



HAL
open science

Contribution à l'étude des transformations CR des structures de Cauchy-Riemann analytiques réelles

Jean-Charles Sunyé

► **To cite this version:**

Jean-Charles Sunyé. Contribution à l'étude des transformations CR des structures de Cauchy-Riemann analytiques réelles. Mathématiques [math]. Université de Rouen, 2010. Français. NNT: . tel-00545464

HAL Id: tel-00545464

<https://theses.hal.science/tel-00545464>

Submitted on 10 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Rouen

présentée par

JEAN-CHARLES SUNYÉ

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse complexe

**Contribution à l'étude des transformations CR des
structures de Cauchy-Riemann analytiques réelles**

Date de soutenance : 3 décembre 2010

Composition du Jury

Président	: T.-C. DINH,	Professeur, Université Paris 6
Rapporteurs	: P. EBENFELT,	Professeur, University of California San Diego
	: L. STOLOVITCH,	Directeur de recherche CNRS, Université de Nice
Examineurs	: B. LAMEL,	Professeur, Universität Wien
	: C.-J. XU,	Professeur, Université de Rouen
Directeur de Thèse	: N. MIR,	Professeur, Université de Rouen

Thèse préparée à l'Université de Rouen
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, UMR-CNRS 6085

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement de trois années de travail durant lesquelles j'ai pu compter sur différentes personnes que je tiens ici à remercier. Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement mon directeur de thèse Nor-dine Mir qui m'a fait découvrir la recherche mathématique et qui m'a fait profiter de son expérience. Les conseils qu'il m'a donnés, le temps qu'il m'a accordé et la liberté de travail qu'il a su me laisser m'ont permis de travailler en toute confiance et de progresser.

Je remercie Peter Ebenfelt et Laurent Stolovitch pour l'intérêt que cha-cun a porté à mon travail en acceptant de rapporter ma thèse. Je souhaite également remercier Bernhard Lamel et Chao-Jiang Xu pour leur présence au sein de mon jury ainsi que Tien-Cuong Dinh qui me fait l'honneur d'en être le président. Je tiens, par ailleurs, à remercier Bernhard Lamel pour son hospitalité lors des mes différents séjours à Vienne et pour m'avoir accueilli dans son équipe.

Je remercie toutes les personnes qui, au sein du laboratoire, contribuent à créer une ambiance propice à l'épanouissement des doctorants. Merci en particulier à Thierry de la Rue et Élise Janvresse pour leur participation à l'atelier des doctorants grâce auquel j'ai beaucoup appris sur la façon de parler des mathématiques. Je souhaite également remercier Edwige Auvray et Marguerite Losada pour l'aide qu'elles m'ont apportée concernant les sub-tilités de l'administration universitaire. Merci également à Isabelle Lamitte pour sa disponibilité.

Ma vie de doctorant n'aurait pas été la même sans mes collègues et amis doctorants du laboratoire avec qui j'ai partagé de bons moments. Je remercie donc chacun d'entre eux et tout particulièrement Nadira, Olivier B, Nicolas, Vincent, Davide, Olivier D...

Ces trois ans de thèse ont aussi été l'occasion pour moi de découvrir le métier d'enseignant. Je voudrais exprimer mes remerciements à toutes les personnes avec qui j'ai partagé cette expérience. Merci aussi à Olivier Guibé d'avoir été mon tuteur pendant mon monitorat et à Marc Jolly qui coordonne à merveille toute la machinerie du département. J'aimerais aussi remercier les

enseignants qui, au cours de mon parcours scolaire puis universitaire, m'ont influencés dans le choix de cette voie.

Finalement, je remercie toute ma famille pour son soutien et notamment mes parents qui m'ont toujours fait confiance. Je termine avec une pensée spéciale pour Élodie qui est à mes côtés chaque jour et qui a dû, pendant trois ans, composer avec mon humeur variant au gré des progrès et des impasses mathématiques.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'existence d'applications holomorphes entre des sous-variétés réelles dans des espaces complexes. On s'intéresse plus particulièrement à la convergence et à l'approximation à la Artin d'applications formelles entre sous-variétés réelles. Tout d'abord, on montre la convergence des applications formelles de jacobien non identiquement nul entre une sous-variété générique analytique réelle minimale et une sous-variété générique analytique réelle holomorphiquement non dégénérée. Grâce à ce résultat, on obtient la convergence de toutes les applications formelles entre une hypersurface analytique réelle minimale holomorphiquement non dégénérée et une hypersurface qui ne contient pas de courbe holomorphe. D'autre part, on établit la convergence de l'application de réflexion associée à une application formelle de jacobien non identiquement nul entre hypersurfaces lorsque l'hypersurface source est minimale. Cela nous permet ensuite de montrer un résultat d'approximation à la Artin dans ce même cas. Pour finir, on prouve un théorème artinien pour des applications CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux sous-variétés dans des espaces complexes de dimensions différentes.

Mots clés :

Application formelle, application CR, application holomorphe, sous-variété générique, théorème d'approximation de Artin, minimalité, non dégénérescence holomorphe.

Abstract :

The aim of this thesis is to study the existence of holomorphic mappings between real submanifolds in complex spaces. In particular, we are interested in convergence and Artin approximation of formal mappings between real submanifolds. First, we show the convergence of formal mappings between a real analytic generic minimal submanifold and a holomorphically nondegenerate real analytic submanifold as soon as the Jacobian of the mapping does not vanish identically. From this result, we deduce the convergence of arbitrary formal maps between real-analytic hypersurfaces when the source is minimal and holomorphically non degenerate and the target does not contain any holomorphic curves. Moreover, we prove the convergence of the reflection function associated to a formal map of generic full rank between hypersurfaces when the source is minimal. This allows us to prove an Artin approximation theorem in this case. Finally, we show an artinian result for smooth CR mappings between submanifolds in complex spaces of different dimensions.

Keywords :

Formal mapping, CR mapping, holomorphic mapping, generic submanifold, Artin approximation theorem, minimality, holomorphic nondegeneracy.

Table des matières

Introduction	11
1 Présentation et contributions	13
1.1 Rappels sur les structures CR	13
1.1.1 Variétés CR et notions liées	13
1.1.2 Conditions de non dégénérescence	16
1.1.3 Minimalité et ensembles de Segre	22
1.1.4 Applications formelles entre sous-variétés	24
1.2 Problématique, historique et contributions	26
1.2.1 Convergence des applications formelles	27
1.2.2 Approximation artiniennne	30
2 Applications formelles	33
2.1 Préliminaires	33
2.2 Convergence de la fonction de réflexion	36
2.3 Convergence en codimension supérieure	43
2.3.1 Un lemme de convergence	43
2.3.2 Démonstration du Théorème 1.2.4	46
2.3.3 Démonstration du Théorème 1.2.6	52
2.4 Démonstration du théorème artinien	53
3 Applications CR de codimension positive	55
3.1 Préliminaires	55
3.2 Propriétés de $\mathcal{T}_p(H)$	61
3.3 Démonstration du théorème principal	65
Bibliographie	71

Introduction

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'existence d'applications holomorphes entre sous-variétés réelles dans des espaces complexes. Ce problème apparaît de façon naturelle si l'on souhaite classifier de telles sous-variétés. On cherche alors sous quelles conditions deux sous-variétés réelles sont biholomorphiquement équivalentes. En particulier, on peut s'intéresser au problème de savoir quand deux sous-variétés réelles formellement équivalentes sont en fait biholomorphiquement équivalentes. Différents résultats peuvent être rencontrés dans la littérature mais ils sont essentiellement de deux types : des résultats de convergence et des résultats d'approximation artinienne. Les résultats de convergence visent à prouver que l'équivalence formelle est en fait convergente. Les résultats d'approximation artinienne, en référence au théorème d'approximation de Artin [1], ont, quant à eux, pour but d'obtenir l'existence d'un biholomorphisme qui admet un développement de Taylor coïncidant avec l'application formelle considérée jusqu'à un ordre fixé auparavant.

Plus généralement, on peut aussi se poser la question de la convergence et de l'approximation à la Artin d'applications formelles, entre sous-variétés réelles d'espaces complexes, qui ne soient pas inversibles. Dans cette thèse nous obtenons un résultat de convergence pour des applications formelles de jacobien non identiquement nul entre une sous-variété générique analytique réelle minimale et une sous-variété générique analytique réelle holomorphiquement non dégénérée (Théorème 1.2.4). Ce théorème nous permet ensuite de déduire un théorème de convergence pour des applications formelles quelconques entre une hypersurface analytique réelle minimale et holomorphiquement non dégénérée et une hypersurface qui ne contient pas de courbe holomorphe (Théorème 1.2.6). Nous établissons également la convergence de la fonction de réflexion associée à une application formelle de jacobien non identiquement nul entre hypersurfaces lorsque l'hypersurface source est min-

imale (Théorème 2.2.1) que nous utilisons ensuite pour montrer un résultat d'approximation à la Artin dans ce même cas (Théorème 1.2.12). D'autre part, nous montrons un théorème d'approximation à la Artin pour des applications CR de la classe \mathcal{C}^∞ entre deux sous-variétés réelles dans des espaces complexes de dimensions différentes (Théorème 1.2.13).

Chapitre 1

Présentation du problème et contributions

Dans ce chapitre, nous allons commencer par définir les notions de base dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire puis nous réaliserons un historique détaillé des résultats de convergence et d'approximation de type artinien pour des applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles.

1.1 Rappels sur les structures CR

Le but de cette section est de présenter les structures CR. Nous commencerons par rappeler les définitions classiques de sous-variétés CR et de quelques notions liées. Ensuite, nous présenterons différentes conditions de non dégénérescence pour des variétés CR analytiques réelles. Finalement, nous définirons ce que l'on appelle application formelle (holomorphe) entre sous-variétés réelles.

1.1.1 Variétés CR et notions liées

Sous-variétés CR, sous-variétés génériques. Dans toute la thèse, nous nous plaçons dans des espaces complexes de type \mathbb{C}^N avec N un entier positif. Dans cet espace, nous noterons de façon usuelle les points sous la forme $Z = (Z_1, \dots, Z_N)$ où $Z_j = x_j + iy_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ avec $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. On note également x et y les vecteurs composés des parties réelles et imaginaires

des composantes de Z ainsi que $\bar{Z} = x - iy$. On identifie ainsi \mathbb{C}^N et \mathbb{R}^{2N} , et si f est une fonction définie sur une partie de \mathbb{C}^N , nous utiliserons la notation $f(Z, \bar{Z})$ au lieu de $f(x, y)$.

Considérons $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété de classe \mathcal{C}^∞ de codimension d . Cela signifie que, pour tout $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p dans \mathbb{C}^N , et $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d) : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe \mathcal{C}^∞ tels que la différentielle de ρ soit surjective en tout point de U et tels que

$$M \cap U = \{Z \in U, \rho(Z, \bar{Z}) = 0\}.$$

On dit que M est analytique réelle si l'on peut trouver, en tout point de M , une définissante locale ρ qui soit analytique réelle. Dans ce cas, il est possible de définir la *complexification de M* . Il s'agit de la sous-variété complexe de \mathbb{C}^{2N} donnée par

$$\mathcal{M} = \{(Z, \zeta) \in U \times \bar{U}, \rho(Z, \zeta) = 0\} \quad (1.1)$$

où \bar{U} désigne l'ouvert constitué des conjugués des éléments de U .

Pour $p \in M$, l'espace tangent à M en p est noté $T_p M$ et désigne le noyau de la différentielle de ρ en p . Nous utiliserons les notations standard concernant les vecteurs tangents, ainsi un vecteur $X = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p + \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p$ avec pour $j = 1, \dots, N$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ appartient à $T_p M$ si et seulement si $\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(p, \bar{p}) + \sum_{j=1}^N \beta_j \frac{\partial \rho}{\partial y_j}(p, \bar{p}) = 0$. Si on laisse les coefficients α_j et β_j prendre des valeurs complexes alors on obtient un espace vectoriel complexe $\mathbb{C}T_p M$ que l'on appelle l'espace tangent complexifié de M en p . En utilisant la notation classique $\frac{\partial}{\partial Z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$, pour $j = 1, \dots, N$, on peut réécrire les vecteurs de $\mathbb{C}T_p M$ de la façon suivante :

$$X = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial Z_j} \Big|_p + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j} \Big|_p$$

avec $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, pour $j = 1, \dots, N$.

Un vecteur $X = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial Z_j} \Big|_p + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j} \Big|_p$ est dit de type (1,0) ou holomorphe (respectivement de type (0,1) ou anti-holomorphe) si $b_j = 0$ pour $j = 1, \dots, N$ (respectivement si $a_j = 0$ pour $j = 1, \dots, N$). On note $T_p^{1,0} M$ l'ensemble des vecteurs tangents à M en p de type (1,0) et $T_p^{0,1} M$ celui des

vecteurs tangents à M en p de type $(0,1)$. D'après la définition de $T_p^{0,1}M$, on remarque facilement que la dimension complexe de cet espace est donnée par $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{0,1}M = N - \text{rang}_{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}}(p, \bar{p}) \right)$. On dit que la sous-variété M est CR si cette dimension ne varie pas selon le point $p \in M$, on l'appelle alors la *dimension CR* de M . On observe que la dimension CR est toujours minorée par $N - d$ et que le cas limite où la dimension CR de M est exactement égale à $N - d$ correspond au cas où le rang de la matrice $\frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}}(p, \bar{p})$ est maximal égal à d . Si l'on se situe dans ce cas, on dit que la sous-variété est *générique*, on note alors $n = N - d$ la dimension CR de M .

Coordonnées normales. Si la sous-variété $M \subset \mathbb{C}^N$ est à la fois analytique réelle et générique en un point $p_0 \in M$, de codimension réelle d et de dimension CR n , il est bien connu (voir par exemple [4, §4.2]) que l'on peut trouver des coordonnées normales pour M près de p_0 . Cela correspond à des coordonnées holomorphes $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ avec $N = n + d$ pour lesquelles p_0 est identifié au point 0. Ces coordonnées sont définies de telle sorte qu'il existe $Q \in (\mathbb{C}\{z, \chi, \tau\})^d$ où $(z, \chi, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$, ainsi que U, V deux voisinages ouverts de 0 dans \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^d respectivement tels que Q soit convergente sur $U \times \bar{U} \times \bar{V}$ et

$$M \cap (U \times V) = \{(z, w) \in U \times V, w = Q(z, \bar{z}, \bar{w})\}. \quad (1.2)$$

On rappelle que \bar{U} désigne l'ouvert constitué des conjugués des éléments de U . De plus, l'application Q vérifie

$$Q(0, \chi, \tau) \equiv Q(z, 0, \tau) \equiv \tau \quad (1.3)$$

et puisque M est une sous-variété réelle, on a l'identité suivante

$$Q(z, \chi, \bar{Q}(\chi, z, \tau)) \equiv \tau. \quad (1.4)$$

Dans ces coordonnées, la complexification de M est donnée par

$$\mathcal{M} = \{(z, Q(z, \chi, \tau), \chi, \tau), (z, \chi, \tau) \in U\} \subset \mathbb{C}^{n+d} \times \mathbb{C}^{n+d}. \quad (1.5)$$

Champs de vecteurs CR, applications CR. A partir de la définition des vecteurs complexes tangents à M en p , on peut définir les champs de vecteurs complexes tangents à M de façon usuelle. Il s'agit d'applications lisses définies sur un ouvert \mathcal{U} de M , qui à chaque point p de \mathcal{U} associent

un élément de $\mathbb{C}T_pM$. Tout champ de vecteur complexe tangent à M s'écrit donc sous la forme $X = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial Z_j} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j}$ où a_1, \dots, a_N et b_1, \dots, b_N sont des fonctions lisses sur un ouvert de M à valeurs complexes. Les champs de vecteurs tangents à M dont la valeur en chaque point est un vecteur de type $(0,1)$ sont appelés *champs de vecteurs CR*. Ce sont donc des champs de vecteurs L de la forme

$$L = \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j}, \quad (1.6)$$

où b_1, \dots, b_N sont des fonctions lisses sur un ouvert \mathcal{U} de M , qui vérifient pour tout $p \in \mathcal{U}$ et pour toute fonction analytique réelle ρ définissante locale de M ,

$$\sum_{j=1}^N b_j(p) \frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}_j}(p) = 0. \quad (1.7)$$

Si M est une sous-variété CR, de dimension CR n , passant par p_0 , on appelle *base locale* de champs de vecteurs CR en p_0 , toute famille L_1, \dots, L_n de champs de vecteurs CR définie sur un voisinage ouvert U de p_0 dans M et linéairement indépendante en tout point de U .

Les applications f de classe au moins \mathcal{C}^1 sur M qui vérifient, pour tout L champ de vecteurs CR, $Lf \equiv 0$ sont dites CR. En fait, pour que f soit CR, il suffit de vérifier que $L_j f \equiv 0$ pour toute base locale de champs de vecteurs CR L_1, \dots, L_n sur M .

1.1.2 Conditions de non dégénérescence

Dans cette partie, nous allons tout d'abord donner différentes notions de non dégénérescence pour des sous-variétés réelles dans des espaces complexes, puis nous énoncerons les liens qui existent entre ces conditions.

Non dégénérescence au sens de Levi. Soit M une sous-variété de classe \mathcal{C}^∞ . D'après les définitions des vecteurs de type $(1,0)$ et $(0,1)$, pour tout $p \in M$, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}T_pM$, $T_p^{0,1}M$ et $T_p^{1,0}M$ sont en somme directe. On peut donc définir π_p la projection canonique associée à l'espace quotient $\mathbb{C}T_pM/T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M$.

Définition 1.1.1. On appelle *application de Levi* de M en p la forme hermitienne définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p : T_p^{1,0}M \times T_p^{1,0}M &\rightarrow \mathbb{C}T_pM/T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M \\ (X_p, Y_p) &\rightarrow \frac{1}{2i}\pi_p([X, \bar{Y}]_p) \end{aligned} \quad (1.8)$$

où $[X, \bar{Y}]$ désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs X et \bar{Y} . La sous-variété M est dite *Levi non dégénérée en p* si et seulement si l'application de Levi en p est non dégénérée i.e. si $\mathcal{L}_p(X_p, Y_p) = 0$ pour tout $Y_p \in T_p^{1,0}M$ implique $X_p = 0$.

Cette condition peut se traduire, quand M est générique, par un critère qui fait intervenir les dérivées CR d'une définissante locale.

Proposition 1.1.2. *Supposons que $M \subset \mathbb{C}^N$ soit générique de codimension d , considérons alors ρ une définissante locale de M près de p et L_1, \dots, L_n , avec $n = N - d$, une base locale de champs de vecteurs CR près de p . Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $j \in \{1, \dots, d\}$, on note $L^\alpha = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n}$ et $L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z} \right) (p, \bar{p}) = \left(L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z_1} \right) (p, \bar{p}), \dots, L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z_N} \right) (p, \bar{p}) \right) \in \mathbb{C}^N$. M est Levi non dégénérée en p si et seulement si la famille de vecteurs*

$$\left\{ L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z} \right) (p, \bar{p}), 1 \leq j \leq d, |\alpha| \leq 1 \right\}$$

engendre \mathbb{C}^N .

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut se restreindre à montrer la proposition précédente uniquement pour $p = 0$. D'autre part, il est clair que, puisque les définissantes locales de la sous-variété générique analytique réelle M sont toutes multiples les unes des autres, l'espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\left\{ L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z} \right) (p, \bar{p}), 1 \leq j \leq d, |\alpha| \leq 1 \right\}$ ne dépend pas du choix de la définissante locale ρ . Pour simplifier la preuve, nous allons donc nous placer dans le cadre des coordonnées régulières pour M en 0. Il s'agit de coordonnées holomorphes $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ près de 0 dans lesquelles on peut choisir une définissante locale pour M en 0 de la forme $\rho(z, w, \bar{z}, \bar{w}) = \text{Im } w - \varphi(z, \bar{z}, \text{Re } w)$ où φ est une application analytique réelle près de 0 dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans \mathbb{R}^d vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $d\varphi(0) = 0$ (voir [4, Proposition 1.3.6] pour l'existence de telles coordonnées). Dans ces

coordonnées, on peut définir une base locale de champs de vecteurs CR près de 0 de la façon suivante : notons $(L) = (L_1, \dots, L_n)$, on pose

$$(L) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) - 2i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \left(I_d + i \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \quad (1.9)$$

où $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_d} \right)$. Après calcul, on remarque que l'on a

$$[L_j, \bar{L}_k]_0 = \sum_{q=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial z_k \partial \bar{z}_j}(0) \left(\frac{\partial}{\partial w_q} \Big|_0 - \frac{\partial}{\partial \bar{w}_q} \Big|_0 \right) \quad (1.10)$$

où φ_q est la q -ième composante de φ . Notons $A^{(q)}$ la matrice de terme générique $\left(\frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial z_k \partial \bar{z}_j}(0) \right)_{1 \leq j, k \leq n}$, de sorte que la sous-variété M est Levi non dégénérée en 0 si et seulement si la matrice de taille $nd \times n$

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(d)} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

est de rang n .

D'autre part, le fait que la famille $\left\{ L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z} \right) (0, 0), 1 \leq j \leq d, |\alpha| \leq 1 \right\}$ engendre \mathbb{C}^N est équivalent au fait que la matrice de taille $(n+1)d \times N$

$$B = \begin{pmatrix} L_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) (0) \\ \vdots \\ L_n \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) (0) \\ \frac{\partial \rho}{\partial Z}(0) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

soit de rang N , où pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $L_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) (0)$ est la matrice de taille $d \times n$ dont chaque ligne est $L_j \left(\frac{\partial \rho_q}{\partial Z} \right) (0)$ pour $q \in \{1, \dots, d\}$. Or, pour $q \in \{1, \dots, d\}$, la q -ième ligne de la matrice $L_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) (0)$ est en fait $\left(-\frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial z_1 \partial \bar{z}_j}(0), \dots, -\frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial z_n \partial \bar{z}_j}(0) \right)$. Il s'agit donc, au signe près, de la j -ième ligne

de la matrice $A^{(q)}$. En utilisant le fait que $d\varphi(0) = 0$, on obtient donc que

$$B = \begin{pmatrix} & L_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial w} \right) (0) \\ \tilde{A} & \vdots \\ & L_n \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) (0) \\ 0_{d,n} & \frac{1}{2i} I_d \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

avec \tilde{A} une matrice de taille $nd \times n$ dont les lignes sont, au signe et à l'ordre près, les lignes de la matrice A . Par conséquent, la matrice B est de rang $N = n + d$ si et seulement si la matrice A est de rang n . Ce qui revient à dire que M est Levi non dégénérée au point 0 si et seulement si la famille $\left\{ L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z} \right) (0, 0), 1 \leq j \leq d, |\alpha| \leq 1 \right\}$ engendre \mathbb{C}^N . \square

Non dégénérescence finie. La condition de Levi non dégénérescence se généralise naturellement à la notion de non dégénérescence finie pour des sous-variétés génériques. Cette condition a été introduite par Baouendi, Huang et Rothschild dans [6] (voir également [4, §11.1, §11.2]).

Définition 1.1.3. On considère M une sous-variété générique de classe \mathcal{C}^∞ et de codimension d définie près de $p \in M$ par une définissante locale ρ ainsi que L_1, \dots, L_n , avec $n = N - d$, une base locale de champs de vecteurs CR près de p . On dit que M est k -non dégénérée en p , avec $k \in \mathbb{N}$, si la famille de vecteurs $\left\{ L^\alpha \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial Z} \right) (p, \bar{p}), 1 \leq j \leq d, |\alpha| \leq k \right\}$ engendre \mathbb{C}^N .

Ainsi, la non dégénérescence au sens de Levi est équivalente à la 1-non dégénérescence.

Finitude essentielle. On peut définir, pour une sous-variété générique analytique réelle $M \subset \mathbb{C}^N$, la notion de finitude essentielle en p de façon géométrique (voir [4, §11.4] et [13]). Pour cela, on considère un voisinage ouvert U de p dans \mathbb{C}^N sur lequel M est définie par une définissante locale analytique réelle ainsi que \mathcal{M} sa complexification donnée par (1.1). Pour $q \in U$, le premier ensemble de Segre en q associé à M est alors défini par

$$S_1(q) = \{Z \in U, (Z, \bar{q}) \in \mathcal{M}\}$$

(voir la partie 1.1.3 pour une définition complète des ensembles de Segre). Notons alors

$$A(p, U) = \bigcap_{q \in S_1(p, U)} S_1(q, U).$$

Puisque pour tout $q \in S_1(p, U)$, l'ensemble de Segre $S_1(q, U)$ est un ensemble analytique complexe, il en est de même de $A(p, U)$. De plus, cet ensemble analytique complexe est contenu dans $M \cap U$. Pour prouver cette assertion, on remarque d'abord que $q \in M \cap U$ si et seulement si $q \in S_1(q, U)$. Puis, on considère $p_1 \in A(p, U)$. Comme $p \in M \cap U$, $p \in S_1(p, U)$, donc, par définition de l'ensemble $A(p, U)$, $p_1 \in S_1(p, U)$. Mais alors, de nouveau par définition de l'ensemble $A(p, U)$, $p_1 \in S_1(p_1, U)$ ce qui implique que $p_1 \in M \cap U$.

Le germe en p de l'ensemble analytique complexe $A(p, U)$ est appelé la *variété essentielle* de M en p . Ce germe ne dépend pas de U et est, par conséquent, noté $A(p)$.

Définition 1.1.4. On dit que M est essentiellement finie en p si $A(p) = \{p\}$.

On obtient, en particulier, que toute sous-variété générique analytique réelle qui ne contient aucune courbe holomorphe passant par un point $p \in M$ est toujours essentiellement finie en ce point.

Il est également possible de considérer une définition plus analytique de la non dégénérescence finie (voir par exemple [4, §11.4]).

Proposition 1.1.5. Si $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ sont des coordonnées normales pour M près de p associées à l'application $Q \in (\mathbb{C}\{z, \chi, \tau\})^d$ alors M est essentiellement finie en p si et seulement si l'idéal engendré par les composantes de $(Q_\alpha(\chi, 0))_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ est de codimension finie dans $\mathbb{C}[[\chi]]$ où les applications $Q_\alpha(\chi, \tau)$ interviennent dans $Q(z, \chi, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} Q_\alpha(\chi, \tau) z^\alpha$, le développement de Taylor de Q .

Cette définition est indépendante du choix des coordonnées normales.

Non dégénérescence holomorphe. Une autre condition de non dégénérescence, introduite par Stanton [28], s'est révélée centrale dans la compréhension du type de problème étudié dans cette thèse, il s'agit de la notion de non dégénérescence holomorphe. Cette condition met en jeu des champs de vecteurs tangents particuliers. Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété générique analytique réelle et $p \in M$, on dit que X est un *champ de vecteur holomorphe tangent* à M près de p s'il s'écrit sous la forme $X = \sum_{j=1}^N a_j(Z) \frac{\partial}{\partial Z_j}$ avec a_1, \dots, a_N des fonctions holomorphes près de p dans \mathbb{C}^N et si ce champ est tangent à M près de p .

Définition 1.1.6. La sous-variété M est *holomorphiquement non dégénérée* en p s'il n'existe pas de champ de vecteurs holomorphe tangent à M près de p qui soit non trivial.

Il s'avère que cette condition n'est pas locale comme le sont les précédentes. En effet, on a le résultat suivant, dont on peut trouver une preuve dans [4, §11.3],

Proposition 1.1.7. *Si M est holomorphiquement non dégénérée en un point p alors il en est de même en tous les points de la composante connexe de p .*

Dans le cas où M est donnée près de p par des coordonnées normales, il existe une condition équivalente à la non dégénérescence holomorphe de M en p : le critère de Stanton (voir [28] ou [4, §11.3]).

Proposition 1.1.8. *Si M s'écrit, près de p , sous la forme (1.2) alors M est holomorphiquement non dégénérée en p si et seulement si il existe une famille de multi-indices $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\} \subset \mathbb{N}^n$ et une famille d'entiers $\{r_1, \dots, r_n\} \subset \{1, \dots, d\}$ tel que $\det \left(\frac{\partial Q_{\alpha^k}^{r_k}}{\partial \chi^l}(\chi, \tau) \right)_{k,l} \neq 0$ où $Q_{\alpha^k}^{r_k}$ est la r_k -ième composante de l'application Q_{α^k} qui apparaît dans $Q(z, \chi, \tau) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} Q_{\alpha}(\chi, \tau) z^{\alpha}$ le développement de Taylor de Q .*

Lien entre les notions de non dégénérescence. Les conditions de non dégénérescence que nous venons de définir possèdent des connections les unes avec les autres. En fait, elles figurent, telles qu'elles sont exposées ci-dessus, par ordre décroissant de généralité. On a ainsi le résultat suivant (voir par exemple [4, §11.5]),

Proposition 1.1.9. *Pour $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété générique analytique réelle passant par p , on a la chaîne d'implication suivante :*

$$\begin{array}{c}
 M \text{ est Levi non dégénérée en } p \\
 \Downarrow \\
 M \text{ est finiment non dégénérée en } p \\
 \Downarrow \\
 M \text{ est essentiellement finie en } p \\
 \Downarrow \\
 M \text{ holomorphiquement non dégénérée en } p
 \end{array} \tag{1.14}$$

En fait, le théorème 11.5.1 de [4] apportent des précisions sur les liens qui existent entre ces notions puisqu'il met en évidence des équivalences partielles.

1.1.3 Minimalité et ensembles de Segre

Commençons par rappeler le concept de minimalité, introduit par Tumanov dans [31] pour une sous-variété de classe \mathcal{C}^∞ ,

Définition 1.1.10. Soit M une sous-variété CR de \mathbb{C}^N de classe \mathcal{C}^∞ , on dit que M est *minimale* en $p_0 \in M$ (au sens de Tumanov) s'il n'existe pas de germe de sous-variété réelle $S \subset M$ passant par p_0 tel que l'espace tangent complexe de M en q est tangent à S en tout point $q \in S$ et $\dim_{\mathbb{R}} S < \dim_{\mathbb{R}} M$.

Cette condition est réalisée dès que la sous-variété M est de type fini en p_0 c'est à dire dès que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs CR près de p_0 et leurs conjugués est égale à l'espace tangent complexifié de M en p_0 . Cependant, si on considère le cas d'une sous-variété analytique réelle, alors les conditions de minimalité et de type fini en un point sont équivalentes.

Proposition 1.1.11 ([4], Théorème 4.1.3). *Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété analytique réelle passant par p_0 . M est de type fini en p_0 si et seulement si elle est minimale en ce point*

On dispose d'un critère important pour déterminer si une sous-variété générique analytique réelle est minimale en un point. Ce critère fait intervenir les *ensembles de Segre* (voir [2] et [4]). Supposons donc que M soit générique analytique réelle dans \mathbb{C}^N de codimension d passant par p_0 et fixons U un voisinage ouvert de p_0 dans \mathbb{C}^N tel que $M \cap U = \{Z \in U, \rho(Z, \bar{Z}) = 0\}$ où $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ est une application analytique réelle sur U vérifiant $\partial_Z \rho_1 \wedge \dots \wedge \partial_Z \rho_d(p_0, \bar{p}_0)$. On rappelle que la complexification de M est la sous-variété complexe de $\mathbb{C}^{2(n+d)}$ donnée par

$$\mathcal{M} = \{(Z, \zeta) \in U \times \bar{U}, \rho(Z, \zeta) = 0\} \quad (1.15)$$

où \bar{U} désigne l'ouvert constitué des conjugués des éléments de U . Pour $p \in U$, on appelle *ensemble de Segre* en p d'ordre 1 associé à M , l'ensemble (dépendant de U) défini par

$$S_1(p) = \{Z \in U, (Z, \bar{p}) \in \mathcal{M}\} \quad (1.16)$$

On définit ensuite les ensembles de Segre d'ordre supérieur par récurrence. Pour $k \geq 1$, l'ensemble de Segre en p d'ordre k associé à M est donnée par :

$$S_k(p) = \bigcup_{q \in S_{k-1}(p)} S_1(q) \quad (1.17)$$

Etant donné que M est générique analytique réelle en p_0 , on peut, comme on l'a remarqué auparavant, trouver $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ des coordonnées dites normales pour M près de p_0 c'est à dire pour lesquelles $(z, w)(p_0) = 0$ et M est donnée au voisinage de p_0 par

$$w = Q(z, \bar{z}, \bar{w})$$

avec $Q \in (\mathbb{C}\{z, \chi, \tau\})^d$. Dans ces coordonnées, les ensembles de Segre en p_0 sont paramétrés par des applications holomorphes appelées *applications de Segre*. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on définit la série entière convergente $u_j : (\mathbb{C}^{nj}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ de la façon suivante

$$u_1(z^1) = 0 \quad (1.18)$$

$$u_2(z^1, \chi^1) = Q(z^1, \chi^1, 0) \quad (1.19)$$

puis, pour $j \geq 3$, par la formule de récurrence suivante

$$u_j(z^1, \chi^1, z^2, \dots) = Q(z^1, \chi^1, \bar{u}_{j-1}(\chi^1, z^2, \dots)) \quad (1.20)$$

L'application de Segre d'ordre j en p_0 est alors l'application holomorphe $v_j : (\mathbb{C}^{nj} \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0)$ définie par

$$v_j(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots) := (z^1, u_j(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots)). \quad (1.21)$$

Donnons maintenant le critère de minimalité mettant en jeu les ensembles de Segre.

Théorème 1.1.12. *Si M est une variété générique analytique réelle passant par p_0 alors il existe un entier $j_0 \leq d + 1$ appelé nombre de Segre de M en p_0 tel que la sous-variété M est minimale en p_0 si et seulement si $S_{2j_0}(p_0)$ contient un voisinage ouvert de p_0 dans \mathbb{C}^N . Ceci équivaut, si M est donnée en coordonnées normales, à l'existence de points $(z^1, \chi^1, \dots, z^{2j_0}, \chi^{2j_0}) \in \mathbb{C}^{2j_0}$ arbitrairement proches de 0 tels que le rang de l'application de Segre v_{2j_0} en chacun de ces points soit égal à N et tels que $v_{2j_0}(z^1, \chi^1, \dots, z^{2j_0}, \chi^{2j_0}) = p_0$.*

Au cours du chapitre 2, nous aurons besoin de certaines applications de Segre à paramètre. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on définit la série entière convergente $U_j : (\mathbb{C}^{nj} \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ par récurrence sur j de la façon suivante

$$U_1(z^1; t) := t, \quad (1.22)$$

$$U_{2j}(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots, z^j, \chi^j; t) := U_{2j-1}(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots, z^j; Q(z^j, \chi^j, t)), \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} U_{2j+1}(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots, z^j, \chi^j, z^{j+1}; t) \\ := U_{2j}(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots, z^j, \chi^j; \bar{Q}(\chi^j, z^{j+1}, t)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $z^k, \chi^k \in \mathbb{C}^n$ et $t \in \mathbb{C}^d$. Soit $V_j : (\mathbb{C}^{nj} \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0)$ la série entière convergente définie par

$$V_j(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots; t) := (z^1, U_j(z^1, \chi^1, z^2, \chi^2, \dots; t)). \quad (1.25)$$

On remarque que lorsque l'on pose $t = 0$ dans les définitions de U_j et V_j , on retrouve les applications de Segre usuelles de M en p_0 définies précédemment. Grâce à l'identité (1.4) on observe que l'on a, pour tout $j \geq 1$, l'égalité suivante qui sera utile dans la Section 2.3.2

$$(z^1, Q(z^1, \chi^1, \bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, z^2, \dots; t))) = V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; t). \quad (1.26)$$

1.1.4 Applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles

Soient $M \subset \mathbb{C}^N$ et $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ deux sous-variétés analytiques réelles respectivement de codimension d et d' et passant respectivement par p et p' .

Définition 1.1.13. Une application formelle holomorphe $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ est une application série formelle en $Z - p$ à N' composantes, c'est à dire un élément de $(\mathbb{C}[[Z - p]])^{N'}$, vérifiant $H(p) = p'$. On dit que $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ envoie M dans M' si pour tout choix de définissantes locales ρ de M près de p et ρ' de M' près de p' , il existe a une matrice de taille $d' \times d$ dont les coefficients sont des éléments de $\mathbb{C}[[Z - p, \zeta - \bar{p}]]$ et telle que

$$\rho'(H(Z), \bar{H}(\zeta)) = a(Z, \zeta) \cdot \rho(Z, \zeta) \text{ dans } (\mathbb{C}[[Z - p, \zeta - \bar{p}]])^{d'} \quad (1.27)$$

où \bar{H} correspond à la série formelle en $\zeta - \bar{p}$ définie par $\bar{H}(\zeta) = \overline{H(\bar{\zeta})}$ autrement dit les coefficients de \bar{H} sont les conjugués des coefficients de la série formelle H .

Si $N = N'$ et si le jacobien de l'application H est non nul en p alors on dit que H est une équivalence formelle entre les germes de sous-variétés (M, p) et (M', p') .

Lorsque l'application considérée H est holomorphe près de p , H envoie M dans M' au sens précédent si et seulement si elle envoie M dans M' au sens usuel.

Si M et M' sont supposées en plus génériques, alors on dispose près de p et p' de coordonnées normales. Ainsi, on peut supposer que $p = 0$, $p' = 0$ et que M et M' sont respectivement définies près de 0 comme suit :

$$M : w = Q(z, \bar{z}, \bar{w}) \text{ et } M' : w' = Q'(z', \bar{z}', \bar{w}') \quad (1.28)$$

avec $Q \in (\mathbb{C}\{z, \chi, \tau\})^d$, $Q' \in (\mathbb{C}\{z', \chi', \tau'\})^{d'}$ et $z, \chi \in \mathbb{C}^n$, $w, \tau \in \mathbb{C}^d$, $z', \chi' \in \mathbb{C}^{n'}$, $w', \tau' \in \mathbb{C}^{d'}$. Soit $H : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, 0)$ une application formelle holomorphe. On écrit $H(z, w) = (F(z, w), G(z, w))$ où F et G sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{C}^{n'}$ et $\mathbb{C}^{d'}$. Le fait que H envoie M dans M' se traduit alors, en coordonnées normales, par l'identité entre séries formelles suivante :

$$G(z, Q(z, \chi, \tau)) = Q'(F(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)). \quad (1.29)$$

Par la suite, on aura besoin pour énoncer quelques résultats de convergence et d'approximation, de la notion d'application non totalement dégénérée.

Définition 1.1.14. Si $N = N'$ et $n = n'$, on dit que H est *non totalement dégénérée* si la série formelle $\det \frac{\partial F}{\partial z}(z, 0)$ est non identiquement nulle.

On mentionnera également des résultats sur les applications dites finies.

Définition 1.1.15. Une application formelle $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ est dite finie si $(H(Z))$, l'idéal de $\mathbb{C}[[Z - p]]$ engendré par les composantes de l'application formelle H , est de codimension finie dans $\mathbb{C}[[Z - p]]$ autrement dit si, l'idéal quotient $\mathbb{C}[[Z - p]]/(H(Z))$ est, en tant qu'espace vectoriel complexe, de dimension finie.

D'autre part, on utilisera la notion de *rang générique* d'une série formelle $h \in (\mathbb{C}[[x]])^q$, $x = (x_1, \dots, x_r)$. Il s'agit du rang de la matrice jacobienne $\frac{\partial h}{\partial x}$ en tant que matrice à coefficients dans le corps des fractions de $\mathbb{C}[[x]]$. Si h converge, cette notion coïncide avec le rang générique classique des séries entières convergentes.

Les notions de non dégénérescence que nous venons d'aborder présentent des liens entre elles. En effet, toute application formelle ou holomorphe $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ finie est aussi non totalement dégénérée (voir par exemple [14]) et de rang générique maximal (voir [4, Théorème 5.1.37]). D'autre part, si le jacobien de H en p est non nul alors H est finie.

1.2 Problématique, historique des résultats et contributions

Pour deux germes de sous-variétés analytiques réelles M et M' dans des espaces complexes, une des questions fondamentales que l'on est amené à se poser est de savoir sous quelles conditions ces germes de sous-variétés sont biholomorphiquement équivalents. Autrement dit, sous quelles conditions existe-il une application H holomorphe au voisinage de $p \in M$ inversible qui envoie un voisinage de p dans M dans un voisinage de $H(p) \in M'$ dans M' ? Comme on l'a vu dans la section précédente, les notions d'équivalence formelle et d'équivalence biholomorphe paraissent par définition proches, cependant elles ne coïncident pas en général. En effet, dans leur article [27], Moser et Webster donnent un exemple de sous-variété algébrique réelle de dimension 2 dans \mathbb{C}^2 définie par $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2, w = |z|^2 + \gamma \bar{z}^2 + \gamma z^3 \bar{z}\}$ avec γ bien choisi, qui est formellement équivalente à une sous-variété de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mais pas biholomorphiquement équivalente à cette dernière (voir aussi [17]). Cependant des résultats récents fournissent une réponse positive partielle quand les sous-variétés sont supposées en plus CR. Ces résultats sont obtenus par deux méthodes différentes. La première consiste à montrer que l'application formelle considérée est en fait automatiquement convergente, la seconde vise à approcher cette application formelle, dans la topologie de Krull, par une application convergente dans l'esprit du théorème d'approximation de Artin [1].

Théorème 1.2.1. [1] *Soit $S(u, t) = (S_i(u, t))_{i \in I}$, $S_i(u, t) \in \mathbb{C}\{u, t\}$ une famille de séries entières convergentes avec $u \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^p$. Supposons qu'il existe une application formelle $t(u) \in (\mathbb{C}[[u]])^p$, $t(0) = 0$, solution du système d'équation $S(u, t) = 0$. Alors pour tout entier k , il existe une solution de ce même système qui converge et dont le développement de Taylor coïncide avec $t(u)$ jusqu'à l'ordre k .*

De façon générale, l'existence d'approximations artiniennes ne permet aucune déduction concernant la convergence de l'application formelle considérée. Néanmoins, les résultats à la Artin s'appliquent dans un cadre plus général que les résultats qui assurent la convergence des applications car ils permettent de travailler avec des hypothèses plus faibles sur les sous-variétés.

Dans cette section, nous allons discuter des différents résultats obtenus dans ce cadre ainsi que les contributions apportées par le présent travail.

Nous commencerons par les résultats portant sur la convergence des applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles puis nous aborderons les résultats qui concernent l'approximation artinienne de ce type d'application.

1.2.1 Convergence des applications formelles

Le premier résultat de convergence pour des applications formelles entre sous-variétés d'espaces complexes provient du travail de Chern et Moser. En effet, on peut obtenir comme conséquence de [11] le résultat de convergence suivant

Théorème 1.2.2. *Toute application formelle holomorphe inversible entre des germes d'hypersurfaces analytiques réelles Levi non dégénérées est convergente.*

Depuis, différents travaux ont eu pour objectif de généraliser ce type de résultat non seulement en considérant le cas de sous-variétés de codimension supérieure et en affaiblissant les conditions de non dégénérescence dont on munit les sous-variétés mais aussi en cherchant des conditions de non dégénérescence optimales. Dans cet état d'esprit, c'est, sans doute, le concept de non dégénérescence holomorphe, introduit par Stanton [28], qui s'est avéré être le plus important dans la compréhension de ce type de problème. Le caractère central de cette condition pour l'étude des applications entre sous-variétés réelles apparaît clairement à travers le travail de Baouendi, Ebenfelt, et Rothschild [3]. En effet, si M est une sous-variété générique analytique réelle holomorphiquement dégénérée en un point $p \in M$, alors il existe X un champ de vecteurs holomorphe tangent à M près de p . Considérons $a \in \mathbb{C}[[Z - p]]$ une série formelle sans terme constant qui ne soit pas convergente, le produit $a \cdot X$ est alors un champ de vecteur formel tangent à M . On peut donc définir $(\Phi_t(Z))_t$, le groupe à un paramètre constitué des flots formels de ce champ de vecteur. On obtient ainsi une famille de biholomorphismes formels non convergents qui envoie le germe (M, p) sur lui-même. Baouendi, Mir et Rothschild obtiennent dans [8] une réciproque à ce résultat qui est valide pour des applications finies (au sens de la définition 1.1.15) dans le cas où les sous-variétés sont minimales.

Théorème 1.2.3 ([8], Théorème 1.2). *Soient $M, M' \subset \mathbb{C}^N$ des sous-variétés génériques analytiques réelles de même dimension passant par p et p' respectivement. Supposons que M soit minimale en p et que M' soit holo-*

morphiquement non dégénérée en p . Alors, toute application formelle finie $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, p')$ envoyant M dans M' est convergente.

Au cours du chapitre 2, nous allons généraliser ce résultat à des applications de rang générique maximal. On rappelle que toute application finie est automatiquement de rang générique maximal (voir [4, Théorème 5.1.37]).

Théorème 1.2.4. *Soient (M, p) et (M', p') deux germes de sous-variétés génériques analytiques réelles de codimension d dans \mathbb{C}^N . Supposons que M soit minimale en p et que M' soit holomorphiquement non dégénérée en p' , alors toute application formelle holomorphe $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, p')$ qui envoie M dans M' vérifiant $\text{Jac}H \neq 0$ est convergente.*

La méthode mise en oeuvre pour démontrer le Théorème 1.2.4 est par nature différente de celle utilisée par Baouendi, Mir et Rothschild pour des applications finies dans [8]. En effet, grâce à des identités récentes dues à Juhlin [19], nous sommes ici en mesure de prouver directement la convergence de l'application formelle H (et de ses dérivées) le long des ensembles de Segre itérés, ce qui contraste fortement avec la méthode de [8] qui nécessite de montrer la convergence de la fonction de réflexion. Notre preuve du Théorème 1.2.4 fournit aussi une preuve plus simple du Théorème 1.2.3, dû à Baouendi, Mir et Rothschild [8], dans le cas où l'application considérée est inversible. Signalons que le cas particulier du Théorème 1.2.4 où M' est une sous-variété générique algébrique réelle a été prouvé par Mir [26].

Les résultats précédents sont valables pour des applications formelles non dégénérées entre sous-variétés analytiques réelles. La littérature concernant la convergence des applications quelconques entre deux sous-variétés analytiques réelles est bien moins riche. On peut citer le résultat de Baouendi, Ebenfelt et Rothschild, établi dans [5], avec l'hypothèse de finitude essentielle pour M en p .

Théorème 1.2.5 ([5], Théorème 2.2). *Soient M et M' deux hypersurfaces analytiques réelles de \mathbb{C}^N , $N \geq 2$ passant par p et p' respectivement. Supposons que M soit essentiellement finie en p et que M' ne contienne pas d'ensemble analytique complexe non trivial passant par p' . Alors, toute application formelle holomorphe qui envoie M dans M' est convergente.*

Une conséquence intéressante du Théorème 1.2.4 réside dans le résultat de convergence suivant pour des applications formelles quelconques entre hypersurfaces analytiques réelles. Ce résultat constitue une généralisation du

précédent car il est valable sous des hypothèses plus faibles. En effet, il n'est plus nécessaire de supposer la finitude essentielle de l'hypersurface source au point considéré mais seulement sa non dégénérescence holomorphe. De plus, on exige non plus que l'hypersurface but ne contienne pas d'ensemble analytique réel passant par un point donné mais uniquement que celle-ci ne possède pas de courbe holomorphe passant par ce point.

Théorème 1.2.6. *Soient (M, p) et (M', p') deux germes d'hypersurfaces analytiques réelles dans \mathbb{C}^{n+1} . Supposons que M soit minimale et holomorphiquement non dégénérée en p et que M' ne contienne pas de courbe holomorphe passant par p' , alors toute application formelle holomorphe qui envoie (M, p) dans (M', p') est convergente.*

Lorsque M et M' sont des hypersurfaces, on établira, en fait, un résultat plus général à savoir, la convergence de l'application dite de réflexion avec pour seule hypothèse la minimalité de la sous-variété source (voir Théorème 2.2.1). La convergence de l'application de réflexion peut, par exemple, être utilisée pour obtenir certains résultats d'approximation artienne, dont on parlera par la suite. On pourra trouver une définition précise de la fonction de réflexion associée à une application formelle entre sous-variétés analytiques réelles génériques dans la Section 2.2.

La convergence de la fonction de réflexion a d'abord été obtenu par Mir dans [25] pour des biholomorphismes formels,

Théorème 1.2.7 ([25], Théorème 2.1). *Soient $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, p')$ un biholomorphisme formel entre M et M' deux hypersurfaces analytiques réelles passant respectivement par p et p' . Si M est minimale en p alors l'application de réflexion associée à H est convergente.*

Ce résultat a ensuite été généralisé en codimension supérieure pour des applications non totalement dégénérées, par Baouendi, Mir et Rothschild dans [8],

Théorème 1.2.8 ([8], Théorème 2.6). *Soient $M \subset \mathbb{C}^N$ et $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ deux sous-variétés analytiques réelles génériques passant par p et p' respectivement et $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ une application formelle qui envoie M dans M' . Si M est minimale en p et si H est non totalement dégénérée alors la fonction de réflexion associée à H est convergente.*

On prouvera la convergence de la fonction de réflexion pour des applications formelles de rang générique maximal en combinant des arguments

de Mir [25] et de Juhlin [19]. D'autre part, le Théorème 2.2.1 nous permet d'obtenir un résultat d'approximation à la Artin pour des applications formelles de rang générique maximal que nous énoncerons dans la section suivante.

1.2.2 Approximation artinienne

Comme nous l'avons vu précédemment, montrer la convergence n'est pas le seul moyen d'obtenir l'existence d'équivalence holomorphe entre sous-variétés CR formellement équivalentes. Cela peut également être réalisé en utilisant des résultats à la Artin. L'objectif d'un tel résultat est, pour $M \subset \mathbb{C}^N$, $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ deux sous-variétés analytiques réelles CR passant par p et p' respectivement, pour $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ une application formelle qui envoie M dans M' et pour k un entier positif, de trouver une application holomorphe H^k près de p dont le développement de Taylor en p coïncide avec H jusqu'à l'ordre k . On peut aussi considérer ce type de résultat pour des applications H supposées CR près de p .

Le premier résultat d'approximation à la Artin pour des applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles figure dans [9] où Baouendi, Rothschild et Zaitsev étudient la notion de κ -équivalence entre sous-variétés analytiques réelles,

Théorème 1.2.9 ([9], Théorème 1.1). *Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété analytique réelle connexe CR. Il existe V un sous-ensemble analytique réel fermé propre de M tel que, pour tout $p \in M \setminus V$, toute sous-variété analytique réelle M' de \mathbb{C}^N , tout $p' \in M'$ et tout entier $k > 1$ on ait l'affirmation suivante : si $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, p')$ est une application formelle inversible qui envoie M dans M' alors il existe un germe de biholomorphisme $H^k : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, p')$ qui envoie M dans M' et dont le développement de Taylor en p coïncide avec H jusqu'à l'ordre k .*

Par ce théorème, il est donc possible d'obtenir une approximation à la Artin en dehors d'un sous-ensemble analytique réel V . Ce sous-ensemble contient, en fait, des points de dégénérescence de la sous-variété source.

Baouendi, Mir et Rothschild établissent, dans [8], un théorème similaire pour des applications non totalement dégénérées.

Théorème 1.2.10 ([8], Théorème 1.3). *Soient (M, p) et (M', p') deux germes de sous-variétés analytiques réelles génériques dans \mathbb{C}^N de même dimension.*

Si M est minimale en p et si $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, p')$ est une application formelle non totalement dégénérée qui envoie M dans M' alors pour tout entier positif k , il existe une application convergente $H^k : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^N, p')$ qui envoie M dans M' et qui coïncide avec H jusqu'à l'ordre k .

Les deux précédents résultats ont la particularité d'être valables uniquement pour des variétés source et but situées dans deux espaces complexes de même dimension. Il existe, jusqu'à présent, peu de résultats qui permettent de prendre en compte la situation où ces deux dimensions diffèrent, c'est le cas du travail de Meylan, Mir et Zaitsev [22]

Théorème 1.2.11 ([22], Théorème 1.1). *Soient $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété CR analytique réelle minimale et $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ un ensemble algébrique réel passant respectivement par $p \in \mathbb{C}^N$ et $p' \in \mathbb{C}^{N'}$. Pour toute application formelle holomorphe $H : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ qui envoie M dans M' et tout entier positif k , il existe un germe d'application holomorphe $H^k : (\mathbb{C}^N, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{N'}, p')$ qui envoie M dans M' et dont le développement de Taylor en p coïncide avec H jusqu'à l'ordre k .*

Dans le présent travail, nous allons établir deux nouveaux résultats à la Artin. Le premier (Théorème 1.2.12) concerne des hypersurfaces situées dans des espaces complexes de même dimension et se déduit de la convergence de la fonction de réflexion (Théorème 2.2.1). Le second (Théorème 1.2.13) est, quant à lui, valable dans le cas où les dimensions sont différentes.

Théorème 1.2.12. *Soient (M, p) , (M', p') deux germes d'hypersurfaces analytiques réelles et $H : (\mathbb{C}^{n+1}, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, p')$ une application formelle holomorphe qui envoie M dans M' . Supposons que $\text{Jac}H \neq 0$ et que M soit minimale en p . Alors pour tout entier positif k , il existe un germe d'application holomorphe $H^k : (\mathbb{C}^{n+1}, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, p')$ qui envoie M dans M' et dont le développement de Taylor en p coïncide avec H jusqu'à l'ordre k .*

Le Théorème 1.2.12 généralise, pour des hypersurfaces, un résultat similaire de [8] obtenu pour la classe plus restrictive des applications finies qui est lui-même une conséquence du Théorème 1.2.10. La démonstration consiste en une application appropriée du théorème d'approximation de Artin [1] que l'on combine avec un argument de [8].

Au cours du chapitre 3, nous établirons le résultat à la Artin suivant, pour des applications CR lisses entre des sous-variétés de dimension quelconque.

Théorème 1.2.13. *Soient $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété CR analytique réelle connexe minimale en un point, $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ un sous-ensemble analytique réel et $H: M \rightarrow M'$ une application CR \mathcal{C}^∞ . Alors, il existe un ouvert dense $\mathcal{O} \subset M$ tel que pour tout $q \in \mathcal{O}$ et tout entier positif k , il existe un germe en q d'application CR analytique réelle $H^k: (M, q) \rightarrow M'$ dont le jet d'ordre k en q coïncide avec celui de H .*

A la connaissance de l'auteur, le Théorème 1.2.13 est le premier résultat de ce type pour des applications de codimension positive entre des sous-variétés analytiques réelles quelconques. Quand l'ensemble d'arrivée est algébrique réel au lieu de analytique réel, le Théorème 1.2.13 est une conséquence du travail de Meylan, Mir et Zaitsev [22] (voir Théorème 1.2.11).

On remarque que le Théorème 1.2.13 est nouveau même dans le cas où $N = N'$ puisqu'il n'y a aucune condition de rang sur l'application que l'on considère, contrairement aux Théorèmes 1.2.10 et 1.2.9. Néanmoins, on ne sait pas si l'ouvert dense $\mathcal{O} \subset M$ peut être choisi indépendamment de l'application H et s'il s'agit d'un ouvert de Zariski. Quand M' est algébrique réelle, un tel choix est possible d'après le résultat principal de [22] (Théorème 1.2.11).

Nous fournirons une preuve assez élémentaire et auto-contenue du Théorème 1.2.13. Pour cela, on utilisera certaines idées du travail de Damour [12].

Chapitre 2

Applications formelles de rang générique maximal

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la Section 2.1, on définit le cadre dans lequel on va travailler, on montre ensuite seront utilisés ultérieurement. La Section 2.2 est dédiée à la preuve de la convergence de la fonction de réflexion quand la sous-variété source est une hypersurface minimale. La Section 2.3 contient les preuves des Théorèmes 1.2.4 et 1.2.6. Pour terminer, on prouve le Théorème 1.2.12.

2.1 Préliminaires

Soient (M, p) et (M', p') deux germes de sous-variétés génériques analytiques réelles de codimension d dans \mathbb{C}^N de même dimension CR n . Sans perte de généralité, on peut supposer que $p = p' = 0$ et que M (respectivement M') est donnée par $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ (respectivement $(z', w') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$) des coordonnées normales au voisinage de 0 associées à une application $Q \in (\mathbb{C}\{z, \chi, \tau\})^d$ (respectivement $Q' \in (\mathbb{C}\{z', \chi', \tau'\})^d$). Nous aurons besoin pour utiliser le critère de Stanton du développement de Taylor suivant

$$Q'(z', \chi', \tau') = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} Q'_\alpha(\chi', \tau') z'^\alpha. \quad (2.1)$$

Soit $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, 0)$ une application formelle holomorphe qui envoie M dans M' . On écrit $H(z, w) = (F(z, w), G(z, w))$ où F et G sont respectivement à valeurs dans \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^d . En coordonnées normales, le fait que

H envoie M dans M' se traduit par l'identité entre séries formelles suivante :

$$Q'(F(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) = G(z, Q(z, \chi, \tau)). \quad (2.2)$$

On suppose dans ce qui suit que $H = (F, G)$ vérifie $\text{Jac}H \neq 0$.

De considérations algébriques élémentaires et de (2.2), on déduit le fait suivant

Lemme 2.1.1. *Dans la situation précédente, la condition $\text{Jac}H \neq 0$ implique*

$$\det \frac{\partial}{\partial z} \left(F(z, Q(z, \chi, \tau)) \right) \neq 0. \quad (2.3)$$

Démonstration. Tout d'abord, en dérivant l'expression $F(z, Q(z, \chi, \tau))$ par rapport à z , on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(F(z, Q(z, \chi, \tau)) \right) = \frac{\partial F}{\partial z} (z, Q(z, \chi, \tau)) + \frac{\partial F}{\partial w} (z, Q(z, \chi, \tau)) \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} (z, \chi, \tau). \quad (2.4)$$

De même,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(G(z, Q(z, \chi, \tau)) \right) = \frac{\partial G}{\partial z} (z, Q(z, \chi, \tau)) + \frac{\partial G}{\partial w} (z, Q(z, \chi, \tau)) \cdot \frac{\partial Q}{\partial z} (z, \chi, \tau). \quad (2.5)$$

Ce qui équivaut, en notation matricielle, à

$$\frac{\partial H}{\partial(z, w)} (z, Q(z, \chi, \tau)) \cdot \begin{pmatrix} I_n \\ \frac{\partial Q}{\partial z} (z, \chi, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (F(z, Q(z, \chi, \tau))) \\ \frac{\partial}{\partial z} (G(z, Q(z, \chi, \tau))) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

D'autre part, après dérivation de (2.2) par rapport à la variable z , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q'}{\partial z'} (F(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (F(z, Q(z, \chi, \tau))) \\ = \frac{\partial}{\partial z} (G(z, Q(z, \chi, \tau))) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial(z, w)} (z, Q(z, \chi, \tau)) \cdot \begin{pmatrix} I_n \\ \frac{\partial Q}{\partial z} (z, \chi, \tau) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (F(z, Q(z, \chi, \tau))) \\ \frac{\partial Q'}{\partial z'} (F(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (F(z, Q(z, \chi, \tau))) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Or, par hypothèse, $\text{Jac}H \neq 0$ et l'application Q vérifie (1.3). $\frac{\partial H}{\partial(z,w)}(z, Q(z, \chi, \tau))$ est donc de rang $n+d$ en tant que matrice à coefficient dans le corps des fractions de $\mathbb{C}[[z, \chi, \tau]]$. Par conséquent, la matrice qui apparaît dans le membre de droite de l'égalité (2.8) est aussi de rang générique n . Ceci est possible si et seulement si $\frac{\partial}{\partial z}(F(z, Q(z, \chi, \tau)))$ est de rang générique n . Ce qui montre le lemme. \square

On va avoir besoin du lemme suivant qui peut être trouvé dans [19] et dont la preuve est principalement basée sur des dérivations appropriées de l'identité (2.2).

Lemme 2.1.2 ([19], Proposition 5.2). *Dans la situation précédente, il existe $\eta_0 \in \mathbb{N}^n$ et $\delta_0 \in \mathbb{N}^d$ tels que, pour $p_0 = |\eta_0| + |\delta_0|$*

$$\frac{\partial^{|\eta'|+|\delta'|}}{\partial z^{\eta'} \partial \tau^{\delta'}} \Big|_{\substack{z=0 \\ \tau=0}} \det \frac{\partial}{\partial z} (F(z, Q(z, \chi, \tau))) \equiv 0, \text{ pour } |\eta'| + |\delta'| < p_0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^{|\eta_0|+|\delta_0|}}{\partial z^{\eta_0} \partial \tau^{\delta_0}} \Big|_{\substack{z=0 \\ \tau=0}} \det \frac{\partial}{\partial z} (F(z, Q(z, \chi, \tau))) \neq 0 \quad (2.10)$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, tels que $|\alpha| + |\beta| > 0$ il existe des polynômes universels en leurs arguments $R_{\alpha, \beta, \eta_0, \delta_0}$ vérifiant, pour tout $r \in \{1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \tau^\beta} \Big|_{\tau=0} Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau)) \\ &= \frac{R_{\alpha, \beta, \eta_0, \delta_0} \left(\left(\frac{\partial^{|\eta|+|\delta|}}{\partial z^\eta \partial \tau^\delta} \Big|_{\substack{z=0 \\ \tau=0}} H^{(r)}(z, Q(z, \chi, \tau)) \right)_{|\eta|+|\delta| \leq (|\alpha|+|\beta|)(p_0+1)} \right)}{\left(\frac{\partial^{|\eta_0|+|\delta_0|}}{\partial z^{\eta_0} \partial \tau^{\delta_0}} \Big|_{\substack{z=0 \\ \tau=0}} \det \frac{\partial}{\partial z} (F(z, Q(z, \chi, \tau))) \right)^{2(|\alpha|+|\beta|)-1}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où Q'_α est la r -ième composante de Q'_α , et $H^{(r)}(z, w) := (F(z, w), G^r(z, w))$ avec G^r la r -ième composante de $G = (G^1, \dots, G^d)$.

Le Lemme 2.1.2 est utile pour montrer le lemme de convergence suivant.

Lemme 2.1.3. *Dans la situation précédente, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$, $\frac{\partial^{|\gamma|+|\beta|}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \Big|_{\tau=0} Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau))$ converge.*

Démonstration. On fixe $\gamma \in \mathbb{N}^n$. Pour $|\alpha| = |\beta| = 0$, en posant $z = 0$, $\tau = 0$ dans l'équation (2.2), on obtient, grâce à (1.3), $Q'(0, \bar{H}(\chi, 0)) = G(0)$. On déduit alors du développement de Taylor de Q' , donné par (2.1), que $Q'_0(\bar{H}(\chi, 0))$ est constante.

Pour $|\alpha| + |\beta| > 0$, on va montrer que chaque composante de l'application formelle $\left. \frac{\partial^{|\gamma|+|\beta|}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \right|_{\tau=0} Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau))$ converge. Pour cela, on applique $\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \chi^\gamma}$ à l'expression (2.11) et on obtient que $\left. \frac{\partial^{|\gamma|+|\beta|}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \right|_{\tau=0} Q''_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau))$ est un quotient de deux séries entières formelles. Le numérateur et le dénominateur de ce quotient sont des polynômes en les dérivées de Q qui est une série convergente et en les dérivées de H au point $(0, Q(0, \chi, 0)) = 0$. Ainsi $\left. \frac{\partial^{|\gamma|+|\beta|}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \right|_{\tau=0} Q''_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau))$ est un quotient de deux séries entières convergentes dont le dénominateur n'est pas identiquement nul. D'autre part, on sait que $\left. \frac{\partial^{|\gamma|+|\beta|}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \right|_{\tau=0} Q''_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau))$ est également une série entière formelle, elle est donc convergente. \square

2.2 Convergence de la fonction de réflexion dans le cas de la codimension 1

Dans cette section, on établit un résultat de convergence pour l'application dite de réflexion associée à une application formelle holomorphe de jacobien non identiquement nul entre des hypersurfaces minimales analytiques réelles. On conserve les notations de la Section 2.1 avec $d = 1$ et on utilise toujours les coordonnées normales.

Soit \mathcal{R} l'application formelle holomorphe appelée *fonction de réflexion* définie par

$$\mathcal{R}(z', \chi, \tau) := Q'(z', \bar{H}(\chi, \tau)), \quad (2.12)$$

où $(z, \chi, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Cette fonction doit son nom au fait qu'il s'agit d'un outil pratique pour établir certaines versions du principe de réflexion en analyse complexe à plusieurs variables. Elle a d'abord été introduite par Baouendi, Jacobowitz et Trèves en 1985 dans [7], cependant l'expression *fonction de réflexion* est due à Huang qui l'a nommée ainsi en 1996 dans [16]. Dans cette section notre but est de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Soient M, M' deux hypersurfaces analytiques réelles dans \mathbb{C}^{n+1} passant par 0 et $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ une application formelle holomorphe qui envoie M dans M' vérifiant $\text{Jac}H \neq 0$. Si M est minimale en 0 alors la fonction de réflexion associée \mathcal{R} donnée par (2.12) est une série entière convergente.*

Pour prouver ce théorème, nous allons suivre les différentes étapes de [25]. D'abord, on établit le résultat suivant.

Proposition 2.2.2. *Soient M, M' deux hypersurfaces analytiques réelles dans \mathbb{C}^{n+1} passant par 0 et $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ une application formelle holomorphe qui envoie M dans M' . Si $\text{Jac}H \neq 0$, alors pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}$, l'application formelle holomorphe*

$$(z', \chi) \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, 0) \mapsto \frac{\partial^{|\gamma|+\beta}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \Big|_{\tau=0} \mathcal{R}(z', \chi, \tau)$$

est convergente.

La preuve de cette proposition va utiliser le lemme de convergence suivant dont la preuve peut être trouvée dans [25] que l'on joint par souci de complétude.

Lemme 2.2.3 ([25], Lemme 4.1). *Soit $(u_i(t))_{i \in I}$ une famille de séries entières convergentes dans $\mathbb{C}\{t\}$ avec $t = (t_1, \dots, t_q)$, $q \in \mathbb{N}^*$. On considère $(\mathcal{K}_i(\zeta))_{i \in I}$ une famille de séries entières convergentes dans $\mathbb{C}\{\zeta\}$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_r)$, $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que*

1. *Il existe $R > 0$ tel que le rayon de convergence de chaque \mathcal{K}_i , $i \in I$, est supérieur à R*
2. *Pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^r$ vérifiant $|\zeta| < R$, on a $|\mathcal{K}_i(\zeta)| \leq C_i$ où $C_i > 0$*
3. *Il existe $V(t) \in (\mathbb{C}[[t]])^r$, $V(0) = 0$, tel que $\mathcal{K}_i \circ V(t) = u_i(t)$ pour tout $i \in I$.*

Alors, il existe $R' > 0$ tel que le rayon de convergence de chaque u_i , $i \in I$, est supérieur à R' et tel que, pour tout $t \in \mathbb{C}^q$ vérifiant $|t| < R'$, on a $|u_i(t)| \leq C_i$.

Démonstration. Par hypothèse, $(\mathcal{K}_i(\zeta) - u_i(t))_{i \in I}$ est une famille de séries entières convergentes et V est une application formelle vérifiant $V(0) = 0$ et $\mathcal{K}_i(V(t)) - u_i(t) = 0$ pour tout $i \in I$. Le théorème de Artin implique alors qu'il existe une solution convergente \mathcal{V} à ce système d'équations tel que

$\mathcal{V}(0) = 0$. Fixons R' inférieur au rayon de convergence de \mathcal{V} et tel que, pour $|t| < R'$, $|\mathcal{V}(t)| < R$. Alors, puisque chaque \mathcal{K}_i est de rayon de convergence supérieur à R , chaque $u_i = \mathcal{K}_i \circ \mathcal{V}(t)$ est de rayon de convergence supérieur à R' . De plus grâce à l'hypothèse 2, pour tout $|t| < R'$, on a $|u_i(t)| \leq C_i$. \square

Montrons maintenant la Proposition 2.2.2.

Démonstration de la Proposition 2.2.2. D'abord, on va prouver le résultat dans le cas $\beta = |\gamma| = 0$. Pour montrer que $\mathcal{R}(z', \chi, 0)$ est convergente, on rappelle que

$$\mathcal{R}(z', \chi, 0) = Q'(z', \bar{H}(\chi, 0)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, 0)) z'^\alpha. \quad (2.13)$$

On voit donc, comme dans la démonstration de la Proposition 5.1 de [25], qu'il suffit de trouver des constantes positives r et R_0 telles que le rayon de convergence de chaque élément de la famille $(Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, 0)))_\alpha$ est supérieur à r et telles que pour tout χ de norme inférieure à r et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$|Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, 0))| \leq R_0^{|\alpha|+1}. \quad (2.14)$$

Ceci est possible en utilisant la propriété suivante qui provient de l'holomorphicité de Q' : il existe r_1 et R des constantes positives telles que, pour tout $\alpha, \mu \in \mathbb{N}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$ et pour tout $(\chi', \tau') \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant $|(\chi', \tau')| < r_1$, on a

$$\left| \frac{\partial^{|\mu|+\nu} Q'_\alpha}{\partial \chi'^\mu \partial \tau'^\nu}(\chi', \tau') \right| \leq (\mu, \nu)! R^{|\alpha|+|\mu|+\nu+1}, \quad (2.15)$$

où (μ, ν) est la concaténation de μ et de ν .

Par conséquent, on peut appliquer le Lemme 2.2.3 pour prouver (2.14). En effet,

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $Q'_\alpha(\chi', \tau')$ converge et son rayon de convergence est supérieur à r_1 ,
- en choisissant $\nu = |\mu| = 0$ dans (2.15), on obtient que pour tout $(\chi', \tau') \in \mathbb{C}^{n+1}$, vérifiant $|(\chi', \tau')| < r_1$, on a $|Q'_\alpha(\chi', \tau')| \leq R^{|\alpha|+1}$,
- $Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, 0))$ converge grâce au Lemme 2.1.3.

La preuve dans le cas $\beta = |\gamma| = 0$ est donc achevée puisque (2.14) est valable avec $R_0 = R$.

On utilise maintenant la même méthode pour montrer la proposition dans le cas général. On fixe $\gamma \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}$ tels que $\beta + |\gamma| > 0$. Si on écrit le développement de Taylor de \mathcal{R} en z' ,

$$\mathcal{R}(z', \chi, \tau) = Q'(z', \bar{H}(\chi, \tau)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau)) z'^\alpha, \quad (2.16)$$

on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\gamma|+\beta} \mathcal{R}}{\partial z'^\alpha \partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta}(z', \chi, \tau) = \frac{\partial^{|\gamma|+\beta}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} Q'}{\partial z'^\alpha}(z', \bar{H}(\chi, \tau)) \right). \quad (2.17)$$

Il suffit donc, pour montrer la convergence de $\frac{\partial^{|\gamma|+\beta}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \Big|_{\tau=0} \mathcal{R}(z', \chi, \tau)$, de montrer que la famille définie par

$$\psi_\alpha^{\beta, \gamma}(\chi) := \frac{\partial^{|\alpha|+|\gamma|+\beta} \mathcal{R}}{\partial z'^\alpha \partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta}(0, \chi, 0) = \alpha! \frac{\partial^{|\gamma|+\beta}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \Big|_{\tau=0} Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau)) \quad (2.18)$$

vérifie les conditions suivantes : on peut trouver $r_{\beta, \gamma} > 0$ et $R_{\beta, \gamma} > 0$ tels que le rayon de convergence de chaque élément de la famille $(\psi_\alpha^{\beta, \gamma})_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ est supérieur à $r_{\beta, \gamma}$ et tels que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\chi \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $|\chi| < r_{\beta, \gamma}$, on a l'estimation suivante

$$|\psi_\alpha^{\beta, \gamma}(\chi)| \leq \alpha! R_{\beta, \gamma}^{|\alpha|+1}. \quad (2.19)$$

Montrons (2.19) en utilisant le Lemme 2.2.3. Pour cela, on fixe $\alpha \in \mathbb{N}^n$. De (2.18) et du Lemme 2.1.3, on déduit que $\psi_\alpha^{\beta, \gamma}(\chi)$ converge. Ensuite, pour tout multi-indice $\mu \in \mathbb{N}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $|\mu| \leq |\gamma|$, $\nu \leq \beta$, on remarque qu'il existe un polynôme universel $P_{\nu, \mu}^{\beta, \gamma}$ tel que

$$\psi_\alpha^{\beta, \gamma}(\chi) = \alpha! \sum_{\substack{|\mu| \leq |\gamma| \\ \nu \leq \beta}} P_{\nu, \mu}^{\beta, \gamma} \left(\left(\frac{\partial^{|\delta|+\eta} \bar{H}}{\partial \chi^\delta \partial \tau^\eta}(\chi, 0) \right)_{\substack{1 \leq |\delta| \leq |\gamma| \\ 1 \leq \eta \leq \beta}} \right) \frac{\partial^{|\mu|+\nu} Q'_\alpha}{\partial \chi^\mu \partial \tau^\nu}(\bar{H}(\chi, 0)). \quad (2.20)$$

La série entière $h_\alpha^{\beta, \gamma}$ en les variables $\left((\Lambda_{\delta, \eta})_{\substack{1 \leq |\delta| \leq |\gamma| \\ 1 \leq \eta \leq \beta}}, \chi', \tau' \right) \in \mathbb{C}^{N_{\beta, \gamma}} \times \mathbb{C}^{n+1}$

où $N_{\beta,\gamma} = (n+1)\text{Card}\{(\delta,\eta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}, 1 \leq |\delta| \leq |\gamma|, 1 \leq \eta \leq \beta\}$, définie par

$$\begin{aligned} & h_{\alpha}^{\beta,\gamma} \left((\Lambda_{\delta,\eta})_{\substack{1 \leq |\delta| \leq |\gamma| \\ 1 \leq \eta \leq \beta}}, \chi', \tau' \right) \\ & := \alpha! \sum_{\substack{|\mu| \leq |\gamma| \\ \nu \leq \beta}} P_{\nu,\mu}^{\beta,\gamma} \left(\left(\Lambda_{\delta,\eta} + \frac{\partial^{|\delta|+\eta} \bar{H}}{\partial \chi^{\delta} \partial \tau^{\eta}}(0) \right)_{\substack{1 \leq |\delta| \leq |\gamma| \\ 1 \leq \eta \leq \beta}} \right) \frac{\partial^{|\mu|+\nu} Q'_{\alpha}}{\partial \chi^{\mu} \partial \tau^{\nu}}(\chi', \tau') \end{aligned} \quad (2.21)$$

est alors clairement convergente. A partir de cette définition et de (2.15), on observe qu'il existe une constante $R_{\beta,\gamma}$ telle que, pour $(\Lambda_{\delta,\eta})_{\substack{1 \leq |\delta| \leq |\gamma| \\ 1 \leq \eta \leq \beta}}$ de norme inférieure à 1 dans $\mathbb{C}^{N_{\beta,\gamma}}$ et (χ', τ') de norme inférieure à r dans \mathbb{C}^{n+d} , on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\left| h_{\alpha}^{\beta,\gamma} \left((\Lambda_{\delta,\eta})_{\substack{1 \leq |\delta| \leq |\gamma| \\ 1 \leq \eta \leq \beta}}, \chi', \tau' \right) \right| \leq \alpha! R_{\beta,\gamma}^{|\alpha|+1}. \quad (2.22)$$

Donc, en utilisant le fait que

$$h_{\alpha}^{\beta,\gamma} \left(\left(\frac{\partial^{|\delta|+\eta} \bar{H}}{\partial \chi^{\delta} \partial \tau^{\eta}}(\chi, 0) - \frac{\partial^{|\delta|+\eta} \bar{H}}{\partial \chi^{\delta} \partial \tau^{\eta}}(0) \right)_{\substack{1 \leq |\delta| \leq |\gamma| \\ 1 \leq \eta \leq \beta}}, \bar{H}(\chi, 0) \right) = \psi_{\alpha}^{\beta,\gamma}(\chi) \quad (2.23)$$

et le Lemme 2.2.3, on obtient les estimations (2.19). Ce qui achève la démonstration de la Proposition 2.2.2 \square

On va maintenant avoir besoin du lemme et de la proposition suivante. Le lemme est une conséquence du théorème d'approximation de Artin [1] et on donne une démonstration similaire à celle que l'on peut trouver dans [25]. La proposition est, quant à elle, un corollaire des résultats établis par Gabrielov dans [15]. Elle est également démontrée dans [10].

Lemme 2.2.4 ([25], Lemme 6.1). *Soit $\mathcal{T}(x, u) \in (\mathbb{C}[[x, u]])^r$, $x \in \mathbb{C}^q$, $u \in \mathbb{C}^s$ tel que $\mathcal{T}(0) = 0$. Supposons que $\mathcal{T}(x, u)$ vérifie une identité dans l'anneau $\mathbb{C}[[x, u, y]]$, $y \in \mathbb{C}^q$, de la forme*

$$\varphi(\mathcal{T}(x, u); x, u, y) = 0$$

où $\varphi \in \mathbb{C}[[W, x, u, y]]$ avec $W \in \mathbb{C}^r$. Supposons, d'autre part, que pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^q$, la série entière formelle $\left[\frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial y^{\beta}}(W; x, u, y) \right]_{y=x}$ converge.

Alors pour tout entier positif k , il existe un r -uplet de séries entières convergentes $\mathcal{T}^k(x, u)$ tel que $\varphi(\mathcal{T}^k(x, u); x, y, u) = 0$ dans $\mathbb{C}[[x, u, y]]$ et tel que $\mathcal{T}^k(x, u)$ coïncide avec $\mathcal{T}(x, u)$ en 0 jusqu'à ordre k .

Démonstration. Puisque $\mathcal{T}(x, u)$ vérifie $\varphi(\mathcal{T}(x, u); x, u, y) = 0$, cette application est une solution formelle du système d'équation en W ,

$$\left(\left[\frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial y^\beta} (W; x, u, y) \right]_{y=x} \right)_{\beta \in \mathbb{N}^q} = 0.$$

Par le théorème de Artin, pour tout entier positif k , on peut trouver une série entière convergente $\mathcal{T}^k(x, u)$ qui coïncide avec $\mathcal{T}(x, u)$ en 0 jusqu'à l'ordre k telle que

$$\left(\left[\frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial y^\beta} (\mathcal{T}^k(x, u); x, u, y) \right]_{y=x} \right)_{\beta \in \mathbb{N}^q} = 0.$$

Cette dernière identité équivaut à $\varphi(\mathcal{T}^k(x, u); x, u, y) = 0$. Ce qui montre le lemme. \square

Proposition 2.2.5. *Soient $\mathcal{J}(x) \in (\mathbb{C}\{x\})^r$, $x \in \mathbb{C}^k$, $k, r \geq 1$ avec $\mathcal{J}(0) = 0$ et $\mathcal{V}(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, $t \in \mathbb{C}^r$. Si $\mathcal{V} \circ \mathcal{J}$ converge et si le rang générique de \mathcal{J} est égal à r , alors \mathcal{V} converge aussi.*

On aura aussi besoin des applications de Segre pour l'hypersurface M , uniquement les trois premières pour cette section, dont on rappelle les définitions :

$$\begin{aligned} v_1 : z \in (\mathbb{C}^n, 0) &\mapsto (z, 0), \\ v_2 : (z, \xi) \in (\mathbb{C}^{2n}, 0) &\mapsto (z, Q(z, \xi, 0)), \\ v_3 : (z, \xi, \zeta) \in (\mathbb{C}^{3n}, 0) &\mapsto (z, Q(z, \xi, \bar{Q}(\xi, \zeta, 0))). \end{aligned} \tag{2.24}$$

La condition de minimalité de M dans le Théorème 2.2.1 nous permet d'affirmer que le rang générique de v_2 (et de v_3) est $n + 1$. En effet, la matrice jacobienne de v_2 n'est autre que

$$\left(\begin{array}{cc} I_n & 0_{n,n} \\ \frac{\partial Q}{\partial z}(z, \xi, 0) & \frac{\partial Q}{\partial \chi}(z, \xi, 0) \end{array} \right). \tag{2.25}$$

Pour prouver l'assertion souhaitée, il suffit donc de montrer que le vecteur $\frac{\partial Q}{\partial \chi}(z, \xi, 0)$ est non identiquement nul. Raisonnons par l'absurde en supposant

que ce vecteur est nul. On obtient alors que $Q(z, \chi, 0) = Q(z, 0, 0)$. Comme cette dernière fonction est nulle par (1.3), on remarque en utilisant (1.2) que, la sous-variété M contient, au voisinage de 0, un morceau de la sous-variété $\{(z, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}\}$. Ceci est contradictoire avec la minimalité de M en 0.

Démonstration du Théorème 2.2.1. En posant $\tau = \bar{Q}(\chi, z, Q(z, \xi, 0))$ dans (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} Q'(F(z, Q(z, \chi, \bar{Q}(\chi, z, Q(z, \xi, 0))))), \bar{H}(\chi, \bar{Q}(\chi, z, Q(z, \xi, 0))) \\ = G(z, Q(z, \chi, \bar{Q}(\chi, z, Q(z, \xi, 0))))). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ce qui donne en utilisant (1.4),

$$Q'(F(z, Q(z, \xi, 0))), \bar{H}(\chi, \bar{Q}(\chi, z, Q(z, \xi, 0))) = G(z, Q(z, \xi, 0)), \quad (2.27)$$

c'est à dire

$$Q'(F \circ v_2(z, \xi), \bar{H} \circ \bar{v}_3(\chi, z, \xi)) = G \circ v_2(z, \xi). \quad (2.28)$$

Cela signifie que \mathcal{R} satisfait l'équation suivante

$$\mathcal{R}(F \circ v_2(z, \xi), \bar{v}_3(\chi, z, \xi)) - G \circ v_2(z, \xi) \equiv 0. \quad (2.29)$$

On souhaite maintenant appliquer le Lemme 2.2.4 à l'équation (2.29) avec $x = \xi$, $u = z$, $y = \chi$, $\mathcal{T}(x, u) = H \circ v_2(z, \xi) = (F \circ v_2(z, \xi), G \circ v_2(z, \xi))$, $W = (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ et

$$\varphi((\lambda, \mu); \xi, z, \chi) = \mathcal{R}(\lambda, \bar{v}_3(\chi, z, \xi)) - \mu.$$

Pour cela, il faut vérifier la convergence de toutes les dérivées de φ par rapport à χ évaluées en $\chi = \xi$. Cependant, ces dérivées mettent en jeu uniquement des dérivées de v_3 qui sont convergentes et des expressions de la forme $\frac{\partial^{|\gamma|+|\beta|}}{\partial \chi^\gamma \partial \tau^\beta} \mathcal{R}(\lambda, \bar{v}_3(\chi, z, \xi))|_{\chi=\xi}$. Or, par l'identité (1.4), on a $v_3(\xi, z, \xi) = v_1(\xi) = (\xi, 0)$, donc la Proposition 2.2.2 nous permet d'appliquer le Lemme 2.2.4. Par conséquent, pour tout entier positif k , il existe $\mathcal{T}^k(z, \xi) = (\mathcal{T}'^k(z, \xi), \mathcal{T}_{n+1}^k(z, \xi))$ une série entière convergente qui coïncide en 0 avec $H \circ v_2(z, \xi)$ jusqu'à l'ordre k et telle que

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}'^k(z, \xi), \bar{v}_3(\chi, z, \xi)) \equiv \mathcal{T}_{n+1}^k(z, \xi).$$

Pour montrer que \mathcal{R} est convergente il suffit, en utilisant la Proposition 2.2.5, de montrer que, pour k bien choisi, l'application $(z, \chi, \xi) \in \mathbb{C}^{3n} \mapsto (\mathcal{T}'^k(z, \xi), \bar{v}_3(\chi, z, \xi)) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ est de rang générique $2n + 1$.

Grâce aux assertions suivantes :

1. $(z, \chi, \xi) \in \mathbb{C}^{3n} \mapsto (v_2(z, \xi), \bar{v}_3(\chi, z, \xi)) \in \mathcal{M}$ est de rang générique $2n+1$ car M est minimale
2. $(z, w, \chi, \tau) \in \mathcal{M} \mapsto (F(z, w), \chi, \tau)$ est de rang générique $2n+1$ car F est de rang générique n ;

on déduit que $(z, \chi, \xi) \mapsto (F(v_2(z, \xi)), \bar{v}_3(\chi, z, \xi))$ est de rang générique $2n+1$ dans $(\mathbb{C}[[z, \chi, \xi]])^{2n+1}$. Mais $\mathcal{T}^k(z, \xi)$ et $H \circ v_2(z, \xi)$ coïncident en 0 jusqu'à l'ordre k , donc pour k assez grand, le rang générique de $(\mathcal{T}^k(z, \xi), \bar{v}_3(\chi, z, \xi))$ est $2n+1$. Ceci complète la preuve du Théorème 2.2.1. \square

2.3 Convergence en codimension supérieure

Le but de cette section est de montrer le Théorème 1.2.4. Les arguments utilisés pour obtenir ce résultat sont inspirés par des résultats analogues pour le problème de détermination par un nombre fini de jets qui figurent dans [19].

2.3.1 Un lemme de convergence

Dans ce paragraphe, on va énoncer puis démontrer un lemme inspiré de [19].

Lemme 2.3.1. *Soient $P(x, Y) \in (\mathbb{C}\{x, Y\})^N$, $x \in \mathbb{C}^{n_1}$, $Y \in \mathbb{C}^N$, et $\varphi_0(x, t) \in (\mathbb{C}[[x, t]])^N$, $\varphi_0(0) = 0$, $t \in \mathbb{C}^d$ tels que*

$$\det \frac{\partial P}{\partial Y}(x, \varphi_0(x, t)) \neq 0.$$

Supposons que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ $\left. \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} P(x, \varphi_0(x, t)) \right|_{t=0}$ soit une série entière convergente, alors pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \varphi_0(x, 0)$ est aussi une série entière convergente.

La démonstration de ce résultat va nécessiter la proposition suivante issue de [19].

Proposition 2.3.2 ([19], Proposition 3.1). *Soient $P(x, Y) \in (\mathbb{C}[[x, Y]])^N$, $x \in \mathbb{C}^{n_1}$, $Y \in \mathbb{C}^N$, et $\varphi_0(x, t) \in (\mathbb{C}[[x, t]])^N$, $\varphi_0(0) = 0$, $t \in \mathbb{C}^d$ tels que*

$$\det \frac{\partial P}{\partial Y}(x, \varphi_0(x, t)) \neq 0. \quad (2.30)$$

Soient $\alpha_0 \in \mathbb{N}^{n_1}$, $\beta_0 \in \mathbb{N}^d$ tels que

$$\frac{\partial^{|\alpha_0|+|\beta_0|}}{\partial x^{\alpha_0} \partial t^{\beta_0}} \Big|_{\substack{x=0 \\ t=0}} \det \frac{\partial P}{\partial Y}(x, \varphi_0(x, t)) \neq 0. \quad (2.31)$$

Alors, pour toute série entière $\varphi(x, t)$ vérifiant

1. pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{n_1} \times \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| \leq |\alpha_0|$ et $|\beta| \leq |\beta_0|$: $\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \varphi}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(0) = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \varphi_0}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(0)$,

2. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} P(x, \varphi(x, t)) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} P(x, \varphi_0(x, t))$,
pour $|\beta| \leq |\beta_0| + k$,

on a, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $|\beta| \leq k$,

$$\frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial t^\beta}(x, 0) = \frac{\partial^{|\beta|} \varphi_0}{\partial t^\beta}(x, 0). \quad (2.32)$$

Démonstration du Lemme 2.3.1. Pour $\beta \in \mathbb{N}^d$ fixé, on note

$$P_\beta(x) := \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} P(x, \varphi_0(x, t)) \in (\mathbb{C}\{x\})^N.$$

En utilisant la règle de la chaîne, on remarque qu'il existe une matrice universelle à coefficients polynomiaux $\left(A_{\nu, \beta} \left((\Lambda_\mu)_{1 \leq |\mu| \leq |\beta|} \right) \right)_{|\nu| \leq |\beta|}$ où $(\Lambda_\mu)_{1 \leq |\mu| \leq |\beta|} \in \mathbb{C}^{N_\beta}$ et $N_\beta = (n+d) \text{Card}\{\mu \in \mathbb{N}^d, 1 \leq |\mu| \leq |\beta|\}$ telle que :

$$P_\beta(x) = \sum_{|\nu| \leq |\beta|} \frac{\partial^{|\nu|} P}{\partial Y^\nu}(x, \varphi_0(x, 0)) \cdot A_{\nu, \beta} \left(\left(\frac{\partial^{|\mu|} \varphi_0}{\partial t^\mu}(x, 0) \right)_{1 \leq |\mu| \leq |\beta|} \right). \quad (2.33)$$

On définit alors des séries entières convergentes en posant

$$h_\beta((\Lambda_\mu)_{0 \leq |\mu| \leq |\beta|}, x) := \sum_{|\nu| \leq |\beta|} \frac{\partial^{|\nu|} P}{\partial Y^\nu}(x, \Lambda_0) \cdot A_{\nu, \beta} \left((\Lambda_\mu)_{1 \leq |\mu| \leq |\beta|} \right) \quad (2.34)$$

et

$$R_\beta((\Lambda_\mu)_{0 \leq |\mu| \leq |\beta|}, x) := h_\beta((\Lambda_\mu)_{0 \leq |\mu| \leq |\beta|}, x) - P_\beta(x). \quad (2.35)$$

On fixe maintenant $L \in \mathbb{N}$ et on considère

$$R \left((\Lambda_\mu)_{0 \leq |\mu| \leq L}, x \right) := \left(R_\beta((\Lambda_\mu)_{0 \leq |\mu| \leq |\beta|}, x) \right)_{0 \leq |\beta| \leq L}. \quad (2.36)$$

Par définition, R est une série entière convergente et vérifie

$$R \left(\left(\frac{\partial^{|\mu|} \varphi_0}{\partial t^\mu}(x, 0) \right)_{0 \leq |\mu| \leq L}, x \right) \equiv 0. \quad (2.37)$$

On obtient ainsi, par le théorème d'approximation de Artin [1], que pour tout entier positif k , il existe une application convergente $\left(\varphi_K^{\mu, L}(x) \right)_{0 \leq |\mu| \leq L} \in (\mathbb{C}\{x\})^{N_L}$ où $N_L = (n+d)\text{Card}\{\mu \in \mathbb{N}^d, |\mu| \leq L\}$, qui coïncide avec la série formelle $\left(\frac{\partial^{|\mu|} \varphi_0}{\partial t^\mu}(x, 0) \right)_{0 \leq |\mu| \leq L}$ en 0 jusqu'à l'ordre k et telle que

$$R \left(\left(\varphi_K^{\mu, L}(x) \right)_{0 \leq |\mu| \leq L}, x \right) = 0. \quad (2.38)$$

On définit la série entière convergente suivante $\varphi(x, t) := \sum_{|\mu| \leq L} \frac{\varphi_K^{\mu, L}(x)}{\mu!} t^\mu$. Par définition, pour tout $\mu \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\mu| \leq L$, on a $\frac{\partial^{|\mu|} \varphi}{\partial t^\mu}(x, 0) = \varphi_K^{\mu, L}(x)$. Par conséquent, pour tout $(\alpha, \mu) \in \mathbb{N}^{n_1} \times \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq K$ et $|\mu| \leq L$, on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\mu|} \varphi}{\partial x^\alpha \partial t^\mu}(0) = \frac{\partial^{|\alpha|+|\mu|} \varphi_0}{\partial x^\alpha \partial t^\mu}(0). \quad (2.39)$$

On déduit donc de (2.38) que $R \left(\left(\frac{\partial^{|\mu|} \varphi}{\partial t^\mu}(x, 0) \right)_{0 \leq |\mu| \leq L}, x \right) = 0$, ce qui équivaut à

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} P(x, \varphi(x, t)) = P_\beta(x) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} P(x, \varphi_0(x, t)), \quad (2.40)$$

pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $|\beta| \leq L$.

On souhaite maintenant appliquer la Proposition 2.3.2 avec un choix approprié de K et L . Si α_0 et β_0 sont tels qu'ils figurent dans la Proposition 2.3.2 (un tel choix est toujours possible car $\det \frac{\partial P}{\partial Y}(x, \varphi_0(x, t)) \neq 0$), on choisit $K = |\alpha_0|$ et $L = |\beta_0| + k$ pour $k > 0$ un entier fixé. Les identités (2.39) et (2.40) assurent que φ_0 et φ vérifient les hypothèses de la Proposition 2.3.2 de sorte que l'on a, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leq k$,

$$\frac{\partial^{|\beta|} \varphi_0}{\partial t^\beta}(x, 0) = \frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial t^\beta}(x, 0). \quad (2.41)$$

Or φ est une série entière convergente, donc $\frac{\partial^{|\beta|} \varphi_0}{\partial t^\beta}(x, 0)$ est convergente pour $|\beta| \leq k$. Comme ceci est valable pour tout choix de l'entier k , le Lemme 2.3.1 est démontré. \square

2.3.2 Démonstration du Théorème 1.2.4

On se place dans le contexte du Théorème 1.2.4. Soient (M, p) et (M', p') deux germes de sous-variétés génériques analytiques réelles de codimension $d \geq 1$ dans \mathbb{C}^{n+d} avec M minimale en p et M' holomorphiquement non dégénérée en p' . On considère une application formelle $H : (\mathbb{C}^{n+d}, p) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+d}, p')$ qui envoie M dans M' telle que $\text{Jac}H \neq 0$. Au cours de cette section, on utilisera les notations établies dans la Section 2.1, on travaillera en particulier dans les coordonnées normales.

Pour montrer que H est convergente, on va établir sa convergence le long des ensembles de Segre (voir la Section 1.1.3 et [4, Chapitre X]). Le résultat suivant montre la convergence le long du premier ensemble de Segre.

Proposition 2.3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2.4 et avec les notations précédentes, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\frac{\partial^{|\beta|} H}{\partial w^\beta}(z, 0)$ est convergente.*

Démonstration. Puisque M' est holomorphiquement non dégénérée, en utilisant le critère de Stanton, il est possible de choisir $\alpha^i \in \mathbb{N}^n$ et $1 \leq r_i \leq d$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\det \left(\frac{\partial Q_{\alpha^k}^{r_k}}{\partial \chi_l}(\chi', \tau') \right)_{k,l} \neq 0$. Soit $P(\chi', \tau') = (P^1(\chi', \tau'), \dots, P^{n+d}(\chi', \tau'))$ la série entière convergente définie par

$$P^k(\chi', \tau') := \begin{cases} Q_{\alpha^k}^{r_k}(\chi', \tau'), & \text{pour } 1 \leq k \leq n, \\ Q_0^{k-n}(\chi', \tau'), & \text{pour } n+1 \leq k \leq n+d. \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial Q_0'}{\partial \tau'}(\chi', \tau') = I_d$ et $\frac{\partial Q_0'}{\partial \chi'}(\chi', \tau') = 0$, on a

$$\lambda(\chi', \tau') := \det \frac{\partial P}{\partial (\chi', \tau')}(\chi', \tau') = \det \left(\frac{\partial Q_{\alpha^k}^{r_k}}{\partial \chi_l}(\chi', \tau') \right)_{k,l} \neq 0.$$

Or H est de rang générique maximal donc $\lambda(\bar{H}(\chi, \tau)) \neq 0$. De plus, grâce au Lemme 2.1.3, la série entière $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \tau^\beta} \Big|_{\tau=0} P(\bar{H}(\chi, \tau))$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$. Le Lemme 2.3.1 montre donc que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \tau^\beta} \Big|_{\tau=0} \bar{H}(\chi, \tau) = \frac{\partial^{|\beta|} H}{\partial w^\beta}(z, 0)$ est convergente. \square

La convergence de H le long des ensembles de Segre d'ordre supérieur sera prouvée en utilisant les applications de Segre et notamment les applications de Segre à paramètre définies dans la Section 1.1.3.

En posant $\tau = \bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, z^2, \dots; t)$ dans (2.2) et en utilisant (1.26), on obtient l'identité suivante, pour tout $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} Q'(F(V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; t)), \bar{H}(\bar{V}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, z^2, \dots; t))) \\ = G(V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; t)). \end{aligned} \quad (2.42)$$

On va maintenant prouver le résultat de convergence suivant

Proposition 2.3.4. *Si on se place sous les conditions du Théorème 1.2.4 et dans le contexte précédent alors pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ et tout entier $j \geq 1$, la série*

$$\left. \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \right|_{t=0} \left(H \circ V_j(\chi^1, z^1, \chi^2, z^2, \dots; t) \right) \text{ converge.}$$

Dans un premier temps, nous allons avoir besoin du résultat suivant dont la preuve est inspirée de [19].

Lemme 2.3.5. *Soient $h(Z)$ une série entière avec $Z = (z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ et $j \geq 1$ un entier fixé. Si pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$*

$$\left. \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \right|_{t=0} \left(h \circ V_j(z^1, \chi^1, \dots; t) \right) \text{ converge,}$$

alors pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^{n+d}$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\left. \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \right|_{t=0} \left(\left(\frac{\partial^{|\gamma|} h}{\partial Z^\gamma} \right) \circ V_j(z^1, \chi^1, \dots; t) \right)$ converge.

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur $|\gamma|$. Le cas $\gamma = 0$ vient directement des hypothèses du lemme. Supposons donc le résultat vrai pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^{n+d}$, $|\gamma| = l$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, et montrons le pour $\gamma' \in \mathbb{N}^{n+d}$, $|\gamma'| = l + 1$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$. On note

$$R_\gamma^j(z^1, \chi^1, \dots; t) := \left(\frac{\partial^{|\gamma|} h}{\partial Z^\gamma} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t). \quad (2.43)$$

L'hypothèse de récurrence implique que les séries $\left. \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \right|_{t=0} R_\gamma^j$ sont convergentes. En dérivant (2.43) par rapport à t , on obtient

$$\frac{\partial R_\gamma^j}{\partial t}(z^1, \chi^1, \dots; t) = \left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial w} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t) \cdot \frac{\partial U_j}{\partial t}(z^1, \chi^1, \dots; t). \quad (2.44)$$

Or on a $\frac{\partial Q}{\partial \tau}(0) = I_d$ d'où $\frac{\partial U_j}{\partial t}(0) = I_d$. Ainsi, en multipliant (2.44), par la matrice adjointe de $\frac{\partial U_j}{\partial t}(z^1, \chi^1, \dots; t)$, c'est à dire la transposée de la matrice des cofacteurs notée $\text{adj} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t}(z^1, \chi^1, \dots; t) \right)$, on obtient

$$\left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial w} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t) = \frac{\frac{\partial R_\gamma^j}{\partial t}(z^1, \chi^1, \dots; t) \cdot \text{adj} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t}(z^1, \chi^1, \dots; t) \right)}{\det \frac{\partial U_j}{\partial t}(z^1, \chi^1, \dots; t)}. \quad (2.45)$$

Si on applique maintenant $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0}$ à l'identité précédente, on obtient que la série formelle

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial w} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t)$$

est un quotient de deux séries entières convergentes dont le dénominateur ne s'annule pas en 0. Par conséquent, $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial w} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t)$ est convergente. Pour obtenir la convergence des autres dérivées, on dérive (2.43) par rapport à z^1 , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_\gamma^j}{\partial z^1}(z^1, \chi^1, \dots; t) &= \left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial z} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t) \\ &+ \left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial w} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t) \cdot \frac{\partial U_j}{\partial z^1}(z^1, \chi^1, \dots; t). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Toutes les séries $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} \frac{\partial R_\gamma^j}{\partial z^1}(z^1, \chi^1, \dots; t)$ sont convergentes. En effet, la série $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} R_\gamma^j(z^1, \chi^1, \dots; t)$ converge par hypothèse, donc il en est de même pour la série $\frac{\partial}{\partial z^1} \left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} R_\gamma^j(z^1, \chi^1, \dots; t) \right)$. Ceci implique la convergence de la série $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial R_\gamma^j}{\partial z^1}(z^1, \chi^1, \dots; t) \right)$.

Ainsi, on obtient la convergence de $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial z} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t)$ en utilisant le fait que $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^{|\gamma|+1} h}{\partial Z^\gamma \partial w} \circ V_j \right) (z^1, \chi^1, \dots; t)$ converge d'après le résultat établi précédemment. Ce qui achève la démonstration du Lemme 2.3.5. \square

Pour montrer la Proposition 2.3.4, nous aurons également besoin du résultat suivant qui provient de [19] et qui fournit des identités entre applications.

Lemme 2.3.6 ([19], Proposition 6.4). *Dans la situation précédente et pour $j \geq 1$ un entier fixé, comme $\text{Jac}H \neq 0$ on peut choisir $\gamma^j \in \mathbb{N}^d$ tel que*

$$\frac{\partial^{|\delta'|}}{\partial t^{\delta'}} \Big|_{t=0} \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^1} (F(z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau))) \right) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right) \equiv 0, \quad (2.47)$$

pour $|\delta'| < |\gamma^j|$,

$$\frac{\partial^{|\gamma^j|}}{\partial t^{\gamma^j}} \Big|_{t=0} \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^1} (F(z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau))) \right) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right) \neq 0, \quad (2.48)$$

et, tel que pour tout entier positif k , on ait

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k\gamma^j)!} \frac{\partial^{k|\gamma^j|}}{\partial t^{k\gamma^j}} \Big|_{t=0} \left\{ \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^1} (F(z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau))) \right) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right)^k \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma^j!} \frac{\partial^{|\gamma^j|}}{\partial t^{\gamma^j}} \Big|_{t=0} \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^1} (F(z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau))) \right) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right) \right)^k \end{aligned} \quad (2.49)$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| + |\beta| > 0$, il existe un polynôme universel en ses arguments $T_{\alpha, \beta, \gamma^j}$ tel que l'on ait ce qui suit : pour tout $j \geq 1$ et tout $r \in \{1, \dots, r\}$, on a l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} Q'_{z', \alpha} (F \circ V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0), \bar{H} \circ \bar{V}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)) \\ &= \frac{T_{\alpha, \beta, \gamma^j} \left(\left(\frac{\partial^{|\delta|}}{\partial t^{\delta'}} \Big|_{t=0} \left(\left(\frac{\partial^{|\eta|}}{\partial z^1 \eta} H^{(r)}(z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau)) \right) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right) \right)_{|\eta| + |\delta| \leq (|\alpha| + |\beta|)(2|\gamma^j| + 1) - |\gamma^j|}}{\left(\frac{1}{\gamma^j!} \frac{\partial^{|\gamma^j|}}{\partial t^{\gamma^j}} \Big|_{t=0} \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^1} (F(z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau))) \right) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right) \right)^{2(|\alpha| + |\beta|) - 1}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Démonstration de la Proposition 2.3.4. On va montrer cette proposition par récurrence sur j . Pour $j = 1$, le résultat provient directement de la Proposition 2.3.3. Supposons que la proposition est valable pour un entier j fixé et montrons qu'elle est toujours valable pour $j + 1$. Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.3.7. *Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $r \in \{1, \dots, d\}$,*

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} Q'_{z', \alpha} (F \circ V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0), \bar{H} \circ \bar{V}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)) \text{ converge}$$

Démonstration. Commençons par le cas $|\alpha| = |\beta| = 0$. En posant $t = 0$ dans (2.42), on obtient

$$\begin{aligned} Q' (F \circ V_j (z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0), \bar{H} \circ \bar{V}_{j+1} (\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; 0)) \\ = G \circ V_j (z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Le membre de gauche de l'équation précédente est exactement l'expression dont on veut montrer la convergence, le membre de droite est convergent par l'hypothèse de récurrence.

Pour le cas $|\alpha| + |\beta| > 0$, on déduit du Lemme 2.3.6 que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} Q'_{z'^\alpha} (F \circ V_j (z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0), \bar{H} \circ \bar{V}_{j+1} (\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)) \\ = \frac{\tau_{\alpha, \beta, \gamma} \left(\left(\frac{\partial^{|\delta|}}{\partial t^\delta} \Big|_{t=0} \left(\left(\frac{\partial^{|\eta|}}{\partial z^{1\eta}} H^{(r)} (z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau)) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right) \right)_{|\eta|+|\delta| \leq (|\alpha|+|\beta|)(2|\gamma|+1)-|\gamma|} \right)}{\left(\frac{1}{\gamma!} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial t^\gamma} \Big|_{t=0} \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial z^I} (F(z^1, Q(z^1, \chi^1, \tau))) \Big|_{\tau=\bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)} \right) \right) \right)^{2(|\alpha|+|\beta|)-1}}. \end{aligned}$$

Cette expression est un quotient de deux séries entières convergentes. En effet, le numérateur est polynomial en les dérivées de Q , qui sont convergentes, et en des expressions de la forme

$$\frac{\partial^{|\delta|}}{\partial t^\delta} \Big|_{t=0} \frac{\partial^{|\eta|+|\mu|} H}{\partial z^\eta \partial w^\mu} (z^1, Q(z^1, \chi^1, \bar{U}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)),$$

c'est à dire, par le biais de (1.26), de la forme

$$\frac{\partial^{|\delta|}}{\partial t^\delta} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^{|\eta|+|\mu|} H}{\partial z^\eta \partial w^\mu} \circ V_j \right) (z^1, \chi^2, z^2, \dots; t),$$

qui sont aussi convergentes d'après l'hypothèse de récurrence et le Lemme 2.3.5. \square

Revenons à la preuve de la Proposition 2.3.4. Comme dans la preuve de la Proposition 2.3.3 et grâce à la condition de non dégénérescence holomorphe de M' , on peut choisir $\alpha^i \in \mathbb{N}^n$ et $1 \leq r_i \leq d$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\det \left(\frac{\partial Q'^{r_k}}{\partial \chi'_l} (\chi', \tau') \right)_{k,l} \neq 0. \quad (2.52)$$

On définit la série entière $P_{j+1} : (\mathbb{C}^{(j+1)n} \times \mathbb{C}^{n+d}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+d}, 0)$ de la façon suivante

$$P_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, z^2, \dots, Y) := \begin{pmatrix} Q'_{z^1 \alpha^1}{}^{r_1}(F(V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0)), Y) \\ \vdots \\ Q'_{z^j \alpha^j}{}^{r_n}(F(V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0)), Y) \\ Q'^1(F(V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0)), Y) \\ \vdots \\ Q'^d(F(V_j(z^1, \chi^2, z^2, \dots; 0)), Y) \end{pmatrix}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, P_{j+1} est une série entière convergente. De plus, on remarque que

$$\det \frac{\partial P_{j+1}}{\partial Y}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; \bar{H} \circ \bar{V}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t)) \neq 0. \quad (2.53)$$

En effet, si on pose, dans (2.53), $z^l = 0$ pour $l \geq 1$ et $\chi^l = 0$ pour $l \geq 2$, on obtient, puisque $\bar{V}_{j+1}(\chi^1, 0, \dots; t) = (\chi^1, t)$, $\frac{\partial Q'}{\partial \chi'}(0, \chi', \tau') = 0$ et $\frac{\partial Q'}{\partial \tau'}(0, \chi', \tau') = I_d$:

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial P_{j+1}}{\partial Y}(\chi^1, 0, \dots; \bar{H}(\chi^1, t)) &= \det \left(\frac{\partial Q'^{r_k}}{\partial \chi'_l}{}_{z^j \alpha^k} (0, \bar{H}(\chi^1, t)) \right)_{k,l} \\ &= \det \left(\frac{\partial Q'^{r_k}}{\partial \chi'_l}{}_{\alpha^k} (\bar{H}(\chi^1, t)) \right)_{k,l}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

qui est non identiquement nul grâce à (2.52) et au fait que H est génériquement de rang maximal.

Par ailleurs, le Lemme 2.3.7 implique que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, l'application $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial t^\beta} \Big|_{t=0} P_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; \bar{H} \circ \bar{V}_{j+1}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; t))$ converge. Finalement, le Lemme 2.3.1 fournit la conclusion souhaitée. \square

On est maintenant en mesure de démontrer le Théorème 1.2.4.

Démonstration du Théorème 1.2.4. On utilise les notations précédentes. La Proposition 2.3.4 nous permet d'affirmer que pour tout $j \geq 1$, l'application $H \circ V_j(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; 0)$ converge. De plus, on sait par le Théorème 1.1.12 (voir également la Section 1.1.3 et [4, §10.4, §10.5]) qu'il existe une suite $(p_k)_k$ qui converge vers 0 et telle que, pour $j = 2(d+1)$, le rang de $V_j(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; 0)$

en chaque p_k est égal à $n + d$ avec $V_j(p_k; 0) = 0$. Ceci nous permet d'affirmer que $V_{2(d+1)}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; 0)$ possède un inverse à droite convergent dans un voisinage d'un élément approprié p_k assez proche de 0. Par conséquent, puisque l'application $H \circ V_{2(d+1)}(\chi^1, z^1, \chi^2, \dots; 0)$ est convergente, il en est de même pour H . \square

2.3.3 Démonstration du Théorème 1.2.6

Pour montrer le Théorème 1.2.6, on va avoir besoin du lemme suivant,

Lemme 2.3.8. *Soient (M, p) et (M', p') deux germes d'hypersurfaces analytiques réelles dans \mathbb{C}^{n+1} . Si M est holomorphiquement non dégénérée en p et si M' ne contient pas de courbe holomorphe passant par p' alors toute application formelle holomorphe qui envoie (M, p) dans (M', p') est soit constante soit de rang générique maximal.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p = p' = 0$. La démonstration de la Proposition 7.1 de [5] contient le fait suivant

Lemme 2.3.9. *Soient M et M' deux hypersurfaces formelles dans \mathbb{C}^{n+1} passant par 0 et $H : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ une application formelle holomorphe qui envoie M dans M' , avec M holomorphiquement non dégénérée en 0 et M' ne contenant pas de courbe formelle holomorphe passant par 0 ; si de plus M et M' sont données en coordonnées normales et si $H = (F, G) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, alors $G \equiv 0$ implique $H \equiv 0$.*

D'autre part, dans [20] Lamel et Mir prouvent un théorème qui s'énonce ainsi

Proposition 2.3.10 ([20], Théorème 2.8). *Soient M et M' deux hypersurfaces formelles dans \mathbb{C}^{n+1} passant par 0. Si M est holomorphiquement non dégénérée en 0 alors toute application formelle holomorphe $H : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ envoyant M dans M' et transversalement non plate (i.e. vérifiant en coordonnées normales $G \neq 0$) est de jacobien non identiquement nul.*

Ainsi, pour montrer le lemme 2.3.8, il suffit d'appliquer les deux lemmes précédents en notant que si M' est une hypersurface analytique réelle qui ne contient pas de courbe holomorphe passant par 0 alors elle ne contient pas de courbe formelle holomorphe passant par ce même point (voir [24]). \square

Démonstration du Théorème 1.2.6. Le théorème est obtenu en combinant le Lemme 2.3.8 et le Théorème 1.2.4. \square

2.4 Démonstration du théorème artinien

Démonstration du Théorème 1.2.12. Cette preuve est inspirée par la preuve du Lemme 14.2 de [8]. On utilise les notations de la Section 2.2 et en particulier les coordonnées normales. D'après le Théorème 2.2.1 on sait que l'application de réflexion \mathcal{R} est convergente. Par conséquent, en utilisant le développement de Taylor de la série Q' , la série $Q'_\alpha(\bar{H}(\chi, \tau)) = r_\alpha(\chi, \tau)$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, par le théorème d'approximation d'Artin [1], il existe $H^k : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ une série entière holomorphe convergente qui coïncide avec H jusqu'à l'ordre k en 0 et telle que $Q'_\alpha(\bar{H}^k(\chi, \tau)) = r_\alpha(\chi, \tau)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Par conséquent, on a l'identité suivante entre série entière,

$$Q'(z', \bar{H}(\chi, \tau)) = Q'(z', \bar{H}^k(\chi, \tau)). \quad (2.55)$$

Pour montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, H^k envoie un voisinage de 0 dans M dans un voisinage de 0 dans M' , on considère

$$\rho' : (z', w', \chi', \tau') \in U \mapsto w' - Q'(z', \chi', \tau') \in \mathbb{C}, \quad (2.56)$$

où U est voisinage de 0 dans \mathbb{C}^{2n+2} suffisamment petit, et

$$\tilde{\rho}'(z', w', \chi', \tau') := \bar{\rho}'(\chi', \tau', z', w'). \quad (2.57)$$

La série entière convergente $\tilde{\rho}'$ est de rang 1 dans un voisinage de 0 et $\tilde{\rho}'(z', w', \chi', \tau') = 0$ implique $\rho'(z', w', \chi', \tau') = 0$ grâce à l'identité (1.4). Il existe donc, $u \in \mathbb{C}[[z', w', \chi', \tau']]$ tel que,

$$\rho'(z', w', \chi', \tau') = u(z', w', \chi', \tau') \cdot \tilde{\rho}'(z', w', \chi', \tau'). \quad (2.58)$$

On a, grâce à (2.55),

$$\rho'(z', w', \bar{H}(\chi, \tau)) = \rho'(z', w', \bar{H}^k(\chi, \tau)), \quad (2.59)$$

et on sait que H^k envoie M dans M' si et seulement si

$$Q'(F^k(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}^k(\chi, \tau)) = G^k(z, Q(z, \chi, \tau))$$

i.e. $\rho'(H^k(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}^k(\chi, \tau)) \equiv 0$. Mais, on a

$$\begin{aligned} & \rho'(H^k(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}^k(\chi, \tau)) \\ &= \rho'(H^k(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) \text{ d'après (2.59)} \\ &= u(H^k(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) \cdot \tilde{\rho}'(H^k(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) \\ &= u(H^k(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) \cdot \bar{\rho}'(\bar{H}(\chi, \tau), H^k(z, Q(z, \chi, \tau))). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Cependant, $\bar{\rho}'(\bar{H}(\chi, \tau), H^k(z, Q(z, \chi, \tau))) \equiv 0$. En effet, on rappelle que, puisque H envoie M dans M' ,

$$Q'(F(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau)) = G(z, Q(z, \chi, \tau)).$$

On obtient donc, en appliquant $\bar{Q}'(\bar{F}(\chi, \tau), F(z, Q(z, \chi, \tau)), \cdot)$ à chaque coté de l'identité précédente,

$$\begin{aligned} \bar{Q}'(\bar{F}(\chi, \tau), F(z, Q(z, \chi, \tau)), Q'(F(z, Q(z, \chi, \tau)), \bar{H}(\chi, \tau))) \\ = \bar{Q}'(\bar{F}(\chi, \tau), F(z, Q(z, \chi, \tau)), G(z, Q(z, \chi, \tau))). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Ainsi, en utilisant l'identité (1.4), on a

$$\bar{G}(\chi, \tau) = \bar{Q}'(\bar{F}(\chi, \tau), H(z, Q(z, \chi, \tau))) \quad (2.62)$$

i.e. $\bar{\rho}'(\bar{H}(\chi, \tau), H(z, Q(z, \chi, \tau))) \equiv 0$. Par conséquent, l'identité

$$\bar{\rho}'(\bar{H}(\chi, \tau), H^k(z, Q(z, \chi, \tau))) \equiv 0$$

est vérifiée, ce qui complète la preuve du Théorème 1.2.12. \square

Chapitre 3

Applications CR de codimension positive

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La Section 3.1 contient des définitions basiques et des lemmes techniques utilisés dans la Section 3.2. Dans la Section 3.2, on donne des propriétés élémentaires d'un ensemble analytique complexe invariant attaché au graphe d'une application CR lisse. La dernière section est dédiée à la démonstration du Théorème 1.2.13.

3.1 Préliminaires

Dans cette section, on commence par rappeler des définitions de base puis on montre un lemme utilisé dans la section suivante.

Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété générique analytique réelle de codimension d . On rappelle que M est dite minimale en $p \in M$ s'il n'existe pas de germe de sous-variété réelle $S \subset M$ passant par p tel que l'espace tangent complexe de M en q soit tangent à S en tout point $q \in S$ et tel que $\dim_{\mathbb{R}} S < \dim_{\mathbb{R}} M$ (voir la Section 1.1.3 et [4, §1.5]).

Comme dans [12], on note, pour une application CR $\mathcal{C}^\infty f: M \rightarrow \mathbb{C}^{N'}$ et pour $p \in M$, $\mathcal{T}_p(f)$ le germe du plus petit ensemble analytique complexe dans $\mathbb{C}^{N+N'}$ qui contient le germe du graphe de f en $(p, f(p))$. L'entier $\dim \mathcal{T}_p(f) - N$ sera appelé le *degré d'analyticité partielle* de f en p et noté $\deg_p f$. On peut remarquer que si M est minimale en p le degré d'analyticité partielle de f en p est positif (voir remarque 3.2.2).

On aura besoin du principe de réflexion bien connu qui suit (voir par

exemple [7, 21])

Proposition 3.1.1 (Principe de réflexion). *Soit M une sous-variété générique analytique réelle dans \mathbb{C}^N minimale en un point $p \in M$. Supposons que $u: M \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue CR près de p dans M et que $\Theta: \left(\mathbb{C}^{2N+1}, \left(p, \bar{p}, \overline{u(p)}\right)\right) \rightarrow \mathbb{C}$ est un germe en $\left(p, \bar{p}, \overline{u(p)}\right)$ de fonction holomorphe tel que la fonction $F(Z) = \Theta\left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}\right)$ est CR près de p dans M . Alors F admet un unique prolongement holomorphe près de p dans \mathbb{C}^N .*

Dans ce qui suit, on dira qu'une application $\mathcal{C}^\infty h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^l$, avec Ω ouvert dans une variété réelle, est non identiquement nulle près d'un point p_0 si le germe de h en p_0 n'est pas nul, c'est à dire si l'on peut trouver des points p aussi proches que l'on veut de p_0 tels que $h(p) \neq 0$.

On aura également besoin de la notion de wedge. Pour $p \in M$, on considère un voisinage ouvert U de p dans \mathbb{C}^N ainsi qu'une fonction analytique réelle définissante locale $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de M près de p . Si Γ est un cône ouvert convexe dans \mathbb{R}^d d'origine 0, on appelle *wedge d'edge M* dans la direction Γ centré en p tout ensemble ouvert \mathcal{W} de la forme $\{Z \in U, \rho(Z, \bar{Z}) \in \Gamma\}$.

Le résultat suivant est un lemme de [12] dont on va donner une démonstration plus élémentaire.

Lemme 3.1.2. *Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété générique analytique réelle, minimale en $p \in M$. On considère $F: (M, p) \rightarrow \mathbb{C}^s$ et $u: (M, p) \rightarrow \mathbb{C}^t$ deux germes d'applications CR \mathcal{C}^∞ et $\psi: \left(\mathbb{C}^{2N+t+s}, \left(p, \bar{p}, \overline{u(p)}, F(p)\right)\right) \rightarrow \mathbb{C}$ un germe en $\left(p, \bar{p}, \overline{u(p)}, F(p)\right)$ de fonction holomorphe. Supposons que $\psi\left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, F(Z)\right) \equiv 0$ pour $Z \in M$ près de p et que la fonction $(Z, w) \mapsto \psi\left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, w\right)$ ne soit pas identiquement nulle près de $(p, F(p))$ dans $M \times \mathbb{C}^s$. Alors on peut trouver des points $q \in M$ aussi proches que l'on veut de p tels que $\deg_q F < s$.*

Démonstration. Ce résultat va être prouvé par récurrence sur l'entier s . On considère d'abord le cas où $s = 1$.

Soit A l'ensemble des points p_1 près de p dans M tels que la fonction holomorphe $\mathbb{C} \ni w \mapsto \psi\left(p_1, \bar{p}_1, \overline{u(p_1)}, w\right)$ est non identiquement nulle près de $F(p_1)$ dans \mathbb{C} . On peut trouver $p_1 \in A$ aussi proche que l'on veut de p . En effet, puisque $\psi\left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, w\right)$ n'est pas identiquement nulle près

de $(p, F(p))$ dans $M \times \mathbb{C}$, il existe (p_1, p'_1) aussi proche que l'on veut de $(p, F(p))$ tel que $\psi(p_1, \overline{p_1}, \overline{u(p_1)}, p'_1) \neq 0$. Ainsi, par holomorphie $\mathbb{C} \ni w \mapsto \psi(p_1, \overline{p_1}, \overline{u(p_1)}, w)$ ne peut pas être identiquement nulle près de $F(p_1)$ dans \mathbb{C} . D'autre part, pour $Z \in A$ fixé, comme la fonction holomorphe $\mathbb{C} \ni w \mapsto \psi(Z, \overline{Z}, \overline{u(Z)}, w)$ ne s'annule pas identiquement près de $F(Z)$ dans \mathbb{C} , il existe un unique entier $k_Z \geq 1$ tel que $\frac{\partial^{k_Z} \psi}{\partial w^{k_Z}}(Z, \overline{Z}, \overline{u(Z)}, F(Z)) \neq 0$ et, pour tout entier $k < k_Z$, $\frac{\partial^{k_Z} \psi}{\partial w^k}(Z, \overline{Z}, \overline{u(Z)}, F(Z)) = 0$. On fixe maintenant un voisinage V de p dans M suffisamment petit et on considère l'entier suivant

$$K = \min\{k_Z, Z \in A \cap V\}.$$

On peut choisir $p_1 \in A \cap V$ tel que $k_{p_1} = K$ et on a :

$$\frac{\partial^{K-1} \psi}{\partial w^{K-1}}(p_1, \overline{p_1}, \overline{u(p_1)}, F(p_1)) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^K \psi}{\partial w^K}(p_1, \overline{p_1}, \overline{u(p_1)}, F(p_1)) \neq 0. \quad (3.2)$$

Puisque ψ est holomorphe près de $(p, \overline{p}, \overline{u(p)}, F(p))$ dans \mathbb{C}^{2N+t+1} , par le théorème des fonctions implicites, il existe $\Theta: (\mathbb{C}^{2N+t}, (p_1, \overline{p_1}, \overline{u(p_1)})) \rightarrow \mathbb{C}$ un germe en $(p_1, \overline{p_1}, \overline{u(p_1)})$ de fonction holomorphe tel que les zéros de $\frac{\partial^{K-1} \psi}{\partial w^{K-1}}$ près de $(p_1, \overline{p_1}, \overline{u(p_1)}, F(p_1))$ dans \mathbb{C}^{2N+t+1} sont donnés par l'équation $w = \Theta(Z, \zeta, \nu)$. Par ailleurs, on peut remarquer, que la fonction $Z \mapsto \frac{\partial^{K-1} \psi}{\partial w^{K-1}}(Z, \overline{Z}, \overline{u(Z)}, F(Z))$ est identiquement nulle près de p_1 dans M . En effet, supposons que ceci est faux dans le but d'obtenir une contradiction. Dans ce cas, on peut trouver p_2 aussi proche que l'on veut de p_1 dans M tel que $\frac{\partial^{K-1} \psi}{\partial w^{K-1}}(p_2, \overline{p_2}, \overline{u(p_2)}, F(p_2)) \neq 0$, il existe donc un point $p_2 \in A \cap V$ avec $k_{p_2} < K$. Ceci contredit la définition de K . Par conséquent, $\frac{\partial^{K-1} \psi}{\partial w^{K-1}}(Z, \overline{Z}, \overline{u(Z)}, F(Z)) \equiv 0$ pour $Z \in M$ près de p_1 et, d'après la remarque sur les zéros de $\frac{\partial^{K-1} \psi}{\partial w^{K-1}}$, on obtient que $F(Z) = \Theta(Z, \overline{Z}, \overline{u(Z)})$ près de p_1 dans M . Mais, si p_1 est assez proche de p , on peut supposer que M est minimale en p_1 (car M est analytique réelle et minimale en p) et par conséquent, on peut appliquer la Proposition 3.1.1 qui donne l'existence d'un

prolongement holomorphe \tilde{F} de F près de p_1 dans \mathbb{C}^N . Ainsi le graphe de F est contenu, près de p_1 , dans le graphe de \tilde{F} qui est un ensemble analytique complexe de dimension N . Par conséquent, la dimension de $\mathcal{T}_{p_1}(F)$ est inférieure ou égale à N . On a donc montré que, pour V voisinage de p dans M arbitrairement petit, il existe $p_1 \in V$ tel que $\deg_{p_1} F \leq 0$. Ceci termine la preuve du lemme pour $s = 1$.

On suppose maintenant que le lemme est vrai pour $s - 1$, et pour tout $t \in \mathbb{N}$, pour tout germe d'application CR $F: (M, p) \rightarrow \mathbb{C}^{s-1}$, $u: (M, p) \rightarrow \mathbb{C}^t$ et pour tout germe en $(p, \bar{p}, \overline{u(p)}, F(p))$ de fonction holomorphe $\psi: (\mathbb{C}^{2N+t+s-1}, (p, \bar{p}, \overline{u(p)}, F(p))) \rightarrow \mathbb{C}$. Notre but est alors de montrer le même résultat pour s . On note $w = (w', w_s) \in \mathbb{C}^{s-1} \times \mathbb{C}$ et $F = (F', F_s) \in \mathbb{C}^{s-1} \times \mathbb{C}$.

On considère d'abord le cas où $\psi(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, F'(Z), w_s) \equiv 0$ pour $(Z, w_s) \in M \times \mathbb{C}$ près de $(p, F_s(p))$. En prenant le développement de Taylor de ψ en w_s au point $F_s(p)$,

$$\psi(Z, \zeta, \nu, w', w_s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k(Z, \zeta, \nu, w') (w_s - F_s(p))^k, \quad (3.3)$$

on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, F'(Z)) \equiv 0$ près de p dans M et qu'il existe k_0 tel que $\psi_{k_0}(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, w')$ n'est pas identiquement nulle près de $(p, F'(p))$ dans $M \times \mathbb{C}^{s-1}$. Il existe donc, par l'hypothèse de récurrence, un point $q \in M$ aussi proche que l'on veut de p tel que $\deg_q F' < s - 1$ et donc tel que $\deg_q F < s$. Ceci complète la preuve dans ce cas.

Pour terminer la démonstration, il reste à traiter le cas où la fonction $(Z, w_s) \mapsto \psi(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, F'(Z), w_s)$ n'est pas identiquement nulle près de $(p, F_s(p))$ dans $M \times \mathbb{C}$. Par la même méthode que dans le cas $s = 1$, on montre que l'on peut trouver p_1 aussi proche que l'on veut de p , où M est minimale, et tel qu'il existe $\Theta: (\mathbb{C}^{2N+t+s-1}, (p_1, \bar{p}_1, \overline{u(p_1)}, F'(p_1))) \rightarrow \mathbb{C}$ un germe en $(p_1, \bar{p}_1, \overline{u(p_1)}, F'(p_1))$ de fonction holomorphe vérifiant

$$F_s(Z) = \Theta(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, F'(Z)) \quad (3.4)$$

près de p_1 dans M . Soit $\Theta(Z, \zeta, \nu, w') = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{s-1}} \Theta_\alpha(Z, \zeta, \nu) (w' - F'(p_1))^\alpha$ le développement de Taylor de Θ en w' au point $F'(p_1)$.

Si toutes les applications $\Theta_\alpha \left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)} \right)$ sont CR près de p_1 dans M alors par la Proposition 3.1.1 (on rappelle que M est minimale en p_1), la fonction $M \times \mathbb{C}^{s-1} \ni (Z, w') \mapsto \Theta \left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, w' \right) \in \mathbb{C}$ admet un prolongement holomorphe $\tilde{\Theta}$ au voisinage de $(p_1, F'(p_1))$ dans \mathbb{C}^{N+s-1} . Le graphe de F est alors contenu dans le graphe de $\tilde{\Theta}$ qui est un ensemble analytique complexe de \mathbb{C}^{N+s} de dimension $N+s-1$. Ceci revient à dire que le degré d'analyticité partielle de F en p_1 est inférieur à $s-1$.

S'il existe un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{s-1}$ tel que l'application $\Theta_\alpha \left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)} \right)$ n'est pas CR, alors il existe un champ de vecteurs $\bar{L} = \sum_{j=1}^N a_j(Z, \bar{Z}) \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j}$ au voisinage de p dans \mathbb{C}^N , où a_1, \dots, a_N sont des fonctions analytiques réelles près de p , tel que $\bar{L}|_M$ est un champ de vecteurs CR et

$$\bar{L} \left(\Theta \left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, w' \right) \right) \neq 0$$

près de $(p_1, F'(p_1))$ dans $M \times \mathbb{C}^{s-1}$. En utilisant la règle de la chaîne, on remarque qu'il existe une fonction Ψ_1 holomorphe au voisinage du point $\left(p_1, \bar{p}_1, \bar{L} \left(\overline{u(Z)} \right) \Big|_{Z=p_1}, F'(p_1) \right)$ dans $\mathbb{C}^{2N+t+s-1}$ tel que

$$\bar{L} \left(\Theta \left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, w' \right) \right) = \Psi_1 \left(Z, \bar{Z}, \bar{L} \left(\overline{u(Z)} \right), w' \right) \quad (3.5)$$

près de $(p_1, F'(p_1))$ dans $M \times \mathbb{C}^{s-1}$. Puisque M est minimale en p , le théorème de prolongement de Tumanov (voir [4, Théorème 8.1.1]) implique que u admet un prolongement holomorphe \tilde{u} dans un wedge \mathcal{W} d'edge M centré en p . On peut supposer que l'application \tilde{u} est \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{W} jusqu'à l'edge M . De plus, pour tout $Z \in \mathcal{W} \cup (M \cap V)$, où V est un voisinage de p dans \mathbb{C}^N assez petit, on a

$$\bar{L} \left(\overline{\tilde{u}(Z)} \right) = \sum_{j=1}^N a_j(Z, \bar{Z}) \overline{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{Z}_j}(Z)}.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{Z}_j}$ est holomorphe dans \mathcal{W} et \mathcal{C}^∞ jusqu'à l'edge M . Ainsi l'application U , dont les composantes sont les restrictions à M près de p des dérivées de \tilde{u} , est une application CR près de p dans M . Par conséquent, d'après l'identité (3.5), et comme $\bar{L}(\overline{u(Z)}) = \bar{L}(\overline{\tilde{u}(Z)})$, pour $Z \in M$ assez proche de p , on peut trouver un germe en $\left(p_1, \bar{p}_1, \overline{U(p_1)}, F'(p_1) \right)$

de fonction holomorphe, $\Psi: \left(\mathbb{C}^{2N+t+Nt+s-1}, \left(p_1, \bar{p}_1, \overline{U(p_1)}, F'(p_1) \right) \right) \rightarrow \mathbb{C}$
tel que

$$\bar{L} \left(\Theta \left(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, w' \right) \right) = \Psi \left(Z, \bar{Z}, \overline{U(Z)}, w' \right)$$

près de $(p_1, F'(p_1))$ dans $M \times \mathbb{C}^{s-1}$. De plus, on sait que

$$\bar{L} \left(\Theta(Z, \bar{Z}, \overline{u(Z)}, F'(Z)) \right) \equiv \bar{L}(F_s(Z)) \equiv 0$$

près de p_1 dans M car F est CR; c'est à dire $\Psi \left(Z, \bar{Z}, \overline{U(Z)}, F'(Z) \right) \equiv 0$
près de p_1 dans M . Donc, puisque l'on a vu que $\Psi \left(Z, \bar{Z}, \overline{U(Z)}, w' \right) \not\equiv 0$ près
de $(p_1, F'(p_1))$ dans $M \times \mathbb{C}^{s-1}$, l'hypothèse de récurrence implique que le
degré d'analyticité partielle de F' est strictement inférieur à $s - 1$ en des
points de M aussi proches que l'on veut de p_1 et donc de p . Ceci achève la
démonstration du Lemme 3.1.2. \square

Comme dans [12], on obtient, à partir du Lemme 3.1.2, le résultat suivant.

Lemme 3.1.3. *Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété analytique réelle, minimale
en $p \in M$, soit $F: (M, p) \rightarrow \mathbb{C}^s$ un germe d'application CR et soit*

$$\psi: \left(\mathbb{C}^{2N+2s}, \left(p, \bar{p}, \overline{F(p)}, F(p) \right) \right) \rightarrow \mathbb{C}$$

un germe en $(p, \bar{p}, \overline{F(p)}, F(p))$ de fonction holomorphe. Supposons que

$$\psi \left(Z, \bar{Z}, \overline{F(Z)}, F(Z) \right) \equiv 0$$

*pour $Z \in M$ près de p et que la fonction $(Z, v, w) \mapsto \psi(Z, \bar{Z}, v, w)$ ne soit pas
identiquement nulle près de $(p, \overline{F(p)}, F(p))$ dans $M \times \mathbb{C}^{2s}$. Alors, il existe
 $q \in M$ aussi proche que l'on veut de p tel que $\deg_q F < s$.*

Démonstration. Premièrement, on suppose que $\psi \left(Z, \bar{Z}, \overline{F(Z)}, w \right)$ n'est pas
identiquement nulle près de $(p, F(p))$ dans $M \times \mathbb{C}^s$. Puisque l'on sait que
 $\psi \left(Z, \bar{Z}, \overline{F(Z)}, F(Z) \right) \equiv 0$ pour $Z \in M$ près de p , on peut appliquer le
Lemme 3.1.2 et en déduire que le degré d'analyticité partielle de F en q est
strictement inférieur à s pour q arbitrairement proche de p .

On traite maintenant le cas où $\psi\left(Z, \bar{Z}, \overline{F(Z)}, w\right) \equiv 0$ pour $(Z, w) \in M \times \mathbb{C}^s$ près de $(p, F(p))$. On considère pour cela le développement de Taylor de ψ en w au point $F(p)$:

$$\psi(Z, \zeta, v, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} \psi_\alpha(Z, \zeta, v) (w - F(p))^\alpha. \quad (3.6)$$

L'hypothèse implique alors que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^s$, $\psi_\alpha\left(Z, \bar{Z}, \overline{F(Z)}\right) \equiv 0$ près de p dans M . Cependant, grâce aux hypothèses du lemme, il existe un multi-indice α_0 tel que $\psi_{\alpha_0}(Z, \bar{Z}, v) \neq 0$ près de $(p, \overline{F(p)})$ dans $M \times \mathbb{C}^s$, et le Lemme 3.1.2 donne le résultat souhaité. \square

3.2 Propriétés de $\mathcal{T}_p(H)$

Dans cette section, on se donne une sous-variété générique analytique réelle $M \subset \mathbb{C}^N$ et une application $H: M \rightarrow M'$ CR \mathcal{C}^∞ sur M à valeurs dans un ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$. On va donner quelques propriétés du degré d'analyticité partielle de H et de l'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(H)$ pour $p \in M$. Tous les résultats de cette section peuvent être trouvés dans [12], mais puisque les preuves que nous fournissons sont élémentaires par rapport à [12], nous les incluons dans cet article par souci d'exhaustivité.

Le théorème suivant est une conséquence directe du théorème d'unicité au bord.

Lemme 3.2.1. *Soient M et M' comme précédemment. Si H admet un prolongement holomorphe \tilde{H} sur un wedge d'edge M centré en p alors le graphe de \tilde{H} près de $(p, H(p))$ est contenu dans $\mathcal{T}_p(H)$.*

Remarque 3.2.2. Si M est minimale en $p \in M$, le théorème de prolongement de Tumanov implique, dans le cadre précédent, que H admet un unique prolongement \tilde{H} holomorphe dans un wedge d'edge M centré en p . Ainsi, $\mathcal{T}_p(H)$ contient le graphe de \tilde{H} près de $(p, H(p))$. Par conséquent, la dimension de $\mathcal{T}_p(H)$ en p est supérieure ou égale à N autrement dit le degré d'analyticité partielle de H en p est positif.

Les deux lemmes suivants décrivent les points réguliers de l'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(H)$.

Lemme 3.2.3. *Dans la situation précédente, supposons que le degré d'analyticité partielle de H est constant près d'un point p de M . Alors, il existe un voisinage ouvert U_p^1 de p dans M tel que l'ensemble $\Sigma_p^1 \subset M \cap U_p^1$ des points $q \in U_p^1$ pour lesquels $\mathcal{T}_p(H)$ n'est pas régulier en $(q, H(q))$ est un ensemble fermé d'intérieur vide.*

Démonstration. Tout d'abord, on peut trouver un voisinage U_p^1 de p dans M sur lequel $\mathcal{T}_p(H)$ est un ensemble analytique complexe et sur lequel le degré d'analyticité partielle de H est constant égal à s . Soit $\Sigma_p^1 \subset M \cap U_p^1$ l'ensemble des points $q \in U_p^1$ pour lesquels $\mathcal{T}_p(H)$ n'est pas régulier en $(q, H(q))$. D'après la définition classique des points réguliers d'un ensemble analytique complexe, Σ_p^1 est un sous-ensemble fermé de $M \cap U_p^1$. Pour montrer qu'il est d'intérieur vide, supposons que l'on peut trouver un ouvert V de M non vide et inclus dans Σ_p^1 . Dans ce cas, pour tout $q \in V$, le graphe de H près de $(q, H(q))$ est contenu dans l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{T}_p(H)$ qui est un ensemble analytique complexe de dimension strictement inférieure à $N+s$. La dimension de $\mathcal{T}_q(H)$ est donc strictement inférieure à $N+s$ pour tout $q \in V$. Nous aboutissons donc à une contradiction puisque, par hypothèse, le degré d'analyticité partielle de H est constant égal à s sur V . \square

Lemme 3.2.4. *Dans la situation précédente, supposons que M est minimale en $p \in M$ et que le degré d'analyticité partielle de H est constant égal à s près de p dans M . Notons $t = N' - s$. Alors, il existe un voisinage ouvert $U_p^2 \subset U_p^1$ de p dans M (avec U_p^1 donné par le Lemme 3.2.3) et un ensemble fermé d'intérieur vide $\Sigma_p^2 \subset M \cap U_p^2$ tels que, pour tout $q \in U_p^2 \setminus \Sigma_p^2$, il existe des coordonnées holomorphes $(u', v') \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$ près de $H(q)$ pour lesquelles $H = (F, G) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$, et un germe en $(q, F(q))$ de fonction holomorphe $T_q: (\mathbb{C}^{N+s}, (q, F(q))) \rightarrow \mathbb{C}^t$ tels que $\mathcal{T}_p(H)$ est donné près de $(q, H(q))$ par l'équation $v' = T_q(Z, u')$. En particulier, $\mathcal{T}_p(H)$ est régulier en $(q, H(q))$.*

Démonstration. Comme M est minimale en p et H est CR sur M , le théorème de prolongement de Tumanov assure l'existence d'un prolongement holomorphe \tilde{H} de H dans un wedge \mathcal{W} d'edge M centré en p . De plus, ce prolongement est \mathcal{C}^∞ jusqu'à l'edge M . Par le Lemme 3.2.1, le graphe de \tilde{H} est contenu dans $\mathcal{T}_p(H)$ près de $(p, H(p))$. Cela signifie que l'on peut choisir un voisinage ouvert Δ de p dans \mathbb{C}^N tel que $(Z, \tilde{H}(Z)) \in \mathcal{T}_p(H)$ pour tout $Z \in \Delta \cap \mathcal{W}$.

Si U^1 est le voisinage ouvert de p donné par le Lemme 3.2.3, on pose $U_p^2 = U_p^1 \cap \Delta$ et $\Sigma_p^2 = \Sigma_p^1 \cap U_p^2$. Pour un point fixé $q \in U_p^2 \setminus \Sigma_p^2$, l'ensemble analytique réel $\mathcal{T}_p(H)$ est donc régulier en $(q, H(q))$. De plus, puisque le degré

d'analyticité partielle de H est constant égal à s sur U_p^1 , la dimension de $\mathcal{T}_p(H)$ en $(q, H(q))$ est $N + s$. Il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{U} \subset U_p^2$ de q dans \mathbb{C}^N , un voisinage ouvert \mathcal{V} de $H(q)$ dans $\mathbb{C}^{N'}$ et une application holomorphe $f: \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^t$ de rang t en $(q, H(q))$ tels que

$$\mathcal{T}_p(H) = \{(Z, Z') \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}, f(Z, Z') = 0\}. \quad (3.7)$$

On a donc pour $Z \in \mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \cap \tilde{H}^{-1}(\mathcal{V})$,

$$f(Z, \tilde{H}(Z)) = 0. \quad (3.8)$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial Z}(Z, \tilde{H}(Z)) + \frac{\partial f}{\partial Z'}(Z, \tilde{H}(Z)) \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Z}(Z) \equiv 0$ dans \mathcal{U}' . Comme l'application \tilde{H} est \mathcal{C}^∞ jusqu'à l'edge M , on a l'identité suivante

$$\frac{\partial f}{\partial Z}(Z, \tilde{H}(Z)) + \frac{\partial f}{\partial Z'}(Z, \tilde{H}(Z)) \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Z}(Z) \equiv 0 \quad (3.9)$$

sur $M \cap \mathcal{U}'$. Mais f est de rang t en $(q, H(q))$ et l'identité (3.9) montre que les colonnes de $\frac{\partial f}{\partial Z}(q, H(q))$ sont des combinaisons linéaires des colonnes de $\frac{\partial f}{\partial Z'}(q, H(q))$. Par conséquent, le rang de $\frac{\partial f}{\partial Z'}(q, H(q))$ est t . Le théorème des fonctions implicites implique alors l'existence de coordonnées holomorphes $(u', v') \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$ pour lesquelles $H = (F, G) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$ et d'une application holomorphe T_q près de $(q, F(q))$ dans \mathbb{C}^{N+s} telles que les zéros de f sont donnés par les points de la forme $(Z, u', T_q(Z, u')) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$. Ce qui démontre le lemme. \square

Pour le prochain résultat, on va noter $\pi: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N'} \rightarrow \mathbb{C}^N$ et $\pi': \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N'} \rightarrow \mathbb{C}^{N'}$ les projections canoniques.

Lemme 3.2.5. *Dans la situation précédente, supposons que M est minimale en $p \in M$ et que le degré d'analyticité partielle de H est constant égal à s près de p dans M . Alors il existe un voisinage ouvert $U_p^3 \subset U_p^2$ de p dans M (avec U_p^2 donné par le Lemme 3.2.4) et un ensemble fermé d'intérieur vide $\Sigma_p^3 \subset M \cap U_p^3$ tels que, pour tout $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$, on peut trouver un voisinage Ω_q de $(q, H(q))$ dans $\mathbb{C}^{N+N'}$ vérifiant*

$$\pi'(\mathcal{T}_p(H)|_{M \times \mathbb{C}^{N'}} \cap \Omega_q) \subset M'.$$

Démonstration. Soit $\rho': \mathbb{C}^{N'} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction analytique réelle définissante locale de M' près de $H(p)$. Puisque $H(M) \subset M'$, on a l'identité suivante

$$\rho' \left(H(Z), \overline{H(Z)} \right) \equiv 0 \quad (3.10)$$

pour $Z \in M$ près de p .

On considère U_p^2 et Σ_p^2 respectivement le voisinage ouvert de p dans M et le fermé d'intérieur vide donnés par le Lemme 3.2.4. Soit $U_p^3 \subset U_p^2$ un voisinage connexe de p dans M suffisamment petit. Comme M est analytique réelle et minimale en p , l'ensemble Σ_1 des points de U_p^3 où M n'est pas minimale est un fermé d'intérieur vide. Ainsi, $\Sigma_p^3 = (\Sigma_p^2 \cap U_p^3) \cup \Sigma_1$ est aussi un fermé d'intérieur vide. De plus, pour tout $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$, M est minimale en q et on peut trouver des coordonnées holomorphes $(u', v') \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$ près de $H(q)$ pour lesquelles $H = (F, G) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$, et un germe en $(q, F(q))$ d'application holomorphe $T_q: (\mathbb{C}^{N+s}, (q, F(q))) \rightarrow \mathbb{C}^t$ tels que $\mathcal{T}_p(H)$ est donné près de $(q, H(q))$ par l'équation $v' = T_q(Z, u')$. Si U_p^3 est choisi assez petit, on peut supposer que le graphe de H est contenu près de $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$ dans $\mathcal{T}_p(H)$, autrement dit, nous avons l'identité suivante

$$G(Z) = T_q(Z, F(Z)) \quad (3.11)$$

pour $Z \in M$ près de q . On peut également supposer que l'application définie par

$$\Psi(Z, \zeta, \nu', u') = \rho' \left(u', T_q(Z, u'), \nu', \overline{T_q(\bar{\zeta}, \bar{\nu}')} \right) \quad (3.12)$$

est holomorphe près de $(q, \bar{q}, \overline{F(\bar{q})}, F(q))$ dans \mathbb{C}^{2N+2s} pour tout $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$.

D'après (3.11) et (3.10), on obtient

$$\rho' \left(F(Z), T_q(Z, F(Z)), \overline{F(Z)}, \overline{T_q(Z, F(Z))} \right) \equiv 0 \quad (3.13)$$

pour $Z \in M$ près de q . On a donc, par (3.13),

$$\Psi \left(Z, \bar{Z}, \overline{F(Z)}, F(Z) \right) \equiv 0 \quad (3.14)$$

pour $Z \in M$ près de q . Puisque le degré d'analyticité partielle de H est constant égal à s sur U_p^3 , on déduit de (3.11) que le degré d'analyticité partielle de F est constant égal à s sur U_p^3 . L'identité (3.14) et le Lemme 3.1.3 (on rappelle que M est minimale en q) impliquent donc que

$$\Psi(Z, \bar{Z}, \nu', u') \equiv 0 \quad (3.15)$$

pour $(Z, \nu', u') \in M \times \mathbb{C}^{2s}$ près de $(q, \overline{F(q)}, F(q))$. Cette identité est équivalente à

$$\rho' \left(u', T_q(Z, u'), \nu', \overline{T_q(Z, \nu')} \right) \equiv 0 \quad (3.16)$$

pour $(Z, \nu', u') \in M \times \mathbb{C}^{2s}$ près de $(q, \overline{F(q)}, F(q))$. Par conséquent, si on pose $\nu' = \overline{u'}$ dans (3.16), on obtient que $(Z, u', T_q(Z, u')) \in M'$ dès que Z est assez proche de q dans M et u' est assez proche de $F(q)$ dans \mathbb{C}^s . Ce qui fournit le résultat souhaité. \square

On conclut cette section par un lemme qui utilise la semi-continuité supérieure du degré d'analyticité partielle ; les détails sont laissés au lecteur.

Lemme 3.2.6. *Dans la situation précédente, il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma_2 \subset M$ tel que le degré d'analyticité partielle de H est constant sur chaque composante connexe de $M \setminus \Sigma_2$.*

3.3 Démonstration du théorème principal

Dans cette section, on conserve les hypothèses et les notations de la Section 3.2, c'est à dire que l'on considère une sous-variété générique analytique réelle M dans \mathbb{C}^N et une application CR \mathcal{C}^∞ $H: M \rightarrow M'$ où $M' \subset \mathbb{C}^{N'}$ est un ensemble analytique réel. Le Théorème 1.2.13 sera une conséquence du résultat suivant.

Proposition 3.3.1. *Dans la situation précédente, supposons que M est minimale en $p \in M$ et que le degré d'analyticité partielle de H est constant égal à s près de p dans M . Soient U_p^3 et $\Sigma_p^3 \subset M \cap U_p^3$ respectivement le voisinage ouvert de p dans M et le fermé d'intérieur vide donnés par le Lemme 3.2.5. Alors pour tout $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$ et pour tout entier positif k , il existe un germe en q d'application CR analytique réelle $H^k: (M, q) \rightarrow M'$ dont le jet d'ordre k en q coïncide avec celui de H .*

Démonstration. D'après les Lemmes 3.2.4 et 3.2.5, pour tout $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$, on peut choisir des coordonnées holomorphes $Z' = (u', v') \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$ et un germe en $(q, F(q))$ d'application holomorphe $T_q: (\mathbb{C}^{N+s}, (q, F(q))) \rightarrow \mathbb{C}^t$ tels que $\mathcal{T}_p(H)$ est donné par l'équation $v' = T_q(Z, u')$ près $(q, H(q))$. On peut également trouver un voisinage Ω_q de $(q, H(q))$ dans $\mathbb{C}^{N+N'}$ tel que $\pi'(\mathcal{T}_p(H)|_{M \times \mathbb{C}^{N'}} \cap \Omega_q) \subset M'$.

On fixe un point $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$ et un entier positive k . Puisque le graphe de H est contenu dans $\mathcal{T}_p(H)$ près de $(q, H(q))$, on a l'identité suivante

$$G(Z) = T_q(Z, F(Z)) \quad (3.17)$$

près de q dans M . Soit F^k le développement de Taylor de F à l'ordre k au point q (qui est bien une application holomorphe car H est CR, voir [4, Proposition 1.7.14]). On définit l'application holomorphe G^k près de q dans \mathbb{C}^N en posant

$$G^k(Z) = T_q(Z, F^k(Z)). \quad (3.18)$$

Ainsi $H^k = (F^k, G^k)$ est une application holomorphe près de q dans \mathbb{C}^N à valeurs dans $\mathbb{C}^{N'}$. De plus, par définition de H^k et d'après (3.17), les k premières dérivées de H^k au point q coïncident avec celles de H . Pour compléter la démonstration de la Proposition 3.3.1, il faut donc montrer que H^k envoie M dans M' au voisinage de q . D'après la définition de H^k et l'équation qui définit localement $\mathcal{T}_p(H)$ près de $(q, H(q))$ dans $\mathbb{C}^{N+N'}$, il existe un voisinage ouvert $\widetilde{\Omega}_q$ de $(q, H(q))$ dans $\mathbb{C}^{N+N'}$, tel que

$$\mathcal{G}_{H^k} \cap \left(M \times \mathbb{C}^{N'} \right) \cap \widetilde{\Omega}_q \subset \mathcal{T}_p(H)|_{M \times \mathbb{C}^{N'}} \cap \Omega_q,$$

où \mathcal{G}_{H^k} est le graphe de l'application H^k . Mais on sait, grâce au Lemme 3.2.5, que

$$\pi' \left(\mathcal{T}_p(H)|_{M \times \mathbb{C}^{N'}} \cap \Omega_q \right) \subset M'.$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat principal à savoir le Théorème 1.2.13.

Démonstration du Théorème 1.2.13. Tout d'abord, on peut remarquer que le Théorème 1.2.13 est vrai quand $N = 1$ ou $N' = 1$. En effet, dans \mathbb{C} , une sous-variété analytique réelle n'est minimale en aucun des ses points. Le théorème est donc trivialement vrai dans ce cas. Si $N' = 1$, M' est un ensemble analytique réel de \mathbb{C} , sa dimension vaut donc 0, 1 ou 2. Si M' est de dimension 0, il est constitué uniquement de points isolés. Toute application CR lisse sur M à valeurs dans M' est alors constante et la conclusion du théorème est évidente. Si M' est de dimension 2, il s'agit d'un ouvert de \mathbb{C} et on obtient la conclusion du théorème en tronquant, en chaque point où M est minimale, le développement de Taylor de H . Il nous reste à traiter le

cas où M' est de dimension 1. Supposons d'abord qu'il existe un ouvert U de M dont l'image par H est contenue dans l'ensemble des points singuliers de M' . Comme M' est de dimension 1, l'ensemble de ses points singuliers est discret. L'application CR H est donc constante sur U et par conséquent sur M . Sinon, dans tout ouvert de M , on peut trouver un point dont l'image par H est un point régulier de M' . Ainsi, l'ensemble des points où M est minimale et dont l'image est un point régulier de M' est un ouvert dense dans M . Or au voisinage d'un de ses points réguliers, on peut supposer, après un aplatissement biholomorphe, que M' est en fait l'axe réel. On obtient alors le théorème en utilisant le fait que toute application CR lisse à valeurs réelles admet un prolongement analytique réel.

Montrons maintenant le théorème pour $N, N' \geq 2$. On traite d'abord le cas où M est générique. Puisque M est analytique réelle et connexe, il existe un ensemble analytique réel Σ_1 de M tel que M est minimale en chaque point $p \in M \setminus \Sigma_1$. De plus, d'après le Lemme 3.2.6, il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma_2 \subset M$ tel que le degré d'analyticité partielle de H est constant sur chaque composante connexe de $M \setminus \Sigma_2$. Notons $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ qui est donc également un fermé d'intérieur vide de M . On fixe un point $p \in M \setminus \Sigma$, par la Proposition 3.3.1, on peut trouver un voisinage ouvert U_p^3 de p dans M et un fermé d'intérieur vide $\Sigma_p^3 \subset M \cap U_p^3$ tels que, pour tout $q \in U_p^3 \setminus \Sigma_p^3$, la conclusion du Théorème 1.2.13 est valable en q . Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{O} = \bigcup_{p \in M \setminus \Sigma} (U_p^3 \setminus \Sigma_p^3)$ fournit le résultat.

Si M n'est pas générique, pour tout $p \in M \setminus \Sigma_1$ (où Σ_1 désigne l'ensemble des points où M n'est pas minimale) on peut supposer, après un changement de coordonnées holomorphes au voisinage de p , que $M = \widetilde{M}_p \times \{0\} \subset \mathbb{C}_{Z^1}^{N-r_1} \times \mathbb{C}_{Z^2}^{r_1}$ où r_1 est un entier positif et \widetilde{M} est une sous-variété générique analytique réelle connexe qui est minimale (voir [4, Théorème 1.8.1]). D'après le cas générique traité précédemment, il existe un ouvert dense $\widetilde{\mathcal{O}}_p \subset \widetilde{M}_p$ tel que, pour tout entier k positif et tout $\tilde{q} \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$, on peut trouver un germe en \tilde{q} d'application CR analytique réelle $H_1^k: (\widetilde{M}_p, q) \rightarrow M'$ dont le k -jet en \tilde{q} coïncide avec celui de $\widetilde{M}_p \ni Z^1 \mapsto H(Z^1, 0)$. Le fait que $\bigcup_{p \in M \setminus \Sigma_1} (\widetilde{\mathcal{O}}_p \times \{0\})$ soit un ouvert dense de M complète la démonstration du Théorème 1.2.13. \square

Bibliographie

- [1] M. Artin. On the solutions of analytic equations. *Invent. Math.*, 5 :277–291, 1968.
- [2] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L.P. Rothschild. Algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets in \mathbf{C}^n . *Acta Math.*, 177(2) :225–273, 1996.
- [3] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L.P. Rothschild. Parametrization of local biholomorphisms of real analytic hypersurfaces. *Asian J. Math.*, 1(1) :1–16, 1997.
- [4] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L.P. Rothschild. *Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings.*, volume 47 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- [5] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L.P. Rothschild. Convergence and finite determination of formal CR mappings. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(4) :697–723, 2000.
- [6] M.S. Baouendi, X. Huang, and L.P. Rothschild. Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces. *Invent. Math.*, 125(1) :13–36, 1996.
- [7] M.S. Baouendi, H. Jacobowitz, and F. Trèves. On the analyticity of CR mappings. *Ann. of Math.*, 122(2) :365–400, 1985.
- [8] M.S. Baouendi, N. Mir, and L.P. Rothschild. Reflection ideals and mappings between generic submanifolds in complex space. *J. Geom. Anal.*, 12(4) :543–580, 2002.
- [9] M.S. Baouendi, L.P. Rothschild, and D. Zaitsev. Equivalences of real submanifolds in complex space. *J. Differential Geom.*, 59(2) :301–351, 2001.
- [10] E. Bierstone and P.D. Milman. Semianalytic and subanalytic sets. *Publ. Inst. Hautes Études Sci. Math.*, 67 :5–42, 1988.

- [11] S.S. Chern and J.K. Moser. Real hypersurfaces in complex manifolds. *Acta Math.*, 133 :219–271, 1974.
- [12] S. Damour. Feuilletages holomorphes locaux et analyticit   partielle d’applications CR \mathcal{C}^∞ . *Manuscripta Math.*, 109(2) :203–222, 2002.
- [13] K. Diederich and S.M. Webster. A reflection principle for degenerate real hypersurfaces. *Duke Math. J.*, 47(4) :835–843, 1980.
- [14] P. Ebenfelt and L.P. Rothschild. Transversality of CR mappings. *Amer. J. Math.*, 128(5) :1313–1343, 2006.
- [15] A.M. Gabrielov. Formal relations among analytic functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 37 :1056–1090, 1973.
- [16] X. Huang. Schwarz reflection principle in complex spaces of dimension two. *Comm. Partial Differential Equations*, 21 :1781–1828, 1996.
- [17] X. Huang. Local equivalence problems for real submanifolds in complex spaces. In *Real methods in complex and CR geometry*, volume 1848 of *Lecture Notes in Math.*, pages 109–163. Springer, Berlin, 2004.
- [18] X. Huang and W. Yin. A bishop surface with a vanishing bishop invariant. *Invent. math.*, 176(3) :461–520, 2009.
- [19] R. Juhlin. Determination of formal CR mappings by a finite jet. *Adv. Math.*, 222(5) :1611–1648, 2009.
- [20] B. Lamel and N. Mir. Remarks on the rank properties of formal CR maps. *Sci. China Ser. A*, 49(11) :1477–1490, 2006.
- [21] F. Meylan, N. Mir, and D. Zaitsev. Analytic regularity of CR-mappings. *Math. Res. Lett.*, 9(1) :73–93, 2002.
- [22] F. Meylan, N. Mir, and D. Zaitsev. Approximation and convergence of formal CR -mappings. *Int. Math. Res. Not.*, (4) :211–242, 2003.
- [23] F. Meylan, N. Mir, and D. Zaitsev. On some rigidity properties of mappings between CR-submanifolds in complex space. In *Journ  es   quations aux D  riv  es Partielles*, pages Exp. No. XII, 20. Univ. Nantes, Nantes, 2003.
- [24] P. Milman. Complex analytic and formal solutions of real analytic equations in \mathbb{C}^n . *Math. Ann.*, 233(1) :1–7, 1978.
- [25] N. Mir. Formal biholomorphic maps of real analytic hypersurfaces. *Math. Res. Lett.*, 7(2-3) :343–359, 2000.

- [26] N. Mir. On the convergence of formal mappings. *Comm. Anal. Geom.*, 10(1) :23–59, 2002.
- [27] J.K. Moser and S.M. Webster. Normal forms for real surfaces in \mathbb{C}^2 near complex tangents and hyperbolic surface transformations. *Acta Math.*, 150(3-4) :255–296, 1983.
- [28] N. Stanton. Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces. *Amer. J. Math.*, 118(1) :209–233, 1996.
- [29] J.C. Sunyé. On formal maps between generic submanifolds in complex space. *J. Geom. Anal.*, 19(4) :944–962, 2009.
- [30] J.C. Sunyé. Note on CR mappings of positive codimension. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138 :605–614, 2010.
- [31] A.E. Tumanov. Finite-dimensionality of the group of CR automorphisms of a standard CR manifold, and characteristic holomorphic mappings of Siegel domains. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 52(3) :651–659, 672, 1988.