



**HAL**  
open science

# Modélisation et guidage robuste et autonome pour le problème du rendez-vous orbital

Mounir Kara-Zaitri

► **To cite this version:**

Mounir Kara-Zaitri. Modélisation et guidage robuste et autonome pour le problème du rendez-vous orbital. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2010. Français. NNT : . tel-00546293

**HAL Id: tel-00546293**

**<https://theses.hal.science/tel-00546293>**

Submitted on 14 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**  
délivré par l'Université Toulouse III- Paul Sabatier

Ecole doctorale : EDSYS

Spécialité : Systèmes automatiques

présentée et soutenue par

**Mounir KARA-ZAITRI**

le 17 novembre 2010

**Modélisation et guidage robuste et autonome pour le problème du rendez-vous orbital**

Directeurs de thèse

Denis ARZELIER, Alain THERON

JURY

Michel COURDESSES	Président
Emmanuel TRELAT	Rapporteur
Marco LOVERA	Rapporteur
Brigitte d'ANDREA-NOVEL	Examineur
Ali ZOLGHADRI	Examineur
Christophe LOUEMBET	Examineur



*Je dédie ce travail à mes parents, mon frère et ma sœur pour leurs encouragements et soutien tout au long de mes études.*



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes LAAS-CNRS, au sein du groupe MAC.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Mr Denis ARZELIER, directeur de recherche au CNRS de m'avoir permis de profiter de sa grande expérience et mener mes activités de recherche dans des conditions très favorables avec une grande autonomie. Ma reconnaissance s'adresse également à mon co-directeur, Mr Alain THERON, professeur agrégé et chercheur associé au LAAS-CNRS pour tous ses conseils généreusement prodigués, et tout le temps et la patience qu'il m'a accordés durant ces trois années.

Je remercie Mme Isabelle QUIENNEC, directeur de recherche au CNRS, de m'avoir accueilli au groupe MAC, groupe très dynamique et jouissant d'une bonne ambiance de travail. J'éprouve une grande gratitude à l'égard de Mr Christophe LOUEMBET, maître de conférences à l'Université Paul Sabatier, qui m'a été d'une grande aide pendant ma thèse, et cela avec une grande sympathie et générosité.

Je remercie vivement Mr Michel COURDESSES, professeur à l'université Paul Sabatier, d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse et d'avoir examiné minutieusement mon manuscrit avec un grand intérêt. J'exprime ma grande reconnaissance en vers Mr Emmanuel TRELAT, professeur à l'université d'Orléans et Mr Marco LOVERA, professeur associé au Politecnico di Milano, qui m'ont fait l'honneur d'examiner ma thèse et d'assurer le rôle de rapporteurs. J'associe à ces remerciements Mme Brigitte d'ANDREA-NOVEL, professeur à l'École des Mines de Paris, Mr Ali ZOLGHADRI, Professeur à l'université de Bordeaux et Mr Jean-Claude BERGES, Ingénieur au CNES, pour avoir accepté de faire partie du jury et de l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de ma thèse.

J'éprouve une grande reconnaissance envers le personnel de l'Institut aéronautique et spatial IAS, tout particulièrement Mr Didier FERIOL et Mr Marc PRIME. Mon séjour en France s'est parfaitement déroulé grâce à leurs efforts, et je suis honoré de faire partie de la famille des lauréats du FASIA.

Ma gratitude s'adresse particulièrement à tous les membres du groupe MAC. Intégrer ce groupe m'a permis d'évoluer sur les plans scientifique et humain, dans un environnement exceptionnellement intéressant et motivant.

Je fini par remercier tous ceux et celles qui ont contribué d'une manière directe ou indirecte à l'aboutissement de ma thèse.

---



---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
Contexte et motivations . . . . .	3
Définition du rendez-vous orbital . . . . .	4
Historique du rendez-vous orbital . . . . .	5
Le problème du rendez-vous orbital . . . . .	7
Hypothèses et cadre de l'étude . . . . .	7
Formulation mathématique du problème du rendez-vous . . . . .	11
Identification des problématiques de la thèse . . . . .	13
Bibliographie . . . . .	15
<b>I Modélisation du mouvement relatif de satellites</b>	<b>19</b>
<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>1 Etat de l'art en modélisation du mouvement relatif</b>	<b>25</b>
1.1 Classification des modèles de mouvement relatif . . . . .	25
1.2 Modèles à base d'éléments orbitaux différentiels . . . . .	29
1.3 Modèles à paramètres cartésiens locaux . . . . .	36
1.4 Matrices de transition hybrides . . . . .	50
1.5 Conclusion . . . . .	54
<b>2 Synthèse de modèles du mouvement relatif</b>	<b>57</b>
2.1 Objectifs . . . . .	57
2.2 Développement d'un modèle linéaire de vol relatif . . . . .	58
2.3 Application au cas circulaire képlérien . . . . .	73
2.4 Application au cas elliptique képlérien . . . . .	74
2.5 Application au cas elliptique perturbé . . . . .	76
2.6 Conclusion . . . . .	79
<b>3 Transformations de variables d'état du mouvement relatif</b>	<b>81</b>
3.1 Objectifs . . . . .	81
3.2 Développement d'une transformation non linéaire . . . . .	82
3.3 Linéarisation de la relation de passage . . . . .	87

---

---

3.4	Etude des domaines de validité . . . . .	88
3.5	Etude de l'effet des perturbations . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Outils de simulation du mouvement orbital</b>	<b>99</b>
4.1	Objectifs . . . . .	99
4.2	Simulateur non linéaire du mouvement orbital . . . . .	100
4.3	Tests de Validation . . . . .	105
	<b>Conclusions de la première partie</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie de la première partie</b>	<b>111</b>
<b>II</b>	<b>Problème du rendez-vous orbital</b>	<b>117</b>
	<b>Introduction</b>	<b>121</b>
<b>5</b>	<b>Les méthodes conventionnelles</b>	<b>125</b>
5.1	Introduction . . . . .	125
5.2	Guidage non optimal par une méthode analytique . . . . .	126
5.3	Guidage sous-optimal par une méthode heuristique . . . . .	130
5.4	Commentaires . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Optimisation des trajectoires de RdV par les méthodes indirectes</b>	<b>133</b>
6.1	Introduction . . . . .	134
6.2	La théorie du Primer-Vector . . . . .	134
6.3	Synthèse d'algorithmes pour le rendez-vous en temps fixé . . . . .	164
6.4	Conclusions . . . . .	180
<b>7</b>	<b>Optimisation des trajectoires de RdV par les méthodes directes</b>	<b>181</b>
7.1	Introduction . . . . .	181
7.2	Résolution du problème de RdV par les méthodes de tirs . . . . .	184
7.3	Formulation du problème de RdV en programmation linéaire . . . . .	187
7.4	Guidage robuste aux incertitudes de navigation . . . . .	190
7.5	Présentation de l'algorithme <b>RDV-DIR</b> . . . . .	195
7.6	Conclusions . . . . .	197
<b>8</b>	<b>Eléments de validation numérique</b>	<b>199</b>
8.1	Introduction et considérations pratiques . . . . .	200
8.2	Exemples académiques de Carter . . . . .	201
8.3	La mission ATV . . . . .	208
8.4	La mission PRISMA . . . . .	218
8.5	La mission SIMBOL-X . . . . .	223
8.6	Conclusions . . . . .	225
	<b>Conclusions de la deuxième partie</b>	<b>227</b>

---

---

<b>Bibliographie de la deuxième partie</b>	<b>227</b>
<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>237</b>
Bilan des travaux . . . . .	237
Perspectives . . . . .	239
<b>A Repères de référence</b>	<b>241</b>
A.1 Le repère géocentrique équatorial . . . . .	241
A.2 Le repère perifocal PQW . . . . .	242
A.3 Le repère local RSW de Hill . . . . .	243
A.4 Le repère LVLH . . . . .	244
<b>B Les paramètres orbitaux</b>	<b>247</b>
B.1 Les éléments orbitaux classiques . . . . .	249
B.2 Les éléments orbitaux équinoxiaux . . . . .	249
Bibliographie . . . . .	250
<b>C Perturbations orbitales</b>	<b>253</b>
C.1 Effets de l'aplatissement de la terre . . . . .	253
C.2 Effets du frottement atmosphérique . . . . .	257
Bibliographie . . . . .	259
<b>D Relation entre les éléments orbitaux et les coordonnées inertielles</b>	<b>263</b>
Bibliographie . . . . .	264
<b>E Paramétrages angulaires</b>	<b>267</b>
E.1 Figures de changement de base . . . . .	267
E.2 Expressions des angles géographiques en fonction des angles orbitaux . . . . .	268
E.3 Expressions des angles géométriques en fonction des angles géographiques . . . . .	270
E.4 Expressions des angles géométriques en fonction des angles orbitaux . . . . .	270
<b>Liste des publications</b>	<b>273</b>
<b>Résumé-Abstract</b>	<b>275</b>

---



# Introduction générale

---



---

## Contexte et motivations

### Quelle est l'étape suivante dans le développement des missions spatiales ?

Cette question est le point de départ d'une multitude de projets de recherche, de développement et d'ingénierie dont la présente thèse.

Cette volonté d'anticipation n'est pas un fruit du hasard. L'industrie spatiale connaît une nouvelle dynamique depuis quelques années. Les enjeux du développement dans ce domaine sont de plus en plus importants. Les travaux entrepris actuellement sont dictés par les objectifs que l'on se fixe à court et moyen termes, mais influencent certainement l'avenir de la conquête spatiale.

Les missions qui, actuellement, suscitent de plus en plus d'intérêt sont les *stations orbitales*. Ces engins sont caractérisés par leur polyvalence, leur durée de vie importante, mais surtout par leurs dimensions imposantes nécessitant un assemblage en orbite. Ces installations orbitales peuvent être de véritables laboratoires en orbite (SALIUT, MIR, SKYLAB), elles peuvent remplir des missions militaires (ALMAZ, SKYLAB), servir de plateforme de coopération internationale (ISS), avoir un rôle expérimental (GENESIS) ou même touristique (SUNDANCER).

Certaines missions scientifiques de nouvelle génération sont caractérisées par des instruments distribués sur plusieurs satellites. Les applications de cette nouvelle approche sont très variées. On peut citer l'étude du champ magnétique terrestre (GRACE), l'interférométrie (Roue interférométrique, TPF, DARWIN, LISA), l'observation de la Terre (CALIPSO, CLOUDSAT), la télésopie (SIMBOL-X, XEUS, New World Observer). Outre le fait que ces missions offrent de nouvelles perspectives pour la recherche scientifique, non réalisables avec des missions classiques, des économies sensibles en coût de lancement peuvent être réalisées en réduisant la dimension des engins lancés.

Un facteur commun des stations orbitales et des missions scientifiques citées est la nécessité de gérer en parallèle, plusieurs satellites évoluant à des distances relativement faibles. Ceci a lieu lors des phases d'assemblage et de ravitaillement des stations orbitales, et pendant toute la durée de vie des missions multi-satellites.

Les configurations orbitales où plusieurs satellites évoluent à proximité sont généralement appelées *les formations de satellites*. Sous les contraintes liées aux applications citées, les formations de satellites introduisent des nouveaux défis technologiques et théoriques dans plusieurs domaines, notamment celui du *guidage, navigation et commande (GNC)*. Les opérations orbitales doivent désormais être opérées en navigation relative, afin de prendre en compte les trajectoires des satellites à proximité. L'autonomie des manœuvres est une autre exigence rencontrée dans ce contexte afin de réduire la dépendance vis-à-vis des autres satellites et des stations au sol.

Le *rendez-vous orbital* fait partie des opérations incontournables durant la mise en

---

œuvre des formations de satellites ou la construction et le maintien des stations orbitales. Il s'agit d'un transfert orbital effectué par un engin spatial afin qu'il rejoigne un autre satellite. Ajouté aux contraintes d'autonomie et de navigation relative, le rendez-vous requiert des coûts importants en carburant et en puissance de calcul. Ceci a motivé un grand nombre de travaux visant à simplifier la résolution de ce problème tout en réalisant des économies d'ergol, le but ultime étant d'intégrer tous les calculs liés à cette opération au logiciel de vol, embarqué à bord du satellite.

## Définition du rendez-vous orbital

Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions du rendez-vous orbital. Nous retenons la définition présentée par Fehse dans [6] :

Le rendez-vous orbital est une série de manœuvres orbitales et trajectoires contrôlées, qui conduisent successivement un véhicule actif [*dénommé chasseur*] au voisinage – voire en contact – d'un véhicule passif [*dénommé cible*].

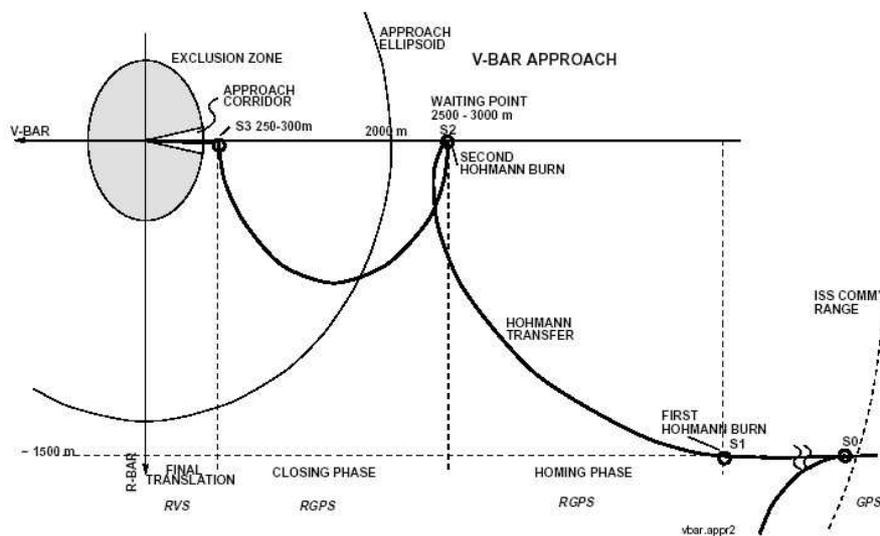


FIG. 1 – Déroulement du rendez-vous de l'ATV-ISS Courtesy of ESA

La figure 1 montre les différentes étapes d'un rendez-vous de l'ATV avec l'ISS :

- Le phasage, où l'écart de phase absolue entre les deux véhicules est réduit afin de pouvoir passer en navigation relative. Cette étape intervient après le lancement et l'injection du chasseur dans une orbite voisine de celle de la cible ;
- la phase dite du "homing" où il s'agit de déplacer le satellite vers une position stable

- à proximité de la cible. Cette étape se fait exclusivement en navigation relative en partant de conditions initiales connues vers des conditions finales fixées. Le *homing* fera l'objet de plus de développements dans la suite de la thèse ;
- la phase dite du "*closing*", qui rassemble des opérations de proximité et de capture du chasseur par la cible ;
  - l'arrimage : jonction finale entre les deux engins. Cette étape n'est pas opérée dans le cas des vols en formation.

## Historique du rendez-vous orbital

Le rendez-vous orbital est devenu un défi majeur dans le domaine aérospatial. Les nouvelles tendances que connaît l'industrie spatiale ne font que confirmer l'intérêt de cette technique. Les missions d'exploration interplanétaires, les missions impliquant des formations de satellites ainsi que celles liées aux stations orbitales font toutes appel à des manœuvres du type rendez-vous orbital. L'intérêt pour cette technologie date, toutefois, des premières missions spatiales.

Durant la guerre froide et dans le contexte de la course à l'espace, les deux pionniers de l'ère spatiale, à savoir l'Union Soviétique et les Etats Unis d'Amérique ont posé les bases de ce qui est devenu un enjeu de taille dans la conquête de l'espace. Dès 1960, les deux puissances ont alloué des budgets conséquents pour le développement de la technologie du rendez-vous orbital. L'objectif était, au-delà du prestige de la maîtrise technologique, de préparer les futurs vols habités vers la Lune. C'est à partir de cette période que deux "écoles" ont vu le jour. L'approche privilégiée par les russes était l'automatisation globale de la manœuvre. Une première réalisation a été effectuée le 12 août 1962 lorsque Vostok 4 a approché Vostok 3 jusqu'à une distance de 6.5 km [21].

Une opération similaire a été réalisée avec Vostok 5 et 6 pour une distance minimale de 5 km. Ces approches ont été caractérisées par une durée courte et une dérive rapide. Le choix de l'automatisation, qui induisait de grandes difficultés techniques et de gros coûts financiers était surtout dicté par la volonté de développer des systèmes pouvant opérer en missions habitées ou inhabitées. Le projet Soyouz s'inscrivait dans la continuité du projet Vostok. Des avancées technologiques notables ont été atteintes dans le cadre de ce projet. Ces apports font que, 40 ans plus tard, le vaisseau Soyouz continue à être utilisé par la station spatiale internationale. Une des grandes nouveautés de ce projet fut le système IGLA, qui assurait la quasi totalité des manœuvres de rendez-vous automatiquement, et d'une manière relativement autonome [13].

La NASA, créée en 1957 en réaction aux succès de la mission russe Spoutnik, s'est intéressée également au rendez-vous orbital après le projet Mercury qui visait à réaliser un premier vol habité extra-atmosphérique. Le projet Gemini fut donc lancé avec, comme objectif, la préparation et la maîtrise des techniques pré-requises pour le futur projet de mission lunaire, Apollo. La NASA a opté pour une approche manuelle où un opérateur

---

humain se charge des différentes opérations orbitales. Techniquement moins complexe à mettre en œuvre que l'approche soviétique, cette démarche nécessite néanmoins un entraînement plus poussé des membres de l'équipage. La première mission réussie de Gemini eut lieu en 1965 où la distance minimale entre deux véhicules Gemini 7 a atteint les 30 cm. En 1966, Niels Armstrong a piloté Gemini 8 pour ce qui est considéré comme le premier arrimage de l'histoire [8].

Le projet Apollo fut l'aboutissement et la synthèse de tous les efforts entrepris dans le cadre des programmes américains précédents. L'objectif était, rappelons-le, d'envoyer un équipage sur la Lune et d'en revenir. Ceci impliquait un alunissage d'un module lunaire (LEM) qui devait ensuite décoller et rejoindre un module de commande (CSM) en réalisant un rendez-vous orbital. Le succès historique de la mission Apollo 11 le 10 juillet 1969 et des vols ultérieurs a conforté le choix de la commande manuelle par la NASA. Les réductions budgétaires et la réorientation de la politique spatiale américaine vers les stations orbitales ont mis fin au projet Apollo. Une nouvelle étape de développement de rendez-vous spatial avait ainsi commencé [1].

A partir de 1975, l'intérêt des deux puissances s'est porté sur les stations orbitales habitables, où les séjours des équipages devaient durer plusieurs mois. Ceci permettait – entre autres – de réaliser des expériences scientifiques en apesanteur. Cette réorientation de politique a donné lieu aux projets Skylab (USA, 1973 à 1979) et Saliut (URSS, 1971 à 1991). La deuxième génération de stations orbitales est caractérisée par des dimensions plus imposantes et des durées de vie supérieures. On peut citer : Mir (URSS, 1986 à 2001) et la station spatiale internationale (USA indépendamment, puis une coopération internationale, 1998 - présent). Dans une première étape, les développements des techniques contribuant au rendez-vous orbital ont continué séparément. Le couple Soyouz/Progress exploitant le même système de rendez-vous automatisé appelé Kurs, a été développé à partir du système IGLA qui a fait ses preuves durant les projets précédents. La NASA, pour sa part, a développé un nouveau concept : la navette spatiale réutilisable. Chaque mission de la navette inclut au moins une manœuvre de rendez-vous. C'est ainsi que les cinq navettes spatiales américaines en service ont effectué 57 rendez-vous durant la période 1983-2005. L'éventail des missions s'étendait du ravitaillement de la station internationale au changement d'équipage en passant par la correction de trajectoire et la réparation de satellite (Hubble en 1993). Le dispositif employé pour la mise en œuvre de rendez-vous orbital de la navette spatiale est basé sur l'opérateur humain à l'image des projets américains précédents, mais une certaine automatisation et une assistance par ordinateur ont été apportées afin de faciliter la tâche de l'équipage.

La station internationale ISS a révélé la nécessité d'une coopération internationale afin d'amortir les coûts élevés de développement et d'exploitation. La coopération a commencé à travers l'utilisation du cargo russe Progress et du vaisseau Soyouz pour ravitailler l'ISS. Après la désorbitation de Mir en 2001 pour des raisons principalement budgétaires, l'effort s'est focalisé sur l'amélioration des systèmes et procédures utilisées dans le cadre du rendez-vous. L'autonomie des manœuvres est devenu un critère prioritaire pour la réussite des prochaines missions. Les précédentes techniques développées pour le rendez-vous, manuelles ou automatiques, faisaient intervenir les deux véhicules concernés par la manœuvre à travers la coopération et le partage de données de mesure. L'autonomie doit permettre

---

à un véhicule *chasseur* de réaliser un rendez-vous sans intervention du véhicule *cible*. Ceci permet de prévoir des rendez-vous entre différents types de véhicules, et d'élargir ainsi le champs d'application de cette technique.

Depuis quelques années, de nouveaux acteurs ont rejoint les deux puissances historiques. Le Japon par le biais de la NASDA (devenue JAXA en 2003) a développé le cargo de ravitaillement H-II Transfer Vehicle (HTV). L'origine du projet remonte à 1998 avec la mission ETS-VII qui est reconnue comme le premier rendez-vous autonome. Le HTV a inauguré une série de missions vers l'ISS en 2009 dont une de 52 jours. L'Europe *via* l'agence spatiale européenne (ESA) a développé pour sa part l'ATV. C'est un cargo automatique de ravitaillement pour l'ISS dont la première mission "Jules Verne" a été réalisée avec succès en avril 2008. Sa capacité de charge est supérieure à celle de l'HTV, et il devrait remplacer Progress à moyen terme. Un second lancement est prévu pour 2010 et une utilisation plus intensive sera envisagée après l'arrêt des navettes spatiales. Ces projets ont été précédés par des démonstrateurs technologiques comme PRISMA ou DART, afin de tester les techniques dans un environnement orbital réel. D'autres projets sont en cours afin de continuer le développement et renforcer la maîtrise de cette technique. L'aspect autonomie est omniprésent, à côté d'autres contraintes de sécurité telles que l'évitement de collision ou la gestion de débris spatiaux.

## Le problème du rendez-vous orbital

Dans cette thèse, nous considérons la classe de problèmes de rendez-vous représentée schématiquement sur la figure 2. A partir de la position et de la vitesse du véhicule chasseur spécifiées dans une base locale rattachée au véhicule cible à un instant initial  $t_1$ , il s'agit de déterminer la loi de propulsion impulsioonelle donnée par une série de changements de vitesse instantanée  $\overrightarrow{\Delta V}_i$ , minimisant la consommation de carburant et qui amène le véhicule chasseur en un état final donné en position et vitesse relatives au véhicule cible, en une durée fixée  $t_f - t_0$ .

## Hypothèses et cadre de l'étude

Le problème du rendez-vous orbital dans sa généralité, peut être formulé de diverses manières selon les cas traités et les objectifs escomptés. Nous donnons dans la suite un cadre à notre étude, en énonçant les hypothèses basiques que nous considérons tout au long de la thèse. Ces hypothèses nous mènent vers une formulation précise, restrictive, qui permettra d'exploiter des outils mathématiques simples et efficaces afin d'obtenir des résultats concrets et proches des applications réelles.

---

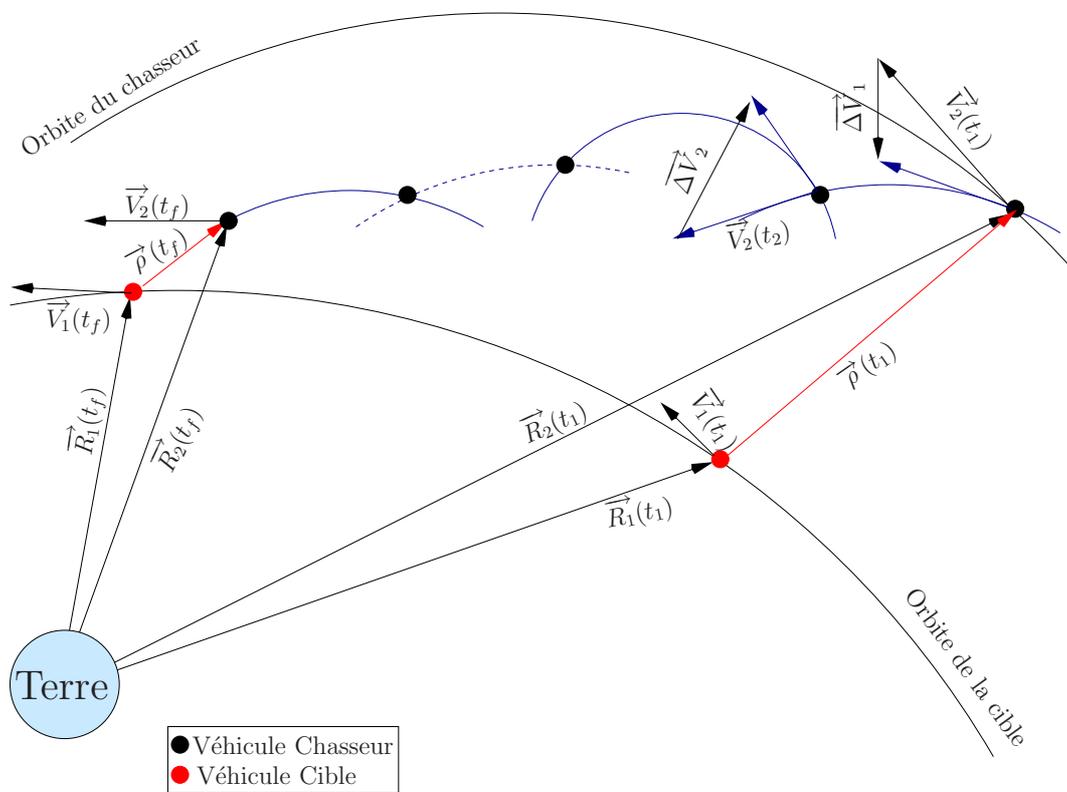


FIG. 2 – Rendez-vous à manœuvres impulsives

## 1. Navigation relative et modélisation linéaire

La phase du rendez-vous étudiée est celle du *homing*. Elle débute lorsque le chasseur se trouve dans un voisinage proche (typiquement quelques dizaines de kilomètres) de la cible grâce à des manœuvres orbitales précédentes (injection et phasage). Le voisinage intersatellitaire se définit comme la région où il est possible d'utiliser la navigation relative et la modélisation linéaire. La navigation relative se base sur l'évolution de la position et de la vitesse du chasseur rapportées à la cible. Elle peut être étudiée notamment à l'aide du vecteur  $\vec{\rho}$  représenté sur la figure 2. Nous verrons qu'il existe d'autres moyens pour étudier l'évolution du mouvement relatif de deux véhicules à proximité.

Les modèles d'évolution du mouvement relatif sont supposés *linéaires à paramètres invariants ou variants dans le temps* suivant l'excentricité de l'orbite cible et les perturbations orbitales considérées. La forme générale de ces modèles est donnée par les équations d'état :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (1)$$

avec :

- $X(t)$  : vecteur d'état du mouvement relatif du chasseur par rapport à la cible ;
- $A(t), B(t)$  : matrices d'état du modèle dynamique ;
- $U(t)$  : vecteur de commande, comprenant notamment les poussées des moteurs.

Dans certains cas, les matrices de transition directes  $\Phi(t, t_0)$ , solutions de l'équation différentielle autonome (1), peuvent être établies. Ceci donne lieu à des relations directes du type :

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) \quad (2)$$

où  $t$  et  $t_0$  représentent respectivement l'instant courant et l'instant initial. Nous verrons par la suite que cela induit une simplification importante du problème de la commande optimale défini par le problème du rendez-vous en remplaçant la contrainte différentielle par une contrainte algébrique.

## 2. Manœuvres impulsives

Les manœuvres de rendez-vous considérées dans la suite sont de nature impulsionnelle. Il s'agit d'incrément de vitesse instantanés de la forme :

$$\Delta V(t_i) = \Delta v(t_i)\beta(t_i) = v(t_i^+) - v(t_i^-) \quad (3)$$

où :

- $t_i$  est l'instant d'application de l'impulsion ;
- $\Delta v(t_i)$  est l'amplitude de l'impulsion ;
- $\beta(t_i)$  est sa direction.

Une formulation continue à l'aide des impulsions de Dirac peut être également utilisée :

$$\Delta V(t) = \sum_{t_i=t_1}^{t_i=t_f} \Delta v(t_i) \beta(t_i) \delta(t - t_i) \quad (4)$$

Cette modélisation est utilisée sous l'hypothèse que la durée des poussées est faible devant la période orbitale. En pratique, la nature des poussées n'est pas purement impulsionnelle. Il est montré dans [16] que les écarts en optimalité du critère vis-à-vis d'une modélisation plus réaliste sont principalement dus aux effets du gradient de gravité et du changement de direction de poussée lors des phases de poussée.

Un moteur fournit de la poussée en propulsant une quantité de masse vers la direction opposée au mouvement. Cette quantité de masse peut venir d'eau, d'air, de résidus de combustion ou de tout autre matière ; son éjection peut être obtenue par combustion, différence de pression, ou n'importe quel autre mécanisme.

La poussée  $F$  obtenue est :

$$F = \dot{m} v_e + A_e (P_e - P_0) \quad (5)$$

où :

- $\dot{m}$  est le débit de masse ;
- $v_e$  est la vitesse d'éjection ;
- $A_e$  est la surface de la tuyère ;
- $P_e - P_0$  est le gradient de pression entre le réservoir et l'environnement ambiant.

La performance d'un moteur est donc paramétrée par  $\dot{m}$  et  $F$ . L'impulsion spécifique permet de mesurer cette performance, pour un débit en masse et une poussée constante :

$$I_{sp} = \frac{v_e}{g} \equiv \frac{F}{g \dot{m}} = \frac{\int_{t_0}^t F dt}{g \int_{t_0}^t \dot{m} dt} \quad (6)$$

$g$  est l'accélération gravitationnelle au niveau de la mer. L'impulsion spécifique est une mesure de l'efficacité avec laquelle la consommation de carburant est convertie en poussée. Dans le cadre des propulseurs impulsionnels, retenu dans cette thèse, la vitesse d'éjection est constante.

### 3. Critères de consommation

Suivant les capacités d'orientation du véhicule chasseur et suivant les spécifications de la mission, le calcul de la consommation peut prendre différentes formes.

- Dans le cas où le propulseur (le véhicule spatial est équipé d'un unique propulseur) peut être orienté dans n'importe quelle direction aux instants de poussée, le critère

de consommation est alors défini par :

$$\begin{aligned}
 J_1 = \sum_{i=1}^N \|\Delta V(t_i)\|_2 &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_x^2(t_i) + \Delta V_y^2(t_i) + \Delta V_z^2(t_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta v_i^2(\beta_x^2(t_i) + \beta_y^2(t_i) + \beta_z^2(t_i))} = \sum_{i=1}^N \Delta v_i = \|\Delta v\|_1
 \end{aligned} \tag{7}$$

où  $\Delta v = [ \Delta v_1 \ \dots \ \Delta v_N ]^t \in \mathbf{R}^N$ .

- Si l'on suppose par contre que l'on dispose de propulseurs dans chacune des directions, la consommation est définie par :

$$\begin{aligned}
 J_2 = \sum_{i=1}^N \|\Delta V(t_i)\|_1 &= \sum_{i=1}^N (|\Delta V_x(t_i)| + |\Delta V_y(t_i)| + |\Delta V_z(t_i)|) \\
 &= \sum_{i=1}^N \Delta v_i (|\beta_x(t_i)| + |\beta_y(t_i)| + |\beta_z(t_i)|) = \sum_{i=1}^N \Delta v_i \alpha(t_i)
 \end{aligned} \tag{8}$$

où  $\alpha(t) = (|\beta_x(t)| + |\beta_y(t)| + |\beta_z(t)|)$  et  $\Delta V = [ \Delta V(t_1)^t \ \dots \ \Delta V(t_N)^t ]^t \in \mathbf{R}^{3N}$ .

Dans les définitions précédentes, nous avons adopté les notations suivantes.

- $\Delta V(t_i)$  est un vecteur de poussée impulsionnelle opérant à l'instant  $t_i$  défini par ses composantes dans la base locale :

$$\Delta V(t_i) = \begin{bmatrix} \Delta V_x(t_i) \\ \Delta V_y(t_i) \\ \Delta V_z(t_i) \end{bmatrix}$$

et dont la norme est donnée par  $\Delta v_i$ .

- $\beta(t_i)$  est le vecteur unitaire ( $\|\beta(t)\| = 1, \forall t \in [t_1, t_f]$ ) de direction de la poussée à l'instant  $t_i$  défini par ses composantes dans la base locale :

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_x(t_i) \\ \beta_y(t_i) \\ \beta_z(t_i) \end{bmatrix}$$

Il n'y a pas, à notre connaissance, de relation directe entre  $J_1$  et  $J_2$  si ce n'est la relation d'ordre obtenue en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$J_1 \leq J_2 \tag{9}$$

Suivant les possibilités d'orientation du véhicule chasseur, d'autres combinaisons ont été proposées dans [7] et [20].

## Formulation mathématique du problème du rendez-vous

Le problème du rendez-vous peut être identifié à un problème de commande optimale généralisé. Dans notre cas particulier, il s'agit d'un problème à consommation minimale en temps fixé. Nous donnons ici une formulation mathématique générale du problème, qui nous permettra d'identifier les différentes problématiques qui s'y rapportent.

$$\begin{aligned}
 J_*(\xi, \Delta v_i, \beta(t_i), t_i, N) = & \min_{\Delta v_i, \beta(t_i), t_i, N} J_* \\
 \text{sous} & \\
 \dot{X}(t) = & A(t)X(t) + B(t) \sum_{i=1}^N \beta(t_i) \Delta v_i \delta(t - t_i) \\
 \beta_x^2(t_i) + \beta_y^2(t_i) + \beta_z^2(t_i) = & 1, \forall i = 1, \dots, N \\
 \Psi(t_1, X(t_1), t_f, X(t_f), \xi) = & 0 \\
 0 \leq \Delta \underline{v} \leq \Delta v_i \leq \Delta \bar{v}, \forall i = & 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{10}$$

avec :

- $\xi$  : paramètres définissant le problème traité ;
- $\Delta v_i$  : amplitude de la  $i^{\text{ème}}$  impulsion ;
- $\beta(t_i)$  : direction de la  $i^{\text{ème}}$  impulsion ;
- $t_i$  : date d'application de la  $i^{\text{ème}}$  impulsion ;
- $J_*$  : critère de consommation  $J_1$  ou  $J_2$  ;
- $X$  : vecteur d'état du mouvement relatif ;
- $\Psi$  : conditions aux bouts ;
- $N$  : nombre d'impulsions. Sauf mention contraire,  $t_N$  correspond à  $t_f$  d'une manière générale.

Cette formulation est inspirée de la classe générale des problèmes de commande optimale impulsionnelle. Une formulation de cette classe de problèmes est donnée par Rishel dans [15] à l'aide de la théorie de mesure. Il introduit notamment la méthode du changement discontinu de temps qui devient une variable d'état. Robinson dans [17] propose une formulation similaire, adaptée aux problèmes de transfert à consommation minimale. Il remplace les mesures employées par Rishel, par la vitesse caractéristique donnée par :

$$\int_{t_1}^{t_f} dV = V(t_f) - V(t_0) \tag{11}$$

où la dynamique du système est modélisée par :

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, \beta(t))dV(t) \tag{12}$$

De nombreux travaux théoriques ont pour objet de généraliser le principe de Pontryagin à ce type de problèmes à l'aide d'outils mathématiques sophistiqués (analyse non différentielle, théorie de la mesure ...), notamment dans [19], [18], [14] et [2]. Nous plaçant dans une optique d'applicabilité, nous nous préoccupons dans ce travail de méthodes efficaces numériquement.

Si l'on dispose de la matrice de transition  $\Phi(t, t_1)$  associée à la contrainte différentielle définie par l'équation d'état, le problème de commande optimale (10) se simplifie en un problème d'optimisation paramétrique (13) portant sur le nombre, l'amplitude, l'orientation et les dates d'applications des incréments de vitesse [3].

$$\begin{aligned}
 J_*(\xi, \Delta v_i, \beta(t_i), t_i, N) = & \min_{\Delta v_i, \beta(t_i), t_i, N} J_* \\
 & \text{sous} \\
 X(t_f) = & \Phi(t_f, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i)B(t_i)\beta(t_i)\Delta v_i \\
 \beta_x^2(t_i) + \beta_y^2(t_i) + \beta_z^2(t_i) = & 1, \forall i = 1, \dots, N \\
 \Psi(t_1, X(t_1), t_f, X(t_f), \xi) = & 0 \\
 0 \leq \Delta \underline{v} \leq \Delta v_i \leq \Delta \bar{v}, \forall i = & 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{13}$$

Cette formulation, en plus de permettre d'utiliser des outils d'optimisation avancés, ne nécessite aucune intégration des solutions. L'implantation des résultats obtenus y est donc simplifiée. Compte tenue de la complexité usuelle des modèles relatifs, l'intégration analytique des résultats peut être très complexe.

## Objectifs de la thèse

A partir des différentes formes de la formulation mathématique du problème du rendez-vous (équations (13) et (10)), nous avons identifié un certain nombre de problématiques qui ont motivé les travaux entrepris dans le cadre de cette thèse. Les questions soulevées concernent deux domaines différents : *la modélisation du mouvement relatif de satellites* et *la synthèse des algorithmes de guidage*.

### 1. Modélisation du mouvement relatif de satellites

Un certain nombre de problématiques liées à la modélisation du mouvement relatif apparaît à travers les deux formulations présentées précédemment.

- Le choix du vecteur d'état : ce choix intervient à plusieurs niveaux. L'écriture des contraintes dynamiques du problème de commande optimale est conditionnée par la nature du vecteur d'état. De plus, les modèles d'évolution du mouvement relatif sous forme d'équations d'état ou de matrices de transition y sont étroitement liés ;
- la synthèse des modèles : les modèles doivent être linéaires et permettre l'autonomie des manœuvres. Les modèles d'évolution sont évidemment influencés par le choix des vecteurs d'état, mais aussi par la démarche suivie dans la synthèse et les hypothèses considérées ;
- les matrices de transition : la formulation alternative basée sur les matrices de transition directe permet de transformer le problème de commande optimale en un problème d'optimisation paramétrique. Des outils mathématiques d'optimisation peuvent dès lors être exploités. La construction des matrices de transition n'est cependant pas une opération simple, et nécessite parfois des démarches adaptées et des simplifications spécifiques aux cas considérés.

C'est autour de ces trois points que la première partie de la thèse est articulée.

Dans un premier chapitre, un état de l'art en modélisation du mouvement relatif est établi. Une analyse bibliographique de l'essentiel des modèles existants dans la littérature est donnée. Cette analyse permettra d'avoir une vue globale sur la problématique de modélisation du mouvement relatif.

Ensuite, une méthode générale de synthèse de modèle d'état est présentée. Elle permet de retrouver tous les modèles cités dans la section précédente et d'y apporter plus de généralité et de rigueur dans la phase de développement.

La construction des matrices de transition directe sera revue à travers des transformations non linéaires et linéaires de variables, permettant d'utiliser différentes formes de vecteurs d'état et d'en tirer profit.

Un propagateur d'orbite est également développé. Il est utilisé comme un outils de simulation pour les besoins de la thèse. Une procédure de validation à travers des éléments de comparaison numérique est proposée afin de justifier l'utilisation de ce simulateur en tant que référence.

## 2. Synthèse des algorithmes de guidage pour le rendez-vous

Le problème du rendez-vous tel qu'il est formulé en (10) et (13) est un problème d'optimisation paramétrique sous contraintes. Les variables d'optimisation de ce problème sont :

- l'amplitude des impulsions  $\Delta v_i$  ;
- la direction des impulsions  $\beta(t_i)$  ;
- les dates d'impulsion  $t_i$  ;
- le nombre d'impulsions  $N$ .

On peut d'ores et déjà remarquer que la difficulté du problème dépend d'une manière explicite de la complexité du modèle d'état. Les dates d'impulsion sont des variables intrinsèques, considérées à travers la matrice de transition directe  $\Phi$ . Le nombre d'impulsions

---

est quant à lui, un paramètre qui affecte la structure du problème en changeant le nombre des variables à optimiser.

Les problèmes (10) et (13) peuvent être approchés de plusieurs manières :

- les méthodes conventionnelles, basées sur la mécanique spatiale ;
- les méthodes directes, où des outils de programmation linéaire sont utilisés pour une résolution numérique directe du problème ;
- les méthodes indirectes, pour une résolution analytique du problème à l'aide d'outils issus de la commande optimale.

Chacune des classes de méthodes citées se caractérise par une approche particulière du problème, et des propriétés différentes des résultats obtenus.

L'objectif de la deuxième partie de la thèse est la mise en œuvre d'algorithmes de résolution du problème de rendez-vous impulsionnel basés sur les méthodes citées.

Les méthodes conventionnelles sont passées brièvement en revue car elles n'offrent aucune garantie sur l'optimalité. Par contre, la simplicité de ces techniques facilite leur exploitation.

En ce qui concerne les méthodes indirectes, il s'agit en premier lieu de mener une analyse des travaux antérieurs (travaux de Carter [4, 5], Lawden [10, 9], Lion & Handelsman [11] et Neustadt [12]). Une reformulation du problème (13) pour un nombre d'impulsions fixé, en problème d'optimisation polynomiale est ensuite donnée. Ceci donnera lieu à la synthèse de deux algorithmes permettant de résoudre certains problèmes non traités dans la littérature. Des outils mathématiques tels que l'optimisation polynomiale, l'homotopie et les bases de Gröbner sont présentés et employés lors de la synthèse des algorithmes.

Les méthodes directes sont considérées à travers l'élaboration d'un algorithme de guidage à consommation minimale en temps fixé. Bien que les solutions obtenues par ces méthodes soient sous-optimales d'une manière générale, d'autres possibilités offertes par ces approches compensent cet inconvénient. En effet, la facilité de l'implantation, la prise en compte de contraintes supplémentaires ainsi que l'extension pour la prise en compte de la robustesse du plan de manœuvres sont simplifiées par cette classe de méthodes. Des éléments préliminaires de robustesse sont donnés à l'issue du développement de l'algorithme de guidage directe.

Un chapitre consacré à la validation numérique est proposé à la fin de cette partie. La résolution de certains *scenarii* de rendez-vous académiques et réels est présentée. Les différents algorithmes développés au cours de cette partie sont testés, validés et comparés. Les résultats obtenus sont confrontés également aux travaux issus de la littérature.

---



## Bibliographie

- [1] James D. Alexander and Robert W. Becker. Apollo experience report - evolution of the rendezvous-maneuver - plan for lunar-landing missions. Technical report, NASA, Washington D.C., 1973.
  - [2] A. Arutyunov, V. Jaćimović, and F.L. Pereira. Second order necessary conditions for optimal impulsive control problems. *Journal of dynamical and Control Systems*, 9(1) :131–153, 2003.
  - [3] T.E. Carter. New form for the optimal rendezvous equations near a keplerian orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 13(1), janvier-février 1990.
  - [4] T.E. Carter. Optimal impulsive space trajectories based on linear equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(2), août 1991.
  - [5] T.E. Carter and J. Brient. Linearized impulsive rendezvous problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 86(3), septembre 1995.
  - [6] W. Fehse, editor. *Automated rendezvous and docking of spacecraft*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
  - [7] E.G. Gilbert and G.A. Harasty. A class of fixed-time fuel-optimal impulsive control problems and an efficient algorithm for their solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(1) :1–11, 1971.
  - [8] S.L. Glynn. Summary of gimini rendezvous experience. Technical report, NASA manned spacecraft center, Houston, Texas, 1967.
  - [9] D.F. Lawden. Impulsive transfer between elliptical orbits. In G. Leitmann, editor, *Optimization techniques with applications to aerospace systems*, pages 323–350. Academic Press, New York, NY, USA, 1962.
  - [10] D.F. Lawden. *Optimal trajectories for space navigation*. Butterworth, London, England, 1963.
  - [11] P.M. Lion and M. Handelsman. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. *AIAA Journal*, 6(1) :127–, 1968.
  - [12] L.W. Neustadt. A general theory of minimum-fuel space trajectories. *SIAM Journal of Control*, 3(2) :317–356, 1965.
  - [13] S. Nollet. *Development of a Guidance, Navigation and Control Architecture and Validation Process Enabling Autonomous Docking to a Tumbling Satellite*. PhD thesis, Massachussets Institute of Technology, Mai 2007.
-

- [14] F.L. Pereira and G.N. Silva. Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems. *Systems and Control Letters*, 40 :205–215, 2000.
  - [15] R.W. Rishel. An extended pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures. *SIAM Journal of Control*, 3(2) :191–, 1965.
  - [16] H.M. Robbins. Analytical study of the impulsive approximation. *AIAA Journal*, 4(8) :1417–1423, 1966.
  - [17] A.C. Robinson. Comparison of fuel-optimal maneuvers using a minimum number of impulses with those using the optimal number of impulses : A survey. Note technique BMI-NLVP-TR-68-1, NASA, décembre 1967.
  - [18] G.N. Silva and R.B. Vinter. Necessary conditions for optimal impulsive control problems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 35(6) :1829–1846, 1997.
  - [19] R.B. Vinter and F.M.F.L. Pereira. A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 26(1) :205–229, 1988.
  - [20] W.E. Wiesel. Optimal impulsive control of relative satellite motion. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(1) :74–78, janvier-février 2003.
  - [21] D.C. Woffinden and D.K. Geller. Navigating the Road to Autonomous Orbital Rendezvous. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 44 :898–909, juillet 2007.
-

## Première partie

# Modélisation du mouvement relatif de satellites

---







---

# Introduction

La première partie de la thèse est dédiée à l'étude et au développement de méthodes et outils pour la modélisation du mouvement relatif de satellites. Toutes les applications basées sur la navigation relative, où des manœuvres de proximité sont opérées, font appel à des modèles de mouvement orbital relatif. Ces modèles sont généralement linéarisés afin de simplifier leur exploitation. La linéarisation s'appuie sur le fait que les distances séparant les satellites considérés sont faibles devant les dimensions orbitales [31, 54]. Le rendez-vous a, historiquement, motivé le plus grand nombre de travaux de modélisation durant les années 1960 et 1970 dans le contexte de la course à l'espace et des missions vers la Lune. C'est ainsi que l'on trouve une littérature abondante pour les problèmes de guidage en navigation relative [54],[3],[8],[17],[18],[32], et pour l'évitement de collision [9],[10]. Les travaux dédiés aux formations de satellites sont plus récents, et présentent des similitudes avec le problème du rendez-vous, notamment en ce qui concerne les modèles de mouvement relatif. Il s'agit des problèmes de maintien à poste [1],[2],[7],[23],[24],[38] et de reconfiguration [33],[34] entre autres.

Si l'on s'intéresse aux modèles utilisés actuellement pour ces applications, on s'aperçoit que la quasi totalité des techniques existantes est basée sur le modèle de *Hill-Clohessy-Wiltshire*<sup>1</sup>. Les hypothèses de validité de ce modèle sont à la fois un facteur avantageux, simplifiant son exploitation et permettant des solutions analytiques du mouvement, mais aussi un inconvénient, car elles limitent fortement ses applications. Les perturbations orbitales ainsi que l'excentricité de l'orbite ne sont pas considérées dans ce modèle. Un atout important de ce modèle est la possibilité de calculer la matrice de transition solution des équations dynamiques LTI. Un autre modèle plus réaliste est celui de *Tschauner-Hempel*<sup>2</sup>, qui prend en compte les effets de l'excentricité des orbites sur la dynamique relative. Ce modèle est à paramètres variants dans le temps (LPV). La construction de la matrice de transition est plus complexe dans ce cas. Les travaux de Carter [15] suivi par Yamanaka-Ankersen [59] ont abouti à une solution de ce problème.

La construction de la matrice de transition associée à une dynamique donnée est l'un des problèmes qui restent encore non résolus pour certains cas, particulièrement lorsque les perturbations sont considérées. Des travaux récents ont ravivé l'intérêt pour cette

---

<sup>1</sup>Modèle de mouvement relatif linéaire dédié aux orbites circulaires non perturbées [31]

<sup>2</sup>Modèle de mouvement relatif linéaire dédié aux orbites elliptiques non perturbées [54]

---

problématique, en utilisant notamment des méthodes hybrides permettant de résoudre des cas perturbés elliptiques [29].

Dans cette partie, nous considérons les modèles *linéaires*, pour des orbites *elliptiques* et *perturbées* par l'aplatissement des pôles. Nous verrons qu'il existe deux approches pour décrire le mouvement relatif : les *éléments orbitaux différentiels* et les *coordonnées cartésiennes locales*. Les méthodes hybrides sont considérées à travers les transformations entre les deux types de description du mouvement relatif.

Nous commençons d'abord par une étude de l'état de l'art sur la modélisation du vol relatif de satellites, dans laquelle les modèles sont classifiés et les principaux travaux rencontrés dans la littérature sont analysés. Nous identifions les points sujets à amélioration. Un chapitre est ensuite consacré aux différentes contributions proposées dans le cadre de la thèse. Des comparaisons et validations numériques viennent illustrer les résultats obtenus.

---

---

# Chapitre 1

## Etat de l'art en modélisation du mouvement relatif

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Classification des modèles de mouvement relatif . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>1.2</b>	<b>Modèles à base d'éléments orbitaux différentiels . . . . .</b>	<b>29</b>
1.2.1	Synthèse de modèles d'état . . . . .	29
1.2.2	Modèle de transition directe . . . . .	33
<b>1.3</b>	<b>Modèles à paramètres cartésiens locaux . . . . .</b>	<b>36</b>
1.3.1	Les orbites circulaires et képlériennes . . . . .	37
1.3.2	Le orbites elliptiques et képlériennes . . . . .	41
1.3.3	Les orbites perturbées . . . . .	48
<b>1.4</b>	<b>Matrices de transition hybrides . . . . .</b>	<b>50</b>
1.4.1	Matrice de transition de Garrison . . . . .	51
1.4.2	Matrice de transition de Gim-Alfriend . . . . .	53
<b>1.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>54</b>

---

### 1.1 Classification des modèles de mouvement relatif

Tout au long de cette thèse, nous considérons des modèles linéaires de connaissance, donnés par la représentation d'état linéaire variable dans le temps :

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (\text{I.1.1})$$

ou par la solution associée définie par la matrice de transfert direct :

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)U(\tau)d\tau \quad (\text{I.1.2})$$


---

où  $X$  est un vecteur d'état décrivant le mouvement relatif inter-satellitaire, en position et vitesse. Il est clair que le choix de  $X$  est primordial pour la construction des matrices  $A$ ,  $B$  et  $\Phi$ . Les matrices de transition sont très utiles dans la résolution de certains problèmes de guidage, notamment dans le cas du rendez-vous orbital en simplifiant considérablement la charge calculatoire.

Des éléments fondamentaux de mécanique spatiale sont prérequis pour la compréhension de cette partie. Des notions de base sont donnés en annexe. Le lecteur intéressé pourra se référer aux ouvrages spécialisés pour plus de détails [14, 46, 49, 51].

La notion de mouvement relatif englobe l'ensemble des variables et modèles permettant de décrire la trajectoire d'un engin spatial dans un repère mobile lié à un deuxième engin évoluant sur une orbite différente.

Le choix du paramétrage du mouvement relatif est d'une importance capitale dans le processus de modélisation. Un satellite évoluant sur une orbite est totalement localisé à l'aide de l'une des approches suivantes :

- soit en écrivant ses *coordonnées cartésiennes* rapportées à un repère inertiel, centré sur la Terre ;
- soit en écrivant ses *paramètres orbitaux*, un jeu de paramètres permettant de décrire la forme et l'orientation spatiale d'une orbite osculatrice, ainsi que la position du satellite sur cette orbite en fonction du temps.

Le mouvement relatif entre deux satellites peut être donc étudié en considérant la différence entre leurs mouvements absolus, rapportée à un repère local. Ceci se fait :

- en étudiant le mouvement d'un satellite *chasseur*, par rapport à un repère centré sur un satellite *cible*, à l'aide des coordonnées cartésiennes locales rapportées à la cible ;
- en étudiant la différence algébrique des paramètres orbitaux régissant les orbites des deux satellites.

Ce sont là les deux classes de techniques utilisées historiquement pour l'étude du mouvement relatif. Celles-ci présentent par ailleurs un certain nombre de caractéristiques qui les rendent *complémentaires*.

Les *méthodes cartésiennes* sont adaptées aux problématiques du rendez-vous et évitement de collision, de par la nature même de ces problèmes. En effet, il s'agit généralement de synthèse de commande en position/vitesse relative avec des contraintes en position/vitesse relatives également. La difficulté majeure rencontrée concerne la recherche de matrices de transition solution de l'équation différentielle du mouvement, particulièrement lorsque des perturbations orbitales sont prises en compte. Les modèles différentiels obtenus sont à paramètres variants dans le temps et la solution analytique est difficile, voire impossible à établir.

Les *méthodes basées sur les paramètres orbitaux* sont, quant à elles, plus utilisées dans le cadre des vols en formation. Il s'agit généralement d'étudier la topologie du mouvement relatif, ou de commander les écarts en éléments orbitaux (le déphasage en l'occurrence). La prise en compte de perturbations orbitales y est intuitive grâce aux équations de Gauss,

---

et les matrices de transition sont plus simples à mettre en œuvre. Cependant, il est difficile d'utiliser cette classe de modèles pour des problèmes de commande en position/vitesse.

Une troisième classe de méthodes, tirant profit des avantages des deux classes précédentes a commencé à prendre de l'importance ces dernières années. Il s'agit des méthodes dites *hybrides*. Dans ce cas, un calcul direct des matrices de transition est opéré. Les variables d'état sont cartésiennes généralement, et des transformations linéaires de variables permettent de passer aux éléments orbitaux différentiels, pour un calcul plus simple. Ces méthodes ont permis de résoudre certains problèmes non traités par les méthodes cartésiennes classiques (prise en compte de  $J_2$  par Gim & Alfriend [28] par exemple). Leur utilisation dans la commande reste encore limitée à cause de la complexité analytique des matrices de transition obtenues d'un côté, et des limites de validité des transformations linéaires utilisées d'un autre côté.

La démarche suivie dans ce chapitre sera donc articulée autour de ces trois classes de méthodes. Nous donnons une revue bibliographique des principaux travaux représentatifs des trois classes de modèles cités plus haut. Les méthodes cartésiennes sont traitées avec plus de considération car elles sont utilisées dans la deuxième partie.

---

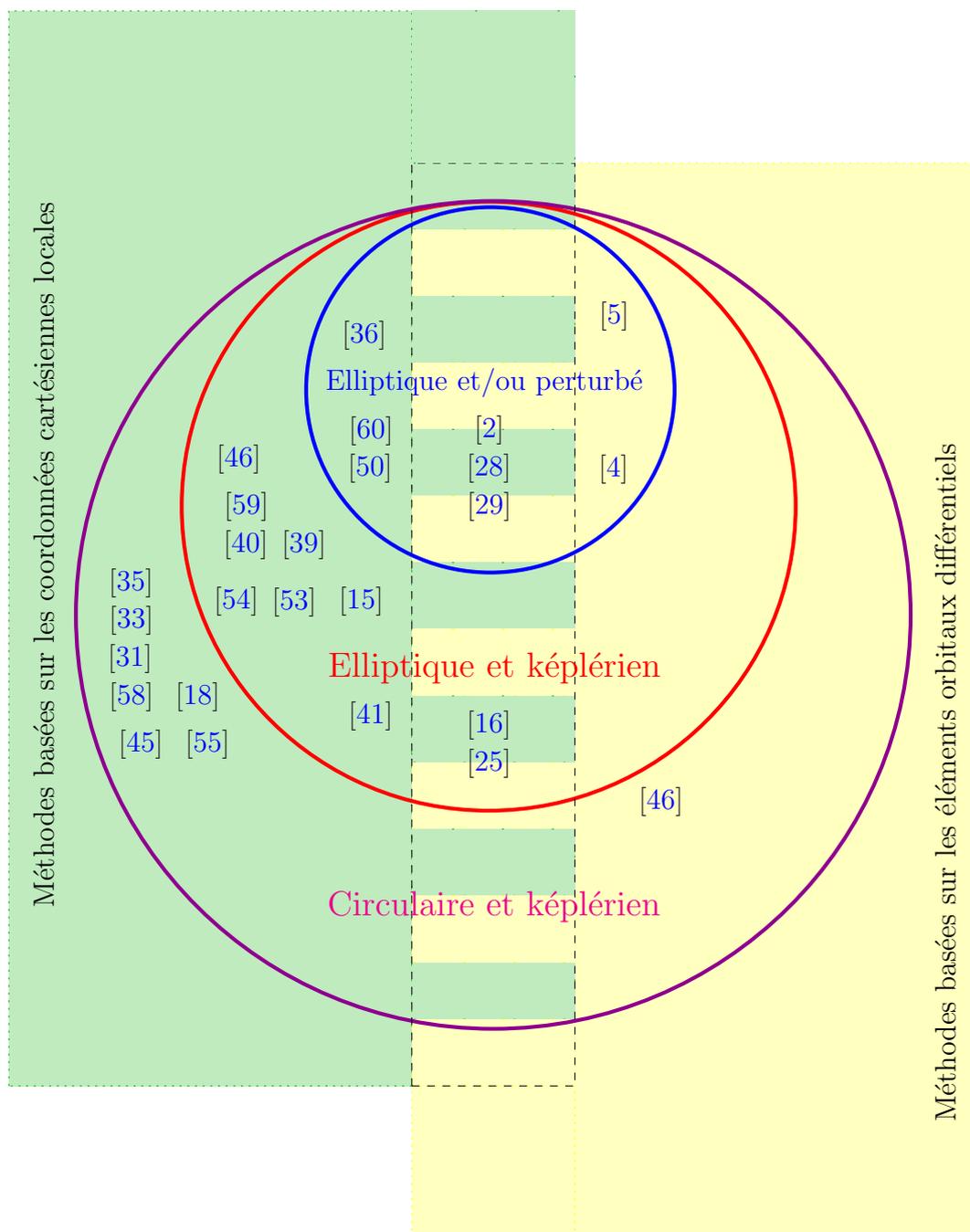


FIG. 1.1 – Classification des références bibliographiques en modélisation du mouvement relatif selon les méthodes de synthèse et les hypothèses posées

Sur la figure 1.1, une classification des principaux travaux cités dans la suite est donnée. Deux critères sont retenus pour cette catégorisation :

- les méthodes de synthèse : cartésiennes (rectangle vert), orbitales (rectangle jaune) et hybrides (partie commune jaune/verte délimitée par les pointillés) ;
- les hypothèses posées : orbite de référence circulaire képlérienne (cercle magenta), elliptique képlérienne (cercle rouge) et elliptique perturbée (cercle bleu).

## 1.2 Modèles à base d'éléments orbitaux différentiels

Dans cette partie, nous considérons des modèles du mouvement relatif sous la forme d'équations d'état :

$$\frac{d(\delta X_{oe})}{dt} = A_{oe}(t)\delta X_{oe} + B_{oe}(t)U \quad (\text{I.1.3})$$

ou sous la forme de transition directe :

$$\delta X_{oe}(t) = \Phi_{oe}(t, t_0)\delta X_{oe}(t_0) \quad (\text{I.1.4})$$

où  $\delta X_{oe} = X_{oe}^2 - X_{oe}^1$ .

$X_{oe}^2$  et  $X_{oe}^1$  désignent respectivement les vecteurs des éléments orbitaux des satellites *chasseur* et *cible*. Les éléments de ces vecteurs sont choisis selon la configuration orbitale étudiée (elliptique, circulaire, perturbée) afin d'éviter les singularités qui peuvent apparaître. La modélisation par les paramètres orbitaux différentiels a suscité un intérêt grandissant ces dernières années. Ceci est dû à la multitude des missions de vols en formation planifiée pour les années à venir (Stellar Imager, DARWIN, A-TRAIN, LISA, GRACE... [22]). On peut classer les travaux rencontrés dans la littérature en deux principales catégories :

- des travaux visant à établir *des modèles d'état* ;
- des travaux visant à construire *des matrices de transition*.

### 1.2.1 Synthèse de modèles d'état

Rappelons que les équations de Gauss permettent de décrire la dynamique des éléments orbitaux. Sous l'effet des accélérations gravitationnelles et perturbatrices dont la résultante est notée  $a_\gamma$ , les équations de Gauss ont la forme générique suivante :

$$\frac{dX_{oe}}{dt} = G_k(X_{oe}) + G_p(X_{oe})a_\gamma \quad (\text{I.1.5})$$

$G_k$  étant la variation temporelle des éléments orbitaux sous hypothèses képlériennes et  $G_p$  la variation sous l'effet de l'accélération  $a_\gamma$ . Le développement des modèles à base d'éléments orbitaux différentiels exploite essentiellement la linéarisation des équations de Gauss et l'application d'hypothèses données concernant les perturbations orbitales prises en compte dans le modèle. La démarche suivie part généralement de la relation :

$$\frac{d\delta X_{oe}}{dt} = \underbrace{\frac{dX_{oe}^2}{dt}}_{G_k(X_{oe}^2)+G_p(X_{oe}^2)a_{\gamma_2}} - \underbrace{\frac{dX_{oe}^1}{dt}}_{G_k(X_{oe}^1)+G_p(X_{oe}^1)a_{\gamma_1}} \quad (\text{I.1.6})$$

Pour les valeurs de  $X_{oe}^2$  au voisinage de  $X_{oe}^1$ , on opère une linéarisation au premier ordre des équations de Gauss :

$$\frac{d\delta X_{oe}}{dt} = \nabla [G_k(X_{oe}) + G_p(X_{oe})a_\gamma]_{X_{oe}^1} \delta X_{oe} \quad (\text{I.1.7})$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient. Il est nécessaire ensuite d'écrire les hypothèses retenues concernant les perturbations orbitales afin de préciser les fonctions de  $G_r$  et  $G_p$ . Dans la suite, nous ferons appel aux hypothèses sur la nature du mouvement orbital (circulaire ou elliptique) et des perturbations considérées. Ces hypothèses affectent le potentiel terrestre et donc l'accélération gravitationnelle qui dérive de ce potentiel.

**Hypothèse 1.2.1** *Un satellite est dit dans un environnement képlérien si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- la Terre est supposé de forme sphérique et de répartition massique constante ;
- les seules accélérations prises en compte sont les accélérations newtoniennes en  $\frac{1}{r^2}$ .

Le potentiel gravitationnel en un point  $M$  s'écrit alors :

$$U(M) = -\frac{\mu}{r} \quad (\text{I.1.8})$$

où :

- $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  est la constante gravitationnelle de la Terre ;
- $r = \|\overrightarrow{O_T M}\|$ .

**Hypothèse 1.2.2** *Une orbite est perturbée par le  $J_2$  (ou par l'aplatissement des pôles) si le potentiel gravitationnel en un point  $M$  s'écrit sous la forme :*

$$U(M) = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu J_2}{2r} \left(\frac{R_T}{r}\right)^2 (3 \sin^2 \lambda - 1) \quad (\text{I.1.9})$$

où :

- $J_2 = 1.086 \times 10^{-3}$  est le coefficient d'aplatissement des pôles ;
- $R_T = 6378.315 \text{ km}$  est le rayon équatorial de la Terre ;
- $\lambda$  est la latitude du point  $M$  dans le repère pseudo-inertiel lié à la Terre.

Afin d'illustrer cette démarche avec les hypothèses citées précédemment, nous reprenons l'exemple du modèle de Hamel [30] fondé sur les éléments orbitaux différentiels :

$$\delta \dot{X}_{oeh}(t) = A_{Hamel}(X_{oeh}^r) \delta X_{oeh}(t) + B_{Hamel}(X_{oeh}^r) u(t) \quad (\text{I.1.10})$$

où  $X_{oeh} = [a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), M(t)]'$ .  $B_{Hamel}$  n'est autre que la matrice de Gauss pour le jeu d'éléments orbitaux  $X_{oeh}$  ([30], voir annexe). L'orbite de référence est elliptique et soumise au  $J_2$  comme unique perturbation orbitale.

La perturbation par  $J_2$  induit deux types de variations sur les éléments orbitaux : des effets *séculaires* et des effets *périodiques* dont l'influence est nulle sur une période orbitale. Ils ont été étudiés dans [37] et [12]. Les auteurs posent l'hypothèse suivante afin de simplifier les calculs :

**Hypothèse 1.2.3** *La variation des éléments orbitaux différentiels est égale à la variation moyenne des éléments orbitaux différentiels :*

$$\delta \dot{X}_{oeh} = \delta \bar{X}_{oeh} \quad (\text{I.1.11})$$

Cette hypothèse est issue des travaux de Brouwer [12] où il est prouvé que seuls les éléments orbitaux  $\Omega$ ,  $\omega$  et  $M$  ont des dérivées séculaires dues à l'effet du  $J_2$ . Soit  $\bar{X}_{oe}$  la moyenne de  $X_{oe}$  sur une période, on peut écrire :

$$\dot{\bar{a}} = 0 \quad (\text{I.1.12})$$

$$\dot{\bar{e}} = 0 \quad (\text{I.1.13})$$

$$\dot{\bar{i}} = 0 \quad (\text{I.1.14})$$

$$\dot{\bar{\Omega}} = -\frac{3}{2} J_2 \bar{n} \left( \frac{R_e}{\bar{p}} \right)^2 \cos \bar{i} \quad (\text{I.1.15})$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \left( \frac{R_e}{\bar{p}} \right)^2 (5 \cos^2 \bar{i} - 1) \quad (\text{I.1.16})$$

$$\dot{\bar{M}} = \bar{n} + \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \left( \frac{R_e}{\bar{p}} \right)^2 (3 \cos^2 \bar{i} - 1) \quad (\text{I.1.17})$$

où  $\bar{n}$  est le mouvement moyen,  $p = a(1 - e^2)$  et  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ .

Le développement au premier ordre des relations précédentes mène à :

$$\delta \dot{\bar{\Omega}} = \frac{\partial \dot{\bar{\Omega}}}{\partial \bar{a}} \delta \bar{a} + \frac{\partial \dot{\bar{\Omega}}}{\partial \bar{e}} \delta \bar{e} + \frac{\partial \dot{\bar{\Omega}}}{\partial \bar{i}} \delta \bar{i} \quad (\text{I.1.18})$$

$$\delta \dot{\bar{\omega}} = \frac{\partial \dot{\bar{\omega}}}{\partial \bar{a}} \delta \bar{a} + \frac{\partial \dot{\bar{\omega}}}{\partial \bar{e}} \delta \bar{e} + \frac{\partial \dot{\bar{\omega}}}{\partial \bar{i}} \delta \bar{i} \quad (\text{I.1.19})$$

$$\delta \dot{\bar{M}} = \frac{\partial \dot{\bar{M}}}{\partial \bar{a}} \delta \bar{a} + \frac{\partial \dot{\bar{M}}}{\partial \bar{e}} \delta \bar{e} + \frac{\partial \dot{\bar{M}}}{\partial \bar{i}} \delta \bar{i} \quad (\text{I.1.20})$$

Les expressions des dérivées sont données en détail dans [30]. Elles sont des fonctions de  $\delta \bar{a}$ ,  $\delta \bar{e}$  et  $\delta \bar{i}$ . Pour les besoins du modèle écrit en fonction des éléments osculateurs, les auteurs utilisent une transformation  $\xi$  telle que :

$$\bar{X}_{oe} = \xi X_{oe} \quad (\text{I.1.21})$$

Le développement de cette transformation à l'ordre 1 permet d'obtenir une matrice dont la diagonale est constituée de 1. Les autres éléments sont négligeables car de l'ordre de  $J_2$  mis à part la première ligne correspondant à  $\delta \bar{a}$  [46].

La première ligne est obtenue à partir de la relation suivante :

$$\begin{aligned} \bar{a} = \xi_a = a - a \frac{J_2}{2} \left( \frac{R_e}{a} \right) & \left\{ (3 \cos^2 i - 1) \left[ \frac{a^3}{r^3} - \frac{1}{\eta^3} \right] \dots \right. \\ & \left. \dots + 3(1 - \cos^2 i) \left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos(2\omega + 2\nu) \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.1.22})$$

dont un développement au premier ordre conduit à :

$$\delta\bar{a} = \frac{\partial\xi_a}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\xi_a}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\xi_a}{\partial i}\delta i + \frac{\partial\xi_a}{\partial\omega}\delta\omega + \frac{\partial\xi_a}{\partial\Omega}\delta\Omega + \frac{\partial\xi_a}{\partial\nu}\delta\nu \quad (\text{I.1.23})$$

Dans l'équation (I.1.23),  $\delta\nu$  est calculée par :

$$\delta\nu = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\eta^3}\delta M + \frac{\sin \nu}{\eta^2}(2 + e \cos \nu)\delta e \quad (\text{I.1.24})$$

Cette relation est obtenue *via* une différentiation de l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E \quad (\text{I.1.25})$$

$$\delta M = \frac{\partial M}{\partial E}\delta E + \frac{\partial M}{\partial e}\delta e = (1 - e \cos E)\delta E - \sin E \delta e \quad (\text{I.1.26})$$

On procède d'une façon analogue pour éliminer  $\delta E$  :

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \Rightarrow \delta E = \frac{\eta}{1 + e \cos \nu}\delta\nu - \frac{\sin \nu}{\eta(1 + e \cos \nu)}\delta e \quad (\text{I.1.27})$$

avec  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ .

En remplaçant  $\delta E$  dans l'expression de  $\delta M$  et en se basant sur les relations entre  $E$  et  $M$ , on déduit :

$$\delta M = \frac{\eta}{(1 + e \cos \nu)^2} (\eta^2 \delta\nu - \sin \nu (2 + e \cos \nu) \delta e) \quad (\text{I.1.28})$$

On obtient finalement :

$$\left[ \frac{\partial\xi(X_{och})}{\partial X_{oe}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_a}{\partial a} & \frac{\partial\xi_a}{\partial e} + (2 + e \cos \nu) \frac{\sin \nu}{n^2} \frac{\partial\xi_a}{\partial\nu} & \frac{\partial\xi_a}{\partial i} & \frac{\partial\xi_a}{\partial\Omega} & \frac{\partial\xi_a}{\partial\omega} & \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\eta^3} \frac{\partial\xi_a}{\partial\nu} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.29})$$

Les éléments de cette matrice sont détaillés dans [30]. La matrice dynamique du modèle est donc donnée par :

$$A_{Hamel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial a} & \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial e} + \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{e}} + \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \nu} H_1 & \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial i} + \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{i}} & 0 & \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \nu} H_2 \\ \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial a} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial e} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{e}} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \nu} H_1 & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial i} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{i}} & 0 & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \nu} H_2 \\ \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial a} & \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial e} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{e}} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \nu} H_1 & \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial i} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{i}} & 0 & \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \xi_a}{\partial \nu} H_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.30})$$

où

$$H_1 = \frac{(2 + e \cos \nu) \sin \nu}{\eta^2}$$

et

$$H_2 = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\eta^3}$$

Le lecteur pourra retrouver les expressions détaillées des éléments de  $A$  dans [30].

### 1.2.2 Modèle de transition directe

Les matrices de transition sont obtenues en cherchant les solutions des équations dynamiques par intégration, ou à l'aide d'une méthode directe basée sur le calcul de la matrice de sensibilité de l'état final :

$$\delta X_{oe}(t) = \frac{\partial(\delta X_{oe}(t))}{\partial(\delta X_{oe}(t_0))} \delta X_{oe}(t_0) \quad (\text{I.1.31})$$

Toutefois, ce calcul se fait dans la majorité des cas à l'aide de l'équation (I.1.31). Plusieurs travaux s'inscrivent dans ce sens, notamment [25], [16], [27] et [29].

Dans un chapitre consacré aux formations de satellites de l'ouvrage [46], Schaub et Junkins proposent plusieurs modèles pour la navigation relative. En particulier, le développement d'une matrice de transition directe pour le cas quasi-circulaire non perturbé sera repris dans cette analyse.

Le vecteur des éléments orbitaux choisi est :

$$\delta X_{oeqgc} = [\delta a, \delta e_x, \delta e_y, \delta i, \delta \Omega, \delta \theta]' \quad (\text{I.1.32})$$

avec  $e_x = e \cos \omega$ ,  $e_y = e \sin \omega$  et  $\theta = \nu + \omega$ .

Tous les éléments du vecteur d'état sont constants à l'exception du terme  $\delta \theta$ . L'objectif des développements présentés est d'aboutir à une matrice de transition directe par une méthode fondée sur la sensibilité de l'état final par rapport à l'état initial :

$$\Phi_{oeqgc}(t, t_0) = \left[ \frac{\partial(\delta X_{oeqgc}(t))}{\partial(\delta X_{oeqgc}(t_0))} \right] \quad (\text{I.1.33})$$

Le calcul des éléments de la matrice est direct, sauf pour ceux correspondant à  $\theta$  qui est variant dans le temps.

L'objectif est donc d'exprimer  $\delta \theta(t)$  en fonction des autres termes du vecteur  $\delta X_{oeqgc}$ . La variation ne concerne que l'anomalie vraie d'où :

$$\begin{aligned} \delta \theta(t) &= \delta \omega + \delta \nu(t) \\ \delta \theta(t_0) &= \delta \omega + \delta \nu(t_0) = \delta \omega + \delta \nu_0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.34})$$

La dynamique de l'anomalie moyenne est donnée par :

$$M = M_0 + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0) \quad (\text{I.1.35})$$

Le calcul de la première variation conduit à :

$$\delta M = \delta M_0 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a} (M - M_0) \quad (\text{I.1.36})$$

$\delta M$  a déjà été calculé dans I.1.28. En faisant de même pour  $\delta M_0$ , l'expression de  $\delta \nu$  devient finalement :

$$\begin{aligned} \delta \nu = & \left( -\frac{(1 + e \cos \nu)^2 \sin \nu_0 (2 + e \cos \nu_0)}{\eta^2 (1 + e \cos \nu_0)^2} + \sin \nu (2 + e \cos \nu) \right) \delta e + \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 + e \cos \nu_0)^2} \delta \nu_0 \\ & - \frac{3}{2} \frac{(M - M_0)}{\eta^2 (\eta (1 + e \cos \nu))^2 a} \delta a \end{aligned} \quad (\text{I.1.37})$$

Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\delta \nu = s_a \delta a + s_\nu \delta \nu_0 + s_e \delta e \quad (\text{I.1.38})$$

avec :

$$s_a = -\frac{3}{2} \frac{(M - M_0)}{\eta^2 (\eta (1 + e \cos \nu))^2 a} \quad (\text{I.1.39})$$

$$s_\nu = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 + e \cos \nu_0)^2} \quad (\text{I.1.40})$$

$$s_e = \sin \nu (2 + e \cos \nu) \quad (\text{I.1.41})$$

On doit remplacer les termes en  $e$  et  $\delta e$  par des termes en  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $\delta e_x$  et  $\delta e_y$ . A partir des relations  $e_x = e \cos \omega$  et  $e_y = e \sin \omega$ , il est possible de calculer  $\delta e$  et  $\delta \omega$  :

$$\delta e = \frac{1}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}(e_x \delta e_x + e_y \delta e_y) \quad (\text{I.1.42})$$

$$\delta \omega = \frac{1}{e_x^2 + e_y^2}(e_x \delta e_y - e_y \delta e_x) \quad (\text{I.1.43})$$

On obtient finalement :

$$\delta \theta = s_a \delta a + s_\nu \delta \alpha_{\nu_0} + \underbrace{\left( s_e \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} - (1 - s_\nu) \frac{e_y}{e_x^2 + e_y^2} \right)}_{s_{e_1}} \delta e_x \quad (\text{I.1.44})$$

$$+ \underbrace{\left( s_e \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} - (1 - s_\nu) \frac{e_x}{e_x^2 + e_y^2} \right)}_{s_{e_2}} \delta e_y \quad (\text{I.1.45})$$

La matrice de transition s'écrit donc sous la forme :

$$\Phi_{oeqc}(\nu, \nu_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_a(\nu) & s_{e_1}(\nu) & s_{e_2}(\nu) & 0 & 0 & s_\nu(\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.46})$$

Il est à noter que la variable indépendante ici n'est pas le temps mais l'anomalie vraie.

Les modèles basés sur les paramètres orbitaux différentiels sont relativement récents. L'intérêt pour ce type de modèles est lié au développement des applications pour les vols en formation. Les avantages offerts par cette classe de modèles sont issus, pour la plupart, de la nature des équations de Gauss et des propriétés des paramètres orbitaux en termes d'interprétation physique.

De plus, les équations de Gauss sont *linéaires*, du *1<sup>er</sup> ordre* vis-à-vis des perturbations de *toutes natures*. Ceci facilite la prise en compte de perturbations orbitales diverses dans la synthèse des modèles de mouvement relatif. Les paramètres orbitaux sont *constants* sous hypothèses képlériennes, ce qui permet de construire des matrices d'état simples analytiquement et facilite la construction de matrices de transition.

L'obstacle majeur rencontré par les modèles à paramètres orbitaux différentiels réside dans leur inadaptation aux problèmes de commande en position/vitesse (rendez-vous, évitement de collision...). Cet inconvénient est levé en partie par l'utilisation de transformations de variables que nous verrons au chapitre 3. Ce point est traité dans la section consacrée aux modèles hybrides. Ces nouvelles approches donnent un nouvel essor aux techniques orbitales différentielles, en élargissant leur champs d'application.

### 1.3 Modèles à paramètres cartésiens locaux

Dans cette section, nous considérons les modèles linéaires de mouvement relatif sous forme dynamique d'état :

$$\frac{d(X_{car}(t))}{dt} = A_{car}(t)X_{car}(t) + B_{car}(t)U \quad (\text{I.1.47})$$

ou sous la forme de transition directe :

$$X_{car}(t) = \Phi_{car}(t, t_0)X_{car}(t_0) \quad (\text{I.1.48})$$

où  $X_{car}$  est le vecteur d'état contenant les composantes des positions et vitesses relatives du satellite chasseur, dans un repère local centré sur le satellite cible.

Le choix de ce type de vecteur d'état provient directement des applications envisagées pour ce type de modèles. En effet, les problèmes du rendez-vous orbital et de l'évitement de collision – pour ne citer que ces deux exemples – nécessitent la connaissance précise de la distance inter-satellitaire et son évolution à tout moment.

Le développement de modèles à paramètres cartésiens locaux se base en général sur les équations de la dynamique des satellites dans le repère inertiel. Des changements de base et des techniques de dérivation vectorielle permettent d'exprimer la variation des positions/vitesses relatives dans la base locale. La construction des matrices de transition est opérée généralement *via* la résolution des équations dynamiques. Ceci peut s'avérer complexe dans certains cas comme nous le verrons par la suite.

La complexité des modèles appartenant à cette classe change sensiblement suivant les hypothèses posées sur la nature du mouvement de la cible. On peut identifier trois niveaux de complexité analytique :

- la cible suit une trajectoire képlérienne circulaire : le modèle d'état obtenu est à *paramètres invariants dans le temps*. La construction de la matrice de transition directe se fait de manière analytique et directe ;
- la cible suit une trajectoire képlérienne elliptique : le modèle est à *paramètres variants périodiquement dans le temps*. La construction des matrices de transition est complexe et nécessite le calcul d'une intégrale particulière ;
- la cible suit une trajectoire perturbée : le modèle est à *paramètres variants dans le temps*. La construction des matrices de transition est très complexe, non résolue pour un grand nombre de cas.

L'analyse bibliographique que nous donnons reprend cette classification. Pour chaque cas, les modèles issus des travaux originaux sont donnés. Les déclinaisons trouvées dans la littérature ainsi que les matrices de transition correspondantes sont citées.

### 1.3.1 Les orbites circulaires et képlériennes

Ce cas est largement traité dans la littérature. Basé sur des hypothèses simplifiant le modèle d'état et menant à des équations LTI, la construction de matrices de transition pour ce cas est facilitée. Ces équations, connues sous le nom des équations de *Hill-Clohessy-Wiltshire* initialement proposées pour le rendez-vous [18], [58] ont été revisitées dans le cadre des études sur le vol en formation dans [45].

Le premier auteur à s'y intéresser est Hill dans [31] en 1878, pour l'étude du mouvement relatif de la Lune par rapport à la Terre autour du Soleil. La nouveauté introduite par Hill est l'utilisation des coordonnées cartésiennes (rectangulaires) en lieu et place des coordonnées sphériques utilisées auparavant par nombre d'auteurs, parmi lesquels figure Delaunay [19]. La formulation lagrangienne des équations du mouvement est utilisée dans la synthèse du modèle. Clohessy et Wiltshire ont développé des équations similaires [18] dans un repère différent, et semble-t-il sans avoir de connaissance sur les travaux de Hill, mais en citant des résultats présentés par Seifert et Summerfield [49] en 1959. Le mouvement relatif sous les hypothèses képlériennes et circulaires est communément décrit par des modèles dits de *Hill-Clohessy-Wiltshire* (HCW). Il apparaît dans bon nombre d'ouvrages en mécanique spatiale [44], [51], [42], [56], [46], [21]. Les approches suivies dans l'élaboration du modèle sont fortement liées aux applications recherchées : rendez-vous impulsif dans [44], évitement de collision après mise à poste entre le satellite et son booster dans [51] et enfin les orbites géostationnaires avec [42].

Soit  $X_{rsw}$  le vecteur d'état tel que :

$$X_{rsw} = \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{M_1 M_2} \\ \overrightarrow{V}_{M_2/\mathcal{R}_1} \end{array} \right]_{RSW_1} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^t \quad (\text{I.1.49})$$

et le vecteur de commande  $U$  des accélérations de poussée :

$$U = [u_r \ u_s \ u_w]^t_{RSW_1} \quad (\text{I.1.50})$$

tel que  $M_1$  est le satellite cible et  $M_2$  est le satellite chasseur. La trajectoire de  $M_1$  est définie à travers son vecteur d'éléments orbitaux  $X_{oe1}$  :

$$X_{oe1} = [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ \nu]^t \quad (\text{I.1.51})$$

Les hypothèses posées pour parvenir à ce modèle sont :

#### Hypothèse 1.3.1

- la cible et le chasseur évoluent sur des orbites képlériennes ;
- l'orbite de la cible est circulaire :  $e = 0$ ,  $r_1 = \|\overrightarrow{r}_1\| = \|\overrightarrow{O_T M_1}\| = a$  ;
- la distance inter-satellitaire est très petite devant la distance avec la Terre :

$$\|\overrightarrow{M_1 M_2}\| \ll \|\overrightarrow{r}_1\| \quad (\text{I.1.52})$$

Sous ces hypothèses, le modèle de Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) se présente sous la forme d'état :

$$\frac{dX_{rsw}}{dt} = A_{HCW}X_{rsw} + B_{HCW}U \quad (\text{I.1.53})$$

avec :

$$A_{HCW} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{HCW} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.54})$$

où  $n$  est le mouvement moyen de la cible donné par :

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (\text{I.1.55})$$

Le calcul de matrices de transition directes est explicite grâce à la nature des éléments de la matrice  $A_{HCW}$  :

$$\Phi_{HCW}(t) = e^{A_{HCW}(t)} \quad (\text{I.1.56})$$

L'exponentielle de matrice peut ainsi être calculée par triangularisation de la matrice dynamique  $A_{HCW}$  ou par utilisation de la transformée de Laplace :

$$\Phi_{HCW}(t) = \begin{bmatrix} 4 - 3 \cos(nt) & 0 & 0 & \frac{\sin(nt)}{n} & \frac{2(1 - \cos(nt))}{n} & 0 \\ 6(\sin(nt) - nt) & 1 & 0 & \frac{2(\cos(nt) - 1)}{n} & \frac{4 \sin(nt) - 3nt}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \cos(nt) & 0 & 0 & \frac{\sin(nt)}{n} \\ 3n \sin(nt) & 0 & 0 & \cos(nt) & 2 \sin(nt) & 0 \\ 6n(\cos(nt) - 1) & 0 & 0 & -2 \sin(nt) & 4 \cos(nt) - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -n \sin(nt) & 0 & 0 & \cos(nt) \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.57})$$

La matrice de transition permet de calculer les coordonnées relatives en position vitesse à partir des conditions initiales par la relation :

$$X_{rsw}(t) = \Phi_{HCW}(t - t_0)X_{rsw}(t_0) \quad (\text{I.1.58})$$

Cette relation peut être développée en :

$$\begin{aligned}
x(t) &= -(3x_0 + 2\dot{y}_0/n) \cos(n(t - t_0)) + (\dot{x}_0/n) \sin(n(t - t_0)) + (4x_0 + 2\dot{y}_0/n) \\
y(t) &= (6x_0 + 4\dot{y}_0/n) \sin(n(t - t_0)) + (2\dot{x}_0/n) \cos(n(t - t_0)) \\
&\quad - (6x_0 + 3\dot{y}_0/n)(n(t - t_0)) + (y_0 - 2\dot{x}_0/n) \\
z(t) &= z_0 \cos(n(t - t_0)) + (\dot{z}_0/n) \sin(n(t - t_0)) \\
\dot{x}(t) &= (3nx_0 + 2\dot{y}_0) \sin(n(t - t_0)) + (\dot{x}_0) \cos(n(t - t_0)) \\
\dot{y}(t) &= (6nx_0 + 4\dot{y}_0) \cos(n(t - t_0)) - (2\dot{x}_0) \sin(n(t - t_0)) - (6nx_0 + 3\dot{y}_0) \\
\dot{z}(t) &= -nz_0 \sin(n(t - t_0)) + \dot{z}_0 \cos(n(t - t_0))
\end{aligned} \tag{I.1.59}$$

On peut constater certaines caractéristiques du mouvement relatif :

- un découplage entre le mouvement plan dans  $[\vec{R}_1, \vec{S}_1]$  et hors-plan suivant  $\vec{W}_1$ . Ceci est une propriété très importante dans la synthèse de commande, puisqu'elle permet de considérer indépendamment les deux mouvements et de simplifier ainsi la synthèse de la commande. Nous verrons par la suite que cette propriété n'est pas exclusive du mouvement circulaire, car elle reste valable pour les orbites elliptiques ;
- le mouvement hors-plan est un oscillateur harmonique ;
- le trajectoire relative dans le plan  $[\vec{R}, \vec{S}]$  est une trajectoire elliptique qui subit une dérive (voir figure 1.2). L'ellipse est donnée par l'équation :

$$\frac{(x(t) - (4x_0 + 2\dot{y}_0/n))^2}{(3x_0 + 2\dot{y}_0/n)^2 + \dot{x}_0^2/n^2} + \frac{(y(t) + (6x_0 + 3\dot{y}_0/n)(nt) - (y_0 - 2\dot{x}_0/n))^2}{4((3x_0 + 2\dot{y}_0/n)^2 + \dot{x}_0^2/n^2)} = 1 \tag{I.1.60}$$

- Les dimensions de l'ellipse dépendent exclusivement des conditions initiales et du mouvement moyen de la cible  $n$  ;
- Un décalage constant  $y_0 - 2\dot{x}_0/n$  et un terme de dérive séculaire  $(6x_0 + 3\dot{y}_0/n)(nt)$  dans la direction opposée au vecteur  $\vec{S}$  se superposent au mouvement elliptique.

D'autres déclinaisons des équations de HCW sont proposées dans la littérature. La méthode de dérivation et les hypothèses peuvent varier.

Dans sa thèse de Master [33], Irvin propose une dérivation complète sans linéarisation du modèle HCW. Il obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases}
\ddot{x} = 2n\dot{y} + n^2(a + x) \left[ 1 - \frac{a^3}{((x + a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] + u_r \\
\ddot{y} = -2n\dot{x} + n^2y \left[ 1 - \frac{a^3}{((x + a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] + u_s \\
\ddot{z} = -n^2z \left[ \frac{a^3}{((x + a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] + u_w
\end{cases} \tag{I.1.61}$$

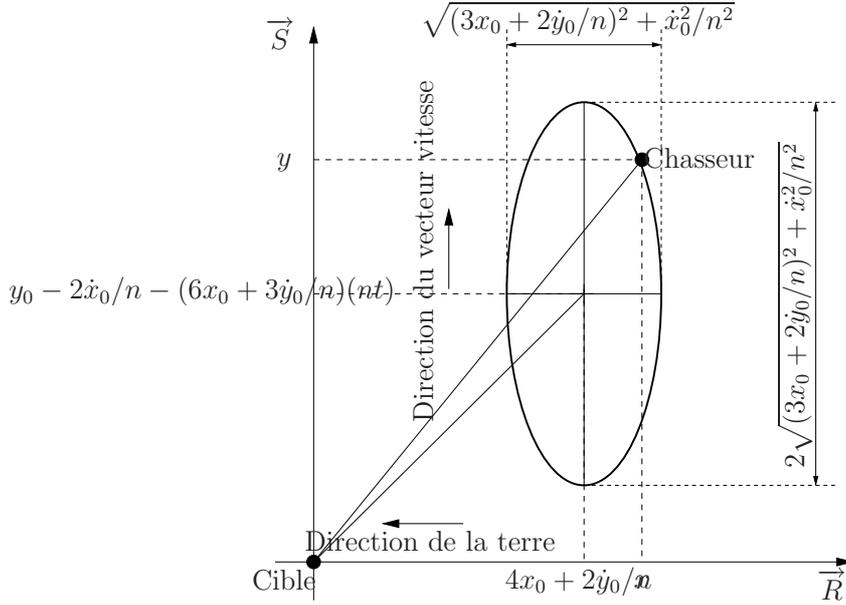


FIG. 1.2 – Ellipse du mouvement relatif coplanaire de Hill-Clohessy-Wiltshire

La linéarisation est obtenue en considérant l'hypothèse  $a \gg \|\overline{M_1 M_2}\|$ . L'auteur compare ensuite les deux modèles (linéaire et non linéaire) afin de quantifier l'erreur due à l'augmentation de la distance chasseur-cible.

Dans sa thèse de PhD [55], Vaddi développe un modèle augmenté, considérant la dynamique relative et la dynamique inertielle de la cible supposée circulaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 2\dot{\nu}\dot{y} + \dot{\nu}^2 x + \ddot{\nu}y + \frac{\mu}{r^3}x - \frac{\mu(r+x)}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + u_r \\ \ddot{y} = -2\dot{\nu}\dot{x} + \dot{\nu}^2 y - \ddot{\nu}x - \frac{\mu y}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + u_s \\ \ddot{z} = -\frac{\mu z}{[(r+x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + u_w \\ \ddot{r} = \dot{\nu}^2 r - \frac{\mu}{r^2} \\ \ddot{\nu} = -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{\nu} \end{array} \right. \quad (\text{I.1.62})$$

Dans [35], Karlgaard développe un modèle, sous les mêmes hypothèses que HCW, mais

en coordonnées sphériques  $[r_1, x_\varphi, y_\psi]$  liées à la base  $\mathcal{B}_1$  :

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= v_r \\
 \dot{\psi} &= \omega_\psi \\
 \dot{\varphi} &= \omega_\varphi \\
 \dot{v}_r &= r\omega\varphi^2 + r\omega_\psi^2 \cos^2 \varphi - \frac{\mu}{r^2} \\
 \dot{\omega}_\psi &= -\frac{2v_r\omega_\psi}{r} + 2\omega_\psi\omega_\varphi \tan \varphi \\
 \dot{\omega}_\varphi &= -\frac{2v_r\omega_\varphi}{r} - \omega_\psi \sin \varphi \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{I.1.63}$$

Un développement de Taylor au voisinage de la cible permet de retrouver les équations de HCW. Cette linéarisation ne concerne que le *mouvement coplanaire relatif* puisque le modèle de Karlgaard ne couvre pas la dynamique hors-plan.

### 1.3.2 Le orbites elliptiques et képlériennes

La dérivation des équations de la dynamique dans le cas où l'orbite de référence est elliptique a été traitée d'une manière plus ou moins identique dans la plupart des références. Lawden a été le précurseur dans [40, 39] suivi par de Vries [20] pour des modèles à faible excentricité. La première utilisation de ces équations pour le problème du rendez-vous fut mise en œuvre dans [54, 53] par Tschauner et Hempel, qui ont laissé leur noms à ces équations.

Dans le cas elliptique képlérien, on considère les hypothèses suivantes :

#### Hypothèse 1.3.2

- la cible et le chasseur évoluent sur des orbites képlériennes ;
- l'orbite de la cible est elliptique :  $0 \leq e < 1$  ;
- la distance inter-satellitaire est très petite devant la distance avec le centre de la Terre :

$$\|\overrightarrow{M_1 M_2}\| \ll \|\vec{r}_1\| \tag{I.1.64}$$

Pour les mêmes vecteurs d'état et de commande décrits précédemment, le modèle du mouvement relatif s'écrit :

$$\frac{dX_{rsw}}{dt} = A_{TH}X_{rsw} + B_{TH}U \tag{I.1.65}$$

avec :

$$A_{TH} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ n^2 F_{\nu,e}(3 + e \cos \nu) & -2n^2 e \sin \nu F_{\nu,e} & 0 & 0 & 2n G_{\nu,e} & 0 \\ 2n^2 e \sin \nu F_{\nu,e} & n^2 e \cos \nu F_{\nu,e} & 0 & -2n G_{\nu,e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 F_{\nu,e} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.66})$$

$$B_{TH} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

$$F_{\nu,e} = \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3$$

et

$$G_{\nu,e} = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

Le cas képlérien elliptique est une généralisation des équations obtenues sous les hypothèses *HCW*, pour une excentricité quelconque. La différence majeure qui apparait est la nature *périodique* du modèle d'état obtenu. Ceci a motivé un bon nombre de travaux visant à simplifier le modèle, afin de parvenir à écrire sa matrice de transition.

Dans [53], Tschauner propose une solution pour le rendez-vous entre deux orbites elliptiques non perturbées. En se basant sur les équations développées auparavant par de Vries, et reprises dans [54], il propose d'utiliser l'anomalie excentrique en tant que variable indépendante :

$$\frac{d}{dE} \left( q \frac{d\tilde{x}}{dE} \right) - 3\tilde{x} - 2\eta \frac{d\tilde{y}}{dE} = q^2 u_x \quad (\text{I.1.67})$$

$$\frac{d}{dE} \left( q \frac{d\tilde{y}}{dE} \right) + 2\eta \frac{d\tilde{x}}{dE} = q^2 u_y \quad (\text{I.1.68})$$

$$\frac{d}{dE} \left( q \frac{d\tilde{z}}{dE} \right) + \eta^2 \frac{\tilde{z}}{q} = q^2 u_z \quad (\text{I.1.69})$$

où  $q = 1 - e \cos \nu$ . Les dérivées par rapport à l'anomalie excentrique sont notées  $(\prime)$  pour alléger les notations.

Le terme  $\tilde{x}_1 = q \frac{d\tilde{y}}{dE} - 2\eta x$  est constant en l'absence de l'accélération  $u_y$ . L'auteur exploite cette propriété pour construire les vecteurs d'état et de la commande du mouvement coplanaire :

$$X = [ \tilde{x}_1 \quad \tilde{x} \quad q\tilde{x}' \quad \tilde{x} ]^t \quad U_{xy} = [ u_x \quad u_y ]^t$$

et le mouvement hors-plan :

$$Z = [ \tilde{z} \quad q\tilde{z}' ]^t \quad U_z = [ u_z ]^t$$

Le modèle d'état s'écrit :

$$X' = AX + BU_{xy} \quad (\text{I.1.70})$$

$$Z' = A_0 Z + B_0 U_z \quad (\text{I.1.71})$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/q & 0 & 0 & 2\eta/q \\ -2\eta/q & 0 & 0 & -S(q) \\ 0 & 0 & 1/q & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & q^2 \\ 0 & 0 \\ q^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.72})$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1/q \\ -\eta^2/q & 0 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ q^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.73})$$

$$S(q) = -3 + 4\eta^2/q \quad (\text{I.1.74})$$

Par la suite, l'auteur calcule une solution explicite du modèle en introduisant des variables canoniques. Cette solution est peu utilisée dans la littérature, car elle impose de résoudre l'équation de Kepler par rapport à  $E$ , qui est une équation transcendante.

Schaub dans [46], développe un modèle non linéaire :

$$\ddot{x} = 2\dot{\nu}(y - y\frac{\dot{r}_1}{r_1}) + \dot{\nu}^2 x + \frac{\mu}{r_1^2} - \frac{\mu}{r_2^3}(r + x)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{\nu}(x - x\frac{\dot{r}_1}{r_1}) + \dot{\nu}^2 y - \frac{\mu}{r_2^3}y \quad (\text{I.1.75})$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r_2^3}z$$

$$\text{où } r_2 = r_1 \sqrt{1 + 2\frac{x}{r_1} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r_1^2}}.$$

Il procède à une linéarisation pour les faibles distances :

$$\ddot{x} = 2\dot{\alpha}_\nu \dot{y} + y\ddot{\alpha}_\nu + x(\dot{\alpha}_\nu^2 + 2\frac{\mu}{r_1^3})$$

$$\ddot{y} = -2\dot{\alpha}_\nu \dot{x} - x\ddot{\alpha}_\nu - y(\dot{\alpha}_\nu^2 - \frac{\mu}{r_2^3}) \quad (\text{I.1.76})$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r_2^3}z$$

Pour obtenir ces équations, aucune hypothèse particulière n'est faite sur la forme de l'orbite. Elles sont donc valides pour les orbites excentriques non perturbées alors que le cas circulaire est retrouvé en posant  $e = 0$ ,  $r_1 = a$  et  $\dot{\nu} = n$ .

**Matrices de transition** Le calcul de *matrices de transition* a suscité un d'intérêt croissant de la part de la communauté. Différentes approches utilisées sont utilisées pour lever la difficulté liée à la variation des éléments de la matrice d'état.

Une première étape consiste à opérer un changement de variables d'état et de variable indépendante. La dérivation se fait désormais par rapport à *l'anomalie vraie*. On note :

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = (\cdot)' \dot{\nu} \quad \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} = \dot{\nu}(\cdot)'' + \ddot{\nu}(\cdot)' \quad (\text{I.1.77})$$

On opère les changements de variables d'état et de commande à l'aide des relations :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = (1 + e \cos \nu) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \tilde{u}_r \\ \tilde{u}_s \\ \tilde{u}_w \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \right)^3 \begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_w \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.78})$$

Le modèle d'état de l'équation (I.1.66) devient :

$$\frac{d\tilde{X}_{rsw}}{d\nu} = \tilde{A}_{TH} \tilde{X}_{rsw} + \tilde{B}_{TH} \tilde{U} \quad (\text{I.1.79})$$

avec :

$$\tilde{A}_{TH} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{1 + e \cos \nu} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_{TH} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.80})$$

avec  $\tilde{X}_{rsw} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z} \ \tilde{x}' \ \tilde{y}' \ \tilde{z}']^t$  et  $\tilde{U} = [\tilde{u}_r \ \tilde{u}_s \ \tilde{u}_w]^t$ .

Si l'on s'intéresse de près à l'équation (I.1.80), on s'aperçoit que le découplage du mouvement plan  $[\vec{R}_1, \vec{S}_1]$  avec le mouvement hors-plan  $\vec{W}_1$  est conservé. D'une manière analogue au cas circulaire, le mouvement hors-plan est régi par l'équation d'un oscillateur dont la solution est triviale :

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\nu) &= (\tilde{z}_0 \cos \nu_0 - \tilde{z}'_0 \sin \nu_0) \cos \nu + (\tilde{z}'_0 \cos \nu_0 + \tilde{z}_0 \sin \nu_0) \sin \nu \\ &= \tilde{z}_0 (\sin \nu_0 \sin \nu + \cos \nu_0 \cos \nu) + \tilde{z}'_0 (\cos \nu_0 \sin \nu - \sin \nu_0 \cos \nu) \end{aligned} \quad (\text{I.1.81})$$

Le mouvement coplanaire, est par contre régi par une équation différentielle à paramètres variants dans le temps. En reprenant les équations d'état homogènes limitées au plan  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , on obtient en intégrant l'équation relative à  $\tilde{y}''$  :

$$\tilde{y}' = -2\tilde{x} + K_1 \quad (\text{I.1.82})$$

Si l'on introduit cette relation dans l'équation relative à  $\tilde{x}''$ , on obtient :

$$\tilde{x}'' + \left( 4 - \frac{3}{1 + e \cos \nu} \right) \tilde{x} = \tilde{x}'' + \left( \frac{1 + 4e \cos \nu_1}{1 + e \cos \nu_1} \right) \tilde{x} = 2K_1 \quad (\text{I.1.83})$$

Cette classe d'équations différentielles du second ordre peut être résolue en trouvant une famille  $[\phi_1, \phi_2]$  de solutions particulières qui doit être libre (le Wronskien  $\phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'$  est non nul). Il suffit ensuite d'appliquer la méthode de la variation des constantes pour aboutir à la solution générale. Une solution particulière de l'équation homogène utilisée de manière commune dans l'ensemble des références est :

$$\phi_1(\nu) = (1 + e \cos \nu) \sin \nu \quad (\text{I.1.84})$$

Dans la littérature, nous avons trouvé différents choix pour la solution  $\phi_2$ , qui mènent à diverses formes de solutions générales. Nous citons dans ce qui suit certains de ces travaux.

**Matrice de Melton** Une solution approchée est proposée par Melton dans [41]. L'auteur effectue un développement de  $A_{TH}(t)$  en l'excentricité au voisinage de 0 :

$$A_{TH}(t) = A_0 + eA_1(t) + e^2A_2(t) + \dots \quad (\text{I.1.85})$$

où  $A_0$  correspond à  $A_{TH}$  pour  $e = 0$ . Autrement dit, la matrice de Hill-Clohessy-Wiltshire. La matrice de transition est à son tour développée en puissances de  $e$  :

$$\Phi_m(t, 0) = \Phi_0(t) + e\Phi_1(t) + e^2\Phi_2(t) + \dots \quad (\text{I.1.86})$$

avec  $\Phi_0(t) = e^{A_0 t}$ , la matrice de HCW. Les expressions des termes  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \int_0^t e^{A_0(t-\tau)} A_1(\tau) d\tau \\ \Phi_2(t) &= \int_0^t e^{A_0(t-\tau)} [A_1(\tau)\Phi_1(\tau) + A_2(\tau)e^{A_0\tau}] d\tau \\ &\vdots \\ \Phi_n(t) &= \int_0^t e^{A_0(t-\tau)} [A_1(\tau)\Phi_{n-1}(\tau) + \dots + A_n(\tau)e^{A_0\tau}] d\tau \end{aligned} \quad (\text{I.1.87})$$

Dans [41], les expressions sont données en éléments cartésiens et cylindriques locaux. La limitation de cette approche se situe au niveau de la valeur de  $e$  qui est limitée au maximum à 0.3 pour l'ordre 2. Il est nécessaire de passer à un ordre supérieur au-delà de 0.3 ce qui entraîne une grande complexité de calculs.

**Matrice de transition de Carter** Carter dans [15], utilise la solution particulière  $\phi_2$  :

$$\phi_2(\nu) = -6e^2(1 + e \cos \nu) \sin \nu K_c(\nu, \nu_0) + 2e \frac{\sin^2 \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{\cos \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{I.1.88})$$

où  $K_c(\nu, \nu_0)$  est donnée par :

$$K_c(\nu, \nu_0) = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\sin^2 \tau d\tau}{(1 + e \cos \tau)^4} \quad (\text{I.1.89})$$

Une troisième solution particulière est utilisée pour identifier la solution générale du système :

$$\phi_3(\nu) = 6e(1 + e \cos \nu) \sin \nu K_c(\nu, \nu_0) - 2 \frac{\sin^2 \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{\cos^2 \nu}{1 + e \cos \nu} - \cos^2 \nu \quad (\text{I.1.90})$$

Le calcul de  $K_c(\nu, \nu_0)$  se fait à l'aide d'un passage par l'anomalie excentrique  $E$ , d'où :

$$K_c(\nu, \nu_0) = (1 - e^2)^{-5/2} \left( \frac{E}{2} - \frac{\sin E \cos E}{2} - \frac{e}{3} \sin^3 E - \frac{E_0}{2} + \frac{\sin E_0 \cos E_0}{2} - \frac{e}{3} \sin^3 E_0 \right) \quad (\text{I.1.91})$$

A l'aide de la relation entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique, on aboutit à la solution de l'intégrale :

$$\begin{aligned} K_c(\nu, \nu_0) &= (1 - e^2)^{-5/2} \left( \arccos \left[ \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right] - \arccos \left[ \frac{e + \cos \nu_0}{1 + e \cos \nu_0} \right] \right) \\ &\quad - \frac{1}{2(1 - e^2)(1 + e \cos \nu)^2} (\cos \nu + e) \sin \nu \\ &\quad + \frac{1}{2(1 - e^2)(1 + e \cos \nu_0)^2} (\cos \nu_0 + e) \sin \nu_0 \\ &\quad - \frac{e \sin^3 \nu}{3(1 + e \cos \nu)^3(1 - e^2)} + \frac{e \sin^3 \nu_0}{3(1 + e \cos \nu_0)^3(1 - e^2)} \end{aligned} \quad (\text{I.1.92})$$

On obtient alors l'expression :

$$\tilde{X}(\nu) = \Phi_c(\nu, \nu_0) \tilde{X}(0) = \Phi_{c\nu}(\nu) \Phi_{c\nu}(\nu_0)^{-1} \tilde{X}(0) \quad (\text{I.1.93})$$

où  $\Phi_{c\nu}$  est la matrice fondamentale de Carter donnée par :

$$\Phi_{c\nu} = \begin{bmatrix} -2 \cos \nu (1 + (e/2) \cos \nu) & -6(1 + e \cos \nu)^2 K_c(\nu, \nu_0) & 0 & 6e(1 + e \cos \nu)^2 K(\nu, \nu_0) & 1 & 0 \\ & -2 \frac{\sin \nu \cos \nu}{1 + e \cos \nu} & & -\frac{\sin \nu}{1 + e \cos \nu} & & \\ \phi_1(\nu) & \phi_3(\nu) & 0 & \phi_2(\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \nu & 0 & 0 & \sin \nu \\ 2\phi_1(\nu) & 2\phi_3(\nu) + 1 & 0 & 2\phi_2(\nu) & 0 & 0 \\ \phi_1'(\nu) & \phi_3'(\nu) & 0 & \phi_2'(\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \nu & 0 & 0 & \cos \nu \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.94})$$

et

$$\Phi_{c\nu_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -4\frac{\sin \nu_0}{1+e \cos \nu_0} + \phi'_2 \nu_0 & 0 & 2\frac{\sin \nu_0}{1+e \cos \nu_0} & \frac{2e \sin^2 \nu_0}{(1+e \cos \nu_0)^2} - \frac{\cos \nu_0}{1+e \cos \nu_0} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \nu_0 & 0 & 0 & -\sin \nu_0 \\ 0 & 4 \cos \nu_0 (1 + (e/2) \cos \nu_0) - \phi'_1(\nu_0) & 0 & -2\frac{\sin \nu_0}{1+e \cos \nu_0} & (1+e \cos \nu_0) \sin \nu_0 & 0 \\ 1 & -\sin 2\nu_0 \frac{(3+e \cos \nu_0)}{1+e \cos \nu_0} + \phi'_3(\nu_0) & 0 & \sin 2\nu_0 \frac{(3+e \cos \nu_0)}{2(1+e \cos \nu_0)} & \frac{2 \sin^2 \nu_0}{(1+e \cos \nu_0)^2} + \cos^2 \nu_0 \frac{2+e \cos \nu_0}{1+e \cos \nu_0} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \nu_0 & 0 & 0 & \cos \nu_0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.95})$$

**Matrice de Yamanaka-Ankersen** Yamanaka et Ankersen dans [59] proposent une matrice de transition valable pour des excentricités  $0 \leq e < 1$  et relativement simple à calculer analytiquement. Cette matrice sera utilisée d'ailleurs dans la synthèse d'algorithmes de guidage dans la deuxième partie.

La solution particulière proposée est :

$$\phi_4(\nu) = J_{ya}(\nu, \nu_0) = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\tau}{(1+e \cos \tau)^2} \quad (\text{I.1.96})$$

Ce choix est motivé par la relation de conservation du moment cinétique :

$$\frac{d\nu}{dt} = k^2(1+e \cos \nu)^2 \quad (\text{I.1.97})$$

où  $k^2 = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}}$ .

On peut donc écrire :

$$\frac{d\nu}{(1+e \cos \nu)^2} = k^2 dt \quad (\text{I.1.98})$$

et donc :

$$\phi_4(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\tau}{(1+e \cos \tau)^2} = k^2 \int_{t_0}^t dt = k^2(t - t_0) \quad (\text{I.1.99})$$

En utilisant  $\phi_1$  donnée par Carter dans [15], les auteurs établissent la matrice de transition :

$$\tilde{X}(\nu) = \Phi_{ya}(\nu, \nu_0) \tilde{X}(0) \quad (\text{I.1.100})$$

avec :

$$\Phi_{ya} = \begin{bmatrix} \Phi_{sya}^{22}(\nu, \nu_0) & -\Phi_{sya}^{21}(\nu, \nu_0) & 0 & \Phi_{sya}^{24}(\nu, \nu_0) & -\Phi_{sya}^{23}(\nu, \nu_0) & 0 \\ -\Phi_{sya}^{12}(\nu, \nu_0) & \Phi_{sya}^{11}(\nu, \nu_0) & 0 & -\Phi_{sya}^{14}(\nu, \nu_0) & \Phi_{sya}^{13}(\nu, \nu_0) & 0 \\ 0 & 0 & \sin \nu_0 \sin \nu + \cos \nu_0 \cos \nu & 0 & 0 & \cos \nu_0 \sin \nu - \sin \nu_0 \cos \nu \\ \Phi_{sya}^{42}(\nu, \nu_0) & -\Phi_{sya}^{41}(\nu, \nu_0) & 0 & \Phi_{sya}^{44}(\nu, \nu_0) & -\Phi_{sya}^{43}(\nu, \nu_0) & 0 \\ -\Phi_{sya}^{32}(\nu, \nu_0) & \Phi_{sya}^{31}(\nu, \nu_0) & 0 & -\Phi_{sya}^{34}(\nu, \nu_0) & \Phi_{sya}^{33}(\nu, \nu_0) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \nu_0 \sin \nu + \sin \nu_0 \cos \nu & 0 & 0 & \sin \nu_0 \sin \nu + \cos \nu_0 \cos \nu \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.101})$$

où  $\Phi_{sya}$  est la matrice de transition du mouvement plan :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(\nu) \\ \tilde{x}'(\nu) \\ \tilde{y}(\nu) \\ \tilde{y}'(\nu) \end{bmatrix} = \Phi_{sya}(\nu, \nu_0) \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}'(0) \\ \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(0) \end{bmatrix} = \Phi_{syav} \Phi_{sya\nu_0}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}'(0) \\ \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(0) \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.102})$$

et  $\Phi_{syav}$  est donnée par :

$$\Phi_{syav} = \begin{bmatrix} 1 & -(2 + e \cos \nu) \cos \nu & (2 + e \cos \nu) \sin \nu & 3(1 + e \cos \nu)^2 J_{ya}(\nu, \nu_0) \\ 0 & (1 + e \cos \nu) \sin \nu & (1 + e \cos \nu) \cos \nu & 2 - 3e(1 + e \cos \nu) J_{ya}(\nu, \nu_0) \sin \nu \\ 0 & 2(1 + e \cos \nu) \sin \nu & 2(1 + e \cos \nu) \cos \nu - e & 3(1 - 2e(1 + e \cos \nu) J_{ya}(\nu, \nu_0) \sin \nu) \\ 0 & \cos \nu + e \cos 2\nu & -(\sin \nu + e \sin 2\nu) & -3e \left( (\cos \nu + e \cos 2\nu) J_{ya}(\nu, \nu_0) + \frac{\sin \nu}{1 + e \cos \nu} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.103})$$

La matrice  $\Phi_{sya\nu_0}$  se déduit aisément de (I.1.103) comme :

$$\Phi_{sya\nu_0} = \begin{bmatrix} 1 & -(2 + e \cos \nu_0) \cos \nu_0 & (2 + e \cos \nu_0) \sin \nu_0 & 0 \\ 0 & (1 + e \cos \nu_0) \sin \nu_0 & (1 + e \cos \nu_0) \cos \nu_0 & 2 \\ 0 & 2(1 + e \cos \nu_0) \sin \nu_0 & 2(1 + e \cos \nu_0) \cos \nu_0 - e & 3 \\ 0 & \cos \nu_0 + e \cos 2\nu_0 & -(\sin \nu_0 + e \sin 2\nu_0) & -3e \frac{\sin \nu_0}{1 + e \cos \nu_0} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.104})$$

### 1.3.3 Les orbites perturbées

La littérature est très pauvre en références portant sur la modélisation du mouvement relatif perturbé, notamment par l'effet du  $J_2$ . Les modèles obtenus sont complexes et inutilisables sur des applications en ingénierie. Le calcul des matrices de transition est, en particulier pratiquement impossible.

Les rares matrices de transition trouvées dans la littérature sont calculées par des méthodes géométriques [60], ou hybrides à l'instar des travaux de Gim & Alfriend [28]. Cette approche sera détaillée dans la section suivante.

Une hypothèse sur la variation des éléments orbitaux a été posée dans quelques travaux répertoriés, notamment dans [47], [48] pour le cas circulaire, et [26], [52] pour le cas elliptique :

**Hypothèse 1.3.3** *L'accélération différentielle est calculée en supposant que le satellite de référence ne subit aucune perturbation et vérifie les conditions képlériennes.*

Ceci revient à négliger la variation des éléments orbitaux de la cible sous l'effet de  $J_2$ . Cette hypothèse permet de trouver les équations de Tschauner-Hempel généralisées :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2n \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} & 0 \\ -2n \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} n^2 f_1(e, \nu)(3+e \cos \nu) + J_e G_{11} & -2e \cdot n^2 f_1(e, \nu) \sin \nu + J_e G_{12} & J_e G_{13} \\ 2e \cdot n^2 \sin \nu f_1(e, \nu) + J_e G_{21} & n^2 f_1(e, \nu)(e \cos \nu) + J_e G_{22} & J_e G_{23} \\ J_e G_{31} & J_e G_{32} & -n^2 f_1(e, \nu) + J_e G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.1.105})$$

Dans sa thèse de PhD [50], Sengupta suit une logique similaire à celle d'Irvin, mais linéarise en se basant sur la formulation en polynômes de Legendre du potentiel terrestre. En effet, le potentiel de gravitation de la cible s'écrit comme la fonction génératrice des polynômes de Legendre d'argument  $(-x/\rho)$  :

$$\begin{aligned} U_{cible} &= \frac{\mu}{\sqrt{(r_1+x)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mu}{r_1 \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r_1^2} + \frac{2x}{r_1}}} \\ &= \frac{\mu}{r_1} \left( 1 - \frac{x}{r_1} + \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r_1^2} \right) + \underbrace{\frac{\mu}{r_1} \sum_{n=3}^{\infty} P_n \left( \frac{x}{\rho} \right) \left( \frac{-\rho}{r_1} \right)^n}_{\tilde{U}_{cible}} \end{aligned} \quad (\text{I.1.106})$$

Finalement, l'auteur obtient un modèle augmenté tout comme Vaddi, linéarisé pour de faibles distances inter-satellitaires :

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{\nu}\dot{y} + (\dot{\nu}^2 + 2\frac{\mu}{r_1^3})x + \ddot{\nu}y + \frac{\partial \tilde{U}_{cible}}{\partial x} + a_x \\ \ddot{y} &= -2\dot{\nu}\dot{x} + (\dot{\nu}^2 - \frac{\mu}{r_1^3})y - \ddot{\nu}x + \frac{\partial \tilde{U}_{cible}}{\partial y} + a_y \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r_1^3}z + \frac{\partial \tilde{U}_{cible}}{\partial z} + a_z \\ \ddot{r} &= \dot{\nu}^2 r_1 - \frac{\mu}{r_1^2} \\ \ddot{\nu} &= -\frac{2\dot{r}_1}{r_1} \dot{\nu} \end{aligned} \right. \quad (\text{I.1.107})$$

L'intérêt accordé par la communauté aux modèles à base de coordonnées cartésiennes locales provient principalement des applications. Historiquement, le rendez-vous orbital a suscité un grand nombre de travaux dans la thématique du guidage par la navigation

relative. La nature des variables d'état permet d'utiliser ces modèles sans transformations ultérieures. Cela représente un réel avantage lorsque la complexité numérique doit être prise en considération. Le besoin de synthétiser des schémas de guidage autonomes et *embarcables*, justifie la nécessité d'utiliser des modèles simples et exploitables sans transformations majeures.

Les problèmes rencontrés lors de l'élaboration de ces modèles sont liés à la complexité analytique des équations de la dynamique relative. Les modèles d'état à paramètres variants dans le temps rendent la construction des matrices de transition difficile à mettre en œuvre, même si des progrès considérables ont été réalisés ces dernières années. Les cas képlériens sont actuellement résolus, si l'on fait abstraction de la perte de précision due à la linéarisation.

Cette perte de précision peut être mise en évidence à travers la comparaison de la propagation d'un état initial par la matrice de Yamanaka-Ankersen et par un propagateur non linéaire basé sur les équations non linéarisées pour les distances faibles.

Pour une orbite faiblement elliptique donnée par le vecteur des éléments orbitaux :

$$X_{oe} = [ 7011 \text{ km} \quad 0.0052 \quad 52 \text{ deg} \quad 0 \text{ deg} \quad 0 \text{ deg} \quad 0 \text{ deg} ] \quad (\text{I.1.108})$$

Un décalage initial à  $t = 0$  de  $10 \text{ km}$  dans la direction du mouvement, propagé par les deux moyens cités plus haut mène vers un décalage à  $t = 64620 \text{ s}$  de :

- Yamanaka-Ankersen :  $6 \text{ m}$  ;
- propagateur non linéaire :  $3,01 \text{ km}$

L'erreur provoquée sur l'exemple présenté plus haut confirme que les hypothèses de linéarisation doivent être considérées avec précaution et réserve.

Les cas perturbés présentent encore, des grands défis à relever. Il n'existe pas, à notre connaissance, de matrice de transition pour les cas perturbés hormis celles obtenues par des méthodes hybrides. La littérature est pauvre en modèles d'état pour ces cas également.

## 1.4 Matrices de transition hybrides

Face à l'impossibilité de construire des matrices de transition par les méthodes cartésiennes dans certains cas prenant en compte les perturbations orbitales, et l'inadaptation des paramètres orbitaux différentiels aux problèmes de commande usuels, une nouvelle famille de méthodes pour construire les matrices de transition directe est apparue dans les années 1990.

Plusieurs auteurs proposent d'utiliser une méthode hybride qui combine les avantages des deux approches à travers 3 étapes :

1. Une transformation  $\Psi(X_{OE}(t))$  qui permet de passer des différences en éléments orbitaux aux coordonnées cartésiennes locales d'une manière linéaire :

$$X_{rsw}(t) = \Psi(X_{OE}(t))\delta X_{oe}(t) \quad (\text{I.1.109})$$

2. Une matrice de transition en éléments orbitaux différentiels :

$$\delta X_{oe}(t) = \phi(t, t_0) \delta X_{oe}(t_0) \quad (\text{I.1.110})$$

3. Une transformation inverse  $\Psi^{-1}(X_{oe})$  permettant de repasser en différences d'éléments orbitaux :

$$\delta X_{oe}(t) = \Psi^{-1}(X_{OE}(t)) X_{rsw}(t) \quad (\text{I.1.111})$$

En rassemblant les trois étapes on obtient une matrice de transition en coordonnées cartésiennes locales, même si l'intégration se fait *via* les éléments orbitaux différentiels :

$$X_{rsw}(t) = \phi_H(t, t_0) X_{rsw}(t_0) \quad (\text{I.1.112})$$

où  $\phi_H$  est donnée par :

$$\phi_H(t, t_0) = \Psi(X_{oe}(t)) \phi_{oe}(t, t_0) \Psi^{-1}(X_{oe}(t_0)) \quad (\text{I.1.113})$$

Dans la suite, nous citons des exemples de travaux représentatifs de la littérature associée aux transformations entre les coordonnées cartésiennes locales et les différences en éléments orbitaux. Les développements sont généralement entrepris dans le but de servir à établir des matrices de transition pour des cas non traités par les méthodes traditionnelles.

### 1.4.1 Matrice de transition de Garrison

La matrice de transition proposée par Garrison dans [25], utilise une méthode hybride pour des orbites elliptiques képlériennes. Les travaux ultérieurs de Carter [15], Yamanaka-Ankersen [59] et d'autres auteurs ont démontré la possibilité de construire cette matrice de transition par une méthode classique. La démarche suivie peut être résumée comme suit :

1. calcul d'une transformation linéaire  $\Psi(\nu, \delta X_{oe}(\nu))$  qui permet de passer des coordonnées cartésiennes locales  $\delta X_{rsw}(\nu)$  à un vecteur d'éléments orbitaux différentiels

$$\text{défini par } \delta X_{oeg} = \left[ \begin{array}{ccccccc} \frac{\delta a}{a} & \delta e & \delta \nu & \delta \omega + \cos i \delta \Omega & \sin i \delta \Omega & \delta i \end{array} \right]^t :$$

$$\delta X_{rsw}(\nu) = \Psi(\nu, \delta X_{oe}(\nu)) \delta X_{oeg}(\nu) \quad (\text{I.1.114})$$

$$\delta X_{oeg}(\nu_0) = \Psi(\nu_0, \delta X_{oe}(\nu_0))^{-1} \delta X_{rsw}(\nu_0) \quad (\text{I.1.115})$$

2. établissement d'une matrice de transition  $\Phi_{oeg}(\nu, \nu_0)$  qui décrit l'évolution des paramètres orbitaux différentiels entre deux positions angulaires  $\nu_0$  et  $\nu$  :

$$\delta X_{oeg}(\nu) = \Phi_{oeg}(\nu, \nu_0) \delta X_{oeg}(\nu_0) \quad (\text{I.1.116})$$

3. obtention de la matrice de transition en éléments orbitaux cartésiens locaux :

$$\delta X_{rsw}(\nu) = \Psi(\nu, \delta X_{oe}(\nu)) \Phi_{oeg}(\nu, \nu_0) \Psi(\nu_0, \delta X_{oe}(\nu_0))^{-1} \delta X_{rsw}(\nu_0) \quad (\text{I.1.117})$$

La transformation linéaire  $\Psi$  est calculée d'une manière analogue à celle de Casotto [16] en ce qui concerne la position. Par contre, la vitesse relative est obtenue en dérivant les expressions obtenues pour la position relative par rapport à l'anomalie vraie. Cela mène alors à :

$$\begin{array}{l} \frac{x}{r} = \frac{\delta a}{a} - \frac{2e + (e^2 + 1) \cos \nu}{(1 + e \cos \nu)(1 - e^2)} \delta e + \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \delta \nu \\ \frac{y}{r} = \delta \nu + \delta \omega + \cos i \delta \Omega \\ \frac{z}{r} = -\cos \omega + \nu \sin i \delta \Omega + \sin \omega + \nu \delta i \\ \frac{x'}{r} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left( -\frac{e}{2} \sin \nu \frac{\delta a}{a} + \sin \nu \frac{\delta e}{1 - e^2} + e \cos \nu \delta \nu \right) \\ \frac{y'}{r} = \frac{-3\delta a}{a} + \frac{3e + (2 + e^2) \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \frac{\delta e}{1 - e^2} + \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} (\delta \omega - \delta \nu + \cos i \delta \Omega) \\ \frac{z'}{r} = \frac{\sin i \sin(\omega + \nu) + e \sin \omega}{1 + e \cos \nu} \delta \Omega + \frac{\cos(\omega + \nu) + e \cos \omega}{1 + e \cos \nu} \delta i \end{array} \quad (\text{I.1.118})$$

La matrice de transition  $\Phi_{oeg}(\nu, \nu_0)$  est définie comme étant *la matrice de sensibilité* de l'état final par rapport à l'état initial :

$$\Phi_{oeg}(\nu, \nu_0) = \left[ \frac{\partial(\delta X_{oeg}(\nu))}{\partial(\delta X_{oeg}(\nu_0))} \right] \quad (\text{I.1.119})$$

Puisque l'auteur se place dans un contexte képlérien, une seule composante est variante dans le temps. En utilisant l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E = E_0 - e \sin E_0 - n(t - t_0) \quad (\text{I.1.120})$$

le calcul de la première variation donne :

$$\begin{aligned} \delta E(\nu) &= \left[ \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 - e^2}} - \frac{1 + e \cos \nu}{1 + e \cos \nu_0} \frac{\sin \nu_0}{\sqrt{1 - e^2}} \right] \delta e + \frac{1 + e \cos \nu}{1 + e \cos \nu_0} \delta E_0 + \\ &\quad \frac{3}{2} \left[ \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} (E_0 - E) + e \left( \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 - e^2}} - \frac{1 + e \cos \nu}{1 + e \cos \nu_0} \frac{\sin \nu_0}{\sqrt{1 - e^2}} \right) \right] \frac{\delta a}{a} \end{aligned} \quad (\text{I.1.121})$$

L'anomalie vraie est obtenue en utilisant :

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{E}{2} \quad (\text{I.1.122})$$

L'expression de  $\delta \nu$  devient finalement :

$$\delta \nu = g_a \frac{\delta a}{a} + g_e \delta e + g_\nu \delta \nu_0 \quad (\text{I.1.123})$$

avec :

$$g_a = \frac{3(1 + e \cos \nu)^2}{2(1 - e^2)} \left[ \frac{E_0 - E}{\sqrt{1 - e^2}} + e \left( \frac{\sin \nu}{1 + e \cos \nu} - \frac{\sin \nu_0}{1 + e \cos \nu_0} \right) \right] \quad (\text{I.1.124})$$

$$(I.1.125)$$

$$g_e = \frac{1}{1 - e^2} \left[ (2 + e \cos \nu) \sin \nu - \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 + e \cos \nu_0} \right)^2 (2 + e \cos \nu_0) \sin \nu_0 \right] \quad (\text{I.1.126})$$

$$(I.1.127)$$

$$g_\nu = \left[ \frac{1 + e \cos \nu}{1 + e \cos \nu_0} \right]^2 \quad (\text{I.1.128})$$

La matrice de transition  $\Phi_{oeg}(\nu, \nu_0, X_{oe}^r(\nu))$  s'écrit donc sous la forme :

$$\Phi_{oeg}(\nu, \nu_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_a & g_e & g_\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.129})$$

## 1.4.2 Matrice de transition de Gim-Alfriend

Dans [2] et [29], Gim & Alfriend développent une matrice de transition pour des orbites perturbées le terme en  $J_2$  dû à l'aplatissement des pôles. La matrice développée dans [2] est destinée à des orbites circulaires ou elliptiques, mais non équatoriales, alors que celle présentée dans [29] est valable pour toutes les configurations orbitales du fait de l'utilisation des *éléments orbitaux équinoxiaux*.

Nous rappelons que la perturbation causée par le terme en  $J_2$  génère deux types de variations sur les éléments orbitaux :

- des variations périodiques, dont l'effet instantané est mesuré *via les éléments osculateurs* ;
- des variations séculaires, causant des dérives des *éléments moyens*.

Gim & Alfriend présentent les développements pour les deux types de variations.

La méthode suivie est analogue dans les deux cas ; elle se résume de la façon suivante :

1. un transformation géométrique linéaire notée  $\Sigma(t) = A(t) + \alpha B(t)$  telle que :

$$X_{rsw} = \Sigma(t) \delta X_{oem}(t) \quad (\text{I.1.130})$$

avec  $\alpha = 3J_2 R_e^2$ ,  $\alpha B(t)$  rassemblant les termes perturbés par  $J_2$ .  $X_{oem}$  est le vecteur des éléments orbitaux moyens.

Cette transformation est inspirée de celle développée par Garrison dans [25], en prenant en compte la variation des éléments orbitaux due aux perturbations.

2. une transformation liant les éléments orbitaux moyens aux éléments osculateurs :

$$\delta X_{oe}(t) = D(t)\delta X_{oem}(t) \quad (\text{I.1.131})$$

Cette transformation est une matrice jacobienne obtenue *via* un développement au premier ordre :

$$D(t) = \left[ \frac{\partial X_{oe}}{\partial X_{oem}} \right] \quad (\text{I.1.132})$$

3. une matrice de transition en éléments orbitaux moyens, définie comme une matrice de sensibilité de l'état final par rapport à l'état initial :

$$\delta X_{oem}(t) = \Phi_{oem}(t, t_0)\delta X_{oem}(t_0) \quad (\text{I.1.133})$$

4. deux matrices de transition peuvent ainsi être obtenues :  
– une matrice de transition en éléments moyens :

$$\Phi_m(t, t_0) = \Sigma(t)\Phi_{oem}(t, t_0)\Sigma^{-1}(t_0) \quad (\text{I.1.134})$$

- une matrice de transition en éléments osculateurs :

$$\Phi(t, t_0) = \Sigma(t)D(t)\Phi_{oem}(t, t_0)D^{-1}(t_0)\Sigma^{-1}(t_0) \quad (\text{I.1.135})$$

Aucun travail équivalent dans la littérature n'a été répertorié. Même si les comparaisons montrent la grande précision apportée par ces matrices, l'application en reste très restreinte. Ceci est dû notamment à la complexité analytique des expressions obtenues. En effet, cette matrice engendre des coûts importants en temps de calcul.

Les méthodes hybrides, bien que relativement récentes, ont d'ores et déjà permis de résoudre certains cas non traités par les méthodes classiques. L'intégration des perturbations s'y trouve, en effet, facilitée grâce aux équations de Gauss. Leur exploitation dans les problèmes de guidage et de commande est encore limitée, à cause de la complexité analytique des matrices de transition résultantes.

## 1.5 Conclusion

Nous avons identifié certains manques dans la littérature existante. Aucune référence ne propose le développement d'un modèle *général*, englobant les modèles existants et permettant de traiter tout type de perturbation. La linéarisation ainsi que les hypothèses simplificatrices interviennent généralement très tôt lors des développements. Nous proposons dans le chapitre suivant, une *methodologie* générale de synthèse de modèle linéaire d'état pour des orbites *elliptiques* et *perturbées*.

Une étape principale dans le développement de modèles à l'aide des méthodes hybrides est la construction des relations de passage entre les éléments orbitaux différentiels et les

---

coordonnées locales. Dans la littérature, les relations développées sont linéaires [16, 2, 25], car elles doivent être inversibles, et ne permettent la prise en compte de perturbations orbitales que rarement. La linéarisation est source d'erreurs lorsque les écarts chasseur/cible augmentent. Pour ces raisons, nous proposons une approche permettant de construire des transformations non linéaires et linéaires en considérant les perturbations orbitales. Ceci permettra d'évaluer la validité des transformations linéaires et l'incidence des hypothèses de simplification et linéarisation employées dans la littérature. Nous pouvons dès lors établir des domaines où la précision des matrices de transition sera assurée.

---



---

## Chapitre 2

# Synthèse de modèles du mouvement relatif

### Sommaire

---

<b>2.1 Objectifs</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>2.2 Développement d'un modèle linéaire de vol relatif</b> . . . . .	<b>58</b>
2.2.1 Accélération différentielle dans la base locale . . . . .	60
2.2.1.1 Vitesse de rotation de la base locale . . . . .	61
2.2.1.2 Vitesse différentielle dans la base locale . . . . .	63
2.2.1.3 Différence des accélérations dans la base locale . . . . .	64
2.2.2 Gravité différentielle . . . . .	66
2.2.2.1 Champ de potentiel $\vec{g}$ dans la base sphérique . . . . .	67
2.2.2.2 Champ de potentiel $\vec{g}$ dans la base locale . . . . .	69
2.2.3 Le modèle d'état . . . . .	71
<b>2.3 Application au cas circulaire képlérien</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>2.4 Application au cas elliptique képlérien</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>2.5 Application au cas elliptique perturbé</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>2.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>79</b>

---

## 2.1 Objectifs

L'étude bibliographique entreprise dans le chapitre précédent a permis de mettre en évidence certaines insuffisances dans la littérature relative aux modèles cartésiens du mouvement relatif. On peut remarquer notamment que :

- plusieurs modèles sont proposés, utilisant différentes hypothèses et approches, rendant la comparaison difficile ;
-

- les hypothèses sont posées très tôt dans les processus de développement, réduisant le champ de validité des modèles ;
- les perturbations sont rarement prises en compte ( $J_2$  et frottement atmosphérique) ;
- les développements techniques sont très spécifiques aux cas traités.

Afin de répondre à ces problématiques, nous proposons une démarche systématique de modélisation. La méthodologie proposée, *rigoureuse*, permet d'obtenir un modèle *général*, englobant tous les modèles existants dans la littérature. Par conséquent, ce modèle *s'adapte* à tout type de perturbations orbitales.

## 2.2 Développement d'un modèle linéaire de vol relatif

Soient deux satellites, la *cible* notée  $M_1$ , et le *chasseur* noté  $M_2$ . La trajectoire de la cible est identifiée par le jeu de paramètres orbitaux  $X_{oe_1} = [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ \nu]^t$ . Les paramètres orbitaux de la cible seront notés sans l'indice 1 afin d'alléger les expressions.

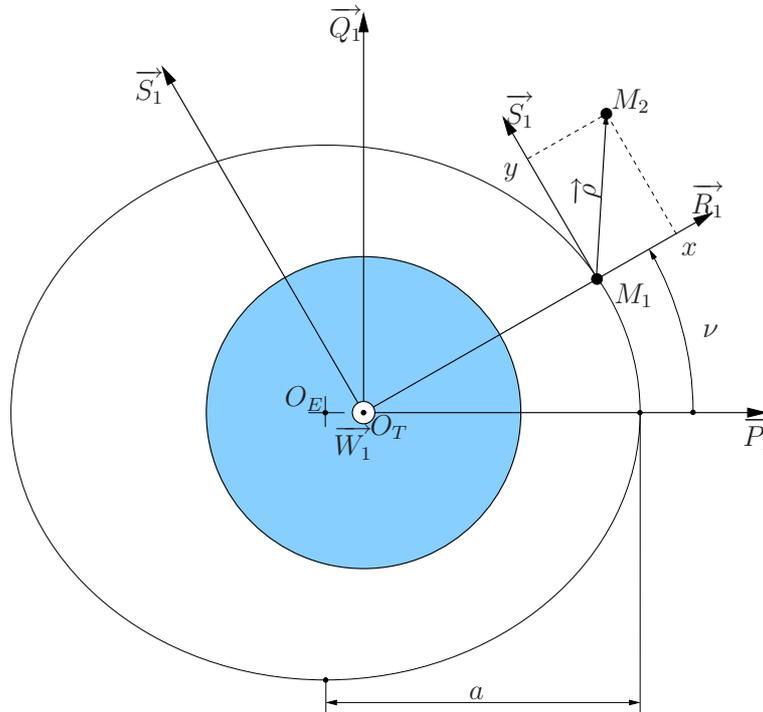


FIG. 2.1 – Paramétrage local du mouvement relatif

Le vecteur  $\vec{\rho} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  représente la position de  $M_2$  dans un repère local centré sur

$M_1$ . Nous allons utiliser deux bases pour décrire le mouvement relatif :

- la base locale  $\mathcal{B}_1 = [\vec{R}_1, \vec{S}_1, \vec{W}_1]$  et le repère  $\mathcal{R}_1 = [M_1, \vec{R}_1, \vec{S}_1, \vec{W}_1]$  pour le mouvement relatif ;
- la base inertielle  $\mathcal{B}_0 = [\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}]$  et le repère  $\mathcal{R}_0 = [O_T, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}]$  pour le mouvement absolu.

Le but de cette partie est d'établir le modèle linéaire d'état :

$$\dot{X}_{rsw}(t) = A_{rsw}(t)X_{rsw}(t) + B_{rsw}(t)U(t) \quad (\text{I.2.1})$$

tel que :

$$- X_{rsw} = \left[ \begin{array}{c} \vec{\rho} \\ \vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_1} \end{array} \right]_{\mathcal{B}_1}^t = \left[ \begin{array}{cccccc} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{array} \right]^t ;$$

$$- U = \left[ \begin{array}{ccc} u_r & u_s & u_w \end{array} \right]^t \text{ le vecteur de commande dans les trois directions } \vec{R}_1, \vec{S}_1 \text{ et } \vec{W}_1.$$

Tous les développements se feront dans la base  $\mathcal{B}_1$ , le passage vers les autres systèmes de référence se fait *via* des changements de base détaillés dans l'annexe A. La cible est considérée comme *inerte*.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique à  $M_1$  et  $M_2$  dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_0$  mène à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d^2 \overrightarrow{O_T M_1}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} = \vec{g}(M_1) + \vec{\gamma}_{p1} \\ \left( \frac{d^2 \overrightarrow{O_T M_2}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} = \vec{g}(M_2) + \vec{\gamma}_{p2} + \vec{a}_p \end{array} \right. \quad (\text{I.2.2})$$

$\vec{g}(M)$  étant l'accélération de gravitation,  $\vec{a}_p$  l'accélération de propulsion du chasseur et  $\vec{\gamma}_p$  rassemblant toutes les autres perturbations extérieures.

On en déduit la relation régissant le mouvement relatif :

$$\left( \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} = \vec{g}(M_2) - \vec{g}(M_1) + \vec{\gamma}_{p2} - \vec{\gamma}_{p1} + \vec{a}_p \quad (\text{I.2.3})$$

Soit :

$$\left( \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} = \delta \vec{g} + \vec{\gamma}_{p2} - \vec{\gamma}_{p1} + \vec{a}_p \quad (\text{I.2.4})$$

avec :

$$\delta \vec{g} = \vec{g}(M_2) - \vec{g}(M_1)$$

Afin de pouvoir légitimement linéariser les relations, nous posons une hypothèse sur les distances inter-satellites :

**Hypothèse 2.2.1** La distance inter-satellitaire est considérée comme faible devant la distance au corps central :  $\|\vec{\rho}\| \ll \|\vec{r}_1\|$  où  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_T M_1}$  et  $\vec{\rho} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ .

L'équation générale du mouvement relatif est donc donnée par :

$$\left( \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} = \delta \overrightarrow{g} + \overrightarrow{\gamma}_{p2} - \overrightarrow{\gamma}_{p1} + \overrightarrow{a}_p \quad (\text{I.2.5})$$

$\left( \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0}$  est la différence des accélérations absolues dans la base inertielle. Cette accélération doit être exprimée dans la base locale. Dans la suite, nous établissons également la gravitation différentielle  $\delta \overrightarrow{g}$ , et l'effet des perturbations différentielles  $\overrightarrow{\gamma}_{p2} - \overrightarrow{\gamma}_{p1}$ .

### 2.2.1 Accélération différentielle dans la base locale

L'objet de cette partie est d'explicitier le terme  $\left( \frac{d^2 \overrightarrow{\rho}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} = \left( \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0}$  dans la base locale  $\mathcal{B}_1$ . La base locale  $\mathcal{B}_1$  étant en rotation par rapport à  $\mathcal{B}_0$ , il est nécessaire de faire appel la loi de composition des accélérations que l'on peut trouver entre-autres dans [14], tome 1 :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 \overrightarrow{O_T M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} &= \left( \frac{d^2 \overrightarrow{O_T M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_1} + \left( \frac{d \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} \wedge \overrightarrow{O_T M} + 2 \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \frac{d \overrightarrow{O_T M}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \\ &\quad \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \overrightarrow{O_T M} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.2.6})$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0}$  est le vecteur vitesse de rotation de  $\mathcal{B}_1$  par rapport à  $\mathcal{B}_0$  ;
- $\left( \frac{d \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} \wedge \overrightarrow{O_T M}$  est l'accélération d'Euler ;
- $2 \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \frac{d \overrightarrow{O_T M}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1}$  est l'accélération de Coriolis ;
- $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \overrightarrow{O_T M} \right)$  est l'accélération centrifuge.

Dans la base locale :

$$\overrightarrow{\rho} = x \overrightarrow{R}_1 + y \overrightarrow{S}_1 + z \overrightarrow{W}_1$$

et l'équation précédente s'écrit en relatif :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 \overrightarrow{\rho}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_0} &= \left( \frac{d^2 \overrightarrow{\rho}}{dt^2} \right)_{\mathcal{B}_1} + \left( \frac{d \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} \wedge \overrightarrow{\rho} + 2 \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \frac{d \overrightarrow{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \\ &\quad \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \overrightarrow{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.2.7})$$

La première étape fondamentale consiste à calculer le vecteur rotation associé à la base locale  $\mathcal{B}_1$ . Ce calcul a pu d'ailleurs donner lieu à de nombreuses variantes plus ou moins rigoureuses dans la littérature.

### 2.2.1.1 Vitesse de rotation de la base locale

La référence [52] propose le calcul général de ce vecteur de rotation dans le cas d'une orbite elliptique perturbée :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} = \dot{\Omega} \vec{K} + \dot{i} \vec{x}_i + \dot{\alpha}_\nu \vec{W}_1 \quad (\text{I.2.8})$$

Les différents vecteurs sont définis dans la base locale  $\mathcal{B}_1$  par :

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \sin i \sin \theta \vec{R}_1 + \sin i \cos \theta \vec{S}_1 + \cos i \vec{W}_1 \\ \vec{x}_i &= \cos \theta \vec{R}_1 - \sin \theta \vec{S}_1 \end{aligned} \quad (\text{I.2.9})$$

On obtient donc les composantes du vecteur rotation dans la base locale  $\mathcal{B}_1$  :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} &= \omega_R \vec{R}_1 + \omega_S \vec{S}_1 + \omega_W \vec{W}_1 \\ &= (\dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta) \vec{R}_1 + (\dot{\Omega} \sin i \cos \theta - \dot{i} \sin \theta) \vec{S}_1 + (\dot{\Omega} \cos i + \dot{\alpha}_\nu) \vec{W}_1 \end{aligned} \quad (\text{I.2.10})$$

La simplification de cette expression se fonde sur la définition des éléments orbitaux osculateurs (voir annexe B). Etant donnés deux satellites  $M_k$  et  $M$  ayant la même position et vitesse à un instant donnée, la trajectoire de  $M_k$  supposée képlérienne, alors que celle de  $M$  est supposée perturbée. On peut donc écrire :

$$\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0} = \vec{V}_{M_k/\mathcal{R}_0}$$

Le vecteur vitesse du satellite képlérien a pour expression :

$$\vec{V}_{M_k/\mathcal{R}_0} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \nu}{1 - e^2}} \vec{T}$$

$\vec{T}$  étant le vecteur tangentiel à la trajectoire.

Soit, dans la base  $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$  :

$$\vec{V}_{M_k/\mathcal{R}_0} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \nu}{1 - e^2}} \left( -\sin \gamma \vec{R} + \cos \gamma \vec{S} \right)$$

où :

$$\cos \gamma = \frac{1 + e \cos \nu}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}} \quad \sin \gamma = -\frac{e \sin \nu}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}_{M_k/\mathcal{R}_0} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left( (e \sin \nu) \vec{R} + (1 + e \cos \nu) \vec{S} \right)} \quad (\text{I.2.11})$$

Pour établir l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0}$ , la dérivation vectorielle est utilisée en tenant compte des perturbations, en utilisant l'expression *complète* de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0}$  :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M/\mathcal{R}_0} &= \left( \frac{d\overrightarrow{O_T M}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} \\ &= \left( \frac{d\overrightarrow{O_T M}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \overrightarrow{O_T M} \end{aligned}$$

avec :

$$\overrightarrow{O_T M} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \vec{R}$$

et :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} = \dot{\Omega} \vec{K} + \dot{i} \vec{x}_i + \dot{\alpha}_\nu \vec{W}$$

Pour le calcul du terme  $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \overrightarrow{O_T M}$ , l'expression (I.2.10) permet d'aboutir à :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \overrightarrow{O_T M} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \left\{ \left( \dot{\Omega} \cos i + \dot{\alpha}_\nu \right) \vec{S}_1 - \left( \dot{\Omega} \sin i \cos \alpha_\nu - \dot{i} \sin \alpha_\nu \right) \vec{W}_1 \right\}$$

Le calcul de  $\left( \frac{d\overrightarrow{O_T M}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1}$  donne :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\overrightarrow{O_T M}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} &= \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \right) \right) \vec{R}_1 \\ &= \left( \frac{1-e^2}{1+e \cos \nu} \frac{da}{dt} - \left( \frac{2ae}{1+e \cos \nu} + \frac{a(1-e^2) \cos \nu}{(1+e \cos \nu)^2} \right) \frac{de}{dt} + \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{ae(1-e^2) \sin \nu}{(1+e \cos \nu)^2} \frac{d\nu}{dt} \right) \vec{R}_1 \end{aligned}$$

L'expression de la vitesse perturbée  $\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0}$  dans la base  $(\vec{R}_1, \vec{S}_1, \vec{W}_1)$  est donc :

$$\boxed{\vec{V}_{M/\mathcal{R}_0} = \left( \begin{array}{c} \frac{1-e^2}{1+e \cos \nu} \frac{da}{dt} + \frac{ae(1-e^2) \sin \nu}{(1+e \cos \nu)^2} \frac{d\nu}{dt} \\ - \left( \frac{2ae}{1+e \cos \nu} + \frac{a(1-e^2) \cos \nu}{(1+e \cos \nu)^2} \right) \frac{de}{dt} \end{array} \right) \vec{R}_1} \quad (\text{I.2.12})$$

$$+ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \left( \dot{\Omega} \cos i + \dot{\alpha}_\nu \right) \vec{S}_1$$

$$- \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \left( \dot{\Omega} \sin i \cos \alpha_\nu - \dot{i} \sin \alpha_\nu \right) \vec{W}_1$$

La nécessaire égalité des vitesses képlérienne (I.2.11) et perturbée (I.2.12), projetée dans la base  $\mathcal{B}_1$ , conduit aux trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1-e^2}{1+e\cos\nu} \frac{da}{dt} - \left( \frac{2ae}{1+e\cos\nu} + \frac{a(1-e^2)\cos\nu}{(1+e\cos\nu)^2} \right) \frac{de}{dt} \cdots \\ & \cdots + \frac{ae(1-e^2)\sin\nu}{(1+e\cos\nu)^2} \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (e\sin\nu) \end{aligned} \quad (\text{I.2.13})$$

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu} \left( \dot{\Omega} \cos i + \dot{\alpha}_\nu \right) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (1+e\cos\nu) \quad (\text{I.2.14})$$

$$- \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu} \left( \dot{\Omega} \sin i \cos \alpha_\nu - \dot{i} \sin \alpha_\nu \right) = 0 \quad (\text{I.2.15})$$

La relation (I.2.15) induit :

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} \sin i \cos \alpha_\nu - \frac{di}{dt} \sin \alpha_\nu = 0} \quad (\text{I.2.16})$$

La relation (I.2.14) induit :

$$\boxed{\left( \frac{d\Omega}{dt} \cos i + \frac{d\alpha_\nu}{dt} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}} \quad (\text{I.2.17})$$

Les conséquences sur le vecteur  $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0}$  sont qu'en injectant les relations (I.2.16) et (I.2.17) dans l'expression générale (I.2.10) de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0}$ , on obtient :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} = \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \vec{R}_1 + \left( \dot{\Omega} \cos i + \dot{\alpha}_\nu \right) \vec{W}_1} \quad (\text{I.2.18})$$

En d'autres termes :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} = \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \vec{R}_1 + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \vec{W}_1} \quad (\text{I.2.19})$$

### 2.2.1.2 Vitesse différentielle dans la base locale

Dans ce qui suit le terme  $\left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0}$  est exprimé dans la base locale. La différence des vitesses inertielles de la référence et du chasseur, exprimée dans la base locale s'obtient à l'aide de la relation de la dérivation vectorielle [52] :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_0} - \vec{V}_{M_1/\mathcal{R}_0} &= \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} \\ &= \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \vec{\rho} \end{aligned} \quad (\text{I.2.20})$$

Rappelons que :

$$\vec{\rho} = x \vec{R}_1 + y \vec{S}_1 + z \vec{W}_1$$

et que :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} = \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \vec{R}_1 + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \vec{W}_1$$

Cela mène à l'expression de la vitesse différentielle inertielle dans la base locale :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_0} - \vec{V}_{M_1/\mathcal{R}_0} &= \left( \dot{x} - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} y \right) \vec{R}_1 \\ &+ \left( \dot{y} + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} x - \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) z \right) \vec{S}_1 \\ &+ \left( \dot{z} + \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) y \right) \vec{W}_1 \end{aligned} \quad (\text{I.2.21})$$

### 2.2.1.3 Différence des accélérations dans la base locale

Dans ce qui suit, le terme  $\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} \right]_{\mathcal{B}_0}$  est exprimé dans la base locale.

La différence des accélérations inertielles s'obtient à l'aide de la dérivation de la vitesse différentielle dans la base inertielle :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M_2/\mathcal{R}_0) - \vec{\Gamma}(M_1/\mathcal{R}_0) &= \left( \frac{d\vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} - \left( \frac{d\vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} \\ &= \left( \frac{d \left( \vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0) - \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0) \right)}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} \\ &= \left( \frac{d \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.2.22})$$

A partir de 1.2.21 on écrit :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} &= \begin{pmatrix} \ddot{x} - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{y} \\ + y \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^5}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{a} \\ - y \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{2(1+e \cos \nu)(-e \sin \nu)}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{\nu} \\ - y \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1+e \cos \nu}{(1-e^2)^{5/2}} (2 \cos \nu + (3+e \cos \nu)e) \dot{e} \end{pmatrix} \vec{R}_1 \\
&+ \begin{pmatrix} \ddot{y} + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{x} \\ - x \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^5}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{a} \\ + x \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{2(1+e \cos \nu)(-e \sin \nu)}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{\nu} \\ + x \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1+e \cos \nu}{(1-e^2)^{5/2}} (2 \cos \nu + (3+e \cos \nu)e) \dot{e} \\ - \left( \ddot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{\Omega} \dot{i} \cos i \sin \alpha_\nu + \ddot{i} \cos \alpha_\nu \right) z \\ - \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \dot{z} \end{pmatrix} \vec{S}_1 \\
&+ \begin{pmatrix} \ddot{z} + \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \dot{y} \\ + \left( \ddot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{\Omega} \dot{i} \cos i \sin \alpha_\nu + \ddot{i} \cos \alpha_\nu \right) y \end{pmatrix} \vec{W}_1
\end{aligned} \tag{I.2.23}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \wedge \left( \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} &= -\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \dot{y} + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} x \\ - \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) z \end{pmatrix} \vec{R}_1 \\
&+ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \left( \dot{x} - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} y \right) \\ - \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \dot{z} \\ + \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right)^2 y \end{pmatrix} \vec{S}_1 \\
&+ \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \begin{pmatrix} \dot{y} + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} x \\ - \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) z \end{pmatrix} \vec{W}_1
\end{aligned} \tag{I.2.24}$$

Finalement, les composantes dans la base locale  $B_1$  de la différence des accélérations inertielles sont :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}\right)_{B_0} \cdot \vec{R}_1 &= \ddot{x} - 2\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{y} - \frac{\mu}{a^3} \frac{(1+e\cos\nu)^4}{(1-e^2)^3} x \\ &+ \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1+e\cos\nu}{(1-e^2)^{3/2}} \left( \begin{array}{c} \frac{3}{2a} (1+e\cos\nu) \dot{a} \\ + 2e\sin\nu \dot{\nu} \\ - \frac{2\cos\nu + (3+e\cos\nu)e}{1-e^2} \dot{e} \end{array} \right) y \\ &+ \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}\right)_{B_0} \cdot \vec{S}_1 &= \ddot{y} + 2\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{x} - \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \dot{z} \\ &- \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1+e\cos\nu}{(1-e^2)^{3/2}} \left( \begin{array}{c} \frac{3}{2a} (1+e\cos\nu) \dot{a} \\ + 2e\sin\nu \dot{\nu} \\ - \frac{2\cos\nu + (3+e\cos\nu)e}{1-e^2} \dot{e} \end{array} \right) x \\ &- \left( \frac{\mu}{a^3} \frac{(1+e\cos\nu)^4}{(1-e^2)^3} + \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right)^2 \right) y \\ &- \left( \ddot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \ddot{\Omega} \dot{i} \cos i \sin \alpha_\nu + \ddot{i} \cos \alpha_\nu \right) z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}\right)_{B_0} \cdot \vec{W}_1 &= \ddot{z} + 2 \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \dot{y} \\ &+ \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right) \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} x \\ &+ \left( \ddot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \ddot{\Omega} \dot{i} \cos i \sin \alpha_\nu + \ddot{i} \cos \alpha_\nu \right) y \\ &- \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \alpha_\nu + \dot{i} \cos \alpha_\nu \right)^2 z \end{aligned}$$

Le terme gauche de l'équation (I.2.5) étant complètement défini, on s'intéresse maintenant à la partie droite.

## 2.2.2 Gravité différentielle

En considérant un déplacement infinitésimal  $\delta\overline{O_T M} = \delta x \vec{R}_1 + \delta y \vec{S}_1 + \delta z \vec{W}_1$  par rapport à un point  $M$  de référence, l'expression du terme  $\delta\vec{g}$  peut être obtenue en considérant la différentielle du champ de vecteur  $\vec{g}$  :

$$\delta\vec{g} = \nabla\vec{g} \delta\overline{O_T M}$$

où  $\nabla \vec{g}$  est la matrice gradient du champ de vecteur  $\vec{g}$  qui dérive d'un potentiel scalaire  $U(M)$ .

$$\vec{g}(M) = \nabla U(M)$$

Finalement :

$$\boxed{\delta \vec{g} = (\nabla \vec{g})_{\mathcal{B}_1} \vec{\rho}} \quad (\text{I.2.25})$$

Dans le paragraphe suivant, nous écrivons l'expression du champ gravitationnel terrestre en coordonnées sphériques, puis en coordonnées locales en posant quelques hypothèses simplificatrices pour la linéarisation.

### 2.2.2.1 Champ de potentiel $\vec{g}$ dans la base sphérique

Soit la base sphérique  $\mathcal{B}_s$  associée à la base locale  $\mathcal{B}_1$  telle que :

$$\mathcal{B}_s = \left( \vec{R}_1, \vec{x}_\varphi, \vec{y}_\varphi \right) \quad (\text{I.2.26})$$

Avec :

- $\varphi$  est la colatitude courante (angle entre l'axe polaire  $(O_T \vec{K})$  et le rayon vecteur courant  $\overrightarrow{O_T M}$ );
- $\psi$  est la latitude courante (angle entre l'axe  $(O_T \vec{I})$  et la projection du rayon vecteur courant  $\overrightarrow{O_T M}$  dans le plan équatorial (cf. figure 2.2.2.1 et l'annexe A).

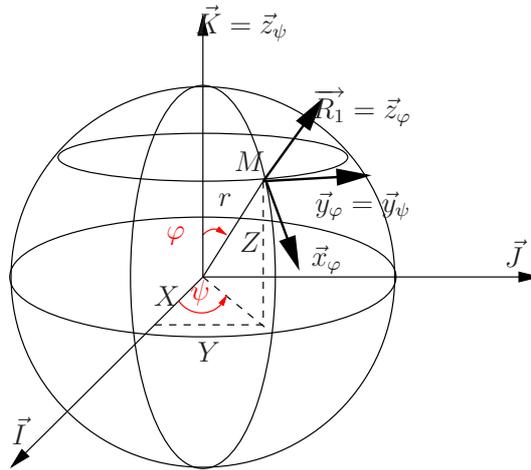


FIG. 2.2 – Définition des coordonnées sphériques

Par convention (cf. [4]), le champ gravitationnel au point  $M$  sera noté :

$$\vec{g}(M) = g_r \vec{R}_1 + g_\varphi \vec{x}_\varphi + g_\psi \vec{y}_\varphi = g_r \vec{R}_1 + g_\varphi \vec{x}_\varphi + g_\psi \vec{y}_\varphi \quad (\text{I.2.27})$$

Dans le cas général, le champ de potentiel  $\vec{g}$  se décompose dans la base sphérique  $B_s$  :

$$\vec{g} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{R}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{x}_\varphi + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \psi} \vec{y}_\psi \quad (\text{I.2.28})$$

Dans les développements ultérieurs, nous considérons l'une des deux hypothèses suivantes :

**Hypothèse 2.2.2** *La Terre est un ellipsoïde de révolution d'axe ( $O_T \vec{K}$ ) et la plus grande hétérogénéité de répartition des masses est due à l'aplatissement des pôles [42], [13].*

Le potentiel terrestre s'écrit alors :

$$U_a(M) = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu R_{eq}^2 J_2}{r^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right) \quad (\text{I.2.29})$$

où :

- $R_{eq}$  est le rayon équatorial de la Terre ;
- $J_2$  est une constante adimensionnelle issue de la décomposition harmonique du potentiel gravitationnel dont la valeur approximative est  $1,082629 \cdot 10^{-3}$ .

Ceci conduit à un premier constat dû à la symétrie est/ouest supposée de la Terre :

$$g_\psi = 0$$

Cette hypothèse mène à l'expression de  $\vec{g}$  dans la base sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{g} &= - \left( \frac{\mu}{r^2} + 3 \frac{\mu R_{eq}^2 J_2}{r^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right) \right) \vec{R}_1 + \frac{\mu R_{eq}^2 J_2}{r^4} (3 \sin \varphi \cos \varphi) \vec{x}_\varphi \\ &= - \frac{\mu}{r^2} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right) \vec{R}_1 - \frac{R_{eq}^2 J_2}{r^2} (3 \sin \varphi \cos \varphi) \vec{x}_\varphi \right] \\ &= - \frac{\mu}{r^2} \vec{R}_1 - \underbrace{\frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^4} \left( (1 - 3 \cos^2 \varphi) \vec{R}_1 - (2 \sin \varphi \cos \varphi) \vec{x}_\varphi \right)}_{\vec{J}_2} \end{aligned} \quad (\text{I.2.30})$$

Dans le cas simplifié où la Terre est considérée comme un corps homogène et sphérique, cette expression se simplifie.

**Hypothèse 2.2.3** *La Terre est un corps sphérique homogène. Le potentiel terrestre s'écrit alors comme un cas particulier du cas précédent :*

$$U_s(M) = \frac{\mu}{r} \quad (\text{I.2.31})$$

Cela conduit à une expression de  $\vec{g}$  dans la base sphérique donnée par :

$$\vec{g} = - \frac{\mu}{r^2} \vec{R}_1 \quad (\text{I.2.32})$$

### 2.2.2.2 Champ de potentiel $\vec{g}$ dans la base locale

Dans le cas où l'on se place sous l'hypothèse 2.2.3, un développement supplémentaire doit être opéré pour exprimer  $\delta\vec{g}$  dans la base locale.

On a :

$$\delta\vec{g} = \nabla\vec{g} \delta\overline{O_T M} = -\frac{\mu}{r^2} \delta\vec{R}_1 + 2\frac{\mu \delta r}{r^3} \vec{R}_1 + \delta\vec{J}_2 \quad (\text{I.2.33})$$

On sait que :

$$\vec{x}_\varphi = \cos \psi \vec{S}_1 - \sin \psi \vec{W}_1$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \vec{J}_2 &= -\frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^4} \left( (1 - 3 \cos^2 \varphi) \vec{R}_1 - (2 \sin \varphi \cos \varphi) \left( \cos \psi \vec{S}_1 - \sin \psi \vec{W}_1 \right) \right) \\ &= -\frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^4} \left( (1 - 3 \cos^2 \varphi) \vec{R}_1 - 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi \vec{S}_1 + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \vec{W}_1 \right) \quad (\text{I.2.34}) \\ &= -\frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^4} \left( (1 - 3 \cos^2 \varphi) \vec{R}_1 - 2 (\sin \varphi \cos \psi) (\cos \varphi) \vec{S}_1 + 2 (\sin \varphi \sin \psi) (\cos \varphi) \vec{W}_1 \right) \end{aligned}$$

A partir de l'expression du vecteur  $\vec{K}$  dans la base locale  $[\vec{R}_1, \vec{S}_1, \vec{W}_1]$  par l'intermédiaire des angles *géométriques* :

$$\vec{K} = \cos \varphi \vec{R}_1 - \sin \varphi \cos \psi \vec{S}_1 + \sin \varphi \sin \psi \vec{W}_1 \quad (\text{I.2.35})$$

et par comparaison avec l'expression du même vecteur dans la base locale  $B_1$  par l'intermédiaire des angles *orbitaux* :

$$\vec{K} = \sin i \sin \theta \vec{R}_1 + \sin i \cos \theta \vec{S}_1 + \cos i \vec{W}_1 \quad (\text{I.2.36})$$

on peut écrire :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \sin i \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \psi = \cos i \\ \sin \varphi \cos \psi = -\sin i \cos \theta \end{cases} \quad (\text{I.2.37})$$

et on en déduit :

$$\vec{J}_2 = -\frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^4} \left( (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta) \vec{R}_1 + 2 \sin^2 i \cos \theta \sin \theta \vec{S}_1 + 2 \cos i \sin i \sin \theta \vec{W}_1 \right) \quad (\text{I.2.38})$$

$$\vec{g} = -\frac{\mu}{r^2} \vec{R}_1 - \frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^4} \left( (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta) \vec{R}_1 + 2 \sin^2 i \cos \theta \sin \theta \vec{S}_1 + 2 \cos i \sin i \sin \theta \vec{W}_1 \right) \quad (\text{I.2.39})$$

On doit calculer la matrice gradient de  $\vec{J}_2$  qui est définie par la relation :

$$\delta\vec{J}_2 = \nabla\vec{J}_2 \delta\overline{O_T M} \quad (\text{I.2.40})$$

où :

$$\overrightarrow{\delta O_T M} = \delta r \overrightarrow{R_1} + r \delta \overrightarrow{R_1} \quad \text{et} \quad \delta \overrightarrow{R_1} = \delta \vec{\Omega}_{B_1/B_0} \wedge \overrightarrow{R_1}$$

Le vecteur rotation élémentaire est donné par :

$$\delta \vec{\Omega}_{B_1/B_0} = \delta \Omega \vec{K} + \delta i \vec{x}_i + \delta \theta \overrightarrow{W_1} \quad (\text{I.2.41})$$

On obtient donc

$$\delta \overrightarrow{R_1} = (\delta \Omega \cos i + \delta \theta) \overrightarrow{S_1} + (\delta i \sin \theta - \delta \Omega \sin i \cos \theta) \overrightarrow{W_1} \quad (\text{I.2.42})$$

Cela permet d'écrire :

$$\overrightarrow{\delta O_T M} = \delta r \overrightarrow{R_1} + r(\delta \Omega \cos i + \delta \theta) \overrightarrow{S_1} + r(\delta i \sin \theta - \delta \Omega \sin i \cos \theta) \overrightarrow{W_1} \quad (\text{I.2.43})$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \overrightarrow{S_1} &= -(\delta \Omega \cos i + \delta \theta) \overrightarrow{R_1} + (\delta \Omega \sin i \sin \theta + \delta i \cos \theta) \overrightarrow{W_1} \\ \delta \overrightarrow{W_1} &= (\delta \Omega \sin i \cos \theta - \delta i \sin \theta) \overrightarrow{R_1} - (\delta \Omega \sin i \sin \theta + \delta i \cos \theta) \overrightarrow{S_1} \end{aligned} \quad (\text{I.2.44})$$

On a :

$$\delta \vec{J}_2 = -\frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^5} \left( -4 \delta r \vec{V} + r \delta \vec{V} \right) \quad (\text{I.2.45})$$

avec :

$$\vec{V} = (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta) \overrightarrow{R_1} + 2 \sin^2 i \sin \theta \cos \theta \overrightarrow{S_1} + 2 \cos i \sin i \sin \theta \overrightarrow{W_1} \quad (\text{I.2.46})$$

Après calculs, on obtient alors :

$$\begin{aligned} r \delta \vec{V} &= \begin{bmatrix} -4 \sin 2i \sin \theta r \sin \theta \delta i \\ -4 \sin^2 i \sin 2\theta r \delta \theta \end{bmatrix} \overrightarrow{R_1} + \begin{bmatrix} \sin 2i \cos \theta r \sin \theta \delta i \\ +(1 + 2 \sin^2 i - 7 \sin^2 i \sin^2 \theta) r \delta \theta \\ +(1 - 5 \sin^2 i \sin^2 \theta) r \cos i \delta \Omega \end{bmatrix} \overrightarrow{S_1} \\ &+ \begin{bmatrix} (5 \sin^2 i \sin^2 \theta - 1) r \sin i \cos \theta \delta \Omega \\ +(-5 \sin^2 i \sin^2 \theta + 3 - 2 \sin^2 i) r \sin \theta \delta i \\ + \sin 2i \cos \theta r \delta \theta \end{bmatrix} \overrightarrow{W_1} \end{aligned} \quad (\text{I.2.47})$$

Par identification, on aboutit à :

$$\delta \vec{J}_2 = 6 \frac{R_{eq}^2 \mu J_2}{r^5} G \delta \overrightarrow{O_T M} \quad (\text{I.2.48})$$

où la matrice  $G$  est donnée par :

$$G = \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta & \sin 2\theta \sin^2 i & \frac{\sin \theta \sin 2i}{\sin 2i \cos \theta} \\ \sin 2\theta \sin^2 i & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{7}{4} \sin^2 i \sin^2 \theta & -\frac{1}{4} \\ \sin \theta \sin 2i & -\frac{\sin 2i \cos \theta}{4} & -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{5}{4} \sin^2 i \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.49})$$

La matrice gradient associée au  $J_2$  est donc :

$$\nabla \vec{J}_2 = 6 \frac{R_{eq}^2 \mu J_2}{r^5} G \quad (\text{I.2.50})$$

En reprenant l'expression globale du gradient de gravité, on obtient finalement :

$$\delta \vec{g} = (\nabla \vec{g})_{B_h} \delta \overrightarrow{O_T M} = \left[ \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 6 \frac{R_{eq}^2 \mu J_2}{r^5} G \right] \delta \overrightarrow{O_T M} \quad (\text{I.2.51})$$

et la matrice gradient du champ gravitationnel :

$$\left( \nabla \vec{g} \right)_{B_h} = \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 6 \frac{R_{eq}^2 \mu J_2}{r^5} \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta & \sin 2\theta \sin^2 i & \sin \theta \sin 2i \\ \sin 2\theta \sin^2 i & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{7}{4} \sin^2 i \sin^2 \theta & -\frac{\sin 2i \cos \theta}{4} \\ \sin \theta \sin 2i & -\frac{\sin 2i \cos \theta}{4} & -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{5}{4} \sin^2 i \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.52})$$

### 2.2.3 Le modèle d'état

Une synthèse des calculs effectués précédemment est donnée ici. Il s'agit d'un modèle de mouvement relatif de deux satellites tels que :

- l'orbite de la cible est elliptique et perturbée;
- les distances inter-satellites sont faibles devant les distances avec la Terre;
- les équations de Gauss sont utilisées pour calculer les dérivées des éléments orbitaux de la cible intervenant dans le modèle  $[\dot{a}, \dot{e}, \dot{i}, \dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{\nu}]$ .

Le modèle d'état est repris dans la page suivante :

$$\frac{dX_{rsw}}{dt} = \left[ \begin{array}{c|c} 0_3 & I_3 \\ \hline A_{\Gamma 1} + A_{G0} & A_{\Gamma 2} \end{array} \right] X_{rsw} + U$$

$$X_{rsw} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^t = \left[ \begin{array}{c} \vec{\rho} \\ \vec{V}(M_2/\mathcal{R}_1) \end{array} \right]_{B_1}^t, \quad U = [0 \ 0 \ 0 \ a_{p_x} \ a_{p_y} \ a_{p_z}]^t$$

$$A_{\Gamma 1} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu) & -\sqrt{\frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu)} \left( \begin{array}{c} \frac{3}{2a} \dot{a} + 2 \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \dot{\nu} \\ -\frac{2 \cos \nu + (3 + e \cos \nu) e}{(1 - e^2)(1 + e \cos \nu)} \dot{e} \end{array} \right) & -\sqrt{\frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu)} \left( \begin{array}{c} \dot{\Omega} \sin i \sin \theta \\ + \dot{i} \cos \theta \end{array} \right) \\ \sqrt{\frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu)} \left( \begin{array}{c} \frac{3}{2a} \dot{a} + 2 \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \dot{\nu} \\ -\frac{2 \cos \nu + (3 + e \cos \nu) e}{(1 - e^2)(1 + e \cos \nu)} \dot{e} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu) \\ + \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta \right)^2 \end{array} \right) & \dot{\theta} \left( \dot{i} \sin \theta - \dot{\Omega} \sin i \cos \theta \right) \\ -\sqrt{\frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu)} \left( \begin{array}{c} \dot{\Omega} \sin i \sin \theta \\ + \dot{i} \cos \theta \end{array} \right) & -\dot{\theta} \left( \dot{i} \sin \theta - \dot{\Omega} \sin i \cos \theta \right) & \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta \right)^2 \end{array} \right]$$

$$A_{\Gamma 2} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 2\sqrt{\frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu)} & 0 \\ -2\sqrt{\frac{\mu}{r_1^3} (1 + e \cos \nu)} & 0 & \left( \begin{array}{c} \dot{\Omega} \sin i \sin \theta \\ + \dot{i} \cos \theta \end{array} \right) \\ 0 & -2 \left( \begin{array}{c} \dot{\Omega} \sin i \sin \theta \\ + \dot{i} \cos \theta \end{array} \right) & 0 \end{array} \right], \quad A_{G0} = \frac{\mu}{r_1^3} \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

## 2.3 Application au cas circulaire képlérien

Sous les hypothèses 1.3.1, la relation (I.2.4) devient :

$$\left(\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2}\right)_{\mathcal{B}_0} = \delta \vec{g} + \vec{a}_p \quad (\text{I.2.53})$$

Les hypothèses képlériennes et 1.3.1 permettent de déduire :

$$\dot{\nu} = n = cste$$

L'accélération différentielle est donc donnée par :

$$\left(\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2}\right)_{\mathcal{B}_0} = \left[ \begin{array}{c} \ddot{x} - \dot{\nu}y - 2\nu\dot{y} - \dot{\nu}^2x \\ \ddot{y} + \dot{\nu}x + 2\nu\dot{x} - \dot{\nu}^2y \\ \ddot{z} \end{array} \right]_{\mathcal{B}_1} \quad (\text{I.2.54})$$

On obtient donc :

$$\boxed{\left(\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2}\right)_{\mathcal{B}_0} = \left[ (\ddot{x} - 2\dot{y}n - x n^2) \vec{R}_1 + (\ddot{y} + 2\dot{x}n - y n^2) \vec{S}_1 + \ddot{z} \vec{W}_1 \right]} \quad (\text{I.2.55})$$

L'utilisation du système d'hypothèses 1.3.1 conduit à retrouver la première partie de l'expression donnée dans l'équation (I.2.52) :

$$(\nabla \vec{g})_{\mathcal{B}_1} = \frac{\mu}{a^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.56})$$

On en déduit que :

$$\boxed{\delta \vec{g} = \frac{\mu}{a^3} \left( 2x \vec{R}_1 - y \vec{S}_1 - z \vec{W}_1 \right)} \quad (\text{I.2.57})$$

L'introduction des expressions (I.2.55) et (I.2.57) dans la relation générale (I.2.53) puis la projection sur les axes locaux  $[\vec{R}_1, \vec{S}_1, \vec{W}_1]$  conduit au système :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2n\dot{y} + 3n^2x + a_x \\ \ddot{y} = -2n\dot{x} + a_y \\ \ddot{z} = -n^2z + a_z \end{cases} \quad (\text{I.2.58})$$

On retrouve ainsi les **équations de Hill-Clohessy-Wiltshire** :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 2n\dot{y} + 3n^2x + a_x \\ \ddot{y} = -2n\dot{x} + a_y \\ \ddot{z} = -n^2z + a_z \end{cases}} \quad (\text{I.2.59})$$

Ces équations sont mises sous forme d'état :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_{HCW} X(t) + B_{HCW} a_p(t)$$

avec :

$$A_{HCW} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{HCW} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.60})$$

## 2.4 Application au cas elliptique képlérien

Sous les hypothèses 1.3.2, la relation (I.2.4) devient :

$$\left( \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} \right)_{B_0} = \delta \vec{g} + \vec{a}_p \quad (\text{I.2.61})$$

L'hypothèse d'une trajectoire elliptique de la cible induit que la vitesse de variation de l'anomalie vraie  $\dot{\nu}$  n'est plus constante :

$$\dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (\text{I.2.62})$$

d'où :

$$\ddot{\nu} = \frac{d\dot{\nu}}{dt} = \frac{d\dot{\nu}}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = -n^2 \frac{2e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \quad (\text{I.2.63})$$

L'accélération différentielle absolue dans la base locale est donc donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} \left( \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} \right)_{B_0} &= \left( \ddot{x} - 2n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \dot{y} + n^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} [2e \sin \nu y - (1 + e \cos \nu)x] \right) \vec{R}_1 \\ &\quad \left( \ddot{y} + 2n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \dot{x} - n^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} [2e \sin \nu x + (1 + e \cos \nu)y] \right) \vec{S}_1 \\ &\quad + \ddot{z} \vec{W}_1 \end{aligned}} \quad (\text{I.2.64})$$

Le potentiel gravitationnel devient :

$$(\nabla \vec{g})_{B_1} = \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.65})$$

En y insérant l'expression de  $r$  pour les orbites elliptiques :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{I.2.66})$$

on obtient :

$$(\nabla \vec{g})_{B_1} = \frac{\mu (1 + e \cos \nu)^3}{a^3 (1 - e^2)^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = n^2 \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.67})$$

A partir des expressions (I.2.67) et (I.2.25), on déduit que :

$$\boxed{\delta \vec{g} = n^2 \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 (2x \vec{R}_1 - y \vec{S}_1 - z \vec{W}_1)} \quad (\text{I.2.68})$$

L'introduction des expressions (I.2.64) et (I.2.68) dans la relation générale (I.2.61) puis la projection sur les axes  $[\vec{R}_1, \vec{S}_1, \vec{W}_1]$  de la base locale  $B_1$  conduit aux **équations de Tschauner-Hempel** :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \dot{y} - 2n^2 e \sin \nu \frac{(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} y + n^2 \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 (3 + e \cos \nu) x + a_x \\ \ddot{y} = -2n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \dot{x} + 2n^2 e \sin \nu \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 x + n^2 \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 (e \cos \nu) y + a_y \\ \ddot{z} = -n^2 \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 z + a_z \end{cases} \quad (\text{I.2.69})$$

Le système (I.2.69) peut alors être mis sous la forme :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_{TH} X(t) + B_{TH} a_p(t)$$



où :

$$G = \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta & \sin 2\theta \sin^2 i & \frac{\sin \theta \sin 2i}{\sin 2i \cos \theta} \\ \sin 2\theta \sin^2 i & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{7}{4} \sin^2 i \sin^2 \theta & -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{5}{4} \sin^2 i \sin^2 \theta \\ \sin \theta \sin 2i & -\frac{\sin 2i \cos \theta}{4} & \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.73})$$

On reprend l'expression de l'accélération différentielle exprimée dans la base locale :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} \right)_{B_0} &= \left[ \ddot{x} - 2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{y} - \frac{\mu}{a^3} \frac{(1+e \cos \nu)^4}{(1-e^2)^3} x \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1+e \cos \nu}{(1-e^2)^{3/2}} \left( \frac{\frac{3}{2a} (1+e \cos \nu) \dot{a} + 2e \sin \nu \dot{\nu}}{2 \cos \nu + (3+e \cos \nu)e} \dot{e} \right) y \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} (\dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta) z \right] \vec{R}_1 \\ &+ \left[ \ddot{y} + 2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \dot{x} - (\dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta)^2 z \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1+e \cos \nu}{(1-e^2)^{3/2}} \left( \frac{\frac{3}{2a} (1+e \cos \nu) \dot{a} + 2e \sin \nu \dot{\nu}}{2 \cos \nu + (3+e \cos \nu)e} \dot{e} \right) x \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\mu}{a^3} \frac{(1+e \cos \nu)^4}{(1-e^2)^3} + (\dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta)^2 \right) y \right. \\ &\quad \left. - (\ddot{\Omega} \sin i \sin \theta + \ddot{\Omega} \dot{i} \cos i \sin \theta + \ddot{i} \cos \theta) z \right] \vec{S}_1 \\ &\quad + \left[ \ddot{z} + 2 (\dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta) \dot{y} \right. \\ &\quad \left. + (\dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta) \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} x \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{\Omega} \sin i \sin \theta + \ddot{\Omega} \dot{i} \cos i \sin \theta + \ddot{i} \cos \theta) y \right. \\ &\quad \left. - (\dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta)^2 z \right] \vec{W}_1 \end{aligned} \quad (\text{I.2.74})$$

On obtient finalement les équations dynamiques :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2nf_0 & 0 \\ -2nf_0 & 0 & f_4^2 \\ 0 & -2f_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + A_g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.75})$$

avec les notations :

$$A_g = \begin{bmatrix} n^2 f_1 (3 + e \cos \nu) + n^2 J_e G_{11} & -nf_2 + n^2 J_e G_{12} & nf_0 f_4 + n^2 J_e G_{13} \\ nf_3 + n^2 J_e G_{21} & n^2 f_1 (e \cos \nu) + f_4^2 + n^2 J_e G_{22} & f_5 + n^2 J_e G_{23} \\ -nf_0 f_4 + n^2 J_e G_{31} & -f_5 + n^2 J_e G_{32} & f_4^2 - n^2 f_1 + n^2 J_e G_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.76})$$

$$J_e = 6J_2 \left( \frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \left( \frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^5 \quad (\text{I.2.77})$$

$$f_0(e, \nu) = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (\text{I.2.78})$$

$$f_1(e, \nu) = \frac{(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \quad (\text{I.2.79})$$

$$f_2(e, \nu) = \frac{(1 + e \cos \nu)}{(1 - e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2a} (1 + e \cos \nu) \dot{a} + 2(e \sin \nu) \dot{\nu} \\ -(2 \cos \nu + (3 + e \cos \nu) e) \dot{e} \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.80})$$

$$f_4(\Omega, i, \theta) = \left( \dot{\Omega} \sin i \sin \theta + \dot{i} \cos \theta \right) \quad (\text{I.2.81})$$

$$f_3(e, \nu) = \frac{(1 + e \cos \nu)}{(1 - e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2a} (1 + e \cos \nu) \dot{a} + 2(e \sin \nu) \dot{\nu} \\ -\frac{2 \cos \nu + (3 + e \cos \nu) e}{1 - e^2} \dot{e} \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.82})$$

$$f_5 = \left( \ddot{\Omega} \sin i \sin \theta + \ddot{\Omega} i \cos i \sin \theta + \ddot{i} \cos \theta \right) \quad (\text{I.2.83})$$

La représentation d'état est donnée par :

$$\dot{X}(t) = A_{J_2}(\nu) X(t) + B_{J_2} a_p(t) \quad (\text{I.2.84})$$

avec :

$$A_{J_2}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & n^2 f_1 (3 + e \cos \nu) + n^2 J_e G_{11} & -n f_2 + n^2 J_e G_{12} & \dots \\ n f_3 + n^2 J_e G_{21} & n^2 f_1 (e \cos \nu) + f_4^2 + n^2 J_e G_{22} & -f_5 + n^2 J_e G_{32} & \dots \\ -n f_0 f_4 + n^2 J_e G_{31} & -f_5 + n^2 J_e G_{32} & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & n f_0 f_4 + n^2 J_e G_{13} & 0 & 2n f_0 \\ f_5 + n^2 J_e G_{23} & -2n f_0 & 0 & f_4^2 \\ f_4^2 - n^2 f_1 + n^2 J_e G_{33} & 0 & -2f_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.85})$$

$$B_{J_2}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.86})$$

Il est à noter que ce modèle est plus général et plus rigoureux que celui proposé dans [26] car on considère que les deux satellites sont affectés par les perturbations dues au terme en  $J_2$ .

---

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une démarche systématique pour la synthèse de modèles d'état du mouvement relatif par les paramètres cartésiens. La démarche suivie peut être appliquée pour toutes les perturbations et tous les types de trajectoires orbitales. Les principaux modèles issus de la littérature peuvent être retrouvés par une simple application des hypothèses spécifiques au modèle développé. La structure du modèle permet une généralisation aisée et rigoureuse à certains cas non traités, ou faiblement étudiés dans la littérature, avec notamment la prise en compte de certaines perturbations (frottement atmosphérique, attraction luni-solaire ...). Le chapitre suivant sera consacré au développement d'une transformation de variable utile pour la synthèse de matrices de transition par les méthodes hybrides. Une transformation non linéaire est développée, puis linéarisée. Des éléments de comparaison basés sur des simulations numériques sont donnés afin d'évaluer l'influence de la linéarisation.

---



---

## Chapitre 3

# Transformations de variables d'état du mouvement relatif

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Objectifs</b> . . . . .	<b>81</b>
<b>3.2</b>	<b>Développement d'une transformation non linéaire</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>3.3</b>	<b>Linéarisation de la relation de passage</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>3.4</b>	<b>Etude des domaines de validité</b> . . . . .	<b>88</b>
3.4.1	Influence des écarts en demi-grand axe . . . . .	90
3.4.2	Influence des écarts en excentricité . . . . .	91
3.4.3	Effets des écarts en inclinaison . . . . .	92
3.4.4	Influence des écarts en $\Omega$ . . . . .	93
3.4.5	Influence des écarts en arguments de périégée . . . . .	94
3.4.6	Influence des écarts en anomalie vraie . . . . .	95
3.4.7	Commentaires . . . . .	96
<b>3.5</b>	<b>Etude de l'effet des perturbations</b> . . . . .	<b>96</b>

---

### 3.1 Objectifs

La transformation des coordonnées cartésiennes locales en paramètres orbitaux différentiels est une étape fondamentale dans la construction directe des matrices de transition en paramètres cartésiens par les méthodes hybrides. Les transformations rencontrées dans la littérature sont relativement récentes. Un certain nombre de points reste encore non traité ou rarement considéré. On remarque notamment que :

- toutes les transformations sont linéaires. Ceci est, certes, important car le calcul des transformations inverses est facilité. Cependant, la linéarisation induit des erreurs et des pertes de précision. Aucune référence ne permet de quantifier cette erreur ;
-

- les perturbations orbitales et la variation des éléments orbitaux ne sont traitées que très rarement. Les travaux existants sont valables pour la perturbation en  $J_2$  seulement.

Nous proposons dans cette section une solution à ces limites par le biais d'une démarche synthétique pour synthétiser ces transformations. Dans un premier temps, une relation de passage non linéaire est développée. Cette transformation est linéarisée par la suite. Elle servira également à établir des domaines de validité pour la transformation linéaire, en fonction des écarts en paramètres orbitaux. L'influence des perturbations sur la précision des transformations est analysée à travers la comparaison avec une transformation issue de la littérature.

### 3.2 Développement d'une transformation non linéaire

Soient deux satellites  $M_1$  et  $M_2$ , ayant pour éléments orbitaux osculateurs  $X_{OE_1}$  et  $X_{OE_2}$  respectivement, tels que :

$$X_{OE_k} = [ a_k \quad e_k \quad i_k \quad \Omega_k \quad \omega_k \quad \nu_k ] \quad k = 1, 2$$

Le but de cette section est d'établir une relation non linéaire de la forme :

$$[ x \quad y \quad z \quad v_x \quad v_y \quad v_z ]^t = f(X_{OE_1}, \delta X_{OE}) \quad (\text{I.3.1})$$

où  $[ x \quad y \quad z \quad v_x \quad v_y \quad v_z ]$  sont les composantes de la position et de la vitesse relatives de  $M_2$  dans un repère local centré sur  $M_1$  et  $\delta X_{OE}$  est le vecteur des éléments orbitaux différentiels :

$$\delta X_{OE} = X_{OE_2} - X_{OE_1} = [ \delta a \quad \delta e \quad \delta i \quad \delta \Omega \quad \delta \omega \quad \delta \nu ]^t \quad (\text{I.3.2})$$

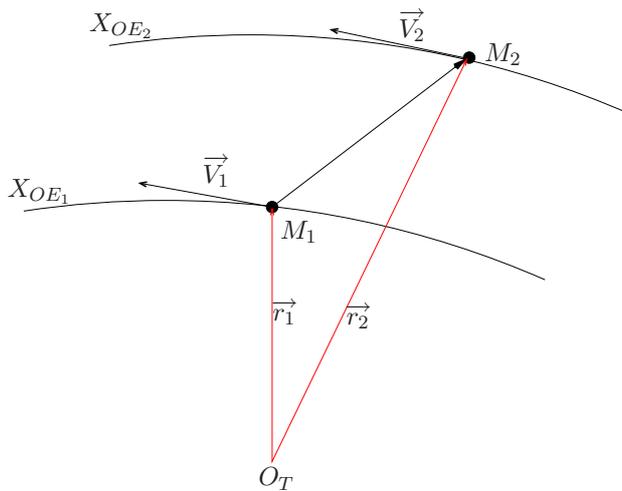


FIG. 3.1 – Représentations du mouvement orbital relatif

Les vecteurs de position des deux satellites s'écrivent :

$$\overrightarrow{OM_1} = r_1 \overrightarrow{R_1} \quad (\text{I.3.3})$$

$$\overrightarrow{OM_2} = (r_1 + x) \overrightarrow{R_1} + y \overrightarrow{S_1} + z \overrightarrow{W_1} \quad (\text{I.3.4})$$

$$= r_2 \overrightarrow{R_2} \quad (\text{I.3.5})$$

où  $r_k = \frac{a_k(1 - e_k^2)}{1 + e_k \cos \nu_k}$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_2 \overrightarrow{R_2} &= (r_1 + x) \overrightarrow{R_1} + y \overrightarrow{S_1} + z \overrightarrow{W_1} \\ \implies \begin{cases} x &= r_2(\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{R_1}) - r_1 \\ y &= r_2(\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{S_1}) \\ z &= r_2(\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{W_1}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.3.6})$$

Nous avons besoin d'exprimer les composantes de  $\overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{W_2}$  dans la base  $[\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{W_1}]$ . Pour ce faire, on écrit la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_2 = [\overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{W_2}]$  à  $\mathcal{B}_1 = [\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{W_1}]$  :

$$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_2} = \left( P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_1} \right)^T P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_2} \quad (\text{I.3.7})$$

$\mathcal{B}_0$  étant la base inertielle.

La matrice de passage de cette base vers la base locale  $\mathcal{B}_1$  s'obtient à l'aide de trois rotations :

$$P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \cos \Omega_1 & -\sin \Omega_1 & 0 \\ \sin \Omega_1 & \cos \Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_1 & -\sin i_1 \\ 0 & \sin i_1 & \cos i_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.8})$$

Cela donne :

$$P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \Omega_1 - \sin \theta_1 \cos i_1 \sin \Omega_1 & -(\sin \theta_1 \cos \Omega_1 + \cos \theta_1 \cos i_1 \sin \Omega_1) & \sin \Omega_1 \sin i_1 \\ \cos \theta_1 \sin \Omega_1 + \sin \theta_1 \cos i_1 \cos \Omega_1 & -\sin \theta_1 \sin \Omega_1 + \cos \theta_1 \cos i_1 \cos \Omega_1 & -\cos \Omega_1 \sin i_1 \\ \sin \theta_1 \sin i_1 & \cos \theta_1 \sin i_1 & \cos i_1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.9})$$

Identiquement à  $M_1$ , on peut écrire cette matrice pour  $M_2$  :

$$P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \Omega_2 - \sin \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2 & -(\sin \theta_2 \cos \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2) & \sin \Omega_2 \sin i_2 \\ \cos \theta_2 \sin \Omega_2 + \sin \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2 & -\sin \theta_2 \sin \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2 & -\cos \Omega_2 \sin i_2 \\ \sin \theta_2 \sin i_2 & \cos \theta_2 \sin i_2 & \cos i_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.10})$$

Sachant que :

$$P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_i} = \left[ \overrightarrow{R_i} \quad \overrightarrow{S_i} \quad \overrightarrow{W_i} \right] \quad (\text{I.3.11})$$

on obtient :

$$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \left[ \overrightarrow{R_1} \quad \overrightarrow{S_1} \quad \overrightarrow{W_1} \right]^t \left[ \overrightarrow{R_2} \quad \overrightarrow{S_2} \quad \overrightarrow{W_2} \right] \quad (\text{I.3.12})$$

$$= \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{R_1} & \overrightarrow{S_2} \cdot \overrightarrow{R_1} & \overrightarrow{W_2} \cdot \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{S_1} & \overrightarrow{S_2} \cdot \overrightarrow{S_1} & \overrightarrow{W_2} \cdot \overrightarrow{S_1} \\ \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{W_1} & \overrightarrow{S_2} \cdot \overrightarrow{W_1} & \overrightarrow{W_2} \cdot \overrightarrow{W_1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.13})$$

Cela implique :

$$\begin{aligned}\vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1 &= (\cos \theta_2 \cos \Omega_2 - \sin \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2) (\cos \theta_1 \cos \Omega_1 - \sin \theta_1 \cos i_1 \sin \Omega_1) \\ &\quad + (\cos \theta_2 \sin \Omega_2 + \sin \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2) (\cos \theta_1 \sin \Omega_1 + \sin \theta_1 \cos i_1 \cos \Omega_1) \\ &\quad + \sin \theta_2 \sin i_2 \sin \theta_1 \sin i_1\end{aligned}\quad (\text{I.3.14})$$

$$\begin{aligned}\vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1 &= -(\cos \theta_2 \cos \Omega_2 - \sin \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2) (\sin \theta_1 \cos \Omega_1 + \cos \theta_1 \cos i_1 \sin \Omega_1) \\ &\quad + (\cos \theta_2 \sin \Omega_2 + \sin \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2) (-\sin \theta_1 \sin \Omega_1 + \cos \theta_1 \cos i_1 \cos \Omega_1) \\ &\quad + \sin \theta_2 \sin i_2 \cos \theta_1 \sin i_1\end{aligned}\quad (\text{I.3.15})$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_2 \cdot \vec{R}_1 &= -(\sin \theta_2 \cos \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2) (\cos \theta_1 \cos \Omega_1 - \sin \theta_1 \cos i_1 \sin \Omega_1) \\ &\quad + (-\sin \theta_2 \sin \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2) (\cos \theta_1 \sin \Omega_1 + \sin \theta_1 \cos i_1 \cos \Omega_1) \\ &\quad + \cos \theta_2 \sin i_2 \sin \theta_1 \sin i_1\end{aligned}\quad (\text{I.3.16})$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_1 &= (\sin \theta_2 \cos \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2) (\sin \theta_1 \cos \Omega_1 + \cos \theta_1 \cos i_1 \sin \Omega_1) \\ &\quad + (-\sin \theta_2 \sin \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2) (-\sin \theta_1 \sin \Omega_1 + \cos \theta_1 \cos i_1 \cos \Omega_1) \\ &\quad + \cos \theta_2 \sin i_2 \cos \theta_1 \sin i_1\end{aligned}\quad (\text{I.3.17})$$

$$\begin{aligned}\vec{R}_2 \cdot \vec{W}_1 &= (\cos \theta_2 \cos \Omega_2 - \sin \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2) \sin \Omega_1 \sin i_1 \\ &\quad - (\cos \theta_2 \sin \Omega_2 + \sin \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2) \cos \Omega_1 \sin i_1 \\ &\quad + \sin \theta_2 \sin i_2 \cos i_1\end{aligned}\quad (\text{I.3.18})$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_2 \cdot \vec{W}_1 &= -(\sin \theta_2 \cos \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \sin \Omega_2) \sin \Omega_1 \sin i_1 \\ &\quad - (-\sin \theta_2 \sin \Omega_2 + \cos \theta_2 \cos i_2 \cos \Omega_2) \cos \Omega_1 \sin i_1 \\ &\quad + \cos \theta_2 \sin i_2 \cos i_1\end{aligned}\quad (\text{I.3.19})$$

En utilisant ces résultats, et en considérant  $X_{oe_2} = X_{oe_1} + \delta X_{oe}$ , on peut écrire les coordonnées cartésiennes locales en position en fonction de  $X_{oe_1}$  et  $\delta X_{oe}$  exclusivement à l'aide de l'équation (I.3.6) :

$$\boxed{\begin{aligned}x &= \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos \nu_2} (\vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1) - \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \nu_1} \\ y &= \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos \nu_2} (\vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1) \\ z &= \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos \nu_2} (\vec{R}_2 \cdot \vec{W}_1)\end{aligned}}\quad (\text{I.3.20})$$

En ce qui concerne la vitesse relative, on procède d'une manière analogue. Si l'on considère les relations suivantes :

$$\vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_1} = \left( \frac{d\overline{M_1M_2}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} \quad (\text{I.3.21})$$

$$= v_x \vec{R}_1 + v_y \vec{S}_1 + v_z \vec{W}_1 \quad (\text{I.3.22})$$

$$= \left( \frac{d\overline{M_1M_2}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} + \overline{M_1M_2} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \quad (\text{I.3.23})$$

$$= \left( \frac{d\overline{OM_2}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} - \left( \frac{d\overline{OM_1}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} + \overline{M_1M_2} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \quad (\text{I.3.24})$$

$$= \vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_0} - \vec{V}_{M_1/\mathcal{R}_0} + \overline{M_1M_2} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} \quad (\text{I.3.25})$$

La vitesse inertielle de chaque satellite  $M_i$  dans sa base locale  $\mathcal{B}_i$  est donnée par :

$$\vec{V}_{M_i/\mathcal{R}_0} = \sqrt{\frac{\mu}{a_i}} \frac{1}{\sqrt{1-e_i^2}} \left( e_i \sin \nu_i \vec{R}_i + (1 + e_i \cos \nu_i) \vec{S}_i \right) \quad (\text{I.3.26})$$

La vitesse de rotation de la base locale de  $M_i$  par rapport à la base inertielle est donnée par :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_0} = \left( \dot{\Omega}_i \sin i_i \sin \theta_i + \dot{i}_i \cos \theta_i \right) \vec{R}_i + \sqrt{\frac{\mu}{a_i^3}} \frac{(1 + e_i \cos \nu_i)^2}{(1 - e_i^2)^{3/2}} \vec{W}_i \quad (\text{I.3.27})$$

Chaque terme de (I.3.25) doit être exprimé comme une fonction des éléments orbitaux de  $M_1$  et  $M_2$ , dans la base locale de  $M_1$ .  $\overline{M_1M_2}$  a déjà été considéré (voir  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans (I.3.6)). On obtient donc :

$$\begin{aligned} \overline{M_1M_2} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0} &= y \sqrt{\frac{\mu}{a_1^3}} \frac{(1 + e_1 \cos \nu_1)^2}{(1 - e_1^2)^{3/2}} \vec{R}_1 \\ &+ \left( z \left( \dot{\Omega}_1 \sin i_1 \sin \theta_1 + \dot{i}_1 \cos \theta_1 \right) - x \sqrt{\frac{\mu}{a_1^3}} \frac{(1 + e_1 \cos \nu_1)^2}{(1 - e_1^2)^{3/2}} \right) \vec{S}_1 \\ &- y \left( \dot{\Omega}_1 \sin i_1 \sin \theta_1 + \dot{i}_1 \cos \theta_1 \right) \vec{W}_1 \end{aligned} \quad (\text{I.3.28})$$

$\vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_0}$  peut être exprimé dans  $[\vec{R}_1, \vec{S}_1, \vec{W}_1]$  à l'aide des relations :

$$\vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_0\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \vec{V}_{M_2/\mathcal{R}_0\mathcal{B}_2} \quad (\text{I.3.29})$$

$$= P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \sqrt{\frac{\mu}{a_2} \frac{1}{\sqrt{1-e_2^2}}} \left( e_2 \sin \nu_2 \vec{R}_2 + (1 + e_2 \cos \nu_2) \vec{S}_2 \right) \quad (\text{I.3.30})$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a_2} \frac{1}{\sqrt{1-e_2^2}}} \begin{bmatrix} \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1 & \vec{S}_2 \cdot \vec{R}_1 & \vec{W}_2 \cdot \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1 & \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_1 & \vec{W}_2 \cdot \vec{S}_1 \\ \vec{R}_2 \cdot \vec{W}_1 & \vec{S}_2 \cdot \vec{W}_1 & \vec{W}_2 \cdot \vec{W}_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} e_2 \sin \nu_2 \vec{R}_2 \\ + (1 + e_2 \cos \nu_2) \vec{S}_2 \\ + 0 \times \vec{W}_2 \end{array} \right\} \quad (\text{I.3.31})$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a_2} \frac{1}{\sqrt{1-e_2^2}}} \left\{ \begin{array}{l} \left[ e_2 \sin \nu_2 \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1 + (1 + e_2 \cos \nu_2) \vec{S}_2 \cdot \vec{R}_1 \right] \vec{R}_1 \\ + \left[ e_2 \sin \nu_2 \vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1 + (1 + e_2 \cos \nu_2) \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_1 \right] \vec{S}_1 \\ + \left[ e_2 \sin \nu_2 \vec{R}_2 \cdot \vec{W}_1 + (1 + e_2 \cos \nu_2) \vec{S}_2 \cdot \vec{W}_1 \right] \vec{W}_1 \end{array} \right\} \quad (\text{I.3.32})$$

Les dérivées des éléments orbitaux sont obtenues *via* les équations de Gauss, pour une accélération perturbatrice  $\vec{\gamma} = [\gamma_R \ \gamma_S \ \gamma_W]_{\mathcal{B}_1}$  :

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1} \frac{\sin(\omega_1 + \nu_1)}{(1 + e_1 \cos \nu_1) \sin i_1} \gamma_W \quad (\text{I.3.33})$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_1^2} \cos(\omega_1 + \nu_1)}{n_1 a_1 (1 + e_1 \cos \nu_1)} \gamma_W \quad (\text{I.3.34})$$

On obtient finalement :

$$\begin{array}{l} v_x = \sqrt{\frac{\mu}{a_2} \frac{1}{\sqrt{1-e_2^2}}} \left( e_2 \sin \nu_2 (\vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1) + (1 + e_2 \cos \nu_2) (\vec{S}_2 \cdot \vec{R}_1) \right) \\ \quad - \sqrt{\frac{\mu}{a_1} \frac{e_1 \sin \nu_1}{\sqrt{1-e_1^2}}} + y \sqrt{\frac{\mu}{a_1^3} \frac{(1 + e_1 \cos \nu_1)^2}{(1 - e_1^2)^{3/2}}} \\ v_y = \sqrt{\frac{\mu}{a_2} \frac{1}{\sqrt{1-e_2^2}}} \left( e_2 \sin \nu_2 (\vec{R}_2 \cdot \vec{S}_1) + (1 + e_2 \cos \nu_2) (\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_1) \right) \\ \quad - \sqrt{\frac{\mu}{a_1} \frac{1 + e_1 \cos \nu_1}{\sqrt{1-e_1^2}}} + z \left( \dot{\Omega}_1 \sin i_1 \sin \theta_1 + \dot{i}_1 \cos \theta_1 \right) - x \sqrt{\frac{\mu}{a_1^3} \frac{(1 + e_1 \cos \nu_1)^2}{(1 - e_1^2)^{3/2}}} \\ v_z = \sqrt{\frac{\mu}{a_2} \frac{1}{\sqrt{1-e_2^2}}} \left( e_2 \sin \nu_2 (\vec{R}_2 \cdot \vec{W}_1) + (1 + e_2 \cos \nu_2) (\vec{S}_2 \cdot \vec{W}_1) \right) \\ \quad - y \left( \dot{\Omega}_1 \sin i_1 \sin \theta_1 + \dot{i}_1 \cos \theta_1 \right) \end{array} \quad (\text{I.3.35})$$

où l'on rappelle que  $X_{OE_2} = X_{OE_1} + \delta X_{OE}$ .

### 3.3 Linéarisation de la relation de passage

La transformation non linéaire développée peut être écrite sous la forme :

$$X_{rsw} = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z]^t = \Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, \delta X_{OE}) \quad (\text{I.3.36})$$

Le développement au premier ordre de cette fonction au voisinage  $\delta X_{OE} \rightarrow 0$  mène à :

$$\begin{aligned} \Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, \delta X_{OE})|_{\delta X_{OE} \rightarrow 0} &\approx \Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, 0) \\ &+ \nabla_{OE} \Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, \delta X_{OE})|_{\delta X_{OE}=0} \delta X_{OE} \end{aligned} \quad (\text{I.3.37})$$

où la matrice gradient  $\nabla_{OE} \Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, \delta X_{OE})$  est donnée par :

$$\nabla_{OE} \Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, \delta X_{OE}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_x}{\partial a} & \frac{\partial \Psi_x}{\partial e} & \frac{\partial \Psi_x}{\partial i} & \frac{\partial \Psi_x}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Psi_x}{\partial \omega} & \frac{\partial \Psi_x}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \Psi_y}{\partial a} & \frac{\partial \Psi_y}{\partial e} & \frac{\partial \Psi_y}{\partial i} & \frac{\partial \Psi_y}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Psi_y}{\partial \omega} & \frac{\partial \Psi_y}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \Psi_z}{\partial a} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial e} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial i} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial \omega} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \Psi_{v_x}}{\partial a} & \frac{\partial \Psi_{v_x}}{\partial e} & \frac{\partial \Psi_{v_x}}{\partial i} & \frac{\partial \Psi_{v_x}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Psi_{v_x}}{\partial \omega} & \frac{\partial \Psi_{v_x}}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \Psi_{v_y}}{\partial a} & \frac{\partial \Psi_{v_y}}{\partial e} & \frac{\partial \Psi_{v_y}}{\partial i} & \frac{\partial \Psi_{v_y}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Psi_{v_y}}{\partial \omega} & \frac{\partial \Psi_{v_y}}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \Psi_{v_z}}{\partial a} & \frac{\partial \Psi_{v_z}}{\partial e} & \frac{\partial \Psi_{v_z}}{\partial i} & \frac{\partial \Psi_{v_z}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \Psi_{v_z}}{\partial \omega} & \frac{\partial \Psi_{v_z}}{\partial \nu} \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.38})$$

$\Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, 0) = 0$  car le chasseur est confondu avec la cible dans ce cas ( $\delta X_{OE} = 0$ ).

On obtient alors les éléments de  $\psi = \nabla_{OE} \Psi(X_{OE_1}, \dot{i}_1, \dot{\Omega}_1, \delta X_{OE})|_{\delta X_{OE}=0}$  :

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \frac{1 - e_1^2}{1 + e_1 \cos \nu_1} & \psi_{21} &= 0 \\ \psi_{12} &= -\frac{a_1(2e_1 + (1 + e_1^2) \cos \nu_1)}{(1 + e_1 \cos \nu_1)^2} & \psi_{22} &= 0 \\ \psi_{13} &= 0 & \psi_{23} &= 0 \\ \psi_{14} &= 0 & \psi_{24} &= \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \nu_1} \cos i_1 \\ \psi_{15} &= 0 & \psi_{25} &= \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \nu_1} \\ \psi_{16} &= \frac{a_1(1 - e_1^2) \sin i_1}{(1 + e_1 \cos \nu_1)^2} & \psi_{26} &= \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \nu_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{31} &= 0 & \psi_{41} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a_1^3}} \frac{e_1 \sin \nu_1}{(1-e_1^2)^{1/2}} \\
\psi_{32} &= 0 & \psi_{42} &= \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \frac{\sin \nu_1}{(1-e_1^2)^{3/2}} \\
\psi_{33} &= \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1 \cos \nu_1} \sin \theta_1 & \psi_{43} &= 0 \\
\psi_{34} &= -\frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1 \cos \nu_1} \sin i_1 \cos \theta_1 & \psi_{44} &= 0 \\
\psi_{35} &= 0 & \psi_{45} &= 0 \\
\psi_{36} &= 0 & \psi_{46} &= \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \frac{e_1 \cos \nu_1}{(1-e_1^2)^{1/2}} \\
\psi_{51} &= -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a_1^3}} \frac{1+e_1 \cos \nu_1}{(1-e_1^2)^{1/2}} & \psi_{61} &= 0 \\
\psi_{52} &= \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \frac{3e_1 + (2+e_1^2) \cos \nu_1}{(1-e_1^2)^{3/2}} & \psi_{62} &= 0 \\
\psi_{53} &= \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1 \cos \nu_1} \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_1 \sin i_1 \sin \theta_1 \\ +i_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix} \sin \theta_1 & \psi_{63} &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\cos \theta + e \cos \omega}{(1-e^2)^{1/2}} \\
\psi_{54} &= \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \frac{e_1 \sin \nu_1}{(1-e_1^2)^{1/2}} \cos i_1 & \psi_{64} &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sin \theta + e \sin \omega}{(1-e^2)^{1/2}} \sin i \\
& -\frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1 \cos \nu_1} \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_1 \sin i_1 \sin \theta_1 \\ +i_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix} \sin i_1 \cos \theta_1 & & -\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \sin i \sin \theta \\ +i \cos \theta \end{pmatrix} \cos i \\
\psi_{55} &= \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \frac{e_1 \sin \nu_1}{(1-e_1^2)^{1/2}} & \psi_{65} &= -\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \sin i \sin \theta \\ +i \cos \theta \end{pmatrix} \\
\psi_{56} &= -\sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \frac{e_1 \sin \nu_1}{(1-e_1^2)^{1/2}} & \psi_{66} &= -\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \sin i \sin \theta \\ +i \cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### 3.4 Etude des domaines de validité

La comparaison entre les résultats obtenus à l'aide de la transformation linéaire et les résultats obtenus à l'aide de la transformation non linéaire permet d'évaluer l'erreur induite par la linéarisation. Pour ce faire, nous définissons deux indices d'erreur en position et en vitesse relative :

$$E_r = \frac{\|\overrightarrow{R_{NL}} - \overrightarrow{R_L}\|}{\|\overrightarrow{R_{NL}}\|} \quad (\text{I.3.39})$$

$$E_v = \frac{\|\overrightarrow{V_{NL}} - \overrightarrow{V_L}\|}{\|\overrightarrow{V_{NL}}\|} \quad (\text{I.3.40})$$

où :

- $E_r$  et  $E_v$  sont les indices d'erreur en position et en vitesse respectivement ;

- $\vec{R}_{NL}$  et  $\vec{R}_L$  sont les vecteurs de position relative obtenus à l'aide des transformations non linéaire et linéaire respectivement ;
- $\vec{V}_{NL}$  and  $\vec{V}_L$  sont les vecteurs de vitesse relative obtenus à l'aide des transformations non linéaire et linéaire respectivement.

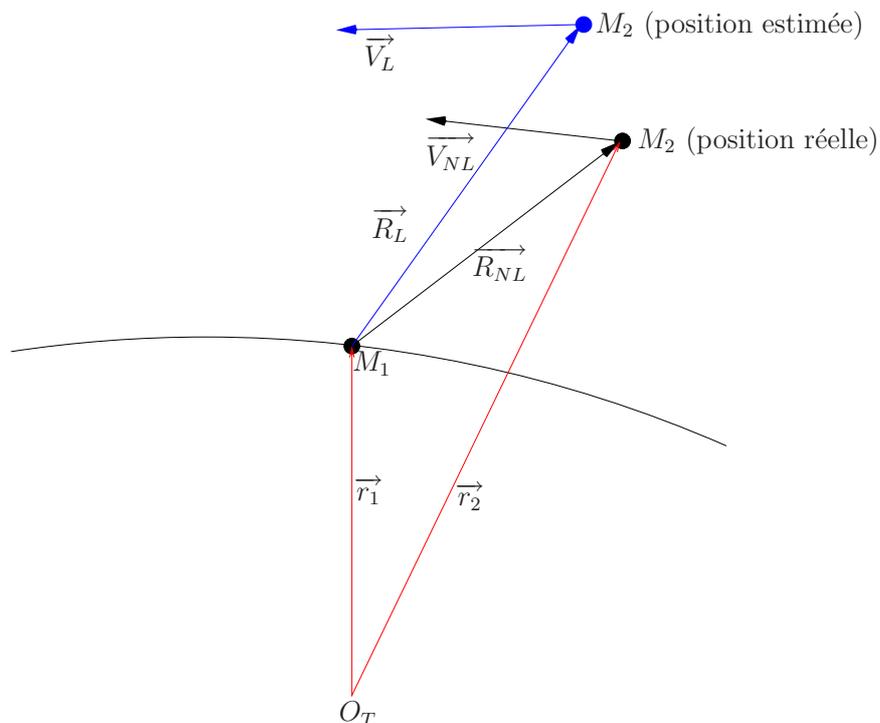


FIG. 3.2 – Indices de l'erreur de linéarisation en position et vitesse relatives

### 3.4.1 Influence des écarts en demi-grand axe

Dans cette comparaison, nous analysons l'influence des variations des demi-grands axes des deux satellites suivant le tableau 3.1. Les commentaires et remarques sont donnés à l'issue de toutes les comparaisons.

	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
Cible	$a \in [R_e + 10000 \text{ km}, R_e + 11637 \text{ km}]$	0.1	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/7$
Chasseur	$a \in [R_e + 10000 \text{ km}, R_e + 11637 \text{ km}]$	0.1	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/7$

TAB. 3.1 – Configuration orbitale pour les écarts en demi-grand axe

Les résultats sont reportés sur les figures 3.3, 3.4.

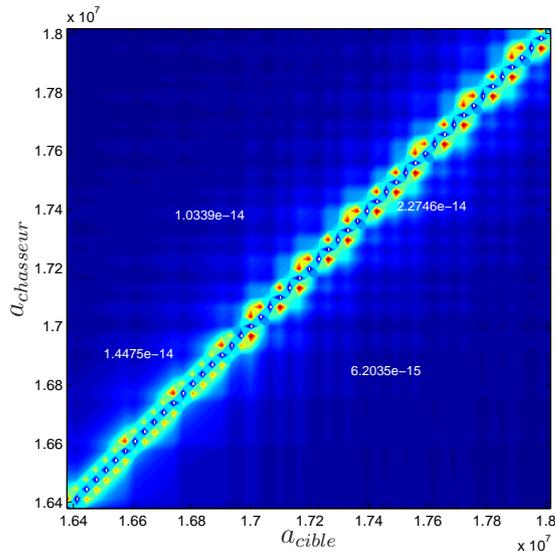


FIG. 3.3 – Indice d'erreur en position

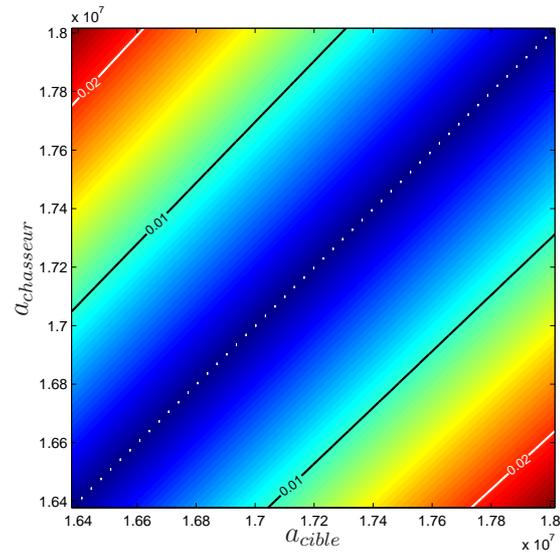


FIG. 3.4 – Indice d'erreur en vitesse

### 3.4.2 Influence des écarts en excentricité

Dans cette comparaison, nous analysons l'influence des variations des excentricités des deux satellites suivant le tableau 3.2

	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
Cible	$R_e + 10000 \text{ km}$	$e \in [0, 0.9]$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/7$
Chasseur	$R_e + 10000 \text{ km}$	$e \in [0, 0.9]$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/7$

TAB. 3.2 – Configuration orbitale pour les écarts en excentricité

Les résultats sont reportés sur les figures 3.5, 3.6.

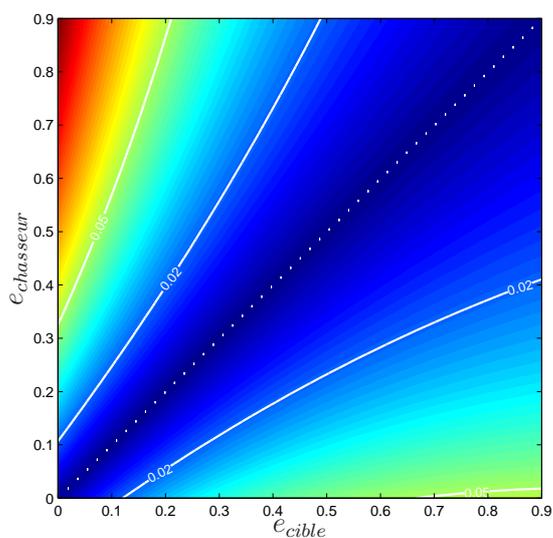


FIG. 3.5 – Indice d'erreur en position

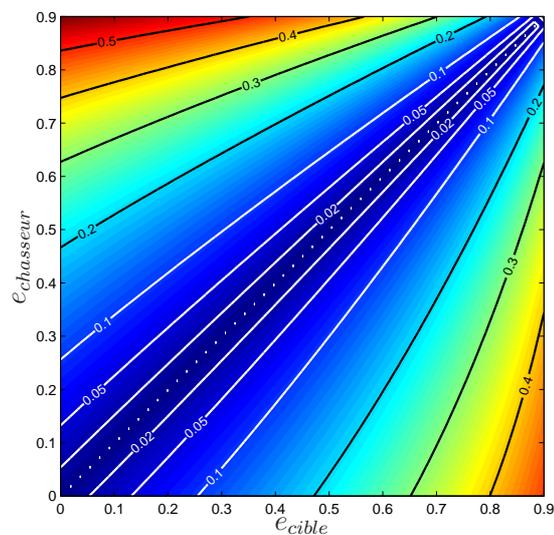


FIG. 3.6 – Indice d'erreur en vitesse

### 3.4.3 Effets des écarts en inclinaison

Dans cette comparaison, nous analysons l'influence des variations des inclinaisons des deux satellites suivant le tableau 3.3.

	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
Cible	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$i \in [0, \pi/4]$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/7$
Chasseur	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$i \in [0, \pi/4]$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/7$

TAB. 3.3 – Configuration orbitale pour les écarts en inclinaison

Les résultats sont reportés sur les figures 3.7, 3.8.

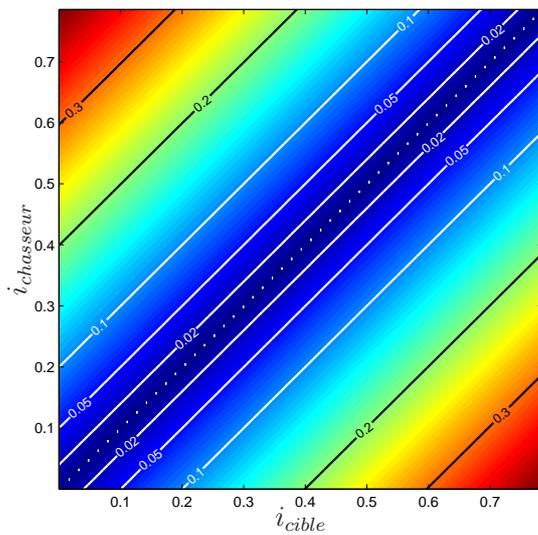


FIG. 3.7 – Indice d'erreur en position

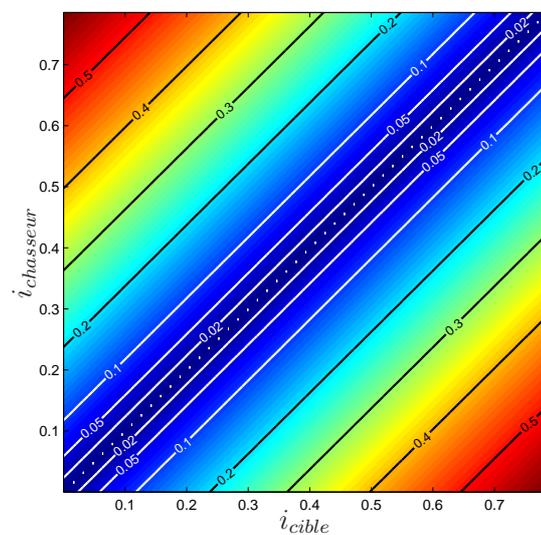


FIG. 3.8 – Indice d'erreur en vitesse

### 3.4.4 Influence des écarts en $\Omega$

Dans cette comparaison, nous analysons l'influence des variations des angles d'ascension directe des nœuds ascendant des deux satellites suivant le tableau 3.4.

	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
Cible	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$\pi/4$	$\Omega \in [0, \pi/4]$	$\pi/6$	$\pi/7$
Chasseur	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$\pi/4$	$\Omega \in [0, \pi/4]$	$\pi/6$	$\pi/7$

TAB. 3.4 – Configuration orbitale pour les écarts en  $\Omega$

Les résultats sont reportés sur les figure 3.9, 3.10.

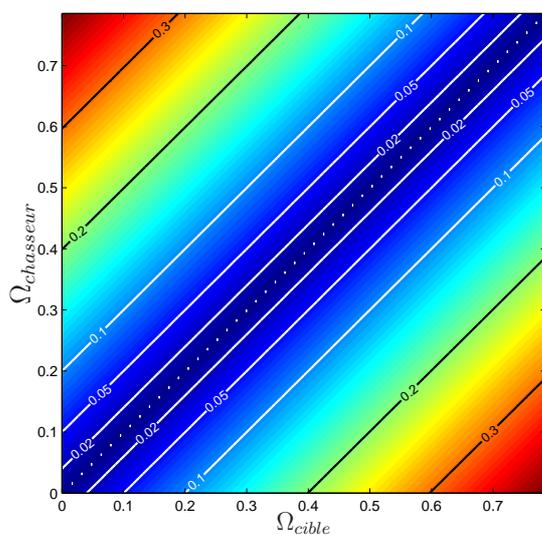


FIG. 3.9 – Indice d'erreur en position

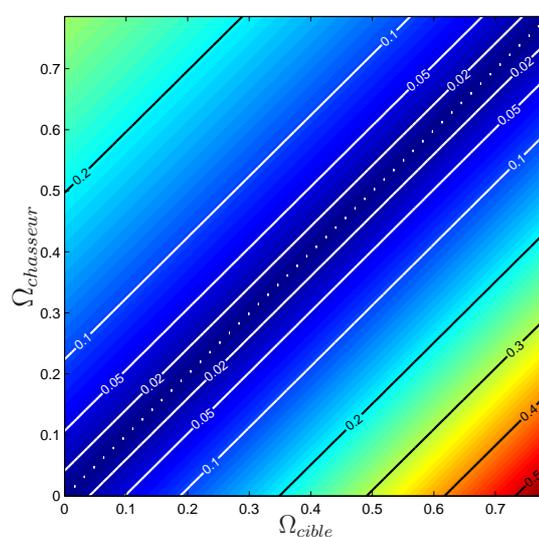


FIG. 3.10 – Indice d'erreur en vitesse

### 3.4.5 Influence des écarts en arguments de périégée

Dans cette comparaison, nous analysons l'influence des variations des arguments de périégée des deux satellites suivant le tableau 3.5.

	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
Cible	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$\pi/4$	$\pi/5$	$\omega \in [0, \pi/4]$	$\pi/7$
Chasseur	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$\pi/4$	$\pi/5$	$\omega \in [0, \pi/4]$	$\pi/7$

TAB. 3.5 – Configuration orbitale pour les écarts en  $\omega$

Les résultats sont reportés sur les figures 3.11, 3.12.

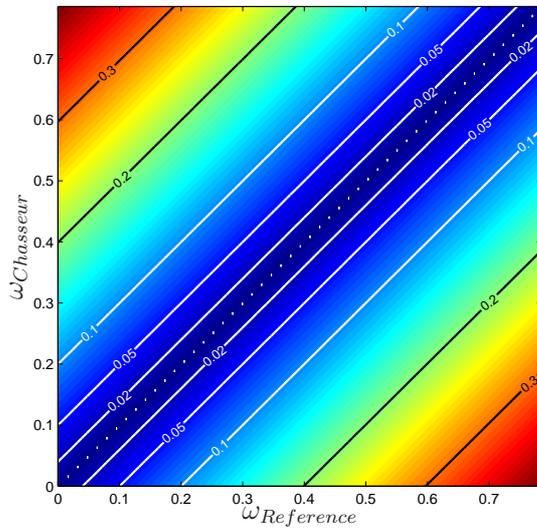


FIG. 3.11 – Indice d'erreur en position

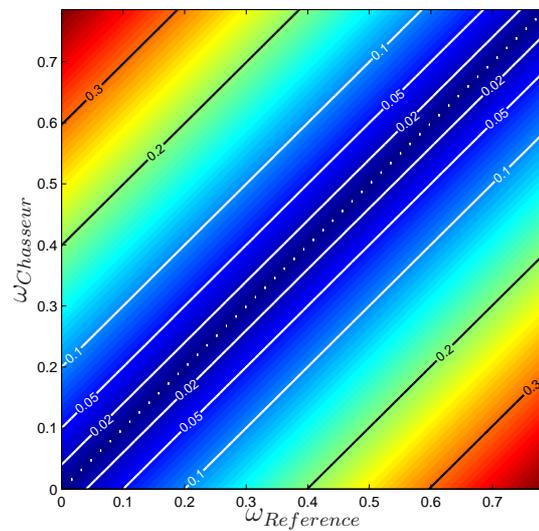


FIG. 3.12 – Indice d'erreur en vitesse

### 3.4.6 Influence des écarts en anomalie vraie

Dans cette comparaison, nous analysons l'influence des variations de l'anomalie vraie pour les deux satellites suivant le tableau 3.6.

	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
Cible	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\nu \in [0, \pi/4]$
Chasseur	$R_e + 10000 \text{ km}$	0.1	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\nu \in [0, \pi/4]$

TAB. 3.6 – Configuration orbitale pour les écarts en anomalie vraie

Les résultats sont reportés sur les figures 3.13, 3.14.

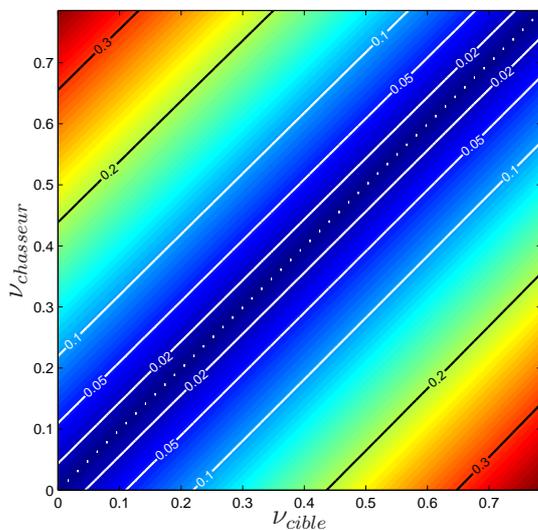


FIG. 3.13 – Indice d'erreur en position

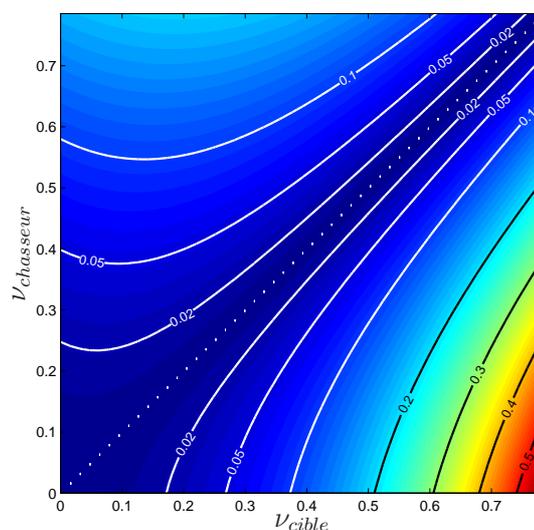


FIG. 3.14 – Indice d'erreur en vitesse

### 3.4.7 Commentaires

Les figures données permettent de fixer un domaine de validité par rapport aux écarts en éléments orbitaux. Les lignes de niveau délimitent des zones où l'erreur est inférieure à une certaine valeur.

L'influence des écarts diffère pour chaque élément orbital considéré. Les écarts en *demi-grand axe* n'affectent pas la précision sur la position relative. Ceci est dû à la relation linéaire entre  $\delta a$  et  $[x, y, z]$ . L'influence reste faible quant à la précision sur la vitesse relative.

L'*excentricité* affecte plus sensiblement la vitesse relative. En fonction de  $e$ , l'écart assurant une précision inférieure à 5% est de l'ordre de  $\delta e \simeq 0.1$ .

La précision sous l'effet des écarts en *paramètres angulaires* ( $i, \Omega, \omega, \nu$ ) varie d'une manière quasi linéaire. Les domaines de validité sont plus ou moins grands en fonction des éléments orbitaux concernés.

## 3.5 Etude de l'effet des perturbations

Les relations de passage développées dans la littérature ne font pas intervenir la variation des éléments orbitaux sous l'effet des perturbations. Nous avons comparé l'indice d'erreur en vitesse de la transformation linéaire proposée avec l'indice d'erreur de la relation développée par Garrison dans [25]. L'environnement orbital choisi est défini dans le tableau 3.7 et la seule perturbation considérée est l'aplatissement des pôles. La configuration orbitale choisie vise à maximiser l'effet de la perturbation. Il s'agit d'un décalage sur les paramètres  $i, \Omega$  et  $\nu$  d'une valeur de 1 deg et de  $10^{-4}$  sur le paramètre  $e$ . L'inclinaison des deux satellites varie entre 0 et 90 degrés.

	$a$	$e$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$
Cible	$R_e + 1800 \text{ km}$	0.3	$i \in [0, 90] \text{ deg}$	45 deg	0	72 deg
Chasseur	$R_e + 1800 \text{ km}$	$0.3 + 1 \times 10^{-4}$	$i \in [0, 90] \text{ deg} - 1 \text{ deg}$	44 deg	0	71 deg

TAB. 3.7 – Configuration orbitale pour l'évaluation de l'effet des perturbations

Les résultats sont représentés sur la figure 3.15.

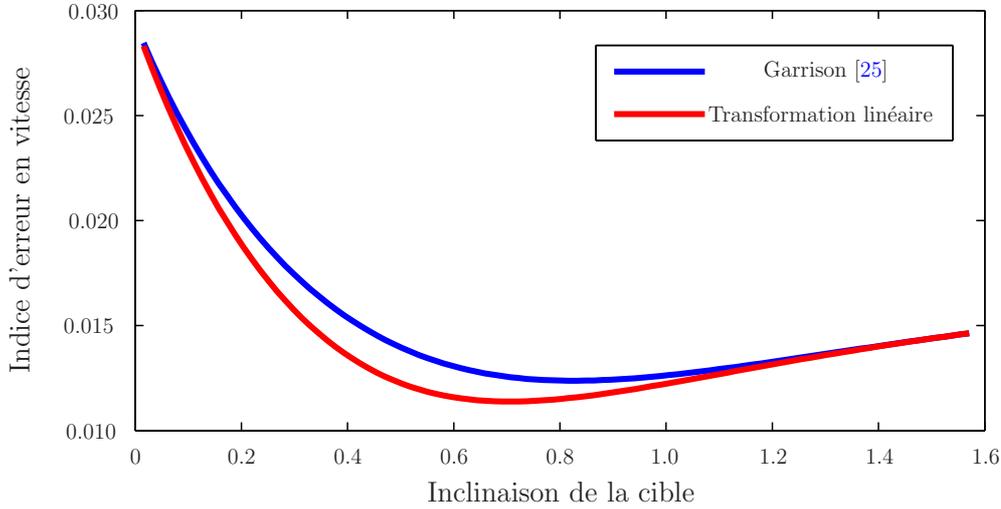


FIG. 3.15 – Comparaison des indices d'erreur en vitesse

Même si le gain en précision semble faible, il est relativisé au fait qu'il existe d'autres perturbations orbitales dont l'influence peut être plus sensible sur les éléments orbitaux. On peut citer notamment le frottement atmosphérique qui est prépondérant pour les altitudes au dessous de 800 km. Ce type de perturbations peut être pris en compte dans les relations présentées précédemment, mais il n'existe pas d'élément de comparaison dans la littérature.

Une autre transformation développée dans la littérature est celle de Casotto [16], où une transformation linéaire permettant d'évaluer la relation entre les décalages sur les éléments orbitaux et la position/vitesse inertielles d'un satellite solitaire est proposée.

Soit le vecteur des position/vitesse inertielles  $X_{IJK} = \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}_{IJK}$ . Ce vecteur peut être exprimé dans les bases  $RSW$  et  $PQW$  moyennant des opérations rotations :

$$r_{IJK} = P(i, \omega, \Omega) r_{PQW} \quad (\text{I.3.41})$$

$$r_{PQW} = R_3(-\nu) r_{RSW} \quad (\text{I.3.42})$$

où  $P(i, \omega, \Omega)$  et  $R_3(\nu)$  sont des matrices de rotation définies par :

$$P(i, \omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.43})$$

$$R_3(\nu) = \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.44})$$

Ces rotations sont appliquées au vecteur vitesse également. L'auteur propose un développement au premier ordre de  $X_{IJK}$  pour de petites variations des éléments orbitaux.

$$\delta X_{IJK} = \frac{\partial X_{IJK}}{\partial X_{oe}} \delta X_{oe} \quad (\text{I.3.45})$$

A l'aide des matrices de rotation citées plus haut, on parvient à écrire  $\delta r_{RSW} = [\delta x, \delta y, \delta z]^t$  et  $\delta v_{RSW} = [\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z]^t$  comme des fonctions des écarts sur les éléments orbitaux :

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{r}{a} \delta a - a \delta e \cos \nu + \frac{a e}{\sqrt{1-e^2}} \delta M \sin \nu \\ \delta y &= a \left( 1 + \frac{1}{1-e^2} \frac{r}{a} \right) \delta e \sin \nu + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} \delta M + r (\delta \omega + \delta \Omega \cos i) \\ \delta z &= r (\delta i \sin \alpha_{nu} - \delta \Omega \sin i \cos \alpha_{nu}) \\ \delta v_x &= -\frac{n a \sin \nu}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{e}{2a} \delta a + \frac{a}{r} \delta e \right) - \frac{n a^3}{r^2} \delta M \\ &\quad - \frac{n a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} (\delta \omega + \delta \Omega \cos i) \\ \delta v_y &= \frac{n a}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{e + \cos \nu}{1-e^2} \delta e - \frac{1-e^2}{2r} \delta a + e (\delta \omega + \delta \Omega \cos i) \sin \nu \right) \\ \delta v_z &= \frac{n a}{\sqrt{1-e^2}} ((\cos \theta + e \cos \omega) \delta i + \sin i (\sin \theta + e \sin \omega) \delta \Omega) \end{aligned} \quad (\text{I.3.46})$$

Cette transformation n'a pas été considérée dans les comparaisons présentées précédemment. La raison est liée à la nature des variables relatives étudiées, en particulier les composantes de vitesse relative. Pour la transformation de Garrison, ainsi que celle développée dans ce chapitre, l'intérêt est porté sur les composantes de la *vitesse locale dans le repère local centré sur la cible*. Casotto s'intéresse cependant à la *différence des vitesses absolues dans le repère local centré sur la cible*. La comparaison des composantes de vitesse ne peut avoir de sens dans ce cas. Les relations obtenues pour la position relative sont équivalentes à celles de Garrison [25].

## Chapitre 4

# Outils de simulation du mouvement orbital

### Sommaire

---

<b>4.1 Objectifs</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>4.2 Simulateur non linéaire du mouvement orbital</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>4.3 Tests de Validation</b> . . . . .	<b>105</b>
4.3.1 Mouvement képlérien . . . . .	105
4.3.2 Aplatissement des pôles . . . . .	106
4.3.3 Frottement atmosphérique . . . . .	107

---

## 4.1 Objectifs

Une bibliothèque Simulink® a été développée pour les besoins de la thèse. Les modèles et les algorithmes présentés tout au long de ce document y sont codés sous forme de blocs et de fonctions Matlab. Un bloc de simulation non linéaire du mouvement orbital en fait partie. Il s'agit du bloc *satellite orbital model*.

Dans cette section, une présentation détaillée du bloc *satellite orbital model* est donnée. Il s'agit de citer les équations dynamiques de base ainsi que le mode d'emploi du simulateur. Des tests de validation sont ensuite effectués. Ils portent sur les différentes configurations dans lesquelles le simulateur peut fonctionner, l'objectif étant de démontrer la fiabilité de ce simulateur en tant qu'un outil de validation.

---

## 4.2 Simulateur non linéaire du mouvement orbital

```

>u_r_n      oe_out_ns>
>           oe_class>
>u_s_t      xyz_inertial>
>u_w       oe_ini>

Satellite_orbite_model
equinoctial_orbital_elements
version2

```

FIG. 4.1 – Modèle non linéaire du mouvement orbital

Ce simulateur a pour fonction de calculer la variation au cours du temps des éléments orbitaux d'un satellite évoluant dans le champ gravitationnel de la Terre, sous l'effet de certaines perturbations qu'il peut subir au cours de sa révolution.

Il permet également de déterminer l'évolution temporelle de la position et de la vitesse du satellite dans le repère inertiel.

Le noyau du simulateur est un intégrateur des équations de **Gauss**, écrites sous une forme non singulière qui permet de couvrir toutes les excentricités  $e \in [0, 1 - \epsilon]$  et inclinaisons  $i \in [0, \pi - \epsilon]$ , il fonctionne selon le schéma représenté sur la figure 4.2.

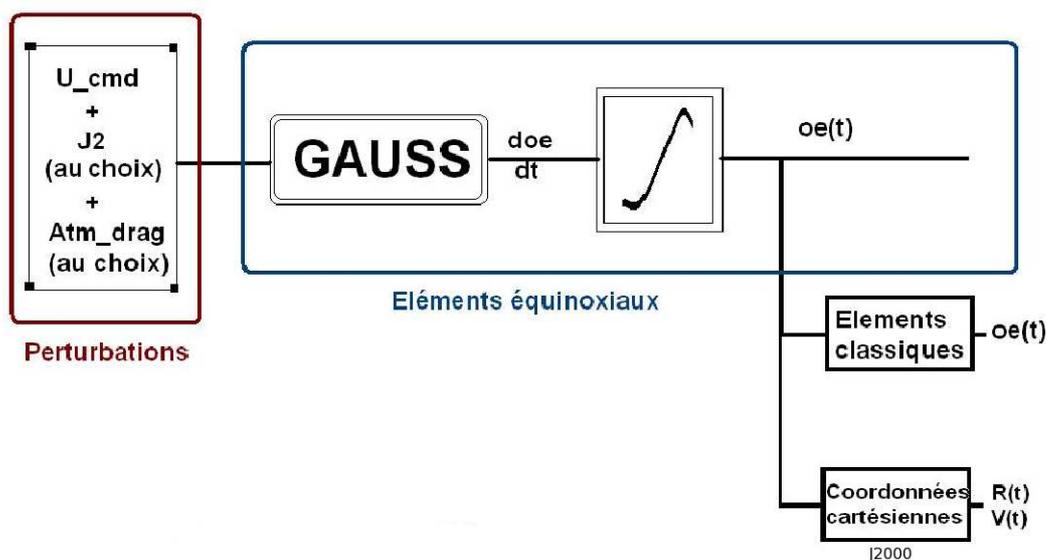


FIG. 4.2 – Noyau du simulateur

Rappelons que les équations de **GAUSS**, dans la version classique, s'expriment ainsi [6] dans la base  $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$  :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [a_{\gamma_R} e \sin \nu + (1 + e \cos \nu) a_{\gamma_S}] \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[ a_{\gamma_R} \sin \nu + \left( \cos \nu + \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right) a_{\gamma_S} \right] \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r \cos \theta}{na^2 \sqrt{1-e^2}} a_{\gamma_W} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin \theta}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} a_{\gamma_W} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -a_{\gamma_R} \cos \nu + \left( 1 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \sin \nu \right) a_{\gamma_S} \right] - \frac{r \sin \alpha \nu \cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} a_{\gamma_W} \\
\frac{d\nu}{dt} &= n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ \cos \nu a_{\gamma_R} - \frac{2 + e \cos \nu}{1 + e \cos \nu} a_{\gamma_S} \right]
\end{aligned} \tag{I.4.1}$$

avec :

- $[a, e, i, \Omega, \omega, \nu]$  sont les éléments orbitaux classiques ;
- $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu}$  est le module du vecteur position ;
- $\theta = \nu + \omega$  est la position sur orbite (PSO) ;
- $[a_{\gamma_R}, a_{\gamma_S}, a_{\gamma_W}]$  sont les composantes de l'accélération perturbatrice dans la base  $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$ .

Un certain nombre de termes de ces équations présente des singularités pour  $e = 0$  ou  $i = 0$ , d'où la nécessité d'utiliser une transformation afin que les équations soient utilisables dans toutes les configurations orbitales.

On trouve dans la littérature plusieurs transformations permettant de contourner ces singularités. Notre choix s'est porté sur les éléments orbitaux non singuliers équinoxiaux (en version modifiée) qui présentent l'avantage d'être définis pour toutes les configurations possibles. On trouve la définition des paramètres équinoxiaux dans [57] :

$$\begin{aligned}
p &= a(1-e^2) \\
f &= e \cos(\Omega + \omega) \\
g &= e \sin(\Omega + \omega) \\
h &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega \\
k &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \\
L &= \Omega + \omega + \nu
\end{aligned} \tag{I.4.2}$$

Dans ce qui suit, nous allons adopter la notation suivante :

$$\begin{aligned} X_{OE_c} &= [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ \nu]^t \\ X_{OE_{eq}} &= [p \ f \ g \ h \ k \ L]^t \end{aligned} \quad (\text{I.4.3})$$

Notons que la transformation donnée par l'équation (II.B.6) est définie pour toutes les valeurs des éléments orbitaux classiques utilisées. La transformation inverse est donnée par :

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{1 - f^2 - g^2} \\ e &= \sqrt{f^2 + g^2} \\ i &= 2 \tan^{-1} \sqrt{h^2 + k^2} \\ \Omega &= \tan^{-1} \frac{k}{h} \end{aligned} \quad (\text{I.4.4})$$

$$\begin{aligned} \omega &= \tan^{-1} \frac{g}{f} - \tan^{-1} \frac{h}{k} \\ \nu &= L - \tan^{-1} \frac{g}{f} \end{aligned}$$

Les équations de la dynamique sont données par [57], [43] :

$$\frac{dX_{OE_{eq}}}{dt} = A \vec{a}_\gamma + B \quad (\text{I.4.5})$$

$\vec{a}_\gamma$  étant la somme des accélérations perturbatrices extérieures exprimées dans  $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$ , avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2p}{w} \sqrt{\frac{p}{\mu}} & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin L & \sqrt{\frac{p}{\mu w}} \frac{1}{w} ((w+1) \cos L + f) & -\sqrt{\frac{p}{\mu w}} \frac{g}{w} (h \sin L - k \cos L) \\ -\sqrt{\frac{p}{\mu}} \cos L & \sqrt{\frac{p}{\mu w}} \frac{1}{w} ((w+1) \sin L + g) & \sqrt{\frac{p}{\mu w}} \frac{f}{w} (h \sin L - k \cos L) \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \cos L}{2w} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \sin L}{2w} \\ 0 & 0 & \frac{1}{w} \sqrt{\frac{p}{\mu}} (h \sin L - k \cos L) \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.6})$$

$$B = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{w^2}{p^2} \sqrt{\mu p} \right]^t \quad (\text{I.4.7})$$

avec :

$$\begin{aligned} s^2 &= 1 + h^2 + k^2 \\ w &= 1 + f \cos L + g \sin L \end{aligned} \quad (\text{I.4.8})$$

Le passage vers les coordonnées cartésiennes inertielles s'opère *via* les relations suivantes [11] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_T M} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{s^2}(\cos L + \alpha^2 \cos L + 2hk \sin L) \\ \frac{r}{s^2}(\sin L - \alpha^2 \sin L + 2hk \cos L) \\ \frac{2r}{s^2}(h \sin L - k \cos L) \end{bmatrix} \\ \vec{V} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}}(\sin L + \alpha^2 \sin L - 2hk \cos L + g - 2f h k + \alpha^2 g) \\ -\frac{1}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}}(-\cos L + \alpha^2 \cos L + 2hk \sin L - f + 2g h k + \alpha^2 f) \\ \frac{2}{s^2} \sqrt{\frac{\mu}{p}}(h \cos L + k \sin L + f h + g k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.4.9})$$

avec :

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{w} \\ \alpha^2 &= h^2 - k^2 \end{aligned} \quad (\text{I.4.10})$$

Les perturbations de nature différente sont prises en compte en exprimant les accélérations qu'elles engendrent dans  $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$  :

1. **Aplatissement des pôles ( $J_2$ )** : l'accélération perturbatrice est donnée par :

$$\vec{a}_{j_2} = -\frac{\mu J_2 R_e^2}{r^4} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{12(h \sin L - k \cos L)^2}{(1 + h^2 + k^2)^2} \right] \\ 12 \left[ 1 - \frac{(h \sin L - k \cos L)(h \cos L + k \sin L)}{(1 + h^2 + k^2)^2} \right] \\ 6 \left[ 1 - \frac{(h \sin L - k \cos L)(1 - h^2 - k^2)}{(1 + h^2 + k^2)^2} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.11})$$

Pour trouver cette expression, on utilise la relation donnée dans [6] - page 28 :

$$a_{j_2} = -\frac{3 R_{eq}^2 \mu J_2}{2 r^4} \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta \\ 2 \sin^2 i \sin \theta \cos \theta \\ 2 \cos i \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.12})$$

On remplace ensuite les éléments classiques par leurs expressions (équation (I.4.4)) et la simplification donne l'expression (I.4.11).

\* Astuce : on montre d'abord, en se basant sur l'équation (I.4.4), que :

$$\sin^2 i = 4 \frac{h^2 + k^2}{(1 + h^2 + k^2)^2} \quad (\text{I.4.13})$$

$$\sin^2 \theta = 3 \frac{(h \sin L - k \cos L)^2}{h^2 + k^2} \quad (\text{I.4.14})$$

2. **Frottement atmosphérique** : l'accélération perturbatrice est donnée par :

$$\vec{a}_d = -\frac{1}{2} \rho S C_d \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2(g \sin L + f \cos L) + f^2 + g^2} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\mu}{p}}(f \sin L - g \cos L) \\ \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + f \cos L + g \sin L) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.15})$$

En se basant sur l'équation (1.62) de [6], page 29 :

$$\vec{a}_d = -\frac{1}{2} \frac{\rho S C_d}{m} V^2 \vec{u}_v \quad (\text{I.4.16})$$

on peut écrire dans  $[\vec{R}, \vec{S}, \vec{W}]$  que

$$\vec{a}_d = -\frac{1}{2} \frac{\rho S C_d}{m} V \begin{bmatrix} V_r \\ V_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.17})$$

$V$  étant le module du vecteur vitesse et  $V_r, V_s$  ses composantes dans le plan  $[\vec{R}, \vec{S}]$ .  
On a :

$$V = \sqrt{\frac{\mu(1 + 2e \cos \nu + e^2)}{a(1 - e^2)}} \quad (\text{I.4.18})$$

Cette expression s'écrit en fonction des éléments orbitaux :

$$V = \sqrt{\frac{\mu(1 + 2(g \sin L + f \cos L) + f^2 + g^2)}{p}} \quad (\text{I.4.19})$$

Il reste à établir les expressions de  $V_r$  et  $V_s$ .

On peut écrire :

$$V_r = -\sqrt{\frac{\mu a}{r}} \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{I.4.20})$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu a}{r}} \sqrt{1 - e^2} \frac{\cos \nu + e}{1 + e \cos \nu}$$

En remplaçant dans (I.4.20), avec  $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$ , on obtient :

$$V_r = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sin \nu \quad (\text{I.4.21})$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{a}} (1 + \cos \nu)$$

On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned}\sin \nu &= \sin(\nu + \Omega + \omega) \\ &= \cos(\nu + \Omega + \omega) \sin(\Omega + \omega) - \sin(\nu + \Omega + \omega) \cos(\Omega + \omega) = -\frac{f \sin L - g \cos L}{e}\end{aligned}$$

De même, on montre que  $\cos \nu = \frac{f \cos L + g \sin L}{e}$ . Il suffit de remplacer  $\cos \nu$  et  $\sin \nu$  par leur expressions dans (I.4.21) pour retrouver les équations du frottement atmosphérique (I.4.15).

## 4.3 Tests de Validation

### 4.3.1 Mouvement képlérien

Dans cette section, on met en évidence la capacité du simulateur à reproduire le mouvement orbital dans des situations orbitales diverses, présentant éventuellement des singularités, par rapport à l'excentricité et l'inclinaison, et ceci en l'absence de toute perturbation orbitale. Pour cela, on choisit les configurations définies dans le tableau 4.1 :

Configurations	1	2	3	4	5
a (demi grand axe) -m-	$1.10^7$	$1.10^7$	$1.10^7$	$1.10^7$	$1.10^7$
e (excentricité)	0	0.0001	0	0.95	0.80
i (inclinaison) -rad-	0	0	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/2$
$\Omega$ (RAAN) -rad-	0	0	0	0	0
$\omega$ (argument du périhélie) -rad-	0	0	0	0	0

TAB. 4.1 – Configurations orbitales pour les tests en mouvement képlérien

Les configurations 1-3 sont *circulaires* ; les configurations 1-2-5 sont *équatoriales* ; la configuration 4 est un cas quelconque. Les combinaisons retenue permettent de tester les différents cas de fonctionnement du simulateur.

On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution des coordonnées cartésiennes sur une période (9952 s) en l'absence de perturbation. Cela permet de vérifier si le simulateur, dans les conditions singulières, ne diverge pas.

Ensuite, on calcule l'évolution des éléments orbitaux au cours du test, qui devrait être nulle, mis à part la variation de  $\nu$ , car aucune perturbation n'affecte le système.

Enfin les résultats obtenus sont comparés aux sorties d'un double intégrateur des équations de la dynamique newtonienne selon l'équation :

$$\overrightarrow{O_T M} \ddot{\quad} = -\frac{\mu}{O_T M^3} \overrightarrow{O_T M} \quad (\text{I.4.22})$$

Ce dernier test est censé apporter plus de crédibilité aux résultats, en négligeant les erreurs numériques induites par la double intégration. Concernant les éléments orbitaux, leur variation observée est *nulle*, mis à part celle de l'anomalie vraie qui est égale à  $2\pi$  dans tous les cas.

Le test comparatif avec le double intégrateur a donné les résultats répertoriés dans le tableau 4.2. Signalons que le pas d'intégration a été diminué afin d'éviter les erreurs numériques dues à la double intégration. A travers ces simulations, nous avons pu établir

Configurations	1	2	3	4	5
$\max(\frac{\Delta O_{TM}}{O_{TM}})$ (m)	$3 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-11}$
$\max(\frac{\Delta V}{V})$ (m/s)	$2 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-9}$

TAB. 4.2 – Résultat de comparaison avec un double intégrateur après une période orbitale avec  $\Delta O_{TM}$  : différence en position,  $\Delta V$  différence en vitesse.

que le simulateur fonctionne dans toutes les configurations orbitales képlériennes usuelles, mêmes celles présentant des singularités, tout en gardant une bonne précision.

### 4.3.2 Aplatissement des pôles

Dans cette partie, nous validons le comportement du simulateur vis-à-vis de la perturbation engendrée par l'aplatissement des pôles. Pour cela, on se base sur les équations exprimant la variation *moyenne* des éléments orbitaux sous l'effet de  $J_2$  [50].

$$\dot{\bar{\Omega}} = -\frac{3\bar{n}J_2R_{eq}^2}{2\bar{a}^2(1-\bar{e}^2)^2} \cos \bar{i} \quad (\text{I.4.23})$$

$$\dot{\bar{\omega}} = -\frac{3\bar{n}J_2R_{eq}^2}{2\bar{a}^2(1-\bar{e}^2)^2} \left( \frac{5}{2} \sin^2 \bar{i} - 2 \right) \quad (\text{I.4.24})$$

$$\Delta n = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{R_t}{\bar{a}} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} \frac{3 \cos^2 \bar{i} - 1}{(1-\bar{e}^2)^{3/2}} \quad (\text{I.4.25})$$

La variation moyenne des autres éléments est nulle.

Pour ce test, on choisit les configurations répertoriées dans le tableau 4.3.

La configuration dite 'MOLNIYA' est utilisée par des satellites russes portant le même nom. Elle est caractérisée par une variation moyenne nulle de  $\omega$ , angle de saturation d'apogée. En pratique, elle est elliptique (voir fortement elliptique), inclinée à  $i = 63,4^\circ$ , permettant aux satellites d'imagerie de couvrir tout le territoire russe, sans avoir à faire des corrections coûteuses de la position de l'apogée.

La configuration héliosynchrone est utilisée pour les satellites d'observation et d'imagerie. Elle est caractérisée par un choix des différents éléments orbitaux tel que  $\dot{\bar{\Omega}} = \Omega_{terre/soleil}$ .

Configuration	1	2 (Molniya)	3 (héliosynchrone+ elliptique)
a	$1.10^7$	$1.10^7$	$1.10^7$
e	0	0.01	0.2
i	$\pi/6$	$\sin^{-1}(2/\sqrt{5})$	1.8814
$\Omega$	$\pi/5$	$\pi/5$	$\pi/5$
$\omega$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
$\nu_0$	$\pi/6$	$\pi/6$	$\pi/6$

TAB. 4.3 – Configurations pour les tests avec prise en compte de l’aplatissement des pôles

Concrètement ce choix fait que le satellite passe au dessus d’un même point terrestre à la même heure, et donc dans les mêmes conditions d’ensoleillement.

Pour chaque configuration, on calcule la variation moyenne des paramètres orbitaux sur 3 périodes, et on compare avec la valeur prédite théoriquement.

Les résultats sont portés sur le tableau 4.4. Les résultats valident l’utilisation du simu-

#### 1- Variation moyenne de l’élément $\Omega$

Configuration	1	2 (Molniya)	3 (héliosynchrone+ elliptique)
$\dot{\Omega}_{theorique}$	$-3.6101 \cdot 10^{-7}$	$-1.8646 \cdot 10^{-7}$	$1.3824 \cdot 10^{-7}$
$\dot{\Omega}_{simulation}$	$-3.6171 \cdot 10^{-7}$	$-1.8630 \cdot 10^{-7}$	$1.3769 \cdot 10^{-7}$

#### 2- Variation moyenne de l’élément $\omega$

Configuration	1	2 (Molniya)	3 (héliosynchrone+ elliptique)
$\dot{\omega}_{theorique}$	n/a	0	$-1.2060 \cdot 10^{-7}$
$\dot{\omega}_{simulation}$	n/a	$5.4161 \cdot 10^{-12}$	$-1.1933 \cdot 10^{-7}$

TAB. 4.4 – Résultat des tests avec prise en compte de l’aplatissement des pôles

lateur dans les orbites perturbées par l’aplatissement des pôles, du moins vis-à-vis de la variation moyenne (séculaire) des paramètres orbitaux. En ce qui concerne la validation de la variation périodique, il serait nécessaire d’imaginer un autre moyen de validation.

### 4.3.3 Frottement atmosphérique

Dans cette partie est validé le comportement du simulateur par rapport au frottement atmosphérique, en mesurant l’évolution sur une période  $T$  des paramètres suivants :

1. demi-grand-axe ;
2. vitesse ;
3. période orbitale.

Concernant le demi-grand-axe, on a d'après les équations de GAUSS [6] :

$$\frac{da}{dt} = K \frac{S}{M} = -\rho C_d V^2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{S}{M}$$

Si l'orbite est faiblement excentrique on peut écrire

$$V = an$$

où  $n$  est le mouvement moyen.

On obtient donc :

$$\frac{da}{dt} = -\rho C_d (an)^2 n \frac{S}{M}$$

Sur une période d'évolution, on a :

$$\Delta a = -\rho C_d (an)^2 n \frac{S}{M} T$$

Sachant que  $T = \frac{2\pi}{n}$ , on aboutit à :

$$\Delta a = -2\pi \rho C_d a^2 \frac{S}{M} \quad (\text{I.4.26})$$

Concernant  $V$ , on a :

$$V = an = a \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

A partir de  $\Delta a$ , on déduit :

$$\Delta V = -\frac{V}{2a} \left( -2\pi \rho C_d a^2 \frac{S}{M} \right)$$

Soit :

$$\Delta V = 2\pi \rho V C_d a \frac{S}{M} \quad (\text{I.4.27})$$

Concernant la variation de la période :

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

donc :

$$\Delta T = -\frac{2\pi}{n^2} \Delta n$$

avec :

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \Rightarrow \Delta n = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\Delta a}{a} = -\frac{3}{2} n \frac{\Delta a}{a}$$

On obtient :

$$V = a n \Rightarrow \Delta n = -\frac{3}{2} V \frac{\Delta a}{a^2}$$

D'où

$$\Delta T = \frac{3\pi}{n^2} V \frac{\Delta a}{a^2}$$

En remplaçant  $\Delta a$  par son expression (I.4.26) :

$$\Delta T = -\frac{6\pi^2}{n^2} V \rho C_d \frac{S}{M}$$

Finalement :

$$\Delta T = -6\pi^2 \rho C_d \frac{a^2}{V} \frac{S}{M} \quad (\text{I.4.28})$$

Les quantités calculées précédemment sont évaluées avec le simulateur dans les conditions citées dans le tableau 4.3.3.

Paramètre	$a$	$e$	$C_d$	$S$	$\Omega$	$\omega$	$\nu$	$i$
Valeur	7007137 m	$7.1355 \cdot 10^{-5}$	2	$2 \text{ m}^2$	0	0	0	$\pi/6$

TAB. 4.5 – Configuration des tests avec prise en compte du frottement atmosphérique

La simulation est effectuée sur 6000 s avec un pas d'échantillonnage d'une seconde.

Élément	Résultat analytique	Résultat simulateur
$\Delta a$	-0.2102m	-0.2169m
$\Delta V$	$1.1310 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$	$1.0917 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$

TAB. 4.6 – Résultats des tests avec prise en compte du frottement atmosphérique

Les erreurs relatives constatées sont de l'ordre de 3% pour le demi grand axe, et de 3.4% pour la vitesse. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisant quant à la fiabilité du simulateur sous l'effet du frottement atmosphérique. Le modèle de l'atmosphère utilisé est approximatif, et doit être amélioré afin d'apporter plus de réalisme au simulateur.



## Conclusions de la première partie

Dans cette partie, nous avons considéré la modélisation du mouvement relatif des satellites en vue d'applications en guidage. Une étude bibliographique retraçant l'historique des travaux relatifs à cette thématique a été proposée en premier lieu. Nous avons donné une classification basée sur les techniques utilisées pour l'élaboration de modèles, ainsi que sur les environnements orbitaux considérés. Un certain nombre de contributions a été détaillé ensuite. Ces contributions visent à améliorer certains aspects parfois négligés dans la littérature et mis en lumière lors de l'étude de l'état de l'art.

Une méthodologie de synthèse de modèles a été proposée. Elle permet de suivre une démarche rigoureuse et générale pour l'obtention de modèles d'état. Les résultats issus de la littérature peuvent être retrouvés par une simple application des hypothèses correspondantes. Des perturbations orbitales quelconques peuvent être intégrées d'une manière directe.

Une transformation non linéaire, et son homologue linéaire, des différences des éléments orbitaux en paramètres cartésiens relatifs ont été proposées. La transformation non linéaire permet également d'établir des domaines de validité de la linéarisation. Nous avons pu, ainsi, tracer ces domaines de validité en fonction des écarts en éléments orbitaux et évaluer l'effet des perturbations orbitales.

Un propagateur orbital a été élaboré pour servir d'environnement de simulation pour les aspects de validation numérique. Le comportement du simulateur a été validé en environnement képlérien et perturbé par le frottement atmosphérique et l'aplatissement des pôles.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à la synthèse d'algorithmes de guidage autonome pour le rendez-vous orbital. Certains modèles présentés dans cette partie seront ainsi utilisés dans le cadre des algorithmes de guidage qui seront synthétisés.

---



## Bibliographie

- [1] K.T. Alfriend and H. Schaub. Dynamics and control of spacecraft formations : Challenges and some solutions. *Journal of the Astronautical Sciences*, 48(2) :249–267, 2000.
  - [2] K.T. Alfriend, H. Schaub, and D.-W. Gim. Gravitational perturbations, nonlinearity and circular orbit assumption effects on formation flying control strategies. *AAS 00-012*, 2000.
  - [3] M.L. Anthony and F.T. Sasaki. Rendezvous problem for nearly circular orbits. *AIAA Journal*, 3(9) :1666–1673, 1965.
  - [4] G. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Orlando, Floride, USA, 1985.
  - [5] D. Arzelier and A. Théron. Etude du maintien à poste en boucle fermée par frottement différentiel de la roue interférométrique. Note technique R-S05/VF-0001-038, LAAS-CNRS, Octobre 2007.
  - [6] D. Arzelier, A. Théron, and M. Kara-Zaitri. Etude bibliographique sur la modélisation du mouvement relatif pour le problème du rendez-vous. Note technique Rapport LAAS 08258, CNRS, Mai 2008.
  - [7] H. Baoyin, L. Junfeng, and G. Yunfeng. Dynamical behaviors and relative trajectories of the spacecraft formation flying. *Aerospace Science and technology*, 6 :295–301, 2002.
  - [8] A. Baranov and E.O. Terekhova. Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. *Cosmic Research*, 33 :382–387, 1995.
  - [9] L. Breger and J How. Safe trajectories for autonomous rendezvous of spacecraft. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Hilton Head, South Carolina, 20 - 23 Août 2007.
  - [10] L. Breger and J How. Safe trajectories for autonomous rendezvous of spacecraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 31(5) :1478–1489, 2008.
  - [11] R. A. Brouke and P. J. Cefola. On the equinoctial orbital elements. *Celestial Mechanics*, 5(1) :303–310, 1972.
  - [12] Y.D. Brouwer. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronautical Journal*, 64 :378–397, 1959.
  - [13] M. Capderou. *Satellites : orbites et missions*. Springer, France, 2003.
-

- 
- [14] J.P. Carrou. *Mécanique spatiale*. Cépaduès Editions, 1995.
- [15] T.E. Carter. State transition matrices for terminal rendez vous studies : Brief survey and new examples. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(1) :148–155, janvier-février 1998.
- [16] S. Casotto. Position and velocity perturbations in the orbital frame in terms of classical element perturbations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 55(1) :209–221, 1993.
- [17] J.H. Chiu. *Optimal multiple-impulse nonlinear orbital rendezvous*. PhD thesis, Illinois Univ., Urbana-Champaign., 1984.
- [18] W.H. Clohessy and R.S. Wiltshire. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Astronautical Sciences*, 27(9) :653–658, 1960.
- [19] Charles-Eugène Delaunay. *Théorie du mouvement de la lune*. Mallet-Bachelier, Paris, France, 1878.
- [20] J.P. DeVries. Elliptic elements in terms of small increments of position and velocity components. *AIAA Journal*, 1(11) :2626–2629, 1963.
- [21] W. Fehse, editor. *Automated rendezvous and docking of spacecraft*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [22] J. Fontdecaba. *Dynamics of formation flying :Applications to Earth and Universe observation*. PhD thesis, Observatoire de la Côte d’Azur, 2008.
- [23] J. Fourcade. Mission Analysis and Orbit Control of Interferometric Wheel Formation Flying. In *ESA Special Publication*, volume 548 of *ESA Special Publication*, pages 41–+, 2004.
- [24] J. Fourcade. Maintien à poste d’une formation par frottement différentiel. Note technique DCT/SB/MO 2002.760, CNES, mai 2005.
- [25] J.L. Garrison, T.G. Gardner, and P. Axelrad. Relative motion in highly elliptical orbits. In *Proceedings of the Advances in the Astronautical Sciences, AAS 95-194*, 1995.
- [26] S. Gaulocher, J.P. Chétien, C. Pittet, M. Delpéch, and D. Alazard. Closed-loop control of formation flying satellites : time and parameter varying framework. In *2nd Int. Symposium on formation flying missions and technologies*, Washington, DC, USA, 2004.
- [27] D.-W. Gim and K.T. Alfriend. The state transition matrix of relative motion for the perturbed non-circular reference orbit. 2001.
- [28] D.-W. Gim and K.T. Alfriend. The state transition matrix of relative motion for the perturbed non-circular reference orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(6) :956–971, 2003.
- [29] D.-W. Gim and K.T. Alfriend. Satellite relative motion using differential equinoctial elements. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 92 :295–336, 2005.
- [30] J.F. Hamel and J. de LaFontaine. Linearized dynamics of formation flying spacecraft on a  $j_2$ -perturbed elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 30(6) :1649–1658, 2007.
-

- 
- [31] G.W. Hill. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics*, 1 :5–26, 1878.
- [32] M Humi and T. Carter. Rendezvous equations in a central-force field with linear drag. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25(1) :74–79, 2002.
- [33] D.J. Irvin. A study of linear vs nonlinear control techniques for the reconfiguration of satellite formations. Master’s thesis, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, USA, 2001.
- [34] O. Junge, J.E. Marsden, and S. Ober-Blöbaum. Optimal reconfiguration of formation flying spacecraft - a decentralized approach. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, pages 5210–5216, San Diego, Californie, USA, décembre 2006.
- [35] C.D. Kaarlgard. Second-order relative motion equations. Master’s thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, USA, 2001.
- [36] J.A. Kechichian. Motion in a general elliptic orbit with respect to a dragging and precessing coordinate frame. *Journal of Astronautical Sciences*, 46(1) :25–46, 1998.
- [37] Y. Kozai. The motion of a close earth satellite. *Astronautical Journal*, 64 :367–377, 1959.
- [38] C. Lane and P. Axelrad. Formation design in eccentric orbits using linearized equations of motion. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 29(1) :146–160, 2006.
- [39] D.F. Lawden. Fundamentals of space navigation. *Journal of the British Interplanetary Society*, 2 :87–101, 1954.
- [40] D.F. Lawden. *Optimal trajectories for space navigation*. Butterworth, London, England, 1963.
- [41] R.G. Melton. Time-explicit representation of relative motion between elliptical orbits. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(4) :604–610, 2000.
- [42] O. Montenbruck and E. Gill. *Satellite orbits*. Springer, Berlin, Germany, 2001.
- [43] Bo J. Naasz. Classical element feedback control for spacecraft orbital maneuvers. Master’s thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2002.
- [44] J.E. Prussing and B.A. Conway. *Orbital mechanics*. Oxford University Press, New York, New York, USA, 1993.
- [45] D.P. Scharf, F. Hadaegh, and S.R. Ploen. A survey of spacecraft formation flying guidance and control (part i) : Guidance. In *American Control Conference*, pages 1733–1739, Denver, Colorado, USA, Juin 2003.
- [46] H. Schaub and J.L. Junkins. *Analytical mechanics of space systems*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
- [47] S.A. Schweighart. Development and analysis of a high fidelity linearized  $J_2$  model for satellite formation flying. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [48] S.A. Schweighart and R.J. Sedwick. High fidelity linearized  $J_2$  model for satellite formation flight. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25(6) :1073–1080, 2002.
-

- 
- [49] H. Seifert and M. Summerfield. *Space Technology*. John Wiley and Sons, New York, USA, 1959.
- [50] P. Sengupta. *Dynamics and control of satellite relative motion in a central gravitational field*. PhD thesis, Texas A&M University, Décembre 2006.
- [51] M.J. Sidi. *Spacecraft dynamics and control*. Cambridge University Press, New York, USA, 1997.
- [52] A. Théron, F. Jouhaud, and J.P. Chrétien. Modélisation du mouvement orbital relatif entre deux satellites. Note technique 1/08282, ONERA, Janvier 2004.
- [53] J. Tschauner. The elliptic orbit rendezvous. In *AIAA 4th Aerospace Sciences Meeting*, Los Angeles, Californie, USA, Juin 1966.
- [54] J. Tschauner and P. Hempel. Optimale beschleunigungs-programme für des rendezvous manover. *Astronautica Acta*, 5-6 :296–307, 1964.
- [55] V.V.S.S. Vaddi. *Modelling and control of satellite formations*. PhD thesis, Texas A and M University, Mai 2003.
- [56] D.A. Vallado. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Space Technology Library. Kluwer Academic Publishers, El Segundo, California, USA, 2001.
- [57] M.J.H Walker, B. Ireland, and J. Owens. A set of modified equinoctial elements. *Celestial Mechanics*, 36(1) :409–419, 1985.
- [58] A.D. Wheelon. *Midcourse and terminal guidance*. Space Technology Library. Wiley, New York, New York, USA, 1959.
- [59] K. Yamanaka and F. Ankersen. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25(1), janvier-février 2002.
- [60] H. Yan. *Dynamics and real-time optimal control of satellite attitude and satellite formation systems*. PhD thesis, Texas A and M University, Août 2006.
-

## Deuxième partie

### Problème du rendez-vous orbital

---







# Introduction

Dans ce second volet de la thèse, l'intérêt est porté sur la résolution du problème de rendez-vous orbital. Les problèmes considérés sont de nature impulsionnelle, à temps fixé, de dynamique linéaire et à consommation minimale de carburant. Rappelons les deux formulations du problème, données en introduction générale :

– formulation différentielle :

$$\begin{aligned}
 J_*(\xi, \Delta v_i, \beta(t), t_i, N) &= \min_{\Delta v_i, \beta(t_i), t_i, N} J_* \\
 \text{sous} \quad \dot{X}(t) &= A(t)X(t) \\
 &+ B(t) \sum_{i=1}^N \beta(t_i) \Delta v_i \delta(t - t_i) \\
 \beta_x^2(t_i) + \beta_y^2(t_i) + \beta_z^2(t_i) &= 1, \forall i = 1, \dots, N \\
 \Psi(t_1, X(t_1), t_f, X(t_f), \xi) &= 0 \\
 0 \leq \Delta \underline{v} \leq \Delta v_i \leq \Delta \bar{v}, \forall i &= 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{II.1}$$

– formulation algébrique

$$\begin{aligned}
 J_*(\xi, \Delta v_i, \beta(t), t_i, N) &= \min_{\Delta v_i, \beta(t_i), t_i, N} J_* \\
 \text{sous} \quad X(t_f) &= \Phi(t_f, t_1)X(t_1) \\
 &+ \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i) B(t_i) \beta(t_i) \Delta v_i \\
 \beta_x^2(t_i) + \beta_y^2(t_i) + \beta_z^2(t_i) &= 1, \forall i = 1, \dots, N \\
 \Psi(t_1, X(t_1), t_f, X(t_f), \xi) &= 0 \\
 0 \leq \Delta \underline{v} \leq \Delta v_i \leq \Delta \bar{v}, \forall i &= 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{II.2}$$

avec :

- $\xi$  : paramètres définissant le problème traité ;
- $\Delta v_i$  : amplitude de la  $i^{\text{ème}}$  impulsion ;
- $\beta(t_i)$  : direction de la  $i^{\text{ème}}$  impulsion ;
- $t_i$  : date d'application de la  $i^{\text{ème}}$  impulsion ;
- $J_*$  : critère de consommation  $J_1$  ou  $J_2$  ;
- $X$  : vecteur d'état du mouvement relatif issu de la navigation relative ;
- $\Psi$  : conditions aux bouts ;
- $N$  : nombre d'impulsions.

Les critères de consommation sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{i=1}^N \|\overrightarrow{\Delta V}(t_i)\|_2 = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_x^2(t_i) + \Delta V_y^2(t_i) + \Delta V_z^2(t_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta v_i^2 (\beta_x^2(t_i) + \beta_y^2(t_i) + \beta_z^2(t_i))} = \sum_{i=1}^N \Delta v_i
 \end{aligned} \tag{II.3}$$

où  $\Delta v = [\Delta v_1 \ \cdots \ \Delta v_N]^t \in \mathcal{R}^N$  est le vecteur qui contient les amplitudes des impulsions appliquées aux dates  $t_i, i = 1, \dots, N$ .

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \sum_{i=1}^N \|\overrightarrow{\Delta V}(t_i)\|_1 = \sum_{i=1}^N (|\Delta V_x(t_i)| + |\Delta V_y(t_i)| + |\Delta V_z(t_i)|) \\
 &= \sum_{i=1}^N \Delta v_i (|\beta_x(t_i)| + |\beta_y(t_i)| + |\beta_z(t_i)|) = \sum_{i=1}^N \Delta v_i \alpha(t_i)
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

où  $\alpha(t) = (|\beta_x(t)| + |\beta_y(t)| + |\beta_z(t)|)$  et  $\Delta V = [\Delta V(t_1)^t \ \cdots \ \Delta V(t_N)^t]^t \in \mathcal{R}^{3N}$ .

Les travaux présentés tout au long de cette partie sont basés principalement sur la formulation (II.2), fondée sur la connaissance de la matrice de transition directe du mouvement. Cette formulation offre l'avantage de fournir des solutions pouvant être exploitées immédiatement, sans nécessiter une intégration préalable, analytique ou numérique. Ceci constitue un atout important quant à l'embarcabilité des algorithmes synthétisés.

Le problème (II.2) est un problème d'optimisation paramétrique sous contraintes qui peut être approché de diverses manières. Les principales difficultés de résolution sont engendrées par les variables  $t_i$  et  $N$ . Le nombre d'impulsions  $N$  intervient d'une manière implicite à travers le nombre de variables du problème. Peu de résultats présentés dans la littérature permettent de fixer le nombre d'impulsions nécessaires afin d'aboutir à une solution à coût minimal. Dans [59], Neustadt montre que le nombre d'impulsions conduisant à une consommation minimale est au plus égal au nombre de paramètres fixés à la fin du rendez-vous  $t_f$ . Un rendez-vous à  $N^*$  conditions finales en position et vitesse relatives requiert au maximum  $N^*$  impulsions pour une solution à consommation minimale. Au delà de  $N^*$  impulsions, aucune amélioration supplémentaire ne peut être apportée au coût. La nature du problème implique également que deux impulsions sont nécessaires au minimum pour

réaliser la manœuvre.

La prise en compte des dates d'application des impulsions dans le problème d'optimisation induit d'autres difficultés. Ces dates interviennent d'une manière implicite, à travers les matrices de transition qui, comme nous avons pu le voir dans la première partie de la thèse, peuvent être de grande complexité. Ainsi, des techniques de simplification du problème doivent être employées, afin de rendre le problème solvable analytiquement et numériquement. Les simplifications opérées sont liées à la méthode de résolution utilisée, qu'elle soit *directe* ou *indirecte*.

La classe des méthodes *directes* [11, 13] réunit l'ensemble des techniques de résolution de problèmes de commande optimale par paramétrisation des variables du système et discrétisation des contraintes. Dans ces méthodes, l'optimalité de la solution par rapport au problème paramétré et discrétisé, est assurée par les outils de programmation linéaire et non linéaire utilisés lors de la résolution. Les méthodes *indirectes* [79] basent l'optimalité de leurs résultats sur les outils la théorie de la commande optimale, tels que le principe de Pontryagin pour la formulation d'un problème aux deux bouts à travers l'écriture des conditions nécessaires d'optimalité. La complexité de ces méthodes réduit leurs champs d'application et donne un certain avantage pratique aux méthodes directes. D'autres techniques de résolution du rendez-vous existent à coté des deux classes citées. Il s'agit de méthodes *traditionnelles*, non optimales, généralement basées sur le transfert de Hohman et la résolution du problème de Lambert [73, 35]. Elles seront brièvement évoquées dans le prochain chapitre.

Dans cette partie, nous développons trois algorithmes basés sur les méthodes citées plus haut. Pour chaque classe de méthodes, une étude théorique ainsi qu'une analyse bibliographique des travaux précédents sont présentées. Ensuite, les techniques visant à prendre en compte le nombre et les dates des impulsions dans le processus d'optimisation sont détaillées. Tous les algorithmes développés sont comparés et validés à travers des simulations portant sur des cas de rendez-vous académiques ou réels. Nous présentons, au préalable, deux méthodes non optimales et dont la mise en œuvre est très simple afin de familiariser le lecteur avec les différents aspects que nous traitons dans la suite et souligner l'importance du choix des dates d'application des impulsions dans le procédé d'optimisation.

---



# Chapitre 5

## Les méthodes conventionnelles

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>125</b>
<b>5.2</b>	<b>Guidage non optimal par une méthode analytique</b>	<b>126</b>
5.2.1	Problème de Lambert	126
5.2.2	Solution analytique à 2 impulsions	127
5.2.3	Solution à N impulsions	129
<b>5.3</b>	<b>Guidage sous-optimal par une méthode heuristique</b>	<b>130</b>
5.3.1	Motivations	130
5.3.2	Mise en œuvre	130
<b>5.4</b>	<b>Commentaires</b>	<b>132</b>

---

### 5.1 Introduction

L'objectif des méthodes présentées dans ce chapitre est de déterminer des solutions au problème de rendez-vous multi-impulsionnel d'une manière simple. La résolution se base sur des outils de la mécanique spatiale et ne garantit pas l'optimalité vis-à-vis de la consommation. Les solutions obtenues permettent, toutefois, de faire une première estimation de l'ordre de grandeur des poussées nécessaires à la réalisation du rendez-vous. Cette information peut servir notamment à dimensionner les moteurs orbitaux utilisés lors de l'opération. Deux méthodes sont présentées : une méthode analytique où les dates d'impulsions doivent être fixées *a priori*, et une méthode heuristique où les dates subissent une optimisation visant à baisser la consommation. A travers la comparaison des deux approches, l'impact du choix des dates sur le coût est mis en évidence.

---

## 5.2 Guidage non optimal par une méthode analytique

Le problème de rendez-vous tel qu'il a été défini précédemment peut se reformuler comme un problème aux deux bouts (TPBVP) dont l'exemple le plus typique est *le problème de Lambert*. Nous rappelons brièvement la formulation du problème de Lambert ainsi que le théorème associé. Pour une présentation plus complète du problème, les références [35], [67], [7], [25], [72] traitent du cas avec une unique révolution alors que [73] traite le cas généralisé à plusieurs révolutions.

### 5.2.1 Problème de Lambert

Le problème de Lambert est défini comme suit :

#### Problème 1 (Lambert)

Déterminer une trajectoire elliptique képlérienne reliant deux points de l'espace  $P_1$  et  $P_2$  non alignés avec le centre attractif  $O_T$  en un temps de transfert fixé  $\tau_f = t_f - t_1$ .

Le problème de Lambert a été rigoureusement résolu par J.L. Lagrange en 1778 qui a démontré formellement la conjecture formulée par J.H. Lambert en 1761.

#### Théorème 5.2.1 (Lambert)

Le temps de transfert  $\tau_f = t_f - t_1$  n'est fonction que du demi-grand axe de la portion elliptique de transfert  $a$ , de la longueur de la corde  $d$  et de la somme des rayons du foyer aux points de départ  $r_1$  et d'arrivée  $r_2$  (cf. figure 5.1).

$$\sqrt{\mu}\tau_f = f(a, d, r_1 + r_2) = a^{3/2} [\alpha - \beta - (\sin \alpha - \sin \beta)] \quad (\text{II.5.1})$$

où

$$\sin(\alpha/2) = \left( \frac{r_1 + r_2 + d}{4a} \right)^{1/2} \quad \sin(\beta/2) = \left( \frac{r_1 + r_2 - d}{4a} \right)^{1/2} \quad (\text{II.5.2})$$

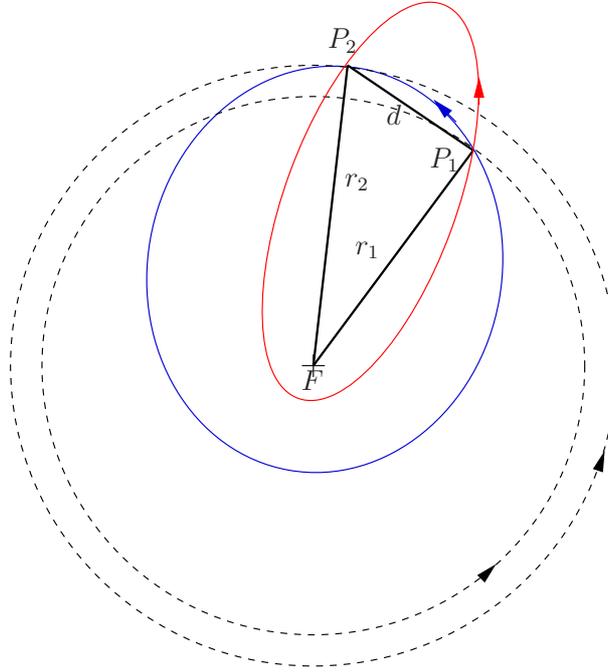


FIG. 5.1 – Géométrie liée aux problème et théorème de Lambert

La nature transcendantale de l'équation de Lambert (II.5.1) ainsi que ses ambiguïtés et indéterminations font que seule une solution numérique itérative par une méthode de descente de gradient de Newton (assimilable à une méthode de tir [70]) est possible pour la détermination de l'orbite de transfert et des incréments de vitesse nécessaires au transfert dans le cas général non linéaire [7], [25], [72]. Le problème de Lambert devient beaucoup plus simple si l'on travaille avec des modèles dynamiques linéaires dont la matrice de transition est connue. Cette constatation a ainsi permis de développer les principales approches analytiques du problème de rendez-vous défini dans un cadre linéaire. Avant de faire une présentation plus générique des méthodes analytiques, nous exposons l'exemple du calcul littéral de la solution à deux impulsions placées respectivement en  $t_1$  et  $t_f$ . Elle peut être facilement retrouvée dans divers textes de référence [69], [83], [25] mais également dans le texte original [26].

### 5.2.2 Solution analytique à 2 impulsions

Cette solution suppose que le nombre d'impulsions est fixé à  $N = 2$ , que les instants d'applications sont  $t_1$  et  $t_f$  et que l'état final visé au terme du rendez-vous est  $r_f$  avec une vitesse relative  $v_f$ . La position relative initiale du chasseur dans le repère local cartésien est définie par  $r(t_1)$  et  $v(t_1)$ . Cette stratégie à deux impulsions consiste en une impulsion

initiale chargée de réaliser le rendez-vous en position et une impulsion finale réalisant le rendez-vous en vitesse.

Soit  $\Phi(t, t_1)$  la matrice de transition directe du mouvement relatif, on peut écrire :

$$\begin{aligned} r(t) &= \Phi_{11}(t, t_1)r(t_1) + \Phi_{12}(t, t_1)v(t_1) \\ v(t) &= \Phi_{21}(t, t_1)r(t_1) + \Phi_{22}(t, t_1)v(t_1) \end{aligned} \quad (\text{II.5.3})$$

Pour  $t = t_f$ , on obtient :

$$r(t_f) = \Phi_{11}(t_f, t_1)r(t_1) + \Phi_{12}(t_f, t_1)v(t_1) \quad (\text{II.5.4})$$

Rappelons que l'objectif est d'avoir :

$$r(t_f) = r_f \quad (\text{II.5.5})$$

$$v(t_f) = v_f \quad (\text{II.5.6})$$

On obtient donc la vitesse relative après la première impulsion par l'équation :

$$v(t_1^+) = -\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_1)(r_f - \Phi_{11}(t_f, t_1)r(t_1)) \quad (\text{II.5.7})$$

Cela permet d'obtenir l'expression de la première impulsion comme :

$$\Delta V(t_1) = -\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_1)(r_f - \Phi_{11}(t_f, t_1)r(t_1)) - v(t_1) \quad (\text{II.5.8})$$

De même, la vitesse relative avant la deuxième impulsion est donnée par :

$$v(t_f^-) = \Phi_{21}(t_f, t_1)r(t_1) - \Phi_{22}(t_f, t_1)\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_1)(r_f - \Phi_{11}(t_f, t_1)r(t_1)) \quad (\text{II.5.9})$$

et l'impulsion nécessaire pour annuler cette vitesse relative est donc :

$$\Delta V(t_f) = v_f - [\Phi_{21}(t_f, t_1)r(t_1) - \Phi_{22}(t_f, t_1)\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_1)(r_f - \Phi_{11}(t_f, t_1)r(t_1))] \quad (\text{II.5.10})$$

La solution finale à deux impulsions est donnée par les deux impulsions  $\Delta V(t_1)$  et  $\Delta V(t_f)$  telles que :

$\begin{aligned} \Delta V(t_1) &= -\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_1)(r_f - \Phi_{11}(t_f, t_1)r(t_1)) - v(t_1) \\ \Delta V(t_f) &= v_f - [\Phi_{21}(t_f, t_1)r(t_1) - \Phi_{22}(t_f, t_1)\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_1)(r_f - \Phi_{11}(t_f, t_1)r(t_1))] \end{aligned}$
---

Il est clair que cette solution, unique, ne permet aucune optimisation vis-à-vis des variables de la commande. Une façon de rajouter un degré de liberté à ce problème est d'augmenter le nombre d'impulsions. Ceci est discuté dans le prochain paragraphe dans le cadre de la résolution d'un problème à  $N$  impulsions.

### 5.2.3 Solution à N impulsions

Dans la suite nous considérons que la matrice d'entrée du modèle est toujours structurée en  $B(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_2(t) \end{bmatrix}$  et la matrice de transition associée à l'équation d'état peut se structurer comme :

$$\Phi(t, t_1) = \begin{bmatrix} \Phi_r(t, t_1) & \Phi_v(t, t_1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.11})$$

Du fait de la modélisation dynamique linéaire du mouvement relatif, la solution de l'équation d'état peut alors s'écrire :

$$X(t) = \Phi(t, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi_v(t, t_i)B_2(t_i)\Delta V(t_i) \quad (\text{II.5.12})$$

En notant  $X(t_f) = X_f$ , l'état final devant être atteint par le satellite chasseur dans le repère local, on obtient le système linéaire à résoudre pour en extraire les vecteurs des  $N$  impulsions.

$$\Delta X(t_f, t_1) = X_f - \Phi(t_f, t_1)X(t_1) = F_N(t_f, t_1, \dots, t_N) \begin{bmatrix} \Delta V(t_1) \\ \vdots \\ \Delta V(t_N) \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.13})$$

où la matrice  $F_N \in \mathcal{R}^{6 \times 3N}$  est donnée par :

$$F_N(t_f, t_1, \dots, t_N) = \begin{bmatrix} \Phi_v(t_f, t_1)B_2(t_1) & \cdots & \Phi_v(t_f, t_N)B_2(t_N) \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.14})$$

Le système linéaire d'équations (II.5.13) a au moins une solution si et seulement si  $F_N$  est de rang plein :

$$\text{Rang}[F_N(t_f, t_1, \dots, t_N) \Delta X] = \text{Rang}[F_N(t_f, t_1, \dots, t_N)] = r \quad (\text{II.5.15})$$

$r$  étant le nombre de lignes de  $F_N$ .

#### Remarque 5.2.1

La résolution du problème de rendez-vous se résume à la simple inversion du système d'équations linéaires (II.5.13) si et seulement si les dates d'impulsions ne sont pas des variables du problème mais ont été choisies au préalable. Dans ce cas, la dépendance de la matrice  $F_N$  vis-à-vis de ces dates ne sera pas explicitement notée.  $F_N$  n'étant pas carrée, la solution obtenue par inversion est dépendante de la méthode d'inversion généralisée utilisée. Nous utilisons ici la technique décrite indépendamment par Moore dans [58] et Penrose dans [65].

La formulation (II.5.13) correspond exactement au cas précédent pour  $N = 2$ . Dans ce cas, si la matrice  $F_2(t_f, t_1)$  est inversible ( $r = 6$ ) alors la solution existe et est unique.

Pour  $N > 2$  et  $r = 6$ , le système d'équations linéaires (II.5.13) a une infinité de solutions et l'on peut choisir  $2N - 6$  paramètres librement.

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \Delta V(t_1) \\ \vdots \\ \Delta V(t_N) \end{bmatrix} = F_N^+ \Delta X(t_f, t_1) + (\mathbf{1} - F_N^+ F_N) \zeta \quad (\text{II.5.16})$$

où  $\zeta \in \mathcal{R}^{3N}$  est un vecteur arbitraire. Une solution particulière est donnée par la solution de norme minimale :

$$\Delta V_{ls} = F_N^t (F_N F_N^t)^{-1} \Delta X(t_f, t_1) \quad (\text{II.5.17})$$

où  $\Delta V_{ls}$  est la solution optimale du problème de moindres carrés :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V} \quad & \|\Delta V\|_2 \\ \text{sous} \quad & F_N \Delta V = \Delta X(t_f, t_1) \end{aligned} \quad (\text{II.5.18})$$

## 5.3 Guidage sous-optimal par une méthode heuristique

### 5.3.1 Motivations

Dans la méthode décrite précédemment, le choix des dates d'impulsions doit être effectué au préalable. L'utilisation d'une méthode heuristique permet d'évaluer l'impact du choix des dates d'impulsions sur le coût du rendez-vous. Par ailleurs, cette méthode fournit des solutions réalisables. Bien qu'elles ne soient pas nécessairement optimales, elles peuvent toutefois servir de référence, pour évaluer d'autres méthodes plus sophistiquées.

### 5.3.2 Mise en œuvre

Dans les algorithmes à base d'heuristiques simples, on exploite généralement des procédés de calcul numérique avancé. La principale difficulté est liée au bon choix des conditions d'initialisation, qui affecte sensiblement la convergence de l'algorithme.

Dans la suite, nous considérons les modèles de mouvement relatif où  $B_2(t) = \mathbf{I}$ . Ceci est le cas dans la quasi totalité des modèles retrouvés dans la littérature. Soit  $N_{max}$  le nombre maximal d'impulsions et  $t_N = t_f$  la date de la dernière impulsion qui correspond à la fin de l'opération. Les étapes de l'algorithme sont données ci-dessous :

1. **Initialisation** calcul des impulsions nécessaires pour un rendez-vous ( $N = 2$ ) à deux impulsions  $\Delta v_{1_2}$  à  $t_1$  et  $\Delta v_{2_2}$  à  $t_2$  à l'aide de la méthode analytique.

On définit le vecteur  $\tau^{[2]}$  ( $1 \times 2$ ) et la matrice  $\Delta V^{[2]}$  ( $3 \times 2$ ) :

$$\tau^{[2]} = [t_1, t_2] \quad (\text{II.5.19})$$

$$\Delta V^{[2]} = [\Delta v_{1_2}, \Delta v_{2_2}] \quad (\text{II.5.20})$$

Dans ce qui suit, on va noter  $\Delta V_j^{[i]}$  la  $j^{\text{ième}}$  ligne de  $\Delta V^{[i]}$ .

On incrémente  $N = N + 1$  et on passe à l'étape suivante.

2. Tant que  $N \leq N_{max}$  exécuter le programme :

$$[\Delta V^{[N]}, \tau^{[N]}] = \underset{\Delta V^{[N]}, \tau_2^{[N]} \dots \tau_{N-1}^{[N]}}{\text{arg min}} \left\{ J = \sum_{k=1}^{k=N} \|\Delta V_k^{[N]}\|_2 \right\} \quad (\text{II.5.21})$$

$$\underline{\text{sous}} : \Phi(\tau_1^{[N]}, \tau_N^{[N]}) \begin{bmatrix} r(t_1) \\ v(t_1) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{i=N} \Phi(\tau_i^{[N]}, \tau_N^{[N]}) \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta V_i^{[N]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{t_f} \\ v_{t_f} \end{bmatrix}$$

Notons que la norme utilisée ici est la norme  $L_2$ . On peut remplacer cette norme par la norme  $L_1$  sans que ceci change la structure du programme.

Initialisation de l'heuristique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{1,ini}^{[N]} = \tau_1^{[N-1]}, \tau_{N,ini}^{[N]} = \tau_{N-1}^{[N-1]} \\ \tau_{k,ini}^{[N]} = \frac{(N-k)\tau_k^{[N-1]} + (k-1)\tau_{k-1}^{[N-1]}}{N-1} \\ \Delta V_{1,ini}^{[N]} = \frac{N-1}{N}\Delta V_1^{[N-1]}, \Delta V_{N,ini}^{[N]} = \frac{N-1}{N}\Delta V_{N-1}^{[N-1]} \\ \Delta V_{k,ini}^{[N]} = \frac{(N-k)\Delta V_k^{[N-1]} + (k-1)\Delta V_{k-1}^{[N-1]}}{N} \\ \text{avec } k = 2..N-1 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.22})$$

Lorsque l'optimum est atteint, on obtient le vecteur  $\tau^{[N]}$  et la matrice  $\Delta V^{[N]}$  minimisant le critère de consommation. On incrémente  $N = N + 1$  et on recommence l'étape numéro 2.

**Choix des conditions initiales :** les coefficients de pondération utilisés pour choisir les dates, sont calculés géométriquement. Pour passer d'une configuration à  $N - 1$  impulsions vers une configuration à  $N$  impulsions, l'idée est de généraliser le résultat trouvé pour une configuration distribuée d'une manière homogène :

Calculons  $t_{2N}$  et  $t_{2N-1}$  :

$$\underbrace{t_2^{N-1} - t_1 = \frac{t_f - t_1}{N-2} \quad t_2^N - t_1 = \frac{t_f - t_1}{N-1}}_{t_2^N = \frac{(N-2)t_2^{N-1} + t_1}{N-1}} \quad (\text{II.5.23})$$

De même, on calcule  $t_{3N}$  et  $t_{3N-1}$  :

$$\underbrace{t_3^{N-1} - t_2^{N-1} = \frac{t_f - t_1}{N-2} \quad t_3^N - t_2^N = \frac{t_f - t_1}{N-1}}_{t_3^N = \frac{(N-3)t_2^{N-1} + 2t_3^{N-1}}{N-1}} \quad (\text{II.5.24})$$

On peut continuer le calcul pour un terme quelconque et retrouver la relation générale.

Généralement, certaines limitations sont à considérer lorsqu'on fait appel aux approches heuristiques. Le problème du rendez-vous, tel qu'il est formulé dans (II.5.21) est non convexe. La convergence vers un optimum global n'est pas garantie. Ce risque est accru par le fait que l'initialisation de l'heuristique affecte la convergence d'une manière sensible. La démarche que nous proposons vise à porter le résultat obtenu pour  $N$  impulsions vers une configuration à  $N + 1$  impulsions, sans pour autant garantir l'amélioration du coût.

## 5.4 Commentaires

Dans les chapitres suivants, deux méthodes de résolution des problèmes d'optimisation paramétrique sont exposées. Elles sont adaptées au problème de rendez-vous tel qu'il est formulé en (II.2). Pour chacune des méthodes, les différentes stratégies pour contourner les difficultés induites par la nature non linéaire et implicite des contraintes sur le nombre et sur les dates d'application des impulsions sont décrites.

La première technique de résolution abordée est basée sur la théorie de la commande optimale. Le principe de Pontryagin est appliqué pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité. Pour ce faire, des variables adjointes sont introduites. Ceci confère à ces méthodes un caractère *indirecte*. L'optimalité des résultats est garantie analytiquement dans le cadre linéaire, ce qui est un véritable atout par rapport aux méthodes directes. La complexité des calculs induits est un facteur désavantageux. Nous remédions à cela par une reformulation polynomiale du problème, et l'usage de techniques avancées de résolution des systèmes d'équations.

La deuxième technique de résolution présentée est basée sur la discrétisation du problème (II.2) et l'exploitation des outils de programmation linéaire afin de mettre en œuvre des procédures itératives de minimisation du critère de consommation. Cette technique est qualifiée de *directe* car elle permet d'aboutir à la solution du problème d'optimisation directement, sans introduire des variables intermédiaires. Plusieurs avantages sont offerts par les méthodes directes, tels que la flexibilité par rapport aux contraintes sur la commande et les variables d'état, la facilité d'implantation et la possibilité de garantir un certain degré de robustesse. Tous ces points sont abordés dans la section dédiée aux méthodes directes. Le risque de convergence vers les optima locaux reste le grand inconvénient de ces méthodes.

Chacune des techniques présentées est utilisée dans la synthèse d'un algorithme de résolution du problème de rendez-vous. Dans le dernier chapitre, nous validons et comparons les algorithmes présentés à travers la résolution de cas pratiques de missions de rendez-vous.

---

## Chapitre 6

# Optimisation des trajectoires de RdV par les méthodes indirectes

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>134</b>
<b>6.2</b>	<b>La théorie du Primer-Vector</b>	<b>134</b>
6.2.1	Les travaux de Lawden	135
6.2.2	Conditions nécessaires et suffisantes de Carter	139
6.2.3	Résultats de Lion & Handelsman	159
6.2.3.1	Equation variationnelle adjointe	159
6.2.3.2	Condition suffisante d'addition d'impulsion	160
6.2.3.3	Condition suffisante de déplacement d'une impulsion	163
<b>6.3</b>	<b>Synthèse d'algorithmes pour le rendez-vous en temps fixé</b>	<b>164</b>
6.3.1	Formulation polynomiale partielle du problème	164
6.3.2	Approche par optimisation polynomiale et grille temporelle	166
6.3.2.1	Approche par grille sur les dates d'impulsion	166
6.3.2.2	Optimisation polynomiale et relaxations convexes	167
6.3.2.3	Considérations pratiques pour l'implantation	170
6.3.2.4	Présentation de l'algorithme <b>RDV-IND1</b>	171
6.3.3	Approche par réduction itérative du coût	174
6.3.3.1	Utilisation itérative du calcul de variations	174
6.3.3.2	Présentation de l'algorithme <b>RDV-IND2</b>	176
<b>6.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>180</b>

---

## 6.1 Introduction

Les méthodes indirectes pour la résolution des problèmes de commande optimale se déroulent en deux phases distinctes :

1. les conditions d'optimalité sont dérivées. Ces conditions peuvent être nécessaires et/ou suffisantes, selon les cas traités. Cette étape se base sur l'introduction de variables adjointes et la mise en œuvre d'outils issus du calcul des variations [29], [15], [19] et du principe du maximum [6], [52], [2], [24] ;
2. à partir des conditions d'optimalité, une trajectoire optimale candidate est déterminée. D'une manière générale, cette trajectoire d'état est calculée à partir de la trajectoire de l'état adjoint.

La première étape conduit à l'écriture d'un problème aux deux bouts (TPBVP) défini par un système différentiel du premier ordre en l'état et l'état adjoint. La résolution numérique de ce type de problèmes est généralement difficile [44], [18], [70]. La formulation (II.2) permet d'aborder le problème sous un angle plus simple. On peut, *via* certaines manipulations, transformer le problème en un système d'équations polynomiales.

La théorie de Pontryagin, appliquée au problème de rendez-vous, donne lieu à une démarche appelée *théorie du primer vector*, qui permet de déterminer la trajectoire du vecteur adjoint et, *indirectement*, la trajectoire optimale du vecteur d'état. Les principaux travaux de la littérature, sont passés en revue [51], [54], [20]. Le problème (II.2) est ensuite reformulé en un problème d'optimisation polynomiale. Ceci permet d'exploiter des outils d'optimisation tels que les relaxations convexes successives de problèmes d'optimisation polynomiale à l'aide du logiciel Gloptipoly développé au LAAS [37] ou du logiciel SOS-Tools [63, 64]. Les difficultés liées à la nature des contraintes sur les dates d'application des impulsions sont ensuite considérées. Deux techniques sont proposées, l'une basée sur une approche par grille, la deuxième faisant usage du calcul des variations appliqué sur la trajectoire de l'état adjoint. Ces stratégies donnent lieu à la synthèse de deux algorithmes différents de résolution du problème d'optimisation posé. Ces algorithmes font usage également de certaines techniques de résolution des systèmes d'équations polynomiales, telles que l'homotopie et les bases de Gröbner.

## 6.2 La théorie du Primer-Vector

Le problème de rendez-vous sous hypothèse impulsionnelle est un problème de calcul des variations ou de commande optimale non standard. L'application du principe du maximum et du calcul des variations afin d'obtenir les conditions d'optimalité associées n'est pas si directe que dans le cas classique du fait de la présence de fonctions généralisées (les

---

distributions ou impulsions de Dirac). Le traitement le plus rigoureux mathématiquement a été donné par Neustadt [59] et Rishel [71] qui le plongent dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Une approche moins rigoureuse et plus physique issue de [51], [56] est reprise ici.

Si le nombre d'impulsions est fixé *a priori* et la forme explicite de la matrice de transition du mouvement relatif est connue analytiquement, la forme algébrique peut être obtenue par intégration de la contrainte différentielle. Cette formulation a été reprise dans les travaux de Carter [20], [23], [21], [22] où les propriétés géométriques de l'ensemble réalisable sont exploitées afin de retrouver l'ensemble des résultats obtenus avec la théorie du primer vector et synthétiser ainsi des algorithmes numériquement efficaces.

### 6.2.1 Les travaux de Lawden

La dérivation des conditions nécessaires d'optimalité par le principe du maximum a été initialement proposée par Lawden [51] et reprises avec des variations dans [40], [56]. Elle consiste à dériver les conditions nécessaires d'optimalité sur un problème de rendez-vous avec propulsion à vitesse d'éjection constante (poussée bornée) puis, à l'aide d'un passage à la limite plus ou moins rigoureusement justifié, d'établir les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas purement impulsif. Nous reprenons ici l'exposé proposé dans [56] avec des notations adaptées au cas linéaire et avec quelques amendements issus des deux autres références pour une plus grande facilité de lecture.

Les équations dynamiques d'état linéarisées d'un véhicule soumis à une accélération de propulsion  $\Gamma$  dans un champ gravitationnel sont données par :

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= A_1 r(t) + A_2 v(t) + \Gamma(t)\beta(t) \\ \dot{c}(t) &= \Gamma(t)\end{aligned}\tag{II.6.1}$$

où le vecteur d'état est défini par les coordonnées cartésiennes relatives, les vitesses relatives associées et la vitesse caractéristique  $c$ ,  $X(t) = [r^t(t) \ v^t(t) \ c^t(t)]^t$ ,  $\beta$  est le vecteur unitaire ( $\beta(t)^t\beta(t) = 1, \forall t$ ) de la direction de poussée,  $\Gamma$  est l'accélération de poussée bornée par  $\bar{\Gamma}$ . En tenant compte des contraintes d'amplitude et de normalisation sur les variables de commande, le problème de commande optimale associé au rendez-vous s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\max_{\beta, \Gamma} \quad & J_{Lawden} = -c(t_f) = -c_f \\ \text{sous} \quad & \dot{r}(t) = v(t) \\ & \dot{v}(t) = A_1 r(t) + A_2 v(t) + \Gamma(t)\beta(t) \\ & \dot{c}(t) = \Gamma(t) \\ & \|\beta\| = 1 \\ & 0 \leq \Gamma \leq \bar{\Gamma} \\ & t_1, t_f \text{ fixés} \\ & r(t_1) = r_1, r(t_f) = r_f, v(t_1) = v_1, v(t_f) = v_f, c(t_1) = c_1 = 0 \text{ fixés}\end{aligned}\tag{II.6.2}$$

Le problème (II.6.2) est un problème sous forme de Mayer avec contrainte sur les variables de commande qui peut être abordé naturellement par le biais du principe du maximum de Pontryagin. Le Hamiltonien associé au système s'écrit :

$$H(t, X, \beta, \Gamma, \lambda) = \lambda_r^t v(t) + \lambda_v^t (A_1 r(t) + A_2 v(t)) + \lambda_v^t \Gamma \beta + \lambda_c \Gamma \quad (\text{II.6.3})$$

où  $\lambda_r \in \mathcal{R}^3$  est le vecteur d'état adjoint associé à la position relative,  $\lambda_v \in \mathcal{R}^3$  est le vecteur d'état adjoint associé à la vitesse relative. Ce dernier est dénommé *primer vector* par Lawden et *vecteur efficacité* par Marec. En effet, ce vecteur peut être interprété physiquement comme ayant une norme définissant une mesure de l'efficacité en termes de consommation, des dates et des directions de poussée.  $\lambda_c \in \mathcal{R}$  est le vecteur d'état adjoint associé à la vitesse caractéristique. Le principe de Pontryagin (appliqué avec la convention du maximum ici) indique que la direction de commande qui maximise globalement le Hamiltonien est donnée par :

$$\beta^*(t) = \text{Arg} \left[ \max_{\|\beta\|=1} H(t, X, \beta, \Gamma, \lambda) \right] = \frac{\lambda_v(t)}{\|\lambda_v(t)\|} \quad (\text{II.6.4})$$

Le Hamiltonien, à l'optimum, devient alors :

$$H(t, X, \beta^*, \Gamma, \lambda) = \lambda_r^t v(t) + \lambda_v^t (A_1 r(t) + A_2 v(t)) + (\lambda_c + \|\lambda_v\|) \Gamma \quad (\text{II.6.5})$$

$H(t, X, \beta^*, \Gamma, \lambda)$  est une fonction affine de la poussée  $\Gamma$ . La maximisation globale du Hamiltonien sur l'intervalle  $[0, \bar{\Gamma}]$  conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \text{Arc Balistique (AB)} \quad \Gamma^* &= 0 & \text{si } \lambda_c + \|\lambda_v\| < 0 \\ \text{Arc Propulsé (AP)} \quad \Gamma^* &= \bar{\Gamma} & \text{si } \lambda_c + \|\lambda_v\| > 0 \\ \text{Arc Singulier (AS)} \quad 0 &\leq \Gamma^* \leq \bar{\Gamma} & \text{si } \lambda_c + \|\lambda_v\| = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6.6})$$

De plus, la condition de transversalité associée à la condition terminale  $c_f$  libre nous donne :

$$\nabla_{c_f} J_{\text{Lawden}} - \lambda_c(t_f) = 0 \Leftrightarrow \lambda_c(t_f) = -1 \quad (\text{II.6.7})$$

Les équations canoniques de Hamilton sont constituées des équations d'état (II.6.1) et des équations adjointes :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r(t) &= -A_1^t \lambda_v(t) \\ \dot{\lambda}_v(t) &= -\lambda_r(t) - A_2^t \lambda_v(t) \\ \dot{\lambda}_c(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_c + \|\lambda_v\| \leq 0 \\ -\frac{d\bar{\Gamma}}{dc}(\lambda_c + \|\lambda_v\|) = -\frac{\bar{\Gamma}(\lambda_c + \|\lambda_v\|)}{c_{ev}} & \text{si } \lambda_c + \|\lambda_v\| > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.6.8})$$

La forme de la dernière équation adjointe sur les AP provient du calcul de la dérivée de la poussée maximale obtenue à partir de la formule :

$$c = c_{ev} \log \Delta m \quad (\text{II.6.9})$$


---

où  $c_{ev}$  est la vitesse d'éjection et  $\Delta m$  la variation de la masse. On en déduit que  $\lambda_c$  est constant sur les AB et les AS. Concernant l'existence des arcs singuliers pour le problème impulsionnel, il semble que cette possibilité n'existe que dans le cas d'une modélisation non linéaire sans que l'optimalité de ces AS soit clairement établie [31]. Nous supposons dans la suite du document que la trajectoire de commande optimale est une suite d'AB et d'AP.

Afin d'établir les conditions nécessaires d'optimalité pour le cas de la propulsion impulsionnelle, Marec propose un passage à la limite du processus optimal obtenue pour une poussée bornée [56].

$$c(t) = \int_{t^-}^{t^+} \bar{\Gamma}(s) ds \xrightarrow[\substack{\bar{\Gamma} \rightarrow \infty \\ \tau = t^+ - t^- \rightarrow 0}]{} \Delta c = c(t^+) - c(t^-) \text{ finie} \quad (\text{II.6.10})$$

Ce passage à la limite est toutefois délicat à réaliser directement dans les équations d'état et d'état adjoint puisque l'on se trouve confronté à des dérivées de la consommation et de la vitesse tendant vers l'infini alors que l'équation différentielle associée à l'état adjoint  $\lambda_c$  est indéterminée ( $\bar{\Gamma} \rightarrow \infty$  et  $c_{ev} \rightarrow \infty$ ). Marec propose de changer la variable indépendante du temps  $t$  en la consommation  $c$  et ainsi de faire la permutation de variables  $(t, c, \lambda_c, H) \rightarrow (c, t, \lambda_t, \bar{H})$ . Cette transformation doit préserver la structure canonique des équations de Hamilton, i.e. vérifier la condition  $\bar{H} = -\lambda_c$  et  $\lambda_t = -H$ . Avec ce nouveau jeu de variables, il est possible de montrer que les fonctions  $r(c)$ ,  $t(c)$ ,  $\lambda_r(c)$ ,  $H(c)$  et  $\lambda_c(c)$  sont des fonctions constantes (leur dérivée par rapport à  $c$  sont nulles) tout en sachant qu'elles sont des fonctions continues de  $t$  alors que  $c$  et  $v$  sont des fonctions discontinues de  $t$  à cause de la nature impulsionnelle de la commande. On déduit donc de l'équation (II.6.7) que  $\lambda_c(t) = \lambda_c(t_f) = cst = -1$ ,  $\forall t \in [t_1, t_f]$ .

La trajectoire optimale de la commande est donc une suite d'AB et d'impulsions en  $t_i$  avec  $\|\lambda_v\| < 1$  continue sur les arcs balistiques et  $\|\lambda_v(t_i)\| = 1$  aux instants d'impulsion. De plus, aux instants d'impulsions intérieurs  $t_i \in (t_1, t_f)$ ,  $\frac{d\|\lambda_v(t_i)\|}{dt} = 0$  puisqu'elle est continue et atteint son maximum en  $t_i$ . On en déduit la condition  $\dot{\lambda}_v(t_i)^t \lambda_v(t_i) = 0$  aux impulsions intérieures.

Même si la méthode d'obtention des conditions nécessaires d'optimalité présentée dans [51] et [56] n'est pas parfaitement rigoureuse du point de vue mathématique, Neustadt a montré rigoureusement que ces conditions étaient valides [59]. Les conditions nécessaires d'optimalité sont connues dans la littérature comme les conditions nécessaires de Lawden. Elles sont résumées dans le théorème suivant :

### **Théorème 6.2.1 (CN de Lawden)**

Si la suite de  $N$  impulsions définie par les séquences  $(\{\Delta v_i\}, \{t_i\}, \{\beta(t_i)\})$  est solution optimale du problème de commande optimale (II.1) alors il existe une paire de fonctions  $(\lambda_r, \lambda_v) : [t_1, t_f] \times [t_1, t_f] \rightarrow \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$  vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité suivantes.

CN1 Le primer vector  $\lambda_v$  et sa dérivée  $\dot{\lambda}_v$  sont continus partout sur la trajectoire optimale ;

CN2 les impulsions sont appliquées dans la direction du primer vector aux instants pour lesquels sa norme est égale à 1 ;

$$\|\lambda_v(t_i)\| = 1 \quad \beta(t_i) = \frac{\lambda_v(t_i)}{\|\lambda_v(t_i)\|} = \lambda_v(t_i) = \frac{\Delta V(t_i)}{\|\Delta V(t_i)\|_2} \quad (\text{II.6.11})$$

CN3 la norme du primer vector est toujours inférieure ou égale à 1 sur la trajectoire optimale ;

$$\|\lambda_v(t)\| \leq 1 \quad (\text{II.6.12})$$

CN4 la tangente à la norme du primer vector est horizontale aux instants d'impulsions tels que  $t_i \neq t_1$  et  $t_i \neq t_N$  ;

$$\lambda_r(t_i)^t \lambda_v(t_i) = \dot{\lambda}_v(t_i)^t \lambda_v(t_i) = 0 \quad \forall t_i \neq t_1 \text{ et } \forall t_i \neq t_N \quad (\text{II.6.13})$$

Les conditions nécessaires permettent donc de connaître les dates et les directions des poussées impulsionnelles en fonction de la durée du rendez-vous. Ces conditions nécessaires d'optimalité sont illustrées sur un exemple de loi de poussée typique à la figure 6.1.

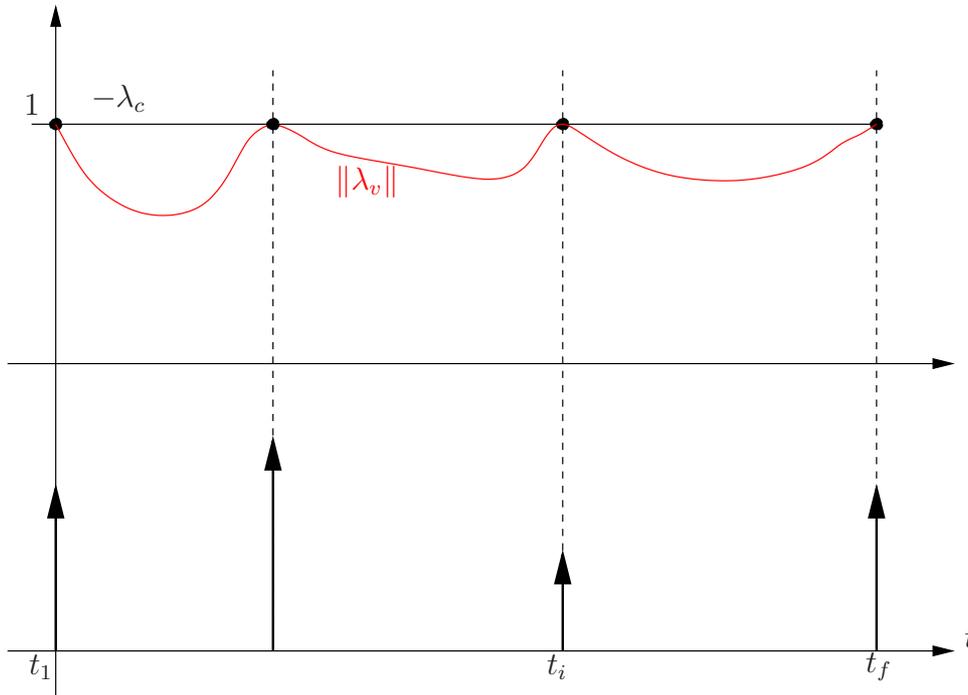


FIG. 6.1 – Loi de poussée impulsionnelle et courbe typique de la norme du vecteur efficacité

Les conditions de Lawden ont été à la base de la grande majorité des aspects fondamentaux de la théorie du primer vector. Des résultats importants tels que la borne maximale sur le nombre d'impulsions par Neustadt [59] ou les résultats de Carter [20] ont

pour origine les travaux de Lawden.

Le point faible de cette approche est lié au manque d'informations relatives aux conditions initiales du primer vector. Dans le cadre de la théorie de la commande optimale, la trajectoire optimale du système est déduite de la trajectoire optimale adjointe, qui n'est rien d'autre que celle du primer vector dans notre cas. Hors, la connaissance de la valeur du primer vector à  $t_1$  est primordiale pour ce faire. Exploiter directement les conditions de Lawden pour la résolution complète du problème s'avère difficile et impose des choix et simplifications. Cela réduit la généralité et la pertinence des résultats obtenus. Carter a proposé une démarche permettant de surmonter cette difficulté, en posant des conditions d'optimalité sur la condition initiale du primer vector, qui est représentée dans la suite par la variable  $\lambda$ .

## 6.2.2 Conditions nécessaires et suffisantes de Carter

Reprenant les travaux initiaux de Lawden [51] et de Prussing [66], Carter a reformulé les conditions nécessaires d'optimalité de Lawden pour en donner une formulation plus algébrique lui permettant d'établir des résultats d'existence et d'unicité.

La formulation algébrique du rendez-vous définie pour un nombre fixé *a priori* d'impulsions et donnée dans (II.1) a été reprise dans les références [20], [23], [21], [22] :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\beta, \Delta v_i, t_i} J_* \\
 \text{sous} \quad & \dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad t \geq 0, \quad t \notin T = \{t_1, \dots, t_N\} \\
 & \Delta X_i = B(t_i)\Delta V(t_i) = B(t_i)\beta(t_i)\Delta v_i, \quad i = 1, \dots, N \\
 & \lim_{t \rightarrow t_i^+} X(t) = X(t_i) + \Delta X_i \\
 & \|\beta\| = 1 \\
 & t_1, t_f \text{ fixés} \\
 & X(t_1) = X_1, \quad X(t_f) = X_f \text{ fixés}
 \end{aligned} \tag{II.6.14}$$

où  $A(t) : [t_1, t_f] \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$  est une fonction continue.

La matrice de transition associée à l'équation différentielle décrivant l'évolution dynamique du système s'écrit  $\Phi(t, t_1) = \phi(t)\phi^{-1}(t_1)$  où  $\phi(t)$  est la matrice fondamentale du système dynamique. Avec la donnée de la matrice de transition, il est possible de définir le problème de Carter qui est une variante du problème de rendez-vous à temps fixé.

### Problème 2 (problème de Carter)

Etant donné le nombre d'impulsions  $N$ , chercher  $T = \{t_1, \dots, t_N\} \subset \Theta = [t_0, t_f]$  et

$\Delta V(t_1), \dots, \Delta V(t_N)$  minimisant le coût sous la contrainte de bord.

$$\begin{aligned} & \min_{t_i, \Delta V(t_i)} \sum_{i=1}^N \alpha(t_i) \Delta v_i \\ & \text{sous} \\ & u_f = \sum_{i=1}^N \phi^{-1}(t_i) B(t_i) \Delta V(t_i) \end{aligned} \quad (\text{II.6.15})$$

où  $u_f$  contient les conditions aux bouts :

$$u_f = \phi^{-1}(t_f) X_f - \phi^{-1}(t_1) X_1 \quad (\text{II.6.16})$$

Dans [23], Carter définit la *région de commandabilité* de la paire  $(A, B)$  sur  $\Theta$  associée au problème de rendez-vous par :

$$\begin{aligned} Z = & \left\{ u_f \in \mathcal{R}^n : u_f = \sum_{i=1}^N \phi^{-1}(t_i) B(t_i) \Delta V(t_i), \right. \\ & \left. \forall \{t_1, \dots, t_N, \Delta V(t_1), \dots, \Delta V(t_N)\} \subseteq \Theta^N \times \mathcal{R}^{n \times N}, \forall N = 2, 3, \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.6.17})$$

Carter montre alors qu'une solution minimisante du problème de rendez-vous impulsif (II.6.15) existe pour des conditions de bord dans la région de commandabilité  $Z$  et donne les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une telle solution minimisante. On définit tout d'abord la matrice  $R(t) \in \mathcal{R}^{n \times m}$  par la relation :

$$R(t) = \phi^{-1}(t) B(t) \quad (\text{II.6.18})$$

### **Théorème 6.2.2 (Conditions de Carter [20])**

On suppose que le vecteur  $u_f$  est non nul.

Une solution normale  $(t_1, \dots, t_N, \Delta V(t_1), \dots, \Delta V(t_N))$ , définie dans [23], est telle que la matrice jacobienne du vecteur  $G(t_1, \dots, t_N, \Delta V(t_1), \dots, \Delta V(t_N))$  par rapport à  $t$  est de rang  $n$ .

$$G(t_1, \dots, t_N, \Delta V(t_1), \dots, \Delta V(t_N)) = \sum_{i=1}^N \phi^{-1}(t_i) B(t_i) \Delta V(t_i) - u_f$$

Les variables  $(t_{k_1}, \dots, t_{k_r}, \Delta v_1, \dots, \Delta v_r, \beta(t_{k_1}), \dots, \beta(t_{k_r}))$  sont des *solutions normales* du problème d'optimisation (II.6.15) si et seulement s'il existe un vecteur non nul  $\lambda \in \mathcal{R}^n$  tel que :

CNS 1

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \beta(t_i) = -\frac{R^t(t_i) \lambda}{\alpha(t_i)}, \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.19})$$


---

CNS 2

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \lambda^t R(t_i) R(t_i)^t \lambda = \alpha^2(t_i), \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.20})$$

CNS 3

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } t_i = t_1 \text{ ou } t_i = t_f \text{ ou } \lambda^t \frac{dR(t)}{dt} \Big|_{t_i} R(t_i)^t \lambda = \alpha(t_i) \frac{d\alpha(t_i)}{dt}, \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.21})$$

CNS 4

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{R(t_i) R^t(t_i)}{\alpha(t_i)} \right] \lambda \Delta v_i = -u_f \quad (\text{II.6.22})$$

CNS 5

$$\Delta v_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.23})$$

CNS 6

$$\sum_{i=1}^N \Delta v_i = -u_f^t \lambda > 0 \quad (\text{II.6.24})$$

CNS 7  $-u_f^t \lambda$  est un minimum sur l'ensemble  $\{\lambda \in \mathcal{R} : \text{CN1} - \text{CN6} \text{ sont valides}\}$ .

CNS 8

$$\left\| \frac{R^t(t) \lambda}{\alpha(t)} \right\| \leq 1, \forall t \in \Theta \quad (\text{II.6.25})$$

**Remarque 6.2.1**

Dans la référence [20], des résultats identiques sont obtenus avec la contrainte supplémentaire que certaines impulsions sont pré-assignées.  $p$  est le nombre de dates d'impulsions fixées *a priori* et on associe le  $p$ -uplet de dates d'impulsions préfixées  $N_p = (t_{j_1}, \dots, t_{j_p})$  alors que  $r$  est le nombre d'impulsions à déterminer auquel on associe le  $r$ -uplet de dates d'impulsions à calculer  $N_r = (t_{k_1}, \dots, t_{k_r})$ . De plus, on suppose que  $t_1$  et  $t_f$  sont dans  $N_p$  et l'on note  $N = p + r$ . Les CNS sont identiques si l'on remplace  $N$  par  $r$  dans la CNS 3 à l'équation (II.6.21).

De plus, si l'on souhaite fixer *a priori* les dates et l'amplitude de  $s$  impulsions en plus des  $p$  dates, alors le résultat précédent est identique en redéfinissant le vecteur  $u_f$  comme :

$$u_f = \phi^{-1}(t_f) X_f - \phi^{-1}(t_1) X_1 - \sum_{j=1}^s R(t_{N+j}) V(t_{N+j}) \quad (\text{II.6.26})$$

La référence [20] étudie également différents scénarii :

- i- problème coplanaire à 4 impulsions avec impulsions intermédiaires à dates fixées ;
- ii- problème coplanaire à 4 impulsions avec impulsions intermédiaires à dates optimisées ;
- iii- problème non coplanaire à 4 impulsions avec impulsions intermédiaires à dates fixées.

Malheureusement, seul le problème de type i- où l'étape d'optimisation des dates est évitée est illustré par un exemple.

**Remarque 6.2.2**

Les conditions nécessaires et suffisantes de Carter ont une formulation différente des conditions de Lawden ou des conditions nécessaires et suffisantes produites dans [68] mais elles peuvent être interprétées de manière identique. En particulier, si l'on définit le vecteur efficacité  $\lambda_v(t) : [t_1, t_f] \rightarrow \mathcal{R}^n$  comme :

$$\lambda_v(t) = \frac{R^t(t)\lambda}{\alpha(t)} \quad (\text{II.6.27})$$

les conditions (II.6.19), (II.6.20), (II.6.21) et (II.6.22) deviennent alors :

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \beta(t_i) = \lambda_v(t_i), \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.28})$$

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \|\lambda_v\| = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.29})$$

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } t_i = t_1 \text{ ou } t_i = t_f \text{ ou } \frac{d\|\lambda_v(t_i)\|}{dt} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.30})$$

$$\sum_{i=1}^N R(t_i)\lambda_v(t_i)\Delta v_i = -u_f \quad (\text{II.6.31})$$

qui ne sont rien d'autres que les conditions de Lawden ou les CNS données dans [68].

Il est intéressant de noter que si l'on recherche une solution optimale pour  $N = n = 6$  (le cas non coplanaire du rendez-vous dans sa plus grande généralité avec le maximum nécessaire d'impulsions), alors les conditions nécessaires et suffisantes (II.6.20) et (II.6.21) peuvent être résolues indépendamment afin d'obtenir des solutions en  $(t_1, \dots, t_N, \lambda)$  (12 équations et 12 inconnues). On obtient ensuite les amplitudes des impulsions en résolvant l'équation (II.6.22) linéaire en  $\Delta v_i$ . Les changements de conditions terminales  $u_f$  n'affectent que les amplitudes de poussée mais pas les localisations des dates de poussée. Les directions de poussée se déduisent alors de la condition (II.6.19) et l'historique du primer vector se déduit aisément de la donnée du vecteur  $\lambda$  par (II.6.27) et indépendamment de la donnée des conditions de bord fixées par  $u_f$ . Carter propose ainsi d'étudier la structure géométrique de l'ensemble des conditions de bord  $u_f \in Z$  associées aux solutions N-optimales normales dont les impulsions sont supportées par  $t_1, \dots, t_N$ .

$$Z(\lambda, t_1, \dots, t_N) = \left\{ u_f \in Z : U_f = - \sum_{i=1}^N R(t_i)\lambda_v(t_i)\Delta v_i, \quad \Delta v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\} \quad (\text{II.6.32})$$

En montrant que cet ensemble est un simplexe conique convexe, Carter retrouve ensuite le résultat de [77] et [59] sur la borne maximale du nombre d'impulsions. De plus, il donne un résultat intéressant sur l'existence de solutions normales non dégénérées (solutions pour lesquelles  $\Delta v_i > 0, \forall i = 1, \dots, N$ ).

**Théorème 6.2.3 ([23])**

Il existe une solution non dégénérée à N impulsions associée à un vecteur  $\lambda \in \mathcal{R}^n$  si et seulement s'il existe N racines distinctes  $t_1, \dots, t_N$  de la condition  $\|\lambda_v(t)\| = 1$  sur  $\Theta$  telles que les N vecteurs  $z_i = -R(t_i)\lambda_v(t_i)$  sont linéairement indépendants.

La référence [23] se termine sur l'examen détaillé des solutions du problème de rendez-vous dans le cas képlérien coplanaire elliptique en utilisant les équations de Tschauner-Hempel [81], [3]. Plusieurs solutions à 4 impulsions sont analysées géométriquement par le tracé de l'historique du vecteur efficacité.

Un certain nombre de compléments est ensuite fourni dans les références [21], [22]. Dans la première, des conditions nécessaires et suffisantes *locales*, ne nécessitant pas la connaissance du vecteur efficacité sur tout l'intervalle de rendez-vous mais seulement en les points de poussée, sont proposées.

#### **Théorème 6.2.4 ([21])**

Les conditions nécessaires (II.6.19), (II.6.20), (II.6.21), (II.6.22), (II.6.23) deviennent suffisantes pour une solution normale du problème de rendez-vous à  $N$  impulsions si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & - \frac{d^2 \|\lambda_v(t_i)\|}{dt^2} < 0, \text{ pour } t_1 < t_i < t_f \\ & - \frac{d \|\lambda_v(t_1)\|}{dt} < 0, \text{ pour } t_1 = t_i \\ & - \frac{d \|\lambda_v(t_f)\|}{dt} > 0, \text{ pour } t_f = t_i \end{aligned}$$

Il est toutefois curieux que Carter prenne le soin de signaler dans [21] que ces conditions nécessaires et suffisantes peuvent ne pas s'appliquer dans certains cas non précisés pour lesquels seules les conditions nécessaires et suffisantes globales s'appliquent.

Enfin, la référence [22] étudie de manière détaillée, le problème du rendez-vous coplanaire en orbite circulaire à 4 impulsions. Dans ce cas, des stratégies simplifiées et analytiques peuvent être mises en place afin de calculer les dates de poussée comme les solutions de polynômes de fonctions trigonométriques. L'approche développée utilise conjointement les propriétés géométriques de la trajectoire du vecteur efficacité de façon identique à ce qui a été vu dans la section précédente avec les résultats des références [20], [23].

#### **Exemple d'application des équations de Carter au rendez-vous hors-plan**

La référence [66] montre, sur un exemple très simple donné par un oscillateur harmonique (représentant par exemple le mouvement relatif hors-plan d'un satellite chasseur), comment les conditions nécessaires de Lawden peuvent être utilisées à des fins d'analyse et de détermination de la trajectoire optimale en poussée impulsionnelle. Les développements liés à ce cas particulier sont repris et généralisés à un horizon quelconque. Nous rappelons que la dynamique du mouvement relatif sous les hypothèses HCW ou TH est

celle d'un oscillateur harmonique décrite par les équations d'état :

$$\frac{d}{d\nu} \begin{bmatrix} y(\nu) \\ y'(\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(\nu) \\ y'(\nu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\nu) \quad (\text{II.6.33})$$

On considère ici que  $\alpha(t_i) = 1, \forall i = 1, \dots, N$ . Le terme de commande  $u$  représente le produit  $\beta(t_i)\Delta v_i$  qui se résume à un scalaire dans ce cas (poussée unidirectionnelle).

Dans ces équations, la variable indépendante choisie est l'anomalie vraie et les notations suivies sont celles du premier chapitre. On en déduit la matrice fondamentale et son inverse :

$$\phi(\nu) = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu \\ -\sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} \quad \phi^{-1}(\nu) = \begin{bmatrix} \cos \nu & -\sin \nu \\ \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.34})$$

On obtient aisément alors la matrice  $R(\nu)$  :

$$R(\nu) = \begin{bmatrix} -\sin \nu \\ \cos \nu \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.35})$$

Le vecteur efficacité s'en déduit directement :

$$\lambda_v(\nu) = -\lambda_1 \sin \nu + \lambda_2 \cos \nu = -\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \sin \left( \nu - \arctan \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right) \quad (\text{II.6.36})$$

Les conditions aux bords sont notées :

$$u_f = \phi^{-1}(\nu_f) \begin{bmatrix} y_f \\ y'_f \end{bmatrix} - \phi^{-1}(\nu_1) \begin{bmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_f^1 \\ u_f^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.37})$$

Dans ce cas précis, nous avons :

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2 \quad (\text{II.6.38})$$

et l'on suppose possible une impulsion initiale et finale et  $r$  impulsions intérieures ( $N = 2 + r$ ) sur l'horizon du rendez-vous qui est noté  $\nu_{f1}$ . Nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous la forme de Carter appliquées à ce cas précis :

CNS 1

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \beta(\nu_i) = \pm 1 = -R^t(\nu_i)\lambda = \lambda_1 \sin \nu_i - \lambda_2 \cos \nu_i, \quad \forall i = 2, \dots, N \quad (\text{II.6.39})$$

CNS 2

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \lambda^t R(\nu_i) R(\nu_i)^t \lambda = (\lambda_1 \sin \nu_i - \lambda_2 \cos \nu_i)^2 = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.40})$$

CNS 3

$$\Delta v_i = 0 \text{ ou } \lambda^t \frac{dR(\nu_i)}{d\nu} R(\nu_i)^t \lambda = \pm(\lambda_1 \cos \nu_i + \lambda_2 \sin \nu_i) = 0, \quad \forall i = 2, \dots, N - 1 \quad (\text{II.6.41})$$


---

CNS 4

$$\sum_{i=1}^N [R(\nu_i)R^t(\nu_i)] \lambda \Delta v_i = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -\sin \nu_i \\ \cos \nu_i \end{bmatrix} \Delta v_i \beta(\nu_i) = u_f \quad (\text{II.6.42})$$

CNS 5

$$\Delta v_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.43})$$

CNS 6

$$\sum_{i=1}^N \Delta v_i = -u_f^t \lambda = -u_f^1 \lambda_1 - u_f^2 \lambda_2 > 0 \quad (\text{II.6.44})$$

CNS 7

$$-u_f^t \lambda \text{ est un minimum sur l'ensemble } \{ \lambda \in \mathcal{R}^2 : \text{CN1} - \text{CN6 sont valides} \} \quad (\text{II.6.45})$$

L'analyse des trois premières conditions d'optimalité (II.6.39), (II.6.40), (II.6.41) conduit à écrire pour les impulsions intérieures :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta(\nu_i) \sin \nu_i \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \lambda_2 &= -\beta(\nu_i) \cos \nu_i \end{aligned} \quad (\text{II.6.46})$$

Cela permet d'obtenir les conclusions intermédiaires suivantes :

- les impulsions intérieures opposées en sens sont distantes de  $k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ;
- Si le scénario optimal comprend des impulsions intérieures alors  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 1$ . De plus, dans ce cas, les impulsions successives sont de sens contraires et espacées de  $\pi$ .

$$\beta(\nu_i) = -\beta(\nu_{i+1}) \quad (\text{II.6.47})$$

$$\nu_{i+1} = \nu_i + \pi$$

- De plus, si  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 1$  alors le scénario optimal ne peut contenir d'impulsions intérieures. Ceci confirme la non optimalité des cas où  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 1$ .

Cinq scénarii possibles peuvent se déduire pour le problème de rendez-vous considéré.

S1-  $r$  impulsions intérieures distantes de  $\pi$  et de sens opposé consécutivement. Ce scénario n'est possible que pour  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 1$  et les dates d'impulsion sont données par :

$$\begin{aligned} \nu_{k+1} &= \arctan\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \text{ou} & \\ \nu_k &= -\arctan\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + k\pi \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{II.6.48})$$

S2- Deux impulsions extrêmes plus  $r$  impulsions intérieures distantes de  $\pi$ . Ce scénario n'est possible que pour  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 1$  et les dates d'impulsion sont données par :

$$\nu_{k+1} = k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.6.49})$$

S3- Deux impulsions extrêmes. Ce scénario n'est possible que pour  $\tau_{f1} < \pi$ ,  $|\lambda_2| = 1$ ,  $\lambda_1$  de même signe que  $\lambda_2$  et  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 1$ . Les deux dates d'impulsion sont données par :

$$\begin{aligned}\nu_1 &= 0 \\ \nu_f &= 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \right)\end{aligned}\tag{II.6.50}$$

S4- Une seule impulsion finale. Ce scénario n'est possible que pour  $|\lambda_1| < 1$ ,  $|\lambda_2| < 1$  et  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 1$ . La date de l'impulsion finale est donnée par :

$$\nu_f = \arctan \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) + \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right)\tag{II.6.51}$$

S5- Une seule impulsion initiale. Ce scénario n'est possible que pour  $|\lambda_2| = 1$ ,  $\lambda_1$  de même signe que  $\lambda_2$ ,  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 1$  et  $\tau_{f1} < 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \right)$ . La date de l'impulsion initiale sera alors :

$$\nu_1 = 0\tag{II.6.52}$$

Il est à noter que les scénarii 4 et 5 sont des cas particuliers du scénario 2. Ces trois scénarii seront donc examinés conjointement dans le scénario II alors que le scénario I est identifié à S1 et S2 défini ci-dessus et à ses variantes qui sont détaillées ci-dessous.

**Scénario I** Nous examinons le scénario général pour  $\tau_{f1} > \pi$  dans un premier temps. Celui-ci comprend lui-même différentes possibilités qui vont être passées en revue.

Le premier cas est obtenu si l'on considère qu'il n'y a que  $r$  impulsions intérieures et est représenté à la figure 6.2

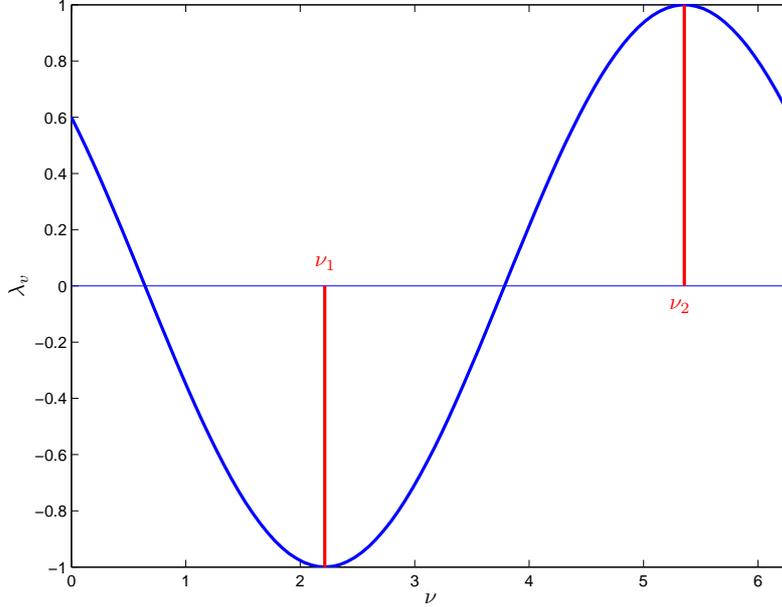


FIG. 6.2 – Exemple de scénario I à 2 impulsions intérieures

Une équation définissant l'amplitude des impulsions (en fait la consommation) est obtenue en écrivant les conditions (II.6.42) et (II.6.43).

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 = -\beta(\nu_1)u_f^1 \sin \nu_1 + \beta(\nu_1)u_f^2 \cos \nu_1 \quad (\text{II.6.53})$$

L'équation (II.6.53) montre que la solution n'est pas unique. De plus, nous avons :

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 = |u_f| \quad (\text{II.6.54})$$

car à partir de l'équations (II.6.42) on peut écrire :

$$\Delta v_1 \beta(\nu_1) \begin{bmatrix} -\sin \nu_1 \\ \cos \nu_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \nu_1 \\ \cos \nu_1 \end{bmatrix} \Delta v_1 \beta(\nu_1) = u_f \quad (\text{II.6.55})$$

sachant que (selon l'équation (II.6.47))  $\beta(\nu_1) = -\beta(\nu_2)$ ,  $\cos(\nu_1) = -\cos(\nu_2)$  et  $\sin(\nu_1) = -\sin(\nu_2)$ , on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} -\sin \nu_1 \\ \cos \nu_1 \end{bmatrix} (\Delta v_1 + \Delta v_2) \beta(\nu_1) = (\Delta v_1 + \Delta v_2) \beta(\nu_2) \begin{bmatrix} -\sin \nu_2 \\ \cos \nu_2 \end{bmatrix} = u_f \quad (\text{II.6.56})$$

Ainsi

$$\Delta v_1 = \rho \quad \Delta v_2 = |u_f| - \rho \quad 0 \leq \rho \leq |u_f| \quad (\text{II.6.57})$$

On en déduit également la date de la première impulsion. Les impulsions suivantes sont obtenues à partir de cette date initiale modulo  $(k-1)\pi$ .

$$\tan \nu_1 = -\frac{u_f^1}{u_f^2} \quad (\text{II.6.58})$$

Puisque nécessairement  $\nu_1 \leq \pi$ , on obtient la première direction de poussée comme :

$$\beta(\nu_1) = -\frac{u_f^1}{|u_f^1|} \quad (\text{II.6.59})$$

Les poussées suivantes sont alors successivement de sens opposé à intervalle de  $\pi$ .

Les trajectoires et les impulsions sont représentées dans le plan de phase à la figure 6.3 pour des conditions initiales et finales :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_f = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.60})$$

et un temps de transfert donné par  $\tau_{f1} = 2\pi$  rad.

La consommation totale associée à ce scénario est calculée comme :

$$c_{s11} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = |u_f| \quad (\text{II.6.61})$$

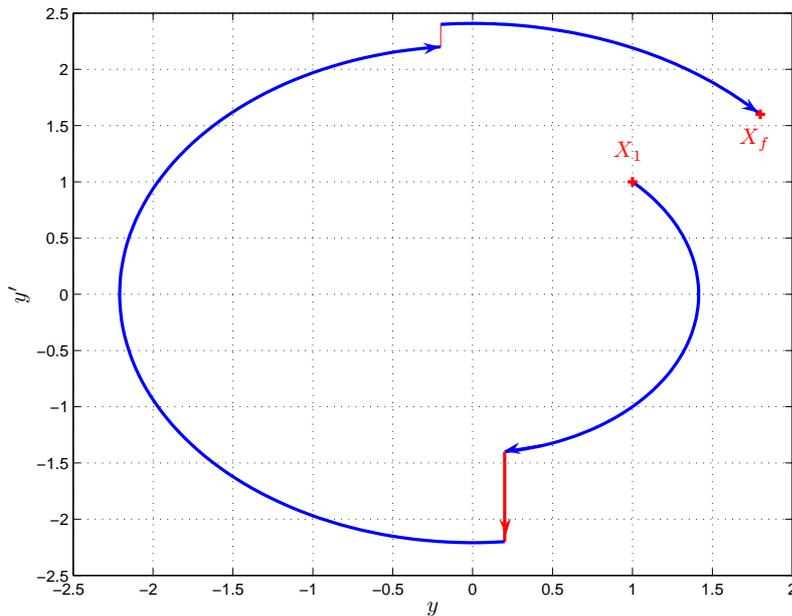


FIG. 6.3 – Trajectoires dans le plan de phase pour le scénario I à deux impulsions intérieures

Un cas particulier de ce scénario est celui où il n'y a qu'une impulsion intérieure si  $\rho = |u_f|$  ou  $\rho = 0$ . Les trajectoires et l'impulsion sont représentées dans le plan de phase à la figure 6.4 pour des conditions initiales et finales :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_f = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.62})$$

et un temps de transfert donné par  $\tau_{f1} = 2\pi$  rad.

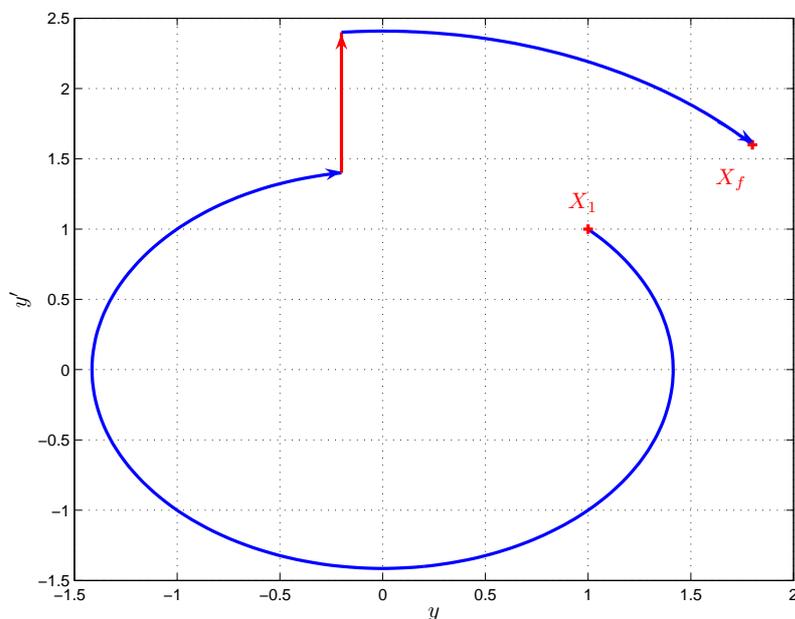


FIG. 6.4 – Trajectoires dans le plan de phase pour le scénario à une impulsion intérieure

Une autre variante du scénario I consiste à combiner deux (ou une) impulsions extrêmes et  $r$  impulsions intérieures (cf. figure 6.5).

Il est évident ici qu'une impulsion finale ne sera présente que pour des durées de transfert multiples de  $\pi$  :

$$\tau_{f1} = k\pi \quad (\text{II.6.63})$$

Une équation définissant l'amplitude des impulsions (en fait la consommation) est obtenue en écrivant les conditions (II.6.42) et (II.6.43).

$$\sum_{i=1}^N \Delta v_i = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_N \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_N \end{bmatrix} = \beta(0)u_f^2 = |u_f^2| \quad (\text{II.6.64})$$

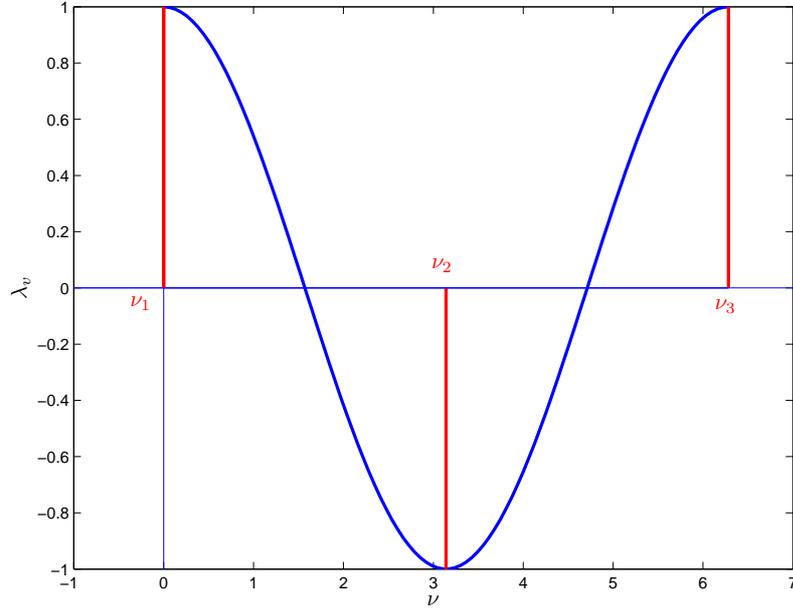


FIG. 6.5 – Exemple de scénario à 2 impulsions extrêmes et une impulsion intérieure

Il est aisé d'en déduire que  $\beta(0)$  et  $u_f^2$  sont toujours de même signe. L'autre condition issue de l'équation (II.6.53) montre que  $u_f^1 = 0$ . Cela signifie que les positions finale et initiale sont identiques ou opposées. Les impulsions sont distantes de  $\pi$  et de sens opposé successivement. (II.6.64) est donc un système linéaire indéterminé, consistant qui va conduire à une infinité de solutions :

$$\begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_N \end{bmatrix} = A^+ |u_f^2| + (\mathbf{1}_N - A^+ A) \rho \quad (\text{II.6.65})$$

où  $\rho \in \mathcal{R}^N$  est quelconque et  $A^+$  est l'inverse à droite de la matrice  $A$  qui peut être explicitement calculée comme :

$$A^+ = A^t (AA^t)^{-1} = A^t / N \quad (\text{II.6.66})$$

Les trajectoires et les impulsions sont représentées dans le plan de phase à la figure 6.6 pour des conditions initiales et finales :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_f = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.67})$$

et un temps de transfert donné par  $\tau_{f1} = 2\pi$  rad.

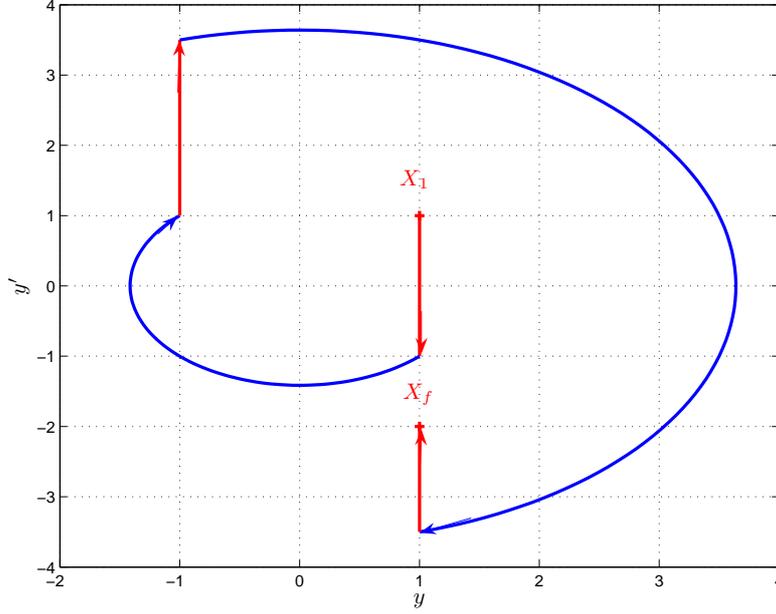


FIG. 6.6 – Trajectoires dans le plan de phase pour le scénario à impulsions extrêmes et intérieures

La consommation totale associée à ce scénario est calculée comme :

$$c_{s12} = \sum_{i=1}^N \Delta v_i = |u_f^2| = |u_f| \quad (\text{II.6.68})$$

Enfin, dans le cas où  $\tau_{f1} < \pi$ , il ne peut y avoir qu'une impulsion intermédiaire puisque les impulsions sont toutes distantes de  $\pi$ . On est ainsi ramené à la première variante du scénario I exposée aux figures 6.3 et 6.4.

**Scénario II** Dans ce scénario, la date de la deuxième impulsion (si elle a lieu) est exactement égale à la durée du transfert  $\nu_2 = \tau_{f1}$  qui est une donnée du problème. Les conditions (II.6.42), (II.6.43) conduisent à calculer l'amplitude des impulsions comme :

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= \beta(0) u_f^1 \left[ \frac{u_f^2}{u_f^1} + \cot(\tau_{f1}) \right] \geq 0 \\ \Delta v_2 &= -\beta(\tau_{f1}) \frac{u_f^1}{\sin(\tau_{f1})} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6.69})$$

On déduit de la contrainte sur la durée du rendez-vous  $\tau_{f1} < \pi$  et des contraintes de signe :

- $\beta(\tau_{f1})$  et  $u_f^1$  sont de signe opposé.
- $\beta(0)$  et  $u_f^1$  sont de même signe.
- La durée de rendez-vous doit vérifier la contrainte :

$$\cot(\tau_{f1}) \geq -\frac{u_f^2}{u_f^1} \quad (\text{II.6.70})$$

La condition (II.6.70) définit une contrainte liant les conditions initiales, finales et la durée de rendez-vous définissant l'espace admissible de ces paramètres pour la réalisation d'un tel scénario. Elle peut se réécrire comme :

$$\frac{1}{\tan \tau_{f1}} \geq \frac{y_1' - y_f \sin \tau_{f1} - y_f' \cos \tau_{f1}}{y_f \cos \tau_{f1} - y_f' \sin \tau_{f1} - y_1} \quad (\text{II.6.71})$$

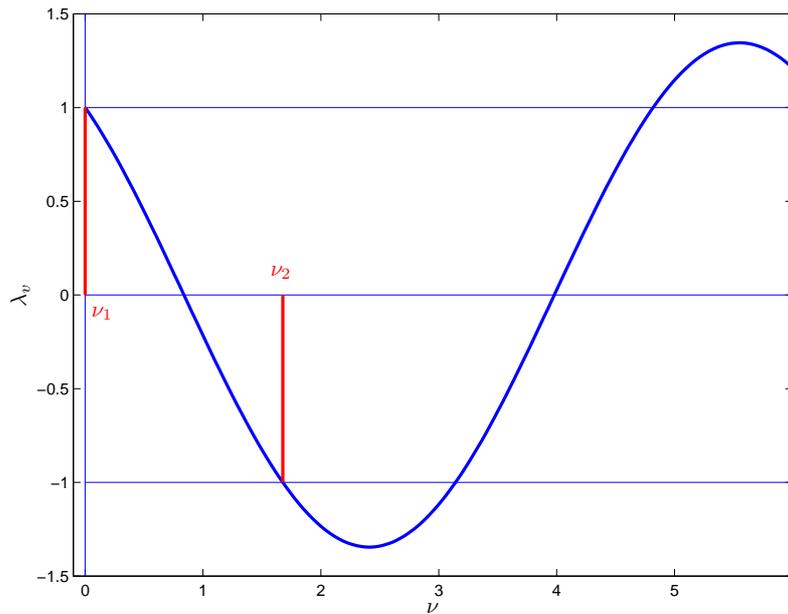


FIG. 6.7 – Exemple de scénario à deux impulsions extrêmes

Les trajectoires et les impulsions sont représentées dans le plan de phase à la figure 6.8 pour des conditions initiales et finales :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_f = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.72})$$

et un temps de transfert donné par  $\tau_{f1} = 1.68$  rad.

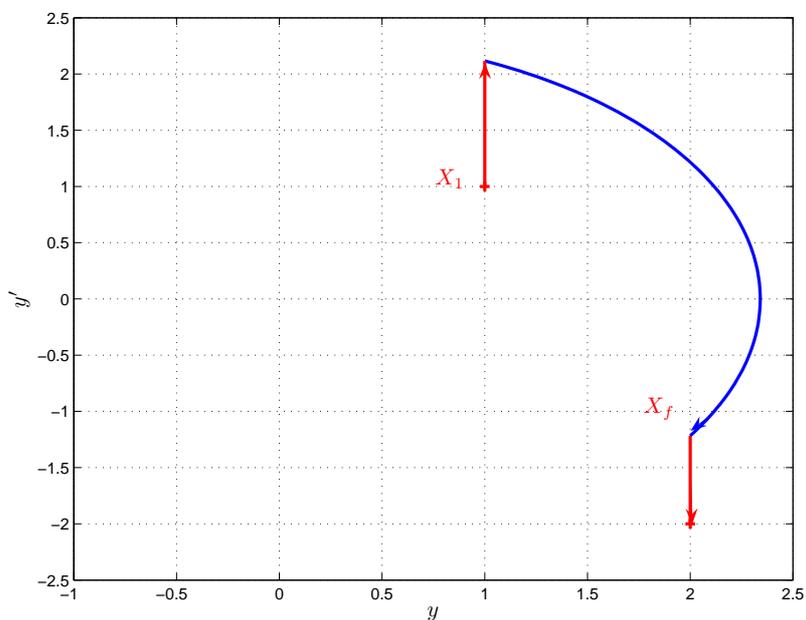


FIG. 6.8 – Trajectoires dans le plan de phase pour le scénario à deux impulsions extrêmes

La consommation totale associée à ce scénario est calculée comme :

$$c_{s21} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \beta(0)u_f^1 \left[ \frac{u_f^2}{u_f^1} + \cot(\tau_{f1}) \right] - \beta(\tau_{f1}) \frac{u_f^1}{\sin(\tau_{f1})} \quad (\text{II.6.73})$$

Examinons également le cas particulier de ce scénario pour lequel la durée du rendez-vous ne permet qu'une impulsion initiale.

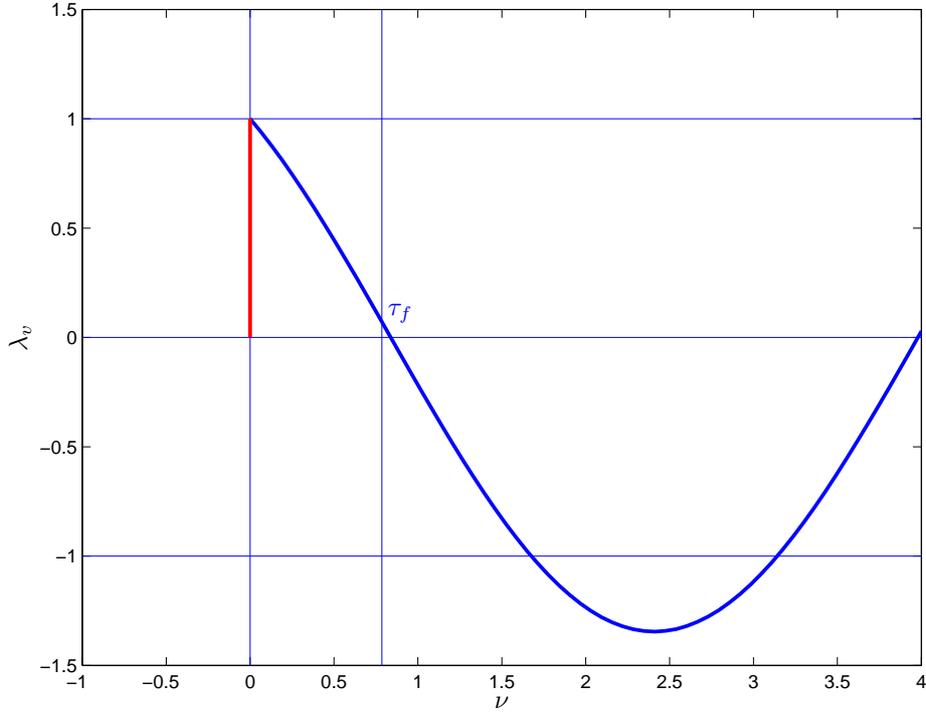


FIG. 6.9 – Exemple de scénario à une impulsion initiale

Dans ce cas, on a le scénario de la figure 6.9 et les conditions nécessaires et suffisantes (II.6.42) permettent d'obtenir l'amplitude de l'impulsion :

$$\Delta v_1 = \beta(0)u_f^2 = \beta(0) [y_f \sin \nu_f + y'_f \cos \nu_f - y'_1] \quad (\text{II.6.74})$$

et une condition définissant les conditions finales et initiales atteignables sur cet horizon avec une impulsion initiale et le temps de dérive égal à la durée du transfert.

$$y_f \cos \nu_f - y'_f \sin \nu_f - y_1 = 0 \quad (\text{II.6.75})$$

On en déduit en particulier que l'impulsion initiale est de même signe que  $u_f^2$ . Les trajectoires et l'impulsion sont représentées dans le plan de phase à la figure 6.10 pour des conditions initiales et finales :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_f = \begin{bmatrix} -2 + \sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.76})$$

et un temps de transfert donné par  $\tau_{f1} = \pi/4$  rad.

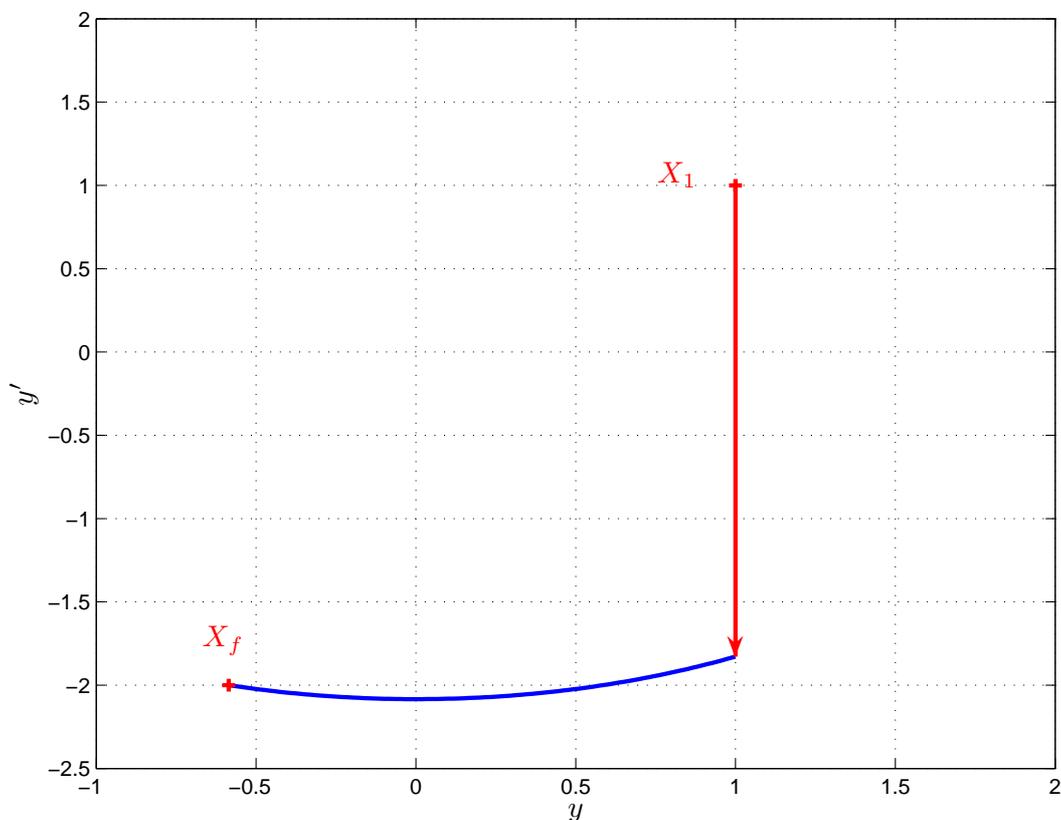


FIG. 6.10 – Trajectoires dans le plan de phase pour le scénario à une impulsion initiale

La consommation totale associée à ce scénario est calculée comme :

$$c_{s22} = \Delta v_1 = \beta(0)u_f^2 \quad (\text{II.6.77})$$

Finissons l'examen du scénario II avec le cas particulier de ce dernier pour lequel la durée du rendez-vous ne permet qu'une impulsion finale. Dans ce cas, on a le scénario de la figure 6.11 et les conditions nécessaires et suffisantes (II.6.42) permettent d'obtenir l'amplitude de l'impulsion :

$$\begin{aligned} \Delta v_f &= -\beta(\nu_f) \frac{u_f^1}{\sin \nu_f} \\ &= \beta(\nu_f) \frac{u_f^2}{\cos \nu_f} \quad \nu_f \neq \pi/2 \end{aligned} \quad (\text{II.6.78})$$

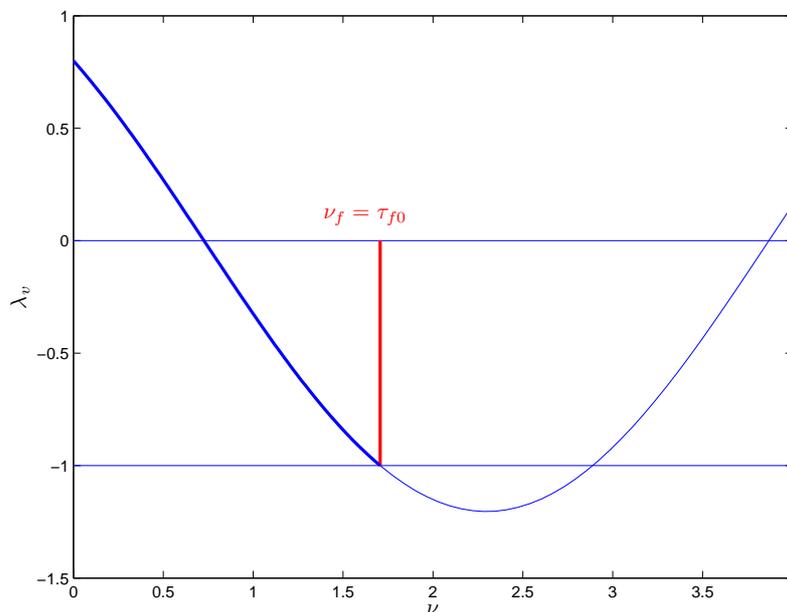


FIG. 6.11 – Exemple de scénario à une impulsion finale

On en déduit une condition définissant la condition finale en position atteignable depuis des conditions initiales données sur l'horizon fixé avec une impulsion finale et un temps de dérive égal à la durée du transfert.

$$y_f = \frac{y_1 + y_1' \tan \nu_f}{\cos \nu_f (1 + \tan^2 \nu_f)} \quad (\text{II.6.79})$$

Les trajectoires et l'impulsion sont représentées dans le plan de phase à la figure 6.12 pour des conditions initiales et finales :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_f = \begin{bmatrix} 0.8554 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.80})$$

et un temps de transfert donné par  $\tau_{f1} = \arctan\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}\right)$  rad.

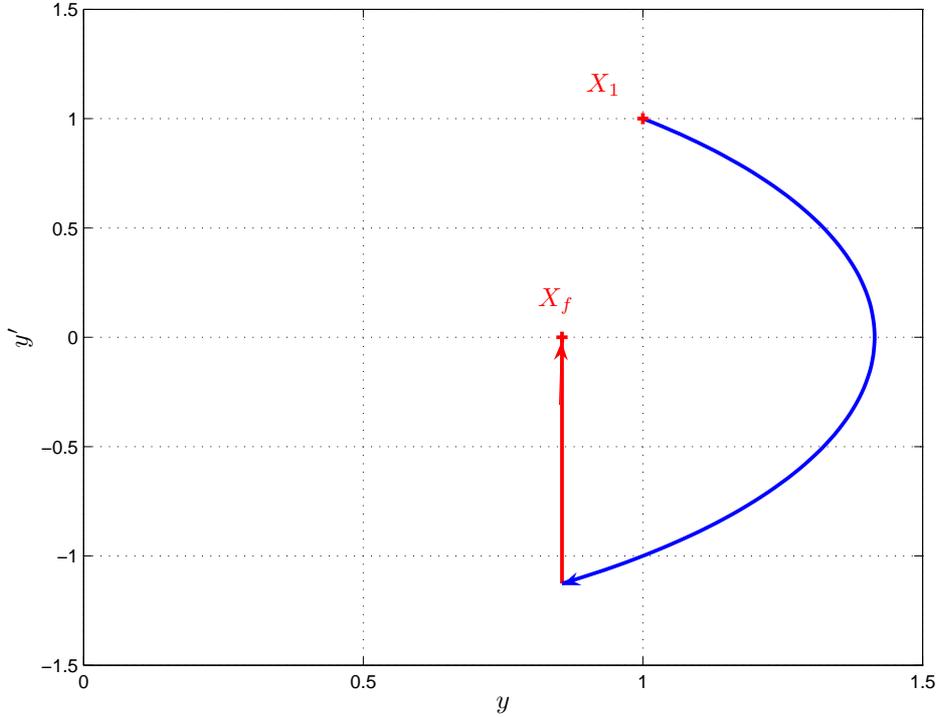


FIG. 6.12 – Trajectoires dans le plan de phase pour le scénario à une impulsion finale

La consommation totale associée à ce scénario est calculée comme :

$$c_{s23} = \Delta v_f = -\beta(\nu_f) \frac{u_f^1}{\sin \nu_f} = \beta(\nu_f) \frac{u_f^2}{\cos \nu_f} \quad (\text{II.6.81})$$

Cette dernière consommation est parfaitement cohérente avec une variante du premier cas du scénario I avec une seule impulsion à la fin du transfert.

L'analyse des différents scénarii optimaux montrent que leur réalisation n'est possible que si les conditions liant la durée de transfert et les conditions de bord (initiales et finales) sont vérifiées. La référence [68] illustre l'optimalité de ces scénarii associés à la théorie du primer vector pour une durée de transfert d'un quart de tour ( $\pi/2$ ) et ses résultats sont parfaitement cohérents avec l'analyse précédente. Ainsi, la durée du transfert interdit de considérer un scénario à plusieurs impulsions intérieures alors que les scénarii ne comprenant qu'une seule impulsion intérieure ou extrême ne sont pas autorisés par les conditions de bord. Le scénario optimal est donc un scénario à deux impulsions extrêmes d'amplitude unité et de direction opposée résultant en une consommation de 2 dont Prussing montre qu'elle est minimale, notamment par rapport à celle obtenue avec un scénario à 3 impulsions.

Dans le cadre d'une modélisation dynamique linéaire, il peut être démontré que les conditions nécessaires de Lawden sont également des conditions suffisantes [53], [68], [23] si la condition CNS 8 est vérifiée  $\forall t \in [t_0, t_f]$ . Cela peut être démontré simplement en calculant la solution de l'équation d'état adjointe sur la trajectoire optimale. En effet, si l'on note  $\Phi(t, t_1)$  la matrice de transition de l'équation d'état, la solution de l'équation d'état adjointe (rappel : la matrice de transition d'état du système adjoint est la matrice de transition d'état initiale transposée dans laquelle les dates sont permutées [6]) est obtenue comme :

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_r(t) \\ \lambda_v(t) \end{bmatrix} = \Phi^t(t_1, t)\lambda(t_1) \quad (\text{II.6.82})$$

alors que la solution générale de l'équation d'état est :

$$X(t_f) = \Phi(t_f, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta V(t_i) \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.83})$$

Si l'on suppose que les conditions nécessaires sont vérifiées alors on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda^t(t_f)\Delta X(t_f, t_1) &= \lambda^t(t_f) (X(t_f) - \Phi(t_f, t_1)X(t_1)) = \sum_{i=1}^N \lambda^t(t_f)\Phi(t_f, t_i) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta V(t_i) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_v^t(t_i)\Delta V(t_i) = \sum_{i=1}^N \Delta v_i \end{aligned} \quad (\text{II.6.84})$$

sinon le même calcul conduit à écrire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Sewartz :

$$\begin{aligned} \lambda^t(t_f)\Delta X(t_f, t_1) &= \lambda^t(t_f) (X(t_f) - \Phi(t_f, t_1)X(t_1)) = \sum_{i=1}^N \lambda^t(t_f)\Phi(t_f, t_i) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta V(t_i) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_v^t(t_i)\Delta V(t_i) \leq \sum_{i=1}^N \Delta v_i \end{aligned} \quad (\text{II.6.85})$$

Dans les développements précédents, le nombre d'impulsions est supposé fixe et connu à l'avance alors que  $N$  est une des variables importantes participant au choix de la trajectoire optimale de commande. S'il semble naturel de considérer que le nombre optimal d'impulsions  $N^*$  est directement lié à la durée fixe du rendez-vous, il n'en reste pas moins qu'il existe très peu de résultats forts sur le sujet. Seule une borne supérieure sur le nombre maximal d'impulsions a pu être donnée en fonction du nombre de variables d'état finales fixées.

Dans la littérature, le problème du choix des dates d'application des impulsions ainsi que le nombre optimal d'impulsions a suscité un certain nombre de travaux. L'approche de Lion & Handelsman propose une démarche générale, car ne faisant appel à aucune hypothèse supplémentaire sur la nature du mouvement, et pertinente, car basée sur un calcul de variation justifié. Nous avons entrepris d'appliquer cette méthode au cas des orbites elliptiques afin de l'exploiter plus tard dans une démarche d'optimisation complète.

### 6.2.3 Résultats de Lion & Handelsman

Dans [54], Lion et Handelsman proposent d'étendre la théorie du primer vector aux trajectoires non optimales afin de développer des critères systématiques permettant d'ajouter ou de déplacer des impulsions pour faire diminuer la consommation associée à la trajectoire initiale. Le calcul des variations est utilisé dans le but de déterminer des conditions sur la norme du primer vector pour l'addition d'une impulsion et sur la dérivée de la norme du primer vector pour l'addition d'un arc balistique initial et/ou final. L'idée est de calculer la variation de la fonction coût associée à une trajectoire initiale (éventuellement sous-optimale) à deux impulsions (initiale et terminale) pour en déduire des tests permettant de décider l'addition d'impulsion et/ou d'arc balistique. La même démarche est employée par Jezewski dans [41] où une modélisation linéaire du mouvement relatif est considérée.

Il est à noter que les travaux de Lion & Handelsman figurent parmi les rares travaux considérant l'optimisation du nombre d'impulsions d'une manière plus ou moins explicite.

Nous reprenons les résultats présentés par Lion et Handelsman, en considérant des orbites elliptiques képlériennes, à l'aide du modèle de Tschauner et Hempel [80].

#### 6.2.3.1 Equation variationnelle adjointe

La méthode repose essentiellement sur la dérivation de l'équation variationnelle adjointe présentée dans cette section.

Soit le modèle de mouvement relatif linéaire :

$$\begin{bmatrix} \delta v \\ \frac{d\delta v}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r \\ \frac{d\delta r}{dt} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.86})$$

où  $A_1$  est une matrice symétrique et  $A_2$  est une matrice invariante dans le temps et anti-symétrique. Ceci est valable pour le cas des orbites circulaires (HCW [26]), ou elliptiques (Tschauner-Hempel [80]).

On définit le Hamiltonien du système à l'aide de la relation :

$$H = \lambda_r^t \frac{d\delta r}{dt} + \lambda_v^t \frac{d\delta v}{dt} \quad (\text{II.6.87})$$

L'évolution du vecteur adjoint est obtenue *via* les équations canoniques de Hamilton :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\lambda_r}{dt} \\ \frac{d\lambda_v}{dt} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & -A_1 \\ -I_n & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_v \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.88})$$

De (II.6.88) et (II.6.86), on déduit :

$$\frac{d^2 \lambda_v}{dt^2} = A_1 \lambda_v + A_2 \frac{d\lambda_v}{dt} \quad (\text{II.6.89})$$

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} = A_1 \delta r + A_2 \delta v \quad (\text{II.6.90})$$

(II.6.89)  $\times \delta r^t -$  (II.6.90)  $\times \lambda_v^t$  mène à :

$$\lambda_v^t \frac{d^2 \delta r}{dt^2} - \delta r^t \frac{d^2 \lambda_v}{dt^2} = 0 \quad (\text{II.6.91})$$

Si l'on rajoute et soustrait  $\frac{d\lambda_v^t}{dt} \delta v$ , on obtient la relation :

$$\lambda_v^t \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{d\lambda_v^t}{dt} \delta v - \delta r^t \frac{d^2 \lambda_v}{dt^2} - \frac{d\lambda_v^t}{dt} \delta v = 0 \quad (\text{II.6.92})$$

autrement dit :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \lambda_v^t \delta v - \frac{d\lambda_v^t}{dt} \delta r \right\} = 0 \quad (\text{II.6.93})$$

d'où :

$$\lambda_v^t \delta v - \frac{d\lambda_v^t}{dt} \delta r = Cst \quad (\text{II.6.94})$$

Cette équation est appelée **l'équation variationnelle adjointe**. Elle est valable pour tous les arcs délimités par 2 impulsions.

### 6.2.3.2 Condition suffisante d'addition d'impulsion

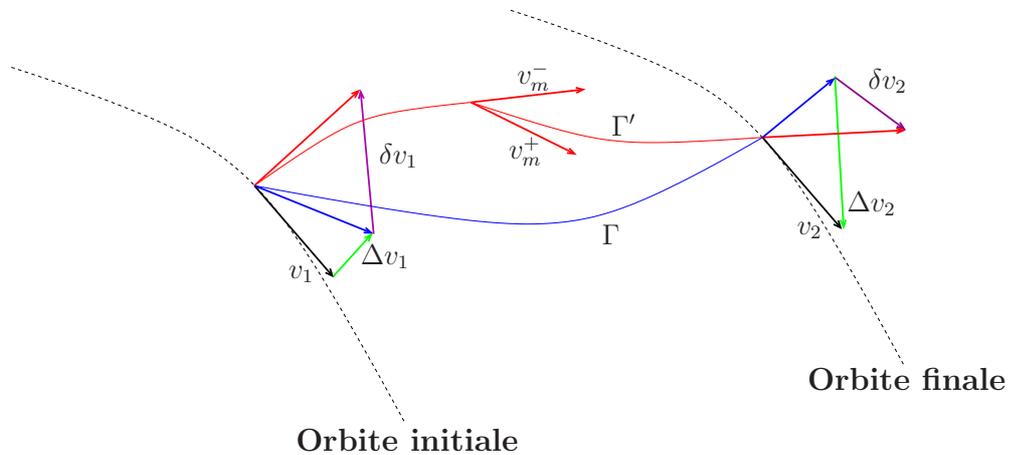


FIG. 6.13 – Addition d'une impulsion intermédiaire

La figure 6.13 montre l'effet d'une impulsion supplémentaire  $v_m^+ - v_m^- = \delta v_m^+ - \delta v_m^-$  à l'instant  $t_m$ . Soit  $J$  le coût en carburant de la trajectoire initiale  $\Gamma$  et  $J'$  le coût de la nouvelle trajectoire  $\Gamma'$ . On peut écrire :

$$J = |\Delta v_1| - |\Delta v_2| \quad (\text{II.6.95})$$

$$J' = |\Delta v_1 + \delta v_1| + |\delta v_m^+ - \delta v_m^-| + |\Delta v_2 - \delta v_2| \quad (\text{II.6.96})$$

Le coût différentiel  $\delta J$  est donné par :

$$\delta J = J' - J = |\Delta v_1 + \delta v_1| + |\delta v_m^+ - \delta v_m^-| + |\Delta v_2 - \delta v_2| - |\Delta v_1| - |\Delta v_2| \quad (\text{II.6.97})$$

Sachant que  $|x + \delta x| - |x| = \delta x^t \frac{x}{|x|}$  (Jezewski [40]), on obtient :

$$\delta J = \delta v_1^t \frac{\Delta v_1}{|\Delta v_1|} + |\delta v_m^+ - \delta v_m^-| - \delta v_2^t \frac{\Delta v_2}{|\Delta v_2|} \quad (\text{II.6.98})$$

La CN2 de Lawden (II.6.11) permet d'écrire :

$$\lambda_v(t_1) = \frac{\Delta v_1}{|\Delta v_1|}, \quad \lambda_v(t_2) = \frac{\Delta v_2}{|\Delta v_2|} \quad (\text{II.6.99})$$

L'équation (II.6.98) devient :

$$\delta J = \delta v_1^t \lambda_v(t_1) + |\delta v_m^+ - \delta v_m^-| - \delta v_2^t \lambda_v(t_2) \quad (\text{II.6.100})$$

Si l'on applique l'équation adjointe (II.6.94) sur les deux arcs  $t_1 \longrightarrow t_m^-$  et  $t_m^+ \longrightarrow t_2$ , on déduit :

$$\lambda_v(t_1)^t \delta v_1 - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_1)^t \delta r_1 = \lambda_v(t_m^-)^t \delta v_m^- - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_m^-)^t \delta r_m^- \quad (\text{II.6.101})$$

$$\lambda_v(t_m^+)^t \delta v_m^+ - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_m^+)^t \delta r_m^+ = \lambda_v(t_2)^t \delta v_2 - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_2)^t \delta r_2 \quad (\text{II.6.102})$$

en sachant que :

- $\delta r_1 = dr_1 - v_1 dt_1 = 0$  et  $\delta r_2 = dr_2 - v_2 dt_2 = 0$   
car  $dt_1 = dt_2 = 0$  (date initiale et finale fixées) et  $dr_1 = dr_2 = 0$  (positions initiales et finales fixées) ;
- $\delta r_m^+ = \delta r_m^- = \delta r_m$  (la position est une fonction continue de  $t$ )
- $\lambda_v(t_m^+) = \lambda_v(t_m^-) = \lambda_v(t_m)$  (le primer vector est continu, CN1 de Lawden)
- $\frac{d\lambda_v}{dt}(t_m^+) = \frac{d\lambda_v}{dt}(t_m^-) = \frac{d\lambda_v}{dt}(t_m)$  (la dérivée temporelle du primer vector est continue, CN1 de Lawden)

Les équations (II.6.101) et (II.6.102) deviennent :

$$\lambda_v(t_1)^t \delta v_1 = \lambda_v(t_m)^t \delta v_m^- - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_m)^t \delta r_m \quad (\text{II.6.103})$$

$$\lambda_v(t_m)^t \delta v_m^+ - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_m)^t \delta r_m = \lambda_v(t_2)^t \delta v_2 \quad (\text{II.6.104})$$

On déduit le coût différentiel :

$$\delta J = -\lambda_v(t_m)^t(\delta v_m^+ - \delta v_m^-) + |\delta v_m^+ - \delta v_m^-| \quad (\text{II.6.105})$$

$$= |\Delta v_m|(1 - \lambda_v(t_m)^t \beta_{\Delta v_m}) \quad (\text{II.6.106})$$

où  $\beta_{\Delta v_m}$  est un vecteur unitaire. Afin de garantir  $\delta J < 0$ ,  $|\lambda_v(t_m)|$  doit être supérieur à 1. Pour une diminution maximale du coût, une impulsion intermédiaire devrait être ajoutée à  $t_m$  :

$$t_m = \arg \max_{t \in [t_1, t_2]} |\lambda_v(t)| \quad (\text{II.6.107})$$

Les caractéristiques de la nouvelle impulsion sont calculées à l'aide du calcul des variations dans [41]. Ceci ne garantit pas la continuité de la dérivée du primer vector et donc ne vérifie pas les conditions d'optimalité de Lawden. En effet, la nouvelle courbe de la norme du primer vector n'est pas lisse dans certains cas (voir figure 6.14). C'est l'inconvénient majeur de ce type d'approche qui a limité son utilisation dans la littérature. Certains travaux ont tenté de contourner ce problème à l'aide de procédures d'optimisation locale [43, 40, 42, 41].

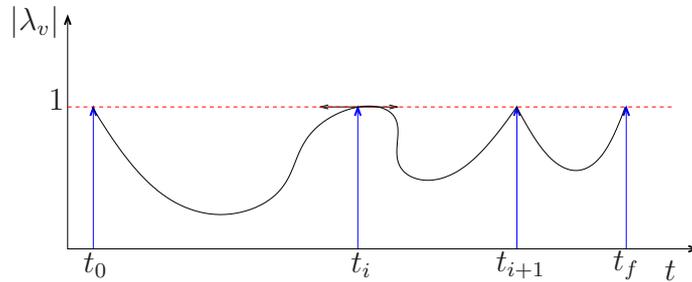


FIG. 6.14 – Trajectoire non lisse du primer vector

Nous proposons dans la suite, une démarche qui permet de contourner cet obstacle sans faire appel à des procédures d'optimisation supplémentaires.

### 6.2.3.3 Condition suffisante de déplacement d'une impulsion

Le coût d'un arc peut être amélioré en déplaçant l'une des deux impulsions qui le délimitent. Cela correspond à l'addition d'un arc balistique.

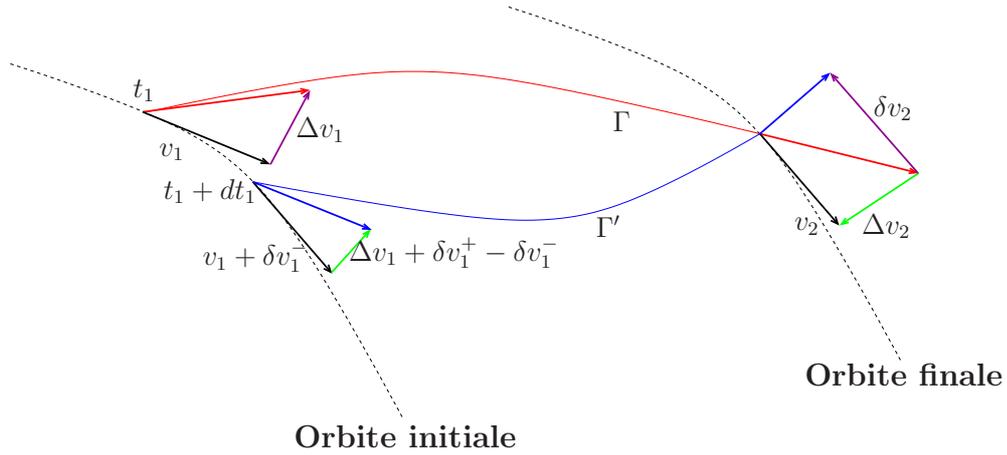


FIG. 6.15 – Addition d'un arc balistique initial

La figure 6.15 montre l'effet de l'addition d'un arc balistique d'une durée  $dt_1$ . Ceci revient à retarder la première impulsion de  $\delta t_1$ .

On calcule d'abord la consommation des trajectoires  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  :

$$J = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| \quad (\text{II.6.108})$$

$$J' = |\Delta v_1 + (\delta v_1^+ - \delta v_1^-)| + |\Delta v_2 - \delta v_2| \quad (\text{II.6.109})$$

Le coût différentiel peut donc être calculé par :

$$\delta J = J' - J = |\Delta v_1 + (\delta v_1^+ - \delta v_1^-)| + |\Delta v_2 - \delta v_2| - |\Delta v_1| - |\Delta v_2| \quad (\text{II.6.110})$$

La définition du primer vector et l'équation (II.6.98) mènent à :

$$\delta J = \lambda_v(t_1)^t (\delta v_1^+ - \delta v_1^-) - \lambda_v(t_2)^t \delta v_2 \quad (\text{II.6.111})$$

L'application de l'équation adjointe (II.6.94) sur l'arc  $t_1 + dt_1 \rightarrow t_2$  donne :

$$\lambda_v(t_1)^t (\delta v_1^+ - \delta v_1^-) - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_1)^t \delta r_1^+ = \lambda_v(t_2)^t \delta v_2 - \frac{d\lambda_v}{dt}(t_2)^t \delta r_2 \quad (\text{II.6.112})$$

$\delta r_2 = 0$  pour les mêmes raisons que le paragraphe précédent, d'où l'on déduit :

$$\lambda_v(t_1)^t (\delta v_1^+ - \delta v_1^-) - \lambda_v(t_2)^t \delta v_2 = \frac{d\lambda_v}{dt}(t_1)^t \delta r_1^+ \quad (\text{II.6.113})$$

L'équation (II.6.111) devient alors :

$$\delta J = \frac{d\lambda_v}{dt}(t_1)^t \delta r_1^+ \quad (\text{II.6.114})$$

La variation totale de  $r_1$  est donnée par :

$$\delta r_1^+ = dr_1 - v_1^+ dt_1 \quad (\text{II.6.115})$$

$$\delta r_1^- = dr_1 - v_1^- dt_1 \quad (\text{II.6.116})$$

$$\begin{aligned} \delta r_1^- = 0 &\implies dr_1 = v_1^- dt_1 \\ &\implies \delta r_1^+ = -(v_1^+ - v_1^-) dt_1 \end{aligned} \quad (\text{II.6.117})$$

A l'aide de (II.6.114) on obtient finalement :

$$\delta J = -|\Delta v_1| \frac{d\lambda_v}{dt}(t_1)^t \lambda_v(t_1) dt_1 \quad (\text{II.6.118})$$

Cela permet de déduire que le fait d'ajouter un arc initial d'une durée de  $dt_1 > 0$  peut améliorer le coût si  $\frac{d\lambda_v}{dt}(t_1)^t \lambda_v(t_1) > 0$ . Ceci arrive notamment lorsque l'amplitude du primer vector dépasse l'unité immédiatement après  $t_1$  et que la dérivée du primer vector est positive.

Le même raisonnement peut être suivi pour l'addition d'un arc final conduisant à la condition :

$$\delta J = -|\Delta v_2| \frac{d\lambda_v}{dt}(t_2)^t \lambda_v(t_2) dt_2 \quad (\text{II.6.119})$$

Un arc final d'une durée  $dt_2 < 0$  réduit la consommation, lorsque l'amplitude du primer vector dépasse l'unité juste avant  $t_2$  et que la dérivée du primer vector est positive. Ceci revient à avancer la date d'application de l'impulsion finale.

Le problème de rendez-vous considéré dans cette thèse est un problème à *temps fixé*, où l'optimisation des dates d'impulsions n'affecte pas la date initiale et la date finale du transfert. Ceci sera pris en considération lors du déplacement d'impulsions.

## 6.3 Synthèse d'algorithmes pour le rendez-vous en temps fixé

### 6.3.1 Formulation polynomiale partielle du problème

Les algorithmes développés dans cette section ont pour objectif de résoudre le problème de rendez-vous tel qu'il a été formulé par Carter [20] avec, en plus, la prise en compte du nombre et des dates d'application des impulsions dans le processus d'optimisation. Nous

rappelons la formulation du problème :

$$\begin{aligned}
& \min_{N, t_i, \Delta v_i, \beta(t_i)} \sum_{i=1}^N \Delta v_i \\
& \text{sous} \\
& u_f = \sum_{i=1}^N \phi^{\#t}(t_i) B(t_i) \Delta v_i \beta(t_i) = \sum_{i=1}^N R(t_i) \Delta v_i \beta(t_i) \\
& \|\beta(t_i)\| = 1 \\
& \Delta v_i \geq 0
\end{aligned} \tag{II.6.120}$$

avec :

- $\phi^{\#t}(t_i) = \phi^{-1}(t_i)$ ,  $\phi(t_i)$  est la matrice fondamentale de transition de Yamanaka-Ankersen [84]. Cette matrice est valable pour toutes les excentricités de l'orbite de la cible ;
- $B(t_i)$  est la matrice d'entrée du modèle de Tschauner-Hempel [80] ;
- $u_f = \phi^{-1}(t_f) X_f - \phi^{-1}(t_1) X_1 \neq 0$  contient les conditions au bords ;
- $X_1$  et  $X_f$  sont les conditions initiales et finales en position/vitesse relatives.

A partir de la formulation du problème et des conditions d'optimalité, le point de départ est de considérer le problème de rendez-vous pour lequel le nombre et les dates d'impulsions sont fixées. L'optimisation de ces paramètres sera considérée dans le paragraphe suivant :

$$\begin{aligned}
& \min_{\lambda, \Delta v_i} -u_f^t \lambda \\
& \text{sous} \sum_{i=1}^N R(t_i) R^t(t_i) \lambda \Delta v_i = -u_f \\
& \lambda^t R(t_i) R(t_i)^t \lambda = 1, \forall i = 1, \dots, N \\
& \lambda^t \frac{dR(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} R(t_i)^t \lambda = 0, \forall i = 2, \dots, N-1 \\
& \Delta v_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{II.6.121}$$

La formulation (II.6.121) est polynomiale par rapport aux variables de décision  $\lambda$  et  $\Delta v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Ceci donne la possibilité d'utiliser des outils issus de la théorie de l'optimisation polynomiale. Le nombre d'impulsions  $N$  ainsi que les dates internes  $t_i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$  sont fixés *a priori* afin de simplifier le problème. L'optimisation de ces paramètres est traitée séparément. La CNS 8 de Carter n'est pas incluse dans cette formulation à cause de sa nature continue. Elle est traitée *a posteriori* comme nous verrons dans la suite. Deux solutions sont proposées pour résoudre le problème polynomiale posé, tout en vérifiant l'ensemble des conditions d'optimalité et en prenant en compte toutes les variables du problème.

## 6.3.2 Approche par optimisation polynomiale et grille temporelle

### 6.3.2.1 Approche par grille sur les dates d'impulsion

Dans cette approche, le nombre d'impulsions  $N$  n'est pas optimisé explicitement dans le processus de minimisation du critère. A l'aide des travaux de Neustadt [59], on peut fixer des bornes minimales et maximales sur ce nombre entier.

Soit  $N^*$  le nombre optimal d'impulsions, on a :

- $N^* \geq 2$  d'une manière générale ;
- $N^* \leq \dim \phi$ , si l'on considère que toutes les conditions finales en position et vitesse sont fixées. En d'autres termes :  $N^* \leq 2$  pour un déplacement selon une seule direction (problème du rendez-vous hors-plan [66]),  $N^* \leq 4$  pour un déplacement dans le plan et  $N^* \leq 6$  pour un déplacement relatif dans les trois directions de l'espace.

Soit  $N_{max} = \dim \phi$ , le problème est résolu pour  $N = 2, \dots, N_{max}$ . La solution optimale est ensuite choisie parmi les solutions obtenues en minimisant le coût.

En ce qui concerne les dates d'application des impulsions  $t_i$ , l'optimisation n'affecte que  $N - 2$  dates car  $t_1$  et  $t_N = t_f$  sont fixées par définition. Nous procédons par une approche par grille où le problème est résolu pour chaque N-uplet  $(t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N)$ , avec  $(t_2, \dots, t_{N-1}) \in (\Theta_2, \dots, \Theta_{N-1})$ . Chaque  $\Theta_i$  est l'ensemble ordonné de valeurs candidates de la date  $t_i$ .

La contrainte CNS 8 de Carter est traitée d'une manière similaire. L'inégalité  $\|\lambda_v(t)\| \leq 1$  est testée sur un ensemble de points équidistants  $t_j$  issus de la discrétisation de l'intervalle  $[t_1, t_f]$ . Le nombre de *points de contrôle*, ensemble des instants  $t$  où le primer vector est évalué, est choisi en fonction de la précision envisagée et des contraintes pratiques (temps de calcul). A cause de la nature de la fonction  $\|\lambda_v(t)\|$  liée à la matrice de transition (combinaison de fonctions sinusoïdales), un nombre réduit de points de contrôle est généralement suffisant (typiquement 50 points par période orbitale).

Pour un nombre d'impulsions  $N$  donné, une grille des dates de  $p_t$  points est construite :

$$\Theta = \{(t_1^j = t_1, t_2^j, \dots, t_{N-1}^j, t_N^j = t_N), t_1^j < t_2^j < \dots < t_{N-1}^j < t_N^j, j = 1, \dots, p_t\} \quad (\text{II.6.122})$$

Le nombre de points de la grille  $p_t$  dépend de la précision recherchée sur les valeurs des dates intérieures. De la même manière, un vecteur  $T_\lambda$  de  $p_\lambda$  points de contrôle de la norme du primer vector est généré :

$$T_\lambda = [t_\lambda^1 = t_1, t_\lambda^2, \dots, t_\lambda^{p_\lambda-1}, t_\lambda^{p_\lambda} = t_N] \quad (\text{II.6.123})$$

Pour chaque point  $j = 1, \dots, p_t$  de la grille  $\Theta$ , le problème d'optimisation suivant est résolu :

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda^j, \Delta v_i^j} -u_f^t \lambda^j \\ & \text{sous } \sum_{i=1}^N R(t_i^j) R^t(t_i^j) \lambda \Delta v_i^j = -u_f \\ & \lambda^{j^t} R(t_i^j) R^t(t_i^j) \lambda^j = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ & \lambda^{j^t} \frac{dR(t_i^j)}{dt} R^t(t_i^j) \lambda^j = 0, \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{II.6.124}$$

$$\Delta v_i^j \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\lambda^{j^t} R(t_\lambda^k) R^t(t_\lambda^k) \lambda^j \leq 1, \quad \forall k = 1, \dots, p_\lambda$$

La solution optimale  $[\Delta v_1^{j^*}, \dots, \Delta v_N^{j^*}, \lambda^{j^*}, t_2^{j^*}, \dots, t_{N-1}^{j^*}]$  est choisie parmi les solutions obtenues en minimisant la consommation :

$$j^* = \arg \min_j -u_f^t \lambda^j \tag{II.6.125}$$

Les directions des poussées sont déduites à l'aide des équations de Carter :

$$\beta^*(t_i^{j^*}) = -R(t_i^{j^*})^t \lambda^{j^*} \tag{II.6.126}$$

Le problème (II.6.124) est typiquement un problème d'optimisation polynomiale non convexe. La résolution de cette classe de problèmes peut s'opérer à l'aide des relaxations convexes SDP. Dans le paragraphe suivant, une présentation de ces méthodes est donnée.

### 6.3.2.2 Optimisation polynomiale et relaxations convexes

La forme générique d'un problème d'optimisation polynomiale non convexe peut être donnée par :

$$\mathcal{P} : \begin{aligned} g^* &= \min g_0(x) \\ & \text{sous } g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned} \tag{II.6.127}$$

où  $g_i(x) \in \mathcal{R}[x_1, \dots, x_n] : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ . Cette classe de problèmes d'optimisation, si elle est abordée dans sa généralité, est réputée appartenir à la classe des problèmes NP-difficiles. Ainsi, les problèmes 0-1 ou les problèmes quadratiques non convexes sont des exemples particuliers de (II.6.127) [74], [75], [38].

Dans la suite, l'ensemble réalisable de (II.6.127) est noté :

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid g_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\} \tag{II.6.128}$$

Calculer l'optimum global du problème  $\mathcal{P}$  revient à chercher  $g^*$  tel que  $g_0(x) - g^* \geq 0$  est un polynôme globalement positif (non-négatif) sur l'ensemble réalisable  $\mathcal{K}$ . Définissons le cône convexe de  $\mathcal{R}^D$ , des polynômes semidéfinis positifs (PSD) de degré  $\leq d$  :

$$\mathcal{P}_n^d = \{p \in \mathcal{R}[x_1, \dots, x_n] \mid p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n\} \quad D = \binom{n+d}{d} \quad (\text{II.6.129})$$

$D$  étant le nombre de combinaisons de  $d$  parmi  $n+d$ .

Associé à cet ensemble, le cône convexe de  $\mathcal{R}^D$  des polynômes somme de carrés (SOS) de degré  $\leq d$  est défini par :

$$\mathcal{S}_n^d = \left\{ p \in \mathcal{R}[x_1, \dots, x_n] \mid p(x) = \sum_{i=1}^r q_i(x)^2 \right\} \quad (\text{II.6.130})$$

La particularité d'un tel ensemble est que chacun de ses éléments peut être caractérisé par une formulation par inégalités matricielles linéaires (LMI). En effet,

$$p(x) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathcal{S}_n^d \Leftrightarrow \exists X : p(x) = z^t X z \quad X \succeq 0 \quad (\text{II.6.131})$$

où  $z$  est un vecteur des monômes de degré  $\leq d$ . Pour une matrice  $X$  réalisable, sa factorisation de Cholesky permet d'écrire :

$$X = Q^t Q \quad Q^t = [q_1, \dots, q_r] \quad (\text{II.6.132})$$

et

$$\begin{aligned} p(x) &= z^t Q^t Q z = \|Qz\|_2^2 = \sum_{i=1}^r (q_i^t z)^2 \\ &= \sum_{i=1}^r q_i^2(x) \end{aligned} \quad (\text{II.6.133})$$

où le nombre de carrés dans l'expression précédente est  $r = \text{rang}(X)$ . En comparant les coefficients, monôme par monôme, de l'expression  $p(x) = z^t X z = \sum_{\alpha} p_{\alpha} x^{\alpha} \geq 0$ , on obtient les LMI suivantes :

$$\begin{aligned} \text{trace } H_{\alpha} X &= p_{\alpha} \quad \forall \alpha \\ X &\succeq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6.134})$$

où  $H_{\alpha}$  est une matrice de Hankel.

En utilisant le fait que tester si un polynôme appartient à  $\mathcal{S}_n^d$  revient à résoudre un problème convexe de programmation convexe et le fait que  $\mathcal{S}_n^d \subset \mathcal{P}_n^d$ , il est possible de définir une borne inférieure au problème d'optimisation polynomiale (II.6.127). En effet, le dernier élément se traduit par :

$$\exists q_i(x) \in \mathcal{S}_n^d : p(x) = g_0(x) - g^* = q_0(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) q_i(x) \Rightarrow g_0(x) - g^* \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{K} \quad (\text{II.6.135})$$

alors que le premier permet d'affirmer que trouver les multiplieurs  $q_i(x) \in \mathcal{S}_n^d$  dans l'expression (II.6.135) pour  $\deg(q_i(x))$  fixé est un problème de programmation semidéfinie positive. Ainsi, pour  $\deg(p(x)) = 2k$ , la relaxation convexe LMI d'ordre  $k$  établissant que  $p(x) = g_0(x) - g^* \in \mathcal{S}_n^d, \forall x \in \mathcal{K}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} p_k^* &= \max_X \sum_{\alpha} \text{trace } A_0 X + \sum_i \text{trace } A_0^{g_i} X_i \\ \text{sous } &\text{trace } A_{\alpha} X + \sum_i \text{trace } A_{\alpha}^{g_i} X_i = (g_0)_{\alpha} \quad \forall \alpha \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6.136})$$

où les matrices  $A$  sont issues de la formulation LMI des contraintes quadratiques [38]. Il est à noter que le problème dual au sens de la programmation semidéfinie positive s'écrit comme :

$$\begin{aligned} d_k^* &= \min_y \sum_{\alpha} (g_0)_{\alpha} y_{\alpha} \\ \text{sous } &M_k(y) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} y_{\alpha} \succeq 0 \\ &M_{k-d_i}(g_i y) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{g_i} y_{\alpha} \succeq 0 \quad \forall i \end{aligned} \quad (\text{II.6.137})$$

où  $y_0 = 1$ ,  $d_i = \deg(g_i(x))/2$  et  $M_k(y)$  est la matrice des moments.  $M_{k-d_i}(g_i y)$  sont appelées les matrices de localisation. Le problème d'optimisation SDP (II.6.137) est en fait la relaxation SDP du problème des moments défini par :

$$\begin{aligned} p^* &= \min_{\mu} \int g_0 d\mu \\ \text{sous } &\mu(\mathcal{K}) = 1 \\ &\mu(\mathcal{K}^c) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6.138})$$

où le minimum doit être calculé sur l'ensemble des mesures de probabilités définies sur l'ensemble réalisable  $\mathcal{K}$ . La fonction coût de (II.6.138) est une combinaison linéaire finie des moments de la mesure de probabilités  $\mu$  [38] :

$$y_{\alpha} = \int x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} d\mu \quad (\text{II.6.139})$$

Sous certaines hypothèses précisées dans le résultat suivant, il a été montré dans [50] qu'il est ainsi possible de construire une hiérarchie de relaxations convexes monotone et convergeant asymptotiquement vers l'optimum global du problème (II.6.127).

**Théorème 6.3.1** ([50]) *Si  $\mathcal{P}$  est compact (un polytope par exemple) et s'il existe  $u(x) \in \mathcal{R}[x_1, \dots, x_n]$  tels que :*

$$\begin{aligned} 1 - &\{u(x) \geq 0\} \text{ est compact} \\ 2 - &u(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}^n \end{aligned}$$

où  $u_i(x) \in \mathcal{S}_n^l, i = 0, \dots, m$ ,

$$p_k^* = d_k^* \leq g^* \quad (\text{II.6.140})$$

avec une garantie de convergence asymptotique :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k^* = g^* \quad (\text{II.6.141})$$

En pratique, la convergence est généralement rapide.  $p_k^*$  est, en général, très proche de  $g^*$  pour un ordre de relaxation  $k$  faible.

### 6.3.2.3 Considérations pratiques pour l'implantation

La mise en œuvre de l'optimisation polynomiale est réalisée sous MATLAB® à l'aide du logiciel libre GLOPTIPOLY développé au LAAS [38]. Ce logiciel requiert les bibliothèques YALMIP [55] et SEDUMI [78]. Les solutions obtenues par GLOPTIPOLY sont certifiées globalement optimales, si elles existent.

Certaines difficultés peuvent survenir lors de l'implantation numérique à l'aide de GLOPTIPOLY. Le problème (II.6.124) est caractérisé par un grand nombre de contraintes d'égalité. Ces contraintes diminuent la taille de l'ensemble réalisable, et peuvent causer l'arrêt prématuré du processus d'optimisation. La solution préconisée est la relaxation d'une, voire plusieurs des contraintes d'égalité. Pour ce faire, on introduit un paramètre  $\epsilon > 0$ . La contrainte issue de la CNS 3 de Carter, à titre d'exemple, est relaxée comme :

$$-\epsilon \leq \lambda^t \frac{dR(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} R(t_i)^t \lambda \leq \epsilon \quad (\text{II.6.142})$$

où  $\epsilon$  est un petit nombre qui représente la tolérance sur les contraintes d'égalité.

Une autre difficulté est due au conditionnement des matrices  $R(t_i)R(t_i)^t$ ,  $\frac{dR(t_i)}{dt}R(t_i)^t$  ainsi que la grande disparité entre les valeurs numériques des conditions initiales en position et vitesse relatives et les conditions finales. Pour remédier à cela, une mise à l'échelle est opérée sur les variables  $\lambda$  et  $\Delta v_i$ . Une factorisation à l'aide de la décomposition de Schur peut être utilisée. Cependant, en pratique, les entrées de la matrice de factorisation obtenue peuvent être disproportionnées et causer des problèmes numériques lors de l'implantation. Une stratégie différente de mise à l'échelle est utilisée. D'abord, des matrices intermédiaires  $S_{T_i}$  sont calculées pour chaque impulsion  $i$  telles que les éléments diagonaux de la matrice  $Q_{S_i} = S_{T_i}R(t_i)R^t(t_i)S_{T_i}$  soient inférieurs ou égaux à 1. On construit ensuite la matrice diagonale de mise à l'échelle  $S$  à l'aide de la relation :

$$S(j, j) = \min_{i=1, \dots, N} S_{T_i}(j, j), \quad j = 1, \dots, \dim(\phi(t)) \quad (\text{II.6.143})$$

L'inconvénient des approches par grille est le choix de la densité des points. Cette densité affecte la précision du résultat à travers la résolution de la grille temporelle dans le cas du rendez-vous. Une grande densité garantit une bonne précision mais engendre un grand coût en temps de calcul. Ainsi, on peut imaginer une grille dynamique dont la précision évolue afin d'approcher au mieux les valeurs optimales des dates d'impulsion. L'amélioration de la précision est obtenue notamment par diminution de la tolérance  $\epsilon$  utilisée pour la relaxation de la contrainte CNS 3.

### 6.3.2.4 Présentation de l'algorithme RDV-IND1

Dans ce paragraphe, les étapes de l'algorithme **RDV-IND1** tel qu'il a été implémenté sous MATLAB© sont décrites. Toutes les considérations pratiques citées plus haut sont prises en compte. Le mouvement relatif est considéré à l'aide du modèle de Tschauner-Hempel [80] et de la matrice de transition de Yamanaka-Ankersen [84].

#### Entrées :

- $t_1$  et  $t_N$  respectivement : les instants du début et de la fin du rendez-vous ;
- $X_1$  et  $X_f$  : les conditions initiales et finales en position et vitesse relatives dans la base locale LVLH ;
- $X_{oe}(t_1) = [a, e, \nu_1]$  : certains paramètres orbitaux de la cible à  $t_1$  ;
- $N$  : le nombre d'impulsions ;
- $R_d$  : la résolution désirée ;
- $\epsilon$  : la tolérance sur la contrainte CNS 3 ;
- $p_\lambda$  : le nombre de points de contrôle du primer vector pour la CNS 8 ;
- $p_t$  : le nombre de points de la grille temporelle pour chaque impulsion.

#### Étapes :

1. Initialiser  $t_i^1 \leftarrow t_1$  et  $t_i^N \leftarrow t_N, \forall i = 2, \dots, N - 1$ .
2. Générer le vecteur de  $p_\lambda$  points équidistants  $T_\lambda$  tel que :

$$T_\lambda(1) = t_1, T_\lambda(p_\lambda) = t_N$$

3. Construction de la grille :
  - (a) Générer les vecteurs de  $p_t$  points équidistants  $T_i$  tels que :

$$T_i(1) = t_i^1, T_i(p_t) = t_i^N$$

pour  $i = 2, \dots, N - 1$ .

- (b) Calculer la résolution actuelle  $R_a$  :

$$R_a = T_2(3) - T_2(2)$$

- (c) Construire l'ensemble des combinaisons ordonnées :

$$\Theta = \{(t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N)\}$$

telles que  $t_i \in T_i, \forall i = 2, \dots, N - 1$  et  $t_i < t_{i+1}, \forall i = 1, \dots, N$

- (d) Calculer  $M$  : le nombre de combinaisons (éléments de  $\Theta$ )
4. Calculer la matrice de mise à l'échelle  $S$  (voir paragraphe précédents).

5. Pour  $j = 1, \dots, M$  résoudre :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\lambda^j, \Delta v_i^j} -u_f^t S \lambda^j \\
 \text{sous} & \sum_{i=1}^N R(t_i^j) R^t(t_i^j) S \lambda \Delta v_i^j = -u_f \\
 & \lambda^{j^t} S R(t_i^j) R^t(t_i^j) S \lambda^j = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \\
 & -\epsilon \leq \lambda^{j^t} S \frac{dR(t_i^j)}{dt} R^t(t_i^j) S \lambda^j \leq \epsilon, \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \\
 & \Delta v_i^j \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \\
 & \lambda^{j^t} S R(t_\lambda^k) R^t(t_\lambda^k) S \lambda^j \leq 1, \quad \forall t_\lambda \in T_\lambda
 \end{aligned} \tag{II.6.144}$$

6. Si aucune solution n'est obtenue alors  $\epsilon \leftarrow \epsilon + \frac{\epsilon}{2}$ , aller à l'étape 5.

7. Identifier la meilleure solution obtenue  $[\Delta v_1^{j^*}, \dots, \Delta v_N^{j^*}, \lambda^{j^*}, t_2^{j^*}, \dots, t_{N-1}^{j^*}]$  en minimisant la consommation :

$$j^* = \arg \min_j -u_f^t S \lambda^j$$

8. Les directions de poussées sont déduites à l'aide des équations de Carter :

$$\beta^*(t_i^{j^*}) = -R(t_i^{j^*})^t S \lambda^{j^*}$$

9. Si  $R_a > R_d$  alors  $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$ ,  $t_i^1 \leftarrow t_i^{j^*} - \frac{t_i^{j^*}}{2}$  et  $t_i^N \leftarrow t_i^{j^*} + \frac{t_i^{j^*}}{2}$  pour  $i = 1, \dots, N-1$ , aller à l'étape 3.

10. Si  $R_a \leq R_d$  alors arrêter le programme

**Sorties :**

- Les dates d'impulsions :  $t_1, t_2^{j^*}, \dots, t_{N-1}^{j^*}, t_N$
- Les amplitudes des impulsions :  $\Delta v_1^{j^*}, \dots, \Delta v_N^{j^*}$
- Les directions des impulsions :  $\beta^*(t_1^{j^*}), \dots, \beta^*(t_N^{j^*})$ .

Une description des principales étapes de l'algorithme **RDV-IND1** est donnée sur la figure 6.16.

---

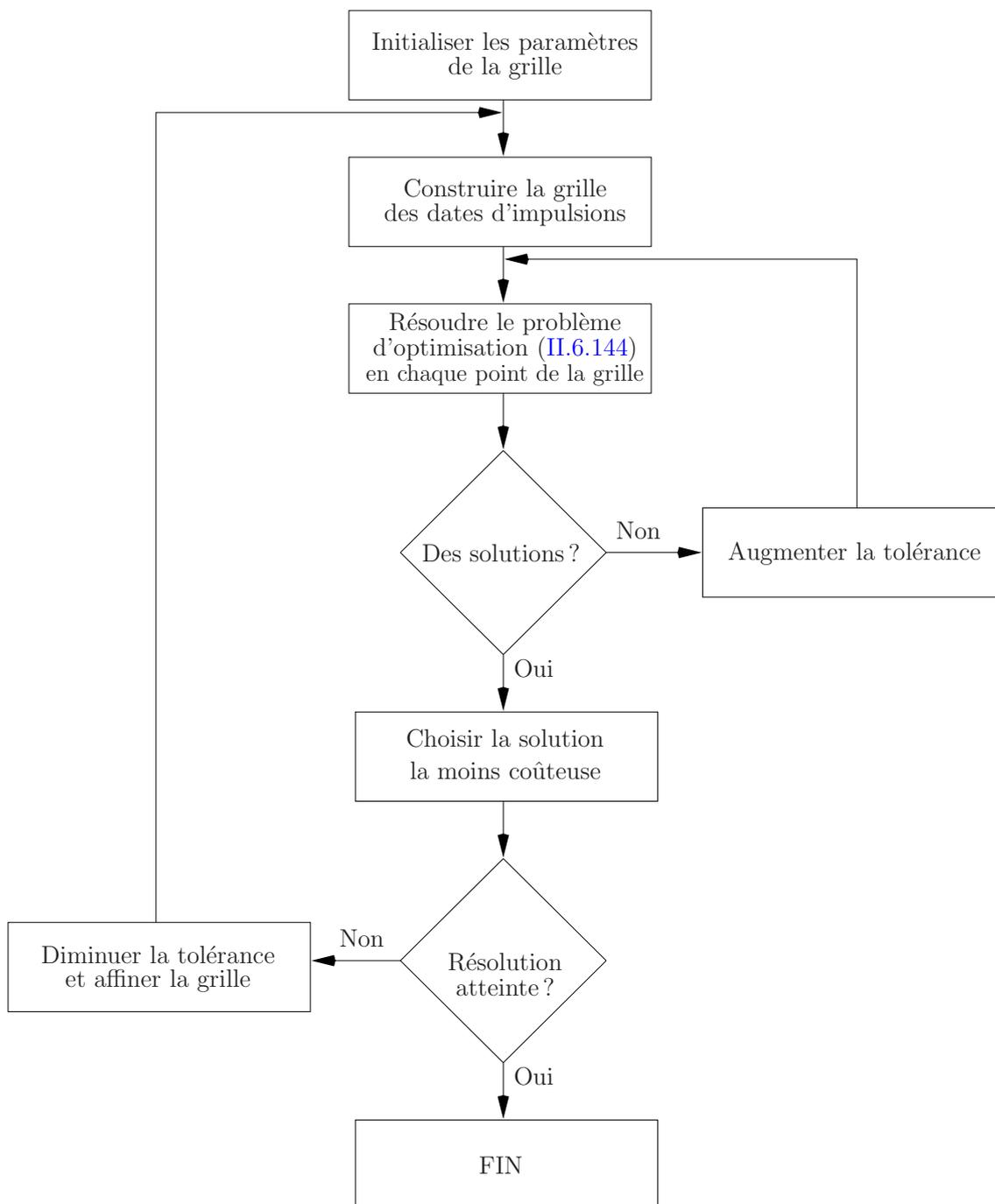


FIG. 6.16 – Principales étapes de l'algorithme RDV-IND1

### 6.3.3 Approche par réduction itérative du coût

#### 6.3.3.1 Utilisation itérative du calcul de variations

Nous avons vu au paragraphe 6.2.3 que les travaux de Lion & Handelsman [54] permettent de déterminer des situations où l'amélioration du coût est possible à travers l'addition ou le déplacement d'une impulsion. Nous exploitons cette propriété pour synthétiser une procédure itérative d'amélioration progressive du coût. Le nombre d'impulsions varie en fonction des additions ou déplacements effectués. Les dates d'impulsion sont optimisées à l'aide des tests définis par Lion & Handelsman et portant sur la norme du primer vector. C'est d'ailleurs à l'aide de ces tests que l'optimisation des dates, du nombre de poussées et la vérification de la CNS 8 de Carter sont traitées en parallèle. A chaque itération, un problème à dates et nombre fixés d'impulsions est résolu. La trajectoire de la norme du primer vector est ensuite propagée sur  $[t_1, t_f]$ . Les différents tests sur sa norme sont opérés et une décision est prise concernant l'éventuelle addition ou déplacement des impulsions en préparation des itérations suivantes.

Le processus s'arrête lorsque la norme de  $\lambda_v$  ne dépasse pas 1 dans l'intervalle  $[t_1, t_f]$ .

Si l'on s'intéresse aux résultats de Lion & Handelsman [53] d'un coté et aux conditions nécessaires et suffisantes de Carter [20] d'un autre coté, on peut remarquer une certaine complémentarité entre les deux approches :

- l'application du calcul des variations sur la trajectoire du primer vector permet de déterminer avec simplicité des modifications à apporter aux dates et nombre d'impulsion afin de diminuer la consommation. Cependant, le calcul des nouvelles impulsions, en plus d'être complexe, ne garantit pas la continuité de la dérivée du primer vector. Ceci est en contradiction avec les conditions nécessaires d'optimalité de Lawden [51] ;
- les conditions de Carter sont non linéaires, voire implicites en dates et en nombre d'impulsions. D'autre part, si l'on fixe les dates *a priori*, le calcul des impulsions et de la trajectoire du primer vector correspondante revient à résoudre des équations polynomiales. De plus, le problème des trajectoires non lisses du primer vector ne se pose pas.

A partir de ce constat, nous proposons une approche mixte qui tire profit des deux approches précédentes. Le calcul des dates et du nombre d'impulsions sera assuré par une procédure basée sur le calcul des variations. Les conditions de Carter permettent de déterminer les impulsions correspondantes.

Pour une configuration à  $N$  impulsions, la prise en compte de toutes les CNS de Carter est un problème difficile à cause des raisons citées précédemment. Cependant, si les dates sont fixées, on peut écrire un système d'équations polynomiales en  $\lambda$  et  $\Delta v_i$  :

$$\lambda^t R(t_i) R(t_i)^t \lambda = 1 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (\text{II.6.145})$$

$$\lambda^t \frac{dR(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} R(t_i)^t \lambda = 0 \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \quad (\text{II.6.146})$$

$$\sum_{i=1}^N [R(t_i) R^t(t_i)] \lambda \Delta v_i = -u_f \quad (\text{II.6.147})$$

Pour un problème de rendez-vous donné, avec  $N$  impulsions et une matrice de transition de  $m \times m$  éléments, le système comprend :

- $N$  équations du type (II.6.145) ;
- $N - 2$  équations de la forme (II.6.146) ;
- $m$  équations provenant de (II.6.147).

On dispose donc de  $2N + m - 2$  équations pour un nombre de variables de  $N + m$  ( $N$  impulsions  $\Delta v_i$  et  $m$  composantes de  $\lambda$ ). Le système est surdéterminé et peut poser des difficultés lors de sa résolution. Ainsi, les équations provenant de la CNS 3 (II.6.146) ne sont pas prises en compte ici. La CNS 3 est indirectement réalisée si l'on impose la CNS 8 (portant sur la norme du primer vector sur toute la durée du rendez-vous). L'optimalité des solutions que l'on obtient n'est donc pas affectée en principe par cette relaxation.

Dans le système d'équations précédent, nous imposons donc les conditions CNS 1, CNS 2 (équivalentes) :

$$\text{CNS 1 : } \Delta v_i = 0 \text{ ou } \beta(t_i) = -R^t(t_i)\lambda, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\text{CNS 2 : } \Delta v_i = 0 \text{ ou } \lambda^t R(t_i) R(t_i)^t \lambda = 1 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

CNS 4 et CNS 6 (qui peut être déduite de CNS 4) :

$$\text{CNS 4 : } \sum_{i=1}^N [R(t_i) R^t(t_i)] \lambda \Delta v_i = -u_f$$

$$\text{CNS 6 : } \sum_{i=1}^N \Delta v_i = -u_f^t \lambda > 0$$

La résolution de ce système *carré* d'équations polynomiales donne plusieurs solutions, dont nous gardons celles telles que  $\Delta v_i \geq 0$  pour réaliser la CNS 5 :

$$\text{CNS 5 : } \Delta v_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

et parmi les solutions positives, la solution à consommation optimale est retenue :

$$\text{CNS 7 } -u_f^t \lambda \text{ est un minimum sur l'ensemble } \{\lambda \in \mathcal{R} : \text{CN1} - \text{CN6} \text{ sont valides}\}.$$

Les conditions restantes sont imposées à travers l'utilisation des résultats de Lion & Handelsman. L'algorithme synthétisé doit réaliser à la convergence, les CNS 3 et 8, à travers des déplacements et additions d'impulsions en fonction de la norme du primer vector. Les critères présentés dans la section 6.2.3 peuvent être généralisés aux cas multi-impulsions. En effet, chaque trajectoire comportant plusieurs impulsions peut être décomposée en une suite d'arcs délimités par deux impulsions. Des cas typiques de réduction de consommation sont décrits dans la suite.

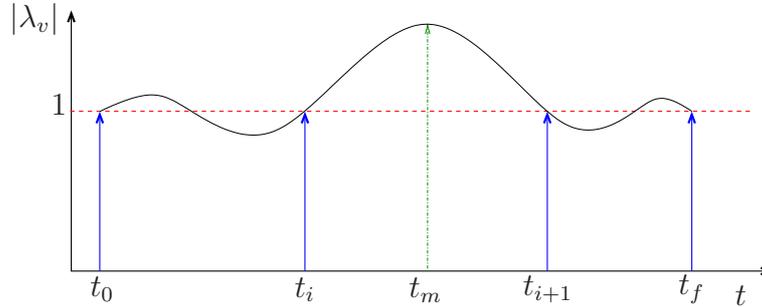


FIG. 6.17 – Addition ou déplacement d’impulsion pour l’amélioration du coût

Si l’on considère la trajectoire représentée sur la figure 6.17, le coût total du transfert peut être amélioré en considérant l’arc  $[t_i, t_{i+1}]$ , de diverses manières :

- ajouter une nouvelle impulsion à  $t_m$  ;
- ajouter un arc balistique initial en déplaçant  $t_i$  vers  $t_m$ , si  $\frac{d|\lambda|}{dt}(t_{i+1}) > 0$  ;
- ajouter un arc balistique final en déplaçant  $t_{i+1}$  vers  $t_m$ , si  $\frac{d|\lambda|}{dt}(t_{i+1}) < 0$  ;
- remplacer  $t_i$  et  $t_{i+1}$  par  $t_m$ , si  $\frac{d|\lambda|}{dt}(t_i) > 0$  et  $\frac{d|\lambda|}{dt}(t_{i+1}) < 0$ . Ceci est équivalent à ajouter des arcs balistiques (initial + final) sur  $[t_i, t_{i+1}]$  et une impulsion à  $t_m$ .

Pour chaque cas, le coût peut être réduit par une addition ou un déplacement d’impulsion.

Le choix est motivé également par les hypothèses suivantes :

- le nombre maximal d’impulsions est égal à la borne fixée par Neustadt dans [59] ;
- les impulsions initiales et finales à  $t_0$  et  $t_f$  ne peuvent être déplacées.

Compte tenu de ces hypothèses, la réduction de la consommation pour chaque itération de l’algorithme est accomplie lorsque la norme du primer vector dépasse 1 à  $t_m$  par les moyens suivants :

- ajouter une impulsion à  $t_m$ , si le nombre d’impulsions ne dépasse pas la borne supérieure ;
- déplacer les impulsions, si l’addition n’est pas autorisée. Le déplacement se base sur les hypothèses présentées dans la section 6.2.3.

A chaque itération de l’algorithme, un système polynomiale d’équations du deuxième degré sur  $\lambda$  et  $\Delta v_i$  est résolu. Parmi les techniques se prêtant à la résolution de cette classe de problèmes on peut citer les bases de Gröbner (voir [27], [28], [76]) et la continuation-homotopie dont une présentation très complète est accessible dans les références [76] et [82] pour le cas particulier du logiciel PHCpack que nous avons intégré à notre algorithme.

### 6.3.3.2 Présentation de l’algorithme RDV-IND2

L’algorithme **RDV-IND2** est présenté ici, étape par étape, avec tous les aspects liés à l’implantation pratique qui a été réalisée sous MATLAB©.

**Entrées :**

- $t_1$  et  $t_N$  : les instants du début et de la fin du rendez-vous, respectivement ;
- $X_1 = [r_1, v_1]$  et  $X_f = [r_f, v_f]$  : les conditions initiales et finales en position et vitesse relative dans la base locale LVLH ;
- $X_{oe}(t_1) = [a, e, \nu_1]$  : certains paramètres orbitaux de la cible à  $t_1$  ;

**Étapes d'initialisation :**

- a-** Résoudre un problème à deux impulsions par la méthode analytique décrite dans la section 5.2 :

$$\begin{bmatrix} r_f \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_N, t_1) & \phi_{12}(t_N, t_1) \\ \phi_{21}(t_N, t_1) & \phi_{22}(t_N, t_1) \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} r_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v_N \end{bmatrix}$$

Les solutions sont données par :

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= \Phi_{12}^{-1}(t_N, t_1) [r_f - \Phi_{11}(t_N, t_1)r_1 - \Phi_{12}(t_N, t_1)v_1] \\ \Delta v_N &= v_f - \Phi_{21}(t_N, t_1)r_1 - \Phi_{22}(t_N, t_1)v_1 - \Phi_{22}(t_N, t_1)\Delta v_1 \end{aligned}$$

Initialiser  $T_{imp} = \{t_1, t_N\}$ , où  $T_{imp}$  est l'ensemble discret des dates d'impulsions.

- b-** Calculer la trajectoire du primer vector correspondant à l'aide des conditions aux bouts :

$$\lambda_v(t_1) = \frac{\Delta v_1}{|\Delta v_1|} \quad , \quad \lambda_v(t_N) = \frac{\Delta v_N}{|\Delta v_N|}$$

L'évolution du primer vector au cours du temps est donnée par :

$$\lambda_v(t) = \Phi_{21}^{-1t}(t, t_1)\Phi_{21}^t(t_N, t_1) [\lambda_v(t_N) - \Phi_{22}^{-1t}(t_N, t_1)\lambda_v(t_1)] + \Phi_{22}^{-1t}(t, t_1)\lambda_v(t_1)$$

- c-** Calculer l'amplitude maximale du primer vector sur  $[t_1, t_N]$  :

$$\lambda_m = \max_{t \in [t_1, t_N]} |\lambda_v(t)|$$

**Procédure itérative :**

1. Définir  $t_m = \arg \max_{t \in [t_1, t_N]} \lambda_v(t)$ .
2. Trouver  $t_a, t_b \in T_{imp}$  tels que  $t_a < t_m < t_b$ .
3. Ajouter une impulsion à  $t_m$  :

$$T_{imp} = T_{imp} \cup \{t_m\}$$

4. Si le nombre d'impulsions est supérieur à la borne de Neustadt alors modifier  $T_{imp}$  selon les cas suivants :

(a) Si  $\frac{d\lambda(t_a)}{dt} \lambda(t_a) > 0$  et  $\frac{d\lambda(t_b)}{dt} \lambda(t_b) < 0$ ,

(i) Si  $t_a \neq t_0$  alors déplacer  $t_a$  à  $t_m$  :

$$T_{imp} = T_{imp} - \{t_a\}$$

(ii) Si  $t_b \neq t_f$  alors déplacer  $t_b$  à  $t_m$  :

$$T_{imp} = T_{imp} - \{t_b\}$$

(b) Si  $\frac{d\lambda(t_a)^t}{dt} \lambda(t_a) < 0$  ou  $\frac{d\lambda(t_b)^t}{dt} \lambda(t_b) > 0$ ,

(i) Si  $\frac{d\lambda(t_a)^t}{dt} \lambda(t_a) > 0$  et  $t_a \neq t_0$  alors déplacer  $t_a$  à  $t_m$  :

$$T_{imp} = T_{imp} - \{t_a\}$$

(ii) Si  $\frac{d\lambda(t_b)^t}{dt} \lambda(t_b) < 0$  et  $t_b \neq t_f$  alors déplacer  $t_b$  à  $t_m$  :

$$T_{imp} = T_{imp} - \{t_b\}$$

5. Résoudre le système d'équations polynomiales sur  $\lambda, \Delta v_i$  :

$$\begin{aligned} \lambda^t R(t_i) R(t_i)^t \lambda &= 1 \quad \forall t_i \in T_{imp} \\ \sum_{t_i \in T_{imp}} [R(t_i) R(t_i)^t] \lambda \Delta v_i &= -u_f \\ \text{avec } \Delta v_i &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Evaluer la nouvelle trajectoire du primer vector :

$$\lambda_v(t) = R^t(t) \lambda \quad t \in [t_1, t_N]$$

7. Calculer l'amplitude maximale du primer vector sur  $[t_1, t_N]$  :

$$\lambda_m = \max_{t \in [t_1, t_N]} |\lambda_v(t)|$$

**Répéter la procédure itérative jusqu'à ce que  $\lambda_m \leq 1$**

L'algorithme est représenté sur la figure 6.18.

---

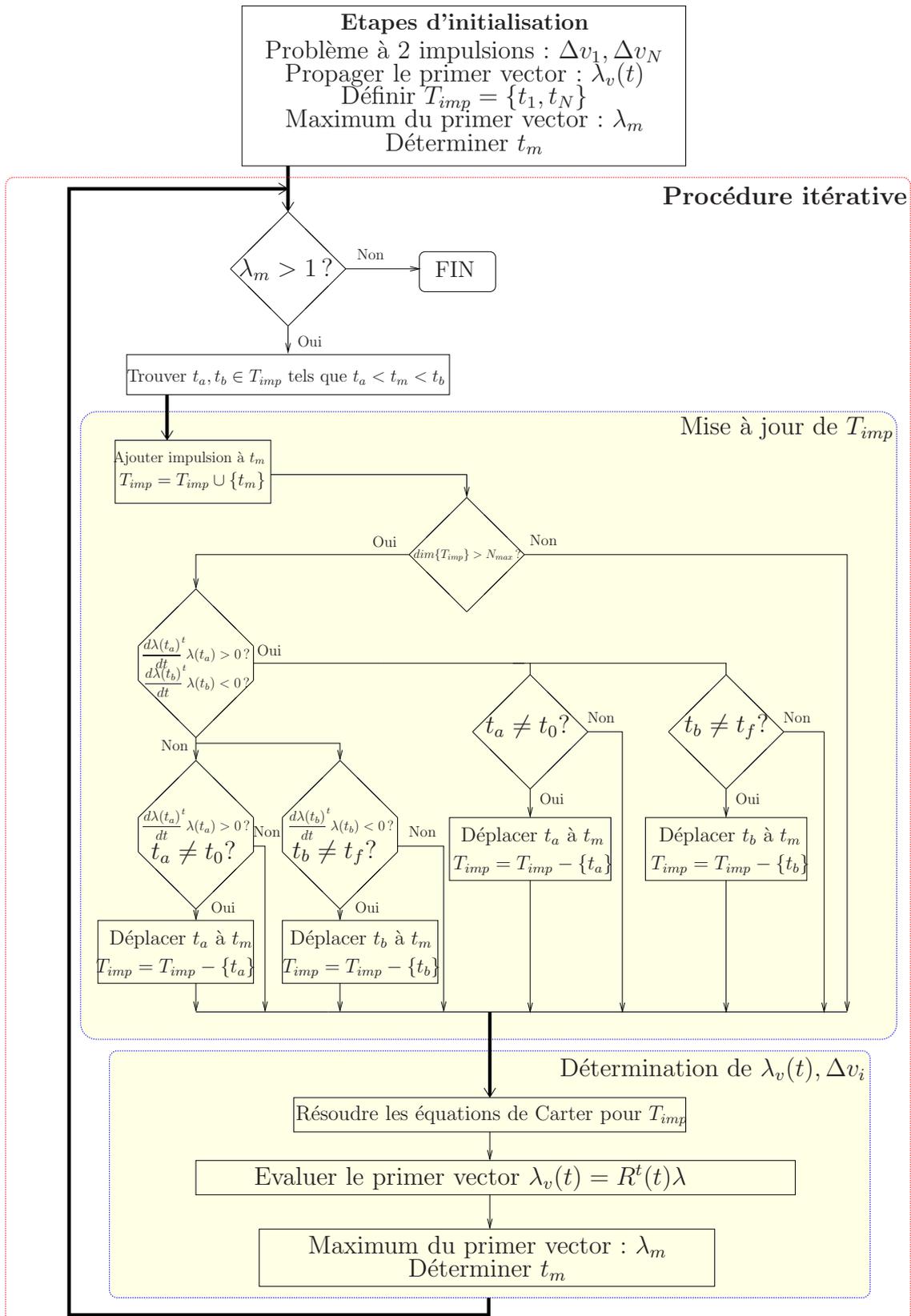


FIG. 6.18 – L'algorithme RDV-IND2

## 6.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les techniques de résolution indirecte du problème de rendez-vous. La théorie de Pontryagin appliquée à ce problème particulier de commande optimale a permis d'introduire la notion de primer vector. La théorie du primer vector, basée sur l'utilisation de la trajectoire du vecteur d'état adjoint permet de formuler des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Les difficultés rencontrées lors de l'exploitation de ces conditions, liées notamment à l'optimisation des dates et du nombre de poussées ont été surmontées par deux approches. Deux algorithmes de guidage optimal ont été développés à partir de ces approches. La structure des algorithmes ainsi que les différents aspects pratiques liés à l'implantation ont été détaillés. L'algorithme **RVD-IND1** utilise une approche par grille et l'optimisation polynomiale par relaxations convexes. L'optimalité des résultats est certifiée à l'aide du logiciel *Gloptipoly*. L'algorithme **RVD-IND2** offre la possibilité d'optimiser les dates à l'aide d'une méthode itérative basée sur la relation (établie à l'aide du calcul des variations) entre la consommation et la trajectoire du primer vector. L'efficacité de cette approche permet de réduire le nombre d'itérations en limitant l'espace de recherche des dates d'impulsions. L'optimalité peut être certifié *a posteriori* à l'aide de l'algorithme **RVD-IND1**. Ceci confère un caractère complémentaire aux deux algorithmes. Une solution complète au problème du rendez-vous peut être obtenue en utilisant les deux algorithmes :

- a le problème de rendez-vous est résolu par l'algorithme **RVD-IND2**. La solution obtenue est à  $N^*$  impulsions ;
- b l'optimalité de la solution est certifiée à l'aide de l'algorithme **RVD-IND1** ;
- c l'algorithme **RVD-IND1** est ensuite exécuté pour les configurations à  $N$  impulsions, où  $N \in [N_{min}, N_{max}]$ ,  $N \neq N^*$  afin de certifier la non réalisabilité par la non existence de solutions.

Dans le chapitre suivant, une autre classe de méthodes de résolution est présentée. Un algorithme fondé sur les méthodes directes est ainsi proposé. Le dernier chapitre de cette partie est consacré à la validation et la comparaison des différents algorithmes proposés.

---

## Chapitre 7

# Optimisation des trajectoires de RdV par les méthodes directes

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>181</b>
<b>7.2</b>	<b>Résolution du problème de RdV par les méthodes de tirs</b>	<b>184</b>
<b>7.3</b>	<b>Formulation du problème de RdV en programmation linéaire</b>	<b>187</b>
<b>7.4</b>	<b>Guidage robuste aux incertitudes de navigation</b>	<b>190</b>
7.4.1	Introduction	190
7.4.2	Programmation mathématique et incertitudes	190
7.4.3	Contreparties robustes aux ensembles d'incertitudes ellipsoïdaux	192
7.4.4	Application au problème du rendez-vous	192
7.4.4.1	Relaxation de la condition finale	192
7.4.4.2	Formulation du RdV robuste en programmation linéaire	193
<b>7.5</b>	<b>Présentation de l'algorithme RDV-DIR</b>	<b>195</b>
7.5.1	Entrées et sorties de l'algorithme RDV-DIR	195
7.5.2	Mise en œuvre pratique	196
<b>7.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>197</b>

---

## 7.1 Introduction

Le problème de rendez-vous à consommation minimale peut être approché par la classe des méthodes directes de résolution des problèmes de commande optimale. Les méthodes directes consistent à transformer le problème de commande optimale en un problème de programmation mathématique. Ces méthodes diffèrent fondamentalement des techniques indirectes par le fait que l'optimisation de la solution est assurée par une routine de

---

programmation linéaire ou non linéaire. Les méthodes directes les plus communes [39] nécessitent de paramétrer le comportement des variables d'état et/ou de discrétiser les contraintes notamment celles de la dynamique. Elles se caractérisent par l'obtention d'un problème en dimension finie. Les méthodes directes sont des techniques d'optimisation en *dimension finie* à l'inverse des techniques indirectes. La résolution par les méthodes directes ne fait pas intervenir des variables adjointes mais fait plutôt appel à des méthodes itératives de programmation linéaire ou non linéaire. Les méthodes directes sont moins complexes analytiquement et leur implantation est plus simple. Un nombre de contraintes dynamiques et statiques plus élevé peut être considéré sans une grande incidence sur la complexité et le temps de calcul. La prise en compte d'éléments de robustesse vis-à-vis d'incertitudes de navigation peut être notamment considérée. L'optimalité des méthodes directes, quand elle peut être certifiée, ne concerne que la classe de la paramétrisation et la discrétisation choisies pour obtenir le problème de programmation. L'optimum obtenu ne représente, en général, qu'une borne supérieure de l'optimum global. L'un des avantages de ces méthodes directes est qu'elles se basent sur des outils dont on sait que la complexité théorique est au pire polynomiale en fonction des dimensions du problème étudié.

Cette brève comparaison permet de saisir la différence majeure entre les deux classes de techniques d'optimisation. Les objectifs escomptés ne sont pas les mêmes, bien que les méthodes s'adressent à des problèmes de structures similaires. Les méthodes *indirectes* permettent de certifier l'optimalité globale des résultats obtenus, à l'aide de puissants outils mathématiques. Les techniques *directes*, quant à elles, visent à obtenir des algorithmes de résolution embarquables et robustes. Le choix de l'une des techniques pour la synthèse d'algorithmes est motivé par l'application envisagée.

Les méthodes directes sont généralement structurées en deux phases principales :

1. paramétrisation de certaines variables du système, qui sont choisies comme variables d'optimisation ;
2. discrétisation de l'horizon temporel, en un nombre fini de points où les contraintes dynamiques et statiques du problème d'optimisation sont vérifiées.

A la suite de ces deux étapes, l'optimisation est opérée à l'aide de routines de programmation linéaire ou non linéaire paramétrique. Ces routines assurent la minimisation de la fonction de coût, tout en vérifiant les conditions et contraintes aux points de discrétisation et en assurant la bonne intégration de la dynamique, si le problème est posé sous forme différentielle. La paramétrisation des variables du système peut affecter les variables de commande mais également celles de l'état. Ceci donne lieu à deux cas de figures identifiées par Betts dans [11] comme étant les deux grandes familles de méthodes directes.

Les méthodes de *transcription* sont employées lorsque les variables d'état et de commande sont paramétrées comme variables d'optimisation [5, 4]. C'est notamment le cas lorsque la dynamique est non linéaire et est donnée sous forme différentielle [62]. Il s'agit de poser une représentation polynomiale par morceaux du système et d'identifier ses paramètres en vérifiant les conditions de collocation [36]. La dynamique est intégrée, suivant le type de représentation polynomiale choisie, selon un schéma de Runge-Kutta ou à l'aide

---

des méthodes spectrales [34, 33]. La fonction de coût est ensuite minimisée tout en vérifiant les contraintes aux points de discrétisation. Ces méthodes ne seront pas utilisées dans le contexte du rendez-vous impulsionnel à dynamique linéaire. En effet, la transcription permet de résoudre le problème de la contrainte dynamique différentielle. Cependant, dans le cadre du rendez-vous linéaire que nous considérons dans cette thèse, des solutions analytiques peuvent être fournies à travers le calcul des matrices de transition directe. Ceci rend l'utilisation des méthodes de transcription peu avantageuse.

Les méthodes de *tirs* sont caractérisées par une paramétrisation n'affectant que les variables de commande [39, 46, 14]. La trajectoire du système est intégrée analytiquement ou numériquement. Cette famille de méthodes est largement utilisée dans les problèmes à dynamique linéaire. Ces techniques sont largement utilisées dans le domaine spatial. Le programme POST développé pour simuler des trajectoires de lanceurs lourds est basé sur une optimisation par méthode de tirs [16]. Les trajectoires de transfert orbital ont été étudiées par Betts dans [12] (poussées impulsionnelles) et Bruschi [17] (faibles poussées). Les méthodes directes de résolution de problèmes de commande optimale ne prétendent pas à l'obtention de solutions optimales mais plutôt à une approximation de celle-ci. Cette approximation est certifiée optimale *seulement pour la forme paramétrée et discrétisée du problème traité*. Il est montré dans [11] que la solution obtenue est d'autant plus proche de la solution optimale que le nombre de variables du problème augmente. Ceci peut être obtenu par une discrétisation plus fine du problème de commande optimale. La raison principale évoquée dans [11] est que la reformulation en problème de programmation linéaire n'est qu'une manière d'approcher les conditions d'optimalité en dimension infinie.

Pour différentes raisons, liées principalement à des contraintes technologiques, les paramètres du problème de rendez-vous peuvent présenter des incertitudes. Parmi les incertitudes les plus courantes on peut citer notamment :

- les erreurs de navigation qui se manifestent sous forme d'incertitudes sur la position et la vitesse relative initiales ;
- les erreurs d'application des manœuvres qui affectent les dates, les directions et les amplitudes des impulsions ;
- les erreurs de modélisation qui concernent les paramètres de la matrice de transition du mouvement relatif.

Si ces incertitudes ne sont pas considérées lors de la synthèse de l'algorithme de guidage, aucune garantie sur le bon déroulement de l'opération du rendez-vous ne peut être assurée. La prise en compte des incertitudes est possible lors de l'utilisation des méthodes directes à travers l'exploitation des techniques de programmation robuste. En effet, ces techniques se prêtent à cette classe de problèmes grâce à des approches stochastiques [10] ou déterministes [9, 32].

Nous donnons dans la section suivante des notions sur l'optimisation robuste par les méthodes de tirs qui sont utilisées par la suite dans la synthèse d'un algorithme de rendez-vous à consommation minimale, assurant la robustesse vis-à-vis d'incertitudes provenant d'erreurs de navigation.

## 7.2 Résolution du problème de RdV par les méthodes de tirs

Les méthodes directes qui sont présentées dans cette partie représentent une véritable alternative aux méthodes indirectes qui sont exposées dans le chapitre précédent. Elles sont à la fois simples à mettre en œuvre et permettent de considérer facilement un certain nombre de contraintes sur la trajectoire dans la résolution du problème de rendez-vous. En rappelant le cadre de travail posé en introduction, le problème de rendez-vous est défini par :

$$\begin{aligned}
 J_*(\Delta v_i, \beta(t_i), t_i) = & \min_{\Delta v_i, \beta(t_i), t_i, N} J_* \\
 \text{sous} & \\
 \dot{X}(t) = & A(t)X(t) + B(t) \sum_{i=1}^N \Delta V_i \delta(t - t_i) \\
 \Psi(t_1, X(t_1), t_f, X(t_f)) = & 0 \tag{II.7.1} \\
 |\Delta V_{i_x}| \leq & \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 |\Delta V_{i_y}| \leq & \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 |\Delta V_{i_z}| \leq & \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 \gamma(X(t), u(t), t) \leq & 0
 \end{aligned}$$

Le nombre d'impulsions  $N$  est considéré connu *a priori*. Notons que cette formulation est légèrement différente que les formulations présentées précédemment. Les contraintes sur l'amplitude des impulsions affectent ici les composantes suivant les trois axes et non pas l'amplitude totale de l'incrément de vitesse. Ceci nous permettra de garder une structure linéaire du problème dans la suite.

En se référant aux critères de Betts [11], les méthodes de tirs semblent ici tout particulièrement adaptées. En effet, en premier lieu, le nombre de variables d'optimisation est limité aux variables  $\Delta v_i, \beta(t_i)$  et  $t_i$ . De plus, une formulation analytique des solutions à la contrainte différentielle peut être écrite sous certaines conditions. Un tel résultat est obtenu en remplaçant la contrainte différentielle par une contrainte algébrique grâce à l'utilisation de la matrice de transition d'état  $\Phi(t, t_i)$ . Dans ce cas, les valeurs optimales des variables d'optimisation  $\Delta v_i, \beta(t_i), t_i$  sont alors obtenues par programmation non linéaire. Une simplification intervient lorsque les instants  $\{t_i\}$  sont fixés. Le problème (II.7.2) est alors uniquement paramétré par les variables  $\Delta v_i, \beta(t_i)$  à travers la variable

$\Delta V_i = \Delta v_i \beta(t_i)$  :

$$J_*(\Delta V_i) = \min_{\Delta V_i} J_*$$

sous

$$X(t) = \Phi(t, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi(t, t_i)B(t_i)\Delta V_i$$

$$\Psi(t_1, X(t_1), t_f, X(t_f)) = 0 \quad (\text{II.7.2})$$

$$\begin{aligned} |\Delta V_{ix}| &\leq \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\ |\Delta V_{iy}| &\leq \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\ |\Delta V_{iz}| &\leq \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\gamma(X(t), u(t), t) \leq 0$$

La seconde étape de cette méthode de tirs consiste à transformer le problème (II.7.2) de dimension semi-infinie en problème de programmation non linéaire par discrétisation du problème de satisfaction de contraintes  $\gamma(X(t), u(t), t)$  et changement de variables.

Tout d'abord, le nombre des incréments de vitesse  $\Delta v_i$  permet de constituer une première grille  $\{t_i\}$  de discrétisation du problème (II.7.2). Cependant, la grille  $\{t_i\}$  étant souvent insuffisante pour assurer la vérification des contraintes  $\gamma(X(t), u(t), t) \leq 0$  sur l'ensemble de la trajectoire, une seconde grille  $\{\tau_i\}$  doit ainsi être définie telle que :

$$t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_\tau} \leq t_f \quad (\text{II.7.3})$$

Le nombre  $N_\tau$  et la distribution des instants  $\tau_i$  sont des degrés de liberté du problème, choisis indépendamment de la séquence  $\{t_i\}$ . Définissons la séquence  $T$  telle que

$$T = \{t_i\} \cup \{\tau_i\} \quad (\text{II.7.4})$$

$$= \{T_1, \dots, T_M\} \quad (\text{II.7.5})$$

Dans la suite, nous considérons que la matrice d'entrée est constante  $B(t) = B$ .

En notant  $T_{t_i}$ , les instants d'impulsion dans la séquence  $T$ , le problème discrétisé de satisfaction de contraintes prend la forme :

$$\gamma(X(T_i), u(T_i), T_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, M \quad (\text{II.7.6})$$

La résolution du problème (II.7.6) nécessite la connaissance de  $X$  à chaque instant  $\{T_i\}$  :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} X(T_{t_1}) \\ X(T_2) \\ \vdots \\ X(T_{t_2}) \\ X(T_{t_2+1}) \\ \vdots \\ X(T_{t_N}) \\ \vdots \\ X(T_N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi(T_{t_1}, t_1) \\ \Phi(T_2, t_1) \\ \vdots \\ \Phi(T_{t_2}, t_1) \\ \Phi(T_{t_2+1}, t_1) \\ \vdots \\ \Phi(T_{t_N}, t_1) \\ \vdots \\ \Phi(T_N, t_1) \end{bmatrix} X(t_1) \\
 &+ \begin{bmatrix} \Phi(T_{t_1}, T_{t_1})B & 0 & \dots & 0 \\ \Phi(T_2, T_{t_1})B & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi(T_{t_2}, T_{t_1})B & \Phi(T_{t_2}, T_{t_2})B & \dots & 0 \\ \Phi(T_{t_2+1}, T_{t_1})B & \Phi(T_{t_2+1}, T_{t_2})B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi(T_{t_N}, T_{t_1})B & \Phi(T_{t_N}, T_{t_2})B & \dots & \Phi(T_{t_N}, T_{t_N})B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi(T_M, T_{t_1})B\beta(T_{t_1}) & \Phi(T_M, T_{t_2})B & \dots & \Phi(T_M, T_{t_N})B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(T_{t_1})\Delta v_1 \\ \beta(T_{t_2})\Delta v_2 \\ \vdots \\ \beta(T_{t_N})\Delta v_N \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{II.7.7}$$

On écrira de manière compacte l'équation (II.7.7) sous la forme

$$X = \Phi X(t_1) + B\Delta V \tag{II.7.8}$$

où

$$X = [X^t(T_1), \dots, X^t(T_M)]^t$$

et

$$\Delta V = [\beta(T_{t_1})^t \Delta v_1, \dots, \beta(T_{t_N})^t \Delta v_N]^t = [\Delta V^t(T_{t_1}), \dots, \Delta V^t(T_{t_N})]^t$$

En ré-introduisant le problème discrétisé de satisfaction de contraintes (II.7.6) dans le problème (II.7.2), nous obtenons le schéma d'optimisation en fonction de  $\Delta V$  :

$$\begin{aligned}
 J_*(\Delta V) &= \min_{\substack{\Delta V \\ \text{sous}}} J_* \\
 &X = \Phi X(t_1) + B\Delta V \\
 &\Psi(t_1, X(t_1), t_f, X(t_f)) = 0 \\
 &|\Delta V_x(T_{t_i})| \leq \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 &|\Delta V_y(T_{t_i})| \leq \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 &|\Delta V_z(T_{t_i})| \leq \Delta \bar{v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 &\gamma(X(T_j), u(T_j), T_j) \leq 0, j = 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{II.7.9}$$

Ce schéma d'optimisation est linéaire en  $\Delta V$  si  $\gamma(X, u, t)$  est une application linéaire. Dans la littérature relative aux méthodes de tirs pour le rendez-vous, une classification naturelle des travaux peut se faire suivant la matrice de transition utilisée. La matrice de transition choisie reflète notamment les conditions de modélisation orbitales envisagées par les auteurs et par conséquent, elle caractérise la portée de leurs travaux.

### 7.3 Formulation du problème de RdV en programmation linéaire

Dans cette section, un algorithme de résolution du problème de rendez-vous basé sur la programmation linéaire est présenté. La démarche suivie est fondée sur les méthodes de tirs. Nous proposons, dans un premier temps, de traiter un problème *sans incertitude* où les conditions initiales et finales sont connues et fixes. Ce problème s'apparente au problème traité dans le chapitre précédent par les méthodes indirectes. Les principales différences se situent au niveau du nombre et des dates d'application des impulsions qui sont fixées ici. D'autre part, le critère de coût retenu est la norme  $\mathcal{L}_1$  car elle offre la possibilité d'une reformulation du problème de minimisation en un problème linéaire par l'introduction de variables intermédiaires.

Les différents problèmes que nous traitons dans cette section sont réécrits sous la forme d'un problème de programmation linéaire de forme générale :

$$\begin{array}{ll} \min_x & C^t x \\ \text{sous} & Ax \leq b \end{array} \quad (\text{II.7.10})$$

avec  $x \in \mathcal{R}^n$  la variable à optimiser et  $A \in \mathcal{R}^{q \times n}$ ,  $b \in \mathcal{R}^q$  et  $C^n$  les paramètres du problème. L'implantation MATLAB<sup>®</sup> nécessite la distinction entre les contraintes égalités et inégalités. Ainsi la forme générale du problème de programmation linéaire (II.7.10) se précise de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \min_x & C^t x \\ \text{sous} & \begin{cases} A_{eg}x = b_{eg} \\ A_{in}x \leq b_{in} \end{cases} \end{array} \quad (\text{II.7.11})$$

Le problème de guidage (II.7.9) peut se résumer au problème suivant, si l'on considère la

fonction de coût  $J_1$  pour  $N$  impulsions :

$$\begin{aligned}
 J(\Delta V) &= \min_{\substack{\Delta V \\ \text{sous}}} \|\Delta V\|_1 \\
 X(t_f) &= \Phi(t_f, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i)B\Delta V(t_i) \\
 -\overline{\Delta v}_i &\leq \Delta V_x(t_i) \leq \overline{\Delta v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 -\overline{\Delta v}_i &\leq \Delta V_y(t_i) \leq \overline{\Delta v}_i, \forall i = 1, \dots, N \\
 -\overline{\Delta v}_i &\leq \Delta V_z(t_i) \leq \overline{\Delta v}_i, \forall i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{II.7.12}$$

où  $\Delta V$  est le vecteur défini par :

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \Delta V_x(t_1) \\ \Delta V_y(t_1) \\ \Delta V_z(t_1) \\ \vdots \\ \Delta V_x(t_n) \\ \Delta V_y(t_n) \\ \Delta V_z(t_n) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3N} \tag{II.7.13}$$

Le problème (II.7.12) ne répond pas *a priori* à cette définition notamment à cause de la fonction de coût  $|\Delta V|$  qui est une fonction linéaire par morceaux. Il est ramené à la formulation linéaire classique par l'utilisation d'un vecteur de variables additionnelles  $Z \in \mathcal{R}^{3N}$  qui vérifient :

$$\begin{aligned}
 \Delta V_i &\leq Z_i \\
 -\Delta V_i &\leq Z_i, \quad \forall i = 1, \dots, 3N
 \end{aligned} \tag{II.7.14}$$

On notera  $\Delta V_i$  le  $i^{\text{eme}}$  élément du vecteur  $\Delta V$  avec  $i = 1, \dots, 3N$ .

Le problème (II.7.12) se reformule en fonction de  $\Delta V$  et  $Z$  comme :

$$\begin{aligned}
 J(\Delta V) &= \min_{\substack{\Delta V, Z \\ \text{sous}}} \sum_{i=1}^{3N} Z_i \\
 X(t_f) &= \Phi(t_f, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i)B\Delta V(t_i)
 \end{aligned} \tag{II.7.15}$$

$$\Delta V_i \leq Z_i$$

$$-\Delta V_i \leq Z_i$$

$$[Z_{3i+1}, Z_{3i+2}, Z_{3i+3}]^t \leq \overline{\Delta v}_{i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1$$

Nous allons maintenant construire les matrices  $A$ ,  $b$  et  $C$  du problème (II.7.10). Tout d'abord, le vecteur des variables de décision est :

$$\begin{aligned} \Upsilon &= [Z^t, \Delta V^t] \\ &= [Z_1, \dots, Z_{3N}, \Delta V_1, \dots, \Delta V_{3N}]^t \end{aligned} \quad (\text{II.7.16})$$

Dans ce cadre, les contraintes du problème précédent (II.7.15) peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} X(t_f) - \Phi(t_f, t_1)X(t_1) &= [\Phi(t_f, t_1)B \quad \dots \quad \Phi(t_f, t_N)B] \begin{bmatrix} 0_{3N} & I_{3N} \end{bmatrix} \Upsilon \\ \begin{bmatrix} -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \end{bmatrix} \Upsilon &\leq 0_{3N \times 1} \\ \begin{bmatrix} I_{3N} & 0_{3N} \end{bmatrix} \Upsilon &\leq \begin{bmatrix} \overline{\Delta v_1} I_3 \\ \vdots \\ \overline{\Delta v_N} I_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.7.17})$$

avec  $I_k \in \mathcal{R}^k$  le vecteur dont tout les éléments sont égaux à 1.

La distinction entre les égalités et les inégalités dans les contraintes mène à l'écriture des matrices  $A_{eg}$ ,  $b_{eg}$ ,  $A_{in}$  et  $b_{in}$  du problème (II.7.11) :

$$A_{eg} = [\Phi(t_f, t_1)B \quad \dots \quad \Phi(t_f, t_N)B] \begin{bmatrix} 0_{3N} & I_{3N} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.18})$$

$$b_{eg} = X(t_f) - \Phi(t_f, t_1)X(t_1) \quad (\text{II.7.19})$$

$$A_{in} = \begin{bmatrix} -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \\ I_{3N} & 0_{3N} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.20})$$

$$b_{in} = \begin{bmatrix} 0_{3N \times 1} \\ \overline{\Delta v_1} I_3 \\ \vdots \\ \overline{\Delta v_N} I_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.21})$$

Finalement, le problème équivalent au problème de guidage (II.7.15) est le suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\Upsilon} \quad & C^t \Upsilon \\ \text{sous} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} \Phi(t_f, t_1)B & \dots & \Phi(t_f, t_N)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3N} & I_{3N} \end{bmatrix} \Upsilon = X(t_f) - \Phi(t_f, t_1)X(t_1) \\ \begin{bmatrix} -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \\ I_{3N} & 0_{3N} \end{bmatrix} \Upsilon \leq \begin{bmatrix} 0_{3N} \\ \overline{\Delta v_1} I \\ \vdots \\ \overline{\Delta v_N} I \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.7.22})$$

avec :

$$C = \begin{bmatrix} I_{3N} \\ 0_{3N} \end{bmatrix}$$

## 7.4 Guidage robuste aux incertitudes de navigation

### 7.4.1 Introduction

Les inexactitudes et perturbations que peuvent subir les paramètres du problème de commande optimale ont comme conséquences de générer des incertitudes dans les données du problème de programmation linéaire. Dans ce cadre, plusieurs techniques de programmation sont envisageables pour traiter de genre de situations. La programmation stochastique et la programmation convexe robuste sont les méthodes les plus couramment utilisées dans la littérature.

*La programmation stochastique* [10] permet de considérer les cas où les incertitudes sont des variables aléatoires dont les fonctions de distribution ainsi que les propriétés stochastiques sont connues ou estimables. Les solutions obtenues sont dans ce cas admissibles et réalisent les contraintes du problème pour la majorité des valeurs que peuvent prendre les incertitudes. Cependant, l'admissibilité des solutions n'est pas garantie pour toutes les réalisations.

*La programmation convexe robuste* [9, 32] est destinée à des cas où seules les bornes sur la valeur de l'incertitude sont connues. Aucune autre information n'est requise par ces méthodes basées sur l'analyse pire-cas. Les solutions obtenues sont dans ce cas admissibles et réalisent les contraintes pour toutes les réalisations d'incertitudes.

Dans le cadre du rendez-vous que nous considérons dans cette thèse, nous nous intéressons en particulier aux erreurs de navigation qui peuvent affecter la condition initiale en position/vitesse relative. Ces erreurs sont de manière générale de nature à favoriser l'utilisation des techniques de programmation convexe robuste. En effet, seules des bornes min-max sur les incertitudes sont connues. De plus, les méthodes convexes robustes mène à considérer à partir du problème nominal de guidage déjà présenté, des problèmes de programmation convexe où l'optimalité est *certifiée*. Cette démarche présente des avantages numériques également lors de l'implantation.

### 7.4.2 Programmation mathématique et incertitudes

L'optimisation robuste se base essentiellement sur des programmes mathématiques avec des données incertaines. Il s'agit de programmes à structure fixée dont les données sont mal connues et peuvent appartenir à un ensemble.

Soit le problème d'optimisation de forme générale donné par :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f_0(x) \\ \text{sous} \quad & f_i(x, \Delta_i(u_i)) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{II.7.23}$$

---

$u_i \in \mathcal{R}^k$  est un vecteur de paramètres influençant les données  $\Delta_i$  du problème.

Un problème incertain est constitué d'une collection de programmes de la forme (II.7.23) :

$$\begin{aligned} & \min_x f_0(x) \\ & \text{sous } f_i(x, \Delta_i(u_i)) \leq 0 \quad \forall \Delta_i \in U_i, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{II.7.24})$$

où les  $U_i \in \mathcal{R}^k$  sont les ensembles d'incertitudes considérés *clos*. On définit l'ensemble  $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$ .

L'optimisation robuste repose sur trois hypothèses fondamentales [32, 9] :

- les variables d'optimisation  $x$  doivent être déterminées par résolution du problème (II.7.24) *avant* que les données réelles du problème soient connues ;
- les garanties qui peuvent être obtenues ne sont valables que si les données sont incluses dans leurs ensembles  $U_i$  respectifs ;
- toutes les contraintes  $f_i(x, \Delta_i(u_i)) \leq 0$  doivent être respectées sans exceptions, tant que  $\Delta_i \in U_i$ .

Dans ces conditions, les solutions obtenues sont robustes aux incertitudes sur les données  $\Delta_i$ . Toute solution  $x$  vérifiant les trois conditions est une solution admissible et robuste. Son coût est calculé par le biais de la fonction  $f_0$  pour la réalisation la plus défavorable des incertitudes. On qualifie cette technique d'approche *pire-cas*. Une formulation sous forme d'un problème min-max permet de retrouver la solution optimale robuste pour le problème et l'ensemble des réalisations des incertitudes :

$$\begin{aligned} & \min_x \max_{\Delta_i \in U_i} f_0(x) \\ & \text{sous } f_i(x, \Delta_i(u_i)) \leq 0 \quad \forall \Delta_i \in U_i, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{II.7.25})$$

Cette formulation est appelée *contrepartie robuste* du problème (II.7.24) (de la notation anglo-saxonne *robust counterpart*).

Dans le cadre du rendez-vous, nous nous intéressons en particulier aux problèmes d'optimisation linéaire. Soit le problème d'optimisation incertain et linéaire de la forme :

$$\begin{aligned} & \min_x C^t x \\ & \text{sous } Ax + b \leq 0 \quad (A, b) \in U \end{aligned} \quad (\text{II.7.26})$$

La contrepartie robuste du problème (II.7.26) s'écrit à l'aide de la structure de l'ensemble  $U$  des réalisations des données du problème, à savoir  $A$  et  $b$  :

$$U = \left\{ [A, b] = [A^0, b^0] + \sum_{j=1}^k [A^j, b^j], u_j \in \mathcal{U}_j \subset \mathcal{R}^k \right\} \quad (\text{II.7.27})$$

où la paire  $[A^0, b^0]$  représente les réalisations nominales et les paires  $[A^j, b^j]$  représentent les dépendances de  $A$  et  $b$  vis-à-vis de l'incertitude  $u_i$ .  $\mathcal{U}_j$  est l'espace contenant l'incertitude  $u_j$ .

La contrepartie robuste du problème (II.7.26) est donnée par :

$$\begin{aligned} & \min_x \max_{(A, b) \in U} C^t x \\ & \text{sous } Ax + b \leq 0 \quad (A, b) \in U \end{aligned} \quad (\text{II.7.28})$$

### 7.4.3 Contreparties robustes aux ensembles d'incertitudes ellipsoïdaux

Dans la suite nous considérons que les incertitudes sur les conditions initiales, induites par les erreurs de navigation, sont de type ellipsoïdal. Les ensembles de ce type ont été étudiés par Ben-Tal [9] & El Ghaoui [32]. La popularité de cette forme d'ensembles est due à ses propriétés géométriques proches des conditions rencontrées en pratique et sa définition mathématique offrant une grande souplesse et permettant de formuler des contreparties robustes simples.

Une incertitude de type ellipsoïdal se définit par son ensemble [9] :

$$U = \{\Pi(u), u \in \mathcal{R}^k, \|u\|_2 \leq 1\} \quad (\text{II.7.29})$$

où  $\Pi$  est une application affine de  $\mathcal{R}^k$ . L'ensemble  $\mathcal{U}$  est, dans ce cas, donné par :

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{R}^k, \|u\|_2 \leq 1\}$$

L'application  $\Pi$  permet de modéliser l'effet de l'incertitude sur les différentes données du problème.

La contrepartie robuste d'un problème linéaire incertain dont les incertitudes sont de type ellipsoïdal a été proposée dans [9] et [32] indépendamment :

$$\begin{aligned} & \min_x C^t x \\ & \text{sous } A^0 x + b^0 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k (A^j x + b^j)^2} \end{aligned} \quad (\text{II.7.30})$$

où  $U = \left\{ [A, b] = [A^0, b^0] + \sum_{j=1}^k [A^j, b^j] \right\}$ .

### 7.4.4 Application au problème du rendez-vous

#### 7.4.4.1 Relaxation de la condition finale

Lorsque la condition initiale du rendez-vous est affectée par des incertitudes sur les position/vitesse relatives, un plan de manœuvre ne peut plus garantir que la condition finale soit respectée. Ceci est lié à la nature de l'équation de propagation du mouvement qui, sauf exception, associe à chaque condition initiale une condition finale distincte. Afin de pouvoir assurer la robustesse du plan de manœuvre dans ces conditions, nous sommes amenés à relaxer la condition finale. Il ne s'agit plus de viser un point final précis, mais plutôt un ensemble d'arrivée. L'ensemble d'arrivée est déterminé en fonction de la tolérance sur les erreurs au point d'arrivée. Nous avons choisi dans cette thèse d'utiliser des ensembles d'arrivée de forme polytopique (cf. figure 7.1).

Dans le cas où la condition sur l'état final est relaxée, l'état d'arrivée doit appartenir à un ensemble  $\Omega$  :

$$X(t_f) \in \Omega \quad (\text{II.7.31})$$

En particulier, si l'ensemble d'arrivée est un polytope, l'appartenance peut être exprimée à l'aide d'une inégalité matricielle :

$$X(t_f) \in \Omega \Leftrightarrow H X(t_f) \leq K \quad (\text{II.7.32})$$

avec  $X(t_f) = \Phi(t_f, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i)B\Delta V(t_i)$ .

Le problème d'optimisation est donc modifié afin d'inclure cette nouvelle contrainte :

$$\begin{aligned} J(\Delta V) = \min_{\Delta V, Z} & \sum_{i=1}^{3N} Z_i \\ \text{sous} & \\ & H(\Phi(t_f, t_1)X(t_1) + \sum_{i=1}^N \Phi(t_f, t_i)B\Delta V(t_i)) \leq K \\ & \Delta V_i \leq Z_i \\ & -\Delta V_i \leq Z_i \\ & [Z_{3i+1}, Z_{3i+2}, Z_{3i+3}]^t \leq \overline{\Delta v}_{i+1}, \forall i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (\text{II.7.33})$$

Cela donne le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\Upsilon} & C^t \Upsilon \\ \text{sous} & \begin{cases} H \left( \begin{bmatrix} \Phi(t_f, t_1)B & \dots & \Phi(t_f, t_N)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3N} & I_{3N} \end{bmatrix} \Upsilon + \Phi(t_f, t_1)X(t_1) \right) \leq K \\ \begin{bmatrix} -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \\ I_{3N} & 0_{3N} \end{bmatrix} \Upsilon \leq \begin{bmatrix} 0_{3N} \\ \overline{\Delta v}_1 I \\ \vdots \\ \overline{\Delta v}_N I \end{bmatrix} \end{cases} \\ \text{avec } C = & \begin{bmatrix} I_{3N} \\ 0_{3N} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.7.34})$$

#### 7.4.4.2 Formulation du RdV robuste en programmation linéaire

On se pose comme objectif de déterminer la solution à coût minimal qui permet de garantir l'appartenance du point d'arrivée à une région (polytopique) donnée sous l'effet

d'incertitudes sur l'état initial contenues dans un ellipsoïde donné (voir figure 7.1). Ces incertitudes sont définies à travers l'équation :

$$X(t_1) = X^0(t_1) + P_u u, \quad u^t u \leq 1 \quad (\text{II.7.35})$$

où  $u \in \mathcal{R}^6$  est un vecteur inconnu qui représente la perturbation.  $P_u$  est une matrice définie positive qui définit l'ellipsoïde de l'incertitude. La formulation du problème sans

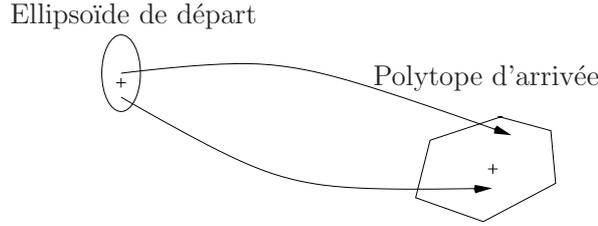


FIG. 7.1 – Guidage robuste

prise en compte des incertitudes a déjà été traitée dans la section précédente. Elle peut être formulée ainsi :

$$\begin{aligned} \min_{\Upsilon} \quad & C^t \Upsilon \\ \text{sous} \quad & A \Upsilon \leq b \end{aligned} \quad (\text{II.7.36})$$

où

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{3N} & H [\Phi(t_f, t_1)B \quad \dots \quad \Phi(t_f, t_N)B] \\ -I_{3N} & I_{3N} \\ -I_{3N} & -I_{3N} \\ I_{3N} & 0_{3N} \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} K - H\Phi(t_f, t_1)X(t_1) \\ 0_{3N} \\ \frac{\Delta v_1 I}{\Delta v_1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta v_N I}{\Delta v_N} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} I_{3N} \\ 0_{3N} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.7.37})$$

L'incertitude sur l'état initial affecte la matrice  $b$ . L'ensemble  $\mathcal{U}$  est défini comme :

$$\mathcal{U} = \left\{ b = b^0 + \sum_{j=1}^{2N} u_j b^j, \quad u^t u \leq 1 \right\} \quad (\text{II.7.38})$$

où les  $b^j$  sont donnés par :

$$b^j = \begin{cases} K - H\Phi(t_f, t_1)X^0(t_1) & \text{pour } j = 0 \\ H\Phi(t_f, t_1)P_u^j & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.7.39})$$

et  $P_u^j$  est la  $j^{\text{eme}}$  colonne de  $P_u$ .

Une solution à cette classe de problèmes a été donnée par Ben-Tal et Nemirovski dans [8] ainsi que par El Ghaoui dans [32] :

$$\begin{aligned} \min_{\Upsilon} \quad & C^t \Upsilon \\ \text{sous} \quad & A_i \Upsilon \leq b_i^0 + \sqrt{\sum_j (b_i^j)^2}, \text{ pour chaque ligne } i \text{ de } b \end{aligned} \quad (\text{II.7.40})$$

Cette contrepartie robuste a une structure linéaire permettant d'exploiter les outils de programmation linéaire. Ceci est un facteur très important qui conditionne la possibilité d'embarquer les algorithmes que nous développons dans la suite. Le choix des ensembles d'incertitudes et de la relaxation de la condition finale peut mener vers une formulation SDP, voire NP-difficile de la contrepartie robuste, rendant l'implantation moins facile à réaliser.

## 7.5 Présentation de l'algorithme RDV-DIR

L'algorithme **RDV-DIR** se charge de la résolution du problème de rendez-vous par la programmation linéaire. La résolution est basée sur la formulation (II.7.40) destinée au problème de rendez-vous robuste vis-à-vis des incertitudes sur l'état initial et à condition finale relaxée. Cette formulation englobe les autres cas (nominal, condition finale relaxé). En effet, il suffit d'annuler la matrice  $P_u$  pour revenir à un cas non robuste aux incertitudes, à condition finale relaxée. De même, si la matrice  $K$  dans l'équation (II.7.34) est annulée, on retombe sur le cas nominal (boîte d'arrivée réduite au point  $X_f$ ).

### 7.5.1 Entrées et sorties de l'algorithme RDV-DIR

Les entrées de l'algorithme **RDV-DIR** peuvent être résumées dans ce qui suit :

- conditions initiales et finales du rendez-vous  $t_1, X(t_1)$  et  $t_f, X(t_f)$  ;
- paramètres orbitaux de la cible à  $t_1$  ;
- nombre d'impulsions  $N$  ;
- tolérance sur la condition finale  $X_{box}$ , qui correspond au polytope entourant  $X(t_f)$  ;
- incertitude sur l'état initial  $P$ , qui correspond à l'ellipsoïde entourant  $X(t_1)$ .

L'horizon  $[t_1, t_f]$  est ensuite discrétisé en  $N$  points, et les matrices de la formulation (II.7.40) sont construites. Une routine de programmation linéaire se charge ensuite de résoudre le problème d'optimisation pour aboutir aux sorties suivantes :

- le coût optimal de l'opération, si le problème est réalisable ;
- les impulsions  $\Delta V_i$  de la configuration optimale.

## 7.5.2 Mise en œuvre pratique

L'optimisation linéaire est réalisé sous MATLAB© grâce au fonction de la bibliothèque OPTIMIZATION TOOLBOX et notamment la fonction `linprog.m`. La syntaxe appliqué dans les algorithmes est la suivante :

```
[Z_DV,cout,flag,output] = LINPROG(C,Ain,Bin,Aeg,Beg,[],[],[],options);
```

Parmi les données d'entrées, les matrices `C`, `Ain`, `Bin`, `Aeg` et `Beg` correspondent respectivement aux matrices  $C$ ,  $A_{in}$ ,  $b_{in}$ ,  $A_{eg}$  et  $b_{eg}$  définies plus haut. La variable `options` est une structure contenant l'ensemble des paramètres de l'algorithme. Dans la longue liste des options possibles, les suivantes peuvent nous intéresser plus particulièrement :

**Display** Cette option permet d'afficher ou non des informations sur le déroulement de l'optimisation. Dans le cas d'une inclusion de la fonction de guidage dans une architecture logicielle, sa valeur sera fixée par la chaîne de caractère 'off'.

**MaxIter** Ce paramètre fixe le nombre d'itérations autorisé pour obtenir un résultat. Ce paramètre est utile lorsque l'on veut imposer un temps de calcul limité. La contrepartie est qu'en limitant le temps de calcul, l'algorithme est contraint de s'arrêter avant la convergence de celui-ci.

**Simplex** Lorsque cette option est activée, elle permet d'imposer à MATLAB© l'utilisation du *SIMPLEX* au lieu d'une méthode de point intérieur utilisée par défaut.

**TolFun** Cet argument est la tolérance souhaitée sur la valeur du coût. On demande à l'algorithme de s'arrêter lorsque le coût progresse d'une valeur inférieure à celle de `TolFun`. Ce paramètre ne peut-être utilisé que dans le cas d'une méthode par point intérieur (méthode utilisée par défaut).

La génération de la variable `options` telle qu'elle est réalisée par défaut dans l'algorithme de guidage est la suivante :

```
options = optimset('Display','off','TolFun',1e-8);
```

Les sorties de l'algorithme sont les variables `Z_DV`, `cout`, `flag` et `output`. Les variables `Z_DV` et `cout` correspondent respectivement au vecteur optimal  $\Upsilon^*$  et au coût optimal  $J^*$ . Un statut `flag` égal à 1 indique que l'algorithme a convergé vers une solution optimale. Si le statut est égal à 0, alors l'algorithme a atteint le nombre maximal d'itérations alloué en fournissant une solution admissible et non optimale. Un statut négatif indique qu'il n'existe pas de solution faisable ou un problème qui peut être numérique. La variable `output` est une structure qui rassemble les informations de sortie d'algorithme. On pourra notamment trouver au sein de cette structure le nombre d'itérations effectuées pour atteindre l'optimum (`output.iterations`) et un message précisant la signification du statut (`output.message`).

La matrice de transition utilisée dans l'implantation pratique est celle de Yamanaka-Ankersen donnée dans [84]. Nous considérons des transferts entre trajectoires elliptiques

---

non perturbées. Du fait du découplage plan/hors-plan des dynamiques relatives, les transferts considérés sont uniquement dans le plan  $X - Z$  du repère local  $LVLH$ .

## 7.6 Conclusions

Les méthodes directes présentées dans ce chapitre sont destinées à synthétiser des algorithmes permettant de prendre en compte un grand nombre de contraintes dynamiques et statiques supplémentaires tout en gardant une charge numérique raisonnable. Grâce à la grande flexibilité qu'offre la programmation linéaire, l'implantation pratique des algorithmes fondés sur les méthodes directes est facilitée. De plus, nous avons vu que les contraintes engendrées par la robustesse aux incertitudes causées par les erreurs de navigation peuvent être prises en compte à travers une reformulation du problème tout en préservant sa structure linéaire.

L'optimalité globale des résultats obtenus ne peut être garantie, en particulier par rapport aux dates d'application des impulsions. Ceci est la conséquence de la discrétisation nécessaire pour passer en dimension finie et exploiter les outils de programmation mathématique. L'utilisation d'un grand nombre d'impulsions permet d'approcher l'optimum. En effet, on peut montrer que les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker tendent dans ce cas vers les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité issues du principe du maximum de Pontryagin [11]. Cela se fait au détriment de la complexité numérique et du temps de calcul qui augmentent logiquement, rendant l'implantation plus complexe à mettre en œuvre.



---

# Chapitre 8

## Eléments de validation numérique

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction et considérations pratiques</b>	<b>200</b>
<b>8.2</b>	<b>Exemples académiques de Carter</b>	<b>201</b>
8.2.1	Présentation des exemples de Carter	201
8.2.2	Validation et comparaison des approches indirectes	202
8.2.2.1	Le cas <b>Carter-A</b>	204
8.2.2.2	Le cas <b>Carter-B</b>	205
8.2.2.3	Le cas <b>Carter-C</b>	205
8.2.3	Détails des itérations de l'algorithme <b>RDV-IND2</b>	206
<b>8.3</b>	<b>La mission ATV</b>	<b>208</b>
8.3.1	Présentation de la mission	208
8.3.2	Simulations et résultats pour le cas nominal	209
8.3.3	Validité de l'hypothèse linéaire	212
8.3.4	Etude de la charge numérique de l'algorithme <b>RDV-DIR</b>	213
8.3.5	Etude de la robustesse de l'algorithme <b>RDV-DIR</b>	215
<b>8.4</b>	<b>La mission PRISMA</b>	<b>218</b>
8.4.1	Présentation de la mission	218
8.4.2	Simulations et résultats	220
8.4.3	Validité de l'hypothèse linéaire	223
<b>8.5</b>	<b>La mission SIMBOL-X</b>	<b>223</b>
8.5.1	Présentation de la mission	223
8.5.2	Simulations et résultats	224
<b>8.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>225</b>

---

## 8.1 Introduction et considérations pratiques

Dans les deux chapitres précédents, nous avons présenté plusieurs approches différentes de résolution du problème de rendez-vous à consommation minimale. Ces approches visent à résoudre des problèmes similaires à l'aide de techniques différentes et pour des objectifs qui peuvent être distincts.

Des méthodes conventionnelles ont été présentées au début de cette partie. Elles reposent sur des outils de la mécanique spatiale et permettent une résolution simplifiée du problème de rendez-vous sans pour autant garantir l'optimalité de la consommation.

Les méthodes indirectes reposent sur une formulation analytique du problème de commande optimale associé au rendez-vous à consommation minimale. L'utilisation du principe de Pontryagin et des outils de commande optimale permettent de construire des algorithmes assurant l'optimalité globale des résultats. Les difficultés liées à la nature non linéaire de certaines contraintes du problème ont été contournées grâce à une reformulation polynomiale du problème. L'inconvénient majeur constaté est la limitation induite par les contraintes supplémentaires. En effet, le problème d'évitement de collision ou les limitations physiques sur les poussées sont difficiles à envisager à l'aide des techniques indirectes. La robustesse vis-à-vis d'incertitudes de navigation n'est pas prise en compte. Aussi, les méthodes directes offrent-elles une alternative en permettant de pallier ces difficultés. Toutefois, l'optimalité du plan de manœuvres n'est pas garantie dans ce cas et le coût peut être relativement éloigné de la consommation optimale.

Le choix de l'une de ces méthodes repose sur le contexte du problème traité. Si l'optimalité est privilégiée, les méthodes indirectes sont naturellement choisies. La robustesse, les contraintes dynamiques et statiques supplémentaires ainsi que la facilité d'implantation favorisent les méthodes directes. Ces méthodes sont plus adaptées au calcul en temps réel grâce à l'utilisation d'algorithmes efficaces tels que le *SIMPLEX* qui devraient permettre d'embarquer l'ensemble des opérations de calcul à bord du satellite en orbite à plus ou moins long terme. Les méthodes conventionnelles offrent des possibilités d'implantation plus élargies que les méthodes directes et indirectes car elles ne nécessitent pas des procédés complexes d'optimisation.

Dans ce chapitre, nous proposons différents *scénarii* de rendez-vous issus de missions réelles ou de cas académiques. Les méthodes directes et/ou indirectes sont mises en œuvre pour résoudre ces cas. Ceci permet de démontrer l'efficacité des algorithmes proposés et d'effectuer des comparaisons et des analyses sur les résultats obtenus.

Les simulations présentées dans la suite sont réalisées sous Matlab© version 7.4.0.129 et Simulink® version 6.6.1. Le calculateur utilisé est un Intel® Dual E4400 à 2GHz avec 2Go de RAM sous Linux Fedora 8. L'optimisation par programmation linéaire est réalisée à l'aide de *linprog* de *Optimization Toolbox* version 3.1.1 à travers l'interface *Yalmip*. La résolution des systèmes d'équations polynomiales est opérée à l'aide du logiciel *PhcPack* de Verschelde [82] version 2.3.5.6 du 28 juin 2010. L'optimisation polynomiale par relaxa-

---

tions convexes est réalisée à l'aide du logiciel *Gloptipoly* 3.6.1 (23 Avril 2010) développé au LAAS [37, 38]. Les différents calculs relatifs à la méthode heuristique sont réalisés à l'aide de la fonction *FMINCON* faisant partie de *Optimization Toolbox* sous MATLAB©. La fonction *FMINCON* est basée sur les techniques SQP (Sequential Quadratic Programming) pour l'optimisation non linéaire sous contraintes.

## 8.2 Exemples académiques de Carter

### 8.2.1 Présentation des exemples de Carter

Les exemples académiques de Carter sont issus de l'article [20]. Il s'agit de rendez-vous entre orbites circulaires. Dans la référence [20], l'auteur ne donne pas de valeur pour le demi-grand axe et les durées sont mesurées à travers l'anomalie vraie. Les impulsions ainsi que la consommation sont normalisées par rapport au mouvement moyen  $n$ .

Nom de la mission	<b>Carter-A</b> [20]
Excentricité de la cible $e$	0
Anomalie vraie de la cible au début du rendez-vous $\nu_1$ (deg)	0
Date de début du rendez-vous $t_1$ (s)	0
Date de fin du rendez-vous $t_f$ (s)	1 période
Etat initial $X(t_1) = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ z(t_1) \\ v_x(t_1)/n \\ v_z(t_1)/n \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Etat final $X(t_f) = \begin{bmatrix} x(t_f) \\ z(t_f) \\ v_x(t_f)/n \\ v_z(t_f)/n \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.427 \end{bmatrix}$

TAB. 8.1 – Données de la mission 'Carter-A'

Nom de la mission	<b>Carter-B</b> [20]
Excentricité de la cible $e$	0
Anomalie vraie de la cible au début du rendez-vous $\nu_1$ (deg)	0
Date de début du rendez-vous $t_1$ (s)	0
Date de fin du rendez-vous $t_f$ (s)	1 période
Etat initial $X(t_1) = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ z(t_1) \\ v_x(t_1)/n \\ v_z(t_1)/n \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Etat final $X(t_f) = \begin{bmatrix} x(t_f) \\ z(t_f) \\ v_x(t_f)/n \\ v_z(t_f)/n \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

TAB. 8.2 – Données de la mission 'Carter-B'

Nom de la mission	<b>Carter-C</b> [20]
Excentricité de la cible $e$	0
Anomalie vraie de la cible au début du rendez-vous $\nu_1$ (deg)	0
Date de début du rendez-vous $t_1$ (s)	0
Date de fin du rendez-vous $t_f$ (s)	1 période
Etat initial $X(t_1) = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ z(t_1) \\ v_x(t_1)/n \\ v_z(t_1)/n \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Etat final $X(t_f) = \begin{bmatrix} x(t_f) \\ z(t_f) \\ v_x(t_f)/n \\ v_z(t_f)/n \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

TAB. 8.3 – Données de la mission 'Carter-C'

### 8.2.2 Validation et comparaison des approches indirectes

Les résultats obtenus à l'aide des algorithmes **RDV-IND1** et **RDV-IND2** sont comparés aux résultats présentés par Carter dans [20]. Pour ce faire, les cas **Carter-C**, **Carter-B** ainsi que **Carter-A** sont résolus par les algorithmes indirects. Les résultats obtenus sont portés sur les tableaux et figures suivantes.

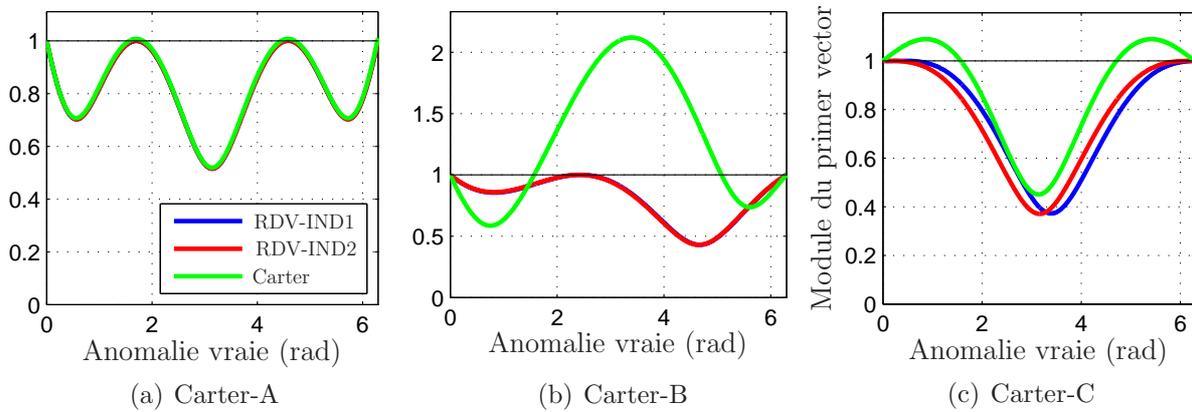


FIG. 8.1 – Module du primer vector pour les différents cas de Carter

Les solutions obtenues par les algorithmes **RDV-IND1** & **RDV-IND2** peuvent être caractérisées comme suit :

- a- pour le cas **Carter-C**, la solution obtenue est une solution à 4 impulsions, dont la 2<sup>ème</sup> est très rapprochée de la première et la 3<sup>ème</sup> est très rapprochée de la quatrième impulsion. Ceci confère à cette solution une forme similaire à une trajectoire à deux impulsions ;
- b- pour le cas **Carter-B**, la solution optimale est à 3 impulsions ;
- c- pour le cas **Carter-A**, la solution optimale est à 4 impulsions.

A partir de la figure 8.1, la première observation qui s'impose est que les deux algorithmes indirects fournissent des résultats très proches. Pour tous les cas traités, l'algorithme **RDV-IND1** certifie et confirme l'optimalité des sorties de l'algorithme **RDV-IND2** tout en prouvant la non-existence de solutions optimales avec un nombre différent d'impulsions. D'ailleurs, il n'existe pas à notre connaissance de cas de figure où une solution optimale avec un nombre d'impulsions différent du nombre déterminé par l'algorithme mixte existe. Les solutions vérifient toutes les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de Carter [20]. Les solutions données par Carter ne sont pas optimales du fait du choix de dates d'application des impulsions opéré *a priori*. Seule la solution du cas **Carter-A** est très proche de la solution optimale grâce à un choix judicieux des dates d'impulsions qui n'est toutefois pas expliqué dans [20].

La figure 8.2 représente les trajectoires d'état obtenues par propagation linéaire basée sur la matrice de Yamanaka-Ankersen. Les trajectoires obtenues par les algorithmes indirects sont quasi identiques et sont représentées sous la notation **RDV-IND** (en rouge). Toutes les trajectoires partent des conditions initiales respectives des problèmes résolus pour arriver aux conditions finales données dans [20]. Cependant, une exception est à signaler au niveau du cas **Carter-B** : la solution donnée par Carter ne permet pas de réaliser le rendez-vous en position et une erreur de l'ordre de 0.2 m apparaît à  $t_f$ . Les trajectoires d'état pour le cas **Carter-A** sont quasi identiques et confirment la proximité des résultats obtenus par les algorithmes indirects à ceux de Carter. En ce qui concerne le cas **Carter-C**, les trajectoires obtenues sont très proches, mais nous verrons qu'elles diffèrent au

niveau de leur consommation respective.

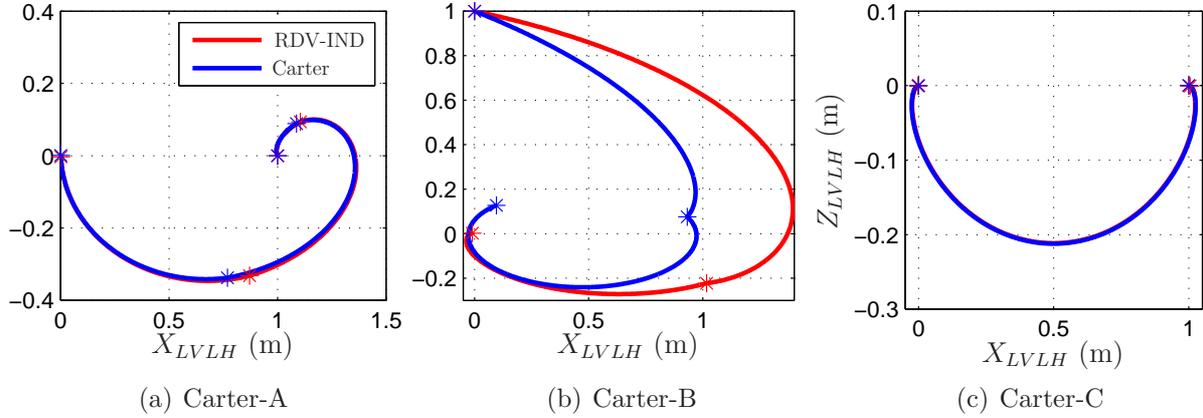


FIG. 8.2 – Trajectoire du chasseur dans le plan pour les différents cas

### 8.2.2.1 Le cas Carter-A

Le tableau 8.4 reprend les résultats numériques pour le cas **Carter-A**. Les solutions sont très proches à cause d'un choix judicieux des dates d'impulsions par Carter. Ces dates s'approchent des dates optimales déterminées par **RDV-IND1** et **RDV-IND2**. Ceci étant dit, le faible décalage entre les dates optimales et les dates pré-fixées cause une différence de coût de 0.8% qui ne peut être négligée. Les résultats relatifs à  $\lambda$  confirment la grande sensibilité des trajectoires à ce paramètre pour les raisons évoquées précédemment.

	Carter [20]	RDV-IND1	RDV-IND2
Dates (rad)	$\left[0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$[0, 1.7005, 4.5937, 2\pi]$	$[0, 1.7017, 4.5867, 2\pi]$
Impulsion 1 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$[-0.0273, 0.0344]$	$[-0.0267, 0.0332]$	$[-0.0269, 0.0334]$
Impulsion 2 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$[0.0897, 0.0119]$	$[0.0916, 0.0047]$	$[0.0920, 0.0046]$
Impulsion 3 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$[-0.0897, 0.0119]$	$[-0.0909, 0.0047]$	$[-0.0907, 0.0043]$
Impulsion 4 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$[0.0273, 0.0344]$	$[0.0259, 0.0322]$	$[0.0257, 0.0318]$
$\lambda_{opt}$	$\begin{bmatrix} -0.0660 \\ -0.6511 \\ 0 \\ -0.6219 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0658 \\ -0.6471 \\ 0.0029 \\ -0.6216 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0658 \\ -0.6470 \\ 0.0034 \\ -0.6209 \end{bmatrix}$
Coût $L_1$	0.3266	0.3100	0.3094
Coût $L_2$	0.2688	0.2667	0.2667

TAB. 8.4 – Comparaison des résultats normalisés pour le cas 'Carter-A'

## 8.2.2.2 Le cas Carter-B

	Carter [20]	RDV-IND1	RDV-IND2
Dates (rad)	$\left[0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$	$[0, 2.3981, 2\pi]$	$[0, 2.4085, 2\pi]$
Impulsion 1 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$[1.6294, -0.6667]$	$[1.7757, -0.3891]$	$[1.7771, -0.3843]$
Impulsion 2 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$[0.3901, 0.0964]$	$[0.2910, -0.0147]$	$[0.2810, -0.0160]$
Impulsion 3 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$[-0.0633, -0.0259]$	$[-0.0666, -0.0145]$	$[-0.0671, -0.01433]$
$\lambda_{opt}$	$\begin{bmatrix} 0.0939 \\ 0.2724 \\ 0.5211 \\ 1.9300 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1035 \\ 0.0071 \\ 0.2236 \\ 1.4241 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1036 \\ 0.0042 \\ 0.2223 \\ 1.4220 \end{bmatrix}$
Coût $L_1$	2.8718	2.5516	2.5487
Coût $L_2$	2.2308	2.1773	2.1771

TAB. 8.5 – Comparaison des résultats normalisés pour le cas 'Carter-B'

Le tableau 8.5 compare les résultats relatifs au cas **Carter-B**. Même si le nombre d'impulsions est identique, les solutions obtenues par les méthodes indirectes diffèrent de celles présentées par Carter au niveau de la date de la deuxième impulsion. Le gain en consommation est de l'ordre de 2.5%. La solution présentée par Carter n'est pas optimale à cause du choix de la date de  $\Delta V_2$  qui n'est pas optimisé.

## 8.2.2.3 Le cas Carter-C

Dans le tableau 8.6, une comparaison des valeurs des impulsions et de la condition initiale du primer vector est donnée. La solution présentée par Carter est une solution à deux impulsions, la première étant à  $t_1$  et la dernière à  $t_f$ . Les solutions obtenues par **RDV-IND1** ainsi que **RDV-IND2** sont à 4 impulsions. La proximité des dates d'application de  $\Delta V_1$  et  $\Delta V_2$  d'un côté, et de  $\Delta V_3$  et  $\Delta V_4$  de l'autre, rend ces configurations

assimilables à une configuration à 2 impulsions.

	Carter [20]	RDV-IND1	RDV-IND2
Dates (rad)	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[0, 0.4127, 6.2163, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[0, 0.1010, 6.2150, \frac{\pi}{2}\right]$
Impulsion 1 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$\left[\frac{1}{6\pi}, 0\right]$	$[0.0527, -0.0027]$	$[0.0455, -0.0024]$
Impulsion 2 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	$\left[-\frac{1}{6\pi}, 0\right]$	$10^{-3} \times [0.1881, -0.0100]$	$[0.0074, -0.0004]$
Impulsion 3 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	–	$[-0.0454, -0.0027]$	$[-0.0326, -0.0017]$
Impulsion 4 $[\Delta V_x, \Delta V_z]$	–	$[-0.0075, -0.0004]$	$[-0.0203, -0.0011]$
$\lambda_{opt}$	$\begin{bmatrix} 0.1061 \\ -0.2387 \\ 0 \\ 0.9996 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1059 \\ -0.1556 \\ 0.0402 \\ 1.0788 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1060 \\ -0.1589 \\ 0.0034 \\ 1.0053 \end{bmatrix}$
Coût $L_1$	0.1061	0.1118	0.1114
Coût $L_2$	0.1061	0.1060	0.1059

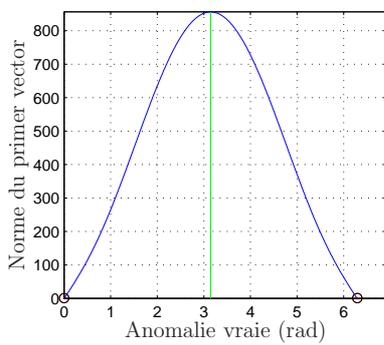
TAB. 8.6 – Comparaison des résultats normalisés pour le cas ‘Carter-C’

La diminution du coût  $L_2$  est de l’ordre de 0.2% par rapport au cas à 2 impulsions et semble faible. Cependant, il faut garder à l’esprit qu’il s’agit d’un coût normalisé par  $n$  – le mouvement moyen – et que les impulsions sont normalisées également par rapport à la masse du chasseur. Cela peut avoir une incidence significative sur l’amélioration du coût par l’addition de ces deux impulsions. Les valeurs de la condition initiale de l’état adjoint  $\lambda$  sont très proches et confirment la grande sensibilité des méthodes indirectes par rapport à cette variable. En effet, on bascule d’une configuration à 2 impulsions vers une configuration à 4 impulsions pour une très petite variation de  $\lambda$ .

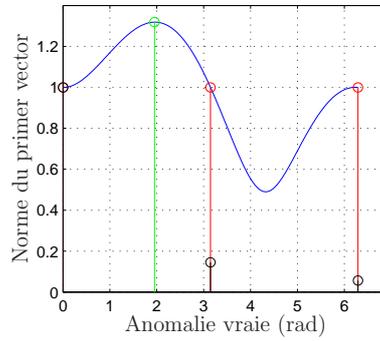
### 8.2.3 Détails des itérations de l’algorithme RDV-IND2

Les étapes de la résolution par l’algorithme **RDV-IND2** pour le cas **Carter-B** sont détaillées sur la figure 8.3, où chaque itération est associée à sa procédure de modification de  $T_{imp}$  correspondante (voir la description de l’algorithme **RDV-IND2**). L’évolution du coût pendant l’optimisation est représentée sur la figure 8.4.

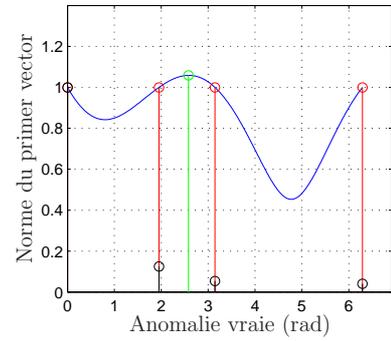
Sur la figure 8.4, la diminution du coût valide l’utilisation des résultats de Lion & Handelsman pour l’addition ou le déplacement des impulsions à chaque itération. On remarque que le coût diminue très fortement entre l’itération 1 et 2. Il s’agit du passage d’une configuration à 2 impulsions vers une configuration à 3 impulsions. Notons que la solution optimale dans ce cas précis est à 3 impulsions. Les itérations restantes servent à ajuster la date de l’impulsion intermédiaire.



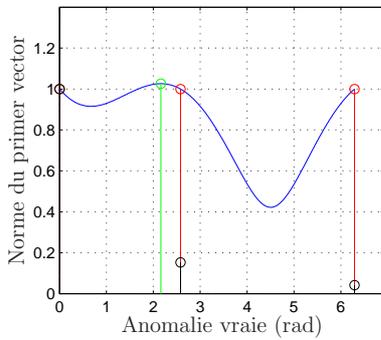
(a) Iter 1 : Ajouter imp à  $\nu = 3.14$



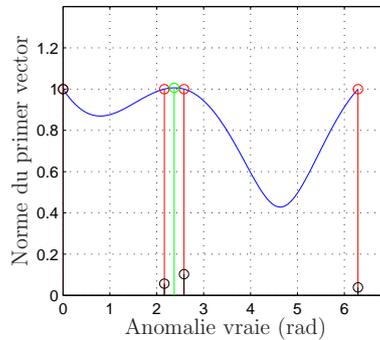
(b) Iter 2 : Ajouter imp à  $\nu = 1.95$



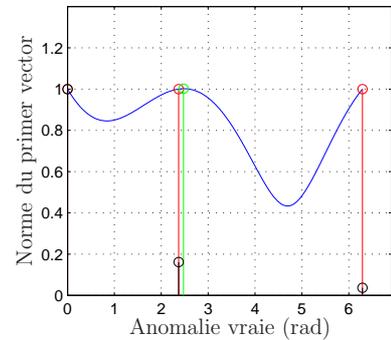
(c) Iter 3 : Cas (a)(i+ii)



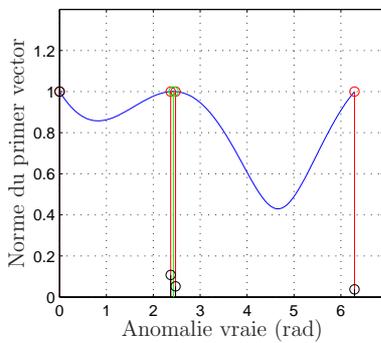
(d) Iter 4 : Ajouter imp à  $\nu = 2.55$



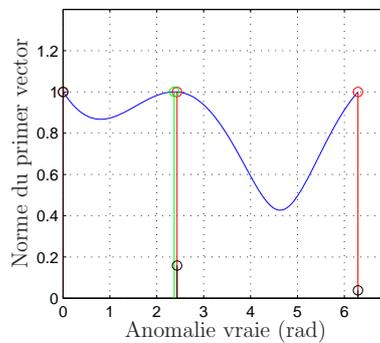
(e) Iter 5 : Cas (a)(i+ii)



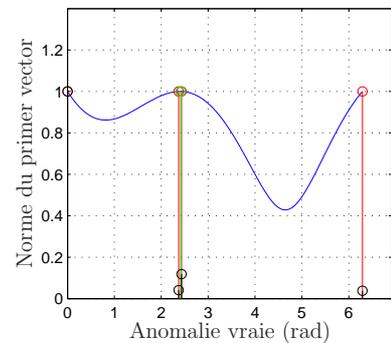
(f) Iter 6 : Ajouter imp à  $\nu = 2.47$



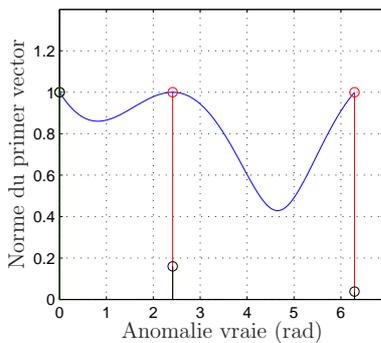
(g) Iter 7 : Cas (a)(i+ii)



(h) Iter 8 : Ajouter imp à  $\nu = 2.37$



(i) Iter 9 : Cas (a)(i+ii)



(j) Iter 10 : Convergence

Légende :

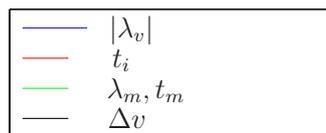


FIG. 8.3 – Détails des itérations pour le cas 'Carter-B'

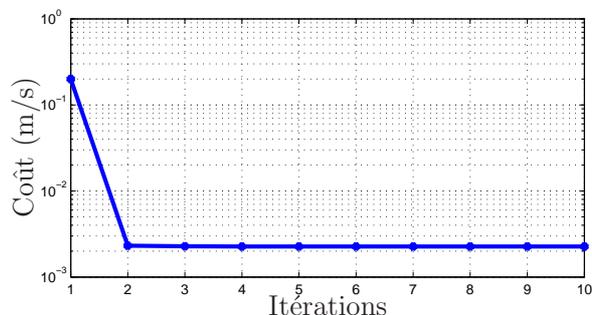


FIG. 8.4 – Evolution du coût pour le cas 'Carter-B' par l'algorithme **RDV-IND2**

Les graphiques de la figure 8.3 illustrent le déroulement de l'optimisation par l'algorithme **RDV-IND2** pour le problème **Carter-B**.

A l'itération 1, un problème à deux impulsions situées à  $t_1$  et  $t_f$  est résolu. La trajectoire du primer vector est propagée ensuite, et le maximum de sa norme est localisé à  $t_{m_1}$ . Le nombre d'impulsions étant inférieur au nombre maximal ( $2 < 4$ ), une impulsion est ajoutée à  $t_{m_1} = 3.14$ .

A l'itération 2, un nouveau problème à trois impulsions  $t_1, t_m, t_f$  est résolu. La norme du primer vector est évaluée et son maximum est localisé à  $t_{m_2} = 3.14$ . De nouveau, une impulsion est ajoutée à  $t_{m_2}$ .

Lors de la troisième itération, un problème à 4 impulsions est résolu. Le maximum du primer vector étant toujours supérieur à 1 (situé à  $t_{m_3}$ ), on procède à un déplacement d'impulsions à cause du nombre  $N$  déjà égal au maximum d'impulsions autorisé. Ainsi,  $t_{m_1}$  et  $t_{m_2}$  sont déplacées à  $t_{m_3}$ . Le nouveau problème est donc à 3 impulsions. Les autres itérations se déroulent d'une manière analogue jusqu'à ce que la norme du primer vector n'excède pas 1. Ceci a lieu à l'itération 10, d'où la convergence et l'arrêt du processus.

## 8.3 La mission ATV

### 8.3.1 Présentation de la mission

Le véhicule automatique de transfert européen (en anglais, *Automated Transfer Vehicle* **ATV**) est un engin spatial destiné à ravitailler la station spatiale internationale [47]. Il a remplacé les vaisseaux russes Progress M à partir de mars 2008. L'ATV est en mesure de transporter 7,6 tonnes de charges avec comme mission principale le ravitaillement des astronautes de la base spatiale ISS. L'ATV permet également d'effectuer des corrections d'orbite de la station internationale. La phase du *homing* du rendez-vous de l'ATV avec la station internationale est reprise ici (cf. tableau 8.7).

### 8.3.2 Simulations et résultats pour le cas nominal

Le cas **ATV** est résolu à l'aide des algorithmes suivants :

- l'algorithme **RDV-IND2** certifié par **RDV-IND1** ;
- l'algorithme **RDV-DIR** sans considérer les incertitudes dans un premier temps (cas nominal). L'algorithme **RDV-DIR** est traité de manière plus détaillée dans les sections suivantes ;
- la méthode analytique présentée dans le chapitre 5 avec une répartition uniforme des impulsions ;
- la méthode heuristique avec minimisation de la norme  $L_1$  et  $L_2$ .

Nom de la mission	<b>ATV [45]</b>
Demi-grand axe de la cible $a$ (km)	6763
Excentricité de la cible $e$	0.0052
Anomalie vraie de la cible au début du rendez-vous $\nu_1$ (rad)	0
Date de début du rendez-vous $t_1$ (s)	7
Date de fin du rendez-vous $t_f$ (s)	2707
Etat initial $X(t_1) = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ z(t_1) \\ v_x(t_1) \\ v_z(t_1) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -30 \\ 5 \\ 8.51 \\ 0 \end{bmatrix}$
Etat final $X(t_f) = \begin{bmatrix} x(t_f) \\ z(t_f) \\ v_x(t_f) \\ v_z(t_f) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -3.5 \\ -0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

TAB. 8.7 – Données de la mission 'ATV'

En ce qui concerne les algorithmes **RDV-DIR**, la méthode analytique et l'algorithme heuristique, les nombres d'impulsions considérés sont de 2, 5 et 20. La résolution du cas à 2 impulsions donne évidemment le même résultat quel que soit l'algorithme utilisé car ce cas possède une solution unique (cf. chapitre 5). Les résultats obtenus sont reportés dans

le tableau 8.8.

	Coût $L_1$	Coût $L_2$
Analytique $N = 2$	12.3543	9.7171
Analytique $N = 5$	14.5980	11.5818
Analytique $N = 20$	17.8332	14.3766
Heuristique $(L_1)_{N = 5}$	11.4613	10.3854
Heuristique $(L_1)_{N = 20}$	11.6766	10.4959
Heuristique $(L_2)_{N = 5}$	12.3482	9.7192
Heuristique $(L_2)_{N = 20}$	12.4711	9.8365
<b>RDV-DIR</b> $N = 5$	11.4477	10.3431
<b>RDV-DIR</b> $N = 20$	11.4471	10.3679
<b>RDV-DIR</b> $N = 100$	11.4470	10.3667
<b>RDV-IND1 &amp; 2</b>	12.3544	9.7172

TAB. 8.8 – Comparaison des résultats pour le cas 'ATV'

Le coût de l'opération du rendez-vous par la méthode analytique augmente avec le nombre d'impulsions pour la mission **ATV**. En réalité, aucune relation n'existe entre ces deux grandeurs car cette méthode n'opère aucune optimisation des résultats. On remarque également que les consommations issues des solutions par la méthode analytique sont toujours supérieures aux autres méthodes, indépendamment de la norme considérée.

D'autre part, on peut observer l'existence de deux groupes distincts de solutions :

- les solutions  $L_1$ -optimales, provenant des méthodes directe et heuristique basées sur cette norme. Le coût  $L_1$  se situe autour de 11,5 ;
- les solutions  $L_2$ -optimales, provenant des algorithmes indirects et de la méthode heuristique basée sur la minimisation de la norme  $L_2$ . Le coût se situe au voisinage de 9.7.

Bien évidemment, aucune comparaison entre les deux normes n'est pertinente. Mais on peut tout de même formuler quelques observations. D'abord, le choix de la norme est primordial pour la validité des résultats. Nous avons vu que ce choix est motivé par des raisons pratiques (possibilité d'orientation des propulseurs à tout instant) et donc la consommation envisagée dépend également de ce facteur en plus de la méthode d'optimisation choisie. Les méthodes indirectes ont l'avantage de converger vers des optimums certifiés globalement. Ceci n'est pas le cas pour les méthodes directes même si elles semblent converger vers une seule solution lorsque le nombre d'impulsions augmente (voir solution à 100 impulsions). Les méthodes basées sur la même norme ( $L_1$  ou  $L_2$ ) donnent des résultats proches. Dans le cas de la norme  $L_2$ , l'optimisation est meilleure par la méthode indirecte grâce aux conditions d'optimalité permettant de garantir la minimisation globale du coût. Dans le cas de la norme  $L_1$ , la méthode directe donne des résultats meilleurs que l'heuristique grâce à la formulation convexe du problème qui permet une convergence assurée pour le problème en dimension finie formulé. Les méthodes heuristiques sont confrontées aux problèmes d'optima locaux et ne garantissent aucune forme d'optimalité.

Les figures 8.5 à 8.8 montrent la répartition temporelle des impulsions obtenues pour différents scénarii et algorithmes. La figure 8.5 présente les solutions obtenues à l'aide

des méthodes directe et indirecte. La méthode indirecte converge vers une solution à 2 impulsions alors que l'algorithme direct mène vers une solution à 3 impulsions. Le fait que la méthode directe converge vers une solution à 3 impulsions même pour  $N$  très grand, en formulation linéaire, permet d'écartier l'hypothèse de l'éventuel minimum local. La différence est la conséquence du choix de la norme à minimiser ( $L_2$  pour **RDV-IND1 & 2** et  $L_1$  pour **RDV-DIR**).

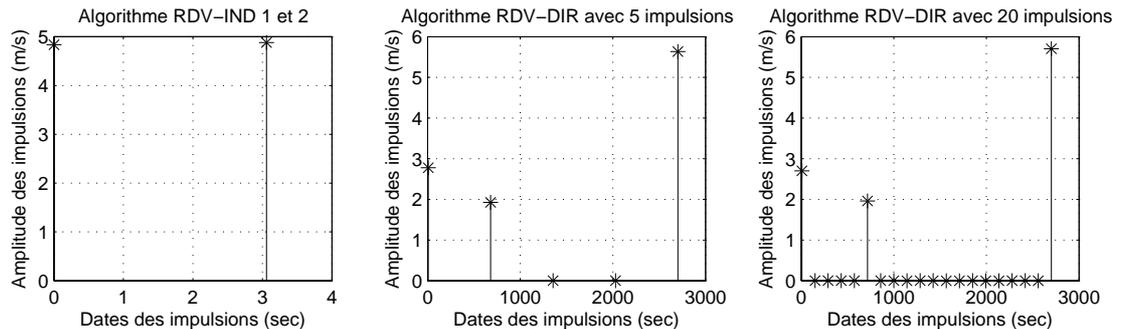


FIG. 8.5 – Répartition des impulsions pour le cas 'ATV' par les approches directe et indirecte

La figure 8.6 montre la répartition des impulsions obtenues par la méthode analytique. Le nombre d'impulsions d'amplitude non négligeable est supérieur à la borne maximale de Neustadt [59]. Ceci est prévisible à cause de la nature de ces méthodes non optimales. Cependant, il faut rappeler que la qualité principale des méthodes analytiques est leur simplicité et facilité d'implantation. Le calcul du plan à 100 impulsions ne nécessite qu'une série de produits matriciels et dure moins de 3 secondes dans les conditions de simulation présentées précédemment.

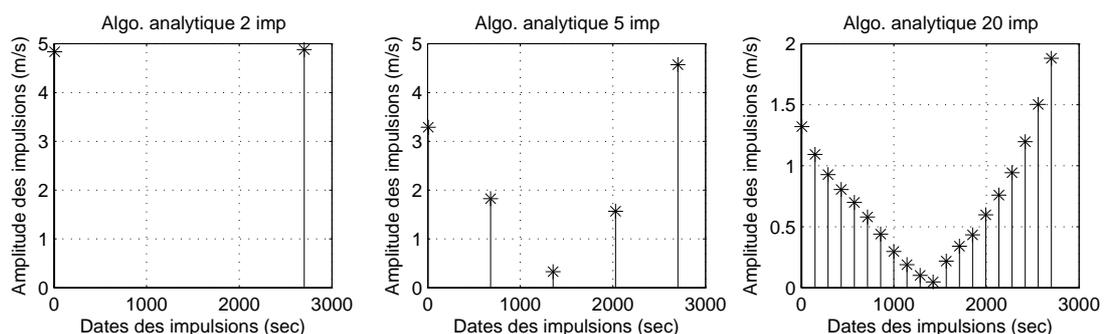


FIG. 8.6 – Répartition des impulsions pour le cas 'ATV' par l'approche analytique

Sur les figures 8.7 et 8.8, on remarque la convergence de la méthode heuristique vers une solution à 2 impulsions lorsque la norme  $L_2$  est minimisée, et vers une solution à 3

impulsions lorsque la norme  $L_1$  est considérée.

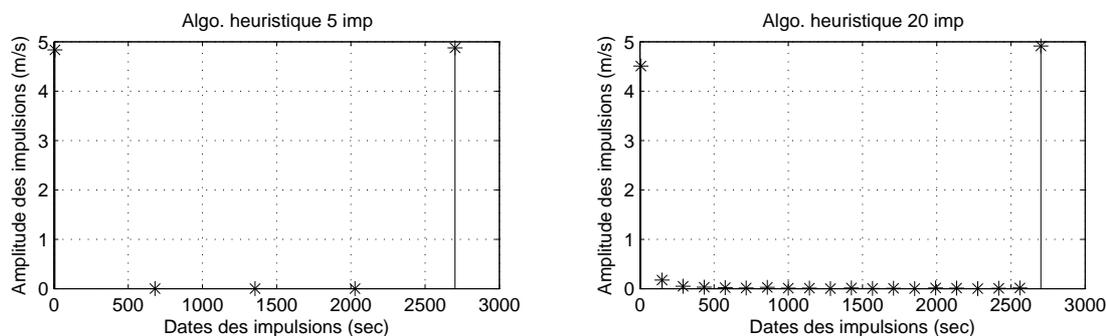


FIG. 8.7 – Résultats pour le cas 'ATV' / approche heuristique / norme  $L_2$

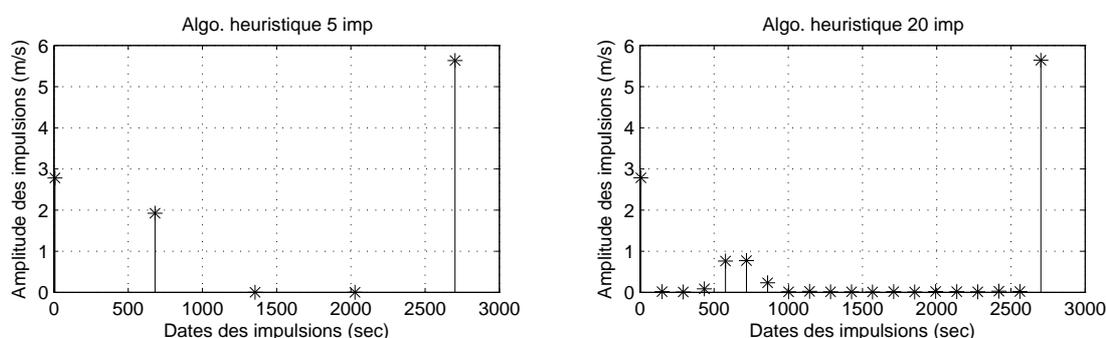


FIG. 8.8 – Résultats pour le cas 'ATV' / approche heuristique / norme  $L_1$

La méthode heuristique mène vers des résultats proches de ceux obtenus par les méthodes basées sur la commande optimale. Les différences observées sont dues notamment aux aspects numériques en plus des différences d'outils analytiques utilisés (convexité, conditions d'optimalité).

### 8.3.3 Validité de l'hypothèse linéaire

Afin d'évaluer la perte de précision due à la linéarisation du modèle de mouvement relatif, la trajectoire relative du chasseur propagée à l'aide de la matrice de Yamanaka-Ankersen est comparée à celle obtenue par le simulateur non linéaire du mouvement orbital que nous avons développé en 1<sup>re</sup> partie de la thèse. Pour le cas **ATV**, on observe une déviation qui cause un écart entre la position finale atteinte et la position finale envisagée. La durée relativement courte du rendez-vous **ATV** limite légèrement l'effet de cette dérive, mais l'erreur à l'arrivée est tout de même de l'ordre de quelques centaines de mètres. Cela est dû à l'hypothèse de linéarisation pour les faibles distances chasseur-cible, appliquée pour la dérivation du modèle de Tschauner-Hempel et la matrice de Yamanaka-Ankersen. Cette matrice est utilisée dans la synthèse des algorithmes et donc les sorties

de ces algorithmes sont naturellement affectées par les erreurs causées par les modèles.

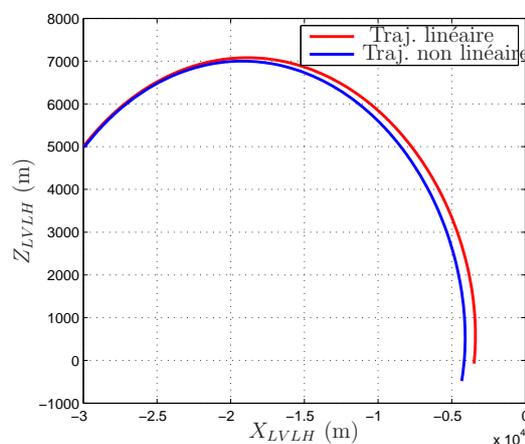


FIG. 8.9 – Trajectoires linéaires et non linéaires pour le cas 'ATV'

### 8.3.4 Etude de la charge numérique de l'algorithme RDV-DIR

Nous nous intéressons ici à la charge numérique requise par l'algorithme **RDV-DIR**. Pour ce faire, cet algorithme est utilisé pour résoudre le cas **ATV** nominal (sans aucun aspect de robustesse) avec un nombre d'impulsions variant de 2 à 100. L'algorithme de programmation linéaire utilisé est basé sur le *Simplex* [30] ou la méthode des points intérieurs [57, 85].

Nous étudions en particulier l'influence du nombre d'impulsions sur la minimisation du coût, la trajectoire d'état, le temps d'optimisation, ainsi que le nombre d'itérations de l'optimisation.

A travers les figures 8.10 et 8.11, on s'aperçoit que l'algorithme converge vers les mêmes résultats, sans que le choix de l'algorithme d'optimisation ait une influence sur ce point. Le coût diminue lorsque  $N$  augmente, à cause de la discrétisation plus précise de l'intervalle

$[t_1, t_f]$  qui permet d'approcher les dates optimales du rendez-vous.

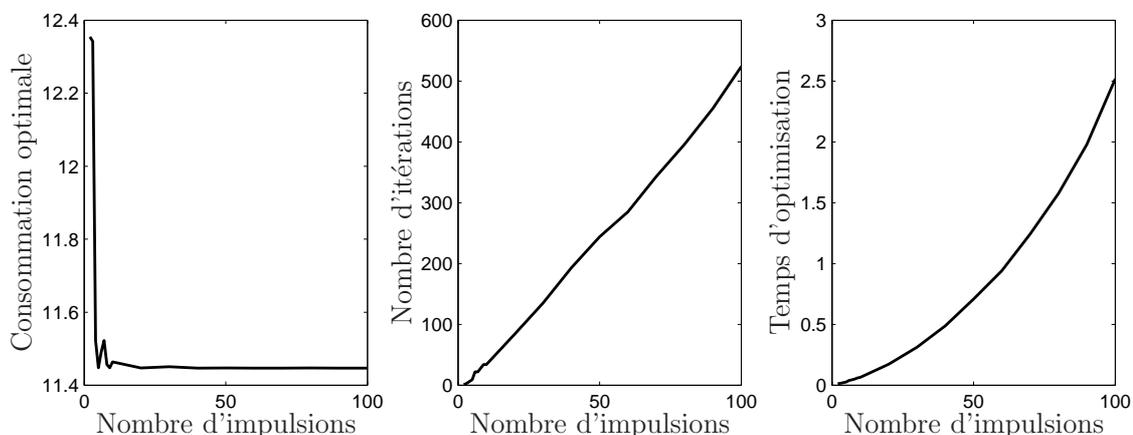


FIG. 8.10 – Résultats obtenus avec l'algorithme du *SIMPLEX*

En ce qui concerne l'algorithme *SIMPLEX*, le nombre d'itérations ainsi que le temps d'optimisation augmentent linéairement avec le nombre d'impulsions. L'augmentation du nombre d'itérations est relativement rapide, à l'inverse de l'algorithme des points intérieurs dont le nombre d'itérations varie d'une manière inégale mais reste très inférieur à celui du *SIMPLEX* (13 contre 500 pour  $N = 100$ ). Le temps d'optimisation de l'algorithme des points intérieurs est inférieur également à celui constaté pour l'algorithme du *SIMPLEX*. Ce dernier montre ici une performance moindre, mais son implantation est plus simple.

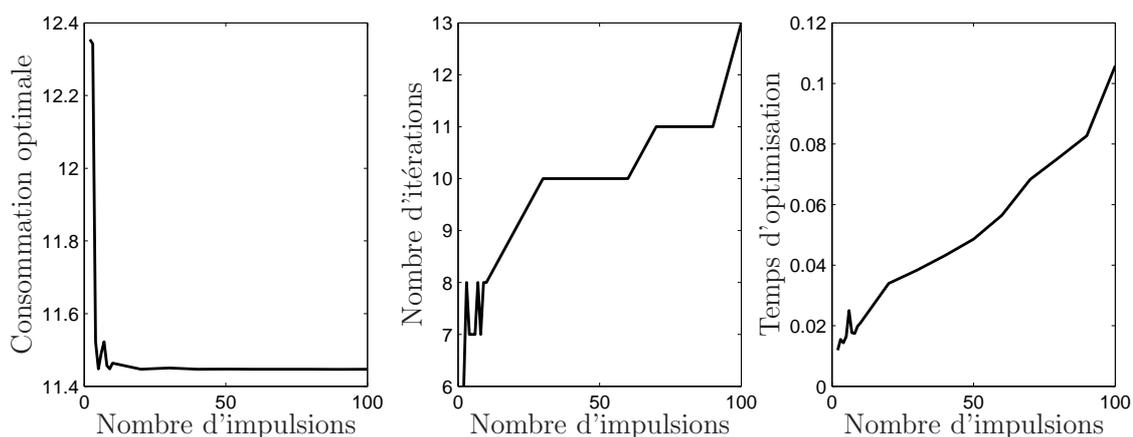


FIG. 8.11 – Résultats obtenus avec l'algorithme des points intérieurs

Le nombre d'impulsions affecte les trajectoires relatives (voir figure 8.12). Rappelons qu'aucune contrainte n'a été posée sur la trajectoire dynamique dans le problème de programmation linéaire. Les trajectoires peuvent être donc quelconques tant que les conditions initiales et finales sont respectées. On observe une forme de convergence pour

$N \geq 5$  vers une trajectoire commune optimale.

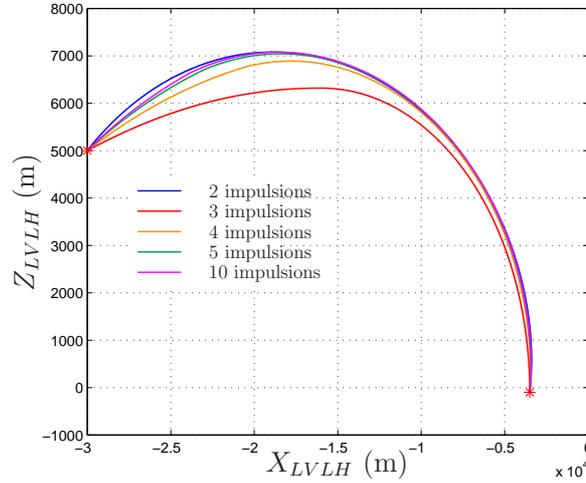


FIG. 8.12 – Trajectoires optimales avec différents nombres d’impulsions

### 8.3.5 Etude de la robustesse de l’algorithme RDV-DIR

L’algorithme **RDV-DIR** permet de garantir la robustesse du plan de manœuvres en prenant en compte les incertitudes sur l’état initial causées par les erreurs de navigation. Nous avons vu, lors de la présentation de cet algorithme, que l’incertitude peut être caractérisée par un ellipsoïde défini par une matrice  $P_u$  (cf. équation (II.7.35)). La condition finale doit dans ce cas être relaxée, et devient un ensemble d’arrivée que nous appellerons également *boite d’arrivée*  $\Omega$ . Pour la suite des simulations, nous considérons que :

$$\begin{bmatrix} x_f & z_f & v_{x_f} & v_{z_f} \end{bmatrix}^t \in \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} x_f - \Delta x_f \leq x_f \leq x_f + \Delta x_f \\ z_f - \Delta z_f \leq z_f \leq z_f + \Delta z_f \\ v_{x_f} - \Delta v_{x_f} \leq v_{x_f} \leq v_{x_f} + \Delta v_{x_f} \\ v_{z_f} - \Delta v_{z_f} \leq v_{z_f} \leq v_{z_f} + \Delta v_{z_f} \end{cases}$$

où  $\Delta x_f = \Delta z_f = 40$  m et  $\Delta v_{x_f} = \Delta v_{z_f} = 0.04$  m/s, et la matrice de l’ellipsoïde d’incertitude est donnée par :

$$P_u = [2, 2, 0.002, 0.002] \text{ m, m/s}$$

Pour les comparaisons, nous traitons trois cas :

- le cas *nominal*, où la boite d’arrivée se réduit à  $X_f$  et aucune incertitude n’est considérée ;
- le cas *relaxé* où la condition finale est relaxée, mais aucune incertitude n’est prise en compte ;
- le cas *robuste*, où l’incertitude est prise en compte et la condition finale est relaxée également.

Les consommations obtenues pour les trois cas sont comparées sur la figure 8.13. Le cas nominal est celui qui engendre les coûts les plus élevés à cause de la nature stricte de ses contraintes sur le point d'arrivée. Le cas *relaxé* permet une réduction supplémentaire de la consommation en cherchant la condition finale permettant de minimiser le coût dans l'ensemble d'arrivée  $\Omega$ .

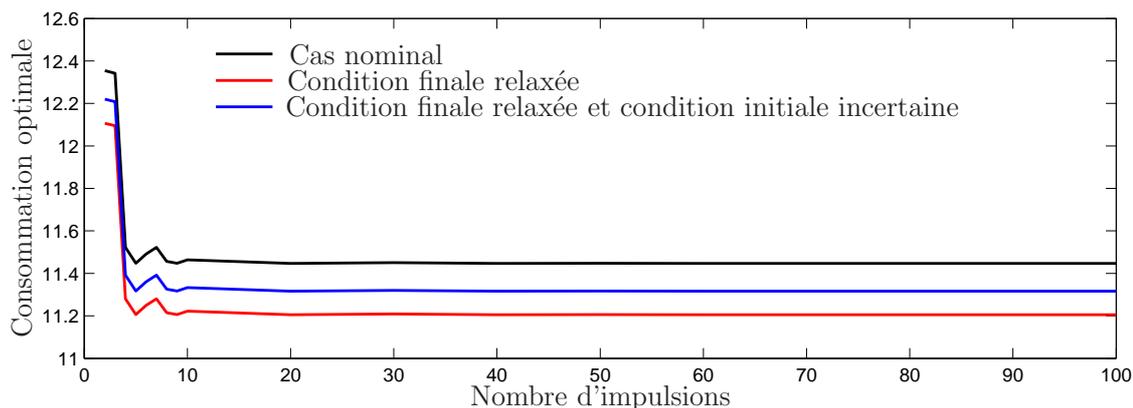


FIG. 8.13 – Consommation optimale pour différents scénarii

Le cas robuste présente une consommation intermédiaire entre les deux schémas cités précédemment. Ceci est dû au fait que la recherche du point final dans l'ensemble  $\Omega$  est contrainte par la robustesse vis-à-vis des incertitudes sur  $X_1$ . L'ensemble des points d'arrivée  $X_f$  est donc restreint à une partie de  $\Omega$ .

Les figures 8.14 et 8.15 montrent l'impact que des incertitudes liées à l'état initial induisent sur le point d'arrivée. On remarque que de petits décalages sur l'état initial peuvent causer de grands écarts à l'arrivée. Cela démontre la grande sensibilité vis-à-vis des incertitudes. L'impact semble plus important sur l'axe  $X_{LV LH}$  que sur l'axe  $Z_{LV LH}$ . Ceci est lié à la structure de la matrice de transition de Yamanaka-Ankersen. Il reste à remarquer que l'ensemble des points d'arrivée pour une incertitude de type ellipsoïdal est une ellipse centrée autour du point d'arrivée nominal.

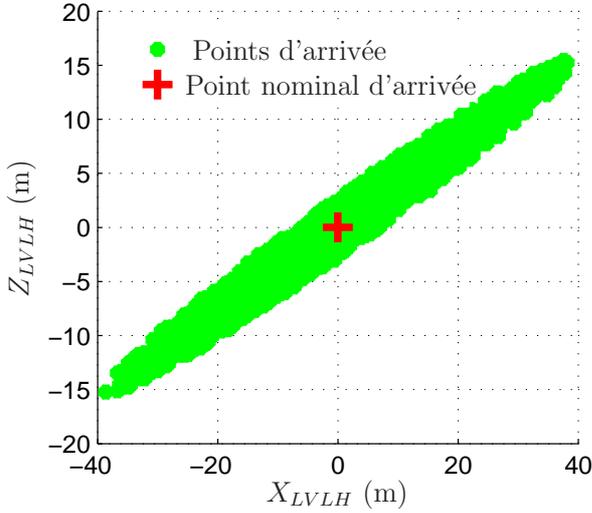


FIG. 8.14 – Impact des incertitudes de navigation sur la position relative finale (cas *nominal*)

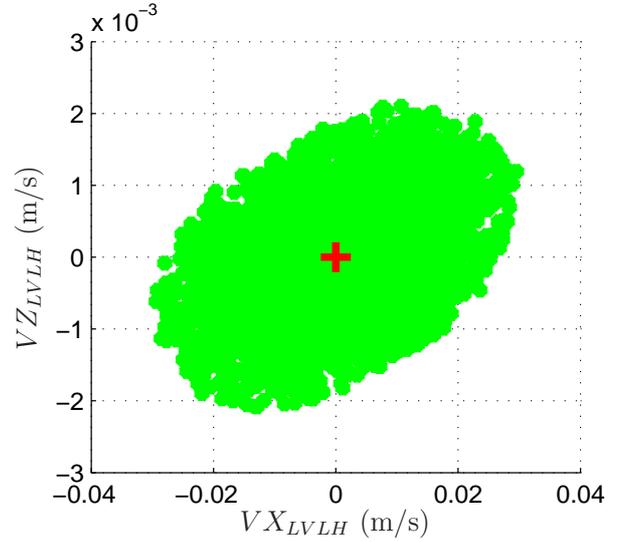


FIG. 8.15 – Impact des incertitudes de navigation sur la vitesse relative finale (cas *nominal*)

Si l'on considère le cas à condition finale relaxée (figures 8.16 & 8.17), on s'aperçoit que le point d'arrivée nominal est déplacé vers l'un des sommets du polytope représentant l'ensemble  $\Omega$ . Il s'agit du point présentant le coût le moins élevé dans l'ensemble d'arrivée. Il correspond dans notre cas, au point  $X(t_f) = [-40, 40, -0.04, -0.04]$ . La diminution du coût a déjà été présentée sur la figure 8.13. En présence d'incertitudes, le point d'arrivée réel peut se trouver à l'extérieur de la boîte d'arrivée. Ceci est normal car la robustesse n'est pas prise en compte dans ce cas.

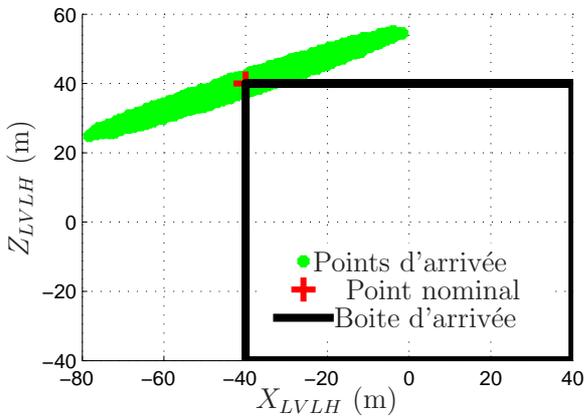


FIG. 8.16 – Impact des incertitudes de navigation sur la position relative finale (cas *relaxé*)

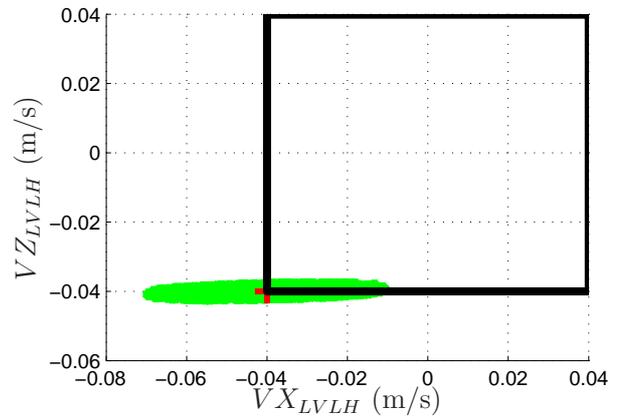


FIG. 8.17 – Impact des incertitudes de navigation sur la vitesse relative finale (cas *relaxé*)

En l'absence des incertitudes pour le cas robuste (point nominal sur les figures 8.18 et 8.19), le point d'arrivée se situe à l'intérieur de la zone d'arrivée mais pas sur un sommet. Il s'agit d'une marge de robustesse permettant de couvrir l'impact des incertitudes et de compenser le déplacement de  $X_f$  qui s'en suit. Ce point ne correspond pas au point permettant une consommation minimale d'où l'augmentation du coût observée sur la figure 8.13. On peut observer que la marge de robustesse peut être augmentée en déplaçant le point nominal vers l'origine au détriment du coût qui augmente pour atteindre une consommation proche de celle d'un schéma de guidage nominal. C'est un compromis à considérer entre la robustesse et la consommation.

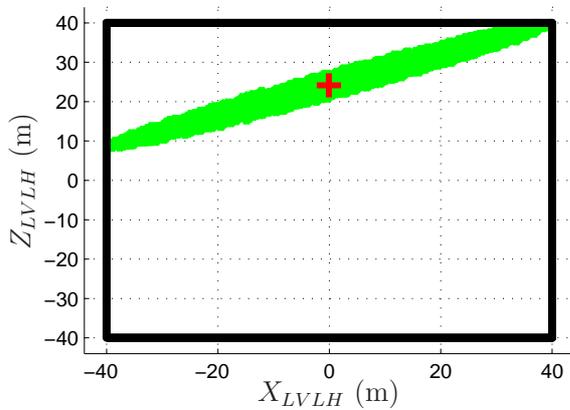


FIG. 8.18 – Impact des incertitudes de navigation sur la position relative finale (cas robuste)

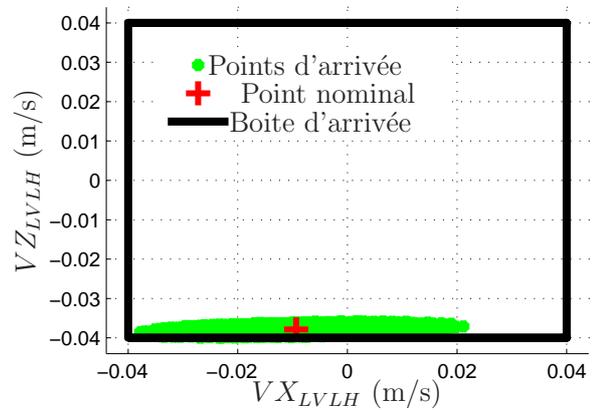


FIG. 8.19 – Impact des incertitudes de navigation sur la vitesse relative finale (cas robuste)

Dans le cas du schéma robuste, la condition finale reste à l'intérieur de la boîte d'arrivée même en présence d'incertitudes sur la position et la vitesse initiales, pour toutes les valeurs d'incertitudes à l'intérieur de l'ellipsoïde défini dans l'équation (II.7.35). Les pires cas correspondent à des conditions finales qui se trouvent sur les frontières de la boîte d'arrivée. Il reste à noter la grande sensibilité du système par rapport aux incertitudes qui peut être évaluée à travers la comparaison de la taille des ellipsoïdes de points de départ aux nuages des points d'arrivée.

## 8.4 La mission PRISMA

### 8.4.1 Présentation de la mission

Ce programme repose sur des coopérations entre l'agence spatiale suédoise SNSB, le CNES, l'agence spatiale allemande DLR et l'université technique danoise DTU [1, 48, 49, 60].

La mission Prisma vise à valider les algorithmes de guidage et de navigation pour le

contrôle de trajectoires en formation et le rendez-vous autonome de 2 satellites, ainsi que pour les opérations de proximité, incluant les manœuvres d'approche et d'éloignement des satellites. Les deux satellites de PRISMA (appelés MANGO & TANGO) ont été mis en orbite par le lanceur ukrainien Dnepr le 15 Juin 2010.

Deux configurations sont testées ici. Ces configurations diffèrent par leurs durées respectives (cf. tableaux 8.9 et 8.10).

Nom de la mission	<b>Prisma-A</b> [45]
Demi-grand axe de la cible $a$ (km)	7011
Excentricité de la cible $e$	0.004
Anomalie vraie de la cible au début du rendez-vous $\nu_1$ (rad)	0
Date de début du rendez-vous $t_1$ (s)	0
Date de fin du rendez-vous $t_f$ (s)	70107 (12 périodes)
Etat initial $X(t_1) = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ z(t_1) \\ v_x(t_1) \\ v_z(t_1) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Etat final $X(t_f) = \begin{bmatrix} x(t_f) \\ z(t_f) \\ v_x(t_f) \\ v_z(t_f) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

TAB. 8.9 – Données de la mission 'Prisma-A'

Nom de la mission	<b>Prisma-B</b> [45]
Demi-grand axe de la cible $a$ (km)	7011
Excentricité de la cible $e$	0.004
Anomalie vraie de la cible au début du rendez-vous $\nu_1$ (rad)	0
Date de début du rendez-vous $t_1$ (s)	0
Date de fin du rendez-vous $t_f$ (s)	64620
Etat initial $X(t_1) = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ z(t_1) \\ v_x(t_1) \\ v_z(t_1) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Etat final $X(t_f) = \begin{bmatrix} x(t_f) \\ z(t_f) \\ v_x(t_f) \\ v_z(t_f) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

TAB. 8.10 – Données de la mission 'Prisma-B'

### 8.4.2 Simulations et résultats

Les cas **Prisma-B** et **Prisma-A** sont résolus à l'aide des algorithmes indirects **RDV-IND2 & 1**, l'algorithme **RDV-IND1** étant utilisé pour la certification de l'optimalité. Les mêmes problèmes sont traités par l'algorithme direct **RDV-DIR** pour différents nombres d'impulsions  $N$ . Ces impulsions sont équiréparties dans l'intervalle  $[t_1, t_f]$ . Les résultats obtenus par les algorithmes indirects sont quasi-identiques et sont représentés par les mêmes graphes. Les répartitions temporelles des impulsions obtenues pour chaque algorithme sont représentés sur les figures 8.21 et 8.20. Les coûts optimaux obtenus par les algorithmes sont comparés à l'aide des tableaux 8.12 et 8.11.

La figure 8.21 offre une comparaison des plans de guidage (impulsions + dates d'application) obtenus pour chaque configuration, pour le problème **Prisma-B**. La solution  $L_2$ -optimale certifiée par les méthodes indirectes est à 3 impulsions.

Dans la configuration optimale, la deuxième impulsion est de valeur particulièrement faible. Toutefois, ceci doit être considéré avec prudence. La longue période de dérive (61400 secondes) qui se déroule immédiatement après cette impulsion en est fortement influencée. En pratique,  $\Delta V_2$  donne l'orientation correcte au satellite chasseur avant d'entamer la trajectoire balistique qui mène vers la réalisation du rendez-vous en position. Le gain en consommation apporté par cette petite impulsion est très important, de l'ordre de 27% par rapport à une configuration à 2 impulsions seulement.

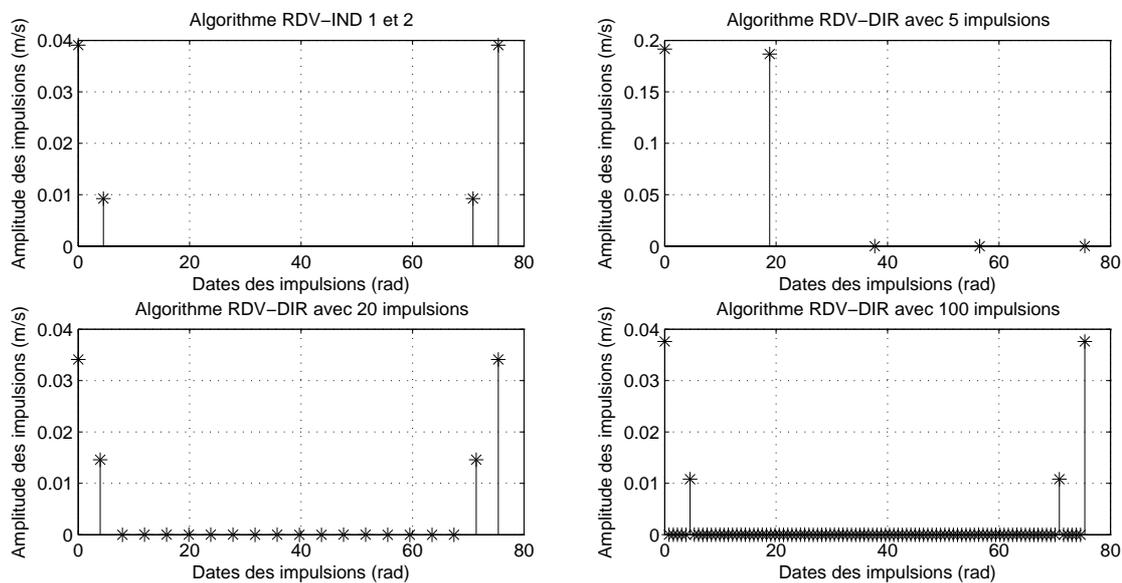


FIG. 8.20 – Répartition des impulsions pour le cas 'Prisma-A'

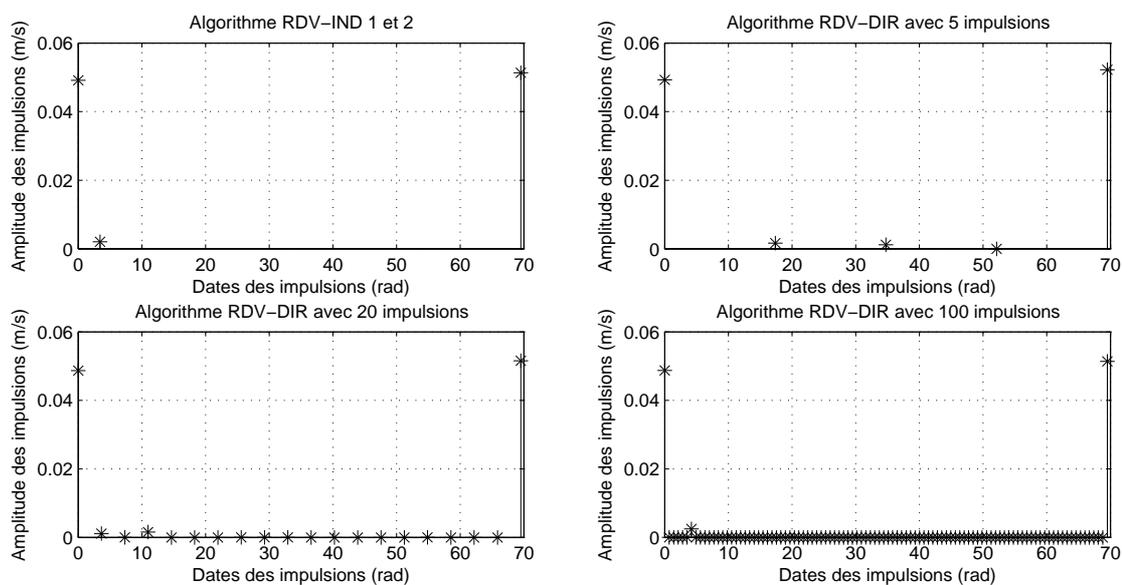


FIG. 8.21 – Répartition des impulsions pour le cas 'Prisma-B'

La figure 8.20 représente les résultats obtenus pour le cas **Prisma-A**. Des commentaires similaires peuvent être émis quant à la convergence des résultats obtenus par la méthode directe vers le résultat optimal certifié par les méthodes indirectes lorsque le nombre d'impulsions augmente. Les 4 impulsions optimales sont du même ordre de grandeur dans ce cas.

Si l'on observe attentivement les figures 8.22, 8.23 et 8.24, on remarque que les solutions pour les cas **Prisma-B** et **Prisma-A** sont unidirectionnelles. Les impulsions sont dirigées vers l'un des axes du repère local. Ceci n'a pas lieu pour le cas **ATV**, où les impulsions possèdent des composantes non nulles de valeurs comparables selon les deux axes. Rappelons que les normes  $L_1$  (minimisée par l'algorithme direct) et  $L_2$  (minimisée par les algorithmes indirects) sont équivalentes pour les scalaires ou les vecteurs unidirectionnels, où toutes les composantes sont nulles, sauf une. Ceci explique donc la convergence de l'algorithme direct lorsque  $N$  augmente vers la même solution que l'algorithme indirect, seulement pour les cas **Prisma-B** et **Prisma-A** et pas pour le cas **ATV**.

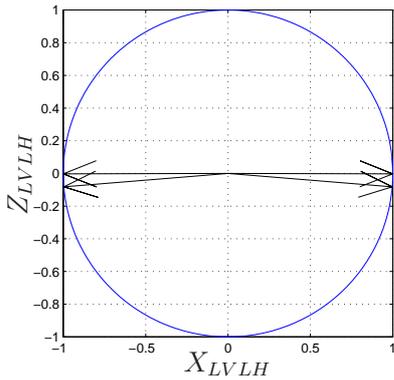


FIG. 8.22 – Directions des impulsions pour le cas 'Prisma-A'

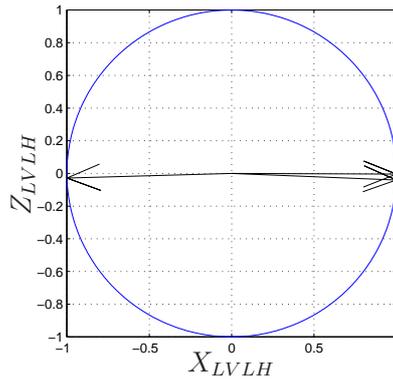


FIG. 8.23 – Directions des impulsions pour le cas 'Prisma-B'

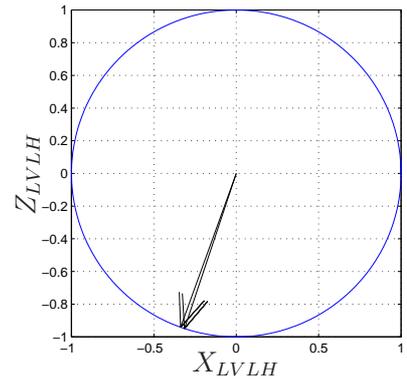


FIG. 8.24 – Directions des impulsions pour le cas 'ATV'

Les tableaux 8.11 et 8.12 comparent les coûts  $L_1$  et  $L_2$  des plans de manœuvre. Ces coûts sont calculés après l'obtention des solutions par les algorithmes **RDV-DIR** (minimisation de  $L_1$ ) et **RDV-IND** (minimisation de  $L_2$ ). Les résultats confirment les conclusions précédentes. Les solutions pour les cas **PRISMA** sont quasiment unidirectionnelles indépendamment de  $N$ . Ceci est dû aux conditions initiales du rendez-vous  $X_1$ .

	<b>RDV-IND 1&amp;2</b>	<b>RDV-DIR <math>N = 5</math></b>	<b>RDV-DIR <math>N = 20</math></b>	<b>RDV-DIR <math>N = 100</math></b>
Coût $L_1$	0.1028	0.4163	0.0974	0.0968
Coût $L_2$	0.0966	0.3784	0.0974	0.0968

TAB. 8.11 – Comparaison des résultats pour le cas 'Prisma-A'

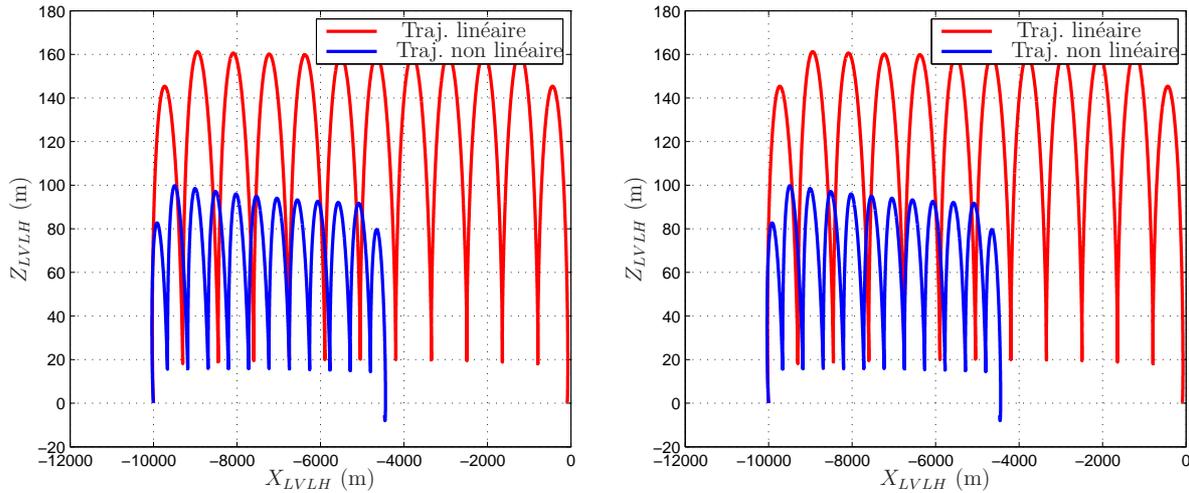
	RDV-IND 1&2	RDV-DIR $N = 5$	RDV-DIR $N = 20$	RDV-DIR $N = 100$
Coût $L_1$	0.1058	0.1043	0.1029	0.1026
Coût $L_2$	0.1025	0.1043	0.1029	0.1026

TAB. 8.12 – Comparaison des résultats pour le cas 'Prisma-B'

### 8.4.3 Validité de l'hypothèse linéaire

A l'aide du simulateur non linéaire, on procède à une propagation des plans de manœuvre des cas **PRISMA-A** & **PRISMA-B**. On compare la trajectoire obtenue à celle résultant d'une propagation par la matrice de Yamanaka-Ankersen.

Les missions **Prisma-B** et **Prisma-A** sont non adaptées à la modélisation linéaire à cause de la faible valeur du demi grand axe qui n'autorise pas des grandes distances intersatellites. La longue durée de ces missions accroît l'effet cumulatif des erreurs de linéarisation. Cela entraîne ainsi une dérive de 4 km à l'issue du rendez-vous (cf. figure 8.25).



(a) Prisma-A

(b) Prisma-B

FIG. 8.25 – Trajectoires linéaires et non linéaires pour les cas PRISMA

## 8.5 La mission SIMBOL-X

### 8.5.1 Présentation de la mission

SIMBOL-X est une mission coopérative entre le CNES et l'agence spatiale italienne ASI [61]. Il s'agit d'un télescope à rayons X à très grande distance focale. Cette mission est constituée de deux satellites embarquant les différents instruments optiques. La distance

relative entre les deux satellites volant en formation permet d'obtenir une grande distance focale. L'excentricité de l'orbite de cette mission est élevée ( $\simeq 0.8$ ) afin de s'éloigner de la Terre et de limiter les perturbations sur les observations. Cette mission a été annulée par le CNES après une étude en phase A à cause de restrictions budgétaires. Les caractéristiques de la mission sont reprises dans le tableau 8.13.

Nom de la mission	<b>SIMBOL-X</b> [45]
Demi-grand axe de la cible $a$ (km)	106246.9753
Excentricité de la cible $e$	0.798788
Anomalie vraie de la cible au début du rendez-vous $\nu_1$ (deg)	135
Date de début du rendez-vous $t_1$ (s)	0
Date de fin du rendez-vous $t_f$ (s)	50000
Etat initial $X(t_1) = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ z(t_1) \\ v_x(t_1) \\ v_z(t_1) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -18.309 \\ 23.764 \\ 0.0542 \\ 0.0418 \end{bmatrix}$
Etat final $X(t_f) = \begin{bmatrix} x(t_f) \\ z(t_f) \\ v_x(t_f) \\ v_z(t_f) \end{bmatrix}_{LVLH}$ (km,m/s)	$\begin{bmatrix} -0.335 \\ 0.371 \\ -0.0015 \\ -0.0014 \end{bmatrix}$

TAB. 8.13 – Données de la mission 'SIMBOL-X'

### 8.5.2 Simulations et résultats

Le cas **SIMBOL-X** est résolu à l'aide des algorithmes indirects. La solution optimale est propagée ensuite à l'aide de la matrice de Yamanaka-Ankersen et comparée à la trajectoire obtenue par le simulateur non linéaire. Le cas **SIMBOL-X** s'inscrit parfaitement dans le cadre des hypothèses de linéarisation, du fait notamment du demi-grand axe de l'orbite de la cible, très grand devant la distance chasseur-cible ( $\simeq 5300$  fois). La longue

durée de la mission (50000 secondes) n'affecte en rien la précision finale.

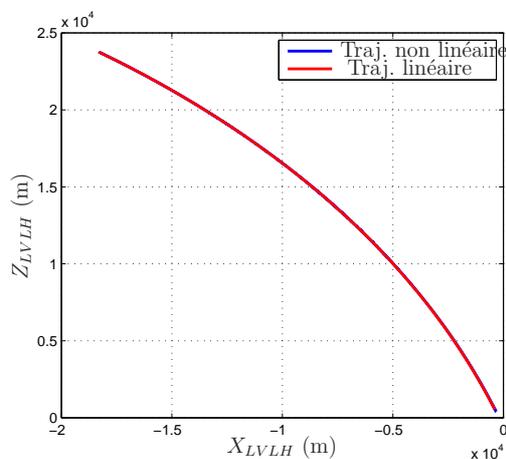


FIG. 8.26 – Trajectoires linéaires et non linéaires pour la mission SIMBOL-X

La solution obtenue est une trajectoire à deux impulsions comme le montre la figure 8.27.

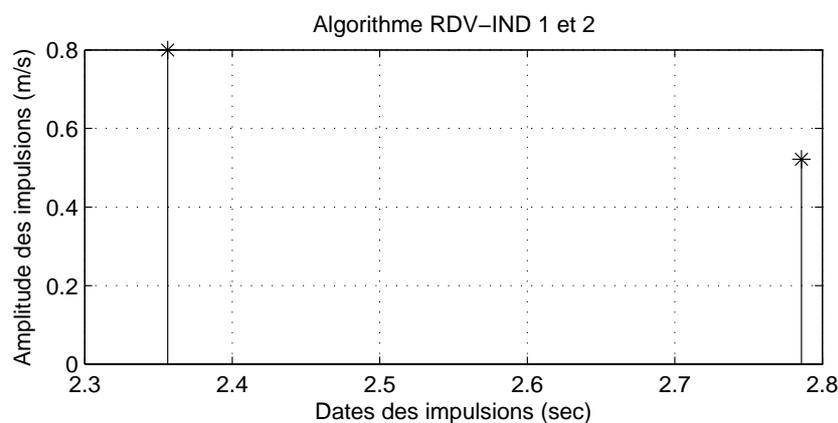


FIG. 8.27 – Résultats pour le cas 'SIMBOL-X'

Les résultats obtenus par les algorithmes **RDV-DIR** et heuristiques sont quasiment identiques au résultat obtenu par les méthodes indirectes. La solution optimale par rapport aux normes  $L_1$  et  $L_2$  pour ce cas est un transfert en deux impulsions.

## 8.6 Conclusions

Ce chapitre a été l'occasion de mettre à l'épreuve les algorithmes développés au cours des chapitres précédents en les confrontant à des cas pratiques et académiques. Tous les

exemples traités sont basés sur des hypothèses képlériennes, pour des formes d'orbites quelconques.

Les algorithmes indirects ont été comparés à l'aide des exemples de Carter. Cela a permis de constater que l'algorithme **RDV-IND1** certifie à chaque fois les résultats obtenus à l'aide de l'algorithme **RDV-IND2** qui est moins complexe à mettre en œuvre et ne nécessite pas une grande puissance de calcul. Pour chaque exemple traité, les résultats ont été les mêmes pour les deux algorithmes à la précision numérique employée près.

Les approches directes et indirectes ont été comparées ensuite. Les deux techniques développées ne permettent pas d'optimiser la même fonction de coût. Les simulations ont permis de constater qu'il existe un certain nombre de cas de figure où les normes  $L_1$  et  $L_2$  sont équivalentes permettant ainsi une comparaison.

Nous avons jugé intéressant de choisir la forme linéaire basée sur la norme  $L_1$  afin de privilégier l'aspect principal des méthodes directes : la facilité d'implantation pratique (linéaire vs quadratique).

Le déroulement des itérations de l'algorithme **RDV-IND2** a été détaillé afin d'expliquer les différentes parties de l'algorithme, notamment celles basées sur les travaux de Lion & Handelsman.

La confrontation des résultats obtenus aux dynamiques orbitales non linéaires et réalistes a permis d'exploiter le simulateur développé dans la première partie. D'autre part, ceci a donné lieu à une étude de la validité des hypothèses de linéarisation par rapport à la distance inter-satellitaire pour diverses missions.

Enfin, les aspects liés à la robustesse de l'algorithme **RDV-DIR** ont été traités à travers la mission **ATV**. L'effet des incertitudes a été étudié dans cette section et leur incidence sur les performances de l'algorithme. Un point important a été notamment remarqué : la grande sensibilité des trajectoires par rapport aux incertitudes sur l'état initial. L'influence de la robustesse sur la consommation a été démontrée également pour différents nombres d'impulsions.

---

## Conclusions de la deuxième partie

Dans cette partie, nous avons considéré le problème du rendez-vous à temps fixés dans sa variante linéaire et sous l'hypothèse d'une propulsion impulsionnelle. Des méthodes conventionnelles dont une heuristique simple ont été présentées en premier afin de cerner les aspects les plus pertinents du problème, en particulier l'optimisation des dates d'application des impulsions.

Les chapitres 3 et 4 ont vu la présentation des techniques d'optimisation directes et indirectes et la synthèse d'algorithmes de rendez-vous à l'aide de ces techniques. Les étapes conduisant à l'élaboration des algorithmes indirects, basés sur des techniques de commande optimale, de l'optimisation polynomiale par relaxations convexes ainsi que sur le calcul des variations ont été détaillées et justifiées dans un chapitre consacré à ces méthodes. C'est ainsi que la théorie du primer vector a été présentée et que des techniques pour contourner des difficultés liées à des non linéarités du problème, notamment pour l'optimisation des dates d'impulsions ont fait l'objet d'une attention particulière. Cela a donné lieu à la synthèse de deux algorithmes complémentaires, permettant une solution optimale, rigoureuse et complète au problème du rendez-vous.

D'un autre côté, un algorithme fondé sur les techniques de programmation linéaire a été synthétisé. Cet algorithme permet d'aborder le compromis entre l'optimalité et la robustesse par rapport aux incertitudes. La méthode utilisée est fondée sur la discrétisation du problème du rendez-vous pour le transformer en un problème en dimension finie. Une attention particulière a été accordée à la formulation linéaire du problème afin de préserver sa simplicité et de permettre d'utiliser des techniques qui ont déjà montré une grande facilité d'implantation telles que le *SIMPLEX*.

Dans un chapitre consacré à la validation numérique, tous les aspects qui nous ont semblé pertinents, notamment ceux liés à la mise en œuvre et l'exécution des algorithmes et à l'analyse des résultats ont été considérés. Cela a été réalisé à travers une démarche fondée sur des exemples issus de missions réelles ou d'exemples académiques présentés dans la littérature. Les tests ont été concluants quant à la performance des algorithmes, l'optimalité des résultats et la pertinence des hypothèses posées. Certains points préliminaires liés à la robustesse et à l'optimalité ont été discutés et analysés.

---



---

## Bibliographie

- [1] www.cnes.fr. 2010.
  - [2] V. Alexéev, V. Tikhomirov, and S. Fomine. *Commande Optimale*. MIR, Moscou, URSS, 1979.
  - [3] D. Arzelier, A. Théron, and M. Kara-Zaitri. Etude bibliographique sur la modélisation du mouvement relatif pour le problème du rendez-vous. Note technique Rapport LAAS 08258, CNRS, Mai 2008.
  - [4] U. Ascher, R. Mattheij, and Russell R. *Numerical solution of boundary value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs NJ, 1988.
  - [5] U. Ascher, S Press, and R. Russell. On spline basis selection for solving differential equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20(1) :121–142, 1983.
  - [6] M. Athans and P.L. Falb. *Optimal control*. McGraw-Hill, New York, New York, USA, 1966.
  - [7] R.H. Battin. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 1999.
  - [8] A. Ben-Tal, S. Boyd, and A. Nemirovski. Extending the scope of robust optimization : Comprehensive robust counterparts of uncertain problems. *Mathematical Programming*, 107(1-2) :63–89, 2006.
  - [9] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4), 1998.
  - [10] D. P. Bertsekas and S. E. Shreve. *Stochastic Optimal Control : The Discrete-Time Case (réédition)*. Athena Scientific, Nashua, NH 03061-0805, U.S.A., 1996.
  - [11] J. T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 21(2) :193–207, 1998.
  - [12] J.T. Betts. Optimal three-burn orbital transfer. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15 :861–864, 1977.
  - [13] J.T. Betts. *Practical methods for optimal control using nonlinear programming*. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphie, Pennsylvanie, USA, 2001.
  - [14] H.G. BocK and K.J. Plitt. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems. In *IFAC 9<sup>th</sup> World congress*, Budapest, Hongrie, 1984.
  - [15] O. Bolza. *Calculus of variations*. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, USA, 1973.
-

- 
- [16] G. Brauer, D. Cornick, and R. Stevenson. Capabilities and applications of the program to optimize simulated trajectories (post). Technical Report CR-2270, NASA, Washington DC, USA, 1977.
- [17] R.G. Bruschi. Constrained impulsive trajectory optimization for orbit-to-orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2 :204–212, 1979.
- [18] A.E. Bryson and Y.C. Ho. *Applied optimal control*. Blaisdell Publishing Company, USA, 1969.
- [19] C. Caratheodory. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order*. Chelsea Publishing Company, New York, New York, USA, 1965.
- [20] T.E. Carter. Optimal impulsive space trajectories based on linear equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(2), août 1991.
- [21] T.E. Carter. Necessary and sufficient conditions for optimal impulsive rendezvous with linear equations of motion. *Dynamics and Control*, 10 :219–227, 2000.
- [22] T.E. Carter and S.A. Alvarez. Quadratic-based computation of four-impulse optimal rendezvous near circular orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(1) :109–1117, 2000.
- [23] T.E. Carter and J. Brient. Linearized impulsive rendezvous problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 86(3), septembre 1995.
- [24] L. Cesari. *Optimization theory and applications : Problems with ordinary differential equations*. Springer Verlag, 1983.
- [25] V.A. Chobotov. *Orbital mechanics*. Educational Series. AIAA, Reston, Virginie, USA, 2002.
- [26] W.H. Clohessy and R.S. Wiltshire. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Astronautical Sciences*, 27(9) :653–658, 1960.
- [27] D.A Cox, John Little, and D. O’Shea. *Using algebraic geometry*. Springer, New York, New York, USA, 2000.
- [28] D.A Cox, John Little, and D. O’Shea. *Ideals, varieties and algorithms*. Springer, New York, New York, USA, 2005.
- [29] B. Dacorogna. *Introduction to the calculus of variations*. Imperial College Press, Londres, Royaume Unis, 2004.
- [30] G.B. Dantzig, A. Orden, and P. Wolfe. Generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality constraints. *Pacific Journal Math.*, 5 :183–195, 2003.
- [31] T.N. Edelbaum. How many impulses? In *AIAA Aerospace Sciences Meeting*, New York, New York, USA, 1966.
- [32] L. El Ghaoui, F. Oustry, and H. Lebret. Robust solution to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, 1(1).
- [33] G. ELnagar, M. Kazemi, and M. Razzaghi. The pseudospectral legendre method for discretizing optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(10), 1995.
-

- 
- [34] D. Gottlieb, M.Y. Hussaini, and S.A. Orszag. *Spectral methods for PDE*, chapter Theory and applications of spectral methods. SIAM, 1984.
- [35] F.J. Hale. *Introduction to space flight*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1994.
- [36] C. Hargraves and S. Paris. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation. *AIAA J. Guidance and Control*, 10, 1987.
- [37] D. Henrion, J. B. Lasserre, and J. Loeferberg. Gloptipoly 3 : moments, optimization and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 24(4), 2009.
- [38] D. Henrion and J.B. Lasserre. Solving nonconvex optimization problems - how gloptipoly is applied to problems in robust and nonlinear control. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(3) :72–83, 2004.
- [39] D. G. Hull. Conversion of optimal control problems into parameter optimization problems. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 20(1), 1997.
- [40] D. Jezewski. Primer vector theory and applications. Note technique TR R-454, NASA, novembre 1975.
- [41] D. Jezewski. Primer vector theory applied to the linear relative-motion equations. *Optimal Control Applications and Methods*, 1 :387–401, 1980.
- [42] D. Jezewski and J. Donaldson. An analytic approach to optimal rendezvous using clohessy-wiltshire equations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 3 :293–310, 1979.
- [43] D. Jezewski and H.L. Rozendaal. An efficient method for calculating optimal free-space n-impulse trajectories. *AIAA Journal*, 6(11) :2160–2165, novembre 1968.
- [44] H.B. Keller. *Numerical methods for two-point Boundary-value problems*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, USA, 1968.
- [45] S. Kerambrun. Spécification des algorithmes de guidage. Note technique GNC-T.TCN.725694.ASTR, EADS Astrium, mars 2008.
- [46] D. Kraft. *Computational Mathematical Programming*, chapter On converting optimal control problems into non linear programming codes, pages 261–280. Springer-Verlag, 1985.
- [47] P. Labourdette, E. Julien, F. Chemama, and D. Carbonne. Atv jules vernes mission maneuver plan. In *21<sup>st</sup> International symposium on space flight dynamics*, Toulouse, France, 2008.
- [48] R. Larsson, S. Berge, P. Bodin, and U. Jönsson. Fuel efficient relative orbit control strategies for formation flying and rendezvous within prisma. In *29<sup>th</sup> Annual AAs Guidance and Control Conference*, Breckenridge, Colorado, 2006.
- [49] R. Larsson, J. Mueller, S. Thomas, B. Jakobsson, and P. Bodin. Orbit constellation safety on the prisma in-orbit formation flying test bed. In *The 3rd International Symposium on Formation Flying, Missions and Technologies*, ESA-ESTEC Noordwijk, The Netherlands, 23-25 April 2008.
- [50] J. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal of Optimization*, 11(3) :796–817, 2001.
-

- 
- [51] D.F. Lawden. *Optimal trajectories for space navigation*. Butterworth, London, England, 1963.
- [52] G. Leitman. *An introduction to optimal control*. Mc Graw Hill, 1966.
- [53] P.M. Lion, editor. *Sufficient conditions for optimum fixed-time impulsive trajectories*, Belgrade, Yougoslavie, 1967.
- [54] P.M. Lion and M. Handelsman. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. *AIAA Journal*, 6(1) :127–, 1968.
- [55] J. Löfberg. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [56] J.-P. Marec. Trajectoires spatiales optimales. *Support de cours SUPAERO*, 1983.
- [57] S. Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2 :575–601, 1992.
- [58] E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26 :394–395, 1920.
- [59] L.W. Neustadt. A general theory of minimum-fuel space trajectories. *SIAM Journal of Control*, 3(2) :317–356, 1965.
- [60] F. Nilsson, P. Bodin, C. Chasset, B. Jakobsson, R. Larsson, R. Noteborn, and E. Vinterhav. Autonomous rendezvous experiments on the prisma in-orbit formation flying test bed. In *The 3rd International Symposium on Formation Flying, Missions and Technologies*, ESA-ESTEC Noordwijk, The Netherlands, 23-25 April 2008.
- [61] G. Pareschi and P. Ferrando. The simbol-x hard x-ray mission. *Experimental Astronomy*, 20(1), 2006.
- [62] S.W. Paris, J.P. Riehl, and W.K. Sjaauw. Enhanced procedures for direct trajectory optimization using nonlinear programming and implicit integration. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Keystone, Colorado, 21-24 Août 2006.
- [63] Pablo A. Parrilo. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2000.
- [64] Pablo A. Parrilo and Bernd Sturmfels. Minimizing polynomial functions. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2001.
- [65] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51 :406–413, 1955.
- [66] J.E. Prussing. Illustration of the primer vector in time-fixed orbit transfer. *AIAA Journal*, 7(6) :1167–1168, 1969.
- [67] J.E. Prussing. A class of optimal two-impulse rendezvous using multiple-revolution lambert solution. *Advances in the Astronautical Sciences*, 106 :17–39, 2000.
- [68] J.E. Prussing and R.S. Clifton. Optimal multiple-impulse satellite evasive maneuvers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17 :599–606, 1994.
- [69] J.E. Prussing and B.A. Conway. *Orbital mechanics*. Oxford University Press, New York, New York, USA, 1993.
-

- 
- [70] R. Pytlak. *Numerical methods for optimal control problems with state constraint*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, Allemagne, 1999, 1999.
- [71] R.W. Rishel. An extended pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures. *SIAM Journal of Control*, 3(2) :191–, 1965.
- [72] H. Schaub and J.L. Junkins. *Analytical mechanics of space systems*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
- [73] H. Shen and P. Tsiotras. Optimal two-impulse rendezvous using multiple-revolution lambert solutions. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(1) :50–61, 2003.
- [74] N.Z. Shor. Quadratic optimization problems,. *Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1(1) :128–139, 1987.
- [75] N.Z. Shor. *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems*. Kluwer, Dordrecht, Pays-Bas, 1998.
- [76] A.J. Sommese and C.W. Wampler. *The numerical solution of systems of polynomials*. Advances in Design and Control. World Scientific, Hackensack, NJ, USA, 2005.
- [77] R.G. Stern and J.E. Potter. Optimization of midcourse velocity corrections. In *First IFAC Symposium Peaceful Uses of Automatic Control in Outer Space*, pages 70–83, Stavanger, juin 1966.
- [78] J.F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12 :625–653, 1999.
- [79] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert, 2005.
- [80] J. Tschauner. The elliptic orbit rendezvous. In *AIAA 4th Aerospace Sciences Meeting*, Los Angeles, Californie, USA, Juin 1966.
- [81] J. Tschauner and P. Hempel. Optimale beschleunigungs-programme fur des rendezvous manover. *Astronautica Acta*, 5-6 :296–307, 1964.
- [82] J. Verschelde. Algorithm 795 : PHCpack : A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Transactions on Mathematic Software*, 25(2) :251–276, 1999.
- [83] W.E. Wiesel. *Spaceflight dynamics*. Aeronautical and Aerospace Technology. McGraw-Hill, New York, New York, USA, 1997.
- [84] K. Yamanaka and F. Ankersen. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25(1), janvier-février 2002.
- [85] Y. Zhang. Solving large-scale linear programs by interior-point methods under the matlab environment. Note technique Technical Report TR96-01, Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County, Baltimore, MD, Juillet 1995.
-



## Conclusions générales et perspectives

---



Une étude générique et globale du problème de rendez-vous a été entreprise dans ce document. Tout au long de cette thèse, nous avons tenté de répondre aux problématiques posées dans l'introduction. Nous les rappelons brièvement ici :

- concernant la modélisation du mouvement relatif de satellites, une étude détaillée sur le choix des variables d'état et des hypothèses nécessaires à l'établissement de modèles était indispensable afin d'établir une classification des modèles existants. Nous nous sommes fixés comme objectif également, de concevoir une méthodologie de synthèse de modèles permettant de couvrir les zones d'ombre constatées dans la littérature et de donner plus de rigueur et de généralité aux différentes étapes de cette synthèse ;
- en ce qui concerne la construction d'algorithme de guidage pour le rendez-vous, un traitement à l'aide des outils mathématiques d'optimisation et de commande optimale devait être envisagé pour le problème de rendez-vous. Une formulation du type problème de commande optimale a été retenue. L'objectif était de synthétiser différents algorithmes permettant de résoudre ce problème par rapport à toutes ses variables. En d'autres termes, la mise en œuvre d'algorithmes de guidage pour la génération de trajectoires optimales de rendez-vous orbital était l'objectif de la deuxième partie des travaux.

Afin de répondre à ces problématiques, nous avons entrepris un certain nombre de travaux dont un bilan est dressé dans la section suivante.

## Bilan des travaux

Dans **la première partie de la thèse**, la modélisation linéaire du mouvement relatif de satellites a fait l'objet d'une étude détaillée. En premier lieu, une revue bibliographique accompagnée d'une classification des travaux existants selon plusieurs facteurs a été réalisée. Cela a donné lieu à une analyse qui a mis en évidence certains manques et difficultés motivant les travaux entrepris dans la suite.

Une démarche générale de modélisation du mouvement relatif de satellite a été proposée après l'analyse bibliographique. Toutes les étapes de développement et les hypothèses associées ont été détaillées. La méthodologie proposée est valable pour tout type d'environnement orbital et pour toutes les formes d'orbites de référence. Nous avons testé la validité des modèles obtenus à l'aide de notre démarche en les confrontant aux principaux modèles de la littérature.

Nous nous sommes intéressés également, à la synthèse des matrices de transition par les méthodes hybrides. Nous avons proposé une transformation originale non linéaire des variables de l'état relatif perturbé, transformation qui a été linéarisée ensuite. Une étude du domaine de validité des hypothèses de linéarisation a été proposée, où l'influence des écarts en les différents éléments orbitaux a été analysée. D'autre part, nous avons étudié l'effet des perturbations orbitales sur la précision.

Pour les besoins de la thèse, un simulateur non linéaire de mouvement orbital a été développé et validé par un ensemble de simulations numériques. Nous avons utilisé ce

---

simulateur comme environnement de test pour les différents algorithmes de rendez-vous développés dans la deuxième partie. Les tests de validation ont prouvé la fidélité de ce simulateur et sa précision aussi bien dans les environnements képlériens que pour les orbites perturbées.

**La seconde partie de la thèse** a été consacrée à la résolution du problème de rendez-vous à consommation minimale, en temps fixé et formulé en un problème linéaire de commande optimale.

En préambule, nous avons présenté plusieurs méthodes conventionnelles, simples et non optimales. Ces méthodes ont servi à présenter certains aspects relatifs à l'optimisation et ont motivé les travaux présentés dans les chapitres suivants.

La résolution des problèmes de commande optimale par les méthodes indirectes a été présentée ensuite. Ces méthodes, basées sur le principe de Pontryagin, permettent une réécriture du problème de rendez-vous sous forme de problème d'optimisation polynomiale à l'aide notamment de la théorie du premier vector. L'optimisation des dates de poussées a suscité quelques efforts supplémentaires à cause de sa nature non linéaire et implicite. Ceci nous a conduit à développer deux approches de résolution complémentaires. La première, basée sur une approche par grille temporelle et optimisation polynomiale par relaxations convexes permet une certification de l'optimalité globale des résultats, au prix d'un temps de calcul important. La deuxième approche, basée sur le calcul des variations et la résolution de systèmes d'équations polynomiales est plus avantageuse en termes de temps de calcul. Cependant, la certification de l'optimalité n'est pas encore établie pour cette méthode. Deux algorithmes ont été donc proposés à l'issue de cette étude.

Les méthodes de résolution directe, basées sur la programmation linéaire, ont fait l'objet d'un chapitre. A l'inverse des techniques indirectes, l'optimalité globale n'est garantie dans ce cas, que vis-à-vis d'une configuration de dates données et ne prétend que fournir une borne supérieure de l'optimum global. Cela dit, ces méthodes se démarquent par une grande capacité à prendre en compte des contraintes supplémentaires, en particulier la robustesse vis-à-vis d'incertitudes de navigation par exemple. La grande facilité d'implantation est un atout majeur en faveur des techniques directes. Nous avons proposé un algorithme basé sur ces méthodes, et permettant de considérer des aspects préliminaires de robustesse.

La seconde partie de la thèse s'est soldée par un chapitre dédié à la validation numérique des algorithmes proposés. Différentes comparaisons ont permis de mettre en valeur les avantages respectifs de chacune des techniques et d'avoir une vision plus pratique de l'implantation grâce à des *scénarii* issus de missions réelles. Plusieurs aspects tels que la charge numérique, la robustesse, l'optimalité des résultats et la validité des hypothèses linéaires ont été détaillés et analysés.

---

## Perspectives

En ce qui concerne la modélisation, l'étude entreprise dans ce document peut être enrichie en y incluant certains travaux portant sur une *paramétrisation curvilinéaire*. Ce type de coordonnées peut permettre de neutraliser partiellement la dégradation du modèle cartésien liée à la linéarisation pour les faibles distances. Une autre manière de paramétrer le mouvement relatif est basée sur les *paramètres orbitaux locaux* (voir la thèse de J. Fontdecaba, 2007). Un nombre très limité de travaux a été effectué dans ce sens qui reste un terrain propice à d'éventuelles investigations.

La méthodologie présentée pourrait être appliquée à des cas non traités dans la littérature (attraction luni-solaire, ...) ou rarement étudiés (frottement atmosphérique, ...) afin de tirer profit au maximum de son potentiel. La construction de matrices de transition pour les cas perturbés reste encore un domaine faiblement exploré, et nécessite plus de développements et d'apports théoriques. Les modèles générés par la méthode proposée ne permettent pas de construire des matrices de transition directe. Ceci reste donc à considérer dans les améliorations futures.

Les algorithmes développés sont tous fondés sur la matrice de Yamanaka-Ankersen. Une amélioration potentielle serait de refaire les développements avec des matrices plus complexes, incluant les perturbations orbitales (matrice de transition de Gim & Alfriend par exemple). L'approche par grille se base sur une technique de construction de grille temporelle très simple. Une méthode utilisant les techniques de recherche plus sophistiquées peut être envisagée. L'optimisation polynomiale par relaxations convexes a démontré une grande performance lors des simulations. Un inconvénient dû à cette formulation est lié aux dates et nombre d'impulsions qui sont fixés *a priori*. Une reformulation plus complexe permettant de prendre en compte ces facteurs et d'éviter par la même occasion l'utilisation d'une grille temporelle constituerait une contribution significative. L'algorithme mixte basé sur le calcul des variations, ne permet pas la certification de l'optimalité globale de ces résultats et nécessite pour le moment d'être utilisé en complémentarité avec l'algorithme polynomial. Ceci pénalise son exploitation en augmentant sa complexité numérique. Les tests ont montré qu'en pratique, la solution obtenue est toujours globalement optimale. Un travail dans le sens de la certification de la globalité de l'optimum s'impose donc afin de rendre cet algorithme indépendant. L'algorithme direct robuste peut être amélioré par la prise en compte de contraintes supplémentaires (évitement de collision, cône d'approche). La formulation du problème peut être également modifiée pour considérer la norme  $L_2$ . Ceci mènera vers un problème quadratique convexe. Les aspects de robustesse doivent être également développés afin d'inclure un nombre plus important d'incertitudes de navigation (dates d'impulsions) et d'erreurs de réalisation des manœuvres.

Enfin, l'ensemble des travaux entrepris dans le cadre de cette thèse a vocation à être mis en œuvre dans le cadre des travaux visant l'amélioration de l'autonomie des futurs missions. Un banc de test permettra de réaliser une validation matérielle des algorithmes et des modèles. Ceci offrira la possibilité de passer du stade théorique à l'implantation pratique et valoriser les développements analytiques présentés dans ce document.

---



# Annexe A

## Repères de référence

### A.1 Le repère géocentrique équatorial

Le repère géocentrique équatorial  $\mathcal{R}_0 = (O_T, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  associé à la base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  est défini comme un repère pseudo-inertiel qui a pour origine le centre de la Terre  $O_T$  et dont la base est définie par les vecteurs  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$  où :

- $\vec{I}$  indique le point d'équinoxe vernal (point d'intersection ascendant (nœud ascendant) de la direction du soleil et de la ligne des nœuds) ;
- $\vec{J}$  définit l'axe de rotation de la Terre selon l'axe des pôles et orienté vers le pôle nord ;
- $\vec{K}$  est défini pour compléter le trièdre.

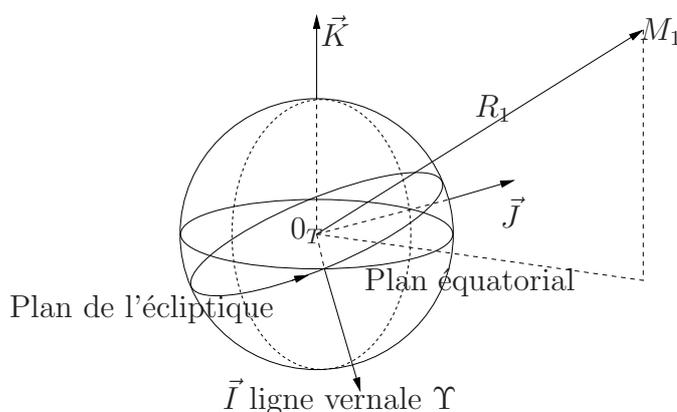


FIG. A.1 – *Repère géocentrique équatorial*

## A.2 Le repère périfocal PQW

Le repère périfocal est défini par  $\mathcal{R}_{PQW} = (O_T, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{W})$  où l'origine  $O_T$  est au centre de la terre et les axes définis par :

- l'axe portant le vecteur  $\vec{P}$  pointe vers le périgéé ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{Q}$  est à 90 de  $\vec{P}$  dans la direction du satellite ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{W}$  est normal à l'orbite.

Ce repère est obtenu à partir du repère géocentrique équatorial  $\mathcal{R}_0 = (O_T, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  en appliquant la séquence de rotations illustrée par les figures A.2, A.3, et A.4.

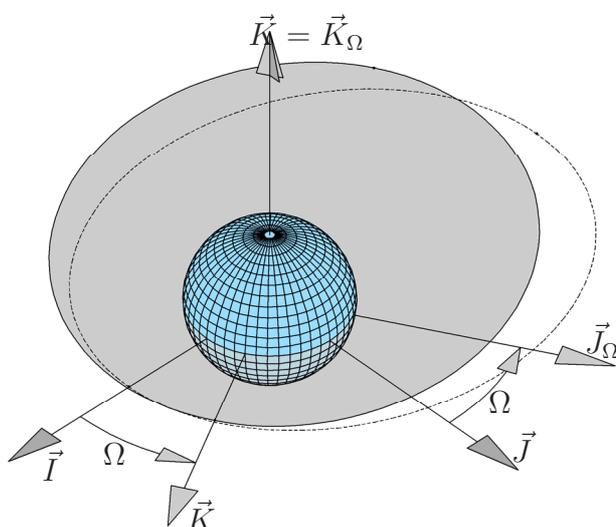


FIG. A.2 – Longitude du nœud ascendant

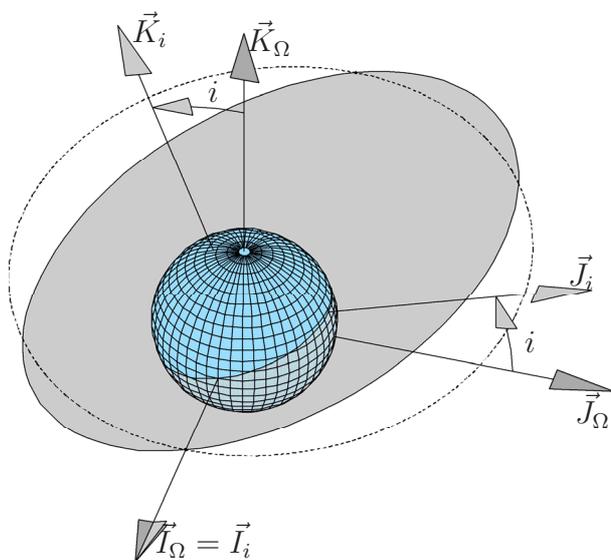


FIG. A.3 – Inclinaison

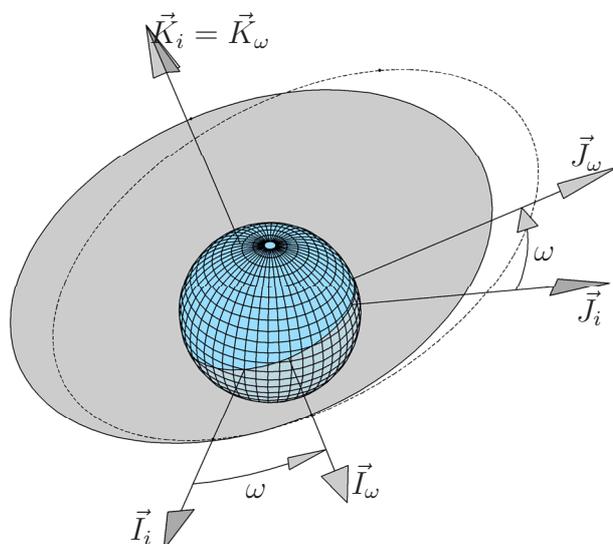


FIG. A.4 – Argument du périgée

### A.3 Le repère local RSW de Hill

Un repère local permettant de modéliser le mouvement relatif est *le repère de Gauss*  $\mathcal{R}_1 = (M_1, \vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$  où l'origine  $M_1$  est le centre de masse du satellite et les axes sont définis par :

- l'axe portant le vecteur  $\vec{R}$  est radial orient e du centre de la terre vers le satellite ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{W}$  est normal au plan orbital défini par le vecteur position et vitesse (cross-track direction) ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{S}$  est tel que  $[\vec{R}, \vec{S}, \vec{W}]$  forme un trièdre orthonorm e direct (along-track direction).

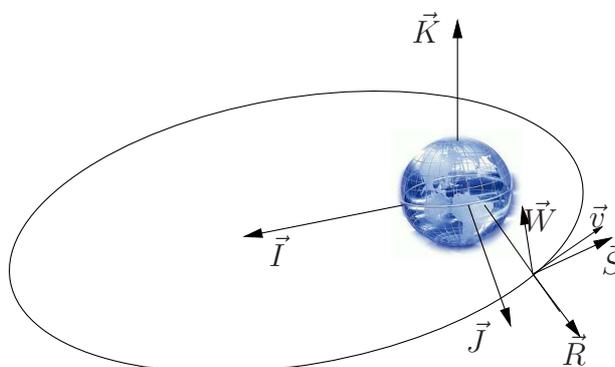


FIG. A.5 – Repère de Hill

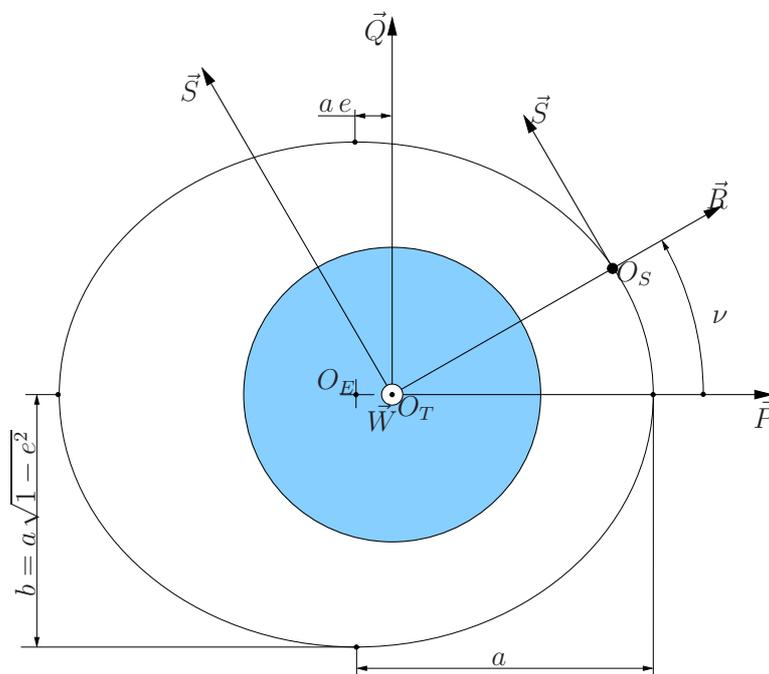


FIG. A.6 – Définition du repère de Hill dans le cas d'une trajectoire elliptique

## A.4 Le repère LVLH

Le repère appelé LVLH  $\mathcal{R}_{LVLH} = (M_1, \vec{I}_{LVLH}, \vec{J}_{LVLH}, \vec{K}_{LVLH})$  qui est, en général, défini dans la littérature avec pour origine  $M_1$ , le centre de masse du satellite et les axes définis par :

- l'axe portant le vecteur  $\vec{K}_{LVLH}$  est radial orienté du satellite vers le centre de la terre ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{J}_{LVLH}$  est normal au plan orbital dans la direction opposée du moment cinétique ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{I}_{LVLH} = \vec{J}_{LVLH} \wedge \vec{K}_{LVLH}$  est dans la direction de la vitesse et tel que  $[\vec{I}_{LVLH}, \vec{J}_{LVLH}, \vec{K}_{LVLH}]$  forme un trièdre orthonormé direct.

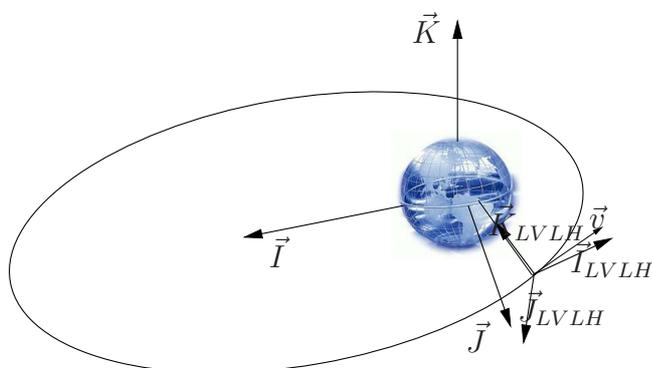


FIG. A.7 – Repère LVLH

On donne quelques notations particulières de la littérature anglo-saxonne pour le repère LVLH (local horizontal-local vertical) :

- l'axe portant le vecteur  $\vec{Z}_{LVLH}$  est appelé **R-bar** ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{Y}_{LVLH}$  est appelé **H-bar** ;
- l'axe portant le vecteur  $\vec{X}_{LVLH} = \vec{Y}_{LVLH} \wedge \vec{Z}_{LVLH}$  est appelé **V-bar**.



## Annexe B

### Les paramètres orbitaux

L'orientation de l'orbite dans l'espace est définie par les trois angles  $\Omega$ ,  $\omega$  et  $i$ , analogues aux angles d'Euler :

- $\Omega$  est la longitude du nœud ascendant (ou l'ascension droite du nœud) défini comme l'angle entre le vecteur  $\vec{I}$  (supporté par la ligne vernale) et le vecteur du nœud ascendant  $\vec{n}$ . Il est défini dans le plan équatorial et mesuré positivement dans le sens trigonométrique ;
- l'angle d'inclinaison  $i$  est l'angle entre le plan équatorial terrestre et le plan orbital (angle entre le vecteur  $\vec{K}$  et le vecteur moment cinétique  $\vec{h}$ ) ;
- l'argument du périégée  $\omega$  est l'angle entre le nœud ascendant  $NA$  et le périégée.

Ces angles sont représentés sur la figure B.1 où  $\vec{I}$ ,  $\vec{J}$  et  $\vec{K}$  sont les axes du repère pseudo-inertiel  $R_0$ . La dimension et la forme de l'orbite sont caractérisées par les paramètres  $a$  et  $e$ .

- $a$  est le demi-grand axe ;
- $e$  est l'excentricité.

La position du satellite sur son orbite peut être caractérisée par les angles  $\nu$ ,  $E$  ou  $M$ .

- $\nu$  est l'anomalie vraie et repère la position courante du satellite par rapport au périégée ;
- $E$  est l'anomalie excentrique ;
- $M$  est l'anomalie moyenne donnée par **l'équation de Kepler**.

$$M = E - e \sin(E) = M_0 + n(t - t_p) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0) = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \quad (\text{II.B.1})$$

où  $n$  est le mouvement moyen,  $t_p$  est la date de passage au périégée. Les angles  $\nu$  et  $E$  sont représentés sur la figure B.2 où :

- $S$  est la position du satellite sur l'orbite ;
- $S'$  est la projection orthogonale de  $S$  sur le cercle tangent à la trajectoire orbitale.

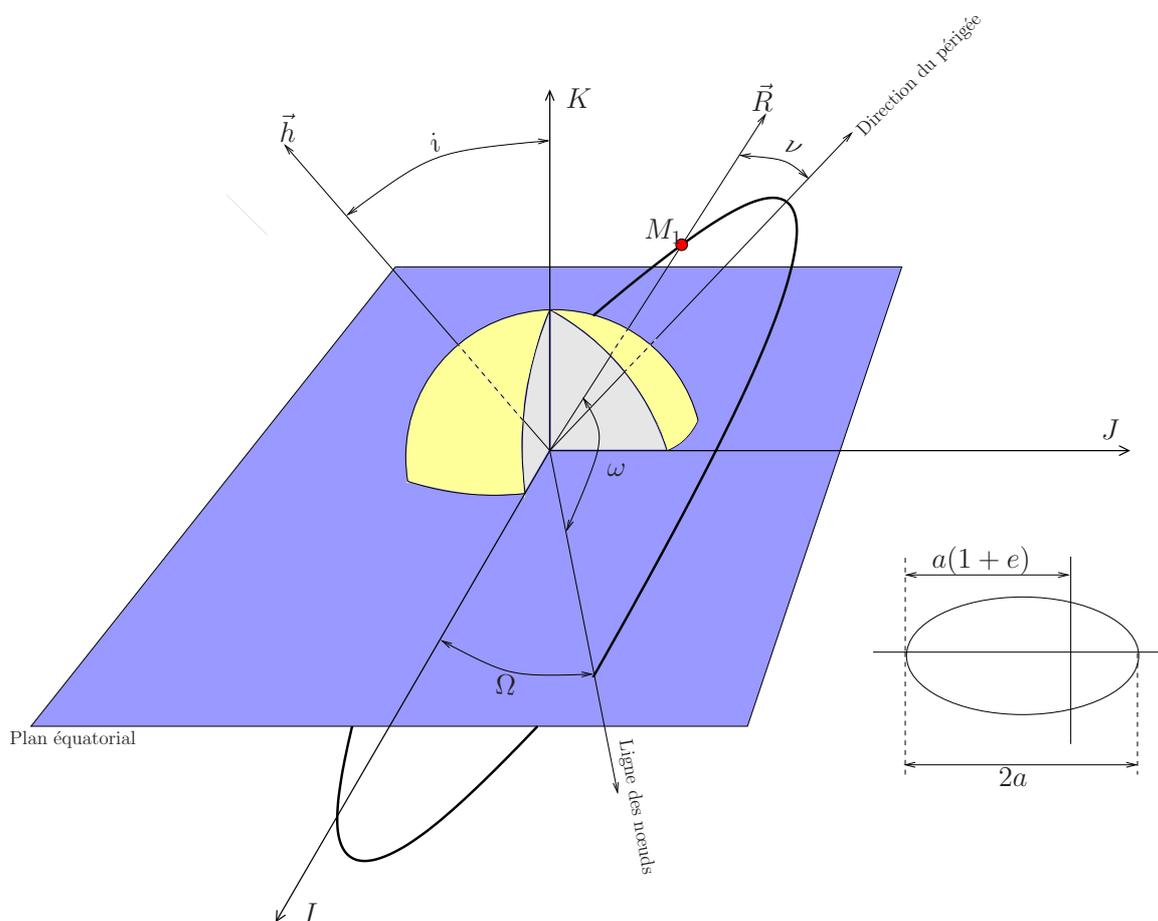


FIG. B.1 – Eléments orbitaux

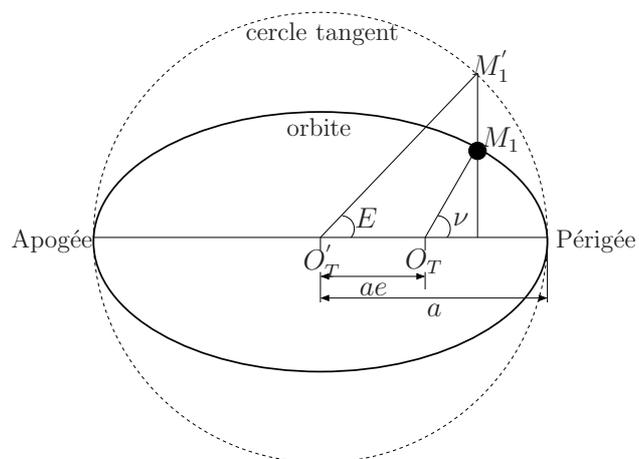


FIG. B.2 – Paramètres orbitaux définis dans le plan orbital du satellite

## B.1 Les éléments orbitaux classiques

C'est le vecteur rassemblant les éléments orbitaux donnés dans la figure B.1 :

$$X_{oe} = [ a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ \nu ] \quad (\text{II.B.2})$$

Soit  $a_\gamma$  la résultante de toutes les accélérations agissant sur le satellite  $M_1$ , mis à part le terme fondamental de l'accélération gravitationnelle :

$$a_\gamma = a_{\gamma R}R + a_{\gamma S}S + a_{\gamma W}W \quad (\text{II.B.3})$$

Les équations de Gauss, donnant la variation temporelle des éléments orbitaux sous l'effet de  $a_\gamma$  sont écrites sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2e \sin \nu}{n\sqrt{1-e^2}} & \frac{2(1+e \cos \nu)}{n\sqrt{1-e^2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \sin \nu & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left( \frac{\cos \nu + e}{1+e \cos \nu} + \cos \nu \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-e^2} \cos(\omega + \nu)}{na} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \frac{1+e \cos \nu}{\sin(\omega + \nu)} \\ -\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \cos \nu & \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \frac{2+e \cos \nu}{1+e \cos \nu} \sin \nu & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \frac{(1+e \cos \nu) \sin i}{\cos i \sin(\omega + \nu)} \\ \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \cos \nu & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \frac{2+e \cos \nu}{1+e \cos \nu} \sin \nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\gamma R} \\ a_{\gamma S} \\ a_{\gamma W} \end{bmatrix} \quad (\text{II.B.4})$$

On remarque qu'il existe un certains nombre de singularités, notamment lorsque  $e = 0$  (orbites circulaires) ou  $i = 0$  (orbites équatoriales). Ces singularités sont levées en opérant des changements de variable non linéaires. Nous en donnons un exemple.

## B.2 Les éléments orbitaux équinoxiaux

Ce jeu d'éléments orbitaux ne présente aucune singularité, au prix d'une grande complexité due aux transformations non linéaires employées. Le vecteur d'élément orbitaux est donné par :

$$X_{OE_{eq}} = [ p \ f \ g \ h \ k \ L ] \quad (\text{II.B.5})$$

où les éléments sont définis dans [2] :

$$\begin{aligned}
 p &= a(1 - e^2) \\
 f &= e \cos(\Omega + \omega) \\
 g &= e \sin(\Omega + \omega) \\
 h &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega \\
 k &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \\
 L &= \Omega + \omega + \nu
 \end{aligned} \tag{II.B.6}$$

Pour la même perturbation décrite dans l'équation (II.B.3), la variation des éléments orbitaux est donnée par la relation (reprise de [2], [1]) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ f \\ g \\ h \\ k \\ L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{w^2}{p^2} \sqrt{\mu p} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{2p}{w} \sqrt{\frac{p}{\mu}} & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin L & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{w} ((w+1) \cos L + f) & -\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{g}{w} (h \sin L - k \cos L) \\ -\sqrt{\frac{p}{\mu}} \cos L & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{w} ((w+1) \sin L + g) & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{f}{w} (h \sin L - k \cos L) \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \cos L}{2w} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2 \sin L}{2w} \\ 0 & 0 & \frac{1}{w} \sqrt{\frac{p}{\mu}} (h \sin L - k \cos L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\gamma R} \\ a_{\gamma S} \\ a_{\gamma W} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{II.B.7}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 s^2 &= 1 + h^2 + k^2 \\
 w &= 1 + f \cos L + g \sin L
 \end{aligned} \tag{II.B.8}$$

## Bibliographie

- [1] Bo J. Naasz. Classical element feedback control for spacecraft orbital maneuvers. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2002.
  - [2] M.J.H Walker, B. Ireland, and J. Owens. A set of modified equinoctial elements. *Celestial Mechanics*, 36(1) :409–419, 1985.
-



---

## Annexe C

# Perturbations orbitales

### C.1 Effets de l'aplatissement de la terre

Cette section de l'annexe a pour but de rappeler les éléments fondamentaux liés à la définition des perturbations gravitationnelles terrestres et en particulier au terme du  $J_2$ . Cette présentation est très abrégée et a principalement emprunté à la référence [13].

#### C.1.1 Le potentiel terrestre

Du fait que la force de gravité est une force conservative, elle peut être dérivée d'un potentiel scalaire de gravitation dont le développement en harmoniques sphériques est donné par [13], [2] :

$$U(M) = U(r, \lambda, \varphi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{R_{eq}}{r} \right)^n P_{nk}(\cos \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \quad (\text{II.C.1})$$

où  $P_{nk}$  est la fonction de Legendre définie à partir du polynôme de Legendre associé. Les coefficients  $C_{nk}$  (coefficient harmonique tesséral pour  $n \neq k$ ) et  $S_{nk}$  (coefficient harmonique sectoriel pour  $n = k$ ) traduisent les irrégularités du potentiel terrestre. En particulier, les coefficients  $C_{n0} = -J_n$  sont définis comme *les harmoniques zonaux* représentatifs des effets liés à des irrégularités de révolution symétriques par rapport à l'axe des pôles terrestres.

---

### C.1.2 Le terme $J_2$

Le terme  $J_2$  traduit l'aplatissement de la terre aux pôles (de l'ordre de 22 km) par rapport à l'équateur. Les mesures des coefficients zonaux, tesseraux et sectoriels montrent que le terme  $J_2$  est 400 fois plus grand que le terme le plus significatif parmi les autres.

$$U_a(M) = \frac{\mu}{r} + U_{J_2} = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu R_{eq}^2 J_2}{r^3} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right) \quad (\text{II.C.2})$$

où  $J_2 = 0.0010826626836$ .

### C.1.3 Les effets du terme $J_2$ sur les éléments orbitaux moyens

Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer les effets des perturbations dues au terme  $J_2$  sur les paramètres orbitaux. Ces effets sont généralement classés en séculaires, périodiques à courte période et périodiques à longue période [7], [1]. Les perturbations à longue période correspondent à la période de la rotation apsidale alors que la perturbation à courte période se manifeste à travers une oscillation des éléments orbitaux sans dérive de l'orbite [11]. Concernant le mouvement relatif, l'influence de la perturbation séculaire se manifeste principalement par l'introduction de termes additionnels d'accélération différentielle et par le phénomène de précession du repère local tournant. Les effets des variations à courte période sur les éléments orbitaux  $a$ ,  $e$  et  $i$  peuvent également affecter négativement le mouvement relatif [4] mais de manière moins importante. Il est donc naturel d'utiliser un ensemble d'éléments orbitaux adaptés à ce type de perturbations séculaires et ne faisant donc pas apparaître les perturbations périodiques : *les éléments orbitaux moyens* notés  $\bar{X}_{\overline{\sigma e}} = [\bar{a} \ \bar{e} \ \bar{i} \ \bar{\Omega} \ \bar{\omega} \ \bar{M}]'$ . La variation due au terme  $J_2$  affecte les éléments orbitaux moyens de la façon suivante :

$$\dot{\bar{a}} = 0 \quad (\text{II.C.3})$$

$$\dot{\bar{e}} = 0 \quad (\text{II.C.4})$$

$$\dot{\bar{i}} = 0 \quad (\text{II.C.5})$$

$$\dot{\bar{\Omega}} = \bar{F}_{\Omega}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}) = -\frac{3}{2} J_2 \bar{n} \frac{R_e^2}{\bar{a}^2 \bar{\eta}^4} \cos \bar{i} \quad (\text{II.C.6})$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{F}_{\omega}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}) = \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \frac{R_e^2}{\bar{a}^2 \bar{\eta}^4} (5 \cos^2 \bar{i} - 1) \quad (\text{II.C.7})$$

$$\dot{\bar{M}} = \bar{F}_M(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}) = \bar{n} + \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \frac{R_e^2}{\bar{a}^2 \bar{\eta}^4} \bar{\eta} (3 \cos^2 \bar{i} - 1) \quad (\text{II.C.8})$$

L'évolution des éléments orbitaux moyens différentiels peut être obtenue par différentiation des relations précédentes :

$$\delta \dot{\Omega} = \frac{\partial \bar{F}_\Omega}{\partial \bar{a}} \delta \bar{a} + \frac{\partial \bar{F}_\Omega}{\partial \bar{e}} \delta \bar{e} + \frac{\partial \bar{F}_\Omega}{\partial \bar{i}} \delta \bar{i} \quad (\text{II.C.9})$$

$$\delta \dot{\omega} = \frac{\partial \bar{F}_\omega}{\partial \bar{a}} \delta \bar{a} + \frac{\partial \bar{F}_\omega}{\partial \bar{e}} \delta \bar{e} + \frac{\partial \bar{F}_\omega}{\partial \bar{i}} \delta \bar{i} \quad (\text{II.C.10})$$

$$\delta \dot{M} = \frac{\partial \bar{F}_M}{\partial \bar{a}} \delta \bar{a} + \frac{\partial \bar{F}_M}{\partial \bar{e}} \delta \bar{e} + \frac{\partial \bar{F}_M}{\partial \bar{i}} \delta \bar{i} \quad (\text{II.C.11})$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}_\Omega}{\partial \bar{a}} &= \frac{21}{\bar{a}} C \cos \bar{i} & \frac{\partial \bar{F}_\Omega}{\partial \bar{e}} &= \frac{24\bar{e}}{\bar{\eta}^2} C \cos \bar{i} & \frac{\partial \bar{F}_\Omega}{\partial \bar{i}} &= 6C \sin \bar{i} \\ \frac{\partial \bar{F}_\omega}{\partial \bar{a}} &= -\frac{21}{2\bar{a}} C (5 \cos^2 \bar{i} - 1) & \frac{\partial \bar{F}_\omega}{\partial \bar{e}} &= \frac{12\bar{e}}{\bar{\eta}^2} C (\cos^2 \bar{i} - 1) & \frac{\partial \bar{F}_\omega}{\partial \bar{i}} &= -15C \sin(2\bar{i}) \\ \frac{\partial \bar{F}_M}{\partial \bar{a}} &= -\frac{3\bar{n}}{2\bar{a}} - \frac{\bar{\eta}}{4\bar{a}} C [63 \cos(2\bar{i}) - 21] & \frac{\partial \bar{F}_M}{\partial \bar{e}} &= \frac{9\bar{e}}{\bar{\eta}} C (3 \cos^2 \bar{i} - 1) & \frac{\partial \bar{F}_M}{\partial \bar{i}} &= -9\bar{\eta} C \sin(2\bar{i}) \end{aligned} \quad (\text{II.C.12})$$

$$\text{avec } C = \frac{J_2 \bar{n} R_e^2}{4a^2 \eta^2}.$$

On constate que seuls 3 éléments orbitaux sur 6 varient du fait de la prise en compte du terme  $J_2$ . Brouwer a donné la transformation permettant de passer des éléments orbitaux osculateurs aux éléments orbitaux moyens [1]. Cette transformation a été généralisée pour éviter les singularités au voisinage des orbites d'excentricité et d'inclinaison nulles dans [8] et simplifiée à l'ordre 1 dans [11].

### C.1.4 Passage des éléments osculateurs aux éléments moyens

Le développement donné par Schaub, issu des travaux de Brouwer repris par Lyddane en 1963, permet d'exprimer la variation des éléments orbitaux moyens en fonction de celle des éléments osculateurs. Soient les relations :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -\frac{J_2}{2} \left( \frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \\ \eta &= \sqrt{1 - e^2} \\ \gamma_2' &= \frac{\gamma_2}{\eta^4} \end{aligned} \quad (\text{II.C.13})$$

Pour ce calcul, on utilisera le vecteur d'éléments orbitaux osculateurs suivant  $X_{oe} = [a, e, i, \Omega, \omega, M]'$ , le vecteur contenant les éléments moyens étant donné par  $X_{oe} = [\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \bar{\Omega}, \bar{\omega}, \bar{M}]'$ . Les différentes anomalies sont liées par les relations :

$$\begin{aligned} M &= E - e \sin E \\ \nu &= 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.C.14})$$

La variation moyenne de  $a$  est donnée par la relation :

$$\bar{a} = \xi_a = a + a\gamma_2 \left[ (3 \cos^2 i - 1) \left( \frac{a^3}{r^3} - \frac{1}{\eta^3} \right) + 3(1 - \cos^2 i) \frac{a^3}{r^3} \cos(2\omega + 2\nu) \right] \quad (\text{II.C.15})$$

Pour calculer les variations moyennes restantes, on utilise les variables intermédiaires suivantes :

$$\delta e_1 = \frac{\gamma'_2}{2} e \eta^2 \cos 2\omega \left( 1 - 11 \cos^2 i - 40 \frac{\cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \quad (\text{II.C.16})$$

$$\begin{aligned} \delta e = & \delta e_1 + \frac{\eta^2}{2} \left\{ \gamma_2 \left[ \frac{3 \cos^2 i - 1}{\eta^6} \left( e\eta + \frac{e}{1 + \eta} + 3 \cos \nu + 3e \cos^2 \nu + e^2 \cos^3 \nu \right) \right. \right. \\ & + 3 \frac{1 - \cos^2 i}{\eta^6} \cos(2\omega + 2\nu) (e + 3 \cos \nu + 3e \cos^2 \nu + e^2 \cos^3 \nu) \\ & \left. \left. - \gamma'_2 (1 - \cos^2 i) (3 \cos(2\omega + \nu) + \cos(2\omega + 3\nu)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.C.17})$$

$$\delta i = -\frac{e\delta e_1}{\eta^2 \tan i} + \frac{\gamma'_2}{2} \cos i \sqrt{1 - \cos^2 i} (3 \cos(2\omega + 2\nu) + 3e \cos(2\omega + \nu) + e \cos(2\omega + 3\nu)) \quad (\text{II.C.18})$$

$$\begin{aligned} \bar{M} + \bar{\omega} + \bar{\Omega} = & M + \omega + \Omega + \frac{\gamma'_2}{8} \eta^3 \left( 1 - 11 \cos^2 i - 40 \frac{\cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \\ & - \frac{\gamma'_2}{16} \left( 2 + e^2 - 11(2 + 3e^2) \cos^2 i - 40(2 + 5e^2) \frac{\cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} - 400e^2 \frac{\cos^6 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) \\ & + \frac{\gamma'_2}{4} (-6(1 - 5 \cos^2 i)(\nu - M + e \sin \nu) \\ & + (3 - 5 \cos^2 i)(3 \sin(2\omega + 2\nu) + 3e \sin(2\omega + \nu) + e \sin(2\omega + 3\nu))) \\ & - \frac{\gamma'_2}{8} e^2 \cos i \left( 11 + 80 \frac{\cos^2 i}{1 - 5 \cos^2 i} + 200 \frac{\cos^4 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) \\ & - \frac{\gamma'_2}{2} \cos i (6(\nu - M + e \sin \nu) - (3 \sin(2\omega + 2\nu) + 3e \sin(2\omega + \nu) + e \sin(2\omega + 3\nu))) \end{aligned} \quad (\text{II.C.19})$$

$$\begin{aligned} e\delta M = & \frac{\gamma'_2}{8} e \eta^3 \left( 1 - 11 \cos^2 i - 40 \frac{\cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) \\ & - \frac{\gamma'_2}{4} \eta^3 \left\{ 2(3 \cos^2 i - 1) \left( \frac{a^2 \eta^2}{r^2} + \frac{a}{r} + 1 \right) \sin \nu \right. \\ & \left. + 3(1 - \cos^2 i) \left[ \left( -\frac{a^2 \eta^2}{r^2} - \frac{a}{r} + 1 \right) \sin(2\omega + \nu) + \left( \frac{a^2 \eta^2}{r^2} + \frac{a}{r} + 1 \right) \sin(2\omega + 3\nu) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.C.20})$$

$$\begin{aligned} \delta\Omega = & -\frac{\gamma'_2}{8}e^2 \cos i \left( 11 + 80\frac{\cos^2 i}{1 - 5\cos^2 i} + 200\frac{\cos^4 i}{(1 - 5\cos^2 i)^2} \right) \\ & -\frac{\gamma'_2}{2} \cos i (6(\nu - M + e \sin \nu) - (3 \sin(2\omega + 2\nu) + 3e \sin(2\omega + \nu) + e \sin(2\omega + 3\nu))) \end{aligned} \quad (\text{II.C.21})$$

$$\begin{aligned} d_1 &= (e + \delta e) \sin M + e\delta M \cos M \\ d_2 &= (e + \delta e) \cos M - e\delta M \sin M \\ d_3 &= \left( \sin \frac{i}{2} + \frac{\delta i}{2} \cos \frac{i}{2} \right) \sin \Omega + \delta\omega \cos \Omega \sin \frac{i}{2} \\ d_4 &= \left( \sin \frac{i}{2} + \frac{\delta i}{2} \cos \frac{i}{2} \right) \cos \Omega - \delta\omega \sin \Omega \sin \frac{i}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.C.22})$$

On aura finalement :

$$\bar{M} = \arctan \left( \frac{d_1}{d_2} \right) \quad (\text{II.C.23})$$

$$\bar{e} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \quad (\text{II.C.24})$$

$$\bar{\Omega} = \arctan \left( \frac{d_3}{d_4} \right) \quad (\text{II.C.25})$$

$$\bar{i} = 2 \arcsin \left( \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \right) \quad (\text{II.C.26})$$

$$\bar{\omega} = (\bar{M} + \bar{\omega} + \bar{\Omega}) - \bar{M} - \bar{\Omega} \quad (\text{II.C.27})$$

Cette relation est notée  $\bar{X}_{oe} = \xi(X_{oe})$ .

## C.2 Effets du frottement atmosphérique

Le frottement atmosphérique produit les perturbations non gravitationnelles les plus importantes pour les satellites en orbite basse. Les effets d'une telle perturbation sur les paramètres orbitaux du satellite sont de quatre types [6] :

- Décroissance séculaire forte de  $a$ ,  $e$  résultant en une contraction et circularisation de l'orbite ;
- accroissement séculaire faible de  $i$  dû à la rotation de l'atmosphère pour les orbites entre 150 km et 1000 km ;
- variations périodiques faibles de  $\Omega$  dûs à la rotation de l'atmosphère pour les orbites entre 150 km et 1000 km ;
- variations périodiques faibles de  $\omega$  dues à l'aplatissement de l'atmosphère.

Dans la suite, seule la force de trainée induite par l'atmosphère est prise en compte. Les forces de portance et binormale sont négligées.

L'accélération due à la traînée atmosphérique s'exerçant sur un satellite est alors donnée par l'équation [13], [2], [10], [9], [12], [11] :

$$\vec{\gamma}_f = - \left( \frac{1}{2} \frac{\rho S_u C_D}{m_{sat}} \left( \vec{V}(M/R_{in}) \right)^2 \right) \frac{\vec{V}(M/R_{in})}{\left\| \vec{V}(M/R_{in}) \right\|} \quad (\text{II.C.28})$$

où

- $\rho = \rho(r)$  est la densité atmosphérique ( $kg.m^{-3}$ );
- $S_u$  est l'aire de la section de choc ou *maître couple* ( $m^2$ );
- $C_D$  est le coefficient de frottement (sans dimension) qui décrit l'interaction de l'atmosphère avec la surface du satellite. Typiquement  $1.5 \leq C_D \leq 3$ ;
- $m_{sat}$  : masse du satellite ( $kg$ );
- $\vec{V}(M/R_{in})$  est la vitesse inertielle du satellite ( $m.sec^{-1}$ );

Dans l'expression (II.C.28), la plupart des paramètres dépendent eux-mêmes de manière complexe de la composition de l'atmosphère et des caractéristiques technologiques du satellite. En toute rigueur, il faudrait remplacer l'expression de la vitesse inertielle du satellite par celle de la vitesse relative du satellite par rapport à celle de l'atmosphère. Celle-ci dépend des dynamiques complexes de l'atmosphère et nous supposons pour la suite qu'elle est identique à la vitesse instantanée du satellite dans le référentiel inertielle  $\vec{V}(M/R_{in})$ .

La modélisation du frottement atmosphérique ne tient pas compte de la vitesse de l'atmosphère.

La densité  $\rho$  de la haute atmosphère est une fonction complexe de nombreux paramètres dont principalement l'altitude mais trois variables essentielles regroupent l'ensemble des phénomènes possibles : la constitution chimique de l'atmosphère, l'activité solaire (variation diurnale, cycle solaire, variations saisonnières...) et l'activité géomagnétique [9], [12]. Les modèles de densité de la littérature sont extrêmement nombreux et leur nature est très variée. Suivant les applications, il est possible d'utiliser des modèles analytiques (quadratique [5] ou exponentiel [6], [3], [9], [12]) couplés à des tables spécifiques ou des modèles numériques sophistiqués (Harris-Priester, Jacchia-Roberts...). Les premiers modèles simplifiés sont en général utilisés dans les phases de synthèse alors que les modèles plus complexes permettent d'obtenir des résultats de simulation plus fins.

L'expression de  $\vec{\gamma}_f$  dépend donc essentiellement de celle de  $\vec{V}(M/R_{in})$ , vecteur qui peut être exprimé dans n'importe quelle base locale. Ici, on privilégie la base de Frenet  $(\vec{N}, \vec{T}, \vec{W})$  mais on peut aussi envisager d'établir les expressions dans la base de Hill

$(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$  (les équations de Gauss doivent alors être adaptées).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{n^2 a} v T = \frac{2 a^2}{\mu} v T \\ \frac{de}{dt} = \frac{1}{v} \left( 2(e + \cos \nu) T + \sin \nu \frac{r}{a} N \right) \\ \frac{di}{dt} = \frac{r \cos(\omega + \nu)}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2}} W \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\omega + \nu)}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} W \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e v} \left[ 2 T \sin \nu - N \frac{2e + (1 + e^2) \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right] - \frac{r \cos i \sin(\omega + \nu)}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} W \\ \frac{d\nu}{dt} = n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} - \frac{1}{e v} \left[ 2 T \sin \nu - N \frac{2e + (1 + e^2) \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right] \end{array} \right.$$

où  $v$  est le module de la vitesse inertielle du satellite. Ainsi,

$$\vec{V} (M/R_{in}) = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \nu}{1 - e^2}} \vec{T}$$

D'où :

$$\vec{\gamma}_f = -\frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho S_u C_D v^2 \vec{T} = -\frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho S_u C_D \frac{\mu}{a} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \nu}{1 - e^2} \vec{T}$$

On désigne par  $u_N$ ,  $u_T$  et  $u_W$  les composantes de la seule *accélération de propulsion* (les variables de commande) dans la base de Frenet  $(\vec{N}, \vec{T}, \vec{W})$ . On obtient ainsi la forme adaptée des équations de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2 a^2}{\mu} v \left( u_T - \frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho S_u C_D v^2 \right) \\ \frac{de}{dt} = \frac{1}{v} \left( 2(e + \cos \nu) \left( u_T - \frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho S_u C_D v^2 \right) + \sin \nu \frac{r}{a} u_N \right) \\ \frac{di}{dt} = \frac{r \cos(\alpha_\nu)}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2}} u_W \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\alpha_\nu)}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} u_W \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e v} \left[ 2 \left( u_T - \frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho S_u C_D v^2 \right) \sin \nu - u_N \frac{2e + (1 + e^2) \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right] - \frac{r \cos i \sin(\alpha_\nu)}{n a^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} u_W \\ \frac{d\nu}{dt} = n \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} - \frac{1}{e v} \left[ 2 \left( u_T - \frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho S_u C_D v^2 \right) \sin \nu - u_N \frac{2e + (1 + e^2) \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.C.29})$$



## Bibliographie

- [1] Y.D. Brouwer. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronautical Journal*, 64 :378–397, 1959.
  - [2] J.P. Carrou. *Mécanique spatiale*. Cépaduès Editions, 1995.
  - [3] A.J.M. Chakravarty. Orbital decay due to drag in an exponentially varying atmosphere. *Journal of Guidance and Control*, 3(6) :592–576, 1980.
  - [4] D.-W. Gim and K.T. Alfriend. The state transition matrix of relative motion for the perturbed non-circular reference orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(6) :956–971, 2003.
  - [5] M Humi and T. Carter. Closed-form solutions for near-circular arcs with quadratic drag. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 29 :513–518, 2006.
  - [6] D. King-Hele. *Theory of satellite orbits in an atmosphere*. Butterworths, London, England, 1964.
  - [7] Y. Kozai. The motion of a close earth satellite. *Astronautical Journal*, 64 :367–377, 1959.
  - [8] R.H. Lyddane. Small eccentricities of inclinations in the brouwer theory of the artificial intelligence satellite. *Astronomical Journal*, 68(8) :555–558, 1963.
  - [9] O. Montenbruck and E. Gill. *Satellite orbits*. Springer, Berlin, Germany, 2001.
  - [10] J.E. Prussing and B.A. Conway. *Orbital mechanics*. Oxford University Press, New York, New York, USA, 1993.
  - [11] H. Schaub and J.L. Junkins. *Analytical mechanics of space systems*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
  - [12] D.A. Vallado. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Space Technology Library. Kluwer Academic Publishers, El Segundo, California, USA, 2001.
  - [13] O. Zarrouati. *Trajectoires spatiales*. Cepadues Editions, Toulouse, France, 1987.
-



## Annexe D

# Relation entre les éléments orbitaux et les coordonnées inertielles

A partir des coordonnées inertielles d'un satellite, on peut retrouver les paramètres orbitaux. Toutes les relations nécessaires à ce passage peuvent être retrouvées dans [1] par exemple.

Pour alléger les relations, on notera :

$$\vec{R} = R_{IJK} \quad (\text{II.D.1})$$

$$\vec{V} = V_{IJK} \quad (\text{II.D.2})$$

Le repère  $[\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}]$  est défini à l'aide des vecteurs  $\vec{I}$ ,  $\vec{J}$ , et  $\vec{K}$ . Le moment angulaire  $h$  est défini par :

$$\vec{h} = \vec{R} \times \vec{V} \quad (\text{II.D.3})$$

La direction des nœuds est indiquée par le vecteur  $\vec{N}$  :

$$\vec{N} = \vec{K} \times \vec{h} \quad (\text{II.D.4})$$

Le vecteur excentricité est défini par la relation :

$$\vec{e} = \frac{\left(V^2 - \frac{\mu}{R}\right) \vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{\mu} \quad (\text{II.D.5})$$

d'où :

– **l'excentricité** :  $e = |\vec{e}|$ .

L'énergie mécanique de l'orbite est donnée par :

$$\xi = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{R} \quad (\text{II.D.6})$$

- le demi grand axe :  $a = -\frac{\mu}{2\xi}$  ;
- l'inclinaison :  $\cos i = \frac{h_k}{|\vec{h}|}$  ;
- l'ascension droite du nœud ascendant :  $\cos \Omega = \frac{N_i}{|\vec{N}|}$ , si  $N_j < 0$  prendre le complément à  $2\pi$  ;
- l'argument du périhélie :  $\cos \omega = \frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{|\vec{N}| |\vec{e}|}$ , si  $e_k < 0$  prendre le complément à  $2\pi$  ;
- l'anomalie vraie :  $\cos \nu = \frac{\vec{R} \cdot \vec{e}}{|\vec{R}| |\vec{e}|}$ , si  $\vec{R} \cdot \vec{V} < 0$  prendre le complément à  $2\pi$ .

**Cas singuliers :**

- \* si  $e = 0$  et  $i = 0$ , alors  $\cos(\nu + \Omega + \omega) = \frac{r_i}{|\vec{r}|}$ , si  $r_j < 0$ , prendre le complément à  $2\pi$ .
  - \* si  $e = 0$  et  $i \neq 0$ , alors  $\cos(\nu + \omega) = \frac{\vec{R} \cdot \vec{N}}{|\vec{R}| \cdot |\vec{N}|}$ , si  $r_k < 0$ , prendre le complément à  $2\pi$ .
  - \* si  $e \neq 0$  et  $i = 0$ , alors  $\cos(\Omega + \omega) = \frac{e_i}{|\vec{e}|}$ , si  $e_j < 0$ , prendre le complément à  $2\pi$ .
-

## Bibliographie

- [1] D.A. Vallado. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Space Technology Library. Kluwer Academic Publishers, El Segundo, California, USA, 2001.
-



# Annexe E

## Paramétrages angulaires

Dans cette annexe, les relations de passage entre certains paramétrages angulaires usuels sont établies.

### E.1 Figures de changement de base

Angles orbitaux  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  et  $\nu$   $\rightarrow$  figures E.1, E.2, E.3 et E.4.

Angles géométriques  $\theta$ ,  $\varphi$  (et  $\psi$ )  $\rightarrow$  figures E.6, E.7 et E.8.

Angles géographiques  $L$ ,  $\lambda$  (et  $\varpi$ )  $\rightarrow$  figures E.9, E.10 et E.11.

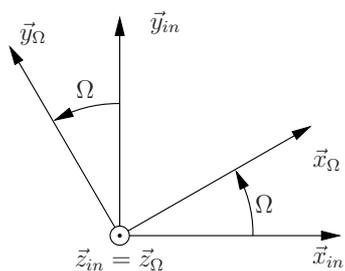


FIG. E.1 – Angle  $\Omega$

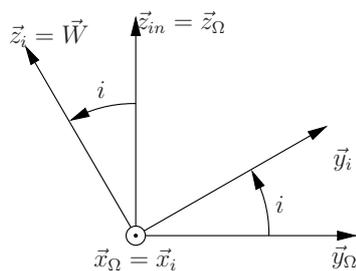


FIG. E.2 – Angle  $i$

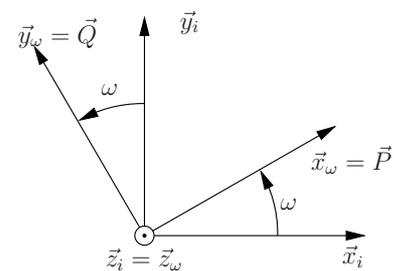
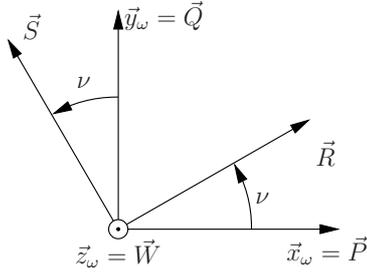
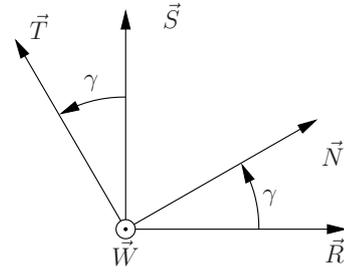
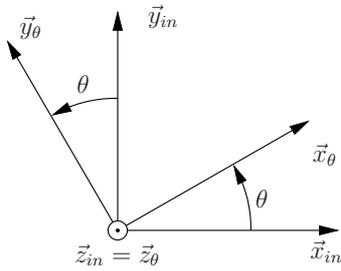
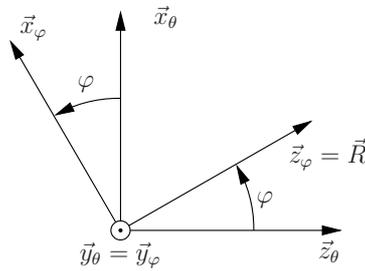
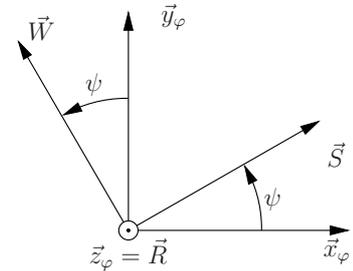
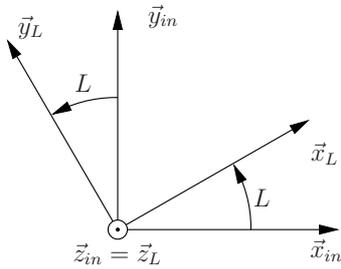
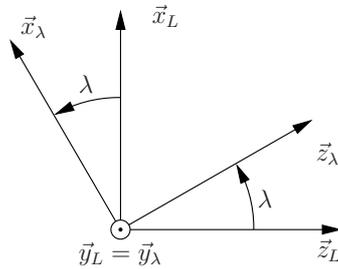
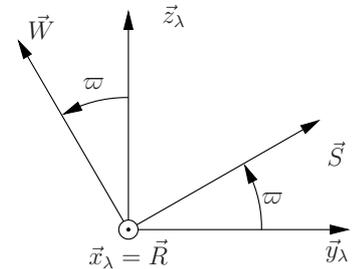


FIG. E.3 – Angle  $\omega$

FIG. E.4 – Angle  $\nu$ FIG. E.5 – Angle  $\gamma$ FIG. E.6 – Angle  $\theta$ FIG. E.7 – Angle  $\varphi$ FIG. E.8 – Angle  $\psi$ FIG. E.9 – Angle  $L$ FIG. E.10 – Angle  $\lambda$ FIG. E.11 – Angle  $\varpi$ 

## E.2 Expressions des angles géographiques en fonction des angles orbitaux

Angle de latitude  $\lambda$  : d'après les figures E.2 puis E.1 :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \cos(\omega + \nu) \vec{x}_i + \sin(\omega + \nu) \vec{y}_i \\ &= \cos(\omega + \nu) \vec{x}_\Omega + \sin(\omega + \nu) \cos i \vec{y}_\Omega + \sin(\omega + \nu) \sin i \vec{z}_\Omega\end{aligned}$$

D'après la figure E.10 :

$$\vec{R} = \cos \lambda \vec{x}_L - \sin \lambda \vec{z}_L$$

Puisque :

$$\vec{z}_L = \vec{z}_\Omega = \vec{z}_{in}$$

et que les vecteurs  $\vec{x}_\Omega$ ,  $\vec{y}_\Omega$  et  $\vec{x}_L$  sont normaux à  $\vec{W}$ , on identifie :

$$\cos(\omega + \nu) \vec{x}_\Omega + \sin(\omega + \nu) \cos i \vec{y}_\Omega = \cos \lambda \vec{x}_L \quad (\text{II.E.1})$$

$$\sin(\omega + \nu) \sin i \vec{z}_\Omega = -\sin \lambda \vec{z}_L \quad (\text{II.E.2})$$

D'où :

$$(\text{II.E.2}) \Rightarrow \boxed{\sin \lambda = -\sin(\omega + \nu) \sin i} \quad (\text{II.E.3})$$

Puisque :

$$\cos^2 \lambda = 1 - \sin^2 \lambda$$

on obtient :

$$\cos^2 \lambda = 1 - \sin^2(\omega + \nu) \sin^2 i$$

Or, la latitude  $\lambda$  étant comprise entre  $-\pi/2$  et  $+\pi/2$ , son cosinus est positif.

Donc :

$$\boxed{\cos \lambda = \sqrt{1 - \sin^2(\omega + \nu) \sin^2 i} = \sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}} \quad (\text{II.E.4})$$

**Angle de longitude inertielle  $L$**  : les figures E.1 et E.9 permettent d'établir la figure E.12 dont on tire :

$$\vec{x}_L = \cos(L - \Omega) \vec{x}_\Omega + \sin(L - \Omega) \vec{y}_\Omega$$

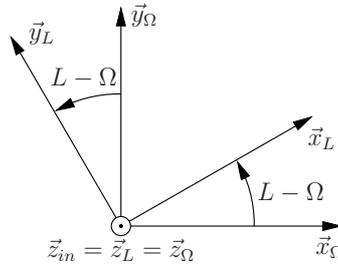


FIG. E.12 – Angle  $L - \Omega$

Par conséquent, l'équation (II.E.1) peut s'écrire :

$$\cos(\omega + \nu) \vec{x}_\Omega + \sin(\omega + \nu) \cos i \vec{y}_\Omega = \cos \lambda (\cos(L - \Omega) \vec{x}_\Omega + \sin(L - \Omega) \vec{y}_\Omega)$$

On identifie :

$$\cos(L - \Omega) = \frac{\cos(\omega + \nu)}{\cos \lambda} = \frac{\cos(\omega + \nu)}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}} = \cos \alpha \quad (\text{II.E.5})$$

$$\sin(L - \Omega) = \frac{\sin(\omega + \nu) \cos i}{\cos \lambda} = \frac{\sin(\omega + \nu) \cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}} = \sin \alpha \quad (\text{II.E.6})$$

D'où :

$$\boxed{L = \Omega + \alpha(\omega, \nu, i)}$$

avec :

$$\cos \alpha = \frac{\cos(\omega + \nu)}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}} \quad \sin \alpha = \frac{\sin(\omega + \nu) \cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}}$$

**Angle complémentaire  $\varpi$**  : cet angle complète le couple  $(\lambda, L)$  pour permettre la définition de la base locale  $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{W})$ .

**Autres relations usuelles :**

$$\tan(L - \Omega) = \tan(\omega + \nu) \cos i \quad \tan \lambda = -\sin(L - \Omega) \tan i$$

### E.3 Expressions des angles géométriques en fonction des angles géographiques

D'après les figures (E.6) et (E.7) :

$$\vec{R} = \vec{z}_\varphi = \sin \varphi \cos \theta \vec{x}_{in} + \sin \varphi \sin \theta \vec{y}_{in} + \cos \varphi \vec{z}_{in}$$

D'autre part, d'après les figures (E.9) et (E.10) :

$$\vec{R} = \cos \lambda \cos L \vec{x}_{in} + \cos \lambda \sin L \vec{y}_{in} - \sin \lambda \vec{z}_{in}$$

Par identification :

$$\sin \varphi \cos \theta = \cos \lambda \cos L \quad (\text{II.E.7})$$

$$\sin \varphi \sin \theta = \cos \lambda \sin L \quad (\text{II.E.8})$$

$$\cos \varphi = \sin \lambda \quad (\text{II.E.9})$$

D'où :

$$\boxed{\theta = L} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda = \varphi - \frac{\pi}{2}}$$

### E.4 Expressions des angles géométriques en fonction des angles orbitaux

Puisque :

$$\theta = L$$

on a :

$$\theta = \Omega + \alpha(\omega, \nu, i)$$

Donc :

$$\cos \theta = \frac{\cos \Omega \cos(\omega + \nu) - \sin \Omega \sin(\omega + \nu) \cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}} \quad \sin \theta = \frac{\sin \Omega \cos(\omega + \nu) + \cos \Omega \sin(\omega + \nu) \cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}}$$

Par ailleurs :

$$\lambda = \varphi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = -\sin \lambda \\ \sin \varphi = \cos \lambda \end{cases}$$

Donc :

$$\cos \varphi = \sin(\omega + \nu) \sin i \quad \sin \varphi = \sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}$$

En ce qui concerne le troisième angle  $\psi$ , d'après les figures E.6, E.7 et E.8, on a :

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \cos \psi \vec{y}_\varphi - \sin \psi \vec{x}_\varphi \\ &= \cos \psi \vec{y}_\theta - \sin \psi (\cos \varphi \vec{x}_\theta - \sin \varphi \vec{z}_\theta) \\ &= -\sin \psi \cos \varphi \vec{x}_\theta + \cos \psi \vec{y}_\theta + \sin \psi \sin \varphi \vec{z}_\theta \\ &= -\sin \psi \cos \varphi (\cos \theta \vec{x}_{in} + \sin \theta \vec{y}_{in}) + \cos \psi (-\sin \theta \vec{x}_{in} + \cos \theta \vec{y}_{in}) + \sin \psi \sin \varphi \vec{z}_{in} \\ &= -(\cos \psi \sin \theta + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) \vec{x}_{in} + (\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \cos \varphi \sin \theta) \vec{y}_{in} + \sin \psi \sin \varphi \vec{z}_{in} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les figures E.2 et E.1 :

$$\begin{aligned} \vec{W} = \vec{z}_i &= \cos i \vec{z}_\Omega - \sin i \vec{y}_\Omega \\ &= \cos i \vec{z}_{in} - \sin i (-\sin \theta \vec{x}_{in} + \cos \theta \vec{y}_{in}) \\ &= \sin i \sin \theta \vec{x}_{in} - \sin i \cos \theta \vec{y}_{in} + \cos i \vec{z}_{in} \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \cos \psi \sin \theta + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta = \sin i \sin \theta \\ \cos \psi \cos \theta - \sin \psi \cos \varphi \sin \theta = -\sin i \cos \theta \\ \sin \psi \sin \varphi = \cos i \end{cases} \quad (\text{II.E.10})$$

D'où :

$$\sin \psi = \frac{\cos i}{\sin \varphi} \Rightarrow \sin \psi = \frac{\cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}}$$

D'autre part, les deux premières relations du système II.E.10 permettent d'exprimer :

$$\cos \psi = \sin i \frac{-\cos 2\Omega \cos(\omega + \nu) + \sin 2\Omega \sin(\omega + \nu) \cos i}{\sqrt{\cos^2(\omega + \nu) + \sin^2(\omega + \nu) \cos^2 i}}$$

Si l'on utilise l'angle  $\alpha = \alpha(\omega, \nu, i)$  défini précédemment, on obtient :

$$\sin \psi = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega + \nu)} \quad \cos \psi = -\sin i \cos(2\Omega + \alpha) \quad (\text{II.E.11})$$



# Liste des publications

## Journaux internationaux

**Polynomial optimization for the solution of fuel-optimal impulsive rendezvous using primer vector theory**, D. Arzelier, M. Kara-Zaïtri, C. Louembet, A. Delibaşı. *Journal of Guidance, Navigation and Control*. Soumis.

**Nonlinear and linearized mappings between perturbed relative motion state vectors**, A. Théron, M. Kara-Zaïtri. *Journal of Guidance, Navigation and Control*. Soumis.

**Nonlinear local cartesian relative motion model for perturbed elliptical orbits**, A. Théron, M. Kara-Zaïtri. *Journal of Guidance, Navigation and Control*. Soumis.

## Conférences internationales

**Polynomial optimization for the solution of fuel-optimal impulsive rendezvous using primer vector theory**, M. Kara-Zaïtri, D. Arzelier, A. Delibaşı, C. Louembet. 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Décembre 15-17, 2010 Atlanta, GA, USA.

**Mixed Iterative Algorithm For Solving Optimal Impulsive Time-Fixed Rendezvous problem**, M. Kara-Zaïtri, D. Arzelier, C. Louembet. AIAA GNC conference, 2-5 Août 2010, Toronto, Ontario, Canada.

**Evaluation of autonomous guidance techniques for space rendezvous and withdrawal strategy**, P. Blanc-Paques, E. Gogibus, C. Louembet, M. Kara-Zaïtri. AIAA GNC conference, 2-5 Août 2010, Toronto, Ontario, Canada.

**Solving fuel-optimal impulsive rendezvous problem using primer vector theory and real algebraic geometry**, M. Kara-Zaïtri, D. Arzelier, C. Louembet, A. Théron. 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, Toulouse (France), 28 September-2 Octobre 2009.

---

**Solving fuel-optimal orbital homing problem with continuous thrust using direct methods**, C. Louembet, M. Kara-Zaïtri, D. Arzelier, A. Théron. 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, Toulouse (France), 28 September-2 Octobre 2009.

**Nonlinear and linear local cartesian relative motion state models for J2 perturbed elliptical orbits**, A. Théron, M. Kara-Zaïtri, D. Arzelier, C. Louembet. 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, Toulouse (France), 28 September-2 Octobre 2009.

## Séminaires et présentations

**Vol orbital relatif et rendez-vous spatial**, M. Kara-Zaïtri, D. Arzelier, A. Théron. Congrès des doctorants EDSYS, Mai 2009.

**Rendez-vous orbital : de la modélisation à la résolution par les méthodes indirectes**, M. Kara-Zaïtri, D. Arzelier, C. Louembet, A. Théron GDR MACS-GT MOSAR-2009 , Mars 2009.

**Vol orbital relatif : modélisation, simulation et problème du rendez-vous**, M. Kara-Zaïtri. SeaMAC, Biarritz, 18 septembre 2008.

**Algorithmes de guidage pour le rendez-vous orbital : Résolution des conditions d'optimalité**, M. Kara-Zaïtri. SkyMAC, Luchon 3-4 Février 2010 .

## Rapport industriel

**Etude bibliographique sur la modélisation du mouvement relatif pour le problème du rendez-vous**, D. Arzelier, A. Théron, M. Kara-Zaïtri Rapport technique LAAS, November 2008.

## Poster

**Rendez-vous en orbite**, M. Kara-Zaïtri. Doctoriales Midi-Pyrénées, Boussens, France, 26 Avril - 2 Mai 2010.

---

# Résumé-Abstract

## Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux composantes fondamentales de l'opération du rendez-vous orbital : la navigation relative et le guidage à consommation minimale de carburant. La première partie est consacrée à la modélisation du mouvement relatif de satellites *dans un cadre linéaire*. Une analyse bibliographique approfondie ainsi que les développements d'une méthode de modélisation et d'une transformation de variables d'état du mouvement relatif sont proposées dans cette partie. Ces développements sont entrepris dans le but de fournir des outils de navigation relative fiables et précis même en présence de perturbations orbitales. Le guidage est abordé dans la seconde partie de la thèse à travers l'élaboration de plusieurs algorithmes de génération de plans de manœuvres pour la mise en œuvre du rendez-vous en temps fixé. Chacun des algorithmes développés est fondé sur des outils théoriques différents tels que les méthodes indirectes de résolution de problèmes de commande optimale basées sur le principe du maximum ou les techniques directes exploitant la discrétisation des problèmes de commande optimale et la programmation linéaire. L'utilisation de ces outils permet de couvrir des objectifs divers, notamment la minimisation de la consommation de carburant et la robustesse vis-à-vis des erreurs de navigation. D'autres algorithmes sont conçus dans le but d'améliorer leur embarcabilité à travers l'utilisation des bases de la mécanique spatiale. Un ensemble de tests de validation et comparaison est réalisé, portant sur des missions *réelles* ou des exemples académiques issus de la littérature et permettant de mettre en valeur les avantages pratiques les plus pertinents des algorithmes développés.

**Mots-clés** Satellite ; vol en formation ; rendez-vous orbital ; modélisation linéaire ; mouvement relatif ; autonomie ; robustesse ; guidage ; consommation minimale ; théorie du premier vecteur ; programmation linéaire ; commande optimale ; simulation de mouvement orbital ; méthodes d'optimisation directes et indirectes.

---

## Abstract

In this thesis, two fundamental steps of the orbital rendezvous are studied : the relative navigation and the minimum-fuel guidance. The first part is devoted to the modeling of spacecraft relative motion under linear assumptions. A comprehensive bibliography review and a novel method of relative motion model design are given in this part as well as a mapping between the various state space variables forms. These developments are undertaken in order to provide reliable and accurate navigation tools in the presence of orbital perturbations. The guidance is considered in the second part through the development of several algorithms for solving the fixed-time rendezvous problem. Each algorithm is developed using different theoretical tools such as indirect methods for solving optimal control problems based on the maximum principle or direct techniques exploiting the discretizing of optimal control problems and linear programming. Various objectives are considered through the use of these tools, including minimization of fuel consumption and robustness toward the navigation errors. Other algorithms are designed in order to improve their practical implementation thanks to the use of orbital mechanics theory. A set of validation tests and comparisons is made, where examples from academic literature and real missions are solved using the different algorithms. This is achieved in order to highlight the most relevant theoretical and practical aspects of the proposed algorithms.

**Keywords** Spacecraft ; formation flying ; orbital rendezvous ; linear modelling ; relative motion ; autonomy ; robustness ; guidance ; minimum fuel-consumption ; primer vector theory ; linear programming ; optimal control ; orbital motion simulation ; direct and indirect optimization methods.

---