



HAL
open science

Réduction de modèle en convection forcée par des méthodes d'identification. Application au sillage de cylindre circulaire

Jérôme Ventura

► **To cite this version:**

Jérôme Ventura. Réduction de modèle en convection forcée par des méthodes d'identification. Application au sillage de cylindre circulaire. Sciences de l'ingénieur [physics]. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2010. Français. NNT : . tel-00545988

HAL Id: tel-00545988

<https://theses.hal.science/tel-00545988>

Submitted on 13 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE ET
D'AEROTECHNIQUE

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGÉNIERIE EN MATÉRIAUX, MÉCANIQUE,
ENERGÉTIQUE ET AÉRONAUTIQUE

Domaine de Recherche : Energie, Thermique, Combustion

Présentée par

Jérôme Ventura

Réduction de modèle en convection forcée par des méthodes d'identification. Application au sillage de cylindre circulaire.

Directeur de thèse : **M. Daniel PETIT**

Co-encadrants : **Mme Marie-Josèphe ESTÈVE, M. Manuel GIRAULT**

Soutenue le 14 Octobre 2010
Devant la Commission d'Examen

JURY

Elena PALOMO	Professeur à l'Université de Bordeaux	Rapporteur
Marc MÉDALE	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille 1	Rapporteur
Marie-Josèphe ESTÈVE	Ingénieur Airbus France à Toulouse	Examineur
Manuel GIRAULT	Chargé de Recherches au CNRS à l'Institut P' à Poitiers	Examineur
Yvon JARNY	Professeur à l'Université de Nantes	Examineur
Daniel PETIT	Professeur à l'ENSMA de Poitiers	Examineur
Frédéric PLOURDE	Chargé de Recherches au CNRS à l'Institut P' à Poitiers	Examineur
Lorenzo PONS	Ingénieur à TURBOMECA à Bordes	Examineur

Remerciements

Mes remerciements pleins et entiers aux membres du jury et à Laurent Cordier, qui ont pris le temps de se pencher sur ces travaux et de les évaluer. Je suis en particulier reconnaissant envers les rapporteurs, Elena Palomo et Marc Médale, pour leurs analyses et commentaires, qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit.

Mes remerciements à Daniel Petit, mon directeur de thèse, pour m'avoir accueilli, orienté et fait confiance pendant ces trois ans. Daniel, promis craché, l'article arrive.

Ma gratitude va à Marie-Josèphe Estève, qui, parmi tant de choses, m'a fait confiance, m'a poussé, et m'a toujours encouragé à mettre en valeur le contenu et les résultats de mes travaux. Sincèrement, Marie-Jo, c'est pas grave pour les DVD.

A Manuel Girault, ma reconnaissance pour son encadrement, ses conseils, et pour la multitude de pistes, explorées ou non. Merci Manu d'avoir toujours accepté de me laisser faire mes choix et de ne jamais fermer la porte. Je suis sûr que la clé de Voynich est à ta portée. Courage.

Pascal Larrieu, Responsable des process CFD à Airbus, et Jérôme Bosc, Chef du Groupe Structuré et Multibloc, m'ont accueilli au sein du service Aerodynamic Methods and Tools, et je voudrais les remercier, eux et l'ensemble de l'équipe pour l'ambiance, les conseils, les encouragements, et les chocolats corses. Un merci particulier à Mathieu Meaux pour sa disponibilité, son expertise technique, les encouragements continus et la chaîne Optalia. *Tchimbé réd, pa molli, sé molli'a ki réd.* Tu me feras signe quand tu comprendras.

Un grand merci également à l'ensemble de l'équipe COST du département Fluide-Thermique-Combustion de PPRIME, pour l'accueil, les conseils techniques, les repas de labo, et les moyens mis à ma disposition. Une pensée particulière aux échanges avec Yassine et Manu, et aux prouesses informatiques de Jacques Nerault.

Enfin, toute mon affection à mes parents qui ont toujours répondu présents, été sources de soulagement, et sans qui, tout aurait été plus compliqué. A Caroline et à Didou, sans qui le monde serait moins intéressant, vos conseils et votre soutien m'ont donné du courage. Merci.

Table des matières

1	Introduction Générale	1
1.1	L'enrichissement des modèles numériques : une solution ?	1
1.2	Un enjeu de l'industrialisation de l'aérothermie numérique	2
1.3	Les modèles de remplacement	3
1.4	Objectifs de la thèse	6
1.5	Parcours et moyens utilisés	6
1.6	Que trouve t-on dans ce mémoire ?	9
	Bibliographie	11
2	Modèles d'ordre faible en mécanique des fluides numérique : quelques applications	12
2.1	Des modèles et des modèles alternatifs	14
2.2	Quelques techniques de remplacement de modèle en CFD	15
2.3	Exemples d'application des modèles d'ordre faible	26
2.4	Forme générale d'un modèle de remplacement	27
2.5	Conclusion	31
	Bibliographie	33
3	Réduction de modèle par identification modale en convection forcée	34
3.1	Introduction	36
3.2	La MIM, une méthode de réduction de modèle dynamique	36
3.3	Structures de modèles réduits d'écoulement	39
3.4	Méthodologies	54
3.5	Conclusion	65
	Bibliographie	67
4	Validation sur un cas académique : Ecoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé et réduction de modèle	68
4.1	Observables	70
4.2	Présentation du cas	71

4.3	Sensibilité des Observables	80
4.4	Reproduction et Prédiction des Allées de Karman	90
4.5	Réduction de modèle d'écoulements transitoires	115
4.6	Réduction de Modèle en écoulement quasi-transitoire	135
4.7	Conclusions du chapitre	156
	Bibliographie	161
5	Réduction de modèle par identification d'un écoulement transsonique autour d'un profil RAE2822	162
5.1	Profil d'aile RAE2822 : Réduction de modèle et surrogate modeling	164
5.2	Modélisation de l'écoulement et structure du modèle réduit	166
5.3	Tentative de construction d'un modèle d'écoulement compressible	170
5.4	Densification de l'échantillonnage et nouvelle construction de modèle	179
5.5	Conclusion	189
	Bibliographie	191
6	Conclusions et perspectives	192
A	Estimation de la dérivée des sorties des modèles par rapport aux entrées	197
A.1	Ce qu'on cherche à faire	197
A.2	Gradient de la réponse du modèle détaillé	198
A.3	Gradient de la réponse du modèle réduit	198

Chapitre 1

Introduction Générale

1.1 L'enrichissement des modèles numériques : une solution ?

Les premières applications industrielles de mécanique des fluides numériques (en anglais CFD pour *Computational Fluid Dynamics*) en aéronautique remontent aux années 70. Elles concernent alors des modèles simples stationnaires qui permettent déjà néanmoins de capter les ondes de chocs et la topologie générale des écoulements externes [1, 2] sans prendre en compte l'aspect visqueux de l'écoulement (calculs Euler). Au cours des années 90, les méthodologies numériques deviennent plus précises et plus robustes. Parallèlement, apparaissent des modèles prenant en compte des phénomènes qu'englobe la mécanique des fluides : couches limites, transferts thermiques convectifs ou diffusifs, rayonnement, réactions chimiques, combustions, ... Comme l'explique Gosman [3], les progrès réalisés dans les deux types d'activités que sont :

- le maillage,
- la modélisation de la physique

permettent d'obtenir des modèles numériques de mécanique des fluides correspondant de plus en plus à la richesse intrinsèque des écoulements rencontrés par l'industriel. Sur des géométries de plus en plus réalistes, il dispose de cas test expérimentaux (essais en soufflerie) lui permettant de valider les résultats obtenus par ses codes. Ainsi, depuis quelques années déjà, les simulations numériques sont devenues suffisamment robustes et précises pour être utilisées en remplacement de séries d'essais expérimentaux et pour être dans certains cas pleinement intégrées aux processus de conception [1, 2]. Dans cette optique, un certain nombre de codes "à tout faire" (*all purpose*) voient le jour durant les deux dernières décennies du 20^e siècle, s'inspirant des travaux universitaires précédents, et proposent à l'industriel une alternative au développement de codes "maison", plus tournés vers ses applications.

Les points mis en avant par Gosman montrent qu'un gain en précision et en réalisme passe presque nécessairement par une complexité accrue des modèles numériques, c'est-à-dire par une augmentation des degrés de liberté. Et nonobstant les avancées fabuleuses des outils informatiques en termes de capacités et de vitesse de calcul, ce gain se fait, de manière générale, au prix d'un temps effectif de calcul non négligeable, voire exorbitant.

1.2 Un enjeu de l'industrialisation de l'aérothermie numérique

1.2.1 Concept d'observables

Ces outils CFD apportent une connaissance globale des écoulements auxquels est confronté l'industriel. Cependant, les problèmes d'ingénierie se ramènent souvent à la recherche d'un certain nombre de valeurs spécifiques et identifiées à l'avance, dans diverses conditions. La connaissance de ces grandeurs, qu'on appelle des observables, s'obtient généralement par post-traitement d'un calcul CFD. La finesse du calcul et la complexité de la modélisation influent sur la précision de la résolution des champs. Mais il faut être conscient que seule la précision de l'estimation des observables est importante, et que c'est uniquement elle qui définit le choix du degré de résolution du calcul. Le processus CFD dans son ensemble doit être vu comme un modèle entrées / sorties, dans lequel :

- les entrées sont les conditions que l'on connaît (géométrie, conditions aux limites, termes sources, ...)
- les sorties sont les observables que l'on post-traite.

1.2.2 Observables spécifiques

A Airbus, les calculs d'aérothermie sont souvent utilisés pour déterminer :

- des champs de température pariétale,
- des coefficients de transferts convectifs, ou des lois empiriques fournissant ces coefficients.

Il s'agit de grandeurs dont les valeurs sont définies par des écoulements et qui nécessitent le recours à des simulations numériques. Les entrées de ces modèles CFD sont généralement des conditions opératrices liées au fonctionnement de l'avion en conditions de vol. Il peut s'agir par exemple des flux thermiques dissipés par les systèmes électriques. Dans le cas d'un refroidissement de compartiment moteur, le flux thermique à dissiper par les systèmes de refroidissement dépend de la poussée du moteur, qui agit alors comme une condition opératrice. Le lecteur notera que même si le numéricien a accès à toutes les composantes de l'écoulement (champs de vitesse, de température, de pression ...), il n'est pas toujours intéressé par le détail de celui-ci.

Bien entendu, parmi les conditions opératrices qui servent d'entrées aux calculs d'aérodynamique interne, certaines proviennent d'éléments de l'avion dont le fonctionnement est lui-même objet de modélisation dans d'autres départements. Les sorties de ces modèles sont utilisées comme entrées des modèles CFD. De la même façon, parmi les sorties des modèles aérothermiques, certaines servent d'entrées pour d'autres modèles, qui ne sont pas forcément aérothermiques. Ainsi, deux modèles peuvent être interfacés, les sorties de l'un correspondant aux entrées de l'autre et vice-versa. Pour bien appréhender le comportement de l'avion dans son ensemble, il est alors indispensable de bien traiter les couplages entre les différents modèles.

Dans tous les cas, les entrées des calculs aérothermiques sont transitoires, puisqu'elles évoluent au cours d'une phase de vol. Or, les observables aérothermiques sont particulièrement sensibles à ces évolutions au cours du temps. A cause de cette dynamique forte, des calculs CFD stationnaires ne suffisent pas pour parvenir à une connaissance suffisamment précise des observables ciblés. Cependant, bien qu'impressionnants, les moyens de calculs ne permettent pas d'intégrer dans un processus de conception des calculs transitoires de façon industrielle sur toute une phase de vol. L'une des difficultés auxquelles on est confronté tient de l'écart entre les temps caractéristiques d'évolution des champs de vitesse, et les temps d'évolutions des

observables thermiques (température, flux, ...). Dans un calcul aérothermique transitoire, les évolutions thermiques sont les plus lentes. Par conséquent, elles conditionnent la durée simulée. Typiquement, les constantes de temps thermiques sont de l'ordre de plusieurs dizaines de minutes. Et parmi les différentes étapes qui constituent une phase de vol, le décollage et la montée en altitude durent une demi-heure. A l'inverse, les évolutions les plus courtes dimensionnent le pas de temps utilisé au cours de la simulation. Dans la mesure où il y a plusieurs ordres de grandeurs entre les constantes de temps associées au champ de vitesse et les constantes de temps thermiques, le nombre de pas de temps nécessaires à une simulation aérothermique sur toute une phase de vol devient très important et dépasse ce qui peut être intégré dans un processus de conception industrielle.

1.2.3 Exemple du calcul de compartiment moteur

L'un des projets dans lequel s'est inscrite cette thèse tient de la résolution de problèmes multi-physiques. On entend par là des problèmes mettant en jeu différents systèmes couplés qui ne sont pas régis par les mêmes équations physiques. On parle aussi de problèmes multidisciplinaires. Il s'agit par exemple de transferts thermiques conjugués (en anglais *Conjugate Heat Transfers* ou CHT) : une partie du domaine voit s'écouler un fluide en interaction avec une partie solide, dans laquelle on étudie des transferts thermiques. A Airbus, on essaie d'être en mesure d'évaluer un champ de température en régime transitoire dans un système impliquant à la fois :

- une masse solide (la structure) dont la température maximale doit rester en deça d'un certain seuil,
- une zone fluide siège de phénomènes de convection forcée, et en interaction avec la structure.

On dispose à Airbus de solveurs numériques spécialisés dans la prise en compte, soit de la partie structure seule, soit de la région fluide seule. Plutôt que d'utiliser ou de développer des solveurs capables de traiter un problème multi-physique dans sa globalité, on préfère conserver l'expertise déjà acquise relativement aux solveurs monodisciplinaires. D'où le choix de dissocier le problème en deux problèmes classiques.

La méthode utilisée est itérative : les deux solveurs (CFD et thermique) sont utilisés séparément et de manière itérative (voir figure 1.1). A une itération donnée, les résultats du calcul fluide sont utilisés comme conditions aux limites du calcul thermo-mécanique. Les résultats de ce calcul définissent alors les conditions pour un nouveau calcul fluide, ce qui achève l'itération.

On se rend compte que dans ce genre de processus itératif, le temps nécessaire à la réalisation de chaque calcul aérothermique augmente avec la complexité de la géométrie (la figure 1.2 est un exemple de géométrie classiquement rencontrée). De plus, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1.2.2, une modélisation transitoire est nécessaire pour obtenir des résultats réalistes. Le nombre de pas de temps requis pour parvenir à traiter correctement ce type de problème devient alors un facteur limitant.

Pour Airbus, il apparaît donc nécessaire de se doter d'une méthode d'obtention de résultats CFD stationnaires et transitoires avec un temps de calcul négligeable par rapport à ce qui se fait classiquement aujourd'hui, tout en prenant en compte les phénomènes clés de l'écoulement.

1.3 Les modèles de remplacement

Nous venons de voir que, à la recherche d'une précision toujours accrue, la stratégie adoptée communément revenait à augmenter la complexité des modèles numériques, c'est-à-dire, leur

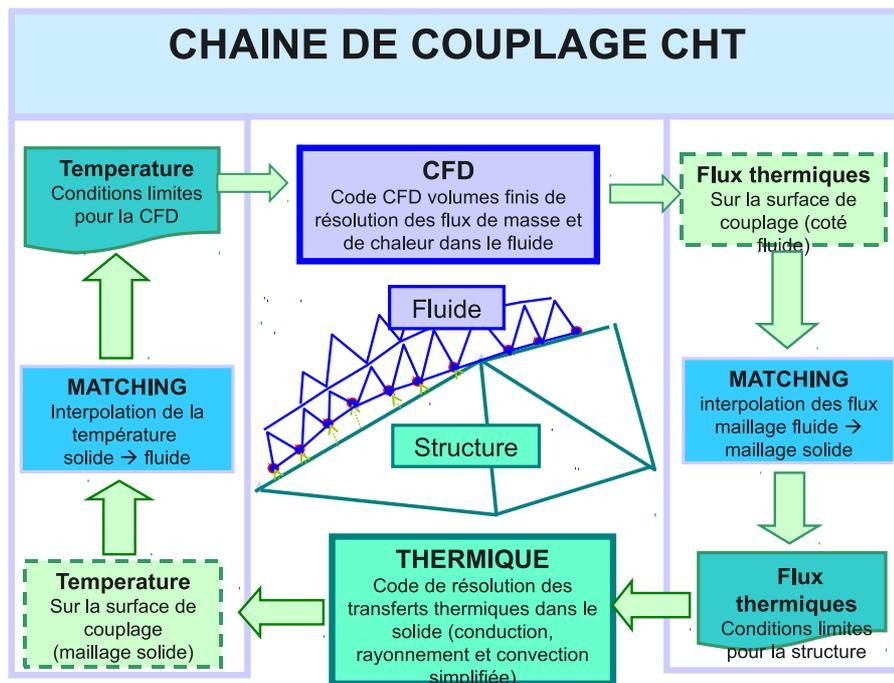


FIG. 1.1 – Enchaînement des actions réalisées au cours d’une itération d’un algorithme de couplage en transferts thermiques conjugués (Conjugate Heat Transfers en anglais, d’où le nom de la chaîne). L’étape dite de “matching” sert de liaison entre les deux solveurs, et permet de gérer le fait que l’interface entre les domaines fluide et solide soit maillée différemment de part et d’autre.

nombre de degrés de libertés. Pour un problème donné, ces modèles cherchent une solution dans un espace dont la dimension est ce nombre de degrés de liberté. On parle de la dimension ou de la taille du modèle. Et en général, les temps de résolution des écoulements numériques augmentent avec la taille du modèle numérique utilisé.

Ainsi, pour gagner en temps de calcul à capacités machines fixées, on cherchera naturellement à utiliser un modèle numérique de dimension aussi faible que possible. Par exemple, on peut augmenter la taille de maille pour diminuer la taille du maillage. On peut aussi utiliser un modèle de turbulence à une équation plutôt que deux. On peut travailler sur des géométries 2D plutôt que 3D. Cependant, avoir recours à ces manipulations pour diminuer les temps de calculs implique d’appauvrir le contenu des écoulements simulés. Par exemple, passer en deux dimensions empêche de capter les structures tridimensionnelles, comme les différents modes du détachement tourbillonnaire (*c.f.* section 4.4.1). Augmenter la taille des cellules du maillage conduit à une résolution de plus mauvaise qualité des régions à forts gradients de vitesse (couches de cisaillement, couches limites) ou de pression par exemple (ondes de choc). A partir d’un modèle numérique dérivé de la résolution des équations de la mécanique des fluides (et de n’importe quelles équations de la mécanique des milieux continus), il y a un compromis à faire entre la richesse des écoulements que l’on désire obtenir, et le prix à payer pour les simuler.

Mais depuis quelques années, on voit se développer des méthodes alternatives à l’utilisation de modèles numériques basés sur la résolution des équations de Navier-Stokes. Il ne s’agit plus de résoudre des équations en chaque point du maillage. On conçoit des modèles dont les entrées et les sorties sont analogues à celles d’un modèle CFD, mais dont la taille est nettement plus faible que celle du modèle CFD référent. Le modèle de faible dimension est alors construit ou ajusté de manière à fournir pour une entrée donnée, une approximation de la sortie du modèle CFD correspondant à cette entrée.

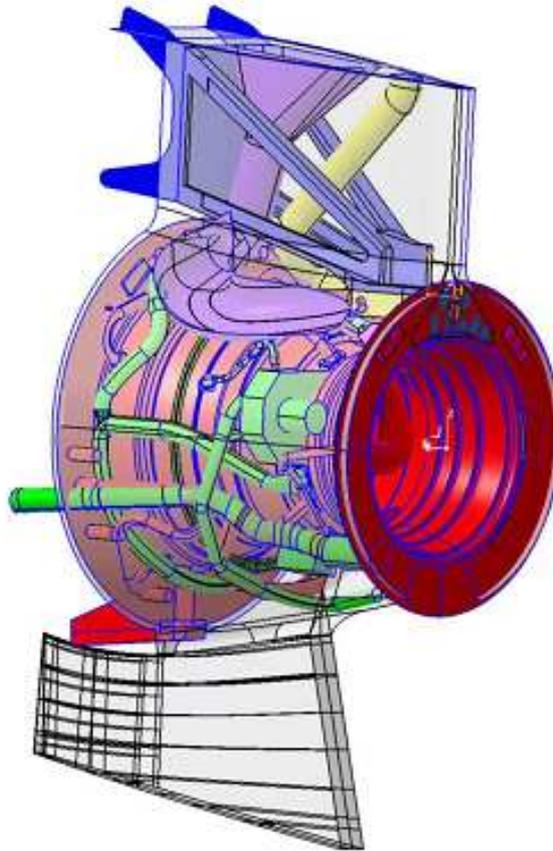


FIG. 1.2 – Géométrie simplifiée de compartiment moteur - *Projet ATRAN (Aérodynamique TRANSitoire, étude de l'aérodynamie transitoire au sein d'une nacelle, collaboration ONERA, Airbus, Snecma Moteur)*

Quelle que soit la méthode de construction de ces modèles alternatifs, ils répondent fonctionnellement au besoin d'abaisser drastiquement la taille du modèle utilisé, sans trop perdre la richesse de la description des écoulements simulés. C'est pourquoi nous parlerons de modèles de remplacement. Dans la mesure où l'on accepte d'avoir des écarts faibles par rapport au modèle numérique de référence, ces modèles correspondent parfaitement à l'enjeu que nous venons de définir :

1. par nature, une fois établis, ils sont quasiment gratuits à utiliser,
2. étant construits à partir d'écoulements calculés numériquement, ils sont capables par construction de reproduire les phénomènes que peut résoudre le solveur numérique classique.

De nombreuses méthodes de modèles de remplacement existent, et certaines d'entre elles sont présentées dans le chapitre 2. Chaque méthode a ses spécificités en termes de :

- types d'entrées et de sortie
- méthode de construction
- méthode d'échantillonnage
- ...

Dans le cadre de la résolution de problèmes multi-physiques de type transferts thermiques conjugués (transferts thermiques entre une zone solide et une zone fluide), un modèle réduit doit permettre, sur une géométrie, de fournir tout ou partie d'un champ de vitesse et de tem-

pérature, en fonction de conditions aux limites qui peuvent être différentes à chaque utilisation du modèle réduit, et ce, en stationnaire ou en transitoire. Pour répondre à cette problématique, la méthode retenue dans le cadre de cette thèse est la méthode d'identification modale. Il s'agit d'une méthode développée depuis plusieurs années au sein de l'équipe COST du département Fluide-Thermique-Combustion de l'institut PPRIME à Poitiers (ancien Laboratoire d'Etudes Thermiques). L'identification modale a d'abord été développée pour des applications thermiques linéaires [4, 5], puis a été étendue à certains cas non linéaires ([6]). Les travaux de Balima [7] et de Rouizi [8] ont montré la faisabilité de cette méthode pour des problèmes non linéaires de mécanique des fluides.

1.4 Objectifs de la thèse

Nous chercherons à présenter ici une méthodologie de construction de modèles réduits qui devront :

- produire des champs de vitesse et de température d'écoulements turbulents correspondant à des conditions limites transitoires,
- s'appuyer sur des résultats issus de simulations numériques, tout en restant applicables à des données provenant d'une campagne expérimentale,
- produire des sorties quasi-instantanément avec un faible niveau d'erreur,
- et être applicables à des écoulements complexes.

1.5 Parcours et moyens utilisés

1.5.1 De l'exemple industriel au cas académique

En collaboration avec le département Structure, le service Méthodes Aérodynamiques d'Airbus développe des outils de transferts thermiques conjugués. Les applications sont diverses : systèmes de ventilation, refroidissement de systèmes électriques, convection naturelle sous flux solaire, . . . Or une simulation numérique de ce type d'écoulement est un processus lourd. Le cas du compartiment moteur (figure 1.3) illustre bien les difficultés auxquelles on peut être confronté. Ce cas de simulation met en jeu :

- des transferts convectifs,
- des jets,
- de nombreux obstacles,
- des décollements et des zones de recirculation,
- une prise en compte nécessaire de la turbulence,
- des constantes de temps (cinétique et thermique) très éloignées.

Pour accélérer les différents tests nécessaires à la mise en place de la méthodologie de réduction de modèle, un cas d'écoulement moins lourd devait être choisi. L'écoulement turbulent autour d'un cylindre circulaire a la particularité de mettre en jeu une zone de recirculation similaire à celles que l'on retrouve dans l'écoulement auour des obstacles (tuyaux) du compartiment moteur.

Pour introduire des transferts convectifs, le cylindre circulaire est chauffé. On considère qu'il est creux et doté d'une épaisseur. On applique une condition limite thermique de type flux imposé ou température imposée sur sa surface interne et on résout l'équation de l'énergie dans la masse solide en plus des équations de Navier-Stokes dans la zone fluide. On s'attaque donc à un problème de transferts thermiques conjugués. Ainsi, nous pouvons nous intéresser à

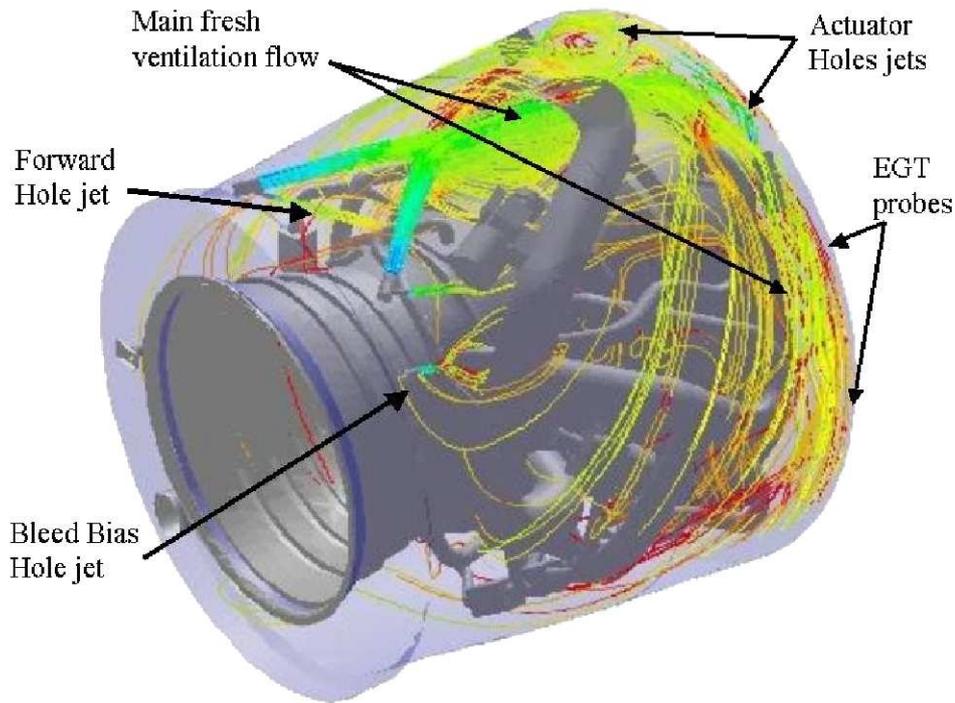


FIG. 1.3 – Exemple d'écoulement dans un compartiment moteur - Projet ATRAN

l'applicabilité de la méthode non plus au problème de mécanique des fluides seul, mais aussi au problème multi-disciplinaire tel qu'il est évoqué dans le problème du compartiment moteur décrit plus haut.

1.5.2 Les développements

Parmi les objectifs de la thèse, deux sont particulièrement importants :

- les écoulements traités doivent pouvoir être instationnaires ;
- les transferts thermiques doivent pouvoir être pris en compte.

En 2006, Olivier Balima [7] a développé un outil de réduction de modèle permettant d'estimer un champ de vitesse :

- stationnaire laminaire et isotherme
- défini par une condition limite en vitesse
- bidimensionnel uniquement

Pour élargir le cadre d'application de cette méthode afin de répondre aux objectifs de la thèse, des stratégies dans la mise en place de modèles d'ordre faible ont été développées dans différents cas, puis testées sur l'écoulement généré autour d'un cylindre circulaire. Ces différents cas sont visuellement résumés sur la figure 1.4. Ils y sont présentés sous forme de différentes réalisations, correspondant chacune à un modèle réduit construit au cours de cette thèse.

Réalisation 1 : reproduire un calcul de détachement tourbillonnaire

A partir d'un nombre de Reynolds de 47, le sillage derrière un cylindre circulaire devient instationnaire (voir la section dédiée 4.4.1). Aux nombres de Reynolds concernés par cette thèse,

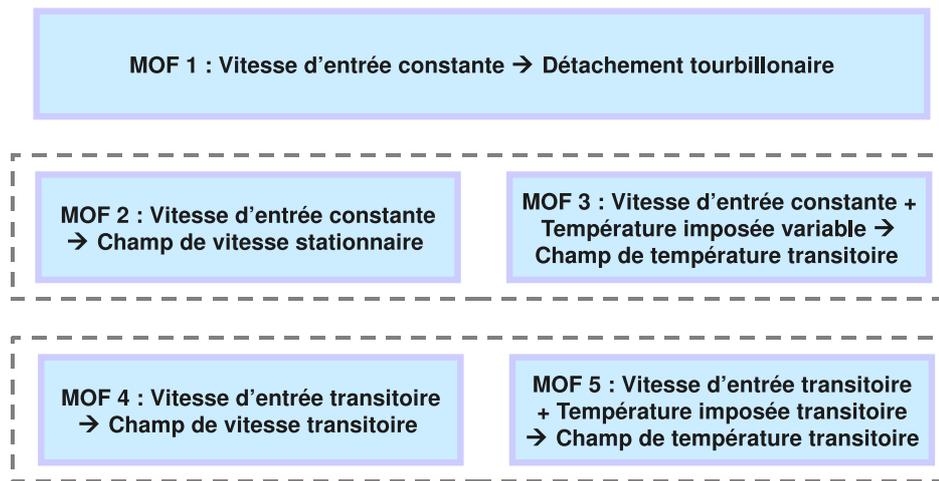


FIG. 1.4 – Pour asseoir la méthodologie d'obtention de modèles d'ordres faibles d'écoulements (MOF sur la figure), différents types de dynamique ont fait l'objet de stratégies adaptées.

cette instationnarité se traduit par des phénomènes dont la période est relativement courte (de l'ordre de 1 à 10 millisecondes) par rapport à la dynamique de nos conditions aux limites.

Numériquement, on peut s'attacher à simuler, ou pas, et donc à observer, ou pas, ces instationnarités. Pour mieux le comprendre interprétons le pas de temps numérique comme la période d'acquisition d'une sonde. S'il est significativement plus faible que la période des instationnarités décrites, alors la simulation permettra de les résoudre. Au contraire, ce même pas de temps va gommer une instationnarité dont la fréquence est trop grande. Ainsi, le pas de temps agit comme une fréquence de coupure. Il permet de faire apparaître sélectivement certains phénomènes physiques en fonction de leur fréquence.

Plus clairement, pour une vitesse amont constante, en choisissant bien le pas de temps, on peut observer le lâcher de tourbillons dans le sillage du cylindre. Le premier modèle d'ordre faible doit être capable de faire le lien entre la vitesse amont et ce lâcher.

Comme cet écoulement a l'avantage d'être relativement simple à simuler numériquement, il présente un intérêt en tant que sujet de test pour les schémas numériques, les méthodes d'optimisation et les formulations spécifiques du modèle réduit.

Réalisation 2 : émuler un champ de vitesse turbulent stationnaire

Nous cherchons maintenant à prédire, à l'aide d'un modèle d'ordre faible, pour une condition limite en vitesse constante, la topologie stationnaire de l'écoulement. Pour une vitesse amont fixée, un calcul stationnaire propose un champ de vitesse constant autour du cylindre circulaire. Le modèle d'ordre faible doit pouvoir estimer ce champ de vitesse en fonction de la vitesse amont.

Réalisation 3 : prédire un champ de température instationnaire pour un champ de vitesse stationnaire

On se met dans un cas de couplage faible dans lequel la température a un effet négligeable sur le champ de vitesse. Sur l'écoulement stationnaire précédent, en appliquant dans la partie solide une condition limite thermique dépendante du temps, on obtient dans le cylindre et dans le sillage, un champ de température instationnaire que l'on veut être en mesure de prévoir. Le modèle d'ordre faible doit donc associer une vitesse amont constante et une commande

thermique dépendante du temps, à l'évolution au cours du temps d'un champ de température (ou de n'importe quels observables thermiques).

Réalisation 4 : émuler un champ de vitesse turbulent instationnaire

Dans le prolongement de la seconde étape, on rend la condition limite en vitesse dépendante du temps. En conséquence, la forme du sillage du cylindre se modifie au cours du temps (sans détachement tourbillonnaire). Le modèle d'ordre faible que l'on construit doit en fournir une approximation.

Réalisation 5 : estimer un champ de température instationnaire pour un champ de vitesse instationnaire

Toujours dans un cas de couplage faible, le champ de température dépend du temps, non seulement à cause d'une condition limite thermique dépendante du temps, mais aussi parce que le sillage se modifie au cours du temps. Les évolutions au cours du temps de la vitesse d'entrée et de la commande thermique constituent les entrées du modèle d'ordre faible. Les champs de températures transitoires (ou n'importe quel autre observable thermique) en sont les sorties.

1.5.3 Les codes et les ressources machines

La construction de modèles réduits nécessite au préalable de disposer d'exemples d'écoulements que l'on désirera émuler par la suite. Ces exemples peuvent être obtenus soit à la suite d'une campagne d'essais, soit comme c'est le cas dans le présent document, au moyen de simulations numériques. Les écoulements qui ont servi de référence à la réalisation des modèles réduits présentés dans cette thèse ont été simulés à l'aide du logiciel commercial Fluent.

Les codes d'obtention de modèle d'ordre faible ont été développés en Fortran 90. Ils font appel à des techniques d'optimisation non-linéaires et des sous-programmes d'algèbre linéaire de la bibliothèque en accès libre LAPACK. Ils ont été conçus parallélisés suivant le standard MPI (*Message Passing Interface*).

1.6 Que trouve t-on dans ce mémoire ?

Ce mémoire a été organisé pour offrir au lecteur une vue d'ensemble sur le travail réalisé pour atteindre les objectifs fixés au 1.4. Les différents chapitres doivent permettre de mieux appréhender la notion de mise en place de modèles d'ordre faible, de bien cerner l'originalité de la méthode utilisée, et de présenter les différents cas d'application et les stratégies spécifiques mises en place.

- Le second chapitre se consacre à présenter diverses stratégies de remplacement de modèle utilisées dans le cadre de la mécanique des fluides numérique. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir une approximation de l'état d'un système fluide sans avoir à recourir à une simulation CFD coûteuse. On introduit dans le premier chapitre certaines d'entre elles qui ont la particularité, comme la méthode que l'on utilisera, d'utiliser des simulations numériques réalisées en amont.
- Le troisième chapitre est dédié aux développements de la méthode d'identification modale dans le domaine de la réduction de modèles d'écoulements de convection forcée. On expliquera d'abord les principes généraux qui justifient l'utilisation de la méthode que nous avons retenue. Puis on décrira les différentes étapes de la construction d'un modèle

d'ordre faible par identification, en les illustrant par leur application aux écoulements de type Navier-Stokes.

- Le quatrième chapitre expose en application concrète, des modèles d'écoulement obtenus par identification. Il s'agira d'y présenter les applications des méthodes d'identification à divers types d'écoulement autour d'un cylindre circulaire. Le chapitre commence par une illustration de l'importance de la notion d'observables introduite dans le paragraphe 1.2.1. Puis divers modèles réduits correspondant aux réalisations 1 à 5 sont décrits et testés.
- Le dernier chapitre présente les premiers modèles obtenus par identification, dans le cas d'écoulements compressibles. On s'écarte du cas de l'écoulement incompressible autour du cylindre circulaire pour évaluer les performances de la méthode d'identification modale dans le cadre d'écoulements sub à transsoniques autour d'un profil d'aile 2D RAE2822.

Synthèse

- Industriellement, les systèmes mettant en jeu des phénomènes fluides et thermiques transitoires nécessitent des simulations CFD dont le coût pénalise les cycles de conception (nombre de pas de temps trop important).
- L'ingénieur s'intéresse souvent à des grandeurs spécifiques, les observables, dont la connaissance passe par les simulations CFD.
- Dans de nombreux cas, une prise en compte d'effets instationnaires ou transitoires est nécessaire pour rendre ces simulations réalistes, mais restent hors de prix.
- Dans les processus de conception on fait de plus en plus appel à des modèles de remplacement (en anglais *surrogate models*) qui offrent une approximation à bas coût des observables issus des simulations CFD.
- L'objectif de cette thèse est de développer une méthodologie pour obtenir un modèle de remplacement orienté vers la prédiction d'écoulements transitoires anisothermes turbulents.
- La méthode doit être utilisée pour estimer les champs de vitesse et de température dans un compartiment moteur, mais le cas test choisi pour la développer est l'écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé.

Bibliographie

- [1] J.B. Vos, A. Rizzi, D. Darracq, E.H. Hirschel, Navier-Stokes solvers in European aircraft design. *Progress in Aerospace Sciences*, Volume 38, Issue 8, November 2002, Pages 601-697, ISSN 0376-0421, DOI : 10.1016/S0376-0421(02)00050-7.
- [2] F.T. Johnson, E.N. Tinoco, N.J. Yu, Thirty years of development and application of CFD at Boeing Commercial Airplanes, Seattle *Computers & Fluids*, Volume 34, Issue 10, December 2005, Pages 1115-1151, ISSN 0045-7930, DOI : 10.1016/j.compfluid.2004.06.005.
- [3] A.D. Gosman, Developments in Industrial Computational Fluid Dynamics *Chemical Engineering Research and Design*, Volume 76, Issue 2, 5th UK National Heat Transfer Conference, February 1998, Pages 153-161, ISSN 0263-8762, DOI : 10.1205/026387698524721.
- [4] D. Petit, Réduction de modèles et identification de modèles d'ordre réduit. Application aux processus de diffusion thermique. *Thèse de doctorat d'état*, Université de Provence, 1991
- [5] E. Videcoq, Problèmes inverse en diffusion thermique instationnaire : Résolution par représentation d'état et apport de la réduction de modèle. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, France, 1999
- [6] M. Girault, Résolution de problèmes inverses en thermique par modèles réduits : applications en conduction non-linéaire et en convection forcée. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, France, 2003
- [7] O. Balima, Réduction de modèle non linéaire par identification modale : application en thermique et comparaison avec la méthode POD-Galerkin. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, France, 2006.
- [8] Y. Rouizi, Réduction de modèle par identification en convection forcée pour des systèmes soumis à des conditions aux limites instationnaires : application à l'écoulement le long d'une marche avec contrôle thermique par retour d'état. *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, France, 2010.

Chapitre 2

Modèles d'ordre faible en mécanique des fluides numérique : quelques applications

Résumé

De nombreux problèmes peuvent s'exprimer de façon générique : “ Quelle est la valeur prise par la grandeur qui m'intéresse, lorsque varie l'environnement du système dont elle dépend ?”.

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de mettre en place un modèle, c'est-à-dire de déterminer :

1. quelles sont les grandeurs que l'on désire observer,
2. quelle est la part de l'environnement qui a un impact sur ces grandeurs,
3. de quelle manière, la connaissance de l'environnement permet de retrouver la réponse à notre problème.

En ingénierie, la résolution classique de ce genre de problème passe par l'utilisation d'un modèle numérique : la relation entre l'entrée (l'environnement) et la sortie (les grandeurs à observer), passe par une discrétisation du système étudié et une résolution d'équations matricielles.

Lorsque l'on dispose des sorties du modèle numérique correspondant à un certain nombre d'entrées différentes, l'utilisation de *surrogate models* (modèles de remplacement), ou de modèles dits réduits, constitue une alternative intéressante au réemploi des modèles numériques. Ce travail est consacré à la mise en place et à diverses applications de l'une d'elles, la Méthode d'Identification Modale, en mécanique des fluides numérique (CFD pour *Computational Fluid Dynamics*). Cependant, il existe en CFD plusieurs méthodes de réduction de modèle ou de surrogate models.

Ce chapitre est dédié au développement et à l'utilisation dans le domaine de la CFD, de quelques-unes d'entre elles, à savoir :

- des méthodes dites de surface de réponse : surfaces de réponse polynômiales, krigeage, et fonctions de base radiales ;
- des méthodes dites de réduction de modèle : celles basées sur la décomposition orthogonale en modes propres, et les méthodes d'identification modale que nous développons dans le reste de ce document.

Le fonctionnement et les particularités de chaque méthode sont brièvement rappelés. Leurs spécificités sont illustrées dans un second temps par quelques exemples d'applications sur lesquelles ces méthodes ont été éprouvées. Puis, nous verrons qu'en plus de leur objectif commun, elles partagent également un même schéma opérateur. Ce recul pris, nous pourrions aborder la

réduction de modèle et le surrogate modelling de façon plus synthétique, souligner les forces de la méthode d'identification modale, et justifier son choix pour les travaux qui seront présentés dans cette thèse.

Sommaire

2.1	Des modèles et des modèles alternatifs	14
2.2	Quelques techniques de remplacement de modèle en CFD	15
2.2.1	Introduction	15
2.2.2	Surfaces de réponse	16
2.2.3	Réduction de modèle par Décomposition Orthogonale en Modes Propres	18
2.2.4	Méthodes d'identification de modèle	21
2.2.5	Comparaison des champs d'utilisation de ces méthodes	23
2.3	Exemples d'application des modèles d'ordre faible	26
2.3.1	Présentation	26
2.3.2	Modèles à plusieurs entrées et une sortie	26
2.3.3	Modèles à peu d'entrées et grand nombre de sorties	26
2.3.4	Conclusion partielle	27
2.4	Forme générale d'un modèle de remplacement	27
2.4.1	Description fonctionnelle	27
2.4.2	Exemples	28
2.4.3	Autres avantages des méthodes d'identification	30
2.5	Conclusion	31
	<i>Bibliographie</i>	33

2.1 Des modèles et des modèles alternatifs

Dans une terminologie empruntée en partie au domaine de l'automatique, un modèle est une description mathématique d'un phénomène réel mettant en jeu :

- un ensemble de p valeurs supposé connu, appelé "l'entrée",
- un ensemble de q valeurs supposé inconnu, appelé la "sortie" du modèle,
- une relation déterministe entre les deux, qui pour chaque valeur de l'entrée, associe une valeur en sortie.

Dans ce qui suit, on notera u l'entrée du modèle, et y sa sortie. La figure 2.1 résume cette définition d'un modèle. Par exemple, imaginons que l'on veuille prédire la traînée d'une aile portante 2D. Si la forme est fixée, on peut établir un modèle qui, en fonction du nombre de Mach à l'infini amont et de l'angle d'incidence (l'entrée), établit sa traînée (la sortie).

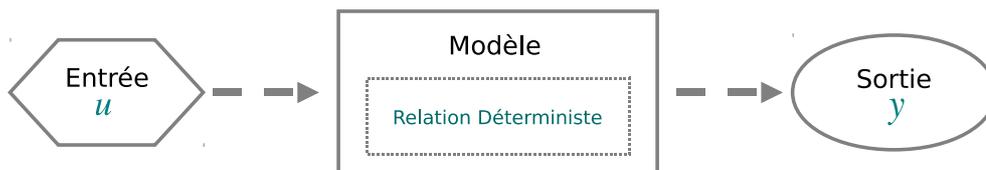


FIG. 2.1 – Fonctionnement simplifié d'un modèle

La relation entre u et y peut éventuellement mettre en œuvre la résolution d'une équation intermédiaire, l'équation d'état.

$$F(S, u) = 0 \quad (2.1)$$

La solution de cette équation, notée S , est appelée la *variable d'état* et est utilisée ensuite pour évaluer y . Le fonctionnement d'un tel modèle est résumé par la figure 2.2. En mécanique des fluides numérique, la variable d'état peut classiquement être constituée des valeurs prises par les variables conservatives dans toutes les cellules du maillage. Dans ce cas, l'ensemble des équations algébriques que doit résoudre le solveur forment l'équation d'état du système. Dans notre exemple du profil d'aile, la traînée de l'aile peut être déterminée à partir d'un post-traitement de la variable d'état (champs de variables conservatives et de pression). Le chapitre 3 illustre avec plus de détails les notions de variables et d'équations d'état.

En présence d'une équation d'état, la difficulté de la résolution du problème tient alors dans la résolution de l'équation d'état. C'est pour cela que, dans ce cas, on dit que la dimension du problème est celle de l'équation d'état.

La réduction de dimensionalité d'un modèle de référence (u, S, F, G, y) peut se décrire comme la mise en place d'un modèle (u, s, f, g, y^*) , dont la dimension est plus faible que celle du mo-

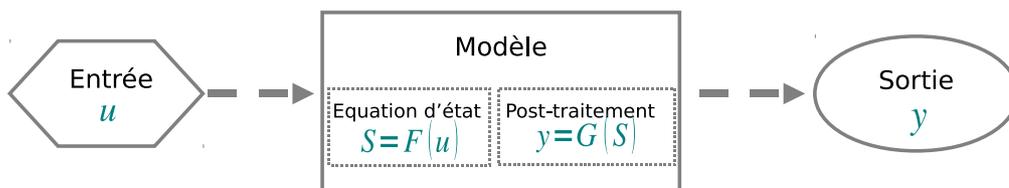


FIG. 2.2 – Fonctionnement simplifié d'un modèle avec équation d'état

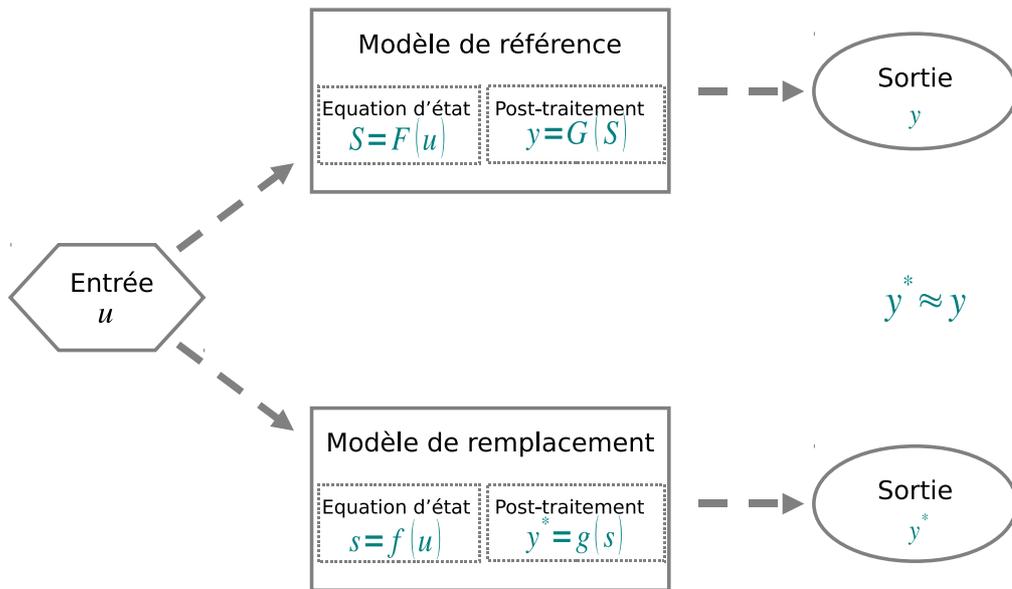


FIG. 2.3 – Le modèle de remplacement propose des sorties proches de celles du modèle de référence.

dèle de référence, et qui fournit une approximation “raisonnable” des sorties du modèle de référence :

$$y^*(u) \approx y(u) \quad (2.2)$$

La notion de modèle de remplacement peut-être illustrée par le schéma de la figure 2.3. Ce modèle peut-être appelé “modèle réduit”, “modèle d’ordre faible” ou “surrogate model” (modèle alternatif) selon la méthode avec laquelle il a été construit.

De façon générale, la littérature propose le terme de *surrogate models* pour désigner ces modèles de faible dimension, destinés à agir en remplacement de modèles coûteux plus précis. Parmi les méthodes permettant de construire des surrogate models, on peut citer :

- les méthodes dites de réduction de modèle,
- les méthodes dites à surface de réponse,
- les métamodèles,
- ...

L’objectif de la section suivante est de faire un tour d’horizon, et en aucun cas exhaustif, de certaines méthodes d’obtention de surrogate models employées dans le domaine de la mécanique des fluides numérique (CFD).

2.2 Quelques techniques de remplacement de modèle en CFD

2.2.1 Introduction

Nous allons dans ce paragraphe présenter brièvement trois types de méthodes utilisées pour remplacer des calculs de mécanique des fluides numérique, à savoir :

- les méthodes explicitement dites de surfaces de réponse ;
- les méthodes issues de la décomposition orthogonale en modes propres (POD ou *Proper Orthogonal Decomposition*) ;
- les méthodes d’identification de modèle réduit, développées dans la Branche Thermique du Département Fluide-Thermique-Combustion de l’Institut PPRIME.

2.2.2 Surfaces de réponse

Les méthodes d'approximation de fonction par surface de réponse désignent un ensemble de techniques statistiques permettant de construire un modèle approché de la réponse du système à des entrées variées. Typiquement, ces méthodes proposent une approximation des réponses d'un système dans tout un domaine de définition \mathcal{D}_u , lorsque l'on connaît la réponse de référence en quelques points de \mathcal{D}_u , appelés points d'échantillonnage.

En ce sens, si un modèle d'ordre faible fonctionne par interpolation ou par régression, il entre dans la catégorie des surfaces de réponse. Nous présentons dans les paragraphes qui suivent, quelques méthodes dites à surface de réponse.

Dans ce qui suit, on supposera que l'on dispose d'un ensemble de n_s réalisations du modèle de référence en réponse à n_s valeurs pour l'entrée $u : u \in (u^i)_{i=1, \dots, n_s}$. Cette entrée est elle-même une matrice colonne de dimension p . Pour reprendre l'exemple de l'aile portante utilisé en introduction du chapitre, l'entrée avait $p = 2$ composantes : le nombre de Mach à l'infini amont et l'angle d'incidence.

Les méthodes présentées ci-dessous répondent alors à la problématique : à l'aide des n_s réalisations, comment obtenir un modèle de faible dimension aussi fidèle au modèle de référence que possible ?

2.2.2.1 Surfaces de réponse à fonctions de base polynômiales

En anglais, on parle de *polynomial based Response Surface Methodology (RSM)*. Les modèles de ce type peuvent se mettre sous la forme générale :

$$y^* = y^*(u) = \sum_{i=1}^n h_i \phi_i(u) \quad (2.3)$$

Dans (2.3), les ϕ_i sont des éléments d'une base de polynômes. Il s'agit en général de monômes de degrés 2, 3, 4, ... suivant la nature du modèle (quadratique, cubique, ...). La construction du modèle consiste à trouver les coefficients h_i qui lui permettront de fournir une bonne approximation des données de référence, obtenues expérimentalement ou à la suite d'essais numériques. Lorsque l'on dispose de suffisamment d'échantillons, c'est-à-dire de réponses du modèle d'origine à différentes entrées, on peut utiliser une formule analytique qui définira les h_i qui minimiseront l'erreur quadratique pour ces entrées précises.

2.2.2.2 Surfaces de réponses par krigeage

Le krigeage (*kriging* en anglais) est une méthode statistique d'évaluation de fonction, qui utilise les corrélations entre l'entrée pour laquelle on veut une approximation de la fonction, et les n_s entrées pour lesquelles la valeur exacte de cette fonction a été calculée (échantillonnage).

En notant $y^*(u)$ la réponse du modèle réduit à une entrée quelconque u , et Y^\sim la matrice formée par les échantillons, on a ([1]) :

$$y^*(u) = f(u) \beta(Y^\sim) + \tau(u) R(Y^\sim - F\beta) \quad (2.4)$$

Dans (2.4), y^* est un scalaire (il n'y a qu'un observable). $f(u) = {}^t(u^0, u^1, \dots, u^{n_p-1})$ et $\tau(u)$ sont des fonctions aisées à calculer. $F \in \mathcal{M}_{n_s, n_p}(\mathbb{R})$ est la matrice de régression formée des $f(u)$ pris aux points d'échantillonnage. $f(u) \beta$ est une fonction de régression (de l'entrée) polynômiale d'ordre faible, dont les n_p coefficients sont les éléments de β . Par exemple, Laurenceau *et al.* [1] choisissent $f(u) = 1$ ($n_p = 1$, et $F = 1$). $\tau(u)$ est elle une fonction de corrélation qui

compare u à chaque entrée u^i utilisée pour l'échantillonnage. Il s'agit d'une matrice colonne de n_s (nombre d'échantillons) éléments vérifiant :

$$\tau_i(u) = SCF_{\theta}(u, u^i), \quad i = 1, \dots, n_s \quad (2.5)$$

$SCF_{\theta}(u, u^i)$ est une fonction de corrélation spatiale (au sens de l'espace des entrées u) entre u et u^i , réglable par un ensemble de paramètres θ . SCF_{θ} entre aussi en jeu dans la construction des matrices β et R , établies à partir des données (entrées et sorties) de l'échantillonnage. Cette fonction doit être choisie en fonction de la topologie de la réponse du modèle de référence, mais, de façon générale, on choisit des fonctions de covariance exponentielles (équation (2.7)) ou par splines cubiques (équation (2.8)) :

$$SCF_{\theta}(u^i, u^j) = \prod_k scf_{\theta}^k(|u_k^i - u_k^j|) \quad (2.6)$$

$$scf_{\theta}^k(x) = e^{-\theta^k x^{pk}} \quad (2.7)$$

$$scf_{\theta}^k(x) = \begin{cases} 1 - 6(x\theta^k)^2 + 6(x\theta^k)^3, & x < \frac{1}{2\theta^k} \\ 2(1 - x\theta^k)^3, & \frac{1}{2\theta^k} \leq x < \frac{1}{\theta^k} \\ 0, & x \geq \frac{1}{\theta^k} \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans ces trois équations, l'indice \cdot_i concerne l'échantillon (parmi n_s), alors que l'indice \cdot_k correspond à la composante considérée de l'entrée u ou de θ (parmi p).

Pour ces méthodes, la construction du modèle se fait par le réglage de θ . Celui-ci est déterminé par un processus d'optimisation qui fait correspondre le modèle réduit et le modèle d'origine aux points d'échantillonnage (interpolation).

2.2.2.3 Surfaces de réponse par fonctions de base radiales

En anglais, les *radial basis functions*, ou RBF, désignent des fonctions dont la valeur ne dépend que de la distance entre la variable et le centre de la fonction. A partir des n_s réponses du modèle d'origine correspondant aux n_s entrées u^i distinctes, il est possible de construire n_s fonctions de base radiales $K_i(\|u - c_i\|)$, chacune ayant un centre c_i . En combinant ces fonctions de base radiales, on cherche une approximation du modèle référent sous la forme (voir [2]) :

$$y^*(u) = \sum_{i=1}^{n_s} w_i K_i(\|u - c_i\|) \quad (2.9)$$

Tikka [3] explique que la construction d'une surface de réponse de type RBF se fait en général en trois étapes :

1. dans un premier temps, les centres des fonctions radiales sont calculés en fonction des entrées et selon des considérations statistiques ;
2. puis, les formes (les paramètres) de ces fonctions de base sont déterminées en utilisant par exemple les données de référence ;
3. enfin les matrices w_i de (2.9) sont calculées par régression pour faire correspondre les sorties du modèle de remplacement à celles du modèle d'origine pour les échantillons disponibles.

Concrètement, supposons que l'on ait choisi des fonctions radiales gaussiennes :

$$K_i(\|u - c_i\|) = \exp\left(-\frac{\|u - c_i\|^2}{\sigma_i}\right) \quad (2.10)$$

Dans ce cas, la première étape consiste à déterminer les centres c_i . Tikka propose par exemple d'utiliser une loi de mélange gaussienne. Puis les largeurs des fonctions radiales (les paramètres σ_i) sont déterminées d'après les écarts-types des données de référence. Enfin, les coefficients w_i sont calculés pour minimiser l'erreur quadratique moyenne entre les réponses du modèle et les échantillons disponibles.

On peut noter qu'une variante dite "hermitienne" [3] de ces méthodes consiste à inclure également une information de gradient dans l'approximation de la fonction :

$$y^*(u) = \sum_{i=1}^{n_s} w_i K_i(\|u - c_i\|) + \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^p v_{ij} \frac{\partial K_i(\|u - c_i\|)}{\partial u_j} \quad (2.11)$$

2.2.3 Réduction de modèle par Décomposition Orthogonale en Modes Propres

En mécanique des fluides, la *Proper Orthogonal Decomposition (POD)* a d'abord été développée puis essentiellement utilisée pour isoler et caractériser des structures cohérentes dans des écoulements instationnaires. Elle suppose que le signal de vitesse spatio-temporel peut être vu comme une somme infinie de produits entre des fonctions spatiales et des fonctions temporelles :

$$\vec{v}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \vec{\phi}_k(x) \quad (2.12)$$

Pour limiter la quantité d'informations nécessaires à la description de l'écoulement, on ne retient qu'un nombre limité de ces produits, correspondant aux fonctions spatiales les plus énergétiques, pour décrire le signal de départ. Ainsi, l'approximation d'un signal spatio-temporel $\vec{v}(x, t)$ par un signal POD d'ordre r s'écrira :

$$\vec{v}^*(x, t) = \sum_{k=1}^r a_k(t) \vec{\phi}_k(x) \quad (2.13)$$

Dans (2.13), les $\vec{\phi}_k$ sont appelés les modes de l'écoulement et sont calculés de façon statistique (théorème de Kharunen-Loève), à partir de n_s échantillons [4]. Pour simplifier l'écriture, on abandonne les notations fléchées dans ce qui suit.

Si l'on cherche simplement à analyser l'écoulement, les coefficients a_k sont calculés par produit scalaire pour que l'approximation (2.13) corresponde au mieux aux données échantillonnées. En effet, les modes ϕ_k sont construits orthonormaux entre eux, et la combinaison linéaire des modes s'en déduit par :

$$a_k(t) = \langle v^*(t), \phi_k(x) \rangle \quad (2.14)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant l'intégrale du produit scalaire usuel sur tout le domaine de l'écoulement. On peut alors montrer ([4]) que retenir et combiner ainsi les r modes ϕ_k les plus énergétiques permet d'aboutir à l'approximation (2.13) d'ordre r qui conserve le plus d'énergie cinétique dans l'écoulement. Autrement dit, pour une troncature donnée à l'ordre r , la POD est optimale pour la reconstruction des données et toute autre approximation de type (2.13) au même ordre sera moins efficace, en termes d'énergie du signal, pour reconstruire ce dernier.

Ceci était une (très) brève introduction de la POD, en tant qu'outil de description d'un écoulement. Si on souhaite observer tout l'écoulement ($y = (v(x_m, t))_{m=1, \dots, N}$) pour une nouvelle entrée, alors on est a priori contraint de réutiliser l'outil (mesures ou CFD) qui a permis de produire les n_s échantillons. Mais il vient aussi naturellement à l'esprit de conserver les modes ϕ_k calculés, et d'essayer de paramétrer des coefficients a_k par l'entrée du modèle d'origine (essais ou solveur CFD). On obtient ainsi un modèle de remplacement d'ordre r de type entrée-sortie de la forme :

$$v^*(x, t, u(t)) = \sum_{k=1}^r a_k(t, u(t)) \phi_k(x) \quad (2.15)$$

Plusieurs techniques de réduction de modèle basées sur les modes POD existent, et si elles ont en commun de combiner linéairement ces modes, elles se distinguent par la définition des coefficients a_k .

2.2.3.1 POD Galerkin

C'est ce qui se fait classiquement pour obtenir les coefficients a_k en fonction des entrées, lorsque celles-ci sont des conditions aux limites. Nous reprenons ici les explications de Newman [5] pour présenter la technique.

Nous savons que le signal à reproduire est solution des équations de Navier-Stokes :

$$NS(v(u)) = 0 \quad (2.16)$$

Pour les mêmes conditions aux limites et conditions initiales, l'approximation $v^*(u)$ de $v(u)$ n'est a priori pas solution des équations de Navier-Stokes :

$$NS(v^*(u)) = err(u, v^*) \quad (2.17)$$

Bien évidemment, on voudrait une approximation $v^*(u)$ la plus proche possible de $v(u)$ en utilisant les r modes ϕ_k . Mais à défaut de pouvoir exprimer l'écart entre $v^*(u)$ et $v(u)$, on cherche plutôt une approximation qui soit la meilleure solution possible de $NS(v^*) = 0$ parmi les combinaisons des r modes ϕ_k retenus.

Comme ces modes sont orthonormaux deux à deux, ils forment une base d'un espace vectoriel de dimension r , $Vect(\phi_k)_{k=1, \dots, r}$. Dans cette optique, l'approximation cherchée est celle qui annule la part de $err(u, v^*)$ contenue dans cet espace vectoriel. Autrement dit, on cherche à faire en sorte que le résidu $err(u, v^*)$ n'ait aucune composante sur les modes retenus :

$$\langle err(u, v^*), \phi_k \rangle = 0, \quad k = 1 \dots, r \quad (2.18)$$

Chaque composante $k = 1, \dots, r$ de ce résidu peut-être obtenue en prenant le produit scalaire entre le terme $NS(v^*)$ et le mode correspondant :

$$\langle err(u, v^*), \phi_k \rangle = \langle NS(v^*(u)), \phi_k \rangle \quad (2.19)$$

Dans (2.19), on utilise la décomposition (2.13) $v^*(x, t) = \sum_{k=1}^r a_k(t) \phi_k(x)$. Et en se souvenant de la condition d'orthonormalité entre les modes ϕ_k , comme le produit scalaire se fait sur tout l'écoulement, on obtient ainsi une équation liant les r matrices a_i et les conditions aux limites :

$$\frac{d}{dt} a_k = G_k(a_1, \dots, a_r, u) \quad (2.20)$$

Comme on peut répéter ce processus pour chacune des r composantes du résidu $err(u, v^*)$, on finit par produire un jeu de r équations entre les r inconnues a_k et les conditions aux limites. A partir des équations locales du modèle continu, on obtient une équation différentielle de faible dimension.

Pour une entrée u donnée, la détermination des valeurs prises par les matrices a_k en POD-Galerkine revient donc au problème suivant :

“ Pour la condition limite u donnée, trouver pour chaque $k = 1, \dots, r$ la matrice a_k vérifiant $\frac{d}{dt}a_k = G_k(a_1, \dots, a_r, u)$ ”

2.2.3.2 POD associée à la correspondance de flux

Une façon originale de déterminer les fonctions de base en fonction des conditions aux limites est proposée par Rambo et Rambo et Joshi [6, 7]. La combinaison linéaire (2.15) est calculée pour équilibrer le flux d’une variable à la frontière du domaine à ce qui est imposé. Il s’agit de résoudre un problème d’optimisation :

“ Pour la condition limite u donnée, trouver les $(a_k^0)_{k=1, \dots, r}$ correspondant au minimum de :

$$\left\| \mathcal{F}(u) - \int_{\partial \Sigma_{k=1}^r} \Omega a_k \Phi_k \cdot dS \right\| \quad (2.21)$$

”

où $\mathcal{F}(u)$ désigne un flux à travers la frontière $\partial\Omega$ du domaine construit à partir de la condition limite u . En fait, ce flux est une donnée du problème, et on résout un problème d’optimisation pour minimiser l’écart entre celui-ci et le flux estimé par le champ POD approché. Les variables du problème d’optimisation sont les amplitudes a_k des modes, et on parle de méthode de correspondance de flux (*flux matching method*). Pour le moment, cette méthode a été utilisée dans le cas d’écoulements stationnaires, et les amplitudes ne dépendent donc pas du temps.

2.2.3.3 Quelques Perspectives

Classiquement, la POD requiert le traitement statistique des observables dans l’ensemble du domaine de calcul. Comme l’expliquent Alonso *et al.* [8], cette exigence est à l’origine de quelques-uns des inconvénients de la POD. Par exemple, si le modèle réduit est construit à partir de champs CFD, il peut y avoir des points ou des régions du maillage pour lesquels la convergence n’est pas assurée. L’influence des erreurs ainsi commises peut conduire à des modèles POD instables, via la projection Galerkine. Pour y remédier, Alonso *et al.* proposent une méthode de calcul des amplitudes des modes à partir d’un nombre restreint de points.

Willcox [9] présente une méthode de reconstruction de données incomplètes à partir d’un modèle POD, la Gappy POD. Disons que l’on dispose d’une base de modes d’un écoulement, et d’une réalisation de cet écoulement qui serait incomplète. L’idée est de reconstruire la réalisation en considérant l’écart entre le champ incomplet et sa reconstruction comme une combinaison linéaire des modes. Les coefficients de cette combinaison sont inconnus et sont pris comme variable d’un problème d’optimisation. On minimise l’écart entre le champ incomplet et sa reconstruction aux points connus. Bui-Thanh *et al.* [10] reprennent cette technique et la complètent dans le cas où la base POD n’a pas pu être construite parce que les champs servant de snapshots sont eux aussi incomplets. Les modes sont alors construits itérativement : une base POD construite à partir de snapshots incomplets sert à reconstruire ces snapshots, qui à leur tour permettent de construire une nouvelle base.

Mokhasi *et al.* [11], proposent, lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes de période connue, d'utiliser non pas une base POD formée de fonctions propres spatiales, mais plutôt des fonctions propres spatio-temporelles. Ces fonctions propres sont déterminées en utilisant des groupes de snapshots dont la taille dépend de la période du phénomène observé.

2.2.4 Méthodes d'identification de modèle

2.2.4.1 Présentation générale

Il s'agit de la classe de méthodes qui a été retenue pour résoudre les problématiques évoquées en introduction. Elles feront l'objet d'un chapitre de présentation plus approfondie, mais nous allons donner ici malgré tout un aperçu de leur fonctionnement.

Les modèles d'ordre faibles obtenus grâce à une méthode d'identification de modèle s'organisent en deux étapes :

1. évaluation d'un faible nombre de fonctions
2. projection de ces fonctions dans l'espace des observables

Les fonctions de la première étape correspondent à la recherche de la solution d'une équation d'état de faible dimension. La forme de cette équation est dérivée de la discrétisation des équations locales qui gouvernent la physique. Par exemple, considérons un système linéaire en régime variable dont u est une condition aux limites. L'utilisation du modèle réduit commence par la recherche de la solution s de :

$$\mathcal{L}_{a,b}^1(s, t, u) = \frac{ds}{dt} + as + bu = 0 \quad (2.22)$$

dans laquelle $s \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne de faible dimension (n est "petit"), $a \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des matrices inconnues, et p est le nombre de conditions limites et de termes sources qui servent d'entrées au modèle. Les fonctions évoquées sont les composantes de s .

Pour ce modèle réduit, $\mathcal{L}_{a,b}^1$ est l'équation d'état, dont s est la variable d'état. Comme la dimension de s est faible, on parle aussi d'état réduit.

L'application qui permet d'obtenir les q observables contenus dans y^* à partir de s , est linéaire :

$$\mathcal{L}_h^2(y^*, s) = y^*(u) - hs(u) = 0 \quad (2.23)$$

avec $h \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ une matrice elle aussi inconnue.

Le principe des méthodes d'identification de modèles réduits, est de considérer qu'un modèle formé de (2.22) et de (2.23) est paramétré par les coefficients des matrices a , b et h , et de supposer qu'il existe un jeu de paramètres $\theta_0 = (a_0, b_0, h_0)$ pour lequel le modèle réduit $(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2)_{\theta_0}$ approche "suffisamment bien" les sorties du modèle de référence.

La construction d'un modèle d'ordre faible par identification, consiste alors à déterminer ce jeu optimal en utilisant divers échantillons calculés par le modèle de référence. Il s'agit d'un problème d'optimisation : on cherche le modèle donnant la meilleure approximation des données fournies par le modèle de référence aux points d'échantillonnage.

Pour construire le modèle, les méthodes d'identification de modèles réduits déterminent en même temps :

- la forme de l'état réduit (définie par a et b dans l'exemple du (2.22)),
- la transformation linéaire h ,

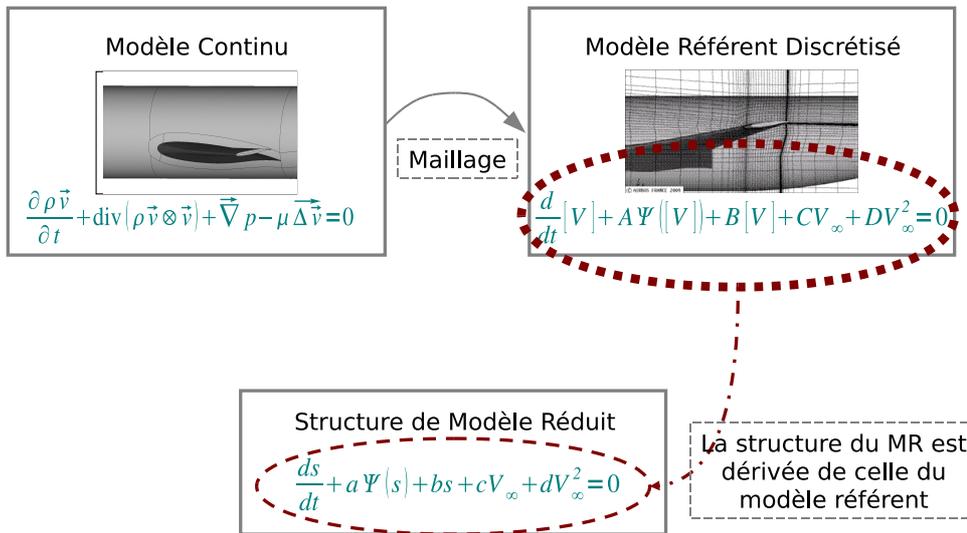


FIG. 2.4 – Description simplifiée des méthodes d’identification basées sur des équations aux dérivées partielles. On considère un modèle numérique dérivé d’un modèle continu, gouverné par une équation de mécanique continue. La variable d’état numérique est alors solution d’une équation différentielle matricielle. De cette équation, on tire la structure de l’équation d’état du modèle réduit.

offrant ainsi beaucoup de flexibilité au processus de construction qui est appelé “identification”.

Pour allier cette flexibilité à un faible niveau d’erreur en des points qui n’ont pas servi à l’identification (à la résolution du problème d’optimisation), la structure (la forme) de l’équation d’état (2.22) du modèle réduit est dérivée de celle de l’équation d’état discrétisée du modèle de référence, qu’on appelle aussi modèle détaillé, modèle de référence ou modèle d’origine. Ce concept est illustré par la figure 2.4. On y considère un écoulement à proximité d’un obstacle. Cet écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes, qui fournissent un modèle continu. En maillant un domaine autour de cet obstacle, on transforme ce modèle continu en un modèle discret, constitué d’équations différentielles. Les valeurs prises, par exemple, par les champs de quantité de mouvement et d’énergie interne dans les différentes cellules de ce maillage, peuvent faire alors faire office de variables d’état (paragraphe 2.1). La forme des équations différentielles est alors utilisée pour construire la structure du modèle réduit. Alors que dans le modèle de référence, les spécificités géométriques, les schémas de discrétisation et les données du maillage sont inscrits en filigrane dans les matrices de l’équation différentielle, ces informations disparaissent complètement à l’écriture de l’équation d’état du modèle d’ordre faible. Comme pour les autres méthodes présentées de réduction de modèle ou de surrogate modeling, il ne s’agit pas de construire un solveur alternatif de l’équation continue d’origine. Le modèle réduit identifié doit plutôt être vu comme une entité mathématique qui réagit à l’entrée d’une façon similaire à celle du modèle référent.

2.2.4.2 Etapes de la construction d’un modèle réduit par identification

Les différentes étapes de la réduction de modèle par identification sont schématisées sur la figure 2.5. On peut y voir apparaître quatre grandes phases :

1. modélisation : il s’agit de définir une structure réduite d’équations à partir d’un modèle de référence correspondant à une discrétisation spatiale des équations locales qui gouvernent la physique du problème ;

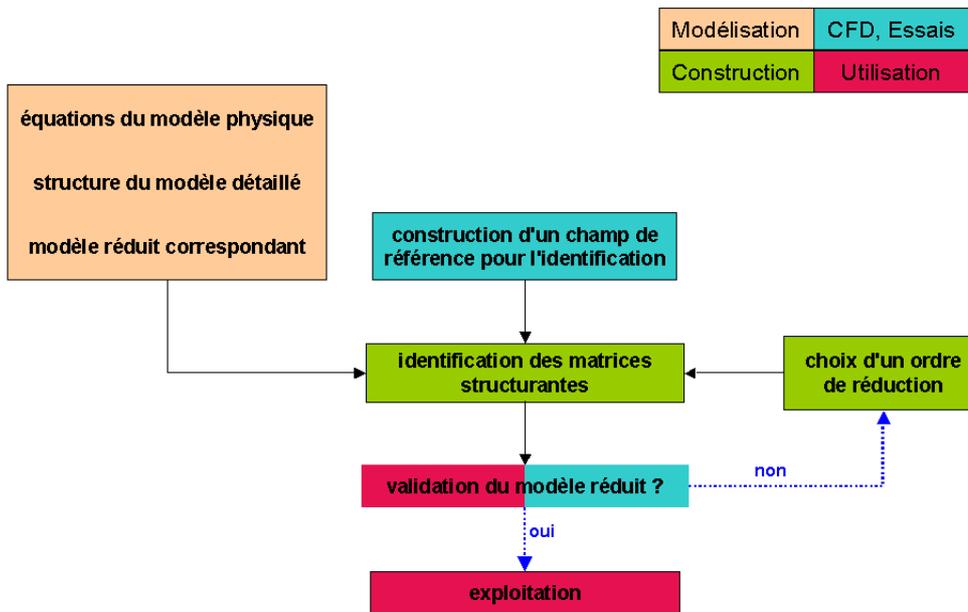


FIG. 2.5 – Modèles d'ordres faibles identifiés : de la conception à l'utilisation

2. échantillonnage : à partir de calculs numériques ou de campagnes d'expérience, on collecte la réponse du modèle d'origine à différentes entrées (les points d'échantillonnage), ce qui constitue les données de référence ;
3. identification : on construit les fonctions de base et la projection qui permettent au modèle réduit de reproduire les données de référence aux points d'échantillonnage ;
4. utilisation : après avoir validé le modèle en vérifiant qu'il permet de prédire le comportement du modèle d'origine ailleurs qu'aux points d'échantillonnage, on peut utiliser le modèle réduit de façon répétée.

2.2.5 Comparaison des champs d'utilisation de ces méthodes

2.2.5.1 Présentation

Nous venons de présenter cinq méthodes très différentes pour construire des modèles de remplacement : les modèles de régression polynômiale, les surfaces de réponses par fonctions de base radiales, celles par krigeage, les méthodes dérivées de la POD et les méthodes d'identification modale. Bien entendu, toutes ces techniques ont leur spécificités dans les types d'application qu'elles peuvent traiter. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons souligner ces différences en nous attachant à deux critères :

- quelles sont les entrées classiquement prises en compte ?
- quelles sont les sorties typiquement disponibles ?

Bien sûr, chaque méthode est à l'origine de nombreuses problématiques de recherche, et est source de maintes extensions. Nous n'essayerons pas ici d'en donner des descriptions rigides et limitantes, mais plutôt de proposer au lecteur une idée générale des cas d'utilisation de ces modèles.

2.2.5.2 Les entrées gérées par les modèles

En mécanique des fluides, les modèles de remplacement sont généralement construits pour évaluer des grandeurs en fonction de deux types d'entrée :

- des conditions opératrices (puissance d'une ventilation, flux thermique, terme source, ...),
- ou des paramètres de forme (dimensions et position d'un obstacle, espacement entre deux obstacles, ...)

Les méthodes que nous avons classées parmi les surfaces de réponse (régression polynomiale, RBF, Kriging) sont capables de prendre des entrées appartenant à l'une ou l'autre de ces catégories. De plus, ces modèles prennent naturellement en compte plusieurs entrées, même si leur précision diminue exponentiellement avec le nombre d'entrées. Par contre, nous n'avons pas connaissance de surfaces de réponse polynomiale ou par kriging capables de prendre en compte des variations au cours du temps des entrées. Il est peu courant de voir des modèles par fonctions de base radiales dont les entrées dépendent du temps, mais cela arrive.

Nous avons trouvé dans la littérature des méthodes dérivées de la POD pouvant admettre en entrée soit des conditions opératrices, soit des paramètres de forme. A partir de la technique de décomposition POD, il est possible d'adapter la méthode de construction d'un modèle d'ordre faible en fonction des entrées que l'on doit prendre en compte. Par contre, nous n'avons pas rencontré de modèle dérivé de la POD prenant en compte en entrée à la fois des paramètres de forme et des conditions opératrices. De façon générale, les modèles prédictifs basés sur la POD que nous avons trouvés dans les publications, admettent le plus souvent une seule entrée. On peut noter les travaux d'Alonso *et al.* [8] qui établissent un modèle à deux entrées (voir le paragraphe 2.3.3). Cependant, nous n'avons pas trouvé de modèle de type POD rivalisant avec les surfaces de réponse en terme de nombre d'entrées prises en compte.

Dans le cas de la POD Galerkin au moins, il est possible de paramétrer le modèle par des entrées dépendant du temps.

Les méthodes d'identification modale ont été conçues pour prendre comme entrées des conditions opératrices, dépendantes du temps, ou non. Aucune extension n'existe encore pour construire des modèles pour les paramètres de forme. En théorie, ces méthodes peuvent prendre en compte un nombre quelconque d'entrées, mais dans la pratique, elles ne sont pas commodes à mettre en oeuvre lorsque l'on atteint, disons quatre ou cinq entrées. Dans le cas particulier des systèmes linéaires à plusieurs entrées, il est possible d'identifier un modèle réduit par entrée. Ces modèles sont ensuite "assemblés" en un unique modèle à plusieurs entrées. Dans ce cas, le nombre d'entrées peut nettement dépasser la dizaine [12].

Le tableau 2.1 reprend ces commentaires de façon synthétique.

2.2.5.3 Les sorties gérées par les modèles

Les surfaces de réponse de type kriging sont a priori conçues pour proposer un scalaire en sortie. Comme l'explique Kleijnen dans [13], pour construire un modèle à plusieurs sorties, on fait autant de modèles qu'il y a de sorties, ce qui se révèle peu commode lorsque l'on a besoin de beaucoup de sorties. On rencontre le même problème avec les surfaces de réponse par régression polynomiale.

TAB. 2.1 – Les modèles d'ordre faibles en fonction des entrées que l'on souhaite imposer

	Forme	C. opératrices	Les deux	Temps
RSM polynômiales, kriging	×	×	×	
RBF	×	×	×	×
Modèles type POD	×	×		×
Méthodes d'identification		×		×

Au contraire, selon Gorinevsky et Vukovich [14], les surfaces de réponse par fonctions de base radiales peuvent être construites pour fournir un nombre quelconque de sorties. L'augmentation du nombre de sorties n'a pas d'influence sur la complexité de la construction du modèle mais simplement sur son coût (dépendance linéaire).

Nous n'avons pas trouvé d'exemple de méthodologie permettant de construire des surfaces de réponse, soit polynômiales, soit par kriging, proposant des sorties variant au cours du temps. Par contre, nous avons rencontré des extensions des fonctions de base radiales capables de prendre en compte une dépendance simplifiée au temps.

Les méthodes tirées de la POD fournissent des modèles à plusieurs sorties. Il peut s'agir par exemple de champ de vitesse, ou de répartition de pression sur un obstacle. Lorsque le modèle met en jeu une équation différentielle comme équation d'état, les sorties sont dépendantes du temps.

Les modèles obtenus par identification modale sont eux très flexibles par rapport au choix des sorties. On peut construire des modèles pour une sortie, un faible nombre de sorties, ou plusieurs centaines de milliers. Ces sorties peuvent être des champs (vitesse, température, ...), ou des grandeurs correspondant à un post-traitement, comme un coefficient de transfert convectif, ou un flux à travers une surface. Et surtout, l'équation d'état permet au modèle réduit de fournir des sorties variant au cours du temps.

Ces observations sont reprises dans le tableau 2.2. Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons quelques exemples illustrant l'utilisation qu'on peut faire des modèles d'ordre faible en fonction des types d'entrée ou de sortie que l'on cherche à mettre en relation.

TAB. 2.2 – Les modèles d'ordre faible en fonction des types de sortie qu'on souhaite observer

	Une sortie	Quelques unes	Plus d'une centaine	Temps
Kriging	×	×		
RSM polynômiale	×	×		
RBF	×	×	×	×
POD			×	×
Méthodes d'identification	×	×	×	×

2.3 Exemples d'application des modèles d'ordre faible

2.3.1 Présentation

L'objet de cette partie est de donner quelques exemples d'utilisation des modèles introduits dans la section précédente, en prenant soin de les présenter en tant que relations entrées / sorties. On ne cherche pas à détailler les méthodologies développées par les auteurs, mais on essaie plutôt de proposer au lecteur des illustrations de l'utilité des modèles d'ordre faibles décrits dans les paragraphes précédents.

2.3.2 Modèles à plusieurs entrées et une sortie

Comme nous l'avons expliqué un peu plus haut, les surfaces de réponse par krigeage ou régression polynômiale sont celles qui se prêtent le mieux à l'établissement de relations entre une sortie et plusieurs entrées, lorsque la sortie ne dépend pas du temps. Par exemple, Chiang [15] développe des surfaces de réponse quadratiques pour modéliser les relations entre les caractéristiques géométriques d'un radiateur de composant électronique (4 paramètres), et soit la résistance thermique de celui-ci, soit la perte de charge qu'il occasionne (sorties).

Dans [16], Xiao *et al.* mettent en place deux modèles de type kriging dans le cadre de l'admission dans un moteur de voiture, en fonction de paramètres géométriques de la soupape d'admission (6 entrées). L'un d'entre eux fournit le débit massique à travers la soupape, et l'autre évalue le tumble dans la chambre de combustion, c'est-à-dire la rotation de l'écoulement autour d'un axe perpendiculaire à l'axe principal de la chambre de combustion.

Dans ces deux travaux, on a utilisé des surfaces de réponse pour estimer la valeur statique prise par une grandeur en fonction d'un certain nombre de paramètres de forme.

Dans l'exemple d'un écoulement de canal, Aggelogiannaki *et al.* [17] construisent une surface de réponse dynamique pour la température. Ils considèrent un canal dans lequel la température d'injection est fixée, la vitesse d'entrée peut évoluer au cours du temps, et dont les parois sont sujettes à des transferts thermiques convectifs (la température extérieure est fixée). Dans cet écoulement, la température en une position ne dépend que la vitesse d'entrée, qui peut varier au cours du temps. Les auteurs proposent une surface de réponse par fonctions de base radiales en mesure d'estimer l'évolution au cours du temps de la température en n'importe quelle position dans le canal. Pour cela, le modèle prend comme entrées la position à laquelle on cherche la température à l'instant courant, ainsi que les valeurs prises par la vitesse d'entrée aux cinq pas de temps précédents (modèle à 6 entrées).

Lorsque la sortie ne dépend pas du temps, on a a priori le choix entre ces trois méthodes de surface de réponse. Selon Queipo *et al.* [18], il n'y a pas de manière de savoir à l'avance si une méthode donne de meilleurs résultats qu'une autre. Pour cette raison, il indique que construire et combiner plusieurs surfaces de réponse peut s'avérer intéressant.

2.3.3 Modèles à peu d'entrées et grand nombre de sorties

Pour mettre en place un modèle d'ordre faible qui, à un, deux voire trois paramètres, associe un champ complet (vitesse, température, ...), on aura intérêt à se diriger vers les méthodes d'identification modale, ou encore celles dérivées de la POD.

Par exemple, Rambo et Joshi [7], construisent des modèles de type POD prédisant champs de vitesse et de température dans un canal contenant deux composants électroniques chauffés. En fonction du débit massique dans le canal, un modèle permet d'estimer le champ de vitesse

(1 entrée, 2×10000 sorties). Un autre prend en plus en compte les flux thermiques aux surfaces des composants pour évaluer le champ de température (3 entrées, 10000 sorties).

Toujours en convection forcée, Alonso *et al.* [8] travaillent sur une marche descendante en écoulement laminaire. Des décompositions POD associées à des projections Galerkin leur permettent d'estimer vitesse, pression et température en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement, et d'une température imposée sur une portion de la paroi.

Le cas de l'écoulement de marche descendante est également utilisé par Rouizi *et al.* pour illustrer les possibilités de l'identification modale. Dans [19], Rouizi *et al.* mettent en place un modèle permettant d'estimer le champ de vitesse lorsque le nombre de Reynolds varie (1 entrée, 2×140000 sorties). Puis, Rouizi *et al.* présentent dans [20] pour la même géométrie, un modèle qui, en fonction du nombre de Reynolds et d'un flux de chaleur pariétal variable au cours du temps, fournit une approximation de l'évolution de la température soit sur tout le champ, soit en un nombre restreint de cellules de calcul (2 entrées, dont une transitoire, nombre variable de sorties transitoires).

2.3.4 Conclusion partielle

Nous venons de voir que le type de modèle d'ordre faible que l'on choisit dépend :

- du type et du nombre de paramètres que l'on veut faire varier,
- et du type et du nombre de grandeurs que l'on veut observer.

Dans la section suivante, nous allons mettre en évidence le fait que, s'ils semblent très différents dans leur modes de construction, les modèles d'ordre faible que nous avons décrits et illustrés fonctionnent tous en suivant un schéma similaire.

2.4 Forme générale d'un modèle de remplacement

2.4.1 Description fonctionnelle

Au vu de la façon de fonctionner des trois classes de modèles de remplacement que sont les surfaces de réponse, les modèles dérivés de la POD et les modèles réduits obtenus par identification, on peut dégager une manière commune de lier les entrées aux sorties.

Dans tous les cas, l'entrée du modèle n'est utilisée que pour calculer un faible nombre de fonctions scalaires. En référence aux méthodes de kriging ou aux RBF, ces fonctions sont appelées "fonctions de base". Et en référence aux méthodes d'identification de modèles réduits, nous dirons également qu'elles sont les composantes de la variable d'état du modèle.

Et dans tous les cas, une transformation permet de passer de la variable d'état aux observables. Nous dirons qu'elle est figée, dans la mesure où elle ne dépend jamais de l'entrée du modèle. Par abus de langage, nous parlerons de projection, même si on ne fait pas référence à la notion mathématique de projecteur ($p \circ p = p$).

Puisque seules les fonctions de base sont dépendantes des entrées, leur nombre correspond au nombre de degrés de liberté du modèle réduit. Elle peuvent être définies :

- explicitement, comme c'est le cas des méthodes de surface de réponse : calculer la variable d'état réduite consiste alors à réaliser un petit nombre de calculs directs ;
- ou implicitement, en tant que solution d'un problème (POD-Galerkin, POD et correspondance de flux, ou méthodes d'identification de modèles réduits par exemple) : les calculs sont plus complexes, mais leur coût reste bas, grâce au faible nombre de degrés de liberté.

Cette vision générale des modèles réduits comme résultant de la composition entre

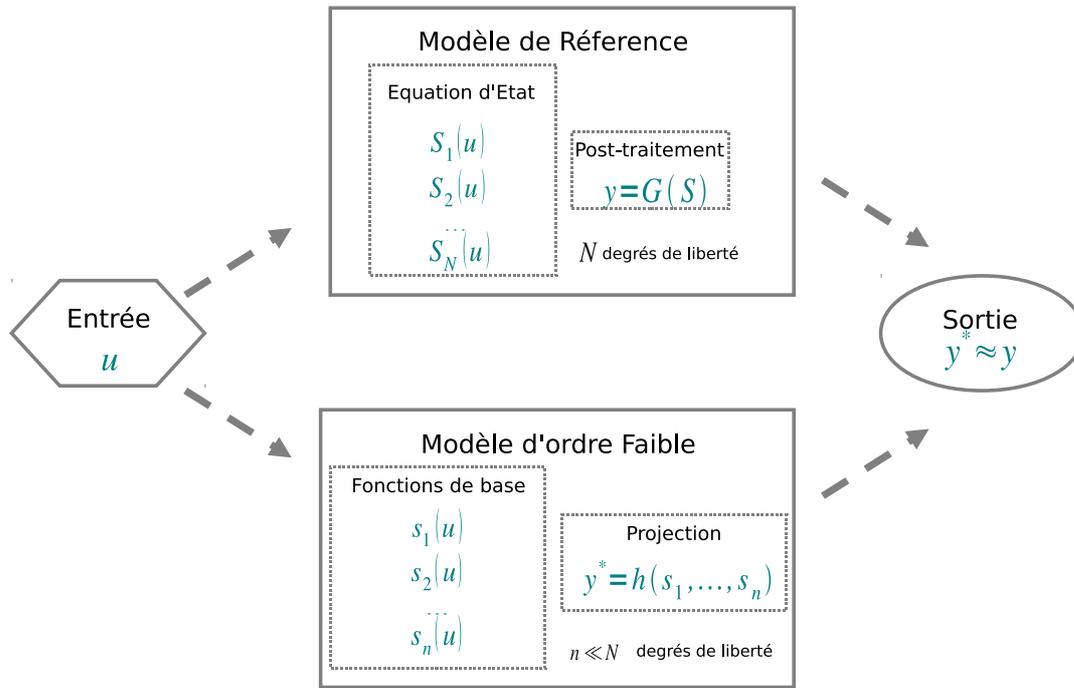


FIG. 2.6 – Le modèle de remplacement et le modèle de référence nécessitent tous les deux le calcul d'une variable d'état, dont on tire les sorties du modèle. Le gain de temps associé au modèle d'ordre faible est lié à la faible dimension de l'état associé, qui n'est plus lié au maillage de l'écoulement.

– un calcul de la valeur prise par l'état réduit relativement à une entrée u ,
 – et une opération de projection directe, de l'état réduit vers les observables,
 est notamment utilisée par Queipo *et al.* dans [18]. La figure 2.6 schématise brièvement cette dissociation.

Les différentes méthodes de réduction de modèle se distinguent alors par :

- le choix des formes de fonctions de base : fonctions de base radiales (RBF), solutions d'équations différentielles, splines cubiques, interpolations polynômiales, ...
- le choix de la projection
- la méthode de construction des fonctions de base et de la projection : par exemple, certaines méthodes commencent par fixer la projection puis déterminent les fonctions de base pour reproduire les sorties du modèles de grande dimension. D'autres font l'inverse, commençant par fixer les fonctions de base, puis déterminent la projection adéquate.

En reprenant les exemples de modèle de remplacement proposés plus haut, voyons maintenant comment chacun d'entre eux s'intègre dans cette formulation.

2.4.2 Exemples

2.4.2.1 Surfaces de réponse polynômiales

Dans le paragraphe 2.2.2.1, nous avons vu qu'une réponse de surface polynômiale s'écrit sous la forme générale de l'équation (2.3) :

$$y = f(u) = \sum_{i=1}^n h_i \phi_i(u)$$

Dans ce cas, la variable d'état est la matrice colonne formée des n polynômes de base $\phi_i(u)$

(monômes par exemple), qui sont les fonctions de base évoquées dans la section 2.4.1. Dans ce cas particulier, il n'y a pas de réglage spécifique des fonctions de base (des monômes de u) autre que d'en choisir le nombre, c'est-à-dire l'ordre du modèle.

Une fois concaténés, les coefficients h_i forment la matrice de projection h . Une surface de réponse polynômiale est donc construite en commençant par fixer les fonctions de base, puis en déterminant la projection par rapport à celles-ci.

Les surfaces de réponse polynômiales sont aisées à mettre en œuvre. Il n'y a pas de contrainte particulière quant à la position des points d'échantillonnage, mais elles sont connues pour être peu efficaces lorsque la relation entre les entrées et les observables est fortement non linéaire, voire discontinue.

2.4.2.2 Surfaces de réponse par krigeage

On a vu dans la section 2.2.2.2 qu'une surface de réponse de type krigeage se met sous la forme (2.4) :

$$y^*(u) = f(u)\beta(Y^\sim) + \tau(u)R(Y^\sim - F\beta)$$

Ici, la fonction de régression $f(u)$ et les fonctions de corrélation $\tau(u)$ constituent les fonctions de base. Les opérations de projection sont déterminées par β , F et R (ces matrices ne dépendent pas de l'entrée du modèle).

Dans la méthodologie classique du krigeage, les fonctions de base et la projection sont déterminées conjointement à l'aide du paramètre θ qui intervient dans l'expression des fonctions de corrélation.

Ainsi, la construction du modèle se fait en réglant par le biais du paramètre θ , à la fois les fonctions de base et la projection.

L'un des attraits principaux des méthodes de krigeage, est leur capacité d'accepter en entrée plusieurs dizaines de variables. Par contre, le placement des points d'échantillonnage est une opération critique. Par exemple, lorsqu'il existe des points d'échantillonnage proches (*clustering*), la matrice de corrélation devient singulière.

2.4.2.3 Surfaces de réponse par RBF

On avait vu dans la section 2.2.2.3 que les sorties d'un modèle de type RBF s'obtiennent par combinaison linéaire des valeurs prises par des fonctions de base radiales, comme l'exprime l'équation 2.9 :

$$y(u) = \sum_{i=1}^{n_s} w_i K_i(\|u - c_i\|)$$

Comme il a été expliqué, la construction du modèle commence par la détermination des fonctions de base, les $K_i(\|u - c_i\|)$, puis, une fois qu'elles sont fixées, on calcule la matrice de projection formée des w_i par régression, à l'aide des données d'échantillonnage.

La construction de ces surfaces de réponse est elle aussi particulièrement sensible au clustering.

2.4.2.4 Modèles à base de POD

Dans les modèles de remplacement dérivés de la POD, les modes spatiaux obtenus par POD sont linéairement combinés pour fournir la réponse du modèle (voir équation 2.15)

$$y(u) = \sum_{k=1}^r a_k(u) \phi_k$$

Dans ce genre de modèle, les ϕ_k définissent une matrice de projection linéaire, de l'espace d'arrivée des fonctions de base a_k à l'espace des observables :

$$y(u) = [\Phi] A(u) \quad (2.24)$$

Les différentes méthodes de réduction de modèle basée sur la POD vont se distinguer dans la façon d'évaluer les fonctions de base a_k . Mais dans tous les cas, à la construction du modèle, la projection est fixée par une méthode statistique, et les fonctions de base sont adaptées à cette projection pour définir le modèle.

Les méthodes de réduction de modèle par POD sont en général conçues et adaptées pour des écoulements instationnaires comme des sillages, des décollements ou des profils vibrants. Dans ces cas, un petit nombre de modes POD suffisent généralement à décrire la dynamique de l'écoulement (voir [21, 22, 23] par exemple). Par contre, l'une des problématiques récurrentes de la POD, est la façon de déterminer la projection (les modes POD) pour qu'elle reste valable lorsque l'on s'éloigne des points d'échantillonnage. Les méthodes de réduction de type POD Galerkin, sont également connues pour connaître des problèmes de stabilité [8, 24].

2.4.2.5 Méthodes d'identification de modèle

Comme nous l'avons dit dans la section 2.2.4.1, ces modèles fonctionnent en deux étapes. Une équation différentielle de faible dimension est résolue en fonction de l'entrée, puis la solution est projetée sur l'espace des observables à l'aide d'une matrice h .

Ici les fonctions de base (la solution de l'équation aux dérivées partielles en fonction de l'entrée) ne sont pas explicites, mais restent malgré tout déterminées par les matrices qui interviennent dans l'expression de l'équation. L'objet du processus d'identification est de déterminer conjointement les fonctions de base et la projection, de telle manière qu'elles soient adaptées les unes aux autres pour reproduire au mieux les données d'échantillonnage.

Cette co-adaptation est ce qui distingue les méthodes d'identification de modèle de la plupart des méthodes de réduction ou de surface de réponse. Les fonctions de base et la projection sont construites conjointement par optimisation pour travailler main dans la main. Mais le principal défaut de la méthode tient dans le fait qu'elle se fait au prix d'un processus d'optimisation qui peut coûter cher. D'autre part, elle n'est développée qu'au sein du Laboratoire. En conséquence elle est moins répandue que d'autres, dans le domaine de la mécanique des fluides.

2.4.3 Autres avantages des méthodes d'identification

Malgré ce manque de cas d'application, il ne faut pas omettre quatre autres aspects qui la rendent particulièrement attrayante et simple à mettre en pratique :

1. elle est conçue pour prendre des conditions aux limites ou des termes sources comme entrées ;
2. grâce à l'utilisation d'une équation d'état, il est facile d'implémenter des modèles instationnaires avec des conditions aux limites transitoires ;
3. elle est très flexible relativement aux observables : le nombre et le type des observables correspondent aux choix de l'utilisateur. Et une fois qu'un modèle a été construit pour certaines sorties, il est rapide et aisé de l'adapter à d'autres ;

4. elle n'est pas sensible au clustering : la principale contrainte par rapport à l'échantillonnage tient, comme pour toutes les méthodes de surface de réponse, dans la nécessité de fournir suffisamment d'informations quant à la description et à l'apparition de tous les phénomènes que l'on veut prédire dans le domaine de validité. Contrairement aux méthodes de krigeage ou utilisant des surfaces de base radiales, peu importe si deux points d'échantillonnage sont proches l'un de l'autre. Cela peut ouvrir la voie à des développements ultérieurs liés au raffinement automatique des zones jugées d'importance.

Pour ces quatre raisons, les méthodes d'identification de modèle ont été retenues dans le cadre de cette thèse.

2.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons vu qu'une façon d'aborder un problème d'ingénierie est de le considérer comme la mise en place et l'utilisation d'un modèle. Celui-ci établit une relation entre des paramètres que l'on maîtrise ou auxquels on a accès, les entrées, et les grandeurs qui définissent le problème d'ingénierie, les sorties. En CFD, on a classiquement recours à des modèles numériques à plusieurs centaines de milliers, voire plusieurs millions de degrés de liberté. Pour éviter d'avoir à y recourir de façon répétée, l'ingénieur peut construire des modèles de remplacement dont le nombre de degrés de liberté, et par conséquent la difficulté d'utilisation, seront très largement inférieurs à ceux du modèle numérique d'origine. Dans la mesure où l'objet de cette thèse est de proposer une méthode de construction de modèles de remplacement dans le cadre de l'aérothermie (voir le chapitre d'introduction), nous avons répertorié diverses méthodes utilisées dans le secteur de la CFD.

Nous avons présenté cinq familles de méthodes de construction de modèles de remplacement : trois surfaces de réponse (régression polynômiale, kriging et fonctions de base radiales), les méthodes dérivées de la décomposition orthogonale en modes propres (POD), ainsi que les méthodes d'identification modale. Ensuite, nous avons succinctement répertorié leur utilisation classique en termes de catégories d'entrées et de sorties, avant d'en donner quelques exemples concrets d'application. Après avoir ainsi souligné leurs différences, nous avons montré qu'il est possible de voir ces modèles de façon unifiée, et qu'elles partagent un mode de fonctionnement commun. Ainsi, ayant mis en évidence les points communs et les spécificités de chaque méthode, nous pouvons justifier du choix de la méthode d'identification modale pour la poursuite de cette thèse.

Dans le chapitre suivant, nous présentons en détail le fonctionnement théorique de cette méthode.

Bibliographie

- [1] J. Laurenceau, P. Sagaut, Building Efficient response surfaces of aerodynamic functions with kriging and cokriging. *AIAA Journal*, 0001-1452 vol.46 no.2 (498-507), 2008.
- [2] Y.S. Ong , P.B. Nair , A.J. Keane , K.W. Wong, Surrogate-Assisted Evolutionary Optimization Frameworks for High-Fidelity Engineering Design Problems. *In Knowledge Incorporation in Evolutionary Computation* (book),2004, Pages 307-332
- [3] J. Tikka, Simultaneous input variable and basis function selection for RBF networks. *Neurocomputing*, Volume 72, Issues 10-12, Lattice Computing and Natural Computing (JCIS 2007) / Neural Networks in Intelligent Systems Designn (ISDA 2007), June 2009, Pages 2649-2658, ISSN 0925-2312, DOI : 10.1016/j.neucom.2008.10.003.
- [4] M.Ö. Efe, Modeling of PDE processes with finite dimensional non-autonomous ODE systems. *Mathematical Methods in Engineering* (Book), Part 3, November 2007, Pages 177-187
- [5] A.J. Newman, Model Reduction via the Karhunen-Loeve Expansion Part I : An Exposition, Tech. Rep. ISR T.R.96-32 Institute of Systems Research, College Park, Md, USA, April 1996
- [6] J. Rambo, Reduced-Order Modeling of multiscale turbulent convection, application to data center thermal management. *PhD. Thesis*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, 2006
- [7] J. Rambo, Y. Joshi, Reduced-order modeling of turbulent forced convection with parametric conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 50, Issues 3-4, February 2007, Pages 539-551
- [8] D. Alonso, A. Velazquez and J.M. Vega, A method to generate computationally efficient reduced order models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 198, Issues 33-36, 1 July 2009, ISSN 0045-7825, DOI : 10.1016/j.cma.2009.03.012.
- [9] K. Willcox, Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition. *Computers & Fluids*, Volume 35, Issue 2, February 2006, Pages 208-226
- [10] T. Bui-Thanh, M. Damodaran, Aerodynamic data reconstruction and inverse design using proper orthogonal decomposition. *AIAA Journal*, Volume 42, Issue 8, August 2004, Pages 1505-1516
- [11] P. Mokhasi and D. Rempfer, Sequential estimation of velocity fields using episodic proper orthogonal decomposition. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, Volume 237, Issue 24, 15 December 2008, Pages 3197-3213.
- [12] M. Girault, Résolution de problèmes inverses en thermique par modèles réduits : applications en conduction non-linéaire et en convection forcée. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, Mai 2003

-
- [13] J.P.C. Kleijnen, Kriging metamodeling in simulation : A review. *European Journal of Operational Research*, Volume 192, Issue 3, 1 February 2009, Pages 707-716, ISSN 0377-2217, DOI : 10.1016/j.ejor.2007.10.013.
- [14] D. Gorinevsky, G. Vukovich, Control of flexible spacecraft using nonlinear approximation of input shape dependence on reorientation maneuver parameters *Control Engineering Practice*, Volume 5, Issue 12, December 1997, Pages 1661-1671, ISSN 0967-0661, DOI : 10.1016/S0967-0661(97)10020-X.
- [15] K.-T. Chiang, Modeling and optimization of designing parameters for a parallel-plain fin heat sink with confined impinging jet using the response surface methodology. *Applied Thermal Engineering*, Volume 27, Issues 14-15, October 2007, Pages 2473-2482, ISSN 1359-4311, DOI : 10.1016/j.applthermaleng.2007.02.004.
- [16] M. Xiao, P. Breitkopf, R.F. Coelho, C. Knopf-Lenoir, M. Sidorkiewicz, P. Villon, Model reduction by CPOD and Kriging. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Volume 41, Issue 4, April 2010, Pages 555-574, ISSN 1615-1488 (Online), DOI : 10.1007/s00158-009-0434-9
- [17] E. Aggelogiannaki, H. Sarimveis, D. Koubogiannis, Model predictive temperature control in long ducts by means of a neural network approximation tool. *Applied Thermal Engineering*, Volume 27, Issues 14-15, October 2007, Pages 2363-2369, ISSN 1359-4311, DOI : 10.1016/j.applthermaleng.2007.03.005.
- [18] N.V. Queipo, R.T. Haftka, W. Shyy, T. Goel, R. Vaidyanathan, P.K. Tucker, Surrogate-based analysis and optimization. *Progress in Aerospace Sciences*, Volume 41, Issue 1, January 2005, Pages 1-28, ISSN 0376-0421, DOI : 10.1016/j.paerosci.2005.02.001.
- [19] Y. Rouizi, Y. Favennec, M. Girault, D. Petit, Model reduction on 2-D incompressible laminar flows : application on the flow over a backward-facing step. *6th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice*, Journal of Physics : Conference Series 135 (2008) 012090, doi :10.1088/1742-6596/135/1/012090
- [20] Y. Rouizi, M. Girault, Y. Favennec, D. Petit, Model reduction by the Modal Identification Method in forced convection : Application to a heated flow over a backward-facing step. *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 49, Issue 8, August 2010, Pages 1354-1368, ISSN 1290-0729, DOI : 10.1016/j.ijthermalsci.2010.02.011.
- [21] M. Bergmann, C.-H. Bruneau, A. Iollo, Enablers for robust POD models. *Journal of Computational Physics*, Volume 228, Issue 2, 1 February 2009, Pages 516-538, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2008.09.024.
- [22] B. Galletti, C. H. Bruneau, L. Zannetti, A. Iollo. Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *J. Fluid Mech.*, Volume 503, Pages 161-170, March 2004, DOI : 10.1017/S0022112004007906
- [23] A.E. Deane, I.G. Kevrekidis, G.E. Karniadakis, S.A. Orszag Low-dimensional models for complex geometry flows - Application to grooved channels and circular cylinders. *Physics of Fluids A*, Volume 3, October 1991, Pages 2337-2354, ISSN 0899-8213, DOI :10.1063/1.857881
- [24] S. Sirisup, G.E. Karniadakis, A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models. *Journal of Computational Physics*, Volume 194, Issue 1, 10 February 2004, Pages 92-116, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2003.08.021.

Chapitre 3

Réduction de modèle par identification modale en convection forcée

Résumé

Ce chapitre est dévolu à l'écriture formelle des modèles réduits identifiés que nous utilisons dans cet ouvrage, et aux méthodes que nous employons pour les construire effectivement.

Dans un premier temps, nous résumons succinctement le cheminement qui permet de construire ces modèles à partir de simulations CFD. Il s'agit de donner au lecteur une vue d'ensemble des différentes étapes de la méthode d'identification modale.

Puis nous justifions en détail le passage du modèle continu (écoulement fluide) à la forme que nous donnons au modèle réduit. En d'autres termes, à partir de la physique de l'écoulement, nous concevons une équation d'état de faible dimension. Nous montrons qu'on aboutit à des formes de modèles réduits différentes en fonction de l'écoulement (stationnaire, instationnaire, isotherme, anisotherme, ...). Pour chaque catégorie d'écoulement, nous présentons une forme de modèle réduit particulière.

Enfin, la construction effective du modèle réduit passe par un processus d'optimisation, que nous appelons l'identification. Dans la dernière partie, nous nous attardons sur :

1. les méthodes d'optimisation que nous avons développées,
2. l'importance de l'échantillonnage pour la réussite de la construction du modèle.

Sommaire

3.1	Introduction	36
3.2	La MIM, une méthode de réduction de modèle dynamique	36
3.2.1	Du problème physique au modèle détaillé	36
3.2.2	Du modèle détaillé au modèle réduit	37
3.2.3	Echantillonnage et obtention du modèle réduit	38
3.2.4	Utilisation du modèle réduit	39
3.3	Structures de modèles réduits d'écoulement	39
3.3.1	Objectifs de la section	39
3.3.2	Cadre général - Topologie	39
3.3.3	Approximation des dérivations spatiales	40
3.3.4	Les termes linéaires	42
3.3.5	Convection fluide	42
3.3.6	Convection thermique	43

3.3.7	Prise en compte du gradient de pression	43
3.3.8	Formulation de la structure du Modèle Détaillé	45
3.3.9	Formulation de la structure du Modèle Réduit	48
3.3.10	Modèle réduit final	49
3.4	Méthodologies	54
3.4.1	Echantillonnage	54
3.4.2	Considérations sur l'optimisation	56
3.4.3	Identification des modèles réduits stationnaires	59
3.5	Conclusion	65
	Bibliographie	67

3.1 Introduction

La résolution classique d'un problème scientifique commence généralement par l'expression d'un problème continu : on définit le domaine d'étude, on choisit les grandeurs que l'on souhaite observer, on repère les variables et les grandeurs qui ont une influence sur le résultat et on détermine les équations, généralement aux dérivées partielles, dont sont solutions les grandeurs à observer. Lorsque le problème est bien posé, on peut alors en rechercher une solution par le biais d'une résolution numérique. Celle-ci passe par la discrétisation de l'espace étudié, des grandeurs observées et éventuellement des équations aux dérivées partielles définissant le problème. On cherche alors une solution discrète d'un problème discret en supposant qu'il s'agira d'une solution approchée de la solution du problème continu.

L'obtention de la solution approchée passe par la résolution d'un nombre N d'équations algébriques. Ce nombre est directement lié à la finesse de la discrétisation spatiale et au nombre de variables impliquées dans l'équation différentielle continue. On peut alors considérer que la solution est à trouver dans un espace de dimension N . De façon générale, la précision du calcul augmente avec N , mais son coût également.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une alternative à l'utilisation directe des codes de calcul consiste en l'utilisation de surrogate models et de modèles réduits. L'optique générale des méthodes de réduction de modèle est de réduire le nombre d'équations algébriques à résoudre pour obtenir une solution approchée de qualité. De façon simplifiée, le principe d'une méthode de réduction de modèle est :

- de définir et de construire un espace de dimension petite devant N ,
- de transposer le système d'équations algébriques dont on cherche une solution, dans l'espace de dimension réduite,
- de définir la façon dont est reconstruite la solution dans l'espace physique à partir de la solution dans l'espace réduit.

La Méthode d'Identification Modale propose, pour les systèmes dynamiques, de transcrire les équations dans un espace de dimension réduite en n'en conservant que la forme, ou structure. Un processus d'identification permet alors, à l'aide d'une base de données fournie par le modèle de référence, de calculer les paramètres d'un modèle réduit offrant la meilleure approximation des résultats de ce modèle de référence.

Au cours de ce chapitre, nous verrons comment, à partir d'un modèle de référence, identifier un modèle réduit. Dans un premier temps (section 3.2), nous énoncerons le problème global de la génération d'un modèle réduit identifié. Puis, (section 3.3) nous l'illustrerons dans le cas d'un écoulement. Enfin, nous verrons que la méthode présente des difficultés intrinsèques, et nous présenterons les moyens utilisés pour y remédier.

3.2 La MIM, une méthode de réduction de modèle dynamique

3.2.1 Du problème physique au modèle détaillé

On considère un problème physique décrit par un **modèle d'origine** \mathcal{L} :

- les entrées u de \mathcal{L} sont des conditions opératrices appliquées à la frontière d'une topologie Ω , ou des sources internes. Il peut s'agir, par exemple, d'un débit de fluide, ou d'un flux de chaleur connu.
- les sorties y de \mathcal{L} sont des valeurs prises par des champs physiques (vitesse d'un fluide ou température par exemple), ou des grandeurs intégrales calculées à partir de ces valeurs (débit ou flux de chaleur à travers une surface par exemple)

– le modèle lie les entrées u aux sorties y grâce à :

1. une équation aux dérivées partielles \mathcal{E} associée à la prise en compte des conditions aux limites, et à une condition initiale :

$$\mathcal{E} : \frac{\partial S}{\partial t} + F(S) = 0 \quad (3.1a)$$

$$\mathcal{E}^{(\partial\Omega)} : F^{(\partial\Omega)}(S) = 0 \quad (3.1b)$$

2. et une relation linéaire entre l'état S et la sortie y

L'inconnue S de \mathcal{E} est appelée **l'état** du modèle. L'équation d'état peut être par exemple l'équation de la chaleur (l'état est alors le champ de température), ou bien des équations de Navier-Stokes (état : variables conservatives). En général, F met en jeu des opérateurs de dérivation spatiale, ce qui fait de l'équation (3.1a) une équation aux dérivées partielles, non linéaire dans le cas général.

Une méthode numérique d'obtention de la sortie y en fonction de l'entrée u passe par le maillage de la topologie (Ω), c'est-à-dire sa discrétisation en un ensemble fini (Ω_h) de N positions \bar{m}_i . En utilisant une approximation des opérateurs de dérivation spatiale mis en œuvre dans F (équation (3.1a)), et en tenant compte des conditions aux limites (3.1b) et des termes sources, on peut mettre en évidence un modèle \mathcal{L}^h approchant \mathcal{L} et basé sur une équation différentielle matricielle \mathcal{E}_h :

$$\mathcal{E}_h : \frac{d}{dt} S_h + F_h(S_h) = 0 \quad (3.2)$$

où F_h est un opérateur matriciel, avec des termes linéaires, et d'autres non. La dimension de cette équation d'état est celle de S_h , c'est-à-dire N ou un multiple de N . Le passage de la variable d'état S_h à la sortie y se fait au moyen d'une matrice de sonde :

$$y = HS_h \quad (3.3)$$

L'entrée u , la sortie y , l'équation d'état matricielle (3.2) et l'équation de projection (3.3), forment ce que l'on appellera le *modèle détaillé*.

3.2.2 Du modèle détaillé au modèle réduit

Les méthodes d'identification modale proposent des modèles réduits en approximation de ces modèles discrets. A partir d'un modèle de référence \mathcal{L}^h , on conçoit un modèle d'ordre faible \mathcal{L}^* dont :

- les entrées sont les mêmes que celles de \mathcal{L}^h , mais éventuellement restreintes à un certain domaine de définition ou de validité
- les sorties y^* sont destinées à être des valeurs approchées des sorties y ,
- la variable d'état s est une matrice colonne de taille $n \ll N$
- la "forme" de l'équation d'état \mathcal{E}_r est "similaire" à celle de \mathcal{E}_h , c'est-à-dire que les applications matricielles impliquées dans \mathcal{E}_h sont transcrites dans \mathcal{E}_r mais adaptées à la taille plus faible de s

$$\mathcal{E}_r : \frac{ds}{dt} + f(s) = 0 \quad (3.4)$$

Si F_h fait intervenir des applications linéaires en S_h , alors f fait également intervenir des applications linéaires en s . S'il y a des termes non linéaires dans F_h , alors f contiendra aussi des termes non linéaires similaires.

- enfin, une relation linéaire permet de calculer les observables y^* à partir de l'état réduit s :

$$y^* = hs \quad (3.5)$$

Plutôt que de parler de “forme” d'équation d'état, on parlera dorénavant de la *structure du modèle réduit*, incluant l'équation d'état réduit (3.4), et l'équation de projection (3.5).

3.2.3 Echantillonnage et obtention du modèle réduit

Dériver la structure du modèle réduit à partir de celle du modèle détaillé ne suffit pas à obtenir un modèle réduit capable de remplacer le modèle détaillé. Le modèle réduit est paramétré par un ensemble de matrices : celles de l'équation d'état réduit \mathcal{E}_r et la matrice de projection h . A ce stade, les valeurs numériques de ces matrices ne sont pas encore définies, et le modèle réduit n'est donc pas encore opérationnel.

Supposons qu'il y ait d paramètres définissant un modèle réduit \mathcal{L}^* . Chaque paramètre pouvant varier dans \mathbb{R} , l'ensemble des modèles d'ordre faible possibles est \mathbb{R}^d . Parmi eux, le modèle d'ordre faible optimal serait celui qui fournirait, sur un certain domaine de définition \mathcal{D}_u , la meilleure approximation y^* de la réponse y du modèle détaillé à une entrée quelconque $u \in \mathcal{D}_u$. De façon précise, si θ est un jeu de d paramètres pouvant décrire un modèle réduit \mathcal{L}_θ^* , alors $\mathcal{J}(\theta)$ propose une mesure de la qualité du modèle réduit correspondant :

$$\mathcal{J}(\theta) = \int_{u \in \mathcal{D}_u} e(y(u), y_\theta^*(u)) \quad (3.6)$$

où $e(y(u), y_\theta^*(u))$ mesure une distance entre $y(u)$ et $y_\theta^*(u)$. Plus \mathcal{J} est faible, et meilleur est le modèle réduit. L'objectif, lors de la construction du modèle réduit, est de trouver le paramètre optimal θ_0 qui minimise ce critère :

$$\theta_0 = \arg \left(\min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \mathcal{J}(\theta) \right) \quad (3.7)$$

En clair, on cherche le modèle réduit, dont la structure est définie par (3.4) et (3.5), et qui offre la meilleure approximation sur \mathcal{D}_u des sorties du modèle détaillé.

Remarque. Dans la pratique, la distance e est prise comme l'écart quadratique entre $y(u)$ et son approximation par le modèle réduit. Ainsi l'expression “meilleure approximation” doit être comprise au sens des moindres carrés.

Bien entendu, on ne peut se permettre de calculer la réponse y du modèle détaillé sur tout le domaine \mathcal{D}_u . En pratique, pour déterminer θ_0 , on récupère n_s réponses $y(u^i)$ correspondant à n_s entrées u^i . Le problème d'optimisation (3.7) est alors restreint aux seuls points d'échantillonnage u^i . On définit une fonctionnelle $J(\theta)$, mesure de la qualité du modèle en ces points, et le modèle réduit que l'on recherche en pratique est celui qui minimise cette fonctionnelle :

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{n_s} e(y(u^i), y^*(u^i)) \quad (3.8)$$

$$\theta_0 = \arg \left(\min_{\theta \in \mathbb{R}^d} J(\theta) \right) \quad (3.9)$$

Cette étape de construction effective du modèle réduit s'appelle *l'identification*.

3.2.4 Utilisation du modèle réduit

Une fois que le problème d'optimisation (3.9) a été résolu, on dispose d'un modèle d'ordre faible qui associe à tout $u \in \mathcal{D}_u$ un état s , et un observable y^* . Puisque le modèle réduit est optimal uniquement pour les points d'échantillonnage, il faut encore vérifier que l'erreur est faible sur le reste du domaine \mathcal{D}_u . Pour cela on compare les réponses des modèles détaillé et réduit en des points supplémentaires, c'est-à-dire pour des entrées différentes de celles utilisées pour identifier le modèle réduit. On vérifie que l'erreur commise alors reste acceptable. Même si on ne dispose pas d'évaluation de l'erreur commise sur \mathcal{D}_u , faire ces vérifications en des points les plus éloignés possible des points d'échantillonnage permet généralement d'obtenir un ordre de grandeur de l'erreur commise partout.

Si le résultat n'est pas satisfaisant, deux stratégies sont envisageables pour en améliorer la qualité :

1. On peut augmenter l'ordre du modèle, c'est-à-dire sa dimension.
2. On peut améliorer la qualité de l'échantillonnage, ce qui revient en général à augmenter le nombre d'échantillons.

Nous venons de voir, de façon concise et peu détaillée, les différentes étapes pour concevoir et construire un modèle réduit. Dans le chapitre suivant, nous présenterons les résultats obtenus par des modèles réduits concrets pour des écoulements isothermes et anisothermes. Pour les introduire, les paragraphes qui suivent sont consacrés à :

1. illustrer comment on obtient la structure du modèle détaillé pour ce type d'écoulement,
2. indiquer la manière dont est résolu le problème d'optimisation (3.9).

3.3 Structures de modèles réduits d'écoulement

3.3.1 Objectifs de la section

Nous cherchons dans toute la section 3.3 à éclaircir la façon dont est déterminée la structure d'un modèle réduit. Pour cela, nous reprenons les étapes présentées dans les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2, et nous les mettons en œuvre dans le cadre d'un écoulement régi par les équations de Navier-Stokes.

Les structures de tous les modèles réduits présentés dans cette thèse, ont été obtenues de façon similaire. On profitera donc de cette section pour les établir et les énumérer une fois pour toutes.

Dans les paragraphes 3.3.2 à 3.3.8 nous décrivons comment on obtient la forme de nos modèles détaillés (paragraphe 3.2.1). Nous en déduisons dans les paragraphes 3.3.9 et 3.3.10 les structures des modèles réduits développés au cours de cette thèse.

3.3.2 Cadre général - Topologie

On considère un domaine (Ω) de l'espace dans lequel s'écoule un fluide dans un intervalle de temps $\mathbb{T} = [\tau_1; \tau_2]$. (Ω) est doté d'un repère cartésien $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et on peut y définir des champs de vitesse, de pression et de température, qui offrent une solution aux équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \tag{3.10a}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} p - \overrightarrow{\text{div}} \left(\overline{\overline{\nabla \vec{v}}} + {}^t \overline{\overline{\nabla \vec{v}}} \right) = 0 \quad (3.10b)$$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \text{div}(T \vec{v}) - \lambda \Delta T = 0 \quad (3.10c)$$

La masse volumique et les propriétés moléculaires du fluide (sa capacité massique C_p , sa diffusivité thermique λ et sa viscosité moléculaire ν) étant supposées constantes, on se place dans le cadre d'un écoulement de convection forcée. Les opérateurs $\text{div}(\cdot)$ et $\overrightarrow{\text{div}}(\cdot)$ désignent respectivement les opérateurs de divergence scalaire et vectorielle. $\overline{\overline{\nabla}}$ correspond au gradient tensoriel, et l'application non linéaire $(\cdot \otimes \cdot)$ renvoie le produit tensoriel de deux champs vectoriels.

Ces équations continues correspondent à l'équation aux dérivées partielles \mathcal{E} qui apparaît dans le paragraphe 3.2.1 (équation (3.1a)).

(Ω) est doté d'une frontière $(\partial\Omega)$, à proximité de laquelle les champs de vitesse, de pression et de température sont supposés continus. Dans un premier temps, supposons que la vitesse et la température soient connues aux bords :

$$\vec{v} = \vec{v}_{(\partial\Omega)} \quad \text{sur } (\partial\Omega) \quad (3.11a)$$

$$T = T_{(\partial\Omega)} \quad \text{sur } (\partial\Omega) \quad (3.11b)$$

Du fluide pénètre dans (Ω) à travers une partie de $(\partial\Omega)$. On définit p_v le nombre de conditions aux limites en vitesse qui correspondent à ces injections de fluides. On se donne également p_T , le nombre de conditions aux limites en température. On a nécessairement $p_T \geq p_v$ dans la mesure où la température du fluide entrant dans (Ω) est une condition aux limites. On définit $[V_{(\partial\Omega)}]$ et $[T_{(\partial\Omega)}]$ les matrices colonnes formées par ces conditions. Les $p_v + p_t$ paramètres constituent alors l'entrée u du modèle. Pour simplifier, les p_v premières conditions de température dans $[T_{(\partial\Omega)}]$ sont ordonnées comme dans $[V_{(\partial\Omega)}]$. Pour $i = 1, \dots, p_v$, $V_i^{(\partial\Omega)}$ correspond à $T_i^{(\partial\Omega)}$.

Le maillage de (Ω) produit :

- une partition (Ω_h) de (Ω) formée de N cellules centrées chacune autour d'une position \vec{m}_i . On confondra (Ω_h) avec $(\vec{m}_i)_{i=1, \dots, N}$
- une partition $(\partial\Omega_h)$ de $(\partial\Omega)$ constituée de N_f faces centrées chacune autour d'une position \vec{f}_i . On confondra également $(\partial\Omega_h)$ avec l'ensemble de ces positions $(\vec{f}_i)_{i=1, \dots, N_f}$

Dans les paragraphes suivants (3.3.3 à 3.3.8), nous nous servirons de l'approximation des équations de Navier-Stokes liée au maillage (Ω_h) pour déterminer une structure de modèle détaillé pour l'écoulement.

3.3.3 Approximation des dérivations spatiales

3.3.3.1 Objectif

Les méthodes dites par différences finies ou volumes finis ont en commun d'estimer la dérivée spatiale d'une grandeur g au centre d'une cellule, à partir des valeurs prises par g au centre des cellules voisines. Nous allons employer une méthode similaire pour déterminer la *structure du modèle détaillé* décrit par l'écoulement et le maillage.

Remarque Précisons dès maintenant que, dans ce qui suit, nous n'essaierons jamais de résoudre ou de proposer une méthode de résolution des équations de Navier-Stokes, ou de toute autre équation. Nous nous contenterons d'écrire en chaque cellule du maillage les différents termes de cette équation, sous une forme approchée "générique", en prenant pour exemple les approches de différences finies ou de volumes finis.

3.3.3.2 Dérivations spatiales et combinaisons linéaires

Supposons que g soit une variable d'écoulement distribuée sur un maillage (Ω_h) . Quelle que soit la méthode préalable de résolution des équations de Navier-Stokes (3.10), on peut estimer en post-traitement une dérivation spatiale de g par une combinaison linéaire de ses valeurs aux différentes cellules de (Ω_h) et sur les faces de la frontière. Prenons l'exemple de la divergence :

$$\operatorname{div}(g)(\vec{m}_i) = \sum_{\text{cellules } j} \alpha_{ij}^c g_j + \sum_{\text{faces } k} \alpha_{ik}^f g_k \quad (3.12)$$

Les coefficients α_{ij}^c et α_{ik}^f dépendent :

- de la position courante \vec{m}_i
- de la position j ou k prise en compte

$\alpha_{ij}^{c/f}$ exprime ainsi la prise en compte de la valeur de g dans la cellule/face j pour évaluer

la divergence de g dans la cellule i . En différences finies 1D par exemple, $\operatorname{div}(g\vec{e}_1) = \frac{\partial g}{\partial x_1}$ peut-être estimé en une position i à l'aide de la valeur prise par g aux positions $i-1$ et $i+1$ via un schéma centré d'ordre 2 par exemple :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{m}_i) = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2\Delta x_1} + o(\Delta x_1^2) \quad (3.13)$$

En volumes finis, on cherchera à estimer l'intégrale sur chaque cellule du terme $\operatorname{div}(g)$ ou $\overrightarrow{\operatorname{div}}(g) : \int_{\text{cellule}} \operatorname{div}(g) dV_i$, où dV_i est un élément infinitésimal de volume dans la cellule i . Cela revient à calculer le flux de g à travers la surface S_i de la cellule :

$$\int_{\text{cellule}} \operatorname{div}(g) dV_i = \oint_{S_i} g d\vec{S}_i \quad (3.14)$$

S_i est un ensemble de facettes, et le flux de g à travers S_i est calculé comme la somme des flux à travers chacune de ces facettes :

$$\oint_{S_i} g d\vec{S}_i = \sum_{\text{facettes}} \bar{g}_k \vec{s}_k \quad (3.15)$$

où les \bar{g}_k représentent les valeurs moyennes prises par g aux centres des différentes facettes \vec{s}_k . Divers schémas en proposent une approximation par combinaison linéaire des g_k des cellules autour.

En définitive, lorsque l'on écrit (3.10) au centre d'une cellule de (Ω_h) , le terme correspondant à $\operatorname{div}(g)$ se transcrit comme une combinaison linéaire des g_k aux centres des cellules de (Ω_h) et des faces des frontières maillées de (Ω) . C'est la signification de l'équation (3.12). On peut également écrire cette équation sous la forme matricielle :

$$\operatorname{div}(g)(\vec{m}_i) = {}^t[\alpha_i^c] [g] + {}^t[\alpha_i^{(\partial\Omega)}] [g_{(\partial\Omega)}] \quad (3.16)$$

où $[g]$ est la matrice colonne formée des valeurs de g en chaque cellule de (Ω_h) , et $[g_{(\partial\Omega)}]$ est celle des valeurs de g aux centres des faces à la frontière, qui sont, rappelons le, connues.

Lorsque les $\text{div}(g)(\vec{m}_i)$ sont écrites pour toutes les cellules de (Ω_h) , elles peuvent être assemblées au sein d'une matrice colonne $[\text{div}(g)]$ qui s'exprime comme une somme de produits matriciels :

$$[\text{div}(g)] = [\alpha^c] [g] + [\alpha^{(\partial\Omega)}] [g_{(\partial\Omega)}] \quad (3.17)$$

Des expressions identiques peuvent être obtenues pour les autres opérateurs de dérivation spatiale (gradient, laplacien, ...) et leurs compositions. Les paragraphes suivants se consacrent à voir comment (3.17) peut alors s'exprimer pour chacun des termes de l'équation de Navier-Stokes.

3.3.4 Les termes linéaires

Considérons les applications

$$\vec{v} \mapsto \overrightarrow{\text{vdiv}} \left(\overline{\overline{\vec{v}}} + {}^t\overline{\overline{\vec{v}}} \right)$$

$$T \mapsto \lambda\Delta T$$

Le second est un opérateur de dérivation spatiale, et le premier compose des dérivations spatiales. Comme en (3.17), ces termes, écrits en chaque cellule du maillage, peuvent être vus comme

$$\left[\overrightarrow{\text{vdiv}} \left(\overline{\overline{\vec{v}}} + {}^t\overline{\overline{\vec{v}}} \right) \right] = A_v [V] + A_v^{(\partial\Omega)} [V_{(\partial\Omega)}] \quad (3.18)$$

$$[\lambda\Delta T] = A_T [T] + A_T^{(\partial\Omega)} [T_{(\partial\Omega)}] \quad (3.19)$$

où $[V] = {}^t(\vec{v}(\vec{m}_i) \cdot \vec{e}_j)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq 3}} \in \mathcal{M}_{3N,1}(\mathbb{R})$ et $[T] = {}^t(T(\vec{m}_i))_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ sont les matrices colonnes regroupant pour l'une, les composantes de tous les vecteurs vitesse définis sur (Ω_h) , et pour l'autre toutes les températures sur (Ω_h) .

3.3.5 Convection fluide

Dans (3.10b) apparaît le terme non-linéaire $(\vec{v} \otimes \vec{v})$, défini par :

$$(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \begin{bmatrix} (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)^2 & (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)(\vec{v} \cdot \vec{e}_2) & (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)(\vec{v} \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)(\vec{v} \cdot \vec{e}_1) & (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)^2 & (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)(\vec{v} \cdot \vec{e}_3) \\ (\vec{v} \cdot \vec{e}_3)(\vec{v} \cdot \vec{e}_1) & (\vec{v} \cdot \vec{e}_3)(\vec{v} \cdot \vec{e}_2) & (\vec{v} \cdot \vec{e}_3)^2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La dérivation $\overrightarrow{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v})$ va faire intervenir des produits entre une composante r de vitesse en \vec{m}_j , et une autre composante s en \vec{m}_k : $(\vec{v}_j \cdot \vec{e}_r)(\vec{v}_k \cdot \vec{e}_s)$. Pour en tenir compte de façon matricielle, on définit un terme de non-linéarité $\Psi_v([V])$

$$\Psi_v([V]) = {}^t(V_i V_j)_{1 \leq i \leq j \leq 3N} \quad (3.21)$$

En 3D, Ψ_v compte $3N(3N+1)/2$ composantes. De la même façon, on définit $\Psi_v^{(\partial\Omega)}$ pour tenir compte des conditions aux limites de façon quadratique :

$$\Psi_v^{(\partial\Omega)} = {}^t \left((V_{(\partial\Omega)})_i^2 \right)_{1 \leq i \leq p_v} \quad (3.22)$$

Ainsi, la forme matricielle du terme convectif de (3.10b) intégré sur (Ω_h) devient :

$$\left[\overrightarrow{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v}) \right] = [B_v] \Psi_v([V]) + [B_v^{(\partial\Omega)}] \Psi_v^{(\partial\Omega)} \quad (3.23)$$

3.3.6 Convection thermique

Dans l'équation de l'énergie, $\rho C_p \text{div}(T\vec{v})$ désigne le terme de transport de l'énergie thermique par le champ de vitesse. Pour chaque cellule, l'approximation (3.12) de ce terme met en jeu des produits entre la température et les composantes du champ de vitesse dans les autres cellules. Pour prendre en compte ces produits, on définit comme dans le paragraphe précédent $\Psi_{vT}(V, T)$, la matrice colonne répertoriant tous les produits entre les températures et les vitesses :

$$\Psi_{vT}(V, T) = {}^t [T_i V_j]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq 3N}} \quad (3.24)$$

De la même façon qu'elles injectent, à travers la frontière $(\partial\Omega)$, de l'énergie cinétique dans l'écoulement, les p_v conditions aux limites cinétiques apportent également de l'énergie thermique par convection. Pour prendre celle-ci en compte, on se dote de la matrice colonne de débit d'énergie thermique $\Psi_{vT}^{(\partial\Omega)}$ qui regroupe les produits entre les p_v vitesses et températures d'injection de fluide :

$$\Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = {}^t \left(T_i^{(\partial\Omega)} V_i^{(\partial\Omega)} \right)_{1 \leq i \leq p_v} \quad (3.25)$$

L'approximation du terme de convection thermique dans (3.10c) devient alors, lorsqu'elle est intégrée sur (Ω_h) :

$$\left[\rho C_p \text{div}(T\vec{v}) \right] = [B_T] \Psi_{vT}(V, T) + [B_T^{(\partial\Omega)}] \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} \quad (3.26)$$

3.3.7 Prise en compte du gradient de pression

3.3.7.1 Expression du gradient de pression en fonction du champ de vitesse

Dans les équations de quantité de mouvement apparaît un gradient de pression pour lequel il n'existe pas d'équation explicite lorsque l'on traite des écoulements incompressibles. La présence de ce terme dans les solveurs CFD est à l'origine de nombreuses difficultés, à la fois dans la résolution même des équations de quantité de mouvement, mais également dans la définition et la prise en compte propres des conditions aux limites.

De façon générale, les méthodes conçues pour tenir compte du gradient de pression s'en servent pour assurer la condition d'incompressibilité (3.10a). Dans l'optique de proposer une structure de modèle détaillé, nous allons ici remplacer le terme en gradient de pression par une fonction de la vitesse en nous servant de cette condition d'incompressibilité.

Pour cela nous utiliserons la notion de projecteur de Leray-Helmholtz. Il s'agit d'appliquer une décomposition de Helmholtz au champ de vitesse \vec{v} solution de (3.10). Dans cette décomposition, \vec{v} s'écrit comme somme unique d'un champ à divergence nulle et d'un gradient de potentiel :

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{\nabla} \Phi \quad (3.27)$$

avec $\text{div}(\vec{v}_p) = \vec{0}$ dans (Ω) et $\vec{v}_p \cdot \vec{n} = 0$ sur $(\partial\Omega)$ (\vec{n} représente le vecteur localement normal à la frontière). Le projecteur de Leray-Helmholtz de \vec{v} , $\mathcal{P}(\vec{v})$ est alors défini par le terme à divergence nulle de cette décomposition. Le potentiel Φ est noté $Q(\vec{v})$. Nous reprenons ici des résultats présentés par Liu *et al.* dans [1]. Parmi ceux-ci, on notera notamment

1. que si \vec{f} est quelconque de carré intégrable sur (Ω) , alors $(I - \mathcal{P})\vec{f}$ est un champ de gradient : $(I - \mathcal{P})\left(\vec{f}\right) = \vec{\nabla} Q\left(\vec{f}\right)$
2. que si Δ désigne le Laplacien et $\text{rot}(\cdot)$ le rotationnel, alors on a l'égalité $(\Delta\mathcal{P} - \mathcal{P}\Delta)\left(\vec{f}\right) = - (I - \mathcal{P})\text{rot}\left(\text{rot}\left(\vec{f}\right)\right)$
3. par conséquent $(\Delta\mathcal{P} - \mathcal{P}\Delta)\left(\vec{f}\right)$ est le gradient d'un champ $p_s\left(\vec{f}\right)$ appelé *pression de Stokes* :

$$(\Delta\mathcal{P} - \mathcal{P}\Delta)\vec{f} = -\vec{\nabla} Q \text{rot}\left(\text{rot}\left(\vec{f}\right)\right) = \vec{\nabla} p_s\left(\vec{f}\right) \quad (3.28)$$

Notons que $\vec{\nabla} p_s$ est un opérateur linéaire.

Supposons dans un premier temps que la composante normale des conditions aux limites à la frontière soit nulle : $\vec{v}_{(\partial\Omega)} \cdot \vec{n} = 0$. Dans ce cas, la condition d'incompressibilité implique que le champ de vitesse est son projecteur de Leray : $\mathcal{P}\vec{v} = \vec{v}$.

En appliquant ces résultats au champ de vitesse \vec{v} , et en utilisant $\mathcal{P}\vec{v} = \vec{v}$, Liu *et al.* montrent que le champ de pression peut s'exprimer comme la somme d'une pression de Stokes et du potentiel qu'on obtiendrait par la décomposition de Helmholtz de $\vec{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v})$:

$$\vec{\nabla} p = \nu \vec{\nabla} p_s(\vec{v}) + \vec{\nabla} Q\left(\vec{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v})\right) \quad (3.29)$$

Pour ce faire, on prend le projecteur de Leray des différents termes de l'équation de Navier-Stokes, en se souvenant que, d'une part, $\mathcal{P}\vec{v} = \vec{v}$, et que, d'autre part, le projecteur de Leray du gradient de pression est nul. On obtient alors une équation pour la dérivée temporelle de \vec{v} que l'on égalise à l'équation de quantité de mouvement pour obtenir la relation (3.29).

Lorsque la condition limite n'est pas tangentielle à la normale du domaine, le champ de vitesse, même s'il est à divergence nulle, n'est pas son propre projecteur de Leray. Dans ce cas $\vec{\nabla} Q(\vec{v}) \neq 0$, mais est malgré tout à divergence nulle, puisque \vec{v} l'est. Ainsi, $Q(\vec{v})$ est une fonction harmonique : $\Delta Q = 0$ sur (Ω) .

Par définition, la composante normale de $\vec{\nabla} Q(\vec{v})$ à la frontière égale celle de \vec{v} :

$$\vec{\nabla} Q(\vec{v}) \cdot \vec{n} = \vec{v}_{(\partial\Omega)} \cdot \vec{n} \quad (3.30)$$

Ainsi, Q ne dépend en fait que de la condition aux limites $\nu_{(\partial\Omega)}$. Liu *et al.* utilisent la notation $\mathcal{R}(\vec{v}_{(\partial\Omega)})$.

Le projecteur de Leray de \vec{v} est $\vec{v} - \vec{\nabla} \mathcal{R}(\vec{v}_{(\partial\Omega)})$. La projection de Leray de l'équation de quantité de mouvement donne cette fois-ci :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v} - \vec{\nabla} \mathcal{R}(\vec{v}_{(\partial\Omega)}) \right) + \nu \vec{\nabla} p_s(\vec{v}) = \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} Q\left(\vec{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v})\right) \quad (3.31)$$

Pour écrire (3.31), on a utilisé l'expression du gradient de pression de Stokes, et la définition du laplacien vectoriel comme étant $\vec{\nabla} \cdot \text{div}(\cdot) - \text{rot}(\text{rot}(\cdot))$. En comparant (3.31) avec l'équation de quantité de mouvement, on obtient l'expression suivante du gradient de pression :

$$\vec{\nabla} p = \nu \vec{\nabla} p_s + \vec{\nabla} Q(\text{div}(\vec{v} \otimes \vec{v})) - \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{R}(\vec{v}_{(\partial\Omega)}) \quad (3.32)$$

Les applications $\vec{v} \mapsto p_s$, $\vec{f} \mapsto Q(f)$, et $\vec{v}_{(\partial\Omega)} \mapsto \mathcal{R}(\vec{v}_{(\partial\Omega)})$ sont linéaires. Le gradient de pression s'exprime ainsi comme une somme de gradients de fonctions linéaires de \vec{v} , de $\vec{v} \otimes \vec{v}$ et de $\frac{\partial \vec{v}_{(\partial\Omega)}}{\partial t}$:

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} (\text{flin}_1(\vec{v})) + \vec{\nabla} (\text{flin}_2(\vec{v} \otimes \vec{v})) + \vec{\nabla} \left(\text{flin}_3 \left(\frac{\partial \vec{v}_{(\partial\Omega)}}{\partial t} \right) \right) \quad (3.33)$$

3.3.7.2 Expression matricielle du gradient de pression

Comme pour les autres termes des équations de Navier-Stokes, nous écrivons une approximation par combinaison linéaire (3.12) du gradient de pression (3.33), que nous assemblons sur (Ω_h) pour en obtenir une version matricielle de type (3.17). Comme dans le paragraphe 3.3.5, on exprime l'approximation de $\vec{\nabla} (\text{flin}_2(\vec{v} \otimes \vec{v}))$ à l'aide de $\Psi_v([V])$ et de $\Psi_v^{(\partial\Omega)}$:

$$\left[\vec{\nabla} (\text{flin}_2(\vec{v} \otimes \vec{v})) \right] = [Z_2] \Psi_v([V]) + [Z_3^{(\partial\Omega)}] \Psi_v^{(\partial\Omega)} \quad (3.34)$$

La version assemblée de (3.33) s'écrit alors :

$$\left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right] = [Z_1] [V] + [Z_2] \Psi_v([V]) + [Z_1^{(\partial\Omega)}] [V_{(\partial\Omega)}] + [Z_2^{(\partial\Omega)}] \Psi_v^{(\partial\Omega)} + [Z_3] \frac{d}{dt} [V_{(\partial\Omega)}] \quad (3.35)$$

L'équation (3.35) montre que pour prendre en compte le gradient de pression à l'aide du champ de vitesse, il est a priori nécessaire de faire intervenir la dérivée temporelle de la vitesse sur la frontière du domaine. Cependant, nous nous sommes rendu compte de la présence de ce terme trop tard, et les développements qui suivent sont basés sur une formulation du gradient de pression sans cette dérivée :

$$\left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right] = [Z_1] [V] + [Z_2] \Psi_v([V]) + [Z_1^{(\partial\Omega)}] [V_{(\partial\Omega)}] + [Z_2^{(\partial\Omega)}] \Psi_v^{(\partial\Omega)} \quad (3.36)$$

Cette erreur peut éventuellement avoir un effet dans le cas des écoulements dont la vitesse d'entrée dépend du temps. Il s'agit en particulier, parmi les résultats présentés au chapitre 4, des écoulements présentés dans la section 4.5. Ces cas pourraient être l'occasion, dans des travaux ultérieurs, d'évaluer l'impact de la prise en compte directe de la dérivée temporelle de la vitesse d'entrée dans la conception d'un modèle réduit. Dans les autres écoulements étudiés, cette vitesse d'entrée est constante, et l'équation (3.35) s'écrit naturellement (3.36).

3.3.8 Formulation de la structure du Modèle Détaillé

3.3.8.1 Formulation en vitesse-température

On reprend les formes discrétisées et assemblées des différents termes de l'équation de quantité de mouvement (3.10b) et de l'équation de l'énergie (3.10c) décrites dans (3.18), (3.19), (3.23), (3.26) et (3.36) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [V] + ([A_v] + [Z_1]) [V] + ([B_v] + [Z_2]) \Psi_v([V]) \\ + \left([A_v^{(\partial\Omega)}] + [Z_1^{(\partial\Omega)}] \right) V_{(\partial\Omega)} + \left([B_v^{(\partial\Omega)}] + [Z^{(\partial\Omega)}] \right) \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \end{aligned} \quad (3.37a)$$

$$\frac{d}{dt} [T] + [A_T] [T] + [B_T] \Psi_{vT}(V, T) + [A_T^{(\partial\Omega)}] [T_{(\partial\Omega)}] + [B_T^{(\partial\Omega)}] \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.37b)$$

Pour plus de clarté, on abandonne les $[\]$, sauf pour $[V]$ et $[T]$, et on fait dans (3.37a) les substitutions :

$$A_v + Z_1 \longrightarrow A_v$$

$$B_v + Z_2 \longrightarrow B_v$$

$$A_v^{(\partial\Omega)} + Z_1^{(\partial\Omega)} \longrightarrow A_v^{(\partial\Omega)}$$

$$B_v^{(\partial\Omega)} + Z_2^{(\partial\Omega)} \longrightarrow B_v^{(\partial\Omega)}$$

On obtient alors les équations différentielles du premier ordre en temps :

$$\frac{d}{dt} [V] + A_v [V] + B_v \Psi_v([V]) + A_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + B_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.38a)$$

$$\frac{d}{dt} [T] + A_T [T] + B_T \Psi_{vT}(V, T) + A_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + B_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.38b)$$

Dans ces équations, les matrices colonnes $[V] \in \mathcal{M}_{3N,1}(\mathbb{R})$ et $[T] \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ constituent l'état du modèle. L'effet sur cet état des variations spatiales de vitesse et de température est pris en compte grâce aux matrices carrées $A_v \in \mathcal{M}_{3N,3N}(\mathbb{R})$ et $A_T \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$. $\Psi_v([V]) \in \mathcal{M}_{3N(3N+1)/2,1}(\mathbb{R})$ et $\Psi_{vT}(V, T) \in \mathcal{M}_{3N^2,1}(\mathbb{R})$ permettent de prendre en compte les non-linéarités introduites par les convections de quantité de mouvement et d'énergie thermique. Leur effet sur les dynamiques de $[V]$ et de $[T]$ apparaît grâce aux matrices $B_v \in \mathcal{M}_{3N,3N(3N+1)/2}(\mathbb{R})$ et $B_T \in \mathcal{M}_{N,3N^2}(\mathbb{R})$.

$V_{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{p_v,1}(\mathbb{R})$ et $T_{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{p_T,1}(\mathbb{R})$ sont les matrices de commande. Elles forment ensemble l'entrée u du modèle. Elles correspondent aux conditions aux limites que l'on impose. Elles doivent leur influence sur les dynamiques des variables d'état

1. aux matrices $A_v^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{3N,p_v}(\mathbb{R})$ et $A_T^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{N,p_T}(\mathbb{R})$ pour la part linéaire,
2. aux matrices $B_v^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{3N,p_v}(\mathbb{R})$ et $B_T^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{N,p_T}(\mathbb{R})$ pour la part non linéaire, à travers les fonctions $\Psi_v^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{p_v,1}(\mathbb{R})$ et $\Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{p_v,1}(\mathbb{R})$

Les sorties y sont obtenues de façon linéaire à partir des variables d'état. Disons que :

- il y a deux types de sorties, parmi lesquelles q_v dépendent exclusivement du champ de vitesse, et les q_T restantes ne dépendent que du champ de température ;
- les sorties dépendant du champ de vitesse sont regroupées dans y_v , et celles dépendant du champ de température forment y_T

- y_v et y_T peuvent s'obtenir par combinaison linéaire des valeurs, respectivement de vitesse et de température, contenues dans $[V]$ et $[T]$

Les sorties y , appelées également des *observables*, qui sont particulièrement visées par cette approche sont des valeurs de vitesse ou de température prises en différents points, leurs intégrales ou des moyennes, ainsi que tous les observables qui peuvent s'obtenir par dérivation spatiale de ces champs : flux de chaleur à travers une paroi, coefficient de frottement, ...

Sous ces hypothèses, nous écrivons les équations d'observation du modèle :

$$y_v = C_v [V] \quad (3.39a)$$

$$y_T = C_T [T] \quad (3.39b)$$

Les matrices $C_v \in \mathcal{M}_{q_v, 3N}(\mathbb{R})$ et $C_T \in \mathcal{M}_{q_T, N}(\mathbb{R})$ peuvent être vues comme des matrices de sonde, puisqu'elles permettent de "mesurer" en des positions précises dans (Ω_h) les valeurs de vitesse et de température.

Ensemble, les équations (3.38) et (3.39) définissent la *structure d'un Modèle Détaillé* liant les conditions aux limites $V_{(\partial\Omega)}$ et $T_{(\partial\Omega)}$ aux observables y_v et y_T . On note ce modèle \mathcal{L}^h et il s'écrit :

$$\mathcal{E}_h : \begin{cases} \frac{d}{dt} [V] + A_v [V] + B_v \Psi_v ([V]) + A_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + B_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \\ \frac{d}{dt} [T] + A_T [T] + B_T \Psi_{vT} (V, T) + A_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + B_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \end{cases} \quad (3.40a)$$

$$\begin{cases} y_v = C_v [V] \\ y_T = C_T [T] \end{cases} \quad (3.40b)$$

Remarque. Au paragraphe 3.3.2, nous avons considéré que les valeurs de la vitesse et de la température étaient prescrites sur la frontière. En pratique, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, un flux thermique ou un flux de vitesse peuvent être imposés sur une partie de la frontière. Dans ce cas, si les champs de vitesse ou de température sont continus, il est possible d'écrire l'équation (3.12) en faisant intervenir les flux imposés dans la commande. On peut alors les intégrer dans les commandes $V_{(\partial\Omega)}$ ou $T_{(\partial\Omega)}$ sans avoir à modifier la structure du modèle détaillé (3.40).

3.3.8.2 Diagonalisation

Considérons la part cinétique du modèle dont nous venons d'écrire la structure :

$$\frac{d}{dt} [V] + A_v [V] + B_v \Psi_v ([V]) + A_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + B_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.41a)$$

$$y_v = C_v [V] \quad (3.41b)$$

La matrice de linéarité A_v étant carrée, on suppose qu'elle est diagonalisable :

$$A_v = M_v D_v M_v^{-1} \quad D_v \text{ diagonale} \quad (3.42a)$$

$$S_v = M_v^{-1} [V]; \quad [V] = M_v S_v \quad (3.42b)$$

En :

1. utilisant la substitution (3.42b) dans l'équation (3.41a),
2. en multipliant à gauche cette équation par M_v^{-1} ,
3. écrivant (3.42a) dans l'équation obtenue,

on obtient une équation dynamique

$$\frac{d}{dt}S_v + D_v S_v + B'_v \Psi_v(S_v) + A_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + B_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.43)$$

On opère également la substitution $[V] = M_v S_v$ dans l'équation d'observation cinétique (3.41b) pour obtenir :

$$y_v = C_v P_v^{-1} S_v \quad (3.44)$$

On abandonne les ' et on pose $H_v = C_v P_v^{-1} \in \mathcal{M}_{q_v, 3N}(\mathbb{R})$ pour obtenir une nouvelle structure pour la part cinétique de notre modèle détaillé :

$$\frac{d}{dt}S_v + D_v S_v + B_v \Psi_v(S_v) + A_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + B_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.45a)$$

$$y_v = H_v S_v \quad (3.45b)$$

En résumé, plutôt que d'utiliser comme état un champ de vitesse $[V]$ évoluant dans l'espace des fonctions de (Ω_h) vers \mathbb{R}^{3N} , on utilise S_v qui évolue dans un espace en bijection avec celui-ci. Cet espace est obtenu par le changement de base associé aux vecteurs propres de l'approximation de la part linéaire des équations de Navier-Stokes.

On désigne cet espace par *espace modal cinétique*, et la variable d'état S_v est appelée *variable d'état modale cinétique*. H_v est une matrice de projection entre l'espace modal et celui des observables cinétiques y_v .

En appliquant un traitement similaire à la part thermique de la structure du modèle détaillé ((3.38), (3.39)), on obtient une version modale de l'équation d'état thermique et de l'équation d'observation thermique :

$$\frac{d}{dt}S_T + D_T S_T + B_T \Psi_{vT}(S_v, S_T) + A_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + B_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.45c)$$

$$y_T = H_T S_T \quad (3.45d)$$

Cette fois, le changement de base s'est fait par rapport aux vecteurs propres de A_T , la matrice de diffusion thermique dans (3.38b). La matrice D_T est diagonale et on appellera S_T la *variable d'état modale thermique*.

Les équations (3.45) définissent une autre structure pour le modèle détaillé défini au paragraphe 3.3.8.1. La taille du modèle détaillé reste inchangée, mais dans les prochains paragraphes, nous tirerons parti du fait que les matrices D_v et D_T sont diagonales.

L'équation d'état (3.45c) correspond à l'équation discrétisée \mathcal{E}_h qui sert d'équation d'état au modèle approché \mathcal{L}^h du paragraphe 3.2.1.

3.3.9 Formulation de la structure du Modèle Réduit

3.3.9.1 Transcription

En s'inspirant de la forme (3.45) du modèle réduit \mathcal{L}_h , décrite au paragraphe précédent, on définit une classe de modèles \mathcal{L}^* :

- dont les entrées sont les conditions aux limites $V_{(\partial\Omega)}$ et $T_{(\partial\Omega)}$
- dont les sorties sont des observables cinétiques y_v^* et thermiques y_T^*
- qui mettent en œuvre la résolution d'une équation d'état \mathcal{E}_r dont la variable d'état (s_v, s_T) est de dimension très faible devant N , et qui met en jeu le même type de termes que \mathcal{E}_h :

$$\mathcal{E}_r : \begin{cases} \frac{d}{dt}s_v + d_v s_v + b_v \Psi_v(s_v) + a_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + b_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \\ \frac{d}{dt}s_T + d_T s_T + b_T \Psi_{vT}(s_v, s_T) + a_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + b_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \end{cases} \quad (3.46a)$$

$$\dim s_v, \dim s_T \ll N \quad (3.46b)$$

- qui lie les variables d'état aux observables via une projection linéaire :

$$\begin{cases} y_v^* = h_v s_v \\ y_T^* = h_T s_T \end{cases} \quad (3.47)$$

Les variables d'état s_v et s_T sont dites réduites. On pose n_v et n_T leurs tailles respectives : $s_v \in \mathcal{M}_{n_v,1}(\mathbb{R})$, $s_T \in \mathcal{M}_{n_T,1}(\mathbb{R})$. Comme l'équation d'état de \mathcal{L}^h , l'équation d'état réduit \mathcal{E}_r fait apparaître :

- des termes linéaires, $d_v s_v$ et $d_T s_T$, avec $d_v \in \mathcal{M}_{n_v, n_v}(\mathbb{R})$ et $d_T \in \mathcal{M}_{n_T, n_T}(\mathbb{R})$ des matrices diagonales ;
- des termes non linéaires grâce à $\Psi_v(s_v) = \left((s_v)_i (s_v)_j \right)_{1 \leq i \leq j \leq n_v}$ et $\Psi_{vT}(s_v, s_T) = \left((s_v)_i (s_T)_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq n_v \\ 1 \leq j \leq n_T}}$
- une prise en compte de l'entrée à la fois linéaire et quadratique

Le principe de l'identification de modèle, est de trouver le modèle réduit de cette forme solution du problème d'optimisation (3.7). Dans le paragraphe suivant, nous modifierons légèrement la forme du modèle pour faciliter la résolution de ce problème.

3.3.10 Modèle réduit final

3.3.10.1 Dimension du problème d'optimisation

Comme expliqué dans le paragraphe 3.2.3, la construction ou identification d'un modèle réduit dont la structure est définie par les équations (3.46a) et (3.47), passe par la résolution d'un problème d'optimisation. Les variables de ce problème sont les composantes des matrices impliquées dans (3.46a) et celles des matrices de projection h_v et h_T .

Nous verrons dans le paragraphe 3.4.2.1, comment identifier le modèle réduit en résolvant itérativement deux problèmes d'optimisation :

1. un non linéaire, dont les variables sont les composantes des matrices présentes dans (3.46a),
2. un autre linéaire, dont les variables sont les composantes des matrices de projection h_v et h_T .

Quelle est la dimension du premier problème d'optimisation ? Pour simplifier, considérons un problème isotherme. L'équation d'état réduit se limite alors à

$$\frac{d}{dt}s_v + d_v s_v + b_v \Psi_v(s_v) + a_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + b_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.48)$$

Dans ce cas, d , le nombre de composantes à identifier pour définir (3.48) est la somme des nombres de composantes des matrices :

1. $d_v \in \mathcal{M}_{n_v, n_v}(\mathbb{R})$ diagonale

TAB. 3.1 – Evolution en fonction de son ordre n_v , du nombre de composantes d'un modèle réduit d'écoulement isotherme à une commande. On suppose qu'il est construit à partir d'une équation d'état de type (3.48). Il s'agit d'un polynôme de degré 3 en n_v .

Ordre du modèle	Nombre de composantes	Part de b_v
1	4	1
2	12	6
3	27	18
4	52	40
5	90	75
6	144	126
7	217	196
8	312	288
9	432	405
10	580	550

$$2. b_v \in \mathcal{M}_{n_v, n_v(n_v+1)/2}(\mathbb{R})$$

$$3. a_v^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{n_v, p_v}(\mathbb{R})$$

$$4. b_v^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{n_v, p_v}(\mathbb{R})$$

Il y a donc $d = n_v(1 + n_v(n_v + 1)/2 + 2p_v)$ éléments à déterminer. Dans un cas simple où il y a $p_v = 1$ commande en entrée, le tableau 3.1 rapporte l'évolution du nombre de composantes à trouver pour construire des modèles réduits d'ordres 1 à 10.

A cause de la prise en compte quadratique des non-linéarités, le nombre de composantes à déterminer, et donc la difficulté de l'optimisation évolue en $O(n_v^3)$. Nous verrons dans le paragraphe 3.4.2.4, que l'optimisation se fait en utilisant des algorithmes dits globaux, dont l'efficacité dépend énormément de la dimension d du problème.

3.3.10.2 Nouvelle Formulation : Réduction du nombre de composantes

Pour faciliter l'identification, il faut donc limiter le nombre de composantes à déterminer. C'est par exemple pour cela que l'on utilise un modèle issu de la diagonalisation de la matrice de linéarité (cf. paragraphe 3.3.8.2). Plutôt que d'identifier une matrice a_v contenant n_v^2 composantes, on identifie une matrice diagonale d_v de n_v termes.

Dans (3.48), le terme $b_v \Psi_v(s_v)$ permet de prendre en compte, dans chaque ligne i de l'équation, tous les produits possibles $(\Psi_v(s_v))_i = (s_v)_j (s_v)_k$:

$$(b_v \Psi_v(s_v))_i = \sum_{l=1}^{n_v(n_v+1)/2} (b_v)_{il} (\Psi_v(s_v))_l \quad (3.49)$$

Une alternative pour prendre en compte à chaque ligne l'ensemble des produits possibles $(s_v)_j (s_v)_k$ est de remplacer le terme $b_v \Psi_v(s_v)$, par un produit terme à terme. On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^p &\longrightarrow \mathcal{R}^p \\ (f, g) &\longmapsto (f \bullet g) \quad / (f \bullet g)_i = f_i g_i \end{aligned}$$

TAB. 3.2 – Dimension du problème d'optimisation en fonction de l'ordre. En passant à une équation d'état de type (3.51), d devient un polynôme de degré 2 en n_v .

Ordre du modèle	Nombre de composantes	Parts de b_{v1} et b_{v2}
1	5	2
2	14	8
3	27	18
4	44	32
5	65	50
6	90	72
7	119	98
8	152	128
9	189	162
10	230	200

Pour prendre en compte à chaque ligne de l'équation d'état tous les produits possibles $(s_v)_j (s_v)_k$, on définit deux matrices carrées $b_{v1} \in \mathcal{M}_{n_v, n_v}(\mathbb{R})$ et $b_{v2} \in \mathcal{M}_{n_v, n_v}(\mathbb{R})$, et à la place de $b_v \Psi_v(s_v)$, on utilise :

$$(b_{v1} s_v \bullet b_{v2} s_v) \quad (3.50)$$

L'équation d'état (3.48) est remplacée par :

$$\frac{d}{dt} s_v + d_v s_v + (b_{v1} s_v \bullet b_{v2} s_v) + a_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + b_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.51)$$

Le nombre de composantes à identifier devient alors :

$$d = n_v (1 + 2n_v + 2p_v)$$

L'évolution de d en fonction de l'ordre est reprise dans le tableau 3.2 lorsqu'il n'y a qu'une commande, entre les ordres 1 et 10.

On est passé d'une dépendance en $O(n_v^3)$ à une dépendance en $O(n_v^2)$ en changeant de formulation, et ce tableau doit être comparé au tableau 3.1. A l'ordre 8, la seconde formulation compte déjà deux fois moins de paramètres que la première.

On agit de même dans le cas d'un écoulement anisotherme. Dans ce cas, la part thermique de l'équation d'état réduit d'origine est :

$$\frac{d}{dt} s_T + d_T s_T + b_T \Psi_{vT}(s_v, s_T) + a_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + b_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.52)$$

Dans cette équation, $b_T \Psi_{vT}(s_v, s_T)$ permet de prendre en compte à chaque ligne tous les produits possibles $(s_v)_j (s_T)_k$. Comme pour la partie fluide, ce terme dimensionne rapidement à lui seul la difficulté de l'identification. Ainsi, plutôt que d'identifier $n_v n_T^2$ composantes dans b_T , on utilise le produit terme à terme :

$$(b_{T1} s_T \bullet b_{T2} s_v) \quad (3.53)$$

où $b_{T1} \in \mathcal{M}_{n_T, n_T}(\mathbb{R})$ et $b_{T2} \in \mathcal{M}_{n_T, n_v}(\mathbb{R})$. On obtient ainsi une équation d'état pour la part thermique de la forme

$$\frac{d}{dt} s_T + d_T s_T + (b_{T1} s_T \bullet b_{T2} s_v) + a_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + b_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.54)$$

Le nombre de composantes à identifier dues à la part convective passe donc de $n_v n_T^2$ à $n_T (n_T + n_v)$, ce qui facilite vite les choses. Et dans l'équation (3.54), on a gardé pour chaque ligne une dépendance à chaque produit $(s_v)_j (s_T)_k$.

3.3.10.3 Couplage faible cinétique / thermique

Que ce soit dans les équations de Navier-Stokes (3.10), dans la formulation générale de la structure du modèle détaillé (3.38), ou dans les équations d'état réduit cinétique (3.51) et thermique (3.54), on s'aperçoit qu'il est nécessaire de connaître l'état cinétique \vec{v} , $[V]$ ou s_v , pour pouvoir déterminer l'état thermique. A l'inverse, l'état cinétique ne dépend pas de l'état thermique. Il s'agit d'un cas de couplage faible qui est dû aux faits que :

1. on néglige les effets de compressibilité et de convection naturelle (la masse volumique est constante) ;
2. on néglige les variations de la viscosité dynamique avec la température ;

Puisque l'état cinétique peut être déterminé de façon indépendante, on peut définir des modèles :

– détaillé \mathcal{L}_v^h

$$\mathcal{E}_h^v : \frac{d}{dt} S_v + D_v S_v + B_v \Psi_v(S_v) + A_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + B_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.55a)$$

$$y_v = H_v S_v \quad (3.55b)$$

– et réduit \mathcal{L}_v^*

$$\mathcal{E}_r^v : \frac{d}{dt} s_v + d_v s_v + (b_{v1} s_v \bullet b_{v2} s_v) + a_v^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)} + b_v^{(\partial\Omega)} \Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.56a)$$

$$y_v^* = h_v s_v \quad (3.56b)$$

uniquement cinétiques. Les entrées sont les p_v commandes $V_{(\partial\Omega)}$ et les sorties sont les observables y_v ou y_v^* respectivement.

De la même façon, on peut définir les modèles détaillés et réduits thermiques. Mais l'état thermique dépend de l'état cinétique. Par conséquent, un modèle thermique est défini par rapport à un modèle cinétique.

Désormais, on considérera des modèles thermiques :

– soit détaillés \mathcal{L}_T^h

$$\mathcal{E}_h^T : \frac{d}{dt} S_T + D_T S_T + B_T \Psi_{vT}(S_v, S_T) + A_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + B_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.57a)$$

$$y_T = H_T S_T \quad (3.57b)$$

– soit réduits \mathcal{L}_T^*

$$\mathcal{E}_r^T : \frac{d}{dt} s_T + d_T s_T + (b_{T1} s_T \bullet b_{T2} s_v) + a_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + b_T^{(\partial\Omega)} \Psi_{vT}^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.58a)$$

$$y_T^* = h_T s_T \quad (3.58b)$$

L'entrée compte cette fois les commandes en vitesse et en température, et les sorties sont les observables thermiques y_T . Dans ces deux catégories de modèles, l'état cinétique S_v ou s_v est nécessaire pour résoudre \mathcal{E}_h^T ou \mathcal{E}_r^T respectivement, et chaque modèle est déterminé par rapport à un modèle cinétique fixé.

Les tableaux 3.3 reprennent les tailles des matrices des modèles réduits cinétique (3.56) et thermique (3.58) en fonctions des ordres n_v et n_T .

TAB. 3.3 – Tailles des matrices de modèles réduits.

(a) Modèle cinétique		(b) Modèle thermique	
Matrice	Taille	Matrice	Taille
d_v	$n_v \times n_v$ (diagonale)	d_T	$n_T \times n_T$ (diagonale)
b_{v1}	$n_v \times n_v$	b_{T1}	$n_T \times n_T$
b_{v2}	$n_v \times n_v$	b_{T2}	$n_T \times n_v$
$a_v^{(\partial\Omega)}$	$n_v \times p_v$	$a_T^{(\partial\Omega)}$	$n_T \times p_T$
$b_v^{(\partial\Omega)}$	$n_v \times p_v$	$b_T^{(\partial\Omega)}$	$n_T \times p_v$
h_v	$q_v \times n_v$	h_T	$q_T \times n_T$

3.3.10.4 Cas particulier des modèles réduits cinétiques stationnaires

Dans ce mémoire seront présentés des cas d'écoulement pour lesquels on néglige les variations temporelles du champ de vitesse. Cela peut être par exemple le cas lorsque les entrées en vitesse ne dépendent pas du temps, ou lorsque l'on étudie un écoulement moyenné dans le temps. Le cas échéant, dans l'équation d'état (3.56a) du modèle réduit, le terme instationnaire $\frac{d}{dt}s_v$ est nul.

En multipliant cette équation d'état par l'inverse de d_v , et en incluant d_v^{-1} dans b_{v1} , $a_v^{(\partial\Omega)}$ et dans $b_v^{(\partial\Omega)}$, on obtient une formulation pour un modèle réduit cinétique stationnaire \mathcal{L}_v^* de la forme :

$$\mathcal{E}_r^v : s_v + (b_{v1}s_v \bullet b_{v2}s_v) + a_v^{(\partial\Omega)}V_{(\partial\Omega)} + b_v^{(\partial\Omega)}\Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.59a)$$

$$y_v^* = h_v s_v \quad (3.59b)$$

3.3.10.5 Formulations finales

Dorénavant on travaillera :

- pour des écoulements isothermes stationnaires, sur des modèles réduits dont la structure est celle de (3.59)
- pour des écoulements isothermes instationnaires, sur des modèles réduits cinétiques dont la structure est définie par (3.56)
- pour des écoulements anisothermes instationnaires, sur deux modèles réduits distincts. Le premier est un modèle réduit cinétique de type (3.56), fournissant une approximation des observables cinétiques. Le second un modèle de type (3.58), et est construit par rapport au premier. Il permet d'obtenir les sorties thermiques.

Remarque. Les structures de ces modèles ont toutes été dérivées des équations de Navier-Stokes. Comme nous l’avons expliqué, au cours de l’identification, ces matrices sont réglées à l’aide de données provenant d’un modèle de référence, en l’occurrence de calculs CFD. Cependant, dans les applications qui vont suivre, il a été nécessaire d’utiliser un modèle de turbulence ($k - \omega$ SST ou Spallart Allmaras). Par conséquent, les données de référence ne correspondent pas à des écoulements solutions des équations de Navier-Stokes, mais d’une moyenne (d’ensemble) de ces équations. Nous essaierons malgré cela de faire en sorte que les modèles réduits proposent une bonne approximation des observables “CFD” sur un domaine de validité éventuellement limité.

La construction des modèles réduits passe par un processus d’optimisation, qui, dans le cas de la réduction de modèle par identification, va présenter des difficultés spécifiques qui sont de deux ordres :

1. stratégie d’optimisation
2. stratégie d’échantillonnage

La dernière partie de ce chapitre s’attellera à présenter ces difficultés, ainsi que la méthodes utilisées pour y faire face.

3.4 Méthodologies

3.4.1 Echantillonnage

3.4.1.1 Des données échantillonnées à la surface de réponse

Reprenons le paragraphe 3.2.3. Nous y avons vu qu’en pratique, l’identification d’un modèle réduit conduit à un modèle capable de reproduire les réponses d’un modèle détaillé pour certaines excitations appelées *points d’échantillonnage*. Or, la problématique générale est de construire un modèle aussi précis que possible sur tout un domaine de validité \mathcal{D}_u . Il faut donc que le choix des points d’échantillonnage permette au modèle construit sur une restriction de \mathcal{D}_u , d’être valide sur tout \mathcal{D}_u . Cette problématique est commune à toutes les méthodes d’approximation de fonction (*surrogate models*) qui conçoivent un modèle à partir de données provenant d’un modèle de référence.

3.4.1.2 Définition et critères

Ici, on appellera un échantillonnage un ensemble de couples (*points d’échantillonnage ; réponses du modèle détaillé en ces points*) utilisés pour construire une surface de réponse ou un modèle réduit. La problématique du choix des points d’échantillonnage peut se résumer à :

Dans la mesure où on ne connaît rien du comportement de la fonction à reproduire, quelle doit être dans \mathcal{D}_u , la répartition de la densité de points d’échantillonnage (nombre et positions) ?

Mais très souvent, les réponses du modèle détaillé coûtent cher à obtenir. Dans la pratique on n’a donc accès qu’à un nombre limité de points d’échantillonnage. Par conséquent, dans la littérature, la problématique de l’échantillonnage est vue sous deux aspects :

1. combien de points d’échantillonnage sont nécessaires pour que le modèle d’ordre réduit ait une précision satisfaisante dans tout \mathcal{D}_u ?

2. comment répartir ces points dans \mathcal{D}_u quand on ne connaît pas a priori le comportement du modèle de référence ?

3.4.1.3 Curse of Dimensionality

Certainement, le plus célèbre théorème concernant la quantité de points d'échantillonnage nécessaires a été énoncé par Bellman en 1961. Concernant ce théorème, on parle de *curse of dimensionality* ou malédiction de la dimensionalité. On parle également d'effet Hugues. Il indique que le nombre d'échantillons nécessaires pour décrire \mathcal{D}_u augmente exponentiellement avec le nombre d'entrées p du modèle. Bungartz et Griebel [5] présentent ce théorème de la façon suivante. Si f_N est une approximation de f faite avec N échantillons, alors une norme $\|f - f_N\|$ de l'erreur maximale augmente en :

$$\|f - f_N\| = O\left(N^{-r/p}\right) \quad (3.60)$$

r est la régularité isotropique de la fonction f . C'est-à-dire que si, au mieux, $df^{(r-1)}$, la différentielle d'ordre $r - 1$ de f , est continue, alors f est de régularité r .

Ainsi, du nombre d'entrées du modèle dépend le nombre d'échantillons dont on aura besoin pour construire le modèle réduit. Cette problématique est commune à toutes les méthodes de réduction de modèle ou de surrogate models qui se servent de données d'un modèle de référence.

Remarque. Le processus d'identification se fait à l'aide d'un algorithme d'optimisation globale. Pour déterminer un minimum global dans un espace de d paramètres, on procède à un certain nombre d'évaluations de fonctions objectif. Ces évaluations peuvent être vues comme des échantillons, et les paramètres comme des variables de la fonction objectif. La malédiction de la dimensionalité montre alors qu'avec le nombre de paramètres, augmente exponentiellement le nombre d'évaluations de fonctionnelles a priori nécessaires pour trouver des optima locaux. D'où l'importance de limiter le nombre de composantes dans les structures des modèles réduits.

3.4.1.4 Répartition des échantillons

Sachant que l'on peut se permettre d'évaluer un nombre fixé d'échantillons, comment placer les points pour obtenir le plus d'informations possible sur la réponse du Modèle Détaillé ? Plusieurs méthodes existent, et dans [6], Laurenceau distingue les méthodes d'échantillonnage *a priori* des méthodes *a posteriori*.

Parmi les méthodes *a priori*, on trouve notamment les méthodes de Halton [7], ou d'hypercube latin (en anglais *LHS* pour *Latin Hypercube Sampling*). Les méthodes LHS, quadrillent \mathcal{D}_u et s'arrangent pour placer un point d'échantillonnage par "ligne". Il existe plusieurs solutions à une telle problématique, et la méthode que l'on utilisera au chapitre 5 s'arrange pour maximiser les distances entre les points. C'est la méthode *IHS* ou *Improved Distributed Hypercube Sampling*.

Les méthodes dites *a posteriori* corrigent un modèle en rajoutant itérativement des échantillons là où l'erreur est maximale. L'inconvénient majeur de la méthode vient du fait qu'elle oblige à construire plusieurs modèles.

3.4.2 Considérations sur l'optimisation

3.4.2.1 Séparation du problème d'optimisation (3.9)

L'identification est la construction effective du modèle réduit à partir des échantillons fournis par le Modèle Détaillé. Il s'agit d'un problème d'optimisation dont les variables sont les composantes des matrices des deux équations (état et projection) du modèle réduit. Dans l'exemple du modèle réduit cinétique (3.56) du paragraphe 3.3.10.3, il s'agit des matrices d_v , b_{v1} , b_{v2} , $a_v^{(\partial\Omega)}$, $b_v^{(\partial\Omega)}$ et h_v .

Parmi les paramètres à identifier dans un modèle d'ordre n_v , on distingue :

1. un nombre de l'ordre de n_v^2 de composantes des matrices de l'équation d'état, dont les observables y^* dépendent non linéairement ;
2. $n_v \times q$ composantes de la matrice de projection h_v , où q désigne le nombre d'observables. Ces observables dépendent linéairement de ces composantes.

Pour un jeu de matrices d'équation d'état donné, grâce à la linéarité de la relation entre observables et projection, on sait que la solution ${}^t h_v$ du système linéaire

$$[s_v] {}^t [y_v] = \left([s_v] {}^t [s_v] \right) {}^t h_v \quad (3.61)$$

est la transposée de la matrice h_v qui minimisera la distance entre $[y_v]$ et $h_v [s_v]$ au sens des moindres carrés linéaires, et pour les échantillons considérés (voir [8]). Dans (3.61), $[y_v] = (y_{v,1}, \dots, y_{v,n_s}) \in \mathcal{M}_{q,n_s}(\mathbb{R})$ est une matrice qui contient les réponses du modèle détaillé relativement aux n_s entrées u^i (stationnaire) ou aux n_s pas de temps (instationnaire). $[s_v] = (s_{v,1}, \dots, s_{v,n_s}) \in \mathcal{M}_{n_v,n_s}(\mathbb{R})$ est la matrice qui contient les n_s états réduits calculés pour chacune de ces entrées ou pas de temps. Cette estimation par moindres carrés linéaires n'est cependant possible que lorsque l'ordre du modèle est inférieur ou égale au nombre d'échantillons (en stationnaire) ou de pas de temps (en instationnaire) dont on dispose : $n_v \leq n_s$.

En résumé, pour une équation d'état fixée, il est possible de calculer la projection la plus adaptée pour minimiser l'écart quadratique entre les données disponibles et les réponses du modèle réduit. L'algorithme d'identification tire avantage de ce résultat en distinguant l'optimisation non linéaire des matrices de l'équation d'état de celle de la matrice de projection :

- à matrices d'équation d'état fixées, on modifie la matrice de projection,
- à matrice de projection fixée, on modifie les matrices d'équation d'état.

Il s'agit d'une méthode dite de point fixe. Elle a le désavantage de ne pas assurer de convergence, mais elle permet de restreindre les algorithmes d'optimisation non linéaire aux seules matrices de l'équation d'état. Dans certains cas, lorsque le nombre d'observables devient très grand, on passe ainsi de plusieurs centaines de milliers de paramètres, à, au plus, quelques centaines. La résolution du problème d'optimisation devient alors envisageable, par exemple en utilisant des méthodes globales pour traiter la part non linéaire.

3.4.2.2 Algorithmes d'optimisation stochastiques

Les algorithmes d'identification proposés par Balima [9] sont construits autour d'une optimisation de type Quasi-Newton, avec une mise à jour de l'approximation du hessien de la fonctionnelle par la formule dite BFGS, et un calcul de gradient par méthode adjointe. Dans ce cas, l'utilisateur doit proposer un jeu de matrices pour initialiser la recherche. Or, on observe que dans le cas des modèles d'écoulements de type (3.56), les performances du modèle réduit obtenu sont très dépendantes de cette initialisation. Pour tenter de faire face à cette difficulté,

nous nous sommes tournés vers des algorithmes d'optimisation stochastiques, plus à mêmes d'éviter les minima locaux.

Le principe d'un algorithme d'optimisation stochastique, ou métaheuristique, est d'évaluer la fonction à minimiser en plusieurs points de l'espace de recherche. Dans notre cas, s'il y a d composantes à identifier parmi les matrices de l'équation d'état, alors en première approximation, l'espace de recherche est \mathbb{R}^d . Le choix des points d'évaluation se fait itérativement, en fonction des résultats précédemment obtenus, et en introduisant une part pseudo-aléatoire pour pouvoir échapper aux minima locaux. Parmi les métaheuristicues les plus célèbres, on trouve sans conteste les algorithmes génétiques, les colonies de fourmis, les optimisations par essaim particulaire, les méthodes de tabou, et celles de recuit simulé.

Dans le cadre de cette thèse, deux types de métaheuristique ont été intégrés au processus d'identification :

- un algorithme génétique ;
- un algorithme d'optimisation par essaim particulaire.

3.4.2.3 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques considèrent la fonction à optimiser comme une performance. Un jeu de paramètres éventuellement solution est vu comme un individu, et la valeur prise par un de ces paramètres est un allèle. Dans notre cas, un individu est un jeu de matrices de l'équation d'état et les valeurs de leurs composantes sont les allèles. A partir d'une population initiale d'individus, et par un jeu successif de sélections basées sur la performance, de croisements et de mutations, on finit par retenir les allèles les plus performants. Dans la mesure où l'on dispose, à chaque itération ou *génération*, de plusieurs individus que l'on sélectionne par rapport à leur performance, un algorithme génétique est par nature capable de fournir un Front de Pareto dans un problème d'optimisation multi-objectif. Pour plus d'informations, on pourra se référer à [10]. L'algorithme implémenté dans nos codes provient de la bibliothèque en accès libre PGAPACK [11].

3.4.2.4 Optimisation par Essaim Particulaire

Dans l'optimisation par essaim particulaire (OEP), les paramètres à optimiser sont vus comme des coordonnées dans l'espace de recherche. Dans cet espace, un ensemble de particules se déplacent itérativement. A une itération donnée, une particule est caractérisée par :

- ses coordonnées, c'est-à-dire les valeurs de son jeu de paramètres ;
- la valeur en sa position de la fonction à optimiser ;
- un vecteur déplacement qui indique la façon dont il faudra modifier sa position à l'itération suivante.

Le déplacement d'une particule se fait sur un mode collaboratif. Chaque particule est dotée d'une mémoire et se souvient de la meilleure position qu'elle ait trouvée. De plus, elle est en mesure d'interroger la mémoire d'un certain nombre de particules, que l'on appelle les voisines. Un déplacement est alors une combinaison :

- d'une tendance inertielle : le déplacement de l'itération précédente intervient dans le calcul du nouveau déplacement,
- d'une tendance conservatrice : une partie du déplacement se fait vers la meilleure position atteinte par la particule,
- et d'une tendance mimétique : le déplacement se fait aussi en partie vers la meilleure position trouvée par les voisines.

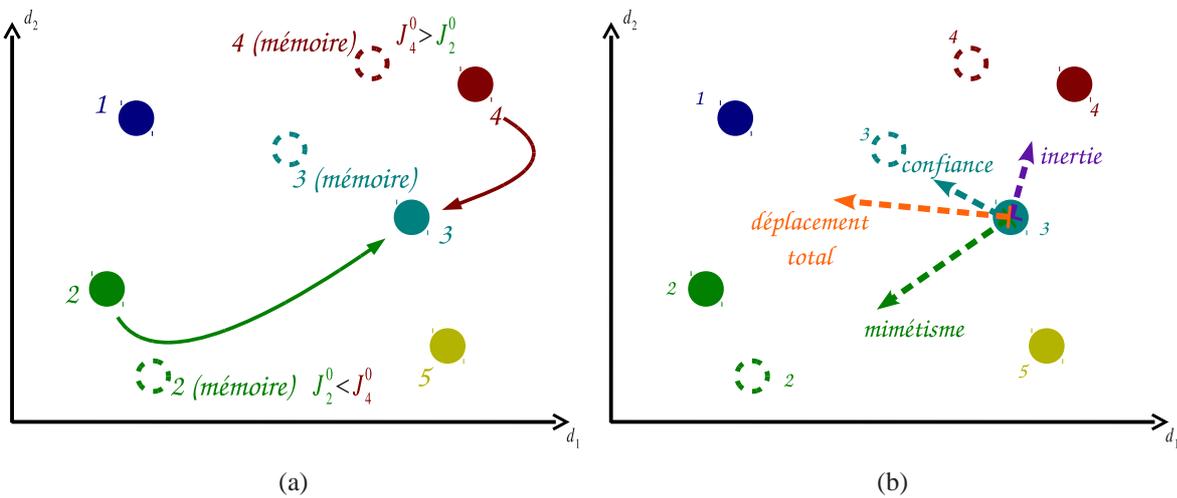


FIG. 3.1 – Optimisation par essaim particuliaire : déplacement d’une particule. La fonctionnelle à minimiser dépend de deux paramètres : d_1 et d_2 . A une itération donnée, cinq particules sont dotées d’une position $(d_1; d_2)$ indiquée par un cercle plein, d’un déplacement (différence entre la position actuelle et la précédente, non représenté), et de la mémoire de la meilleure position qu’elles aient atteinte, indiquée par un cercle en pointillé (particules 2, 3 et 4 seulement). La particule 3 a accès aux mémoires des particules 2 et 4 (figure de gauche). Supposons que la position “mémoire” de 2 soit meilleure que celle de 4. Le déplacement de 3 vers sa nouvelle position pour l’itération suivante (figure de droite, orange) est calculé en tenant compte de la position “mémoire” de 2 (vert), de la propre position “mémoire” de 3 (cyan), et du déplacement précédent (part inertielle, violet). En cette nouvelle position, on estimera une nouvelle valeur de la fonctionnelle.

La figure 3.1 illustre le déplacement des particules. En favorisant plus ou moins chacune de ces tendances, on privilégie l’exploration de l’espace de recherche (éviter des minima locaux), ou l’exploitation des résultats disponibles (on accélère la convergence).

Pour plus d’informations sur les essais particuliaires, on peut se référer à [12]. Vu la simplicité de codage, un algorithme “maison” a été développé pour être intégré dans nos codes d’identification.

3.4.2.5 Choix d’un algorithme

Après avoir implémenté les deux types d’algorithmes dans nos codes, nous avons finalement retenu l’optimisation par essaim particuliaires pour deux raisons :

1. Contrairement aux essais particuliaires, il existe, dans les algorithmes génétiques, un grand nombre de paramètres à régler : taille de la population, méthode de sélection, taux de sélection, taux de mutation, méthode de croisement, taux de croisement. Malheureusement, la littérature n’est pas unanime sur un jeu de paramètres par défaut, capable de traiter des problèmes d’optimisation quelconques. On peut craindre dès lors que pour chaque cas d’application de nos méthodes de réduction, on ne soit obligé de relancer plusieurs fois un processus d’identification qui s’avère coûteux. Les paramètres des essais particuliaires sont beaucoup moins nombreux, et certains d’entre eux sont reconnus comme pouvant être utilisés par défaut, même s’il ne sont pas forcément optimaux pour nos cas d’application.
2. Les deux algorithmes ont été testés sur une identification de détachement tourbillonnaire. Si les deux modèles réduits obtenus présentaient des performances similaires, les Essaims

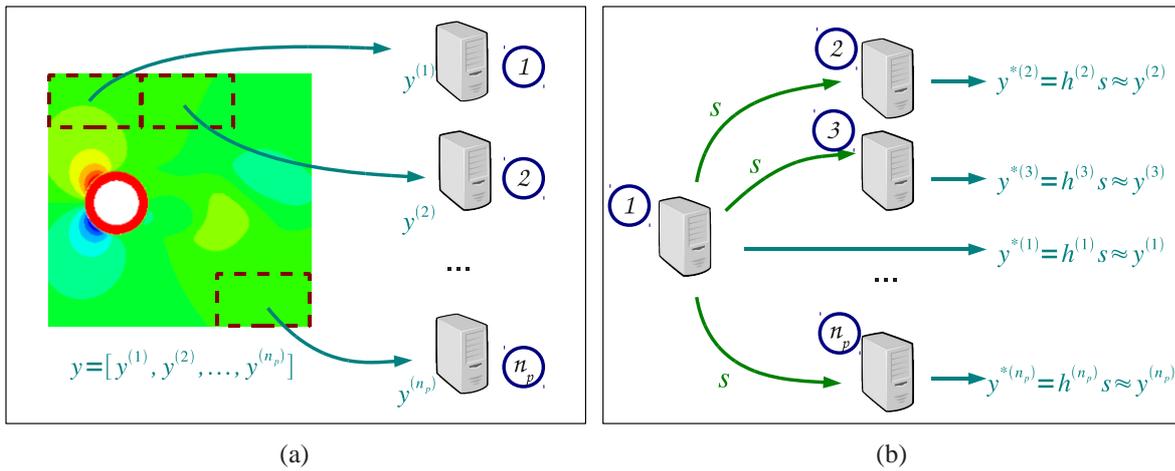


FIG. 3.2 – Méthode de parallélisation. Au lancement de la procédure d'identification, les observables sont répartis entre les n_p différents processeurs disponibles, qui chargent alors les données correspondantes issues du modèle détaillé (figure 3.2(a)). Lorsqu'un modèle d'ordre faible est évalué, le processeur "maître" se charge de calculer l'état s correspondant, avant de le transmettre aux autres processeurs (figure 3.2(b)). Chacun d'entre eux est alors en mesure d'estimer par une méthode de moindres carrés linéaire la part de la matrice de projection qui lui est assignée, et de calculer sa contribution à la valeur de la fonctionnelle totale.

Particulaires ont nécessité moins de temps de calcul sur moins de machines. On ne dit pas ici qu'un algorithme génétique est moins bon qu'un essaim particulaire. Par contre, un essaim particulaire "par défaut" a permis d'identifier un champ de vitesse instationnaire aussi bien et plus vite qu'un algorithme génétique, pour lequel on a essayé plusieurs réglages.

3.4.2.6 Parallélisation

Dans la mesure où il met en œuvre des évaluations de fonction pour plusieurs particules à chaque itération, un algorithme d'OEP est naturellement parallélisable : chaque processeur traite un certain nombre de particules. Pourtant, on a décidé de procéder différemment. Lorsque le nombre d'observables devient très grand et qu'ils sont instationnaires se posent des soucis de mémoire relatifs au stockage des réponses du modèle détaillé. Plutôt que de répartir les particules sur les processeurs qui devraient charger l'ensemble des données issues du modèle détaillé, la parallélisation s'est faite sur les observables. Comme le schématise la figure 3.2, les processeurs se répartissent les observables pour le calcul de la matrice de projection. L'algorithme OEP en lui-même, et les résolutions des équations d'état sont gérés par le processus maître. Ainsi, les besoins en mémoire sont répartis entre les processeurs. Le standard de parallélisation est le *Message Passing Interface* ou MPI.

3.4.3 Identification des modèles réduits stationnaires

3.4.3.1 Apparition d'une difficulté

Nous avons déterminé au paragraphe 3.3.10.4 la structure (3.59a) associée aux modèles réduits cinétiques stationnaires :

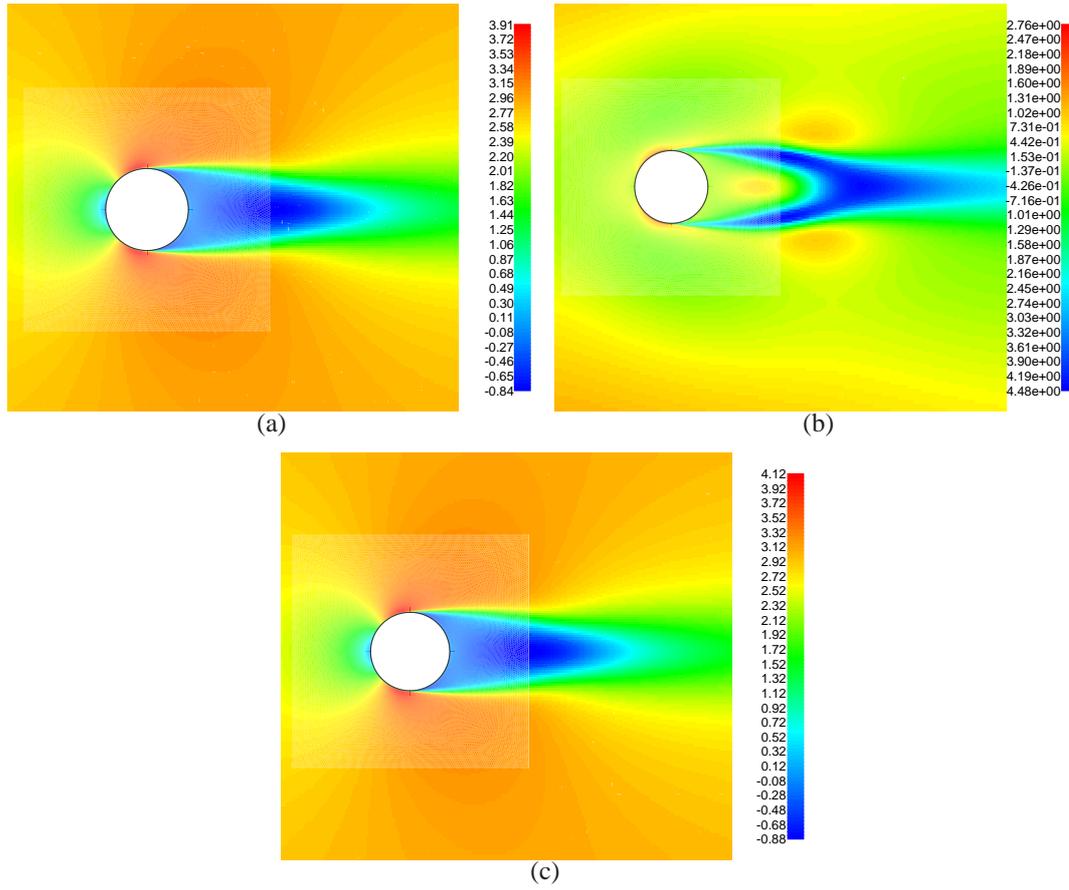


FIG. 3.3 – Problématique de la résolution de l'équation d'état stationnaire. Les trois figures présentent la composante axiale du champ de vitesse autour d'un cylindre. Les figures 3.3(a) et 3.3(c) correspondent à des points d'échantillonnage (vitesses d'entrée $2,8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $2,95\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) où l'équation d'état est résolue correctement. Pour une vitesse d'entrée de $2,84\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ne correspondant à aucun point d'échantillonnage, un modèle réduit identifié peut proposer le champ de vitesse non physique de la figure 3.3(b). En ce point, l'équation d'état stationnaire a été mal résolue.

$$\mathcal{E}_r^v : s_v + (b_{v1}s_v \bullet b_{v2}s_v) + a_v^{(\partial\Omega)}V_{(\partial\Omega)} + b_v^{(\partial\Omega)}\Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.62a)$$

$$y_v^* = h_v s_v \quad (3.62b)$$

Il s'agit d'un système d'équations quadratiques couplées. La construction et l'utilisation du modèle réduit nécessitent de la résoudre pour divers jeux d'entrées $V_{(\partial\Omega)}$. Idéalement, on cherche à obtenir un modèle réduit pour lequel l'équation d'état \mathcal{E}_r^v puisse être résolue sur le domaine \mathcal{D}_u . Cette résolution se fait via une méthode dérivée de la méthode hybride de Powell (routine *hybrd* de la suite Minpack). Il s'agit d'une méthode itérative de minimisation du carré du résidu d'une équation $F(x) = 0$. Dans la mesure où la minimisation se fait par descente de gradient, le succès de l'utilisation de la routine n'est pas assuré. La figure 3.3 est une illustration du fait que, le cas échéant, on peut obtenir des champs de vitesse peu vraisemblables.

Deux points sont susceptibles d'être à l'origine de ces difficultés.

- D'une part, dans la méthode d'Identification Modale, on n'a finalement que très peu de contrôle sur les fonctions de base (les fonctions $s_v(V_{(\partial\Omega)})$). Celles-ci sont définies implicitement comme des solutions d'équations non linéaires différentielles en instationnaire,

ou algébriques en stationnaire. En instationnaire, on dispose généralement de suffisamment de données pour que le modèle finalement retenu par le processus d'identification soit régulier. Ce n'est généralement pas le cas en stationnaire, où la quantité d'informations disponibles est beaucoup plus faible, et où rien n'est fait pour assurer la régularité des fonctions de base.

- D'autre part, au cours de l'identification, même lorsque l'équation (3.59a) est mal résolue, le calcul de la matrice h_v permet d'obtenir une fonction objectif faible. Pour cette raison, on risque de conserver au cours de l'identification des modèles réduits pour lesquelles l'équation d'état réduite n'est même pas résolue aux points d'échantillonnage.

Pour améliorer la qualité de l'identification, nous avons mis en place deux processus qui permettent d'élargir le domaine de validité du modèle réduit que l'on sélectionnera :

1. lissage de la réponse du modèle réduit ;
2. élimination des modèles réduits non-résolus en au moins un point d'échantillonnage.

3.4.3.2 Lissage de la réponse du modèle réduit

Pour lisser la réponse du modèle réduit, nous avons introduit dans le processus d'optimisation un critère de régularisation. Pour rappel, la fonctionnelle classiquement utilisée évalue l'écart quadratique entre les réponses y du modèle de référence et celles y^* du modèle réduit en un certain nombre n_s de points d'échantillonnage. L'équation (3.8) s'écrit pour un écart quadratique :

$$J = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{k=1}^q (y_k(V_{(\partial\Omega)i}) - y_k^*(V_{(\partial\Omega)i}))^2 \quad (3.63)$$

où $y_k(V_{(\partial\Omega)i})$ et $y_k^*(V_{(\partial\Omega)i})$ sont les valeurs prises par l'observable k au point d'échantillonnage i selon les modèles détaillé et réduit. En plus de demander au modèle réduit de reproduire les réponses du modèle détaillé, on va aussi exiger de lui qu'il en approche *l'allure autour des points d'échantillonnage*. Par différences finies, on peut estimer le gradient de la réponse du modèle détaillé par rapport aux entrées autour du point d'échantillonnage $V_{(\partial\Omega)i}$. Il s'agit d'une matrice $p_v \times q$ où, rappelons-le, p_v désigne le nombre d'entrées cinétiques. Par ailleurs, puisque l'on dispose de la structure du modèle réduit, il est également possible de calculer le gradient de la réponse du modèle réduit par rapport à ces mêmes entrées. En chaque point d'échantillonnage $V_{(\partial\Omega)i}$, on dispose donc de :

$$\frac{\partial y}{\partial V_{(\partial\Omega)}}(V_{(\partial\Omega)i}) \in \mathcal{M}_{p_v, q}(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial y^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}}(V_{(\partial\Omega)i}) \in \mathcal{M}_{p_v, q}(\mathbb{R}) \quad (3.64)$$

Le lecteur est invité à consulter l'annexe A concernant l'estimation de $\frac{\partial y}{\partial V_{(\partial\Omega)}}$ et le calcul de $\frac{\partial y^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}}$. L'idée de la régularisation est d'estimer en plus de la fonctionnelle d'écart quadratique (3.63) que l'on renomme J_1 , l'écart quadratique J_2 entre les deux dérivées pour tous les points d'échantillonnage :

$$J_2 = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{p_v} \sum_{k=1}^q \left(\left(\frac{\partial y}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \right)_{jk}(V_{(\partial\Omega)i}) - \left(\frac{\partial y^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \right)_{jk}(V_{(\partial\Omega)i}) \right)^2 \quad (3.65)$$

La figure 3.4 schématise l'apport de la prise en compte de la régularisation dans l'expression de la fonctionnelle. La régularisation éloigne le modèle réduit du modèle détaillé aux points d'échantillonnage, mais les tangentes ont plus de chances d'être bien reproduites.

Pour pouvoir comparer J_1 et J_2 , ces deux fonctionnelles sont adimensionnées respectivement par :

- la somme des carrés des valeurs :

$$J_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{k=1}^q (y_k (V_{(\partial\Omega)_i}) - y_k^* (V_{(\partial\Omega)_i}))^2}{\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{k=1}^q y_k (V_{(\partial\Omega)_i})^2} \quad (3.66)$$

- et la somme des carrés des dérivées :

$$J_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{p_v} \sum_{k=1}^q \left(\left(\frac{\partial y}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \right)_{jk} (V_{(\partial\Omega)_i}) - \left(\frac{\partial y^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \right)_{jk} (V_{(\partial\Omega)_i}) \right)^2}{\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{p_v} \sum_{k=1}^q \left(\left(\frac{\partial y}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \right)_{jk} (V_{(\partial\Omega)_i}) \right)^2} \quad (3.67)$$

Le problème d'optimisation compte désormais deux fonctionnelles, J_1 et J_2 . Plutôt que d'identifier plusieurs modèles réduits via une optimisation multiobjectif, on se ramène à une optimisation classique, dont la fonctionnelle est une combinaison linéaire de J_1 et de J_2 :

$$J = \alpha J_1 + \beta J_2 \quad (3.68)$$

Les poids relatifs α et β déterminent la part de la fonctionnelle que l'on privilégie. Dans le cadre d'une optimisation bi-objectif traînée-portance, Laurenceau [2] agit de façon similaire. Dans un problème d'optimisation multi-objectif, le front de Pareto est l'ensemble des propositions pour lesquelles améliorer une fonctionnelle en dégrade forcément une autre. On le considère comme l'ensemble des solutions du problème, parmi lesquelles l'utilisateur doit faire un arbitrage. Lorsque le front de Pareto est convexe, il se trouve que n'importe lequel de ses points est solution d'un problème d'optimisation de type (3.68). Dans notre cas, si on veut donner autant d'importance aux deux fonctionnelles, on essaiera de trouver un point situé "au centre" du front de Pareto, c'est-à-dire équidistant des extrémités. On parle d'optimum équilibré. *A contrario*, on peut privilégier l'une ou l'autre des fonctionnelles en augmentant son poids relatif α ou β . Les extrémités du front de Pareto correspondent chacune à la résolution d'un problème mono-objectif. Dans l'exemple de l'identification de modèle, un optimum équilibré se caractérise par une importance égale donnée :

- à la reproduction des données du modèle détaillé aux points d'échantillonnage,
- et à la reproduction de la direction prise par le modèle détaillé en ces points.

Pour trouver cet optimum équilibré, on s'inspire des travaux de Das [3] et de Shukla [4] en supposant que le front de Pareto est convexe. La figure 3.5 retrace les trois étapes de l'identification. Dans un premier temps, les minimisations de J_1 et de J_2 sont résolues grossièrement et indépendamment, avec un faible nombre d'itérations. La résolution du problème mono-objectif de minimisation de l'écart quadratique J_1 mène au couple de fonctionnelles $(J_1^{\text{mono1}}, J_2^{\text{mono1}})$, où J_1^{mono1} est a priori la plus petite valeur possible de J_1 . De même, le problème mono-objectif lié à J_2 mène à $(J_1^{\text{mono2}}, J_2^{\text{mono2}})$, et J_2^{mono2} est aussi a priori la plus petite valeur possible pour J_2 .

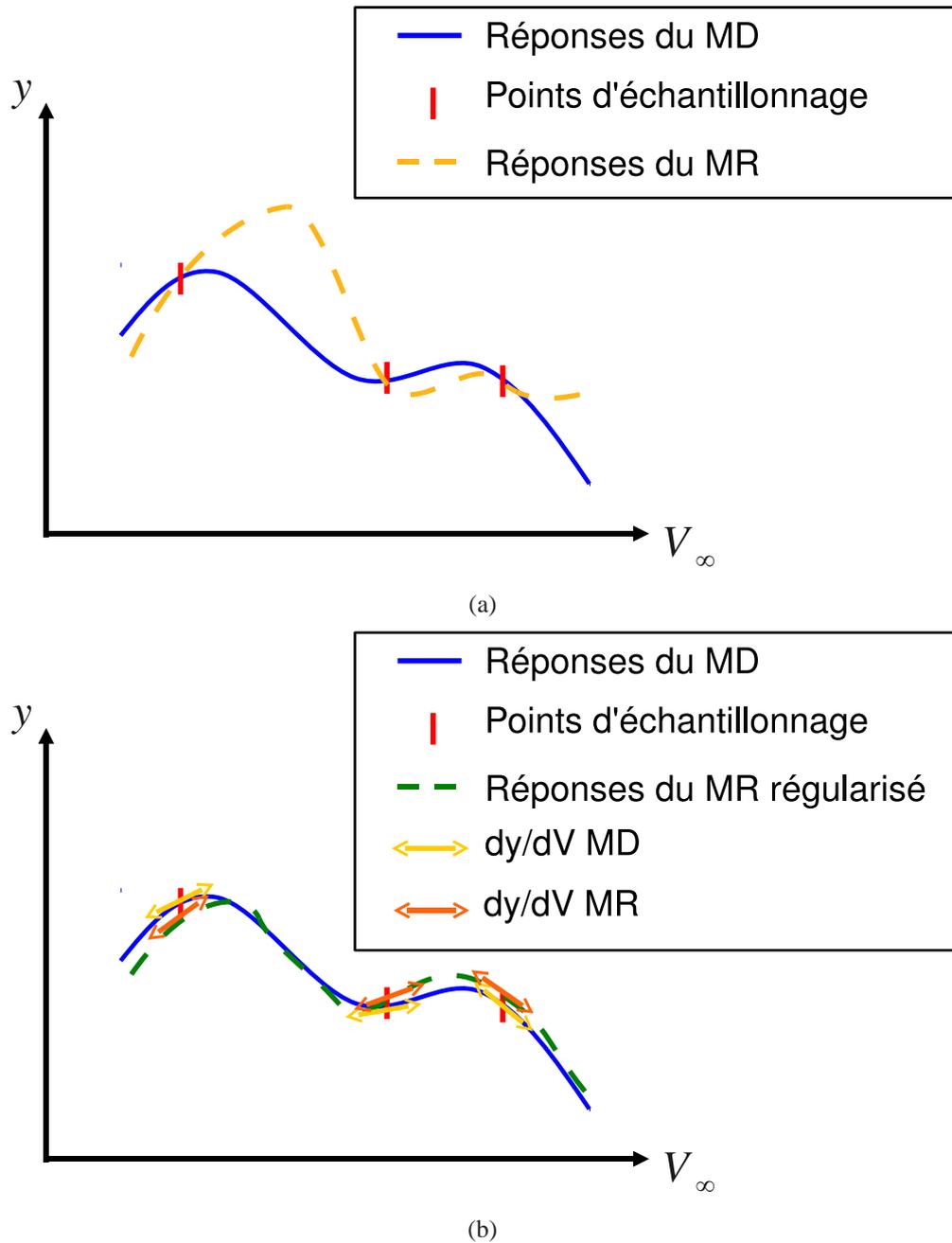


FIG. 3.4 – Apport de la régularisation à la construction du modèle réduit. Sans contrainte de régularisation (figure du haut), le modèle réduit (courbe jaune, tirets) peut être proche du modèle détaillé (courbe bleu foncée, trait plein) aux points d'échantillonnage, mais s'en éloigner entre. L'ajout d'une information sur les dérivées (figure du bas) dégrade les performances du modèle réduit (courbe verte, tirets) aux points d'échantillonnage, mais permet de mieux retrouver la direction prise par le modèle détaillé en ces points (flèches jaunes).

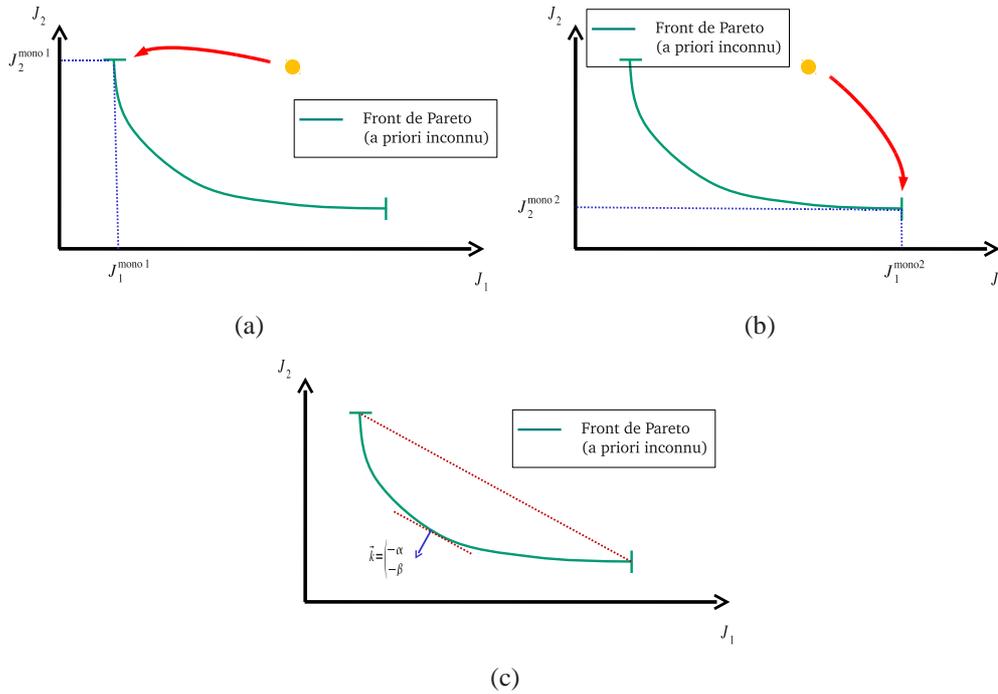


FIG. 3.5 – Recherche d'un optimum équilibré. Première étape : on minimise l'écart quadratique seul, sans se préoccuper des dérivées (figure 3.5(a)). Seconde étape : on optimise les dérivées sans se soucier de l'erreur quadratique (figure 3.5(b)). Troisième étape : l'identification principale se fait en tenant compte des fonctionnelles obtenues dans les étapes précédentes (figure 3.5(c)). On cherche le point dont la tangente est égale à la corde entre les deux extrémités.

Alors sous certaines hypothèses sur le front de Pareto (entre autres convexité, continuité et dérivabilité), on peut obtenir une position approchée de l'optimum équilibré en choisissant α et β en fonction des écarts entre les fonctionnelles mono-objectifs :

$$\alpha = \frac{1}{J_1^{\text{mono2}} - J_1^{\text{mono1}}} \quad \beta = \frac{1}{J_2^{\text{mono1}} - J_2^{\text{mono2}}} \quad (3.69)$$

Le couple $(\alpha; \beta)$ correspond alors à la direction d'une approximation de la normale au front de Pareto à l'optimum équilibré. Cette approximation est calculée à partir des résolutions des problèmes mono-objectif qui conduisent aux extrémités du front de Pareto.

En résumé, on obtient par identification un modèle réduit plus régulier en accordant autant d'importance aux deux critères de qualité que sont :

- l'erreur entre les réponses des deux modèles aux points d'échantillonnage,
- l'erreur sur les dérivées de ces réponses par rapport aux commandes, toujours aux points d'échantillonnage,

Pour cela,

1. on commence par résoudre un problème d'optimisation ne prenant en compte que l'écart quadratique entre les réponses des modèles détaillé et réduit ;
2. puis on opère de même en ne considérant que les dérivées de ces réponses par rapport aux entrées ;
3. en fonction des résultats des deux étapes précédentes, on procède à l'identification finale du modèle.

3.4.3.3 Critère de résolution

Le second axe de travail concerne l'élimination, au cours de l'identification, des modèles réduits pour lesquels on n'arrive pas à résoudre l'équation d'état stationnaire (3.59a) en chaque point d'échantillonnage $(V_{(\partial\Omega)})_k$. On parle des solutions non admissibles. Pour qu'elles ne soient pas sélectionnées, nous nous sommes inspirés des méthodes de pénalisation. On rajoute dans l'évaluation de la fonctionnelle le terme :

$$\mathcal{P}(\theta) = 0,01 \times \frac{R_m(\theta)}{\varepsilon} J_{\text{best}}^i \quad (3.70)$$

$R_m(\theta)$ est la composante maximale du résidu évalué en tous les points d'échantillonnage de l'équation stationnaire (3.59a). ε est la valeur cible de R_m : on aimerait obtenir un modèle réduit θ pour lequel soit au pire de l'ordre de ε . Enfin, J_{best}^i est la plus petite fonctionnelle qui ait été trouvée avant l'itération i . Dans l'évaluation de la fonctionnelle $J(\theta)$, on prend ainsi en compte la qualité de la résolution de l'équation stationnaire :

$$J(\theta) = \alpha J_1(\theta) + \beta J_2(\theta) + \mathcal{P}(\theta) \quad (3.71)$$

Lorsque le modèle réduit est mal résolu, $\mathcal{P}(\theta)$ devient non négligeable par rapport à J_{best}^i , ce qui pénalise fortement ce modèle par rapport aux meilleurs modèles réduits connus. Ainsi, l'algorithme d'optimisation aura tendance à ne pas retenir les solutions pour lesquelles $R_m(\theta)$ est grand.

3.5 Conclusion

Ce chapitre est un descriptif des différentes étapes et méthodes qui permettent concrètement de construire un modèle réduit par identification.

La première partie décrit les différents aspects qui sous-tendent cette construction : expression de la physique du problème sous forme d'équations aux dérivées partielles, formulation du modèle détaillé à l'aide d'une équation différentielle du premier ordre en temps, transcription de cette équation vers une structure de modèle réduit, identification et validation de ce modèle en des points d'échantillonnage.

Les premières étapes (formulation des modèles détaillé et réduit) sont ensuite détaillées dans le cadre qui nous intéresse, celui des écoulements incompressibles de convection forcée. Ces sections sont l'occasion d'introduire deux apports de cette thèse par rapport à la thèse de Balima [9] :

1. **Prise en compte directe du gradient de pression.** Auparavant, le problème du gradient de pression était écarté en adoptant une formulation en vorticité - fonction de courant, ce qui rendait difficile l'extension de la théorie aux écoulements tridimensionnels. Dans cette th ese, nous avons trouvé comment exprimer ce terme en fonction du champ de vitesse. Cela permet d'adopter une formulation plus directe, valable aussi bien en 2D qu'en 3D.
2. **Prise en compte quadratique de la vitesse amont.** Par rapport aux travaux de Balima [9] et à ceux de Rouizi [13], les modèles intègrent dans leur formulation l'injection d'énergie cinétique et d'énergie thermique par convection à travers les frontières du domaine. Pour cela, des termes quadratiques de commande en $\Psi_v^{(\partial\Omega)}$ et $\Psi_{vT}^{(\partial\Omega)}$ sont introduits dans l'équation d'état des modèles.

La construction effective des modèles demande de faire face à plusieurs défis : échantillonnage, optimisation, résolution d'équations différentielles, . . . Les dernières sections de ce chapitre détaillent les apports de cette thèse concernant ces points :

1. **L'identification se fait par optimisation globale.** En mécanique des fluides, les procédés d'optimisation locale utilisés ne paraissaient plus suffisants. La thèse a été l'occasion de tester et d'intégrer des algorithmes d'optimisation globale dans le processus d'identification. Des deux méthodes essayées, nous avons finalement retenu la méthode d'optimisation par essaim particulaire.
2. **Parallélisation des codes.** Une augmentation du temps d'identification accompagne le passage à l'optimisation globale. De plus, dans les exemples présentés, le nombre d'observables à gérer peut être de l'ordre de plusieurs centaines de milliers. Pour y faire face, les codes de réduction de modèle ont été conçus parallèles.
3. **Régularisation des modèles réduits stationnaires.** La méthode d'origine peut aboutir à des modèles réduits inexacts entre les points d'échantillonnage. Cette thèse a permis d'intégrer une prise en compte des dérivées des observables par rapport aux entrées du modèle, ce qui améliore la qualité du modèle réduit. Nous avons également introduit une méthode de pénalisation originale permettant de maintenir la validité du modèle réduit sur une part plus importante du domaine sur lequel on souhaite l'utiliser.

Le chapitre suivant permet de juger des capacités de la méthode d'identification à prédire des champs de vitesse et/ou des observables thermiques dans le cadre d'écoulements autour d'un cylindre circulaire.

Bibliographie

- [1] J.-G. Liu, J. Liu, R.L. Pego, Stable and accurate pressure approximation for unsteady incompressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, Volume 229, Issue 9, 1 May 2010, Pages 3428-3453, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2010.01.010.
- [2] J. Laurenceau, Surfaces de réponse par krigeage pour l'optimisation de formes aérodynamiques. *Thèse de Doctorat*, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2008
- [3] I. Das, J.E. Dennis, Normal-Boundary Intersection : A New Method for Generating the Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems. *SIAM Journal on Optimization*, Volume 8, Issue 3, 1998, Pages 631 - 657, ISSN :1052-6234
- [4] P.K. Shukla On the Normal Boundary Intersection Method for Generation of Efficient Front. *Computational Science - ICCS 2007 (Book)*, Lecture Notes in Computer Science, Volume 4487/2007, 2007, Pages 310-317, ISBN : 978-3-540-72583-1
- [5] H.-J. Bungartz, M. Griebel, Sparse Grids. *Acta Numerica*, Cambridge Journals Online, Volume 13, 2004, Pages 174-269, DOI :10.1017/S0962492904000182
- [6] J. Laurenceau, P. Sagaut, Building Efficient response surfaces of aerodynamic functions with kriging and cokriging. *AIAA Journal*, 0001-1452 vol.46 no.2 (498-507).
- [7] J. Yu, P. Goos, M. Vandebroek, Comparing different sampling schemes for approximating the integrals involved in the efficient design of stated choice experiments. *Transportation Research Part B : Methodological*, In Press, Corrected Proof, Disponible en ligne au 19 Mars 2010, ISSN 0191-2615, DOI : 10.1016/j.trb.2010.02.005
- [8] M. Girault, Résolution de problèmes inverses en thermique par modèles réduits : applications en conduction non-linéaire et en convection forcée. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, Mai 2003
- [9] O. Balima, Réduction de modèle non linéaire par identification modale : application en thermique et comparaison avec la méthode POD-Galerkin. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, France, 2006.
- [10] J. Dreo, A.Pétrowsk, Métaheuristiques pour l'optimisation difficile. Livre, Editions Eyrolles, Deuxième Edition, 2005
- [11] D. Levine, Users guide to the PGAPack parallel genetic algorithm library. *Argonne National Library*, Argonne, Ill, USA, 1996
- [12] M. Clerc, L'optimisation par essaim particulaire. Livre, Editions Hermes-Lavoisier, 2005
- [13] Y. Rouizi, Réduction de modèle par identification en convection forcée pour des systèmes soumis à des conditions aux limites instationnaires : application à l'écoulement le long d'une marche avec contrôle thermique par retour d'état. *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, France, 2010.

Chapitre 4

Validation sur un cas académique : Écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé et réduction de modèle

Résumé

Nous développons dans ce chapitre des méthodologies de réduction de modèle adaptées à plusieurs cas d'écoulement. Nous commençons par souligner la nécessité de correctement déterminer les observables d'importance, afin d'adapter la méthode de résolution CFD.

Dans un second temps, la possibilité des méthodes d'identification modale d'offrir des modèles réduits d'écoulements purement instationnaires est évaluée. L'application principale visée est la réduction de modèle d'écoulements de sillage instationnaires derrière un ou plusieurs obstacles. Nous montrons que l'identification permet de construire des systèmes oscillants stables capables de prévoir les champs de vitesse instationnaires derrière le cylindre circulaire.

Mais les méthodes d'identification modale permettent également de construire des modèles réduits d'écoulements transitoires *i.e.* gouvernés par des entrées dépendantes du temps. Dans une troisième partie, nous illustrons cette capacité dans le cadre d'un écoulement transitoire en convection forcée autour d'un cylindre circulaire.

Enfin, la méthodologie est adaptée dans un contexte semi-transitoire. Nous nous plaçons dans un exemple dans lequel le champ de vitesse reste constant. En imposant une température variable au cylindre circulaire, on observe un champ thermique transitoire. Nous terminons le chapitre en démontrant la possibilité d'identifier des modèles réduits dans ce cas.

Sommaire

4.1	Observables	70
4.1.1	Notion d'observables	70
4.1.2	Degré de raffinement	70
4.1.3	Observables et degré de raffinement	70
4.2	Présentation du cas	71
4.2.1	Motivations	71
4.2.2	Topologie et caractéristiques de l'écoulement étudié	73
4.2.3	Régime transitoire forcé et instationnarités intrinsèques	75
4.2.4	Raffinement temporel	77
4.2.5	Les observables	78
4.2.6	Les différents écoulements étudiés	79
4.3	Sensibilité des Observables	80
4.3.1	Problématique	80
4.3.2	Présentation des calculs	80
4.3.3	Comparaison des différents régimes	85
4.3.4	Conclusion partielle	88
4.4	Reproduction et Prédiction des Allées de Karman	90
4.4.1	Le phénomène	90
4.4.2	Objectifs et Contexte	91
4.4.3	Reproduction d'un signal périodique unique	92
4.4.4	Lâcher tourbillonnaire dépendant de la vitesse d'entrée	98
4.4.5	Comparaison avec les modèles réduits de type POD	113
4.4.6	Conclusion Partielle	115
4.5	Réduction de modèle d'écoulements transitoires	115
4.5.1	Motivations et objectifs	115
4.5.2	Réduction de modèle transitoire pour les champs de vitesse et de température	117
4.5.3	Réduction de modèle transitoire pour le flux de chaleur	128
4.5.4	Conclusions d'étape	135
4.6	Réduction de Modèle en écoulement quasi-transitoire	135
4.6.1	Position du Problème	135
4.6.2	Utilisation de modèles réduits et de surfaces de réponse dans le cadre d'écoulements stationnaires	136
4.6.3	Modèle Réduit d'un écoulement stationnaire autour d'un cylindre circulaire	137
4.6.4	Modèles Réduits d'un écoulement anisotherme semi-transitoire	145
4.6.5	Conclusion partielle	152
4.7	Conclusions du chapitre	156
	Bibliographie	161

4.1 Observables

4.1.1 Notion d'observables

De nombreux exemples de problèmes d'ingénierie type s'expriment comme la recherche de la valeur prise par des grandeurs précises et déterminées à l'avance, que l'on appelle des observables. Il peut s'agir par exemple d'une température maximale sur une surface ou d'un débit massique à travers une section. Il peut s'agir d'une répartition de coefficient de pression sur une surface portante ou d'un flux thermique à travers une surface.

En mécanique des fluides, on obtient ces observables après un post-traitement de calculs CFD. Si, dans de nombreux cas, on est intéressé par la topologie des champs de vitesse, de température, de masse volumique, etc., souvent, l'information de la valeur prise par l'observable suffit.

4.1.2 Degré de raffinement

Dans les applications ciblées par nos travaux, les informations sur les observables sont obtenues classiquement via un calcul CFD. On peut chiffrer le coût d'un tel calcul en fonction de :

Taille du maillage \times Modélisation physique \times Nombre de pas de temps

Ces trois éléments qualifient le degré de raffinement du calcul :

- plus la taille de maille sera faible,
- plus la modélisation physique sera fine (équations physiques),
- plus le pas de temps sera fin,

et plus le calcul sera raffiné et coûtera cher. Mais augmenter le degré de raffinement n'a pas forcément un effet significatif sur la qualité des observables recherchés.

4.1.3 Observables et degré de raffinement

Pour maîtriser ses outils de calcul, le numéricien doit être conscient de la relation entre leurs degrés de raffinement et la qualité des observables qu'ils fournissent. Ainsi, on saura choisir le modèle CFD utilisé en fonction de la grandeur à observer, en minimisant la difficulté de résolution.

Lorsque l'on a à sa disposition plusieurs méthodes de résolution numérique aux degrés de raffinement différents, la première chose à faire est donc de déterminer quels sont les observables qui nous intéressent. La méthode de résolution la plus adaptée peut être alors utilisée. Elle occasionnera éventuellement des erreurs sur d'autres grandeurs, mais qui seront sans trop de conséquences tant que l'on obtient la précision désirée sur les observables d'importance.

Cette notion de se contenter d'être précis sur une partie uniquement des grandeurs calculées par le solveur CFD pour optimiser les ressources de calcul rejoint le principe des méthodes de réduction de modèle et des surrogate models. Ces modèles établissent une relation entre des paramètres d'entrée et des observables. Par exemple un modèle de kriging peut établir la traînée d'un profil d'aile en fonction de paramètres géométriques sans jamais calculer d'écoulement. Dans de nombreux problèmes, dont font partie certaines simulations aérothermiques évoquées dans le chapitre 1, peu importe si on n'a pas accès à toutes les grandeurs de l'écoulement, à partir du moment où on connaît précisément celles qui nous intéressent.

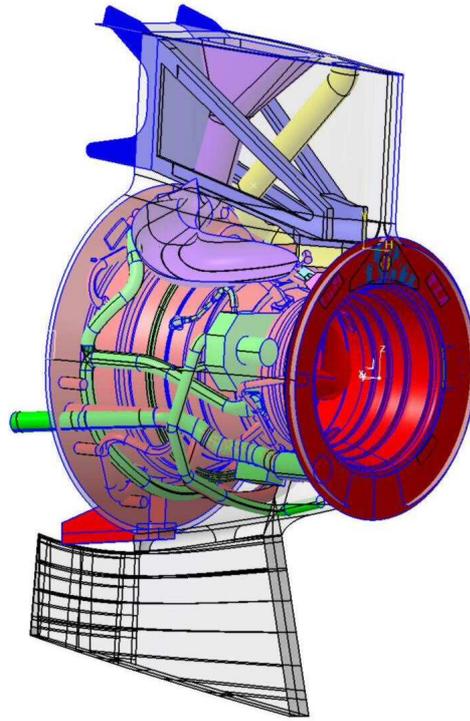


FIG. 4.1 – Géométrie simplifiée de compartiment moteur. On s'intéresse à des écoulements internes de fluide passant entre le carter et la nacelle (non représentée ici) et rencontrant des obstacles tels que des tuyaux.

Le concept d'observable va ainsi intervenir à plusieurs niveaux dans ce chapitre. Nous commencerons par présenter l'écoulement autour du cylindre circulaire qui a servi de cas test pour la mise en place de la plupart des modèles réduits de cette thèse. Nous verrons que du raffinement temporel, dépend la précision sur ce que l'on regarde dans l'écoulement. Enfin, nous montrerons que les méthodes d'identification modale peuvent être adaptées à ces divers degrés de raffinement.

4.2 Présentation du cas

4.2.1 Motivations

La figure 4.1 présente une géométrie simplifiée de compartiment moteur. L'écoulement interne dans ce type de configuration présente de nombreux phénomènes complexes tels que des jets impactants, et des structures tridimensionnelles. Beaucoup d'entre eux s'expliquent par la présence de conduites, qui sont les obstacles typiques de cet écoulement.

L'écoulement turbulent autour du cylindre circulaire possède le double avantage de correspondre géométriquement aux obstacles présents dans le compartiment moteur, et de mettre en jeu de nombreux phénomènes communs à l'écoulement de compartiment moteur, comme des décollements et des couches de mélange. Pour cette raison, cet écoulement a été choisi en début de thèse comme cas type d'essai de nos méthodes de réduction de modèle.

La figure 4.2 illustre un calcul stationnaire autour d'un cylindre circulaire. En construisant le nombre de Reynolds à partir du diamètre du cylindre, les études se feront à des nombres de Reynolds variant entre 2000 et 4000 :

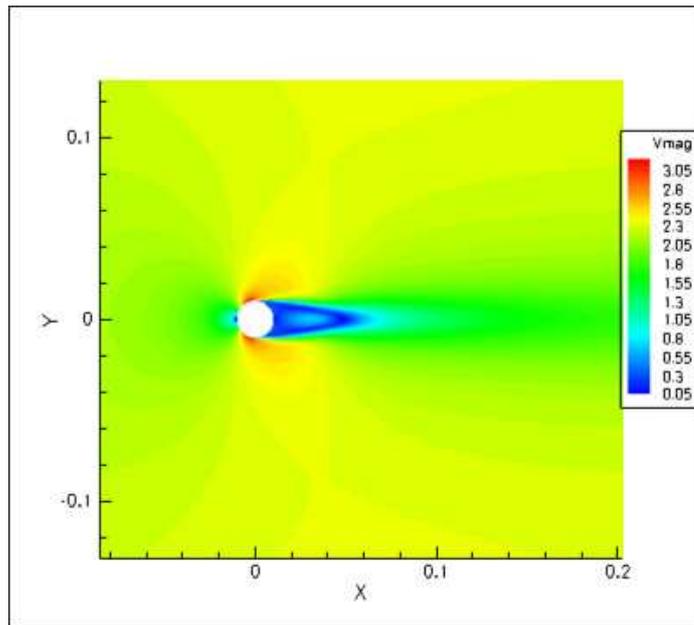


FIG. 4.2 – Champ de vitesse à proximité d'un cylindre circulaire - Nombre de Reynolds : 3007

$$Re = \frac{U_{\infty} D}{\nu} \quad (4.1)$$

où U_{∞} , D et ν désignent respectivement la vitesse de référence (celle imposée en amont), le diamètre du cylindre, et la viscosité cinématique du fluide. Il s'agit d'une évaluation globale du rapport entre les efforts convectifs et les efforts visqueux dans l'écoulement.

Dans cet intervalle de nombres de Reynolds, on observe que :

- l'écoulement est turbulent,
- il est tridimensionnel,
- les couches limites décollent et donnent naissance à un sillage bordé de couches de mélange,
- les couches limites et les couches de mélange sont des zones à fort gradient de vitesse,
- le sillage du cylindre est le siège d'instabilités instationnaires (allées de Von Kármán, instabilités de Kelvin-Helmholtz, ...).

Pour être plus représentatif des écoulements internes de type compartiment moteur, le cylindre circulaire est chauffé et apporte de l'énergie thermique à l'écoulement. Pour cela, on le munit d'une épaisseur, siège de transferts conductifs, et on en chauffe la surface interne. Cette condition thermique peut être :

- une température imposée,
- ou un flux de chaleur imposé.

Dans le cadre du développement des méthodes de réduction de modèle, l'objet des simulations numériques n'est pas vraiment d'accéder à une connaissance fine des phénomènes mise en jeu dans l'écoulement. Il s'agit plutôt de fournir des données que les modèles réduits doivent reproduire. Pour accélérer l'obtention de ces données en instationnaire, nous avons relâché des simulations bidimensionnelles, en étant conscient qu'il s'agit là d'une simplification.

De nombreuses publications ont pour thème l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. On trouve dans [1] un tour d'horizon des différents régimes rencontrés en fonction du nombre de Reynolds, ainsi que des explications sur la mécanique de formation des tourbillons. Les articles d'Achenbach [2], de Norberg et Sundén [3], de Williamson [4] ou de Olsen et Rajagopalan [5]

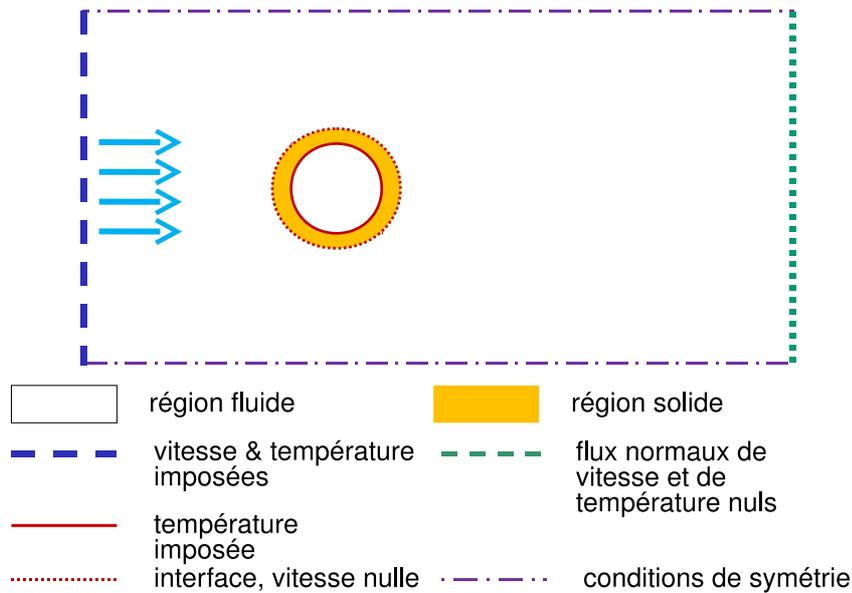


FIG. 4.3 – Description générale de la géométrie étudiée et des conditions aux limites appliquées à l'écoulement. Il y a deux zones distinctes, une fluide et une solide. La paroi intérieure du tuyau constitue une condition limite en température. A l'entrée du domaine, la vitesse et la température du fluide sont déterminées. Les conditions de symétrie parallèles à l'écoulement assurent la direction locale du champ de vitesse. Enfin la condition de sortie annule les dérivées normales de température et de vitesse

font le lien entre ces différents régimes et quelques grandeurs mesurables expérimentalement, comme la répartition pariétale de coefficients de pression, la longueur de formation du sillage, ou les efforts ressentis par le cylindre. Enfin, plus d'informations sur la nature des lâchers de tourbillons tridimensionnels sont disponibles dans les articles de Leweke et Williamson [6], de Thomson *et al.* [7], de Bearman [8] ou de Thomson *et al.* [9].

La littérature concernant un cylindre circulaire chauffé en convection forcée est également abondante. On pensera notamment aux travaux expérimentaux de thèse de Park [11] ou ceux de Ren [12] concernant les transferts convectifs au cœur du sillage et des couches de mélange. Parmi les travaux sur les transferts convectifs moyens, on peut citer les travaux expérimentaux d'Achenbach [13], de Matsumura et Antonia [14], de Nakamura et Igarashi [15, 16], de Wang *et al.* [17], de Wang et Trávníček [18], de Vít *et al.* [19], ou numériques de Lange *et al.* [20], de Sabanca [21] ou de Zhang *et al.* [22].

4.2.2 Topologie et caractéristiques de l'écoulement étudié

Ici, nous donnons quelques précisions sur le cas général que nous allons traiter. La figure 4.3 décrit de façon générale le genre d'écoulement qui retient notre attention. L'obstacle est un tuyau avec une surface extérieure en interface avec le fluide, et une surface intérieure. Le fluide, en l'occurrence de l'air, pénètre dans le domaine en étant doté d'une vitesse U_∞ et d'une température T_∞ . La surface intérieure se voit imposer une température T_p .

Dans la zone solide (le tuyau), des transferts conductifs apparaissent entre les deux surfaces. Le long de l'interface avec le fluide, on observe de la convection. Puis, l'énergie thermique se propage vers l'aval de l'écoulement par conducto-convection.

Quelques hypothèses nous permettront d'exploiter les propriétés de l'écoulement. Pour commencer, le nombre de Mach n'excédant jamais 0,01, on le considère incompressible.

Par ailleurs, l'écart de température entre le cylindre et le fluide en amont restera en deçà de 140K. En basant le nombre de Richardson sur les nombres de Reynolds les plus faibles, les écarts de températures les plus élevés et le diamètre du cylindre, ce nombre restera inférieur à 2.10^{-2} :

$$Ri = \frac{g\beta(T_p - T_f)D}{U_\infty^2} \quad (4.2)$$

où $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur, β le coefficient d'expansion du fluide (pris ici à $1/T_\infty$) et $T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$ est la température de film. Or, ce nombre sans dimension donne une estimation du rapport entre l'énergie cinétique du fluide (convection) et son énergie potentielle gravitationnelle. On considère généralement que la convection mixte commence lorsque ce nombre atteint 0,1. Devant les faibles valeurs prises par le nombre de Richardson, on peut conclure que les effets de la convection naturelle pourront toujours être négligés dans nos travaux.

De la même façon, les vitesses mises en jeu sont supposées suffisamment faibles pour pouvoir négliger les termes de dissipation de chaleur par effet visqueux devant les autres termes de l'équation de l'énergie. On peut justifier cette hypothèse grâce à la relation entre le nombre de Prandtl Pr pris à 0,7 et le nombre d'Eckert Ec [23] :

$$\frac{Pr^{1/2}Ec}{2} \leq 2,5.10^{-4} \ll 1,0$$

Le nombre d'Eckert est une estimation du rapport entre la dissipation de l'énergie cinétique sous forme de chaleur et l'énergie interne du fluide :

$$Ec = \frac{U_\infty^2}{c_p \Delta T} \quad (4.3)$$

où c_p désigne la capacité thermique massique du fluide. Enfin, il faut se souvenir que la température du fluide influe sur sa viscosité. Par exemple, dans le cas d'un gaz parfait, on peut citer la fameuse loi de Sutherland :

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{T_{\text{ref}} + S}{T + S} \quad (4.4)$$

où T_{ref} est une température de référence, μ_{ref} la viscosité dynamique à cette température, et S la température de Sutherland, propre au gaz. Dans la pratique, les écarts de température dans le fluide seront supposés suffisamment faibles (au plus de l'ordre d'une cinquantaine de degrés Kelvin) pour négliger les effets des gradients de viscosité. Pour des raisons similaires, on néglige également les effets des gradients de capacité thermique massique c_p , et de conductivité thermique λ .

Ainsi, de façon générale, tous les écoulements proposeront une solution aux équations de Navier-Stokes écrites sous la forme :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} p - \overrightarrow{\text{vdiv}}(\overline{\overline{\nabla}} \vec{v} + {}^t \overline{\overline{\nabla}} \vec{v}) = 0 \quad (4.5b)$$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \text{div}(T \vec{v}) - \lambda \Delta T = 0 \quad (4.5c)$$

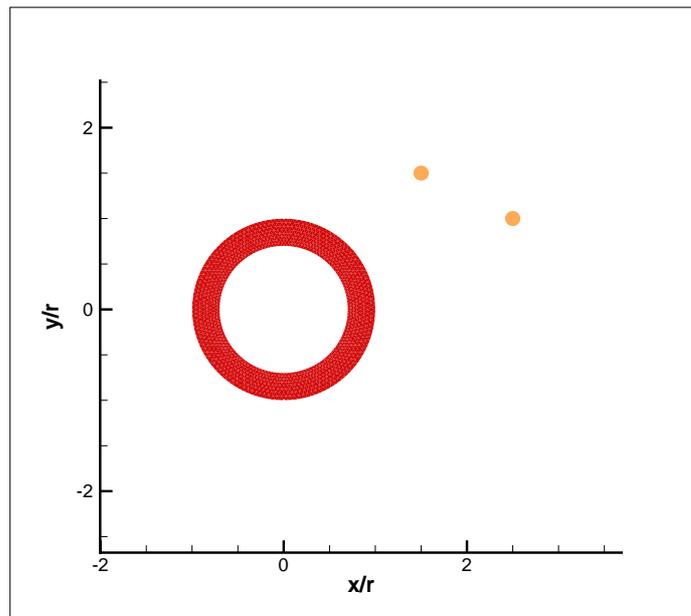


FIG. 4.4 – Présentation du système de coordonnées. Les coordonnées sont adimensionnées par le rayon du cylindre. Par exemple, les cercles oranges indiquent les positions $(1,5r_c; 1,5r_c)$ et $(2,5r_c; r_c)$

On présentera quelques évolutions de champ de vitesse ou de température en aval du cylindre. Pour donner une idée des positions correspondant aux signaux analysés, on exprimera leurs coordonnées en termes de rayons r_c de cylindre. L'origine du système de coordonnées est prise au centre du cylindre, et la partie positive de l'axe des abscisses est dirigée vers l'aval de l'écoulement. Par exemple les positions $(2,5r_c; r_c)$ et $(1,5r_c; 1,5r_c)$ sont indiquées sur la figure 4.4.

4.2.3 Les différents cas étudiés - Régime transitoire forcé et instationnarités intrinsèques

Considérons uniquement la part cinétique de l'écoulement autour du cylindre. Au delà d'un nombre de Reynolds de 47, à conditions opératrices constantes, l'écoulement est instationnaire. On observe des tourbillons contra-rotatifs alternés qui sont convectés vers l'aval de l'écoulement. On parle de lâchers de tourbillons, ou d'allées de Kármán (voir la figure 4.5 par exemple). Le paragraphe 4.4 s'étend plus sur ces phénomènes. Lorsque les conditions opératrices sont dépendantes du temps, il y a donc deux sources d'instationnarité :

1. L'écoulement est le théâtre d'instabilités, indépendamment de la variation des conditions opératrices. On dira que l'écoulement est intrinsèquement instationnaire.
2. De plus, l'écoulement s'adapte aux conditions opératrices fonctions du temps. Il y a alors une dépendance forcée au temps.

Sur la figure 4.6, on présente une évolution de champ de vitesse dans le sillage du cylindre, calculée en tenant compte des deux types de phénomènes.

Dans la suite, nous essaierons de distinguer les instationnarités intrinsèques, du régime transitoire forcé. Pour cela, on réservera l'expression "écoulement instationnaire" pour décrire les instationnarités intrinsèques de l'écoulement. On utilisera "régime transitoire" pour parler des variations temporelles induites par des variations de conditions opératrices.



FIG. 4.5 – Isosurface de critère Q [24] colorée en pression statique, dans le sillage d'un cylindre circulaire à un nombre de Reynolds de 616. Les structures tridimensionnelles rappellent celles décrites par Thomson et al. [9].

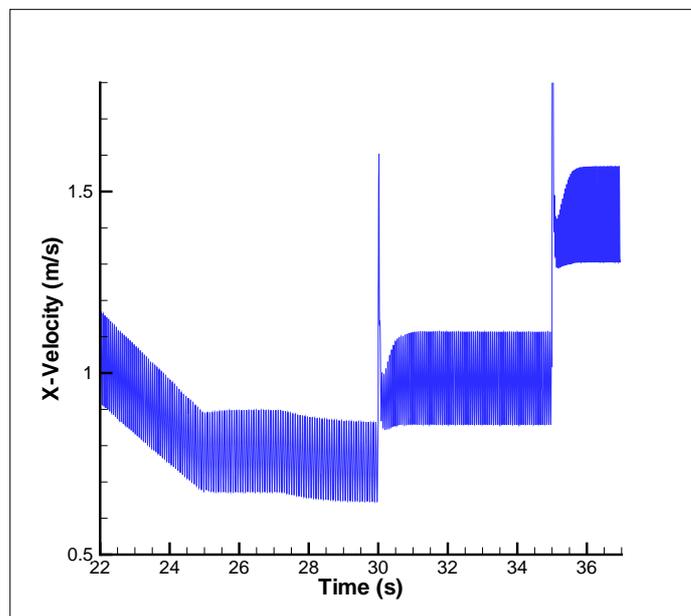


FIG. 4.6 – Signal de vitesse dans le sillage d'un cylindre circulaire. La vitesse d'entrée est fonction du temps, et le pas de temps est suffisamment petit pour observer les détachements tourbillonnaires périodiques. Les évolutions "basses fréquences" sont imposées par la vitesse d'entrée, alors que les variations périodiques de faible période sont l'expression du lâcher de tourbillons. Le signal présenté est une portion d'un signal de vitesse correspondant à des conditions aux limites présentées un peu plus loin, sur la figure 4.54 du paragraphe 4.5.3.

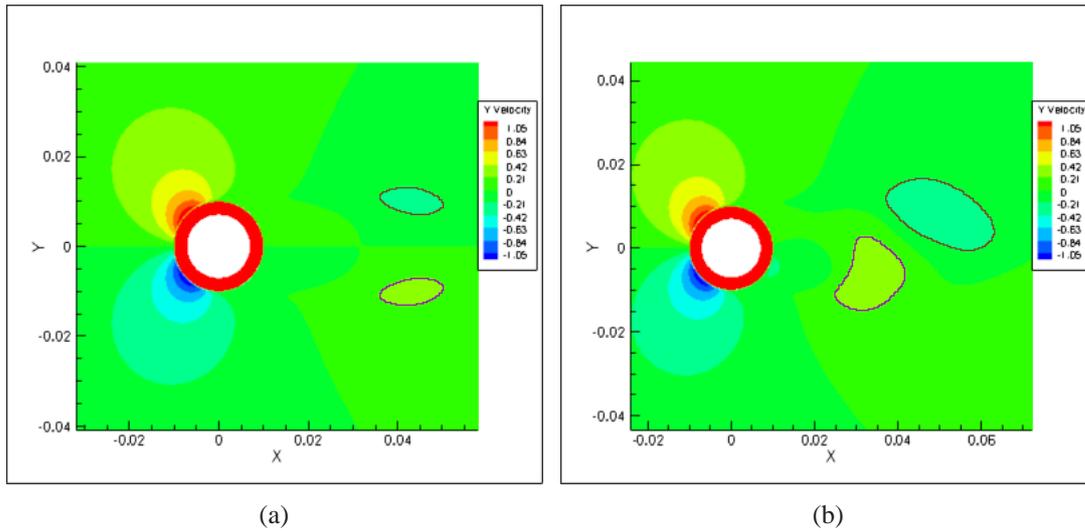


FIG. 4.7 – Composantes transverses du champ de vitesse ; nombre de Reynolds de l'écoulement : 2050. En réglant le pas de temps à 10 fois la période des lâchers tourbillonnaires, on observe un sillage symétrique à tout instant (figure 4.7(a)). Lorsque, comme sur la figure 4.7(b) le pas de temps est réduit à $1/32^{\text{e}}$ de cette période, on peut simuler le sillage pleinement instationnaire

Dans l'évaluation de ce qui a été appelé le degré de raffinement d'une simulation, ces deux aspects vont intervenir. D'une part, le pas de temps nécessaire pour prendre en compte l'aspect instationnaire du sillage joue sur le raffinement temporel de la simulation : plus le pas de temps est faible et plus celui-ci est élevé. D'autre part, prendre en compte les variations de conditions aux limites enrichit la modélisation du phénomène à simuler. En tenant compte ou non des aspects instationnaire et transitoire dans la résolution numérique, ou joue sur le degré de raffinement et le coût de celle-ci.

4.2.4 Raffinement temporel

Les fréquences associées au régime transitoire sont souvent beaucoup plus faibles que les plus basses fréquences de l'écoulement instationnaire. Dans le cas du compartiment moteur, si les conditions opératrices évoluent sur des périodes de temps de l'ordre de quelques minutes, la période des détachements tourbillonnaires est plutôt de l'ordre de 10^{-2} s.

Pour simuler un écoulement autour d'un cylindre en régime transitoire, il faut choisir un pas de temps Δt . Si Δt est suffisamment plus faible que τ , la période des détachements tourbillonnaires, alors ceux-ci pourront être simulés. Dans le cas inverse, le pas de temps agit comme un filtre, et le détachement tourbillonnaire n'apparaît pas dans le calcul.

La figure 4.7 est une illustration de ce levier qu'est le choix du pas de temps. Les conditions opératrices y sont constantes, mais en réglant le pas de temps en fonction de la période des détachements, on les fait ou non apparaître dans le calcul.

Lorsque le fluide est l'air et que le diamètre du cylindre vaut 2,0cm, la période des lâchers tourbillonnaires vaut au minimum dans nos applications $\tau_{\min} = \tau_{4000} \approx 0,030$ s. Si on souhaite simuler numériquement ce détachement, le pas de temps Δt doit être significativement plus petit que τ_{4000} . Choisir $\Delta t = \frac{\tau_{4000}}{32}$ est un bon point de départ. Imaginons qu'il faille alors prendre en compte des effets thermiques. Les temps d'établissement sont en général de l'ordre de plusieurs minutes, voire plusieurs dizaines de minutes. Or, pour faire 30s de simulation avec

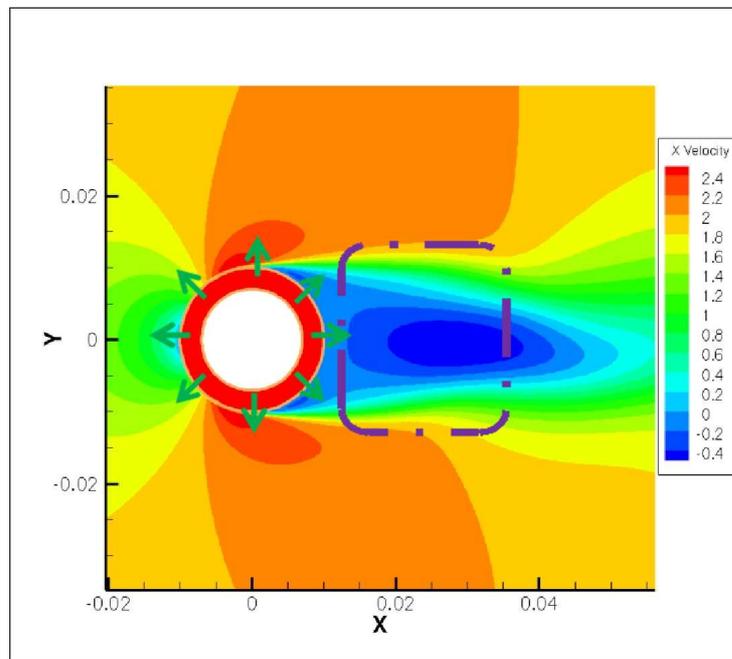


FIG. 4.8 – Les observables retenus pour l'étude sont les champs de vitesse et de température, les densités de flux thermique le long de la surface extérieure du cylindre, et le flux thermique total.

$\Delta t = 0,00093s$, il faut compter pas moins de 32000 pas de temps.

Ainsi, pour être en mesure de réaliser des simulations de plusieurs minutes avec des temps de calcul raisonnable, on est souvent obligé d'adapter le pas de temps à la durée totale de la simulation. Ce pas de temps est alors beaucoup trop important pour pouvoir observer les lâchers tourbillonnaires.

Remarque. Dans le cas des simulations d'aérothermie similaires au compartiment moteur, les phénomènes thermiques imposent des durées totales de simulation de l'ordre de 30 minutes (décollage et phase de montée).

L'écoulement autour du cylindre circulaire en régime transitoire fournit donc un exemple d'écoulement pouvant être résolu avec deux degrés de raffinement différents. Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe 4.1, il est important de déterminer l'influence de la prise en compte ou non des lâchers de tourbillons sur les observables que nous aurons choisis. C'est là l'objet des paragraphes qui suivent.

4.2.5 Les observables

Comme l'illustre la figure 4.8, on s'intéressera à quatre types d'observable différents :

- le champ de vitesse,
- le champ de température dans le fluide et dans le solide,
- la densité de flux thermique $\phi(\theta)$ à travers la paroi extérieure du cylindre (θ est l'angle depuis le culot),
- le flux thermique total à travers cette même paroi.

Le flux thermique total est calculé directement par le logiciel CFD comme l'intégrale de $\phi(\theta)$ le long de la surface du cylindre :

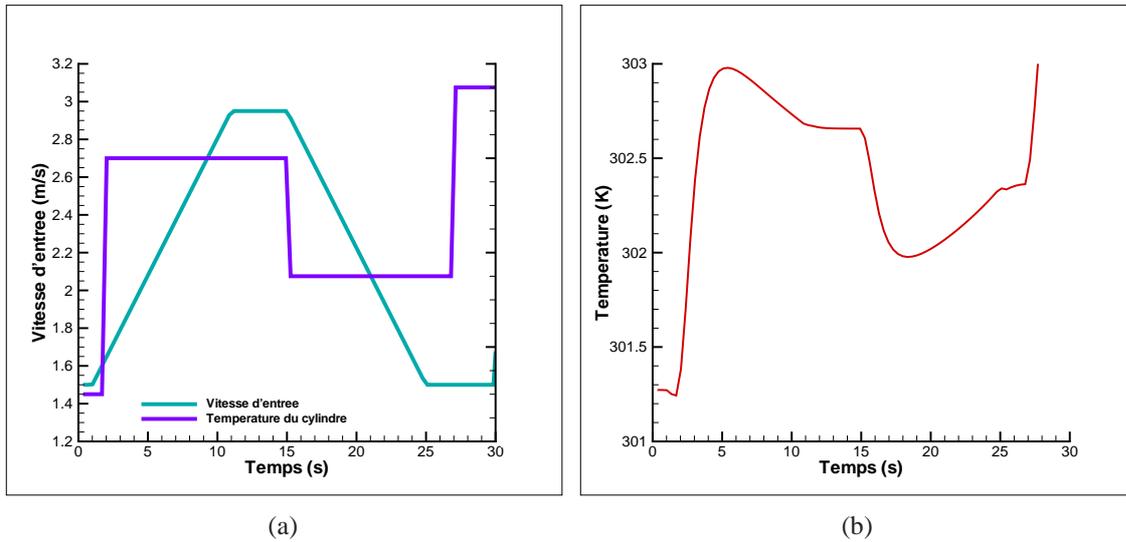


FIG. 4.9 – Température en régime transitoire. A gauche (figure 4.9(a)) les conditions opératrices transitoires en vitesse d’entrée et température de cylindre. Sur la figure 4.9(b), l’évolution de la température aux coordonnées $(1, 5r_c; 1, 5r_c)$.

$$\Phi = \int_0^{2\pi} r_c \phi(\theta) d\theta \quad (4.6)$$

La densité de flux thermique est elle évaluée à l’aide des lois de parois utilisées par le modèle de turbulence. Celles-ci servent à modéliser le gradient de température dans les mailles adjacentes à la paroi, dans la mesure où le maillage n’est pas assez fin pour les capter “naturellement”.

4.2.6 Les différents écoulements étudiés

Pour mettre en évidence les impacts sur les observables du degré de raffinement, on étudiera quatre types d’écoulement, caractérisés chacun par une modélisation transitoire (prise en compte ou non des variations des conditions aux limites), et un choix de pas de temps (large ou fin).

1. Régime semi-transitoire : la vitesse amont est fixe et prend des valeurs comprises entre $1,5\text{m.s}^{-1}$ (nombre de Reynolds de 2000), et $3,0\text{m.s}^{-1}$ (nombre de Reynolds de 4000). La température T_p imposée sur la paroi intérieure du cylindre varie, elle, au cours du temps. Le pas de temps est trop important pour pouvoir observer l’aspect instationnaire de l’écoulement. Comme le champ de température n’influe pas sur le champ de vitesse, la part cinétique de l’écoulement est stationnaire. Par contre, d’un point de vue thermique, on travaille en régime transitoire. Il s’agit d’un type de résolution similaire à celui effectué par Rouizi *et al.* dans [25].
2. Régime transitoire : la vitesse amont et la température du cylindre varient au cours du temps. Le pas de temps est toujours trop important pour observer l’instationnarité du fluide. La figure 4.9 représente un exemple d’évolution des conditions opératrices et de la température en un point du sillage.
3. Régime purement instationnaire : les conditions opératrices sont constantes, et le pas de temps est suffisamment fin pour observer le détachement tourbillonnaire. La figure 4.10

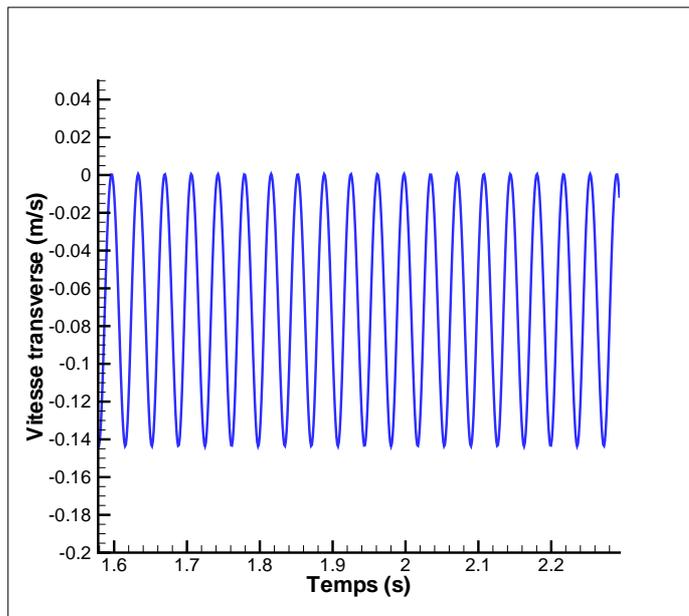


FIG. 4.10 – Régime instationnaire : signal de vitesse dans le sillage instationnaire du cylindre, pour une vitesse d'entrée de $2,8\text{m.s}^{-1}$ à la position $(2r_c; r_c)$ (nombre de Reynolds : 3826).

propose un exemple d'évolution du champ de vitesse au cours du temps.

4. Régime instationnaire et transitoire : les conditions opératrices évoluent au cours du temps, et le pas de temps est réglé par rapport à la plus petite des périodes de lâchers tourbillonnaires. Il s'agit du type de simulation au degré de raffinement le plus élevé. La figure 4.11 retranscrit un exemple d'évolution du champ de température au cours du temps.

Ces différents cas sont graphiquement résumés sur la figure 4.12.

4.3 Sensibilité des Observables

4.3.1 Problématique

Au paragraphe précédent 4.2.6, nous avons présenté quatre types de calcul. Dans la mesure où la précision d'un modèle réduit identifié sera au mieux celle du modèle détaillé qui a servi de référence, l'utilisateur doit d'abord choisir le degré de raffinement qui lui convient, en fonction des observables qui l'intéressent. Nous essayons d'illustrer ce concept avec les paragraphes qui suivent. Pour cela, nous comparons, pour ces quatre types de simulation, les observables choisis dans le paragraphe 4.2.5.

4.3.2 Présentation des calculs

4.3.2.1 Généralités

Le solveur CFD retenu pour fournir les données de référence est le logiciel ANSYS Fluent, dans ses versions 6.3.26 et 12.0.16. Le modèle de turbulence retenu est le modèle $k - \omega$ SST. L'étude de convergence en maillage a consisté à raffiner le maillage jusqu'à obtenir des y^+ inférieurs à 1 sur la paroi du cylindre (taille de première maille adimensionnée par la vitesse de

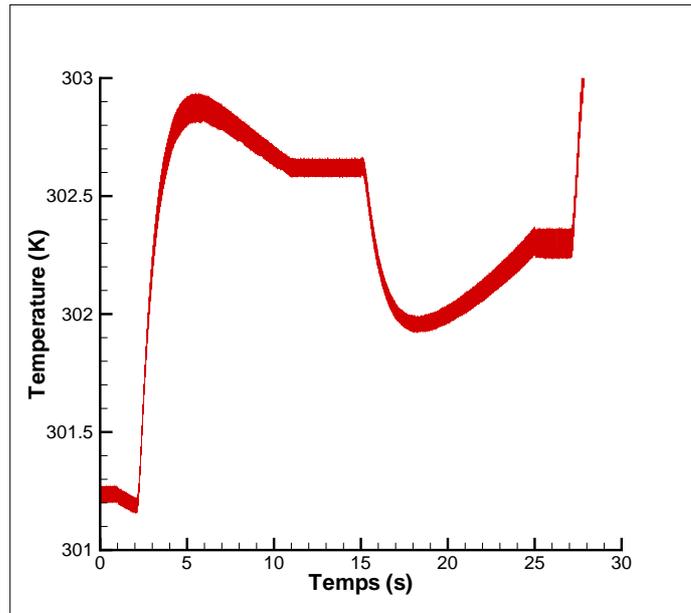


FIG. 4.11 – Régime instationnaire transitoire : signal de température dans le sillage du fluide à la position $(1,5r_c; 1,5r_c)$, en réponse aux conditions opératrices de la figure 4.9(a)

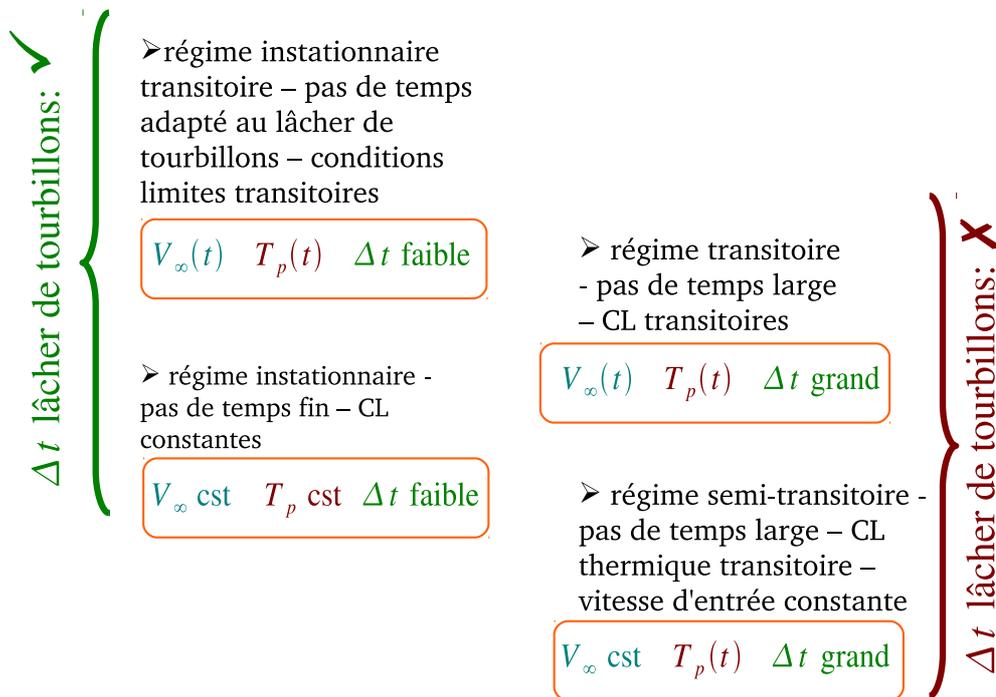


FIG. 4.12 – Différentes simulations ont été effectuées pour distinguer l'impact du degré de raffinement. Les simulations de gauche s'attachent à résoudre l'aspect instationnaire du sillage, contrairement à celles de droite. Les variations au cours du temps des conditions aux limites sont pleinement prises en compte dans les régimes transitoire et instationnaire transitoire.

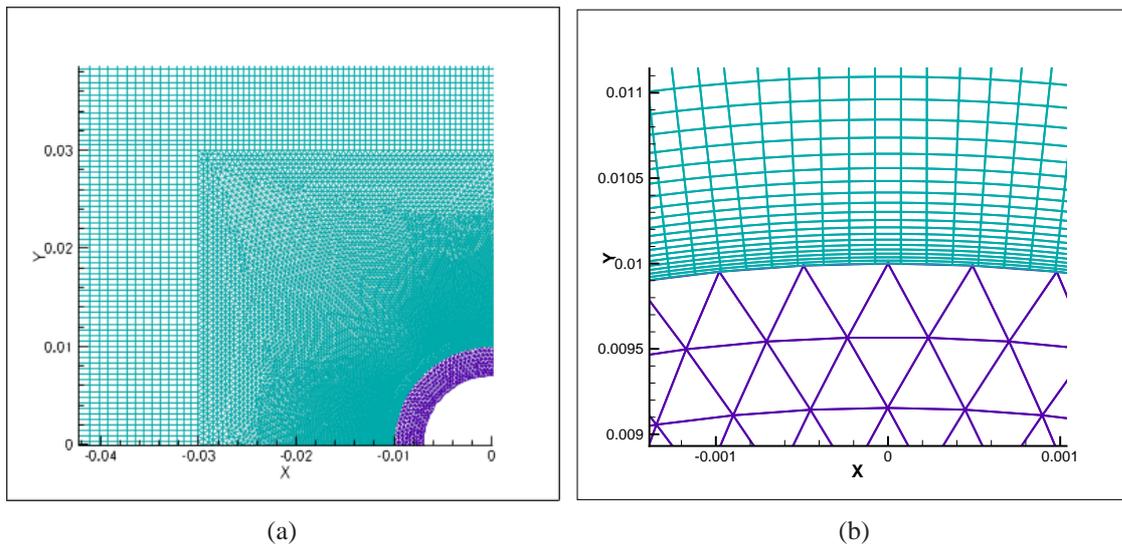


FIG. 4.13 – Le maillage de la zone fluide (bleu turquoise) est fait d’héxaèdres et de tétraèdres. Le maillage de la zone solide (violet), est formé uniquement de tétraèdres. L’interface entre les deux zones (figure 4.13(b)) a été réalisée sous la contrainte de ne pas avoir plus de quatre mailles “fluides” pour une “solide”.

frottement). La figure 4.13 présente le maillage utilisé pour les études, tandis que la figure 4.14 propose un exemple d’évolution de y^+ le long de la surface du cylindre. On compte au total 262 000 cellules dans la zone fluide contre 2048 dans la zone solide. L’interface entre les deux est non-conforme : les maillages ne sont pas coïncidants. Le fluide utilisé est l’air, et le cylindre est en acier.

4.3.2.2 Calculs en régimes stationnaires et semi-transitoires

D’un point de vue cinétique, les conditions opératrices sont constantes et le pas de temps est suffisamment grand pour filtrer le détachement tourbillonnaire : le calcul est stationnaire. La figure 4.2 du paragraphe 4.2.1 est un exemple de champ de vitesse ainsi calculé.

Plusieurs champs de vitesse stationnaires ont été calculés, pour des nombres de Reynolds allant de 2000 à 4000. Pour chacun, on peut estimer la réponse de l’écoulement à une excitation thermique dépendante du temps $T_p(t)$ de la paroi intérieure du cylindre. Cette réponse est évaluée à travers l’évolution des observables thermiques : champ de température, répartition de densité de flux, . . . La figure 4.15 en est un exemple. Il s’agit d’un signal de température dans le sillage, consécutif à un échelon de T_p .

Dans les comparaisons qui vont suivre (paragraphe 4.3.3), seul un état permanent nous intéresse. Dans ce cas, il suffit de faire un calcul pleinement stationnaire (la température de paroi est également constante).

4.3.2.3 Calculs en régime transitoire

Cette fois, la vitesse imposée en amont et la température varient en même temps. Le pas de temps Δt est toujours choisi suffisamment grand pour éliminer les instationnarités intrinsèques de l’écoulement. Les figures 4.16 et 4.17 proposent des exemples de variations de champ de vitesse dans le sillage, et de champ de température dans les deux régions, pour des conditions opératrices présentées sur la figure 4.16.

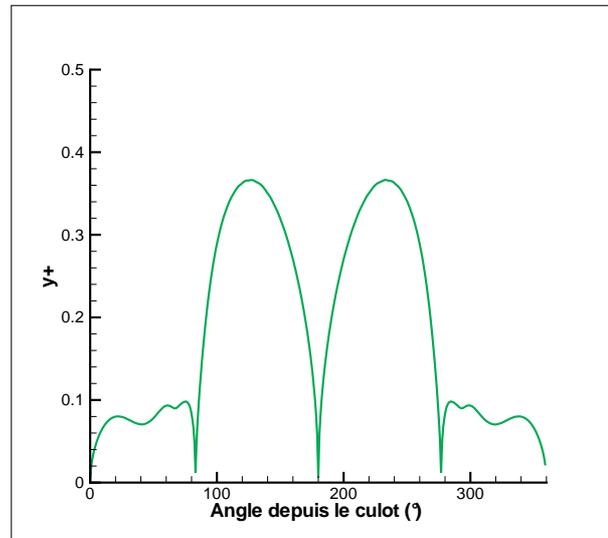


FIG. 4.14 – Evolution des y^+ le long de la surface du cylindre. La vitesse d'entrée est de $2,5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, pour un nombre de Reynolds de 3400 ($2,5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

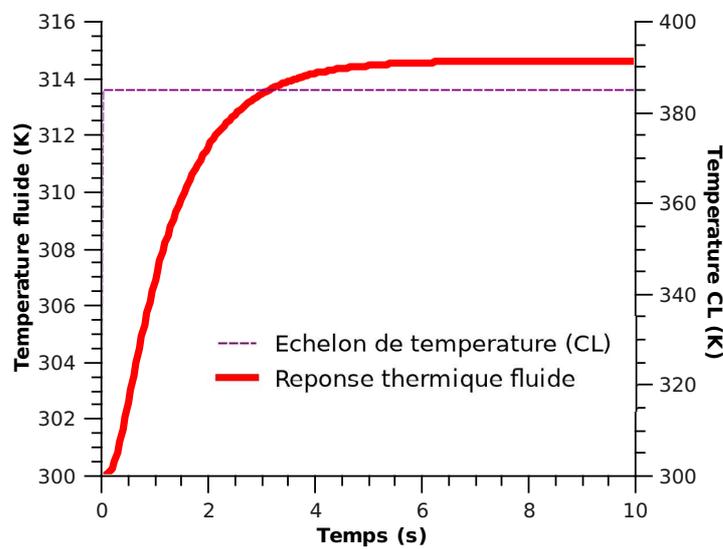


FIG. 4.15 – Régime semi-transitoire : réponse thermique dans le fluide (axe de gauche) à un échelon de T_p (axe de droite). Le signal est récupéré dans la cellule de position $(1,8r_c;r_c)$.

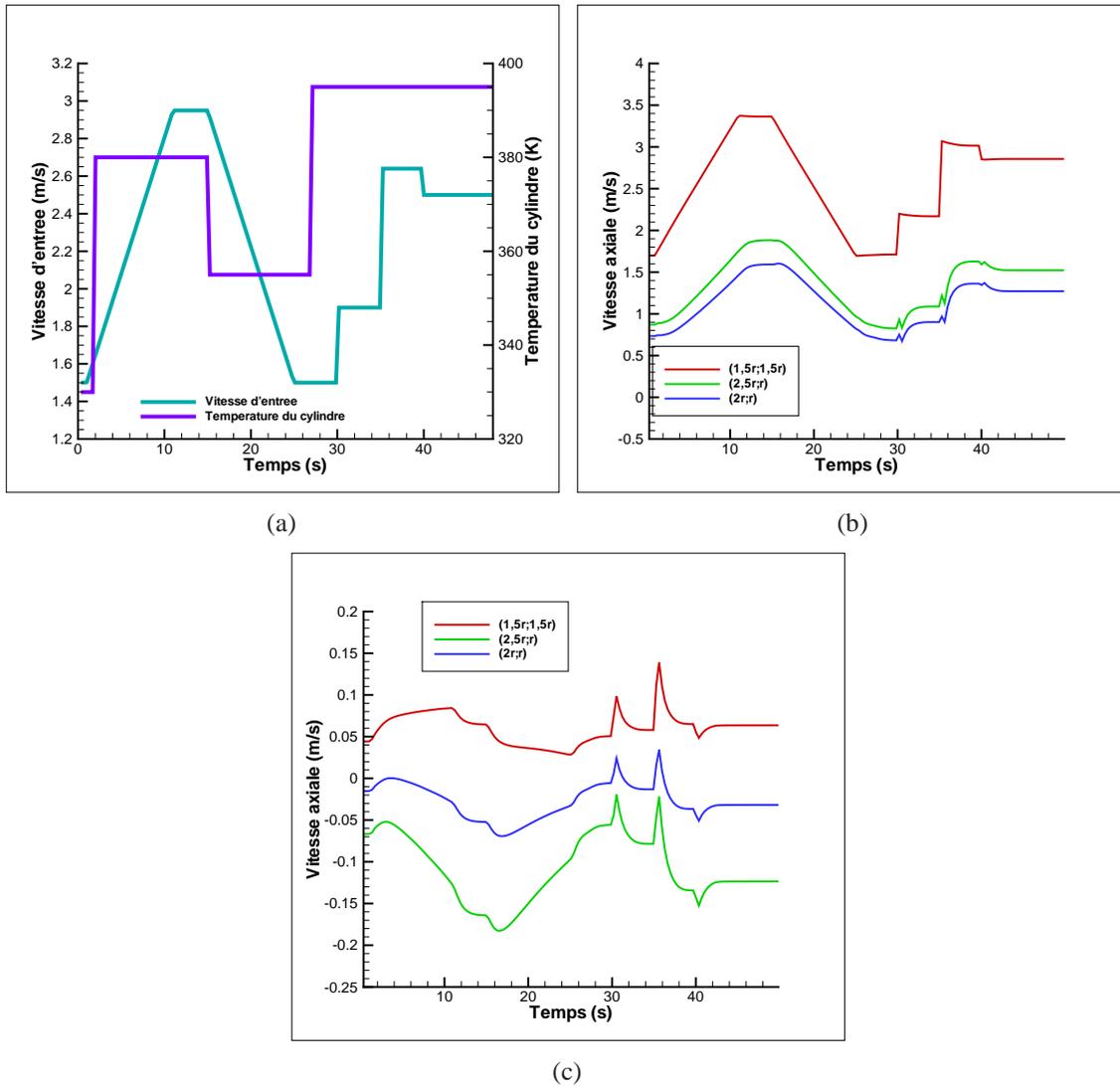


FIG. 4.16 – Régime transitoire : les figures 4.16(b) et 4.16(c) correspondent aux signaux de vitesse (axiale puis transverse) induits par les conditions opératrices de la figure 4.16(a), et calculés avec un pas de temps large. Les signaux sont pris aux positions $(2,5r_c; r_c)$, $(2r_c; r_c)$ et $(1,5r_c; 1,5r_c)$.

4.3.2.4 Calculs en régime purement instationnaire

Pour ces calculs, les conditions aux limites sont fixes, et le pas de temps est choisi en fonction de la période des allées tourbillonnaires, estimée a priori à partir de la vitesse d'entrée. Pour cela on utilise le nombre de Strouhal, déterminé à partir de la vitesse d'entrée V_∞ et du diamètre D du cylindre :

$$St = \frac{fD}{V_\infty} \quad (4.7)$$

La fréquence f est la fréquence du phénomène que l'on cherche à caractériser, en l'occurrence celle des lâchers. Sachant qu'aux nombres de Reynolds qui nous intéressent, le nombre de Strouhal vaut environ 0,2 [1], on détermine rapidement une approximation $\tau \sim$ de la période des lâchers. Le calcul est alors effectué avec un pas de temps $\Delta t = \tau \sim / 32$ ou $\Delta t = \tau \sim / 64$. A posteriori, on calcule la période exacte τ des lâchers à partir d'une transformée de Fourier d'un

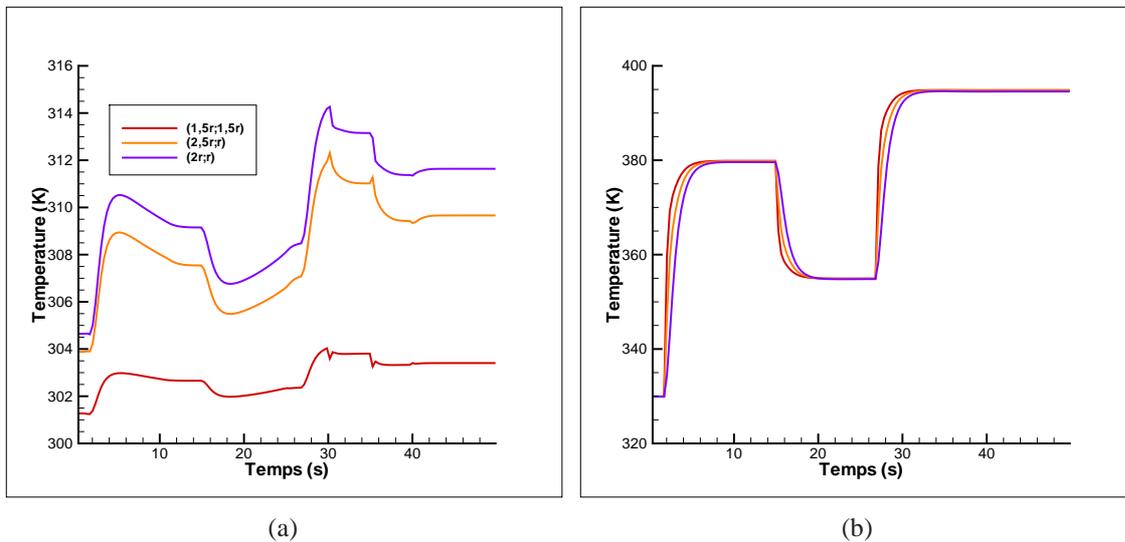


FIG. 4.17 – Régime transitoire. Ces courbes retracent l'évolution au cours du temps de la température correspondant aux conditions variables évoquées sur la figure 4.16(a). A gauche, la figure 4.17(a) concerne quelques points dans le sillage, alors que la figure 4.17(b) concerne quelques points dans la partie solide.

signal de vitesse, tel que le montre la figure 4.18.

4.3.2.5 Calculs en régime instationnaire transitoire

Il s'agit des calculs transitoires aux plus hauts degrés de raffinement. Les conditions aux limites varient au cours du temps sur des durées de l'ordre de quelques dizaines de secondes. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est compris entre 2000 (période τ_{2000} la plus élevée) et 4000 (période τ_{4000} la plus faible). Le pas de temps est déterminé comme dans le cas purement instationnaire, en prenant en compte la période minimale de lâchers. Ainsi, les variations au cours du temps des signaux de vitesse et de température sont dues au transitoire des conditions opératrices, et à la résolution des lâchers de tourbillons. La figure 4.19 contient des exemples de tels signaux.

4.3.3 Comparaison des différents régimes

4.3.3.1 Méthodologie

L'objet de cette section est d'illustrer sur ce cas l'effet que peut avoir le choix de l'un ou l'autre des types de simulation présentés au 4.3.2, sur les observables retenus au paragraphe 4.2.5.

Pour cela, un calcul transitoire a été réalisé en régime transitoire pur (paragraphe 4.3.2.3) et en régime instationnaire transitoire (paragraphe 4.3.2.5), avec les mêmes conditions aux limites, présentées sur la figure 4.20.

On veut comparer ces deux régimes avec les régimes stationnaire et purement instationnaire. A plusieurs instants t_i , on récupère les valeurs des conditions aux limites imposées aux deux calculs transitoires. Ces valeurs sont alors prises comme conditions opératrices constantes des calculs stationnaires et purement instationnaires.

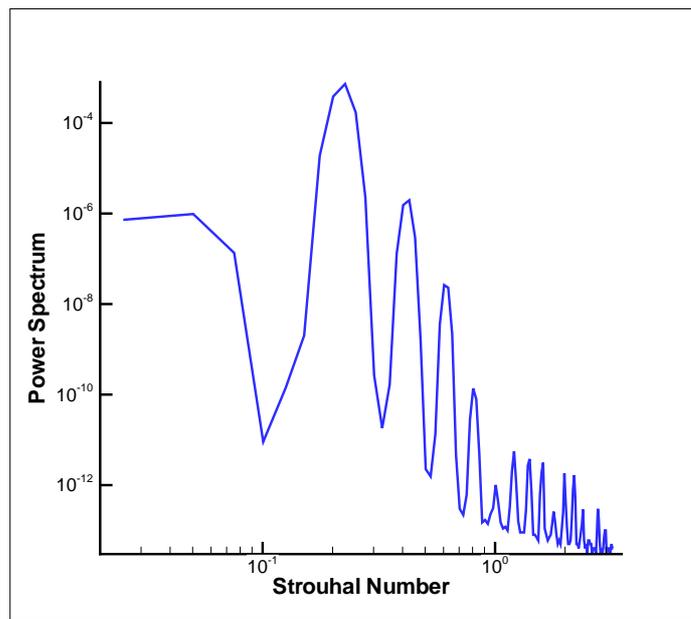


FIG. 4.18 – Régime instationnaire : densité spectrale de puissance derrière le cylindre circulaire. Elle a été réalisée à partir d'un signal temporel de vitesse transverse correspondant à 10 périodes de détachement tourbillonnaire à la position $(2,5r_c; r_c)$, pour un écoulement dont le nombre de Reynolds vaut 3417.

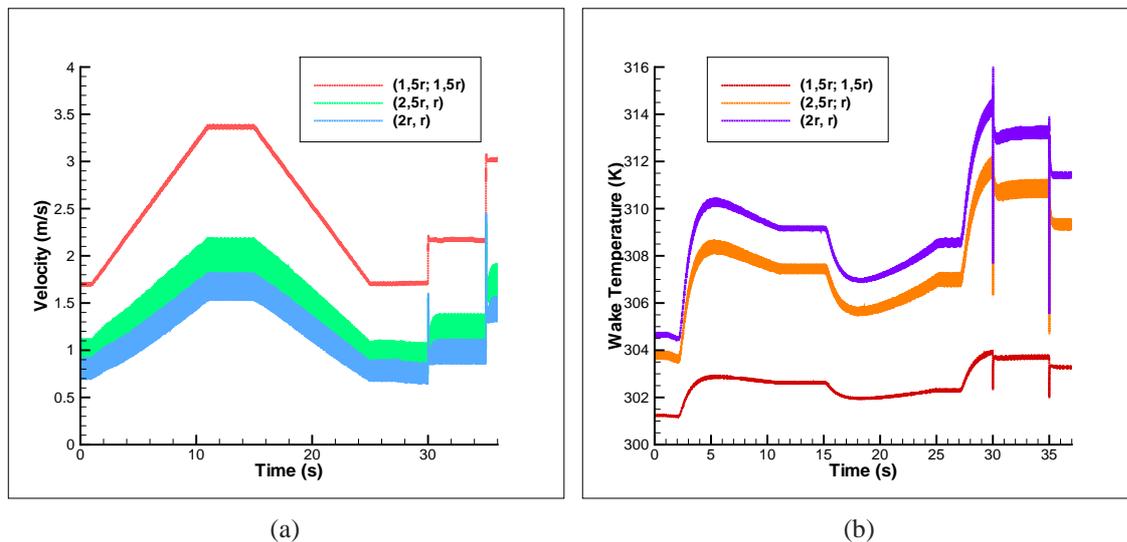


FIG. 4.19 – Régime instationnaire transitoire - Signaux de vitesse axiale et de température dans le sillage. On a utilisé trois capteurs positionnés en $(1,5r_c, 1,5r_c)$, $(2,5r_c, r_c)$ et $(2r_c, r_c)$

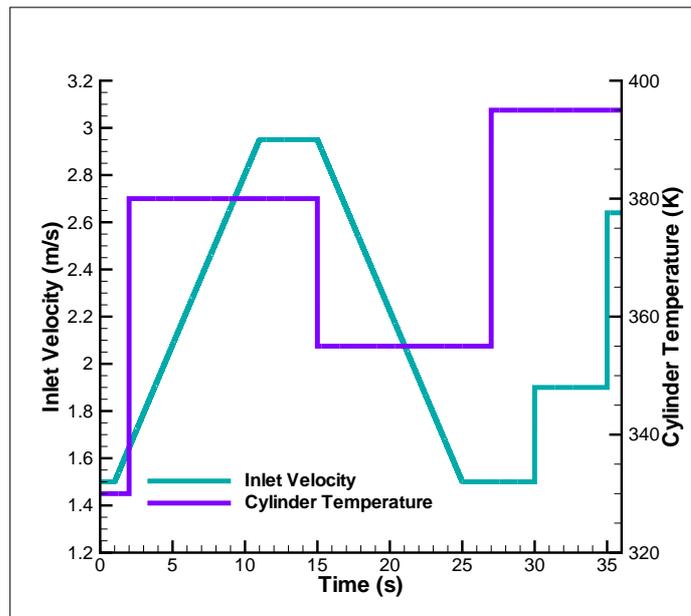


FIG. 4.20 – Conditions opératoires utilisées pour les deux calculs transitoires.

Comme indiqué au paragraphe 4.2.5, on s'intéressera au signal de vitesse dans le sillage du cylindre, à la température en un certain nombre de points de ce sillage et dans la région solide, à la répartition de la densité de flux thermique à la surface du cylindre, et au flux thermique total à travers cette paroi.

4.3.3.2 Comparaison de signaux de vitesse

Observons les signaux de vitesses présentés sur la figure 4.21. La figure 4.21(a) concerne la composante de la vitesse dans la direction principale de l'écoulement à la position de coordonnées $(2r_c; r_c)$. La figure 4.21(b) représente elle la composante perpendiculaire de la vitesse à la position $(2,5r_c; r_c)$.

De ces deux figures, on constate que :

1. les deux simulations à large pas de temps (stationnaire et transitoire) ne renvoient qu'une piètre approximation de la vitesse prédite par le calcul de référence (instationnaire transitoire) ;
2. les simulations instationnaires pures sont en accord avec le calcul de référence.

On peut en déduire que si l'observable considéré est un champ de vitesse, alors ne pas prendre en compte les lâchers de tourbillons a un impact sur la qualité du résultat. Le filtrage par le pas de temps dégrade la précision sur les observables cinétiques. Par contre, pour prédire un champ de vitesse transitoire, il n'est pas nécessaire que la simulation soit transitoire. Si le pas de temps est suffisamment fin, une série de calculs à vitesse d'entrée constante offre une meilleure précision qu'un calcul transitoire à large pas de temps. Sur ce type de calculs donc, lorsque le raffinement temporel est suffisant, d'un point de vue cinétique, le long d'une rampe de vitesse amont, le temps d'établissement du champ de vitesse est très court. Bien entendu, cette analyse est faite pour le cylindre circulaire, et il n'est pas question d'en faire une généralisation ici.

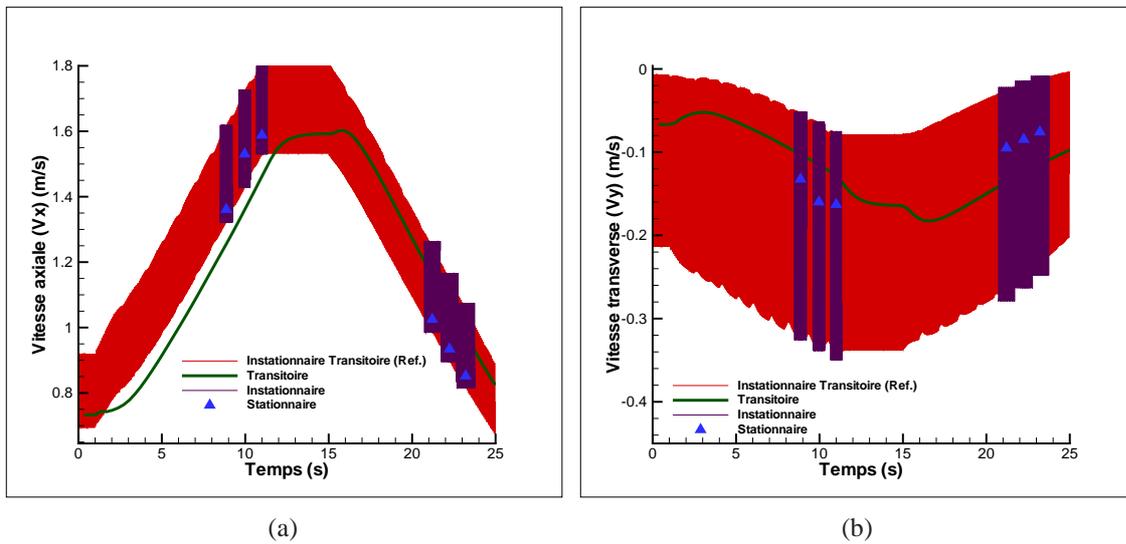


FIG. 4.21 – Comparaison des degrés de raffinement : signaux de vitesse. A gauche, la figure 4.21(a) présente la composante axiale à la position $(2r_c; r_c)$. A droite, 4.21(b) concerne les calculs de vitesse transverse à la position $(2, 5r_c; r_c)$

4.3.3.3 Comparaison des observables thermiques

Lorsque l'on observe par exemple l'évolution d'une température (figure 4.22), ou du flux à travers la surface du cylindre (figure 4.23) consécutive à des sollicitations transitoires, ce constat ne s'applique plus. Sur les figures 4.22 et 4.23, les courbes correspondent aux résultats des deux calculs transitoires (transitoire pur et transitoire instationnaire). Elles sont proches l'une de l'autre. Les valeurs ponctuelles correspondent aux approches quasi-statiques, calculées en régime permanent. Tant que l'état thermique permanent n'est pas atteint par le système, les calculs permanents proposent une approximation de mauvaise qualité des résultats du calcul de référence. La figure 4.24 compare des répartitions de densités de flux calculées en stationnaire et en instationnaire pur, mais en régime permanent. On observe que la répartition du flux de chaleur n'est pas affecté par la simulation ou non des lâchers de tourbillons.

On peut en déduire, que dans notre cas, si notre intérêt se porte sur des observables thermiques, des calculs transitoires sont nécessaires, mais que la simulation des allées tourbillonnaires n'apporte pas un gain significatif. Dans nos simulations, leur impact sur les transferts thermiques est négligeable.

4.3.4 Conclusion partielle

Jusqu'à maintenant, nous avons défini divers degrés de raffinement pour étudier un écoulement en convection forcée, et nous avons une idée de l'impact du choix de la modélisation sur les observables qui nous intéressent.

Dans la suite, nous supposons que l'utilisateur a fait ce choix, et nous proposons une stratégie de réduction de modèle par identification pour trois régimes qui peuvent l'intéresser :

1. régime purement instationnaire,
2. régime transitoire,
3. régime semi-transitoire.

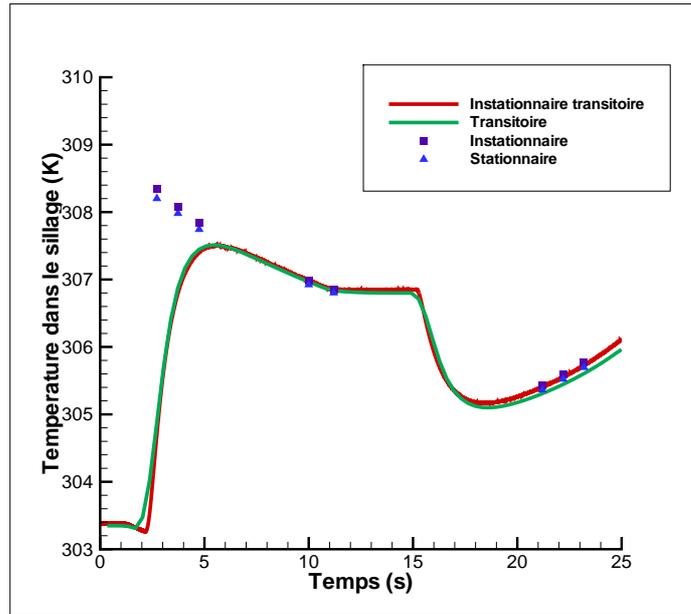


FIG. 4.22 – Comparaison des degrés de raffinement : signaux de température dans le sillage. Les courbes verte et rouge correspondent aux régimes transitoires. Les valeurs ponctuelles indiquent les calculs en régime stationnaire (bleu) ou purement instationnaire (violet) positionnés comme expliqué dans le paragraphe 4.3.3.1. Les températures sont prises à la cellule dont la position est $(1,5r_c; 0)$.

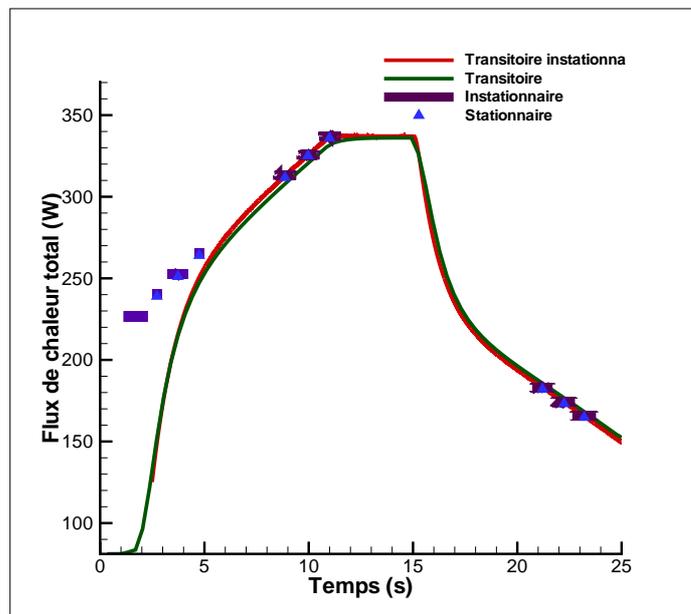


FIG. 4.23 – Comparaison des degrés de raffinement : Flux de chaleur à travers la paroi du cylindre. Les conventions sont celles de la figure 4.22.

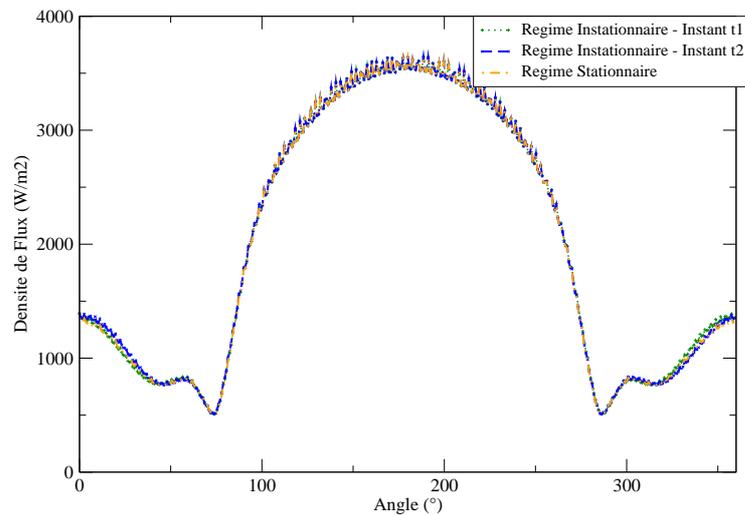


FIG. 4.24 – Comparaison des degrés de raffinement : Comparaison des densités de flux calculées en prenant en compte ou non des lâchers de tourbillons. Vitesse d'entrée de $1,76\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, température imposée de 330K . Le culot correspond à 0° et le point d'arrêt amont à 180° . Les deux courbes représentant le régime instationnaire correspondent à deux instants différents.

4.4 Reproduction et Prédiction des Allées de Kármán

4.4.1 Le phénomène

L'écoulement autour d'un cylindre donne lieu à une concurrence entre les phénomènes visqueux et convectifs. Par exemple, les efforts visqueux auront tendance à atténuer des instabilités, lorsque le transport convectif aura plutôt tendance à les entretenir. Une estimation globale du rapport entre les efforts convectifs et visqueux est donnée par le nombre de Reynolds : plus celui-ci est grand, et plus les efforts convectifs prennent le pas sur les efforts visqueux.

L'écoulement autour du cylindre circulaire est marqué par trois grandes régions à gradients de vitesse qui peuvent favoriser l'apparition d'instabilités spécifiques : le sillage à l'arrière du cylindre, les couches limites attachées au cylindre, et les couches de mélange qui s'en détachent.

Lorsque le nombre de Reynolds devient suffisamment grand (autour de 47), les instabilités des couches de mélange ne peuvent plus être atténuées, et des tourbillons contra-rotatifs alternés apparaissent dans le sillage. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, ceux-ci apparaissent de plus en plus près du cylindre, jusqu'à paraître se détacher des couches limites. On parle alors d'un lâcher de tourbillons alternés. Pour plus d'explications sur la mécanique des lâchers tourbillonnaires, on peut lire l'article de Williamson [1].

Il s'agit d'un phénomène périodique dont la fréquence est liée au nombre de Reynolds et au diamètre du cylindre (*c.f.* [3, 5, 10] par exemple). Lorsque l'écoulement est anisotherme, on observe un effet thermique sur la fréquence des lâchers de tourbillons. Cependant, Vit *et al.* [19] et Wang *et al.* [17] montrent que les variations de température modifient le nombre de Reynolds effectif à l'approche du cylindre. La fréquence des lâchers reste ainsi liée à la géométrie du cylindre et au nombre de Reynolds "ressenti" par l'écoulement, quels que soient les niveaux de température.

Aux nombres de Reynolds auxquels nous nous intéresserons, les lâchers tourbillonnaires sont tridimensionnels (la figure 4.25 en est une illustration). Il existe plusieurs "modes" de tridimensionalité aux origines spécifiques. Une description de ces effets et des hypothèses quant à l'origine des instabilités qui leur donnent naissance peuvent être trouvées dans les articles de

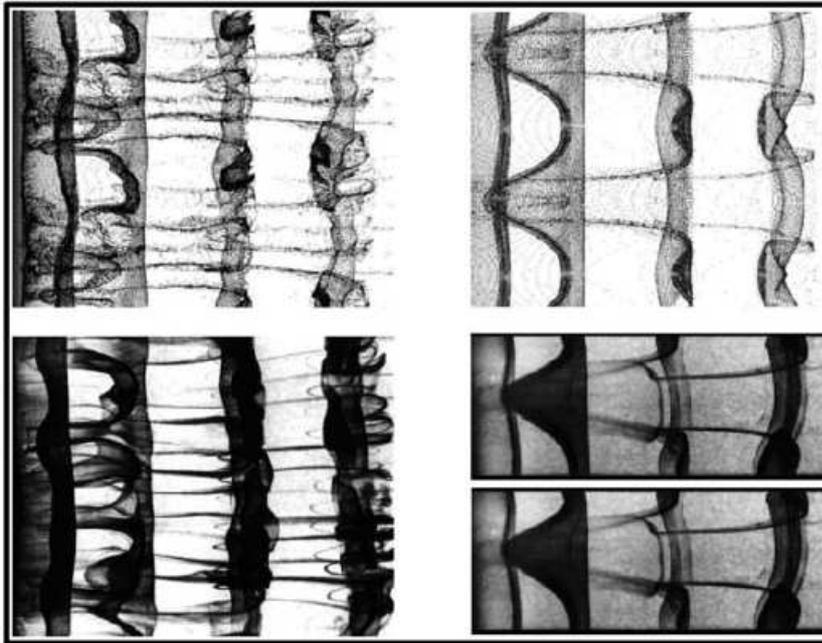


FIG. 4.25 – En haut, visualisation d'un lâcher de particules à partir d'une simulation numérique, en dessous, observations de Williamson [1, 26]. Les images de gauche et de droite illustrent l'existence d'au moins deux modes de lâchers tridimensionnels. Image de Thomson [9]

Williamson [26], de Thomson *et al.* [9], et de Leweke et Williamson [6]. Bien que conscients de cette tridimensionalité, nous présenterons des résultats obtenus à l'aide de simulations uniquement bidimensionnelles. A priori, la difficulté majeure de la réduction de modèle par identification des allées de Kármán ne réside pas dans leur tridimensionalité, mais plutôt dans le fait que l'instantanéité n'est pas forcée par les conditions aux limites. Par contre, la troisième dimension spatiale implique des calculs CFD plus longs et plus difficiles à post-traiter que des calculs bidimensionnels. Nous allons donc mettre en place la méthodologie d'identification de modèles réduits relatifs aux lâchers tourbillonnaires en l'appliquant à des calculs 2D. Le passage au 3D serait une perspective intéressante, mais a priori pas plus difficile dans la mise en œuvre.

4.4.2 Objectifs et Contexte

Nous avons vu au paragraphe 4.3.3 en comparant différents types de simulations, qu'adapter le pas de temps de simulation aux lâchers de tourbillons n'a un effet significatif dans notre cas que lorsque les observables sont cinétiques. Pour des observables thermiques, l'aspect transitoire de la simulation est bien plus important que son aspect instationnaire. Nous mettons en place ici une méthodologie pour construire un modèle réduit qui prend en compte les lâchers tourbillonnaires. Nous limiterons donc la méthodologie à des observables cinétiques.

L'application des méthodes de réduction de type MIM au cas du sillage instationnaire du cylindre circulaire doit permettre de :

1. reproduire un signal de vitesse périodique fourni par un modèle détaillé, pour une condition de vitesse d'entrée constante ;
2. extrapoler ce même signal pour des durées plus importantes tout en restant stable ;
3. prévoir quel serait le signal périodique correspondant à une vitesse d'entrée ne faisant pas partie des échantillons disponibles.

Lorsque ces travaux ont débuté, les seuls modèles réduits identifiés dans le cadre de la méthode d'identification modale dépendant du temps étaient transitoires : les observables évoluaient au cours du temps parce que les conditions aux limites étaient transitoires. Jusque là, aucun modèle réduit intrinsèquement instationnaire n'avait été produit par une méthode d'identification modale. En trouver un purement instationnaire par identification constitue donc un objectif nouveau.

Les approches de décomposition orthogonale en modes propres POD se prêtent particulièrement bien à l'extraction des structures que sont les allées de Kármán. Ainsi de nombreux travaux de réduction de modèle basés sur la POD concernent la reproduction de sillages instationnaires. On peut citer parmi tant d'autres les travaux de Galletti *et al.* [27], de Mokhasi et Rempfer [28], de Bergmann *et al.* [29], de Sirisup et Karniadakis [30] et de Deane et Mavriplis [31]. Dans [32], Hamdouni *et al.* présentent eux aussi un tel modèle réduit.

Nous avons cependant trouvé peu de publications concernant des modèles réduits POD de sillage instationnaire qui prennent en entrée une vitesse amont quelconque (troisième objectif). De nombreux travaux expérimentaux proposent des lois d'évolution du nombre de Strouhal du lâcher tourbillonnaire en fonction du nombre de Reynolds. Pour cette raison, un modèle réduit liant simplement un nombre de Reynolds quelconque à un sillage instationnaire peut paraître ne revêtir que peu d'intérêt lorsque l'on traite d'un cylindre circulaire. Par contre, les méthodologies de reconstruction paramétrée d'un sillage instationnaire pourraient s'appliquer à d'autres géométries. A la connaissance de l'auteur, seuls Galletti *et al.* [33] et Deane *et al.* [34] proposent un modèle réduit POD qui, pour différents nombres de Reynolds, construisent un sillage instationnaire. Johansson *et al.* [35] construisent également un modèle de type POD instationnaire pour des écoulements de canal dont le nombre de Reynolds est l'entrée du modèle. Dans ce modèle, les auteurs proposent de récupérer les modes POD construits pour un nombre de Reynolds proche, et d'estimer leurs amplitudes via une projection Galerkin.

4.4.3 Reproduction d'un signal périodique unique (V_∞ fixée)

4.4.3.1 Echantillonnage

Pour une vitesse d'entrée fixée V_∞ , on essaie de proposer un modèle réduit produisant des signaux de vitesse instationnaires correspondant à V_∞ .

Les données d'échantillonnage sont formées des valeurs temporelles du champ de vitesse, pour une vitesse d'entrée $V_\infty = 1,50\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui correspond à un nombre de Reynolds de 2050. Pour accélérer la construction du modèle réduit, on a limité le nombre d'observables aux composantes de vitesse en 4375 positions dans le sillage. Ces positions sont indiquées par la figure 4.26.

En supposant que le nombre de Strouhal vaut 0,2, une période de lâcher $\tau^\sim = 0,0667\text{s}$ est estimée a priori. Le pas de temps de la simulation est alors choisi en conséquence : $\Delta t = \tau^\sim/32 = 0,00218\text{s}$. Une simulation numérique fournit les évolutions des observables sur une durée $10\tau^\sim$, d'environ 10 périodes de lâchers.

4.4.3.2 Identification

L'identification consiste à déterminer un modèle réduit qui permette de reconstruire les signaux issus de l'échantillonnage. La forme choisie pour ce modèle correspond à l'équation (3.56) du paragraphe 3.3.10.3. Ici, $V_{(\partial\Omega)}$ et $Psi_v^{(\partial\Omega)}$ s'écrivent simplement V_∞ et V_∞^2 :

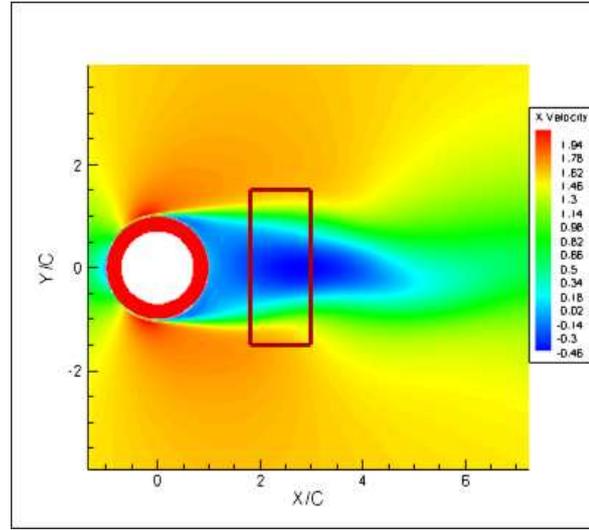


FIG. 4.26 – La construction du modèle réduit est limitée aux signaux de vitesse dans les cellules comprises dans le rectangle $[1, 8r_c; 2, 5r_c] \times [-1, 5r_c; 1, 5r_c]$.

$$\mathcal{E}_r^v : \frac{d}{dt} s_v + d_v s_v + (b_{v1} s_v \bullet b_{v2} s_v) + a_v^\infty V_\infty + b_v^\infty V_\infty^2 = 0 \quad (4.8a)$$

$$y_v^* = h_v s_v \quad (4.8b)$$

Il s'agit de trouver par un processus d'optimisation stochastique, une équation d'état différentielle \mathcal{E}_r^v , dont la solution constitue un système oscillant. Dans la mesure où l'on doit résoudre une équation différentielle, se pose l'épineux problème du choix de l'état initial. Comme il n'existe pas de contrainte ou de simplification particulière pour l'état initial des observables, il est difficile d'en concevoir une pour l'état initial des fonctions de base s_v . Pour cette raison, on agit similairement pour l'état réduit à ce qui est fait pour la simulation numérique. Un état réduit initial est choisi arbitrairement (il vaut 1, 0), et on laisse au signal y^* du modèle réduit suffisamment de temps pour s'établir. Passé un certain laps de temps, la qualité de y^* est alors évaluée par comparaison avec les signaux du calcul CFD. La figure 4.27 illustre ce processus.

On identifie ainsi un modèle réduit d'ordre 6 qui permet de reconstruire avec fidélité les signaux des deux composantes de vitesse en n'importe laquelle des 4375 positions qui ont fourni des données pour l'échantillonnage. La figure 4.28 illustre cette capacité. Le nombre de degrés de liberté du modèle CFD dépasse lui 1 300 000 (vitesse, pression, k et ω en 262 000 cellules).

Le tableau 4.1 donne quelques détails quant à la structure du modèle réduit choisi.

Au final, le modèle réduit semble donner satisfaction, et reproduire avec exactitude les signaux de vitesse sur toute la durée de l'échantillonnage, soit une dizaine de périodes de lâchers.

La question qui se pose maintenant est de savoir si la réponse du modèle réduit reste stable sur des durées nettement plus longues que les 10 périodes sur lesquelles il a été identifié.

4.4.3.3 Stabilité du modèle

Ce modèle qui vient d'être construit ne répond pas aux objectifs fixés dans la mesure où on ne peut pas l'utiliser pour une autre vitesse d'entrée. Cependant, quelques-unes de ses propriétés méritent d'être notées.

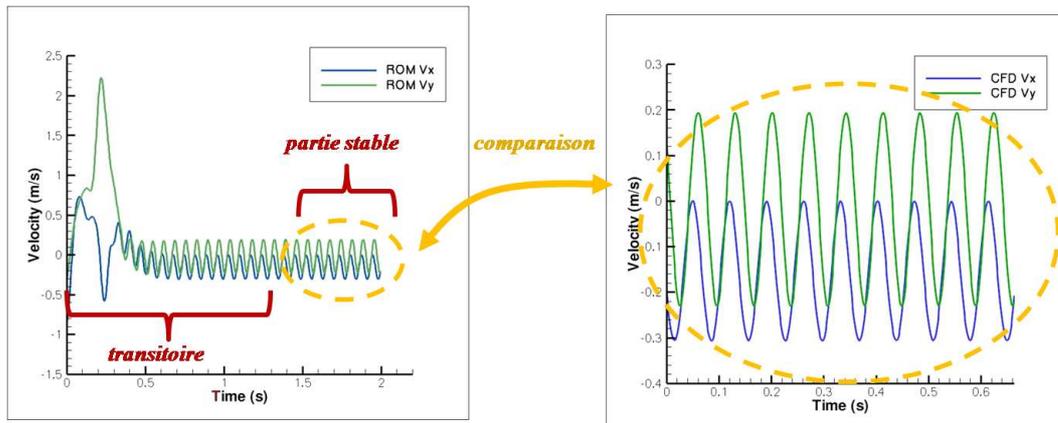


FIG. 4.27 – Méthode de comparaison. A droite, des signaux de vitesse de référence à la position $(2, 8r_c; 0, 45r_c)$. L'échantillonnage dure $0,663s$. A gauche, la réponse du modèle réduit sur $3 \times 0,663s$. On laisse au modèle réduit le temps de s'établir, et on le compare au modèle de référence uniquement sur les $0,663$ dernières secondes de sa réponse.

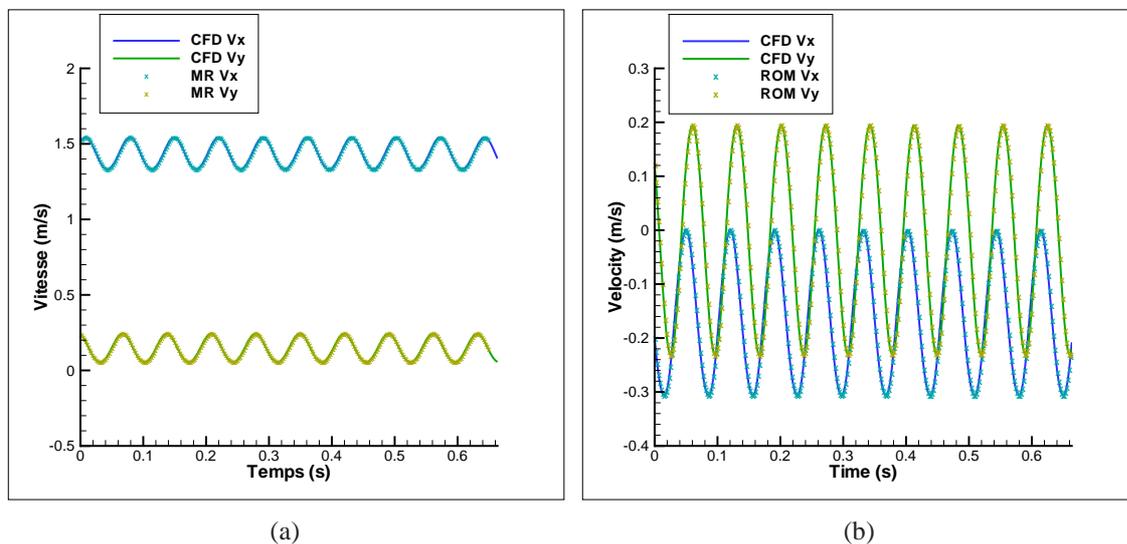


FIG. 4.28 – Reproduction des signaux de vitesse échantillonnées à un nombre de Reynolds de 2050. A gauche, la figure 4.28(a) concerne la position $(2, 6r_c; -1, 2r_c)$. A droite, la figure 4.28(b) correspond à la position $(2, 8r_c; 0, 45r_c)$

TAB. 4.1 – Composition du modèle réduit de lâcher tourbillonnaire, et détails de construction.

Type de modèle	cinétique instationnaire
Structure	Equation (3.56)
Ordre	6
Nombre d'entrées	1
Nombre de composantes (équation d'état)	
Total	90
Part linéaire d_v	6
Part non linéaire b_{v1}, b_{v2}	2×36
Commande linéaire a_v^∞	6
Commande non linéaire b_v^∞	6
Nombre d'observables	4375
Nombre d'échantillons	1
Nombre de pas de temps	320
Pas de temps	0,00208 s

1. C'est un modèle stable. Le processus d'identification a, lui, directement abouti à un système stable, sans qu'il y ait eu besoin de prendre de mesure particulière. La figure 4.29 présente des diagrammes de phase de composantes de l'état réduit réalisés au bout d'environ 20000 périodes de détachements tourbillonnaires.
2. Il n'y a pas de biais, ni en amplitude, ni en fréquence. La figure 4.30 présente trois spectres de champ de vitesse très proches, l'un réalisé après 1000 périodes, un autre fait après 10000 périodes, et le dernier après 20000 périodes. On y observe que les trois signaux ont des signatures spectrales proches. Le même type de résultats est présenté par le tableau 4.2, qui concerne, lui, des valeurs moyennes et des amplitudes. Sur au moins 20000 périodes, les valeurs moyennes évoluent peu, et les amplitudes restent inchangées.

TAB. 4.2 – Comparaison des valeurs moyennes et des amplitudes de signaux de 100 périodes, calculés après 1000, 10000 et 20000 périodes, à la cellule $(2, 5r_c; r_c)$. Les valeurs sont exprimées en $m.s^{-1}$, et les amplitudes sont calculées comme la différence entre les valeurs maximale et minimale des signaux.

Après ...	V_x moyen	Amplitude V_x	V_y moyen	Amplitude V_y
1000 périodes	0.7571	0.3973	-0.0990	0.2576
10000 périodes	0.7592	0.3973	-0.0944	0.2576
20000 périodes	0.7596	0.3973	-0.0982	0.2576

3. Les fréquences des signaux de vitesse fournis par le modèle réduit restent en accord avec celles des signaux proposés par le modèle détaillé, même sur des durées plus importantes que les 10 périodes utilisées pour construire le modèle. Sur la figure 4.31, on compare les spectres de deux signaux de 100 périodes de lâchers. L'un de ces signaux a été calculé avec le code CFD, alors que l'autre correspond aux 100 dernières périodes d'un signal de 20000 périodes calculé par le modèle réduit.

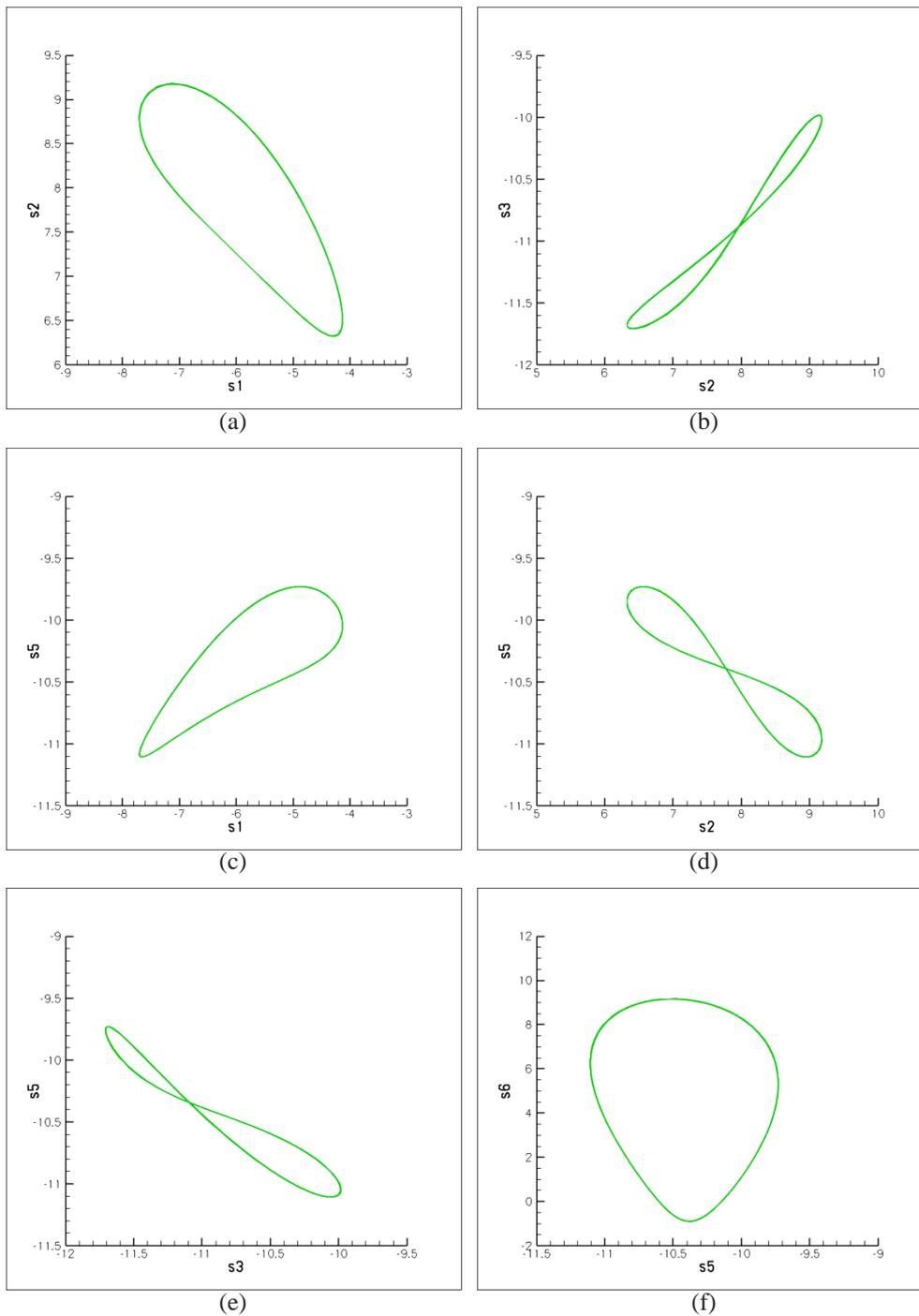


FIG. 4.29 – Modèle réduit de sillage instationnaire construit pour un nombre de Reynolds de 2050. Les diagrammes de phase retracent l'évolution au cours du temps d'une composante de l'état réduit par rapport à une autre. Ces diagrammes de phase correspondent à environ 20000 périodes. Ils montrent que les composantes de l'état réduit restent bien périodiques sur des durées dépassant largement les 10 périodes de l'échantillonnage.

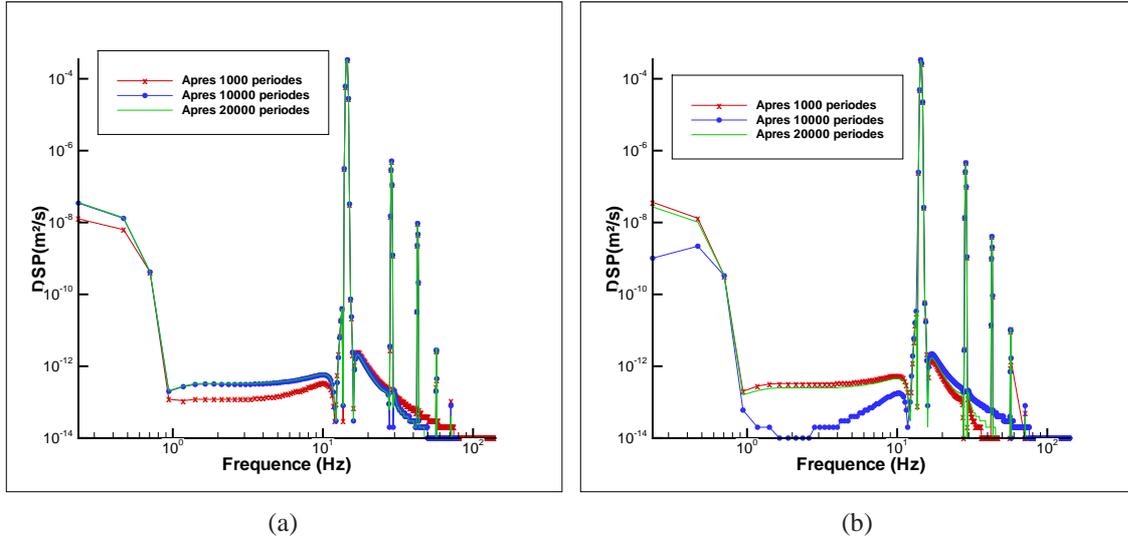


FIG. 4.30 – Identification d’une allée de Kármán. La signature spectrale des signaux produits par le modèle réduit ne varie pas au cours du temps. Ici sont présentées les densités spectrales de puissance des signaux obtenus par le modèle réduit. Sur chaque figure, trois spectres correspondent à trois instants différents : $t_0 + 1000$ périodes, $t_0 + 10000$ périodes et $t_0 + 20000$ périodes. Les figures 4.30(a) (vitesse axiale) et 4.30(b) (vitesse transverse) correspondent à la position $(2, 6r_c; -1, 2r_c)$.

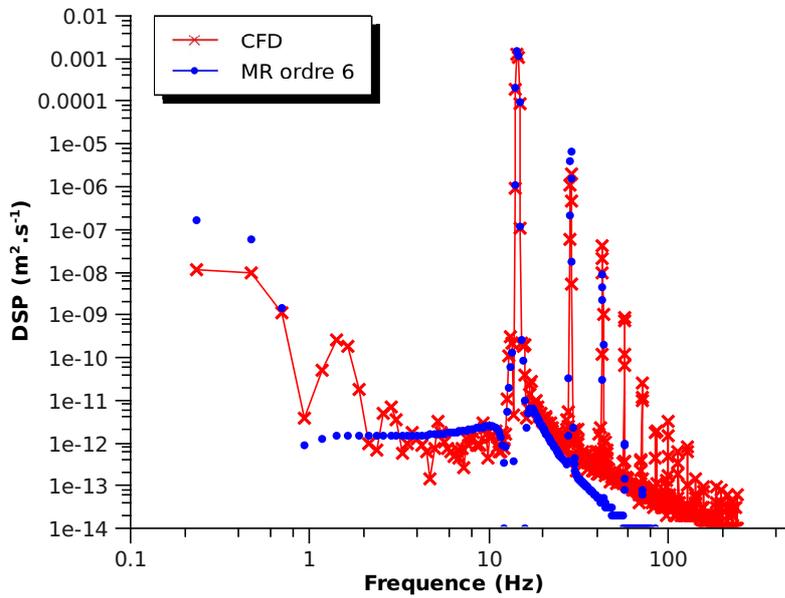


FIG. 4.31 – Modèle réduit de reproduction de lâchers tourbillonnaires. Spectres de signaux de 100 périodes, obtenus soit par le calcul CFD, soit par le modèle réduit. Les signaux sont pris en $(2, 5r_c; r_c)$.

Ainsi, sur au moins 20000 périodes de lâchers de tourbillons, les spectres des signaux de vitesse proposés par le modèle réduit restent précis.

On dispose donc d'un modèle capable de prévoir le comportement à long terme du sillage instationnaire pour une vitesse amont de $1,5\text{m.s}^{-1}$. Il est néanmoins important d'indiquer ce que sa construction a coûté, et ce qu'elle permet de faire gagner.

4.4.3.4 Considérations sur le coût du modèle réduit

Les deux composantes du coût de la construction du modèle réduit que nous venons de mettre en place sont :

- l'obtention des données de référence via un calcul CFD,
- le processus d'identification en lui-même.

Concernant la simulation CFD, l'obtention des 10 périodes de sillage ayant fourni l'échantillonnage nécessite d'abord l'obtention d'un sillage périodique. On peut considérer qu'il faille simuler une cinquantaine de périodes pour récupérer l'échantillonnage dont on a besoin.

Le processus d'identification est gourmand en ressources CPU dans la mesure où il est basé sur une méthode d'optimisation globale. Son coût dépend notamment des nombres d'observables, de pas de temps, d'évaluations de fonctionnelles et de l'ordre du modèle.

En définitive, le tableau 4.3 présente le bilan de la construction du modèle en termes de ressources CPU. Les deux étapes sont parallélisées mais le tableau présente les ressources totales.

TAB. 4.3 – Coûts de construction du modèle réduit reproduisant les allées de Kármán à un nombre de Reynolds de 2050.

Coût d'échantillonnage	60 heures CPU
Coût de réduction	370 heures CPU
Coût total	430 heures CPU

Ces valeurs sont à prendre avec circonspection. En particulier, le temps d'identification du modèle réduit correspond à un premier essai, et peut certainement être drastiquement réduit en rendant le processus plus mature et automatique.

Une fois construit, le modèle réduit coûte beaucoup moins cher à utiliser que le solveur CFD. Par exemple, 400000s CPU ont été nécessaires au solveur CFD pour produire les 100 périodes qui ont servi à la validation. Le modèle réduit lui, met une vingtaine de secondes CPU pour produire 20000 périodes.

Nous venons donc de voir qu'il est possible, par identification, de construire un modèle réduit intrinsèquement instationnaire. Mais nous n'avons pas encore atteint notre objectif. Il faut encore produire un modèle réduit permettant de prévoir le détachement tourbillonnaire quelle que soit la vitesse d'entrée du fluide.

4.4.4 Lâcher tourbillonnaire dépendant de la vitesse d'entrée

4.4.4.1 Objectif

On cherche un modèle permettant de prévoir le détachement tourbillonnaire quelle que soit la vitesse d'entrée entre $1,5$ et $3,0\text{m.s}^{-1}$. Comme dans le cas précédent, on s'attachera à vérifier que ses réponses restent stables au cours du temps.

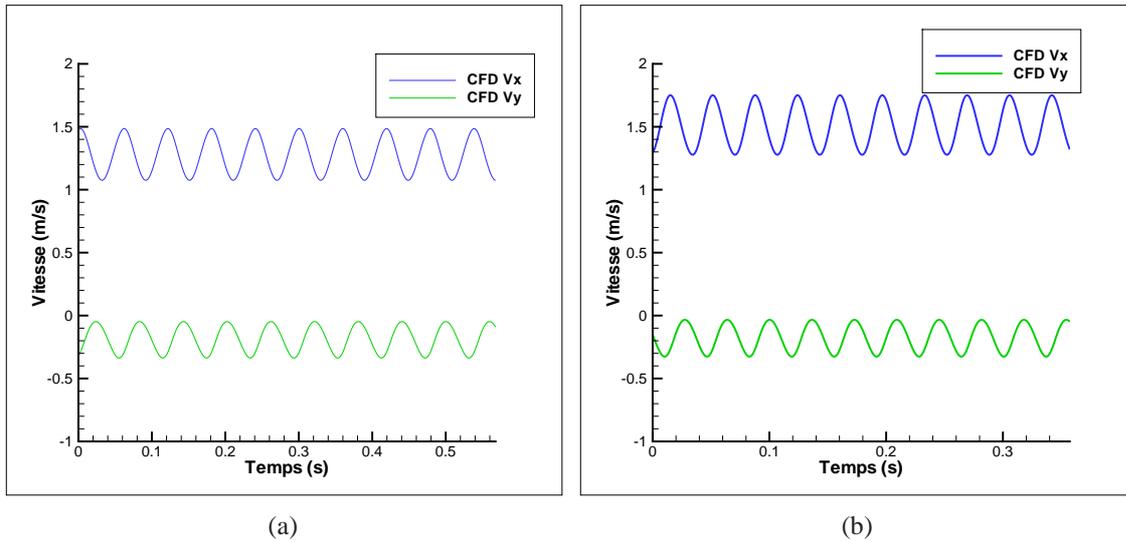


FIG. 4.32 – Exemples de signaux d’échantillonnage pour la construction du modèle réduit de lâchers de tourbillons. Les figures 4.32(a) et 4.32(b) correspondent chacune aux deux composantes de la vitesse aux positions $(2, 8r_c; r_c)$ (nombre de Reynolds 2405) et $(2, 5r_c; r_c)$ (nombre de Reynolds 3826) respectivement.

4.4.4.2 Echantillonnage

Pour 7 écoulements correspondant à 7 vitesses d’entrée différentes, on a recueilli les signaux de vitesse sur environ 10 périodes de lâcher tourbillonnaire. Comme dans le paragraphe précédent, les pas de temps de calcul ont été déterminés à partir d’une estimation a priori des périodes de détachement tourbillonnaire. Le tableau 4.4 liste les vitesses d’entrée ayant servi de points d’échantillonnage, les nombres de Reynolds correspondant, les pas de temps utilisés et les périodes déterminées a posteriori, des simulations effectuées. La figure 4.32 donne deux exemples de signaux de vitesse périodiques. Pour limiter les ressources CPU exigées par l’identification, les observables du modèle se réduisent aux composantes du champ de vitesse en 233 cellules situées dans le rectangle $[2, 5r_c; 3, 0r_c] \times [-1, 5r_c; 1, 5r_c]$.

TAB. 4.4 – Echantillonnage des données de référence pour le modèle réduit de lâcher de tourbillons. Correspondance entre les valeurs de vitesse amont V_∞ , leur nombre de Reynolds, les pas de temps utilisés pour générer les données, et les périodes effectives de lâchers, calculées a posteriori.

Vitesse d’entrée	Reynolds	Pas de temps de simulation	Période des lâchers tourbillonnaires
$1, 5\text{m.s}^{-1}$	2050	0,00208s	0,06978s
$1, 61\text{m.s}^{-1}$	2200	0,00194s	0,06403s
$1, 76\text{m.s}^{-1}$	2405	0,00178s	0,05875s
$2, 05\text{m.s}^{-1}$	2802	0,00152s	0,05017s
$2, 35\text{m.s}^{-1}$	3217	0,00133s	0,04612s
$2, 8\text{m.s}^{-1}$	3826	0,00112s	0,03581s
$2, 95\text{m.s}^{-1}$	4031	0,00106s	0,03389s

4.4.4.3 Identification

Un modèle réduit d'ordre 6 a été construit par identification pour reproduire les signaux échantillonnés. Il s'agit d'un jeu de 6 équations différentielles couplées par des termes quadratiques, dont les solutions aux différents points d'échantillonnage sont des systèmes oscillants. La figure 4.33 présente des comparaisons entre des signaux d'échantillonnage, et les réponses correspondantes du modèle réduit.

Quelques détails concernant ce modèle réduit sont repris dans le tableau 4.5.

TAB. 4.5 – Composition du modèle réduit de lâcher tourbillonnaire dépendant de la vitesse d'entrée, et détails de construction.

Type de modèle	cinétique instationnaire
Structure	Equation (3.56)
Ordre	6
Nombre d'entrées	1
Nombre de composantes (équation d'état)	
Total	90
Part linéaire d_v	6
Part non linéaire b_{v1}, b_{v2}	2×36
Commande linéaire a_v^∞	6
Commande non linéaire b_v^∞	6
Nombre d'observables	233
Nombre d'échantillons	7
Nombre de pas de temps	320

Relativement aux résultats obtenus lors de l'identification du modèle au nombre de Reynolds de 2050 (paragraphe 4.4.3), les résultats de l'identification restent bons :

1. Les fréquences sont bien reproduites. Les figures 4.34 présentent chacune deux spectres de vitesse réalisés sur les 10 périodes ayant servi à l'échantillonnage. L'un provient des données CFD utilisées pour identifier le modèle réduit. L'autre est un spectre du champ de vitesse proposé par le modèle réduit pour reproduire ces données. Les fréquences des fondamentaux et l'énergie qu'ils transportent sont identiques pour les deux modèles (réduit et CFD). Cet accord sur les fréquences se transmet même aux harmoniques : les fréquences de celles prévues par le modèle réduit sont exactement celle prévues par le calcul CFD. L'erreur faite sur les amplitudes des signaux transparait dans l'erreur faite sur l'énergie que transportent ces harmoniques.
2. Les valeurs moyennes des signaux correspondent bien. Le tableau 4.6 est une liste des valeurs moyennes que prend ce signal pour les sept écoulements d'échantillonnage, et de celles que propose le modèle réduit.
3. les amplitudes proposées par le modèle réduit peuvent être sensiblement différentes de celles fournies par le modèle détaillé. Le tableau 4.7 propose des comparaisons entre les amplitudes de signaux de vitesse transverse à la position $(2, 5r_c; r_c)$, tels qu'ils sont calculés par le code CFD ou le modèle réduit.

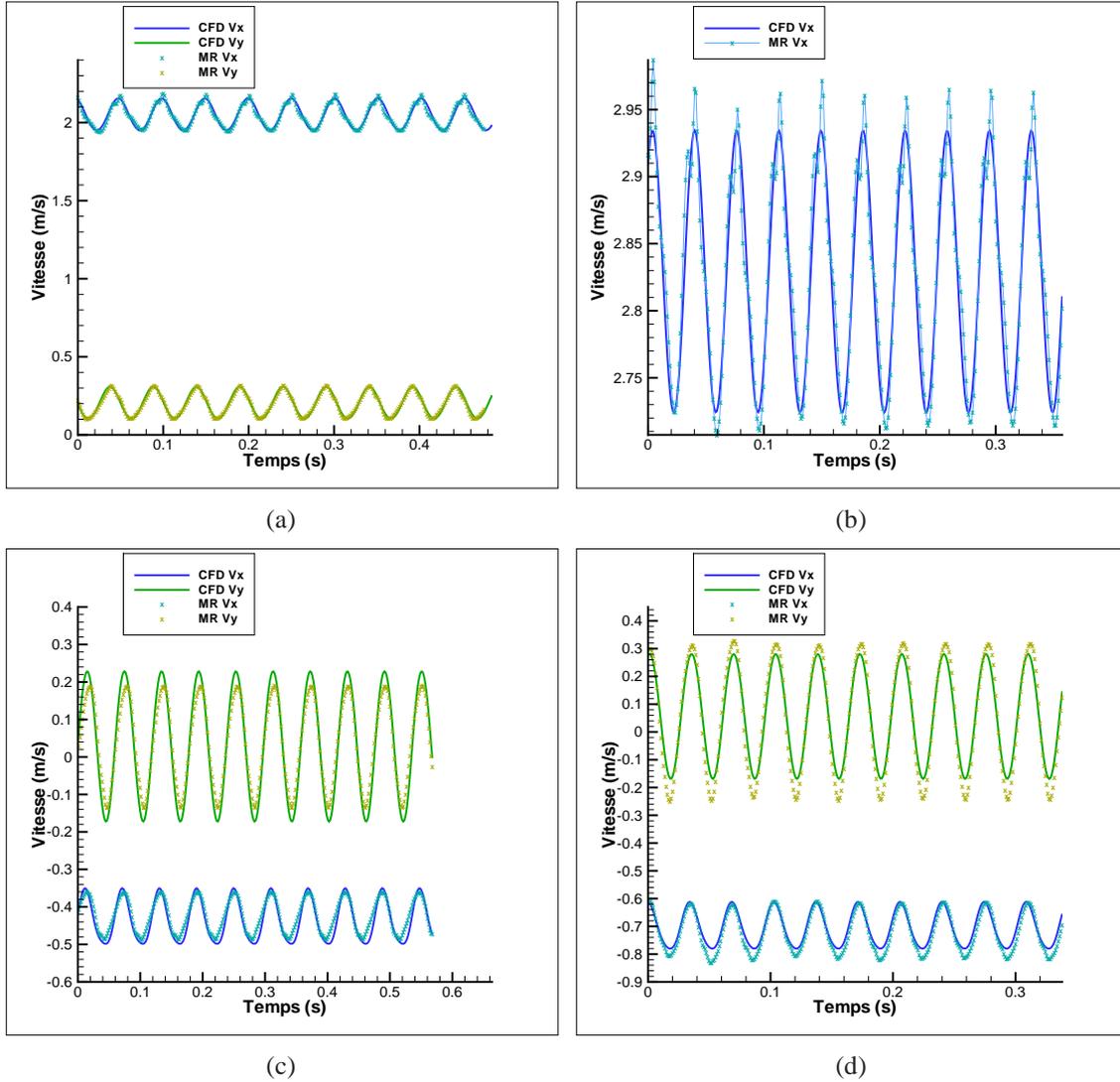


FIG. 4.33 – Le modèle réduit est construit pour reproduire les signaux de vitesse proposés par le code CFD. Ici on présente des évolutions de composantes du champ de vitesse, telles qu’elles ont été calculées (CFD) ou reproduites (modèle réduit). Les figures 4.33(a) (nombre de Reynolds de 2802) et 4.33(b) (nombre de Reynolds de 3826) sont des signaux prélevés à la position $(2, 7r_c; -1, 2r_c)$. Les figures 4.33(c) (nombre de Reynolds de 2405) et 4.33(d) (nombre de Reynolds de 4031) correspondent à la position $(2, 5r_c; 0, 2r_c)$.

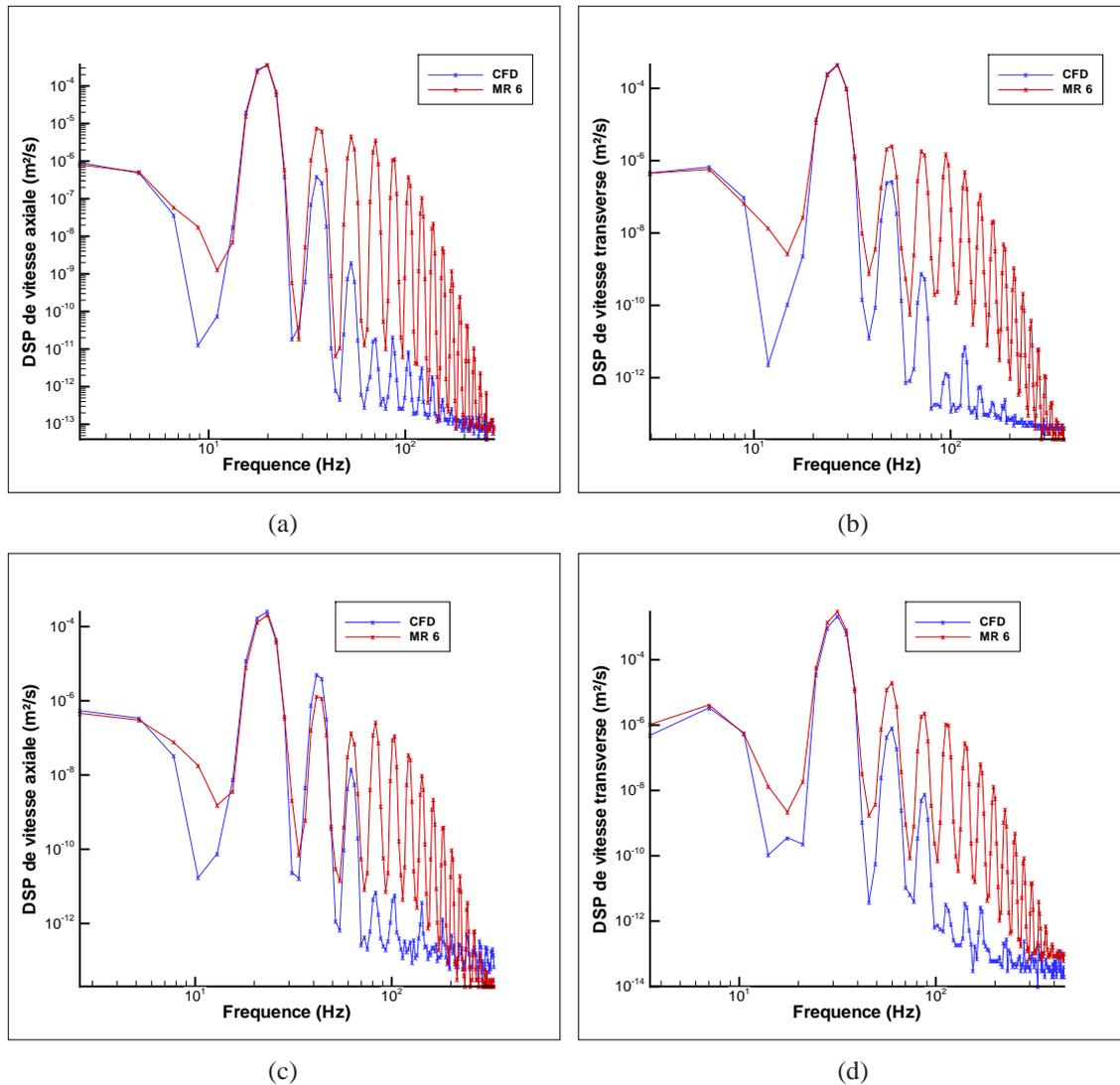


FIG. 4.34 – Identification de modèle réduit de lâchers tourbillonnaires - Sur chaque figure on trouve le spectre de puissance de signaux fournis par le solveur CFD. Le processus d'identification aboutit à un modèle réduit qui reproduit ces signaux. Sur chaque figure on trouve également, pour comparaison, le spectre du signal correspondant proposé par ce modèle réduit. La fréquence des lâchers de tourbillons est bien reproduite, ainsi que les positions des harmoniques. Par contre, les quantités d'énergie transportées par les harmoniques sont mal évaluées par le modèle réduit. Les signaux ont été récupérés à la position $(2, 7r_c; -1, 2r_c)$ pour les figures 4.34(a) (nombre de Reynolds de 2405) et 4.34(b) (nombre de Reynolds de 3212), et à la position $(2, 5r_c; 0, 2r_c)$ pour les figures 4.34(c) (nombre de Reynolds de 2802) et 4.34(d) (nombre de Reynolds de 3826).

TAB. 4.6 – *Modèle réduit instationnaire paramétré par la vitesse d'entrée : Comparaisons des valeurs moyennes calculées (CFD) et reconstruites (modèle réduit) de la composante transverse de la vitesse en $(2,5r_c; r_c)$, aux points d'échantillonnage.*

Vitesse d'entrée	Reynolds	Calcul CFD	Modèle réduit
$1,5\text{m.s}^{-1}$	2050	-0.0976m.s^{-1}	-0.0865m.s^{-1}
$1,61\text{m.s}^{-1}$	2200	-0.0939m.s^{-1}	-0.0940m.s^{-1}
$1,76\text{m.s}^{-1}$	2405	-0.1024m.s^{-1}	-0.1040m.s^{-1}
$2,05\text{m.s}^{-1}$	2802	-0.1263m.s^{-1}	-0.1244m.s^{-1}
$2,35\text{m.s}^{-1}$	3212	-0.1421m.s^{-1}	-0.1457m.s^{-1}
$2,8\text{m.s}^{-1}$	3826	-0.1755m.s^{-1}	-0.1776m.s^{-1}
$2,95\text{m.s}^{-1}$	4031	-0.1868m.s^{-1}	-0.1879m.s^{-1}

TAB. 4.7 – *Modèle réduit instationnaire paramétré par la vitesse d'entrée : Comparaisons des amplitudes calculées (CFD) et reconstruites (modèle réduit) de la composante transverse de la vitesse en $(2,5r_c; r_c)$, aux points d'échantillonnage.*

Vitesse d'entrée	Calcul CFD	Modèle réduit
$1,5\text{m.s}^{-1}$	0.2589m.s^{-1}	0.2018m.s^{-1}
$1,61\text{m.s}^{-1}$	0.2512m.s^{-1}	0.2144m.s^{-1}
$1,76\text{m.s}^{-1}$	0.2642m.s^{-1}	0.2311m.s^{-1}
$2,05\text{m.s}^{-1}$	0.2813m.s^{-1}	0.2627m.s^{-1}
$2,35\text{m.s}^{-1}$	0.2909m.s^{-1}	0.2946m.s^{-1}
$2,8\text{m.s}^{-1}$	0.2930m.s^{-1}	0.3420m.s^{-1}
$2,95\text{m.s}^{-1}$	0.2934m.s^{-1}	0.3578m.s^{-1}

4.4.4.4 Stabilité du modèle aux points d'échantillonnage

Tout comme le modèle réduit instationnaire identifié au paragraphe 4.4.3 pour une vitesse d'entrée unique de $1,5\text{m.s}^{-1}$, le modèle que nous avons identifié reste stable lorsqu'il est utilisé sur des durées beaucoup plus longues que les 10 périodes de lâchers pour lesquelles il avait été initialement construit.

Lorsque l'on trace, comme sur la figure 4.35, les 10 dernières périodes d'un signal qui en compte 20000, elles sont peu différentes de 10 périodes d'un signal calculé par le code CFD. Même si l'erreur commise sur les amplitudes des signaux ne se résorbe pas avec le temps, les valeurs moyennes continuent d'être bien reproduites.

De façon similaire, les fréquences des signaux restent constantes lorsque le modèle réduit est utilisé sur des durées très longues. La figure 4.36 présente des spectres de signaux de vitesse en différentes positions, pour différents points d'échantillonnage. Ils ont été tous réalisés avec environ 100 périodes de signal, mais au terme soit de 1000, soit de 10000, ou soit de 20000 périodes. A chaque fois, les signatures spectrales des signaux de vitesse restent inchangées au cours du temps.

La stabilité du modèle peut être également illustrée par l'examen des diagrammes de phase. Ceux de la figure 4.37 montrent, qu'en chaque point d'échantillonnage, les composantes de l'état réduit s_v évoluent de façon périodique au cours du temps. Les diagrammes représentés correspondent à une durée de 20000 périodes.

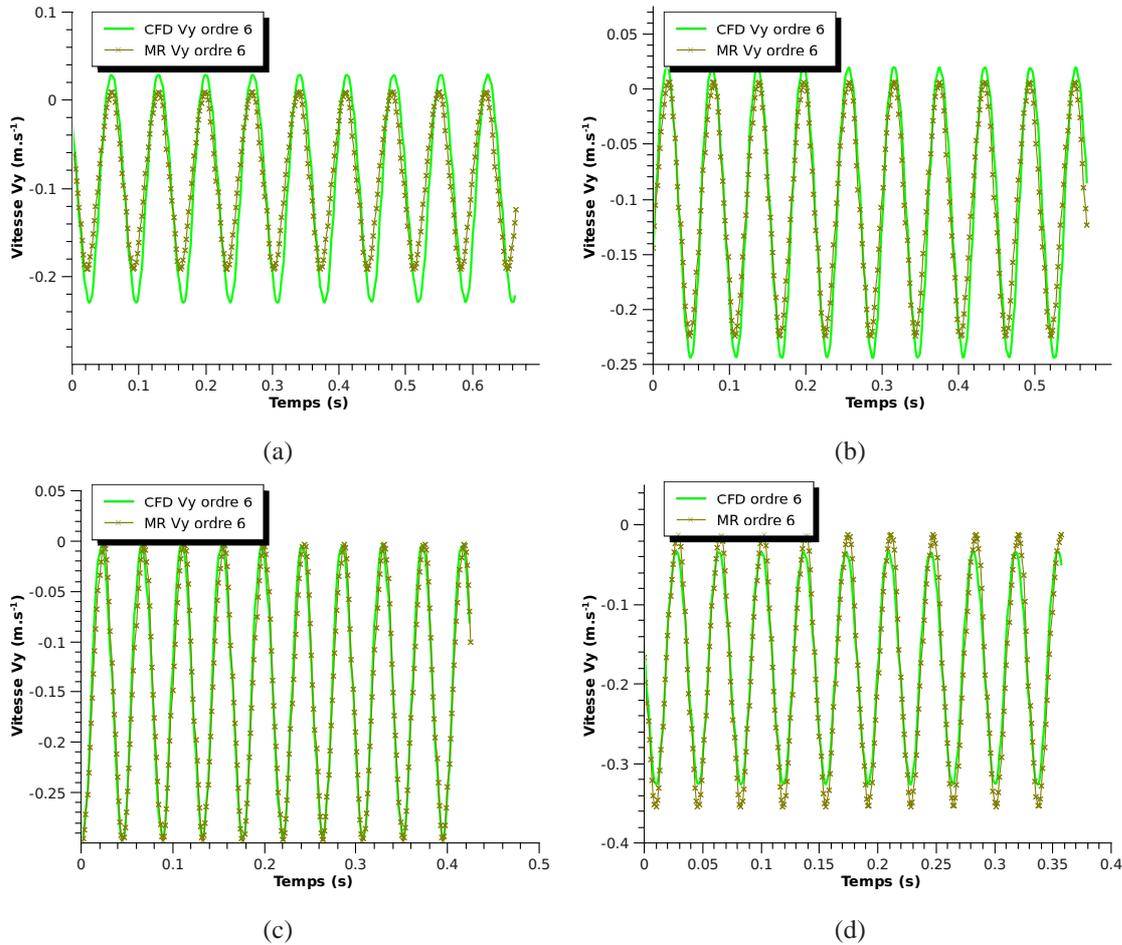


FIG. 4.35 – Modèle réduit de lâchers de tourbillons. Sur chaque figure, deux courbes sont présentées. L'une d'entre elles est une évolution au cours du temps, pour des écoulements d'échantillonnage, de la vitesse dans le sillage du cylindre, calculée par le code CFD sur 10 périodes de lâchers. La seconde est un signal de 10 périodes, calculé par le modèle réduit après une durée de 20000 périodes. Ainsi, sur cet intervalle de temps, le signal proposé par le modèle réduit reste équivalent à celui calculé par le solveur CFD. Les champs de vitesse sont pris à la position $(2,5r_c; r_c)$, et les figures correspondent respectivement aux écoulements dont les nombres de Reynolds valent 2050, 2405, 3212 et 3826.

4.4.4.5 Performances du modèle réduit ailleurs qu'aux points d'échantillonnage

L'un des objectifs de la construction du modèle réduit est de pouvoir prédire des signaux de vitesse quelle que soit la vitesse amont de l'écoulement, lorsque celle-ci est comprise entre $1,5$ et $3,0\text{m.s}^{-1}$. Pour le moment, nous avons montré qu'il est possible de construire un modèle qui

1. reproduit un échantillonnage constitué de séries de 10 périodes de lâchers de tourbillons dans le sillage du cylindre ;
2. extrapole ces signaux de vitesse pour des durées beaucoup plus importantes.

Cependant, nous n'avons pas encore montré que, lorsque l'on se place ailleurs qu'aux points d'échantillonnage, le modèle réduit parvient à prévoir quel est le comportement du sillage. Pour tester les performances du modèle, quatre simulations de lâchers tourbillonnaires supplémentaires ont été réalisées. Le tableau 4.8 résume les vitesses d'entrée qui ont été choisies, ainsi que les périodes des allées de Kármán, calculées a posteriori.

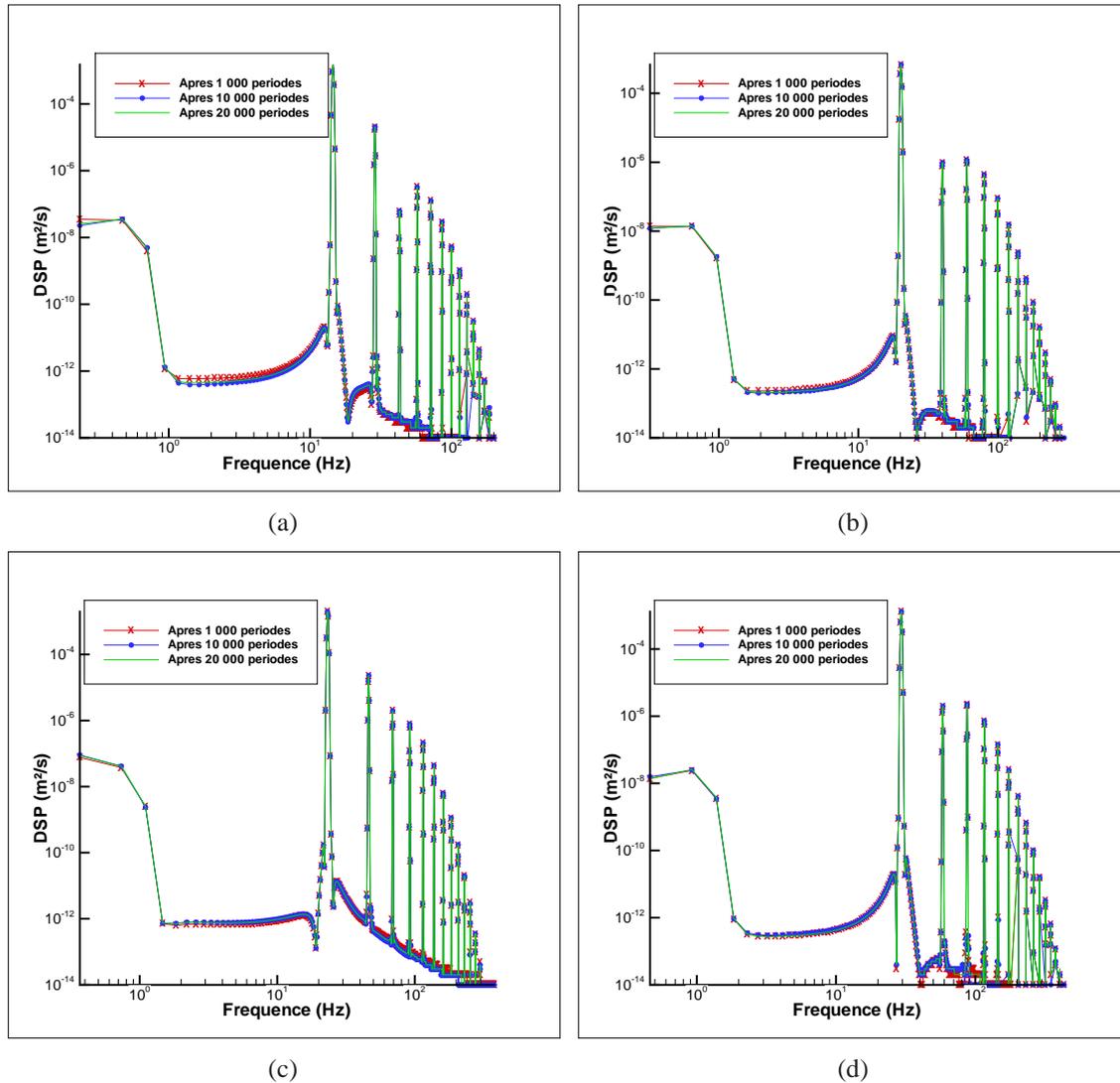


FIG. 4.36 – Stabilité fréquentielle du modèle réduit aux différents points d'échantillonnage. On utilise le modèle réduit pour produire 1000, 10000 puis 20000 périodes de signal de vitesse pour différentes commandes ayant servi à l'échantillonnage. On réalise des densités spectrales de puissance des 100 dernières périodes de ces signaux. On constate alors que la signature spectrale de la réponse du modèle réduit reste constante au cours du temps. Les signaux analysés ont été pris à la position $(2,5r_c; r_c)$.

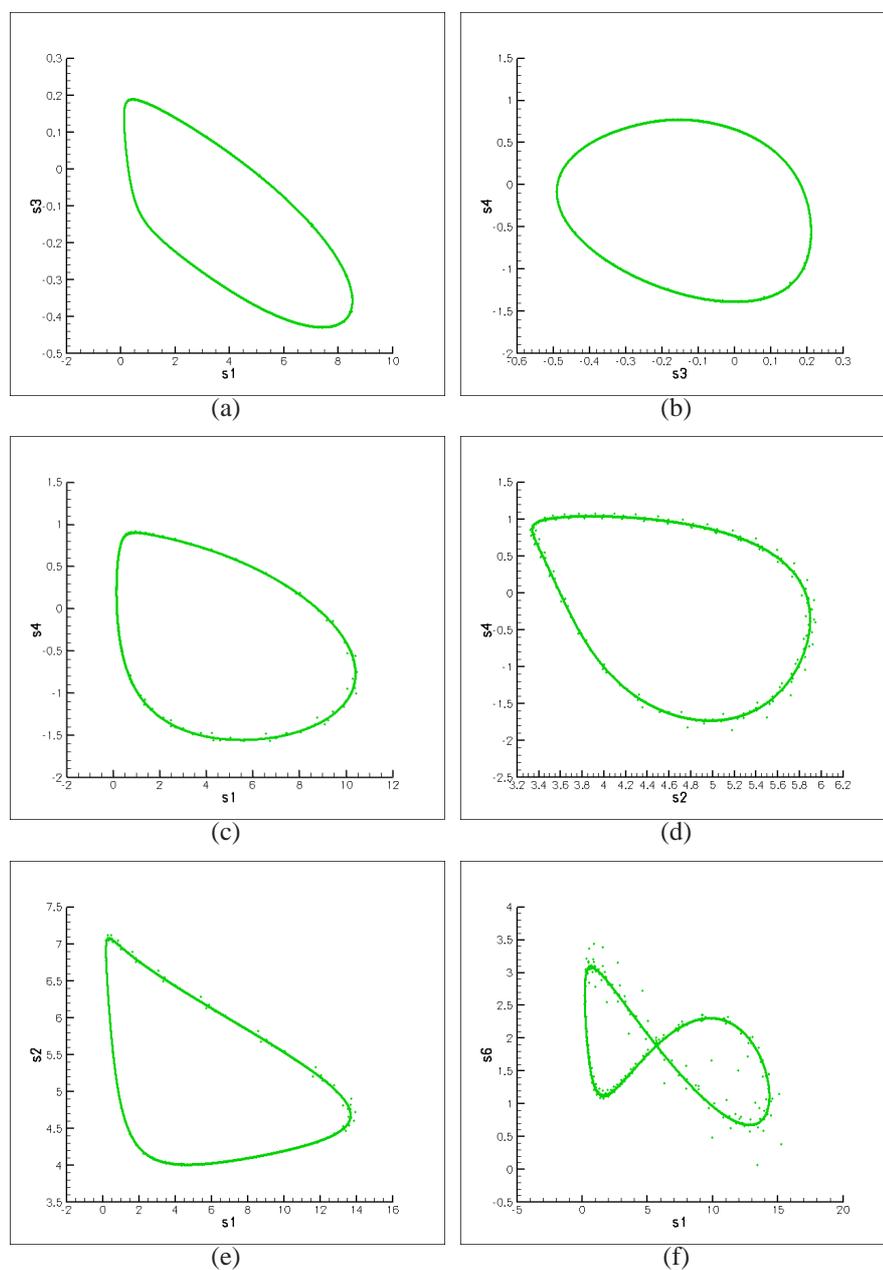


FIG. 4.37 – Quelques exemples de diagrammes de phase aux points d'échantillonnage. Les figures correspondent respectivement aux écoulements dont les nombres de Reynolds valent 2200, 2405, 2802, 3212, 3826 et 4031. Ces diagrammes sont réalisés avec des signaux de vitesse correspondant approximativement à 20000 périodes de lâchers.

Pour évaluer la qualité du modèle réduit en ces points, nous nous intéressons :

- aux valeurs moyennes et aux amplitudes des signaux proposés par le modèle réduit ;
- au spectre des signaux sur 10 périodes de lâchers ;
- à la stabilité à long terme des réponses du modèle réduit.

Le tableau 4.9 regroupe des informations concernant les valeurs moyennes prédites par le modèle aux quatre points listés dans le tableau 4.8, dans le sillage de l'écoulement. Le tableau 4.10 fait de même avec les amplitudes des signaux. De façon similaire, la figure 4.38 compare les champs de vitesse calculés par le code CFD et ceux proposés par le modèle réduit en d'autres positions.

TAB. 4.8 – Points de validation du modèle réduit de lâchers de tourbillons. Correspondance entre les valeurs de vitesse amont V_∞ , les nombres de Reynolds de l'écoulement, les pas de temps utilisés pour générer les données, et les périodes effectives de lâchers, calculées a posteriori.

Vitesse d'entrée	Nombre de Reynolds	Pas de temps de simulation	Période des lâchers
$1,9\text{m.s}^{-1}$	2595	0,00164s	0,05413s
$2,2\text{m.s}^{-1}$	3007	0,00142s	0,04612s
$2,5\text{m.s}^{-1}$	3417	0,00125s	0.04060s
$2,64\text{m.s}^{-1}$	3608	0,00118s	0,03773s

TAB. 4.9 – Modèle réduit instationnaire paramétré par la vitesse d'entrée : Comparaisons des valeurs moyennes calculées (CFD) et prédites (modèle réduit) de la composante transverse de la vitesse en $(2,5r_c; r_c)$ ailleurs qu'aux points d'échantillonnage.

Vitesse d'entrée	Calcul CFD	Modèle réduit
$1,9\text{m.s}^{-1}$	-0.1178m.s^{-1}	-0.1139m.s^{-1}
$2,2\text{m.s}^{-1}$	-0.1376m.s^{-1}	-0.1348m.s^{-1}
$2,5\text{m.s}^{-1}$	-0.1554m.s^{-1}	-0.1558m.s^{-1}
$2,64\text{m.s}^{-1}$	-0.1617m.s^{-1}	-0.1654m.s^{-1}

TAB. 4.10 – Modèle réduit instationnaire paramétré par la vitesse d'entrée : Comparaisons des amplitudes des signaux calculés (CFD) et de celles des signaux prédits (modèle réduit) de la composante transverse de la vitesse en $(2,5r_c; r_c)$ ailleurs qu'aux points d'échantillonnage.

Vitesse d'entrée	Calcul CFD	Modèle réduit
$1,9\text{m.s}^{-1}$	0.2735m.s^{-1}	0.2465m.s^{-1}
$2,2\text{m.s}^{-1}$	0.2875m.s^{-1}	0.2787m.s^{-1}
$2,5\text{m.s}^{-1}$	0.2931m.s^{-1}	0.3104m.s^{-1}
$2,64\text{m.s}^{-1}$	0.2939m.s^{-1}	0.3252m.s^{-1}

L'analyse de ces deux tableaux est similaire à celle des tableaux 4.6 et 4.7 qui ont été réalisés pour les points d'échantillonnage. Les valeurs moyennes sont bien prédites. Même si l'évolution prévue par le modèle réduit est sensiblement différente de celle proposée par le code CFD,

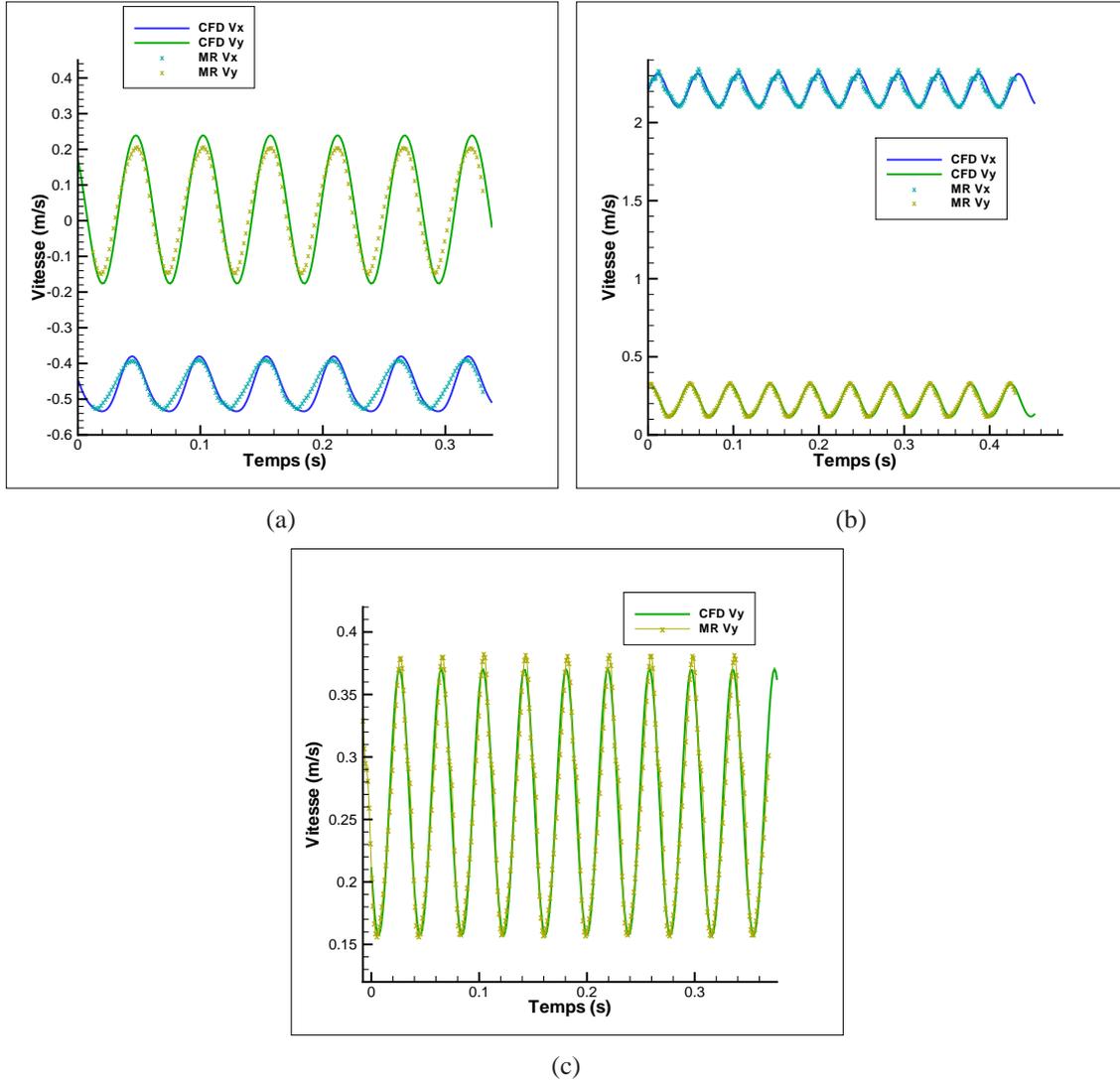


FIG. 4.38 – Le modèle réduit permet de reconstruire de bonnes approximations des deux composantes du champ de vitesse ailleurs qu’aux points d’échantillonnage. Ici, on présente des signaux de vitesse en trois de ces points de validation : un premier à un nombre de Reynolds de 2595 (figure 4.38(a)), un second à un nombre de Reynolds de 3007 (figure 4.38(b)) et un troisième à un nombre de Reynolds de 3608 (figure 4.38(c)). Les positions correspondant à ces figures sont respectivement $(2, 5r_c; 0, 2r_c)$, $(2, 7r_c; -1, 2r_c)$ et $(2, 7r_c; -1, 2r_c)$.

sur la plage de vitesses d'entrée $[1,5\text{m.s}^{-1}; 3,0\text{m.s}^{-1}]$, le modèle réduit paraît fournir des vitesses dont les valeurs moyennes sont de bonnes approximations de celles des vitesses obtenues par le calcul CFD. En ce qui concerne les amplitudes, l'erreur faite par le modèle réduit aux points d'échantillonnage ne se résorbe pas lorsqu'on s'en éloigne, et reste sensible. Par contre, on constate que l'erreur commise sur l'amplitude du champ de vitesse hors des points d'échantillonnage reste équivalente à celle commise aux points d'échantillonnage. C'est d'ailleurs également le cas pour l'erreur sur les valeurs moyennes. S'éloigner des points pour lesquels le modèle a été construit ne semble pas entraîner pas d'augmentation de l'erreur.

Par ailleurs, les signatures spectrales des signaux de vitesse sont relativement bien prédites. La figure 4.39 correspond à un post-traitement similaire à celui de la figure 4.34 du paragraphe 4.4.4.3. On y observe divers spectres réalisés sur 10 périodes de signal, aux points de validation du tableau 4.8 et en diverses positions dans le sillage. A chaque fois, on compare le spectre réalisé à l'aide de calculs CFD à ceux que fournit le modèle réduit. Comme aux points d'échantillonnage, le modèle réduit parvient à prévoir remarquablement bien les fréquences et énergie des fondamentaux, ainsi que les fréquences des harmoniques. Tout comme pour les valeurs moyennes et les amplitudes, l'erreur sur les fréquences faite hors des points d'échantillonnage reste équivalente à celle faite aux points d'échantillonnage.

Pour évaluer la stabilité du modèle ailleurs qu'aux points d'échantillonnage, on peut commencer par visualiser des diagrammes de phase réalisés sur des durées importantes. Ceux de la figure 4.40 correspondent à environ 20000 périodes de signal. Sur toute la durée de ces signaux, en chaque point d'évaluation, les fonctions de base forment un cycle bien périodique. Ce constat est corroboré par les densités spectrales de vitesse présentées sur la figure 4.41. Comme dans le paragraphe 4.4.4.4, il s'agit à chaque fois de spectres réalisés sur 100 périodes de signal, mais après soit 1000, soit 10000, soit 20000 périodes de lâchers. Cette figure montre que même hors des points d'échantillonnage, la signature spectrale du signal de vitesse produit par le modèle réduit reste constante sur une durée de plus de 20000 périodes. Il n'y a pas non plus de problèmes de stabilité des amplitudes ou des valeurs moyennes, comme le confirment les diagrammes de phase.

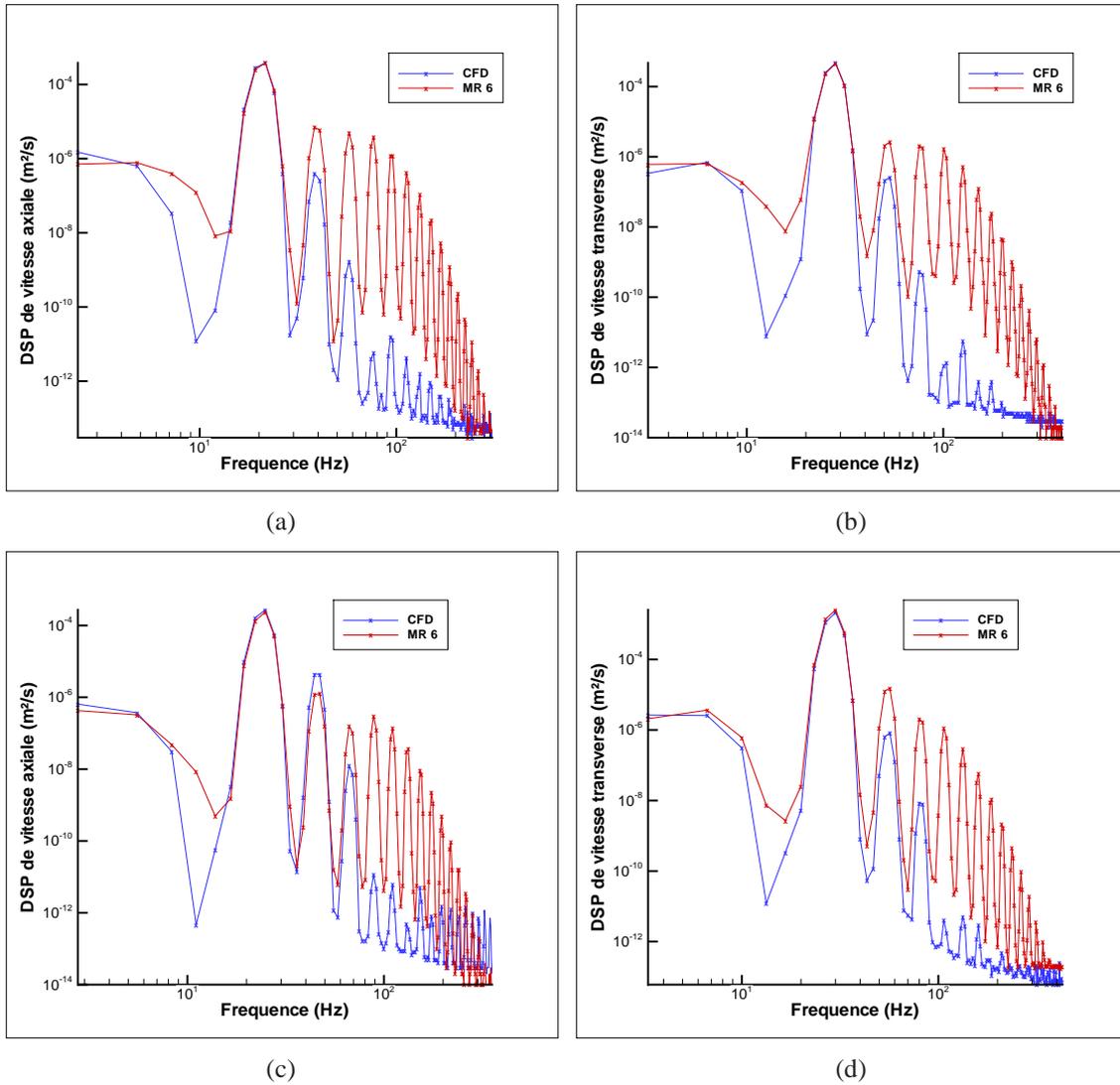


FIG. 4.39 – Le modèle réduit prédit correctement les fréquences caractéristiques des lâchers de tourbillons ailleurs qu’aux points d’échantillonnage. Comme aux points d’échantillonnage, les positions et les énergies des fréquences fondamentales sont bien prédites. Les positions des harmoniques également, mais l’énergie qu’elles transportent reste mal évaluée. Les signaux de vitesse ont été pris à la position $(2, 7r_c; -1, 2r_c)$ pour les figures 4.39(a) (nombre de Reynolds de 2595) et 4.39(b) (nombre de Reynolds de 3417), et à la position $(2, 5r_c; 0, 2r_c)$ pour les figures 4.39(c) (nombre de Reynolds de 3007) et 4.39(d) (nombre de Reynolds de 3608).

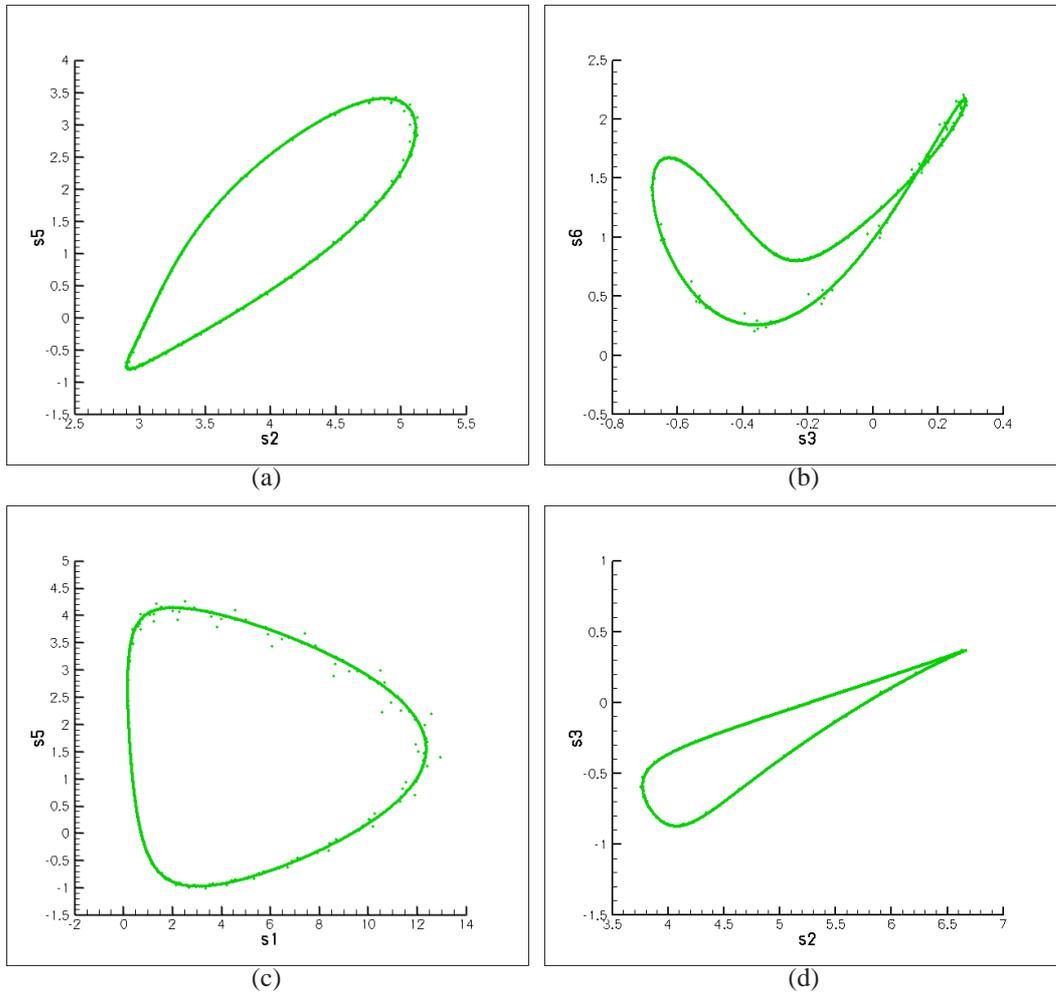


FIG. 4.40 – Quelques exemples de diagrammes de phase du modèle réduit de lâchers tourbillonnaires pour des commandes n'ayant pas servi à l'identification. Elles correspondent à environ 20000 périodes. Les nombres de Reynolds correspondant à chaque figure sont respectivement 2595, 3007, 3417 et 3608.

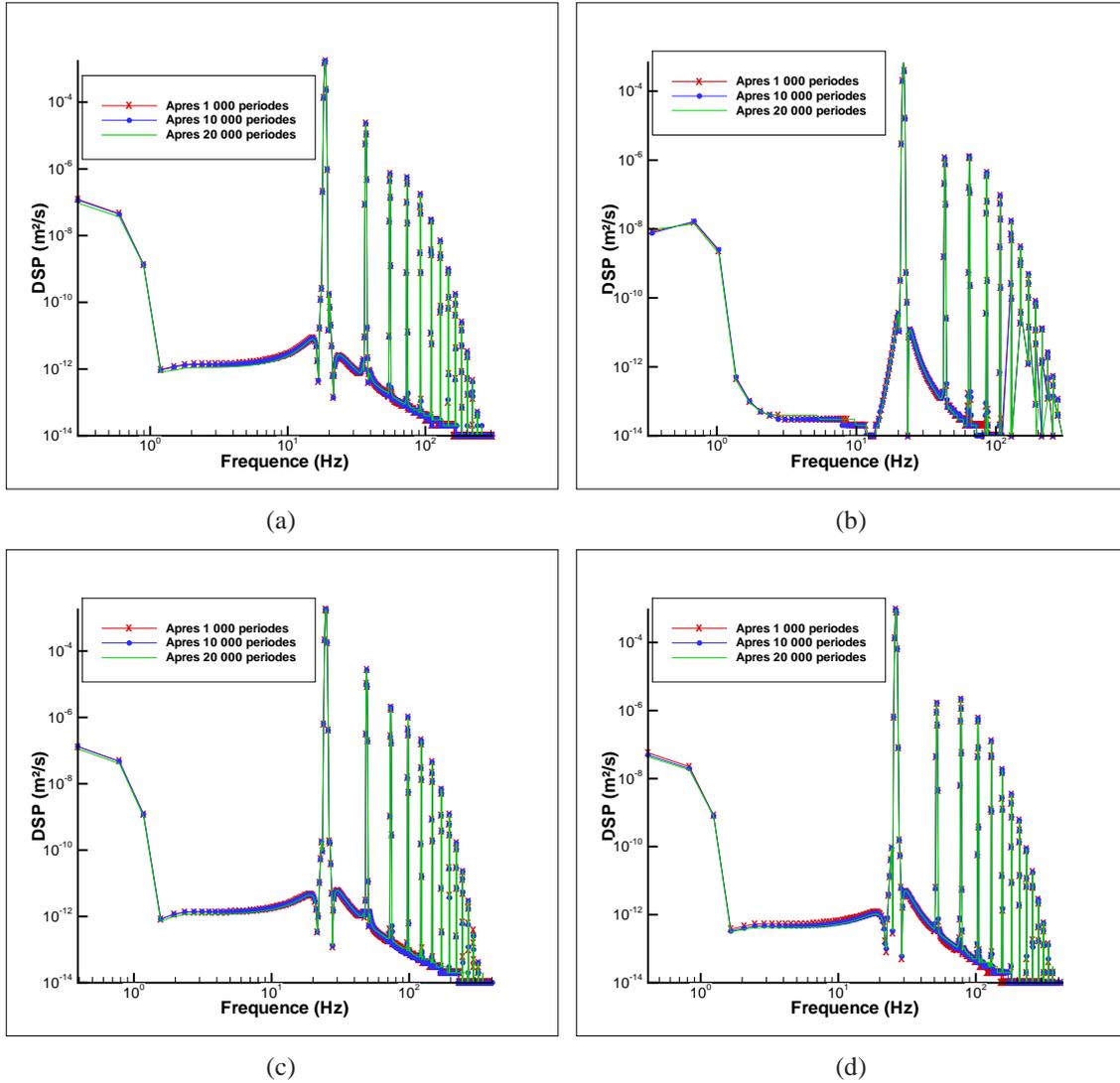


FIG. 4.41 – Stabilité fréquentielle du modèle réduit ailleurs qu’aux points d’échantillonnage. En effectuant un traitement similaire à celui de la figure 4.36, mais pour d’autres écoulements, on s’aperçoit que la signature spectrale du modèle réduit varie extrêmement peu au cours du temps. Les figures correspondent respectivement à des écoulements dont les nombres de Reynolds valent 2595, 3007, 3417 et 3608. Les signaux ont été récupérés à la position $(2,5r_c; r_c)$.

4.4.5 Comparaison avec les modèles réduits de type POD

4.4.5.1 Stabilité des modèles

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce paragraphe, les méthodologies de réduction de modèle basées sur la POD ont été appliquées intensivement à la reproduction de la dynamique du sillage d'obstacles. Parmi les difficultés que les différents auteurs ont rencontrées, on peut souligner le manque de stabilité de nombreux modèles.

Par stabilité, on entend, comme le présentent Sirisup et Karniadakis [30], le phénomène de dérive qui touche de nombreux modèles de type POD. Même si, sur une courte durée, ils restent précis, on observe que, sur le long terme, les cycles oscillants passent progressivement d'un état à un autre. Cette dérive est également décrite par Bergmann *et al.* [29], Galletti *et al.* [33], et par Couplet dans le second chapitre de sa thèse [36].

La plupart des auteurs imputent ce phénomène à l'absence, dans le modèle réduit, de prise en compte des modes aux énergies les plus basses. Cette absence peut être due à notamment :

1. la troncature des modes : pour obtenir un modèle d'ordre aussi faible que possible, on a éliminé les modes aux nombres d'onde les plus élevés ;
2. l'échantillonnage : garder l'ensemble des modes n'empêche pas forcément la dérive. Les nombres d'ondes les plus élevés sont particulièrement sensibles à la discrétisation temporelle de l'échantillonnage [31]. Pour prendre en compte les modes de faible énergie, il faut donc que les snapshots utilisés échantillonnent correctement la dynamique de l'écoulement.

Pour prendre en compte dans un modèle d'ordre faible les modes dont les nombres d'onde sont trop élevés, la tendance semble être à l'adjonction dans le modèle d'un terme linéaire supplémentaire de viscosité "artificielle". Comme le soulignent Sirisup et Karniadakis, cette approche s'apparente un peu au concept de viscosité sous-maille de la *Large Eddy Simulation*. Il s'agit d'un terme linéaire supplémentaire qui peut être, par exemple, réglé en utilisant une analyse de bifurcation ([30]), ou encore calibré en résolvant un problème d'optimisation comme le proposent Bergmann *et al.* dans [29] ou Galletti *et al.* dans [27]. Notons que dans [33], les auteurs prennent en compte l'effet du gradient de pression en le modélisant par un terme linéaire qu'ils identifient par un processus d'optimisation. A nos yeux, cela revient à identifier un terme de façon similaire à Bergmann *et al.*, ce qui confère des qualités similaires de stabilité au modèle réduit obtenu. Couplet *et al.* [37] observent eux aussi des problèmes de stabilité et y font face en remplaçant la projection Galerkin par des systèmes d'équations polynômiales dont les coefficients sont déterminés au cours d'un processus d'optimisation. C'est une approche qui rejoint en partie les méthodes d'identification modale.

En ce qui concerne les modèles réduits obtenus par identification, on n'a pas rencontré les limitations évoquées plus haut. Pour obtenir un système d'équations dont la résolution conduit à un système oscillant stable, on n'aura pris que deux précautions :

1. Au cours de l'identification, on laisse aux modèles réduits suffisamment de temps pour évacuer leurs phases transitoires avant qu'ils ne soient évalués ;
2. Au début de l'identification, la part linéaire du modèle est annulée. On évite ainsi de se diriger très tôt vers des modèles à réponses stationnaires. Une fois que l'on obtient un modèle oscillant sans part linéaire, on ajuste le modèle en rajoutant cette part comme degré de liberté supplémentaire.

Nous interprétons la stabilité inhérente du modèle réduit identifié comme provenant de deux sources :

1. Le modèle est réglé pour correspondre à un signal suffisamment discrétisé. En prenant approximativement 32 pas de temps par période, on dispose d'une relativement bonne approximation du signal continu. Pour construire un modèle réduit ou une surface de réponse, la qualité de l'échantillonnage est déterminante.
2. Toutes les données de l'échantillonnage sont prises en compte. Il n'y a pas de troncature, et toutes les informations disponibles sont utilisées par le processus d'identification.

4.4.5.2 Utilisation du modèle réduit en dehors des points d'échantillonnage

L'utilisation du modèle réduit de type POD dans des conditions opératrices différentes de celles correspondant à sa construction constitue une seconde source de difficultés. La paramétrisation de ces modèles par les conditions opératrices s'avère compliquée, dans la mesure où les structures cohérentes dépendent du régime de l'écoulement. Ainsi les modes importants, calculés pour une certaine vitesse d'entrée, ne porteront peut-être pas autant d'énergie pour une autre vitesse, ou n'apparaîtront même pas. Bui-Thanh *et al.* font remarquer dans [38] que, si l'intérêt d'une décomposition orthogonale est qu'elle fournit une matrice de reprojction optimale au sens de l'énergie retenue, cette optimalité n'est valable que pour cette vitesse d'entrée. Parmi les approches relevées dans la littérature, nous en présentons quatre conçues pour utiliser le modèle réduit POD ailleurs qu'aux points d'échantillonnage :

1. La première consiste à utiliser les modes propres calculés au point d'échantillonnage pour un autre jeu d'entrées. C'est la méthode utilisée par Deane *et al.* dans le cas du cylindre circulaire. Cependant, les modèles réduits offrent de piètres performances à l'extrapolation, ce qui est justifié par les auteurs comme étant dû aux trop importantes modifications de topologie des modes propres.
2. Une autre méthode consiste à considérer l'instationnarité de l'écoulement sous la forme d'une fréquence et d'une amplitude. Ainsi on supprime le paramètre temporel, et les modes propres POD correspondent à des snapshots construits pour diverses conditions opératrices. C'est par exemple l'approche de Hall *et al.* [39] ou d'Epureanu *et al.* [40].
3. Galletti *et al.* [33] choisissent eux d'interpoler la matrice de corrélation qui fournit les modes propres. Plusieurs matrices sont formées pour différents points d'échantillonnage, et pour de nouvelles conditions opératrices, la matrice de corrélation est approchée par une interpolation des matrices de corrélations des points d'échantillonnage. Ils en tirent alors des modes propres pour lesquels les équations d'état sont résolues. On s'écarte un peu du fonctionnement typique d'un modèle réduit dans la mesure où, à chaque utilisation du modèle :
 - les fonctions de base,
 - et la matrice de reprojction
 sont calculées.
4. Enfin, Bergmann *et al.* [29] proposent tout simplement de mettre à jour les modes propres calculés au point d'échantillonnage. Pour cela, un calcul CFD est réalisé au nouveau point, et les informations calculées sont utilisées pour modifier les modes propres.

Les méthodes d'identification modales ont été conçues pour produire des modèles paramétrés par les conditions opératrices. Pour cette raison, les modèles réduits obtenus peuvent naturellement prendre en compte une voire plusieurs entrées. La précision du modèle ailleurs qu'aux points d'échantillonnage dépend ainsi uniquement de la qualité de l'échantillonnage.

4.4.6 Conclusion Partielle

Nous avons pu montrer dans cette section que la méthodologie de réduction de modèle par identification permet d'aboutir à des systèmes oscillants. Ces systèmes permettent de reproduire avec précision des champs de vitesse périodiques tels qu'on en trouve dans un sillage instationnaire d'obstacle. Par construction, ces modèles possèdent plusieurs qualités d'intérêt :

- les fréquences des signaux d'échantillonnage sont bien reproduites ;
- les modèles sont naturellement exploitables ailleurs qu'aux points d'échantillonnage ;
- les fréquences des signaux ailleurs qu'aux points d'échantillonnage sont bien prédites ;
- les réponses de ces modèles sont naturellement stables au cours du temps : on n'observe pas de dérive ou de déphasage, même après des périodes très importantes.

Nous pouvons donc considérer que nous avons pu, dans le cas de l'écoulement incompressible turbulent autour du cylindre circulaire, mettre en place une méthodologie de réduction de modèle qui répond aux objectifs que nous nous étions fixés au paragraphe 4.4.2.

4.5 Réduction de modèle d'écoulements transitoires

4.5.1 Motivations et objectifs

4.5.1.1 Introduction

L'utilisateur ciblé par les méthodes de réduction de la section précédente, cherche un moyen de reproduire et de prévoir la forme du sillage d'un obstacle, avec un degré de raffinement temporel particulièrement élevé. Cependant, pour certains observables, il pourra se contenter de degrés de raffinement moins élevés. La section qui suit est dévolue à l'exemple des cas de simulations transitoires.

Le paragraphe 4.3.3.3 avait été l'occasion de montrer que, pour notre cas test, et pour des observables thermiques (températures, flux de chaleur), il est bien plus important de prendre en compte les aspects transitoires (forçage par les conditions opératrices), qu'instationnaires (lâchers de tourbillons). Un utilisateur intéressé par ces observables thermiques aura alors intérêt à faire des simulations transitoires avec un pas de temps filtrant les fréquences plus élevées que celles de ses conditions opératrices.

Nous nous plaçons donc dans le cadre de simulations CFD uniquement transitoires, telles que les décrit le paragraphe 4.3.2.3. L'objet de ces simulations est de fournir l'évolution au cours du temps d'observables thermiques lorsque les conditions opératrices sont elles mêmes fonctions du temps. Nous appliquons la méthodologie à l'écoulement autour du cylindre circulaire : la vitesse d'entrée $V_\infty(t)$ et la température du cylindre $T_p(t)$ sont transitoires.

4.5.1.2 Quelques exemples tirés de la littérature

En couplant un modèle POD Galerkin avec un réseau de neurones (un autre type de surface de réponse) pour les termes non linéaires, Romijn *et al.* présentent dans [41] un modèle réduit de conducto-convection monodimensionnel d'écoulement incompressible de verre en fusion. Le champ de vitesse est fixé, et l'écoulement est réchauffé par des flammes, dont l'évolution de la température au cours du temps constitue l'entrée du modèle.

Dans [42, 43], Balsa-Canto *et al.* prennent également en compte une condition aux limites transitoire dans un modèle réduit POD Galerkin. Il s'agit d'un modèle réduit de température dans une conserve cylindrique au cours d'une stérilisation. La condition aux limites y est intégrée en faisant un changement de variable dépendant du temps. Ce modèle réduit leur permet

de résoudre un problème d'optimisation, dont l'objectif est de trouver la loi de température de stérilisation qui limite le niveau de dangerosité des germes présents dans la conserve, tout en préservant le mieux possible les qualités nutritives du produit.

Les méthodes d'identification ont souvent été utilisées dans des cas anisothermes avec des conditions aux limites transitoires. On peut par exemple citer les travaux de Girault et Petit [44] qui ont mis en place un modèle réduit pour la température d'un écoulement bidimensionnel chauffé dans un canal plan. Les conditions thermiques y sont deux flux de chaleur à travers la paroi du canal. Pour un champ de vitesse fixé et n'importe quelle loi de flux thermique, le modèle est en mesure d'estimer l'évolution de la température en quelques points du canal. Ce modèle est ensuite utilisé pour résoudre un problème inverse.

Dans [25], Rouizi *et al.* mettent en place un modèle d'écoulement de marche descendante en convection forcée. Leur modèle réduit est capable de prévoir les champs de vitesse et de température correspondant à un nombre de Reynolds constant quelconque, et à une loi de chauffe transitoire quelconque.

4.5.1.3 Méthodologie générale

Dans le cas du cylindre circulaire en convection forcée tel que nous l'avons appréhendé jusqu'à maintenant, on peut considérer qu'il y a un couplage faible entre les champs cinétique et thermique. Le champ de vitesse est le moteur de l'écoulement et le champ de température peut être considéré comme une scalaire passif, diffusé dans et transporté par le champ de vitesse. Au paragraphe 3.3.10.3 du chapitre 3, nous avons souligné que, dans ce type de cas, on peut justifier une construction distincte de deux modèles :

1. Le premier modèle concerne des observables cinétiques et ne tient pas compte des aspects thermiques de l'écoulement. On parle de modèle réduit cinétique.
2. le second concerne les observables thermiques, et se construit à partir de l'état réduit d'un modèle réduit cinétique. On parle de modèle réduit thermique.

Les paragraphes qui suivent vont illustrer cette méthodologie. On va construire deux modèles réduits thermiques :

- un premier pour le champ de température,
- un second pour le flux de chaleur total à travers la surface extérieure du cylindre.

Nous rappelons que l'objectif n'est cette fois pas de reproduire le champ de vitesse, mais de capter la dynamique des observables thermiques. Ainsi, le modèle réduit cinétique n'existe qu'en tant que passerelle vers l'état réduit thermique. Pour cette raison, dans les paragraphes qui vont décrire les modèles transitoires, nous ne voulons pas nous attarder sur la qualité des modèles réduits cinétiques.

Cependant, nous sommes conscients qu'un modèle réduit cinétique transitoire peut avoir un intérêt propre. Par exemple, l'utilisateur peut désirer un modèle réduit lui proposant l'évolution purement transitoire du champ de vitesse autour du cylindre correspondant à des conditions opératrices quelconques. Nous profitons de cette section pour montrer que l'identification permet de répondre à ce genre de problématique. Nous construisons un modèle réduit cinétique qui associe l'évolution du champ de vitesse à des conditions aux limites dépendantes du temps. Ce modèle est ensuite utilisé pour construire le premier modèle réduit thermique, c'est-à-dire celui pour le champ de température.

Par contre, dans le deuxième cas, pour illustrer la notion d'observables que nous avons abordée à la section 4.1 de ce chapitre, nous n'accorderons pas d'importance à la précision du modèle réduit cinétique lorsqu'il est utilisé comme prérequis au modèle réduit thermique.

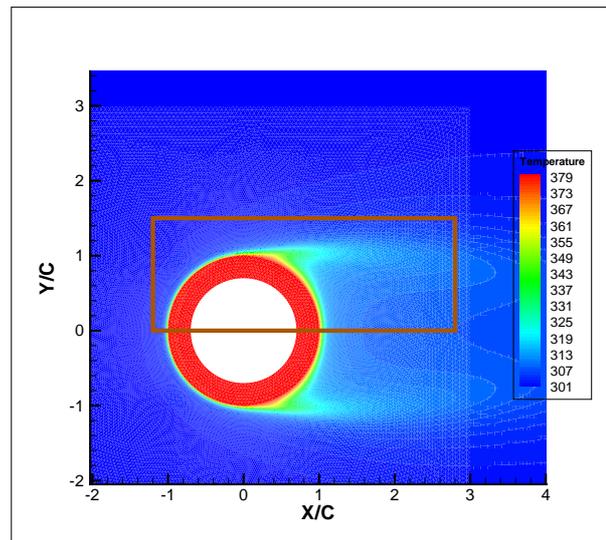


FIG. 4.42 – Construction du modèle réduit transitoire pour les températures. On restreint les données de référence aux températures des cellules situées dans le rectangle $[-1, 2r_c; 2, 8r_c] \times [0; 1, 5r_c]$.

4.5.2 Réduction de modèle transitoire pour les champs de vitesse et de température

4.5.2.1 Objectifs et observables

Nous allons montrer que la méthodologie d'identification de modèle réduit peut permettre de construire des modèles qui pour :

1. une loi de vitesse quelconque,
2. une loi de température de paroi quelconque,

fournissent avec précision :

1. des champs de vitesse transitoires,
2. des champs de température transitoires.

Si l'intégralité du champ de vitesse est sensible aux variations de la vitesse d'entrée, la zone d'influence de la température du cylindre est beaucoup plus étroite. Par exemple, lorsque la vitesse d'entrée vaut $1,61\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, et que la température du cylindre vaut 380K , l'élévation de température à $2,5$ rayons derrière le culot du cylindre vaut moins de $7,0\text{K}$. Pour cette raison, alors que les observables du modèle réduit cinétique sont les deux composantes du champ de vitesse en chaque cellule du maillage, on restreint les observables thermiques à des températures dans les cellules maillant le cylindre, et dans un certain nombre de cellules situées dans le sillage (voir la figure 4.42).

Remarque. Bien que le modèle réduit thermique soit construit à partir du modèle réduit cinétique, dans la mesure où l'on se sert des états réduits comme intermédiaires, il n'est nullement besoin que les observables des deux modèles correspondent aux mêmes cellules.

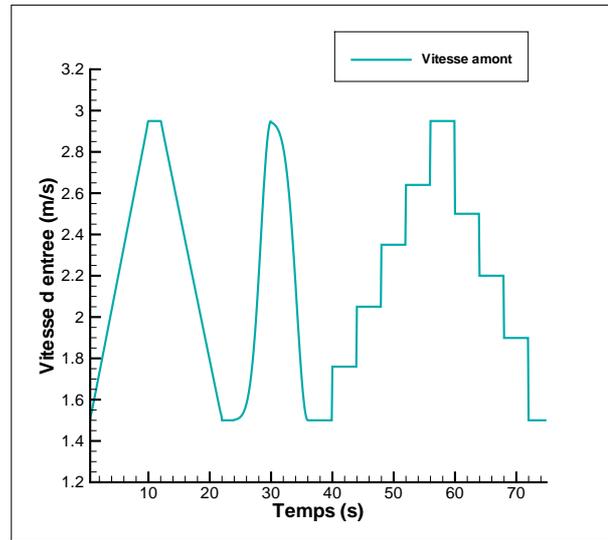


FIG. 4.43 – Vitesse d'entrée transitoire ayant servi à simuler les champs de vitesse utilisés pour identifier un modèle réduit cinétique.

4.5.2.2 Echantillonnage

Pour collecter les champs de vitesse de référence que le modèle réduit cinétique doit reproduire, nous utilisons la loi de vitesse d'entrée qui apparaît sur la figure 4.43. Quelques exemples de réponse du champ de vitesse à ce signal sont proposés par la figure 4.44.

Les températures de référence correspondent à la réponse de l'écoulement à la superposition de cette vitesse d'entrée et d'une série d'échelons de température de paroi. Ces deux conditions aux limites sont présentées sur la figure 4.45. La figure 4.46 présente deux exemples d'évolutions de température consécutives à l'emploi de ces conditions aux limites.

Remarque. Sur la figure 4.44, on observe des “pics” de vitesse correspondant aux échelons de vitesse d'entrée appliqués, après l'instant $t = 40,0s$. La variation brutale juste consécutive à ces échelons de vitesse d'entrée est difficile à interpréter. S'agit-il d'un phénomène physique ou d'un problème de convergence ? Quoiqu'il en soit, l'examen des températures (figure 4.46) semble indiquer que l'effet de ces “pics” sur la température du sillage est faible, et que son influence sur la température dans le solide est quasiment nulle.

4.5.2.3 Identification des modèles réduits

En se servant des champs de vitesse collectés, on identifie un modèle réduit cinétique transitoire d'ordre 6, dont la forme est décrite dans le paragraphe 3.3.10.3 par l'équation (3.56) (voir le tableau 4.11) :

$$\mathcal{E}_r^v : \frac{d}{dt} s_v + d_v s_v + (b_{v1} s_v \bullet b_{v2} s_v) + a_v^\infty V_\infty + b_v^\infty V_\infty^2 = 0 \quad (4.9a)$$

$$y_v^* = h_v s_v \quad (4.9b)$$

L'identification conduit à un modèle réduit qui reproduit relativement bien les données du modèle détaillé sur la durée de l'échantillonnage. Les erreurs moyennes et maximales, visibles sur la figure 4.47, restent faibles.

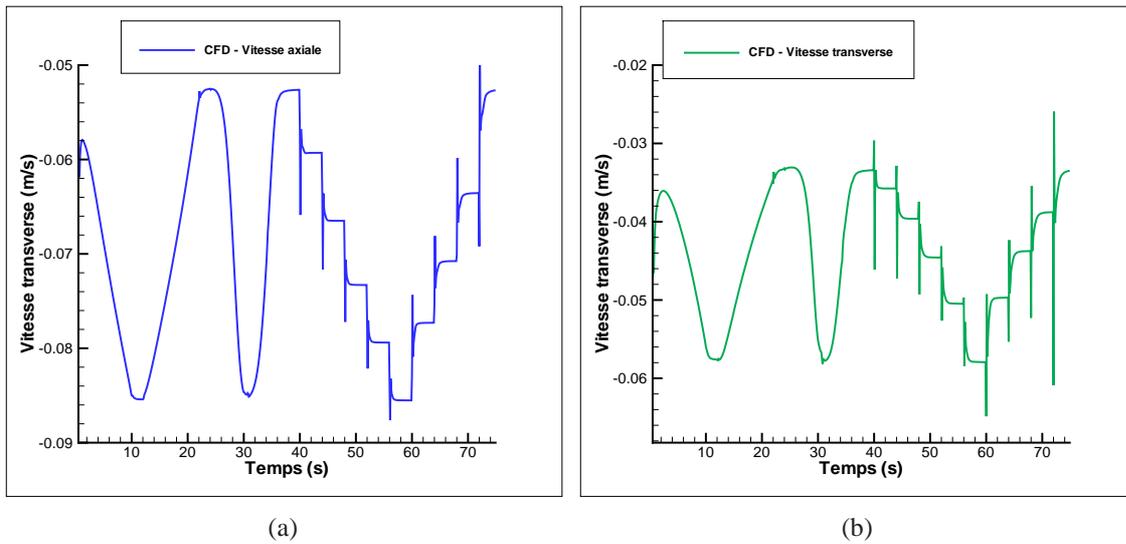


FIG. 4.44 – Modèle réduit cinétique transitoire : Exemples d'évolutions de vitesse consécutives à l'application des conditions aux limites de la figure 4.43. La figure 4.44(a) représente la composante axiale de la vitesse à la position $(0, 8r_c; 0, 8r_c)$, alors que 4.44(b) retrace l'évolution de la composante transverse de la vitesse à la position $(1, 5r_c; -r_c)$.

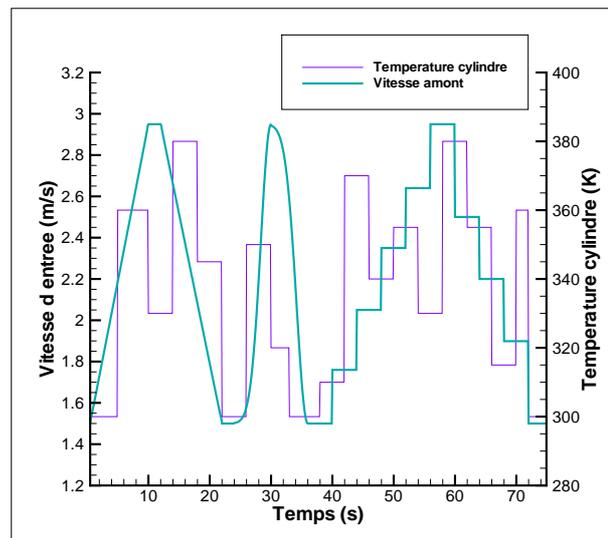


FIG. 4.45 – Lois de vitesse et de température ayant servi à collecter les données de référence pour l'identification du modèle réduit thermique de températures.

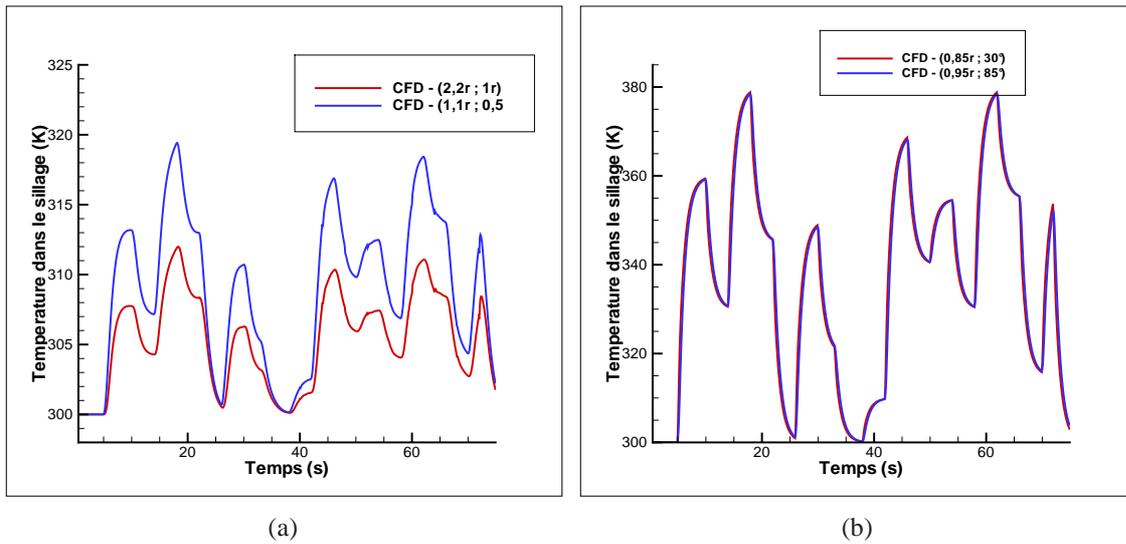


FIG. 4.46 – Exemples d'évolution de température dans le sillage (4.46(a)), et dans la partie solide du cylindre (4.46(b)), consécutivement à l'application des conditions aux limites de la figure 4.45.

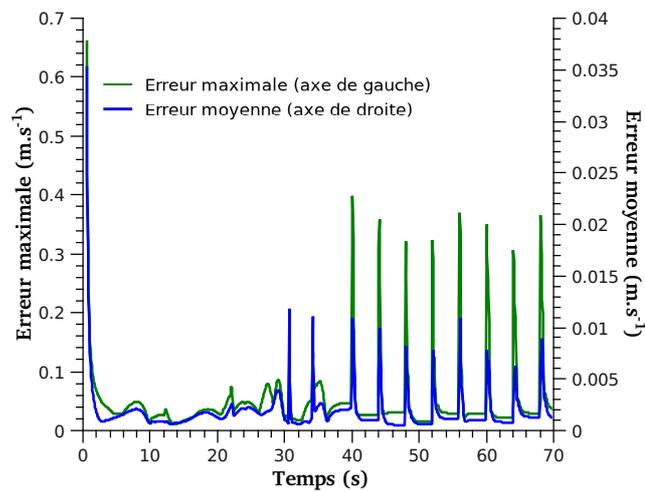


FIG. 4.47 – Modèle réduit cinétique transitoire - Evolution des erreurs absolues moyenne et maximale faites par le modèle réduit vis à vis du signal d'échantillonnage.

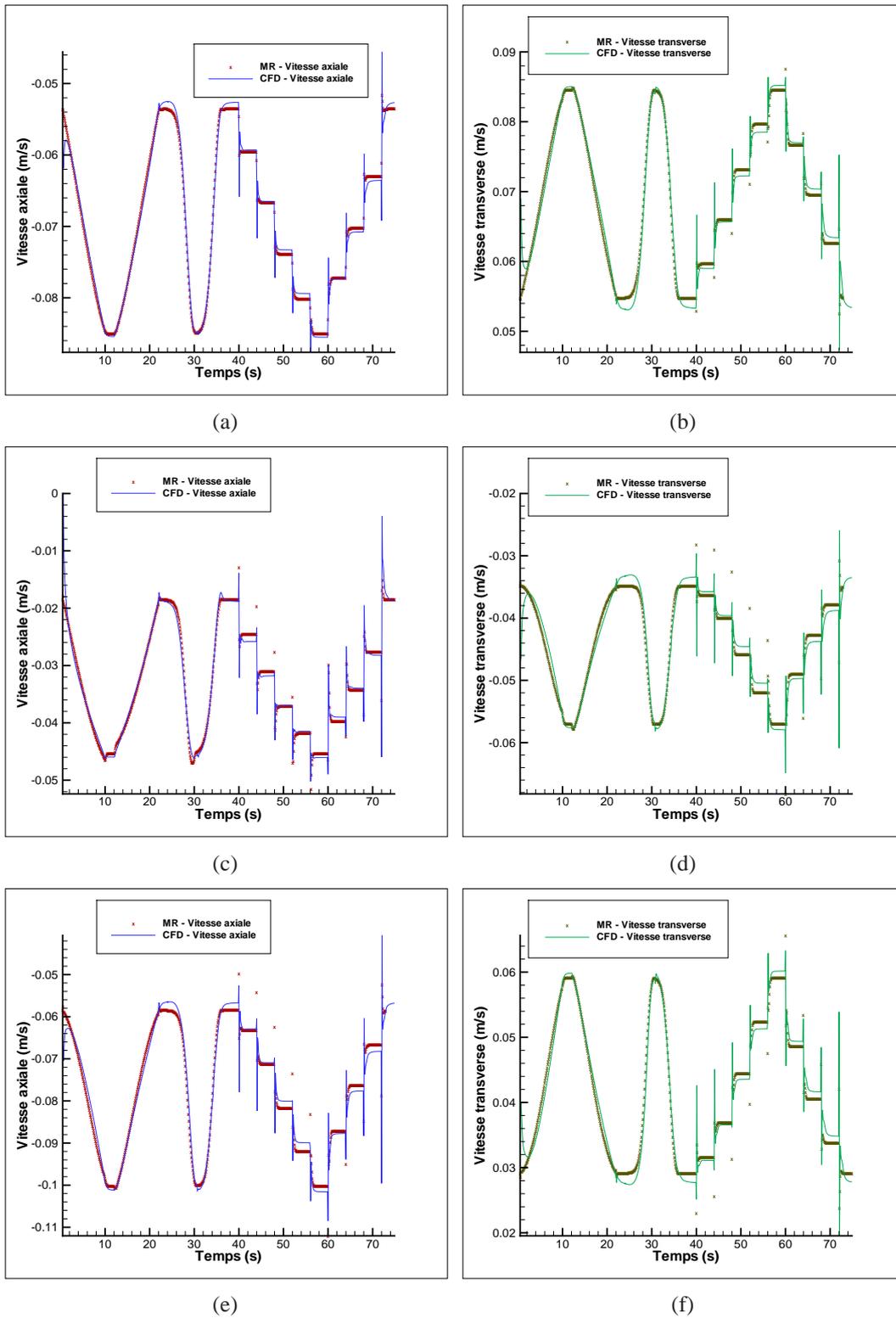


FIG. 4.48 – Identification d'un modèle réduit cinétique transitoire - Comparaison des signaux de vitesse proposés par le code CFD et le modèle réduit en réponse aux conditions aux limites de la figure 4.43. Les signaux correspondent aux positions $(0, 0,8r_c; 0,8r_c)$ (figures 4.48(a) et 4.48(b)), $(1, 1,5r_c; -r_c)$ (4.48(c) et 4.48(d)), et $(2, 2r_c; 0,75r_c)$ (4.48(e) et 4.48(f))

TAB. 4.11 – Composition du modèle réduit transitoire pour le champ de vitesse, et détails de construction.

Type de modèle	cinétique transitoire
Structure	Equation (3.56)
Ordre	6
Nombre d'entrées	1
Nombre de composantes (équation d'état)	
Total	90
Part linéaire d_v	6
Part non linéaire b_{v1}, b_{v2}	2×36
Commande linéaire a_v^∞	6
Commande non linéaire b_v^∞	6
Nombre d'observables	524000
Nombre de pas de temps	745
Pas de temps	0,1 s

Remarque. Dans la remarque du paragraphe 4.5.2.2, nous expliquons qu'au niveau des échelons de vitesse d'entrée, le solveur CFD prévoit des variations brutales de vitesse. On s'aperçoit sur la figure 4.48 que le modèle réduit que nous avons identifié réagit aux échelons de vitesse de façon similaire, avec des discontinuités de vitesse. Si les "pics" que renvoie le modèle CFD correspondent à un phénomène physique, alors tant mieux. Par contre, s'ils sont dus à un souci de convergence relatif à la brusque augmentation de la vitesse d'entrée, il est dommage que le modèle réduit les reproduise. En effet, dans ce cas, le processus d'identification aura cherché à reconstruire des instabilités numériques au prix d'une perte en précision à d'autres instants.

Une fois que l'on dispose d'un modèle réduit cinétique, on peut se lancer dans l'identification d'un modèle réduit thermique. La structure du modèle thermique est la forme (3.58) (voir paragraphe 3.3.10.3) :

$$\mathcal{E}_r^T : \frac{d}{dt} s_T + d_T s_T + (b_{T1} s_T \bullet b_{T2} s_v) + a_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + b_T^\infty \Psi_{vT}^\infty = 0 \quad (4.10a)$$

$$y_T^* = h_T s_T \quad (4.10b)$$

Dans l'équation d'état, s_v est l'état réduit cinétique, de dimension 6. Il s'agit de la solution de l'équation (4.9a) pour la commande V_∞ . La commande thermique $T_{(\partial\Omega)} = \begin{bmatrix} T_\infty \\ T_p \end{bmatrix}$ compte deux termes :

- l'évolution au cours du temps de la température T_p du cylindre ;
- la température d'entrée du fluide, $T_\infty = 300\text{K}$, qui reste constante.

Le terme $\Psi_{vT}^\infty = V_\infty T_\infty$ correspond au flux convectif imposé d'énergie thermique dans le système. Il ne compte qu'un terme, qui varie au cours du temps.

Là encore, le processus d'identification permet de retrouver correctement les données issues de l'échantillonnage. On a construit un modèle d'ordre 8, c'est-à-dire que l'état réduit thermique

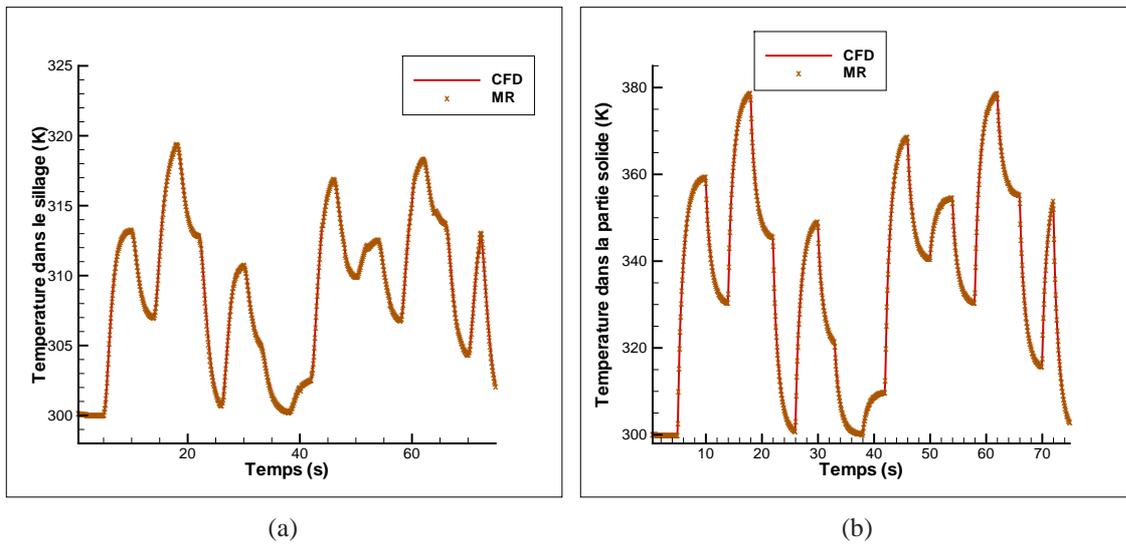


FIG. 4.49 – Identification du modèle réduit transitoire de températures : le modèle réduit d'ordre 8 reproduit le signal d'échantillonnage. La figure 4.49(a) donne un exemple d'évolution de température dans le sillage du cylindre (en $(1, 1r_c; 0, 5r_c)$). La figure 4.49(b) fait de même dans la région solide (à la position $(0, 74r_c; 0, 419r_c)$).

compte seulement 8 composantes (voir le tableau 4.12). Sur la figure 4.49, on peut observer deux exemples d'évolutions de température consécutives à l'application des conditions aux limites de la figure 4.45. La figure 4.50 présente elle les évolutions des erreurs maximale et moyenne au cours du temps, ainsi que l'écart-type de cette erreur.

TAB. 4.12 – Composition du modèle réduit transitoire pour les températures, et détails de construction.

Type de modèle	thermique transitoire
Structure	Equation (3.58)
Ordre	8
Ordre MR cinétique	6
Nombre d'entrées	3 (dont 1 constante)
Nombre de composantes (équation d'état)	
Total	144
Part linéaire d_T	8
Part non linéaire b_{T1}, b_{T2}	64 + 48
Commande linéaire $a_T^{(\partial\Omega)}$	16
Commande non linéaire $b_T^{(\partial\Omega)}$	8
Nombre d'observables	26986
Nombre de pas de temps	745
Pas de temps	0,1 s

Les deux modèles réduits ont été construits pour reproduire les signaux de vitesse et de température échantillonnés. Dans la mesure où on cherche à obtenir des modèles réduits utilisables

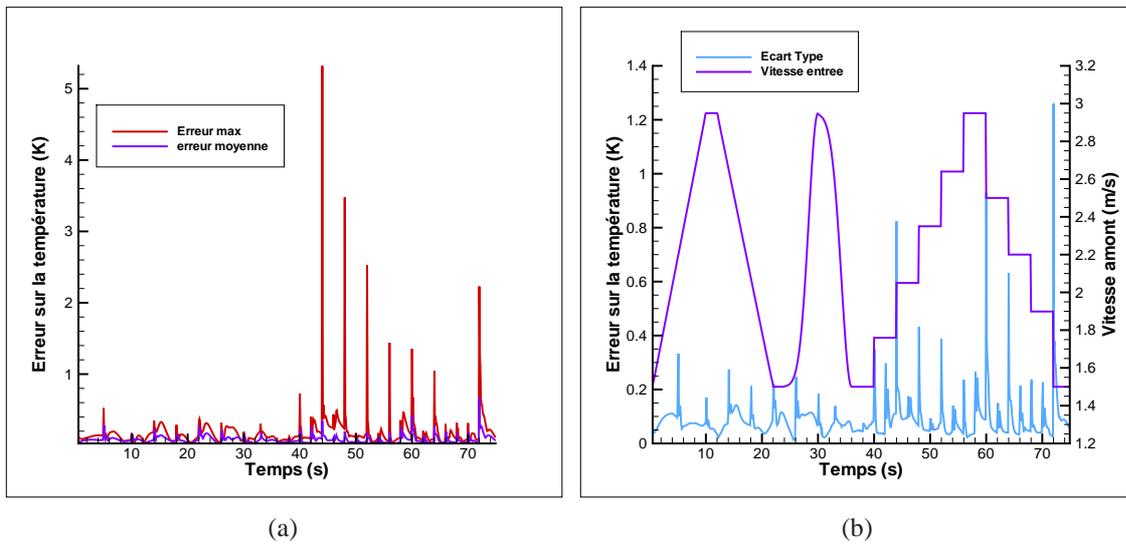


FIG. 4.50 – Identification du modèle réduit pour les températures. La figure 4.50(a) représente l'évolution au cours du temps de la différence entre les données de référence et le signal construit par le modèle réduit. La figure 4.50(b) représente l'évolution de l'écart-type de cette erreur, mise en vis à vis avec le signal de vitesse d'entrée. Ainsi on note que si les échelons de vitesse semblent produire de l'erreur, celle-ci reste relativement faible.

pour des conditions opératrices quelconques, il faut se demander si leurs réponses restent valables lorsque l'on change de conditions opératrices. Le paragraphe suivant traite de l'utilisation de ces modèles pour des conditions opératrices autres que celles ayant servi à l'échantillonnage.

4.5.2.4 Validation des modèles réduits

L'écoulement est soumis aux conditions aux limites présentées sur la figure 4.51, et on évalue les réponses en termes de champ de vitesse et de température.

En ce qui concerne le modèle réduit cinétique, la figure 4.52 présente quelques exemples d'évolution de signaux de vitesse consécutivement à l'application des conditions aux limites de la figure 4.51. Le modèle réduit permet de retrouver la dynamique générale de l'écoulement. Même si la différence entre simulation et prédiction reste sensible, elle est du même ordre que l'erreur commise lors de l'identification du modèle réduit cinétique.

Alors que la différence entre la simulation CFD et la prévision du modèle réduit cinétique est sensible, le modèle réduit pour la température parvient à prédire précisément les évolutions des températures, que ce soit dans le sillage du cylindre ou dans sa partie solide, comme l'illustre la figure 4.53.

4.5.2.5 Conclusions sur ces deux modèles

Deux modèles réduits transitoires ont été construits. L'un permet de relier une loi de vitesse d'entrée à un champ de vitesse transitoire. Le second associe cette loi de vitesse, un état réduit cinétique calculé à l'aide de celle-ci, et une loi de température de cylindre, à des températures transitoires, mesurées dans la zone fluide (sillage) ou dans la région solide.

À l'utilisation, le modèle réduit cinétique permet de retrouver l'évolution du champ de vitesse que produirait le solveur CFD, même si l'erreur commise reste sensible. Il semble que des problèmes de convergence des calculs de référence pourraient entraîner une dégradation de

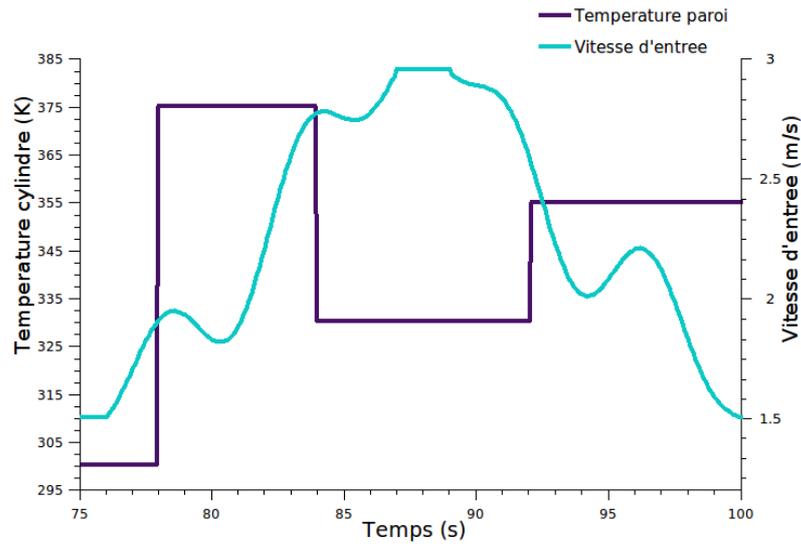


FIG. 4.51 – Conditions aux limites utilisées pour valider les modèles réduits cinétique et thermique de température.

la qualité du modèle. Malgré tout, l'erreur commise en réponse à une loi de vitesse d'entrée quelconque, reste comparable à celle qui apparaît au cours du processus d'identification.

Une fois construit, le modèle réduit thermique permet de prévoir avec une précision très satisfaisante l'évolution des températures en réponse à des entrées en vitesse et en température de paroi quelconques. Même s'il est construit à partir de l'état du modèle réduit cinétique, qui semble t-il, est très sensible aux problèmes de convergence, et arbore une erreur visible, le modèle réduit de température parvient à fournir les évolutions des champs de température au cours du temps avec des précisions de l'ordre du kelvin.

Nous venons donc de voir qu'il est possible de mettre en place des modèles réduits transitoires fournissant les évolutions de signaux de vitesse et/ou de température relatifs à des vitesses d'entrée et températures imposées variables quelconques. Nous essayons maintenant d'utiliser la même méthode dans le cas où l'observable qui intéresse l'utilisateur se résume au flux de chaleur à travers la surface du cylindre.

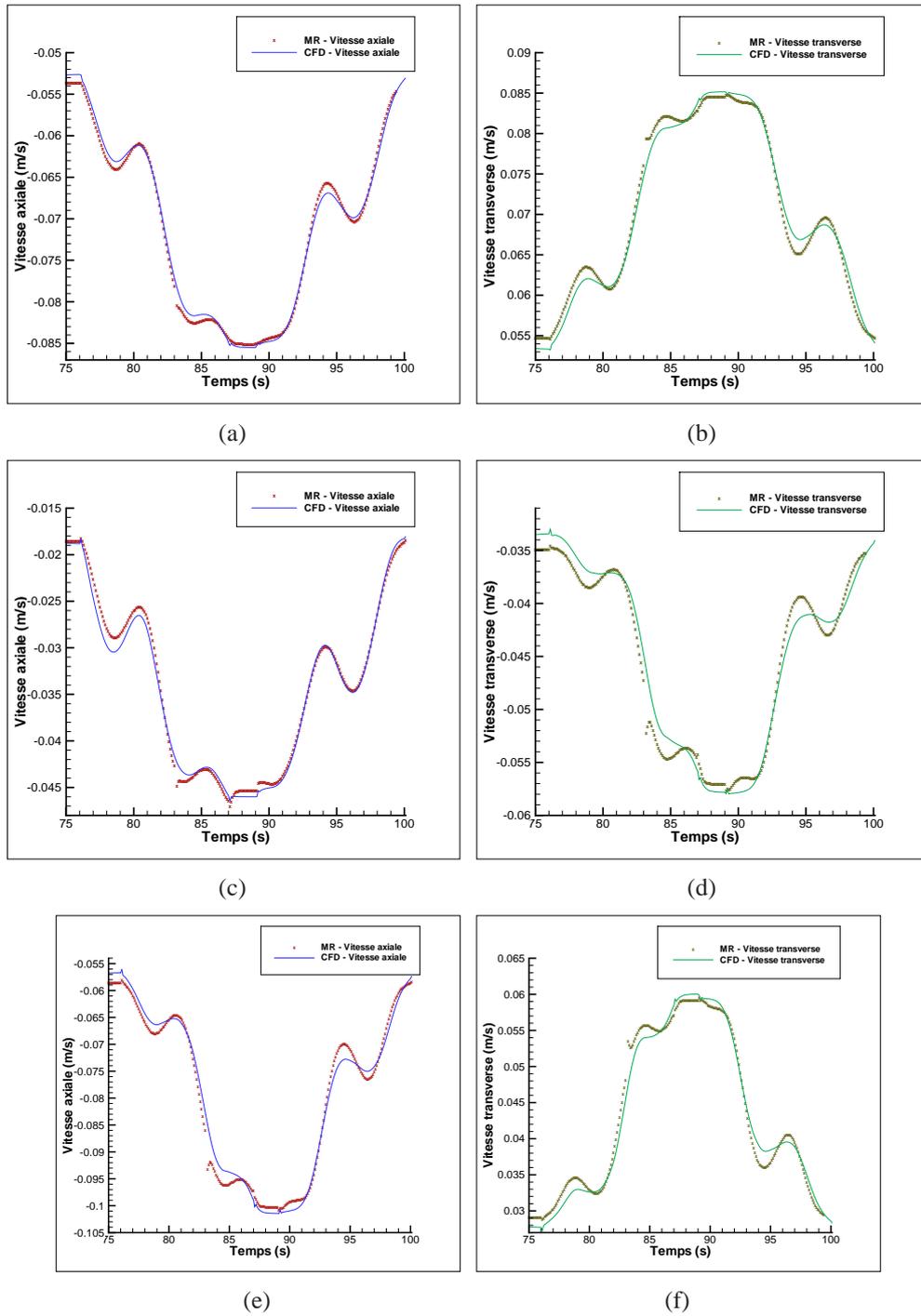


FIG. 4.52 – Validation du modèle réduit cinétique transitoire : comparaison de composantes axiales et transverses de signaux de vitesse dans le sillage. Figures 4.52(a) et 4.52(b) : position $(0,8r_c;0,8r_c)$. Figures 4.52(c) et 4.52(d) : position $(1,5r_c;-r_c)$. Figures 4.52(e) et 4.52(f) : position $(2,5r_c;0,75r_c)$.

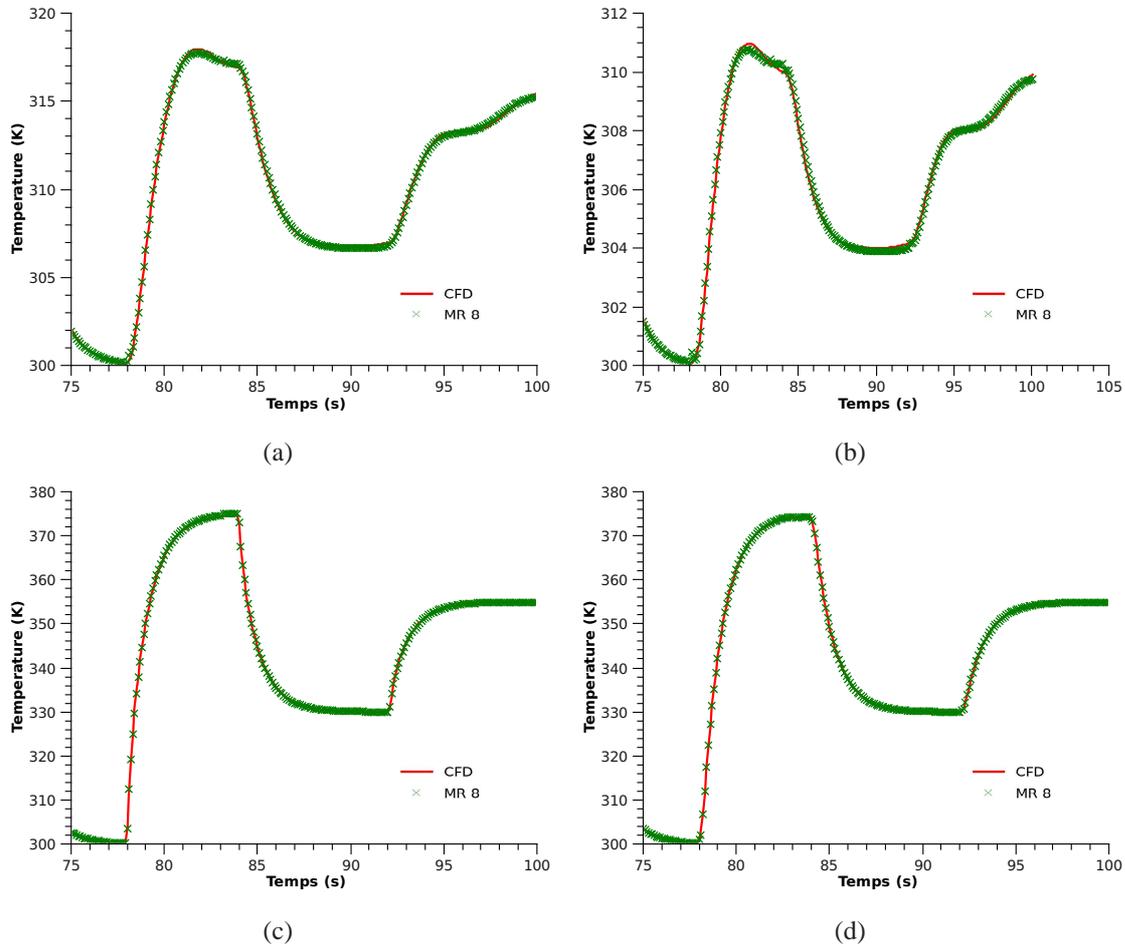


FIG. 4.53 – Modèle réduit transitoire pour les températures : comparaisons entre les températures prédites par le modèle réduit d'ordre 8 et celles effectivement calculées par le solveur CFD. Les figures 4.53(a) et 4.53(b) correspondent à des cellules situées dans le sillage du cylindre (en $(1, 1r_c; 0, 5r_c)$ et $(2, 2r_c; r_c)$). Les figures 4.53(c) et 4.53(d) concernent des cellules situées dans la partie solide (en $(0, 74r_c; 0, 419r_c)$ et $(0, 092r_c; 0, 938r_c)$.)

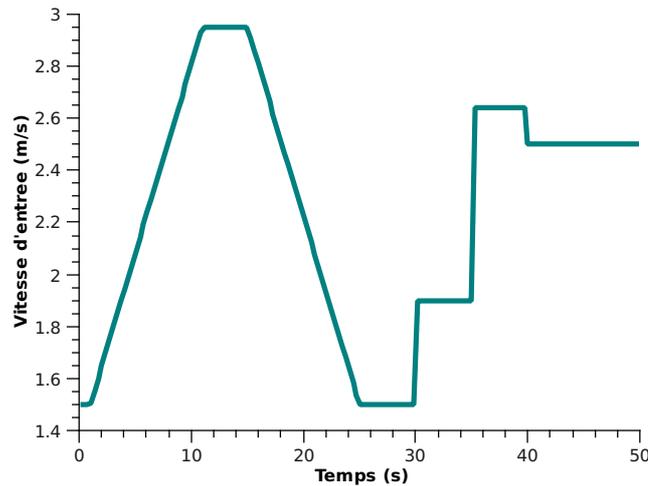


FIG. 4.54 – Loi de vitesse d'entrée ayant servi à l'échantillonnage pour la construction de la part cinétique du modèle réduit transitoire de flux de chaleur.

4.5.3 Réduction de modèle transitoire pour le flux de chaleur

4.5.3.1 Objectifs

Comme dans le paragraphe 4.5.2, l'entrée du modèle réduit que nous allons construire consiste en :

1. une vitesse d'entrée transitoire du fluide,
2. une température transitoire imposée sur la surface intérieure du solide.

Le modèle doit prévoir avec précision le flux de chaleur total échangé entre le cylindre et le fluide environnant. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 4.2.5, le flux de chaleur est calculé par le code CFD par intégration de la répartition de densité de flux à la surface. Le modèle réduit fournit lui directement ce scalaire : dans l'approche de réduction de modèle, le flux de chaleur n'est pas obtenu par post-traitement.

Dans la mesure où la méthodologie de construction et d'évaluation du modèle réduit pour le flux est identique à celle du modèle réduit de température présenté plus haut, nous présenterons brièvement les différentes étapes et les résultats obtenus.

4.5.3.2 Construction du modèle réduit cinétique

La méthodologie choisie pour construire un modèle réduit thermique en convection forcée, débute par la mise en place d'un modèle réduit cinétique. Cette fois-ci, nous considérons que le modèle réduit cinétique ne nous intéresse pas en tant qu'outil de prévision d'un champ de vitesse. On a besoin d'un état réduit cinétique pour construire et utiliser le modèle réduit thermique, et l'identification d'un modèle réduit cinétique se fait à cette fin. Pour cette raison, on peut limiter les observables du modèle réduit cinétique à quelques composantes de vitesse prises en quelques cellules du maillage. En l'occurrence, nous utilisons la vitesse calculée aux positions $(1, 5r_c; 0)$, $(1, 5r_c; 1, 5r_c)$, $(2, 0r_c; r_c)$ et $(2, 5r_c; r_c)$, en réponse à la loi de vitesse représentée sur la figure 4.54. La structure du modèle réduit cinétique est inchangée, il s'agit de celle présentée dans l'équation (4.9).

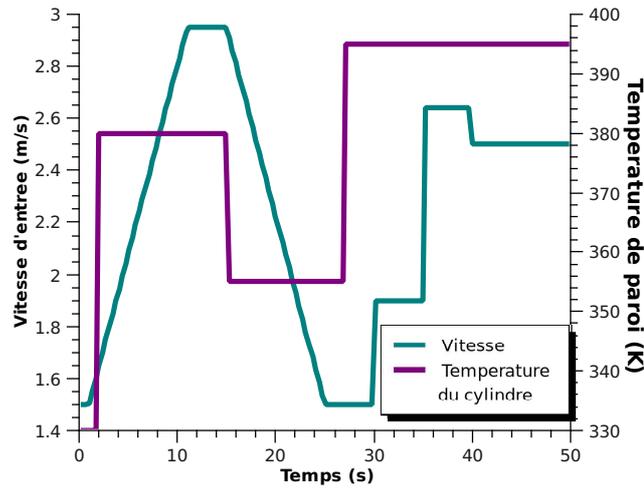


FIG. 4.55 – Conditions aux limites utilisées pour collecter les données de référence nécessaires à la construction du modèle réduit pour les flux thermiques. La vitesse d'entrée est celle qui apparaît sur la figure 4.54.

4.5.3.3 Identification du modèle réduit transitoire de flux de chaleur

L'échantillonnage servant à la construction du modèle réduit de flux thermique se compose des flux calculés par le solveur CFD en réponse aux conditions aux limites présentées sur la figure 4.55. Les données de flux ont été collectées, et quatre modèles réduits thermiques ont été construits pour les reproduire, comme le montre la figure 4.56.

Les quatre modèles captent correctement les variations de flux consécutives à l'application des conditions aux limites transitoires en vitesse et température, et cela à tel point que l'examen de la figure 4.56 ne permet pas d'affirmer qu'un modèle est meilleur qu'un autre. Si on trace l'erreur produite par ces modèles (figure 4.57), on s'aperçoit néanmoins que, même si l'erreur reste négligeable, les modèles d'ordre 8 et 10 se comportent mieux que ceux d'ordre 6 et 7. Le tableau 4.13 illustre ce résultat de façon plus globale en fournissant les erreurs quadratiques non adimensionnées moyennées sur la durée de l'échantillonnage τ_{id} :

$$j_2 = \sqrt{\frac{1}{\tau_{id}} \int_{t=0}^{\tau_{id}} (y(t) - y^*(t))^2 dt} \quad (4.11)$$

Le tableau 4.14 donne quelques indications sur le modèle réduit thermique d'ordre 10.

TAB. 4.13 – Erreur quadratique moyenne j_2 ((4.11)) des modèles réduits thermiques transitoires de flux de chaleur.

Ordre du modèle	Erreur j_2 (W)
6	0,338
7	0,357
8	0,075
10	0,064

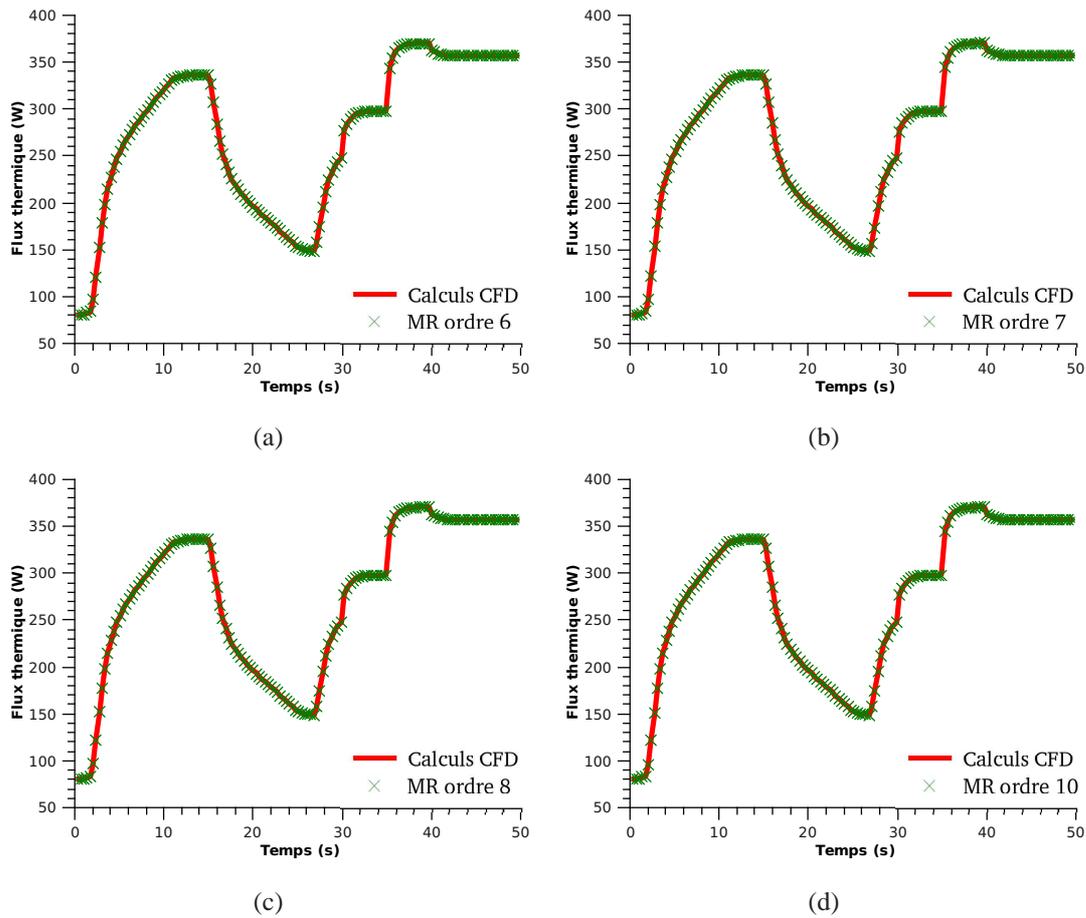


FIG. 4.56 – Comparaisons entre les flux thermiques calculés par le code CFD et ceux prédits par les modèles réduits en réponse aux conditions aux limites de la figure 4.55. Les ordres des modèles réduits présentés sont respectivement 6, 7, 8 et 10. L'erreur faite par ces modèles est affichée sur la figure 4.57.

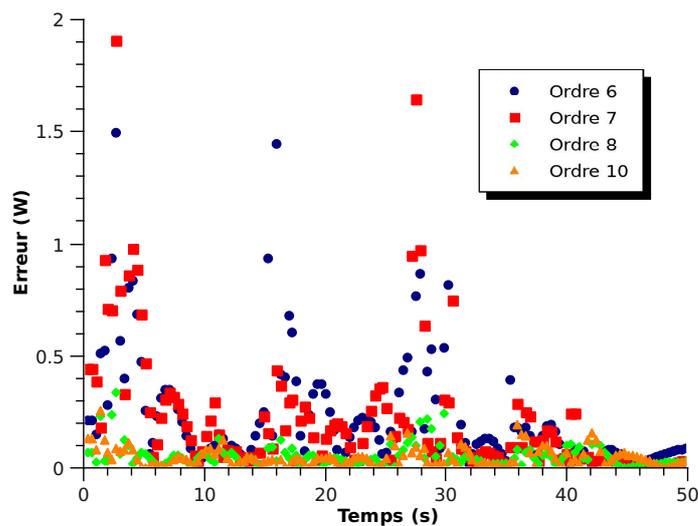


FIG. 4.57 – Erreur commise par les quatre modèles réduits thermiques présentés sur la figure 4.56 en réponse au signal d'échantillonnage.

TAB. 4.14 – Composition du modèle réduit thermique transitoire d'ordre 10 pour le flux de chaleur, et détails de construction.

Type de modèle	thermique transitoire
Structure	Equation (3.58)
Ordre	10
Ordre MR cinétique	8
Nombre d'entrées	3 (dont 1 constante)
Nombre de composantes (équation d'état)	
Total	220
Part linéaire d_T	10
Part non linéaire b_{T1}, b_{T2}	100 + 80
Commande linéaire $a_T^{(\partial\Omega)}$	20
Commande non linéaire $b_T^{(\partial\Omega)}$	10
Nombre d'observables	1
Nombre de pas de temps	147
Pas de temps	0,3392 s

4.5.3.4 Utilisation du modèle réduit pour les flux thermiques

Une fois ces modèles construits, on peut les utiliser pour évaluer le flux de chaleur à travers la surface du cylindre pour n'importe quelle loi de vitesse d'entrée ou de température d'entrée. Par exemple, la figure 4.59 montre que si on cherche le flux thermique qui résulte de l'utilisation des conditions aux limites de la figure 4.58, les quatre modèles réduits fournissent une bonne approximation de ce que calcule effectivement le solveur CFD.

Les quatre modèles parviennent à prédire le comportement du transfert de chaleur calculé par le code CFD. Nous avons vu au paragraphe précédent que les modèles d'ordre 6 et 7 ont, pour la phase d'identification, un niveau d'erreur global plus important que les modèles d'ordre 8 et 10. Cependant, ce constat ne permet pas d'affirmer qu'ils seront également moins bons pour des conditions aux limites quelconques. La figure 4.60 retrace et compare les évolutions au cours du temps de l'erreur commise par les quatre modèles. L'ordre de grandeur de cette erreur reste effectivement très faible pour tous les ordres, mais le modèle d'ordre 10 s'en sort clairement mieux que les autres. Par contre, contrairement à ce que l'on avait vu durant la phase d'identification, le niveau d'erreur du modèle d'ordre 8 est le même que ceux des modèles d'ordre 6 et 7. Augmenter l'ordre peut avoir un effet bénéfique à l'identification sans pour autant résulter en une amélioration générale du modèle.

Il n'est pas possible de déterminer a priori l'ordre de modèle qui fournira les "meilleurs" résultats. De toutes façons, le choix de l'ordre est limité par les contraintes inhérentes à l'optimisation globale. De plus, rien ne garantit que les qualités obtenues lors de la phase d'identification soient conservées lorsque le modèle est utilisé pour d'autres commandes, mêmes proches des entrées d'échantillonnage. Déterminer un ordre de réduction tient donc de l'essai-erreur :

1. on s'assure que l'erreur du modèle en réponse aux commandes d'échantillonnage est acceptable, c'est-à-dire qu'elle reste en deçà d'une valeur seuil ;
2. on vérifie que l'erreur reste acceptable pour une ou plusieurs commandes "test" ;

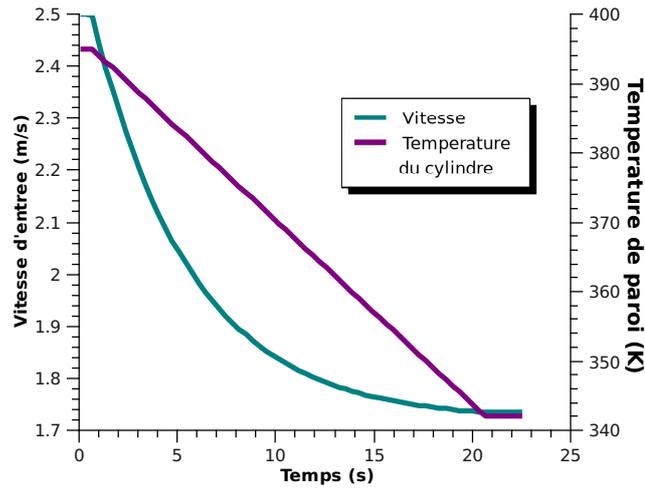


FIG. 4.58 – Conditions aux limites pour l'évaluation du modèle réduit transitoire thermique.

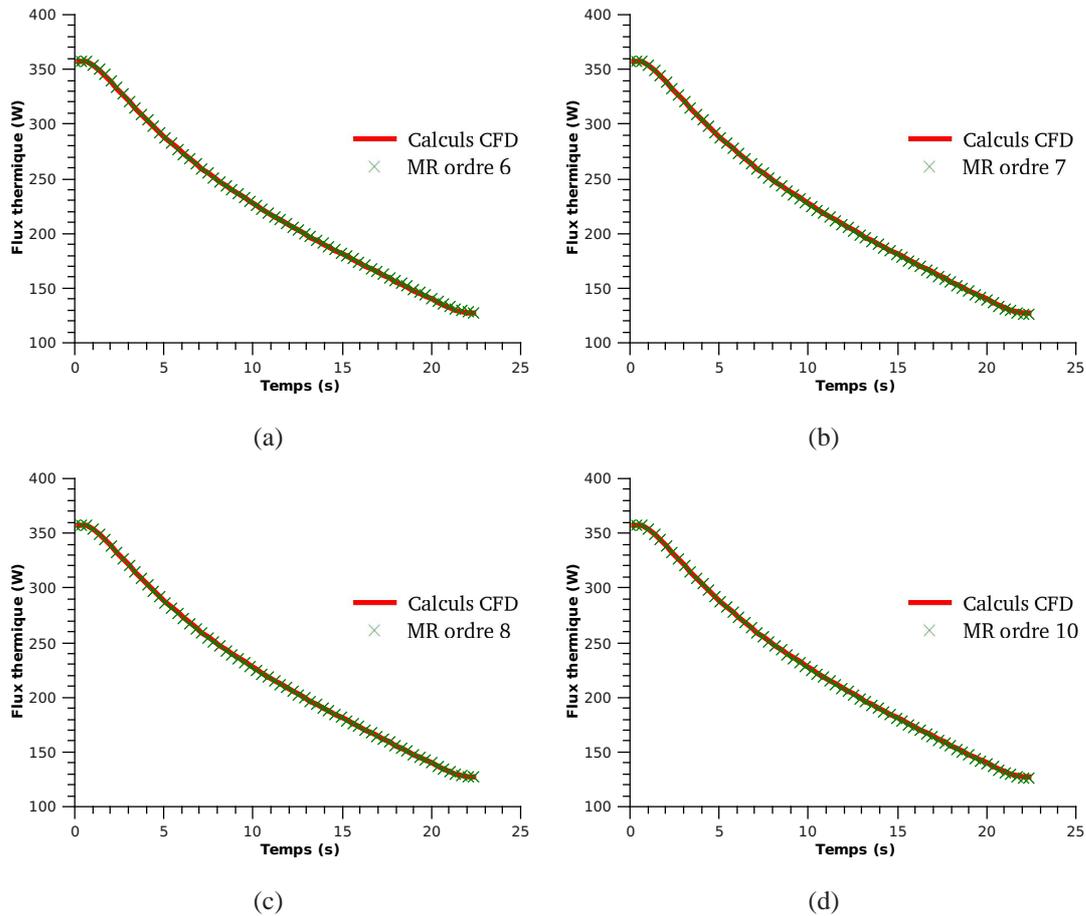
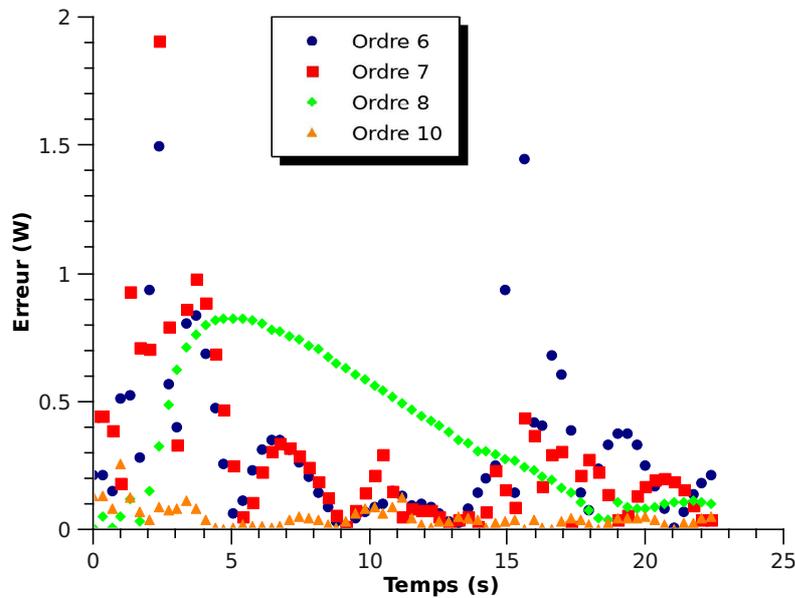


FIG. 4.59 – On évalue les modèles réduits transitoires pour les flux thermiques en comparant leur réponse à celle que le solveur CFD propose relativement aux conditions limites de la figure 4.58. Les ordres sont respectivement 6, 7, 8 et 10.



(a)

FIG. 4.60 – Comparaison des erreurs produites par les quatre modèles réduits thermiques en réponse aux conditions aux limites de la figure 4.58 (phase d'évaluation).

3. si ce n'est pas le cas, on peut modifier l'ordre du modèle, soit en l'augmentant (pour l'enrichir), soit en le diminuant (pour faciliter l'optimisation).

4.5.3.5 Conclusions sur l'utilisation du modèle réduit transitoire pour les flux thermiques

Ces travaux ont permis d'illustrer l'applicabilité des méthodes d'identification modale lorsque les observables ne sont pas des variables d'état de l'écoulement (vitesse ou température), mais une grandeur post-traitée au cours du processus CFD.

Pour construire le modèle réduit transitoire thermique, un modèle réduit cinétique est nécessaire. Dans l'exemple qui nous occupe, nous constatons que même en accordant peu d'importance à la qualité du modèle réduit cinétique, le processus d'identification permet de construire un modèle réduit thermique précis. Supposons que l'on soit en présence de soucis de convergence, ou que l'on ne puisse avoir confiance en la qualité du calcul des champs de vitesse. A partir du moment où les champs thermiques sont déterminés avec une précision satisfaisante pour l'utilisateur (exemple du régime transitoire du paragraphe 4.3.3), on pourra construire un modèle réduit thermique transitoire de qualité équivalente à celle des données thermiques.

Plutôt que d'identifier distinctement des modèles réduits cinétiques puis thermiques, on aurait également pu identifier d'un coup un modèle global dont la structure serait constituée :

- d'une équation d'état réduite cinétique de la forme (4.9a),
- d'une équation d'état réduite thermique de la forme (4.10a),
- d'une équation de projection thermique (4.10b).

Cela permettrait de ne plus avoir besoin de données de champ de vitesse, et, peut-être, d'accélérer le processus d'identification dans son ensemble. Une telle identification a été tentée pour proposer un modèle de flux de chaleur à travers la paroi du cylindre, mais n'a pas rencontré de succès. Le probable responsable de cet échec est le nombre d'inconnues du problème d'opti-

misation qui devient beaucoup plus important. Il devient difficile de trouver simultanément des matrices “cinétiques” et “thermiques” permettant de reproduire les données thermiques. Deux solutions sont envisageables :

1. construire un modèle dont les ordres cinétique et thermique sont faibles, puis l'utiliser pour initialiser un modèle d'ordres supérieurs ;
2. commencer par construire deux modèles distincts, comme présenté dans ce paragraphe, et les utiliser pour initialiser un modèle réduit “global”, construit uniquement à partir des données thermiques.

4.5.4 Conclusions d'étape

Nous venons de montrer la capacité des méthodes d'identification modale à produire des modèles réduits transitoires pour des observables :

- cinétiques : tout ou partie d'un champ de vitesse
- thermiques : tout ou partie d'un champ de température, ou un flux de chaleur.

Ainsi, l'identification permet de traiter des observables correspondant aussi bien à des grandeurs réparties dans l'écoulement (champs de vitesse ou de température), qu'à des grandeurs intégrales, usuellement calculées en post-traitement (ici un flux de chaleur dissipé dans le fluide).

Les entrées de ces modèles sont des variations au cours du temps de conditions opératrices : vitesse et température imposées. Le principal constat que nous pouvons tirer des exemples que nous avons choisis est que la qualité d'un modèle réduit est liée entre autres à la qualité des simulations CFD qui fournissent les observables de référence.

L'écoulement semi-transitoire peut être vu comme un cas particulier d'écoulement transitoire. La vitesse d'entrée est constante, mais la température de cylindre varie au cours du temps. Nous montrons dans les paragraphes qui suivent comment la méthode d'identification modale peut-être appliquée à ce genre d'écoulement.

4.6 Réduction de Modèle en écoulement quasi-transitoire

4.6.1 Position du Problème

Au paragraphe 4.4, on a considéré que l'utilisateur des modèles réduits se donne les moyens d'une résolution temporelle fine du sillage instationnaire derrière un obstacle. Nous lui avons donc proposé une méthodologie de mise en place de modèles réduits instationnaires, capables de prédire un champ de vitesse instationnaire pour diverses vitesses d'entrée fixées. Dans le paragraphe 4.5, il était intéressé uniquement par les évolutions transitoires de ses observables, qu'ils soient cinétiques ou thermiques. Nous avons donc montré qu'il est également possible de produire des modèles réduits transitoires paramétrés par des conditions opératrices cinétiques et thermiques couplées.

L'utilisateur visé par le paragraphe 4.6 a un objectif différent. L'écoulement qu'il étudie est caractérisé par :

- un champ de vitesse fixe,
- et éventuellement un champ thermique transitoire.

Le champ de vitesse correspond à une ou plusieurs conditions aux limites de vitesse constantes dans le temps. Le champ thermique dépend lui non seulement de cette ou de ces conditions de vitesse d'entrée, mais aussi d'une ou de plusieurs conditions aux limites thermiques qui sont elles, transitoires. Ce type de simulations correspond au régime semi-transitoire évoqué au paragraphe 4.3.2.2.

La stratégie de réduction de modèle que nous présentons dans les paragraphes suivants répond à deux objectifs :

1. d'une part, pour une vitesse amont donnée, on veut prédire le champ de vitesse tel qu'il serait calculé par une simulation stationnaire ;
2. d'autre part, à champ de vitesse fixé, on veut prédire la réponse thermique instationnaire de l'écoulement.

Pour répondre à ces deux objectifs, on adopte la stratégie présentée au paragraphe 4.5.1.3, à savoir la construction de deux modèles réduits distincts :

- un modèle réduit cinétique pour le champ de vitesse,
- un modèle réduit thermique pour les réponses thermiques.

Dans le cas test que nous retenons, les paramètres d'entrée des modèles seront la vitesse amont du fluide, et la température du cylindre. Les observables que nous allons considérer sont :

- le champ de vitesse entier pour le modèle réduit cinétique,
- la température dans le sillage et la partie solide du cylindre,
- la répartition de densité de flux le long de la surface extérieure du cylindre,
- le flux de chaleur total à travers cette surface.

Chaque type d'observable a donné lieu à la construction d'un modèle réduit. Les trois derniers types d'observables sont dits thermiques. Les modèles réduits thermiques partagent tous les trois le même modèle réduit cinétique. Le paragraphe suivant 4.6.3 concerne la génération de ce modèle à partir de résultats de simulations CFD stationnaires. Puis nous verrons au paragraphe 4.6.4 comment l'utiliser pour construire des modèles réduits thermiques transitoires.

4.6.2 Utilisation de modèles réduits et de surfaces de réponse dans le cadre d'écoulements stationnaires

Une grande partie des problèmes d'ingénierie en mécanique des fluides consistent en la détermination d'observables correspondant à des écoulements stationnaires. La topologie de ces écoulements est fonction d'un plus ou moins grand nombre de paramètres (conditions aux limites, termes sources, paramètres géométriques, ...). Si leur résolution passe généralement par l'emploi d'une suite de codes CFD, ils sont également susceptibles de faire l'objet de l'utilisation de modèles réduits ou de surfaces de réponse, lorsque le nombre de paramètres est relativement faible.

Plusieurs méthodes de réduction de modèle basées sur la POD ont été conçues pour traiter de problèmes d'écoulements stationnaires. Les modes POD sont construits en prenant des réalisations de l'écoulement correspondant à diverses valeurs prises par les paramètres du modèle. Les différentes méthodes se distinguent dans le calcul des fonctions de base qui seront associées aux modes. Alonso *et al.* [47] proposent de les estimer en minimisant un résidu dérivé des équations continues (Navier-Stokes), et projetées sur des cellules du maillage et sur les conditions aux limites. La principale différence avec la projection Galerkin tient dans le fait que le calcul du résidu ne prend pas en compte l'intégralité des données, mais les valeurs prises par les grandeurs choisies (vitesse, température, ...) dans un nombre restreint de cellules. Ainsi, ils accélèrent l'estimation des fonctions de base, et ils éliminent également les cellules dans lesquelles la convergence ne serait pas assurée. La méthode est illustrée sur le cas d'un écoulement de marche descendante chauffée. Cet écoulement est caractérisé par

- un nombre de Reynolds qui varie entre 50 et 250,
- une température de chauffe sur la paroi inférieure de la marche, qui varie entre 293K et 353K.

L'objectif du modèle est de retrouver, à partir des champs de vitesse, de pression et de température fournis par le modèle réduit, la longueur de recirculation, le nombre de Nusselt caractérisant les échanges thermiques entre l'écoulement et la paroi inférieure de la marche, ainsi que la perte de charge entre l'entrée et la sortie de la marche.

Rambo et Joshi utilisent dans [48] la méthode de correspondance de flux (*Flux Matching Method*) décrite dans le paragraphe 2.2.3.2 du chapitre 2. Il s'agit de déterminer les fonctions de base en s'assurant que le champ reconstruit satisfait des conditions de flux à la frontière du domaine. Leur cas test est un écoulement de canal par-dessus deux blocs chauffés en tandem. Le

débit massique en entrée et les puissances thermiques dégagées par les blocs consistent les entrées de ce modèle. Les auteurs cherchent à déterminer les champs de vitesse et de température dans le canal.

Sur une géométrie similaire (canal plan avec des blocs chauffés), Jaluria [49] propose plusieurs surfaces de réponse de type Kriging pour établir un lien entre d'une part, la vitesse d'entrée de l'écoulement et les paramètres géométriques du canal, et d'autre part, soit des taux de transferts thermiques, soit des pertes de charges.

En utilisant une méthode d'identification modale, Rouizi *et al.* construisent un modèle réduit dans [50] qui permet de reconstruire le champ de vitesse stationnaire dans un écoulement de marche descendante, en fonction de la vitesse d'entrée, exprimée sous la forme d'un nombre de Reynolds.

4.6.3 Modèle Réduit d'un écoulement stationnaire autour d'un cylindre circulaire

4.6.3.1 Données de référence

Sept écoulements stationnaires ont été calculés. Ils correspondent à sept nombres de Reynolds compris entre 2000 et 4000. Le tableau 4.15 répertorie ces nombres de Reynolds, et les vitesses amont V_∞ leur correspondant. En chaque cellule du maillage, les deux composantes de la vitesse locale ont été récupérées pour servir de données de référence à la construction du modèle réduit.

TAB. 4.15 – Echantillonnage des données de référence pour le modèle réduit d'écoulement stationnaire. Correspondance entre les valeurs de vitesse amont V_∞ et les nombres de Reynolds caractéristiques des écoulements.

Nombre de Reynolds	Vitesse d'entrée
2050	1,5m.s ⁻¹
2200	1,61m.s ⁻¹
2405	1,76m.s ⁻¹
2802	2,05m.s ⁻¹
3212	2,35m.s ⁻¹
3826	2,8m.s ⁻¹
4031	2,95m.s ⁻¹

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 3 du chapitre 3.3.10.4, construire un modèle réduit qui se contente de bien correspondre aux données de référence aux points d'échantillonnage ne permet pas d'assurer que le modèle soit utilisable partout entre ces points. Pour régulariser le modèle, nous avons pris le parti d'inclure dans la construction du modèle des informations sur les dérivées des observables par rapport aux conditions aux limites. Dans le cas présent, il s'agit d'effectuer sept simulations supplémentaires, correspondant chacune à des vitesses d'entrée égales à 1,01 fois une vitesse d'entrée de point d'échantillonnage. Les vitesses amont utilisées sont répertoriées dans le tableau 4.16. A l'aide des 14 écoulements, on peut déterminer une approximation des dérivées des observables par rapport à la vitesse d'entrée du fluide.

TAB. 4.16 – Modèle réduit d'écoulement stationnaire : vitesses d'entrée pour le calcul de régularisation.

Nombre de Reynolds	V_∞	$V_\infty + \delta V_\infty$
2050	1,5m.s ⁻¹	1,5150m.s ⁻¹
2200	1,61m.s ⁻¹	1,6261m.s ⁻¹
2405	1,76m.s ⁻¹	1,7776m.s ⁻¹
2802	2,05m.s ⁻¹	2,0705m.s ⁻¹
3212	2,35m.s ⁻¹	2,3735m.s ⁻¹
3826	2,8m.s ⁻¹	2,8280m.s ⁻¹
4031	2,95m.s ⁻¹	2,9795m.s ⁻¹

4.6.3.2 Modèle et Identification

On essaie de proposer une approximation du champ de vitesse stationnaire autour du cylindre circulaire à l'aide d'un modèle réduit cinétique stationnaire dont la forme est décrite par (*c.f.* équation (3.59) du paragraphe 3.3.10.4) :

$$s_v + (b_{v1}s_v \bullet b_{v2}s_v) + a_v^\infty V_\infty + b_v^\infty \Psi_v^\infty = 0 \quad (4.12a)$$

$$y_v^* = h_v s_v \quad (4.12b)$$

Rappelons que l'identification des matrices présentes dans (4.12) se fait sur deux niveaux itératifs. A chaque itération de l'algorithme d'optimisation, de nouvelles matrices d'équation d'état sont d'abord déterminées. Il s'agit des matrices b_{v1} , b_{v2} , a_v^∞ et b_v^∞ . Pour ce jeu de matrices, on détermine une solution s_v à l'équation (4.12a). Puis la matrice de reprojction h_v est estimée par moindres carrés. Pour que cette estimation soit possible, il est nécessaire de disposer de plus de données (nombre d'observables \times nombre de points d'échantillonnage) que d'inconnues dans h_v (nombre d'observables \times ordre du modèle). Pour cette raison, l'ordre du modèle réduit doit être limité pour rester strictement inférieur au nombre de points d'échantillonnage disponibles. Cette problématique existe également lorsque le modèle est instationnaire ou transitoire, mais en pratique son ordre dépasse rarement la dizaine et on dispose de beaucoup plus d'instantés simulés.

En l'occurrence, ici avec 7 échantillons, on réalise un modèle réduit d'ordre 6. Le problème d'optimisation lié aux matrices d'état compte 90 inconnues. Le détail du nombre d'inconnues est repris dans le tableau 4.17. Le paragraphe suivant apporte quelques informations concernant le résultat du processus d'identification.

4.6.3.3 Résultats aux points d'échantillonnage

L'identification aboutit à un modèle réduit qui reproduit avec satisfaction les données de référence aux points d'échantillonnage. Le tableau 4.18 illustre la concordance entre les sorties du modèle réduit et celles du modèle détaillé en ces points. Le premier critère utilisé est l'erreur quadratique moyenne en chaque point d'échantillonnage V_∞ adimensionnée par la somme des valeurs de vitesse :

TAB. 4.17 – Composition du modèle réduit cinétique stationnaire, et détails de construction.

Type de modèle	cinétique stationnaire
Structure	Equation (3.59)
Ordre	6
Nombre d'entrées	1
Nombre de composantes (équation d'état)	
Total	84
Part non linéaire b_{v1}, b_{v2}	2×36
Commande linéaire a_v^∞	6
Commande non linéaire b_v^∞	6
Nombre d'observables	524000
Nombre d'échantillons	7 (+7)

$$j_1(V_\infty) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{2N} (y_k(V_\infty) - y_k^*(V_\infty))^2}{\sum_{k=1}^{2N} y_k(V_\infty)^2}} \quad (4.13)$$

où N désigne le nombre de cellules dans le maillage (262000), où les y_k sont les valeurs que prennent les composantes de la vitesse aux centres de ces cellules, et où les y^* sont les approximations correspondantes fournies par le modèle réduit. Le second critère est lui aussi une erreur quadratique, mais non adimensionnée et moyennée pour chaque V_∞ sur l'ensemble des cellules du maillage :

$$j_2(V_\infty) = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} (y_k(V_\infty) - y_k^*(V_\infty))^2} \quad (4.14)$$

Le troisième critère est l'erreur maximale en valeur absolue, le quatrième est la moyenne de l'erreur en valeur absolue, et le cinquième est l'écart-type de cette erreur. La figure 4.61 permet de comparer les champs de vitesse en divers points d'échantillonnage.

Le modèle réduit cinétique permet donc de reproduire avec précision des champs de vitesse stationnaires fournis par le modèle CFD. Le paragraphe suivant est consacré à la validation de ce modèle ailleurs qu'aux points d'échantillonnage.

4.6.3.4 Validation du modèle cinétique

Quatre simulations CFD supplémentaires ont été réalisées pour des vitesses d'entrée listées dans le tableau 4.19. Ce tableau évalue également la qualité de l'accord entre le calcul CFD et le modèle réduit en ces quatre points. On y note que dans le pire des cas, l'erreur reste inférieure à $5,0 \cdot 10^{-2} \text{m.s}^{-1}$.

La figure 4.62 présente quelques exemples de champ de vitesse prédits par le modèle réduit.

Ainsi, globalement, le modèle réduit donne une bonne approximation des champs de vitesse entre les points. Contrairement aux modèles présentés dans les sections précédentes, l'erreur

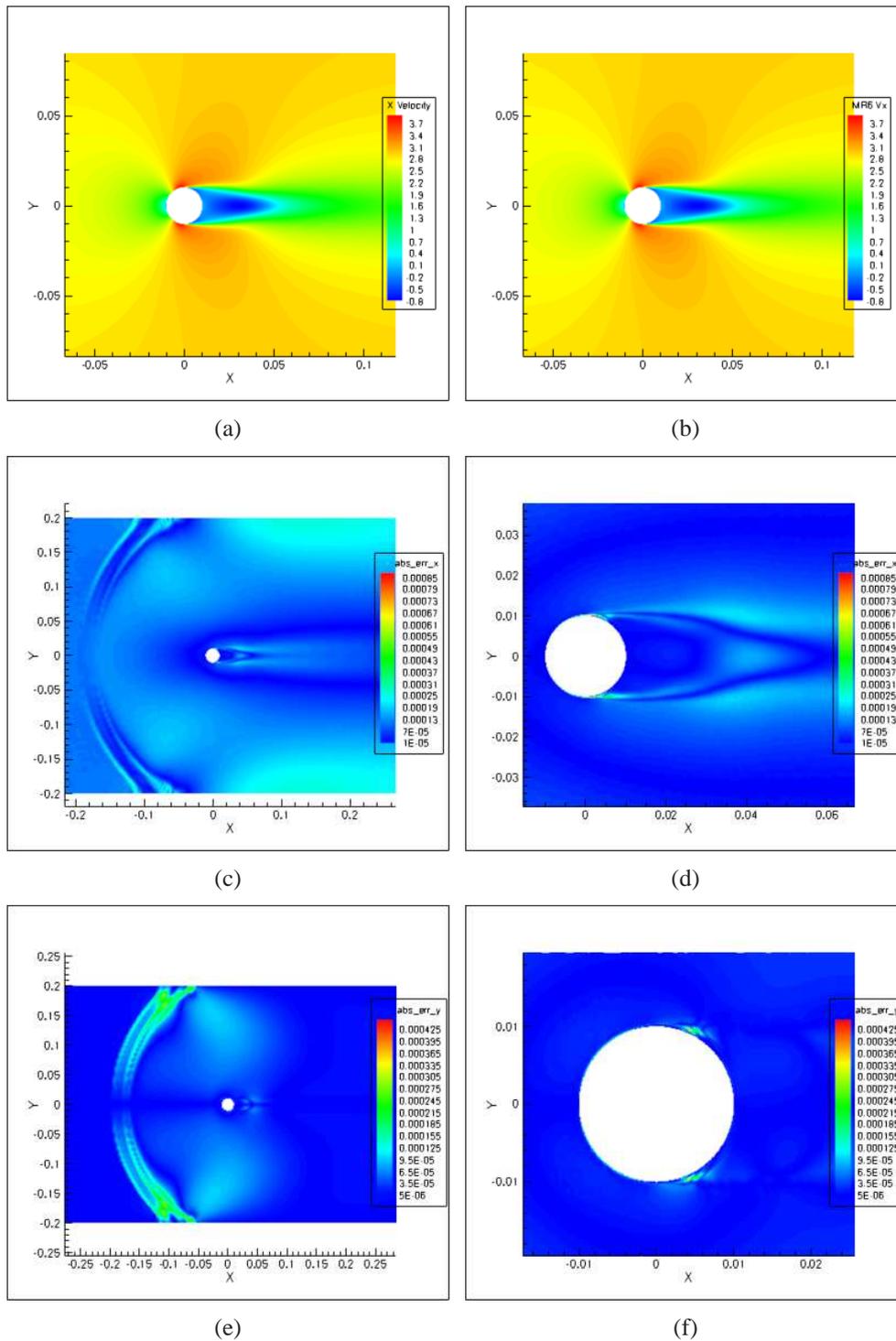


FIG. 4.61 – Identification du modèle réduit cinétique stationnaire. L'écoulement correspondant à une vitesse d'entrée de $2,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sert d'exemple. Il s'agit d'un point d'échantillonnage. Les figures 4.61(a) et 4.61(b) correspondent à la composante axiale de la vitesse calculée respectivement par le solveur CFD et par le modèle réduit d'ordre 6. Les figures 4.61(c) et 4.61(e) représentent les erreurs faites sur les composantes axiale puis transverse du champ de vitesse. Les figures 4.61(d) et 4.61(f) font de même, mais en zoomant près de la paroi du cylindre.

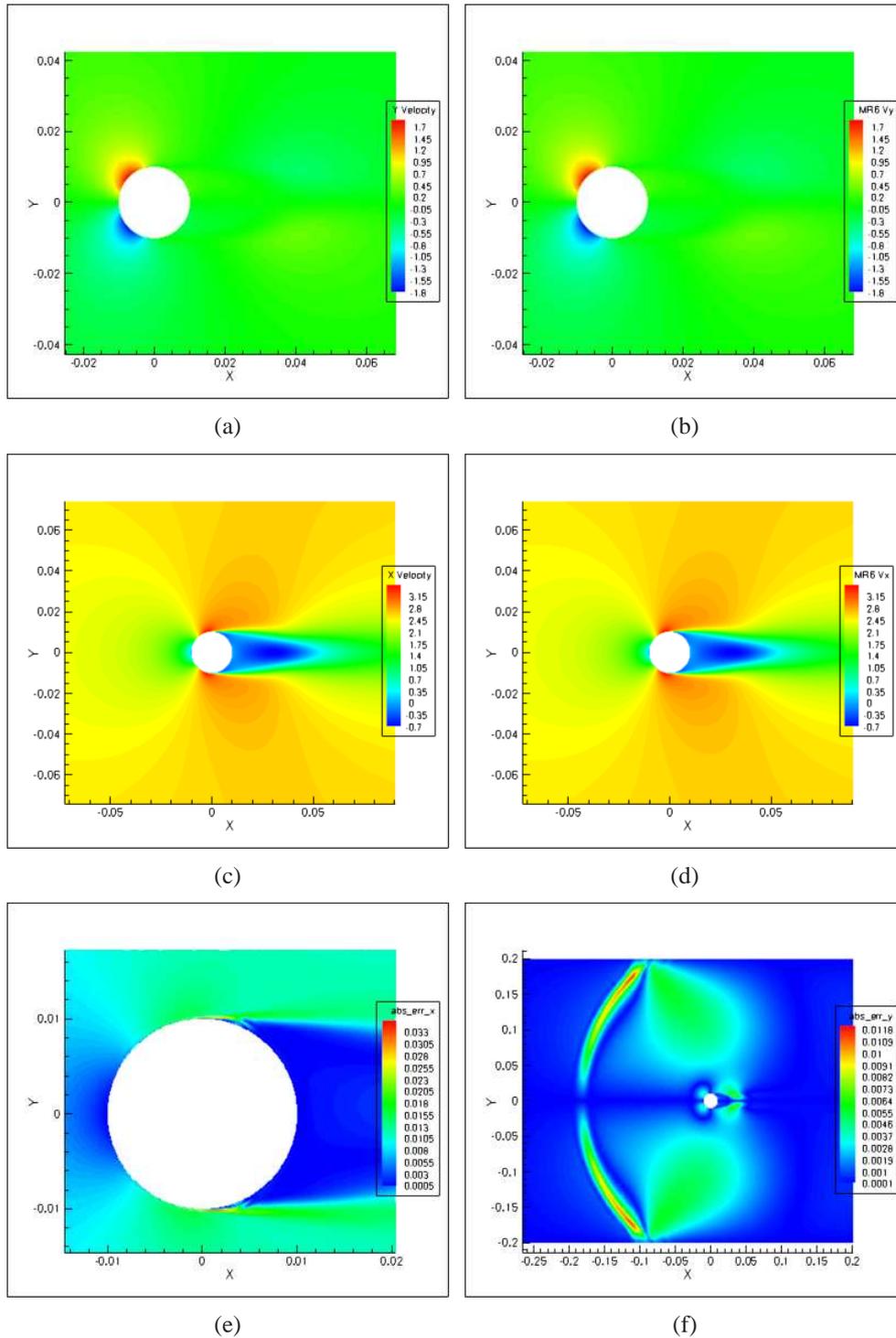


FIG. 4.62 – Evaluation du modèle réduit cinétique stationnaire ailleurs qu’aux points d’échantillonnage. Figures 4.62(a) et 4.62(b) : composantes transverses des vitesses calculées par la CFD et prévues par le modèle réduit d’ordre 6 pour une vitesse d’entrée de $2,20 \text{ m.s}^{-1}$. Figures 4.62(c) et 4.62(d) : composantes axiales de la vitesse (CFD puis MR) pour une vitesse d’entrée de $2,5 \text{ m.s}^{-1}$. Les figures 4.62(e) et 4.62(f) sont des cartographies des erreurs faites respectivement sur les composantes axiale ($2,20 \text{ m.s}^{-1}$) et transverse ($2,5 \text{ m.s}^{-1}$) du champ de vitesse.

TAB. 4.18 – Etape d’identification - Evaluation de l’accord entre les champs de vitesse calculés par le solveur CFD et ceux proposés par le modèle réduit.

Vitesse amont (m.s ⁻¹)	1.5	1.61	1.76	2.05
j_1	7.70.10 ⁻⁵	1.64.10 ⁻⁴	1.00.10 ⁻⁴	1.38.10 ⁻⁵
j_2 (m.s ⁻¹)	7.77.10 ⁻⁵	1.78.10 ⁻⁴	1.19.10 ⁻⁴	1.91.10 ⁻⁵
max y - y* (m.s ⁻¹)	9.30.10 ⁻⁴	2.13.10 ⁻³	1.42.10 ⁻³	2.29.10 ⁻⁴
mean y - y* (m.s ⁻¹)	5.12.10 ⁻⁵	1.17.10 ⁻⁴	7.82.10 ⁻⁵	1.26.10 ⁻⁵
σ (y - y*) (m.s ⁻¹)	5.85.10 ⁻⁵	1.34.10 ⁻⁴	8.93.10 ⁻⁵	1.44.10 ⁻⁵
Vitesse amont (m.s ⁻¹)	2.35	2.8	2.95	
j_1	2.07.10 ⁻⁵	7.23.10 ⁻⁵	5.22.10 ⁻⁵	
j_2 (m.s ⁻¹)	1.31.10 ⁻⁵	3.82.10 ⁻⁵	2.62.10 ⁻⁵	
max y - y* (m.s ⁻¹)	2.48.10 ⁻⁴	8.65.10 ⁻⁴	6.25.10 ⁻⁴	
moy y - y* (m.s ⁻¹)	1.36.10 ⁻⁵	4.76.10 ⁻⁵	3.44.10 ⁻⁵	
σ (y - y*) (m.s ⁻¹)	1.56.10 ⁻⁵	5.44.10 ⁻⁵	3.93.10 ⁻⁵	

TAB. 4.19 – Modèle réduit cinétique stationnaire. Evaluation de la qualité du modèle ailleurs qu’aux points d’échantillonnage.

Vitesse amont (m.s ⁻¹)	1.9	2.2	2.5	2.64
Nombre de Reynolds	2.595	3.007	3.417	3.608
j_1	7.15.10 ⁻³	4.20.10 ⁻³	4.02.10 ⁻⁴	2.31.10 ⁻⁴
j_2 (m.s ⁻¹)	9.15.10 ⁻³	6.23.10 ⁻³	4.98.10 ⁻⁴	4.12.10 ⁻⁴
max y - y* (m.s ⁻¹)	4.20.10 ⁻²	3.54.10 ⁻²	3.42.10 ⁻³	3.94.10 ⁻³
mean y - y* (m.s ⁻¹)	6.56.10 ⁻³	4.48.10 ⁻³	4.61.10 ⁻⁴	2.98.10 ⁻⁴
σ (y - y*) (m.s ⁻¹)	6.38.10 ⁻³	4.33.10 ⁻³	4.98.10 ⁻⁴	2.84.10 ⁻⁴

faite entre les points d’échantillonnage est tout de même sensiblement plus grande que celle faite aux points d’échantillonnage. Ce constat indique que la méthodologie peut encore être améliorée.

On peut se demander s’il existe une “source” majeure d’erreur. La première candidate concerne la modélisation. Toute la théorie présentée dans le chapitre 3 revient à se baser sur une équation d’état réduite mettant en jeu différents termes dérivés des équations de Navier-Stokes. L’identification consiste à régler ces termes en se servant de solutions avérées des équations de Navier-Stokes. Seulement, *stricto sensu*, les champs de vitesse dont nous nous sommes servis pour identifier le modèle, ne sont pas des solutions des équations de Navier-Stokes. En effet, puisqu’ils ont été obtenus à l’aide d’un modèle de turbulence, ce sont des solutions des équations de Navier-Stokes moyennées :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} p - \overrightarrow{\text{vdiv}}(\overline{\overline{\vec{v}}} + {}^t\overline{\overline{\vec{v}}}) - \overrightarrow{\text{div}}(R) = 0 \tag{4.15}$$

où R est la matrice des tensions de Reynolds. L’objet du modèle de turbulence est de proposer une manière de calculer ce terme. Dans l’équation d’état du modèle réduit, il n’y a rien qui soit dérivé du terme en tensions de Reynolds. Dans la mesure où celui-ci ne peut a priori pas être relié linéairement ou quadratiquement au champ de vitesse, il devrait induire une erreur

forte du modèle réduit dans les cellules où il est important.

Pour le vérifier, nous avons calculé, pour $V_\infty = 1,90\text{m.s}^{-1}$, les corrélations entre :

- la valeur absolue des composantes axiale ou transverse de l’erreur,
- et les valeurs absolues des différents termes de l’équation moyennée de quantité de mouvement (4.15), tels qu’ils sont calculés par le code CFD.

L’erreur absolue commise localement par le modèle réduit sur la composante du champ de vitesse dans une direction x est noté err_x et sa valeur moyenne vaut $e\bar{r}r_x$. g_x est la valeur prise localement par la composante axiale de l’un des termes de l’équation de quantité de mouvement moyennée (4.15) (viscosité, convection, gradient de pression ou tensions de Reynolds). Sa moyenne est \bar{g}_x . La corrélation entre err_x , la composante axiale de l’erreur, et g_x , la composante axiale du terme de l’équation RANS, est calculée ainsi :

$$corr(err_x, g_x) = \frac{\int_{(\Omega)} (err_x - e\bar{r}r_x) (g_x - \bar{g}_x) d\Omega}{\int_{(\Omega)} (err_x - e\bar{r}r_x) d\Omega \int_{(\Omega)} (g_x - \bar{g}_x) d\Omega} \in [-1; 1] \quad (4.16)$$

Le terme local $(err_x - e\bar{r}r_x) (g_x - \bar{g}_x)$ est relativement important lorsque l’erreur est plus forte que la moyenne, et que la grandeur g_x a plus de poids qu’en moyenne dans l’équation de quantité de mouvement RANS. La corrélation (4.16) permet donc de quantifier, de façon globale, si la cartographie de l’erreur coïncide avec celle de la grandeur g_x . Le tableau 4.20 répertorie ces corrélations. On observe que si aucune corrélation n’est significative, on peut toutefois conclure que ne pas rajouter dans l’équation d’état réduite un terme correspondant à l’effet sur le champ moyen des tensions de Reynolds, n’ajoute pas une source majeure d’erreur.

TAB. 4.20 – Corrélations entre les composantes de l’erreur absolue (x_1 et x_2) et les composantes correspondantes des valeurs absolues des différents termes des deux équations RANS. Vitesse d’entrée : 1.90m.s^{-1} .

erreur en x_1 et	convection (x_1)	cisaillement (x_1)	$\frac{\partial p}{\partial x_1}$	$\frac{\partial R_{1j}}{\partial x_j}$
	-0.188	-0.016	-0.131	-0.015
erreur en x_2 et	convection (x_2)	cisaillement (x_2)	$\frac{\partial p}{\partial x_2}$	$\frac{\partial R_{2j}}{\partial x_j}$
	0.325	0.068	0.365	0.051

Une autre source d’erreur pourrait provenir de la résolution de l’équation d’état réduit stationnaire (4.12a). Pour chaque entrée V_∞ , on détermine un pôle de celle-ci en minimisant un critère quadratique sur son résidu, via une méthode dite de Maxwell-Powell. Cependant, a priori, cette équation possède plusieurs zéros. La figure 4.63 présente des diagrammes de phase réalisés sur l’intervalle de vitesse d’entrée $[1,61\text{m.s}^{-1}; 2,95\text{m.s}^{-1}]$. Il s’agit comme dans le paragraphe 4.4.3.3, de tracer l’évolution d’une composante de l’état réduit, en fonction d’une autre. En chaque point, on a vérifié que l’équation d’état réduite était bien résolue. A la lecture des diagrammes de phase, il semble que l’algorithme de résolution de l’équation d’état par minimisation du résidu, aboutit à deux familles de solutions. Lorsque l’on parcourt le domaine $[1,61\text{m.s}^{-1}; 2,95\text{m.s}^{-1}]$, on passe de l’une à l’autre des familles de solutions. Ainsi, à cause de la difficulté de résoudre analytiquement le système d’équations quadratiques qu’est l’équation d’état, on aboutit à des fonctions de base non continues.

Sur les 7 points d’échantillonnage, les deux familles de solutions sont représentées. Le calcul de la matrice de reprojction h_v permet de faire correspondre le modèle réduit et le calcul

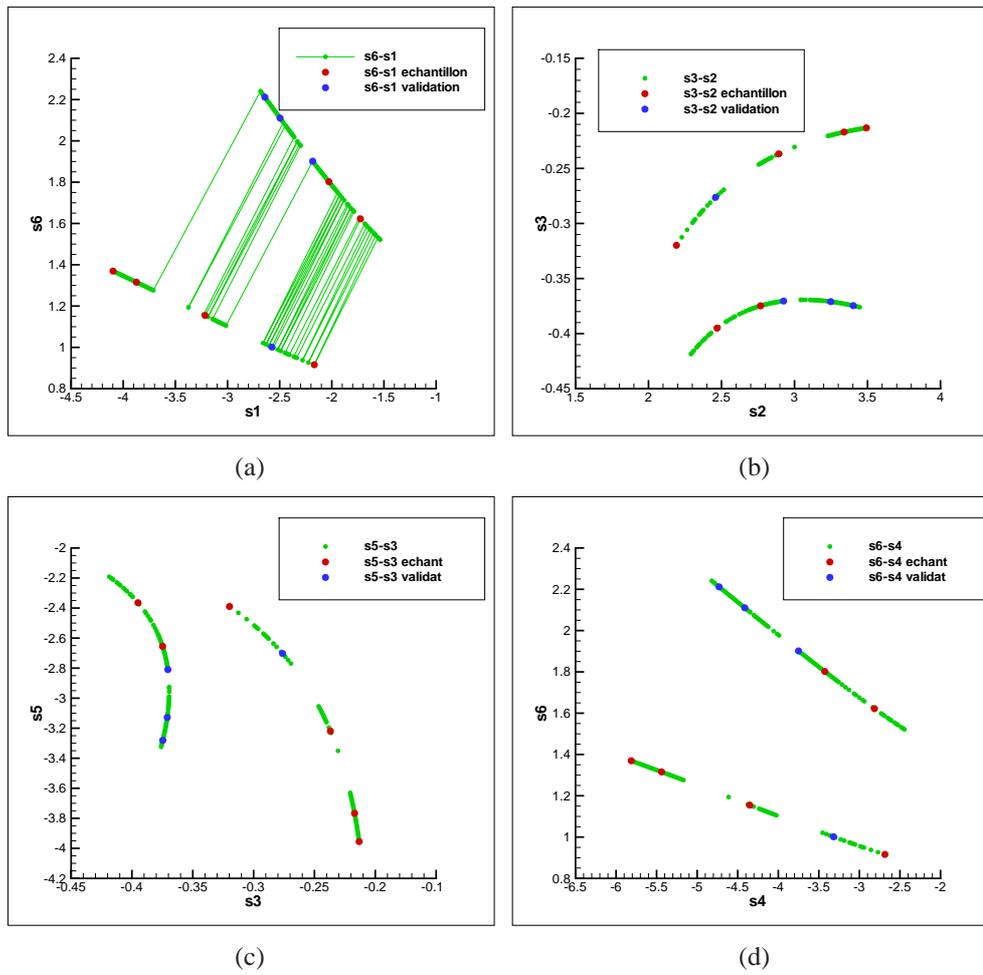


FIG. 4.63 – Ces diagrammes de phase sont obtenus en faisant varier la vitesse d’entrée entre $1,61\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $2,95\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Les positions des points d’échantillonnage sont repérées par des points rouges, et celles des points de validation par des points bleus. Ces diagrammes de phase mettent en évidence que la résolution de l’équation d’état réduit aboutit à deux “familles” de solutions. Sur la figure 4.63(a), les lignes montrent qu’en faisant varier la vitesse, on passe de façon discontinue et répétée d’une famille à l’autre.

CFD aux points d’échantillonnage en prenant en compte la possibilité de se trouver sur l’une ou l’autre des familles de solutions. Pour cette raison, on trouve toujours des champs de vitesse corrects, quelle que soit la famille de solutions sur laquelle se trouve l’état réduit. On peut imaginer cependant de rendre les fonctions de base continues en “forçant” l’algorithme de résolution à ne sélectionner qu’une des deux familles de solutions. Dans ce cas, il est à parier que la matrice de projection serait mieux adaptée et que l’on obtiendrait des résultats encore meilleurs aux points d’échantillonnage et entre ceux-ci.

Dans la mesure où l’on dispose d’un modèle réduit cinétique, il est maintenant possible de construire des modèles réduits thermiques basés sur lui. Ceux que nous étudions maintenant sont transitoires, alors que le modèle réduit cinétique est stationnaire. Pour cette raison, nous parlerons de modèle réduits thermique semi-transitoires.

4.6.4 Modèles Réduits d'un écoulement anisotherme semi-transitoire

4.6.4.1 Objectifs et observables

A champ de vitesse fixé, on suppose qu'il est possible de chauffer le cylindre circulaire. Une température dépendante du temps $T_p(t)$ est imposée sur sa surface interne. Des transferts thermiques vont alors prendre place :

- au sein de la région solide (conduction),
- entre le cylindre et le fluide (convection),
- dans le sillage du cylindre (conducto-convection).

L'objectif de cette partie sera de mettre en place des modèles réduits permettant d'évaluer les réponses transitoires d'observables thermiques. On y présentera les résultats de trois modèles réduits semi-transitoires. La vitesse d'entrée constante du fluide $V_\infty \in [1,5\text{m.s}^{-1}; 2,95\text{m.s}^{-1}]$ et la loi d'évolution de la température $T_p(t)$ imposée au cylindre seront les entrées de ces trois modèles. En réponse :

- un modèle fournira le champ de température dans la partie solide du cylindre et dans le sillage ;
- un autre fournira l'évolution au cours du temps de la répartition de densité de flux thermique à la surface du cylindre ;
- le troisième fournira le flux transitoire de chaleur total à la paroi.

Le modèle réduit de température est construit, comme celui du paragraphe 4.5.2, pour des cellules situées dans le domaine rectangulaire $[-1,2r_c; 2,8r_c] \times [0; 1,5r_c]$ (figure 4.42). On y trouve des cellules appartenant à la zone solide, ou au proche sillage.

4.6.4.2 Données de référence

La méthode usuelle [25, 45, 46] pour produire des données de référence pour identifier des modèles réduits thermiques transitoires, est de calculer la réponse du système à des échelons de sollicitation thermique. C'est ainsi que nous procédons ici. On réutilise les écoulements calculés au paragraphe 4.6.3 et qui ont servi de points d'échantillonnage. Pour chacun d'eux, on impose un ou plusieurs échelons de T_p dont les valeurs sont répertoriées dans le tableau 4.21. La température initiale dans le domaine est homogène et vaut 300K, ce qui correspond également à la température d'entrée du fluide.

TAB. 4.21 – Construction des modèles thermiques semi-transitoires : Echelons de température pour la collecte de données de référence.

Nombre de Reynolds	Vitesse d'entrée	Echelon de T_p 1	Echelon de T_p 2
2050	$1,5\text{m.s}^{-1}$	330K	350K
2200	$1,61\text{m.s}^{-1}$	350K	-
2405	$1,76\text{m.s}^{-1}$	350K	-
2802	$2,05\text{m.s}^{-1}$	350K	385K
3212	$2,35\text{m.s}^{-1}$	350K	395K
3826	$2,8\text{m.s}^{-1}$	350K	420K
4031	$2,95\text{m.s}^{-1}$	350K	435K

Consécutivement à ces échelons, on récupère les réponses transitoires des trois types d'observables que nous avons choisis : les températures dans le solide et dans le sillage, les réparti-

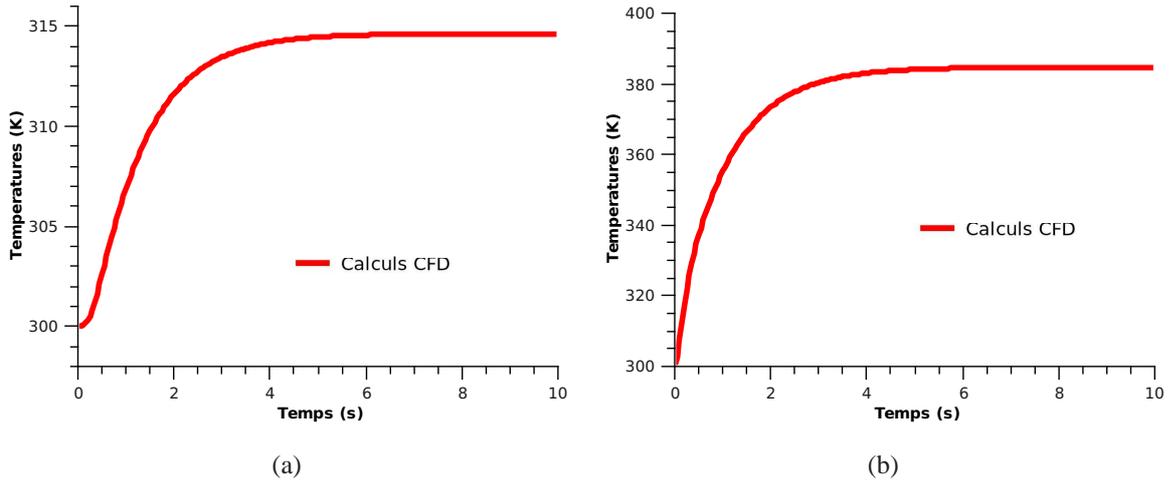


FIG. 4.64 – *Ecoulement semi-transitoire. A différents régimes d'écoulement, on récupère le champ de température correspondant à un échelon de T_p . Les figures 4.64(a) et 4.64(b) représentent les évolutions de température dans des cellules de calcul l'une du fluide (position $(1, 8r_c; r_c)$, et l'autre du solide (position $(0, 74r_c; 0, 419r_c)$). Vitesse d'entrée du fluide : $2,05\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ($Re = 2802$). Echelon de température à 385K .*

tions de densité de flux, et les flux thermiques à la surface du cylindre. Les figures 4.64, 4.65 et 4.66 présentent des exemples de réponses transitoires à ces échelons. Le processus d'identification consistera à construire des modèles réduits qui reproduiront au mieux ces évolutions.

4.6.4.3 Modèles et Identifications

La structure des modèles réduits thermiques semi-transitoires est la même que celle utilisée pour le modèle pleinement transitoire au paragraphe 4.5.2.3 (équations (4.10)) :

$$\mathcal{E}_r^T : \frac{d}{dt}s_T + d_T s_T + (b_{T1}s_T \bullet b_{T2}s_v) + a_T^{(\partial\Omega)} T_{(\partial\Omega)} + b_T^\infty \Psi_{vT}^\infty = 0 \quad (4.17a)$$

$$y_T^* = h_T s_T \quad (4.17b)$$

où $T_{(\partial\Omega)} = [T_\infty // T_p]$, $\Psi_{vT}^\infty = V_\infty T_\infty$, et où les y_T^* sont au choix :

- des températures,
- le flux de chaleur,
- ou les densités de flux.

Dans (4.17a), s_v est la variable d'état réduit cinétique. Si on veut déterminer l'évolution de la variable d'état thermique s_T , pour des conditions opératrices $(V_\infty; T_p)$, on a besoin de déterminer en premier lieu l'état réduit cinétique s_v correspondant à V_∞ . Pour cela, on utilise l'équation d'état du modèle réduit cinétique d'ordre 6 construit précédemment, au paragraphe 4.6.3 (équation (4.12a)).

Pour chacun des trois types d'observables, on construit un modèle réduit thermique en minimisant l'écart entre y_T^* de l'équation (4.17b), et les données de référence collectées au paragraphe 4.6.4.2. On obtient ainsi trois modèles qui reproduisent avec précision ces données de référence, comme l'illustrent les figures 4.67, 4.68 et 4.69. Le modèle réduit pour la température est d'ordre 8, ceux pour le flux de chaleur et la densité de flux sont d'ordre 10. Les détails du modèle pour les densités de flux sont disponibles en exemple dans le tableau 4.22.

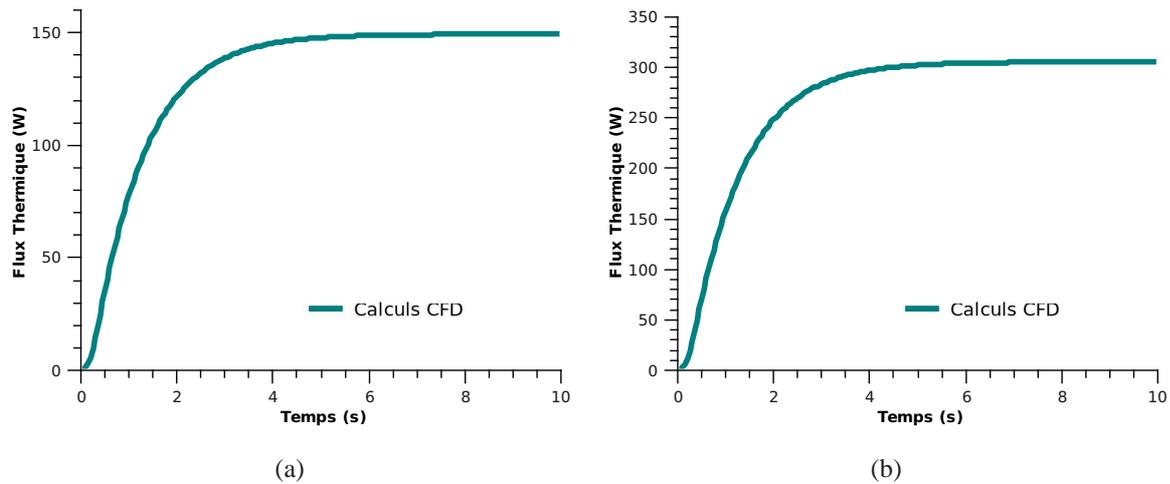


FIG. 4.65 – *Ecoulement semi-transitoire. Pour différents régimes d'écoulement, on récupère le flux de chaleur à travers la paroi du cylindre, suite à des échelons de T_p . Les figures 4.65(a) et 4.65(b) représentent des évolutions de ce flux pour différentes conditions opératrices. Les nombres de Reynolds et températures de paroi sont, à gauche, 2200 et 350K et, à droite, 2802 et 385K.*

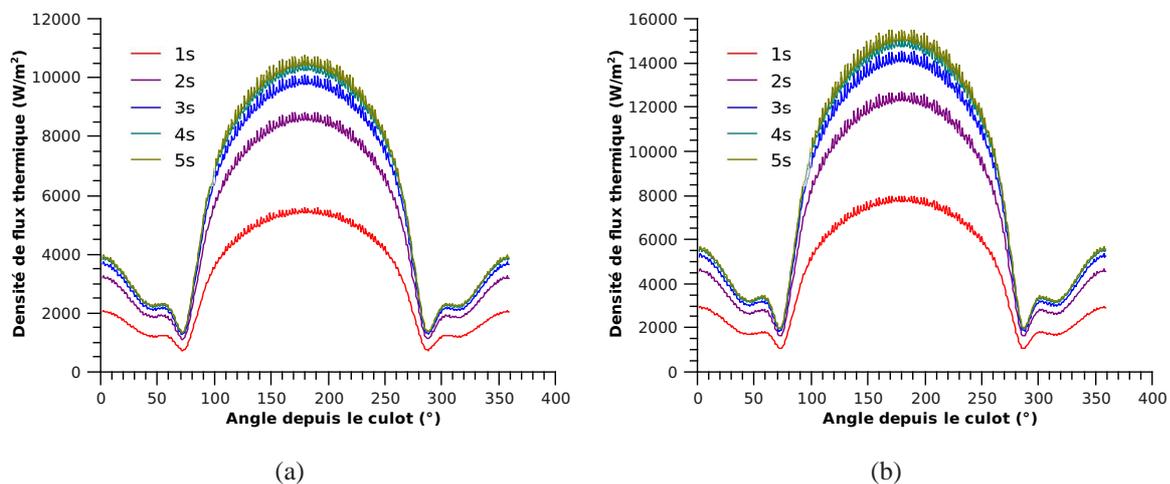


FIG. 4.66 – *Ecoulement semi-transitoire. A différents régimes d'écoulement, on récupère l'évolution de la densité de flux correspondant à un échelon de T_p . Les figures représentent ces densités durant les cinq secondes consécutives à ces échelons. Les nombres de Reynolds et températures de paroi sont : 3212 et 395K pour la figure de gauche, 3826 et 420K pour celle de droite.*

TAB. 4.22 – Composition du modèle réduit thermique transitoire pour la densité de flux de chaleur, et détails de construction.

Type de modèle	thermique transitoire
Structure	Equation (3.58)
Ordre	10
Ordre MR cinétique	6
Nombre d'entrées	3 (dont 1 constante)
Nombre de composantes (équation d'état)	
Total	200
Part linéaire	10
Part non linéaire	100 + 60
Commande linéaire	20
Commande non linéaire	10
Nombre d'observables	128
Nombre de pas de temps	201
Nombre d'échantillons	12

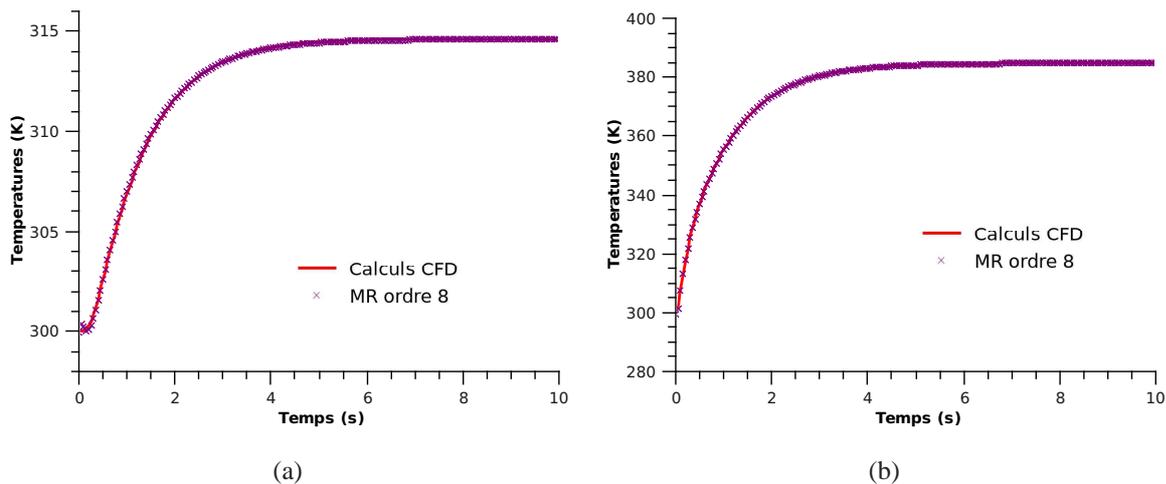


FIG. 4.67 – Écoulement semi-transitoire. On construit un modèle réduit pour les températures, en essayant de reproduire les données récupérées au paragraphe 4.6.4.2. Les figures 4.67(a) et 4.67(b) représentent les résultats dans des cellules du fluide pour l'une, et du solide pour l'autre. Les conditions opératrices et les coordonnées des cellules présentées sont celles de la figure 4.64.

Une fois ces modèles réduits construits, la fiabilité de la réduction de modèle pour chacun de ces observables est évaluée en comparant les réponses du solveur CFD et du modèle réduit, pour des conditions opératrices différentes de celles utilisées pour l'identification.

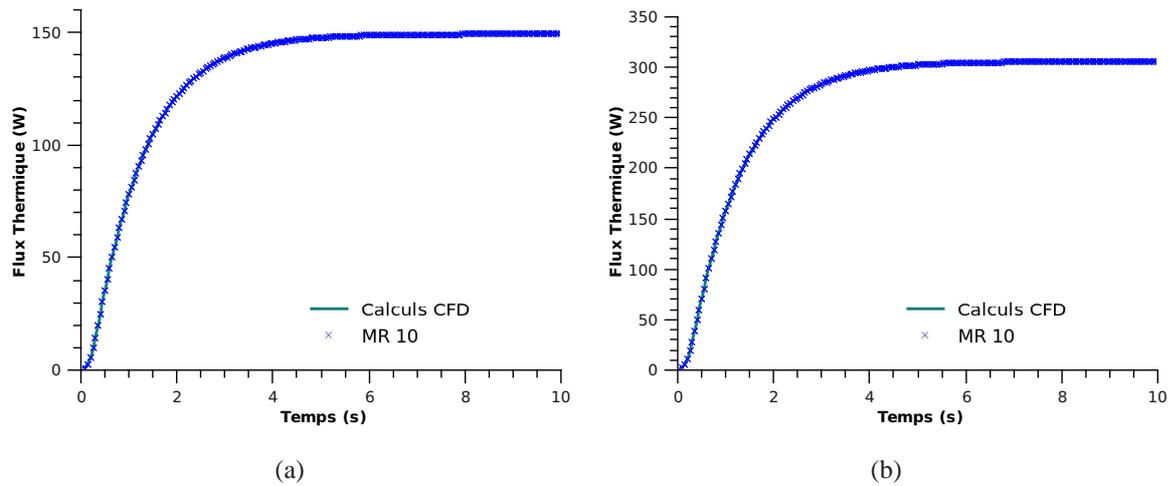


FIG. 4.68 – Écoulement semi-transitoire. On identifie le modèle pour le flux thermique à l'aide des différents flux calculés au paragraphe 4.6.4.2. Les figures 4.68(a) (nombre de Reynolds : 2200, température de cylindre 350K) et 4.68(b) (2802 et 385K) représentent la correspondance entre les flux du modèle réduit, et ceux du modèle détaillé.

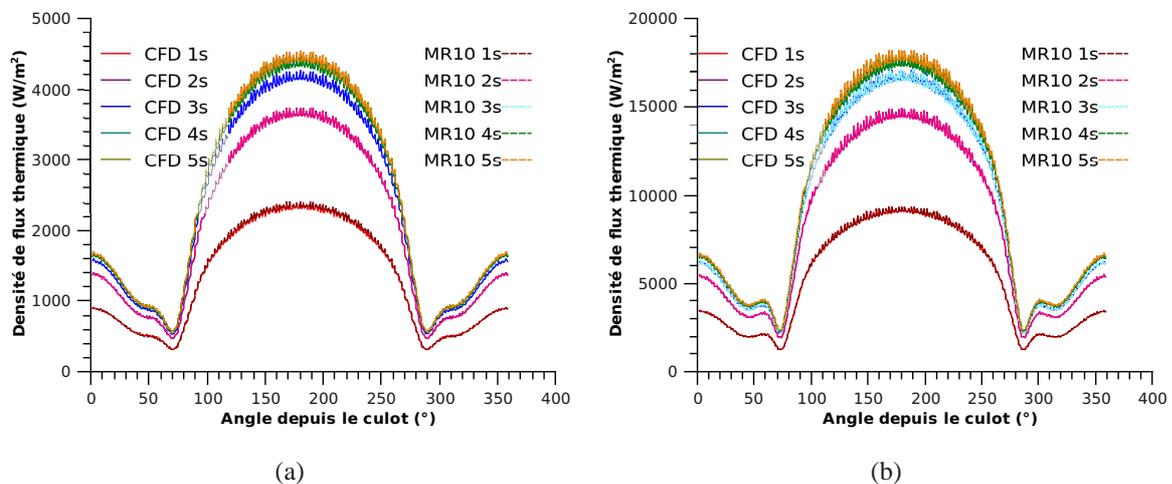


FIG. 4.69 – Écoulement semi-transitoire. Le modèle réduit semi-transitoire pour les densités de flux est construit pour reproduire les densités de flux calculées au paragraphe 4.6.4.2. Les figures permettent d'évaluer l'accord entre le solveur CFD et les réponses du modèle réduit aux échelons de température de paroi. On compare sur les figures les cinq secondes qui suivent l'échelon de température. Nombres de Reynolds et températures de paroi : à gauche 2405 et 350K, à droite 4031 et 435K.

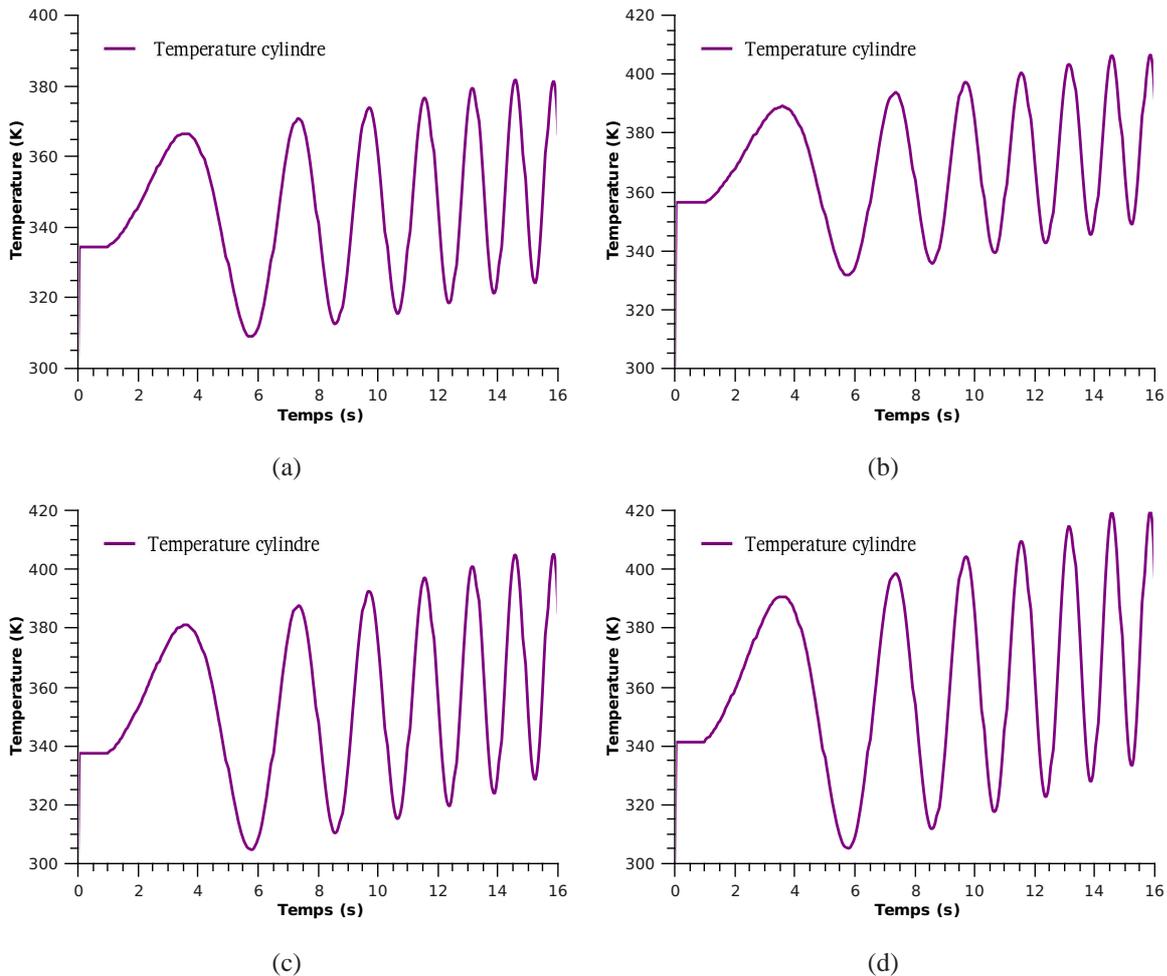


FIG. 4.70 – Lois de température utilisées pour vérifier la qualité des modèles réduits semi-transitoires thermiques. Ces températures ont été appliquées à des écoulements dont les nombres de Reynolds valent, dans l'ordre, 2595, 3007, 3417 et 3608.

4.6.4.4 Validations

Il s'agit d'évaluer la confiance que l'on peut accorder aux modèles réduits thermiques que nous venons de construire, pour répondre aux objectifs énoncés au paragraphe 4.6.1. On compare pour ce faire les réponses de ces modèles aux résultats CFD pour :

- une vitesse d'entrée constante qui n'a pas été utilisée pour construire le modèle réduit cinétique (voir le tableau 4.15),
- une loi de température de paroi quelconque.

Pour ces différents écoulements, on calcule les évolutions des différents types d'observables (température, flux pariétal et densités de flux) correspondant à des conditions aux limites thermiques similaires à celles présentées sur la figure 4.70.

Le modèle réduit thermique développé pour les températures nous donne satisfaction, que ce soit pour prévoir l'évolution de la température dans la région fluide ou dans la partie solide. La figure 4.71 illustre ses capacités. On y observe qu'après quelques instants, le modèle réduit parvient à reproduire avec précision les dynamiques des températures. Les erreurs maximales sont observées durant les premiers instants. Elles sont certainement dues au fait que l'état réduit initial est déterminé de façon analytique, en supposant un régime permanent, et que les

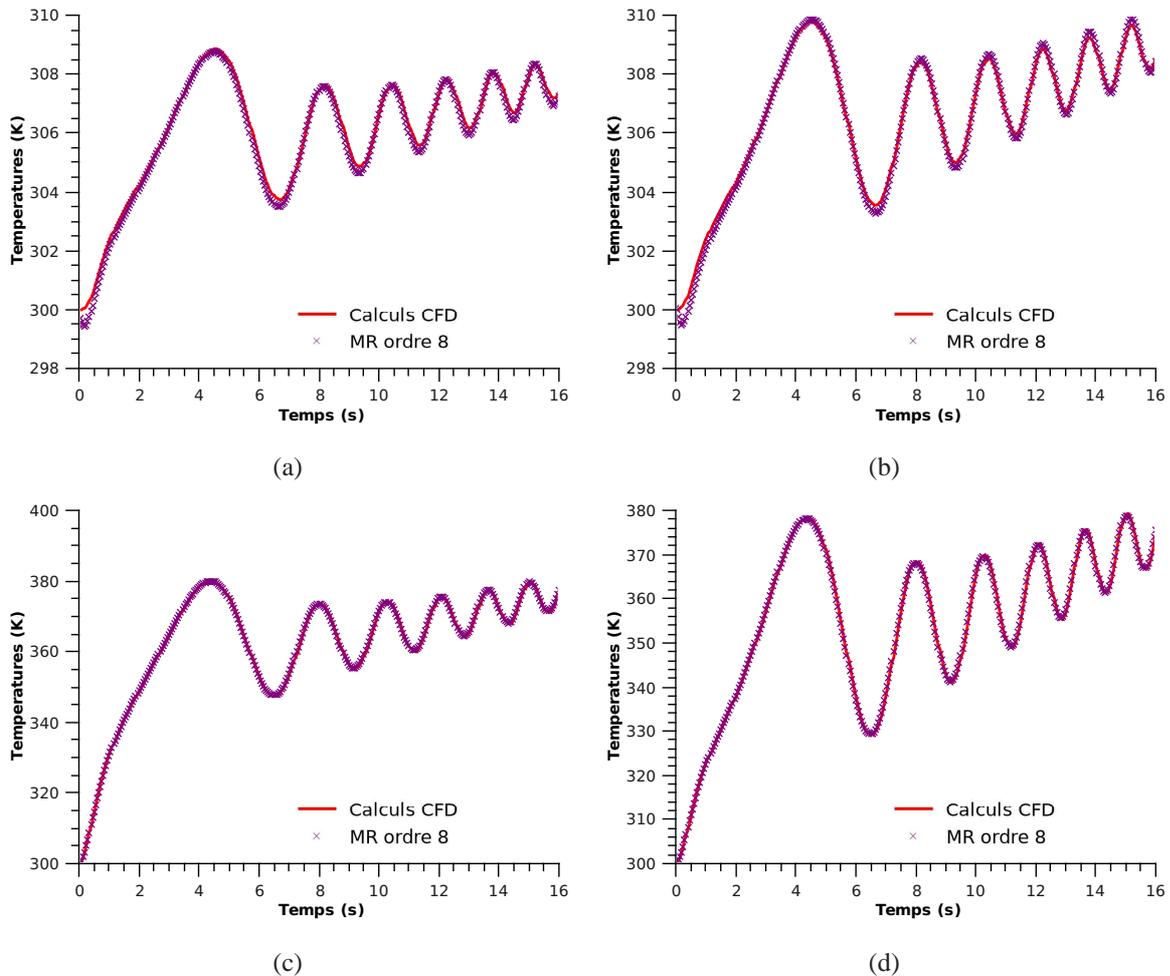


FIG. 4.71 – *Écoulement semi-transitoire. Le modèle réduit semi-transitoire pour les températures parvient à prédire l'évolution des températures pour une loi de température de cylindre quelconque. Figures 4.71(a) et 4.71(b) : cellule du sillage ($1,3r_c; 0,75r_c$), nombres de Reynolds de 2595 et de 3417. Figures 4.71(c) et 4.71(d) : cellule de la partie solide ($0,074r_c; 0,419r_c$), nombres de Reynolds de 3007 et de 3608.*

simulations CFD ne correspondent pas exactement aux hypothèses faites.

La figure 4.72 retrace les évolutions des erreurs maximales et moyennes faites sur l'ensemble des températures pour lesquelles on a construit le modèle (voir figure 4.42). Les erreurs maximales sont en général inférieures à 2K et présentent un pic aux premiers instants, lié à une mauvaise estimation de l'état initial. L'erreur moyenne est très faible (moins de 0,5K), et vu la faible valeur de l'écart-type (figure 4.73), est représentative de l'erreur commise partout.

Les résultats du modèle réduit de flux thermique total sont eux aussi excellents. Pour les quatre écoulements, il a été en mesure de prédire l'évolution du flux thermique convecté dans le sillage, avec une précision inférieure à 20W sur les premiers pas de temps, et de l'ordre de quelques watts ensuite. La figure 4.74 retrace ces évolutions de flux thermiques.

Enfin, le modèle réduit pour les densités de flux parvient également à prédire correctement ce que fournit le code CFD en réponse aux lois de température de la figure 4.70. Sur la figure 4.75, on a tracé les répartitions de densités de flux à divers instants, telles qu'elles sont calculées par le code CFD et le modèle réduit d'ordre 10. Pour tous les écoulements testés, le modèle réduit reste en accord avec le code CFD.

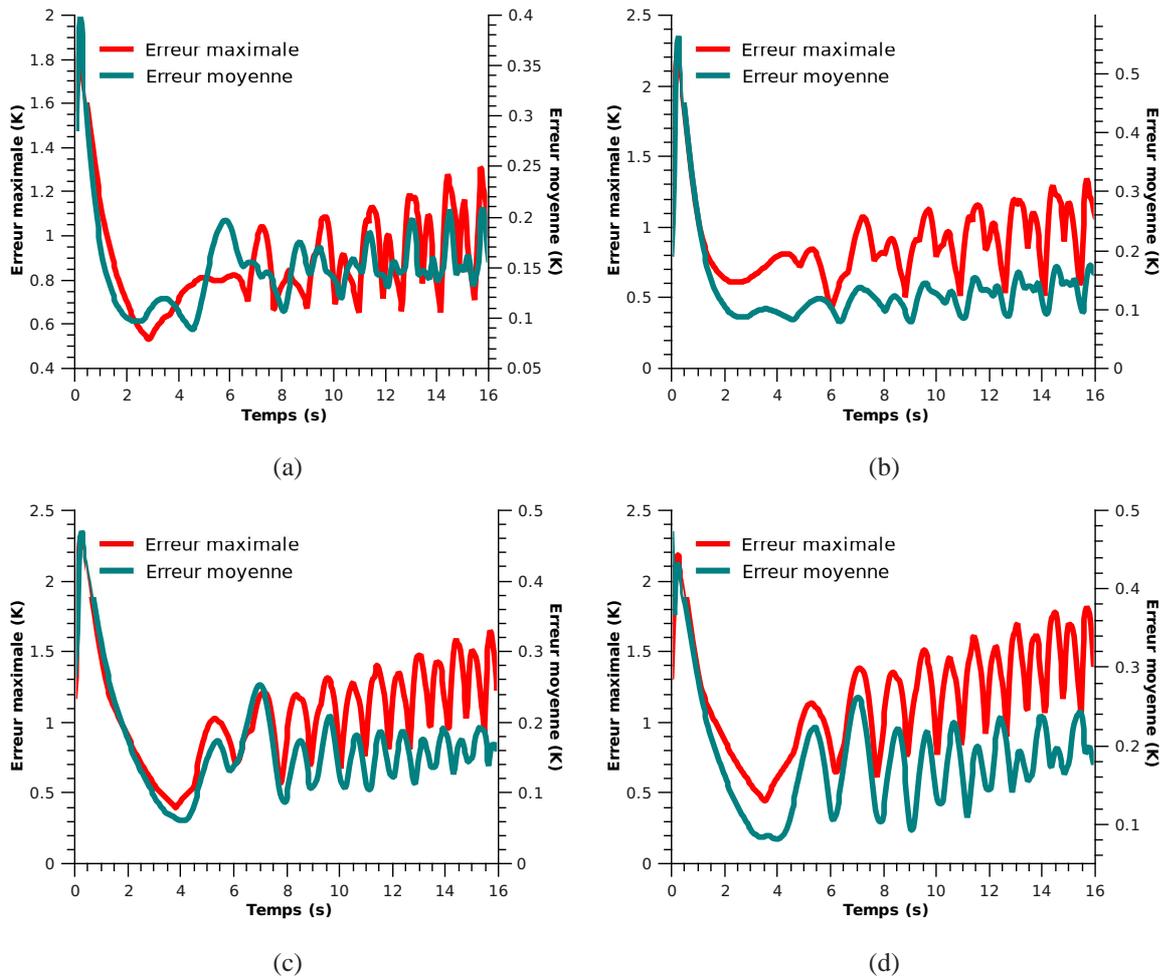


FIG. 4.72 – Erreurs maximale et moyenne du modèle semi-transitoire de température pour les conditions aux limites de validation. Les nombres de Reynolds associés aux différentes figures sont respectivement 2595, 3007, 3417 et 3608. Les erreurs maximales correspondent aux axes à gauche, tandis que les erreurs moyennes sont liées aux axes à droite.

4.6.5 Conclusion partielle

En utilisant une méthodologie similaire à celle de la section 4.5, nous avons montré en plus que

- l’identification modale peut s’appliquer à des écoulements stationnaires calculés avec un modèle de turbulence,
- qu’elle permet de capter la dynamique d’une densité pariétale de flux thermique.

Le cas stationnaire a été également l’occasion de montrer que la méthode est flexible en ce qui concerne la présence d’un terme lié à la turbulence dans les données de référence. Peut-être que le prendre en compte améliorerait la qualité des modèles. Mais, pour le moment, en ce qui concerne les écoulements stationnaires, les principaux défis à relever par l’identification modale concernent plutôt la phase d’identification :

- améliorer l’optimisation des paramètres des modèles réduits ;
- mieux résoudre l’équation d’état stationnaire.

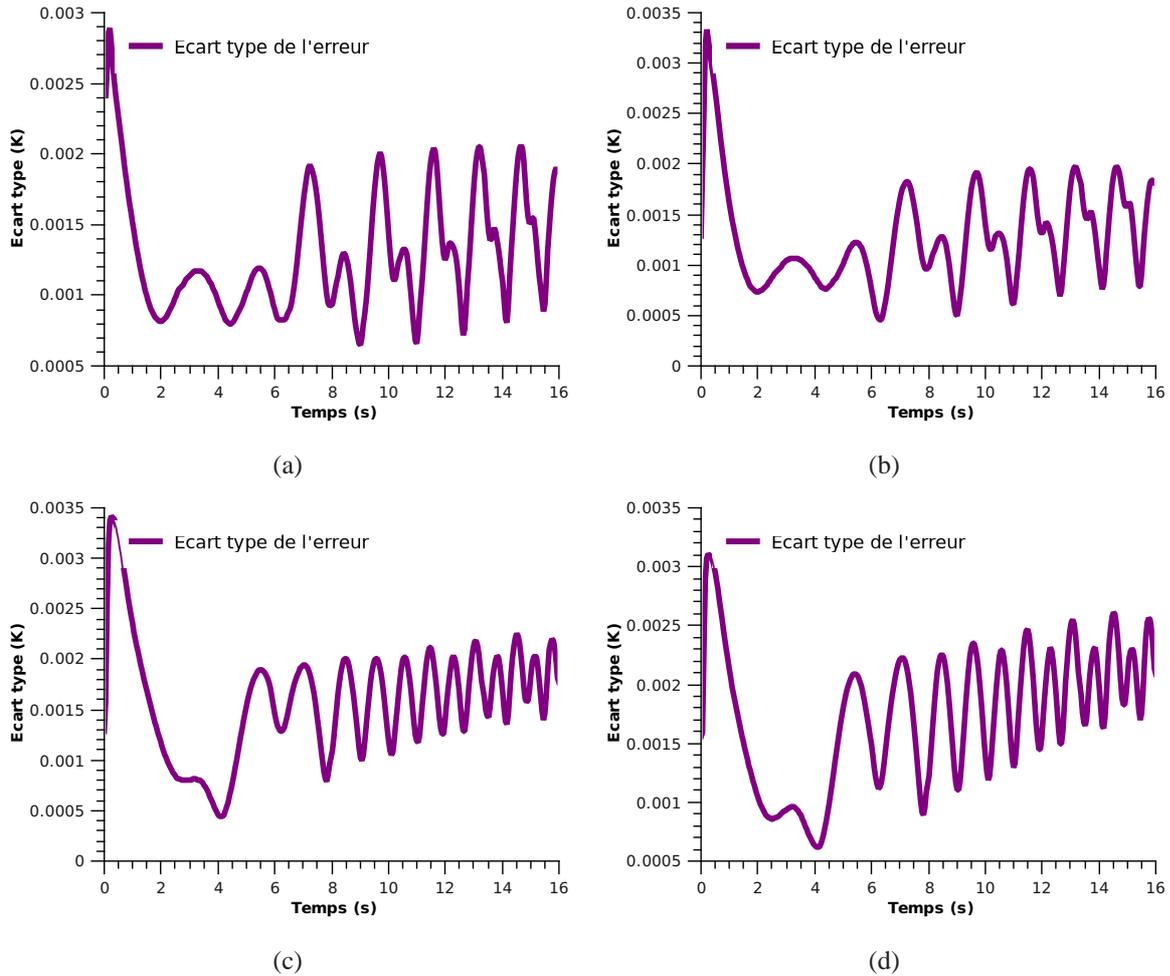


FIG. 4.73 – *Ecart-types de l'erreur faite pour les conditions aux limites de validation pour le modèle réduit thermique transitoire de température. Les nombres de Reynolds associés aux différentes figures sont respectivement 2595, 3007, 3417 et 3608.*

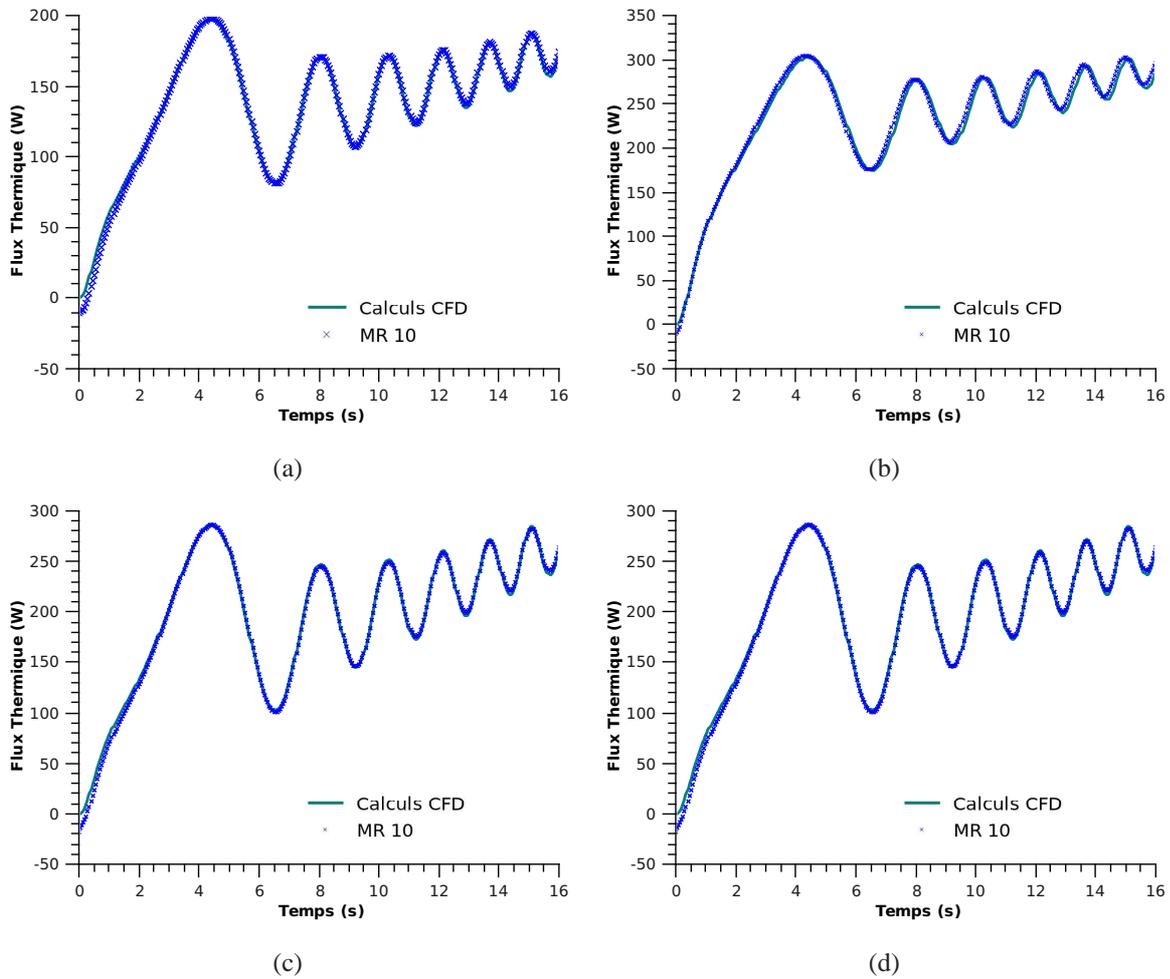


FIG. 4.74 – Le modèle réduit semi-transitoire pour les flux thermiques parvient à prédire avec une erreur faible les flux thermiques globaux entre le cylindre et son sillage dans les conditions de la figure 4.70. Dans l'ordre, les figures correspondent aux écoulements dont les nombres de Reynolds valent 2595, 3007, 3417 et 3608.

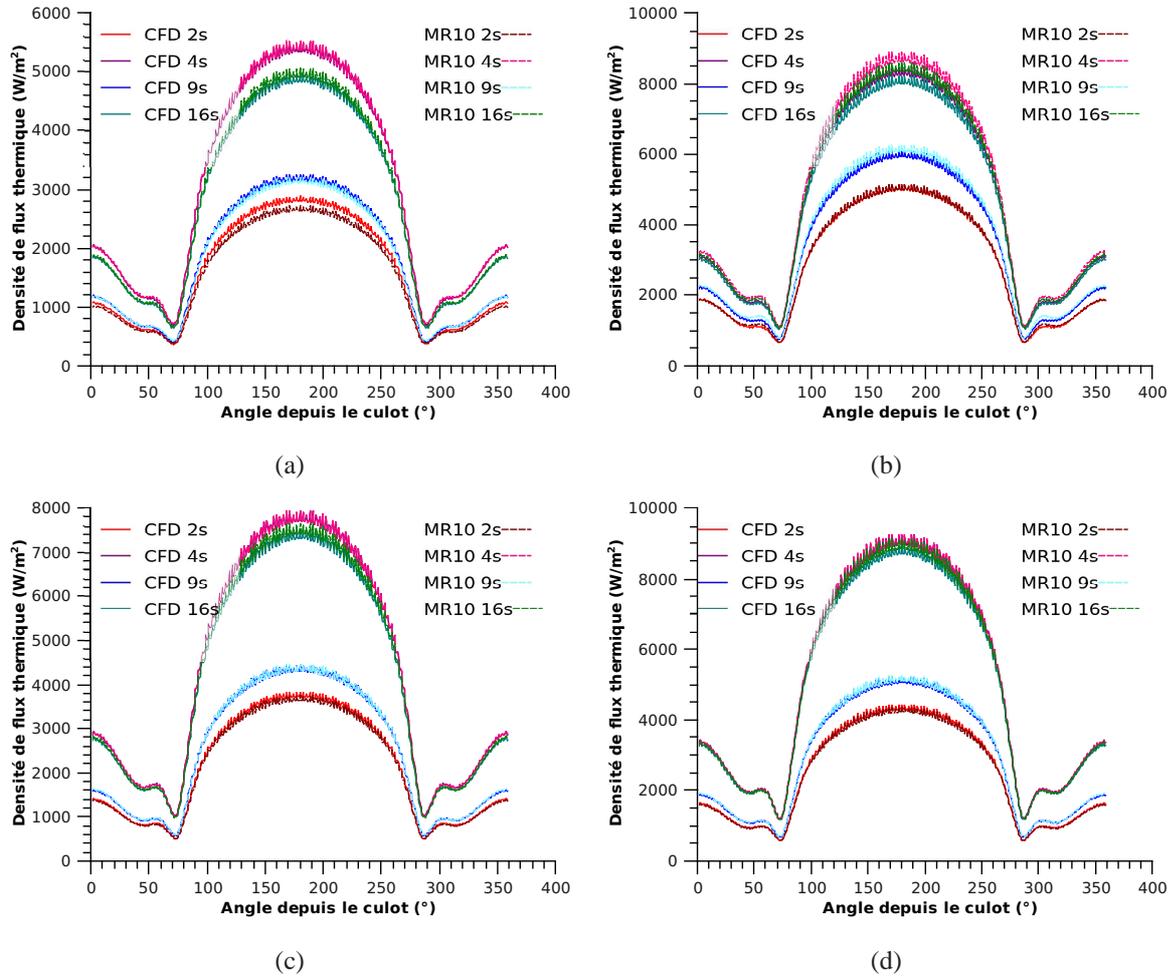


FIG. 4.75 – Réponses du code CFD et du modèle réduit de densités de flux à des variations quelconques de la température du cylindre. Les densités de flux sont représentées à 2,0s, 4,0s, 9,0s et 16,0s. Les nombres de Reynolds des écoulements sont respectivement 2595, 3007, 3417 et 3608.

4.7 Conclusions du chapitre

Après avoir décrit au chapitre 3 les mécanismes qui permettent de construire un modèle réduit par identification, nous avons illustré la méthode en l'appliquant à diverses catégories d'écoulements autour d'un cylindre circulaire.

Avant de se lancer dans une réduction de modèle, il faut d'abord mettre en place un modèle numérique adapté pour résoudre le problème auquel on est confronté. Pour cela, il faut commencer par choisir les observables qui nous permettront de répondre à notre problématique. Puis, dans la mesure où le numéricien a généralement à sa disposition plusieurs types de modélisation (stationnaire / instationnaire, pas de temps, modèle de turbulence, prise en compte des transferts thermiques, ...), il devra déterminer celle qui correspond le mieux à son choix d'observables. Nous avons vu dans la section 4.3 que la façon de prendre en compte la dépendance au temps d'un écoulement de convection forcée autour d'un cylindre circulaire peut influencer de manière différenciée sur le champ de vitesse ou sur les observables thermiques.

Nous avons développé dans les sections suivantes des stratégies de réduction de modèle correspondant à différents choix de prise en compte de l'aspect temporel de l'écoulement autour du cylindre. Dans la section 4.4, nous avons montré qu'il est possible de trouver par identification des modèles réduits capables de prédire le détachement tourbillonnaire opérant dans le sillage du cylindre, quelle que soit la vitesse d'entrée comprise entre $1,5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $3,0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux écoulements dits transitoires, pour lesquels les conditions opératrices évoluent au cours du temps. Les modèles construits sont à même de prévoir des évolutions de champs de vitesse ou d'observables thermiques correspondant à des variations temporelles de la vitesse d'entrée et de la température du cylindre. La stratégie de réduction tire parti du couplage faible entre l'équation de quantité de mouvement et celle de l'énergie. Pour obtenir une modélisation d'ordre faible d'un écoulement de convection forcée, deux modèles sont construits à tour de rôle. Un premier modèle est élaboré pour des observables cinétiques (des signaux de vitesse en l'occurrence). Ce modèle, dit cinétique, produit un état réduit cinétique, fonction de la vitesse d'entrée. Puis un second modèle est élaboré pour les observables thermiques. Son équation d'état est une transcription, version "état réduit", de l'équation de la chaleur, et incorpore le couplage avec l'état réduit cinétique. A partir de la vitesse d'entrée, de la commande thermique et de l'état réduit cinétique déterminé par le précédent modèle, ce modèle calcule un état réduit thermique qui donne accès aux observables thermiques.

Le cas particulier de la vitesse d'entrée constante a été l'opportunité de montrer que l'identification modale est capable de prévoir des champs de vitesse stationnaires. Nous y avons vu que pour des écoulements stationnaires calculés à l'aide d'un modèle de turbulence, les problématiques liées à la phase d'identification (optimisation et résolution de l'équation d'état) sont plus néfastes que le fait de ne pas prendre en compte le modèle de turbulence.

En résumé, nous sommes maintenant en mesure de proposer :

- un modèle réduit instationnaire capable de déterminer, pour une vitesse d'entrée constante, un lâcher de tourbillons dans un sillage ;
- un modèle réduit stationnaire pour prédire un champ de vitesse tel qu'il serait calculé par une modélisation CFD stationnaire ;
- un modèle réduit transitoire prévoyant la dynamique d'un champ de vitesse déterminée par une vitesse d'entrée dépendante du temps ;
- un modèle réduit transitoire qui peut évaluer l'évolution au cours du temps d'observables

thermiques (température ou flux) provoquée par des conditions opératrices dépendantes du temps.

A travers ces exemples, nous avons montré que l'identification modale est effectivement une méthode de réduction qui répond à de nombreuses problématiques liées à la modélisation numérique des transferts thermiques dans des écoulements de convection forcée autour d'obstacles.

Bibliographie

- [1] C.H.K Williamson, Vortex Dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Volume 28, 1996, Pages 477-539, ISSN 0066-4189, DOI : 10.1146/annurev.fl.28.010196.002401
- [2] E. Achenbach, Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re = 5 \times 10^6$. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 34, 1968, Pages 625-639, DOI :10.1017/S0022112068002120
- [3] C. Norberg, B. Sundén, Turbulence and reynolds number effects on the flow and fluid forces on a single cylinder in cross flow. *Journal of Fluid and Structure*, Volume 1, Issue 3, July 1987, Pages 337-357, ISSN 0889-9746, DOI : 10.1016/0889-9746(87)90264-7
- [4] C.H.K Williamson, Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder. *Physics of Fluids*, Volume 31, October 1988, Pages 2742-2745, ISSN 0031-9171, DOI : 10.1063/1.866978
- [5] J.F. Olsen, S. Rajagopalan, Vortex Shedding behind modified circular cylinders. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Volume 86, Issue 1, May 2000, Pages 55-63, ISSN 0167-6105, DOI : 10.1016/S0167-6105(00)00003-9
- [6] T. Leweke, C.H.K. Williamson, Three-dimensional instabilities in wake transition. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Volume 17, Issue 4, Special Issue Dynamics and Statistics of Concentrated Vortices in Turbulent Flow (Euromech Colloquium 364), July-August 1998, Pages 571-586, ISSN 0997-7546, DOI : 10.1016/S0997-7546(98)80012-5.
- [7] M. Thompson, K. Hourigan, J. Sheridan, Three-dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder. *Experimental Thermal and Fluid Science*, Volume 12, Issue 2, February 1996, Pages 190-196, ISSN 0894-1777, DOI : 10.1016/0894-1777(95)00098-4.
- [8] P.W. Bearman, Near wake flows behind two- and three-dimensional bluff bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Volumes 69-71, Proceedings of the 3rd International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications, July-October 1997, Pages 33-54, ISSN 0167-6105, DOI : 10.1016/S0167-6105(97)00146-3
- [9] M.C. Thomson, K. Hourigan, K. Ryan, G.J. Sheard, Wake transition of two-dimensional cylinders and axisymmetric bluff bodies. *Journal of Fluids and Structures*, Volume 22, Issues 6-7, "Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV-4)", August-October 2006, Pages 793-806, ISSN 0889-9746, DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2006.05.001
- [10] A. Roshko, Perspectives on bluff body aerodynamics. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Volume 49, Issues 1-3, December 1993, Pages 79-100, ISSN 0167-6105, DOI : 10.1016/0167-6105(93)90007-B.
- [11] H.G. Park, A study of heat transport processes in the wake of a stationary and oscillating circular cylinder using digital particle image velocimetry/thermometry. PhD. Thesis, California Institute of Technology, USA, 1998, <http://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-04132004-150955>

-
- [12] M. Ren, 3D Flow transition behind a heated cylinder. PhD. Thesis, TU Eindhoven, 2005
- [13] E. Achenbach, Total and local heat transfer from a smooth circular cylinder in cross-flow at high Reynolds number. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 18, Issue 12, December 1975, Pages 1387-1396, ISSN 0017-9310, DOI : 10.1016/0017-9310(75)90252-5.
- [14] M. Matsumura, R.A. Antonia, Momentum and heat transport in the turbulent intermediate wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 250, 1993, Pages 651-668, DOI :10.1017/S0022112093001600
- [15] H. Nakamura, T. Igarashi, Variation of Nusselt number with flow regimes behind a circular cylinder for Reynolds numbers from 70 to 30 000. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 47, Issue 23, November 2004, Pages 5169-5173, ISSN 0017-9310, DOI : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.05.034.
- [16] H. Nakamura, T. Igarashi, Heat Transfer in Separated Flow behind a Circular Cylinder for Reynolds Numbers from 120 to 30 000 (2nd Report, Unsteady and Three-Dimensional Characteristics). *JSME International Journal. Series B. Fluids and Thermal Engineering (Japan Society of Mechanical Engineers)*, Volume 47, Issue 3, Pages 622-630, 2004
- [17] A.-B. Wang, Z. Trávníček, K.-C. Chia, On the relationship of effective Reynolds number and Strouhal number for the laminar vortex shedding of a heated circular cylinder. *Physics of Fluids*, Volume 12, Issue 6, February 2000, Pages 1401-1410, DOI : 10.1063/1.870391
- [18] A.-B. Wang, Z. Trávníček, On the linear heat transfer correlation of a heated circular cylinder in laminar crossflow using a new representative temperature concept. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 44, Issue 24, December 2001, Pages 4635-4647, ISSN 0017-9310, DOI : 10.1016/S0017-9310(01)00103-X.
- [19] T. Vít, M. Ren, Z. Trávníček, F. Maršik, C.C.M. Rindt, The influence of temperature gradient on the Strouhal-Reynolds relationship for water and air. *Experimental Thermal and Fluid Science*, Volume 31, Issue 7, July 2007, Pages 751-760, ISSN 0894-1777, DOI : 10.1016/j.expthermflusci.2006.08.002
- [20] C.F. Lange, F. Durst, M. Breuer, Momentum and heat transfer from cylinders in laminar crossflow at $10^{-4} \leq Re \leq 200$. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 41, Issue 22, 1 November 1998, Pages 3409-3430, ISSN 0017-9310, DOI : 10.1016/S0017-9310(98)00077-5.
- [21] M. Sabanca, On wave harmonics of heated circular cylinders. *Computers & Fluids*, Volume 36, Issue 5, June 2007, Pages 887-901, ISSN 0045-7930, DOI : 10.1016/j.compfluid.2006.06.004.
- [22] N. Zhang, Z.C. Zheng, S. Eckels, Study of heat-transfer on the surface of a circular cylinder in flow using an immersed-boundary method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Volume 29, Issue 6, December 2008, Pages 1558-1566, ISSN 0142-727X, DOI : 10.1016/j.ijheatfluidflow.2008.08.009.
- [23] F. Kreith, R.F. Boehm *et al.*, Heat and Mass Transfer (Book). *Mechanical Engineering Handbook*, Editions Frank Reith, Boca Raton : CRC Press LLC, 1999
- [24] V. Kolar, Vortex identification : New requirements and limitations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Volume 28, Issue 4, Including Special Issue of Conference on Modelling Fluid Flow (CMFF'06), Budapest, 13th event of the international conference series in fluid flow technologies : conference on modelling fluid flow, August 2007, Pages 638-652, ISSN 0142-727X, DOI : 10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.03.004.

-
- [25] Y. Rouizi, M. Girault, Y. Favennec, D. Petit, Model reduction by the Modal Identification Method in forced convection : Application to a heated flow over a backward-facing step. *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 49, Issue 8, August 2010, Pages 1354-1368, ISSN 1290-0729, DOI : 10.1016/j.ijthermalsci.2010.02.011.
- [26] C.H.K Williamson, Three-dimensional wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 328, 1996, Pages 345-407, DOI :10.1017/S0022112096008750
- [27] B. Galletti, A. Bottaro, C.-H. Bruneau, A. Iollo, Accurate model reduction of transient and forced wakes. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Volume 26, Issue 3, May-June 2007, Pages 354-366, ISSN 0997-7546, DOI : 10.1016/j.euromechflu.2006.09.004.
- [28] P. Mokhasi, D. Rempfer, Sequential estimation of velocity fields using episodic proper orthogonal decomposition. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, Volume 237, Issue 24, 15 December 2008, Pages 3197-3213, ISSN 0167-2789, DOI : 10.1016/j.physd.2008.08.004.
- [29] M. Bergmann, C.-H. Bruneau, A. Iollo, Enablers for robust POD models. *Journal of Computational Physics*, Volume 228, Issue 2, 1 February 2009, Pages 516-538, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2008.09.024.
- [30] S. Sirisup, G.E. Karniadakis, A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models. *Journal of Computational Physics*, Volume 194, Issue 1, 10 February 2004, Pages 92-116, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2003.08.021.
- [31] A.E. Deane, C. Mavriplis, Low-Dimensional Description of the Dynamics in Separated Flow Past Thick Airfoils. *AIAA Journal*, Volume 32, Issue 6, Pages 1222-1227, June 1994, ISSN 0001-1452, DOI : 10.2514/3.12123
- [32] M. Souli, J. Sigrist, Interaction fluide-structure - Modélisation et simulation numérique. *Editions Hermès-Lavoisier*, April 2009, ISBN10 : 2-7462-1715-5, ISBN13 : 978-2-7462-1715-7
- [33] B. Galletti, C. H. Bruneau, L. Zannetti, A. Iollo. Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *J. Fluid Mech.*, Volume 503, Pages 161-170, March 2004, DOI : 10.1017/S0022112004007906
- [34] A.E. Deane, I.G. Kevrekidis, G.E. Karniadakis, S.A. Orszag Low-dimensional models for complex geometry flows - Application to grooved channels and circular cylinders. *Physics of Fluids A*, Volume 3, October 1991, Pages 2337-2354, ISSN 0899-8213, DOI : 10.1063/1.857881
- [35] P.S. Johansson, H.I. Andersson, E.M. Ronquist, Reduced-basis modeling of turbulent plane channel flow. *Computers & Fluids*, Volume 35, Issue 2, February 2006, Pages 189-207, ISSN 0045-7930, DOI : 10.1016/j.compfluid.2004.11.005.
- [36] M. Couplet, Modélisation pod-Galerkine réduite pour le contrôle des écoulements instationnaires. Ph.D. Thesis, Université de Paris 13, France, 2005.
- [37] M. Couplet, C. Basdevant, P. Sagaut, Calibrated reduced-order POD-Galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, Volume 207, Issue 1, 20 July 2005, Pages 192-220, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2005.01.008.
- [38] T. Bui-Thanh, K. Willcox, O. Ghattas, B. van Bloemen Waanders, Goal-oriented, model-constrained optimization for reduction of large-scale systems. *Journal of Computational Physics*, Volume 224, Issue 2, 10 June 2007, Pages 880-896
- [39] K.C. Hall, E.H. Dowell, J.P. Thomas, Proper Orthogonal Decomposition Technique for Transonic Unsteady Aerodynamic Flows. *AIAA Journal*, Volume 38, Issue 10, Pages 1853-1862, October 2000, DOI : 10.2514/2.867

-
- [40] B.I. Epureanu, K.C. Hall, E.H. Dowell, Reduced-Order Models of unsteady viscous flows in turbomachinery using viscous-inviscid coupling. *Journal of Fluids and Structures*, Volume 15, Issue 2, February 2001, Pages 255-273, ISSN 0889-9746, DOI : 10.1006/jfls.2000.0334.
- [41] R. Romijn, L.Ozkan, S. Weiland, J. Ludlage, W. Marquardt, A grey-box modeling approach for the reduction of nonlinear systems. *Journal of Process Control*, Volume 18, Issue 9, Selected Papers From Two Joint Conferences : 8th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems and the 10th Conference Applications in Biotechnology, 8th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems and the 10th Conference Applications in Biotechnology, October 2008, Pages 906-914, ISSN 0959-1524, DOI : 10.1016/j.jprocont.2008.06.007.
- [42] E. Balsa-Canto, J.R. Banga, A.A. Alonso, A novel, efficient and reliable method for thermal process design and optimization. Part I : theory. *Journal of Food Engineering*, Volume 52, Issue 3, May 2002, Pages 227-234, ISSN 0260-8774, DOI : 10.1016/S0260-8774(01)00110-8.
- [43] E. Balsa-Canto, J.R. Banga, A.A. Alonso, A novel, efficient and reliable method for thermal process design and optimization. Part II : applications. *Journal of Food Engineering*, Volume 52, Issue 3, May 2002, Pages 235-247
- [44] M. Girault, D. Petit, Resolution of linear inverse forced convection problems using model reduction by the Modal Identification Method : application to turbulent flow in parallel-plate duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 47, Issues 17-18, August 2004, Pages 3909-3925
- [45] O. Balima, Réduction de modèle non linéaire par identification modale : application en thermique et comparaison avec la méthode POD-Galerkin. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, France, 2006.
- [46] M. Girault, Résolution de problèmes inverses en thermique par modèles réduits : applications en conduction non-linéaire et en convection forcée. *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers, France, 2003
- [47] D. Alonso, A. Velazquez and J.M. Vega, A method to generate computationally efficient reduced order models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, In Press, Corrected Proof, Available online 29 March 2009, ISSN 0045-7825, DOI : 10.1016/j.cma.2009.03.012.
- [48] J. Rambo, Y. Joshi, Reduced-order modeling of turbulent forced convection with parametric conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 50, Issues 3-4, February 2007, Pages 539-551
- [49] Y. Jaluria, Simulation-based optimization of thermal systems. *Applied Thermal Engineering*, Volume 29, Issue 7, Selected Papers from the 10th UK National Heat Transfer Conference, Edinburgh, Scotland, September 10-11, 2007, May 2009, Pages 1346-1355, ISSN 1359-4311, DOI : 10.1016/j.applthermaleng.2008.01.008.
- [50] Y. Rouizi, Y. Favennec, J. Ventura, D. Petit, Numerical model reduction of 2D steady incompressible laminar flows : Application on the flow over a backward-facing step. *Journal of Computational Physics*, Volume 228, Issue 6, 1 April 2009, Pages 2239-2255, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2008.12.001.

Chapitre 5

Réduction de modèle par identification d'un écoulement transsonique autour d'un profil RAE2822

Résumé

Le chapitre précédent a été l'occasion d'illustrer la mise en place de la méthodologie de réduction de modèle par identification, dans divers cas impliquant un cylindre circulaire dans un écoulement incompressible. Ces cas tests ont été choisis pour estimer l'applicabilité de ces méthodes de réduction dans le cadre des écoulements internes. Le présent chapitre est lui destiné à être une démonstration du potentiel de l'identification de modèle dans le domaine des écoulements externes compressibles.

Les écoulements subsoniques ou transsoniques autour du profil d'aile bidimensionnel RAE2822 constituent des cas tests classiques pour valider des méthodes numériques liées à la CFD. Les phénomènes aérodynamiques mis en jeu sont bien représentatifs des écoulements typiques rencontrés dans l'aéronautique civile. Nous essaierons de mettre en place un modèle réduit d'écoulement paramétré par :

- le nombre de Mach infini amont,
- l'angle d'incidence du profil.

Le domaine de vol sera limité à des écoulements sub à transsoniques à faible nombre d'incidence. Dans la première section, nous présenterons les caractéristiques de l'écoulement afin de mettre en relief la difficulté de la réduction de modèle. Nous y présentons également un rapide aperçu de quelques travaux similaires impliquant des modèles réduits ou des surrogate models. On propose dans la section 5.2 une formulation pour le modèle réduit. Enfin, les sections 5.3 et 5.4 sont consacrées aux processus de construction et de validation du modèle réduit.

Sommaire

5.1	Profil d'aile RAE2822 : Réduction de modèle et surrogate modeling . . .	164
5.1.1	Difficulté du cas	164
5.1.2	Modèles d'ordre faible d'écoulements transsoniques et supersoniques	164
5.2	Modélisation de l'écoulement et structure du modèle réduit	166
5.2.1	Equations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible	166
5.2.2	Observables	167
5.2.3	Structure du modèle réduit	169
5.3	Tentative de construction d'un modèle d'écoulement compressible	170
5.3.1	Expression du domaine de vol en composantes de vitesse	170
5.3.2	Echantillonnage	170
5.3.3	Résolution numérique	170
5.3.4	Construction du modèle réduit	171
5.3.5	Utilisation et validation des modèles réduits	172
5.3.6	Tentative d'amélioration des modèles	179
5.4	Densification de l'échantillonnage et nouvelle construction de modèle . .	179
5.4.1	Nouvel échantillonnage	179
5.4.2	Modèles de coefficients de pression	181
5.4.3	Construction et validation des modèles pour les coefficients aérodynamiques	183
5.5	Conclusion	189
	Bibliographie	191

5.1 Écoulements sub à transsoniques autour d'un profil 2D RAE2822 : Réduction de modèle et surrogate modeling

5.1.1 Difficulté du cas

Nous nous intéressons aux modèles réduits stationnaires d'écoulement autour de profils épais, sur un domaine de validité \mathcal{D}_u allant du subsonique au transsonique, pour de faibles angles d'incidence. Le profil d'aile RAE2822 est une géométrie dont le comportement est bien connu, et qui représente un cas test pour de nombreux outils numériques développés en aérodynamique externe. Sur le domaine étudié, l'écoulement autour d'un profil d'aile de type RAE2822 fait apparaître différents phénomènes. Il peut mettre en jeu une, voire deux ondes de choc, qui seront absentes dans la partie subsonique de \mathcal{D}_u (figure 5.1). La couche limite peut décoller, en écoulement sub comme transsonique. En présence d'une onde de choc, elle peut interagir avec celle-ci, et éventuellement donner lieu à des phénomènes instationnaires.

On peut considérer qu'en transsonique, une variation du nombre de Mach de 0,1 entraîne des variations significatives de l'écoulement. Dans [1], Jakirlic *et al.* expliquent par exemple que pour un angle d'incidence de 2,8 degrés, on observe une zone de recirculation derrière le choc à $Ma = 0,75$, qui n'apparaît pas, par exemple, à $Ma = 0,73$. Chantrasmi *et al.* [2] montrent que la topologie de l'écoulement en termes de nombre de Mach ou de coefficient de pression à la paroi, est très sensible au nombre de Mach, sur un intervalle similaire. Lucia *et al.* [3] expliquent qu'en présence d'une onde de choc, le nombre de snapshots à utiliser dans une réduction de modèle de type POD, devrait correspondre au nombre de positions possibles du choc, lorsque l'on parcourt \mathcal{D}_u .

Construire un modèle réduit capable de tenir compte d'autant de phénomènes est un défi. Néanmoins, la difficulté de cette tâche devrait permettre de prendre plus de recul sur le potentiel et les limitations en transsonique d'une méthode de réduction de modèle ou de surface de réponse en général, et de la méthode d'identification modale en particulier.

5.1.2 Réduction de modèle et surfaces de réponse pour écoulements transsoniques et supersoniques

Les méthodologies de surfaces de réponse ont déjà beaucoup été utilisées dans le cadre d'écoulements transsoniques. Les processus d'optimisation de formes aérodynamiques peuvent faire appel à un nombre élevé d'évaluations de fonctionnelles qui, en l'absence de modèle alternatif, passeraient chacune par une simulation CFD. Des modèles de type Kriging (*c.f.* [4] par exemple) ou RBF (*c.f.* [5, 6] par exemple) permettent d'évaluer la fonctionnelle en fonction des paramètres géométriques. Cependant, peu de travaux ont été trouvés mettant en œuvre une surface de réponse paramétrée par des conditions opératrices (nombre de Mach, angle d'incidence, ...). Qamar et Sanghi [7] font le même constat concernant la réduction de modèle couplée avec la POD. Selon eux, le nombre de modèles réduits de type POD documentés paramétrés est relativement faible.

On peut néanmoins citer les travaux de Lucia *et al.* [8] qui proposent une méthode de construction de modèles réduits d'écoulements supersoniques autour d'un obstacle. Le modèle qu'ils présentent est paramétré par le nombre de Mach et l'angle d'incidence. Ils utilisent une méthode hybride Modèle Réduit / Calcul CFD qu'ils appellent "domain decomposition". La position probable du choc se trouve dans une région de l'écoulement effectivement résolue par le calcul CFD. Le reste du domaine est traité par un modèle réduit de type POD, et des conditions particulières sont appliquées aux frontières. Ce modèle leur permet de prévoir la distribution

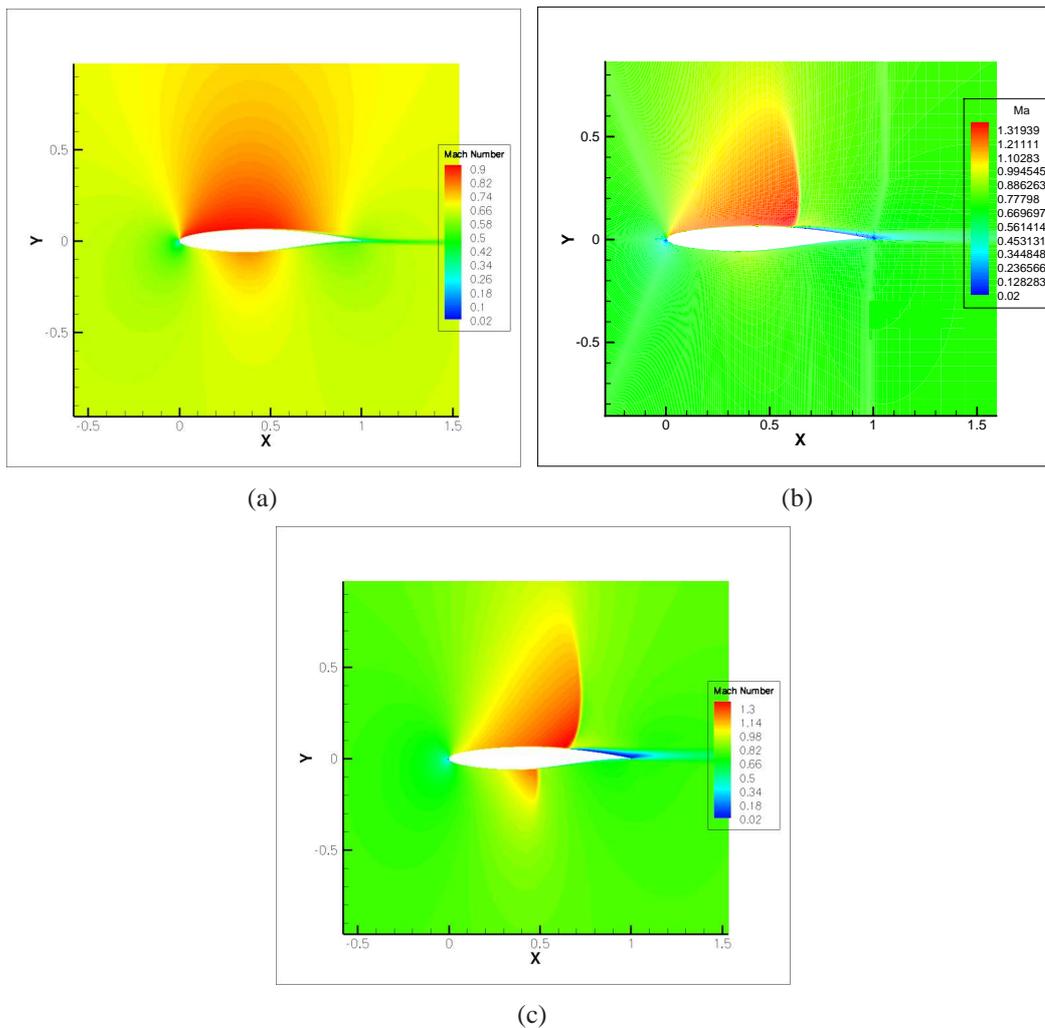


FIG. 5.1 – Exemples d'écoulement autour d'un profil d'aile RAE2822. On affiche les contours de nombre de Mach à proximité du profil. Sur la figure 5.1(a), l'écoulement reste subsonique ($Ma = 0,606; 1,38^\circ$). On observe une onde de choc attachée à l'extrados sur la figure 5.1(b) ($0,73; 2,8^\circ$). Une seconde onde de choc peut apparaître sur l'intrados comme le montre la figure 5.1(c) ($0,79; 1,62^\circ$).

de pression le long de la surface d'un obstacle, ainsi que le coefficient de portance, lorsque le nombre de Mach amont varie entre 2,5 et 2,7, et que l'angle d'incidence varie entre -2° et 2° . Le modèle a été construit avec 15 snapshots correspondant à divers points de ce domaine. Les auteurs montrent notamment que la précision du modèle en dehors de ce domaine peut être améliorée en augmentant le nombre de snapshots.

Dans [9], Epureanu *et al.* considèrent un système composé de plusieurs pales de rotor en écoulement transsonique. Ces pales vibrent à une fréquence imposée, et on observe un déphasage constant entre elles. Les auteurs ont établi trois modèles qui en fonction de la fréquence imposée pour l'un, du déphasage de pales pour l'autre, ou de ces deux paramètres pour le troisième, fournit la répartition de pression le long d'une pale, ou le coefficient de portance.

Qamar et Sanghi ont construit dans [7] deux modèles d'écoulement supersonique autour d'un obstacle doté d'une protubérance. Sur cette protubérance vient s'attacher un choc. En faisant varier soit le nombre de Mach amont, soit la taille de la protubérance, ils peuvent prédire

la topologie de l'écoulement ou des valeurs pariétales (coefficient de pression).

Comme nous l'avons dit un peu plus haut, on trouve de nombreux travaux présentant des modèles de type Kriging ou RBF paramétrés par la forme d'un profil. L'idée est de les utiliser dans un processus d'optimisation en remplacement du calcul CFD. L'objectif de l'optimisation peut être alors de minimiser la traînée à portance et nombre de Mach fixés. Mais pour Xiaoping *et al.* [10], la surface de réponse devrait également être paramétrée par les conditions de vol. En opérant ainsi, on devient capable de prendre en compte dans l'évaluation du profil d'aile au cours du processus d'optimisation, non seulement sa finesse aux conditions de croisière, mais également sa robustesse autour de ce point de fonctionnement. On s'assure ainsi de trouver un profil dont les performances ne se détériorent pas massivement lorsque les conditions de vol varient raisonnablement. Les auteurs ont mis en place un modèle de type Kriging qui en fonction des paramètres de forme du profil, et du nombre de Mach compris entre 0,7 et 0,8, renvoie la traînée du profil correspondant à une portance prescrite. L'intégrale de la traînée sur cet intervalle de nombres de Mach peut ainsi être aisément prise en compte dans l'évaluation d'un profil d'aile.

Contrairement aux méthodes dites à surface de réponse ou à certaines méthodes dérivées de la POD, il n'existe pas encore d'extension de la méthode d'identification modale lui permettant de prendre formellement en compte des variations de paramètres géométriques. Par contre, tout est déjà en place pour paramétrer les modèles réduits par des conditions opératrices, comme des conditions de vol. L'objet de ce chapitre sera de tester les modèles réduits identifiés sur un cas difficile, pour lequel ils n'ont pas, a priori, été conçus.

Nous allons essayer de construire par identification des modèles réduits d'écoulements sub à transsoniques autour d'un profil d'aile RAE2822. Ces modèles seront paramétrés par le nombre de Mach de l'écoulement, et son angle d'incidence. Nous proposerons un modèle qui devra prédire la répartition de coefficients de pression à la surface du profil. Deux autres modèles devront eux établir une relation entre les conditions de vol et les coefficients aérodynamiques de traînée et de portance.

5.2 Modélisation de l'écoulement et structure du modèle réduit

5.2.1 Equations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible

Dans ce chapitre, nous considérons l'écoulement bidimensionnel, d'un gaz parfait newtonien, à l'approche du profil d'aile. Dans un repère galiléen muni d'un repère cartésien $(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on peut décrire la dynamique de cet écoulement à l'aide des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \underline{I} + \underline{\tau}) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \vec{v} + \underline{\tau} \vec{v} + \kappa \vec{\nabla} T) \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans (5.1), ρ désigne la masse volumique du fluide, \vec{v} est le champ de vitesse, \underline{I} est le tenseur identité d'ordre 2, p est la pression du fluide, E est son énergie totale, et κ est la conductivité thermique du gaz. Sous l'hypothèse d'un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tau}$ s'écrit :

$$\underline{\tau} = \lambda \operatorname{div}(\vec{v}) \underline{I} + \mu \left(\overline{\nabla} \vec{v} + {}^t \overline{\nabla} \vec{v} \right) \quad (5.2)$$

Ici, μ et λ sont respectivement les coefficients de viscosité dynamique et volumique exprimés en Poiseuille ($\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$). L'hypothèse de Stokes (5.3) établit une relation entre elles, et (5.4) propose alors une relation simplifiée entre le tenseur des contraintes visqueuses et le champ de vitesse.

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (5.3)$$

$$\underline{\tau} = -\frac{2}{3} \mu \operatorname{div}(\vec{v}) \underline{I} + \mu \left(\overline{\nabla} \vec{v} + {}^t \overline{\nabla} \vec{v} \right) \quad (5.4)$$

Et en écrivant une relation entre la température et la viscosité telle que la loi de Sutherland, on lie les contraintes visqueuses aux champs de vitesse et de température.

Remarque : Dans les chapitre précédents, λ désignait la conductivité thermique du fluide. Ici, nous avons préféré la notation κ pour cette conductivité, afin de réserver la notation λ qui désigne aussi classiquement la viscosité volumique.

Enfin, l'énergie totale est la somme de l'énergie mécanique $\frac{1}{2}v^2$ et de l'énergie interne e . Cette part interne de l'énergie totale ne dépend que de la température. La loi des gaz parfaits et la relation de Mayer permettent d'introduire des relations qui expriment la pression et la température en fonction de l'énergie interne du fluide et de sa masse volumique :

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad T = \frac{\gamma - 1}{r} e \quad (5.5)$$

Ce sont des relations de fermeture qui limitent les inconnues du système (5.1) aux variables conservatives ρ , $\rho \vec{v}$, ρe . γ est le rapport des capacités thermiques, et r est la constante universelle des gaz parfaits, ramenée à la masse volumique.

Remarque Dans les chapitres précédents, dans la mesure où l'écoulement était incompressible, l'association des équations de quantité de mouvement et de continuité suffisait pour décrire la dynamique de l'écoulement. L'équation de continuité permettait de trouver une relation de clôture pour l'équation de mouvement, qui fournissait alors le champ de vitesse. La structure du modèle réduit était alors dérivée de ces équations. Pour un écoulement compressible, trois équations continues sont nécessaires pour décrire correctement la dynamique de l'écoulement.

5.2.2 Observables

L'écoulement sub à transsonique autour du profil peut faire intervenir aucune, une, voire deux ondes de choc. Ces chocs se traduisent par une discontinuité dans la distribution de pression pariétale. Il est classique de déterminer la présence et la position de cette onde de choc en visualisant la répartition du coefficient de pression C_p le long du profil :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \quad (5.6)$$

Les grandeurs p_∞ , ρ_∞ et V_∞ sont les pression, masse volumique et vitesse d'écoulement prises à l'infini en amont du profil. La figure 5.2 présente des exemples de répartition de $-C_p$ le long du profil.

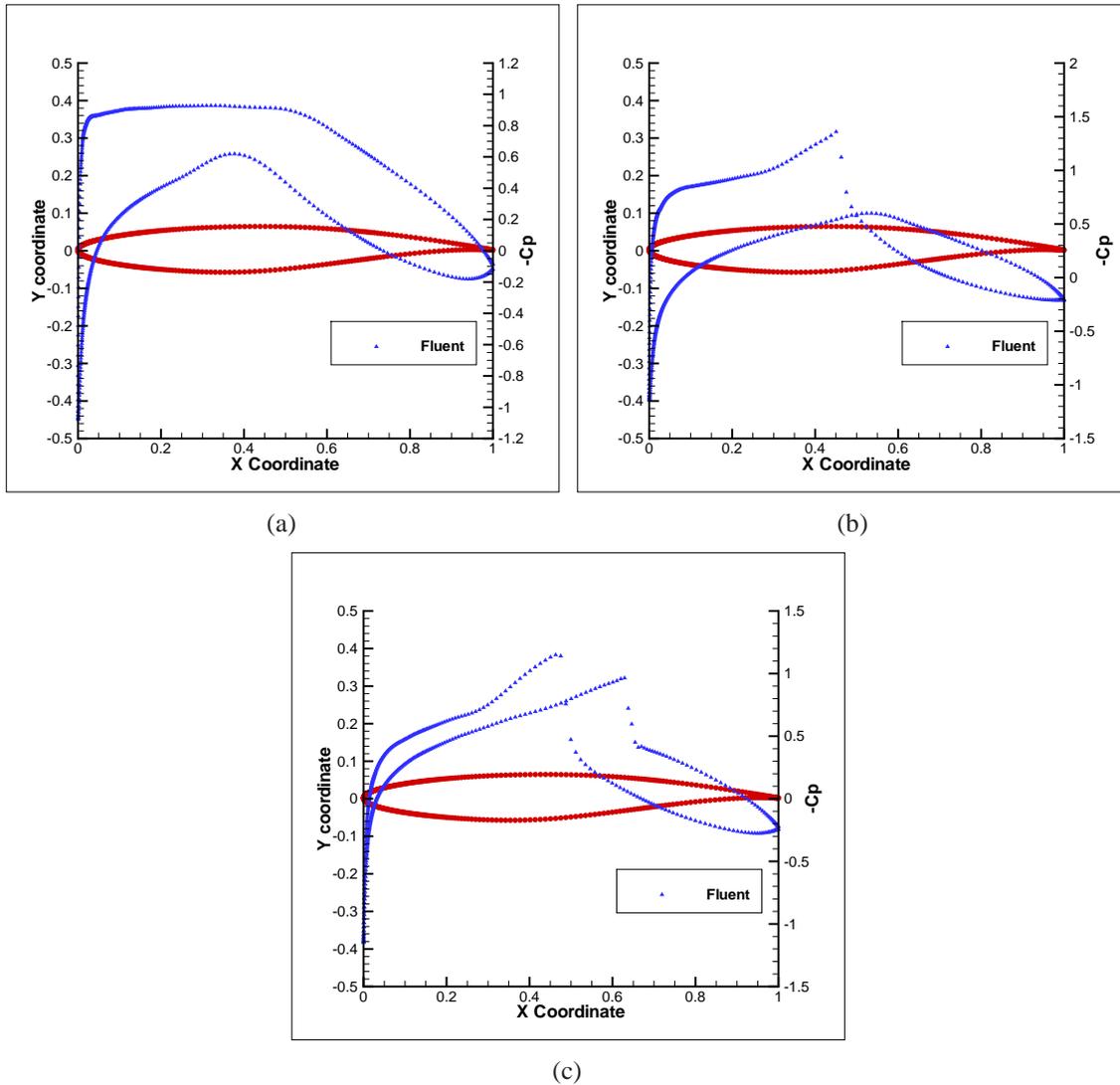


FIG. 5.2 – Exemples de répartitions de coefficients de pression le long du profil. La figure 5.2(a) ne présente pas de discontinuité de pression et correspond à un écoulement subsonique ($Ma = 0,64; \alpha = 1,09^\circ$). Sur les figures 5.2(b) et 5.2(c), on observe un, puis deux chocs attachés sur le profil. Les conditions de vol correspondantes sont respectivement ($Ma = 0,75; \alpha = -2,73^\circ$) et ($Ma = 0,76; \alpha = -1,09^\circ$).

Par ailleurs, on s'intéresse également à la traînée et à la portance du profil. Ces deux efforts sont généralement décrits en termes de coefficients de traînée et de portance :

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho_\infty S V_\infty^2} \quad C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho_\infty S V_\infty^2} \quad (5.7)$$

F_d (traînée) et F_l (portance) sont les composantes de l'effort ressenti par le profil, respectivement dans la direction de l'écoulement, et dans la direction perpendiculaire à celle-ci.

Nous nous intéressons par la suite aux trois observables que sont :

- la répartition de C_p le long du profil,
- le coefficient de traînée C_d ,
- le coefficient de portance C_l .

Il s'agit d'observables utilisés classiquement en aérodynamique externe, pour décrire les performances d'un profil d'aile.

5.2.3 Structure du modèle réduit

Dans le chapitre 3, nous avons montré comment dériver une structure de modèle réduit à partir des équations de Navier-Stokes. Les modèles alors proposés correspondaient à des écoulements que nous avons supposés incompressibles.

Cependant, les écoulements pour lesquels les effets de compressibilité sont prépondérants se prêtent mal à une telle approche. En effet, les variables conservatives sont plusieurs fois prises en compte de façon non polynômiale. Pour cette raison, la prise en compte de ces types de non-linéarités augmenterait drastiquement le nombre de matrices à identifier dans le modèle réduit. D'autre part, il n'y a pas de relation linéaire ou même polynômiale entre les observables et les variables conservatives. Pire, en compressible, les observables dépendent explicitement de l'entrée du modèle (V_∞), et pas uniquement des variables d'état.

Pour ces raisons, plutôt que d'essayer de déterminer une structure de modèle réduit à partir des équations de Navier-Stokes (5.2.1), nous approchons le problème de façon différente. Nous essayons de produire une surface de réponse liant les entrées (nombre de Mach Ma et angle d'incidence α), aux observables. Pour cela on adopte une formulation du type :

$$y_i = \sum_{k=1}^n h_{ik} s_k(Ma, \alpha) \quad (5.8)$$

où y_i est l'observable indicé i parmi q , n est l'ordre du modèle, les n s_k sont fonctions des entrées du modèle, et les h_{ik} forment la matrice de reprojction $h \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$.

La construction du modèle passe par :

- la mise en place de la reprojction h ,
- l'expression de la fonction de base s .

Comme pour les méthodes d'identification modale, les fonctions de base sont des solutions d'une équation matricielle dont les composantes sont a priori inconnues. La construction du modèle consiste à trouver les composantes de cette équation qui permettent au modèle (5.8) d'approcher au mieux les résultats d'un calcul CFD.

On cherche ici à reproduire et à prédire des observables d'un écoulement compressible stationnaire, à l'aide d'une structure de modèle réduit incompressible stationnaire. La forme choisie pour l'équation définissant la fonction de base est la structure stationnaire (3.59) du paragraphe 3.3.10.4 :

$$s + (b_1 s \bullet b_2 s) + a^\infty V_\infty + b^\infty \Psi^\infty = 0 \quad (5.9)$$

Les entrées de cette équation ne sont pas l'angle d'incidence et le nombre de Mach, mais les composantes de la vitesse à l'infini. Ces composantes sont déterminées en faisant l'hypothèse d'une pression et d'une température à l'infini constantes dans le domaine de vol.

Pour déterminer les matrices b_1 , b_2 , a^∞ , b^∞ et h , on passe par un processus d'optimisation qui minimise :

1. l'écart entre les observables calculés par le modèle réduit et ceux obtenus par le calcul CFD en un certain nombre de points d'échantillonnage ;
2. l'écart entre les dérivées de ces observables par rapport aux commandes, aux mêmes points d'échantillonnage (voir le paragraphe 3.3.10.4 du chapitre 3).

Pour ce faire, on doit commencer par collecter des valeurs prises par nos observables aux points d'échantillonnage.

5.3 Tentative de construction d'un modèle d'écoulement compressible

5.3.1 Expression du domaine de vol en composantes de vitesse

Dans le paragraphe 5.2.3, nous avons vu que le modèle réduit que nous proposons ici, est en réalité paramétré par les composantes V_x et V_z du vecteur vitesse infini amont. Dans la mesure où il est beaucoup plus naturel de parler en termes de nombres de Mach Ma et d'angles d'incidence α , nous présenterons nos résultats en fonction de ces deux variables.

Pour construire et pour utiliser le modèle, on suppose que les conditions de pression et de température infini amont ne varient pas sur le domaine de vol. A un couple $(Ma; \alpha)$ on associe les composantes $(V_x; V_z)$ suivantes :

$$V_x = \sqrt{\gamma r T} Ma \cos \alpha \quad V_z = \sqrt{\gamma r T} Ma \sin \alpha \quad (5.10)$$

5.3.2 Echantillonnage

Le domaine de vol sur lequel on veut construire le modèle s'étend de $Ma = Ma_{\min} = 0,6$ à $Ma = Ma_{\max} = 0,8$, et de $\alpha = \alpha_{\min} = -3,0^\circ$ à $\alpha = \alpha_{\max} = 3,0^\circ$. On sépare $[Ma_{\min}; Ma_{\max}]$ et $[\alpha_{\min}; \alpha_{\max}]$ en 11 intervalles réguliers chacun. On dispose ainsi de 12 valeurs de Ma et de 12 valeurs de α . En combinant ces valeurs, on obtient 12 points d'échantillonnage, visibles sur la figure 5.3. Pour collecter le maximum d'informations, on a essayé de les disposer de façon à couvrir l'ensemble du domaine de vol.

Pour "lisser" les modèles stationnaires que l'on construit, on effectue, en chaque point d'échantillonnage, deux calculs supplémentaires afin d'obtenir des informations sur la dérivée des observables par rapport aux commandes (*c.f.* paragraphe A.2 en annexe).

Au final, on dispose donc des répartitions de C_p et des coefficients aérodynamiques en 36 points. En utilisant au mieux ces données, nous pouvons essayer de proposer des modèles réduits valables sur le domaine de vol.

5.3.3 Résolution numérique

Les écoulements sont simulés à l'aide du solveur CFD commercial Fluent. Le maillage, constitué de 35000 cellules, est partiellement visible sur la figure 5.4. La convergence des si-

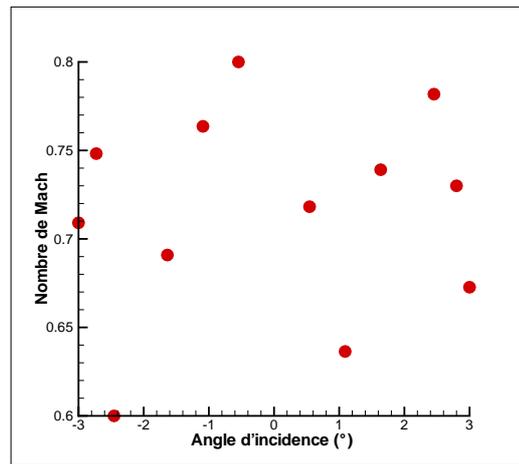


FIG. 5.3 – *Domaine de vol et points d'échantillonnage pour la construction des modèles réduits. Pour chaque point du domaine de vol, deux calculs CFD supplémentaires ont été effectués en faisant varier légèrement l'une des composantes de la vitesse amont. Au total, 36 calculs ont été réalisés.*

mulations a été estimée a posteriori, en s'assurant que les efforts ne variaient plus au cours des itérations.

5.3.4 Construction du modèle réduit

La construction du modèle se fait à travers un processus d'optimisation dont la fonctionnelle à minimiser prend en compte à la fois et de façon équilibrée, l'erreur faite sur les observables, et l'erreur faite sur les dérivées de ces observables.

5.3.4.1 Modèle réduit de répartition de C_p

Trois modèles réduits d'ordre 5, 8 et 10 respectivement ont été construits pour représenter les répartitions de coefficients de pression aux points d'échantillonnage. Comme on le voit sur les exemples de la figure 5.5, ils permettent de reproduire relativement bien les répartitions calculées par le code CFD aux points d'échantillonnage. On constate qu'il y a une influence de l'ordre du modèle. En effet, le modèle d'ordre 8 approche mieux les répartitions calculées de C_p que le modèle d'ordre 5. De même, au vu des seuls résultats aux points d'échantillonnage, le modèle d'ordre 10 semble meilleur que celui d'ordre 8. Ce constat devrait nous conduire à continuer d'augmenter l'ordre du modèle. Cependant, nous verrons qu'en raison des performances médiocres de ces modèles ailleurs qu'aux points d'échantillonnage, nous avons plutôt intérêt à changer de stratégie. A titre d'exemple, le tableau 5.1 apporte quelques détails quant à la structure du modèle d'ordre 8.

5.3.4.2 Construction des modèles réduits de coefficients aérodynamiques

Pour chaque coefficient (traînée et portance) on a construit pour les comparer deux modèles réduits, d'ordre 5 et 10. Dans les tableaux 5.2 et 5.3 sont répertoriés leurs résultats aux points d'échantillonnage.

On constate que les deux ordres de modèle réduit proposent des valeurs approchées satisfaisantes pour les deux coefficients aérodynamiques. Et contrairement au cas des coefficients de pression, augmenter l'ordre des modèles ne résulte pas en un gain significatif en précision. Au

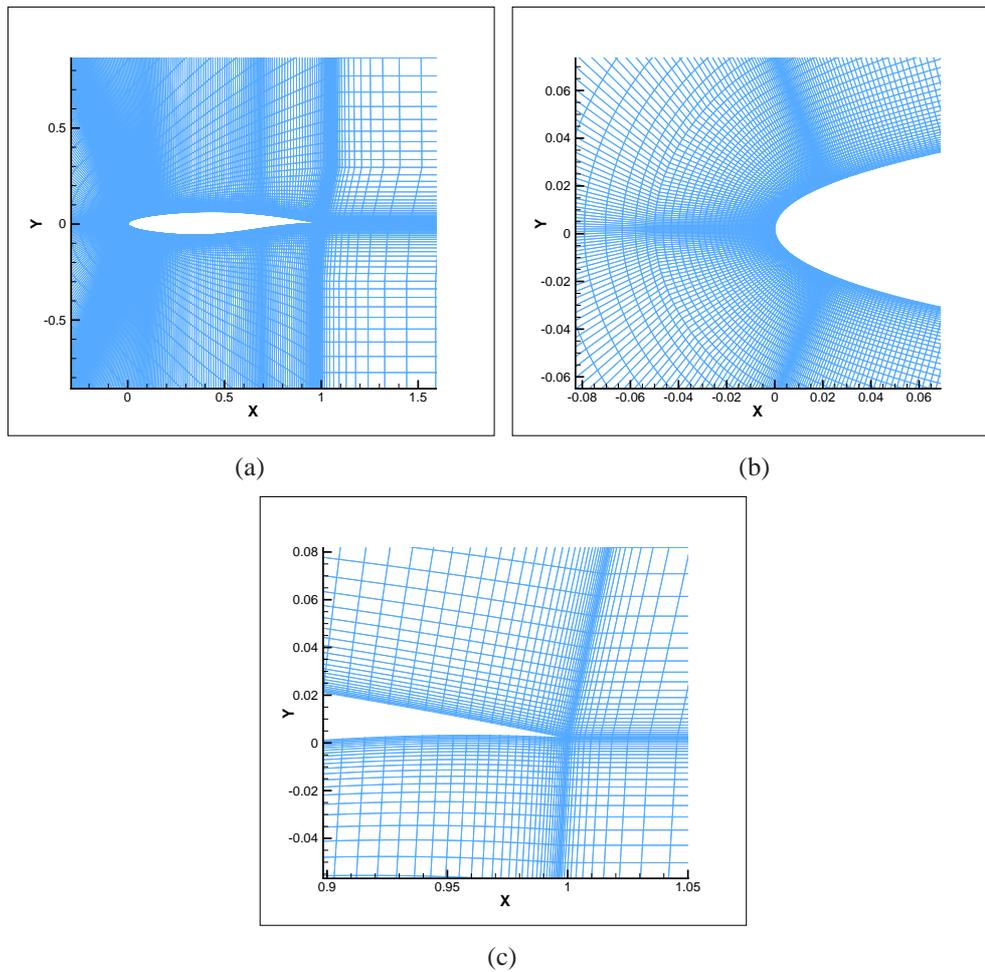


FIG. 5.4 – Le maillage utilisé est un maillage multibloc comptant environ 35000 cellules. Les figures 5.4(b) et 5.4(c) sont des agrandissements autour des bords d'attaque et de fuite.

vu des seuls résultats aux points d'échantillonnage, les deux ordres donnent des résultats très proches.

Nous venons de montrer que les modèles que nous avons construits sont en accord avec les simulations CFD aux points d'échantillonnage. S'ils sont de bonne qualité, on pourra les utiliser pour déterminer des valeurs approchées de nos observables ailleurs qu'en ces points. Pour s'en assurer, nous procédons à présent à la comparaison entre les simulations CFD et le modèle réduit ailleurs qu'aux points d'échantillonnage.

5.3.5 Utilisation et validation des modèles réduits

Pour examiner la validité du modèle ailleurs qu'aux points d'échantillonnage, nous avons effectué des simulations en sept points supplémentaires. Ces points apparaissent sur la figure 5.6, parmi les points d'échantillonnage déjà visibles sur la figure 5.3.

5.3.5.1 Modèles de répartition de C_p

En chacun de ces points, nous pouvons comparer les répartitions de C_p prévues par les trois modèles réduits, et celles effectivement calculées par le solveur CFD. On se rend compte ainsi

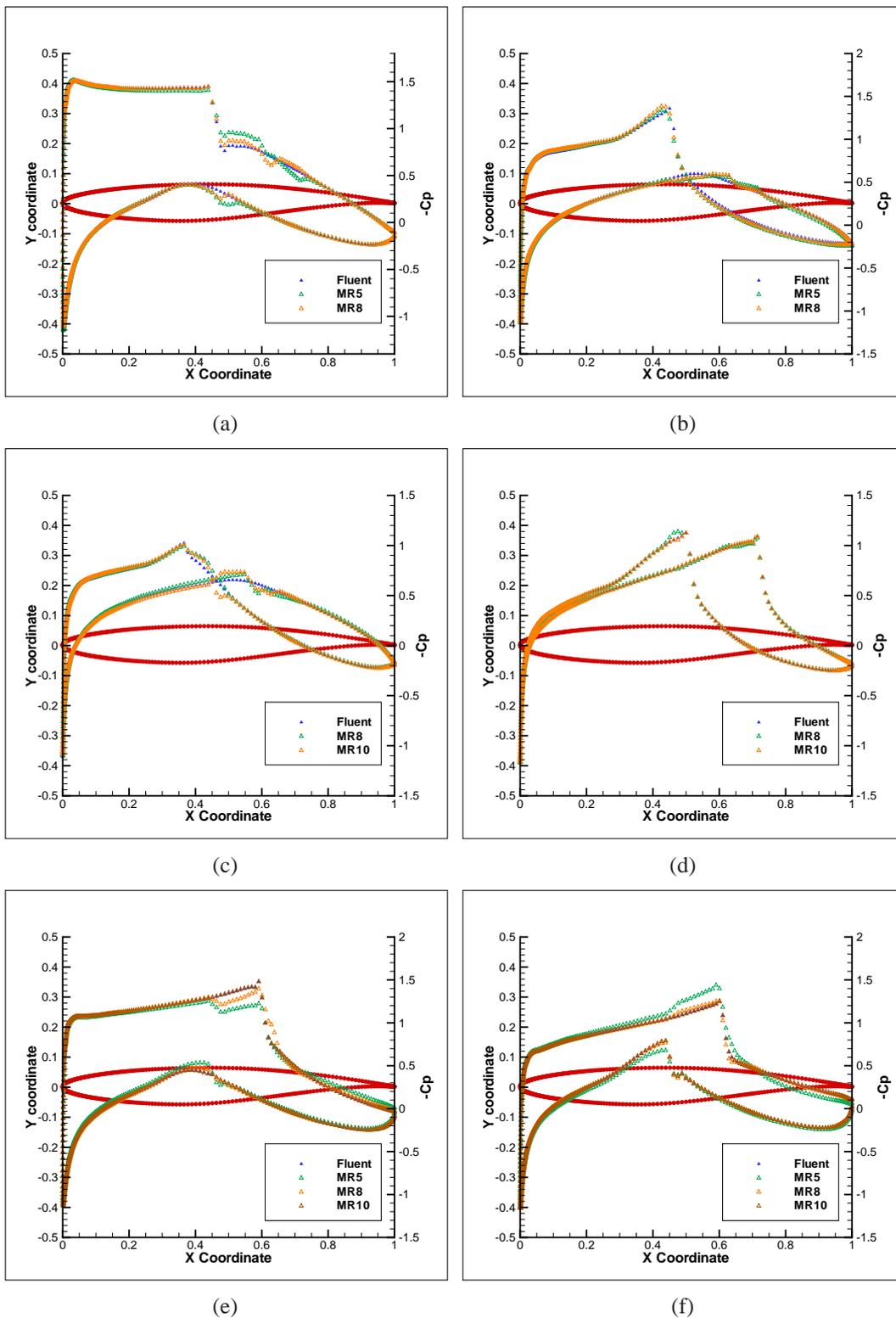


FIG. 5.5 – Etape d'identification. Les trois modèles réduits permettent de reproduire relativement bien les phénomènes décrits par les simulations effectuées. Les figures 5.5(a) et 5.5(b) comparent les modèles d'ordres 5 et 8 aux points d'échantillonnage ($Ma = 0,67; \alpha = 3,0^\circ$) et ($0,75; -2,73^\circ$). Les modèles d'ordres 8 et 10 sont mis en regard sur les figures 5.5(c) (au point ($0,69; -1,64^\circ$)) et 5.5(d) (au point ($0,8; -0,54^\circ$)). Enfin, on trouve sur les figures 5.5(e) et 5.5(f) des comparaisons entre tous les ordres aux points ($0,73; 2,8^\circ$) et ($0,78; 2,45^\circ$) du domaine de vol.

TAB. 5.1 – Composition du modèle réduit de coefficients de pression d'ordre 8.

Type de modèle	cinétique stationnaire
Structure	Equation (3.59)
Ordre	8
Nombre d'entrées	2
Nombre de composantes Total	160
Part non linéaire b_1, b_2	2×64
Commande linéaire a^∞	16
Commande non linéaire b^∞	16
Nombre d'observables	480
Nombre d'échantillons	$12 + (2 \times 12)$

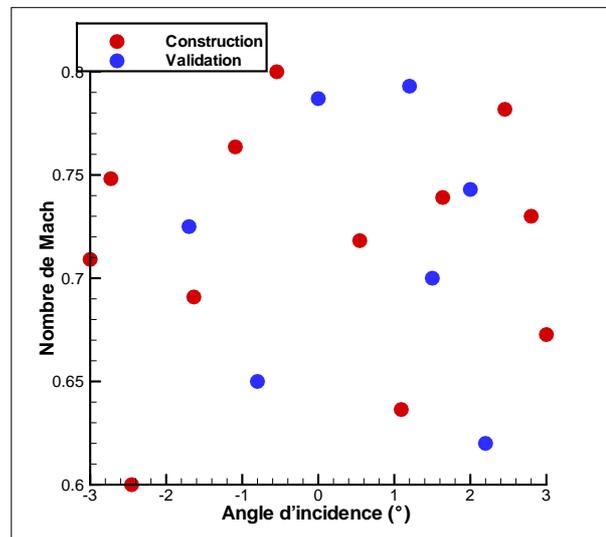


FIG. 5.6 – Positions des points utilisés pour valider les modèles réduits parmi les points d'échantillonnage

qu'aucun des trois ordres de modèle (5, 8 ou 10) ne permet de retrouver les phénomènes prévus par le calcul CFD (voir la figure 5.7).

Aucun des trois modèles ne se démarque des autres, et ils sont tous inutilisables. Les modèles réduits ne parviennent pas à capter l'apparition des différents types d'écoulements dans le domaine de vol. Par exemple, au point $(Ma = 0,62; \alpha = 2,2^\circ)$, les modèles prévoient la présence d'un choc, que ne fait pas apparaître le calcul CFD. A l'inverse, le choc du point $(0,725; -1,7^\circ)$ est absent des prévisions des modèles. Ou encore, au point $(0,787, 0, 0^\circ)$, les modèles réduits prédisent un choc, là où il y en a en fait deux. Et si on pouvait dire en analysant les performances des modèles aux points d'échantillonnage, qu'augmenter l'ordre semblait améliorer le modèle, on s'aperçoit qu'il n'en est rien. Le modèle d'ordre 10 n'est pas meilleur que le modèle d'ordre 5.

On se rend aussi compte que les performances des modèles réduits se dégradent lorsque l'on s'éloigne un tant soit peu des points d'échantillonnage. En effet, si on évalue les performances

TAB. 5.2 – Résultats aux points d'échantillonnage des modèles réduits de traînée (erreur tronquée à 10^{-5} près).

Nombre de Mach	Angle d'incidence	C_d^{ref}	Ordre 5	Ordre 10
0,60	$-2,45^\circ$	$1,033.10^{-2}$	-4.10^{-5}	5.10^{-5}
0,64	$1,09^\circ$	$1,095.10^{-2}$	$+3.10^{-5}$	$+4.10^{-5}$
0,67	$3,00^\circ$	$1,606.10^{-2}$	-1.10^{-5}	0
0,69	$-1,64^\circ$	$0,908.10^{-2}$	$+6.10^{-5}$	-9.10^{-5}
0,71	$-3,00^\circ$	$1,282.10^{-2}$	0	$+5.10^{-5}$
0,72	$0,55^\circ$	$1,014.10^{-2}$	-5.10^{-5}	-4.10^{-5}
0,73	$2,8^\circ$	$3,152.10^{-2}$	$+1.10^{-5}$	0
0,74	$1,64^\circ$	$2,091.10^{-2}$	$+1.10^{-5}$	$+2.10^{-5}$
0,75	$-2,73^\circ$	$2,093.10^{-2}$	$+1.10^{-5}$	$+2.10^{-5}$
0,76	$-1,09^\circ$	$1,372.10^{-2}$	$+1.10^{-5}$	$+5.10^{-5}$
0,78	$2,45^\circ$	$4,084.10^{-2}$	$+1.10^{-5}$	0
0,80	$-0,55^\circ$	$2,901.10^{-2}$	-1.10^{-5}	-1.10^{-5}

TAB. 5.3 – Résultats aux points d'échantillonnage des modèles réduits de portance (erreur tronquée à 10^{-4}).

Nombre de Mach	Angle d'incidence	C_l^{ref}	Ordre 5	Ordre 10
0,60	$-2,45^\circ$	-0,1212	-3.10^{-4}	0
0,64	$1,09^\circ$	0,4965	-3.10^{-4}	0
0,67	$3,00^\circ$	0,8795	$+7.10^{-4}$	$+7.10^{-4}$
0,69	$-1,64^\circ$	0,0056	$+8.10^{-4}$	0
0,71	$-3,00^\circ$	-0,2680	0	0
0,72	$0,55^\circ$	0,4333	$+5.10^{-4}$	0
0,73	$2,8^\circ$	0,8080	-5.10^{-4}	-5.10^{-4}
0,74	$1,64^\circ$	0,6449	-1.10^{-4}	0
0,75	$-2,73^\circ$	-0,2127	0	0
0,76	$-1,09^\circ$	0,1107	-7.10^{-4}	0
0,78	$2,45^\circ$	0,5801	-11.10^{-4}	-11.10^{-4}
0,80	$-0,55^\circ$	0,1799	$+1.10^{-4}$	0

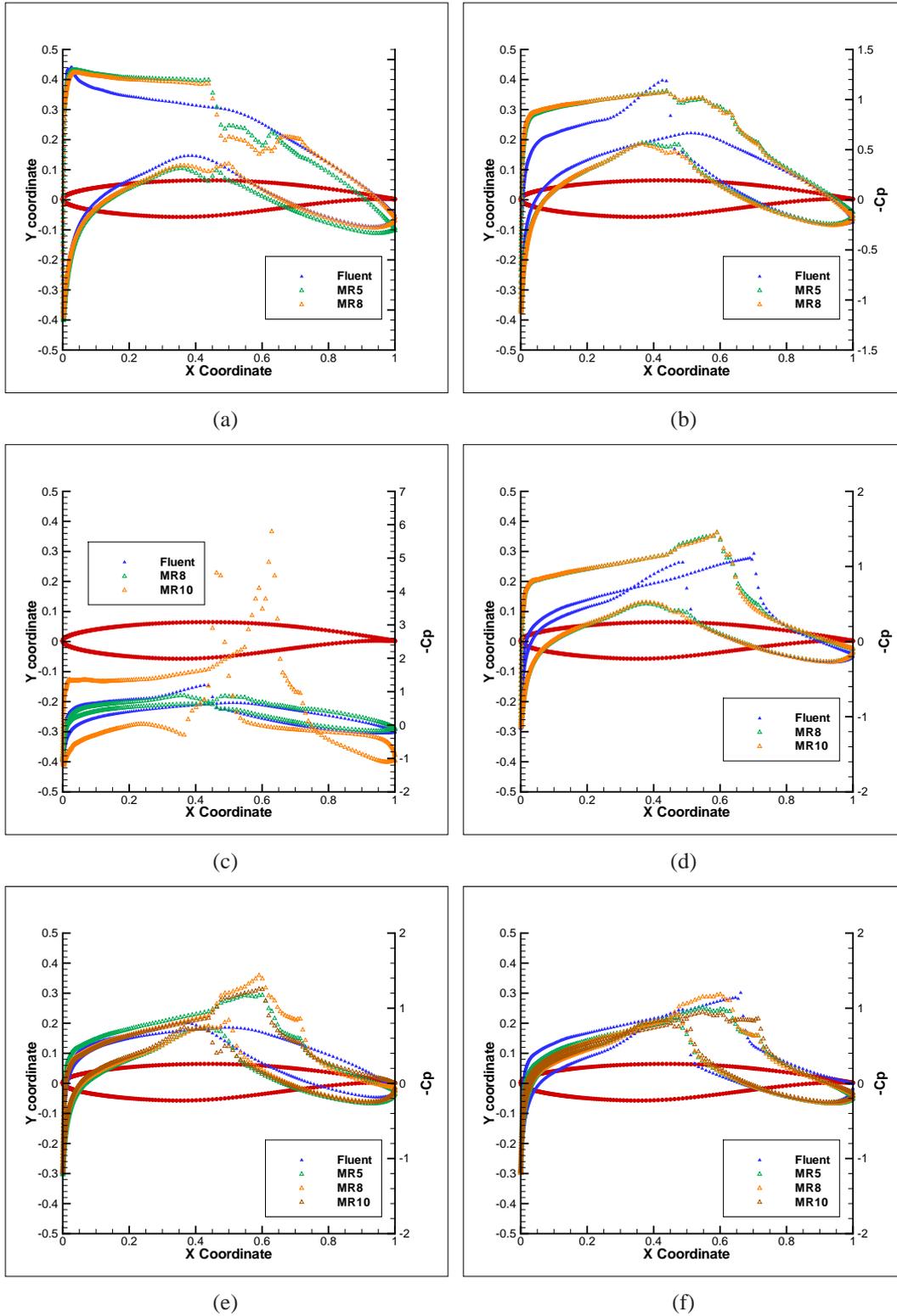


FIG. 5.7 – Performances des modèles de répartition de C_p ailleurs qu'aux points d'échantillonnage. Dans l'ordre, les figures correspondent aux points de vol ($Ma = 0,62; \alpha = 2^\circ$), $(0,725; -1,7^\circ)$, $(0,70; 1,5^\circ)$, $(0,787; 0^\circ)$, $(0,65; -0,8^\circ)$ et $(0,793; 1,2^\circ)$.

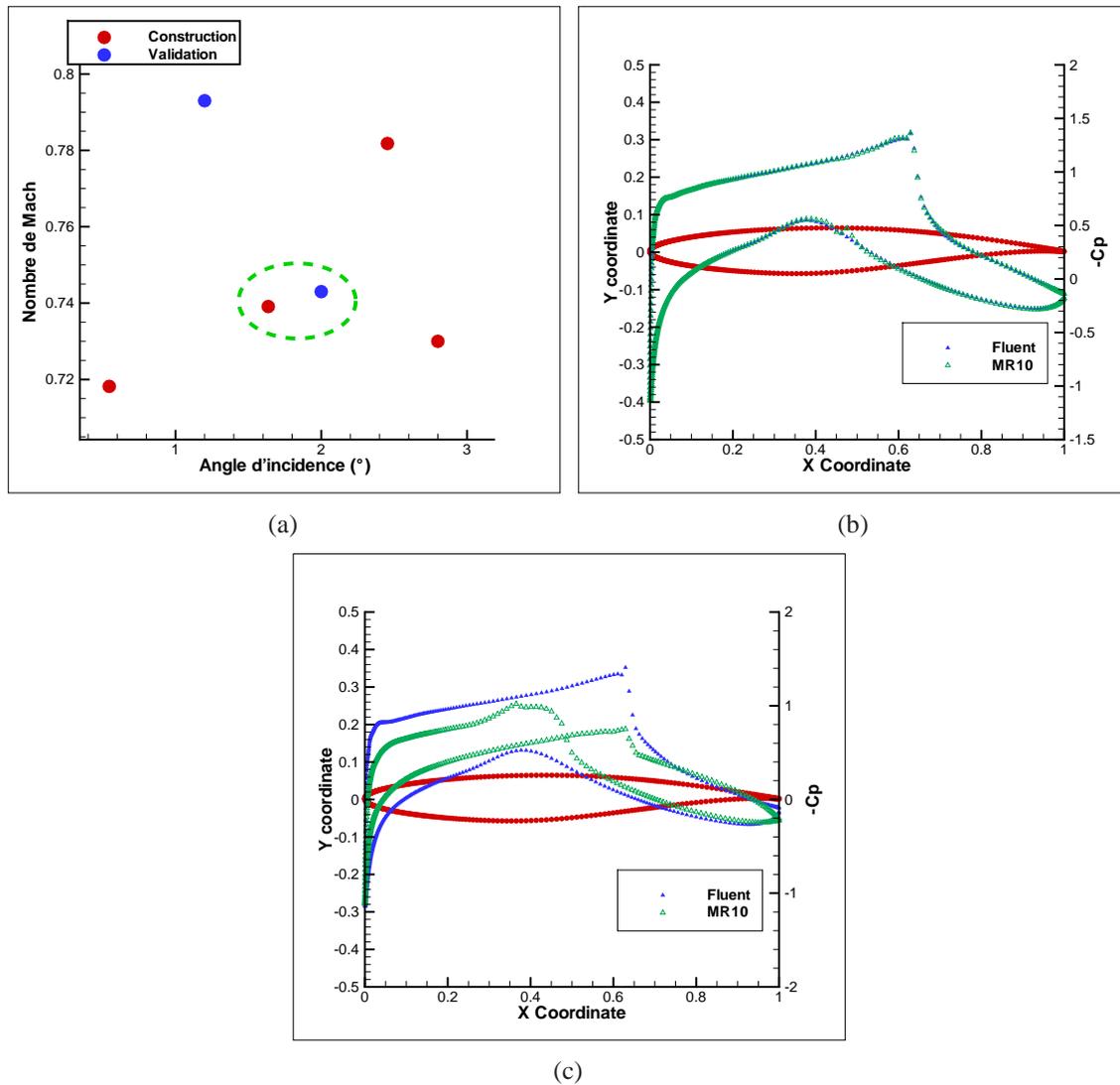


FIG. 5.8 – Evaluation des modèles réduits de C_p près d'un point d'échantillonnage. On a utilisé les données de la figure 5.8(b) pour construire les modèles réduits. En ce point les trois modèles sont en accord avec le calcul CFD. Si on les évalue en un point proche (figure 5.8(a)), les résultats se détériorent (figure 5.8(c)).

TAB. 5.4 – Résultats aux points de validation des modèles réduits de traînée

Nombre de Mach	Angle d'incidence	C_d^{ref}	Ordre 5	Ordre 10
0.62	$-2,20^\circ$	$1,284.10^{-2}$	$-2,11.10^{-3}$	$-3,57.10^{-3}$
0.65	$-0,80^\circ$	$9,385.10^{-3}$	$+1,15.10^{-3}$	$-7,87.10^{-3}$
0.70	$1,50^\circ$	$1,154.10^{-2}$	$-0,94.10^{-3}$	$+3,93.10^{-3}$
0.725	$-1,70^\circ$	$1,025.10^{-2}$	$-0,70.10^{-3}$	$+1,87.10^{-3}$
0.743	$2,00^\circ$	$2,624.10^{-2}$	$+0,75.10^{-3}$	$-1,89.10^{-3}$
0.787	$0,0^\circ$	$2,365.10^{-2}$	$+2,59.10^{-3}$	$8,10.10^{-3}$
0.793	$1,2^\circ$	$3,310.10^{-2}$	$+1,36.10^{-3}$	$-3,17.10^{-3}$

TAB. 5.5 – Résultats aux points de validation des modèles réduits de portance

Nombre de Mach	Angle d'incidence	C_l^{ref}	Ordre 5	Ordre 10
0.62	$-2,20^\circ$	0.6888	$-1,08.10^{-3}$	$-2,96.10^{-2}$
0.65	$-0,80^\circ$	0.1630	$-1,77.10^{-2}$	$-9,77.10^{-2}$
0.70	$1,50^\circ$	0.6096	$+2,20.10^{-2}$	$+3,81.10^{-2}$
0.725	$-1,70^\circ$	$-1.4996.10^{-2}$	$+1,16.10^{-2}$	$3,18.10^{-2}$
0.743	$2,00^\circ$	0.6888	$-1,56.10^{-2}$	$-2,92.10^{-2}$
0.787	$0,0^\circ$	0.3054	$-2,95.10^{-2}$	$-2,40.10^{-2}$
0.793	$1,2^\circ$	0.4205	$-4,48.10^{-2}$	$9,17.10^{-2}$

des modèles en un point relativement proche d'un point d'échantillonnage (figure 5.8), ils ne parviennent pas à être aussi bons que lors du processus d'optimisation.

5.3.5.2 Evaluation des modèles réduits de coefficients aérodynamiques

On opère de même pour évaluer les qualités des modèles réduits de traînée et portance. Les tableaux 5.4 et 5.5 comparent les traînées et portances des différents modèles, aux points de validation de la figure 5.6.

Les deux modèles parviennent à capter les variations globales des coefficients, mais l'erreur faite devient plus importante qu'aux points d'échantillonnage. De plus, augmenter l'ordre du modèle ne garantit pas de mieux prévoir les valeurs des efforts hors des points d'échantillonnage. Ainsi, alors que le modèle d'ordre 10 était meilleur que celui d'ordre 5 pour les points ayant servi à l'identification, on s'aperçoit que ce n'est plus le cas lorsque l'on regarde ailleurs.

Les topologies des coefficients d'efforts sont beaucoup plus "lisses" que celle des coefficients de pression : on n'observe de discontinuité ni de portance, ni de traînée dans le domaine de vol. C'est certainement la raison pour laquelle, en suivant le même protocole, on parvient à construire des surfaces de réponse pour les efforts, mais pas pour les coefficients de pression.

Quoiqu'il en soit, on se trouve donc dans un cas dans lequel, imiter les résultats des simulations CFD aux points d'échantillonnage, ne permet pas d'assurer que le modèle réduit soit utilisable et précis ailleurs. Dans le paragraphe qui suit, nous essayons d'identifier les causes probables de cet échec.

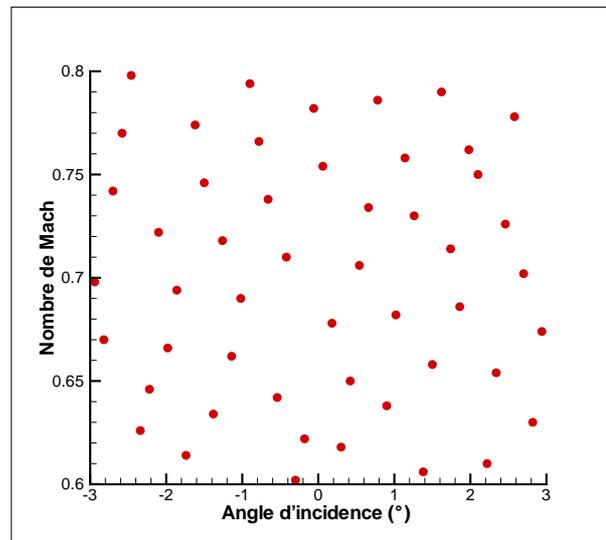


FIG. 5.9 – 50×3 calculs sont réalisés dans le domaine de vol pour fournir le second échantillonnage.

5.3.6 Tentative d'amélioration des modèles

Deux axes se présentent à nous pour améliorer la qualité des modèles que nous construisons :

1. modifier la structure du modèle réduit pour la rendre plus spécifique des écoulements compressibles ;
2. augmenter la densité de l'échantillonnage, comme le préconise la malédiction de la dimensionnalité.

Dériver une structure de modèle réduit des équations de Navier-Stokes compressibles (5.1) présenterait des difficultés liées à la présence de non-linéarités non polynômiales. Cet exercice mériterait du temps qu'on ne peut pas lui accorder dans la cadre de la présente application. En optant pour la seconde solution, nous choisissons plutôt d'illustrer dans le paragraphe qui vient, le fait que la densité d'échantillonnage a une importance critique pour la réussite de la construction du modèle réduit.

5.4 Densification de l'échantillonnage et nouvelle construction de modèle

5.4.1 Nouvel échantillonnage

Pour construire les modèles réduits des paragraphes précédents, l'échantillonnage comptait 12 points apparaissant sur la figure 5.3, auxquels s'ajoutaient 24 autres points proches, servant à estimer les dérivées des observables (pour lisser le modèle stationnaire).

Pour évaluer l'effet de l'échantillonnage, nous augmentons le nombre de points, en passant de 12 à 50 points. Par ailleurs, nous avons confié la répartition des points dans le domaine de vol à un algorithme de type IHS (voir paragraphe 3.4.1.4 du chapitre 3). La figure 5.9 présente l'échantillonnage qui servira à la construction des nouveaux modèles réduits.

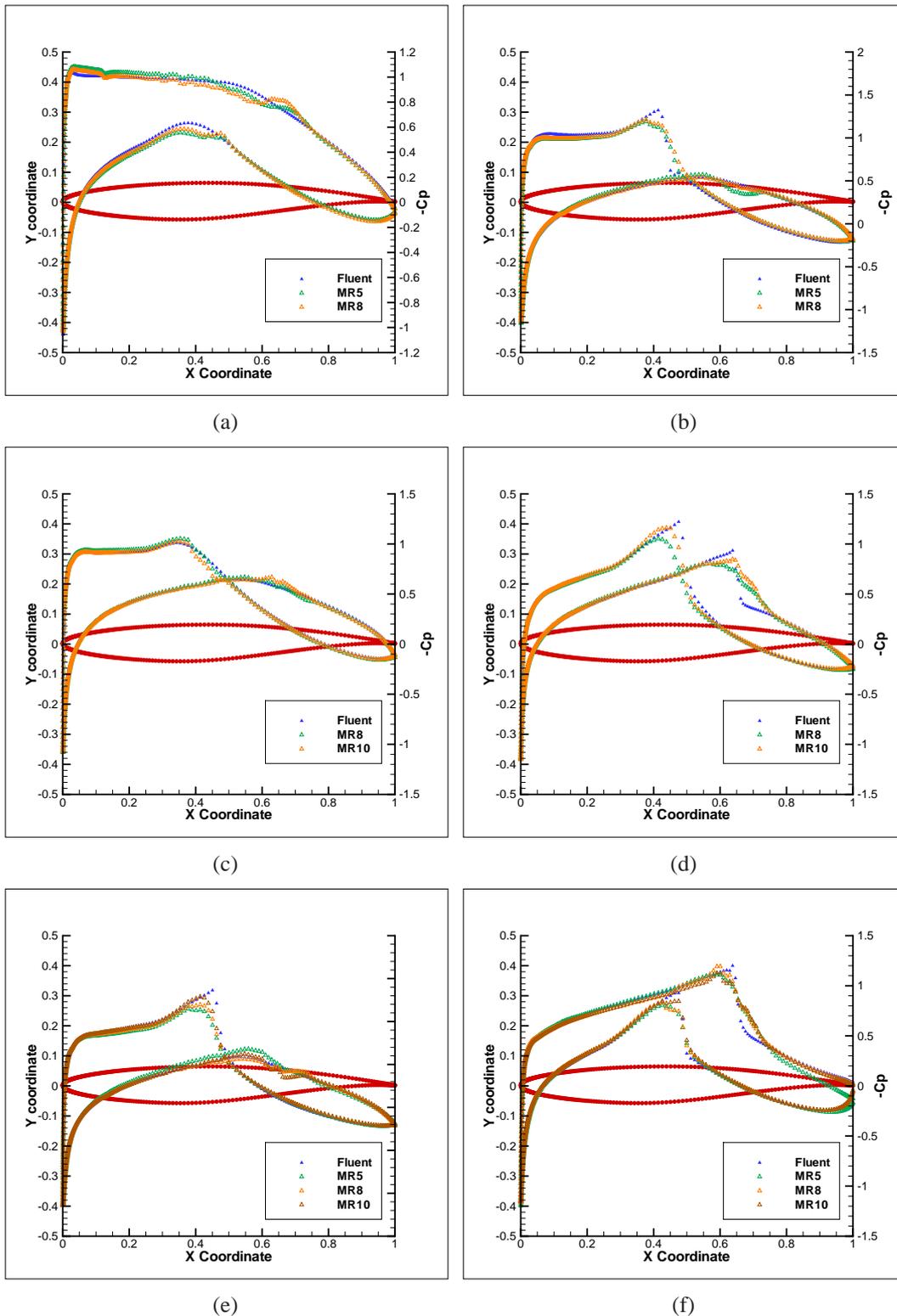


FIG. 5.10 – Evaluation aux points d'échantillonnage des modèles réduits de répartition de coefficients de pression. Les évaluations se font respectivement aux points $(Ma = 0,606; \alpha = 1,38^\circ)$, $(0,698; -2,94^\circ)$, $(0,626; -2,34^\circ)$, $(0,774; -1,62^\circ)$, $(0,742; -2,70^\circ)$, et $(0,790; 1,62^\circ)$.

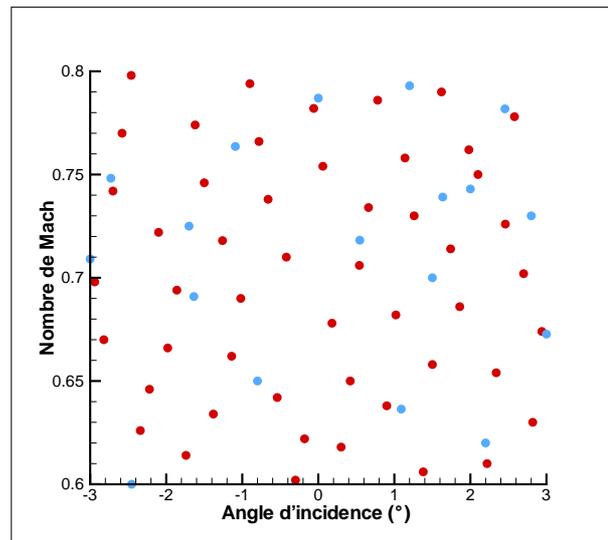


FIG. 5.11 – En rouge : points de construction des modèles réduits. En bleu : points de validation. Les points de validation correspondent aux points d'échantillonnage et de validation des modèles réduits issus du premier échantillonnage (voir la figure 5.6)

5.4.2 Construction et validation des modèles de distribution de coefficients de pression

Trois modèles réduits supplémentaires d'ordres 5, 8 et 10 ont été construits. Sur la figure 5.10, on trouve un aperçu de leurs performances aux points d'échantillonnage.

A l'examen de cette figure, on s'aperçoit que les modèles réduits se rapprochent beaucoup plus difficilement des distributions de C_p du calcul CFD, que dans le cas précédent. Pour être plus précis, en l'absence de choc, les résultats des deux échantillonnages sont comparables, mais, contrairement aux premiers, les nouveaux modèles ont tendance à lisser les discontinuités de choc. En effet, dans la mesure où il y a plus d'échantillons, les compromis trouvés par l'algorithme d'identification sont moins généreux envers chaque point d'échantillonnage. Par contre, les deux cas ont en commun le fait que lorsque l'ordre augmente, on améliore sensiblement les résultats. Si cette tendance se vérifie à l'examen du modèle hors des points d'échantillonnage, alors là, nous aurions intérêt à chercher une convergence en ordre.

Les trois modèles sont donc évalués ailleurs qu'aux points d'échantillonnage. On utilise :

- les sept simulations qui ont servi à évaluer les premiers modèles (voir figure 5.6),
- et également les 12 simulations qui ont servi à construire ces premiers modèles.

La figure 5.11 permet de visualiser ces points de validation parmi les points ayant servi d'échantillons.

La figure 5.12 présente quelques exemples de comparaison entre les données prédites par les modèles réduits, et ceux calculés par le code CFD. Le principal résultat est que cette fois, l'erreur commise aux points de validation est du même ordre de grandeur que l'erreur qui était commise aux points d'échantillonnage.

Contrairement aux premiers modèles, ceux-ci ont permis de prévoir, aux points d'évaluation, la présence ou non de chocs, et leurs positions, au pire, moyennes.

Lorsque les frontières du domaine n'ont pas fait l'objet d'un échantillonnage particulier, les méthodes de surfaces de réponse peuvent y présenter des problèmes de précision. Il faut être conscient que cette limitation peut affecter les performances du modèle sur les frontières

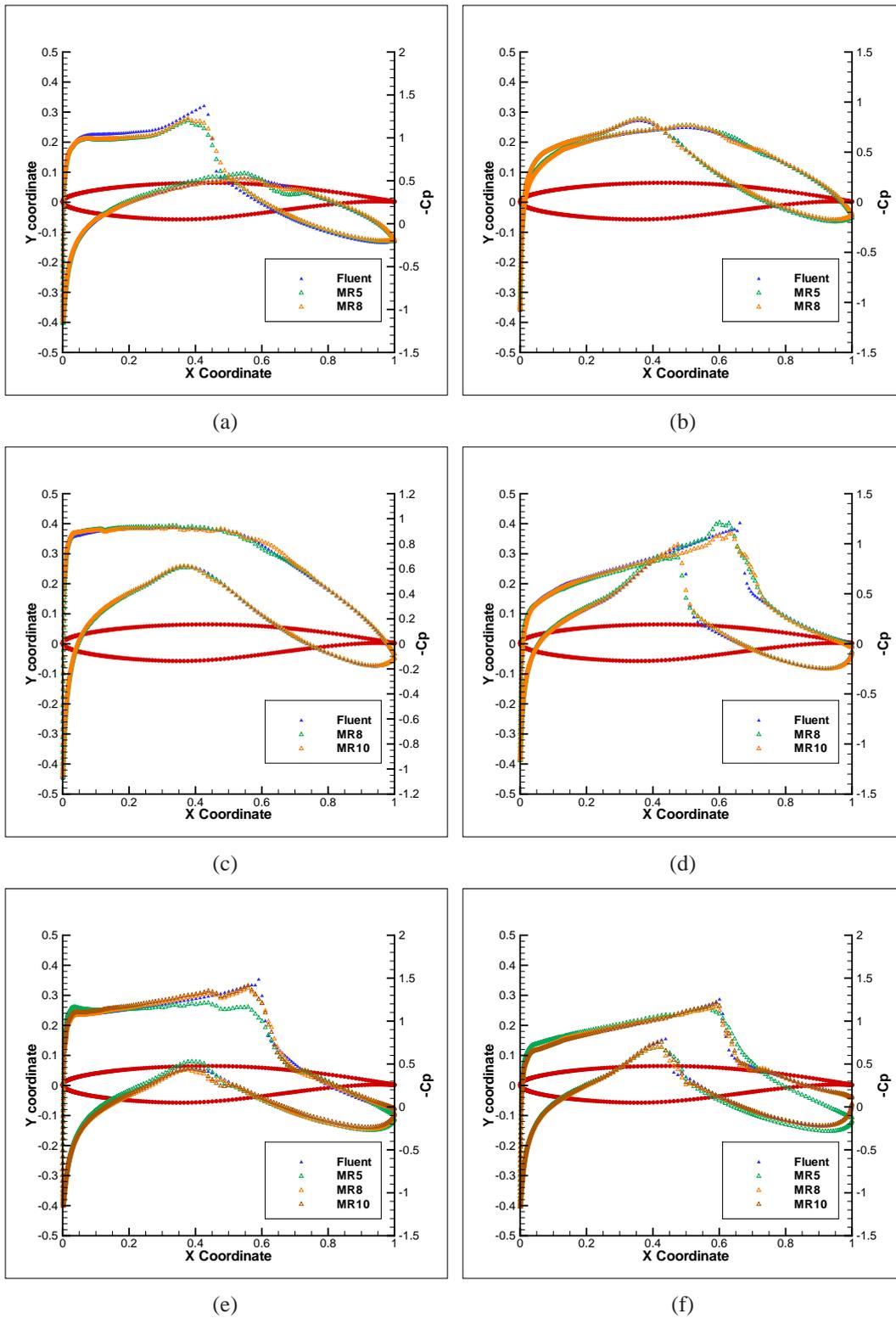


FIG. 5.12 – Les trois modèles réduits sont évalués hors des points d'échantillonnage. Les points d'évaluation sont respectivement $(Ma = 0,71, \alpha = -3, 0^\circ)$, $(0,65; -0,8^\circ)$, $(0,64, 1, 09^\circ)$, $(0,793; 1, 2^\circ)$, $(0,73; 2, 80^\circ)$, et $(0,78; 2, 45^\circ)$.

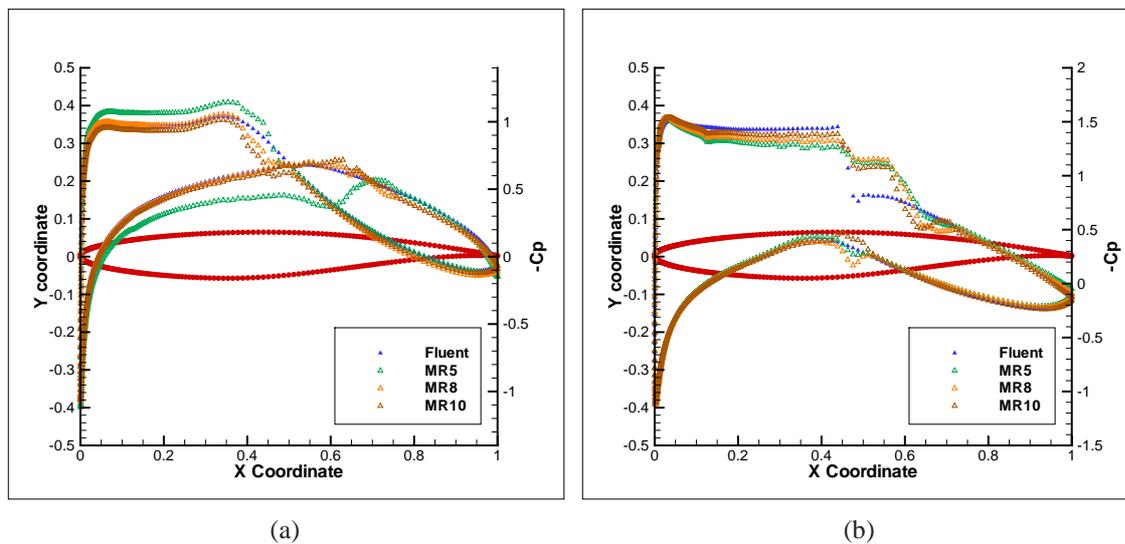


FIG. 5.13 – Aux frontières du domaine de vol, la qualité des modèles réduits peut s'étioler. La figure 5.13(a) est prise au point $(Ma = 0,60; \alpha = -2,45^\circ)$, et la figure 5.13(b) au point $(0,67; 3,0^\circ)$.

du domaine de vol, mais pas nécessairement. La figure 5.13 présente deux résultats moyens des modèles réduits en des points que l'on peut considérer comme étant proches du bord : $(Ma = 0,60; \alpha = -2,45^\circ)$ et $(0,67; 3,0^\circ)$. Par contre les points $(0,71, -3,0^\circ)$ (figure 5.12(a)), $(0,73; 2,80^\circ)$ (figure 5.12(e)) et $(0,78; 2,45^\circ)$ (figure 5.12(f)) peuvent également être considérés comme proches des frontières du domaine, et pourtant les résultats sont corrects.

On constate encore une fois que la qualité des modèles augmente avec leur ordre. Cette tendance s'observe donc aussi bien aux points d'échantillonnage qu'en ces points supplémentaires. Pour cette raison, nous pourrions envisager de continuer à augmenter l'ordre des modèles. Nous ne le faisons pas dans la mesure où l'objet de l'étude concerne l'effet de la densité de l'échantillonnage. Mais nous voulons insister sur le fait que pour construire un modèle réduit de qualité, l'échantillonnage doit être adapté à la régularité des observables étudiés. Moins les fonctions à reproduire sont régulières, et plus la problématique de l'échantillonnage est dominante par rapport à celle de l'ordre. Avec un échantillonnage de piètre qualité par rapport à la régularité des observables, augmenter l'ordre du modèle ne permettra pas de les reconstruire avec précision.

5.4.3 Construction et validation des modèles pour les coefficients aérodynamiques

A l'aide des efforts calculés aux points d'échantillonnage sur la figure 5.9, on construit, pour chaque coefficient, deux modèles, d'ordre 5 et 10. Les détails de la construction du modèle d'ordre 10 de traînée sont disponibles dans le tableau 5.6 (ceux du modèle de portance sont identiques). Plutôt que de présenter sous la forme d'un tableau, leurs résultats aux 50 points d'échantillonnage, nous illustrons leurs performances de manière plus graphique. Une fois les modèles réduits construits, il est possible de tracer les évolutions de traînée et de portance sur tout le domaine de vol. La figure 5.14 donne des exemples de surfaces que l'on peut ainsi obtenir.

On note au passage qu'il existe des régions dans lesquelles ces surfaces présentent des discontinuités (voir la figure 5.15). Elles correspondent en fait à des points pour lesquels l'équation d'état (5.9) n'est pas correctement résolue, malgré les précautions prises lors de l'identification

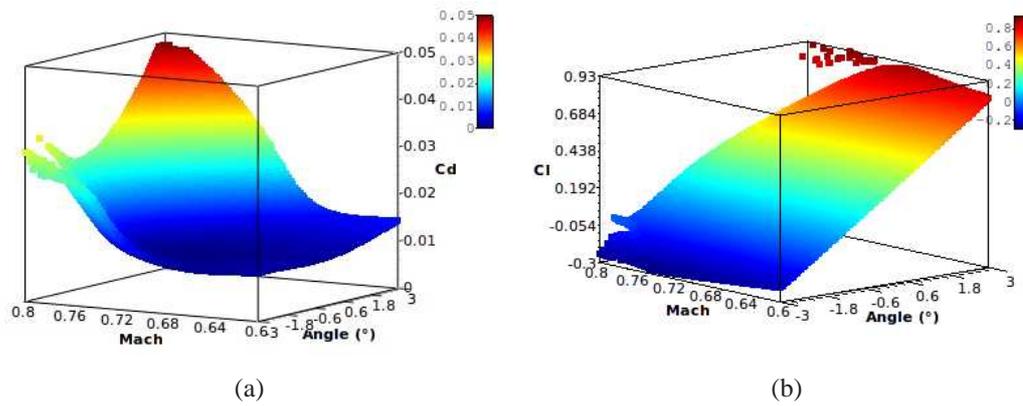


FIG. 5.14 – Coefficients aérodynamiques sur tout le domaine de vol. A l'aide du modèle réduit d'ordre 10, les coefficients de traînée (figure 5.14(a)) et de portance (figure 5.14(b)) ont été calculés en 10000 points du domaine de vol pour créer ces surfaces.

TAB. 5.6 – Composition du modèle réduit de coefficients de traînée d'ordre 10.

Type de modèle	cinétique stationnaire
Structure	Equation (3.59)
Ordre	10
Nombre d'entrées	2
Nombre de composantes	
Total	240
Part non linéaire b_1, b_2	2×100
Commande linéaire a^∞	20
Commande non linéaire b^∞	20
Nombre d'observables	1
Nombre d'échantillons	$50 + (2 \times 50)$

(les modèles retenus permettent de résoudre l'équation d'état en tous les points d'échantillonnage).

Comme le montre la figure 5.16, l'erreur faite aux points d'échantillonnage par les modèles réduits de traînée reste inférieure à 0,0025 pour le modèle d'ordre 5, et à 0,001 pour le modèle d'ordre 10. Les erreurs relatives restent quant à elles en deçà de 12,5% et de 6% pour les modèles d'ordre 5 et 10 respectivement (rapport entre l'erreur et la valeur du coefficient de traînée proposée par le code CFD). On notera que les erreurs importantes n'apparaissent pas aux mêmes endroits pour les deux modèles. Dans le cas du modèle d'ordre 5 par exemple, l'erreur en valeur absolue est plus importante lorsque l'angle d'incidence se rapproche de 3° , alors qu'elle correspond aux nombres de Mach élevés pour le modèle d'ordre 10.

Pour tester ces modèles ailleurs qu'aux points d'échantillonnage, nous reprenons, comme expliqué dans le paragraphe 5.4.2, les calculs CFD réalisés pour identifier et valider les premiers modèles réduits (cf. paragraphe 5.3). En ce qui concerne les modèles réduits de traînée, le premier résultat est que **le niveau d'erreur obtenu lors de l'identification est maintenu**. Sur la figure 5.17, on trouve les erreurs absolues et relatives en ces 19 points.

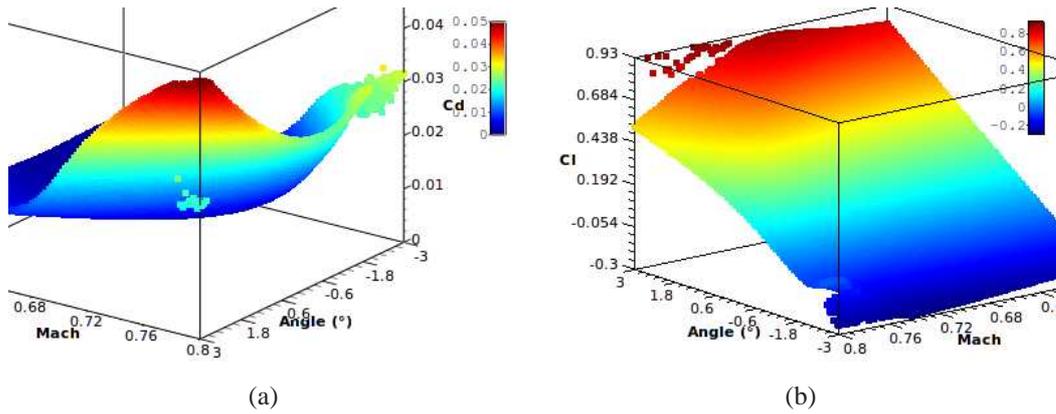


FIG. 5.15 – Aux coins du domaine de vol correspondant aux nombres de Mach élevés, l'équation d'état du modèle réduit est mal résolue. Cela résulte en une discontinuité marquée et non physique des surfaces de coefficients. Figure 5.15(a) : coefficient de traînée. Figure 5.15(b) : coefficient de portance.

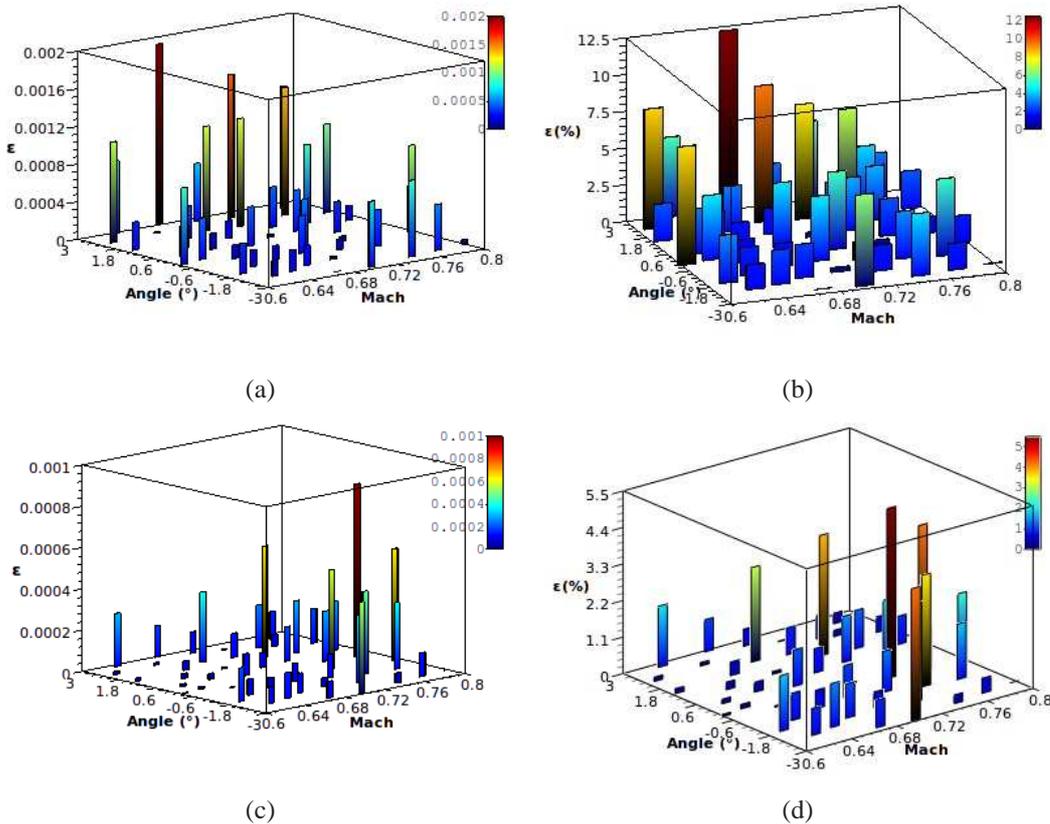


FIG. 5.16 – Modèles réduits de traînée. Aux points d'identification, les modèles réduits reproduisent relativement bien les coefficients fournis par le code CFD. Les figures 5.16(a) et 5.16(b) présentent les erreurs absolues et relatives (exprimées en pourcentage) faites par le modèle d'ordre 5. Les figures 5.16(c) et 5.16(d) font de même pour le modèle d'ordre 10.

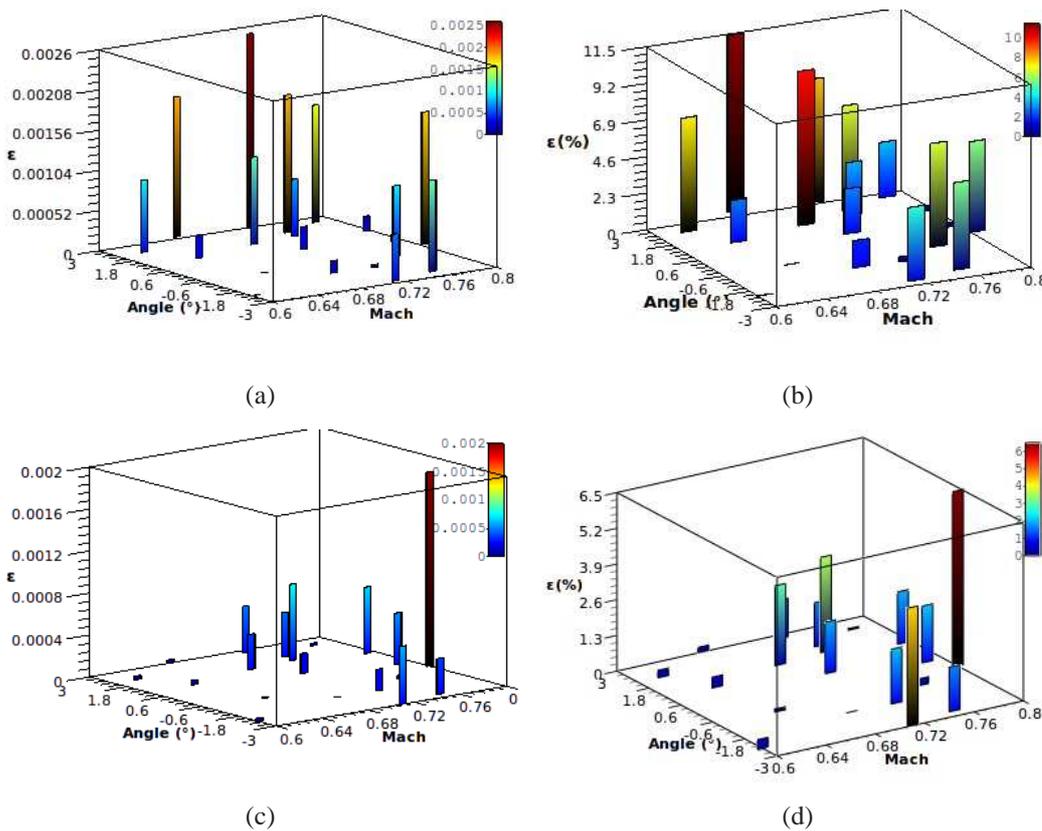


FIG. 5.17 – Erreurs aux points de validation des modèles de traînée. Le modèle d'ordre 5 est présenté par la figure 5.17(a) (erreur absolue) et 5.17(b) (erreur relative). Les figures 5.17(c) (erreur absolue) et 5.17(d) (erreur relative) correspondent aux résultats du modèle d'ordre 10.

Comme durant la phase d'identification, le modèle réduit d'ordre 5 présente plus de difficultés lorsque l'angle d'attaque se rapproche de 3° . Les forts nombres de Mach vont plutôt correspondre aux erreurs du modèle d'ordre 10. Il semble donc que la répartition de l'erreur faite par le modèle réduit ne soit pas entièrement dépendante de la forme de la fonction dont on cherche une approximation. Cela laisse entendre qu'elle est partiellement fixée par ce qui se passe lors du processus d'identification, et donc par la qualité de l'optimisation.

En ce qui concerne le coefficient de portance, la figure 5.18 présente les erreurs faites par les modèles d'ordre 5 et 10, aux points ayant servi aux identifications. On constate que contrairement au cas des modèles réduits de traînée, les répartitions d'erreur absolue des deux modèles sont similaires. En ce qui concerne l'erreur relative, le point ($Ma = 0,614; \alpha = -1,74^\circ$) est problématique pour les deux modèles. Si pour le modèle d'ordre 10, cette erreur relative reste inférieure à 6% sur le reste de l'échantillonnage, le modèle d'ordre 5 présente également une erreur relative importante (92%) au point ($0,774; -1,62^\circ$). En dehors de ces deux points, l'erreur relative de ce modèle reste en deçà de 11%.

Aux points de validation (figure 5.19), les erreurs absolues et relatives faites par les deux modèles augmentent sensiblement. Même s'il se comporte mieux que le modèle d'ordre 5, la répartition d'erreur du modèle d'ordre 10 reste imprévisible. Sur la plupart des points de validation, l'erreur relative de ce modèle reste en dessous de 10%, mais il existe un point parmi eux où elle atteint 29%.

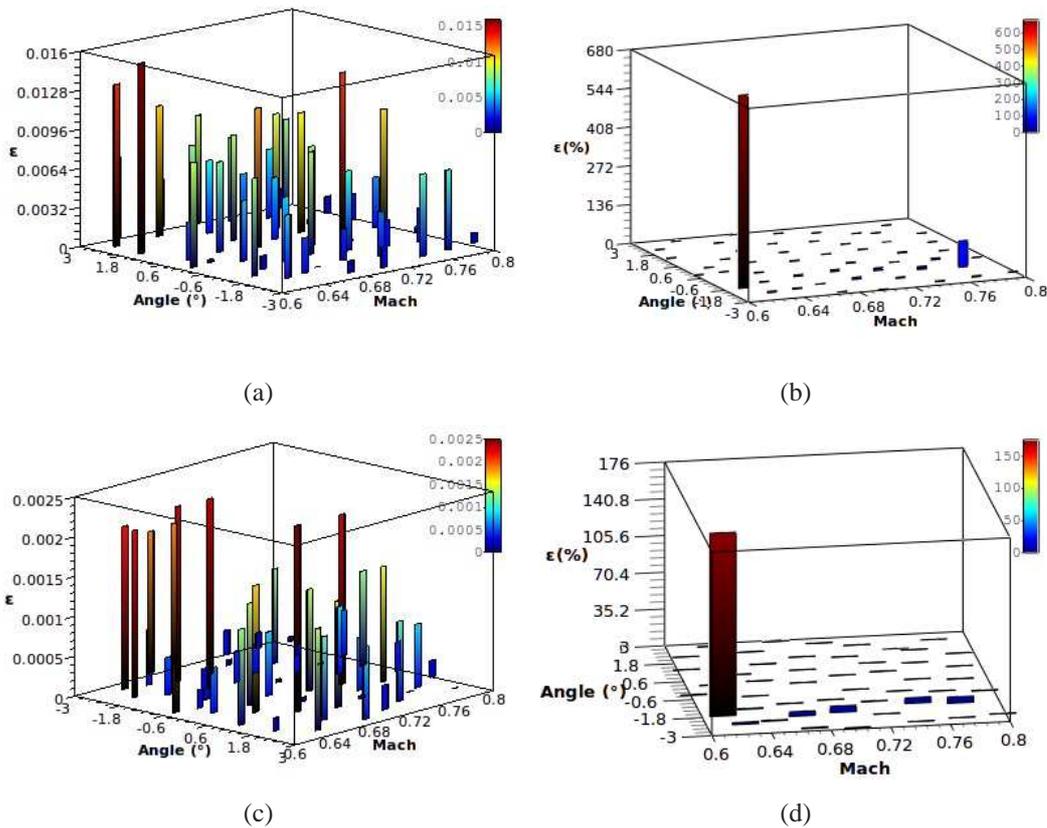


FIG. 5.18 – Erreurs des modèles réduits de portance d'ordre 5 et 10 aux points ayant servi à la construction des modèles. Figures 5.18(a) (erreur absolue) et 5.18(b) (erreur relative) : modèle d'ordre 5. Figures 5.18(c) (erreur absolue) et 5.18(d) (erreur relative) : modèle d'ordre 10.

A leur décharge, ces deux modèles ont été construits pour reproduire des données dont le rapport entre les valeurs absolues maximale et minimale est d'environ 700. Dans le processus d'optimisation, l'expression de la fonctionnelle désavantage alors les points dont la portance est très faible en valeur absolue. Sur le domaine de vol, l'erreur absolue est relativement homogène. Comme les valeurs à prédire peuvent varier dans un rapport de 700, on observe naturellement qu'aux points de portance quasi nulle, l'erreur relative devient extrêmement importante.

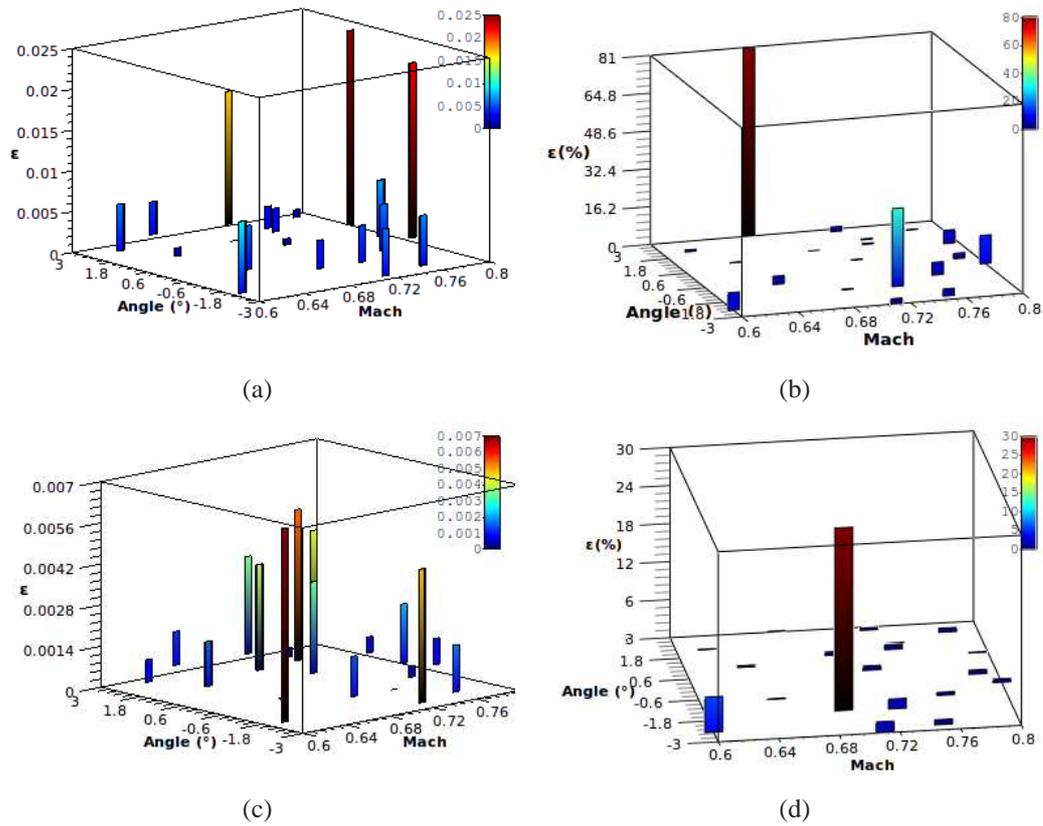


FIG. 5.19 – Modèles réduits de portance ailleurs qu'aux points d'échantillonnage. Modèle d'ordre 5 : figures 5.19(a) (erreur absolue) et 5.19(b) (erreur relative). Modèle d'ordre 10 : figures 5.19(c) (erreur absolue) et 5.19(d) (erreur relative).

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de mettre en valeur l'aspect "surface de réponse" de la réduction de modèle par identification, lorsqu'on l'utilise en stationnaire et sur des observables particuliers.

Pour cela, nous nous sommes intéressés au cas des écoulements sub à transsoniques à faibles incidences autour d'un profil d'aile RAE2822. Il s'agissait d'adapter les méthodologies de réduction déjà développées, à la reproduction et à la prédiction du comportement de deux types d'observables aéronautiques :

- des répartitions locales de coefficients de pression ;
- des efforts aérodynamiques (traînée et portance).

Ces deux types d'observables semblent de prime abord ne pas présenter le même niveau de difficulté. Alors que les efforts aérodynamiques peuvent être représentés par des fonctions régulières dans le domaine de vol, l'évolution des répartitions de pression est discontinue et fortement non linéaire.

Malgré cela, les stratégies à adopter pour construire des surfaces de réponse de qualité semblent les mêmes. Comme pour n'importe quelle méthodologie de surface de réponse, la problématique primordiale concerne la densité de l'échantillonnage. Dans l'exemple des coefficients de pression, avec un échantillonnage relativement lâche, nous avons obtenu des modèles qui, alors qu'il étaient très bons aux points de construction, voyaient s'effrondre leur capacité à décrire les répartitions de coefficients de pression dans le reste du domaine, allant jusqu'à prévoir régulièrement des répartitions de pression non physiques. En augmentant la densité de l'échantillonnage, nous sommes passés à des modèles qui, à partir d'un certain ordre, parvenaient à capter les discontinuités correspondant à la présence ou non de chocs. Mais malgré nos précautions, les qualités des modèles peuvent diminuer lorsque l'on se rapproche des bords du domaine de vol. C'est une difficulté qui n'est pas propre à la réduction de modèle par identification, mais qui est également partagée par d'autres méthodes de surfaces de réponse. Pour y remédier, il serait nécessaire d'échantillonner la frontière du domaine, comme on échantillonne le domaine lui-même.

Nous avons obtenu des résultats similaires avec les modèles réduits de coefficients d'efforts aérodynamiques. Les modèles réduits obtenus avec un faible nombre d'échantillons sont moins bons, à la prédiction, que ceux construits à l'aide d'un échantillonnage plus fourni. Les résultats des modèles de traînée sont particulièrement bons. On a présenté les résultats de modèles d'ordres 5 et 10, mais des modèles d'ordres 4 et 8 avaient également été construits, et ils mettent en plus en évidence, que lorsque l'échantillonnage est suffisamment fourni, il y a un effet d'ordre. Entre les points d'échantillonnage, la qualité des modèles va croissante avec leur ordre.

Il semble que les rapports entre les qualités de l'échantillonnage et de l'optimisation et la régularité de la fonction dont on cherche une approximation, soient les éléments les plus importants dans la construction des modèles réduits. Ainsi, alors que les écoulements étudiés sont compressibles, les structures des modèles réduits sont dérivées des équations de Navier-Stokes incompressibles, sans équation correspondant à la masse volumique ou à la température. Malgré cela, avec un échantillonnage conséquent, on a pu produire des modèles réduits de bonne facture. De plus, lorsque l'échantillonnage n'est pas suffisant, augmenter l'ordre d'un modèle n'en améliore pas la qualité.

Cet exercice aura donc permis de mettre en avant le fait que, tout comme les surfaces de réponse ou les modèles réduits POD décrits dans le chapitre 2, un modèle réduit identifié n'est pas un solveur d'équations physiques. Il s'agit simplement d'un faible nombre de fonctions mathématiques d'état, qui sont projetées dans l'espace des observables d'une façon définie à

- l'avance. Les paramètres d'importance pour un modèle réduit identifié de qualité sont :
- le rapport entre le nombre de variables d'optimisation et la richesse du modèle réduit,
 - la quantité de données nécessaire au réglage de la projection et à la régularisation des fonctions d'état.

Bibliographie

- [1] S. Jakirlic, B. Eisfeld, R. Jester-zurker, N. Kroll, Near-wall, Reynolds-stress model calculations of transonic flow configurations relevant to aircraft aerodynamics. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Volume 28, Issue 4, Including Special Issue of Conference on Modelling Fluid Flow (CMFF'06), Budapest, 13th event of the international conference series in fluid flow technologies : conference on modelling fluid flow, August 2007, Pages 602-615, ISSN 0142-727X, DOI : 10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.04.001.
- [2] T. Chantrasmi, A. Doostan, G. Iaccarino, Padé-Legendre approximants for uncertainty analysis with discontinuous response surfaces. *Journal of Computational Physics*, Volume 228, Issue 19, 20 October 2009, Pages 7159-7180, ISSN 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2009.06.024.
- [3] D.J. Lucia, P.S. Beran, W.A. Silva, Reduced-order modeling : new approaches for computational physics. *Progress in Aerospace Sciences*, Volume 40, Issues 1-2, February 2004, Pages 51-117, ISSN 0376-0421, DOI : 10.1016/j.paerosci.2003.12.001.
- [4] J. Laurenceau and P. Sagaut, Building Efficient response surfaces of aerodynamic functions with kriging and cokriging. *AIAA Journal*, 0001-1452 vol.46 no.2 (498-507), 2008.
- [5] C. Praveen, R. Duvigneau, Low cost PSO using metamodels and inexact pre-evaluation : Application to aerodynamic shape design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 198, Issues 9-12, 15 February 2009, Pages 1087-1096, ISSN 0045-7825, DOI : 10.1016/j.cma.2008.11.019.
- [6] K.C. Giannakoglou, Design of optimal aerodynamic shapes using stochastic optimization methods and computational intelligence. *Progress in Aerospace Sciences*, Volume 38, Issue 1, January 2002, Pages 43-76, ISSN 0376-0421, DOI : 10.1016/S0376-0421(01)00019-7.
- [7] A. Qamar, S. Sanghi, Steady supersonic flow-field predictions using proper orthogonal decomposition technique. *Computers & Fluids*, Volume 38, Issue 6, June 2009, Pages 1218-1231, ISSN 0045-7930, DOI : 10.1016/j.compfluid.2008.11.011.
- [8] D.J. Lucia, P.I. King, P.S. Beran, Reduced order modeling of a two-dimensional flow with moving shocks. *Computers & Fluids*, Volume 32, Issue 7, August 2003, Pages 917-938, ISSN 0045-7930, DOI : 10.1016/S0045-7930(02)00035-X.
- [9] B.I. Epureanu, E.H. Dowell, K.C. Hall, Reduced-Order Models of unsteady transonic viscous flows in turbomachinery, *Journal of Fluids and Structures*, Volume 14, Issue 8, November 2000, Pages 1215-1234, ISSN 0889-9746, DOI : 10.1006/jfls.2000.0320.
- [10] Z. Xiaoping, D. Jifeng, L. Weiji, Z. Yong, Robust Airfoil Optimization with Multi-objective Estimation of Distribution Algorithm. *Chinese Journal of Aeronautics*, Volume 21, Issue 4, August 2008, Pages 289-295, ISSN 1000-9361, DOI : 10.1016/S1000-9361(08)60038-2.

6

Conclusions et perspectives

Des modèles réduits pour des systèmes aérothermiques industriels

Un produit industriel peut souvent être décrit comme un assemblage de systèmes. Classiquement, la conception du produit passe par l'étude du fonctionnement de chacun de ces systèmes. Dans le cadre de la conception d'un avion par exemple, un ingénieur pourra, en fonction de sa spécialisation, s'intéresser aux problématiques de ventilation cabine, à la disposition des systèmes électriques et de leur câblage, où encore s'attacher à déterminer les efforts aérodynamiques ressentis par les différents éléments de l'avion. Cependant, il faut se souvenir que, pour un système donné, les autres systèmes du produit font partie de l'environnement. Dans la conception du produit, on ne doit donc pas se représenter les différents systèmes comme évoluant indépendamment les uns des autres. Pour appréhender le fonctionnement du produit, il est nécessaire de modéliser et de prendre en compte **les interactions** entre les multiples systèmes qui le constituent.

Pour cela, il est particulièrement pratique de se représenter le fonctionnement des systèmes sous la forme de **modèles entrées / sorties**. En évaluant l'impact d'un système sur les autres à l'aide d'**observables**, on peut les assembler en un ensemble de modèles pour lesquels les sorties des uns servent d'entrées pour les autres. Alors, lorsque l'on sait déterminer les relations entrées / sorties de chaque système, on est en mesure de maîtriser le fonctionnement global du produit. Et c'est dans cette optique que des **modèles réduits** tels que ceux qui ont vu le jour au cours de cette thèse, répondent à un besoin réel.

En effet, dans de nombreux cas, cette relation entrées / sorties n'est pas explicite, et peut mettre en jeu des processus longs et coûteux. Par exemple, à Airbus, la description de plusieurs systèmes aérothermiques requiert des simulations instationnaires, pour lesquels le nombre de pas de temps nécessaires rend le temps de calcul des observables extrêmement long. On pense plus particulièrement aux systèmes nécessitant des modélisations numériques (CFD, structure, ...). Dans ce cas, des modèles de remplacement, comme les modèles réduits, peuvent prendre le relais des solveurs numériques, pour proposer des relations entrées / sorties calculées beaucoup plus rapidement.

Bilan

La problématique principale de cette thèse était de développer et d’asseoir la pratique de la méthode d’identification modale dans le cas des écoulements de convection forcée. L’objectif était d’être capable, pour ces écoulements, de proposer des modèles d’ordre faible prédisant relativement bien, l’évolution d’un observable thermique lorsque l’écoulement est soumis à des conditions opératrices variables. Nous avons pu valider les méthodologies de réduction de modèle en convection forcée en les appliquant à des cas d’écoulement autour d’un cylindre circulaire. En plus, nous avons également montré que les principes de la méthode d’identification modale peuvent également permettre de construire des modèles d’ordre faible dans des configurations d’écoulement très diverses. Le tableau 6.1 récapitule l’ensemble des cas d’écoulement qui ont pu faire l’objet d’une réduction de modèle.

TAB. 6.1 – Récapitulatif des cas d’écoulements qui auront été sujets à la pratique de la méthode d’identification modale.

	Stationnaire	Lâcher tourbillonnaire	Convection transitoire
Thermique	non	non	oui
Observables	Champ de vitesse, efforts, profils de pression	signaux de vitesse	champ de vitesse champ de température flux de chaleur densités de flux
Commentaires	“Lissage” des modèles ; Écoulements compressibles, ou incompressibles	Entrée V_∞ constante, mais observables $y(t)$	champ de vitesse constant ou transitoire ; couplage de modèles

Parmi les thèmes qui sous-tendent la réduction de modèle, les travaux effectués au cours de cette thèse ont permis d’avancer en particulier sur la formulation des modèles en mécanique des fluides, sur l’échantillonnage nécessaire à la construction des modèles, et sur la phase d’optimisation.

1. **La formulation des modèles en mécanique des fluides.** Un modèle réduit construit par identification est structuré autour d’une équation différentielle. La forme des différents termes qui y apparaissent est dérivée d’équations aux dérivées partielles de transferts énergétiques. Dans l’hypothèse d’un écoulement incompressible en convection forcée, nous avons développé une formulation de modèle détaillé, c’est-à-dire une description discrète d’un champ de vitesse et d’un champ de température, comme solution d’une équation matricielle de dimension élevée. De cette équation matricielle, nous avons proposé une forme d’équation différentielle de faible dimension, véritable squelette de nos modèles réduits.

Concernant la formulation du modèle détaillé, les apports de cette thèse par rapport aux travaux précédents sont principalement de trois ordres :

- Nous avons renoncé à la formulation en vorticité - fonction de courant, pour adopter une formulation plus directe, consacrée aux champs de vitesse et de température. Cela permet notamment d’envisager l’application immédiate de la méthode au cas des écoulements tridimensionnels.
- Pour établir une formulation de modèle détaillé en vitesse alors que l’écoulement est incompressible, nous avons dû mettre en place une stratégie pour traiter le cas du gra-

dient de pression. En utilisant la notion de projecteur de Leray-Helmholtz, nous avons pu l'assimiler formellement à un terme quadratique en vitesse.

- Enfin, nous avons remarqué que, au moins dans le cas stationnaire, même lorsque la structure du modèle réduit ne correspond pas exactement à celle d'un modèle détaillé décrivant l'écoulement, la méthode d'identification modale permet malgré tout d'obtenir des modèles d'ordre faible décrivant relativement bien la dynamique des observables. Par exemple, le fait que des écoulements aient été calculés à l'aide d'un modèle de turbulence n'empêche pas de construire un modèle réduit dont l'équation différentielle n'intègre pas de termes correspondant à ceux du modèle de turbulence. Mieux, l'erreur commise par le modèle réduit semble être presque totalement décorrélée de ces termes (paragraphe 4.6.3.4 du chapitre 4). Nous avons également pu construire au chapitre 5 un modèle d'ordre faible d'écoulement fortement compressible et turbulent à l'aide d'une forme d'équation d'état a priori non adaptée. Cela laisse entendre que, plus que par une formulation enrichie de modèles ou de termes supplémentaires, l'amélioration des modèles réduits identifiés passe par une amélioration de la qualité de la phase d'identification, et, au moins dans les cas stationnaires, une amélioration de la qualité de l'échantillonnage.
2. **L'échantillonnage.** Pour les écoulements stationnaires nous avons illustré la problématique de la malédiction de la dimensionnalité en mettant en avant l'augmentation lourde du nombre d'échantillons nécessaires lorsque le nombre d'entrées augmente, et que la régularité de la fonction dont on cherche une valeur approchée diminue. Les résultats et les conclusions sont tirés du cas de l'écoulement autour du profil d'aile traité au chapitre 5.
 3. **L'optimisation.** L'identification est l'étape de construction effective du modèle réduit. Il s'agit de la résolution d'un problème d'optimisation visant à trouver les valeurs des composantes des matrices structurant le modèle réduit, qui permettent à celui-ci de reproduire des données produites par le modèle de référence. Au moins deux problématiques apparaissent. D'une part, lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes non linéaires, le nombre de composantes à identifier augmente, et l'optimisation peut être confrontée à des soucis de minima locaux. Cette thèse a été l'occasion de coder et d'utiliser des méthodes d'optimisation globale, et notamment une méthode d'optimisation par essaim particulière parallélisée. D'autre part, il faut limiter le risque de voir un modèle, qui semble bien reproduire les données d'échantillonnage, devenir médiocre lorsque l'on modifie l'entrée du modèle. Il s'agit d'une problématique particulièrement sensible dans le cas du traitement d'écoulements stationnaires. Dans cette optique, nous préconisons de fournir suffisamment d'information à l'algorithme d'optimisation :
 - soit en densifiant l'échantillonnage,
 - soit en rajoutant une information sur les dérivées des observables par rapport aux entrées.

Et maintenant ?

Plusieurs modèles réduits développés au cours de cette thèse semblent ouvrir à l'identification de nouveaux champs d'exploration et des cas d'application potentiels. D'un point de vue académique, les résultats obtenus en convection forcée ou sur les lâchers tourbillonnaires sont prometteurs. On pourrait envisager :

- de se placer dans des cas d'écoulements de convection naturelle ou mixte : l'écoulement serait toujours gouverné par des conditions opératrices cinétiques et thermiques, mais, cette fois, les conditions aux limites thermiques auraient un impact sur le champ de vitesse. Dans de tels cas, les états réduits cinétiques et thermiques devraient alors être totalement couplés, et non plus faiblement, comme nous l'avons fait au cours de cette thèse. Les modèles réduits cinétiques et thermiques (ou au moins la façon de calculer les états réduits) seraient alors construits conjointement au cours d'une unique procédure d'identification.
- de vérifier si, dans le cadre des détachements tourbillonnaires en écoulement laminaire, la méthode d'identification modale est capable de prendre en compte l'aspect tridimensionnel des structures, et, le cas échéant, les différents modes de tridimensionnalité qui dépendent du nombre de Reynolds.
- de coupler les deux aspects (instationnarité et convection mixte) en cherchant à prendre en compte l'effet thermique sur la fréquence des lâchers de tourbillons.

D'un point de vue plus applicatif l'identification modale nous paraît prête à être portée sur des cas de convection forcée, stationnaire ou transitoire, pour lesquels on rechercherait l'évolution au cours du temps d'observables thermiques en fonction de plusieurs commandes cinétiques et thermiques. Par ailleurs, les modèles présentés ont tous été construits à partir de données issues de calculs CFD. Mais ces données pourraient très bien provenir de campagnes d'essais. L'utilisation de données expérimentales serait une application intéressante des méthodes d'identification appliquées aux écoulements, car cela élargirait les possibilités d'utilisation des modèles. Ainsi, la méthode d'identification pourrait être utilisée pour reproduire et prévoir des données expérimentales de champs de vitesse ou d'observables thermiques (température, flux, ...).

Dans la mesure où la phase d'identification est une étape critique vis à vis de la qualité des modèles réduits, rendre plus efficaces les procédés d'optimisation, reste le chantier, qui à notre avis, produira le plus d'effets bénéfiques. Plusieurs thèmes sont à explorer concernant cette problématique. Le premier consiste à maximiser, tout en limitant le nombre de composantes définissant le modèle réduit, la "richesse" des dynamiques qu'il peut produire. C'est ce que nous avons fait en adoptant une formulation un peu particulière pour les termes quadratiques de nos modèles.

Un second thème concerne l'algorithme d'optimisation. On peut par exemple envisager de coupler l'algorithme d'essai particulaire avec un algorithme d'optimisation locale, comme un algorithme du simplexe. On parle de méthode d'optimisation hybride. Et si l'expression de la fonctionnelle s'y prête, une méthode de descente de gradient devrait accélérer la convergence de l'identification.

Un troisième axe de développement consisterait à automatiser l'ensemble du processus de réduction de modèle. Pour pouvoir industrialiser la construction de modèle par identification, il faudrait pouvoir intégrer dans une suite les différentes phases de cette construction : échantillonnage, identification et validation. La plupart des étapes peuvent être réalisées de façon automatique : le choix des points ou des commandes d'échantillonnage et de validation, ainsi que les calculs CFD. Cependant, pour être réalisé sans intervention de l'utilisateur, le processus d'identification nécessite encore quelques améliorations, dont une expression claire d'un critère de convergence pour l'algorithme d'optimisation.

Ces points d'amélioration mettent en avant le fait que la méthode d'identification modale a acquis en maturité, et est proche d'être industrialisable. Plus que du potentiel, elle possède

des qualités qui, pour pouvoir être exploitées à plus grande échelle, n'ont plus besoin que de quelques efforts, et de cas d'applications ambitieux.

A

Estimation de la dérivée des sorties des modèles par rapport aux entrées

A.1 Ce qu'on cherche à faire

Dans la section 3.4.3 du chapitre 3, nous avons expliqué que, lorsque l'on essaie de construire des modèles réduits d'écoulements stationnaires par identification, la faible quantité de données issues du modèle détaillé conduit souvent à des modèles "instables". Pour y remédier, on rajoute au processus d'identification des informations concernant le gradient de la réponse du modèle réduit par rapport aux entrées du modèle. L'objet de cette annexe est de détailler la méthode de calcul de ce gradient.

On considère une structure de modèle réduit d'écoulement stationnaire, telle que décrite dans l'équation (3.59) du paragraphe 3.3.10.4 :

$$\mathcal{E}_r^v : s_v + (b_{v1}s_v \bullet b_{v2}s_v) + a_v^{(\partial\Omega)}V_{(\partial\Omega)} + b_v^{(\partial\Omega)}\Psi_v^{(\partial\Omega)} = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$y_v^* = h_v s_v \quad (\text{A.1b})$$

Pour rappel, n_v est l'ordre de ce modèle, c'est à dire la dimension de la variable d'état réduite $s_v \in \mathcal{M}_{n_v,1}(\mathbb{R})$. L'entrée du modèle, $V_{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{p_v,1}(\mathbb{R})$, est une matrice colonne de p_v éléments. Par exemple, dans l'application sur le cylindre circulaire, seule la vitesse d'entrée du fluide est à prendre en compte, et $p_v = 1$. Dans celle qui concerne le profil d'aile RAE2822, les deux composantes de la vitesse infinie amont sont les entrées du modèle réduit. Dans ce cas, p_v vaut 2. La sortie du modèle réduit, $y_v \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, est une matrice colonne de q termes.

Les matrices structurant l'équation d'état réduit sont

- pour la partie non linéaire : $b_{v1}, b_{v2} \in \mathcal{M}_{n_v, n_v}(\mathbb{R})$
- pour la commande linéaire : $a_v^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{n_v, p_v}(\mathbb{R})$
- pour la commande non linéaire : $b_v^{(\partial\Omega)} \in \mathcal{M}_{n_v, p_v}(\mathbb{R})$

La matrice de projection h_v est une matrice $q \times n_v$.

Deux termes sont à calculer en chaque point d'échantillonnage :

1. le gradient $\frac{\partial y}{\partial V_{(\partial\Omega)}}$ de la réponse du modèle détaillé par rapport aux entrées. Il s'agit d'une matrice $p_v \times q$;
2. $\frac{\partial y^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}}$, celui de la réponse du modèle réduit par rapport à ces mêmes entrées. Bien évidemment, il s'agit pareillement d'une matrice $p_v \times q$.

A.2 Gradient de la réponse du modèle détaillé

Le gradient de la réponse du modèle détaillé est estimé à partir du code CFD que l'on utilise. Certains codes proposent de calculer ce gradient. Si on ne dispose pas de tels codes, alors le gradient est évalué par différences finies :

1. Pour chaque point d'échantillonnage, on réalise autant de calculs CFD supplémentaires qu'il y a d'entrées (p_v). Pour cela, on fait varier "légèrement" à chaque fois, l'une des composantes de $V_{(\partial\Omega)}$ indépendamment des autres. On note $\delta_j(V_{(\partial\Omega)})$ ces nouveaux points d'échantillonnage, proches de celui où on cherche à calculer le gradient :

$$\delta_j(V_{(\partial\Omega)}) = {}^t(V_{(\partial\Omega)_1}, \dots, V_{(\partial\Omega)_j} + \delta V_{(\partial\Omega)_j}, \dots, V_{(\partial\Omega)_{p_v}}) \quad (\text{A.2})$$

2. Le gradient au point d'échantillonnage $V_{(\partial\Omega)}^0$ peut alors être estimé par un schéma de différences finies d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \right)_{jk} (V_{(\partial\Omega)}^0) \approx \frac{y_k(V_{(\partial\Omega)}^0 + \delta_j(V_{(\partial\Omega)}^0)) - y_k(V_{(\partial\Omega)}^0)}{\delta_j(V_{(\partial\Omega)}^0)} \quad (\text{A.3})$$

Le contre-coup de cette méthode est qu'elle multiplie par $p_v + 1$ le nombre de recours au solveur CFD. Mais l'information supplémentaire permet de réellement régulariser le modèle réduit.

Une alternative intéressante pourrait être de ne calculer que la dérivée de y par rapport à une seule entrée, qui changerait entre les points d'échantillonnage. Ces dérivées seraient alors comparées aux dérivées correspondantes du modèle réduit, et on ne multiplierait alors que par deux le nombre de calculs CFD supplémentaires.

A.3 Gradient de la réponse du modèle réduit

Le gradient de y^* par rapport aux entrées est calculé, pour chaque modèle testé aux cours de l'identification, de façon analytique, à partir des valeurs des matrices qui le structurent.

Pour chacun de ces modèles, l'équation de reconstruction s'écrit comme en A.1b. Comme h_v ne dépend pas de l'entrée, le gradient cherché peut être calculé par :

$$\frac{\partial y^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}} = \frac{\partial s_v}{\partial V_{(\partial\Omega)}} h_v \quad (\text{A.4})$$

Donc, en sachant estimer la dérivée de la solution s_v de l'équation d'état réduite (A.1a) par rapport aux entrées, on peut calculer le gradient de y^* . Notons $R^*(s_v, V_{(\partial\Omega)}) \in \mathcal{M}_{n_v, 1}(\mathbb{R})$ le résidu de cette équation d'état. A convergence, ce résidu est nul, quelle que soit la valeur prise par l'entrée. Comme le résidu ne dépend pas de l'entrée :

$$\frac{dR^*}{dV_{(\partial\Omega)}} = 0 = \frac{\partial s_v}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \frac{\partial R^*}{\partial s_v} + \frac{\partial R^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \quad (\text{A.5})$$

Donc la dérivée $\frac{\partial s_v}{\partial V_{(\partial\Omega)}}$ vaut :

$$\frac{\partial s_v}{\partial V_{(\partial\Omega)}} = - \frac{\partial R^*}{\partial V_{(\partial\Omega)}} \left(\frac{\partial R^*}{\partial s_v} \right)^{-1} \quad (\text{A.6})$$

La ligne i parmi n_v de l'équation d'état réduit (A.1a) s'écrit :

$$R_i^* = 0 = s_{vi} + \left(\sum_{j=1}^{n_v} b_{v1,ij} s_{vj} \right) \left(\sum_{k=1}^{n_v} b_{v2,ik} s_{vk} \right) + \sum_{j=1}^{p_v} a_{v,ij}^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)j} + \sum_{j=1}^{p_v} b_{v,ij}^{(\partial\Omega)} V_{(\partial\Omega)j}^2 \quad (\text{A.7})$$

Le gradient $\frac{\partial R^*}{\partial V_{(\partial\Omega)j}}$ du résidu par rapport aux entrées est une matrice $p_v \times n_v$. D'après l'expression (A.7), ce terme vaut :

$$\frac{\partial R^*}{\partial V_{(\partial\Omega)jk}} = \frac{\partial R_k^*}{\partial V_{(\partial\Omega)j}} = a_{v,kj}^{(\partial\Omega)} + 2b_{v,kj} V_{(\partial\Omega)j} \quad (\text{A.8})$$

De même, la composante (m, i) du terme $\frac{\partial R^*}{\partial s_v}$ s'écrit :

$$\left(\frac{\partial R^*}{\partial s_v} \right)_{mi} = \frac{\partial R_i^*}{\partial s_{vm}} = b_{v1,im} \sum_{k=1}^{n_v} b_{v2,ik} s_{vk} + b_{v2,im} \sum_{j=1}^{n_v} b_{v1,ij} s_{vj} + \delta_{im} \quad (\text{A.9})$$

où δ_{im} est le symbole de Kronecker, valant 1 si $i = m$, et 0 sinon. Puisque l'on sait calculer leur composantes, on est en mesure de déterminer les matrices $\frac{\partial R^*}{\partial s_v}$ et $\frac{\partial R^*}{\partial V_{(\partial\Omega)j}}$ qui interviennent dans l'expression (A.6) de la dérivée $\frac{\partial s_v}{\partial V_{(\partial\Omega)j}}$. Si $\frac{\partial R^*}{\partial s_v}$ est bien conditionnée, on a accès à son inverse grâce aux routines de LAPACK. Alors, à l'aide de $\frac{\partial s_v}{\partial V_{(\partial\Omega)j}}$ et de la matrice h_v , on peut connaître le gradient analytique de la réponse du modèle réduit par rapport aux entrées.

Résumé

Les problèmes aérothermiques typiquement rencontrés en ingénierie imposent un recours à des simulations numériques (CFD), qui, pour être réalistes, doivent nécessairement prendre en compte les phénomènes transitoires. L'emploi de modèles réduits ou de surfaces de réponse offre une alternative rapide et peu coûteuse à ces calculs exigeants en temps de calcul et en espace mémoire.

L'objet de cette thèse est d'étoffer l'applicabilité de la méthode d'identification modale (MIM) dans le contexte de la mécanique des fluides. Il s'agit d'une méthode de réduction de modèle qui s'appuie sur la minimisation d'un écart entre les sorties d'un modèle de référence et celles d'un modèle réduit. Les paramètres du modèle réduit sont vus comme les variables d'un problème d'optimisation.

Nous développons la méthode dans le cadre d'écoulements turbulents. L'écoulement autour d'un cylindre circulaire constitue le cas d'application principal de ces travaux. Il nous permet de tester nos méthodologies dans diverses configurations incompressibles : stationnaires, instationnaires, écoulements isothermes ou de convection forcée thermique. Ces modèles produisent des champs de vitesse, de température, des densités de flux de chaleur ... Une autre application concerne un profil d'aile dans un écoulement sub à transsonique. Pour celle-ci, les sorties des modèles sont des coefficients de traînée et de portance, ainsi que des répartitions de coefficients de pression le long de la surface portante. Cet exemple nous permet de mettre en évidence l'impact de l'échantillonnage sur la construction du modèle.

Mots-clés: Aérothermie, écoulement instationnaire, modèles d'ordre faible, optimisation, lâcher tourbillonnaire

Abstract

Identification of reduced order models for forced convection flows. Illustration on the heated circular cylinder case.

Most engineering processes dealing with aerothermics involve numerical simulations (CFD) which need to take transient phenomena into account to be realistic. Low order models and response surfaces offer the engineer an alternative to the high costs associated with CFD processes, providing him with surrogates for the outputs of his interest.

This work is devoted to extend the Modal Identification Method (MIM) in the field of fluid dynamics. MIM is a low order modeling techniques, based on the minimization of the discrepancy between a usually large reference model, and a low order model. It solves an optimization problem whose variables are the low order model parameters.

Low order models are built for several kinds of turbulent flows. The circular cylinder in a crossflow provides us with several test cases. We cope with steady flows or unsteady ones, be them in forced convection or isothermal cases. Those models are able to produce outputs as different as velocity and temperature fields, heat fluxes, ... The compressible flow around a wing profile is also considered to investigate the sampling effect. Those models give quick approximates of the pressure distribution or the force coefficients.

Keywords: Aerothermics, unsteady flows, reduced order models, optimization methods, vortex street prediction