3 axes

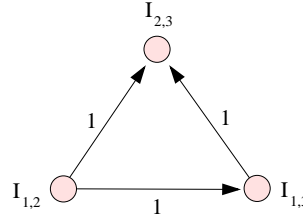


FIG. 3.40 – Graphe des axes de la figure 3.39

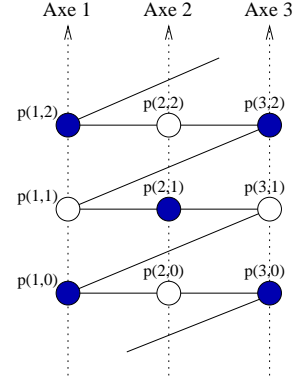


FIG. 3.41 – Graphe des conflits de la figure 3.39 avec une 2-coloration  $\frac{1}{2}$ -dense

Les résultats obtenus pour un graphe des conflits biparti sont résumés dans le tableau 3.2. Il est intéressant de constater que le seul cas où la densité peut être inférieure à  $\frac{1}{3}$  (et potentiellement arbitrairement proche de 0 d'après le théorème 7) est celui où le graphe des conflits est constitué d'une unique composante connexe et  $L(G^C)$  est pair.

$w(G^C)$	pair	impair	pair	impair, $\neq 1$	1
$L(G^C)$	pair	impair	impair	pair	pair
densité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\in (0, \frac{1}{3}]$

TAB. 3.2 – Densité maximum lorsque le graphe des conflits est biparti

### 3.3.2.2 Comment reconnaître un graphe des conflits biparti?

Pour un graphe avec un nombre fini de sommets, savoir si ce graphe est biparti est un problème polynômial. Ce problème est beaucoup moins trivial pour les graphes qui ont une infinité de sommets. Dans notre cas, si nous nous plaçons à un horizon de temps infini (système perpétuel), nous ne pouvons donc pas savoir aisément si le graphe des conflits est biparti grâce à cette méthode. Nous présentons ici une autre méthode, qui consiste à étudier les longueurs et les poids des différents cycles fondamentaux du graphe des axes.

**Passer de l'infini du graphe des conflits au fini du graphe des axes** L'idée principale est d'utiliser la modélisation compacte du problème de la densité maximum, c'est-à-dire le graphe des axes. Nous présentons donc une condition nécessaire et suffisante sur le graphe des axes pour que le graphe des conflits soit biparti.

**Lemme 8** *Le graphe des conflits est biparti si et seulement si le graphe des axes ne contient pas de cycle de poids nul et de longueur impaire.*

**Preuve** Un résultat standard de la théorie des graphes montre qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair [26]. Or les cycles du graphe des conflits sont en surjection avec les cycles de poids nul du graphe des axes. Et plus précisément, les cycles de longueur impaire du graphe des conflits sont en surjection avec les cycles de longueur impaire et de poids nul du graphe des axes. On a donc le résultat escompté. ■

Ce lemme nous permet d'exprimer une autre condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe des conflits soit biparti :

**Lemme 9** *Soit  $C_1, \dots, C_{m-n+1}$  les cycles fondamentaux du graphe des axes,  $w_1, \dots, w_{m-n+1}$  les poids de ces cycles, et  $L_1, \dots, L_{m-n+1}$  les longueurs de ces cycles. Le graphe des conflits est biparti si et seulement si il n'existe pas de solution pour  $(\lambda_i) \in \mathbb{Z}^{m-n+1}$  au système :*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m-n+1} \lambda_i w_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{m-n+1} \lambda_i L_i = 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (3.2)$$

**Preuve** Si le graphe des conflits n'est pas biparti, d'après le lemme précédent, le graphe des axes contient un cycle de poids nul de longueur impaire. Le poids de ce cycle peut alors être décomposé en combinaison linéaire des poids des cycles fondamentaux le composant (cf section 3.2.4). La somme des longueurs des cycles fondamentaux composant le cycle et la longueur du cycle ont la même parité, car toutes les arêtes appartenant aux cycles fondamentaux mais n'appartenant pas au cycle sont parcourues un nombre pair de fois. Les 2 équations (3.2) sont donc vérifiées.

Démontrons la réciproque. Supposons qu'il existe des  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  solutions des équations (3.2). On construit un cycle, de la même façon que dans la section 3.2.4, en notant  $P_{i,j}$  un chemin allant du cycle fondamental  $C_i$  au cycle fondamental  $C_j$  :

- On part de l'origine du chemin  $P_{1,2}$ . On parcourt  $\lambda_1$  fois le cycle  $C_1$ , puis on emprunte le chemin  $P_{1,2}$ .
- On parcourt  $\lambda_2$  fois le cycle  $C_2$ , puis on emprunte le chemin  $P_{2,3}$ .
- ...
- On parcourt  $\lambda_{n-1}$  fois le cycle  $C_{n-1}$ , puis on emprunte le chemin  $P_{n-1,n}$ .
- On parcourt  $\lambda_n$  fois le cycle  $C_n$ .
- On parcourt le chemin  $P_{n,n-1}$ .
- On parcourt le chemin  $P_{n-1,n-2}$ .
- ...
- On parcourt le chemin  $P_{2,1}$ .

Le poids du cycle obtenu est donc bien  $\sum_i \lambda_i w_i$ , c'est-à-dire 0. La longueur du cycle a la même parité que  $\sum_i \lambda_i L_i$  puisqu'on ne fait que rajouter un nombre pair de chemins. ■

Nous nous plaçons maintenant dans le graphe des axes et essayons de voir dans quel cas le système d'équations défini en 3.2 admet des solutions. Pour cela, nous faisons une étude de cas sur la dimension de la base des cycles fondamentaux (soit sur la dimension de  $(m - n + 1)$ ) selon la parité de leur poids et de leur longueur.

**Cas à un cycle fondamental** Lorsqu'il n'y a qu'un seul cycle fondamental, la conclusion est immédiate. D'après le lemme 8, le graphe des conflits n'est pas biparti si et seulement si ce cycle est de poids nul et de longueur impaire.

**Cas à deux cycles fondamentaux** Plaçons nous maintenant dans le cas où le graphe des axes a deux cycles fondamentaux. On note  $C_1$  et  $C_2$  ces deux cycles fondamentaux,  $w_1$  et  $w_2$  leur poids,  $L_1$  et  $L_2$  leur longueur. Dans le cas où l'un des deux cycles est de poids nul et de longueur impaire, le graphe des conflits n'est pas biparti d'après le cas à un cycle fondamental. On étudie donc ici les autres cas, en fonction de la parité des poids et des longueurs. Les différents cas sont présentés sur la figure 3.42.

	$L$	$w$
$C_1$	0	1
$C_2$	1	1

Cas 1

	$L$	$w$
$C_1$	1	0
$C_2$	1	1

Cas 2

	$L$	$w$
$C_1$	1	0
$C_2$	0	1

Cas 3

	$L$	$w$
$C_1$	0	-
$C_2$	0	-

Cas 4

	$L$	$w$
$C_1$	1	1
$C_2$	0	0

Cas 5

	$L$	$w$
$C_1$	1	1
$C_2$	1	1

Cas 6

	$L$	$w$
$C_1$	1	0
$C_2$	0	0

Cas 7

	$L$	$w$
$C_1$	1	0
$C_2$	1	0

Cas 8

FIG. 3.42 – Différentes valeurs modulo 2 des poids et des longueurs des cycles fondamentaux  $C_1$  et  $C_2$

- Les cas 1, 2 et 3 sont des cas pour lesquels il existe toujours une solution au système 3.2. Pour cela, il suffit de prendre  $\lambda_1 = w_2$  et  $\lambda_2 = -w_1$ . En effet, on a ainsi  $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$ , et on obtient que  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = w_2 L_1 - L_2 w_1 = 1 \pmod{2}$ .



- Le cas 4 n’admet pas de solution, car étant donné que  $L_1$  et  $L_2$  sont paires,  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$  sera toujours paire, et il n’y a donc pas de solution au système. Donc le graphe des conflits associé sera toujours biparti.
- Dans les cas 5 et 6, on constate que l’on a  $w_1 = L_1 \pmod 2$  et  $w_2 = L_2 \pmod 2$ . Si on ré-écrit la première équation modulo 2, cela donne :  $\sum_{i=1}^{i=2} \lambda_i w_i \pmod 2 = 0 = \sum_{i=1}^{i=2} \lambda_i L_i \pmod 2$ . Or d’après la 2ème équation, on a  $\sum_{i=1}^{i=2} \lambda_i L_i = 1 \pmod 2$ . Donc le système n’admet pas de solution, et donc le graphe des conflits associé est biparti.
- Les deux cas restants, les cas 7 et 8, sont moins immédiats. Comme les poids des deux cycles fondamentaux sont paires, leur pgcd  $d$  est forcément supérieur ou égal à 2. Le fait de diviser les poids par leur pgcd n’altèrent en rien la solution du système, puisqu’on a :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0 \iff \frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2}{d} = 0$$

Si on note  $w'_1 = w_1/d$  et  $w'_2 = w_2/d$ , on peut donc étudier les cycles fondamentaux  $C'_1$  et  $C'_2$ , de poids (resp. longueur)  $w'_1$  et  $w'_2$  (resp.  $L'_1$  et  $L'_2$ ). Pour ces nouveaux cycles fondamentaux, on est sûr qu’au moins l’un des deux poids est impair, et donc on se retrouve dans l’un des six cas précédents.

**Cas général** On se place maintenant dans le cas général où le graphe des axes contient  $(m - n + 1)$  cycles fondamentaux, et on écrit de façon algorithmique la reconnaissance des graphes des conflits bipartis. Il s’agit d’une simple généralisation du cas à deux cycles fondamentaux.

L’algorithme 1, que l’on nomme *GCBiparti*, prend en entrée un ensemble de cycles fondamentaux du graphe des axes avec leur poids et leur longueur, et renvoie un booléen, affecté à vrai si le graphe des conflits est biparti et à faux sinon. La complexité de l’algorithme est  $O(|\mathcal{B}|)$ , sachant qu’une base des cycles fondamentaux est de dimension  $(m - n + 1)$ .

L’algorithme est récursif. Cependant un appel récursif ne peut avoir lieu que si tous les poids sont pairs. Or on le relance en divisant ces poids par leur pgcd, ce qui signifie qu’au moins un des nouveaux poids est impair, et donc qu’il s’agit de la dernière exécution de l’algorithme. L’algorithme se termine donc au bout de deux appels maximum.

Cet algorithme est illustré par la figure 3.43, sur laquelle est représentée un graphe des axes planaire composé de 5 faces qui jouent le rôle des cycles fondamentaux.

Les longueurs et les poids des différentes faces sont résumés dans le tableau 3.3.

Face	1	2	3	4	5
Longueur	6	4	3	3	3
Poids	4	12	6	6	2

TAB. 3.3 – Longueurs et poids des faces de la figure 3.43

Tous les poids étant pairs, l’algorithme est appelé récursivement une deuxième fois, en prenant comme nouveau poids ceux du tableau 3.4, qui correspondent aux anciens poids divisés par le pgcd, ici 2.

---

**Algorithme 1** *GC Biparti* //Reconnaissance d'un graphe des conflits biparti

---

**Entrées:** Cycles fondamentaux  $C_i$ , de poids  $w_i$  et de longueur  $L_i$

**Sorties:** Vrai si le graphe des conflits est biparti, Faux sinon

**si** tous les cycles fondamentaux sont de longueur paire **alors**

// Cas 4

**renvoie** Vrai

**sinon**

// Il existe au moins un cycle fondamental de longueur impaire

**si** il existe un cycle fondamental de longueur impaire et de poids nul **alors**

**renvoie** Faux

**finsi**

**si** il n'existe pas de cycle fondamental de longueur paire **alors**

// Cas 2, 6 et 8

**si** il existe 2 poids de parité différentes **alors**

// Cas 2

**renvoie** Faux

**sinon si** tous les poids sont impairs **alors**

// Cas 6

**renvoie** Vrai

**sinon**

//tous les poids sont pairs, cas 8

$d = \text{pgcd}(\text{poids})$  // d vaut au moins 2

on divise tous les poids par d et on relance l'algorithme

**finsi**

**sinon**

// il existe au moins un cycle fondamental de longueur paire

**si** il existe un cycle fondamental de longueur paire de poids impair **alors**

**renvoie** Faux

**finsi**

**si** il existe 2 cycles fondamentaux de longueur impaire et de parité de poids différente

**alors**

// Cas 2

**renvoie** Faux

**sinon si** tous les cycles fondamentaux de longueur impaire sont de poids impair

**alors**

// Cas 5 et 6

**renvoie** Vrai

**sinon**

//tous les poids sont pairs, cas 7 et 8

$d = \text{pgcd}(\text{poids})$  // d vaut au moins 2

on divise tous les poids par d et on relance l'algorithme

**finsi**

**finsi**

**finsi**

---

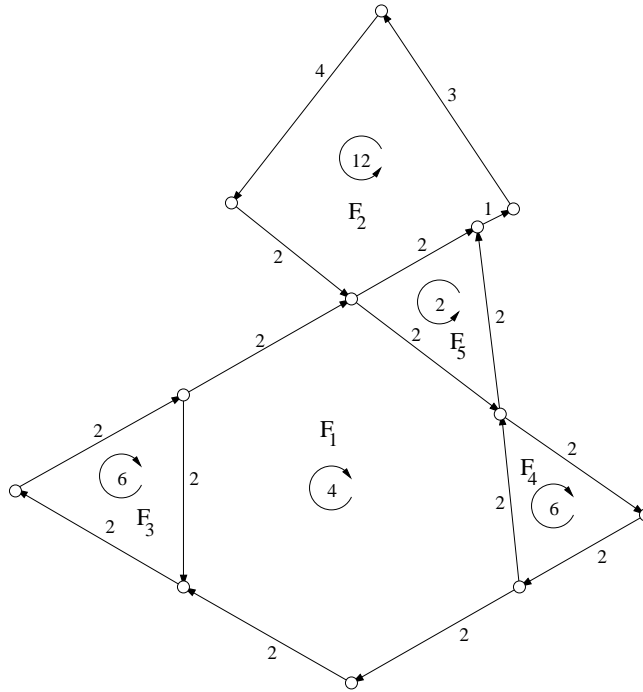


FIG. 3.43 – Illustration de l’algorithme de reconnaissance d’un graphe des conflits biparti pour un graphe des axes planaire

Face	1	2	3	4	5
Longueur	6	4	3	3	3
Poids	2	6	3	3	1

TAB. 3.4 – Longueurs et poids des faces lors du second appel de l’algorithme

Lors de ce deuxième appel, l’algorithme conclut que le graphe des conflits associé est biparti. En effet, tous les cycles correspondent aux cas 5 et 6.

### 3.4 Synthèse des résultats

Ce chapitre présente de nombreux résultats sur le problème de la densité maximum à travers une représentation par deux graphes, le graphe des axes et le graphe des conflits.

Ces deux graphes sont assez fortement liés, puisque le nombre de composantes connexes du graphe des conflits équivaut au plus petit poids strictement positif d’un cycle dans le graphe des axes (page 43). Nous avons aussi montré une caractérisation des solutions  $\frac{1}{2}$ -denses pour les deux graphes ; pour le graphe des axes, nous avons montré à la section 3.2.3 qu’il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si tous les cycles fondamentaux formant une base des cycles ont leur poids et leur longueur de même parité. Pour le graphe

des conflits, il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense si et seulement si le graphe des conflits est biparti et les parités de  $w(G^C)$  et  $L(G^C)$  sont identiques (cf section 3.3.2.1). Nous avons proposé un algorithme de reconnaissance des graphes des conflits bipartis en s'appuyant sur les cycles fondamentaux du graphe des axes. Ces résultats nous permettent de conclure qu'il est possible de décider si il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense en un temps polynômial.

Les graphes des conflits et des axes ne sont cependant pas équivalents. Il est en effet possible de construire un graphe des conflits à partir d'un graphe des axes <sup>1</sup> alors que l'inverse n'est pas vrai. Le graphe des conflits, non orienté, perd l'information sur l'ordre de passage des points mobiles aux intersections. L'exemple d'un tel graphe des conflits est proposé sur la figure 3.44.

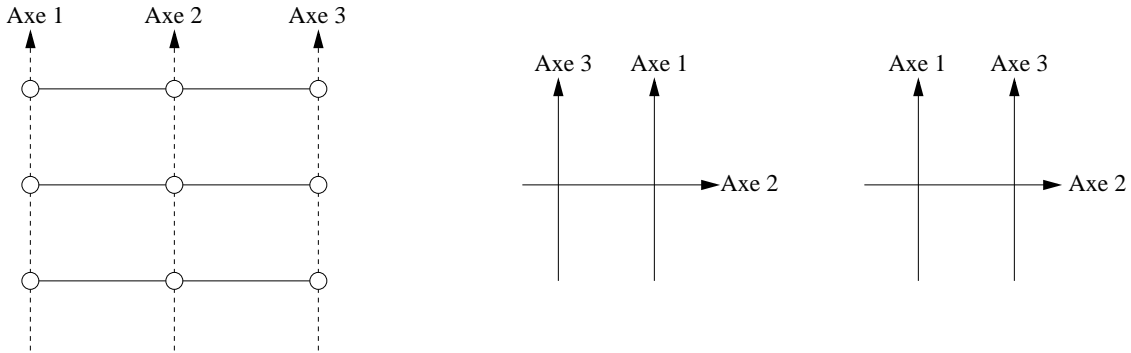


FIG. 3.44 – Un graphe des conflits et deux représentations lui correspondant

Le graphe des conflits possède donc moins d'informations que le graphe des axes, et il est de plus infini. De façon assez surprenante, c'est pourtant sur ce graphe, probablement parce qu'il est plus naturel, que nous avons obtenu le plus de résultats. Nous avons notamment montré des bornes sur la qualité d'une solution en lien avec la coloration ; si le graphe des conflits n'est pas  $\chi$ -colorable, nous avons montré qu'on ne pouvait pas espérer de solution meilleure que  $\frac{1}{\chi+1}$ . A l'inverse, si le graphe des conflits est  $\chi$ -colorable et  $w(G^C) \geq \chi$  alors on est sûr qu'il existe une solution  $\frac{1}{2\chi-1}$ -dense.

---

<sup>1</sup>On peut en fait construire un graphe isomorphe au graphe des conflits, seuls les indices de points mobiles changent.



# Chapitre 4

## Recherche de solutions opérationnelles

Le but de ce chapitre est de proposer des solutions opérationnelles à l'aide de notre paradigme. Une grande partie des résultats théoriques, notamment ceux obtenus sur le graphe des axes à la section 3.2, est utilisée afin de construire un réseau de routes avec des points mobiles en forme de treillis dans la section 4.1. Dans la section 4.2, nous choisissons d'étudier, d'un point de vue opérationnel, le problème de l'ensemble d'axes  $\frac{1}{k}$ -dense maximum ; pour cela, nous nous ramenons à un problème de stable maximum, pour lequel nous proposons différentes heuristiques.

### 4.1 Structures

L'idée d'utiliser une structure régulière sur une région dense de l'Europe est proposée par Irvine [23], que nous avons déjà mentionné dans la section 2.2.1. Nous rappelons que les auteurs créent un treillis composé de paires de directions opposées, augmentant de  $45^\circ$  entre chaque niveau de vol, sur 9 niveaux de vol consécutifs. A la lecture de cet article, nous nous sommes intéressés à des structures composées d'un plus grand nombre de directions sur le même niveau de vol, en utilisant les résultats théoriques obtenus sur le problème de la densité maximum, principalement ceux concernant le graphe des axes à la section 3.2. Dans la section 4.1.1, nous proposons des treillis dans le plan pour 2 à 4 paires de directions. Nous étudions leur débit dans la section 4.1.2. La section 4.1.3 pose et résout les problèmes liés au pavage de la sphère par ces mêmes treillis.

#### 4.1.1 Treillis dans le plan

Nous étudions successivement des treillis composés de 2, 3 et 4 paires de directions. Dans les différentes structures que nous construisons, on suppose que la vitesse est constante pour un axe donné, ce qui permet d'avoir une distance identique entre les points de toute paire de points mobiles consécutifs sur un axe. De telles structures peuvent ainsi être utilisées

pour faire voler les avions sur leur niveau de croisière.

#### 4.1.1.1 Structure à deux paires de directions

Dans un premier temps, nous étudions une structure assez simple, composée d'unique-  
ment 2 paires de directions. Naturellement, cela revient à choisir 4 directions avec un  
angle de  $90^\circ$  entre chaque direction successive. Cela revient donc simplement à dessiner un  
maillage du plan en carrés. L'exemple d'une telle structure est représenté sur la figure 4.1.

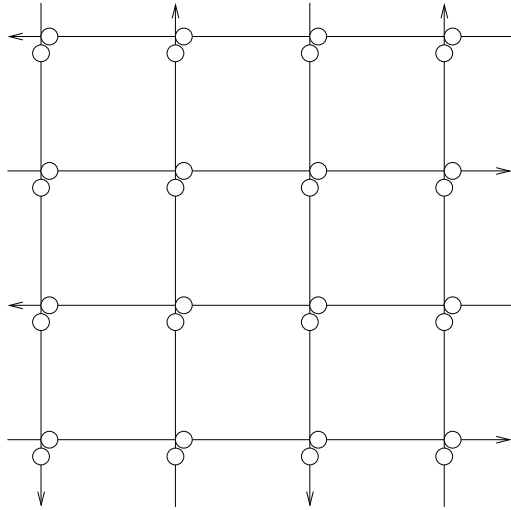


FIG. 4.1 – Structure à 2 paires de direc-  
tions

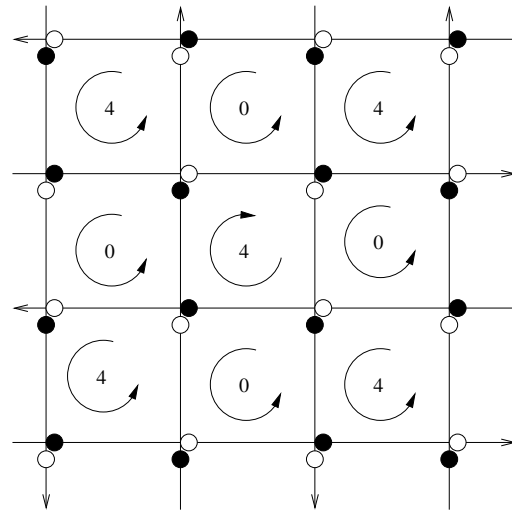


FIG. 4.2 – Solution  $\frac{1}{2}$ -dense

Pour cette structure, la vitesse est identique et constante sur les différents axes. Chaque  
carré a un côté de longueur égale à la distance entre 2 points mobiles consécutifs. Pour  
calculer cette distance, on utilise la formule 2.1 (page 28) de la condition d'unicité définie  
à la section 2.3 ; dans notre cas, l'angle à chaque intersection est de  $90^\circ$  et le déphasage  
est nul. On suppose que l'on souhaite une distance de séparation  $D_s$  de 5 NM, comme  
la réglementation l'impose à ce jour. On en déduit que la distance entre 2 points mobiles  
consécutifs est de  $\frac{5}{\sqrt{2}/2}$ , soit environ 7 NM.

Afin de calculer la densité sur chaque axe, il suffit de remarquer que chaque face <sup>1</sup> est  
un carré de poids pair, ce qui signifie qu'il existe une solution  $\frac{1}{2}$ -dense, qui est exhibée sur  
la figure 4.2.

#### 4.1.1.2 Structures à trois paires de directions

**Pavages en triangles** Lorsqu'on cherche une structure avec 3 paires de directions, il  
paraît assez naturel de choisir un pavage du plan par des triangles équilatéraux. Cette

<sup>1</sup>Le graphe des axes de cette structure étant planaire, on considère les faces (sauf la face externe) comme  
une base des cycles

structure est présentée sur la figure 4.3. L'espace entre deux points mobiles consécutifs, calculé à l'aide de la formule 2.1, est de 10 NM pour une distance de séparation  $D_s$  de 5 NM.

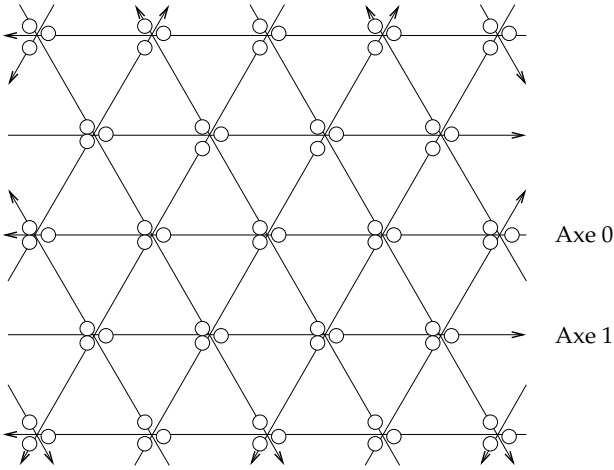


FIG. 4.3 – Structure à 3 paires de directions

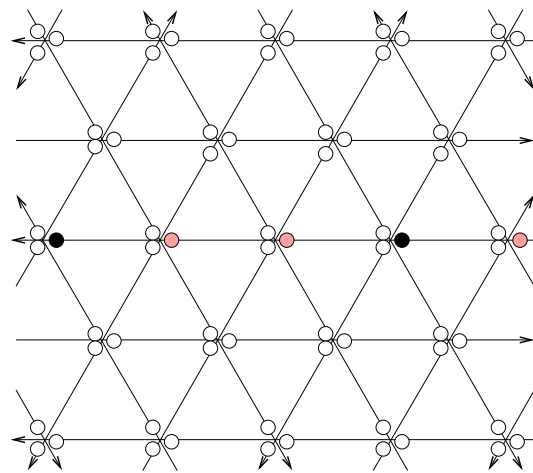


FIG. 4.4 – Première étape de la construction : coloration de l'axe 0

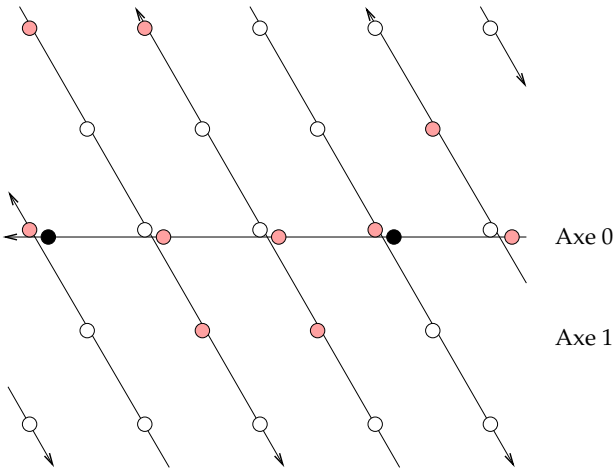


FIG. 4.5 – Conséquences partielles de la coloration de l'axe 0

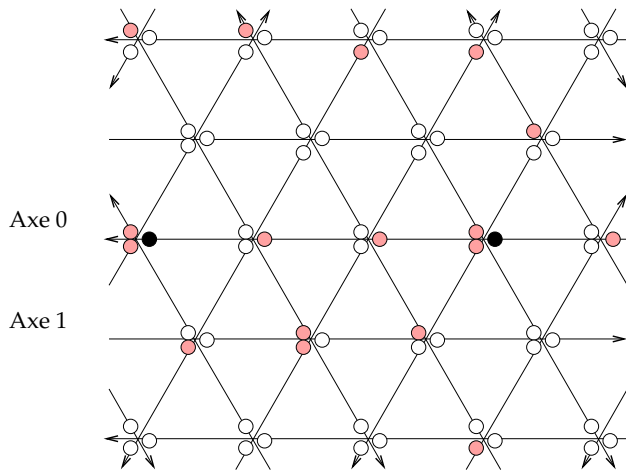


FIG. 4.6 – Conséquences globales de la coloration de l'axe 0

Si on applique le corollaire 1 (page 61), on sait que la solution optimale a une densité de  $\frac{1}{\chi}$  dans le meilleur des cas, où  $\chi$  est le nombre chromatique du graphe des conflits. Dans notre cas, le graphe des conflits est 3-colorable (chaque paire de directions forme un stable



dans le graphe des conflits) mais il n'est pas 2-colorable car il contient des cliques de taille 3 (il y a 3 points mobiles qui se rencontrent au même point dans le graphe des axes). Il est donc inutile de chercher des solutions avec une densité supérieure à  $\frac{1}{3}$ .

Nous regardons donc s'il y a une solution  $\frac{1}{3}$ -dense. L'existence de points d'intersections entre 3 axes impose qu'une solution  $\frac{1}{3}$ -dense est forcément exactement  $\frac{1}{3}$ -dense. Sans perte de généralité, choisissons une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour l'axe 0, représentée sur la figure 4.4. Ce choix engendre des points mobiles interdits sur les autres axes, représentés partiellement puis globalement sur les figures 4.5 et 4.6; sur ces figures, les points mobiles noirs représentent les points autorisés, alors que les points rosés représentent tous les points qui ne peuvent plus être autorisés à cette étape de la construction.

Une fois la solution construite sur l'axe 0, on s'aperçoit qu'il n'y a qu'une possibilité pour construire la solution  $\frac{1}{3}$ -dense sur l'axe 1, qui est représentée sur la figure 4.7.

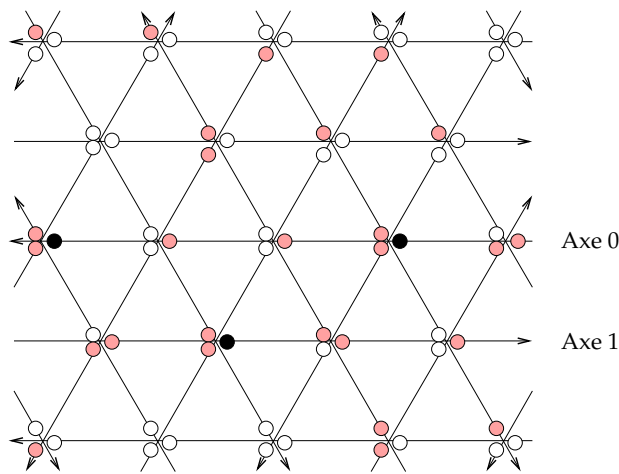


FIG. 4.7 – Seconde étape de la construction : coloration de l'axe 1

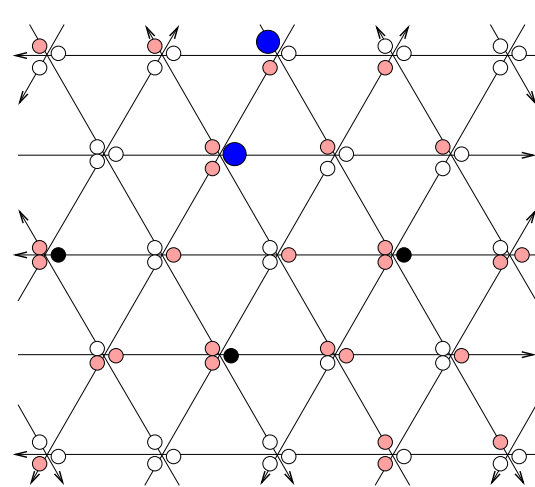


FIG. 4.8 – Dernière étape de la construction : pas de solution  $\frac{1}{3}$ -dense

Après cette seconde étape, de nombreux axes n'ont qu'une solution possible. Les deux points mobiles colorés en bleu et grossis sur la figure 4.8 doivent avoir le statut autorisé, sinon la solution globale ne peut pas être  $\frac{1}{3}$ -dense. Or ces deux points mobiles sont en conflit, ce qui prouve qu'il n'existe en fait pas de solution  $\frac{1}{3}$ -dense pour une telle structure.

**Pavage en hexagones et triangles** Les résultats sur la structure de la figure 4.3 n'étant pas aussi bons que ce qu'on pouvait espérer, nous présentons dans ce qui suit un treillis nettement plus intéressant, qui contient aussi 3 paires de directions, mais qui admet une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. Cette structure est un pavage du plan par des hexagones réguliers et des triangles équilatéraux, et est représentée sur la figure 4.9.

Les longueurs et les poids de chaque face sont notés à l'intérieur de chacune d'entre elles sur la figure 4.9. Les triangles, qui ont une longueur de 3, ont un poids de 1 ou de 3.

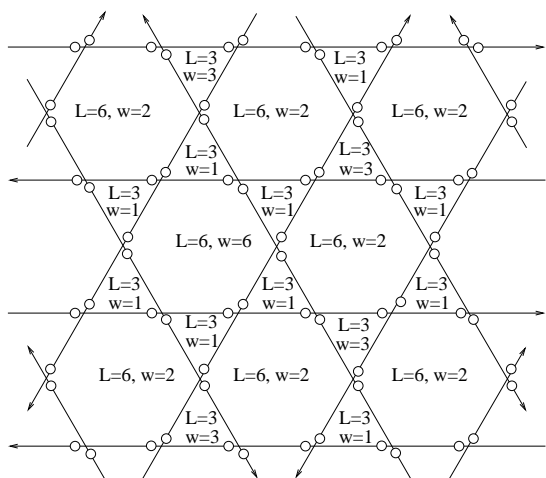


FIG. 4.9 – Treillis à 3 paires de directions respectant les conditions du théorème 2

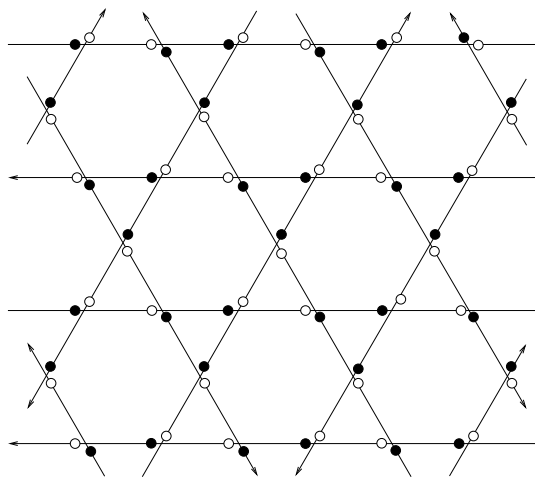


FIG. 4.10 – Treillis à 3 paires de directions : solution  $\frac{1}{2}$ -dense

Les hexagones, de longueur 6, ont un poids de 2 ou de 6. On remarque que toutes les faces respectent les conditions du théorème 2 (page 52) dans le cas où le graphe des axes est planaire; nous pouvons donc directement conclure que cette structure admet une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. Cette solution est dessinée sur la figure 4.10.

Le pavage étant isométrique, la vitesse est la même sur tous les axes de points mobiles. Nous pouvons calculer la distance inter-points mobiles consécutifs en utilisant à nouveau la formule 2.1. La seule différence par rapport à la structure à 2 paires de directions concerne l'angle maximum d'intersection entre deux axes. Dans ce cas-ci, il est de  $120^\circ$ . On obtient donc une distance entre deux points mobiles successifs de 10 NM, qui correspond à la taille d'un côté d'un triangle ou d'un hexagone.

#### 4.1.1.3 Structures à quatre paires de directions

Les structures étudiées précédemment constituent des pavages du plan isométriques, ce qui impliquent des vitesses égales sur les différents axes de points mobiles. Dans le cas présent, avec 4 paires de directions, un tel pavage n'est pas possible. Ainsi, si on utilise le motif défini à la figure 4.11, et si on ne met des points mobiles qu'au niveau des intersections, cela implique l'existence d'un facteur  $\sqrt{2}$  entre les différentes vitesses, ce qui n'est pas tolérable en pratique. Pour résoudre ce problème, une solution consiste à remarquer que  $\sqrt{2}$  est assez proche de  $\frac{3}{2}$ , et qu'il est donc possible de mettre deux distances inter-points mobiles sur un côté de longueur  $x$  pour trois distances inter-points mobiles sur une diagonale de longueur  $x\sqrt{2}$ . Cette solution est exposée sur la figure 4.12.

Comme il existe des intersections où 4 points mobiles sont présents au même instant, le graphe des conflits contient des cliques de taille 4 et donc on ne peut pas espérer être mieux que  $\frac{1}{4}$ -dense. De plus, pour la même raison, s'il existe une solution  $\frac{1}{4}$ -dense, alors cette

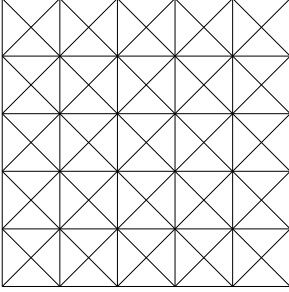


FIG. 4.11 – Treillis

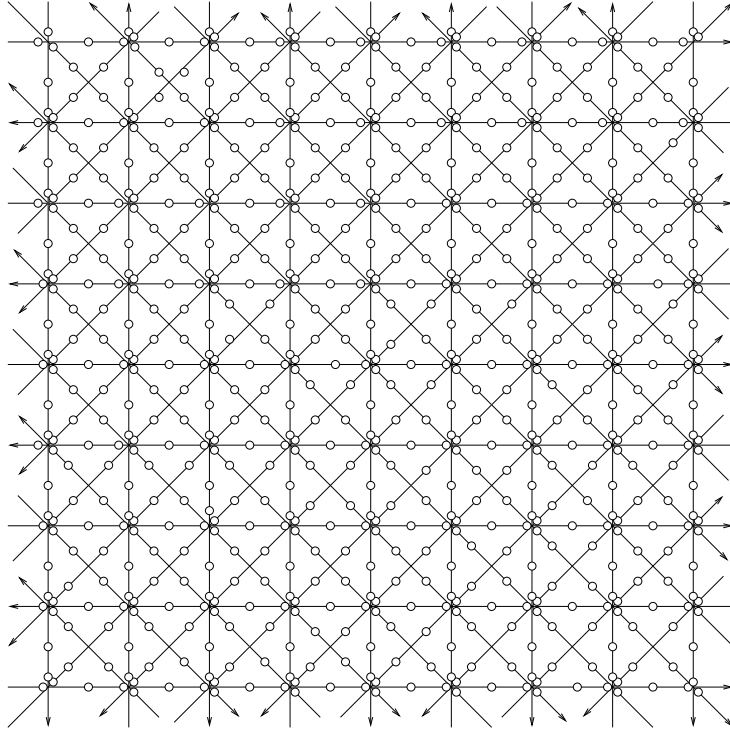


FIG. 4.12 – Première structure pour 4 paires de directions

solution sera forcément exactement  $\frac{1}{4}$ -dense. Malheureusement, il n'est pas possible d'obtenir une solution exactement  $\frac{1}{4}$ -dense pour cette structure. L'étude de cas étant similaire à celle présentée pour le pavage en triangle, nous ne la présentons pas ici.

Une autre structure, présentée sur la figure (4.13), mérite d'être étudiée. Elle ressemble fortement à la structure définie en (4.12), sauf que la fréquence des axes diagonaux est 2 fois plus faible.

Comme précédemment, l'existence d'intersections avec 4 points mobiles fait que la solution optimale est dans le meilleur des cas  $\frac{1}{4}$ -dense. Dans ce cas, il y a bien une solution  $\frac{1}{4}$ -dense ; celle-ci est exposée sur la figure (4.14).

La vitesse n'est pas la même sur les différents axes. Il y a en effet un rapport  $\frac{3/2}{\sqrt{2}}$ , soit environ 1.061 entre les axes diagonaux et les axes horizontaux/verticaux. L'angle maximum d'une intersection est  $135^\circ$  ; l'utilisation de la formule 2.1 implique une distance entre deux points mobiles consécutifs de  $13\text{NM}$ .

## 4.1.2 Capacités des différentes structures

Ces différentes structures n'ont évidemment pas toutes le même débit ; cette section est dédiée au calcul du nombre de points mobiles autorisés par élément de surface  $10\text{NM} \times 10\text{NM}$ . Pour cela, il faut connaître pour chaque structure la distance  $d$  entre deux points mobiles

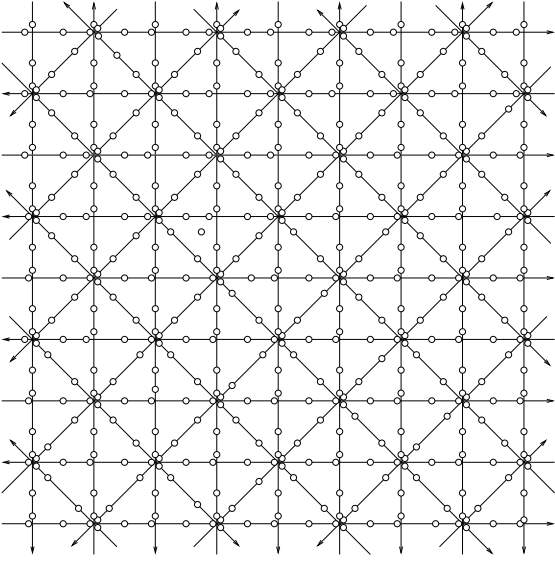


FIG. 4.13 – Seconde structure pour 4 paires de directions

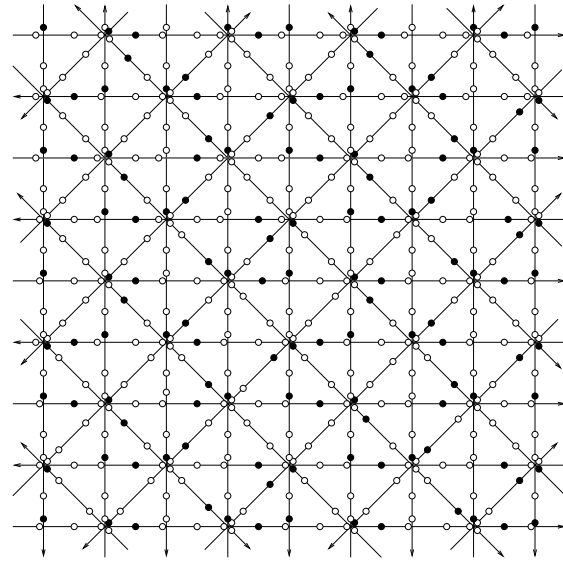


FIG. 4.14 – Solution  $\frac{1}{4}$ -dense pour la seconde structure

consécutifs, la densité de la structure et le nombre de points mobiles par élément de surface  $d^2$ , que l'on notera  $\rho$ . Par exemple, pour la structure à 2 paires de directions représentée sur la figure 4.2, on a  $d \simeq 7\text{NM}$ ,  $\rho = 2$  et une densité de  $\frac{1}{2}$ . On en déduit que le nombre de points mobiles autorisés par  $100 \text{ NM}^2$  est de  $\frac{2 * \frac{1}{2} * 10^2}{7^2}$ , soit 2.

Structure	Nombre de paires de directions	$d$	Nombre $\rho$ de points mobiles par élément $d^2$	Densité	Nombre de points mobiles autorisés pour $100 \text{ NM}^2$
Figure 4.2	2	$5\sqrt{2}$	2	$1/2$	2
Figure 4.10	3	10	$\sqrt{3}$	$1/2$	$\simeq 0.866$
Figure 4.14	4	$\frac{10}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	$\frac{7}{4}$	$1/4$	$\simeq 0.256$

TAB. 4.1 – Capacité des différentes structures sans déphasage

On peut en déduire le débit maximum de ces structures sur différentes surfaces. Par exemple, l'Europe des 27 a une superficie terrestre de 1.28 millions de  $\text{NM}^2$ , et de l'ordre de 2 millions de  $\text{NM}^2$  en tenant compte des eaux. Cela équivaut à environ 17000 avions au-dessus de l'Europe à un instant donné pour la structure à 3 paires de directions de la figure 4.10. A titre informatif, la durée moyenne de la phase de croisière d'un vol en 2007 est d'environ 96 minutes, ce qui signifie que cette structure permet de gérer au maximum

260 000 avions sur une journée pour un seul niveau de vol. Il est important de noter que ce nombre, 7 fois plus élevé que le nombre total de vols au-dessus de l'Europe lors d'une journée en 2009, est un débit maximum. En effet, les vols ne sont pas répartis de façon uniforme sur toute la surface de l'Europe, et les points mobiles autorisés ne sont donc pas forcément tous occupés par des avions. De plus, comme nous le verrons dans la section 4.1.3 qui suit, toutes les structures proposées jusqu'ici sont des pavages du plan, et quelques problèmes se présentent lors de leur application à la sphère.

### 4.1.3 Problème de la sphère : déformation des structures

Nous nous intéressons dans cette section de façon plus précise au treillis à 3 paires de directions défini à la figure 4.10. Nous essayons de construire cette structure sur la sphère, et montrons les problèmes que cela implique.

Dans un premier temps, il faut noter que la notion de droite parallèle n'existe pas dans la sphère. En effet, une droite est définie dans le plan comme le plus court chemin entre deux points et deux droites sont parallèles si elles ne s'intersectent pas. Si on utilise les mêmes définitions pour la sphère, une droite est en fait une orthodromie (aussi appelée géodésique) et on peut facilement montrer que deux orthodromies se coupent en deux points antipodaux. Les méridiens sont des exemples d'orthodromies qui se coupent aux pôles Nord et Sud. Il est important de noter que les parallèles (hormis l'équateur) ne sont pas des orthodromies.

Comme il n'est pas possible d'obtenir des orthodromies parallèles, nous avons choisi de supprimer la contrainte du parallélisme et de conserver l'aspect orthodromique de la structure. Cette option a été prise car les méridiens sont quasiment parallèles lorsqu'ils sont proches de l'équateur, comme nous le montrons ci-après.

Afin de construire notre treillis, nous définissons 3 paires de pôles fictifs  $(P_iN, P_iS)$ ,  $i = 1, 3$ . Ceux-ci sont équidistants et appartiennent à un même grand cercle, ils sont donc séparés par un angle au centre de  $60^\circ$ , comme présenté sur la figure 4.15.

Pour chaque paire de pôles, on trace des grands cercles passant par les deux pôles. Ces grands cercles sont espacés d'un pas constant. L'exemple pour une paire de pôles  $P1N$  et  $P1S$  est donné à la figure 4.16.

Si on se place dans un repère en coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  où  $P1N$  et  $P1S$  ont respectivement pour coordonnées  $(R, 0, 0)$  et  $(R, \pi, 0)$ , tous les points d'une orthodromie  $i$  ont une même longitude  $\phi_i$ . On définit donc les différentes orthodromies d'une paire de pôles en faisant varier la longitude  $\phi$  d'un pas  $\Delta\phi$ . Une fois les droites de la première paire de pôles tracées, on peut définir les autres trajectoires en appliquant une rotation vectorielle d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ . On obtient ainsi les orthodromies pour les 3 paires de pôles, représentées sur la figure 4.17.

Sur cet exemple, les  $\phi_i$  ont été définis par  $\phi_i = i\Delta\phi$ . Le motif obtenu lorsqu'on se trouve loin des pôles est un pavage en triangles, ce qui n'est pas ce que l'on cherche. Pour obtenir notre structure, il faut en fait déphaser d'un demi-pas la longitude, c'est-à-dire définir  $\phi_i = i\Delta\phi + \frac{\Delta\phi}{2}$ . De cette façon, on obtient la figure 4.18. On voit sur cette figure qu'on obtient bien le pavage escompté lorsqu'on est loin des pôles. Par contre, dès qu'on

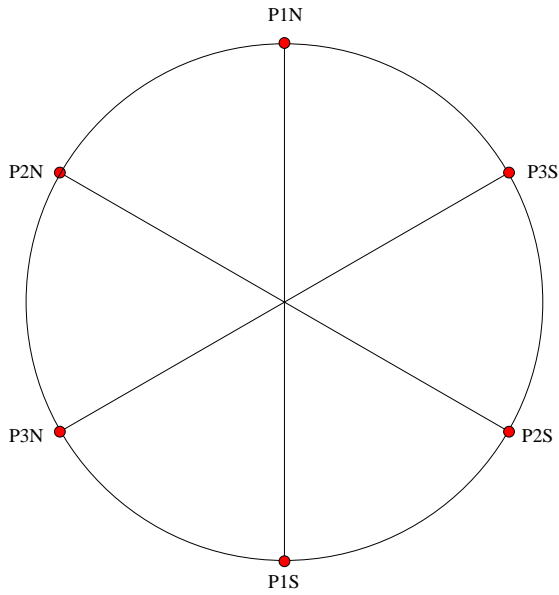


FIG. 4.15 – Définition des 3 paires de pôles

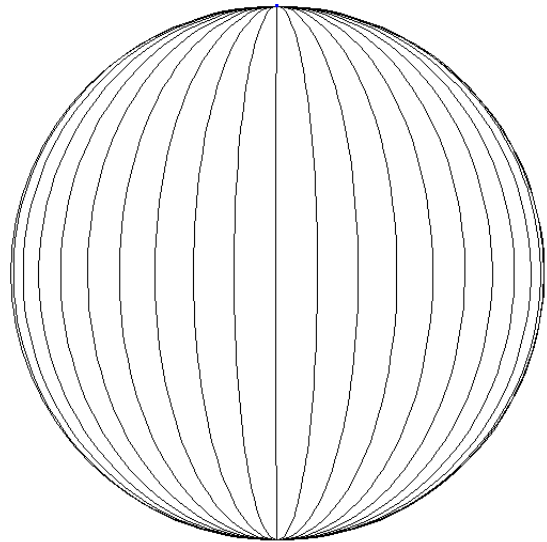


FIG. 4.16 – Construction des orthodromies de la première paire de pôles

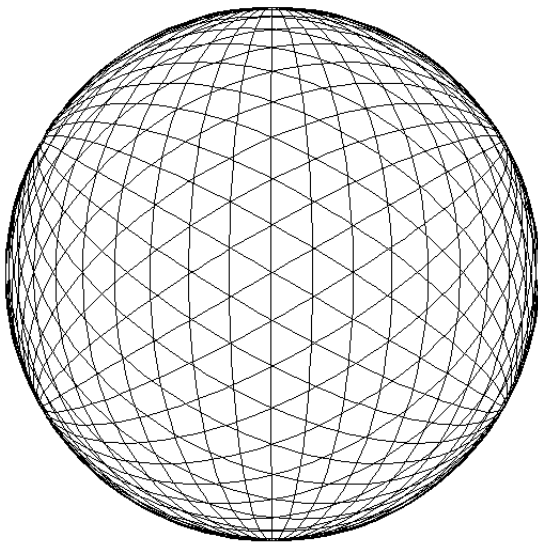


FIG. 4.17 – Tracé des orthodromies avec  $\phi_i = i\Delta\phi$

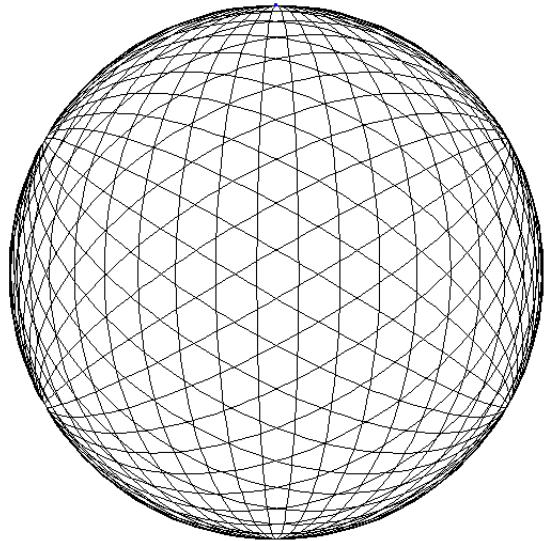


FIG. 4.18 – Tracé des orthodromies avec  $\phi_i = \frac{\Delta\phi}{2} + i\Delta\phi$

se rapproche des pôles, les problèmes s'amplifient ; par exemple, en changeant de vue sur

la figure 4.19, on voit que le pavage n'est plus du tout respecté aux abords des pôles. Il est donc important de bien choisir le centre du treillis et de placer les 3 paires de pôles le plus loin possible de ce centre.

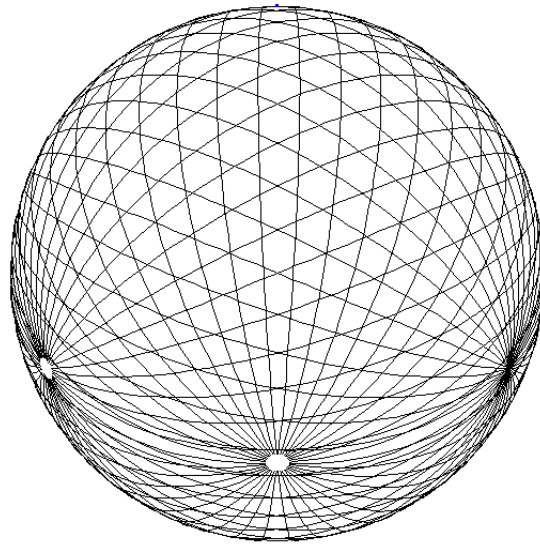


FIG. 4.19 – Problème de pavage vers les pôles

Regardons maintenant de façon plus précise ce qui se passe autour du centre du treillis. Pour cela, on définit pour chaque paire de pôles 50 orthodromies, avec un pas  $\Delta\phi$  correspondant à une distance de 20NM entre deux points mobiles consécutifs. On rappelle que cette distance de 20 NM est la distance nécessaire pour que la condition d'unicité soit vérifiée pour un angle d'intersection de  $120^\circ$  et un déphasage quelconque. Cette structure, centrée au coeur de l'Europe, est dessinée sur la figure 4.20.

Si l'on regarde de façon plus précise sur les bords de l'hexagone englobant le pavage, on s'aperçoit qu'il existe de légères déformations du treillis. La figure 4.21, qui est un zoom sur le sud de la Mer Baltique, montre que les triangles et les hexagones ne sont pas du tout réguliers.

Nous pouvons calculer de façon numérique ces déformations. Pour cela, nous nous plaçons sur un axe et nous regardons les distances entre les points d'intersections successifs de cet axe. Ces distances sont notées  $d_i$  sur la figure 4.22.

Nous avons choisi d'étudier 3 axes différents : l'axe 0 au bord du treillis, l'axe 25 au centre du treillis, et l'axe 5, intermédiaire. Ces 3 axes sont représentés en blanc sur la figure 4.20. Les résultats sont exposés sur la figure 4.23. Etant donné qu'il n'y a pas le même nombre de points d'intersection pour les différents axes, nous avons centré les résultats des 3 axes, afin de pouvoir les comparer. Comme attendu, plus on s'éloigne du centre de l'hexagone, plus les déformations sont importantes. Ainsi pour l'axe 25, les distances varient de façon très légère autour de la distance prévue entre 2 points mobiles consécutifs de 20NM. Au contraire, l'axe 0 situé au bord de la structure connaît de fortes variations,



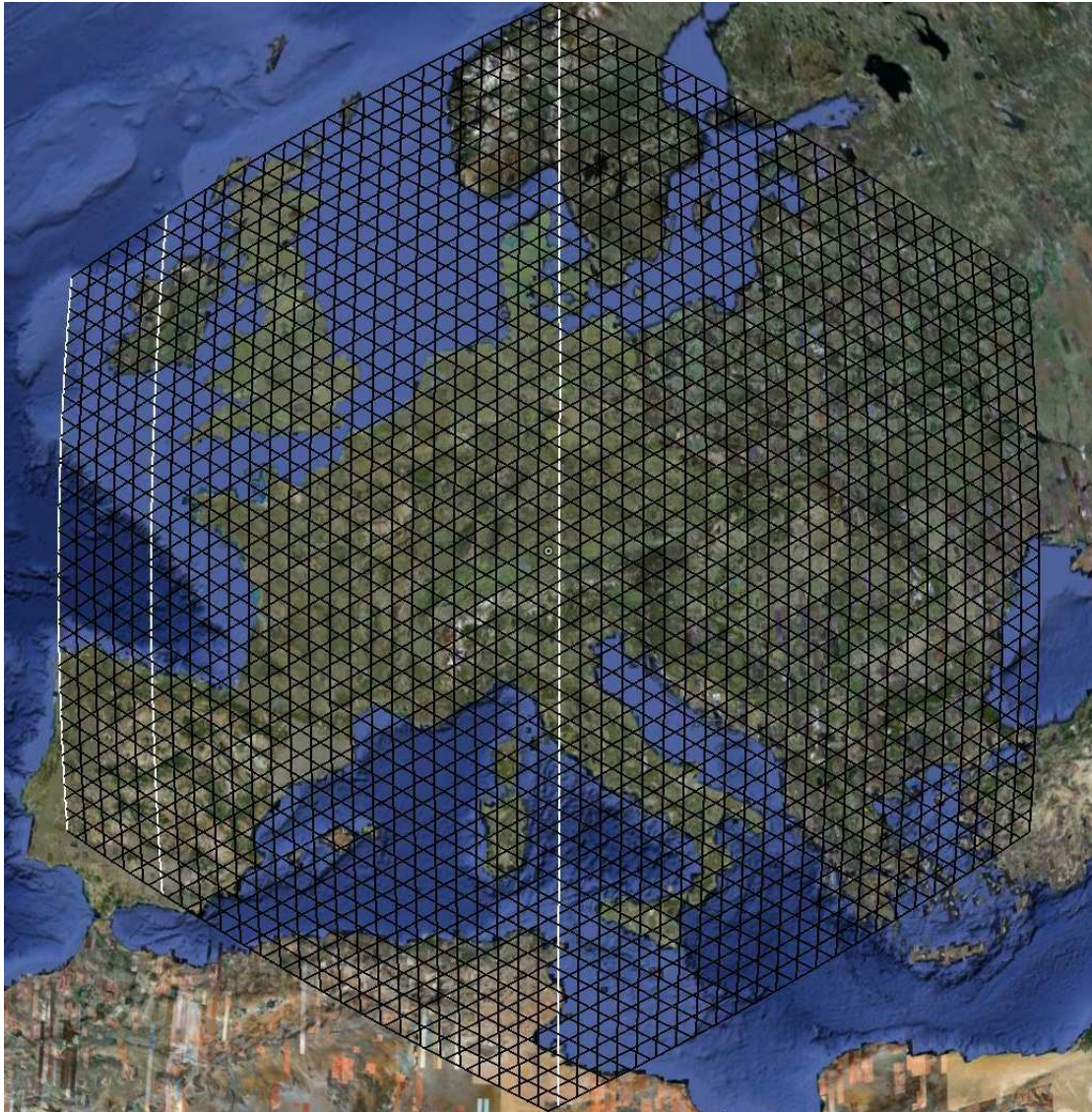


FIG. 4.20 – Application du treillis au-dessus de l’Europe ; les lignes blanches correspondent de gauche à droite à l’axe 0, 5 et 25

entre 5NM et 35NM. Il est important de savoir si ces variations se cumulent sur la longueur de l’axe ou si elles ont tendance à s’annuler. Pour cela, on trace la différence aux points d’intersections successifs entre la distance cumulée du treillis sur la sphère et celle du treillis dans le plan. Cette différence est donnée pour les 3 mêmes axes de référence sur la figure 4.24.

Cette différence de distance peut être vue comme un déphasage sur l’axe  $i$ , que l’on peut noter  $\delta d_{i,j}$  pour l’intersection avec l’axe  $j$ . On définit ainsi le déphasage en distance  $\delta D_{i,j} = |\delta d_{i,j} - \delta d_{j,i}|$ . Regardons maintenant les valeurs que peuvent prendre les différents



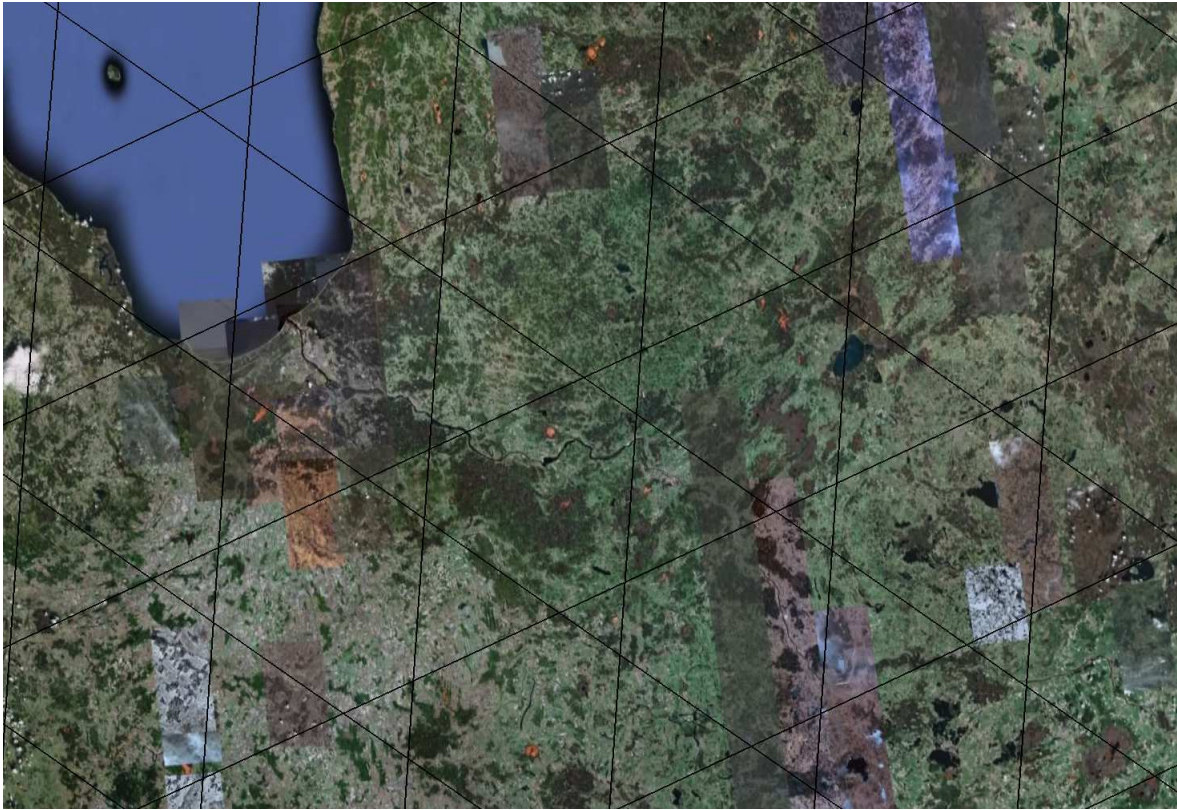


FIG. 4.21 – Application du treillis au-dessus de l’Europe : zoom sur le sud de la Mer Baltique

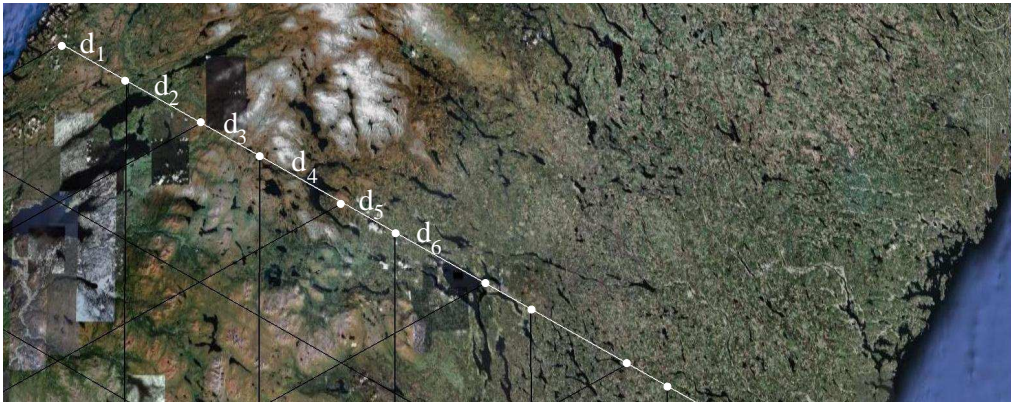


FIG. 4.22 – Déformation des distances entre les intersections consécutives

déphasages. Si ce déphasage  $\delta D_{i,j}$  est inférieur à 5NM, il est évident que cela ne pose pas de problème car les points mobiles en conflit sur la structure dans le plan (avec un déphasage nul) le restent sur la sphère. Mais on peut en fait aller plus loin dans le raisonnement. En

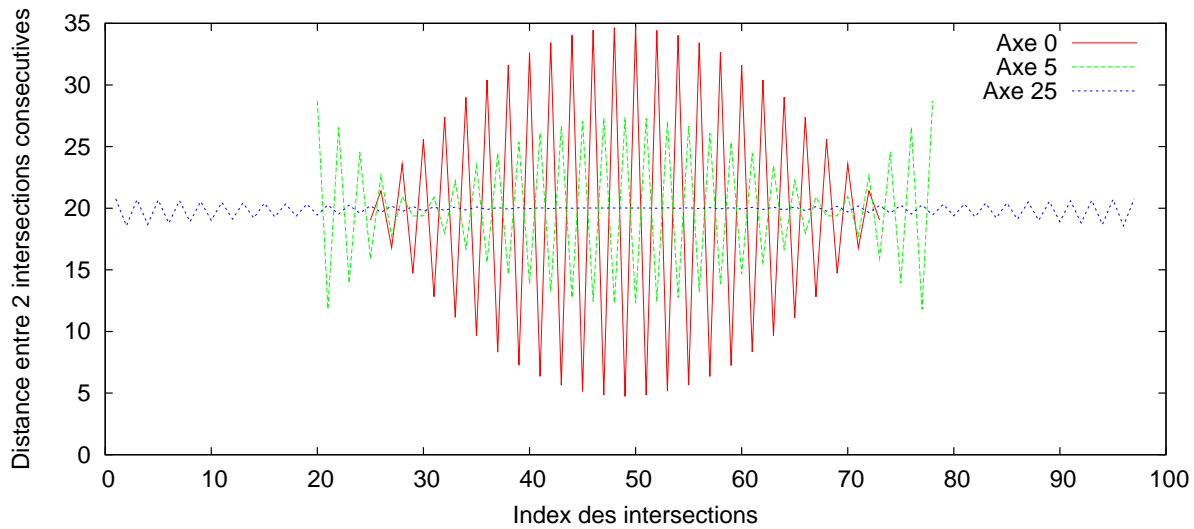


FIG. 4.23 – Déformation des distances entre les intersections consécutives

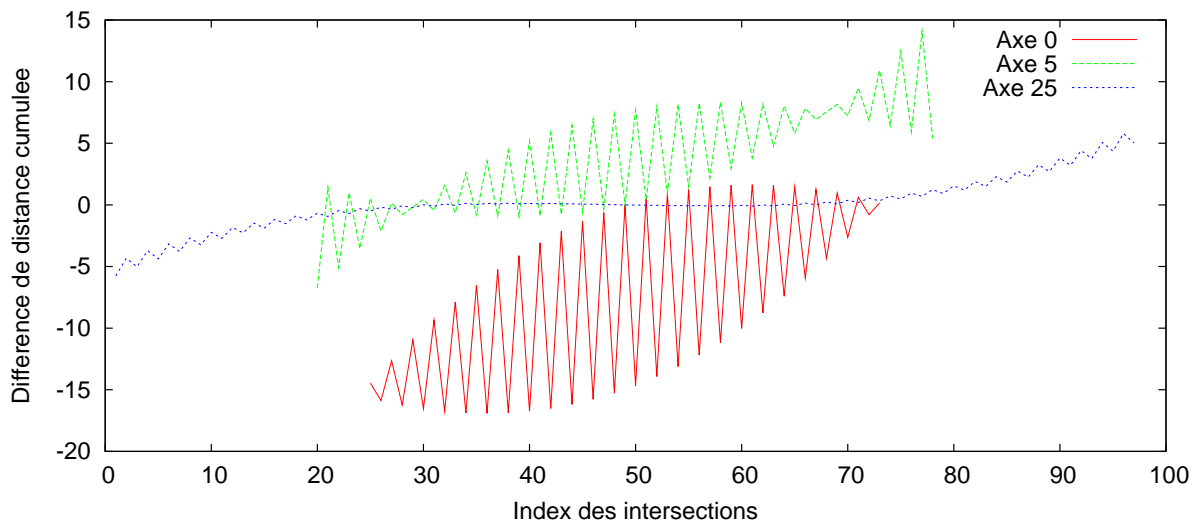


FIG. 4.24 – Différence entre les distances cumulées aux points d'intersections successifs sur la sphère et dans le plan

effet, il suffit qu'un point mobile  $p(i, x)$  d'un axe  $i$ , en conflit dans le plan avec un point mobile  $p(j, y)$  d'un axe  $j$ , ne soit pas en conflit avec un autre point mobile de l'axe  $j$ . Si le déphasage  $\delta D_{i,j}$  est inférieur à la moitié de la distance inter-points mobiles  $D$  (c'est-à-dire 10NM dans notre cas), alors on est sûr qu'il n'existe pas de nouveau conflit. En effet, si on calcule la distance d'un point  $p(i, x)$  à tout autre point  $p(j, z)$  de l'axe  $j$ , en reprenant les notations de la section 2.3, la distance entre ces deux points mobiles sur la sphère (supposée



localement plate) vaut  $D_z = d\left(0, z, \frac{-d_2^o(z)}{2v}\right) = |d_2^o(z) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|$ , où  $d_2^o(z)$  est l'ordonnée de  $p(j, z)$  lorsque  $p(i, x)$  est à l'intersection  $I_{i,j}$ .

Supposons maintenant que les points  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$  soient en conflit dans la structure plane et que  $\delta D_{i,j} < \frac{D}{2}$ ; la distance entre ces deux points mobiles vaut  $D_y = d\left(0, y, \frac{-d_2^o(y)}{2v}\right) = |d_2^o(y) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|$ , où  $d_2^o(y) = \pm \delta D_{i,j}$ . Cette distance  $D_y$  est forcément toujours plus petite que la distance  $D_z$  de tout autre point mobile  $p(j, z)$ , car  $\delta D_{i,j} < \frac{D}{2}$  et  $d_2^o(z) = d_2^o(y) + k * D, k \in \mathbb{Z}$ . Or par la condition 2 un point mobile  $p(i, x)$  ne peut pas être en conflit avec plus d'un point mobile d'un autre axe  $j$ . Donc on est sûr que le seul conflit possible dans le cas de la sphère est entre  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$ , comme dans le cas du plan.

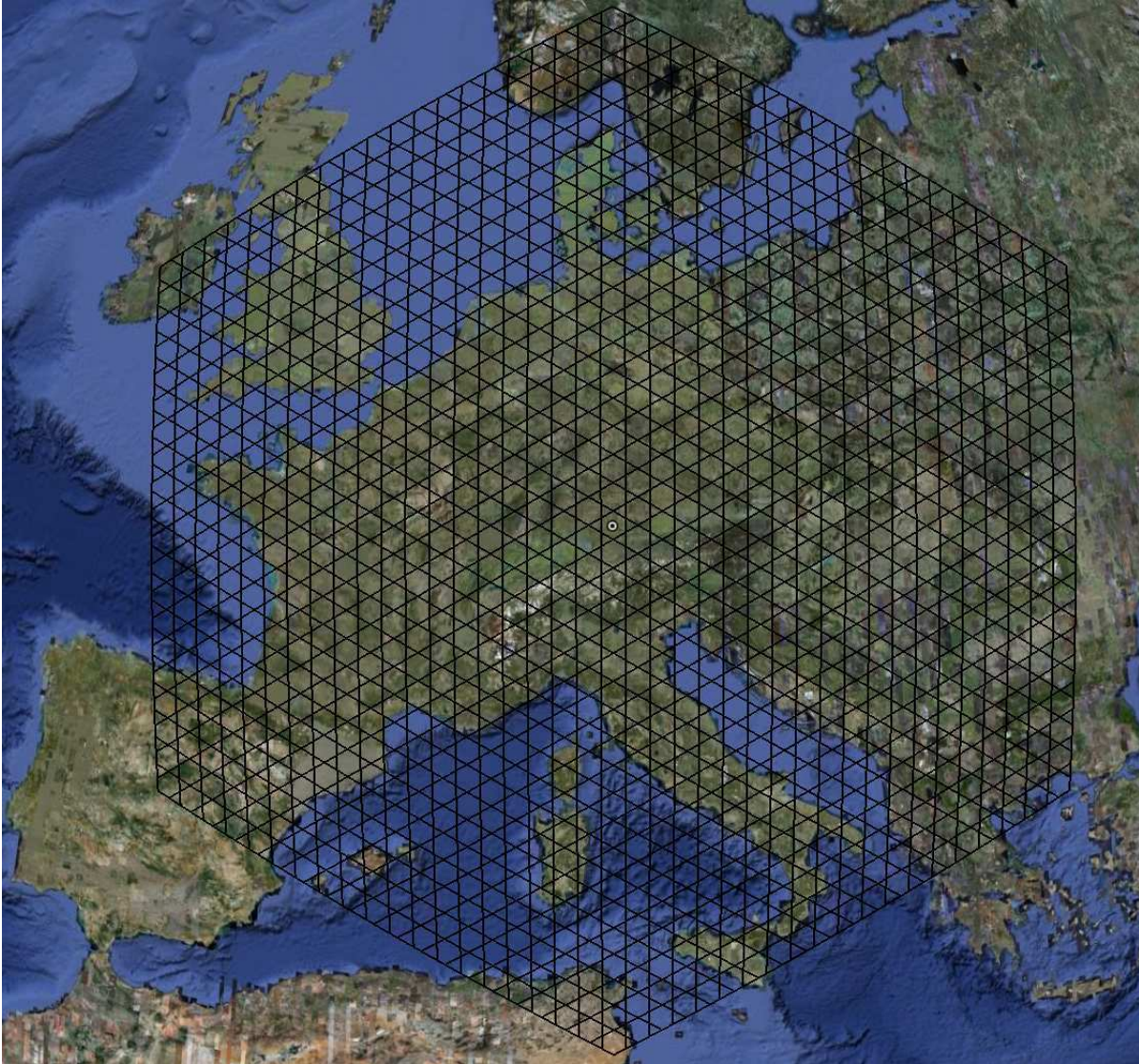


FIG. 4.25 – Taille maximale du treillis au-dessus de l'Europe

De façon évidente, si on veut que  $\delta D_{i,j} < \frac{D}{2}$ , il suffit de prendre  $|\delta d_{i,j}| < \frac{D}{4}$ . Dans notre cas, cela signifie que nous tolérons une différence de distance de  $\pm 5\text{NM}$  sur chaque axe. Cela correspond donc à une amplitude de  $10\text{NM}$  sur la figure 4.24. En regardant ce graphique, on voit que l'amplitude est bien trop grande, surtout pour l'axe 0, qui admet une amplitude de  $20\text{NM}$ . La partie centrale des courbes des axes 5 et 25 est bien meilleure, seules les extrémités sont problématiques. Une fois encore, le problème apparaît donc au bord de la structure, ce qui est un signe qu'il faut réduire la taille de ce treillis. En prenant seulement 40 axes pour chaque paire de pôles, l'amplitude sur les différents axes est inférieure à  $10\text{NM}$ , ce qui permet de conserver le treillis dessiné à la figure 4.25.

## 4.2 Présentation d'une heuristique pour le problème de l'ensemble d'axes $\frac{1}{k}$ -denses maximum

Alors que la section 4.1 utilise les résultats obtenus à la section 3.2 sur le problème de la densité maximum à l'aide du graphe des axes, nous présentons ici des heuristiques consacrées au problème de l'ensemble d'axes  $\frac{1}{k}$ -dense maximum obtenues grâce au graphe des conflits. Ce graphe, représentation naturelle du problème, permet en effet de se ramener à l'étude de problèmes classiques de la théorie des graphes. On rappelle qu'un stable dans le graphe des conflits correspond à un ensemble de points mobiles sans conflit. Nous devons cependant effectuer deux modifications sur le graphe des conflits afin de pouvoir se ramener au problème de stable maximum. Ces deux modifications, consistant à se ramener à un graphe des conflits fini et à rajouter des arêtes sur ce graphe, sont présentées dans la section 4.2.1 et les heuristiques de stables utilisées sont décrites à la section 4.2.3.

### 4.2.1 Se ramener à un problème de stable maximum

Le graphe des conflits, tel qu'il est présenté à la définition 8, est un graphe infini, puisqu'on se place à un horizon de temps infini. Nous avons donc décidé de représenter une version condensée de ce graphe, en fusionnant certains sommets :

**Définition 19** On note  $GC_Q$  le graphe des conflits  $Q$ -quotienté, où  $Q = aT$  est un multiple de la période de points mobiles. Dans ce graphe, chaque axe  $i$  est représenté par  $Q$  sommets ; chaque sommet  $p(i, x)$  de  $GC_Q$  est la fusion des sommets  $p(i, x + \lambda Q)$  de  $G_C$ , avec  $\lambda \in \mathbb{Z}, x \in \{0, \dots, Q - 1\}$ . Il existe une arête entre  $p(i, x)$  et  $p(j, y)$  dans  $GC_Q$  si il existe un entier  $\mu \in Q\mathbb{Z}$  divisible par  $Q$  pour lequel on peut trouver une arête entre  $p(i, x)$  et  $p(i, y + \mu)$  dans  $G_C$ .

Sur les figures 4.26 à 4.29 sont présentés une représentation des axes et les graphes des conflits quotientés  $GC_2$  à  $GC_4$  associés.

Le choix du quotient  $Q$  doit résulter d'un compromis. D'un côté, en réduisant  $Q$ , on obtient des graphes plus petits et donc plus faciles à étudier. Mais de l'autre côté, cela réduit l'espace des solutions, et on est limité à la recherche de solutions  $\frac{1}{k}$ -denses, avec

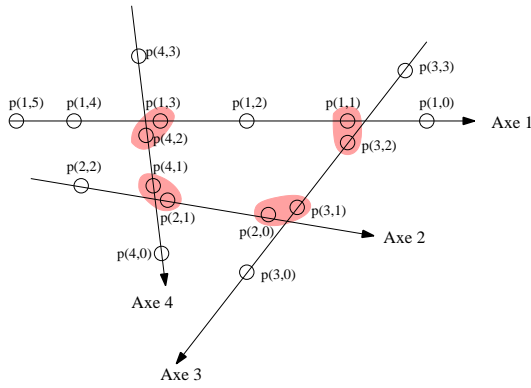


FIG. 4.26 – Une représentation des axes pour le problème de densité maximum

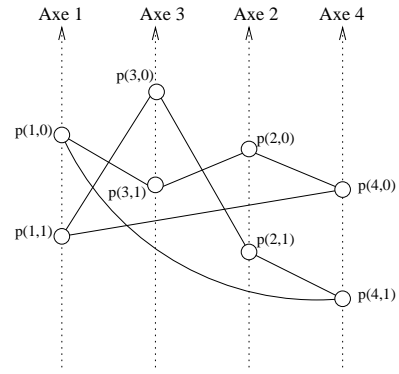


FIG. 4.27 – Graphe des conflits  $GC_2$  2-quotienté de la représentation des axes définie sur la figure 4.26

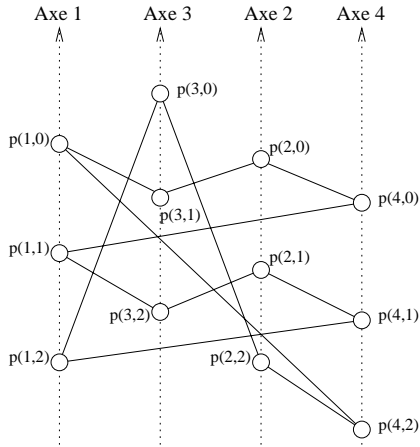


FIG. 4.28 – Graphe des conflits  $GC_3$  3-quotienté

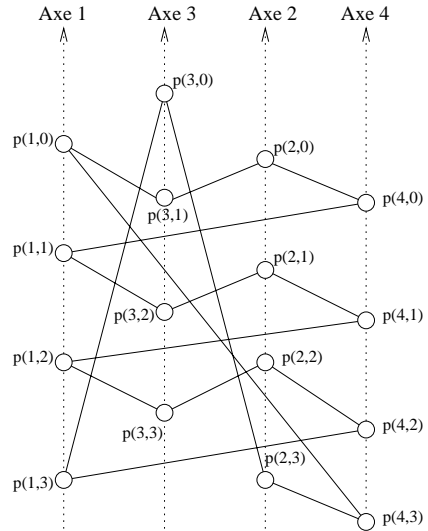


FIG. 4.29 – Graphe des conflits  $GC_4$  4-quotienté

$k \leq Q$ . En effet il n'est évidemment pas possible de représenter une solution  $\frac{1}{k}$ -dense, avec  $k > Q$  sur un graphe  $Q$ -quotienté.

La recherche d'un stable maximum dans le graphe des conflits  $Q$ -quotienté ne répond pas forcément à notre attente. En effet, si on cherche par exemple un stable maximum sur le graphe des conflits  $GC_3$  de la figure 4.28, on prend comme éléments du stable tous les points mobiles des axes 1 et 2. Les sommets du stable sont coloriés en noir sur la figure 4.30.

Afin de résoudre cette difficulté, nous avons décidé de rechercher des solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses, car cela simplifie de façon assez importante la résolution du problème. En effet, cherchant une solution exactement  $\frac{1}{k}$ -dense, il suffit de modéliser notre problème par

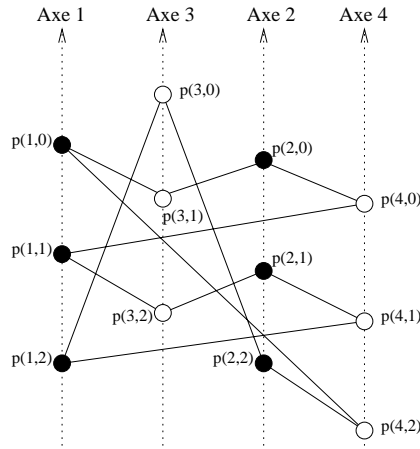


FIG. 4.30 – Stable maximum sur  $GC_3$

le graphe des conflits  $k$ -quotienté, sur lequel sont rajoutées des arêtes; ces arêtes relient tous les points mobiles d'un même axe entre eux. Autrement dit, on forme une clique sur les points mobiles de chaque axe. L'exemple pour  $GC_3$  est donné à la figure 4.31.

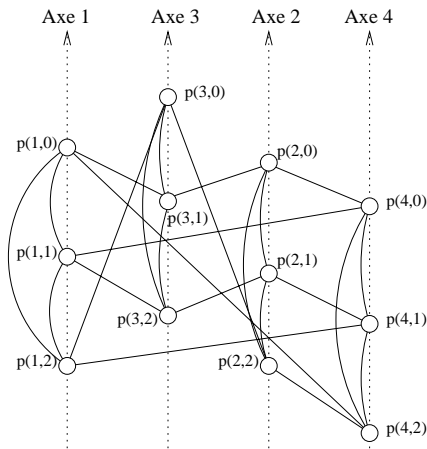


FIG. 4.31 – Ajout des cliques sur  $GC_3$

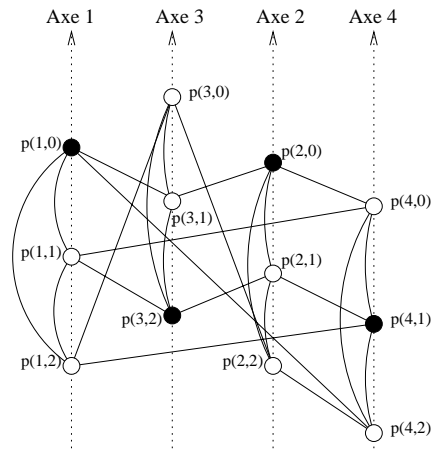


FIG. 4.32 – Stable aboutissant à une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense

En effectuant cette transformation, on est sûr qu'un stable ne prendra pas plus qu'un point mobile par axe, et on évite ainsi les cas critiques présentés ci-avant. Un exemple de solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense est présenté sur la figure 4.32.

Nous montrons dans la section suivante que la recherche de solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses au détriment des solutions  $\frac{1}{k}$ -denses peut influencer de façon négative sur la qualité d'une solution.



## 4.2.2 Discussion sur la qualité d'une solution exactement $\frac{1}{k}$ -dense

Nous nous intéressons dans cette partie aux solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses, et montrons en quoi cette restriction peut dégrader la qualité d'une solution comparativement à la recherche de solutions  $\frac{1}{k}$ -denses.

### 4.2.2.1 Propagation de l'existence de solutions exactement denses

La première question que l'on peut se poser est de savoir si les solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses peuvent se propager pour des valeurs de  $k$  plus grandes ; autrement dit, s'il existe une solution exactement  $\frac{1}{k}$ -dense, existe-t-il une solution exactement  $\frac{1}{l}$ -dense,  $\forall l \geq k$  ?

L'exemple de la figure 4.33 montre que cette question admet une réponse négative. Sur cet exemple, le graphe des axes est composé de trois faces, de poids (resp. de longueur) 0, 3 et 3 (resp. 4, 3 et 3). En se servant du théorème 2 (page 52), et en remarquant que le graphe des axes est dans notre cas planaire, on peut en déduire qu'il existe bien une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. La figure 4.34 représente le graphe des conflits  $G$ , pour lequel il existe une solution exactement  $\frac{1}{2}$ -dense, représentée sur la figure 4.35.

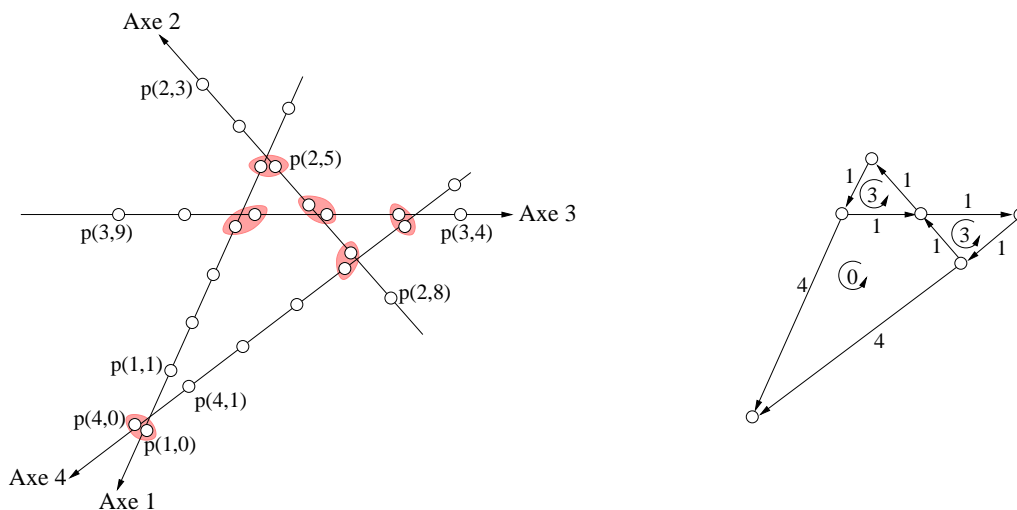


FIG. 4.33 – Représentation des axes et graphe des axes correspondant

Essayons maintenant de construire sur le même exemple une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense. Sans perte de généralité, on peut affecter le statut autorisé à exactement un point mobile sur trois sur l'axe 2, comme cela est représenté sur la figure 4.36. Les points mobiles des autres axes qui sont en conflit avec un point mobile autorisé de l'axe 2 ont forcément le statut interdit, ils sont représentés barrés sur cette figure.

On s'aperçoit qu'il y a alors deux possibilités pour l'affectation des points mobiles sur l'axe 3 : soit  $p(3,1)$  est autorisé, soit  $p(3,2)$  est autorisé. Ces deux cas sont traités respectivement aux figures 4.37 et 4.38. Dans le premier cas, il ne reste alors qu'une possibilité pour obtenir une solution  $\frac{1}{3}$ -dense sur les axes 1 et 4, mais c'est impossible puisque  $p(1,2)$

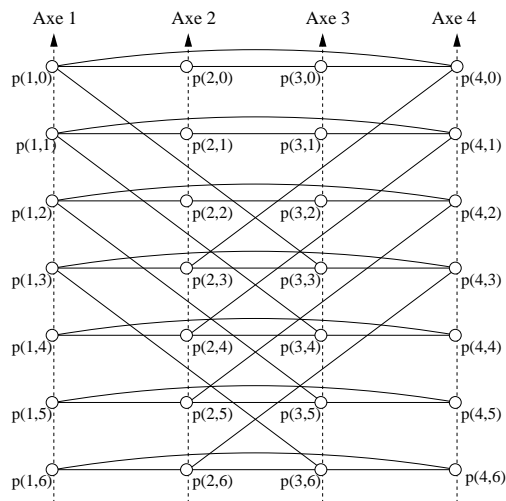


FIG. 4.34 – Graphe des conflits  $G$  associé à la représentation de la figure 4.33

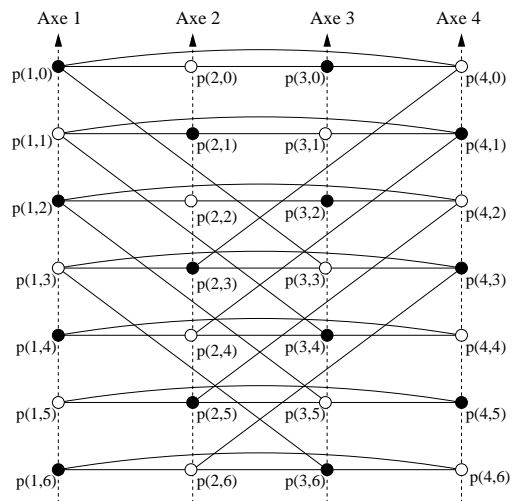


FIG. 4.35 – Solution exactement  $\frac{1}{2}$ -dense pour la représentation de la figure 4.33

et  $p(4, 2)$  sont en conflit. De la même façon, dans le second cas, le fait que  $p(1, 1)$  et  $p(4, 1)$  soient en conflit, et qu'il n'y ait pas d'autre possibilité d'affectation sur les axes 1 et 4, rend la solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense impossible. Il n'existe donc pas de solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense sur cet exemple, alors qu'il existe une solution exactement  $\frac{1}{2}$ -dense.

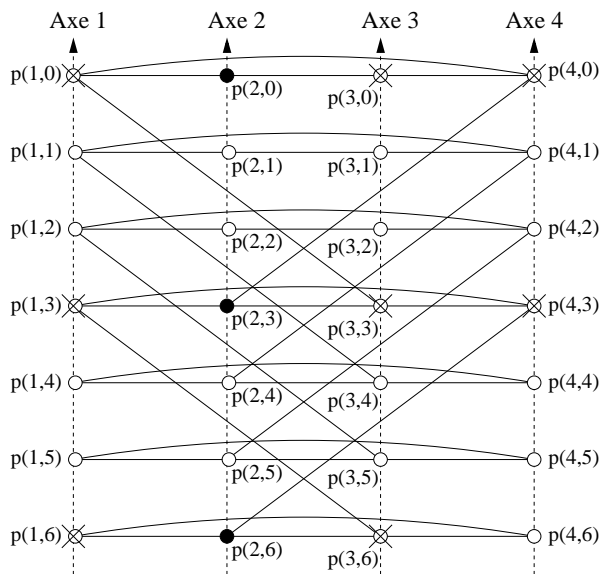


FIG. 4.36 – Construction d'une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour la représentation de la figure 4.33 : première étape



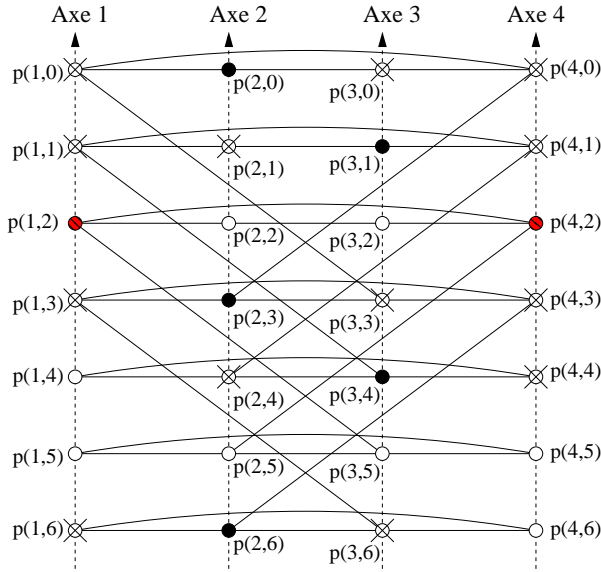


FIG. 4.37 – Cas 1 : construction d’une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense impossible avec  $p(3, 1)$  autorisé

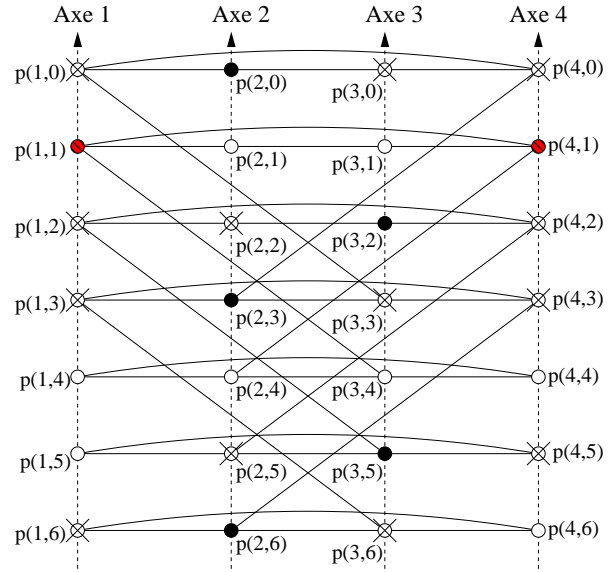


FIG. 4.38 – Cas 2 : construction d’une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense impossible avec  $p(3, 2)$  autorisé

Cet exemple montre que les solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses ne se propagent pas forcément en solutions exactement  $\frac{1}{l}$ -denses, avec  $l \geq k$ , mais cela ne montre pas une réelle défaillance du critère de l’exacte  $\frac{1}{k}$ -densité, puisque la solution optimale est exactement  $\frac{1}{2}$ -dense.

#### 4.2.2.2 Solutions optimales non exactement denses

Nous allons maintenant construire un exemple pour lequel la solution optimale est  $\frac{1}{3}$ -dense, mais qui n’admet pas de solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense.

**Définition 20** Soit un graphe des conflits  $G^C$ . On définit le graphe  $H(G)$ , appelé **duplication de  $G$**  comme le graphe obtenu en dupliquant le nombre de points mobiles de  $G$  et en rajoutant les arêtes correspondantes.

Cette définition est illustrée avec le graphe des conflits  $G$  défini en figure 4.34 ; le graphe  $H(G)$  obtenu est représenté sur la figure 4.39. La duplication de  $G$  revient à doubler le poids des différents arcs dans le graphe des axes, qui est présenté sur la figure 4.40.

En regardant le graphe des axes présenté à la figure 4.40, et en utilisant le théorème 2, on peut conclure qu’il n’existe pas de solution  $\frac{1}{2}$ -dense, puisque le graphe des axes contient une face de poids pair (6) et de longueur impaire (3).

En utilisant le théorème 3, on peut calculer  $w(G^A)$ , qui vaut le plus grand diviseur commun des poids non nuls des faces. Ici, on a donc  $w(G^A) = 6$ . Il est cependant possible de trouver une solution  $\frac{1}{3}$ -dense ; pour cela, nous utilisons deux fois la solution exposée à la figure 4.35 ; la solution ainsi obtenue est réalisable, car nous pouvons traiter séparément les

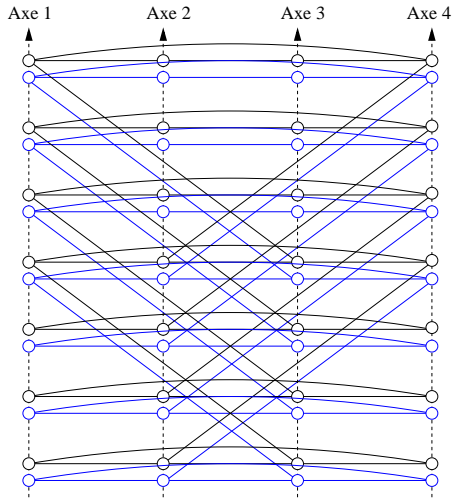


FIG. 4.39 – Graphe des conflits de  $H(G)$ , obtenu en dupliquant le graphe des conflits  $G$  de la figure 4.34

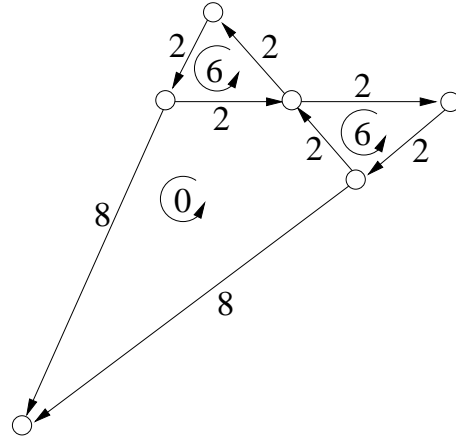


FIG. 4.40 – Graphe des axes de  $H(G)$  : il n'existe pas de solution  $\frac{1}{2}$ -dense

deux composantes connexes de  $H(G)$  ; de plus cette solution, représentée sur la figure 4.41 est  $\frac{1}{3}$ -dense, mais non exactement  $\frac{1}{3}$ -dense. Il suffit en effet de noter qu'un point mobile interdit sur  $G$  engendre deux points mobiles interdits consécutifs sur  $H(G)$  (la solution n'est donc pas  $\frac{1}{2}$ -dense) et que, parmi quatre points mobiles consécutifs sur  $H(G)$ , au moins deux ont le statut autorisé, ce qui prouve que la solution est  $\frac{1}{3}$ -dense.

Nous prouvons qu'il n'existe pas de solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense sur  $H(G)$ . Pour cela, nous montrons que s'il existe une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour le graphe  $H(G)$  de la figure 4.39, alors il doit exister une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour le graphe  $G$  de la figure 4.34, ce qui n'est pas le cas. Pour prouver cela, il suffit de se placer sur un axe, de supposer qu'il existe une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour  $H(G)$ , et de regarder les conséquences sur  $G$ .

La construction qui suit est illustrée par la figure 4.42. Si il existe une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour  $H(G)$ , cela signifie qu'exactly un point mobile sur trois a le statut autorisé. Pour passer de  $H(G)$  à  $G$ , il faut enlever exactement un point mobile sur deux sur chaque axe. Le plus grand diviseur commun entre 3 et 2 étant 1, on enlève un point mobile autorisé une fois sur trois, et il reste donc sur  $G$  une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense. Or, comme d'après la section précédente, il n'existe pas de solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense pour  $G$ , on en conclut que  $H(G)$  n'admet pas de solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense.

Une solution optimale peut donc être  $\frac{1}{3}$ -dense, sans qu'il existe de solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense. Nous généralisons ce résultat dans la section suivante à travers le théorème 9.

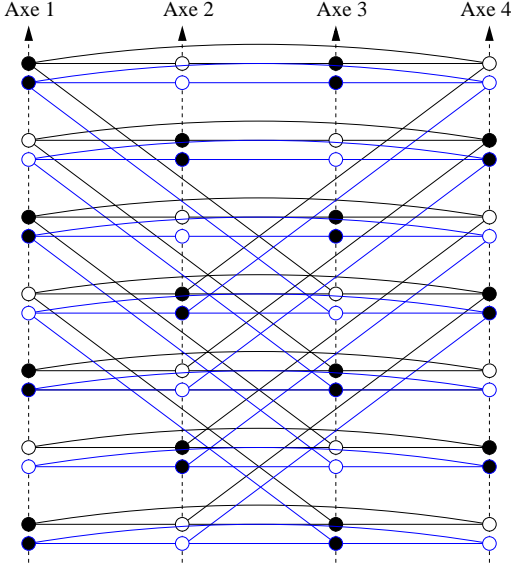


FIG. 4.41 – Solution  $\frac{1}{3}$ -dense pour  $H(G)$

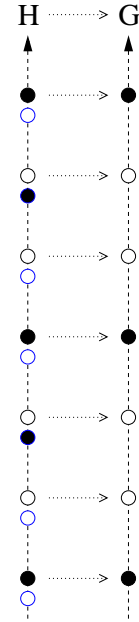


FIG. 4.42 – Une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense sur  $H(G)$  implique une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense sur  $G$

### 4.2.2.3 Généralisation sur les solutions non exactement denses

Dans cette partie, nous montrons qu'il est possible de trouver des instances admettant des solutions qui sont  $\frac{1}{3}$ -denses, mais qui ne sont pas exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, quel que soit l'entier  $k$ . Pour cela, nous allons d'abord démontrer un lemme liant un graphe  $G$  et le graphe  $H(G)$ , duplication de  $G$  comme introduite dans la section précédente.

**Lemme 10** *Si un graphe  $G_k$  est  $\frac{1}{2}$ -dense et non exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, alors  $H(G_k)$  est  $\frac{1}{3}$ -dense et non exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense. De plus,  $H(G_k)$  n'est pas  $\frac{1}{2}$ -dense.*

**Preuve** Il est facile de voir que si  $G_k$  est  $\frac{1}{2}$ -dense, on peut trouver une solution  $\frac{1}{3}$ -dense pour  $H(G_k)$ ; il suffit de prendre une solution  $\frac{1}{2}$ -dense pour chacune des deux parties de  $H(G_k)$  isomorphes à  $G_k$ .

Pour prouver qu'il n'existe pas de solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense pour  $H(G_k)$ , nous allons raisonner par l'absurde, exactement de la même façon que dans la section précédente. En utilisant la même construction que dans la section précédente, si  $H(G_k)$  admet une solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, cela implique sur  $G_k$  une solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, ce qui contredit l'hypothèse de départ. La figure 4.42 montre cette contradiction pour le cas  $k = 1$ . Il est à noter que ce théorème reste vrai quand on regarde le cas pair, mais qu'il n'est plus utile, car il n'existe aucun graphe  $G$  qui soit  $\frac{1}{2}$ -dense et non exactement  $\frac{1}{2k}$ -dense. ■

Grâce à ce lemme, nous allons maintenant chercher des graphes  $\frac{1}{2}$ -denses et non exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -denses, pour tout  $k$ ; en les combinant, et en appliquant le lemme précédent, cela permet de montrer le théorème suivant :

**Théorème 9** *Il existe une instance du problème de densité maximum qui admet une solution optimale  $\frac{1}{3}$ -dense et qui n'admet aucune solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Preuve** La démonstration se fait par la construction d'un graphe  $G_k$  répondant aux conditions du lemme 10. Le graphe  $G_k$  que nous construisons contient  $(2k+2)$  axes (le minimum pour espérer ne pas avoir de solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense d'après le théorème 4 présenté à la page 57). Nous traçons ces axes de façon verticale et les indexons de gauche à droite de 1 à  $2k+2$ . Les points mobiles sont indexés de la même façon sur chaque axe, c'est-à-dire que, horizontalement, les indices des points mobiles sont les mêmes sur tous les axes. L'exemple pour  $k=2$  est donné sur la figure 4.43.

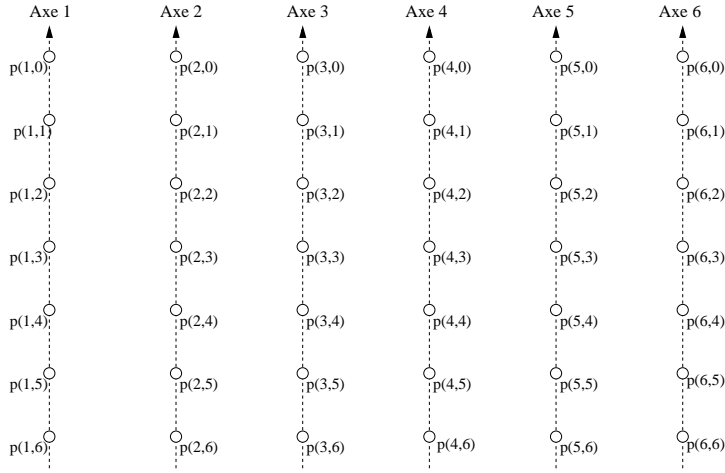


FIG. 4.43 – Indexation des points de  $G_k$

Dans un premier temps, on définit des conflits entre les points mobiles d'axes successifs et de même indice, c'est-à-dire entre  $p(1,0)$  et  $p(2,0)$ , entre  $p(2,0)$  et  $p(3,0)$ ,... et entre  $p(k-1,0)$  et  $p(k,0)$ . Cela revient donc à tracer toutes les lignes horizontales sur la figure 4.43. Si l'on suppose, sans perte de généralité, que le point mobile  $p(1,0)$  est occupé, il n'y a qu'une possibilité pour que ce graphe soit  $\frac{1}{2}$ -dense; cette solution est représentée sur la figure 4.44.

Nous allons maintenant essayer d'empêcher qu'une solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ - existe. Pour cela, nous allons rajouter des conflits sur  $G_k$ . Il faut faire attention à ne pas rajouter des conflits n'importe où, car  $G_k$  doit quand même rester  $\frac{1}{2}$ -dense et la condition d'unicité doit toujours être vérifiée. Comme nous connaissons l'unique solution  $\frac{1}{2}$ -dense, il est en fait assez facile de voir que l'on peut rajouter un conflit entre  $p(i,x)$  et  $p(j,y)$  si  $i+j+x+y$

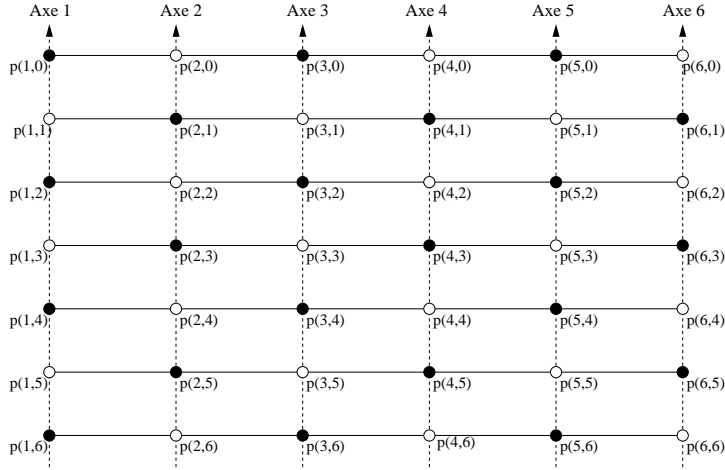


FIG. 4.44 – Unique solution exactement  $\frac{1}{2}$ -dense

est impair, avec  $i \neq j$ . En effet, si  $i$  et  $j$  ont même parité, on voit bien sur la figure 4.44 que les points mobiles de même parité d'indice ont le même statut, donc il faut que les indices ne soient pas de même parité. De la même façon, si  $i$  et  $j$  ne sont pas de même parité, les points mobiles de même parité d'indice ont un statut différent, ce qui convient. Donc  $(i + j + x + y)$  doit bien être impair.

L'idée de la construction est d'empêcher qu'il y ait 2 points mobiles autorisés de même indice. Par exemple, si on suppose que  $p(1, 0)$  est autorisé, on va empêcher que  $p(i, 0)$  soit autorisé, pour tout  $i \neq 0$ . Il est facile de relier entre eux des points mobiles de même indice et de parité d'axe différente. Dans notre exemple, cela revient à relier  $p(1, 0)$  avec  $p(2, 0)$ ,  $p(4, 0)$  et  $p(6, 0)$ . Il est par contre impossible de relier directement des points mobiles de même parité d'axe et de même indice, car le graphe ne serait alors plus  $\frac{1}{2}$ -dense. On a cependant le droit de relier des points mobiles de même parité d'axe si la parité d'indice est différente. Si  $i$  et  $j$  ont même parité (avec  $i < j$ ), on va alors relier  $p(i, 0)$  et  $p(j, 2k + 1)$ . Comme on cherche une solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, s'il ne peut pas y avoir de points mobiles autorisés simultanément en  $p(i, 0)$  et  $p(j, 2k + 1)$ , alors il ne peut pas y avoir de points mobiles autorisés simultanément en  $p(i, 0)$  et  $p(j, 0)$ .

Pour résumer, si  $i$  et  $j$  ont même parité (avec  $i < j$ ), on relie  $p(i, 0)$  et  $p(j, 2k + 1)$ . Si  $i$  et  $j$  n'ont pas la même parité, on relie  $p(i, 0)$  et  $p(j, 0)$ . Cette construction satisfait bien la condition d'unicité puisque entre deux axes  $i$  et  $j$  on ne met qu'une arête. Sur notre exemple, cela revient à relier  $p(1, 0)$  à 5 points mobiles :  $p(2, 0)$ ,  $p(3, 5)$ ,  $p(4, 0)$ ,  $p(5, 5)$  et  $p(6, 0)$ . Ce graphe est représenté sur la figure 4.45 pour  $k = 2$ .

Tous ces conflits permettent toujours d'avoir une solution  $\frac{1}{2}$ -dense. Si l'on cherche une solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, d'après ce qui précède, on sait qu'il est possible de ne mettre qu'un point mobile autorisé d'indice 0. Par la périodicité des conflits, il n'est pas possible de mettre plus d'un point mobile d'indice  $l$ , quel que soit  $l$ . Cela signifie donc qu'on ne peut pas mettre plus d'un point mobile sur  $(2k + 2)$  au statut autorisé. Or une

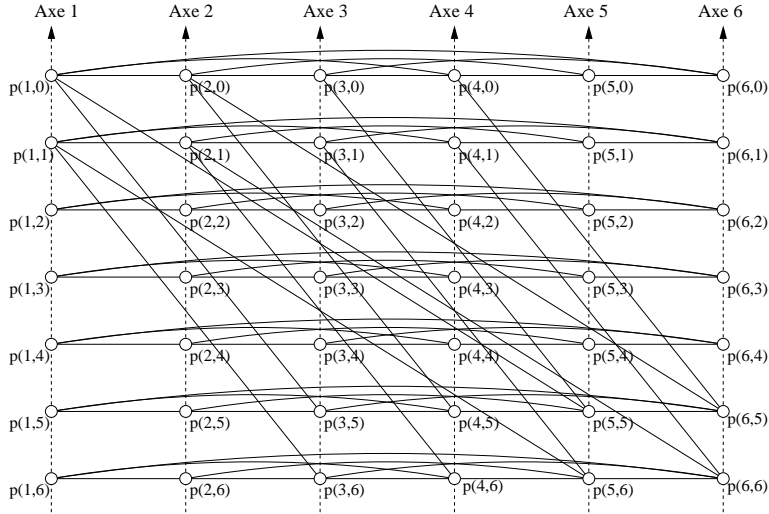


FIG. 4.45 – Graphe  $G_2$ ,  $\frac{1}{2}$ -dense et non exactement  $\frac{1}{5}$ -dense

solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense nécessite un point mobile sur  $(2k+1)$  au statut autorisé. Il n'existe donc pas de solution exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense pour ce graphe  $G_k$ .

En utilisant le lemme 10, on peut donc construire un graphe  $H(G_k)$  qui est  $\frac{1}{3}$ -dense et non exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, pour un  $k$  donné. En faisant l'union de tels graphes pour différentes valeurs de  $k$ , on peut ainsi obtenir un graphe  $H = \bigcup_k H(G_k)$  qui est  $\frac{1}{3}$ -dense et non exactement  $\frac{1}{2k+1}$ -dense, quel que soit  $k$ . ■

Cette section montre que la recherche de solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses au détriment de solutions  $\frac{1}{k}$ -denses peut dégrader les résultats. Si on note  $K$  la valeur optimale de la densité et  $K_{ex}$  celle de l'exacte densité, on peut se poser la question de savoir si il existe un réel  $\alpha$  qui borne le rapport  $\frac{K_{ex}}{K}$  sur l'ensemble des graphes. On a déjà montré que  $\alpha \geq \frac{4}{3}$  puisqu'on a exposé une instance  $\frac{1}{3}$ -dense non exactement  $\frac{1}{3}$ -dense.

### 4.2.3 Heuristiques de stable maximum

Ayant affaire à des graphes de taille importante, nous avons utilisé des heuristiques afin de résoudre le problème de stable maximum. Nous présentons dans cette section les différents algorithmes qui ont été codés. Les résultats obtenus seront présentés dans le chapitre suivant.

Dans cette section, nous supposons avoir un graphe  $G = (V, E)$  en entrée et on essaie de trouver un stable  $S$ . On note  $N(u)$  le voisinage d'un sommet  $u$ , et  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$  le voisinage fermé de  $u$ . On note  $N^d(u)$  les sommets à distance  $d$  de  $u$ . Pour un sous-ensemble de sommets  $V' \subset V$ , on note  $G[V']$  le sous-graphe induit par  $V'$ .

### 4.2.3.1 Recherche d'un stable maximal initial

L'algorithme 2, exponentiel, proposé dans [17], permet de résoudre le problème du stable maximum de façon optimale. Cet algorithme, en  $O(1.22^n)$ , a été préféré à ceux notamment proposés par Beigel [12] ou Robson [32] pour sa simplicité. Nous détaillons dans ce qui suit son fonctionnement.

Pour calculer le stable maximum, l'idée principale est de réduire la taille du graphe étudié, par trois méthodes que nous détaillons après. Quand cela n'est pas possible, il faut choisir un sommet, que l'on affecte ou rejette du stable, et étudier les deux sous-graphes induits.

Pour réduire la taille du graphe  $G = (V, E)$ , il y a trois possibilités :

1. Connexité : Si le graphe est composé de plusieurs composantes connexes, il est évident qu'il suffit de chercher des stables sur les différentes composantes et d'en faire la réunion afin d'obtenir un stable sur le graphe global.
2. Domination : si il existe deux sommets  $u$  et  $v$  tels que  $N[u] \subseteq N[v]$ , alors on peut se ramener au graphe  $G' = G[V']$  avec  $V' = V - \{v\}$ . En effet, si  $v$  appartient à un stable maximum, on peut trouver un autre stable maximum en remplaçant  $v$  par  $u$ , puisque le voisinage fermé de  $u$  est inclus dans le voisinage fermé de  $v$ .
3. Pliage : un sommet  $v$  est dit *pliable* si le graphe engendré par son voisinage  $N(v)$  ne contient pas de clique de taille 3 (appelée aussi anti-triangle). Le *pliage* d'un tel sommet  $v$  de  $G$  consiste à créer le graphe  $\tilde{G}_v$  de la façon suivante :
  - On initialise à  $\tilde{G}_v$  le sous-graphe induit de  $G$  par  $V' = V - N[v]$ .
  - $\forall u \in N(v), \forall w \in N(v)$ , si  $(u, w) \notin E$  (on dit que  $(u, w)$  est une anti-arête), on ajoute un sommet  $uw$  et des arêtes entre  $uw$  et tous les sommets de  $N(u) \cup N(w)$ .
  - On crée une clique entre tous les nouveaux sommets créés.

Un exemple de pliage est présenté sur la figure 4.46. En rajoutant des conditions sur les sommets pliages, présentées dans l'algorithme 2, on obtient un graphe  $\tilde{G}$  qui a strictement moins de sommets que  $G$ .

Si il n'est pas possible de réduire la taille du graphe  $G$ , on choisit un sommet  $v$  de degré maximum, et on sépare la recherche du stable en deux cas, selon que le sommet  $v$  appartient ou non au stable. Si on suppose que le sommet  $v$  est inclus dans le stable, on cherche un stable sur le sous-graphe induit par  $V - N[v]$  et on y ajoute le sommet  $v$ . Si on suppose que  $v$  n'appartient pas au stable, on peut l'enlever du graphe. On peut aussi enlever les sommets miroirs de  $v$ . On dit qu'un sommet  $u$  est *miroir* de  $v$  si  $u \in N^2(v)$  et le graphe  $G[N(v) - N(u)]$  est une clique. On note  $M(v)$  l'ensemble des sommets miroirs de  $v$ . Un exemple de sommet miroir est donné à la figure 4.47.

Cet algorithme n'est bien évidemment pas utilisable sur des graphes de grande tailles, puisqu'il a une complexité exponentielle. Il est cependant possible de l'appliquer sur de petites instances, et nous verrons son utilité dans la section suivante. Afin de rechercher une solution initiale à notre problème de stable maximum, nous devons donc choisir un algorithme avec un temps de calcul beaucoup plus faible.

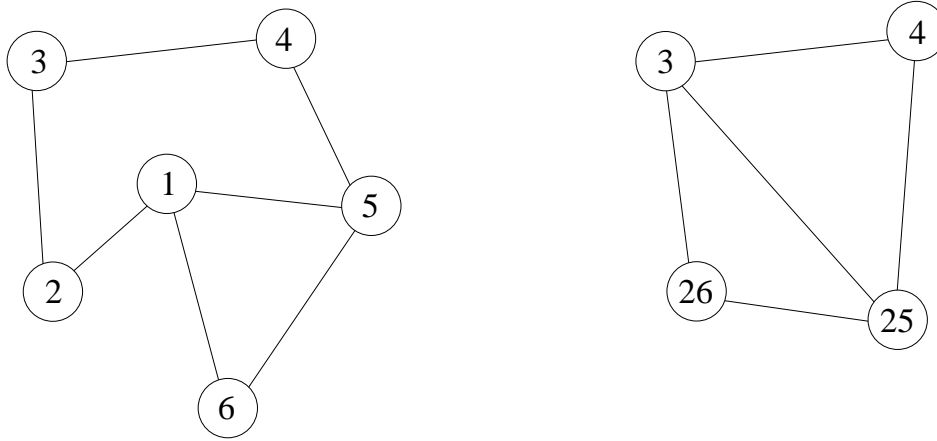


FIG. 4.46 – Un graphe et son pliage suivant le sommet 1

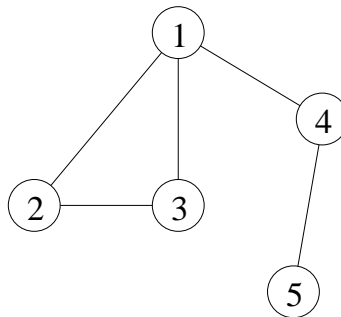


FIG. 4.47 – Sommet 5 miroir du sommet 1

L'algorithme 3, naïf et glouton, permet de calculer de façon très rapide un premier stable. Dans cet algorithme, on note  $V'$  l'ensemble des sommets non marqués. A chaque étape, on choisit un sommet  $v$  aléatoirement dans  $V'$  qu'on ajoute au stable, et on enlève le voisinage fermé  $N[v]$  de  $V'$ . On itère jusqu'à ce que  $V'$  soit l'ensemble vide. Le choix aléatoire du sommet est remplacé dans l'algorithme 4 par le choix d'un sommet ayant le plus petit degré dans  $V'$ .

#### 4.2.3.2 Recherche locale autour du stable initial

Afin d'augmenter la qualité de la solution, il est possible de faire une post-optimisation sur un stable déjà obtenu. Dans notre cas, nous nous sommes attachés à faire de la recherche locale afin d'augmenter la taille du stable. Cette recherche locale peut avoir lieu sur une partie plus ou moins importante du graphe. Nous proposons deux types de recherche locale : une recherche locale ponctuelle, basée sur le voisinage d'un sommet du graphe, et une recherche locale étendue, définie à partir d'un voisinage plus large.

La *recherche locale ponctuelle* consiste à choisir un sommet  $v$  du stable  $S$  et à définir le



---

**Algorithme 2** *StableMaxOpt(G)* // Algorithme de recherche exacte d'un stable maximum [17]

---

**Entrées:** Un graphe  $G = (V, E)$

**Sorties:** Un stable  $S' \subset V$

**si**  $G = \emptyset$  **alors**

**renvoie**  $S' = \emptyset$

**finsi**

**si**  $\exists$  une composante connexe  $C \subsetneq G$  **alors**

**renvoie**  $StableMaxOpt(C) \cup StableMaxOpt(G - C)$

**finsi**

**si**  $\exists$  un sommet  $v$  pliable tel que  $d(v) \leq 4$  et  $N(v)$  contient au plus 3 anti-arêtes **alors**

    Fabriquer  $\tilde{G}_v$

$\tilde{S} = StableMaxOpt(\tilde{G}_v)$

**si**  $\tilde{S}$  contient un sommet de la forme  $uw$  **alors**

**renvoie**  $S' - \{uw\} \cup \{u\} \cup \{w\}$

**sinon**

**renvoie**  $S' \cup \{v\}$

**finsi**

**sinon**

    Choisir un sommet  $v$  de degré maximum

$S_v = StableMaxOpt(G - N(v))$

$S_{\bar{v}} = StableMaxOpt(G - \{v\} - M(v))$

**si**  $|S_v| + 1 < |S_{\bar{v}}|$  **alors**

**renvoie**  $S_{\bar{v}}$

**sinon**

**renvoie**  $S_v \cup \{v\}$

**finsi**

**finsi**

---

graphe  $G'$  dont les sommets sont les voisins  $u$  de  $v$  tels qu'aucun sommet du voisinage de  $u$ , autre que  $v$ , n'appartienne au stable  $S$ . La figure 4.48 illustre ces propos avec  $v = 1$ . Le but est ensuite de chercher un stable maximum  $S'$  sur ce graphe  $G'$ . Si  $S'$  est de cardinalité plus grande que 1, alors on enlève  $v$  du stable  $S$  et on ajoute les sommets de  $S'$ .

Pour calculer ce stable  $S'$ , on peut faire appel aux algorithmes utilisés pour la recherche du stable initial, comme c'est notamment le cas pour l'algorithme 6. Il peut être intéressant dans cette situation de chercher des stables de meilleure qualité, voire même optimaux, car les graphes sont de moindre taille. On peut dans ce cas appliquer l'algorithme 2 décrit à la section précédente, ce qui donne l'algorithme 7.

En effectuant une recherche locale ponctuelle, les sous-graphes obtenus peuvent être de très petite taille. De plus, de nombreux cas pathologiques existent pour cette recherche locale. Prenons par exemple le cas d'un graphe biparti complet  $\mathcal{K}_{a,b}$ ; on note  $V_1$  et  $V_2$  les deux parties du graphes, avec  $|V_1| = a < b = |V_2|$ . Un exemple avec  $a = 2$  et  $b = 4$  est

---

**Algorithme 3** *GloutonAleatoire*( $G$ ) //Algorithme glouton aléatoire de stable maximum en  $O(n)$

---

**Entrées:** Un graphe  $G = (V, E)$

**Sorties:** Un stable  $S \subset V$

//Initialisation

$S = \emptyset$

Sommets non marqués :  $V' = V$

**tantque**  $V' \neq \emptyset$  **faire**

    Choisir un sommet aléatoire  $v \in V'$

$S = S \cup \{v\}$

$V' = V' - N[v]$

**fin tantque**

**renvoie**  $S$

---

---

**Algorithme 4** *GloutonDegreMin*( $G$ ) //Algorithme de stable maximum avec choix du degré minimum en  $O(n)$

---

**Entrées:** Un graphe  $G = (V, E)$

**Sorties:** Un stable  $S \subset V$

//Initialisation

$S = \emptyset$

Sommets non marqués :  $V' = V$

**tantque**  $V' \neq \emptyset$  **faire**

    Choisir un sommet  $v \in V'$  ayant le plus petit degré dans  $G[V']$

$S = S \cup \{v\}$

$V' = V' - N[v]$

**fin tantque**

**renvoie**  $S$

---

---

**Algorithme 5** *GloutonAleatoireRL(G)* //Algorithme glouton aléatoire de stable maximum avec Recherche Locale

---

**Entrées:** Un graphe  $G = (V, E)$

**Sorties:** Un stable  $S \subset V$

//Initialisation

$S = \emptyset$

Sommets non marqués :  $V' = V$

**tantque**  $V' \neq \emptyset$  **faire**

    Choisir un sommet aléatoire  $v \in V'$

$S = S \cup \{v\}$

$V' = V' - N[v]$

**fin tantque**

**pour** n itérations **faire**

$S = RechercheLocale(G, S)$

**fin pour**

**renvoie**  $S$

---

---

**Algorithme 6** *RechercheLocale(G, S)* //Recherche locale pour augmenter la taille du stable

---

**Entrées:** Un graphe  $G = (V, E)$  et un stable  $S \subset V$

**Sorties:** Un stable  $S' \subset V$

    Choisir un sommet aléatoire  $v \in S$

$V' = \emptyset$

**pour** tous les voisins  $u$  de  $v \in N(v)$  **faire**

**si**  $N(u) \cap S = \{v\}$  **alors**

$V' = V' \cup \{u\}$

**finsi**

**fin pour**

$G' = G[V']$

$S_N = GloutonAleatoire(G')$

**si**  $S_N \neq \emptyset$  **alors**

**renvoie**  $S - \{v\} \cup S_N$

**sinon**

**renvoie**  $S$

**finsi**

---

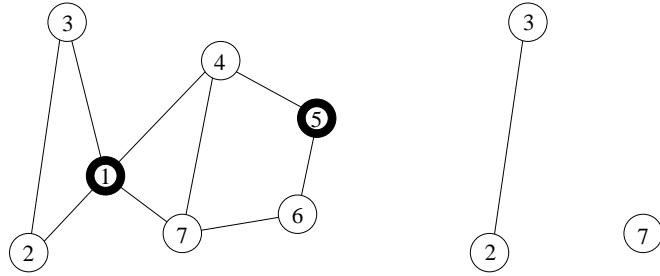


FIG. 4.48 – Un graphe  $G$ , un stable  $S = \{1, 5\}$  et le graphe  $G'$  induit par les sommets voisins du sommet 1, candidats à rentrer dans le stable si le sommet 1 en est enlevé

présenté sur la figure 4.49.

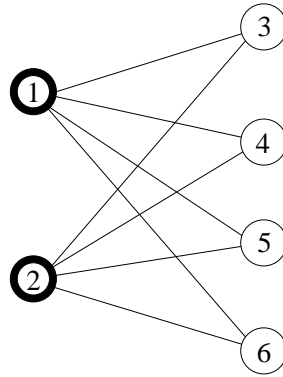


FIG. 4.49 – Un graphe biparti  $G$  et un stable  $S = \{1, 2\}$  rendant la recherche locale ponctuelle infructueuse

Si le stable initial est constitué des  $a$  sommets de  $V_1$  (ce qui arrive dès lors qu'un sommet de  $V_1$  est dans le stable), alors la recherche locale ponctuelle n'a aucun intérêt, puisque le sous-graphe  $V'$  est vide, quel que soit le sommet du stable initial.

Afin de remédier à ces difficultés, nous proposons une *recherche locale étendue*. Dans celle-ci, nous choisissons un sommet  $v$  n'appartenant pas au stable initial  $S$  de façon aléatoire. Tous les voisins  $u \in N(v)$  de  $v$  dans le stable  $S$  forment une liste de sommets exclus. Pour chaque élément  $w$  de cette liste, on regarde si, parmi ses voisins  $y \in N(w)$ , certains satisfont les critères pour appartenir à l'ensemble des sommets  $V'$ . Pour cela, il faut que  $y$  n'ait pas de voisin  $z$  qui appartienne à  $S - \text{SommetsExclus}$ . Une fois l'ensemble  $V'$  formé, on cherche sur  $G' = G[V']$  un stable maximum  $S_N$  par la méthode de notre choix. Si le stable obtenu est de cardinalité moins importante que le nombre de sommets exclus, la recherche locale est infructueuse et le stable n'est pas modifié. Dans le cas contraire, la recherche locale renvoie un stable  $S'$  formé des sommets de  $S$ , auxquels ont été enlevés les sommets exclus, et ajoutés les sommets de  $S_N$ . L'algorithme 8 présente cette recherche

---

**Algorithme 7** *RechercheLocaleOpt(G, S)* //Recherche locale optimale pour augmenter la taille du stable

---

**Entrées:** Un graphe  $G = (V, E)$  et un stable  $S \subset V$

**Sorties:** Un stable  $S' \subset V$

Choisir un sommet aléatoire  $v \in S$

$V' = \emptyset$

**pour** tous les voisins  $u$  de  $v \in N(v)$  **faire**

**si**  $N(u) \cap S = \{v\}$  **alors**

$V' = V' \cup \{u\}$

**finsi**

**fin pour**

$G' = G[V']$

$S_N = \text{StableMaxOpt}(G')$

**si**  $S_N \neq \emptyset$  **alors**

**renvoie**  $S - \{v\} \cup S_N$

**sinon**

**renvoie**  $S$

**finsi**

---

locale étendue avec une recherche de stable maximum optimale. L'application de cette algorithme au graphe des conflits de la figure 4.49 permet, quel que soit le choix du sommet  $v$  n'appartenant pas au stable, d'obtenir un stable  $S' = \{3, 4, 5, 6\}$  en une seule itération.

---

**Algorithme 8** *RechercheLocaleEtendueOpt(G, S)* //Recherche locale étendue optimale  
pour augmenter la taille du stable

---

**Entrées:** Un graphe  $G = (V, E)$  et un stable  $S \subset V$

**Sorties:** Un stable  $S' \subset V$

Choisir un sommet aléatoire  $v \notin S$

$V' = \emptyset$

$SommetsExclus = \emptyset$

**pour** tous les voisins  $u$  de  $v \in N(v)$  **faire**

**si**  $u \in S$  **alors**

$SommetsExclus+ = \{u\}$

**finsi**

**fin pour**

**pour** tout  $w \in SommetsExclus$  **faire**

**pour** tout  $y \in N(w)$  **faire**

**si**  $N(y) \cap S \setminus SommetsExclus = \emptyset$  **alors**

$V' = V' \cup \{y\}$

**finsi**

**fin pour**

**fin pour**

$G' = G[V']$

$S_N = StableMaxOpt(G')$

**si**  $|S_N| \geq |SommetsExclus|$  **alors**

**renvoie**  $S - SommetsExclus \cup S_N$

**sinon**

**renvoie**  $S$

**finsi**

---

## 4.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux orientations possibles de notre paradigme. La première, basée sur les résultats théoriques obtenus principalement sur le graphe des axes à la section 3.2, consiste à définir un treillis pour un niveau de vol donné. Le treillis le plus efficace est composé de trois paires de directions et forme un pavage du plan par des hexagones et des triangles réguliers. Une solution  $\frac{1}{2}$ -dense de ce treillis est représentée à la figure 4.10 (page 79). Le passage du plan à la sphère déforme le treillis, et nous avons montré que la principale conséquence de cette déformation est l'existence d'une taille maximum du treillis sur la sphère, représenté à la figure 4.25 (page 88).

La seconde orientation repose sur l'étude du problème de l'ensemble d'axes  $\frac{1}{k}$ -denses maximum. Nous avons introduit la notion de graphe des conflits  $Q$ -quotienté (page 89, qui nous a été utile afin de modéliser le problème d'ensemble d'axes  $\frac{1}{k}$ -denses maximum. Nous avons en effet montré que, en ajoutant des cliques entre tous les sommets d'un axe  $i$  pour tout axe  $i$  dans le graphe des conflits  $k$ -quotienté, la recherche d'un stable maximum dans le graphe ainsi obtenu permet de trouver une solution exactement  $\frac{1}{k}$ -dense maximum. Nous avons montré dans la section 4.2.2 que la restriction de la  $\frac{1}{k}$ -densité à l'exacte  $\frac{1}{k}$ -densité peut dégrader la qualité d'une solution. Enfin, dans la section 4.2.3, nous avons proposé plusieurs heuristiques gloutonnes de stable maximum, ainsi que deux méthodes de recherche locale, basées sur des voisinages de taille plus ou moins importante.

# Chapitre 5

## Applications numériques

Dans ce chapitre, après une brève description des données dans la section 5.1, nous présentons les résultats numériques obtenus à l'aide des solutions envisagées au chapitre 4. La section 5.2 propose les résultats auxquels nous sommes parvenus en affectant des vols sur un ou des treillis, et la section 5.3 ceux obtenus sur les axes en orthodromie. Enfin, dans la section 5.4, nous présentons des résultats en combinant les deux méthodes.

### 5.1 Description des données

Le laboratoire LICIT développe depuis plus de 10 ans un logiciel appelé *atelier aérien*. Celui-ci a pour objectif de simuler des journées de trafic aérien selon différentes méthodes de régulation et d'optimisation, et d'évaluer ces méthodes à l'aide de différents indicateurs.

De nombreuses données réelles, fournies par Eurocontrol, sont utilisées dans l'atelier aérien. Celles qui nous intéressent plus particulièrement sont les données sur le trafic aérien et les données sur les performances des avions. Les données de trafic sont composées des AIRAC 299 et 300, couvrant la période allant du 30 août 2007 au 24 octobre 2007. Nous avons principalement effectué nos tests sur la journée du 27 septembre 2007, qui est composée de 33213 plans de vol. Chaque plan de vol contient de nombreuses informations relatives à un vol, parmi lesquelles nous trouvons l'aéroport d'origine et de destination, le type d'avion, le nom de la compagnie, l'heure de départ, les routes aériennes que la compagnie souhaite suivre ainsi que le niveau de vol requis par la compagnie.

Afin de simuler ces plans de vol, il est nécessaire de connaître les vitesses des avions. Pour cela, l'atelier aérien utilise des données tabulées issues du modèle BADA (Base of Aircraft Data) [5], développé par Eurocontrol ; pour un type d'avion et un niveau de vol donnés, nous connaissons ainsi les vitesses horizontale et verticale d'un avion et pouvons en déduire les consommations des différents vols.

Il est nécessaire de pouvoir comparer les résultats que nous obtenons avec une *simulation de référence*. Celle-ci consiste à faire voler les 33213 plans de vol de la journée du 27 septembre 2007 en respectant les routes aériennes demandées et les niveaux de vol requis. Nous utilisons parfois le terme *simulation partielle de référence* afin de se référer à une



simulation ne traitant pas la totalité des vols d'une journée.

Pour mesurer la qualité d'une simulation effectuée dans l'atelier aérien, nous disposons de plusieurs indicateurs. Le premier d'entre eux est le *nombre total de conflits*<sup>1</sup> entre les différentes paires d'avions. Cette mesure n'est pas forcément la plus pertinente, car elle ne tient pas compte du fait qu'un conflit peut être plus ou moins grave. Nous avons donc choisi de définir une *quantité de conflits*, qui consiste à faire la somme des durées de chaque conflit. Cet indicateur ne reflète pas complètement la gravité des conflits mais a l'avantage d'être simple et de pouvoir être calculé de façon rapide. Nous proposons ensuite trois mesures liées aux aspects économique et énergétique : la *distance totale parcourue*, la *consommation totale* et la *durée totale de vol*. La consommation est probablement l'indicateur le plus naturel, mais il est intéressant de le comparer avec la distance totale parcourue, car ils n'évoluent pas forcément de la même façon, notamment si on modifie les vitesses d'exploitation des avions. La durée totale de vol intéresse principalement les compagnies d'un point de vue économique. Le dernier indicateur que nous fournissons concerne le *retard à l'arrivée*. Il est calculé par rapport à la simulation de référence, plutôt que par rapport aux heures d'arrivée déposées dans les plans de vol, afin de pouvoir comparer notre affectation à ce qui existe à l'heure actuelle. Ce retard peut, dans notre paradigme, être décomposé en deux parties : le retard prévisible et le retard indésirable. Le *retard prévisible* est le décalage entre l'horaire de décollage demandé et le prochain point mobile autorisé sur l'axe que doit emprunter l'avion. Le retard prévisible vient du fait que le système de points mobiles sera calculé en amont des plans de vol, ce qui permettra aux compagnies d'adapter leurs horaires. Pour chiffrer ce retard, on calcule donc le temps moyen d'attente pour obtenir un point mobile autorisé, sans tenir compte des saturations qui peuvent exister aussi bien sur les axes de points mobiles qu'aux aéroports. Le *retard indésirable* provient principalement de la saturation des aéroports (deux avions ne peuvent pas décoller simultanément d'un même aéroport, un temps de 30 secondes est nécessaire entre deux décollages successifs dans l'atelier aérien), et dans de très rares cas de la saturation des axes ; il est calculé en soustrayant le retard prévisible du retard total. Nous l'exprimons en nombre d'heures ainsi qu'en nombre de secondes par vol, ce qui permet de comparer des simulations n'ayant pas forcément le même nombre de vols.

## 5.2 Affectation des plans de vol à un ou des treillis

Le treillis défini à la figure 4.25 (page 88) est composé de deux paramètres, qui sont le niveau de vol sur lequel il est placé et la vitesse des points mobiles. Pour choisir la vitesse associée à un treillis, nous sommes confrontés au fait qu'il existe de nombreux types d'avions à un niveau de vol donné, et que les vitesses d'exploitation (données par le modèle BADA) peuvent être très différentes. La figure 5.1 présente les différentes vitesses de croisière en fonction des niveaux de vols. Pour un couple niveau-vitesse ( $n - v$ ), l'aire

---

<sup>1</sup>Nous pouvons utiliser un tel indicateur car l'atelier aérien ne résout pas les conflits. Même s'il s'agit d'un manque de réalisme, ce n'est pas gênant car nous comparons les différentes méthodes dans les mêmes conditions.

des avions est proportionnelle au nombre d'avions ayant la vitesse de croisière  $v$  au niveau de vol  $n$ .

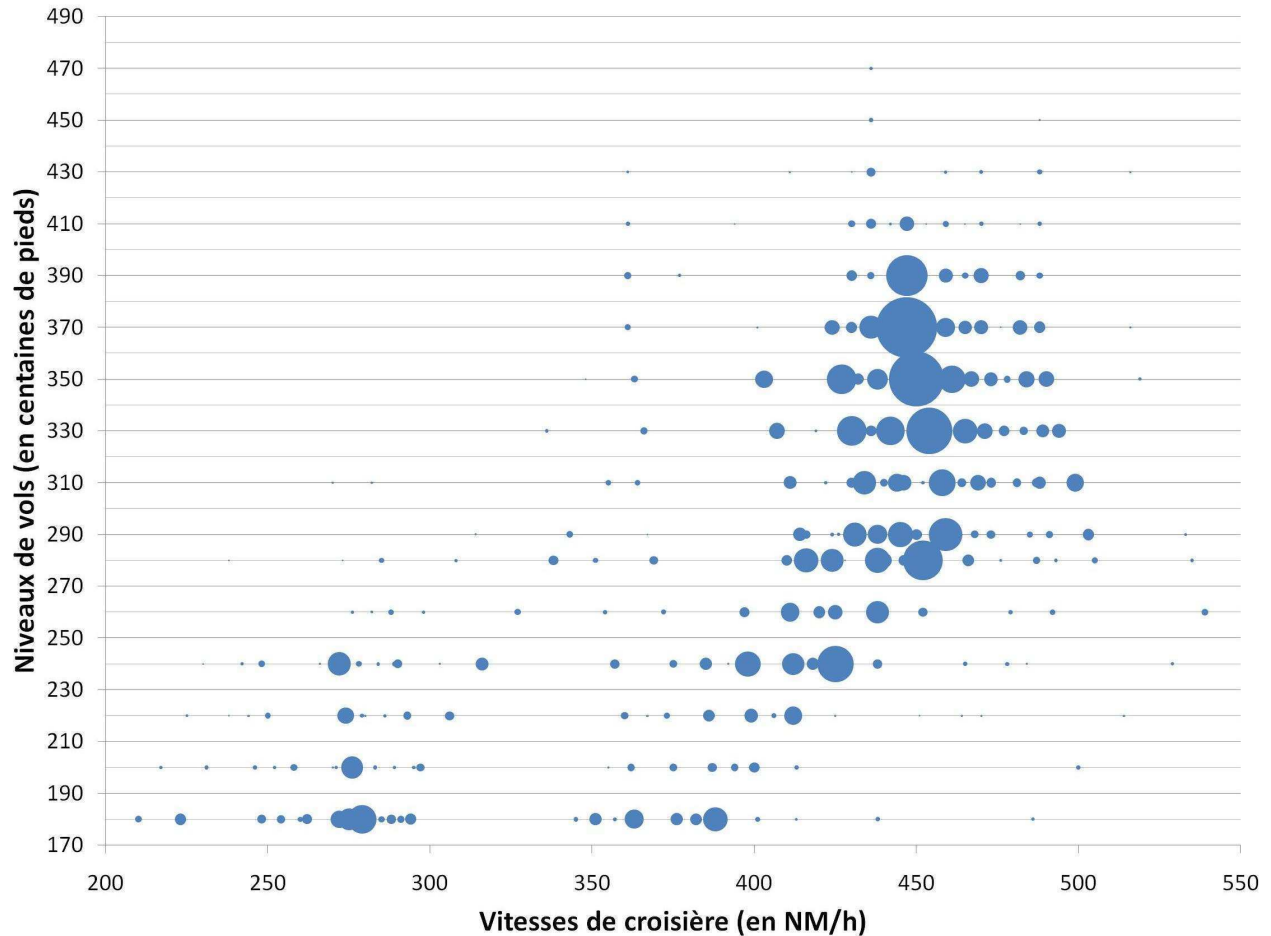


FIG. 5.1 – Profil des vitesses de croisière en fonction des niveaux de vols pour la journée du 27 septembre 2007

Un avion ne peut évidemment pas voler à n'importe quelle vitesse. Il ne doit pas voler en-dessous d'une vitesse minimum pour que la portance soit plus importante que le poids, et sa poussée maximum (liée à la puissance des moteurs) impose une vitesse maximum. Afin de respecter ces conditions et de ne pas trop surconsommer, pour un treillis sur lequel la vitesse  $v$  est fixée, on ne s'autorise à mettre que des avions dont la vitesse de croisière d'exploitation appartient à l'intervalle  $[v, 1.15v]$ . On est ainsi sûr que l'avion volera à une vitesse légèrement plus faible que sa vitesse d'exploitation standard et que ses performances lui permettent une telle vitesse. Pour définir la vitesse  $v$  associée à un treillis, il faut donc choisir l'intervalle de vitesses  $[v, 1.15v]$  où le nombre d'avions est maximum. Les résultats obtenus en suivant cette règle sont très variables selon les niveaux de vol ; par exemple,

pour le niveau FL370, la vitesse est de 450KTS, alors qu'au niveau FL200 la vitesse est fixée à 276KTS.

### 5.2.1 Conditions d'affectation d'un vol à un treillis

Pour qu'un plan de vol soit affecté à un treillis durant une partie de sa croisière, nous lui imposons certaines conditions à respecter :

- Le niveau demandé sur le plan de vol doit appartenir à l'intervalle  $[n, n + 20]$ , où  $n$  est le niveau du treillis. Il n'est ainsi pas possible qu'un avion doive voler à un niveau de vol plus élevé que ce qu'il a demandé ; cela permet d'éviter qu'un avion ne puisse pas monter au niveau exigé à cause de ses performances. L'autre borne de l'intervalle est liée à la surconsommation qu'engendrerait un niveau de vol trop faible.
- La vitesse de croisière théorique de l'avion au niveau du treillis doit, comme expliqué précédemment, appartenir à l'intervalle  $[v, 1.15v]$ , où  $v$  est la vitesse du treillis.
- Pour chaque vol, il faut déterminer un point d'entrée et un point de sortie du treillis. Afin de simplifier la gestion des points d'entrée et de sortie, ces points correspondent aux points d'intersections des différents axes. La gestion de ces points est illustrée sur la figure 5.2. Le point d'entrée (resp. de sortie) doit appartenir à une couronne centrée sur l'aéroport d'origine (resp. de destination). Le rayon intérieur de la couronne est la distance de montée (resp. de descente) de l'avion. Le rayon extérieur est fixé de façon à maximiser la distance parcourue sur le treillis, tout en ayant un certain nombre de points d'entrée (resp. de sortie) potentiels. Nous avons ainsi fixé le rayon extérieur comme étant proportionnel au rayon intérieur ; le rapport entre les deux rayons étant de 1.2. Enfin, il faut que la distance totale parcourue (origine - point d'entrée - point de sortie - destination) ne soit pas beaucoup plus importante que la distance directe (origine - destination). Pour cela, le rapport des distances doit être inférieur à une constante, fixée à 1.1. On s'interdit donc un allongement de plus de 10% par rapport à une orthodromie.

### 5.2.2 Résultats des simulations

Dans cette section, nous présentons une simulation partielle permettant de mesurer l'intérêt d'un treillis, puis une simulation globale utilisant plusieurs treillis.

Nous testons dans un premier temps le placement d'un treillis au niveau de vol FL300 ; nous y affectons tous les plans de vols qui respectent les conditions décrites au paragraphe précédent. Comme seuls des vols ayant un niveau de vol requis entre le FL300 et le FL320 (au nombre de 3829 pour la journée du 27 septembre 2007) peuvent être affectés au treillis, nous ne considérons que ces vols dans la simulation. Parmi ces vols, 1993 sont affectés au treillis, les autres respectant leur plan de vol déposé. Le tableau 5.1 permet de comparer cette affectation avec une simulation partielle de référence, où les avions suivent leur plan de vol déposé.

Nous observons de très bons résultats pour cette affectation partielle, notamment en termes de quantité de conflits puisque la durée totale des conflits diminue de 52.4%. La

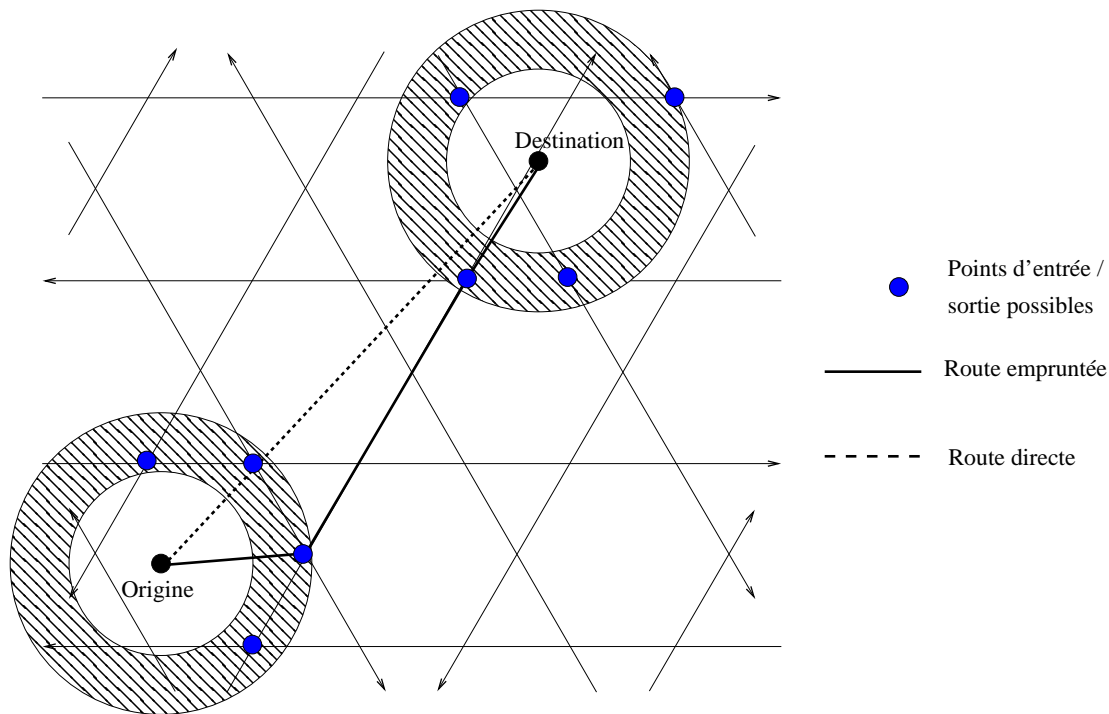


FIG. 5.2 – Gestion des points d'entrée/sortie du treillis

distance parcourue est aussi inférieure à celle de la simulation de référence, de l'ordre de 2%, ce qui confirme l'intérêt de cette approche. Alors que les avions ne volent pas forcément au niveau de vol demandé ni à leur vitesse de croisière souhaitée, on constate tout de même une légère diminution de la consommation, évidemment liée à la diminution de la distance parcourue. Enfin, les retards indésirables à l'arrivée diminuent de presque 1 minute par vol. Il est tout de même important de noter que seulement la moitié du trafic a pu être affectée au treillis, les autres avions volant sur le réseau de routes actuel.

Devant de tels résultats, nous avons étendu la structure du treillis sur plusieurs niveaux de vols et avons décidé de simuler la globalité du trafic. Nous proposons de mettre un treillis à chaque niveau de vol entre le FL180 et le FL450. Afin de réduire le problème de surconsommation, nous avons décidé de réduire l'écart entre le niveau demandé par un avion et le niveau du treillis sur lequel il peut être affecté. Ainsi, le niveau demandé sur le plan de vol doit appartenir à l'intervalle  $[n, n + 20[$  où  $n$  est le niveau du treillis. Cela signifie que chaque plan de vol peut être affecté potentiellement à deux treillis différents. Pour qu'un maximum de vols soit affecté aux treillis, nous alternons les orientations des treillis. Nous définissons ainsi deux orientations, avec un angle de  $30^\circ$  entre les deux. Cela permet d'avoir 12 directions possibles sur deux treillis consécutifs. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 5.2.

En termes de quantité de conflits, on note une importante amélioration, de l'ordre de 33% sur la durée totale. Un treillis n'engendrant par définition aucun conflit, un conflit res-

	Simulation partielle de référence	Affectation sur treillis au FL300
Vols affectés au treillis	0	1993
Vols affectés au PLN déposé	3829	1836
Nombre de conflits	1297	857 (−33.9%)
Durée totale des conflits (en h.)	94	45 (−52.4%)
Distance totale parcourue (en milliers de NM)	5256	5145 (−2.1%)
Consommation totale (en tonnes)	70616	69737 (−1.2%)
Durée totale de vol (en h.)	11696	11600 (−0.8%)
Retard à l’arrivée par rapport à la simulation partielle de référence (en h.)	-	38
dont :		
- Retard prévisible (en h.)	-	94
- Retard indésirable (en h.)	-	−56
(en s. par vol)	-	(−53)

TAB. 5.1 – Comparaison d’une affectation partielle des vols sur un treillis au FL300 avec une simulation partielle de référence (3829 vols avec un niveau de vol requis entre les niveaux de vol 300 et 320)

tant peut se produire soit pendant les phases de montée/descente de deux avions étant sur les treillis, soit entre un avion affecté au treillis et un autre suivant son plan de vol déposé. Le retard indésirable est quasiment identique entre les deux simulations. La distance totale augmente par contre légèrement, et la consommation est accrue (+0.4%). Cette légère différence s’explique par le comportement des vols long-courriers, qui peuvent rester sur le treillis sur une grande distance, augmentant de façon non négligeable leur consommation. Ce problème n’apparaît pas lors de la simulation composée d’un seul treillis, car les long-courriers demandent des niveaux de vols supérieurs au FL320.

Ces expérimentations sur les treillis sont globalement très positives, et plus particulièrement sur la réduction de la quantité de conflits. Il pourrait être intéressant d’étudier de façon plus précise les surconsommations des différents types d’avions selon la vitesse et/ou le niveau de vol qu’on leur impose. Une diminution de la consommation par rapport au plan de vol actuel pourrait ainsi très bien être une condition supplémentaire pour qu’un plan de vol soit affecté à un treillis.

	Simulation de référence	Affectation sur treillis du FL180 au FL450
Vols affectés au treillis	0	9160
Vols affectés au PLN déposé	33213	24053
Nombre de conflits	36114	31679 (−12.3%)
Durée totale des conflits (en h.)	1233	827 (−32.9%)
Distance totale parcourue (en milliers de NM)	29410	29256 (−0.5%)
Consommation totale (en tonnes)	301053	302344 (+0.4%)
Durée totale de vol (en h.)	70850	70904 (+0.1%)
Retard à l’arrivée par rapport à la simulation de référence (en h.) dont :	-	516
- Retard prévisible (en h.)	-	509
- Retard indésirable (en h.)	-	7
(en s. par vol)	-	(1)

TAB. 5.2 – Comparaison d’une affectation d’une partie des vols sur des treillis allant du FL180 au FL450 avec une simulation de référence (33213 vols)

### 5.3 Affectation des plans de vol à des axes de points mobiles en orthodromie

Cette partie est consacrée à la recherche de solutions opérationnelles pour le problème de l’ensemble d’axes  $\frac{1}{k}$ -denses maximum. Dans la section 4.2, nous avons montré que la recherche de solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses s’apparente à la recherche d’un stable maximum et nous avons proposé un certains nombre d’heuristiques pour le résoudre.

Nous définissons dans cette section un axe comme étant une orthodromie entre un aéroport d’origine et un aéroport de destination, avec un niveau de vol et un type d’avion. Cela signifie que tous les plans de vol ayant les mêmes origine, destination, niveau de vol requis et type d’avion sont affectés au même axe. Inversement, deux vols ayant la même origine et la même destination ne sont pas forcément affectés au même axe. Les avions présents sur un axe ayant tous les mêmes performances, cela implique qu’un axe peut s’adapter à un type d’avion afin que ce dernier consomme le moins possible : les points mobiles se déplacent sur un axe conformément aux performances d’un type d’avion.

Dans la section 5.3.1, nous énonçons les différents résultats obtenus sur les heuristiques de stable maximum ; la section 5.3.2 est dédiée aux résultats des simulations.

### 5.3.1 Résultats des différentes heuristiques de stable maximum

Les premiers tests sont effectués sur les axes dont le niveau de vol est le FL320. Ce niveau est composé de 1043 axes, correspondant à 1420 plans de vol. Nous recherchons le plus grand sous-ensemble d'axes exactement  $\frac{1}{3}$ -denses. Nous avons donc à chercher un stable maximum dans le graphe des conflits 3-quotienté, composés de  $3 * 1043 = 3129$  sommets. Les résultats des différentes heuristiques sont présentés dans le tableau 5.3.

	$n_i = 10$ $n_{RL} = 0$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^5$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^6$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^7$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^8$
<i>GloutonAleatoire</i> et <i>RechercheLocale</i> (Algorithmes 3 et 6)	419.9 [412; 435] (0)	472.0 [459; 479] (0.5)	502.4 [496; 509] (4.5)	520.3 [515; 525] (46.4)	525.5 [519; 533] (434.7)
<i>GloutonAleatoire</i> et <i>RechercheLocaleOpt</i> (Algorithmes 3 et 7)	419.9 [412; 435] (0)	514.8 [507; 523] (11.8)	524.2 [519; 529] (120.3)	527.0 [522; 532] (1222.3)	- - -
<i>GloutonDegreMin</i> et <i>RechercheLocale</i> (Algorithmes 4 et 6)	447 [447; 447] (0)	487.1 [483; 497] (0.6)	510.7 [508; 518] (4.2)	522.4 [519; 525] (44.4)	527.2 [525; 531] (459.3)
<i>GloutonDegreMin</i> et <i>RechercheLocaleOpt</i> (Algorithmes 4 et 7)	447 [447; 447] (0)	518.3 [516; 522] (11.8)	524.9 [522; 528] (123.7)	525.4 [519; 529] (1224.8)	- - -
<i>GloutonDegreMin</i> et <i>RechercheLocaleEtendueOpt</i> (Algorithmes 4 et 8)	447 [447; 447] (0)	531.3 [527; 534] (531.3)	532.5 [530; 536] (3348.7)	- - -	- - -

TAB. 5.3 – Résultats des différentes heuristiques de stable sur un graphe des conflits 3-quotienté avec 1043 axes

Pour chaque recherche de stable,  $n_i$  représente le nombre de stables initiaux cherchés, et  $n_{RL}$  le nombre d'itérations de recherche locale, pour chaque stable initial. Pour chaque expérience, nous indiquons la taille moyenne du stable, l'intervalle de tailles dans lequel se trouvent tous les stables, et le temps de calcul moyen d'un stable en secondes.

Sans recherche locale, l'algorithme 4, *GloutonDegreMin*, se comporte de façon plus efficace que l'algorithme 3, *GloutonAleatoire*. Au fur et à mesure des itérations de recherche local, l'écart se réduit de façon assez importante. En ce qui concerne les recherches locales, la recherche locale ponctuelle optimale donne des résultats assez décevants, et des temps de calcul assez importants. A temps de calcul égal, la recherche locale étendue optimale donne les meilleurs résultats.

Sur les 1043 axes, on arrive à en affecter au maximum 536 sur un stable. Il est naturel d'essayer d'augmenter le quotient  $Q$  du graphe des conflits  $Q$ -quotienté afin d'observer l'évolution de la taille des stables. De nombreuses valeurs ont été testées, et les résultats

sont présentés dans le tableau 5.4. Seules les deux meilleures méthodes des tests précédents ont été retenues, à savoir un stable initial avec l’algorithme de degré minimum (algorithme 4) et une recherche locale soit ponctuelle (algorithme 6), soit étendue optimale (algorithme 8). Le nombre d’itérations de recherche locale n’est pas le même entre les deux méthodes, afin d’avoir des temps de calcul du même ordre de grandeur.

	Algorithme 4	Algorithmes 4 et 6		Algorithmes 4 et 8	
	$n_i = 1$ $n_{RL} = 0$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^6$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^7$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^3$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^4$
$GC_3$	447.0 [447; 447] (0)	510.7 [508; 518] (4.2)	522.4 [519; 525] (44.4)	494.2 [486; 500] (3.2)	521.2 [515; 526] (35.9)
$GC_4$	494.0 [494; 494] (0)	571.4 [567; 576] (4.4)	587.4 [579; 593] (42.8)	551.3 [545; 556] (4.2)	585.6 [582; 591] (48.8)
$GC_5$	540.0 [540; 540] (0.2)	615.9 [609; 623] (4.4)	640.0 [636; 646] (42.6)	599.0 [595; 604] (5.2)	634.6 [627; 642] (55.8)
$GC_6$	591.0 [591; 591] (0)	654.4 [650; 659] (4.5)	678.9 [676; 683] (40.7)	638.0 [631; 644] (5.7)	677.0 [674; 681] (63.7)
$GC_{10}$	682.0 [682; 682] (0.4)	748.1 [744; 754] (4.3)	782.0 [778; 785] (40.3)	738.1 [734; 743] (9.5)	783.1 [779; 789] (100.3)
$GC_{20}$	806.0 [806; 806] (0.6)	857.4 [845; 853] (4.9)	864.8 [863; 867] (44.2)	851.3 [848; 854] (28.9)	867.1 [866; 868] (267.2)
$GC_{50}$	868.0 [868; 868] (2.5)	868.0 [868; 868] (8.1)	868.0 [868; 868] (80.9)	868.0 [868; 868] (374.9)	868.0 [868; 868] (3673.5)

TAB. 5.4 – Résultats de deux heuristiques de stable sur un graphe des conflits  $Q$ -quotienté avec 1043 axes, avec  $Q \in \{3, 4, 5, 6, 10, 20, 50\}$

A temps de calcul égal, les résultats obtenus par l’algorithme utilisant la recherche locale ponctuelle sont très légèrement meilleurs. Il est intéressant de noter l’évolution de la taille des stables avec le quotient  $Q$ . On passe ainsi d’un stable ayant 525 sommets pour une solution exactement  $\frac{1}{3}$ -dense à un stable contenant 868 sommets pour une solution exactement  $\frac{1}{50}$ -dense. On remarque aussi que le stable semble atteindre une taille limite voisine de 868, puisqu’il existe un stable à 867 sommets pour le graphe des conflits 20-quotienté.



Nous testons dans ce qui suit l'ensemble des axes qui constituent une journée de vol. Cela représente 23790 axes, pour 33213 plans de vol. Dans un premier temps, nous comparons à nouveau les différentes heuristiques pour un graphe des conflits 3-quotienté; les résultats sont présentés dans le tableau 5.5.

	$n_i = 10$ $n_{RL} = 0$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^4$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^5$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^6$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^7$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^8$
Algorithmes 3 et 6	8797.1 [8743; 8838] (12.5)	8811.9 [8743; 8858] (0.3)	8912.3 [8882; 8953] (1.0)	9208.1 [9147; 9266] (8.8)	9481.2 [9382; 9631] (79.2)	9566.6 [9483; 9737] (757.4)
Algorithmes 3 et 7	8797.1 [8747; 8838] (12.5)	8946.5 [8871; 9011] (16.3)	9341.6 [9234; 9529] (167.7)	9542.7 [9438; 9772] (1605.6)	- - -	- - -
Algorithmes 4 et 6	9465 [9465; 9465] (2.0)	9481.9 [9474; 9485] (0.2)	9556.4 [9547; 9568] (1.0)	9744.2 [9730; 9757] (9.6)	9902.0 [9887; 9913] (92.5)	9967.3 [9952; 9976] (810.7)
Algorithmes 4 et 7	9465 [9465; 9465] (2.0)	9549.2 [9539; 9573] (18.2)	9786.9 [9759; 9800] (176.3)	9939.5 [9929; 9952] (1708.3)	- - -	- - -
Algorithmes 4 et 8	9465 [9465; 9465] (2.0)	9962.5 [9949; 9986] (222.1)	- - -	- - -	- - -	- - -

TAB. 5.5 – Résultats des différentes heuristiques de stable sur un graphe des conflits 3-quotienté avec 23790 axes (ensemble des axes d'une journée de trafic)

Les résultats montrent de façon assez nette que la recherche locale étendue optimale (algorithme 8) se comporte de façon plus efficace que les autres heuristiques, aussi bien en termes de taille des stables que du temps de calcul. C'est pourquoi nous n'utilisons désormais que cette heuristique dans la suite de cette section et dans les sections qui suivent.

Le tableau 5.6 montre l'intérêt de chercher des solutions avec une densité plus faible. En effet, en divisant par deux la densité (en cherchant des solutions exactement  $\frac{1}{6}$ -denses au lieu de solutions exactement  $\frac{1}{3}$ -denses), cela permet de sélectionner environ 20% d'axes en plus, ce qui représente environ 54% du total des axes.

Afin d'augmenter le nombre de plans de vols affectés à des axes, il peut également être intéressant de chercher un second stable, dans le graphe des conflits  $Q$ -quotienté privé des sommets du premier stable. Il existe bien évidemment des arêtes entre les deux stables, qui impliqueront inévitablement des conflits entre des avions, mais cela permet d'affecter une plus grosse partie du trafic sur des axes en orthodromie. Dans le tableau 5.7, les tailles des deux stables sont présentés pour différentes valeurs du quotient  $Q$ .

En utilisant l'union de deux stables, une solution exactement  $\frac{1}{6}$ -dense permet ainsi de

	Algorithmes 4 et 8			
	$n_i = 10$ $n_{RL} = 0$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^3$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^4$	$n_i = 10$ $n_{RL} = 10^5$
$GC_3$	9536.0 [9536; 9536] (2.1)	9652.2 [9642; 9666] (21.7)	9994.0 [9975; 10012] (227.1)	10421.4 [10403; 10437] (2153.8)
$GC_4$	10573 [10573; 10573] (2.4)	10714.7 [10691; 10730] (26.7)	11111.9 [11085; 11143] (297.1)	11584.3 [11556; 11597] (2777.6)
$GC_6$	12225 [12225; 12225] (4.2)	12392.3 [12375; 12409] (40.9)	12834.2 [12816; 12853] (469.4)	- - -

TAB. 5.6 – Résultats de l’heuristique de stable *GloutonDegreMin* et *RechercheLocaleEtendueOpt* sur un graphe des conflits  $Q$ -quotienté avec 23790 axes, avec  $Q \in \{3, 4, 6\}$

	Taille du premier stable	Taille du second stable	Pourcentage d’axes affectés sur les deux stables
$GC_3$	10437	4580	63%
$GC_4$	11597	4900	69%
$GC_6$	12853	5057	75%

TAB. 5.7 – Tailles des deux stables sur un graphe des conflits  $Q$ -quotienté avec 23790 axes, avec  $Q \in \{3, 4, 6\}$

gérer 75% des axes. La taille des stables obtenus, bien que non maximum, est assez élevée et nous encourage à effectuer des simulations en affectant les plans de vols aux axes inclus dans le(s) stable(s).

### 5.3.2 Résultats des simulations

Nous pouvons simuler le trafic aérien en nous servant des stables précédemment calculés. Pour cela, un plan de vol, si il a été affecté à un axe de points mobiles inclus dans le(s) stable(s), suit cet axe sur tout son trajet. Si ce n’est pas le cas, l’avion suit le plan de vol déposé.

Dans un premier temps, nous simulons tout le trafic du niveau de vol FL320. Plusieurs stables ont été choisis. Le premier, noté *Stable3* est un stable obtenu sur le graphe des conflits 3-quotienté. L’instance  $2 \times \text{Stable3}$  est l’union de deux stables sur le graphe des conflits 3-quotienté. De la même façon, *Stable5* est le stable obtenu sur le graphe des conflits 5-quotienté et  $2 \times \text{Stable5}$  l’union des deux premiers stables tirés du graphe des

conflits 5–quotienté. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.8.

	Simulation partielle de référence	Stable $\frac{1}{3}$ –dense		Stable $\frac{1}{5}$ –dense	
		<i>Stable3</i>	$2 \times \textit{Stable3}$	<i>Stable5</i>	$2 \times \textit{Stable5}$
Vols affectés aux axes	0	724	1068	866	1204
Vols affectés au PLN déposé	1420	696	352	554	216
Nombre de conflits	294	189 (−35.7%)	157 (−46.6%)	183 (−37.8%)	122 (−58.5%)
Durée totale des conflits (en h.)	26.7	13.5 (−49.4%)	7.0 (−73.8%)	8.1 (−69.7%)	3.7 (−86.1%)
Distance totale parcourue (en milliers de NM)	1792	1755 (−2.1%)	1734 (−3.2%)	1744 (−2.7%)	1722 (−3.9%)
Consommation totale (en tonnes)	21287	20988 (−1.4%)	20796 (−2.3%)	20903 (−1.8%)	20666 (−2.9%)
Durée totale de vol (en h.)	4055	3973 (−2.0%)	3929 (−3.1%)	3950 (−2.6%)	3903 (−3.7%)
Retard à l’arrivée par rapport à la simulation partielle de référence (en h.)	-	−1.8	−2.8	2.3	5.0
dont :					
- Retard prévisible (en h.)	-	48.3	71.2	96.2	133.8
- Retard indésirable (en h.)	-	−50.1	−74.0	−93.9	−128.8
(en s. par vol)	-	(−126)	(−188)	(−238)	(−326)

TAB. 5.8 – Comparaison de différentes simulations sur le FL320 (1420 vols)

Les résultats obtenus sont excellents, sur tous les indicateurs : la quantité de conflits diminue jusqu’à 86%, la consommation de près de 3% et le retard indésirable à l’arrivée diminue de plus de 5 minutes par vol pour l’instance  $2 \times \textit{Stable5}$ . Ces résultats sont dus à la qualité de la taille des stables obtenus, et aussi au fait qu’il n’y a pas de saturation des aéroports en considérant uniquement les 1420 vols du FL320, ce qui peut être un facteur d’importants retards à l’arrivée.

Les simulations qui suivent gèrent tout le trafic de la journée du 27 septembre 2007. De la même façon que précédemment, nous affectons les plans de vol à des axes de points mobiles si ces axes sont inclus dans le(s) stable(s) et les avions qui ne sont pas affectés à des axes suivent leur plan de vol déposé. Dans le tableau 5.9, l’instance *Stable3*, obtenue à l’aide d’un stable sur le graphe des conflits 3–quotienté est victime d’un retard indésirable à l’arrivée très important. Nous expliquons dans le paragraphe qui suit pourquoi et nous

apportons une solution à ce problème.

	Simulation de référence	Stable $\frac{1}{3}$ -dense		
		<i>Stable3</i>	<i>Stable3Depha</i>	$2 \times \textit{Stable3Depha}$
Vols affectés aux axes	0	15755	14889	21482
Vols affectés au PLN déposé	33213	17458	18324	11731
Nombre de conflits	36114	29798 (-17.5%)	30059 (-16.8%)	27539 (-23.7%)
Durée totale des conflits (en h.)	1233	907 (-26.4%)	825 (-33.1%)	650 (-47.2%)
Distance totale parcourue (en milliers de NM)	29410	28912 (-1.7%)	28845 (-1.9%)	28501 (-3.1%)
Consommation totale (en tonnes)	301053	297965 (-1.0%)	297471 (-1.2%)	294976 (-2.0%)
Durée totale de vol (en h.)	70850	69625 (-1.7%)	69472 (-1.9%)	68638 (-3.1%)
Retard à l'arrivée par rapport à la simulation de référence (en h.) dont :	-	4689	-8	1011
- Retard prévisible (en h.)	-	1050	993	1432
- Retard indésirable (en h.)	-	3639	-985	-421
(en s. par vol)	-	(+394)	(-107)	(-46)

TAB. 5.9 – Comparaison sur tout le trafic (33213 vols)

Lors de la définition d'un axe de points mobiles (page 19), nous avons défini la *phase* à l'origine  $\Delta T_i$  comme étant la différence de temps entre l'instant initial et l'apparition du premier point mobile sur l'axe  $i$ . Jusqu'ici, dans la section 5.3, tous les stables ont été calculés en prenant les phases à l'origine nulles. Cela engendre de gros retards, car de nombreux axes, ayant le même aéroport d'origine, demandent l'autorisation de décoller exactement à la même heure, qui correspond au passage de leur point mobile. Or le simulateur gère les saturations des aéroports et ne tolère pas que deux avions décollent en même temps. Un seul avion peut décoller, forçant tous les autres à attendre leur prochain point mobile autorisé disponible. Pour remédier à cette difficulté, il est nécessaire d'introduire une phase à l'origine sur les différents axes. L'idée de la construction des phases est de partitionner en  $N$  éléments les axes selon leur cap, et d'affecter à chaque élément  $\{e_i, i = 0, \dots, N - 1\}$  de la partition une phase à l'origine. Un élément  $e_i$  contient tous les axes ayant un cap qui appartient à l'intervalle  $[\frac{i*2\pi}{N}; \frac{(i+1)*2\pi}{N}]$ . Cela implique que deux axes ayant le même aéroport d'origine et des caps voisins auront la même phase à l'origine et demanderont donc potentiellement une autorisation de décoller de l'aéroport au même

instant. L'un des avions subira donc un retard indésirable dû à la capacité de l'aéroport. Ceci ne se produit que pour les avions ayant des caps similaires, et permet d'éviter que des avions soient en conflits pendant une longue période depuis leur aéroport d'origine car ils suivent des axes quasi-identiques. Afin d'éviter que le même problème se produise entre deux axes issus de deux éléments  $e_i$  et  $e_{i+1}$  voisins dans la partition, nous choisissons les phases à l'origine à l'aide de la formule suivante : les axes de l'élément  $e_i$  ont une phase à l'origine de  $\frac{(2i \bmod N) * T}{N}$ , où  $T$  est la période de points mobiles. Pour avoir  $N$  phases à l'origines différentes, il est nécessaire que  $N$  soit impair. Un exemple pour  $N = 5$  et  $T = 160$  secondes est présenté sur la figure 5.3.

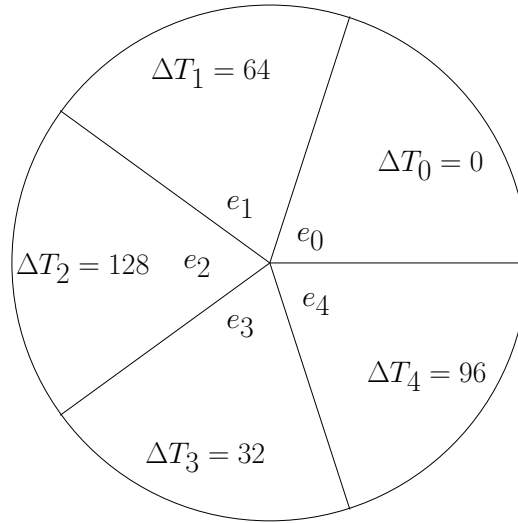


FIG. 5.3 – Calcul des phases à l'origine pour  $N = 5$  et  $T = 160$  secondes

Ce choix des phases à l'origine permet de réduire très fortement les retards indésirables à l'arrivée et de façon plus modérée la quantité de conflits ; les instances *Stable3Depha* et  $2 \times \text{Stable3Depha}$  du tableau 5.9, obtenues à partir du graphe des conflits 3-quotienté et en tenant compte des déphasages, en sont l'illustration. Le retard indésirable diminue de plus de 4000 heures par rapport à l'instance *Stable3*, soit environ 8 minutes par vol. Par rapport à la simulation de référence, la consommation est en recul de près de 2% et la quantité de conflits de plus de 40%. Le retard indésirable à l'arrivée diminue lui aussi, de une à deux minutes par vol. Toutes les simulations qui suivent utilisent le choix des phases à l'origine décrit ci-avant, les résultats obtenus étant très bons.

Les résultats obtenus peuvent encore être améliorés puisque nous n'affectons que 65% des vols à des axes en orthodromie. Nous essayons, en réduisant la densité des axes, d'augmenter ce nombre d'axes. Nous procédons à des simulations pour des des stables issus des graphes des conflits 4-quotienté et 6-quotienté dans le tableau 5.10.

Les résultats des quatre simulations sont très bons, puisque la quantité de conflits diminue de 38% à 56% et la consommation est en baisse de 1.4% à 2.7%. Le seul indicateur

	Simulation de référence	Stable $\frac{1}{4}$ -dense		Stable $\frac{1}{6}$ -dense	
		<i>Stable4</i>	$2\times$ <i>Stable4</i>	<i>Stable6</i>	$2\times$ <i>Stable6</i>
Vols affectés aux axes	0	16457	23436	18104	25160
Vols affectés au PLN déposé	33213	16756	9777	15109	8053
Nombre de conflits	36114	29066 (-19.5%)	27056 (-25.1%)	28821 (-20.2%)	25976 (-28.1%)
Durée totale des conflits (en h.)	1233	761 (-38.2%)	607 (-50.1%)	739 (-40.1%)	533 (-56.8%)
Distance totale parcourue (en milliers de NM)	29410	28750 (-2.2%)	28375 (-3.5%)	28653 (-2.6%)	28245 (-4.0%)
Consommation totale (en tonnes)	301053	296811 (-1.4%)	294045 (-2.3%)	296117 (-1.6%)	292949 (-2.7%)
Durée totale de vol (en h.)	70850	69253 (-2.3%)	68352 (-3.5%)	69026 (-2.6%)	68056 (-3.9%)
Retard à l'arrivée par rapport la simulation de référence (en h.) (en h.)	-	173	2138	851	5220
dont :					
- Retard prévisible (en h.)	-	1463	2083	2414	3355
- Retard indésirable (en h.)	-	-1290	55	-1562	1865
(en s. par vol)	-	(-140)	(+6)	(-169)	(+202)

TAB. 5.10 – Comparaison de différentes simulations sur l'ensemble du trafic (33213 vols)

qui ne soit pas complètement satisfaisant concerne les retards indésirables à l'arrivée. En effet, dans le cas de l'instance  $2\times$ *Stable6*, on constate une augmentation de ce dernier, de plus de 3 minutes par vol. Ce résultat nous laisse penser que notre choix des phases à l'origine atteint peut-être ses limites, car trop d'avions demandent la même heure de décollage.

## 5.4 Affectation des plans de vol à une combinaison d'axes en orthodromie et de treillis

Les deux méthodes proposées aux sections 5.2 et 5.3 permettent d'affecter une grande partie du trafic à des axes impliquant une forte diminution de la quantité de conflits. Cependant, nous ne traitons que 60% à 70% du trafic avec ces procédés, les autres vols respectant leur plan de vol déposé. Il peut être intéressant de coupler ces méthodes, afin de gérer une part plus importante du trafic.

Le sens d'application des méthodes a un rôle très important. Si on choisit un sous-

ensemble  $T'$  du trafic total  $T$ , l'affectation de plans de vol de  $T'$  à des treillis correspond à un sous-ensemble de l'affectation de plans de vol de  $T$  aux treillis, ce qui n'est pas le cas pour la recherche de stables dans le graphe des conflits  $Q$ -quotienté. Pour gérer une plus grande partie du trafic, il paraît donc naturel d'affecter d'abord une partie du trafic à des treillis, puis de chercher un ou des stables dans le trafic restant. Cependant, les résultats obtenus sur les axes en orthodromie étant meilleurs que ceux obtenus sur les treillis, nous fabriquons tout de même une instance pour laquelle les axes en orthodromie sont affectés dans un premier temps, puis certains des plans de vol restant sont affectés aux treillis.

Les différentes solutions proposées sont les suivantes :

- La solution  $2 \times \text{Stable}6T$  : dans un premier temps, les plans de vol correspondant aux axes inclus dans les deux premiers stables du graphe des conflits 6-quotienté sont affectés à ces axes. Cela représente 25160 plans de vol. Parmi les 8053 plans de vol restant, ceux pouvant être affectés aux treillis allant du FL180 au FL450 (voir tableau 5.2) le sont. On compte 2530 plans de vol de la sorte, et il reste donc 5523 plans de vol non affectés, qui suivent leur route déposée.
- La solution  $T2 \times \text{Stable}3$  : les 9160 plans de vol satisfaisant les conditions d'affectation aux treillis sont affectés aux treillis. Parmi les 24053 plans de vol restant, nous cherchons les deux premiers stables dans le graphe des conflits 3-quotienté. L'union de ces deux stables représente 17007 plans de vol, laissant ainsi 7046 plans de vol non affectés, qui respectent leur route déposée.
- Les solutions  $T2 \times \text{Stable}4$  (resp.  $T2 \times \text{Stable}6$ ) : la construction est la même que  $T2 \times \text{Stable}3$ , sauf que la recherche des stables se fait sur le graphe des conflits 4-quotienté (resp. 6-quotienté). 18638 (resp. 20289) plans de vol sont affectés sur des axes en orthodromie ; il reste donc 5415 (resp. 3764) plans de vol non affectés, qui suivent leur route déposée.

Les résultats sont présentés dans le tableau 5.11.

En termes de quantité de conflits, les différentes solutions ont un très bon comportement, puisqu'elles permettent de réduire cette quantité de l'ordre de 60%. La différence principale entre la solution  $2 \times \text{Stable}6T$  et les trois autres solutions provient de la consommation et des retards indésirables. La solution  $2 \times \text{Stable}6T$  permet en effet de réduire la consommation, d'environ 3% par rapport aux autres solutions proposées, mais le retard indésirable à l'arrivée est de moins bonne qualité, de l'ordre de 2 minutes par vol.

Selon le point de vue que l'on adopte, plusieurs solutions peuvent être privilégiées :

- La meilleure solution pour la quantité de conflits est la solution  $T2 \times \text{Stable}6$ , pour laquelle la durée totale des conflits diminue de 66.1%.
- En termes de consommation d'énergie et d'impact environnemental, la solution  $2 \times \text{Stable}6T$  est la plus efficace puisqu'elle permet de réduire de 2.4% la consommation totale.
- Du point de vue de la satisfaction du passager, la solution  $T2 \times \text{Stable}4$  paraît la plus adaptée, car elle réduit de 158 secondes le retard indésirable.

Même si, à première vue, la solution  $2 \times \text{Stable}6T$  semble plus intéressante en termes de réduction de quantité de conflits et de consommation, nous pensons qu'une légère modification des solutions  $T2 \times \text{Stable}3$ ,  $T2 \times \text{Stable}4$  et  $T2 \times \text{Stable}6$ , en adaptant les conditions d'accès

	Simulation de référence	$2 \times Stable6T$	$T2 \times Stable3$	$T2 \times Stable4$	$T2 \times Stable6$
Vols affectés aux axes	0	25160	17007	18638	20289
Vols affectés au treillis	0	2530	9160	9160	9160
Vols affectés au PLN déposé	33213	5523	7046	5415	3764
Nombre de conflits	36114	25711 (-28.8%)	26373 (-27.0%)	25750 (-28.7%)	25266 (-30.0%)
Durée totale des conflits (en h.)	1233	456 (-63.0%)	504 (-59.1%)	448 (-63.7%)	418 (-66.1%)
Distance totale parcourue (en milliers de NM)	29410	28231 (-4.0%)	28605 (-2.7%)	28499 (-3.1%)	28389 (-3.5%)
Consommation totale (en tonnes)	301053	293782 (-2.4%)	298817 (-0.7%)	298206 (-0.9%)	297479 (-1.2%)
Durée totale de vol (en h.)	70850	68154 (-3.8%)	69284 (-2.2%)	69020 (-2.6%)	68760 (-2.9%)
Retard à l'arrivée par rapport à la simulation de référence (en h.)	-	3456	532	709	2054
dont :					
- Retard prévisible (en h.)	-	3503	1643	2166	3214
- Retard indésirable (en h.)	-	-47	-1111	-1457	-1160
(en s. par vol)	-	(-5)	(-120)	(-158)	(-126)

TAB. 5.11 – Comparaison de différentes simulations sur l'ensemble du trafic (33213 vols)

sur les treillis (notamment en rajoutant une condition sur la surconsommation engendrée par une affectation à un treillis), sont plus prometteuses.





# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons présenté l'étude d'un nouveau système de circulation aérienne dont le but est de réduire la quantité de conflits et la consommation énergétique. Dans ce paradigme, les avions sont assujettis à suivre des points mobiles fictifs et réguliers sur un axe durant la plus grande partie, voire la totalité de leur trajet. Les points mobiles peuvent avoir deux statuts : autorisé ou interdit. Les avions doivent obligatoirement suivre des points mobiles autorisés. Ce paradigme s'appuie sur deux conditions d'étude, appelées condition de périodicité et condition d'unicité. Nous avons montré que ces deux conditions étaient viables d'un point de vue opérationnel. Le problème central de la thèse, que nous avons nommé *problème de la densité maximum*, consiste à trouver une affectation des statuts autorisés/interdits des points mobiles de façon à maximiser la densité, sous contrainte que deux points mobiles autorisés ne soient pas en conflit. Un problème connexe, le *problème de l'ensemble d'axes  $\frac{1}{k}$ -denses maximum*, a également été défini. Ce problème consiste à trouver le plus grand sous-ensemble d'axes admettant une solution  $\frac{1}{k}$ -dense,  $k$  étant une donnée du problème.

Le problème de la densité maximum a été modélisé à l'aide de deux graphes, le graphe des axes et le graphe des conflits. Le graphe des conflits est un graphe infini dans lequel les sommets sont les points mobiles et les arêtes représentent les conflits entre les points mobiles. Le graphe des axes est une représentation plus condensée mais moins intuitive que le graphe des conflits. De nombreux résultats ont été établis sur les deux modélisations du problème, et nous avons notamment montré de nombreux liens entre les deux graphes. Nous avons ainsi prouvé que le nombre de composantes connexes du graphe des conflits est égal au plus petit poids strictement positif d'un cycle dans le graphe des axes. Nous avons aussi trouvé une caractérisation des solutions  $\frac{1}{2}$ -denses aussi bien pour le graphe des axes que pour le graphe des conflits. Ces caractérisations nous ont permis de conclure qu'il est possible de décider de l'existence d'une solution  $\frac{1}{2}$ -dense en un temps polynômial. En ce qui concerne le graphe des axes, nous avons aussi montré que le plus petit poids strictement positif d'un cycle pouvait être trouvé en temps polynômial, en utilisant le fait qu'il est égal au plus grand diviseur commun des poids positifs non nuls des cycles fondamentaux. Le graphe des conflits nous a principalement permis d'élaborer des bornes sur la densité, en lien avec la colorabilité du graphe des conflits. Ainsi, si le graphe des conflits n'est pas  $\chi$ -colorable, on ne peut espérer mieux qu'une solution  $\frac{1}{\chi+1}$ -dense. Au contraire, si le graphe des conflits est  $\chi$ -colorable et si ce graphe a au moins  $\chi$  composantes connexes, alors il existe une solution  $\frac{1}{2\chi-1}$ -dense.

Ces différents résultats nous ont permis d’élaborer un treillis, issu du pavage du plan par des hexagones et des triangles. Ce treillis est composé d’axes de points mobiles  $\frac{1}{2}$ –denses orientés selon six directions. La particularité de ces axes est qu’ils peuvent être placés à un niveau de vol unique sans générer de conflits entre les points mobiles autorisés. Nous avons adapté ce treillis à la sphère, et montré qu’il ne pouvait s’appliquer que sur une partie réduite de celle-ci, correspondant à peu près à la taille de l’Europe. Les simulations utilisant une juxtaposition de ces treillis ont apporté de bons résultats, permettant notamment de réduire la quantité de conflits de plus de 30%. Les résultats en termes de consommation sont de moins bonne qualité, puisque nous constatons une surconsommation de presque 3%. Nous avons identifié que cette surconsommation était principalement due à des avions long-courriers qui utilisent durant une longue période le treillis à une vitesse qui les fait surconsommer. Nous pensons qu’une légère modification des conditions d’affectation au treillis permettrait d’éviter cette surconsommation.

Nous avons enfin étudié le problème de l’ensemble d’axes  $\frac{1}{k}$ –denses maximum d’un point de vue opérationnel. Nous avons montré qu’il est possible de se ramener à un problème de stable maximum, notamment grâce à la création du graphe des conflits  $k$ –quotienté. Nous avons proposé différentes heuristiques de stable maximum, basées sur un stable initial obtenu par un algorithme glouton, puis sur différentes recherches locales permettant d’augmenter la taille du stable initial. Les tests effectués, pour différentes valeurs de la densité, ont montré qu’un stable pouvait contenir plus de 50% des axes lorsque  $k = 6$ . En cherchant un deuxième stable sur le graphe des conflits  $k$ –quotienté auquel les axes du premier stable sont enlevés, nous avons pu gérer 75% des axes. Les simulations ont donné de très bons résultats, permettant dans le meilleur des cas de réduire de plus de 63% la quantité de conflits et de plus de 1.5% la consommation, sans pour autant augmenter le retard indésirable à l’arrivée.

La plus grande partie du temps ayant été consacrée à l’étude théorique du système, les perspectives du point de vue théorique sont moins nombreuses que celles liées aux aspects expérimentaux et opérationnels. Nous pouvons cependant citer les perspectives suivantes :

- Dans la section 3.3.1.1, après avoir montré qu’il existe une solution  $\frac{1}{2\chi-1}$ –dense dans le cas où le graphe des conflits est  $\chi$ –colorable et  $w(G^C) \geq \chi$ , nous émettons la conjecture que cette borne peut être améliorée et qu’il existe en fait des solutions  $\frac{1}{\chi+1}$ –denses. Cette conjecture, trivialement vérifiée pour  $\chi = 2$ , provient du fait qu’il existe au moins  $\chi$  possibilités d’obtenir une solution  $\frac{1}{2\chi-1}$ –dense, chacune des  $\chi$  couleurs pouvant jouer le rôle du point mobile autorisé. Un tel choix nous laisse penser qu’il est possible d’améliorer la borne que nous avons obtenue.
- La création des axes de points mobiles fait intervenir un paramètre, la phase à l’origine, dont nous avons vu l’utilité dans les expérimentations. Un problème original et intéressant pourrait consister à essayer de trouver l’ensemble des phases à l’origine qui minimisent le nombre d’arêtes dans le graphe des conflits. Ceci aurait notamment comme intérêt de pouvoir espérer trouver des stables de plus grande taille dans le

graphe des conflits  $Q$ -quotienté.

- Il peut être intéressant de tenir compte du taux d'utilisation des différents axes, et de chercher une solution d'affectation des points mobiles pour laquelle la densité sur un axe est d'autant plus grande que l'axe est utilisé. La résolution de ce problème implique des techniques très différentes de celles mises en oeuvre ici ; en effet, dans notre cas, nous nous sommes ramenés à la recherche de solutions exactement  $\frac{1}{k}$ -denses, ce qui n'est pas envisageable si des densités différentes sont exigées sur les différents axes.

Il existe de nombreuses perspectives d'un point de vue expérimental, nous énonçons ci-après celles qui nous paraissent les plus intéressantes :

- Afin de valider tous nos résultats, il paraît tout d'abord primordial d'effectuer des simulations sur d'autres journées de trafic aérien européen.
- Lors des simulations, les treillis ont été placés selon deux orientations, avec  $30^\circ$  d'écart entre les deux orientations. Ces orientations ont été choisies de façon totalement arbitraire, sans tenir compte des spécificités du trafic aérien européen. Il peut être intéressant d'essayer de trouver l'orientation qui maximise le nombre de plans de vol pouvant être affectés aux treillis.
- Les conditions d'affectation à un treillis visent principalement à limiter la distance additionnelle parcourue. Elles pourraient être modifiées de sorte à borner la surconsommation des avions, ce qui permettrait notamment d'éviter le problème que nous avons rencontré avec les long-courriers qui ont fortement biaisé nos résultats en termes de consommation sur les treillis.
- L'affectation des plans de vol à des axes en orthodromie a montré l'importance des phases à l'origine sur les retards. Notre proposition, visant à réduire les retards et les conflits, semble atteindre ses limites puisqu'on constate une forte augmentation des retards lorsque le nombre d'axes en orthodromie devient trop important. Une amélioration envisageable consiste à partitionner tous les axes ayant le même aéroport d'origine en  $N$  parties contenant chacune le même nombre d'axes. Cela permet de mieux gérer les aéroports pour lesquels la répartition des caps des axes en orthodromie est loin d'être uniforme.
- Les simulations mêlant les affectations sur des treillis et sur des axes en orthodromie offrent de très bons résultats qui peuvent être améliorés. Pour cela, il est envisageable d'utiliser des treillis un niveau sur deux (ou un niveau sur trois) et d'affecter les axes en orthodromie sur les niveaux restants. Cette méthode permettrait de fortement réduire le nombre de conflits se produisant entre les avions affectés aux treillis et ceux affectés aux axes en orthodromie.
- D'un point de vue opérationnel, pour faire face à l'incertitude, nous avons vu à la section 2.5 qu'il était possible, en augmentant la distance de séparation  $D_s$  entre les points mobiles, de laisser un léger écart entre un avion et le point mobile auquel il est assujéti. Cette option mérite d'être étudiée et simulée, afin de pouvoir juger de l'augmentation des retards indésirables, puisque la capacité du réseau est ainsi

diminuée.

# Bibliographie

- [1] [http://ec.europa.eu/transport/air/sesar/sesar\\_en.htm](http://ec.europa.eu/transport/air/sesar/sesar_en.htm). Cité p. 17
- [2] [http://www.eurocontrol.int/sesar/public/subsite\\_homepage/homepage.html](http://www.eurocontrol.int/sesar/public/subsite_homepage/homepage.html). Cité p. 17
- [3] [http://ec.europa.eu/transport/galileo/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/transport/galileo/index_en.htm). Cité p. 17
- [4] [http://www.eurocontrol.int/airspace/public/standard\\_page/1494\\_library.html](http://www.eurocontrol.int/airspace/public/standard_page/1494_library.html). Cité p. 18
- [5] [http://www.eurocontrol.int/eec/public/standard\\_page/proj\\_BADA.html](http://www.eurocontrol.int/eec/public/standard_page/proj_BADA.html). Cité p. 109
- [6] Eight-States Free Route Airspace Project : Free Route Airspace Concept. Rapport technique, Eurocontrol, 2002. Cité p. 18
- [7] Mediterranean Free Flight Programme - Final Report, 2005. Cité p. 11, 18
- [8] ADVISORY COUNCIL FOR AERONAUTICS RESEARCH IN EUROPE : Strategic Research Agenda 2, Volume 1. Rapport technique, 2004. <http://www.acare4europe.com/docs/ASD-volume1-2nd-final-ss%20illus-171104-out-asd.pdf>. Cité p. 17
- [9] F. BARAHONA : On Via Minimization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 37(4):527–530, 1990. Cité p. 24
- [10] A. BARNETT : Free-Flight and En Route Air Safety : A First-Order Analysis. *Operations Research*, 48(6):833–845, 2000. Cité p. 19
- [11] N. BARNIER et P. BRISSET : Graph Coloring for Air Traffic Flow Management. *Annals of Operations Research*, 130:163–178, 2004. Cité p. 24
- [12] R. BEIGEL : Finding maximum independent set in sparse and general graphs. *In Proceedings of the 10<sup>th</sup> ACM-SIAM Symposium On Discrete Algorithm*, pages 856–857, 1999. Cité p. 100
- [13] COMMISSION D’EXAMEN DES PERFORMANCES : Rapport d’examen des Performances 2005. Rapport technique, Eurocontrol, 2006. Cité p. 17
- [14] S. CONSTANS, B. FONTAINE et R. FONDACCI : Minimizing Potential Conflict Quantity with Speed Control. *In Proc. of the 4<sup>th</sup> Eurocontrol Innovative Research Workshop And Exhibition*, pages 265–274, 2005. Cité p. 22
- [15] R. DIESTEL : *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg, 2005. Version électronique : <http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/GraphTheoryIII.counted.pdf>. Cité p. 50

- [16] G. EHRLICH, S. EVEN et R.E. TARJAN : Intersection Graphs of Curves in the Plane. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, 21:8–20, 1976. Cité p. 24
- [17] F. FOMIN, F. GRANDONI et D. KRATSCH : Measure and Conquer : A Simple  $O(2^{0.288n})$  Independent Set Algorithm. In *Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM Symposium On Discrete Algorithm*, pages 18–25, 2006. Cité p. 100, 102
- [18] R. FONDACCI, O. GOLDSCHMIDT et V. LETROUIT : Combinatorial issues in air traffic optimization. *Transportation Science*, 32(3):256–267, 1998. Cité p. 23
- [19] M.R. GAREY et D.S. JOHNSON : *Computers and Intractability ; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, 1979. Cité p. 35
- [20] D. GIANAZZA : *Optimisation des flux de trafic aérien*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004. Cité p. 23, 24, 25
- [21] J.B. GOTTELAND, L. MAUGIS et R. ZANNI : Testing Operational Scenarios for Concepts in ATM. Rapport technique, Sofreavia, 1999. Cité p. 22
- [22] H. HERING : Air Traffic Freeway System for Europe. Rapport technique, Eurocontrol, 2005. Cité p. 22
- [23] R. IRVINE et H. HERING : Systematic air traffic management in a regular lattice. In *Proc. of ATM Research and Development Seminar*, 2007. Cité p. 22, 23, 75
- [24] J. KRATOCHVIL : Geometric representations of graphs, 2005. Cours effectué à Barcelone <http://kam.mff.cuni.cz/~honza/ig.ps>. Cité p. 24
- [25] J. KRATOCHVIL et J. NESETRIL : Independent Set and Clique Problems in Intersection-defined Classes of Graphs. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 31(1):85–93, 1990. Cité p. 24, 35
- [26] D. KÖNIG : *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1936. Cité p. 68
- [27] G. MAIGNAN : *Le Contrôle de la Circulation Aérienne*. Collection Que sais-je ? Presses Universitaires de France, 1991. Cité p. 13
- [28] PERFORMANCE REVIEW COMMISSION : Performance Review Report 2006. Rapport technique, Eurocontrol, 2007. Cité p. 16
- [29] PERFORMANCE REVIEW COMMISSION : Performance Review Report 2007. Rapport technique, Eurocontrol, 2008. Cité p. 16
- [30] PERFORMANCE REVIEW COMMISSION : Performance Review Report 2008. Rapport technique, Eurocontrol, 2009. Cité p. 11, 16, 17
- [31] O. RICHARD : *Régulation court terme du trafic aérien et optimisation combinatoire ; Application de la méthode de génération de colonnes*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007. Cité p. 23, 25
- [32] J.M. ROBSON : Finding a maximum independent set in time  $O(2^{n/4})$ . Rapport technique, LaBRI, Université de Bordeaux I, 2001. Cité p. 100
- [33] J. VILLIERS : *Automatisation du contrôle de la circulation aérienne, "Erasmus", une voie conviviale pour franchir le mur de la capacité*. Institut du Transport Aérien, 2004. Cité p. 22

# Glossaire

- AIRAC : Aeronautical Information Regulation and Control. Il s'agit d'une publication périodique de 28 jours, définissant notamment les routes et les plans de vol.
- ANSP : Air Navigation Service Providers. Prestataires de service de gestion du trafic aérien.
- ATC : Air Traffic Control. Système de contrôle du trafic aérien.
- ATFM : Air Traffic Flow Management. Gestion des flux de trafic aérien.
- ATM : Air Traffic Management. Gestion du trafic aérien.
- BADA : Base of Aircraft DATA. Base de donnée développée par Eurocontrol, contenant notamment un modèle de prédiction et de simulation de trajectoires des différents types d'avion.
- CRNA : Centre en Route de la Navigation Aérienne.
- FL : Flight Level. Niveau de vol. Il s'agit de l'altitude correspondant à la différence de pression entre la position occupée et la surface isobare 1013.25 hPa, exprimée en centaine de pieds (ft).
- ft : foot ; 1 pied = 0.3048 m
- IFR : Instrument Flight Rules. Règles de vol aux instruments.
- kt : knot ; 1 noeud = 0.5 m/s
- NM : Nautic Mile ; par définition, 1852 m, soit environ la longueur d'une minute (1/60<sup>e</sup> de degré) d'arc terrestre.
- OD : Origine-Destination
- PLN : Plan de vol
- SESAR : Single European Sky ATM Research. Projet de ciel unique européen.
- SWIM : System Wide Information Management. Base de données du projet SESAR, destinée à la gestion du trafic aérien.
- TCAS : Traffic alert and Collision Avoidance System. Système d'alerte de trafic et d'évitement de collision. Il s'agit d'un système embarqué détectant les pertes de séparation et proposant une résolution du conflit par ordre de changement d'altitude aux deux avions.
- TMA : Terminal Manoeuvring Area. Région de contrôle terminale. Il s'agit d'un volume d'espace défini autour d'un ou plusieurs aéroports importants, qui permet de protéger les trajectoires de départ et d'arrivée de ces aéroports.
- track : route aérienne survolant l'océan Atlantique, réactualisée tous les jours en fonction des conditions météorologiques.



# Résumé

Dans cette thèse, nous proposons l'étude d'un nouveau système de trafic aérien, caractérisé par un très haut degré d'organisation. Dans ce système, les avions sont assujettis à suivre des points mobiles fictifs durant leur trajet. Ces points mobiles sont organisés et séquencés de façon à éviter les conflits entre avions, notamment lorsque ces derniers convergent vers une même intersection. Cette thèse propose la modélisation d'un problème sous-jacent à ce paradigme. Ce problème peut être vu comme la recherche d'un stable dans un graphe infini sous certaines contraintes. Après une étude théorique de ce problème, nous proposons une heuristique de résolution, amenant à présenter un système global de trafic aérien, puis nous exposons des résultats numériques.

**Mots-clés :** Recherche opérationnelle, Optimisation, Théorie des graphes, Trafic aérien, Conflits

# Abstract

In this PhD, we propose the study of a new air traffic system, characterized by a high level of organization. Aircraft are compelled to follow immaterial moving points during their flight. These moving points are organized and sequenced in order to avoid conflicts between aircraft. We consider an underlying problem of this paradigm. It can be seen as a maximum independent set problem on an infinite graph under constraints. We first give theoretical results on this problem and make links with the colouration problem; then we propose resolution heuristics, leading to a global air traffic system. Finally, we develop these heuristics and expose numerical results.

**Keywords:** Operational research, Optimization, Graph theory, Air traffic, Conflicts