



HAL
open science

Modèles mathématiques pour les gaz quantiques

Thibaut Allemand

► **To cite this version:**

Thibaut Allemand. Modèles mathématiques pour les gaz quantiques. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT: . tel-00548177

HAL Id: tel-00548177

<https://theses.hal.science/tel-00548177>

Submitted on 19 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Pierre et Marie
Curie



Département de Mathématiques et
Applications - UMR 8553
École Normale Supérieure

Modèles mathématiques pour les gaz quantiques

Thèse de doctorat

présentée et soutenue publiquement le 17 décembre 2010

pour l'obtention du diplôme de

Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
(spécialité mathématiques)

par

Thibaut ALLEMAND

sous la direction de Laure SAINT-RAYMOND

devant le jury composé de

François CASTELLA	Rapporteur
Laurent DESVILLETES	Examinateur
Benoît PERTHAME	Examinateur
Yves POMEAU	Examinateur
Laure SAINT-RAYMOND	Directrice de thèse
Giuseppe TOSCANI	Examinateur



École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris
Centre (ED 386)

Remerciements

C'est un grand honneur pour moi d'avoir fait mes premiers pas dans le monde de la recherche guidé par Laure Saint-Raymond, et je la remercie du temps qu'elle m'a accordé pour répondre à mes questions souvent nombreuses et parfois idiotes, sachant toujours débloquer les situations qui me semblaient inextricables.

Je tiens à remercier François Castella et Ansgar Jüngel pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je remercie également Laurent Desvillettes, Benoît Perthame, Yves Pomeau et Giuseppe Toscani d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Après plusieurs années passées en thèse, je voudrais remercier toutes les personnes qui ont contribué à rendre cette période riche en expériences scientifiques et humaines. En premier lieu je remercie Giuseppe Toscani qui m'a accueilli pendant un an au sein du département de mathématiques de l'université de Pavia. Grazie mille a tutto il dipartimento (e in particolare a Simone e Francesco) per l'ospitalità! Je dois également un remerciement particulier à Laurent Desvillettes, qui m'a dispensé ses conseils avisés à de nombreuses reprises pendant mes années cachanaises puis durant ma thèse. C'est un peu à cause de lui si je fais de la théorie cinétique!

J'ai apprécié les discussions avec François Alouges, Stéphane Cordier et Francesco Salvarani, qui tous trois m'ont montré leur gentillesse et leur enthousiasme. Je regrette de n'avoir rien concrétisé avec eux, mais ce n'est que partie remise!

Ma thèse s'est déroulée dans des conditions très agréables, et je tiens ici à adresser toute ma gratitude aux membres du DMA actuels et passés qui rendent ce lieu si enrichissant et chaleureux. Je remercie particulièrement Bénédicte et Zaïna, qui résolvent probablement plus de problèmes que les chercheurs, Vincent Calvez que j'admire beaucoup, Daniel, Vincent, Laure et tout le (défunt) R3 et son ambiance studieuse (enfin parfois...), Marie (le DMA sans Marie, ce n'est plus pareil...) et Amandine avec qui nous avons martyrisé quelques dizaines d'économistes.

Je remercie tous mes amis thésards ou non pour leurs encouragements pendant ces années, ainsi que ma famille qui commence à se demander quand je vais enfin terminer mes études.

Merci à Gelsomina pour son soutien sans faille.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de différents modèles de fluides quantiques, en particulier des modèles cinétiques, et aux liens entre ces modèles.

La première partie est dédiée aux gaz de bosons. Nous nous intéressons d'abord à un fluide de bosons ayant une partie condensée, modélisé par deux équations couplées : une équation de Boltzmann quantique pour la partie normale, et une équation de Gross-Pitaevskii pour la partie condensée. Nous étudions formellement la limite hydrodynamique de ce système dans le scaling hyperbolique, couplée avec une limite semi-classique, et obtenons un système du type Euler compressible à deux fluides. Nous étudions le système limite dans l'approximation isentropique : hyperbolicité, solutions faibles, chocs, simulation numérique des chocs. Nous nous intéressons dans un deuxième temps à un modèle de type Boltzmann pour les bosons unidimensionnel et homogène en espace. Après avoir prouvé l'existence de solutions, nous montrons qu'elles convergent dans la limite des collisions rasantes (et dans un sens très faible) vers des solutions d'une équation de Fokker-Planck quantique.

La deuxième partie est centrée sur l'équation de Boltzmann pour les fermions. Nous montrons un résultat d'existence de solutions vérifiant la conservation locale de la masse, du moment et de l'énergie cinétique dans un domaine à bord. Nous prouvons ensuite un résultat rigoureux de limite hydrodynamique dans le scaling Euler incompressible à l'aide de la méthode de l'entropie relative couplée à des techniques de filtrage des ondes acoustiques.

Mots-clés : théorie cinétique, gaz quantique, fermion, boson, limite hydrodynamique, collisions rasantes, Boltzmann, entropie relative.

Abstract

Mathematical models for quantum gases. In this dissertation, we study various models for quantum fluids, especially kinetic models, and how they are related.

In the first part, we study boson gas. We first focus on a boson fluid with a quantum part modeled by two coupled equations : a quantum Boltzmann equation for the normal part and a Gross-Pitaevskii equation for the condensate. We formally derive the hydrodynamic limit of this system in the hyperbolic scaling and then perform the semi-classical limit ; we get a compressible Euler-like system of two coupled fluids. We then study the limit system using the isentropic approximation : hyperbolicity, weak solutions, shocks, numerical simulation of shocks. Afterwards we study a Boltzmann-type space-homogeneous model for bosons in one dimension. We prove existence of solutions and then convergence in the grazing collision limit (and in a very weak sense) towards solutions of a quantum Fokker-Planck equation.

In the second part, we focus on the Boltzmann equation for fermions. We prove the existence of solutions in a bounded domain satisfying the local conservation of mass, momentum and kinetic energy. We then rigorously derive the hydrodynamic limit in the incompressible Euler scaling using the relative entropy method together with filtering techniques.

Keywords : kinetic theory, quantum gases, fermion, boson, hydrodynamic limit, grazing collisions, Boltzmann, relative entropy.

Table des matières

Remerciements	3
Chapitre 1. Introduction	11
1. Présentation générale	11
2. L'équation de Boltzmann quantique	17
3. Sur le problème de Cauchy	23
4. Limite des collisions rasantes	40
5. Limites hydrodynamiques	48
6. Perspectives	61
PARTIE A. DIFFÉRENTS MODÈLES POUR UN GAZ DE BOSONS	63
Chapitre 2. The grazing collision limit of Kac caricature of Bose-Einstein particles	65
Abstract	65
1. Introduction	65
2. The Kac caricature of a Bose Einstein gas	68
3. Existence theorems	72
4. Moments of the cutoff solutions, regularity of the non cutoff solution	75
5. The grazing collision limit	80
6. Other results	81
7. Conclusions	86
Chapitre 3. Derivation of a two-fluids model for a Bose gas from a quantum kinetic system	87
Abstract	87
1. Introduction	87
2. Properties of the model	91
3. Formal derivation of the fluid model	95
4. Hyperbolicity and regular solutions	100
5. Weak solutions and the Riemann problem	105
6. Conclusions	109
PARTIE B. L'ÉQUATION DE BOLTZMANN POUR LES FERMIONS : EXISTENCE DE SOLUTIONS ET LIMITE HYDRODYNAMIQUE	111
Chapitre 4. Existence and conservation laws for the Boltzmann-Fermi-Dirac equation in a general domain	113
Abstract	113
1. Introduction	113
2. The IBV problem	114

3. Conservation laws	116
Chapitre 5. The incompressible Euler limit for a gas of fermions	119
Abstract	119
1. Introduction	119
2. Some details on the Boltzmann equation for fermions	123
3. Strategy and main result	125
4. Useful intermediate results	128
5. The modulated entropy	134
6. Construction of the approximate solutions	136
7. End of the proof	141
Bibliographie	147

CHAPITRE 1

Introduction

Sommaire

1. Présentation générale	11
1.1. Objectifs de la thèse	11
1.2. Quelques éléments de physique quantique	15
2. L'équation de Boltzmann quantique	17
2.1. Du microscopique au mésoscopique	17
2.2. Description de l'opérateur de collision	20
2.3. Équilibre thermodynamique et variables macroscopiques	22
3. Sur le problème de Cauchy	23
3.1. Cas classique	23
3.2. Cas des fermions	30
3.3. Résultats obtenus (Chapitre 4)	35
3.4. Cas des bosons	36
4. Limite des collisions rasantes	40
4.1. Le noyau de collision	40
4.2. Passage à la limite	43
4.3. Résultats obtenus (Chapitre 2, en collaboration avec Giuseppe Toscani)	45
5. Limites hydrodynamiques	48
5.1. Principe	48
5.2. Quelques résultats	49
5.3. Deux approches modernes de la limite hydrodynamique	51
5.4. Résultats obtenus dans le cas des bosons (Chapitre 3)	57
5.5. Résultats obtenus dans le cas des fermions (Chapitre 5)	59
6. Perspectives	61

1. Présentation générale

1.1. Objectifs de la thèse. Nous nous intéressons dans cette thèse à différents modèles permettant de décrire des gaz ou des fluides (voire des plasmas) composés de particules classiques ou, le plus souvent, ayant des propriétés quantiques¹. Nous nous concentrerons sur des modèles issus de la *théorie cinétique quantique*, en particulier sur l'*équation de Boltzmann quantique*. Il s'agit d'un sujet dont la littérature aussi bien physique que mathématique est encore peu développée, mais qui a de nombreuses applications : ces modèles permettent en effet de décrire des fluides dans des situations aussi diverses que des électrons dans un semiconducteur ou qu'un condensat de Bose-Einstein en dehors de l'équilibre.

¹Nous ne nous intéresserons pas ici aux effets relativistes : la vitesse de la lumière sera toujours considérée infinie.

1.1.1. *La théorie cinétique.* La théorie cinétique est née suite aux travaux de Bernouilli et de Clausius notamment, mais ses bases rigoureuses reposent sur les travaux de Maxwell et Boltzmann dans la deuxième moitié du XIX^e siècle. Elle s'applique à tout système formé d'un grand nombre de particules en interaction². L'idée générale est que pour décrire le système, on adopte une vision statistique. Dans le cas d'un fluide, on ne considère pas la position et la vitesse de chaque particule, mais plutôt la répartition statistique des particules dans l'espace des phases (c'est-à-dire l'espace des positions et des vitesses). Ainsi, typiquement, le fluide sera représenté par une fonction positive $f(t, x, v)$ dépendant du temps, de la position x et de la vitesse v , et telle que $\int_{\omega} \int_{\mathcal{V}} f(t, x, v) dv dx$ donne le nombre (ou la proportion) de particules qui à l'instant t se trouvent dans le volume ω et dont la vitesse est dans \mathcal{V} .

La fonction f est toujours supposée intégrable, et on peut donc la normaliser. Elle peut alors être vue comme la densité de probabilité de la variable aléatoire « coordonnées d'une particule dans l'espace des phases ». En l'absence d'interactions entre les particules et le milieu extérieur et entre les particules elles-mêmes, la distribution f est régie par l'équation du transport libre

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

qui dit simplement que les particules se déplacent en ligne droite à la vitesse v . La modélisation de l'interaction entre les particules dépend principalement de la portée de ces interactions, donc de la physique du problème. Lorsque les interactions sont à très longue portée, elles sont décrites par un terme de champ moyen. Lorsque les interactions sont de courte portée, on les représentera plutôt par un opérateur collisionnel. Ces deux approches sont bien sûr complémentaires lorsque la portée des collisions est intermédiaire, le terme de collision étant vu comme une correction en temps grand du terme de champ moyen. Plus précisément, lorsque l'interaction entre les particules découle d'un potentiel en puissance inverse de la forme

$$\phi(|x|) = \frac{C}{|x|^{s-1}}$$

avec $s \in [2, +\infty[$, une analyse d'échelle (voir [14]) montre que pour $s > 3$, le terme de collisions domine le terme de champ moyen, tandis que si $s < 3$, le terme de collision est négligeable devant le terme de champ moyen.

Un modèle de champ moyen s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \Phi \cdot \nabla_v f = 0, \quad \Phi = \phi * \rho$$

où $\phi(x)$ est le potentiel d'interaction et ρ est la densité locale de particules donnée par $\rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv$. L'équation est donc non linéaire. Le modèle de champ moyen le plus célèbre est celui de Vlasov-Poisson, qui correspond au cas où le potentiel d'interaction est donné par la fonction de Green du laplacien, de telle sorte qu'on a

$$\Delta_x \Phi = \rho,$$

modélisant ainsi les forces électrostatiques. Un modèle collisionnel s'écrit plutôt

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{C}(f)$$

où $\mathcal{C}(f)$ est un opérateur de collision qui s'exprime comme une intégrale dépendant de f . Son expression dépend du type d'interaction entre les particules et de la physique des

²Le théorie cinétique postule que la matière est constituée d'atomes invisibles à l'œil nu, ce qui était très controversé à l'époque.

collisions. Pour donner un exemple, citons le cas qui nous occupera beaucoup par la suite, celui de l'équation de Boltzmann quantique :

$$\mathcal{C}(f) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 + \kappa f)(1 + \kappa f_*) - f f_* (1 + \kappa f')(1 + \kappa f'_*)) dv_* d\omega.$$

Les notations seront détaillées dans la Section 2 ; notons toutefois que si $\kappa = 0$, on retrouve l'opérateur de Boltzmann classique.

1.1.2. *Les particules quantiques.* Les effets quantiques sont observables lorsque les énergies mises en jeu sont faibles, donc à basse température. Bien que ces effets soient par nature microscopiques, ils peuvent entraîner des comportements observables ou ayant des conséquences à l'échelle macroscopique comme la superfluidité³ (propriété qui permet à un fluide à très basse température de s'écouler à travers des canaux capillaires sans viscosité), la supraconductivité⁴ (absence de résistance électrique) ou l'effet photo-électrique⁵ (émission d'électrons par un matériau soumis à l'action de la lumière) utilisé par exemple dans les semi-conducteurs.

Il existe deux types de particules quantiques : les bosons et les fermions. Quelques exemples : l'atome d'hydrogène est un boson, le proton, le neutron et l'électron sont des fermions, l'hélium 3 est un fermion tandis que l'hélium 4 est un boson. Ces deux types de particules ont des comportements très différents. Les bosons ont tendance à se regrouper dans l'état de plus basse énergie, formant ainsi un condensat de Bose-Einstein ce qui peut donner naissance à des phénomènes de superfluidité ou de supraconductivité. Au contraire, les fermions obéissent au principe d'exclusion de Pauli, qui interdit à deux fermions d'un même système de se retrouver dans le même état quantique⁶. Les modèles décrivant des fluides quantiques auront donc des propriétés très différentes selon qu'ils décrivent des bosons ou des fermions.

1.1.3. *Trois échelles d'observation.* Un fluide peut être observé à différentes échelles spatiales. À l'échelle *microscopique*, on s'intéresse à l'évolution de chaque particule, et les modèles utilisés pour décrire le fluide dans ce cas sont les équations de Newton pour les particules classiques ou l'équation de Schrödinger pour les particules quantiques. Le problème de cette représentation est qu'elle nous donne beaucoup trop d'information (dans un fluide on n'a jamais besoin de connaître la position et la vitesse de chaque particule !) pour un coût de calcul gigantesque : dans le cas classique en dimension 3, pour un gaz de N particules, il y a $6N$ équations couplées pour autant d'inconnues ; à titre d'exemple dans un litre d'air à 20°C et 1 Bar on a $N \approx 2.5 \times 10^{22}$ particules.

On préfère souvent adopter une vision statistique du fluide en renonçant à une partie de l'information : c'est l'échelle *mésoscopique*, qui est le point de vue de la théorie cinétique. Le passage d'un modèle microscopique à un modèle cinétique se fait de la façon suivante

³découverte en 1937 par Pyotr Leonidovitch Kapitsa

⁴Kamerlingh Onnes a reçu le prix Nobel de physique en 1913 pour la découverte de la supraconductivité du mercure.

⁵Albert Einstein a expliqué ce phénomène par l'absorption de photons lors de l'interaction du matériau avec la lumière. Cette découverte lui valut le prix Nobel de physique en 1921.

⁶Un état quantique est la donnée de plusieurs nombres quantiques qui caractérisent cet état. Par exemple, pour l'électron dans un atome, il s'agit du nombre quantique principal qui définit le niveau d'énergie de l'électron, du nombre quantique secondaire qui détermine la sous-couche, du nombre quantique tertiaire qui est lié à l'orientation de l'orbitale atomique et du nombre de spin qui, lié aux symétries des particules, est une sorte de moment angulaire, bien que les particules ne soient pas en rotation sur elles-mêmes.

pour des particules classiques : on considère la densité de probabilité jointe de toutes les particules $f(t, x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_N, v_N)$ sur l'espace $(\Omega \times \mathbb{R}^3)^N$. Elle est solution de l'équation de Liouville, dont les caractéristiques sont les trajectoires des particules données par les équations de Newton. Les marginales de f vérifient alors un système d'équations appelé *hiérarchie BBGKY*⁷. Dans la limite où le nombre de particules est grand et si le gaz est suffisamment peu dense, il y a *propagation du chaos* : si la donnée initiale est factorisée $f(0, x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_N, v_N) = f_0(x_1, v_1)f_0(x_2, v_2) \times \dots \times f_0(x_N, v_N)$, ce qui correspond à des particules statistiquement indépendantes, alors cette propriété est vraie approximativement (dans la limite $N \rightarrow \infty$) pour tout temps, et la marginale associée à une particule vérifie une équation cinétique collisionnelle. Des justifications rigoureuses de cette limite appelée *limite de Boltzmann-Grad* existent [17, 45]. Avec des scalings différents, on peut également justifier le passage de modèles microscopiques à des modèles de champ moyen (voir par exemple [42] et ses références).

Enfin, on peut obtenir des modèles à l'échelle *macroscopique* en « dézoomant » encore. Le fluide est cette fois décrit par des variables ne dépendant que du temps et de l'espace, comme la densité, la vitesse, la pression, la température ou encore l'entropie. Il est possible de passer du point de vue microscopique au niveau macroscopique par des méthodes probabilistes (on pourra consulter par exemple à ce sujet [69] ou [43]). Cependant, nous nous intéresserons plutôt ici au passage du mésoscopique au macroscopique, appelé *limite hydrodynamique*, qui consiste mathématiquement à faire tendre le nombre de Knudsen⁸ vers 0 (voir la Section 5). Dans cette limite, le temps caractéristique de l'interaction entre les particules (et donc de leurs changements de vitesse) est très petit devant le temps caractéristique de l'évolution spatiale. Ainsi, très rapidement, la relaxation en vitesse a lieu, c'est-à-dire que les vitesses s'ordonnent de manière à correspondre à un état d'*équilibre thermodynamique* qui est invariant sous l'action des termes d'interaction. L'évolution du fluide est alors une évolution spatiale suivant des lois macroscopiques.

Les modèles cinétiques sont fondamentaux pour plusieurs raisons. D'abord, le nombre de degrés de liberté est drastiquement réduit par rapport à une description microscopique, ce qui rend ces modèles abordables à la fois du point de vue analytique et du point de vue de l'analyse numérique. Ensuite, ils permettent de prendre en compte dans la description des fluides des aspects microscopiques comme la dynamique des collisions entre particules. Enfin, ils décrivent des fluides qui ne sont pas forcément à l'équilibre thermodynamique (contrairement aux modèles macroscopiques qui font toujours cette hypothèse), c'est-à-dire dont la répartition des vitesses ne suit pas nécessairement une loi gaussienne (cas classique), une statistique de Bose-Einstein (cas des bosons) ou de Fermi-Dirac (cas des fermions). On peut observer expérimentalement des fluides hors de l'équilibre thermodynamique local, par exemple dans des écoulements très rapides dans un gaz raréfié (comme l'air autour d'un corps volant à très haute altitude) ; des condensats de Bose-Einstein ont également été réalisés hors équilibre thermodynamique.

1.1.4. *De nombreuses questions.* Les modèles cinétiques quantiques restent peu étudiés par rapport à leurs homologues classiques, et de nombreuses questions se posent autour des différents modèles que nous avons évoqués. La première est évidemment celle de leur validité physique. Permettent-ils de prévoir avec précision le comportement d'un gaz quantique ? Dans quels régimes, et sous quelles hypothèses ? La question se pose en particulier

⁷pour Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood et Yvon

⁸Le nombre de Knudsen est le rapport entre le libre parcours moyen des particules et l'échelle d'observation du fluide.

pour les fluides bosoniques, pour lesquels le phénomène de condensation est source de difficultés. Se pose ensuite la question de la validité mathématique de ces modèles. En particulier, l'équation de Boltzmann quantique a-t-elle des solutions? Dans quels espaces? Quel est le comportement de ces solutions? Nous verrons dans la Section 3 que seules des réponses partielles à ces questions sont connues. En particulier, la théorie de Cauchy de l'équation de Boltzmann pour les bosons est encore balbutiante.

On voudrait aussi pouvoir relier tous ces modèles entre eux. Dans quelle asymptotique passe-t-on d'un modèle à un autre? Et surtout, peut-on justifier mathématiquement ces passages? Dans la Section 4 nous présentons une asymptotique appelée *limite des collisions rasantes* qui permet de passer d'un modèle cinétique collisionnel à un modèle de champ moyen, puis dans la Section 5 nous décrivons le passage de l'équation de Boltzmann à des modèles macroscopiques à travers une asymptotique dite *limite hydrodynamique*.

1.2. Quelques éléments de physique quantique. En physique quantique, les objets ont une nature aléatoire. Cet aléa n'est pas la traduction d'une mauvaise connaissance des phénomènes quantiques comme en physique statistique, mais est inhérent à la nature des particules. Il se traduit par le fait que l'état d'une particule n'est pas donné par un ensemble de variables déterministes (position, vitesse, ...), mais par une *fonction d'onde* à valeurs complexes dont le module au carré est une densité de probabilité. Ainsi, lorsque deux fonctions d'onde s'ajoutent, elles peuvent donner lieu à des interférences. En outre, le *principe d'incertitude* dit qu'on ne peut pas connaître avec précision à la fois la position et la vitesse d'une particule.

1.2.1. *Les postulats.* Plusieurs postulats sont à la base de la physique quantique (voir par exemple [9]).

Postulat 1 : l'état d'un système quantique est décrit à l'instant t par un vecteur noté $|\Psi(t)\rangle$ d'un espace de Hilbert approprié H .

Dans le cas le plus simple où le système est constitué d'une particule sans spin, l'espace de Hilbert est $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ et la particule est décrite par une fonction d'onde $\psi(t, X)$ à valeurs complexes telle que $\int_{\Omega} |\psi(t, X)|^2 dX$ donne la probabilité de présence de la particule à l'instant t dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On suppose dans ce cas que la fonction d'onde est normalisée $\|\psi\|_{L^2} = 1$. Ce premier postulat est un principe de superposition : si ψ_1 et ψ_2 sont des états possibles du système, alors $\psi_1 + \alpha\psi_2$ est également un état possible ($\alpha \in \mathbb{C}$), ce qui peut causer des interférences.

Postulat 2 : si un système quantique est formé de deux sous-systèmes, alors l'espace de Hilbert qui le décrit est le produit tensoriel des deux espaces de Hilbert décrivant les sous-systèmes.

Ainsi, lorsqu'on s'intéresse à un système formé de deux particules, l'espace approprié devient $L^2(\mathbb{R}^6) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$. Mais si l'on comprend bien à quoi peut ressembler un état du type $|a + b\rangle \otimes |c + d\rangle$, qui correspond à une superposition d'états pour les deux particules, l'espace produit contient aussi des éléments de la forme $|a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |d\rangle$ qui n'ont pas d'interprétation classique évidente. Les états s'écrivant comme un produit tensoriel sont appelés *états purs*, tandis que ceux s'écrivant comme une somme d'états purs sont des *états liés* ou *intriqués*.

Postulat 3 : à toute grandeur physique A est associé un opérateur linéaire auto-adjoint \hat{A} (l'observable) sur H . Si $|\Psi\rangle$ est l'état du système lorsqu'on effectue la mesure de la

grandeur A , le résultat de la mesure est aléatoire ; il vaut a_α avec probabilité $\sum_{i=1}^{n_\alpha} |\langle \phi_i | \Psi \rangle|^2$ où les $(\phi_i)_{i=1}^{n_\alpha}$ forment une base orthonormale de vecteurs propres de \hat{A} engendrant l'espace propre associé à la valeur propre a_α . L'état du système après la mesure est⁹ $\frac{|\Psi_\alpha\rangle}{\|\Psi_\alpha\|}$.

L'opérateur associé à la position est $\langle \hat{X} | \Psi \rangle = X\Psi$, et celui associé à l'impulsion $\langle \hat{p} | \Psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla_X \Psi$ où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ avec h la constante de Planck¹⁰. D'après le postulat, le résultat d'une mesure est aléatoire, et le fait même d'effectuer une mesure sur un système quantique affecte le système. Son état juste après la mesure est tel que si l'on répète cette mesure immédiatement, on obtient le même résultat. Il y a une perte d'information irréversible. Notons que certains observables ont un spectre continu. On peut dans ce cas étendre le postulat en utilisant la mesure spectrale.

Postulat 4 : notons $|\Psi(t)\rangle$ l'état d'un système à l'instant t . Entre deux mesures, l'évolution du système au cours du temps est régie par l'équation

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

où \hat{H} est l'observable représentant l'énergie du système.

C'est la forme générale de l'équation de Schrödinger. Dans le cas d'un système à une particule, l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(X)$$

avec m la masse de la particule, Δ le laplacien dans \mathbb{R}^3 et $V(X)$ un potentiel.

Des expériences montrent que pour décrire convenablement des particules quantiques, les variables position et impulsion ne sont pas suffisantes : il faut ajouter une variable intrinsèque appelée *spin*, qui est une sorte de moment magnétique et dont les propriétés sont à la base de nombreuses applications, comme l'Imagerie par Résonance Magnétique. Le spin d'une particule est soit un entier soit un demi-entier. Les particules de spin entier sont les bosons et les particules de spin demi-entier sont des fermions.

1.2.2. *Deux types de particules.* Considérons un système de N particules identiques. En mécanique classique, on peut suivre chaque particule car les trajectoires sont bien définies, et donc on peut numéroter ces particules. En mécanique quantique en revanche, les particules ont seulement une probabilité de présence dans l'espace et les particules n'ont pas de trajectoires à proprement parler. Des particules identiques sont donc parfaitement indiscernables. Ceci a une conséquence sur l'état du système : il doit être soit symétrique, soit antisymétrique. On peut montrer (c'est le théorème spin-statistique) que les vecteurs d'état des bosons sont symétriques tandis que ceux des fermions sont antisymétriques.

Supposons qu'il existe une situation où deux fermions sont indépendants ; l'hamiltonien du système s'écrit

$$\hat{H} = \hat{h}(X_1) + \hat{h}(X_2).$$

Lorsque l'hamiltonien ne dépend pas du temps, les fonctions de la forme $e^{i\omega t} \Psi$ sont solutions de l'équation de Schrödinger si Ψ est une fonction propre de l'hamiltonien. Or les fonctions propres de \hat{H} sont de la forme $\phi_i(X_1, \sigma_1) \phi_j(X_2, \sigma_2)$ où les ϕ_i sont des vecteurs propres de \hat{h} et σ_1, σ_2 sont les variables de spin. Les indices i représentent les nombres quantiques de la particule 1 (et donc numérotent les états possibles) tandis que les indices

⁹Nous notons $|\Psi_\alpha\rangle$ la projection orthonormale de $|\Psi\rangle$ sur le sous-espace propre associé à a_α .

¹⁰ $h = 6,6262 \times 10^{-34}$ J.s

j numérotent les états pour la particule 2. Si les deux particules sont dans le même état, et donc si $i = j$, la fonction d'onde s'écrit

$$\Psi = \phi_i(X_1, \sigma_1)\phi_i(X_2, \sigma_2)$$

qui est symétrique. Or d'après le théorème spin-statistique, les fermions ont une fonction d'onde nécessairement antisymétrique. Ainsi, des fermions ne peuvent pas être dans le même état quantique : c'est le **principe d'exclusion de Pauli**. Un système de N fermions sera donc toujours dans un état de la forme

$$\Psi(X_1, \dots, X_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_N} s(\pi) \phi_1(X_{\pi(1)}) \phi_2(X_{\pi(2)}) \dots \phi_N(X_{\pi(N)})$$

où \mathcal{S}_N est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, N\}$ et $s(\pi)$ est la signature de la permutation π , tandis que N bosons identiques seront dans un état de la forme

$$\Psi(X_1, \dots, X_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_N} \phi_1(X_{\pi(1)}) \phi_2(X_{\pi(2)}) \dots \phi_N(X_{\pi(N)}).$$

1.2.3. *Transformée de Wigner.* Terminons cette présentation succincte de la mécanique quantique en introduisant la transformée de Wigner d'une fonction d'onde à une particule Ψ

$$W(X, P) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{iP \cdot Y} \bar{\Psi}\left(X + \frac{h}{2}Y\right) \Psi\left(X - \frac{h}{2}Y\right) dY$$

dont le but est de fournir une représentation dans l'espace des phases de la fonction d'onde. Si la fonction d'onde vérifie une équation de Schrödinger, alors sa transformée de Wigner vérifie une équation pseudodifférentielle et les deux formulations sont équivalentes ; de plus, dans la limite semi-classique où la constante de Planck h tend vers 0, l'équation satisfaite par W devient l'équation de Liouville. La transformée de Wigner peut donc s'interpréter à la limite comme une sorte de probabilité de présence dans l'espace des phases.

2. L'équation de Boltzmann quantique

Nous allons maintenant présenter plus en détails les modèles auxquels nous nous intéresserons et leurs liens, représentés sur la Figure 1.

2.1. Du microscopique au mésoscopique. La seule manière de modéliser des fluides quantiques sans aucune approximation est l'équation de Schrödinger à N particules

$$i\hbar \partial_t \Psi_N = \mathcal{H}_N \Psi_N$$

où $\Psi_N \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ est la fonction d'onde à N corps et \mathcal{H}_N est l'hamiltonien du système. Dans le contexte classique, une dérivation rigoureuse de l'équation de Boltzmann à partir des lois de Newton a été obtenue par Lanford [45]. Cette dérivation est remarquable car elle montre qu'une transition d'un système réversible (la dynamique hamiltonienne microscopique) vers une dynamique irréversible (l'équation de Boltzmann) est possible, et en même temps elle n'est pas satisfaisante d'un point de vue physique car la convergence d'une dynamique à une autre n'est prouvée qu'en temps court, de l'ordre du temps moyen entre deux collisions. En revanche, jusqu'à présent, on ne sait pas dériver rigoureusement les équations de Boltzmann quantiques à partir de l'équation de Schrödinger ; seuls des résultats partiels ont été obtenus [10, 12]. On trouvera dans [13] un résumé clair de l'état de l'art sur ce sujet.

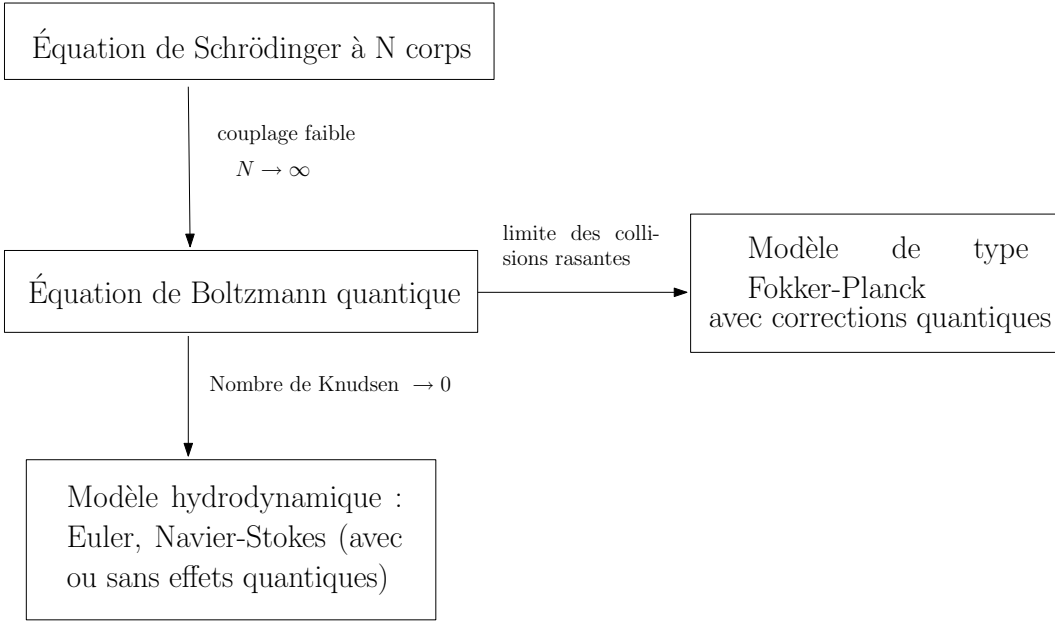


FIG. 1. Différents modèles pour des fluides quantiques, et leurs interactions.

Le modèle de départ est l'équation de Schrödinger à N corps pour N particules quantiques identiques interagissant deux à deux à travers un potentiel ϕ de sorte que l'énergie totale d'interaction s'écrive

$$U(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i < j} \phi(x_i - x_j).$$

L'équation de Schrödinger associée est

$$(2.1) \quad i\partial_t \Psi(X_N, t) = -\frac{1}{2} \Delta_N \Psi(X_N, t) + U(X_N) \Psi(X_N, t)$$

où la constante de Planck \hbar est normalisée, Δ_N est le laplacien par rapport aux variables x_i et $X_N = (x_1, \dots, x_N)$. Comme les particules sont identiques, Ψ est supposée symétrique par rapport aux x_i . L'étape suivante est de considérer le changement d'échelle

$$x \mapsto \varepsilon x, \quad t \mapsto \varepsilon t, \quad \phi \mapsto \sqrt{\varepsilon} \phi, \quad N = \frac{1}{\varepsilon^3}.$$

Dans cette échelle, on étudie le gaz en temps long (de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$) et sur de longues distances (idem), de telle sorte que la vitesse typique de déplacement des particule est de l'ordre de l'unité (c'est le scaling hyperbolique). D'autre part, la densité typique de particules par unité de volume est également de l'ordre de l'unité (il ne s'agit pas d'un gaz dilué) tandis que les interactions sont faibles¹¹, de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$. L'équation (2.1) se réécrit

$$i\varepsilon \partial_t \Psi^\varepsilon(X_N, t) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta_N \Psi^\varepsilon(X_N, t) + U^\varepsilon(X_N) \Psi^\varepsilon(X_N, t)$$

où

$$U^\varepsilon(X_N) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{i < j} \phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right).$$

¹¹Il y a ici une différence importante avec le cas classique : l'équation de Boltzmann classique est obtenue pour un gaz dilué, tandis que son homologue quantique s'obtient pour des gaz denses mais avec des interactions faibles entre les particules.

Pour étudier la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on adopte une approche cinétique en introduisant la transformée de Wigner

$$W^N(X_N, V_N) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3N} \int e^{iV_N \cdot Y_N} \bar{\Psi}^\varepsilon \left(X_N + \frac{\varepsilon}{2} Y_N\right) \Psi^\varepsilon \left(X_N - \frac{\varepsilon}{2} Y_N\right) dY_N.$$

On montre facilement que W^N satisfait une équation de transport :

$$\partial_t W^N + V_N \cdot \nabla_{X_N} W^N(X_N, V_N) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (T_N^\varepsilon W^N)(X_N, V_N).$$

L'opérateur T_N^ε prend en compte les « collisions » entre les différentes particules, même entre des particules distantes. Néanmoins, celles-ci sont pénalisées par un terme fortement oscillant du type $\exp(i\frac{x_i - x_k}{\varepsilon})$ qui disparaît à la limite.

L'étape suivante est d'introduire une hiérarchie d'équations satisfaites par les traces partielles de W^N , notées f_N^j et définies par

$$f_N^j(X_j, V_j) = \int W^N(X_N, V_N) dx_{j+1} \dots dx_N dv_{j+1} \dots dv_N.$$

Elles sont solutions de

$$\left(\partial_t + \sum_{k=1}^j v_k \cdot \nabla_{x_k}\right) f_N^j(X_j, V_j) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} T_j^\varepsilon f_N^j + \frac{N-j}{\sqrt{\varepsilon}} C_{j+1}^\varepsilon f_N^{j+1}$$

où le terme T_j^ε prend en compte les collisions entre particules du sous-système formé des j premières particules tandis que C_{j+1}^ε tient compte des collisions entre une particule du sous-système et une particule extérieure. Dans le cas classique, une telle hiérarchie d'équations s'appelle hiérarchie BBGKY.

Il faut maintenant spécifier une condition initiale pour f_N^j . Dans le cas classique, on prend une condition initiale factorisée du type $f_N^j(t=0) = f_0^{\otimes j}$ où f_0 est une distribution de probabilité à une particule. On s'attend alors à ce que la solution f_N^j reste factorisée pour tout temps¹² $f_N^j(t) \sim f(t)^{\otimes j}$, où $f(t)$ est solution de l'équation de Boltzmann. Dans le cas quantique en revanche, on ne peut pas espérer une telle décorrélation. On choisit donc la condition initiale la plus décorrélée possible, qui correspond aux états dits « quasi-libres » et s'écrit

$$f_j^N(t=0, x_1, v_1, \dots, x_j, v_j) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_j} \kappa^{s(\pi)} f_j^\pi(x_1, v_1, \dots, x_j, v_j)$$

où \mathcal{S}_j est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, j\}$, $s(\pi)$ est la signature de la permutation π , $\kappa = +1$ dans le cas bosonique et -1 dans le cas fermionique, et

$$f_j^\pi(x_1, v_1, \dots, x_j, v_j) = \int dy_1 \dots dy_j dw_1 \dots dw_j e^{i(y_1 \cdot v_1 + \dots + y_j \cdot v_j)} \prod_{k=1}^j e^{-\frac{i}{\varepsilon} w_k \cdot (x_k - x_{\pi(k)})} e^{-\frac{i}{2} w_k \cdot (y_k + y_{\pi(k)})} f\left(\frac{x_k + x_{\pi(k)}}{2} + \varepsilon \frac{y_k - y_{\pi(k)}}{4}, w_k\right)$$

avec f une fonction de Wigner donnée à une particule. Cette écriture « barbare » est simplement la traduction en terme de transformée de Wigner du théorème spin-statistique qui dit que l'état d'un gaz de particules identiques est symétrique pour des bosons et antisymétrique pour des fermions [11].

¹²C'est ce qu'on appelle la propagation du chaos.

Avec cette condition initiale, on utilise la formule de Duhamel pour écrire f_N^j comme une série en puissances de ε . On peut écrire le même genre de série pour $f^j(t) = f^{\otimes j}(t)$ où $f(t)$ est la limite supposé de $f_N^1(t)$, solution de l'équation de Boltzmann quantique, et l'idée est alors de montrer que les termes de la première série convergent vers les termes de la deuxième. Cette opération a été menée à bien pour les premiers ordres [10] mais on est encore loin d'une convergence uniforme en temps, même sur des temps courts comme pour le cas classique, notamment à cause de phénomènes d'oscillation. Néanmoins, formellement, $f_N^1(t)$ converge vers la solution $f(t)$ de l'équation de Boltzmann quantique

$$(2.2) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q_\kappa(f).$$

2.2. Description de l'opérateur de collision. Le terme à gauche de l'égalité modélise le transport libre : en l'absence de collision, une particule voyage en ligne droite à vitesse constante. Le terme de droite est l'opérateur de collision, défini par

$$(2.3) \quad Q_\kappa(f) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 + \kappa f)(1 + \kappa f_*) - f f_* (1 + \kappa f')(1 + \kappa f'_*)) dv_* d\omega.$$

Cette équation a été obtenue par les physiciens Nordheim [57] en 1928 puis Uehling et Uhlenbeck [67] en 1933 directement grâce à des considérations physiques, sans dérivation à partir d'un modèle microscopique. L'opérateur de collision décrit la variation de la densité de particules $f(t, x, v)$ sous l'effet des collisions entre particules. Comme il est classique de le faire en théorie cinétique, nous avons utilisé les notations

$$f \equiv f(t, x, v), \quad f_* \equiv f(t, x, v_*), \quad f' \equiv f(t, x, v'), \quad f'_* \equiv f(t, x, v'_*)$$

où v, v_* sont les vitesses postcollisionnelles et v', v'_* les vitesses précollisionnelles. Comme nous l'avons précisé plus haut, κ vaut +1 pour un gaz de bosons et -1 pour un gaz de fermions, tandis que $\kappa = 0$ correspond au cas classique.

L'opérateur de collision reflète directement les hypothèses physiques du système. En effet, les collisions sont *localisées en temps et en espace*, c'est-à-dire ont lieu pendant une durée et sur une distance très courtes devant le temps et la longueur caractéristiques du système, ce qui se traduit par le fait que l'opérateur de collision n'agit qu'en vitesse sur f . De plus, les collisions sont supposées *binaires*, ce qui provient de l'hypothèse de couplage faible, et *élastiques*, c'est-à-dire préservant le moment et l'énergie cinétique :

$$\begin{cases} v + v_* = v' + v'_* \\ |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2 \end{cases}$$

ce qui permet de paramétrer les vitesses précollisionnelles possibles à l'aide d'un paramètre $n \in S^2$

$$\begin{cases} v' = v - [(v - v_*) \cdot n]n \\ v'_* = v_* + [(v - v_*) \cdot n]n \end{cases}$$

ou bien avec $\omega \in S^2$

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \omega \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \omega. \end{cases}$$

Le noyau de collision $B(v - v_*, \omega)$ est une quantité positive qui figure en quelque sorte la loi de probabilité (non normalisée) des vitesses précollisionnelles¹³.

On retrouve dans l'opérateur de collision la propriété que les bosons ont tendance à s'aggréger : le fait que des particules aient la vitesse v augmente la proportion de particules obtenant cette même vitesse après collision ; à l'inverse, les fermions obéissent au principe d'exclusion de Pauli, et le fait que des particules aient la vitesse v diminue la proportion de particules acquérant cette même vitesse après collision.

Enfin, $Q_\kappa(f)$ n'est pas quadratique en f comme dans le cas classique¹⁴ ($\kappa = 0$), mais cubique (les termes d'ordre 4 s'annulent). A priori, cette non linéarité supplémentaire est une source de complications dans l'étude de l'existence de solutions à cette équation (voir Section 3).

Les transformations $(v, v_*) \mapsto (v', v'_*)$ et $(v, v') \mapsto (v_*, v'_*)$ ont pour jacobien 1, ce qui permet au noyau de collision de jouir de propriétés de symétrie. Ainsi, pour toute fonction f et toute fonction test φ telles que les intégrales soient bien définies, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_\kappa(f) \varphi dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) f f_* (1 + \kappa f') (1 + \kappa f'_*) (\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) d\omega dv_*$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_\kappa(f) \varphi dv = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 + \kappa f) (1 + \kappa f_*) - f f_* (1 + \kappa f') (1 + \kappa f'_*)) \times (\varphi + \varphi_* - \varphi' - \varphi'_*) d\omega dv_*$$

d'où l'on tire deux propriétés formelles importantes de $Q_\kappa(f)$:

Invariants de collision et lois de conservation : Les fonctions φ qui annulent la quantité $\int_{\mathbb{R}^3} Q_\kappa(f) \varphi(v) dv$ quelque soit la distribution f sont appelées *invariants de collision* et sont données par

$$\left(\forall f \int_{\mathbb{R}^3} Q_\kappa(f) \varphi(v) dv = 0 \right) \Leftrightarrow \varphi(v) = \alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2$$

avec α et γ des réels et β un vecteur quelconques. Les invariants de collisions sont donc les combinaisons linéaires de $1, v, |v|^2$, ce qui nous permet d'écrire les lois de conservation formellement satisfaites par f en intégrant l'équation (2.2) contre ces trois quantités :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} v f dv = 0 \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} v f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} v \otimes v f dv = 0 \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 v f dv = 0. \end{array} \right.$$

Elles expriment la conservation locale de la masse, du moment et de l'énergie : c'est le premier principe de la thermodynamique.

Théorème H :

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} [f \log f - \kappa(1 + \kappa f) \log(1 + \kappa f)] dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} v [f \log f - \kappa(1 + \kappa f) \log(1 + \kappa f)] dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} Q_\kappa(f) \log \left(\frac{f}{1 + \kappa f} \right) dv \leq 0. \end{aligned}$$

¹³Voir la Section 4.

¹⁴On peut consulter [70] pour une introduction très complète à l'équation de Boltzmann classique et quelques remarques sur le cas quantique.

Il exprime le second principe de la thermodynamique : l'entropie $\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} [f \log f - \kappa(1 + \kappa f) \log(1 + \kappa f)] dv dx$ décroît au cours du temps. Cela suggère que la solution f converge vers une fonction qui minimise l'entropie à masse, moment et énergie fixés. Les minimiseurs de l'entropie correspondent aux annulateurs du noyau de collision [26].

Les invariants de collision permettent d'écrire un système de lois de conservations satisfaites par f . Pour fermer ce système, il suffirait de pouvoir écrire les deux intégrales $\int v \otimes v f dv$ et $\int v |v|^2 f dv$ en fonction de la masse $\int f dv$, du moment $\int v f dv$ et de l'énergie cinétique $\int |v|^2 f dv$. Cela n'est en général pas possible, mais lorsque f prend une forme particulière, celle de l'équilibre thermodynamique, alors le système peut être clos.

2.3. Équilibre thermodynamique et variables macroscopiques. Le théorème H et les invariants de collision permettent de trouver la forme des solutions d'équilibre régulières. En effet, fixons f mesurable telle que les objets que nous écrivons aient un sens ; alors

$$Q_{\kappa}(f) = 0 \text{ p.p.} \Leftrightarrow \int Q_{\kappa}(f) \log \left(\frac{f}{1 + \kappa f} \right) dv = 0$$

car

$$\begin{aligned} & \int Q_{\kappa}(f) \log \left(\frac{f}{1 + \kappa f} \right) dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (1 + \kappa f)(1 + \kappa f_*)(1 + \kappa f')(1 + \kappa f'_*) \left(\frac{f'}{1 + \kappa f'} \frac{f'_*}{1 + \kappa f'_*} - \frac{f}{1 + \kappa f} \frac{f_*}{1 + \kappa f_*} \right) \\ & \quad \times \left[\log \left(\frac{f}{1 + \kappa f} \right) + \log \left(\frac{f_*}{1 + \kappa f_*} \right) - \log \left(\frac{f'}{1 + \kappa f'} \right) - \log \left(\frac{f'_*}{1 + \kappa f'_*} \right) \right] dv_* dv d\omega \end{aligned}$$

et l'intégrande symétrisée est partout négative (on suppose que $0 \leq f < 1$ dans le cas des fermions $\kappa = -1$). Cela signifie que $\log \left(\frac{f}{1 + \kappa f} \right)$ est un invariant de collisions, donc s'écrit

$$\log \left(\frac{f}{1 + \kappa f} \right) = \alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2,$$

ou encore

$$f = \frac{e^{\alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2}}{1 - \kappa e^{\alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2}}.$$

Définissons les variables macroscopiques densité R , vitesse U et température T en dimension 3 par

$$R = \int_{\mathbb{R}^3} f dv, \quad RU = \int_{\mathbb{R}^3} v f dv, \quad \frac{1}{2} R |U|^2 + \frac{3}{2} RT = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{2} f dv;$$

les distributions d'équilibre dans le cas classique sont appelées maxwelliennes, et celle qui a les mêmes densité, vitesse et température que f s'écrit

$$M_{(R,U,T)}(v) = \frac{R}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\frac{|v-U|^2}{2T}}.$$

Notons $M = \gamma e^{-\frac{|v-U|^2}{2\tau}}$ ($\gamma \geq 0, \tau > 0$) ; pour un gaz de fermions, les distributions d'équilibre sont données par

$$(2.5) \quad P(v) = \frac{M(v)}{1 + M(v)},$$

appelée distribution de Fermi-Dirac, ou par

$$P(v) = \mathbb{1}_{|v-v_0|<R} \quad (R > 0)$$

qui est une distribution dégénérée. Dans le cas des bosons, les états d'équilibre dépendent de la température T du système. On sait en effet qu'à très basse température, les bosons ont tendance à se mettre tous dans le même état d'énergie et à former ainsi un condensat de Bose-Einstein. Cela se traduit par l'existence d'une température critique $T_c > 0$ telle que les états d'équilibre s'écrivent

$$(2.6) \quad P(v) = \frac{M(v)}{1 - M(v)} \quad (\tau > 0, 0 < \gamma < 1) \quad \text{si } T \geq T_c,$$

qui est une distribution de Bose-Einstein, ou

$$P(v) = \frac{M(v)}{1 - M(v)} + \mu\delta_U \quad (\tau > 0, \gamma = 1, \mu > 0) \quad \text{si } T < T_c.$$

Dans le deuxième cas, la partie singulière modélise un condensat de Bose-Einstein. Ainsi, lorsque la masse du système est fixée, la condensation a lieu lorsque la température passe en-dessous d'une température critique. Mais on peut également observer la condensation en se plaçant à température fixée, lorsque la masse dépasse une masse critique déterminée.

Le lien entre les coefficients γ, τ, U des distributions régulières (2.5) et (2.6) et les variables macroscopiques R, U, T associées à ces distributions est plus compliqué que dans le cas classique. Notons d'abord que la vitesse macroscopique U est bien égale au coefficient U , ce qui nous autorise cet abus de notations. Arlotti et Lachowicz [5] montrent que l'on peut écrire

$$(2.7) \quad R = 2^{5/2} \pi \tau^{3/2} \gamma \sigma_\kappa^1(\gamma)$$

$$(2.8) \quad 3TR = 2^{7/2} \pi \tau^{5/2} \gamma \sigma_\kappa^2(\gamma)$$

où

$$\sigma_\kappa^p(\gamma) = \int_0^\infty y^{p-\frac{1}{2}} \frac{1}{e^y + \kappa\gamma} dy, \quad p > -\frac{1}{2}$$

et où comme d'habitude $\kappa = +1$ pour les bosons et $\kappa = -1$ pour les fermions. Ils vont même plus loin en montrant que si on pose $I_+ =]0, \infty[$, $I_- =]0, 1[$ et $\Omega_\kappa = I_\kappa \times]0, \infty[$, alors il existe deux nombres positifs l_κ tels que les relations (2.7)-(2.8) définissent une bijection entre $(\gamma, \tau) \in \Omega_\kappa$ et $(R, T) \in \Lambda_\kappa = \{(R, T) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, T > l_\kappa R^{2/3}\}$.

3. Sur le problème de Cauchy

Dans cette section, nous allons détailler les théories d'existence de solutions à l'équation de Boltzmann aussi bien dans le cas classique que dans le cas des fermions et des bosons. Ceci nous permet de mettre en évidence certaines caractéristiques et certaines difficultés de ces équations.

3.1. Cas classique. Lorsque les particules obéissent aux lois de la mécanique classique, l'opérateur de collision est quadratique en f et s'écrit

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, w) (f' f'_* - f f_*) dv_* d\omega$$

avec les notations habituelles. La principale difficulté dans l'établissement d'une théorie d'existence est que cet opérateur n'est pas défini en général pour des fonctions dans L^1 ni

même $L \log L$, qui sont les espaces d'étude naturels. Ceci est dû au fait que cet opérateur n'est qu'un produit de fonctions pour la variable x .

3.1.1. *Les principaux résultats d'existence.* Ils se divisent en quatre catégories :

Équation spatialement homogène : lorsque le problème considéré ne dépend pas de la variable d'espace, l'équation est considérablement simplifiée. Le terme de transport disparaît, et l'opérateur de collision est lipschitzien dans L^1 : on peut alors montrer l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions pour tout temps. On peut en outre vérifier la convergence des solutions vers un état d'équilibre en temps grand. Cette théorie a été initiée dans les années 1930 par Carleman, et a été très largement enrichie depuis. Plusieurs raisons sont à l'origine de cette étude : d'abord, l'équation de Boltzmann est très compliquée, et il est naturel de séparer les problèmes en étudiant d'un côté l'équation de transport et de l'autre l'effet des collisions. Cette approche est en outre utilisée en pratique par certains algorithmes de simulation de solutions de l'équation de Boltzmann, dits « algorithmes de splitting » : on fait avancer les particules par transport libre, puis on modifie les vitesses sous l'effet des collisions, et on recommence. La compréhension de l'équation de Boltzmann spatialement homogène est nécessaire à la justification de tels schémas.

Théorie perturbative : on peut construire des solutions globales en temps lorsque la donnée initiale est proche d'une solution d'équilibre. On a alors unicité des solutions et convergence vers l'équilibre. L'outil principal est l'étude des propriétés de l'opérateur de collision linéarisé, et en particulier de son spectre. Citons à ce sujet le résultat pionnier de Ukai [68] ou, plus récemment, les solutions construites par Guo [36].

Solutions proches du vide : en choisissant une donnée initiale petite (et concentrée en espace et en vitesse) vérifiant $0 \leq f_0(x, v) \leq ae^{-b(|x|^2+|v|^2)}$ avec $a > 0$ petit et $b > 0$, on peut construire une unique solution satisfaisant

$$0 \leq f(t, x, v) \leq C \cdot ae^{-b|x-vt|^2} \quad \text{p.p.}$$

en exploitant la monotonie de la partie positive et de la partie négative de l'opérateur de collision, respectivement

$$Q^+(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v, v_*, \omega) f' f'_* d\omega dv_*$$

et

$$Q^-(f, f) = f \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v, v_*, \omega) f_* d\omega dv_*.$$

Solutions renormalisées : il s'agit du seul résultat d'existence globale sans autre hypothèse sur la donnée initiale qu'une masse, une énergie et une entropie finie, dû à DiPerna et Lions [22]. Les ingrédients principaux sont : l'introduction d'une nouvelle notion de solutions, les « solutions renormalisées », qui rendent l'opérateur de collision sous-linéaire ; de la compacité grâce aux propriétés de l'opérateur de collision et aux de moyenne, et un résultat de stabilité faible. Les inconvénients de ce résultats sont de ne pas donner d'informations sur l'unicité ni la régularité des solutions ; en particulier, on ne sait pas si les solutions conservent l'énergie (elles vérifient seulement une inégalité d'énergie), et elles ne vérifient même pas l'équation au sens des distributions ! Elles sont toutefois incontournables dès lors qu'on veut

prouver des résultats n'ayant que des hypothèses réalistes du point de vue de la physique.

3.1.2. *Les solutions renormalisées.* Nous allons nous concentrer sur la notion de solution renormalisée et voir quel résultat on obtient dans le cadre de l'équation de Boltzmann. La version que nous présentons ici n'est pas celle de l'article original [22] mais une version améliorée : on considère des solutions qui convergent à l'infini (en espace) vers une maxwellienne [50], par exemple la maxwellienne centrée réduite $M(v) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}$, et qui vérifient une version faible de la conservation locale de l'impulsion impliquant une mesure de défaut [51]. Cependant, nous ne nous préoccupons pas des conditions de bord et travaillerons dans l'espace entier pour simplifier.

Les solutions renormalisées ne sont pas solutions de l'équation au sens usuel, mais elles vérifient plutôt une famille d'équations formellement équivalentes à l'équation de Boltzmann. Précisons ce que nous entendons par là :

DEFINITION 3.1. Une solution renormalisée de l'équation de Boltzmann relativement à l'équilibre M est une fonction

$$f \in C(\mathbb{R}_+; L_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$$

telle que, au sens des distributions, on ait

$$\begin{aligned} M(\partial_t + v \cdot \nabla_x) \Gamma \left(\frac{f}{M} \right) &= \Gamma' \left(\frac{f}{M} \right) Q(f, f) \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ f|_{t=0} &= f_0 \geq 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

pour toute fonction $\Gamma \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $\Gamma'(z) \leq \frac{C}{\sqrt{1+z}}$, dite renormalisation admissible. On demande de plus que pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et tout intervalle de temps $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$ on ait

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} M \varphi \Gamma \left(\frac{f}{M} \right) (t_2, x, v) dv dx - \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} M \varphi \Gamma \left(\frac{f}{M} \right) (t_1, x, v) dv dx \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} M(v \cdot \nabla_x) \varphi \Gamma \left(\frac{f}{M} \right) (t, x, v) dv dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} M \Gamma' \left(\frac{f}{M} \right) Q(f, f)(t, x, v) dv dx dt. \end{aligned}$$

Il est clair qu'une solution régulière de l'équation de Boltzmann est aussi une solution renormalisée. D'autre part, si $Q^\pm(f, f) \in L_{loc}^1$, alors f est une solution renormalisée de l'équation de Boltzmann si et seulement si c'est une solution au sens des distributions.

Avec cette notion de solution, on peut montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. *Supposons que le noyau de collision vérifie l'hypothèse de cutoff de Grad [35] :*

$$(3.1) \quad \begin{cases} 0 \leq B(|z|, \sigma) \leq C_b(1 + |z|)^\beta & p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^3 \times S^2, \quad \text{avec } \beta \in [0, 1] \\ \int_{S^2} B(z, \sigma) d\sigma \geq \frac{1}{C_b} \frac{|z|}{1 + |z|} & p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Soit f_0 une donnée initiale qui soit une fluctuation autour de l'équilibre global M :

$$H(f_0|M) := \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left(f_0 \log \frac{f_0}{M} - f_0 + M \right) dx dv < +\infty.$$

Alors il existe une solution renormalisée $f \in C(\mathbb{R}_+; L_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ de l'équation de Boltzmann de donnée initiale f_0 . De plus, f vérifie

– la conservation locale de la masse

$$(3.2) \quad \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} v f dv = 0 ;$$

– la conservation locale du moment avec une mesure de défaut

$$(3.3) \quad \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} v f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} v \otimes v f dv + \nabla_x \cdot m = 0$$

où m est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ à valeur dans les matrices symétriques positives ;

– l'inégalité d'entropie

$$H(f|M)(t) + \int tr(m)(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} D(f)(s, x) dx ds \leq H(f_0|M)$$

où $tr(m)$ est la trace de m et où la dissipation d'entropie est définie par

$$D(f) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2} B(v - v_*, \sigma) (f' f'_* - f f_*) \log \frac{f' f'_*}{f f_*} dv dv_* d\sigma.$$

La démonstration de ce résultat repose sur un résultat de stabilité qui permet d'affirmer que si on a une suite de solutions renormalisées (f_n) uniformément bornée par l'entropie relative, alors elle converge vers une fonction f qui est elle-même une solution renormalisée de l'équation de Boltzmann. Le problème principal est que la borne sur l'entropie n'entraîne que la convergence faible de la suite (f_n) , tandis que l'opérateur de collision est non linéaire et donc a priori pas continu pour la topologie faible. Pour surmonter ces difficultés, il faut gagner de la compacité forte, grâce aux *lemmes de moyenne*.

Notons que le résultat précédent à été étendu à des noyaux de collision singuliers plus raisonnables physiquement, au prix d'une définition plus faible encore de solution renormalisée [3]. Une revue récente des résultats d'existence pour l'équation de Boltzmann homogène et inhomogène avec noyau de collision singulier peut être trouvée dans [2].

3.1.3. *Les lemmes de moyenne.* Les équations cinétiques, c'est-à-dire de la forme

$$(3.4) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = g \quad \text{où } f \equiv f(t, x, v)$$

sont des équations de type hyperbolique. La solution f ne peut donc pas être plus régulière que la donnée initiale ni que le terme source g . En supposant par exemple que l'équation (3.4) est posée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, on le voit bien sur une formule de Duhamel aisément obtenue à l'aide des caractéristiques qui nous permet d'écrire la solution en fonction de la donnée initiale et du terme source

$$f(t, x, v) = f_0(x - vt, v) + \int_0^t g(s, x + (s - t)v, v) ds.$$

En revanche, une particularité de ce type d'équations est que les moyennes en vitesse du type

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \phi(v) dv$$

où $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ gagnent de la régularité. Ce phénomène a été observé pour la première fois dans [29] dans un cadre L^2 puis étendu dans [28]. Les résultats ont régulièrement été améliorés depuis, et on peut trouver de nombreuses explications à ce sujet dans [39]. Les lemmes de moyenne sont utiles à la fois pour prouver l'existence des solutions renormalisées

et pour étudier certaines limites hydrodynamiques, mais aussi dans l'étude d'équations de champ moyen, notamment l'équation de Vlasov-Maxwell.

Appliquons la transformée de Fourier en temps et en espace à l'équation (3.4), qui est supposée être valable dans $L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$:

$$i(\tau + v \cdot \xi) \mathcal{F}f(\tau, \xi, v) = \mathcal{F}g.$$

Si $|\tau + v \cdot \xi| > \alpha$, $\mathcal{F}f$ a de bonnes propriétés de décroissance, et donc la partie correspondante de f est régulière. Le fait de considérer une moyenne de f sert à rendre petite la contribution de la partie où $|\tau + v \cdot \xi| \leq \alpha$. En écrivant cela plus rigoureusement et après optimisation de α , on obtient le résultat suivant [28] :

THÉORÈME 3.3. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$ solution de l'équation de transport (3.4). Alors, pour toute fonction $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ à support compact, on a*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^3} f \phi(v) dv \right\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{1/2}(\mathbb{R}^3))} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)}^{1/2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)}^{1/2}$$

où C est une constante positive ne dépendant que de ϕ .

Ce résultat peut être étendu au cas où $f \in L^p$ avec $1 < p < +\infty$ grâce à des arguments d'interpolation. En revanche, il échoue dans L^1 à cause de problèmes de concentration, comme le montre le contreexemple suivant tiré de [28] : considérons une suite de termes sources g_n bornée dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, telle que

$$g_n \rightarrow \varphi'(t) \delta_{x-v_0 t} \otimes \delta_{v-v_0}$$

pour une fonction test $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ et $v_0 \neq 0$. Soit f_n une suite de solutions de l'équation de transport

$$\partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n = g_n, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

La méthode des caractéristiques nous permet d'écrire

$$f_n(t, x, v) = \int_{-\infty}^t g_n(s, x - (t-s)v, v) ds.$$

On a ainsi, pour toute fonction test $\psi \in C_c(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_n(t, x, v) dv \right) dx &= \int_{-\infty}^t \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} g_n(s, z, v) \psi(z + v(t-s)) dv dz ds \\ &\rightarrow \varphi(t) \psi(v_0 t) \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, $(\int_{\mathbb{R}^3} f_n dv)$ converge vers une densité portée par le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ v_0$ au sens faible des mesures lorsque $n \rightarrow \infty$. En particulier, $\int_{\mathbb{R}^3} f_n dv$ n'est pas relativement compact dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, bien que

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq C, \quad \|\partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n\|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq C.$$

Pour éviter de tels phénomènes de concentration, on ajoute une hypothèse d'équintégrabilité en v qui s'énonce comme suit : on dit que la suite (ψ_n) bornée dans $L^1_{x,v}$ est uniformément équintégrable par rapport à v si

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sup_n \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sup_{|A| < \eta} \int_A |\psi_n(x, v)| dv \right) dx = 0.$$

On remarque également que les propriétés de dispersion de l'opérateur de transport permettent de transférer de l'équintégrabilité locale en v à la variable x . Cela permet de prouver le résultat suivant [31] :

PROPOSITION 3.4. Soit (f_n) une suite bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ telle que

$$(\partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n) \text{ est borné dans } L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$$

(f_n) est uniformément équiintégrable en v .

Alors la suite (f_n) est uniformément équiintégrable (dans toutes les variables) et donc faiblement compacte par le critère de Dunford-Pettis.

On peut raffiner cette proposition et obtenir de la compacité forte sur les moyennes de f_n ; c'est la version utilisée dans la limite Navier-Stokes incompressible de l'équation de Boltzmann :

THÉORÈME 3.5. Soit (f_n) une suite bornée de $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ telle que

1. $\partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n$ est borné dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$,
2. (f_n) est uniformément équiintégrable en v .

Alors, pour toute fonction $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ à support compact, la suite $(\int f_n \phi(v) dv)_n$ est fortement compacte par rapport à la variable x , c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \iint_K \left| \int f_n(t, x, v) \phi(v) dv - \int f_n(t, x + \eta, v) \phi(v) dv \right| dx dt = 0.$$

3.1.4. *Esquisse de preuve du Théorème 3.2.* Nous donnons à présent quelques éléments de preuve du Théorème 3.2, en suivant la présentation de [65]. La preuve consiste en un schéma d'approximation des solutions, et un résultat de stabilité pour montrer la convergence du schéma. Nous allons nous concentrer sur la stabilité en considérant une suite (f_n) de solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann.

1ère étape : il s'agit d'abord d'obtenir de la compacité faible pour (f_n) . Grâce à la borne uniforme sur l'entropie relative

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} H(f_n | M)(t) \leq C$$

et à celle sur la dissipation d'entropie

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} D(f_n) dx dt \leq C,$$

on montre en utilisant l'inégalité de Young que

$$\left(\frac{Q^+(f_n, f_n)}{1 + \delta f_n / M} \right) \text{ est faiblement compact dans } L^1_{loc}(dt dx dv)$$

puis que

$$(3.5) \quad f_n \rightharpoonup f \text{ faiblement dans } L^1_{loc}(dx, L^1(dv)) \text{ localement uniformément en } t$$

éventuellement après extraction d'une sous-suite.

2ème étape : il faut ensuite obtenir des résultats de compacité forte. En utilisant un lemme de moyenne (Théorème 3.5), on montre que pour toute fonction $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ avec une croissance sous-quadratique à l'infini, on a

$$(3.6) \quad \int f_n \phi(v) dv \text{ est fortement relativement compacte dans } L^p_{loc}(dt, L^1_{loc}(dx)).$$

La convergence en moyenne de l'opérateur de collision s'obtient en utilisant la variante suivante du théorème d'Egorov, connue sous le nom de « Product Limit theorem » et établie dans [22] :

THÉORÈME 3.6. *Soit (X, μ) un espace mesuré avec μ une mesure positive finie. Considérons deux suites de fonctions réelles mesurables définies sur X (f_n) et (g_n). Si (g_n) est bornée dans $L^\infty(X)$ avec $g_n \rightarrow g$ presque partout et si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(X)$, alors $f_n g_n \rightharpoonup fg$ faiblement dans $L^1(X)$.*

Ce nouvel outil permet de montrer que, à extraction d'une sous-suite près et pour toute fonction test $\phi \in C_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, on a

$$(3.7) \quad \int \frac{Q^\pm(f_n, f_n)}{1 + \int f_n dv} \phi dv \rightarrow \int \frac{Q^\pm(f, f)}{1 + \int f dv} \phi dv \quad \text{dans } L^1_{loc}(dtdx).$$

3ème étape : les équations macroscopiques vérifiées par f sont obtenues en passant à la limite faible dans les lois de conservation. L'inégalité d'entropie s'obtient en passant à la limite grâce à la convexité des fonctions définissant l'entropie et la dissipation d'entropie, et aux limites faibles

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f \quad \text{dans } L^1_{loc}(dtdx; L^1((1 + |v|)dv)), \\ \int f_n |v|^2 dv &\rightharpoonup \int f |v|^2 dv + tr(m) \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)), \\ \frac{f_n f_{n*}}{1 + \delta \int f_n dv} &\rightharpoonup \frac{f f_*}{1 + \delta \int f dv} \quad \text{dans } L^1_{loc}(dtdx; L^1(Bdv dv_* d\omega)) \end{aligned}$$

et

$$\frac{f'_n f_{n*'}}{1 + \delta \int f_n dv} \rightharpoonup \frac{f' f'_*}{1 + \delta \int f dv} \quad \text{dans } L^1_{loc}(dtdx; L^1(Bdv dv_* d\omega)).$$

4ème étape : il reste à montrer que f est bien une solution renormalisée de l'équation de Boltzmann, donc à passer à la limite dans l'équation renormalisée. Ceci requiert de la compacité; or la difficulté réside dans le fait que l'on n'a de la compacité que sur les moyennes de f , et pas sur f elle-même.

Grâce à des estimations ponctuelles sur $\Gamma_\delta(z) = \frac{z}{1+\delta z}$ et sa dérivée et à la première étape, on montre que pour tout $\delta > 0$,

$$M\Gamma_\delta \left(\frac{f_n}{M} \right) \rightharpoonup f_\delta \quad \text{faiblement-}^* \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

$$\Gamma'_\delta \left(\frac{f_n}{M} \right) Q^\pm(f_n, f_n) \rightharpoonup Q^\pm_\delta \quad \text{faiblement-}^* \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

De plus, grâce à la borne uniforme sur l'entropie relative et à la convergence (3.5), il vient

$$\frac{f_n}{M}(t) - \Gamma_\delta \left(\frac{f_n}{M} \right) (t) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1_{loc}(dx, L^1(dv)) \quad \text{uniformément en } t, n \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0$$

et donc

$$(3.8) \quad f_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f \quad \text{dans } L^1_{loc}(dx, L^1(dv)) \quad \text{uniformément en } t \text{ et p. p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

On cherche maintenant à passer à la limite dans

$$\begin{aligned} M(\partial_t + v \cdot \nabla_x) \log \left(1 + \frac{f_\delta}{M} \right) &= \frac{Q^+_\delta - Q^-_\delta}{1 + f_\delta/M} \\ f_{\delta|t=0} &= \Gamma_\delta(f_0). \end{aligned}$$

qui est vérifiée en utilisant comme fonction de renormalisation $\log(1 + \Gamma_\delta(z))$ et en prenant la limite $n \rightarrow \infty$. C'est une partie assez technique, dont les principaux ingrédients sont la compacité forte (3.6), le Théorème 3.6, une bonne décomposition de Q^+ selon la taille de $(f'_n f'_{n*}) / (f_n f_{n*})$, et enfin la convergence de la dissipation d'entropie au sens des mesures.

En rassemblant le tout, on obtient

$$M(\partial_t + v \cdot \nabla_x) \log \left(1 + \frac{f}{M} \right) = \frac{Q^+(f, f) - Q^-(f, f)}{1 + f/M}$$

avec la condition initiale $f|_{t=0} = f_0$. Il reste à vérifier que l'équation est vérifiée pour n'importe quelle renormalisation admissible Γ , ce qui peut se faire soit par composition soit par un argument d'approximation.

3.2. Cas des fermions. On considère à présent l'équation de Boltzmann pour les fermions :

$$(3.9) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q_F(f)$$

où l'opérateur de collision est

$$Q_F(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v, v_*, \omega) (f' f'_* (1 - f)(1 - f_*) - f f_* (1 - f')(1 - f'_*)) d\omega dv_*.$$

La non linéarité est plus forte que dans le cas classique, puisque l'opérateur de collision n'est plus quadratique mais cubique en f (les termes quartiques s'annulent). La théorie d'existence devrait donc se compliquer, mais un nouveau phénomène apparaît : si la donnée initiale f_0 satisfait les bornes

$$(3.10) \quad 0 \leq f_0 \leq 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

alors cette propriété est préservée par la solution (formelle) f . Autrement dit, on a l'estimation a priori suivante

$$(3.11) \quad 0 \leq f \leq 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

L'espace d'étude naturel n'est plus L^1 , mais L^∞ .

3.2.1. Noyau de collision intégrable. Cette propriété formelle peut être vue simplement par des considérations d'équations différentielles. Réécrivons pour cela l'équation (3.9) à l'aide des caractéristiques du transport libre. En l'absence de collisions, les particules se déplacent en ligne droite et à vitesse constante. La solution de l'équation de transport est alors $f(t, x, v) = f_0(x - vt, v)$. En notant

$$g^\sharp(t, x, v) = g(t, x + vt, v),$$

l'équation (3.9) est équivalente formellement à

$$\partial_t f^\sharp = Q_F(f)^\sharp.$$

Il est ensuite facile de voir que si $0 \leq f \leq 1$, alors l'opérateur de collision vérifie

$$-bf \leq Q_F(f) \leq b(1 - f)$$

où $b = \|B\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)}$. Ainsi, aux points où f s'annule, $Q_F(f)$ est positif, et aux points où $f = 1$, $Q_F(f)$ est négatif, ce qui garantit la propagation de la borne (3.11) pour tout temps. Notons cependant que nous avons fait l'hypothèse très restrictive

$$(3.12) \quad \|B\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)} < \infty$$

qui exclut par exemple le cas des sphères dures pour lequel le noyau de collision vaut $B(v, \omega) = |v \cdot \omega|$.

Les hypothèses (3.10) et (3.12) offrent ainsi un cadre d'étude pour le problème de Cauchy associé à l'équation (3.9) plus agréable que les solutions renormalisées, et on a le théorème d'existence suivant dû à Dolbeault [23] :

THÉORÈME 3.7. *Soit f_0 une fonction mesurable et B un noyau de collision positif vérifiant (3.10) et (3.12). Alors l'équation (3.9) complétée par la donnée initiale $f|_{t=0} = f_0$ admet une unique solution f pour tout temps telle que*

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \quad 0 \leq f \leq 1 \quad p.p.$$

De plus, f est absolument continue en temps.

DÉMONSTRATION. La preuve consiste à montrer que l'opérateur nonlinéaire T défini dans $L^\infty([0, \tau] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ par

$$T(f)(t, x, v) = f_0(t, x - vt, v) + \int_0^t Q_F(\bar{f})(s, x - (s-t)v, v) ds$$

avec \bar{f} définie par

$$\bar{f} = \begin{cases} f & \text{si } 0 \leq f \leq 1 \\ 0 & \text{si } f < 0 \\ 1 & \text{si } f > 1 \end{cases}$$

admet un point fixe. Or, on voit simplement que T est lipschitzien puisque

$$\|Th_1 - Th_2\|_{L^\infty([0, \tau] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq 8\tau b \|h_1 - h_2\|_{L^\infty([0, \tau] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}.$$

Ainsi, en choisissant $\tau < \frac{1}{8b}$, T est contractant et donc admet un point fixe. Par le raisonnement fait plus haut on voit que ce point fixe vérifie les bornes (3.11), donc est solution de (3.9). Comme les bornes sont propagées, on peut réitérer le processus sur $[\tau, 2\tau]$, etc. et on obtient une solution globale. \square

En supposant en outre que le noyau de collision a les propriétés de symétrie usuelles

$$(3.13) \quad B(v, \omega) \equiv q(|v|, v \cdot \omega),$$

la solution f conserve la masse et l'énergie globales et satisfait le théorème H :

PROPOSITION 3.8. *Soient f_0 et $B \geq 0$ vérifiant (3.10), (3.12) et (3.13). Soit f la solution de l'équation (3.9) avec donnée initiale f_0 . On a :*

- si $\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_0 dx dv < \infty$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_0(x, v) dx dv \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+;$$

- si $\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f_0 dx dv < \infty$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f_0(x, v) dx dv \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+;$$

- si $\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (|x|^2 + |v|^2) f_0 dx dv < \infty$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} s(f)(t, x, v) dx dv + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e(f)(s, x, v) dx dv ds = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} s(f_0) dx dv$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, avec

$$s(x) = x \log x + (1-x) \log(1-x)$$

et

$$e(f) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 - f)(1 - f_*) - f f_* (1 - f')(1 - f'_*)) \\ \cdot \log \left(\frac{f' f'_* (1 - f)(1 - f_*)}{f f_* (1 - f')(1 - f'_*)} \right) d\omega dv_*$$

DÉMONSTRATION. Le premier point est une conséquence du théorème de Fubini car on voit facilement que $f \in C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$. Le second point est un peu plus technique ; il est prouvé d'abord sous l'hypothèse supplémentaire $\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |v|^2 B(v, \omega) dv d\omega < \infty$. On peut ensuite relaxer cette hypothèse grâce à un argument de stabilité des solutions de (3.9). Pour le dernier point, on montre d'abord que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f |\log f| dv dx \leq C + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (|x|^2 + |v|^2) f_0 dv dx \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

grâce à l'inégalité

$$x \log x \leq 2\sqrt{x} \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[$$

et à un découpage de l'intégrale selon que f est plus grande ou plus petite que la bosse glissante $e^{-(|x-tv|^2+|v|^2)}$. On obtient ensuite le résultat en supposant que la donnée initiale vérifie

$$\eta e^{-(|x|^2+|v^2|)} \leq f_0(x, v) \leq 1 - \eta \quad \text{pour tout } (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

pour un certain $0 < \eta < 1$. Cette borne est propagée sous la forme

$$\eta e^{-(|x-tv|^2+|v^2|+bt)} \leq f(t, x, v) \leq 1 - \eta e^{-bt}$$

ce qui permet de montrer le théorème H. On relaxe ensuite l'hypothèse sur la donnée initiale par un argument d'approximation. \square

3.2.2. *Noyau de collision avec cutoff de Grad.* Il est possible d'améliorer le Théorème 3.7 en ne supposant plus que le noyau de collision B est intégrable, mais simplement qu'il satisfait les hypothèses de cutoff de Grad

$$(3.14) \quad \begin{cases} 0 \leq B(|z|, \sigma) \leq C_b (1 + |z|)^\beta & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^3 \times S^2, \quad \text{avec } \beta \in [0, 1] \\ \int_{S^2} B(z, \sigma) d\sigma \geq \frac{1}{C_b} \frac{|z|}{1 + |z|} & \text{p.p. sur } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Cette hypothèse inclut le cas physiquement réaliste des sphères dures. Dans ce cadre, une solution de (3.9) est définie comme une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ pour tout $1 \leq p < \infty$ telle que $0 \leq f \leq 1$, de masse, d'énergie, et de dissipation d'entropie bornées uniformément en temps, vérifiant (3.9) au sens des distributions. Dans ces conditions,

$$B f f_* (1 - f')(1 - f'_*) \in L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}_x^3 \times K_v \times \mathbb{R}_{v_*}^3 \times S_\omega^2))$$

pour tout $T > 0$ et tout compact $K_v \subset \mathbb{R}^3$, et donc

$$B f' f'_* (1 - f)(1 - f_*) \in L^1([0, T] \times \mathbb{R}_x^3 \times K_v \times \mathbb{R}_{v_*}^3 \times S_\omega^2)$$

grâce à la borne sur la dissipation d'entropie ; ainsi, l'opérateur de collision $Q_F(f)$ est localement intégrable et l'équation (3.9) a un sens. On a alors le résultat suivant dû à Lions [49] :

THÉORÈME 3.9. *Soient B comme dans (3.14) et f_0 vérifiant*

$$(3.15) \quad 0 \leq f_0 \leq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|^2 + |v|^2) f_0 dx dv < \infty;$$

alors il existe une solution f à l'équation (3.9) de condition initiale f_0 vérifiant

$$(3.16) \quad \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|^2 + |v|^2) f dx dv < \infty \quad \text{pour tout } T > 0$$

$$(3.17) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} e(f) dv dt < 0 \quad \text{pour tout } T > 0.$$

L'hypothèse sur le noyau de collision est moins forte que pour le Théorème 3.7, mais les conclusions sont moins fortes également : on a perdu l'unicité de la solution ainsi que la conservation de l'énergie et le théorème H local.

La preuve est une conséquence directe d'un argument de stabilité. On considère une suite de données initiales (f_0^n) satisfaisant les bornes (3.15) uniformément en n . On considère une suite de solutions (f^n) à l'équation (3.9) de donnée initiale f_0^n et vérifiant les bornes (3.16) et (3.17) uniformément en n . L'existence de ces solutions est en fait une conséquence du Théorème 3.9. Sans perte de généralité, on peut supposer que (f_0^n) et (f^n) convergent faiblement dans $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) - *$, $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ (pour tout $T > 0$) et $L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) - *$ vers respectivement f_0 et f . Dans la suite on note

$$Q_F^+(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B f' f'_*(1 - f)(1 - f_*) d\omega dv_*,$$

$$Q_F^-(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B f f_*(1 - f')(1 - f'_*) d\omega dv_*,$$

$$L(g) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) g_* d\omega dv_*.$$

Le principal argument est donc le résultat suivant (Lions [49]) :

THÉORÈME 3.10. *La limite f est solution de (3.9) de donnée initiale f_0 . De plus,*

$$(3.18) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \beta(f^n) \psi dv \quad \text{est relativement compacte dans } L^1([0, T] \times \mathbb{R}^3) \quad (\forall T > 0)$$

pour tout $\beta \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ tel que $\beta(t)t^{-1}$ est borné autour de 0 et pour tout $\psi \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que $\frac{\psi(v)}{1+|v|^2} \xrightarrow{|v| \rightarrow \infty} 0$,

$$(3.19) \quad L(f^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(f) \quad \text{dans } L^p([0, T]; L^1(K \times \mathbb{R}_x^3)) \quad \forall 1 \leq p < \infty$$

$$(3.20) \quad Q_F^+(f^n), Q_F^-(f^n) \quad \text{convergent vers } Q_F^+(f), Q_F^-(f) \quad \text{respectivement}$$

dans $L^1([0, T] \times K \times \mathbb{R}_x^3)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_v^3$.

Le démonstration de ce théorème est basée sur des lemmes de moyenne ainsi que sur des estimations de compacité sur l'opérateur de Boltzmann (classique) issues de [48], de la forme

$$\|Q^+(f, f)\|_{H^1(\mathbb{R}_v^3)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_v^3)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_v^3)}.$$

Notons que les deux résultats d'existence que nous avons présentés sont également valables dans un domaine périodique. En revanche, aucun résultat n'a été établi pour des domaines à bords.

3.2.3. *Noyau de collision sans cutoff.* La théorie d'existence de solutions à l'équation de Boltzmann pour les fermions peut être étendue à des noyaux de collisions ne vérifiant pas les hypothèses de cutoff de Grad (3.14). Dans [1], Alexandre fait l'hypothèse que B

s'écrit

$$(3.21) \quad B \left(|v - v_*|, \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega \right) = \varphi(|v_* - v'|) \frac{|v_* - v'|^{\gamma+\nu}}{|v' - v|^\nu}$$

avec $\gamma = \frac{s-5}{s-1}$ et $\nu = \frac{s+1}{s-1}$. Ici, φ est une fonction régulière qui s'annule pour les petites valeurs de $|v_* - v'|$ (cette dernière hypothèse pouvant toutefois être enlevée). Le terme de droite de (3.21) n'est pas une fonction de $|v - v_*|$ et $\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega$ uniquement; en fait, pour que ce soit le cas, il suffit de lui ajouter un terme qui vérifie les hypothèses de cutoff de Grad et est omis ici. Avec ce noyau de collision, Alexandre prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 3.11. *Soit f_0 une donnée initiale vérifiant les bornes*

$$0 \leq f_0 \leq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2 + |x|^2 + |\log f_0|) f_0 dv dx < +\infty;$$

alors il existe une solution $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ à l'équation (3.9) vérifiant $0 \leq f \leq 1$ qui conserve la masse totale et dont l'énergie, l'entropie et la dissipation d'entropie sont bornées par des quantités ne dépendant que de f_0 .

L'équation (3.9) est vérifiée au sens des distributions, et l'opérateur de collision n'est défini que dans un sens faible. En effet, on a seulement

$$Q_F(f) \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}_x^3; H^{-\frac{\nu-1}{2}}(\mathbb{R}_v^3)).$$

La preuve du Théorème 3.11 consiste à approcher le problème par le problème modifié suivant :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \frac{1}{m} \Delta_v f = Q_F(f)$$

puis à faire tendre m vers l'infini. Le terme supplémentaire permet d'avoir plus de régularité sur la solution grâce à une estimation sur la dissipation d'entropie. Le terme de collision est ensuite réécrit de manière très sophistiquée de façon à tirer partie des gains de régularité sur f dus à la singularité du noyau de collision.

Dans [55], Lu obtient un théorème similaire en se plaçant dans un cadre périodique en espace et avec un noyau de collision de type « potentiels mous » :

$$\int_{S^2} B(z, \sigma) \sin^2 \theta d\sigma \leq A_0 |z|^\gamma \quad (-5 < \gamma \leq 3)$$

$$\int_{S^2} B \left(\frac{z}{\lambda(\theta)}, \sigma \right) \sin^2 \theta d\sigma \leq A_0 |z|^\gamma \quad (-5 < \gamma \leq 3)$$

avec $\lambda(\theta) = \max(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$ et $\theta = \arccos \left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma \right)$. On a ici un cutoff angulaire, et les singularités ont lieu uniquement en vitesse. Les solutions sont des solutions faibles au sens où l'équation (3.9) est multipliée par une fonction test ϕ puis intégrée en vitesse, et les dérivées sont basculées sur ϕ par intégration par parties. Le sens donné à l'opérateur de collision est

$$\langle Q_F(f), \phi \rangle = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} Q_F(f) (\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*) dv.$$

La preuve, fondée sur un résultat de stabilité, utilise des inégalités d'entropie, des lemmes de moyenne et des propriétés subtiles de l'opérateur de collision.

Sous l'hypothèse d'un cutoff angulaire plus fort

$$\int_{S^2} \left(B(z, \sigma) + B \left(\frac{z}{\lambda(\theta)}, \sigma \right) \right) \sin \theta d\sigma \leq A_0 |z|^\gamma \quad (-5 < \gamma \leq 3)$$

la solution conserve la masse, le moment et l'énergie.

3.3. Résultats obtenus (Chapitre 4). Dans le Chapitre 4, on montre un résultat d'existence de solutions à l'équation de Boltzmann pour les fermions. Il s'agit d'une extension du résultat de Dolbeault (Théorème 3.7) aux domaines bornés avec réflexion spéculaire au bord, obtenue en utilisant les caractéristiques du transport libre. On en déduit un corollaire important : les solutions vérifient les lois de conservation locale de la masse, l'impulsion et l'énergie cinétique. Ce résultat est nécessaire à l'étude des limites hydrodynamiques (voir Section 5).

THÉORÈME 3.12. *Soit Ω un ouvert régulier inclus dans \mathbb{R}^3 (éventuellement \mathbb{R}^3 tout entier). Supposons que le noyau de collision vérifie*

$$(3.22) \quad 0 \leq B \in L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2),$$

et soit

$$(3.23) \quad f_0 \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3), \quad 0 \leq f_0 \leq 1.$$

Alors, l'équation (3.9) munie de la donnée initiale $f|_{t=0} = f_0$ et des conditions de bord

$$(3.24) \quad f(t, x, v) = f(t, x, R_x(v)) \quad \forall (x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \text{ tels que } n(x) \cdot v < 0$$

où $R_x(v)$ est l'opérateur de réflexion spéculaire

$$(3.25) \quad R_x(v) = v - 2(v \cdot n(x))n(x)$$

a une unique solution f satisfaisant

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3), \quad 0 \leq f \leq 1 \text{ p.p.}$$

De plus, f est absolument continue par rapport à t .

Comme pour les solutions de Dolbeault, si l'on suppose que le noyau de collision sécrit

$$(3.26) \quad B(w, \omega) = q(|w|, |w \cdot \omega|),$$

la solution conserve la masse et l'énergie globales :

THÉORÈME 3.13. *Soit f_0 une donnée initiale vérifiant (3.23), et B satisfaisant (3.22) et (3.26). Alors*

– Si $f_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, alors la solution f appartient à $C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ et

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f(t, x, v) dx dv = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) dx dv, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+;$$

– Si $\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_0 dx dv < +\infty$, alors la solution f est telle que la fonction $(t, x, v) \mapsto |v|^2 f(t, x, v)$ appartient à $C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ et

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dx dv = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_0(x, v) dx dv, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, la fonction $(t, x, v) \mapsto |v|^2 Q_F(f)(t, x, v)$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$.

Pour montrer que la solution conserve localement l'énergie, on utilise un argument de dispersion dû à Perthame [60] :

THÉORÈME 3.14. *Soit $f \in L^1([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ la solution de l'équation*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = g, \quad f(t=0) = f_0$$

avec la condition au bord (3.24). Supposons que

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^3 f_0(x, v) dx dv < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 g(t, x, v) dx dv dt < C_0.$$

Alors, pour n'importe quel sous-ensemble régulier et borné K de Ω , on a

$$\int_0^T dt \int_K dx \int_{\mathbb{R}^3} |v|^3 f(t, x, v) dv \leq C_K.$$

Ce théorème montre que la solution d'une équation de transport a un moment de plus en vitesse que le terme source, grâce au fait que l'opérateur de transport contient un v . Le fait de gagner un moment nous permet de donner un sens à $\int_{\mathbb{R}^3} v |v|^2 f dv$, et donc d'obtenir le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.15. *Soit B un noyau de collision vérifiant (3.22) and (3.26). Supposons que la donnée initiale vérifie (3.23) et*

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (1 + |v|^3) f_0(x, v) dx dv < +\infty.$$

Alors, la solution f de l'équation (3.9) munie de la donnée initiale f_0 et de la condition de bord (3.24) vérifie, au sens des distributions, les lois de conservation locales

$$(3.27) \quad \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} v \\ v \otimes v \\ v |v|^2 \end{pmatrix} f dv = 0.$$

3.4. Cas des bosons. Dans le cas de l'équation de Boltzmann pour les bosons, l'opérateur de collision s'écrit

$$Q_B(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 + f)(1 + f_*) - f f_* (1 + f')(1 + f'_*)) d\omega dv_*,$$

ou encore, pour définir la partie positive $Q_B^+(f)$ et la partie négative $Q_B^-(f)$,

$$Q_B(f) = Q_B^+(f) - Q_B^-(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 + f + f_*) - f f_* (1 + f' + f'_*)) d\omega dv_*.$$

Il ressemble beaucoup dans son écriture à l'opérateur décrivant les collisions dans un gaz de fermions, mais il est beaucoup plus difficile à traiter mathématiquement. En effet, Escobedo, Mischler et Valle font la remarque suivante [25] : supposons que $B \equiv 1$ et considérons une fonction positive non identiquement nulle $f \in C_c(\mathbb{R}^3)$. Soit $f_\varepsilon(v) = \frac{1}{\varepsilon^3} f(v/\varepsilon)$; on a alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(v') f_\varepsilon(v'_*) (f_\varepsilon(v) + f_\varepsilon(v_*)) d\omega dv_* dv \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(v') f(v'_*) (f(v) + f(v_*)) d\omega dv_* dv, \end{aligned}$$

ce qui empêche d'avoir une estimation de la forme

$$\|Q_B(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \Phi(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}), \quad \Phi \in C(\mathbb{R}_+).$$

Comme on n'a pas d'estimation a priori sur f autre que les estimations naturelles qui sont la conservation de la masse, du moment et de l'énergie et le théorème H, il est difficile de donner un sens à Q_B . Dans ces conditions, il est pour l'instant hors de portée de construire des solutions à l'équation de Boltzmann pour les bosons.

Escobedo, Mischler et Valle [25] et Lu [52, 53, 54] se sont intéressés à l'existence de solutions homogènes en espace. On peut donner un sens à $Q_B(f)$ sous des hypothèses

fortes de troncature du noyau de collision B et en considérant des fonctions isotropes : $f(v) = \bar{f}(|v|)$, qu'on écrira également par abus de notation $f(r)$ avec $r = |v|$. En suivant [25], considérons une fonction positive $w(v, v_*, v', v'_*)$ et une fonction donnée $q(r, r_*, r', r'_*)$ et posons

$$\mathcal{Q}[q](v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} w(v, v_*, v', v'_*) q \delta_{\mathcal{C}} dv' dv_* dv'_*$$

où $\mathcal{C} = \{(v, v_*, v', v'_*) \in (\mathbb{R}^3)^4 \mid v + v_* = v' + v'_*, \quad |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2\}$. On suppose que

$$w(v, v_*, v', v'_*) |(v - v_*) \cdot \omega| \quad \text{ne dépend que de } v - v_* \text{ et de } \omega$$

et on a alors

$$\mathcal{Q}[q](v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) q dv_* d\omega, \quad B(v - v_*, \omega) = \frac{1}{2} w(v, v_*, v', v'_*) |(v - v_*) \cdot \omega|.$$

En passant en coordonnées sphériques $v = r\sigma$, $v_* = r_*\sigma_*$, $v' = r'\sigma'$, $v'_* = r'_*\sigma'_*$, $d\hat{r}' = (r')^2 dr'$, $d\hat{r}_* = (r_*)^2 dr_*$, $d\hat{r}'_* = (r'_*)^2 dr'_*$ et en introduisant la nouvelle fonction

$$\hat{w}(r, r_*, r', r'_*) = \int_{S^2} \int_{S^2} \int_{S^2} w(v, v_*, v', v'_*) \delta_{v+v_*=v'+v'_*} d\sigma' d\sigma_* d\sigma'_*,$$

on peut réécrire $\mathcal{Q}[q]$ de la façon suivante :

$$(3.28) \quad \mathcal{Q}[q](r) = \iiint_{(\mathbb{R}_+)^3} \hat{w} q \delta_{\hat{\mathcal{C}}} d\hat{r}' d\hat{r}'_* d\hat{r}_*$$

avec $\hat{\mathcal{C}} = \{(r, r_*, r', r'_*) \in (\mathbb{R}_+)^4 \mid r^2 + r_*^2 = (r')^2 + (r'_*)^2\}$. Remarquons que \hat{w} est bien une fonction de r (et pas de v) si on suppose que pour toute rotation $R \in SO_3(\mathbb{R})$

$$w(Rv, Rv_*, Rv', Rv'_*) = w(v, v_*, v', v'_*) \quad \forall (v, v_*, v', v'_*) \in (\mathbb{R}^3)^4.$$

Cette hypothèse est vérifiée si par exemple B ne dépend que de $|v - v_*|$ et de $(v - v_*) \cdot \omega$. La proposition suivante précise dans quelle mesure on peut donner un sens à $Q(f)$:

PROPOSITION 3.16. *Supposons que B soit tel que*

$$(3.29) \quad \sup_{z \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{1 + |z|^s} \int_{S^2} B(z, \omega) d\omega < \infty$$

avec $s = 1$ et que

$$(3.30) \quad \hat{w}(r, r_*, r', r'_*) \in L^\infty((\mathbb{R}_+)^4).$$

Alors pour toute fonction isotrope $f \in L^1_2(\mathbb{R}^3)$ l'opérateur $Q(f)$ est bien défini et

$$(3.31) \quad \|Q_B^\pm(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq C_B \|f\|_{L^1_2(\mathbb{R}^3)}^2 + C_{\hat{w}} \|f\|_{L^1_2(\mathbb{R}^3)}^3$$

où C_B et $C_{\hat{w}}$ sont des constantes positives et

$$\|g\|_{L^1_2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2)^{s/2} |g(v)| dv.$$

DÉMONSTRATION. Pour montrer cette proposition, il faut majorer la norme L^1 de $Q[q]$ pour différentes valeurs de q : des termes quadratiques $q = ff_*$, $q = f'f'_*$ et des termes cubiques $q = ff_*f'$, $q = ff_*f'_*$, $q = f'f'_*f$, $q = f'f'_*f_*$. La partie quadratique est facilement majorée grâce à l'hypothèse (3.29) par le premier terme dans (3.31). Pour les termes cubiques, on effectue l'intégration en r_* dans (3.28) et on obtient

$$\mathcal{Q}[q](v) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \hat{w} \frac{r_*}{2} \mathbb{1}_{\{r'^2 + r_*'^2 \geq r^2\}} q d\hat{r}' d\hat{r}'_*$$

avec $r_* = \sqrt{r'^2 + r_*'^2 - r^2}$, grâce à quoi on voit que $\mathcal{Q}[q]$ est une fonction mesurable. En intégrant encore une fois on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{Q}[q](v)dv = \iiint_{\mathbb{R}_+^3} \hat{w}(r_1, r_2, r_3, r_4) \frac{r_4}{2} \mathbb{1}_{\{r_1^2 + r_2^2 \geq r_3^2\}} f(r_1) f(r_2) f(r_3) d\hat{r}_2 d\hat{r}_3$$

où $r_4 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2}$. On en déduit (3.31). \square

REMARQUE 3.17. Si il existe une constante $K > 0$ telle que

$$(3.32) \quad 0 \leq B(z, \omega) \leq K \cos^2 \theta \sin \theta |z|^3$$

alors les deux hypothèses (3.29)-(3.30) sont satisfaites. Cette troncature très forte du noyau de collision empêche la condensation en temps fini, ce qui est commode mathématiquement mais n'est pas réaliste du point de vue de la physique.

De manière plus précise, Lu [52] montre que c'est la norme L_2^1 de $Q_B^\pm(f)$ qui est majorée par le terme de droite de (3.31). Il en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 3.18. *Soit $0 \leq B \equiv B(|v - v_*|, (v - v_*) \cdot \omega)$ vérifiant (3.29) et (3.32). Soit $0 \leq f \in L_2^1(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale isotrope. Alors l'équation*

$$\partial_t f = Q_B(f)$$

a une solution isotrope $f \in C^1([0, +\infty[; L^1(\mathbb{R}^3))$ qui conserve la masse, le moment et l'énergie.

Pour améliorer ce résultat, il faudrait pouvoir considérer des noyaux de collision B qui ne doivent pas satisfaire l'hypothèse (3.29), très restrictive. D'un autre côté, on s'attend à ce que dans un gaz de bosons, il puisse y avoir la formation d'un condensat de Bose-Einstein, éventuellement en temps fini. Le bon cadre pour étudier l'équation de Boltzmann pour les bosons semble donc ne pas être le cadre L^1 , mais plutôt celui des mesures boréliennes positives. Lu [53] montre ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 3.19. *Soit B un noyau de collision vérifiant*

$$B(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times [0, 1]), \quad \int_0^1 B(V, \tau) d\tau > 0, \quad \forall V > 0,$$

$$\sup_{V \geq 0, \tau \in [0, 1]} \frac{B(V, \tau)}{1 + V} < \infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left(\sup_{V \geq 0} \frac{B(V, \tau)}{1 + V} \right) \rightarrow 0.$$

et F_0 une mesure positive sur \mathbb{R}_+ vérifiant $0 < \int_{\mathbb{R}_+} (1 + r^2) dF_0(r) < \infty$. Alors l'équation de Boltzmann pour les bosons spatialement homogène a une solution mesure isotrope F_t qui conserve la masse et l'énergie et $F|_{t=0} = F_0$.

Le preuve du théorème découle du théorème précédent et d'un argument de stabilité. Pour définir les solutions mesures isotropes, on part des solutions L^1 et on procède par densité. Pour cela il convient de réécrire l'équation de manière à autoriser les mesures. Soit donc f une solution L^1 ; on note $dF_t(r) = 4\pi r^2 f(t, r) dr$, et on a, pour toute fonction test $\phi \in C_b^k(\mathbb{R}_+)$ (fonctions k fois dérivables dont toute les dérivées sont bornées sur \mathbb{R}_+)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(r^2) dF_t(r) &= \int_{\mathbb{R}_+} \phi(r^2) dF_0(r) + \int_0^t ds \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_B[\phi](r, r_*) dF_s(r) dF_s(r_*) \\ &\quad + \int_0^t ds \iiint_{\mathbb{R}_+^2 \times S^2} B \Delta \phi f f' f'_* dv dv_* d\omega \end{aligned}$$

avec

$$\Delta\phi = \phi(|v|^2) + \phi(|v_*|^2) - \phi(|v'|^2) - \phi(|v'_*|^2)$$

et

$$J_B[\phi](r, r_*) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{(S^2)^3} B(r\sigma - r_*\sigma_*, \omega) [\phi(|v|^2) - \phi(r^2)] d\sigma d\sigma_* d\omega$$

où l'on a $v = r\sigma$, $v_* = r_*\sigma_*$. Le problème est d'écrire l'intégrale contenant $f f' f'_*$ en fonction de $dF_s(r)dF_s(r')dF_s(r'_*)$. Une série de changements de variable nous permettent décrire

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}_+^2 \times S^2} B(v - v_*, \omega) \Delta\phi f f' f'_* dv dv_* d\omega \\ &= 2 \iiint_{\mathbb{R}_+^3} \left[\iint_{S^2 \times S^2} d\sigma d\sigma' \int_0^{2\pi} \frac{\Delta\phi(r, r', r'_*)}{X r'_* + Y r'} \left(\frac{B(V, \cos \theta)}{X} + \frac{B(V, \sin \theta)}{Y} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \mathbb{1}_{\{r'_* > r|\sigma \cdot \xi\}} d\psi \right] r^2 f(r) r'^2 f(r') r_*'^2 f(r'_*) dr dr' dr'_* \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta\phi(r, r', r'_*) &= \phi(\hat{r}^2) + \phi(r'^2 + r_*'^2 - \hat{r}^2) - \phi(r'^2) - \phi(r_*'^2), \\ \hat{r} &= \min(r, \sqrt{r'^2 + r_*'^2}), \quad V = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \theta = \arccos \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \\ X &= |r\sigma - r'\sigma'|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \left[(r_*'^2 - r^2(\sigma \cdot \xi)^2)_+ + r^2(1 - (\sigma \cdot \xi)^2) \right. \\ & \quad \left. + 2\sqrt{(r_*'^2 - r^2(\sigma \cdot \xi)^2)_+ + r\sqrt{1 - (\sigma \cdot \xi)^2} \cos \psi} \right]^{1/2}, \\ \xi &= \frac{r\sigma - r'\sigma'}{|r\sigma - r'\sigma'|} \text{ si } r\sigma \neq r'\sigma', \quad \text{et } \xi = \sigma \text{ si } r\sigma = r'\sigma'. \end{aligned}$$

On peut donc réécrire l'opérateur de collision sous la forme faible suivante :

$$\begin{aligned} \langle Q_B(F_t), \phi \rangle &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_B[\phi](r, r_*) dF_t(r) dF_t(r_*) \\ & \quad + \iiint_{\mathbb{R}_+^3} K_B[\phi](r, r', r'_*) dF_t(r) dF_t(r') dF_t(r'_*). \end{aligned}$$

De bonnes estimations sur $J_B[\phi]$ et $K_B[\phi]$ permettent de montrer l'existence d'une solution qui est une mesure positive conservant la masse et l'énergie.

REMARQUE 3.20. De nombreux problèmes mathématiques sont posés par l'équation de Boltzmann pour les bosons, dus au fait que l'opérateur de collision est cubique et à ce que l'entropie est sous-linéaire. Cependant, il n'est pas non plus clair que ce modèle soit le plus pertinent du point de vue de la physique. En effet, des expériences menées en laboratoire permettent d'observer la création de condensats de Bose-Einstein en temps fini, tandis que l'équation ne nous permet jusqu'à présent d'observer la condensation qu'en temps infini [54]. D'autre part, bien qu'il soit possible de considérer des solutions ayant une partie régulière et une partie singulière, il est impossible d'en tirer un système d'équations, une pour la partie régulière et une autre pour la partie singulière. On n'a donc pas d'information sur la dynamique du système après condensation.

Des travaux de physiciens se sont donc intéressés à d'autres modèles pour un gaz de bosons. En particulier, des modèles intéressants couplent une équation de type Boltzmann pour la partie régulière du fluide avec une équation de type Gross-Pitaevskii pour la partie condensée [61] ou avec une équation de type fluide [56]. Ils permettent de mieux prendre en compte les échanges entre les deux parties du fluide. On pourra consulter [64] pour une présentation des différents types de modèles mathématiques pour les superfluides.

4. Limite des collisions rasantes

L'opérateur de collision (2.3) a une forme très compliquée. Il s'exprime comme une double intégrale et est fortement non linéaire. Cela rend son analyse particulièrement délicate, ce qui explique que de nombreuses questions sur les solutions de l'équation de Boltzmann quantique restent sans réponse. En outre, il est particulièrement difficile d'en faire des simulations numériques précises et rapides. Il est donc naturel d'en chercher des approximations plus simples.

4.1. Le noyau de collision. Dans l'opérateur de collision (2.3), le noyau de collision B donne un « poids » aux collisions : certaines sont en effet plus probables que d'autres. Dans la section précédente, nous avons eu l'occasion de voir que B peut avoir différentes expressions. En fait, il dépend de la nature des collisions. Des arguments physiques se basant sur la géométrie des collisions montrent que le noyau de collision ne dépend que de $|v - v_*|$ et $(v - v_*) \cdot \omega$ (voir [25] et ses références). En définissant l'angle θ comme sur la Figure 2, on peut dire que $B \equiv B(|v - v_*|, \cos \theta)$. La forme précise de B dépend de la force d'interaction entre les particules et ne peut pas toujours être calculée explicitement.

4.1.1. Cas classique. Levons ici une ambiguïté : lorsqu'on parle de « collisions » entre particules, il ne s'agit en général pas de collisions au sens courant du terme, c'est-à-dire de chocs entre deux solides ; on dit que deux particules entrent en collision lorsque leurs trajectoires se rapprochent suffisamment pour qu'il y ait une interaction entre ces deux particules, ce qui va dévier leurs trajectoires. Le paramètre d'impact est alors la plus courte distance entre ces deux particules. Lorsque celui-ci est grand, les deux trajectoires ne sont quasiment pas déviées car l'interaction (en principe fonction décroissante de la distance entre les particules) est très faible, et la collision est dite *rasante*. Ce n'est pas contradictoire avec l'hypothèse que les collisions sont localisées en espace faite pour dériver le noyau de collision, car on peut tout-à-fait avoir un paramètre d'impact non nul à l'échelle microscopique et des collisions localisées à l'échelle mésoscopique.

Calculer le noyau de collision B revient à étudier le problème suivant : étant donnée une particule soumise à une force qui tend vers 0 à l'infini, a-t-elle une trajectoire asymptotiquement rectiligne uniforme lorsque $t \rightarrow \pm\infty$? Sous des hypothèses de régularité et de décroissance sur la force, on peut montrer que c'est le cas, et même plus : une fois l'une des deux asymptotiques prescrite (par exemple en $t \rightarrow -\infty$), il existe une unique trajectoire asymptotique à une droite (qui est donc unique elle aussi) en $t \rightarrow +\infty$ [62]. On décrit bien le mécanisme des collisions de cette manière (voir l'expérience de Rutherford) ; en effet, on peut se ramener d'un problème à deux particules à un problème à une particule en déplaçant le centre de masse, et notre particule arrive et repart avec un mouvement de transport libre. On peut alors définir le noyau de collision comme une sorte de mesure sur l'ensemble des angles de déviation. C'est de cette manière que sont calculés ceux que nous donnons maintenant en exemple.

Lorsque les particules interagissent à travers un potentiel de la forme

$$(4.1) \quad \phi(r) = \frac{1}{r^{s-1}}, \quad s > 2,$$

où r est la distance entre les particules, on peut exprimer B de façon semi-explicite :

$$B(|v - v_*|, \cos \theta) = b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma, \quad \gamma = \frac{s-5}{s-1} \text{ (en dimension 3).}$$

La fonction b est localement régulière mais non intégrable en 0 :

$$\sin \theta b(\cos \theta) \sim \frac{K}{\theta^{\nu+1}}, \quad \nu = \frac{2}{s-1}.$$

Le facteur $\sin \theta$ vient du jacobien des coordonnées sphériques en dimension 3. La non

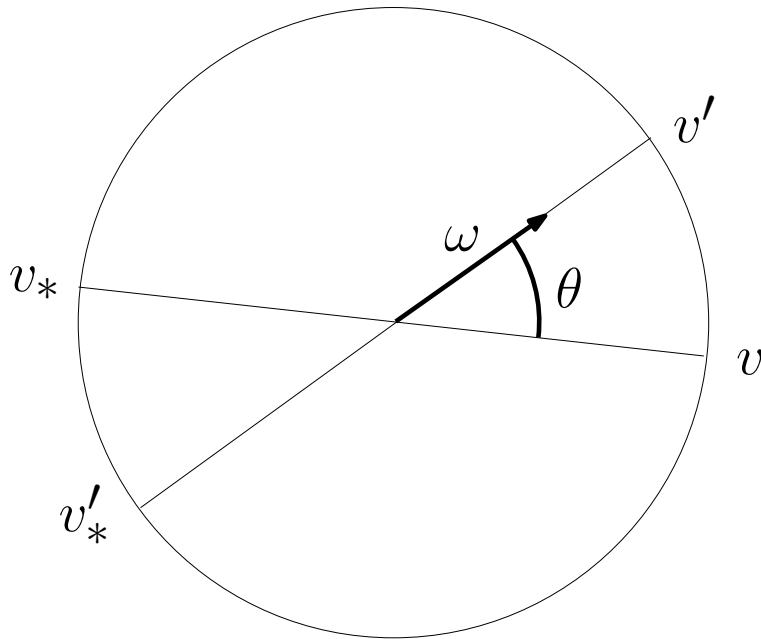


FIG. 2. Géométrie des collisions

intégrabilité est due aux collisions rasantes, pour lesquelles le paramètre d'impact est grand.

Lorsque $s = 5$, B ne dépend que de θ : on parle de particules *maxwelliennes*. C'est un cas particulier intéressant car il permet parfois de faire des calculs explicites et d'utiliser la transformée de Fourier. On parle de *potentiels durs* lorsque $s > 5$, et de *potentiels mous* si $2 < s < 5$.

Lorsque $s = 2$, les interactions sont *coulombiennes* et $B(z, \cos \theta) = \frac{C}{|z|^4 \cos^4 \theta}$. Cependant, dans ce cas l'opérateur de collision de Boltzmann ne modélise plus correctement les collisions dans le gaz, et il faut utiliser à la place l'opérateur de Landau introduit au prochain paragraphe.

Citons enfin le cas des sphères dures : les particules sont assimilées à des sphères de rayon a et interagissent à travers un potentiel $\phi(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(r)$, où

$$\phi_n(r) = \begin{cases} n & \text{si } r < a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

Le noyau de collision s'écrit alors $B(z, \cos \theta) = a^2$.

Nous avons vu dans la Section 3 que l'on peut être amené à faire différentes hypothèses sur B pour obtenir des résultats mathématiques rigoureux. Ces hypothèses sont parfois irréalistes physiquement ; en particulier, il n'est pas rare de tronquer B pour les trop grandes (ou trop petites) vitesses, ou autour de $\theta = 0$.

Les noyaux de collision ont une influence non négligeable sur le comportement de la solution de l'équation de Boltzmann. En pratique, plus un noyau est singulier et plus il est difficile d'établir l'existence d'une solution, mais meilleure sera la convergence vers l'équilibre. En outre, les noyaux singuliers peuvent avoir des effets régularisants sur la solution, alors que des noyaux tronqués ne laisseront se propager au mieux que la régularité de la donnée initiale.

4.1.2. *Cas quantique.* Dans le cas quantique, le calcul de B se fait comme dans le cas classique en considérant une particule soumise à un potentiel et qui se comporte à l'infini comme si le potentiel était nul. Cependant, on ne peut pas parler ici de position ou de vitesse, et "particule" est à prendre au sens d'onde. On considère donc une particule libre représentée par le paquet d'ondes

$$\Psi(x, y, z) = \int g(k) e^{ikz} dk \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

soumise à un potentiel à symétrie radiale $U(r)$ (avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). La fonction g est une fonction positive à support compact ayant un pic autour de $k = k_0$. On peut montrer [62] qu'il existe une solution à l'équation de Schrödinger linéaire

$$i\partial_t \Psi = -\Delta \Psi(x, y, z) + U(r)\Psi(x, y, z) = 0$$

qui converge lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ vers une solution de l'équation de Schrödinger sans potentiel

$$i\partial_t \Psi_0 = -\Delta \Psi_0(x, y, z).$$

Cette solution est de la forme

$$\Psi(x, y, z) \sim \int g(k) \left(e^{ik(z-kt)} + f(k, \theta) \frac{e^{ik(r-kt)}}{r} \right) dk \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Ainsi, le premier terme est localisé autour de $z = k_0 t$: c'est l'onde incidente. Le deuxième terme est localisé autour de $r = k_0 t$: lorsque $t \rightarrow -\infty$, sa contribution est négligeable pour tout $r > 0$ et on retrouve uniquement l'onde incidente. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a en plus de l'onde incidente une onde radiale, résultat de la dispersion due au potentiel. La fonction $f(k, \theta)$ est reliée au noyau de collision que l'on cherche ; son calcul est très compliqué, mais on peut obtenir une formule explicite dans certains cas, dont on déduit le noyau de collision :

- Lorsque $U(r) = \frac{C}{r}$ ($C > 0$), c'est-à-dire dans le cas coulombien, on retrouve l'expression du cas classique $B(z, \cos \theta) = \frac{C}{|z|^4 \cos^4 \theta}$.
- Dans le cas d'un potentiel de type sphères dures, sous la condition $ka \ll 1$ et k petit on a $B(z, \cos \theta) = a^2$.

En outre, on peut extraire de [44] les informations suivantes : lorsque l'interaction entre les particules dérive d'un potentiel de la forme (4.1),

- si $s > 3$, B est fini et intégrable autour de $\theta = 0$
- si $s \leq 3$, B est infini et non intégrable autour de $\theta = 0$.

Dans le deuxième cas, le potentiel d'interaction décroît lentement, et donc les collisions rasantes prédominent.

Notons enfin que le noyau de collision apparaît naturellement dans la dérivation de l'équation de Boltzmann quantique [11], et s'écrit,

$$B(z, \omega) = \left[\hat{\phi}((z \cdot \omega)\omega) + \kappa \hat{\phi}(-(z \cdot \omega)\omega) \right]^2$$

où $\hat{\phi}$ est la transformée de Fourier du potentiel d'interaction entre les particules, $\kappa = +1$ pour les bosons et $\kappa = -1$ pour les fermions. Cette expression est valable lorsque le potentiel ϕ est borné et suffisamment régulier.

4.2. Passage à la limite. Nous avons vu qu'aussi bien pour un gaz de particules classiques que pour des particules quantiques, les interactions entre particules peuvent être telles que les collisions rasantes prédominent largement. On introduit alors un modèle type permettant de décrire les collisions rasantes et d'en déduire des opérateurs approchant l'opérateur de Boltzmann. On suppose pour cela que

$$B(v - v_*, \omega) = \Phi(|v - v_*|)b(\cos \theta).$$

La quantité de moment typique transférée à une particule de vitesse v par collisions avec des particules de vitesse v_* est

$$\int_{S^2} B(|v - v_*|, \omega)(v - v')d\omega = \frac{1}{2}(v - v_*)T(|v - v_*|).$$

La section efficace de transfert d'impulsion est la quantité T , qui vaut

$$T(|v - v_*|) = \Phi(|v - v_*|)|S^2| \int_0^\pi b(\cos \theta)(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Pour modéliser la prédominance des collisions rasantes, on introduit une famille de noyaux de collision $B_\varepsilon(|v - v_*|, \cos \theta) = \Phi(|v - v_*|)b_\varepsilon(\cos \theta)$ vérifiant

1. $\forall \theta_0 > 0 \quad \sup_{\theta > \theta_0} b_\varepsilon(\cos \theta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$
2. $|S^2| \int_0^\pi b_\varepsilon(\cos \theta)(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu.$

La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ est appelé limite des collisions rasantes. La première condition garantit que les collisions se concentrent sur les collisions rasantes (autour de $\theta = 0$) tandis que la deuxième assure que la section efficace de transfert d'impulsion demeure finie à la limite.

Mentionnons deux exemples de résultats obtenus rigoureusement. Dans le cas classique, dans la limite des collisions rasantes on obtient la convergence de l'opérateur de collision de Boltzmann vers l'opérateur de Landau :

$$(4.2) \quad Q_L(f, f) = \nabla_v \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} a(v, v_*) (f_*(\nabla_v f) - f(\nabla_v f)_*) dv_* \right)$$

où la matrice $a(z)$ est définie par

$$a(z) = \frac{\mu}{8}|z|^2 \Phi(|z|) \left[\delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2} \right].$$

Cette limite est justifiée rigoureusement dans [20, 4].

De même, dans un cadre quantique unidimensionnel, l'équation de Kompaneets

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \left[\frac{\partial f}{\partial x} + f + f^2 \right] \right)$$

est la limite des collisions rasantes de l'équation de Boltzmann-Compton

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial t} = \int_0^\infty (f_*(1+f)B(x_*, x; \theta) - f(1+f_*)B(x, x_*; \theta)) dx_*$$

qui modélise la dynamique d'un gaz de photons homogène isotropique et de basse énergie interagissant avec un gaz d'électrons à l'équilibre [24], sorte de version linéarisée de l'équation de Boltzmann pour les bosons.

Voyons à présent sur un cas simple comment fonctionne cette limite formellement. Lorsque la dimension d'espace vaut $N = 1$, l'opérateur de collision de Boltzmann et celui de Landau n'ont plus de sens. Le modèle de Kac se propose alors de remplacer celui de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = Q_K(f)$$

avec

$$Q_K(f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B(\theta)(f'f'_* - ff_*)d\theta dv_*$$

Les vitesses précollisionnelles sont données par

$$v' = v \cos \theta - v_* \sin \theta, \quad v'_* = v \sin \theta + v_* \cos \theta,$$

de sorte que les collisions conservent la masse et l'énergie cinétique, mais pas le moment. On montre le résultat suivant dû à Desvillettes [20] :

PROPOSITION 4.1. *Supposons que B soit à support dans $[-\pi, \pi]$ et impair. Posons*

$$(4.3) \quad B_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\varepsilon^3} B\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right).$$

On définit Q_K^ε comme l'opérateur de Kac dans lequel on a remplacé le noyau de collision B par une suite qui se concentre sur les collisions rasantes B_ε . Alors, formellement, on a

$$Q_K^\varepsilon(f_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A \frac{\partial(vf)}{\partial v} + B \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

avec

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} f dv \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 B(\theta) d\theta \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 f dv \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 B(\theta) d\theta \right)$$

et f est solution de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = A \frac{\partial(vf)}{\partial v} + B \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve consiste essentiellement en un développement limité de f . On suppose donc que f est suffisamment régulière, et on écrit

$$\begin{aligned} Q_K^\varepsilon(f) &= \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) (f'f'_* - ff_*) d\theta dv_* \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B(\theta) (f(v \cos(\varepsilon\theta) - v_* \sin(\varepsilon\theta)) f(v \sin(\varepsilon\theta) + v_* \cos(\varepsilon\theta)) - ff_*) d\theta dv_*. \end{aligned}$$

En développant par rapport à ε , on a

$$\begin{aligned} Q_K^\varepsilon(f) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B(\theta) \left(f(v - \varepsilon\theta v_* - \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta^2 v + O(\varepsilon^3)) f(v_* + \varepsilon\theta v - \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta^2 v_* + O(\varepsilon^3)) \right. \\ &\quad \left. - f f_* \right) d\theta dv_* \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B(\theta) \left[\left(f(v) + (-\varepsilon\theta v_* - \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta^2 v) f'(v) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta^2 v_*^2 f''(v) + O(\varepsilon^3) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(f(v_*) + (+\varepsilon\theta v - \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta^2 v_*) f'(v_*) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\theta^2 v^2 f''(v_*) + O(\varepsilon^3) \right) - f f_* \right] d\theta dv_*. \end{aligned}$$

Comme B est impair, les termes d'ordre 1 en ε disparaissent, et il reste

$$\begin{aligned} Q_K^\varepsilon(f) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B(\theta) \left[-\theta^2 v_* f(v) f'(v_*) + \theta^2 v^2 f(v) f''(v_*) - 2\theta^2 v v_* f'(v) f'(v_*) \right. \\ &\quad \left. - \theta^2 v f'(v) f(v_*) + \theta^2 v_*^2 f''(v) f(v_*) \right] d\theta dv_* + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 B(\theta) d\theta \left[\frac{\partial(vf(v))}{\partial v} \int_{\mathbb{R}} f(v_*) dv_* + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v) \int_{\mathbb{R}} v_*^2 f(v_*) dv_* \right] + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

d'où on tire le résultat annoncé. □

4.3. Résultats obtenus (Chapitre 2, en collaboration avec Giuseppe Toscani). Nous présentons ici les résultats du Chapitre 2. Il est facile d'étendre le modèle de Kac au cas des bosons. On définit l'opérateur suivant :

$$Q_{KB}(f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B(\theta) (f' f'_*(1+f)(1+f_*) - f f_*(1+f')(1+f'_*)) dv_* d\theta$$

où les vitesses précollisionnelles sont données par

$$v' = v \cos \theta - v_* \sin \theta, \quad v'_* = v \sin \theta + v_* \cos \theta.$$

Les termes de la forme $(1+f)$ qu'on a ajoutés prennent en compte les effets quantiques. Le noyau de collision B est positif, pair, et

$$(4.4) \quad B(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|\theta|^{1+\nu}}, \quad 1 < \nu < 2,$$

prenant ainsi en compte la prédominance des collisions rasantes. On s'intéresse à l'équation suivante :

$$(4.5) \quad \partial_t f = Q_{KB}(f),$$

et on voudrait étudier la limite des collisions rasantes pour cette équation. On remplace pour cela le noyau de collision par une suite B_ε se concentrant sur les collisions rasantes et on s'intéresse à la limite de l'opérateur $Q_{KB}^\varepsilon(f)$ ainsi défini lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On peut facilement obtenir un résultat analogue à la Proposition 4.1, grâce à la même méthode (développement limité formel) :

$$Q_{KB}^\varepsilon(f) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}} f(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial v} (vf(1+f)) + \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 f(v) (1+f(v)) dv \right) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Cela nous permet déjà de corriger le modèle de champ moyen pour un gaz de bosons proposé par les physiciens Kaniadakis et Quarati [40, 41] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q_{FP}(f) = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + v f(1 + f)).$$

Les choses se compliquent dès lors qu'on veut donner un sens rigoureux à cette limite. En effet, il faut d'abord montrer l'existence de solutions à l'équation (4.5). Nous avons vu dans la Section 3 que cela nécessite en général de fortement tronquer le noyau de collision, ce qui est incompatible avec la prédominance des collisions rasantes, c'est-à-dire avec B qui diverge autour de $\theta = 0$. Cependant, on remarque qu'on peut montrer l'existence de solutions si on sait qu'elles sont bornées : plus particulièrement, si les termes quantiques $(1+f)$ sont bornés. Nous sommes ainsi amenés à introduire un nouvel opérateur de collision régularisé :

$$\tilde{Q}_{KB}(f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} B(\theta) (f' f'_*(1 + \tilde{f})(1 + \tilde{f}_*) - f f_*(1 + \tilde{f}')(1 + \tilde{f}'_*)) dv_* d\theta$$

où $\tilde{f} = f * \psi$ et ψ est une fonction régularisante, c'est-à-dire une fonction positive à support compact, régulière et d'intégrale 1. On s'intéresse donc maintenant à l'équation

$$(4.6) \quad \partial_t f = \tilde{Q}_{KB}(f).$$

On montre facilement que cette équation possède une solution qui conserve la masse et l'énergie cinétique dans le cas où B est borné, grâce à un théorème général sur les équations différentielles. On remarque ensuite que lorsque l'on applique la transformée de Fourier (en vitesse) à l'équation (4.6), on obtient

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}(t, \xi)}{\partial t} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B(\theta) \left(\hat{f}(\xi \cos \theta) \hat{f}(\xi \sin \theta) - \hat{f}(\xi) \hat{f}(0) \right) d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B(\theta) \int_{\mathbb{R}} \left[\hat{f}((\xi - \eta) \cos \theta) \hat{f}((\xi - \eta) \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. - \hat{f}(\xi - \eta \cos \theta) \hat{f}(\eta \sin \theta) \right] \hat{f}(\eta) \hat{\psi}(\eta) d\eta d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B(\theta) \int_{\mathbb{R}} \left[\hat{f}(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) \hat{f}(-\xi \sin \theta - \eta \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - \hat{f}(\xi - \eta \sin \theta) \hat{f}(-\eta \cos \theta) \right] \hat{f}(\eta) \hat{\psi}(\eta) d\eta d\theta. \end{aligned}$$

On remplace B par $\max(B, n)$. À $n \in \mathbb{N}$ fixé, cette équation a bien une solution, qui est de classe C^2 car c'est la transformée de Fourier de la solution de (4.6) qui préserve le deuxième moment. On peut alors appliquer des développements de Taylor aux différents termes de (4.7) pour obtenir des estimations permettant de passer à la limite $n \rightarrow \infty$ et on obtient :

THÉORÈME 4.2. *Soit $f_0 \in L^1_2(\mathbb{R})$ une donnée initiale positive. Soit B un noyau de collision positif, pair et vérifiant (4.4). Il existe alors une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+; C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}))$ solution de (4.6) au sens où g vérifie (4.7), telle que $g(0, \cdot) = \hat{f}_0$. En outre, g préserve la masse au sens où $g(t, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v) dv$ pour tout $t > 0$.*

Cependant, on ne sait pas montrer que g est bien la transformée de Fourier d'une fonction solution de (4.6), ce qui serait vrai par exemple si $g \in L^2$.

Pour justifier le développement de Taylor permettant de calculer la limite des collisions rasantes, il faut montrer que g est suffisamment régulière. Cela revient à montrer que la solution f de (4.6) avec B borné a suffisamment de moments bornés. On peut ensuite facilement passer à la limite pour transposer ce résultat à g . Bien sûr, comme g est une solution au sens Fourier de (4.6), elle ne pourra converger que vers une solution au sens Fourier de l'équation limite.

THÉORÈME 4.3. *Soit B comme dans le théorème précédent, et soit $f^n(t, v)$ la solution du problème (4.6) avec le noyau de collision $B_n = \max(B, n)$ et de donnée initiale positive $f_0 \in L^1_4(\mathbb{R})$. Alors il existe des constantes explicites $a > 0$, $c > 0$, $C > 0$, A , A_* , η , A_η telles qu'on ait*

$$(4.8) \quad \sup_{n \geq n_B} \|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq (\|f_0\|_{L^1_4} + ct)e^{at}, \quad t \geq 0,$$

$$(4.9) \quad \sup_{n \geq n_B} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq \max\{C, \|f_0\|_{L^1_4}\}.$$

De plus, a, c dans (4.8) ne dépend que de $\|f_0\|_{L^1}$, $\|f_0\|_{L^1_2}$, δ , ψ et A , tandis que C dans (4.9) ne dépend que de $\|f_0\|_{L^1}$, $\|f_0\|_{L^1_2}$, δ , ψ , A , A_* , A_η et η .

Ce résultat est obtenu en multipliant l'équation (4.6) par v^4 et en intégrant en v ; il faut ensuite majorer finement le terme de droite de manière à compenser la singularité de B par des fonctions de θ s'annulant suffisamment en 0. La différence principale entre les deux estimations (4.8) et (4.9) est que la première peut passer à la limite lorsque n tend vers l'infini, et donne ainsi une estimation de régularité sur g .

On considère ensuite une famille de noyaux de collision (B_ε) se concentrant sur les collisions rasantes, c'est-à-dire

$$(4.10) \quad \forall \theta_0 > 0 \quad \sup_{\theta > \theta_0} B_\varepsilon(|\theta|) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

et

$$(4.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi B_\varepsilon(|\theta|) \theta^2 d\theta = 1.$$

À l'aide de la régularité de g_ε , on peut effectuer un développement de Taylor dans (4.7); tout comme pour montrer la propagation des moments, il faut majorer les différents termes finement de manière à compenser la singularité de B_ε par des fonctions s'annulant en $\theta = 0$. On obtient finalement le résultat suivant :

THÉORÈME 4.4. *Soit $B(\theta)$ un noyau de collision positif vérifiant les hypothèses du Théorème 4.2, et soit $B_\varepsilon(\theta)$ une famille se concentrant sur les collisions rasantes en satisfaisant (4.10) et (4.11). Soit g_ε la solution faible du problème (4.6) dans lequel $B(\theta)$ a été remplacé par $B_\varepsilon(\theta)$, de donnée initiale positive $f_0 \in L^1_4(\mathbb{R})$.*

Alors, pour tout $T > 0$, il existe une fonction $g \in L^\infty(0, T; W^{4, \infty}(\mathbb{R}))$ telle que, à extraction d'une sous-suite près,

$$\|g_\varepsilon - g\|_{L^\infty([t_1, t_2] \times \mathcal{K})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \forall 0 < t_1 < t_2 < T \text{ et } \mathcal{K} \subset \mathbb{R} \text{ compact},$$

$$\partial_{\xi_i}^i g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_{\xi_i}^i g \quad \text{dans } L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ faible-}^*, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

et telle que g est solution (au sens Fourier) de l'équation de Fokker-Planck quantique

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(\int_{\mathbb{R}} h(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial v} (vh(1 + \tilde{h})) + \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 h(v)(1 + \tilde{h}(v)) dv \right) \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}.$$

5. Limites hydrodynamiques

Nous avons évoqué dans la Section 2 le passage de la description microscopique d'un gaz quantique (par une équation de Schrödinger à N corps) à une description cinétique (par l'équation de Boltzmann quantique). Ce faisant, on perd une grande quantité d'information. Toutefois, dans une description cinétique, le nombre de degrés de liberté reste très élevé : en dimension 3, l'espace des phases est inclus dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, ce qui reste très grand pour des simulations numériques. Il est alors intéressant de savoir si l'on peut réduire encore le nombre de degrés de liberté en passant d'une description cinétique à une description fluide, valable sur des échelles de temps et d'espace macroscopiques.

Cette étude est motivée par le sixième problème de Hilbert sur l'axiomatisation de la mécanique, posé à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens à Paris en 1900 [37] :

« Ainsi le Livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter au point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua. »

Dans son allocution, Hilbert suggère d'utiliser l'équation de Boltzmann comme intermédiaire entre les équations de Newton et les modèles hydrodynamiques. On perd ainsi de la généralité, car l'équation de Boltzmann ne peut atteindre qu'une partie des équations hydrodynamiques. Cependant, chacune des deux étapes reste intéressante et apporte son lot de difficultés.

De nombreux travaux sur les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann ont été publiés. Les premiers remontent à Hilbert [38] et à Chapman et Enskog [18].

5.1. Principe. Les limites hydrodynamiques sont obtenues dans la limite de relaxation rapide vers un équilibre thermodynamique local. Cela nécessite de comparer les ordres de grandeur des paramètres physiques du système. On introduit donc des nombres sans dimensions qui caractérisent le régime. Ces nombres sont définis après s'être fixé une longueur, un temps et une température macroscopiques typiques du problème l_0 , t_0 et T_0 .

On définit d'abord le nombre de Knudsen comme le rapport entre le libre parcours moyen λ (distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions¹⁵) et la longueur d'observation

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{l_0}.$$

Le nombre de Knudsen mesure la raréfaction du fluide : plus il est grand et plus une molécule du gaz doit parcourir de distance avant d'en rencontrer une autre, donc moins le

¹⁵Il y a plusieurs définitions possibles du libre parcours moyen, car plusieurs mesures de probabilité permettent de mesurer la moyenne. Une définition possible consiste à choisir une molécule au hasard et à suivre son parcours dans le gaz ; après N collisions avec d'autres particules, on divise la distance parcourue par N et on obtient une quantité qui, lorsque N est très grand, doit converger vers une notion de libre parcours moyen.

gaz est dense. On définit ensuite le nombre de Strouhal par

$$\text{St} = \frac{l_0}{ct_0},$$

où c est la vitesse du son du milieu

$$c = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{kT_0}{m}},$$

avec k la constante de Boltzmann et m la masse moléculaire. Deux autres nombres caractérisent le fluide : le nombre de Mach, qui mesure la compressibilité du fluide, est défini par

$$\text{Ma} = \frac{u_0}{c}$$

où u_0 est la vitesse du fluide. Si les paramètres l_0, t_0, T_0 sont choisis de manière à être consistants avec la géométrie du problème et la distribution initiale du fluide dans l'espace des phases (ce que nous supposons dans la suite), alors le ratio $\frac{l_0}{t_0}$ n'est autre que u_0 , et ainsi

$$\text{St} = \text{Ma}.$$

Enfin, le nombre de Reynolds mesure la viscosité du fluide. Il vaut $\text{Re} = \frac{\text{Ma}}{\text{Kn}}$ pour un gaz parfait, c'est-à-dire un gaz dont le volume occupé par les molécules est négligeable devant le volume occupé par le gaz.

L'équation de Boltzmann adimensionnée s'écrit

$$(5.1) \quad \text{St} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\text{Kn}} Q(f).$$

Lorsque le libre parcours moyen devient très petit devant l'échelle d'observation, le temps moyen entre deux collisions devient également petit devant le temps d'observation. De nombreuses collisions ont alors lieu en chaque point en un temps très court et on s'attend au vu de l'équation (5.1) à ce que l'équilibre thermodynamique soit atteint presque instantanément, c'est-à-dire à ce que f soit très proche d'une solution d'équilibre telle que décrite dans la Section 2.

Le problème de limite hydrodynamique consiste donc à montrer que dans la limite $\text{Kn} \rightarrow 0$, f se rapproche d'une solution d'équilibre et à en déduire des équations satisfaites par les champs hydrodynamiques associés, qui sont

- la densité $R(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv$
- la vitesse $U(t, x) = \frac{1}{R(t, x)} \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv$
- la température $T(t, x)$ définie par $\left(\frac{1}{2} R |U|^2 + \frac{3}{2} RT \right) (t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{2} f(t, x, v) dv$.

Les différents régimes qui nous intéressent sont :

- $\text{Kn} \rightarrow 0$, $\text{Ma} = O(1)$: régime Euler compressible
- $\text{Kn} \rightarrow 0$, $\text{Ma} \rightarrow 0$, $\text{Kn} \ll \text{Ma}$: régime Euler incompressible
- $\text{Kn} \rightarrow 0$, $\text{Ma} \rightarrow 0$, $\text{Kn} = \text{Ma}$: régime Navier-Stokes incompressible.

5.2. Quelques résultats. L'idée originale de Hilbert est de développer f sous forme d'une série

$$(5.2) \quad f(t, x, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (\text{Kn})^n f_n(t, x, v),$$

d'insérer cette expression dans l'équation (5.1) et d'identifier les termes selon les puissances de Kn. Chapman et Enskog proposent quant à eux d'utiliser un développement de la forme (5.2) mais où les f_n ne dépendent de (t, x) qu'à travers $R(t, x)$, $U(t, x)$, $T(t, x)$ et leurs dérivées. Ces méthodes ont été étudiées par exemple par Grad [34] et Caflisch [15, 16] et sont encore aujourd'hui à la base de nombreuses dérivations formelles et rigoureuses de modèles macroscopiques.

À l'ordre 0, on obtient simplement

$$f_0 = M_f$$

où M_f est la maxwellienne ayant les mêmes moments que f , et le système de lois de conservation (2.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Ma} \partial_t R + \nabla_x \cdot (RU) &= 0, \\ \text{Ma} \partial_t (RU) + \nabla_x \cdot (RU \otimes U + RTId) &= 0, \\ \text{Ma} \partial_t (R|U|^2 + 3RT) + \nabla_x \cdot (U(R|U|^2 + 5RT)) &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit des équations d'Euler pour un fluide compressible. À l'ordre suivant en Kn, on obtient

$$\text{Ma} \partial_t M_f + v \cdot \nabla_x M_f = -M_f \mathcal{L}_{M_f}(g_1)$$

où $M_f \times g_1 = f_1$ et \mathcal{L}_{M_f} est la linéarisation de l'opérateur de collision autour de la maxwellienne M_f . En utilisant les propriétés de l'opérateur linéarisé \mathcal{L}_{M_f} , on obtient le système de Navier-Stokes compressible :

$$\begin{aligned} \text{Ma} \partial_t R + \nabla_x \cdot (RU) &= 0, \\ \text{Ma} \partial_t (RU) + \nabla_x \cdot (RU \otimes U + RTId) &= \text{Kn} \nabla_x \cdot (\mu(R, T)DU) + O(\text{Kn}^2), \\ \text{Ma} \partial_t (R|U|^2 + 3RT) + \nabla_x \cdot (U(R|U|^2 + 5RT)) &= \text{Kn} \nabla_x \cdot (\nu(R, T)\nabla_x T + \mu(R, T)DU \cdot U) \\ &\quad + O(\text{Kn}^2) \end{aligned}$$

avec

$$DU = \frac{1}{2}(\nabla_x U + (\nabla_x U)^T) - \frac{1}{3}(\nabla_x \cdot U)Id$$

et où les coefficients diffusifs (la viscosité $\mu(R, T)$ et la conductivité thermique $\nu(R, T)$) sont définis en utilisant \mathcal{L}_{M_f} .

On s'attend donc à ce que les moments d'une solution de l'équation de Boltzmann soient proches d'une solution des équations d'Euler compressibles à l'ordre $O(\text{Kn})$, et d'une solution des équations de Navier-Stokes compressibles faiblement visqueuses à l'ordre $O(\text{Kn}^2)$. Il en va de même pour une solution de l'équation de Boltzmann quantique qui a les mêmes lois de conservation locales. Aux ordres suivants, on obtient des modèles (Burnett, super-Burnett) dont la validité physique est loin d'être claire.

Les régimes incompressibles s'obtiennent en faisant tendre le nombre de Mach vers 0 simultanément au nombre de Knudsen. Ainsi, le scaling

$$(5.3) \quad \varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^q} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)$$

mène formellement, lorsque f_ε est une fluctuation autour d'un équilibre global et $\varepsilon \rightarrow 0$, aux équations d'Euler incompressibles si $q > 1$ et aux équations de Navier-Stokes incompressibles si $q = 1$.

Les méthodes de Hilbert et Chapman-Enskog permettent de montrer des résultats rigoureux en utilisant un développement asymptotique tronqué. Ainsi, Caflisch [15] a

donné une justification rigoureuse de la limite Euler compressible jusqu'à la première singularité :

THÉORÈME 5.1. *Supposons que les équations d'Euler compressibles aient une solution régulière (R, U, T) sur $[0, t_*[$. Alors il existe une suite (f_ε) de solutions de l'équation de Boltzmann*

$$\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)$$

dont les moments $(R_\varepsilon, U_\varepsilon, T_\varepsilon)$ convergent vers (R, U, T) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

De même, DeMasi, Esposito et Lebowitz [19] justifient la limite Navier-Stokes incompressible :

THÉORÈME 5.2. *Supposons que les équations de Navier-Stokes incompressibles aient une solution régulière u sur $[0, t_*[$. Il existe alors une suite (f_ε) de solutions de l'équation de Boltzmann*

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)$$

qui, dans un certain espace fonctionnel, est proche de la maxwellienne $M_{(1, \varepsilon u, 1)}$ de densité et température unité et de vitesse εu .

Le même genre de résultat a été montré par Arlotti et Lachowicz [5] dans le cas de l'équation de Boltzmann quantique¹⁶ :

THÉORÈME 5.3. *On suppose que les équations d'Euler (ou Navier-Stokes) compressibles admettent une solution régulière (R, U, T) sur $[0, t_*[$ telle qu'il existe des coefficients (τ, γ) réguliers permettant à l'état d'équilibre associé $P_{(\tau, U, \gamma)}$ (voir Section 2) d'avoir pour moments (R, U, T) . Alors l'équation de Boltzmann quantique*

$$\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q_\kappa(f_\varepsilon)$$

munie de la donnée initiale $P_{(\gamma_0, U_0, \tau_0)}$, où $U_0 = U|_{t=0}$ et où (γ_0, τ_0) sont les coefficients correspondant aux moments $(R|_{t=0}, T|_{t=0})$, admet une solution f_ε qui converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers $P_{(\tau, U, \gamma)}$ dans un espace approprié.

5.3. Deux approches modernes de la limite hydrodynamique. Au début des années 90, Bardos, Golse et Levermore ont proposé un programme pour étendre les résultats de limites hydrodynamiques à des solutions faibles. Il s'agit de montrer que des solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann convergent vers des solutions dissipatives de l'équation d'Euler incompressible ou vers des solutions de Leray de l'équation de Navier-Stokes incompressible. Les bases du programme sont posées dans [7, 8].

5.3.1. La méthode des moments. Le principe de cette méthode est d'obtenir les équations hydrodynamiques asymptotiques en passant à la limite dans les lois de conservations satisfaites par les solutions de l'équation de Boltzmann. Il est donc nécessaire d'obtenir de la compacité sur les moments de f_ε . Cette méthode a été appliquée avec succès à la limite Navier-Stokes incompressible. Les premiers résultats sont dus à Bardos, Golse et Levermore [8] pour le cas stationnaire et à Lions et Masmoudi [51] pour le cas avec dépendance en temps.

¹⁶C'est à notre connaissance le seul résultat rigoureux de limite hydrodynamique pour l'équation de Boltzmann quantique.

Définissons g_ε la fluctuation autour de la maxwellienne centrée réduite $M = M_{(1,0,1)}$ de la solution de l'équation de Boltzmann f_ε :

$$(5.4) \quad f_\varepsilon = M(1 + \varepsilon g_\varepsilon).$$

Cette fluctuation est d'ordre 1 si l'on prend le scaling suivant :

$$H(f_{\varepsilon, in} | M) \leq C\varepsilon^2.$$

En effet, sous cette condition, le théorème H nous garantit que la famille des fluctuations (g_ε) est faiblement relativement compacte dans $L^1_{loc}(dtdx, L^1(M(1 + |v|^2)dv)$. L'équation de Boltzmann devient, en terme de g_ε :

$$(5.5) \quad \varepsilon \partial_t g_\varepsilon + v \cdot \nabla_x g_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_M g_\varepsilon = \frac{1}{M} Q(Mg_\varepsilon, Mg_\varepsilon),$$

où \mathcal{L}_M est le linéarisé de Q autour de M . Il est clair que formellement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, g_ε converge vers un élément du noyau de \mathcal{L}_M , à savoir une maxwellienne infinitésimale g :

$$g(t, x, v) = \rho(t, x) + u(t, x) \cdot v + \frac{1}{2} \theta(t, x)(|v|^2 - 3).$$

En passant à la limite dans les lois de conservation de la masse et du moment, on obtient la contrainte d'incompressibilité et la relation de Boussinesq

$$(5.6) \quad \nabla_x \cdot u = 0, \quad \nabla_x(\rho + \theta) = 0.$$

On réécrit alors les équations du moment et de l'énergie sous la forme

$$\partial_t \int Mg_\varepsilon v dv + \nabla_x \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int Mg_\varepsilon \Phi(v) dv + \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{3\varepsilon} \int Mg_\varepsilon |v|^2 dv \right) = 0,$$

$$\partial_t \int Mg_\varepsilon \frac{1}{2}(|v|^2 - 5) dv + \nabla_x \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int Mg_\varepsilon \Psi(v) dv = 0$$

où $\Phi(v)$ et $\Psi(v)$ sont les tenseurs de flux de moment et de flux de chaleur définis par

$$\Phi(v) = v \otimes v - \frac{1}{3}|v|^2 Id, \quad \Psi(v) = \frac{1}{2}v(|v|^2 - 5).$$

Ces tenseurs jouent un rôle important car ils sont dans $(\text{Ker } \mathcal{L}_M)^\perp = \text{Im } \mathcal{L}_M$ (\mathcal{L}_M est un opérateur de Fredholm autoadjoint). On peut ainsi définir

$$\tilde{\Phi} = \mathcal{L}_M^{-1}(\Phi), \quad \tilde{\Psi} = \mathcal{L}_M^{-1}(\Psi),$$

qui nous permettent d'écrire, en réutilisant (5.5),

$$\partial_t P \int Mg_\varepsilon v dv + P \nabla_x \cdot \int (Q(Mg_\varepsilon, Mg_\varepsilon) - v \cdot \nabla_x Mg_\varepsilon) \tilde{\Phi}(v) dv = O(\varepsilon),$$

$$\partial_t \int Mg_\varepsilon \frac{1}{2}(|v|^2 - 5) dv + \nabla_x \cdot \int (Q(Mg_\varepsilon, Mg_\varepsilon) - v \cdot \nabla_x Mg_\varepsilon) \tilde{\Psi}(v) dv = O(\varepsilon)$$

où P est le projecteur de Leray sur l'ensemble des vecteurs à divergence nulle. En utilisant la relaxation $g_\varepsilon \sim \Pi g_\varepsilon$ où Π est la projection orthogonale sur $\text{Ker } \mathcal{L}_M$ et l'identité

$$Q(M\Pi g, M\Pi g) = \frac{1}{2} M \mathcal{L}_M (\Pi g)^2,$$

on identifie dans les deux équations les termes de convection et de diffusion, de sorte que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient formellement

$$(5.7) \quad \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p - \mu \Delta u = 0,$$

$$(5.8) \quad \partial_t \theta + u \nabla_x \theta - \nu \Delta_x \theta = 0$$

avec

$$(5.9) \quad \mu = \frac{1}{10} \int \Phi : \tilde{\Phi} M dv, \quad \nu = \frac{2}{15} \int \Psi \cdot \tilde{\Psi} M dv.$$

Ce processus formel a été rendu rigoureux dans [8] ou [51] en supposant

- que les solutions de l'équation de Boltzmann vérifient la conservation locale de la masse, du moment et de l'énergie, ce qui n'est pas garanti par la théorie d'existence des solutions renormalisées,
- et que $(1 + |v|^2) \frac{g_\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon}{2} g_\varepsilon}$ est relativement compact dans $L_{loc}^1(dt dx, L^1(M dv))$.

La première hypothèse a été levée en considérant dans lois de conservation approchées et en contrôlant asymptotiquement les défauts de conservation. La deuxième hypothèse est également levée en utilisant fortement le contrôle donné par le théorème H

$$f_\varepsilon - M_{f_\varepsilon} = O(\varepsilon^2)$$

et en combinant des propriétés dispersives de l'opérateur de transport avec un lemme de moyenne dans L^1 (voir la Section 3). Ceci a mené à une dérivation rigoureuse de l'équation de Navier-Stokes dans le cas des molécules maxwelliennes puis pour les potentiels durs avec cutoff par Golse et Saint-Raymond [32, 33], dans le cas des potentiels mous par Levermore et Masmoudi [46] et très récemment dans le cas d'une section de collision sans cutoff par Arsenio [6]. Nous donnons ici la version de [33] :

THÉORÈME 5.4. *Soit $(f_{\varepsilon, in})$ une famille de données initiales qui soient des fluctuations autour d'un équilibre global M :*

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | M) \leq C_{in},$$

et vérifiant les convergences faibles dans $L_{loc}^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$)

$$\frac{1}{\varepsilon} P \int f_{\varepsilon, in} v dv \rightharpoonup u_{in}, \quad \frac{1}{\varepsilon} \int (f_{\varepsilon, in} - M)(|v|^2 - 5) dv \rightharpoonup 5\theta_{in}.$$

Soit (f_ε) une famille de solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3,$$

$$f_\varepsilon(0, \cdot, \cdot) = f_{\varepsilon, in} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^3,$$

avec réflexion spéculaire au bord (3.24), où l'opérateur de collision est associé à un noyau de collision B vérifiant l'hypothèse de cutoff de Grad (3.1).

Alors la famille des fluctuations (g_ε) définies par (5.4) est faiblement relativement compacte dans $L_{loc}^1(dt dx, L^1((1 + |v|^2)M dv))$, et chaque point d'accumulation g est une maxwellienne infinitésimale

$$g = \Pi g = \rho + u \cdot v + \frac{1}{2} \theta (|v|^2 - 3).$$

De plus, les coefficients de g sont solutions du système de Navier-Stokes-Fourier (5.6)-(5.7)-(5.8) de données initiale

$$u(0, \cdot) = u_{in}, \quad \theta(0, \cdot) = \theta_{in} \quad \text{sur } \Omega,$$

avec conditions au bord de Navier

$$u \cdot n = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial \Omega.$$

Ce résultat s'étend à des conditions au bord plus générales que la réflexion spéculaire [65]. En outre, le résultat de convergence faible peut être renforcé grâce à la notion de convergence entropique introduite dans [8] :

DEFINITION 5.5. Une famille (a_ε) de $L^1(Mdv)$ converge entropiquement à l'ordre $m > 0$ vers a lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ si

- $a_\varepsilon \rightarrow a$ dans $w - L^1(Mdvdx)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,
- $1 + \varepsilon^m a_\varepsilon \geq 0$ p.p. pour tout $\varepsilon \geq 0$,
- $\frac{1}{\varepsilon^{2m}} H(M(1 + \varepsilon^m a_\varepsilon)|M) \rightarrow \frac{1}{2} \int a^2 Mdvdx$.

Ainsi, si la fluctuation initiale converge entropiquement vers une maxwellienne infinitésimale, si il n'y a pas d'ondes acoustiques et si le système de Navier-Stokes-Fourier a une unique solution, alors la fluctuation converge entropiquement vers la maxwellienne infinitésimale dont les coefficients sont l'unique solution du système de Navier-Stokes-Fourier. On trouvera tous les détails ainsi que les démonstrations dans [65].

5.3.2. *La méthode de l'entropie modulée.* La méthode des moments qui utilise de la compacité faible ne marche pas dans les régimes non visqueux. L'idée d'utiliser l'entropie relative dans l'étude des limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann remonte à la notion de convergence entropique développé dans [8], et surtout à la solution au problème de limite hydrodynamique pour le modèle de Ginzburg-Landau proposée par Yau [71].

L'entropie relative de F par rapport à G est définie par

$$H(F|G) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} \left(F \log \frac{F}{G} - F + G \right) dvdx.$$

On remarque que l'intégrande est positive, de sorte que l'intégrale est bien définie pour F et G deux fonctions positives intégrables. D'autre part, l'entropie relative mesure dans un certain sens l'écart entre F et G :

$$\|\sqrt{F} - \sqrt{G}\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^3)}^2 \leq H(F|G),$$

conséquence de l'inégalité ponctuelle

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x \log \frac{x}{y} - x + y \quad \forall x, y > 0.$$

L'entropie relative de f , solution de l'équation de Boltzmann, par rapport à la maxwellienne centrée réduite M est une fonctionnelle de Lyapounov d'après le théorème H. Dans la limite hydrodynamique, on s'attend à ce que la solution f_ε de l'équation de Boltzmann (5.3) ressemble à une maxwellienne dont les moments sont des fluctuations autour d'une valeur d'équilibre, ces fluctuations étant solution des équations d'Euler ($q > 1$) ou Navier-Stokes ($q = 1$) incompressibles. On étudie donc l'entropie modulée

$$H_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon(t, \cdot, \cdot) | M_\varepsilon(t, \cdot, \cdot))$$

où $M_\varepsilon(t, x, v) = M_{(R_\varepsilon, U_\varepsilon, T_\varepsilon)}$ et $R_\varepsilon, U_\varepsilon, T_\varepsilon$ sont des fluctuations autour respectivement de 1, 0, 1. La méthode de l'entropie modulée consiste à étudier l'évolution temporelle de $H_\varepsilon(t)$ et, grâce à un lemme de Gronwall, à montrer que cette quantité tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cette méthode appliquée à la limite Navier-Stokes donne le résultat suivant, dû à Golse, Levermore et Saint-Raymond [27] :

THÉORÈME 5.6. *Soit une famille $(g_{\varepsilon, in})$ convergeant entropiquement à l'ordre 1 vers $g_{in} = u_{in}(x) \cdot v$, où u_{in} est un champ de vecteurs à divergence nulle sur le tore \mathbb{T}^3 tel*

que l'équation de Navier-Stokes incompressible (dont la viscosité est donnée par (5.9)) de donnée initiale u_{in} admette une solution classique globale u . Soit f_ε une solution renormalisée de l'équation de Boltzmann (5.3) avec $q = 1$ et cutoff de Grad (3.1) de donnée initiale $f_{\varepsilon,in} = M(1 + \varepsilon g_{\varepsilon,in})$.

On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ la solution renormalisée satisfait la conservation locale de l'impulsion, et que la famille des fluctuations $g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \frac{f_\varepsilon - M}{M}$ vérifie

$$|v|^2 \frac{g_\varepsilon^2}{1 + \frac{1}{3}\varepsilon|g_\varepsilon|} \text{ est relativement compacte dans } w - L^\infty(dt; L^1(Mdvdx)).$$

Alors $g_\varepsilon \rightarrow g = u(t, x) \cdot v$ entropiquement à l'ordre 1 pour tout $t > 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ce résultat est moins bon que la version forte du Théorème 5.4 qui ne nécessite pas l'hypothèse de compacité ni celle de conservation locale du moment, et dans lequel on ne suppose pas que les fluctuations de densité et de température sont nulles; mais il n'est certainement pas optimal et les hypothèses supplémentaires peuvent probablement être levées. Pour la limite Euler, en revanche, la méthode de l'entropie relative permet d'obtenir des résultats inaccessibles par des méthodes de compacité [63, 66] :

THÉORÈME 5.7. Soit $(f_{\varepsilon,in})$ une famille de fluctuations autour d'un équilibre global M :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon,in}|M) \leq C_{in},$$

et qui converge entropiquement à l'ordre 1 vers $g_{in} = u_{in}(x) \cdot v$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon,in}|M_{(1,\varepsilon u_{in},1)}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

pour un certain champ de vitesses $u_{in} \in L^2(\Omega)$ à divergence nulle.

Soit (f_ε) une famille de solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann (5.3) avec $q > 1$ et cutoff de Grad (3.1) de donnée initiale $f_{\varepsilon,in}$ avec réflexion spéculaire au bord de Ω .

Alors la famille des vitesses $u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int f_\varepsilon v dv$ est relativement compacte dans $L^1_{loc}(dt dx)$, et tout point d'accumulation u de (u_ε) est une solution dissipative des équations d'Euler incompressibles.

Si de plus la donnée initiale u_{in} est régulière et si l'équation d'Euler admet une solution régulière u , alors la famille de fluctuations $g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \frac{f_\varepsilon - M}{M}$ converge entropiquement vers $g = u(t, x) \cdot v$.

Les solutions dissipatives de l'équation d'Euler incompressible sont des solutions dans un sens très faible, locales en temps, introduites par Lions [47]. Le Théorème 5.7 nous permet de passer des solutions renormalisées, qui sont des solutions faibles de l'équation de Boltzmann, aux solutions dissipatives de l'équation d'Euler incompressible, sans hypothèse de compacité. Cependant, il a fallu pour cela supposer que les champs densité et température initiaux ne fluctuent pas, et que $\nabla_x \cdot u_{in} = 0$, autrement dit que les données initiales sont bien préparées, pour qu'il n'y ait pas d'ondes acoustiques. En effet, lorsqu'on prend en compte les ondes acoustiques, il faut pouvoir écrire la conservation locale de l'énergie, qui n'est pas vérifiée par les solutions renormalisées. On a aussi fait une hypothèse sur le profil cinétique, en supposant que dès l'instant initial la solution f_ε est proche d'une maxwellienne, autrement dit que la relaxation est quasi instantanée. En utilisant une notion de solution plus forte, Saint-Raymond montre le résultat suivant [66] :

THÉORÈME 5.8. Soit $(f_{\varepsilon, in})$ une famille de fluctuations autour d'un équilibre global M :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | M) \leq C_{in}.$$

Sans perte de généralité, on suppose que les fluctuations $g_{\varepsilon, in}$ convergent entropiquement à l'ordre 1 vers g_{in} :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon} | M) \rightarrow \frac{1}{2} \int M g_{in}^2 dv dx.$$

Soit (f_{ε}) une famille de solutions de l'équation de Boltzmann (5.3) avec $q > 1$ et cutoff de Grad (3.1) de donnée initiale $f_{\varepsilon, in}$ avec réflexion spéculaire au bord de Ω . On suppose que

$$(5.10) \quad \int M \left(\frac{f_{\varepsilon} - M}{M} \right)^2 dv \leq C \quad p.p. \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

Alors, à extraction d'une sous-suite près, la famille des fluctuations $g_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{f_{\varepsilon} - M}{M}$ converge faiblement vers $u \cdot v + \frac{1}{2} \theta (|v|^2 - 5)$, où (u, θ) est la solution lipschitzienne des équations d'Euler incompressibles

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p &= 0, & \nabla_x u &= 0, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta &= 0, \\ u(0, x) &= P u_{in}(x), & \theta(0, x) &= \frac{1}{5} (3\theta_{in} - 2\rho_{in}) \end{aligned}$$

tant que celle-ci existe (P désigne la projection de Leray sur les vecteurs à divergence nulle).

L'hypothèse (5.10) est satisfaite par des solutions régulières de l'équation de Boltzmann, comme celles construites par Guo [36]. La stratégie de démonstration du Théorème 5.8 est la suivante :

- On introduit l'entropie modulée $\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon} | M_{(R_{\varepsilon}, U_{\varepsilon}, T_{\varepsilon})})$ où l'on choisit $R_{\varepsilon} = e^{\varepsilon \tilde{\rho}}$, $U_{\varepsilon} = \varepsilon \tilde{u}$ et $T_{\varepsilon} = e^{\varepsilon \tilde{\theta}}$. On note $M_{\varepsilon} = M_{(R_{\varepsilon}, U_{\varepsilon}, T_{\varepsilon})}$.
- On montre, en utilisant les lois de conservation locales, que l'entropie modulée vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon} | M_{\varepsilon})(t) + \frac{1}{\varepsilon^{q+3}} \int_0^t \int D(f_{\varepsilon}) dx ds \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon} | M_{(R_{\varepsilon, in}, U_{\varepsilon, in}, T_{\varepsilon, in})}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int \partial_t e^{\varepsilon \tilde{\rho}} dx ds \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \iint f_{\varepsilon} \left(1, e^{-\varepsilon \tilde{\theta}} (v - \varepsilon \tilde{u}), \frac{1}{2} (e^{-\varepsilon \tilde{\theta}} |v - \varepsilon \tilde{u}|^2 - 3) \right) \cdot \mathcal{A}_{\varepsilon}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta}) dv dx ds \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \iint f_{\varepsilon} \left(\nabla_x \tilde{u} : \Phi_{\varepsilon} + e^{\frac{1}{2} \varepsilon \tilde{\theta}} \nabla_x \tilde{\theta} \cdot \Psi_{\varepsilon} \right) dv dx ds \end{aligned}$$

où Φ_{ε} et Ψ_{ε} sont des versions dilatées et translatées des flux Φ et Ψ , et où $\mathcal{A}_{\varepsilon}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ est un opérateur d'accélération défini par

$$\mathcal{A}_{\varepsilon}(\rho, u, \theta) = \begin{pmatrix} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot u \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \left(\frac{e^{\varepsilon \tilde{\theta}} - 1}{\varepsilon} \right) \nabla_x (\rho + \theta) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x (\rho + \theta) \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta + \frac{2}{3\theta} \nabla_x \cdot u \end{pmatrix}.$$

- On fabrique, grâce à des techniques de filtrage, des fonctions $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ de manière à avoir

$$\mathcal{A}_\varepsilon(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta}) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2 \text{ et } \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int \partial_t e^{\varepsilon \tilde{\rho}} dx ds \rightarrow 0$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

- On vérifie que les termes de flux $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \iint f_\varepsilon \left(\nabla_x \tilde{u} : \Phi_\varepsilon + e^{\frac{1}{2}\varepsilon \tilde{\theta}} \nabla_x \tilde{\theta} \cdot \Psi_\varepsilon \right) dv dx ds$ sont contrôlés par l'entropie modulée et la dissipation d'entropie ; il faut utiliser pour cela une décomposition du flux grâce à la fluctuation renormalisée $\hat{g}_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{f_\varepsilon}{M_\varepsilon}} - 1 \right)$ et une estimation de relaxation provenant de la coercivité de l'opérateur de Boltzmann linéarisé autour de $M_\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$

$$\|\hat{g}_\varepsilon - \Pi_\varepsilon \hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon dv)} = O(\varepsilon^{(q+1)/2})_{L^2_{t,x}} + O(\varepsilon) \|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon dv)}^2$$

où Π_ε est la projection orthogonale sur le noyau de \mathcal{L}_ε . C'est ici qu'intervient l'hypothèse de contrôle des grandes vitesses (5.10).

- On utilise le lemme de Gronwall pour montrer que $\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon | M_\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans le cas où les données sont bien préparées (si $\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | M_{\varepsilon, in}) \rightarrow 0$). Sinon il faut aussi étudier le processus de relaxation en modulant la dissipation d'entropie.

5.4. Résultats obtenus dans le cas des bosons (Chapitre 3). Un modèle pour un gaz de bosons après apparition d'un condensat a été proposé par les physiciens Pomeau, Brachet, Métens et Rica [61]. Il s'agit de coupler une équation cinétique de type (2.2) pour la partie normale du fluide avec une équation de Schrödinger non linéaire (ou Gross-Pitaevskii) pour la partie condensée :

$$(5.11) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V_1 \cdot \nabla_v f = Q(f) + \rho_s Q_1(f) \\ i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_x \Psi + V_2 \Psi + \frac{i\hbar}{2} Q_2(f) \Psi. \end{cases}$$

Ici, f est la densité de la partie normale du fluide et Ψ la fonction d'onde du condensat. La première équation, qui modélise l'évolution de la partie normale, est constituée d'un terme de transport (en l'absence d'interactions, les particules se déplacent en ligne droite à vitesse constante), d'un terme de champ moyen modélisant les interactions à longue portée entre les particules et de deux termes de collisions. La deuxième équation modélise l'évolution du condensat ; des termes de couplage tiennent compte de l'interaction avec le fluide normal aussi bien à longue portée (terme de champ moyen) qu'à courte portée (terme de collisions).

L'opérateur de collision $Q(f)$ est identique à (2.3) (avec $\kappa = 1$) ; il modélise les collisions entre particules du fluide normales, tandis que $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$, qui en sont inspirés, représentent les collisions entre une particule du fluide normal et une particule du fluide condensé. Les potentiels sont donnés par $V_1 = \alpha(2\rho_n + \rho_s)$, $V_2 = \frac{1}{2}V_1$, où ρ_n et ρ_s sont respectivement la densité du fluide normal $\rho_n = \int f dv$ et celle du fluide condensé $\rho_s = |\Psi|^2$, et α est une constante positive.

Étant donné l'état de l'art sur la théorie de Cauchy pour l'équation de Boltzmann pour les bosons, il est illusoire de chercher à montrer un théorème d'existence pour ce système. Notons toutefois que Nouri [58] a obtenu l'existence d'une solution globale en temps à un système analogue à la version spatialement homogène de (5.11). Ce qui nous intéresse est la limite hydrodynamique formelle de ce système, autrement dit on cherche à dériver un système d'équations macroscopiques pour un fluide de bosons ayant une partie condensée.

Pour cela, on effectue le changement d'échelle d'espace et de temps hyperbolique $(t, x) \mapsto (\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon})$ (scaling Euler compressible), où ε est le nombre de Knudsen, et on obtient le système

$$(5.12) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V_1 \cdot \nabla_v f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f) + \frac{\rho_s}{\varepsilon} Q_1(f) \\ ih \partial_t \Psi = -\frac{h^2}{2} \Delta_x \Psi + V_2 \Psi + \frac{ih}{2\varepsilon} Q_2(f) \Psi \end{cases}$$

où $h = \varepsilon \tilde{h}$; on cherche alors à déterminer les asymptotiques de ce système lorsque $\tilde{h} \rightarrow 0$ (limite semi-classique) et $\varepsilon \rightarrow 0$ (limite hydrodynamique dans le scaling Euler compressible).

L'idée est d'utiliser la méthode des moments : on détermine d'abord la forme que prend f à la limite, puis on fait tendre \tilde{h} et ε vers 0 dans les lois de conservation gouvernant les quantités macroscopiques, qui sont les densités du fluide normal ρ_n et de la partie condensée ρ_s , les vitesses $u_n = \frac{1}{\rho_n} \int f v dv$ et $u_s = \frac{\tilde{h}}{\rho_s} \Im(\bar{\Psi} \nabla_x \Psi)$, et l'énergie totale du système $E = \int |v|^2 f dv + \rho_s |u_s|^2 + \tilde{h}^2 |\nabla_x \sqrt{\rho_s}|^2 + \frac{\alpha}{2} (2\rho_n + \rho_s)^2$. On obtient finalement le système suivant :

$$(5.13) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_n + \nabla_x \cdot (\rho_n u_n) = 0 \\ \partial_t \rho_s + \nabla_x \cdot (\rho_s u_s) = 0 \\ \partial_t (\rho_n u_n) + \nabla_x \cdot (\rho_n u_n \otimes u_n + p I_N) = -\alpha \rho_n \nabla_x (2\rho_n + \rho_s) \\ \partial_t (\rho_s u_s) + \nabla_x \cdot (\rho_s u_s \otimes u_s) = -\frac{\alpha}{2} \rho_s \nabla_x (2\rho_n + \rho_s) \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_n |u_n|^2 + \frac{1}{2} \rho_s |u_s|^2 + \frac{N}{2} p + \frac{\alpha}{4} (2\rho_n + \rho_s)^2 \right) \\ + \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_n |u_n|^2 u_n + \frac{1}{2} \rho_s |u_s|^2 u_s + \frac{(N+2)}{2} p u_n \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{2} (2\rho_n + \rho_s) (2\rho_n u_n + \rho_s u_s) \right) = 0 \end{cases}$$

avec I_N la matrice identité de taille $N \times N$. Il s'agit d'une sorte de système d'équations d'Euler compressible à deux fluides, qui semble nouveau dans la littérature. Il diffère du modèle à deux fluides de Landau puisqu'ici, les deux fluides échangent du moment tout en conservant le moment total, mais ils n'échangent pas de masse. Ce système étant relativement compliqué, on cherche à le simplifier afin de pouvoir en étudier les propriétés. On introduit pour cela l'entropie du fluide normal

$$S(f) = \frac{1}{\rho_n} \int_{\mathbb{R}^N} ((1+f) \log(1+f) - f \log f) dv,$$

et on montre que si l'entropie reste constante (approximation isentropique), alors la loi de pression s'écrit

$$p = \tilde{c}_N \rho_n^{\frac{N+2}{N}}$$

où N est la dimension de l'espace. En choisissant $N = 3$ et en supposant que le système est invariant selon les axes y et z , notre système devient :

$$(5.14) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_n + \partial_x (\rho_n u_n) = 0 \\ \partial_t \rho_s + \partial_x (\rho_s u_s) = 0 \\ \partial_t (\rho_n u_n) + \partial_x (\rho_n u_n^2 + \tilde{c} \rho_n^{5/3}) = -\alpha \rho_n \partial_x (2\rho_n + \rho_s) \\ \partial_t (\rho_s u_s) + \partial_x (\rho_s u_s^2) = -\frac{\alpha}{2} \rho_s \partial_x (2\rho_n + \rho_s). \end{cases}$$

La suite du travail consiste en une étude sommaire de ce système. On montre d'abord qu'il est hyperbolique sous certaines conditions.

THÉORÈME 5.9. *Le système (5.14) est strictement hyperbolique si $\rho_n, \rho_s > 0$ et tant que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. $(u_n - u_s)^2 < c\rho_n^{2/3}$
2. $(u_n - u_s)^2 < \frac{c\frac{\alpha}{2}\rho_s\rho_n^{2/3}}{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n}$
3. $\rho_n \leq \left(\frac{c}{2\alpha}\right)^3$.

La condition 3 est la plus intéressante, car elle permet de montrer l'existence de solutions faibles à donnée initiale petite. On montre pour finir que deux des champs sont vraiment non linéaires, et qu'il existe des solutions discontinues (chocs), qu'on visualise numériquement.

5.5. Résultats obtenus dans le cas des fermions (Chapitre 5). On s'intéresse au problème de limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann pour les fermions, dans le scaling Euler incompressible. Cette équation a une théorie d'existence beaucoup plus favorable que l'équation de Boltzmann pour les bosons, et les lois de conservations locales sont vérifiées rigoureusement. Ceci nous permet d'utiliser la méthode de l'entropie modulée couplée avec une technique de filtrage des ondes acoustiques sur le modèle de ce qui est fait pour l'équation de Boltzmann classique. Les principales différences avec le cas classique sont les suivantes :

- Le phénomène de relaxation des solutions vers l'équilibre thermodynamique est encore très mal compris à ce jour, ce qui nous oblige à considérer uniquement des données bien préparées.
- Les trois lois de conservation sont satisfaites rigoureusement, et les solutions sont plus régulières que les solutions renormalisées ; cependant cela n'est valable que lorsqu'on considère un noyau de collision intégrable. Or, les propriétés de coercivité de l'opérateur de collision linéarisé ne sont pas valables dans ce cas ; on introduit donc un noyau de collision tronqué de manière à le rendre intégrable mais autorisant à la limite la coercivité de l'opérateur linéarisé.
- Les variables macroscopiques ne s'expriment pas simplement en fonction des coefficients de la distribution d'équilibre ; cela nous oblige à choisir un scaling pour ces coefficients différent du cas classique.
- La plus forte non linéarité de l'opérateur de collision complique les calculs et notamment l'estimation sur la relaxation de la fluctuation renormalisée, nous obligeant à introduire deux fluctuations renormalisées différentes ; cependant la borne $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$ permet de résoudre une partie des problèmes posés par la non linéarité.

On montre le résultat suivant :

THÉORÈME 5.10. *Soit Ω un domaine régulier borné de \mathbb{R}^3 . Soit $(f_{\varepsilon,in})$ une famille de fonctions positives mesurables sur $\Omega \times \mathbb{R}^3$ vérifiant les bornes*

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|^2 + |v|^3) f_{\varepsilon,in} dv dx \leq C_\varepsilon,$$

$$0 \leq f_{\varepsilon,in} \leq 1,$$

et fluctuant autour d'un équilibre thermodynamique global P_0

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_0) \leq C$$

où $P_0 = \frac{M_0}{1+M_0}$ et $M_0 = e^{a_0} e^{-\frac{|v|^2}{2b_0}}$. Sans perte de généralité, on suppose que les fluctuations $g_{\varepsilon, in}$ définies par $f_{\varepsilon, in} = P_0(1 + \varepsilon g_{\varepsilon, in})$ convergent entropiquement à l'ordre 1 :

$$g_{\varepsilon, in} \rightarrow g_{in} = \frac{1}{1+M_0} \left(\frac{a_{in}}{a_0} + \frac{u_{in}}{b_0} \cdot v + \frac{b_{in}}{2b_0} |v|^2 \right).$$

Soit $P_{\varepsilon, in}$ un état d'équilibre thermodynamique local de la forme (2.5) et dont les coefficients sont donnés par

$$\gamma = e^{a_0 + \varepsilon a_{in}}, \quad U = \varepsilon u_{in}, \quad \tau = b_0 e^{b_{in}}.$$

On suppose en outre que les données initiales sont bien préparés :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{\varepsilon, in}) \rightarrow 0.$$

Soit f_ε une famille de solutions de l'équation de Boltzmann

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^q} Q(f_\varepsilon) \\ f_\varepsilon(0, x, v) = f_{\varepsilon, in}(x, v) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

avec $q > 1$ et $B_\varepsilon(z, \omega) = \mathbb{1}_{|z| \leq \frac{1}{\varepsilon}}$, et avec la condition au bord

$$f_\varepsilon(t, x, v) = f_\varepsilon(t, x, R_x(v)) \quad \forall (x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \text{ tels que } n(x) \cdot v < 0$$

où $R_x(v)$ est l'opérateur de réflexion spéculaire (3.25). Supposons qu'on ait le contrôle suivant sur les grandes vitesses :

$$(5.15) \quad \int_{\mathbb{R}^3} P_0 \left(\frac{f_\varepsilon - P_0}{P_0} \right)^2 dv \leq C \quad p.p.$$

et enfin, supposons que

$$(5.16) \quad \tilde{\Phi} = \mathcal{L}^{-1} \Phi \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi} = \mathcal{L}^{-1} \Psi \quad \text{sont au plus polynômiaux lorsque } |v| \rightarrow \infty.$$

Alors les fluctuations (g_ε) définies par $f_\varepsilon = P_0(1 + \varepsilon g_\varepsilon)$ convergent dans $L^1([0, T]; (1 + |v|^2) dv dx)$ faible

$$g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1+M_0} \left(\frac{\bar{a}}{a_0} + \frac{\bar{u}}{b_0} \cdot v + \frac{\bar{b}}{2b_0} |v|^2 \right)$$

où $(\bar{a}, \bar{u}, \bar{b})$ est l'unique solution lipschitzienne des équations d'Euler incompressibles

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{u} + \nabla_x p = 0, \quad \nabla_x \cdot \bar{u} = 0$$

$$\partial_t \bar{a} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{a} = 0, \quad \partial_t \bar{b} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{b} = 0, \quad \nabla_x (b_0 \bar{a} + \tau_0 \bar{b}) = 0$$

sur $[0, T]$, où T est le temps maximal d'existence de la solution.

L'hypothèse sur les grandes vitesses (5.15) est identique à celle qui est faite dans le cas classique. On pourrait penser que le fait que la solution vérifie rigoureusement la conservation locale de l'énergie nous en dispense ; cependant ce n'est pas le cas à cause des non linéarités supplémentaires.

D'un autre côté, l'hypothèse (5.16) est plutôt raisonnable : elle a en effet été prouvée dans le cas classique [21, 30], et il semblerait que la preuve s'étende sans difficulté au cas quantique.

Il est à noter qu'à la limite, on obtient l'équation d'Euler incompressible, exactement comme dans le cas classique. L'approche formelle montre en effet que les effets quantiques interviennent uniquement dans la loi de pression, ce qui est confirmé par les physiciens.

6. Perspectives

L'équation de Boltzmann pour les bosons est d'une grande complexité mathématique et en même temps sa validité physique est incertaine. Il semblerait qu'il vaille mieux utiliser des modèles à deux fluides pour décrire des gaz de bosons comportant un condensat. Cependant, lorsque ceux-ci font intervenir des opérateurs de collision similaires à celui de Boltzmann pour les bosons, ils sont eux-mêmes sources de grandes difficultés mathématiques. On peut donc légitimement chercher des modèles plus simples reprenant les principales propriétés physiques des gaz de bosons, par exemple un modèle de type BGK :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = P - f$$

où P est une distribution de Bose-Einstein ayant les mêmes masse, moment et énergie cinétique que f . Un modèle de ce type est étudié dans [59] dans un cadre unidimensionnel et stationnaire.

D'autre part, on peut se demander si le modèle macroscopique à deux fluides obtenu dans le Chapitre 3 reflète bien toutes les propriétés physiques d'un gaz de bosons. En effet, le fluide normal et le superfluide échangent du moment mais n'échangent pas de masse, contrairement à ce qu'il se passe dans le modèle de Landau. S'il n'est pas pertinent physiquement, cela signifie peut-être que le modèle (équation de Boltzmann couplée avec une équation de Gross-Pitaevskii) dont il a été dérivé n'est lui-même pas pertinent. Comme on le voit, beaucoup de travail reste à faire dans la modélisation des gaz de bosons.

L'équation de Boltzmann pour les fermions est quant à elle beaucoup mieux comprise mathématiquement, et il serait intéressant de continuer à explorer les problèmes de limite hydrodynamique. En particulier, peut-on affaiblir l'hypothèse sur le contrôle des grandes vitesses dans le Théorème 5.10 ? On voudrait également pouvoir traiter le cas de données initiales qui ne soient pas bien préparées ; cela nécessite une étude approfondie du phénomène de relaxation. Il faudrait aussi regarder ce que donne la limite hydrodynamique dans le scaling Navier-Stokes incompressible. Dans le cas classique, cette limite est la seule pour laquelle on ait un résultat sans hypothèse non physique, et on peut se demander s'il est possible d'obtenir un tel résultat pour les fermions.

PARTIE A. DIFFÉRENTS MODÈLES POUR UN
GAZ DE BOSONS

The grazing collision limit of Kac caricature of Bose-Einstein particles

Article en collaboration avec Giuseppe Toscani accepté dans *Asymptotic Analysis*

Sommaire

Abstract	65
1. Introduction	65
2. The Kac caricature of a Bose Einstein gas	68
3. Existence theorems	72
4. Moments of the cutoff solutions, regularity of the non cutoff solution	75
5. The grazing collision limit	80
6. Other results	81
6.1. <i>H</i> -theorem	82
6.2. Regularity of the solution	82
6.3. Moments of the solution	84
7. Conclusions	86

Abstract

We discuss the grazing collision limit of certain kinetic models of Bose-Einstein particles obtained from a suitable modification of the one-dimensional Kac caricature of a Maxwellian gas without cut-off. We recover in the limit a nonlinear Fokker-Planck equation which presents many similarities with the one introduced by Kaniadakis and Quarati in [84]. In order to do so, we perform a study of the moments of the solution. Moreover, as is typical in Maxwell models, we make an essential use of the Fourier version of the equation.

1. Introduction

The quantum dynamics of many body systems is often modelled by a nonlinear Boltzmann equation which exhibits a gas-particle-like collision behavior. The application of quantum assumptions to molecular encounters leads to some divergences from the classical kinetic theory [76] and despite their formal analogies the Boltzmann equation for classical and quantum kinetic theory present very different features. The interest in the quantum framework of the Boltzmann equation has increased noticeably in the recent years. Although the quantum Boltzmann equation, for a single specie of particles, is valid for a gas of fermions as well as for a gas of bosons, blow up of the solution in finite time may occur only in the latter case. As a consequence the quantum Boltzmann equation for a gas of bosons represents the most challenging case both mathematically and numerically.

In particular this equation has been successfully used for computing non-equilibrium situations where Bose-Einstein condensate occurs. From Chapman and Cowling [76] one can learn that the Boltzmann Bose-Einstein equation (BBE) is established by imposing that, when the mean distance between neighboring molecules is comparable with the size of the quantum wave fields with which molecules are surrounded, a state of congestion results. For a gas composed of Bose-Einstein identical particles, according to quantum theory, the presence of a like particle in the velocity-range dv increases the probability that a particle will enter that range; the presence of $f(v)dv$ particles per unit volume increases this probability in the ratio $1 + \delta f(v)$. This fundamental assumption yields the Boltzmann Bose-Einstein equation

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = Q_{QBE}(f)(t, v), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

where

$$(1.2) \quad Q_{QBE}(f)(t, v) = \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 + \delta f) (1 + \delta f_*) - f f_* (1 + \delta f') (1 + \delta f'_*)) dv_* d\omega,$$

where as usual we denoted

$$f = f(v), \quad f_* = f(v_*), \quad f' = f(v'), \quad f'_* = f(v'_*),$$

and the pairs (v, v_*) (respectively (v', v'_*)) are the post- (respectively pre-) collision velocities in a elastic binary collision. In (1.2) $B(z, \omega)$ is the collision kernel which is a nonnegative Borel function of $|z|, |z, \omega\rangle$ only

$$(1.3) \quad B(z, \omega) = B\left(|z|, \frac{\langle z, \omega \rangle}{|z|}\right), \quad (z, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times S^2.$$

The solutions $f(v, t)$ are velocity distribution functions (i.e., the density functions of particle number), $\delta = (h/m)^3/g$, h is the Planck's constant, m and g are the mass and the "statistical weight" of a particle (see [88] for details).

For a non relativistic particle, by setting $v(p) = p/m$, the collision operator Q_{QBE} can be rewritten in general form as follows [93, 94]

$$(1.4) \quad Q_{QBE}(f)(t, p) = \int_{\mathbb{R}^9} W(p, p_*, p', p'_*) (f' f'_* (1 + \delta f) (1 + \delta f_*) - f f_* (1 + \delta f') (1 + \delta f'_*)) dp_* dp' dp'_*$$

where W is a nonnegative measure called transition rate, which is of the form

$$W(p, p_*, p', p'_*) = \Omega(p, p_*, p', p'_*) \delta(p, +p_* - p' - p'_*) \delta(\mathcal{E}(p) + \mathcal{E}(p_*) - \mathcal{E}(p') - \mathcal{E}(p'_*)),$$

where δ represents the Dirac measure and $\mathcal{E}(p)$ is the energy of the particle. The quantity $W dp' dp'_*$ is the probability for the initial state (p, p_*) to scatter and become a final state of two particles whose momenta lie in a small region $dp' dp'_*$. The function Ω is directly related to the differential cross section (see (1.3)), a quantity that is intrinsic to the colliding particles and the kind of interaction between them. The collision operator (1.4) is simplified by assuming a boson distribution which only depends on the total energy $e = \mathcal{E}(p)$. In this last case $f = f(e, t)$ is the boson density in energy space.

Together with the Boltzmann description given by the collision operators (1.2)-(1.4), other kinetic models for Bose-Einstein particles have been introduced so far. In particular, a related model described by means of Fokker-Planck type non linear operators has been

proposed by Kompaneets [86] to describe the evolution of the radiation distribution $f(x, t)$ in a homogeneous plasma when radiation interacts with matter via Compton scattering

$$(1.5) \quad Q_K(f)(t, \rho) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^4 \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} + f + f^2 \right) \right], \quad \rho \in (0, +\infty)$$

In that context the coordinate ρ represents a momentum coordinate, $\rho = |p|$. More precisely, an equation which includes (1.5) as a particular case is obtained in [86] as a leading term for the corresponding Boltzmann equation under the crucial assumption that the scattering cross section is of the classical Thomson type (see [81] for details).

The fundamental assumption which leads to the correction in the Boltzmann collision operator (1.2), namely the fact that the presence of $f(v)dv$ particles per unit volume increases the probability that a particle will enter the velocity range dv in the ratio $1 + \delta f(v)$, has been recently used by Kaniadakis and Quarati [84, 83] to propose a correction to the drift term of the Fokker-Planck equation in presence of quantum indistinguishable particles, bosons or fermions. In their model, the collision operator (1.2) is substituted by

$$(1.6) \quad Q_{FP}(f)(t, v) = \nabla \cdot [\nabla f + v f(1 + \delta f)].$$

Maybe the most remarkable difference between the kinetic operators (1.2) and (1.6) is that, while the former is such that mass, momentum and energy are collision invariant, the latter does not admit the energy as collision invariant. This suggests that the operator (1.6) would not result directly through an asymptotic procedure from the Bose-Einstein collision operator (1.2), but instead from some linearized version, where only the mass is preserved under the collision mechanism.

For a mathematical analysis of the quantum Boltzmann equation in the space homogeneous isotropic case we refer to [79, 80, 81, 88, 89]. We remark that already the issue of giving mathematical sense to the collision operator is highly nontrivial (particularly if positive measure solutions are allowed, as required by a careful analysis of the equilibrium states). All the mathematical results, however, require very strong cut-off assumptions on the cross-section [81, 88].

Also, accurate numerical discretization of the quantum Boltzmann equation, which maintain the basic analytical and physical features of the continuous problem, namely, mass and energy conservation, entropy growth and equilibrium distributions have been introduced recently in [73, 90]. Related works [87, 91, 92] in which fast methods for Boltzmann equations were derived using different techniques like multipole methods, multigrid methods and spectral methods, are relevant to quote.

At the Fokker-Planck level, the qualitative analysis of the Kompaneets equation described by the operator (1.5) has been exhaustively studied in [78], while the numerical simulation has been done by Buet and Cordier [74]. To our knowledge, the mathematical study of the Fokker-Planck equation (1.6) introduced by Kaniadakis and Quarati [84] has been done only very recently [75], where the one-dimensional version of (1.6) has been studied.

In the case of the quantum Boltzmann equation the asymptotic equivalence between the binary collision operators (1.2), (1.4) and the Fokker-Planck type operators (1.5) and (1.6) is unknown. This is not the case for the classical binary collisions in a elastic gas, where the asymptotic equivalence between the Boltzmann and the Fokker-Planck-Landau equations has been proven rigorously in a series of papers by Villani [96, 97] by means of the so-called *grazing collision* asymptotics.

The same asymptotic procedure, in the case of the one-dimensional Kac equation [82], showed the asymptotic equivalence between Kac collision operator and the linear Fokker-Planck operator [95]. The method of proof in [95] takes advantage from the relatively simple structure of Kac equation. Taking this into account, in order to establish the asymptotic connection between the Boltzmann equation for Bose Einstein particles and its Fokker-Planck description, we will introduce a one-dimensional kinetic model in the spirit of Kac caricature of a Maxwell gas with a singular kernel. Then we will study the grazing collision limit of the equation, which leads to a Fokker-Planck type equation in which the drift is of the form of equation (1.6), but the coefficient of the (linear) diffusion term depends on time through the density function. More precisely, the Fokker-Planck collision operator reads

$$(1.7) \quad Q_{FP}(f)(t, v) = A_t(f) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v}(vf(1 + \delta f)),$$

where

$$(1.8) \quad A_t(f) = \int_{\mathbb{R}} v^2 f(v, t)(1 + \delta f(v, t))dv.$$

The paper is organized as follows. In the next Section we will introduce the model, together with some simplifications (mollified model) that allow to prove in Section 3 existence of a weak solution. Then in Section 4, we will focus on the moments of the solution and on some regularity properties. In Section 5, we will deal with the grazing collision limit. The last part of the work, Section 6 will contain some results for the non mollified model.

2. The Kac caricature of a Bose Einstein gas

The simplest one-dimensional model which maintains almost all physical properties of the Boltzmann equation for a Bose-Einstein gas can be obtained by generalizing Kac caricature of a Maxwell gas to Bose-Einstein particles. This one-dimensional model reads as follows

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = Q_{QBE}(f)(t, v), & t \in \mathbb{R}_+, \quad v \in \mathbb{R}, \\ f(0, v) = f_0(v), \end{cases}$$

where

$$(2.2) \quad Q_{QBE}(f)(t, v) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}} (f' f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*) - f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*)) dv_* d\theta.$$

For the sake of brevity, we used the usual notations

$$f \equiv f(t, v), \quad f' \equiv f(t, v'), \quad f_* \equiv f(t, v_*), \quad f'_* \equiv f(t, v'_*),$$

The initial datum f_0 is a nonnegative measurable function. The pre-collision velocities (v', v'_*) are defined by the Kac rotation rule [82], which is given by

$$(2.3) \quad \begin{cases} v' = v \cos \theta - v_* \sin \theta \\ v'_* = v \sin \theta + v_* \cos \theta. \end{cases}$$

Collisions (2.3) imply the conservation of the energy

$$(2.4) \quad v^2 + v_*^2 = v'^2 + v'_*{}^2.$$

Let us observe that the system (2.3) can be reversed and that we can write the post-collision velocities with respect to the pre-collision ones

$$(2.5) \quad \begin{cases} v = v' \cos \theta + v'_* \sin \theta \\ v_* = -v' \sin \theta + v'_* \cos \theta. \end{cases}$$

The parameter δ in (2.2) is a positive constant. The choice $\delta = 0$ would lead us back to standard Kac model, whereas δ negative would lead us to the Boltzmann-Fermi-Dirac equation, whose features are very different from that of the Boltzmann-Bose-Einstein equation.

The cross-section $\beta(\theta)$ is a function defined over $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. In the original Kac equation [82], $\beta(\theta)$ is assumed constant, which implies that collisions spread out uniformly with respect to the angle θ . Following Desvillettes [77], we will here assume that the cross-section is suitable to concentrate collisions on the *grazing* ones (these collisions are those that are neglected when the cut-off assumption is made). This corresponds to satisfy one or more of the following hypotheses

H1: $\beta(\theta)$ is a nonnegative even function.

H2: $\beta(\theta)$ satisfies a non-cut-off assumption on the form

$$(2.6) \quad \beta(\theta) \sim \frac{1}{|\theta|^{1+\nu}} \quad \text{when } \theta \rightarrow 0,$$

with $1 < \nu < 2$. That is,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) |\sin \theta| d\theta = +\infty$$

whereas

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) |\sin \theta|^{\nu+\varepsilon} d\theta < +\infty$$

for all $\varepsilon > 0$.

H3: $\beta(\theta)$ is zero near $-\frac{\pi}{2}$ and $\frac{\pi}{2}$, namely there exists an $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$\beta(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0] \cap [\frac{\pi}{2} - \varepsilon_0, \frac{\pi}{2}).$$

In the case in which the classical Kac equation is concerned, the asymptotic equivalence between the non cut-off Kac equation and the linear Fokker-Planck equation as collisions become grazing has been proven in [95]. Hence, the passage to grazing collisions in (2.2), would give us the correct Fokker-Planck type operator which leads the initial density towards the Bose-Einstein distribution.

Due to the symmetries of the kernel (2.2) and to the microscopic conservation of the energy (2.4), it can be easily shown, at least at a formal level, that the mass and the global energy of the solution are conserved

$$\int_{\mathbb{R}} f(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}} f_0(v) dv,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} v^2 f(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}} v^2 f_0(v) dv,$$

for all $t > 0$. Moreover, if

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\delta} (1 + \delta f) \log(1 + \delta f) - f \log f \right) dv$$

denotes the Bose-Einstein entropy, the time derivative of $H(f)$ is given by

$$D(f) = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma \left(f f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*), \right. \\ \left. f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*) \right) dv dv_* d\theta$$

with

$$(2.7) \quad \Gamma(a, b) = \begin{cases} (a - b) \log(a/b), & a > 0, \quad b > 0; \\ +\infty, & a > 0, \quad b = 0 \quad \text{or} \quad a = 0, \quad b > 0; \\ 0, & a = b = 0. \end{cases}$$

Then, since $D(f) \geq 0$ the solution $f(t)$ to equation (2.1) satisfies formally an H -theorem. $H(f(t))$ is monotonically increasing unless $f(t)$ coincides with the Bose-Einstein density f_{BE} , defined by the relationship

$$(2.8) \quad \frac{f_{BE}(v)}{1 + \delta f_{BE}(v)} = a e^{-bv^2},$$

where a and b are positive constant chosen to satisfy the mass and energy conservation for f_{BE} .

It can be easily verified by direct inspection that the fourth order term in (2.2) cancels out from the collision integral, so that it can be rewritten as

$$(2.9) \quad Q_{QBE}(f)(t, v) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}} (f' f'_*(1 + \delta f + \delta f_*) \\ - f f_*(1 + \delta f' + \delta f'_*)) dv_* d\theta.$$

In trying to give a rigorous signification to equation (2.1), several difficulties arise. In fact, our non-cutoff cross-section $\beta(\theta)$ does not allow us neither to use the same change of variable as in [88], nor to use the same weak formulation as in [77]. A sufficient condition to give a sense to the collision kernel would be that $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. It would even be enough that such a condition hold for the quantum part, that is for the f involved in the terms of the form $1 + \delta f$. To satisfy that condition, we modify the quantum part by smoothing it. Let ψ be a mollifier, that is

1. $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
2. $\psi \geq 0$
3. $\int_{\mathbb{R}} \psi(v) dv = 1$.

Then, let

$$\tilde{f}(t, v) = \int_{\mathbb{R}} f(t, v - w) \psi(w) dw = f(t, \cdot) *_v \psi.$$

The function \tilde{f} is regular in the velocity variable, and relies uniformly in all the $L^p(\mathbb{R})$ spaces (for $1 \leq p \leq +\infty$) since the $L^1(\mathbb{R})$ norm of $f(t, \cdot)$ is constant. Moreover, $\tilde{f}(t, \cdot)$ is as close as we want to $f(t, \cdot)$ in all these norms, provided ψ is well chosen, so that our new

model is nothing but an approximation of (2.1):

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \tilde{Q}_{QBE}(f), & t \in \mathbb{R}_+, v \in \mathbb{R} \\ f(0, v) = f_0(v) \end{cases}$$

with

$$(2.11) \quad \tilde{Q}_{QBE}(f)(t, v) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}} (f' f'_*(1 + \delta \tilde{f})(1 + \delta \tilde{f}_*) - f f_*(1 + \delta \tilde{f}')(1 + \delta \tilde{f}'_*)) dv_* d\theta.$$

This approximation still formally preserves mass and energy, while maintaining the same nonlinearity of the original collision operator. It has to be remarked, however, that both the validity of the H -theorem and the explicit form of the steady solution are lost. Other approximations can be introduced, which do not exhibit this problem. Among others, the operator

$$(2.12) \quad \tilde{Q}_{QBE}(f)(t, v) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f'}{1 + \delta f'} \frac{f'_*}{1 + \delta f'_*} - \frac{f}{1 + \delta f} \frac{f_*}{1 + \delta f_*} \right) \cdot (1 + \delta \tilde{f})(1 + \delta \tilde{f}_*)(1 + \delta \tilde{f}')(1 + \delta \tilde{f}'_*) dv_* d\theta.$$

preserves mass and energy, satisfies the H -theorem and possesses the right steady state. Unlikely, the nonlinearity of (2.12) is difficult to handle for our purposes.

The remaining of our work will concentrate on the study of (2.10). In Section 3, we will study the existence of a solution to this problem. Then in Section 4, we will focus on the moments of the solution and on some regularity. In Section 5, we will finally study the grazing collision limit. Our work will end in Section 6 with some partial result for the non mollified model (2.1).

Let us end this Section with a few notations. The functional spaces that will be used in the following, apart from the usual Lebesgue spaces, are the weighted Lebesgue spaces, defined, for $p > 0$, by the norm

$$\|g\|_{L_p^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1 + |v|^p) |g(v)| dv.$$

We will also need some Sobolev spaces, defined for $0 < s < 1$ by the norm

$$\|g\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \|g\|_{L^2}^2 + |g|_{H^s}^2$$

where

$$|g|_{H^s}^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|g(x+y) - g(y)|^2}{|y|^{1+2s}} dx dy.$$

Our convention for the Fourier transform is the following:

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(v) e^{-iv\xi} dv$$

and the inverse Fourier transform is given by

$$f(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{iv\xi} d\xi.$$

We will sometimes use the notations

$$m = \int_{\mathbb{R}} f_0(v) dv$$

and

$$e = \int_{\mathbb{R}} v^2 f_0(v) dv.$$

3. Existence theorems

The goal of this Section is to prove the existence of a solution to the problem (2.10). To start with, we first consider the case of a cross-section with some cutoff.

We have

THEOREM 3.1. *Let $f_0 \in L^1_2(\mathbb{R})$ be a nonnegative function. Assume that the cross-section satisfies $\beta \in L^1(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ and (H1). Then there exists a unique solution $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1_2(\mathbb{R}))$ to the problem (2.10), which is nonnegative, and preserves mass and energy.*

PROOF. For $f, g, h \in L^1_2(\mathbb{R})$, let

$$\begin{aligned} P(f, g, h) = & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}} \left[f' g'_* \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} h}{\|f_0\|_{L^1}} + \delta \tilde{h} + \delta \tilde{h}_* \right) - f g_* \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} h}{\|f_0\|_{L^1}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta \tilde{h}' + \delta \tilde{h}'_* \right) \right] dv_* d\theta + f \left(\int_{\mathbb{R}} g \right) \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} h}{\|f_0\|_{L^1}} + 2\delta \|\psi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} h \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Let

$$K = \|f_0\|_{L^1} (1 + 2\delta \|\psi\|_{L^\infty} \|f_0\|_{L^1}) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) d\theta.$$

Let us consider the following problem

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + Kf = P(f, f, f), & t \in \mathbb{R}_+, v \in \mathbb{R} \\ f(0, v) = f_0. \end{cases}$$

The operator $P : (L^1_2)^3 \rightarrow L^1_2$ is trilinear, and satisfies the inequality

$$\|P(f, g, h)\|_{L^1_2} \leq C_P \|f\|_{L^1_2} \|g\|_{L^1_2} \|h\|_{L^1_2} \quad \forall f, g, h \in L^1_2(\mathbb{R}),$$

with

$$C_P = \int \beta(\theta) d\theta \left(\frac{2}{\|f_0\|_{L^1}} + 4\delta \|\psi\|_{L^\infty} \right).$$

Assume for the moment that $K = 1$. Thanks to a theorem of [85], there exists some $T > 0$ such that there exists a solution $f \in L^\infty(0, T; L^1_2(\mathbb{R}))$ to the problem (3.1). This solution can be written as a Wild sum, which reads

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k e^{-t} (1 - e^{-2t})^k f_k,$$

where

$$f_k = \sum_{i_1+i_2+i_3=k-1} \frac{b_{i_1} b_{i_2} b_{i_3}}{2^k b_k} P(f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}) \quad \text{for } k \geq 1$$

and

$$f_{k=0} = f_0.$$

The numbers b_k are the coefficients of the Taylor expansion of

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

One can easily see that all the b_k are positive. Moreover

$$0 \leq f, g, h \in L_2^1 \implies P(f, g, h) \geq 0.$$

Thus, the solution f of (3.1) is nonnegative. Moreover, owing to the definition of $P(\cdot, \cdot, \cdot)$, one can verify that this solution preserves the mass. From that we deduce that f is solution of (2.10) on $(0, T)$. But it preserves the mass, and it relies in L_2^1 , so that it also preserves the energy. Since the time T depends only on $\|f_0\|_{L^1}, \|f_0\|_{L_2^1}, \|\psi\|_{L^\infty}, \|\beta\|_{L^1(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$, we can use the same arguments on the time intervals $(T, 2T)$, $(2T, 3T)$, etc, to get a solution on $(0, +\infty)$. Finally, in the case $K \neq 1$, it is enough to rescale the time to get the right formulae, and to obtain the same conclusions. \square

The following theorem claims the existence of a solution of (2.10) in the non-cutoff case in some weak sense.

THEOREM 3.2. *Let $f_0 \in L_2^1(\mathbb{R})$ be a nonnegative function. Let β satisfy the assumptions (H1) and (H2). Then, there exists a function $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+; C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}))$ which is a solution of (2.10) in the weak sense defined by the forthcoming equation (3.2). Moreover, g preserves the mass.*

PROOF. We introduce, for $n \in \mathbb{N}_*$, the cross-section

$$\beta_n(\theta) = \beta(\theta) \wedge n = \min(\beta(\theta), n),$$

and we denote by f^n the solution of the problem (2.10) corresponding to the cross-section β_n . This solution exists thanks to Theorem 3.1. For all n and all $t > 0$, $f_n(t)$ relies in L^1 , so that we can define its Fourier transform. Moreover, $\tilde{Q}_{QBE}(f^n)$ also relies in L^1 . Hence, we can write the following equation:

$$\frac{\partial \hat{f}^n(t, \xi)}{\partial t} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \beta_n(\theta) f^n f_*^n (1 + \delta \tilde{f}^n(v') + \delta \tilde{f}^n(v'_*)) (e^{-iv'\xi} - e^{-iv\xi}) dv dv_* d\theta.$$

We can split the integral on the right into three parts. The first part gives

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \beta_n(\theta) f^n f_*^n (e^{-iv'\xi} - e^{-iv\xi}) dv dv_* d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \left(\hat{f}^n(\xi \cos \theta) \hat{f}^n(\xi \sin \theta) - \hat{f}^n(\xi) \hat{f}^n(0) \right) d\theta. \end{aligned}$$

The second part can be evaluated using the inverse Fourier transform of the function \tilde{f}^n which relies in L^2

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \beta_n(\theta) f^n f_*^n \tilde{f}^n(v') (e^{-iv'\xi} - e^{-iv\xi}) dv dv_* d\theta \\
&= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \int_{\mathbb{R}^3} f^n f_*^n \mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) e^{i\eta(v \cos \theta - v_* \sin \theta)} \\
&\quad \cdot \left(e^{-i\xi(v \cos \theta - v_* \sin \theta)} - e^{-iv\xi} \right) d\eta dv dv_* d\theta \\
&= \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^n((\xi - \eta) \cos \theta) \hat{f}^n((\xi - \eta) \sin \theta) \mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) d\eta d\theta \\
&\quad - \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^n(\xi - \eta \cos \theta) \hat{f}^n(\eta \sin \theta) \mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) d\eta d\theta.
\end{aligned}$$

The third term can be computed in the same way. At the end we get that the Fourier transform of f^n satisfies

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad \frac{\partial \hat{f}^n(t, \xi)}{\partial t} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \left(\hat{f}^n(\xi \cos \theta) \hat{f}^n(\xi \sin \theta) - \hat{f}^n(\xi) \hat{f}^n(0) \right) d\theta \\
&\quad + \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \int_{\mathbb{R}} \left[\hat{f}^n((\xi - \eta) \cos \theta) \hat{f}^n((\xi - \eta) \sin \theta) \right. \\
&\quad \quad \left. - \hat{f}^n(\xi - \eta \cos \theta) \hat{f}^n(\eta \sin \theta) \right] \mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) d\eta d\theta \\
&\quad + \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \int_{\mathbb{R}} \left[\hat{f}^n(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) \hat{f}^n(-\xi \sin \theta - \eta \cos \theta) \right. \\
&\quad \quad \left. - \hat{f}^n(\xi - \eta \sin \theta) \hat{f}^n(-\eta \cos \theta) \right] \mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) d\eta d\theta.
\end{aligned}$$

Note that here the mass is the quantity $\hat{f}(0)$. In addition

$$\mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) = \hat{f}^n(\eta) \hat{\psi}(\eta).$$

Since the second moment of $f^n(v, t)$ is finite and conserved in time, its Fourier transform is two times differentiable, and satisfies

$$\sup_{t>0} \|\partial_{\xi\xi}^2 \hat{f}^n(t, \xi)\|_{L^\infty} \leq \int_{\mathbb{R}} v^2 f_0(v) dv.$$

Hence, we can use the Taylor formula at the order 2

$$h(\theta) = h(0) + \theta h'(0) + \theta^2 \int_0^1 (1-s) h''(s\theta) ds$$

on the functions $\theta \mapsto \hat{f}^n(\xi \cos \theta) \hat{f}^n(\xi \sin \theta)$, $\theta \mapsto \hat{f}^n((\xi - \eta) \cos \theta) \hat{f}^n((\xi - \eta) \sin \theta)$, $\theta \mapsto \hat{f}^n(\xi - \eta \cos \theta) \hat{f}^n(\eta \sin \theta)$, $\theta \mapsto \hat{f}^n(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) \hat{f}^n(-\xi \sin \theta - \eta \cos \theta)$ and $\theta \mapsto \hat{f}^n(\xi - \eta \sin \theta) \hat{f}^n(-\eta \cos \theta)$.

Using the notations $m = \int_{\mathbb{R}} f_0(v)dv$ and $e = \int_{\mathbb{R}} v^2 f_0(v)dv$, we get the following estimates

$$(3.3) \quad \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \left(\hat{f}^n(\xi \cos \theta) \hat{f}^n(\xi \sin \theta) - \hat{f}^n(\xi) \hat{f}^n(0) \right) d\theta \right| \\ \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \beta(\theta) d\theta \left(4|\xi|^2 m e + 2|\xi| m^{3/2} e^{1/2} \right),$$

$$(3.4) \quad \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \left(\hat{f}^n((\xi - \eta) \cos \theta) \hat{f}^n((\xi - \eta) \sin \theta) \right. \right. \\ \left. \left. - \hat{f}^n(\xi - \eta \cos \theta) \hat{f}^n(\eta \sin \theta) \right) \mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) d\theta \right| \\ \leq |\hat{\psi}(\eta)| m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \beta(\theta) d\theta \left(4(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2) m e + 2(|\xi - \eta| + |\eta|) m^{3/2} e^{1/2} \right)$$

and

$$(3.5) \quad \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta_n(\theta) \left(\hat{f}^n(\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) \hat{f}^n(-\xi \sin \theta - \eta \cos \theta) \right. \right. \\ \left. \left. - \hat{f}^n(\xi - \eta \sin \theta) \hat{f}^n(-\eta \cos \theta) \right) \mathcal{F}(\tilde{f}^n)(\eta) d\theta \right| \\ \leq |\hat{\psi}(\eta)| m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \beta(\theta) d\theta \left(4((|\xi| + |\eta|)^2 + |\eta|^2) m e + 2(|\xi| + 2|\eta|) m^{3/2} e^{1/2} \right)$$

The right member of (3.3) is integrable in time on any interval $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$, and the right-members of (3.4) and (3.5) are integrable in (t, η) on any $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}$ with $0 < t_1 < t_2$, since $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Therefore, to pass to the limit in (3.2), it is enough for \hat{f}^n to converge pointwise on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. But inequalities (3.3), (3.4) and (3.5) ensure that for all compact set $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$, there exists a constant C depending only on \mathcal{K} , m , e , ψ , β , such that

$$|\hat{f}^n(t_1, \xi) - \hat{f}^n(t_2, \xi)| \leq C|t_1 - t_2| \quad \forall 0 < t_1 < t_2, \quad \forall \xi \in \mathcal{K}.$$

Then, thanks to Ascoli's theorem, there exists a function $g \in L^\infty([t_1, t_2] \times \mathcal{K})$ such that, up to the extraction of a subsequence,

$$\|\hat{f}^n - g\|_{L^\infty([t_1, t_2] \times \mathcal{K})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

All this being true for every t_1, t_2, \mathcal{K} , we deduce that g is well defined on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ and that $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^\infty \cap C^0(\mathbb{R}))$. We can therefore pass to the limit in (3.2). Finally, we obtained the existence of a function $g(\xi, t)$ which satisfies (3.2) with the original cross-section β , and such that

$$g(t, 0) = m \quad \forall t > 0.$$

□

4. Moments of the cutoff solutions, regularity of the non cutoff solution

The second step of our analysis is the study of the regularity of the Fourier transform of the solution obtained in the previous Section. This can be done by investigating the

moments of the solution to the cut-off equation. Since it is enough for our needs, we will limit ourselves to the fourth moment. Let

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \cos \theta \sin^2 \theta d\theta$$

$$A_\eta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \cos \theta |\sin \theta|^{1+\eta} d\theta, \quad \nu - 1 < \eta < 1,$$

$$A_* = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

and chose $n_\beta \in \mathbb{N}$ large enough such that, for all $n \geq n_\beta$,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \geq \frac{A_*}{2}$$

with $\beta_n(\theta) = \min(\beta(\theta), n)$. Our result is the following

THEOREM 4.1. *Let $\beta(\theta)$ satisfy the assumptions (H1) and (H2), and let $f^n(t, v)$ be the solution of the problem (2.10) with cross-section β_n and with nonnegative initial datum $f_0 \in L^1_4(\mathbb{R})$. Then there are explicit constants $a > 0$, $c > 0$, $C > 0$ such that we have*

$$(4.1) \quad \sup_{n \geq n_\beta} \|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq (\|f_0\|_{L^1_4} + ct)e^{at}, \quad t \geq 0,$$

$$(4.2) \quad \sup_{n \geq n_\beta} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq \max\{C, \|f_0\|_{L^1_4}\}.$$

Moreover, a, c in (4.1) depend only on $\|f_0\|_{L^1}$, $\|f_0\|_{L^1_2}$, δ , ψ and A , whereas C in (4.2) depends only on $\|f_0\|_{L^1}$, $\|f_0\|_{L^1_2}$, δ , ψ and A , A_* , A_η and η .

PROOF. Let us take $\phi(v) = v^4$ as test function. Thanks to the symmetries of the kernel we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v^4 f^n(v, t) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} (v'^4 - v^4 + v_*'^4 - v_*^4) f^n f_*^n (1 + \delta \tilde{f}^n(v') + \delta \tilde{f}^n(v_*')) dv dv_* d\theta. \end{aligned}$$

From the collision rule (2.3) it follows that

$$\begin{aligned} & (v')^4 + (v_*')^4 - v^4 - v_*^4 \\ &= (v^4 + v_*^4)(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 1) + 12v^2 v_*^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ & \quad + 4vv_* \cos \theta \sin \theta (v^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + v_*^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) \\ &= -2\cos^2 \theta \sin^2 \theta (v^4 + v_*^4) + 12v^2 v_*^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ & \quad + 4\cos \theta \sin \theta \cos(2\theta) vv_*(v_*^2 - v^2). \end{aligned}$$

Consequently

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \|f^n(t)\|_{L^1_4} \\
 &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \iint_{\mathbb{R}^2} (v^4 + v_*^4) f^n f_*^n \left(1 + \delta \tilde{f}^n(v') + \delta \tilde{f}^n(v'_*)\right) dv dv_* d\theta \\
 &+ 6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \iint_{\mathbb{R}^2} v^2 v_*^2 f^n f_*^n \left(1 + \delta \tilde{f}^n(v') + \delta \tilde{f}^n(v'_*)\right) dv dv_* d\theta \\
 &+ 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta) \cos \theta \sin \theta \cos(2\theta) \iint_{\mathbb{R}^2} v v_* f^n f_*^n \left(1 + \delta \tilde{f}^n(v') + \delta \tilde{f}^n(v'_*)\right) dv dv_* d\theta \\
 &:= I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

In what follows we always assume $n \geq n_\beta$. For the first and second terms I_1, I_2 we use

$$\frac{1}{2} A_* \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \leq A_*$$

and

$$\|\tilde{f}^n(t)\|_{L^\infty} \leq m \|\psi\|_{L^\infty}$$

to get

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad I_1 &\leq - \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta(\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right) 2m \int_{\mathbb{R}} |v|^4 f^n(t, v) dv \\
 &= m^2 A_* - m A_* \|f^n(t)\|_{L^1_4},
 \end{aligned}$$

and

$$(4.4) \quad I_2 \leq 6(1 + 2\delta m \|\psi\|_{L^\infty}) A_* e^2.$$

For the third term I_3 we compute by change of variable $(v, v_*, \theta) \mapsto (v, v_*, -\theta)$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \beta_n(\theta) \cos \theta \sin \theta \cos(2\theta) \\
 &\times \iint_{\mathbb{R}^2} v v_* (v_*^2 - v^2) f^n f_*^n \left(\tilde{f}^n(v') + \tilde{f}^n(v'_*) - \tilde{f}^n(\bar{v}') - \tilde{f}^n(\bar{v}'_*) \right) dv dv_* d\theta
 \end{aligned}$$

where

$$\bar{v}' = v \cos \theta + v_* \sin \theta, \quad \bar{v}'_* = -v \sin \theta + v_* \cos \theta.$$

Recall

$$v' = v \cos \theta - v_* \sin \theta, \quad v'_* = v \sin \theta + v_* \cos \theta$$

and

$$\left\| \frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}^n(\cdot, t) \right\|_{L^\infty} \leq m \|\psi'\|_{L^\infty}.$$

It follows that

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad & |\tilde{f}^n(v') + \tilde{f}^n(v'_*) - \tilde{f}^n(\bar{v}') - \tilde{f}^n(\bar{v}'_*)| \leq |\tilde{f}^n(v') - \tilde{f}^n(\bar{v}')| + |\tilde{f}^n(v'_*) - \tilde{f}^n(\bar{v}'_*)| \\
 & \leq 2m \|\psi'\|_{L^\infty} (|v| + |v_*|) |\sin \theta|.
 \end{aligned}$$

The left hand side is also less than $2m \|\psi\|_{L^\infty}$ (since $f \geq 0$). Thus

$$(4.6) \quad |\tilde{f}^n(v') + \tilde{f}^n(v'_*) - \tilde{f}^n(\bar{v}') - \tilde{f}^n(\bar{v}'_*)| \leq 2m (\|\psi\|_{L^\infty})^{1-\eta} (\|\psi'\|_{L^\infty})^{1-\eta} (|v|^\eta + |v_*|^\eta) |\sin \theta|^\eta.$$

By (4.5) and (4.6) we obtain two estimates for I_3 :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} I_3 &\leq 2m\delta\|\psi'\|_{L^\infty}A \iint_{\mathbb{R}^2} |v||v_*|(|v|+|v_*|)(v_*^2+v^2)f^n f_*^n dv dv_* \\ &= K_{m,e}\delta\|\psi'\|_{L^\infty}A\|f^n(t)\|_{L^1_4}, \end{aligned}$$

and

$$(4.8) \quad \begin{aligned} I_3 &\leq 2m(\|\psi\|_{L^\infty})^{1-\eta}(\|\psi'\|_{L^\infty})^{1-\eta}\delta A_\eta \iint_{\mathbb{R}^2} |v||v_*|(|v|^\eta+|v_*|^\eta)(v_*^2+v^2)f^n f_*^n dv dv_* \\ &\leq K_{m,e}(\|\psi\|_{L^\infty})^{1-\eta}(\|\psi'\|_{L^\infty})^{1-\eta}\delta A_\eta(\|f^n(t)\|_{L^1_4})^{\frac{3+\eta}{4}} := C_1(\|f^n(t)\|_{L^1_4})^{\frac{3+\eta}{4}}. \end{aligned}$$

Here $K_{m,e} > 0$ depends only on m and e .

To prove the first estimate (4.1) we omit the negative term I_1 and use (4.4), (4.7) and notice that $A_* \leq A$ to get

$$\frac{d}{dt}\|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq 6e^2(1+2\delta m\|\psi\|_{L^\infty})A + K_{m,e}\delta\|\psi'\|_{L^\infty}A\|f^n(t)\|_{L^1_4}, \quad t > 0.$$

This gives by Gronwall lemma

$$\sup_{n \geq n_\beta} \|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq (\|f_0\|_{L^1_4} + ct)e^{at}, \quad t \geq 0$$

where

$$c = 6e^2(1+2\delta m\|\psi\|_{L^\infty})A, \quad a = K_{m,e}\delta\|\psi'\|_{L^\infty}A.$$

To prove the second estimate (4.2) we use (4.3), (4.4) and (4.8) to see that

$$\frac{d}{dt}\|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq C_2 + C_1(\|f^n(t)\|_{L^1_4})^{\frac{3+\eta}{4}} - mA_*\|f^n(t)\|_{L^1_4}, \quad t > 0.$$

Here and below C_1 , C_2 and C_3 depend only on $m, e, \psi, \delta, A, A_*, A_\eta$ and η . Applying the following inequality

$$Y^\alpha \leq (1/\varepsilon)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \varepsilon Y, \quad \alpha \in (0, 1), Y \geq 0, \varepsilon > 0$$

to

$$Y = \|f^n(t)\|_{L^1_4}, \quad \alpha = \frac{3+\eta}{4}, \quad \varepsilon = \frac{mA_*}{2C_1}$$

gives

$$C_1(\|f^n(t)\|_{L^1_4})^{\frac{3+\eta}{4}} \leq C_1 \left(\frac{2C_1}{mA_*} \right)^{\frac{3+\eta}{1-\eta}} + \frac{mA_*}{2}\|f^n(t)\|_{L^1_4}$$

and so

$$\frac{d}{dt}\|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq C_3 - \frac{mA_*}{2}\|f^n(t)\|_{L^1_4}, \quad t > 0.$$

Therefore,

$$\sup_{n \geq n_\beta} \sup_{t \geq 0} \|f^n(t)\|_{L^1_4} \leq \max \left\{ \frac{2C_3}{mA_*}, \|f_0(t)\|_{L^1_4} \right\}.$$

□

Passing to the limit $n \rightarrow +\infty$ in inequality (4.2) we obtain

THEOREM 4.2. *Let β satisfy (H1) and (H2), and let g be the weak solution of (2.10) defined in Theorem 3.2, with nonnegative initial data $f_0 \in L^1_4$. Then, $g(t)$ is C^3 for all t and*

$$\sup_{t>0} \{ \|g(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_{\xi\xi}g(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_{\xi\xi}^2g(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_{\xi\xi}^3g(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_{\xi\xi}^4g(t)\|_{L^\infty} \} < +\infty.$$

Moreover, g conserves the energy, in the sense that $\partial_{\xi\xi}^2g(t, 0) = -e$ for all $t > 0$.

PROOF. The conservation of the mass and inequality (4.2) imply that there exists a constant $C > 0$ which do not depend on n such that

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\partial_\xi \hat{f}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \leq C \\ \|\partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \leq C \\ \|\partial_{\xi^3}^3 \hat{f}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \leq C \\ \|\partial_{\xi^4}^4 \hat{f}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \leq C. \end{array} \right.$$

Since $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ is the dual space of the Banach space $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, the four sequences converge (up to the extraction of a subsequence) in $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ weak-*; the limits can only be respectively $\partial_\xi g$, $\partial_{\xi^2}^2 g$, $\partial_{\xi^3}^3 g$ and $\partial_{\xi^4}^4 g$ (since the convergence in $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ weak-* implies the convergence in the distributional sense). Moreover, we have the inequalities, for $1 \leq i \leq 4$,

$$\|\partial_{\xi^i}^i g\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\partial_{\xi^i}^i \hat{f}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})}.$$

Finally, we have the embedding

$$W^{4,\infty}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^3(\mathbb{R}),$$

so that $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+; C^3(\mathbb{R}))$.

It remains to prove that the energy is conserved. Let us fix some time $t_0 > 0$. It is clear that for all integer n , we have

$$\|\partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n(t_0, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq e.$$

Therefore, up to the extraction of a subsequence, there exists a function $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ such that

$$\partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n(t_0, \cdot) \rightharpoonup h \quad \text{weak} - * \quad L^\infty(\mathbb{R}).$$

But it is clear that $h = \partial_{\xi^2}^2 g(t_0, \cdot)$, since for all function $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ with compact support,

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^n(t_0, \xi) \phi''(\xi) d\xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(t_0, \xi) \phi''(\xi) d\xi,$$

or, after two integrations per part on both sides,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n(t_0, \xi) \phi(\xi) d\xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi^2}^2 g(t_0, \xi) \phi(\xi) d\xi.$$

Let us define an approximation of the Dirac measure

$$\Phi_p(\xi) = \begin{cases} p & \text{if } -\frac{1}{2p} < \xi < \frac{1}{2p} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

We have

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n(t_0, 0) - \partial_{\xi^2}^2 g(t_0, 0) \right| &\leq \left| \partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n(t_0, 0) - \int_{\mathbb{R}} \Phi_p(\xi) \partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n(t_0, \xi) d\xi \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}} \Phi_p(\xi) \left(\partial_{\xi^2}^2 \hat{f}^n(t_0, \xi) - \partial_{\xi^2}^2 g(t_0, \xi) \right) d\xi \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}} \Phi_p(\xi) \partial_{\xi^2}^2 g(t_0, \xi) d\xi - \partial_{\xi^2}^2 g(t_0, 0) \right|. \end{aligned}$$

The first and the third terms converge toward 0 when p converges to infinity, independently of n since

$$\|\partial_{\xi^3}^3 \hat{f}^n(t_0, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C$$

with $C > 0$ independent of n . As for the second term, once p has been fixed, it converges to 0 since $\Phi_p \in L^1(\mathbb{R})$, and the result follows. \square

5. The grazing collision limit

We are now in a position to perform the grazing collision limit in equation (2.10). We can now make precise assumptions on the asymptotics of the grazing collisions, namely in letting the kernel β concentrate on the singularity $\theta = 0$. We will introduce a family of kernels $\{\beta_\varepsilon(|\theta|)\}_{\varepsilon>0}$ satisfying hypotheses (H1) and (H2), with

$$(5.1) \quad \forall \theta_0 > 0 \quad \sup_{\theta > \theta_0} \beta_\varepsilon(|\theta|) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

and

$$(5.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi \beta_\varepsilon(|\theta|) \theta^2 d\theta = 1$$

This can be obtained in several ways, for example taking, for $0 < \mu < 1$

$$\beta_\varepsilon(|\theta|) = \frac{2(1-\mu)}{\varepsilon|\theta|^{2+\mu}} \quad 0 \leq |\theta| \leq \varepsilon^{1/(1-\mu)},$$

$$\beta_\varepsilon(|\theta|) = \frac{(1-\mu)\varepsilon}{|\theta|^{2+\mu}} \quad \text{elsewhere.}$$

Let g_ε be the weak solution of the problem (2.10) in the sense that it satisfies equation (3.2), where $\beta(\theta)$ has been replaced by $\beta_\varepsilon(\theta)$.

THEOREM 5.1. *Let $\beta(\theta)$ satisfy assumptions (H1), (H2), and let $\beta_\varepsilon(\theta)$ satisfy (5.1) and (5.2). Let g_ε be the weak solution of the problem (2.10) where $\beta(\theta)$ has been replaced by $\beta_\varepsilon(\theta)$, with the nonnegative initial data f_0 satisfying $f_0 \in L^1_+(\mathbb{R})$.*

Then, for all $T > 0$, there exists a function $g \in L^\infty(0, T; W^{4,\infty}(\mathbb{R}))$ such that, up to the extraction of a subsequence,

$$\|g_\varepsilon - g\|_{L^\infty([t_1, t_2] \times \mathcal{K})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \forall 0 < t_1 < t_2 < T \quad \text{and } \mathcal{K} \subset \mathbb{R} \text{ compact,}$$

$$\partial_{\xi^i}^i g_\varepsilon \rightharpoonup \partial_{\xi^i}^i g \quad \text{in } L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}) \text{ weak-}^*, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

and such that g is a solution of the Fourier form of the equation

$$(5.3) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\int_{\mathbb{R}} h(v) dv \right) \frac{\partial}{\partial v} (vh(1 + \delta\tilde{h})) + \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 h(v) (1 + \delta\tilde{h}(v)) dv \right) \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}.$$

REMARK 5.2. If $\delta = 0$, equation (5.3) reduces to the classical linear Fokker-Planck equation.

PROOF. To pass to the limit, we need some regularity on the solution g_ε . However, Theorem 4.2 is not sufficient, since the bound on the fourth derivative of g_ε depends on A_η which becomes an unbounded quantity when replacing β by β_ε and as $\varepsilon \rightarrow 0$. Therefore, we use inequality (4.1) to obtain a regularity result on g_ε which is the same than Theorem 4.2, except that it works only on any time interval $(0, T)$. The gain is that the constants used remain bounded as $\varepsilon \rightarrow 0$ when replacing β by β_ε .

Let us fix some $T > 0$; \hat{g}_ε is four times differentiable for almost any time in $(0, T)$, and these derivatives are bounded uniformly in time and independently of ε , provided

the initial datum f_0 relies in $L^1_4(\mathbb{R})$. We now act as if $\beta(\theta)$ was integrable, and then we will obtain the result by an approximation argument. A Taylor expansion in ε under the integral sign gives

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial g_\varepsilon(t, \xi)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \left[\varepsilon \theta \xi \left(g_\varepsilon(\xi) g'_\varepsilon(0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\delta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(g_\varepsilon(\xi - \eta) g_\varepsilon(\eta) g'_\varepsilon(0) \hat{\psi}(\eta) - g'_\varepsilon(-\eta) g_\varepsilon(\eta) g_\varepsilon(\xi) \hat{\psi}(\eta) \right) d\eta \right) \right. \\
(5.4) \quad & \left. + \varepsilon^2 \frac{\theta^2}{2} \left(\xi^2 g''_\varepsilon(0) g_\varepsilon(\xi) - \xi g'_\varepsilon(\xi) g_\varepsilon(0) - \frac{\delta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\eta) \left(g'_\varepsilon(\xi - \eta) g_\varepsilon(\eta) g_\varepsilon(0) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + ((\eta - \xi)^2 - \eta^2) g_\varepsilon(\xi - \eta) g_\varepsilon(\eta) g''_\varepsilon(0) + \xi g'_\varepsilon(\xi) g_\varepsilon(\eta) g_\varepsilon(-\eta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \xi^2 g''_\varepsilon(-\eta) g_\varepsilon(\eta) g_\varepsilon(\xi) + 2\eta \xi g'_\varepsilon(\xi) g_\varepsilon(\eta) g'_\varepsilon(-\eta) \right) d\eta \right] + \theta^2 O(\varepsilon^3) \Big] d\theta.
\end{aligned}$$

Since $\beta(\theta)$ is an even function, the first-order terms vanish.

By Theorem 4.1 there exists a constant $\lambda_T > 0$ which do not depend on ε such that

$$\sup_{0 < t < T} \left\{ \sum_{i=0}^4 \|\partial_{\xi^i} g_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty} \right\} \leq \lambda_T.$$

Using equation (5.4), we see that the family $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ is equicontinuous, so that we can use Ascoli's theorem, which says that there exists a function $g \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ such that, up to the extraction of a subsequence,

$$\|g_\varepsilon - g\|_{L^\infty([t_1, t_2] \times \mathcal{K})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

for all $0 < t_1 < t_2 < T$ and all compact set $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$. In addition, all the results of Theorem 4.2 are still valid for g on $(0, T)$. Therefore, thanks to both the uniform convergence for g and the convergence in $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ weak-* for its derivatives, we can pass to the limit in equation (5.4), and we get, using classical formulae on the Fourier transform and the conservation of mass and energy, that g satisfies the equation which is the Fourier transform of equation (5.3). \square

6. Other results

To give a sense to the collision kernel, we have been forced to mollify a part of our original equation

$$(6.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = Q_{QBE}(f)(t, v), & t \in \mathbb{R}_+, \quad v \in \mathbb{R}, \\ f(0, v) = f_0(v), \end{cases}$$

where

$$(6.2) \quad Q_{QBE}(f)(t, v) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}} (f' f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*) \\ - f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*)) dv_* d\theta.$$

However, assuming that a solution to this equation exists and is regular enough, we are able to obtain some interesting consequences.

6.1. H -theorem. The first one is the H -theorem. Under the right assumptions on the solution f of equation (6.1), we can define

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\delta} (1 + \delta f) \log(1 + \delta f) - f \log f \right) dv$$

and

$$D(f) = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma \left(f f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*), \right. \\ \left. f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*) \right) dv dv_* d\theta$$

with

$$(6.3) \quad \Gamma(a, b) = \begin{cases} (a - b) \log(a/b), & a > 0, \quad b > 0; \\ +\infty, & a > 0, \quad b = 0 \quad \text{or} \quad a = 0, \quad b > 0; \\ 0, & a = b = 0. \end{cases}$$

Then, f satisfies the so-called H -theorem:

THEOREM 6.1. *Let f be a solution of the problem (6.1), with $f_0 \in L \log L(\mathbb{R})$, and assume that $H(f)$ and $D(f)$ are well defined. Then*

$$H(f(t, \cdot)) = H(f_0) + \int_0^t D(f(s, \cdot)) ds \quad \forall t > 0.$$

Consequently, the entropy H is increasing along the solution.

6.2. Regularity of the solution. Using the H -theorem, we can give an *a priori* estimate on the solution f of (6.1).

THEOREM 6.2. *Let β satisfy the properties (H1), (H2) and (H3), and let $f(t, v)$ be a solution of the problem (6.1) with the initial datum $f_0 \in L^1_2 \cap L \log L$. Assume that f satisfies the H -theorem. Then we have*

$$\log(1 + \delta f) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^{\nu/2}(\mathbb{R})).$$

If in addition $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, then we have

$$f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^{\nu/2}(\mathbb{R})).$$

PROOF. We will do the computations as if the cross-section and the function f were smooth. Using the classical changes of variable $(v, v_*, \theta) \mapsto (v', v'_*, -\theta)$ and $(v, v_*) \mapsto (v_*, v)$ which have unit jacobian, we have:

$$\begin{aligned}
D(f) &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} \left(f' f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*) - f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*) \right) \\
&\quad \times \log \frac{f' f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*)}{f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*)} dv dv_* d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} \left(f' f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*) - f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*) \right) \\
&\quad \times \log \left(f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*) \right) dv dv_* d\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} \left(f' f'_*(1 + \delta f)(1 + \delta f_*) - f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*) \right) \\
&\quad \times \log \left(f(1 + \delta f') \right) dv dv_* d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f f_*(1 + \delta f')(1 + \delta f'_*) \log \frac{f(1 + \delta f')}{f'(1 + \delta f)} dv dv_* d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_*(1 + \delta f'_*) \left(f(1 + \delta f') \log \frac{f(1 + \delta f')}{f'(1 + \delta f)} \right. \\
&\quad \left. - f(1 + \delta f') + f'(1 + \delta f) \right) dv dv_* d\theta \\
&\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_*(1 + \delta f'_*) \left(f(1 + \delta f') - f'(1 + \delta f) \right) dv dv_* d\theta \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

The term I_2 can be treated easily, because it can be written as

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_*(1 + \delta f'_*) (f - f') dv dv_* d\theta,$$

and the presence of $f - f'$ involves strong cancellations. In fact, the term I_2 verifies

$$(6.4) \quad I_2 = \|f\|_{L^1}^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \left(1 - \frac{1}{\cos \theta} \right) d\theta.$$

To prove (6.4), consider that

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_*(f - f') dv dv_* d\theta + \delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_* f'_*(f - f') dv dv_* d\theta \\
&= I_2^1 + I_2^2
\end{aligned}$$

Thanks to the change of variable $(v, v_*, \theta) \mapsto (v', v'_*, -\theta)$, we see that $I_2^2 = 0$. On the second part of I_2^1 , we use the change of variable $v \mapsto v'$ with v_* and θ fixed, which jacobian is

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Therefore

$$I_2^1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \left(1 - \frac{1}{\cos \theta} \right) \int_{\mathbb{R}^2} f_* f dv dv_* d\theta$$

and from this (6.4) follows.

Using now the inequality

$$x \log \frac{x}{y} - x + y \geq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2, \quad \forall x, y > 0,$$

we obtain

$$I_1 \geq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_*(1 + \delta f'_*) \left(\sqrt{f(1 + \delta f')} - \sqrt{f'(1 + \delta f)} \right)^2 dv dv_* d\theta.$$

Therefore

$$(6.5) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_*(1 + \delta f'_*) \left(\sqrt{f(1 + \delta f')} - \sqrt{f'(1 + \delta f)} \right)^2 dv dv_* d\theta \leq D(f) + c_1 \|f\|_{L^1}^2$$

where

$$c_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) d\theta > 0.$$

Now, we write

$$\sqrt{f(1 + \delta f')} - \sqrt{f'(1 + \delta f)} = (\log(1 + \delta f') - \log(1 + \delta f)) \frac{\sqrt{f(1 + \delta f')} - \sqrt{f'(1 + \delta f)}}{\log(1 + \delta f') - \log(1 + \delta f)}.$$

For $0 < a < x$, let

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{x(1 + \delta a)} - \sqrt{a(1 + \delta x)}}{\log(1 + \delta a) - \log(1 + \delta x)}.$$

Then, there exists some constant $c_2 > 0$ that does not depend on x or a such that

$$|\phi(x)| > c_2 \quad \forall x > a.$$

From this inequality we deduce that

$$c_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_*(1 + \delta f'_*) \left(\log(1 + \delta f') - \log(1 + \delta f) \right)^2 \leq D(f) + c_1 \|f\|_{L^1}^2$$

It has been shown in [72] that if F is a real function such that $F(f) \in L^2(\mathbb{R})$ satisfying

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \int_{\mathbb{R}^2} f_* \left(F(f') - F(f) \right)^2 \leq D(f) + c_1 \|f\|_{L^1}^2,$$

then the following inequality holds:

$$\|F(f)\|_{H^{\nu/2}}^2 \leq D(f) + c_1 \|f\|_{L^1}^2.$$

Taking $F(f) = c_2 \log(1 + \delta f)$ the result follows \square

6.3. Moments of the solution. To study the grazing collision limit, we needed some regularity on the Fourier transform of the solution. This is equivalent to have a uniform bound on some higher moment of the solution. In proving Theorem 4.1, we used the regularity of the mollified part, more precisely the fact that this part was in C^1 . In fact it could be enough to use the $H^{\frac{\nu}{2}}$ regularity which follows from the H -theorem. Indeed, the terms that raise problems in the proof of Theorem 4.1 are \tilde{I}_1 and \tilde{I}_2 . Let us see how

to treat the first one. We have

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_1| &= \left| \int \beta(\theta) \sin \theta \cos^3 \theta \int_{\mathbb{R}^2} v v_* (v^2 - v_*^2) f f_* (f(v') - f(\tilde{v}')) dv dv_* d\theta \right| \\
&= \left| \int \beta(\theta) \sin \theta \cos^3 \theta \int_{\mathbb{R}^2} v v_* (v^2 - v_*^2) f(v) f(v_*) \left[v(1 - \cos \theta) \right]^\alpha \right. \\
&\quad \left. \frac{f(v') - f(\tilde{v}')}{[v(1 - \cos \theta)]^\alpha} dv dv_* d\theta \right| \\
&\leq \int \beta(\theta) |\sin \theta| |1 - \cos \theta|^\alpha |\cos^3 \theta| \left(\int_{\mathbb{R}^2} (v^{1+\alpha} v_* (v^2 - v_*^2))^p f(v)^p f(v_*)^p dv dv_* \right)^{1/p} \\
&\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(v') - f(\tilde{v}')|^q}{|v(1 - \cos \theta)|^{\alpha q}} dv dv_* \right)^{1/q} d\theta.
\end{aligned}$$

In order to deal with moments not exceeding the fourth one, we use Hölder's inequality, with p such that $(3 + \alpha)p = 4$. Consequently $q = \frac{4}{1-\alpha}$. Moreover, in order to recognize the semi-norm of f in the Sobolev space $H^{\nu/2}$ in the last term of the product, we need to set

$$\alpha q = 1 + \nu,$$

and thus

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{5 + \nu}$$

(note that $0 < \alpha < 1$). With these constants, we have

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(v') - f(\tilde{v}')|^q}{|v(1 - \cos \theta)|^{\alpha q}} dv dv_* \right)^{1/q} &= \frac{1}{|1 - \cos \theta|^{1/q}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(v') - f(\tilde{v}')|^q}{|v(1 - \cos \theta)|^{\alpha q}} dv d(1 - \cos \theta) v_* \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{2^{1-\frac{2}{q}}}{|1 - \cos \theta|^{\frac{1}{q}} |\sin \theta|^{\frac{1}{q}}} \|f(t)\|_{L^\infty}^{1-\frac{2}{q}} |f(t)|_{H^{\nu/2}}^{\frac{2}{q}}.
\end{aligned}$$

Finally

$$|\tilde{I}_1| \leq C \int \beta(\theta) |\cos^3 \theta| |\sin \theta|^{1-\frac{1}{q}} |1 - \cos \theta|^{\alpha-\frac{1}{q}} d\theta \left(\int_{\mathbb{R}} v^4 f(t, v) dv \right)^{\frac{2}{p}} \|f(t)\|_{L^\infty} |f(t)|_{H^{\nu/2}}^{\frac{2}{q}}$$

The integral in θ is finite if and only if

$$2 \left(\alpha - \frac{1}{q} \right) - \nu - \frac{1}{q} > -1.$$

Recalling that

$$q = \frac{4}{1 - \alpha}$$

and that

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{5 + \nu},$$

this request is equivalent to

$$\nu^2 + 2\nu - 4 < 0,$$

which is verified for $-1 - \sqrt{5} < \nu < \sqrt{5} - 1$. Combining this with the previous constraints on the parameter ν , we obtain that our bound of the fourth moment works for all ν verifying

$$1 < \nu < \sqrt{5} - 1.$$

The treatment of \tilde{I}_2 is quite more simple, since it requires only some changes of variable. Indeed, using the changes of variable $v \mapsto v - v_* \sin \theta$ and $\theta \mapsto -\theta$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \sin \theta \cos^3 \theta \int_{\mathbb{R}^2} v v_* (v^2 - v_*^2) f(v) f(v_*) (f(\tilde{v}') - f(v)) dv dv_* d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \sin \theta \cos^3 \theta \int_{\mathbb{R}^2} v v_* (v^2 - v_*^2) f(v) f(v_*) f(\tilde{v}') dv dv_* d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \sin \theta \cos^3 \theta \cdot \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (v + v_* \sin \theta) v_* ((v + v_* \sin \theta)^2 - v_*^2) f(v + v_* \sin \theta) f(v_*) f(v) dv dv_* d\theta \\
&= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \sin \theta \cos^3 \theta \cdot \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (v - v_* \sin \theta) v_* ((v - v_* \sin \theta)^2 - v_*^2) f(\tilde{v}') f(v_*) f(v) dv dv_* d\theta
\end{aligned}$$

This implies

$$\tilde{I}_2 \leq C(m, e) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \beta(\theta) \sin^2 \theta d\theta \right) \|f(t)\|_{L^\infty} \left(e^2 + m^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}} v^4 f(t, v) dv \right)^{\frac{3}{4}} \right).$$

We proved

THEOREM 6.3. *Assume that the cross-section β satisfies (H1), (H2), with $1 < \nu < \sqrt{5} - 1$. Assume that there exists a solution f to the problem (6.1). Assume that f is regular, in the sense that $\|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ and $\|f(t)\|_{H^{\frac{\nu}{2}}}$ are in $L^p(\mathbb{R}_+)$ for some p big enough; then there exists some constant $\lambda > 0$ such that f satisfies*

$$\|f(t)\|_{L^1_4} \leq \max \left\{ \lambda, \|f_0\|_{L^1_4} \right\}.$$

7. Conclusions

In this paper we investigated the asymptotic equivalence between the (mollified) Kac caricature of a Bose-Einstein gas and a nonlinear Fokker-Planck type equation in the so-called grazing collision limit. The limit equation differs from the analogous one present in the literature [83], since in our case the linear diffusion has a diffusivity which depends on the solution itself, in order to guarantee the conservation of energy. Our analysis refers to a mollified version of the equation, due to the difficulties of handle the third order nonlinearity present in the Bose-Einstein correction. A further inside on the true model, done in the last part of the paper, shows that a proof of the boundedness of the solution would be sufficient to avoid the presence of the mollifier.

Derivation of a two-fluids model for a Bose gas from a quantum kinetic system

Article publié dans *Kinetic and Related Models* 2 (2), 2009, pp 379-402

Sommaire

Abstract	87
1. Introduction	87
2. Properties of the model	91
2.1. Conservation laws	91
2.2. Thermodynamic equilibrium	93
3. Formal derivation of the fluid model	95
3.1. Semiclassical limit	95
3.2. Hydrodynamic limit	96
3.3. The isentropic approximation	97
4. Hyperbolicity and regular solutions	100
4.1. Hyperbolicity	101
4.2. Entropy	104
5. Weak solutions and the Riemann problem	105
5.1. Existence of weak solutions	105
5.2. Nature of the characteristic fields	106
5.3. Shock curves	107
6. Conclusions	109

Abstract

We formally derive the hydrodynamic limit of a system modelling a bosons gas having a condensed part, made of a quantum kinetic and a Gross-Pitaevskii equation. The limit model, which is a two-fluids Euler system, is approximated by an isentropic system, which is then studied. We find in particular some conditions for the hyperbolicity, and we study the weak solutions. A numerical example is given at the end.

1. Introduction

There has been a lot of research done about Bose-Einstein condensates in mathematics and physics, especially since t. In particular, mathematicians have been working on various models to see if the predictions of the physicists could be justified mathematically.

There are actually several types of models to describe a Bose-Einstein condensate [109]. The only one which is valid without any approximation is the atomistic one, that is, the linear Schrödinger equation for the P bodies density:

$$(1.1) \quad i\hbar\partial_t\Psi_P = H_P\Psi_P$$

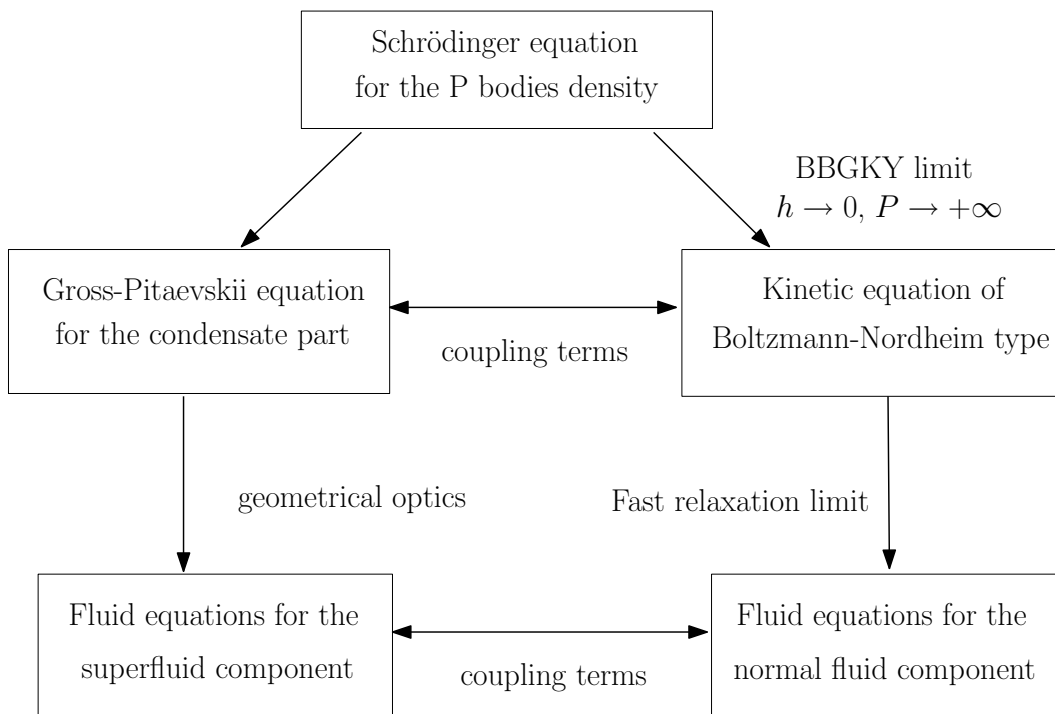


FIGURE 1. Various models describing a Bose gas, and their interactions.

where H_P is the Hamiltonian, i.e. the energy operator, of the system, and h is Planck's constant. Other models can be found depending on the regime under consideration. At zero temperature, the gas is entirely condensated. Assuming that it is in a non-dissipative trap, the one-body density is governed by the Gross-Pitaevskii equation:

$$ih\partial_t\Psi = -h^2\Delta_x\Psi + U\Psi + |\Psi|^2\Psi$$

where U is the trapping potential. When the temperature of the gas is close to zero, the gas is composed of a condensate and a normal component. The condensate is still expected to be governed by a Gross-Pitaevskii-type equation, with coupling terms taking into account the mass and momentum exchanges with the normal component. The latter can be described in a probabilistic way using kinetic equations; in this case, a quantum Boltzmann equation, first proposed by Nordheim [108], with additional terms. We could also use a fluid description for the normal part together with the usual Gross-Pitaevskii equation for the condensate; still another possibility is to use a fluid description for both parts of the gas, leading to a two fluids model as predicted by Landau [106]. The way these models are related is represented in Figure 1.

In [110], a kinetic model for the non-condensate part has been derived from (1.1) using the BBGKY expansion in the low density limit. The condensated part is then described by a Gross-Pitaevskii equation, which takes into account both the interactions between the atoms of the condensate, and between them and those of the non-condensate part (called normal fluid).

What we are interested in is to link this model with models at a larger scale, namely, fluid models. This can be done considering the fast relaxation limit for the kinetic equation, together with the semiclassical limit for the Gross-Pitaevskii equation.

Our starting point is the following model: let

$$\varphi \equiv \varphi(t, x, v) \geq 0$$

denote the phase-space density function of the normal fluid, and

$$(1.2) \quad \Psi(t, x) = \sqrt{\rho_s(t, x)} e^{i\theta(t, x)/\hbar}$$

denote the wave function of the condensated (or superfluid) phase, with ρ_s being the mass of the superfluid. Here, $t \in \mathbb{R}_+$ is the time variable, and $x, v \in \mathbb{R}^N$ for $N \geq 1$ are the position and velocity variables.

In [110], Pomeau, Brachet, Métens and Rica derive the following coupled system of equations:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi - \nabla_x V_1 \cdot \nabla_v \varphi = Q(\varphi) + \rho_s Q_1(\varphi) \\ i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_x \Psi + V_2 \Psi + \frac{i\hbar}{2} Q_2(\varphi) \Psi. \end{cases}$$

The first equation expresses a balance between the left-hand term, which is a Vlasov operator for a gas in the external field $\nabla_x V_1$, and the right-hand term, which comes from the normal fluid-normal fluid and normal fluid-superfluid interactions. The second equation is a cubic Schrödinger equation (because of the form (1.8) of V_2), with an interaction term with the normal fluid. The first collision operator $Q(\varphi)$ is the usual Boltzmann-Nordheim operator for the bosons, modelling the collisions between two particles from the normal fluid. It writes

$$(1.4) \quad Q(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{S^{N-1}} (\varphi' \varphi'_* (1 + \varphi)(1 + \varphi') - \varphi \varphi_* (1 + \varphi')(1 + \varphi'_*)) dv_* dn$$

with the usual notations

$$\varphi = \varphi(t, x, v), \quad \varphi_* = \varphi(t, x, v_*), \quad \varphi' = \varphi(t, x, v'), \quad \varphi'_* = \varphi(t, x, v'_*).$$

The post-collisional velocities (v, v_*) and the precollisional ones (v', v'_*) satisfy the conservation of momentum and kinetic energy

$$(1.5) \quad \begin{cases} v + v_* = v' + v'_* \\ |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2 \end{cases}$$

since the collisions are assumed to be elastic. The solutions of (1.5) can be parametrized by a unit vector $n \in S^{N-1}$, so that

$$\begin{cases} v' = v - [(v - v_*) \cdot n] n \\ v'_* = v_* + [(v - v_*) \cdot n] n. \end{cases}$$

The other two collision operators $Q_1(\varphi)$ and $Q_2(\varphi)$ both take into account the collisions between particles from the normal fluid and from the superfluid. The operator $Q_1(\varphi)$ writes

$$(1.6) \quad \begin{aligned} Q_1(\varphi)(v) = & \int_{C_1} [\varphi(v') \varphi(v'_*) - \varphi(v) (\varphi(v') + \varphi(v'_*) + 1)] dv' dv'_* \\ & + 2 \int_{C_2} [\varphi(v'_*) (\varphi(v) + \varphi(v_*) + 1) - \varphi(v) \varphi(v_*)] dv_* dv'_* \end{aligned}$$

where C_1 is the set of all the velocities v', v'_* such that

$$(1.7) \quad \begin{cases} \nabla_x \theta + v = v' + v'_* \\ -2\partial_t \theta - 2V_1 + |v|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2, \end{cases}$$

and C_2 is the set of the velocities v_*, v'_* satisfying

$$\begin{cases} \nabla_x \theta + v'_* = v + v_* \\ -2\partial_t \theta - 2V_1 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2. \end{cases}$$

As to the last collision operator Q_2 , it writes

$$Q_2(\varphi) = \int_{C_3} [\varphi(v')\varphi(v'_*) - \varphi(v_*)(\varphi(v') + \varphi(v'_*) + 1)] dv_* dv' dv'_*$$

where C_3 is the set of all velocities v_*, v', v'_* such that

$$\begin{cases} \nabla_x \theta + v_* = v' + v'_* \\ -2\partial_t \theta - 2V_1 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2. \end{cases}$$

The terms $-2\partial_t \theta - 2V_1$ which are added in the microscopic energy conservation equations are here to ensure the possibility of having a condensate with velocity and energy which are other than zero. Indeed, the usual Boltzmann-Nordheim equation was derived in a space homogeneous setting, and up to translations the energy and the velocity of the condensate can only be zero in such a framework.

The potentials V_1 and V_2 are given by

$$(1.8) \quad \begin{cases} V_1 = \alpha(2\rho_n + \rho_s) \\ V_2 = \frac{\alpha}{2}(2\rho_n + \rho_s) \end{cases}$$

where α is a positive constant, ρ_s is given by (1.2) and

$$\rho_n = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t, x, v) dv$$

is the mass of the normal fluid.

Note that very few is known mathematically about the Boltzmann equation for the bosons. It has been studied only in the spatially homogeneous case; see for example [107, 102, 103].

In this work, we will (formally) perform the compressible Euler limit on the system (1.3) together with a semiclassical limit. To do this, we rescale time and space by changing (t, x) to $(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon})$, where ε is a small parameter, which gives the scaled system

$$(1.9) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi - \nabla_x V_1 \cdot \nabla_v \varphi = \frac{1}{\varepsilon} Q(\varphi) + \frac{\rho_s}{\varepsilon} Q_1(\varphi) \\ i\tilde{h} \partial_t \Psi = -\frac{\tilde{h}^2}{2} \Delta_x \Psi + V_2 \Psi + \frac{i\tilde{h}}{2\varepsilon} Q_2(\varphi) \Psi. \end{cases}$$

where $\tilde{h} = \varepsilon h$, and we want to determine the asymptotics of this system as $\tilde{h} \rightarrow 0$ and $\varepsilon \rightarrow 0$.

In Section 2, we detail the main physical properties of the model. Then, in Section 3, we obtain a fluid description of the Bose-Einstein condensate and the non-condensate phase. We therefore study the fluid system. In Section 4, we get some conditions for the system to be hyperbolic, and then we show the existence of some local strong solutions. In Section 5, we finally give some details about weak solutions and the propagation of shocks.

2. Properties of the model

The possibility of obtaining a fluid description of the Bose gas governed by (1.3) is a consequence of some fundamental properties of this system. First, like for the classical Boltzmann and Schrödinger equations, we can write the macroscopic equations which govern the mass, momentum and energy for both parts of the gas. Then, we characterize the distributions φ which minimize the entropy and thus are expected to be attractors of the dynamics in the fast relaxation limit. These two informations will allow us to perform the compressible Euler limit in Section 3.

2.1. Conservation laws. Integrating the kinetic equation in (1.3) against 1 , v , $|v|^2$, we obtain the equations on the mass, momentum and kinetic energy of the normal fluid. From the Gross-Pitaevskii equation, we derive the equations for the mass, momentum and energy of the condensate.

2.1.1. *Mass.* We plug the expression of Ψ (1.2) in the second equation of the system (1.3). After dividing by the exponential, we can write two equations, one for the real part and one for the imaginary part. They read

$$(2.1) \quad \partial_t \rho_s + \nabla_x \cdot (\rho_s u_s) = \rho_s Q_2(\varphi)$$

and

$$(2.2) \quad \partial_t \theta = \frac{\hbar^2}{2\sqrt{\rho_s}} \Delta_x \sqrt{\rho_s} - \frac{|u_s|^2}{2} - V_2$$

where

$$u_s = \nabla_x \theta$$

denotes the bulk velocity of the condensed phase. Equation (2.1) gives the law governing the mass density of the condensate.

For the kinetic equation, let us first remark that

$$(2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} Q_1(\varphi)(v) dv = - \begin{pmatrix} 1 \\ u_s \\ -2\partial_t \theta - 2V_1 \end{pmatrix} Q_2(\varphi).$$

Then, integrating with respect to the velocity over the whole space \mathbb{R}^N , we obtain the equation satisfied by the mass of the normal fluid:

$$(2.4) \quad \partial_t \rho_n + \nabla_x \cdot (\rho_n u_n) = -\rho_s Q_2(\varphi)$$

where we defined the bulk velocity of the normal fluid as

$$u_n = \frac{1}{\rho_n} \int_{\mathbb{R}^N} v f(t, x, v) dv.$$

We can see that neither ρ_n nor ρ_s are conserved quantities, unless the thermodynamic equilibrium is reached, that is,

$$Q_2(\varphi) = 0.$$

However, the total mass

$$\rho = \rho_n + \rho_s$$

satisfies a conservation law without any assumption of equilibrium:

$$(2.5) \quad \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho_n u_n + \rho_s u_s) = 0.$$

This means that the normal fluid and the condensate exchange mass until they are at thermodynamic equilibrium.

2.1.2. *Momentum.* Integrating the kinetic equation against v , we get

$$(2.6) \quad \partial_t(\rho_n u_n) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v \varphi dv \right) = -\rho_n \nabla_x V_1 - \rho_s u_s Q_2(\varphi).$$

For the condensed part, we differentiate equation (2.2) with respect to x , and, thanks to the mass equations (2.1) and (2.4), we can write

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_s u_s) + \nabla_x \cdot (\rho_s u_s \otimes u_s) &= -\rho_s \nabla_x V_2 + \rho_s u_s Q_2(\varphi) \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2} \nabla_x \cdot (\sqrt{\rho_s} \nabla_x^2 \sqrt{\rho_s} - \nabla_x \sqrt{\rho_s} \otimes \nabla_x \sqrt{\rho_s}). \end{aligned}$$

Plugging the expression of the potentials (1.8), we can see that the total momentum satisfies

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_n u_n + \rho_s u_s) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v \varphi dv + \rho_s u_s \otimes u_s + \alpha(2\rho_n + \rho_s) I_N \right) \\ = \frac{\hbar^2}{2} \nabla_x \cdot (\sqrt{\rho_s} \nabla_x^2 \sqrt{\rho_s} - \nabla_x \sqrt{\rho_s} \otimes \nabla_x \sqrt{\rho_s}) \end{aligned}$$

where I_N is the $N \times N$ identity matrix.

The momentum of each fluid is not preserved even at thermodynamic equilibrium; however, the total momentum obeys a conservation law. This means that, even at the equilibrium, the two parts of the fluid exchange some momentum.

2.1.3. *Energy.* We now integrate the kinetic equation against $|v|^2$:

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \varphi dv \right) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} v |v|^2 \varphi dv \right) &= -2\rho_n u_n \cdot \nabla_x V_1 \\ &\quad - \left(\rho_s |u_s|^2 + \rho_s (2V_2 - V_1) - \hbar^2 \sqrt{\rho_s} \Delta_x \sqrt{\rho_s} - \rho_s V_1 \right) Q_2(\varphi). \end{aligned}$$

For the condensed part, the energy writes $\hbar^2 |\nabla_x \Psi|^2$, and satisfies

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \partial_t \hbar^2 |\nabla_x \Psi|^2 &= \hbar^3 \Re(i \nabla_x (\Delta_x \Psi) \cdot \nabla_x \bar{\Psi}) - 2\hbar \Im(\bar{\Psi} \nabla_x \Psi) \nabla_x V_2 \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2} \nabla_x \rho_s \cdot \nabla_x Q_2(\varphi) + \hbar^2 |\nabla_x \Psi|^2 Q_2(\varphi). \end{aligned}$$

Computing

$$\hbar^3 \Re(i \nabla_x (\Delta_x \Psi) \cdot \nabla_x \bar{\Psi})$$

and since

$$\hbar^2 |\nabla_x \Psi|^2 = \rho_s |u_s|^2 + \hbar^2 |\nabla_x \sqrt{\rho_s}|^2,$$

it follows that

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_s |u_s|^2 + \hbar^2 |\nabla_x \sqrt{\rho_s}|^2) + \nabla_x \cdot (\rho_s |u_s|^2 u_s) &= -2\rho_s u_s \nabla_x V_2 + \rho_s |u_s|^2 Q_2(\varphi) \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2} \nabla_x \rho_s \cdot \nabla_x Q_2(\varphi) + \hbar^2 |\nabla_x \sqrt{\rho_s}|^2 Q_2(\varphi) \\ &\quad + 3\hbar^2 \nabla_x \cdot (\nabla_x \sqrt{\rho_s} \otimes \nabla_x \sqrt{\rho_s} : u_s) \\ &\quad - \hbar^2 \nabla_x \cdot (\sqrt{\rho_s} u_s \Delta_x \sqrt{\rho_s}) + \hbar^2 \nabla_x \cdot (\nabla_x \sqrt{\rho_s} \nabla_x \cdot (\sqrt{\rho_s} u_s)). \end{aligned}$$

On the other hand, the equation for the potential energy writes:

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{\alpha}{2} (2\rho_n + \rho_s)^2 + \nabla_x \cdot (\alpha(2\rho_n + \rho_s)(2\rho_n u_n + \rho_s u_s)) \\ = \alpha(2\rho_n u_n + \rho_s u_s) \cdot \nabla_x (2\rho_n + \rho_s) - \alpha \rho_s (2\rho_n + \rho_s) Q_2(\varphi) \\ = 2\rho_n u_n \nabla_x V_1 + 2\rho_s u_s \nabla_x V_2 - \rho_s V_1 Q_2(\varphi) \end{aligned}$$

thanks to expressions (1.8) of the potentials. If we add this equation to the equation for the energy of the condensed part (2.7), we note that we obtain a conservation equation, plus some terms coming from the interaction with the normal fluid. This conservation property is reminiscent from the energy conservation of the solutions to the Schrödinger equation.

Collecting all the pieces together, we get the full energy equation:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \varphi dv + \rho_s |u_s|^2 + h^2 |\nabla_x \sqrt{\rho_s}|^2 + \frac{\alpha}{2} (2\rho_n + \rho_s)^2 \right) \\ + \nabla_x \cdot \left(\int v |v|^2 \varphi dv + \rho_s |u_s|^2 u_s + \alpha(2\rho_n + \rho_s)(2\rho_n u_n + \rho_s u_s) \right) \\ = h^2 T(\varphi, \rho_s, u_s) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} T(\varphi, \rho_s, u_s) = \nabla_x \cdot (\sqrt{\rho_s} Q_2(\varphi) \nabla_x \sqrt{\rho_s}) + 3 \nabla_x \cdot (\nabla_x \sqrt{\rho_s} \otimes \nabla_x \sqrt{\rho_s} : u_s) \\ - \nabla_x \cdot (\sqrt{\rho_s} u_s \Delta_x \sqrt{\rho_s}) + \nabla_x \cdot (\nabla_x \sqrt{\rho_s} \nabla_x \cdot (\sqrt{\rho_s} u_s)). \end{aligned}$$

We check that the total energy is conserved, and that all the terms which do not have a clear physical interpretation formally vanish in the limit $h \rightarrow 0$.

2.2. Thermodynamic equilibrium. Letting $\varepsilon \rightarrow 0$ in (1.9) suggests that, in the fast relaxation limit, φ satisfies, for almost every $v \in \mathbb{R}^N$,

$$Q(\varphi) + \rho_s Q_1(\varphi) = 0.$$

We therefore need to characterize such functions:

PROPOSITION 2.1. *Let $\varphi \equiv \varphi(v)$ be a smooth, positive valued function on \mathbb{R}^N . Let $u_s \in \mathbb{R}^N$, $V_1 \in \mathbb{R}$ be some given constants and let*

$$\rho_n = \int_{v \in \mathbb{R}^N} \varphi(v) dv, \quad u_n = \frac{1}{\rho_n} \int_{\mathbb{R}^N} v \varphi(v) dv.$$

Define $Q(\varphi)$ and $Q_1(\varphi)$ by (1.4) and (1.6). Assume that $h = 0$, so that C_2 is the set of all the velocities v_, v'_* such that*

$$\begin{cases} u_s + v'_* = v + v_* \\ |u_s|^2 + V_1 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2. \end{cases}$$

Then,

$$Q(\varphi) + \rho_s Q_1(\varphi) = 0$$

if and only if φ is a bosonian, i.e.

$$(2.9) \quad \varphi(v) = \frac{M}{1 - M},$$

where

$$M = e^{-\frac{|v - u_n|^2 - |u_s - u_n|^2 + V_1}{2T}},$$

for some positive constant T .

PROOF. The identity

$$Q(\varphi) + \rho_s Q_1(\varphi) = 0$$

implies that

$$\int_{\mathbb{R}^N} (Q(\varphi) + \rho_s Q_1(\varphi)) \log \left(\frac{\varphi}{1 + \varphi} \right) dv = 0.$$

Using the symmetries of the collision integrals, we have

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} Q(\varphi) \log \left(\frac{\varphi}{1 + \varphi} \right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{S^{N-1}} (1 + \varphi)(1 + \varphi_*)(1 + \varphi')(1 + \varphi'_*) \left(\frac{\varphi'}{1 + \varphi'} \frac{\varphi'_*}{1 + \varphi'_*} - \frac{\varphi}{1 + \varphi} \frac{\varphi_*}{1 + \varphi_*} \right) \\ & \times \left(\log \left(\frac{\varphi}{1 + \varphi} \frac{\varphi_*}{1 + \varphi_*} \right) - \log \left(\frac{\varphi'}{1 + \varphi'} \frac{\varphi'_*}{1 + \varphi'_*} \right) \right) dv dv_* dn \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} Q_1(\varphi) \log \left(\frac{\varphi}{1 + \varphi} \right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{C_2} (1 + \varphi)(1 + \varphi_*)(1 + \varphi'_*) \left(\frac{\varphi'_*}{1 + \varphi'_*} - \frac{\varphi}{1 + \varphi} \frac{\varphi_*}{1 + \varphi_*} \right) \\ & \times \left(\log \left(\frac{\varphi}{1 + \varphi} \frac{\varphi_*}{1 + \varphi_*} \right) - \log \left(\frac{\varphi'_*}{1 + \varphi'_*} \right) \right) dv dv_* dv'_*. \end{aligned}$$

But for all $x, y > 0$ we have

$$(x - y)(\log y - \log x) \leq 0$$

with equality if and only if $x = y$. Hence both integrands are nonpositive functions, and we claim that:

$$Q(\varphi) + \rho_s Q_1(\varphi) = 0$$

if and only if

$$Q(\varphi) = 0 \quad \text{a.e. and} \quad Q_1(\varphi) = 0 \quad \text{a.e..}$$

For the same reason, $Q(\varphi)$ vanishes if and only if

$$(2.10) \quad \frac{\varphi'}{1 + \varphi'} \frac{\varphi'_*}{1 + \varphi'_*} = \frac{\varphi}{1 + \varphi} \frac{\varphi_*}{1 + \varphi_*}$$

for almost every $v, v_* \in \mathbb{R}^N$, $n \in S^{N-1}$, with v', v'_* satisfying (1.5), and $Q_1(\varphi)$ vanishes only when

$$\frac{\varphi'_*}{1 + \varphi'_*} = \frac{\varphi}{1 + \varphi} \frac{\varphi_*}{1 + \varphi_*}$$

for almost every $v \in \mathbb{R}^N$ and $v_*, v'_* \in C_2$ with $h = 0$ ($u_s \in \mathbb{R}^N$ and V_1 are fixed).

We therefore have to solve the functional equation (2.10). Thanks to the classical Boltzmann theory, we know that if for all v, v_*, v', v'_* satisfying (1.5) we have

$$ff_* = f'f'_*,$$

then f is a Maxwellian distribution, namely

$$f \equiv M = e^{(a|v|^2 + b \cdot v + c)}$$

with $a, c \in \mathbb{R}$ and $b \in \mathbb{R}^N$. Taking $f = \frac{\varphi}{1 + \varphi}$ gives that $Q(\varphi)$ vanishes if and only if

$$\varphi = \frac{M}{1 - M}.$$

The Maxwellian function M can be rewritten

$$M = e^{-\frac{|v-u_n|^2}{2T} + \delta}$$

for some $T > 0$ and $\delta \in \mathbb{R}$ using the macroscopic velocity, since

$$\int_{\mathbb{R}^N} v \varphi dv = \rho_n u_n.$$

We can compute δ by plugging this into $Q_1(\varphi) = 0$, which leads to

$$M'_* = M M_*$$

for all $v \in \mathbb{R}^N$, v_* , $v'_* \in C_2$. We thus obtain:

$$\frac{|v'_* - u_n|^2}{2T} - \delta = \frac{|v - u_n|^2}{2T} - \delta + \frac{|v_* - u_n|^2}{2T} - \delta$$

which gives, thanks to the definition of C_2 ,

$$\delta = \frac{|u_s - u_n|^2 - V_1}{2T},$$

which is the expected result. □

REMARK 2.2. M satisfies

$$\frac{\varphi}{1 + \varphi} = M,$$

so that

$$0 < M < 1.$$

In particular,

$$|u_s - u_n|^2 \leq \alpha(2\rho_n + \rho_s).$$

REMARK 2.3. In [103], it is shown that the equilibrium solutions of the Boltzmann-Nordheim equation, which are the minimizers of the entropy, are the bosonian distributions (2.9) to which a Dirac function must be added if the mass of the initial data is greater than some critical value. In fact, for initial data having a big mass, the formation of a singularity taking the form of a Dirac function means that a condensate has been created in the fluid. Our goal here is to study a model (1.3) where a condensate has already occurred, and then the corresponding mass has been deleted from the normal component of the fluid. Hence, the initial mass of the normal part of the fluid is assumed to be less than the critical value, and consequently the equilibrium solution is made only of the regular part.

3. Formal derivation of the fluid model

Our goal in this section is to derive a fluid description of the Bose gas governed by (1.3). This will be achieved at formal level in three steps: we first perform the semiclassical limit $\hbar \rightarrow 0$. It allows to pass from a quantum to a classical description of the condensed part. Then, rescaling the time and space as in (1.9), we perform the compressible Euler limit by the moment method. We get a set of equations on the masses and momentum of the two fluids, and an equation for the total energy. This system is closed. However, it is a system of $2N + 3$ equations and as much unknowns. To simplify the subsequent study, we replace it in the third step with a smaller system using the isentropic approximation.

3.1. Semiclassical limit. When performed on the usual Schrödinger equation, the semiclassical limit $\hbar \rightarrow 0$ allows to recover the laws of classical mechanics from quantum

dynamics [100]. Indeed, h can be seen as a measure of how far we are from classical mechanics. In our case, the limit will allow us to treat the condensed part as a classical fluid.

We assume that all the quantities converge in suitable functional spaces as $h \rightarrow 0$. Moreover, we still write $\rho_s, u_s, \theta, \varphi, \rho_n, u_n$ the limits of these quantities. Under these assumptions, the equation for the phase (2.2) becomes

$$\partial_t \theta = -\frac{|u_s|^2}{2} - V_2.$$

Hence, as $h \rightarrow 0$, $Q_2(\varphi)$ is changed into

$$Q_2(\varphi) = \int_{C_3} [\varphi(v')\varphi(v'_*) - \varphi(v_*)(\varphi(v') + \varphi(v'_*) + 1)] dv_* dv' dv'_*$$

where the new C_3 is the set of all velocities v_*, v', v'_* such that

$$\begin{cases} u_s + v_* = v' + v'_* \\ |u_s|^2 - V_1 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2. \end{cases}$$

Substituting $Q_2(\varphi)$ with its new expression, the mass equations (2.1), (2.4) and (2.5) write the same as before. The momentum equation for the normal fluid (2.6) is also unchanged. The equation for the momentum of the condensed part becomes:

$$\partial_t(\rho_s u_s) + \nabla_x \cdot (\rho_s u_s \otimes u_s) = -\rho_s \nabla_x V_2 + \rho_s u_s Q_2(\varphi).$$

Thus, the total momentum satisfies the conservation law

$$\partial_t(\rho_n u_n + \rho_s u_s) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v \varphi dv + \rho_s u_s \otimes u_s + \alpha(2\rho_n + \rho_s)I_N \right) = 0.$$

Letting $h \rightarrow 0$ in the energy equation (2.8) leads to:

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \varphi dv + \rho_s |u_s|^2 + \frac{\alpha}{2} (2\rho_n + \rho_s)^2 \right) \\ & + \nabla_x \cdot \left(\int v |v|^2 \varphi dv + \rho_s |u_s|^2 u_s + \alpha(2\rho_n + \rho_s)(2\rho_n u_n + \rho_s u_s) \right) = 0. \end{aligned}$$

Note that in the semiclassical limit, the total energy is conserved.

3.2. Hydrodynamic limit. We now perform the change of scale $(t, x) \mapsto (\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon})$ where $\varepsilon \rightarrow 0$ is a small parameter. As can be seen on the system (1.9), this scaling leaves the equations associated to the condensed part unchanged, excepted the collision term $Q_2(\varphi)$ which gets a factor $\frac{1}{\varepsilon}$. The small parameter ε is known as the Knudsen number, which is proportional to the mean free path, that is, the average length covered by the particules of the gas between two collisions. Letting this parameter go to 0 means that the collisions occur on a time scale which is very small compared with the observation time scale, so that one can consider that the local thermodynamic equilibrium is reached almost instantaneously.

The principle of the moment method for the compressible Euler limit is as follows: multiplying the kinetic equation in (1.9) by ε and letting $\varepsilon \rightarrow 0$ suggests that φ converges to the bosonian (2.9). We thus replace φ by its limiting value in the moment equations, namely, in the equations for the mass, momentum and kinetic energy of the normal fluid. We do the same for the equations which govern the mass, momentum and energy of the condensate, and we obtain a closed set of hydrodynamic equations describing the macroscopic evolution of a Bose gas.

We assume that all the macroscopic quantities converge as $\varepsilon \rightarrow 0$ in suitable functional spaces. The only technical point is to compute some integrals, in particular those associated with the momentum and heat flux. We have the identity

$$\int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v \frac{M}{1-M} dv = \rho_n u_n \otimes u_n + p I_N$$

defining the pressure

$$p = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \frac{\beta e^{-\frac{|v|^2}{2T}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2T}}}$$

where

$$\beta = e^{\frac{|u_s - u_n|^2 - V_1}{2T}} \quad \text{and} \quad 0 < \beta < 1.$$

Using obvious symmetry properties, we deduce that

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \frac{M}{1-M} dv = \rho_n |u_n|^2 + Np.$$

In the same way, we have

$$\int_{\mathbb{R}^N} v |v|^2 \frac{M}{1-M} dv = \rho_n |u_n|^2 u_n + (N+2)p u_n.$$

At the end, the hydrodynamic limit of the system (1.3) is given by the following set of equations:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_n + \nabla_x \cdot (\rho_n u_n) = 0 \\ \partial_t \rho_s + \nabla_x \cdot (\rho_s u_s) = 0 \\ \partial_t (\rho_n u_n) + \nabla_x \cdot (\rho_n u_n \otimes u_n + p I_N) = -\alpha \rho_n \nabla_x (2\rho_n + \rho_s) \\ \partial_t (\rho_s u_s) + \nabla_x \cdot (\rho_s u_s \otimes u_s) = -\frac{\alpha}{2} \rho_s \nabla_x (2\rho_n + \rho_s) \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_n |u_n|^2 + \frac{1}{2} \rho_s |u_s|^2 + \frac{N}{2} p + \frac{\alpha}{4} (2\rho_n + \rho_s)^2 \right) \\ \quad + \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_n |u_n|^2 u_n + \frac{1}{2} \rho_s |u_s|^2 u_s + \frac{(N+2)}{2} p u_n \right. \\ \quad \quad \left. + \frac{\alpha}{2} (2\rho_n + \rho_s) (2\rho_n u_n + \rho_s u_s) \right) = 0 \end{array} \right.$$

This is a kind of two-phases Euler system, the second fluid (the superfluid) being pressureless. They do not exchange mass, while they exchange some momentum, contrary to what occurs in the model proposed by Landau [106].

3.3. The isentropic approximation. The system (3.1) is somehow very complex insofar as it is not a system of conservation laws, and defining weak solutions for such a system is complicated. Consequently, we approximate it with a simpler system, which can be written as a system of conservation laws. To do this, we first claim that the kinetic equation in (1.9) is endowed with a natural entropy $S(\varphi)$, which is defined by:

$$S(\varphi) = \frac{1}{\rho_n} \int_{\mathbb{R}^N} ((1 + \varphi) \log(1 + \varphi) - \varphi \log \varphi) dv.$$

We will show that in the case when that entropy is approximatively constant, we can compute the pressure law, thus reducing the number of unknowns, and obtain a closed system of conservation laws.

The entropy satisfies the following equation:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \partial_t(\rho_n S(\varphi)) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} v ((1 + \varphi) \log(1 + \varphi) - \varphi \log \varphi) dv \right) \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} (Q(\varphi) + \rho_s Q_1(\varphi)) \log \left(\frac{\varphi}{1 + \varphi} \right) dv \geq 0 \end{aligned}$$

which is analogous to Boltzmann's H-theorem. When $\varepsilon \rightarrow 0$, the density function φ goes to its equilibrium value $\frac{M}{1-M}$ and the entropy (now called S) becomes

$$(3.3) \quad \rho_n S = - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{M}{1-M} \log M + \log(1-M) \right) dv.$$

Then, it comes

$$\int_{\mathbb{R}^N} v \left(\frac{1}{1-M} \log \frac{1}{1-M} - \frac{M}{1-M} \log \frac{M}{1-M} \right) dv = \rho_n S u_n$$

and S satisfies

$$\partial_t(\rho_n S) + \nabla_x \cdot (\rho_n S u_n) = 0.$$

Moreover, thanks to the mass conservation for the normal fluid (first equation in the system (3.1)), we get

$$(3.4) \quad \partial_t S + u_n \cdot \nabla_x S = 0$$

which is a transport equation. Note that $S \equiv S_0$, where S_0 is a constant, is a trivial solution of (3.4).

REMARK 3.1. In the fast relaxation limit $\varepsilon \rightarrow 0$, the entropy dissipation is expected to concentrate on shock solutions, as occurs for the classical Boltzmann equation. Hence, inequality (3.2) is expected to become an equality in the limit as long as smooth solutions are considered. In other words, (3.4) should be a combination of the other equations of the system.

Using (3.3), we can compute the entropy with respect to ρ_n, p, β and T :

$$S = N \frac{p}{2T\rho_n} - \log \beta - \frac{T^{N/2}}{\rho_n} \int_{\mathbb{R}^N} \log(1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}) dv.$$

From the expressions of the density and pressure for the normal fluid:

$$\rho_n = T^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv, \quad p = \frac{1}{N} T^{N/2+1} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \frac{\beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv,$$

remarking that, thanks to an integration by parts,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \frac{\beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv = -\frac{N}{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \log(1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}) dv,$$

we get

$$S = \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \frac{p}{T\rho_n} - \log \beta.$$

If we write

$$(3.5) \quad \rho_n = T^{N/2} F_0(\beta), \quad p = \frac{1}{N} T^{N/2+1} F_2(\beta),$$

we obtain at the end

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N} \right) \frac{F_2(\beta)}{F_0(\beta)} - \log \beta.$$

It comes out that the entropy depends only on the variable β . If we show that $\beta \mapsto S(\beta)$ is one-to-one, we will be able to say that if S remains constant, so is β ; hence, thanks to (3.5), we will obtain the following pressure law:

$$(3.6) \quad p = \tilde{c}_N \rho_n^{\frac{N+2}{N}}.$$

with

$$\tilde{c}_N = \frac{1}{N} \frac{F_2(\beta_0)}{(F_0(\beta_0))^{1+2/N}} > 0$$

for some constant $\beta_0 \in (0, 1)$.

LEMMA 3.2. *The function $\beta \in (0, 1) \mapsto S(\beta)$ is one-to-one.*

PROOF. We compute the derivative of S with respect to β :

$$S'(\beta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N} \right) \frac{F_2'(\beta)F_0(\beta) - F_2(\beta)F_0'(\beta)}{F_0(\beta)^2} - \frac{1}{\beta}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} S'(\beta) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N} \right) \frac{1}{F_0(\beta)^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{\left(1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}\right)^2} dv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{\left(1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}\right)^2} dv \right) - \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

We want to show that $S'(\beta)$ is negative. To do this, we expand the integrands into power series. We get for the simplest one

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n e^{-(n+1)\frac{|v|^2}{2}} dv = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_{\mathbb{R}^N} e^{-(n+1)\frac{|v|^2}{2}} dv,$$

that is,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 - \beta e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv = \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|v|^2}{2}} dv \right) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{1}{(n+1)^{N/2}}.$$

We compute the other integrals using the same tool, and the entropy derivative becomes

$$\begin{aligned} S'(\beta) &= \beta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 e^{-\frac{|v|^2}{2}} dv \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|v|^2}{2}} dv \right) \frac{1}{F_0(\beta)^2} \times \\ &\quad \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{1}{(n+1)^{N/2}} \right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{1}{(n+1)^{N/2+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{1}{(n+1)^{N/2-1}} \right) - \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

We can calculate the products of the summations:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{1}{(n+1)^{N/2}} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \beta^n$$

with

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{N/2}(n-k+1)^{N/2}},$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{1}{(n+1)^{N/2+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{1}{(n+1)^{N/2-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n \beta^n$$

with

$$\tilde{c}_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{N/2+1}(n-k+1)^{N/2-1}}.$$

A simple calculation shows that

$$\tilde{c}_n \geq c_n.$$

But since

$$S'(\beta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 e^{-\frac{|v|^2}{2}} dv \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|v|^2}{2}} dv \frac{\beta}{F_0(\beta)^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - \tilde{c}_n) \beta^n \right) - \frac{1}{\beta},$$

it comes

$$S'(\beta) < 0,$$

and thus $\beta \mapsto S(\beta)$ is one to one. \square

From now on, we will assume that the dimension of the space is $N = 3$. Moreover, we assume that the gas is translation invariant along the y - and z -axis, and that the y - and z -components of the velocities u_n and u_s are zero. Under these conditions, the system under consideration becomes one-dimensional

$$(3.7) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_n + \partial_x(\rho_n u_n) = 0 \\ \partial_t \rho_s + \partial_x(\rho_s u_s) = 0 \\ \partial_t(\rho_n u_n) + \partial_x(\rho_n u_n^2 + \tilde{c} \rho_n^{5/3}) = -\alpha \rho_n \partial_x(2\rho_n + \rho_s) \\ \partial_t(\rho_s u_s) + \partial_x(\rho_s u_s^2) = -\frac{\alpha}{2} \rho_s \partial_x(2\rho_n + \rho_s) \end{cases}$$

where $\tilde{c} = \tilde{c}_3$.

If $(\rho_n, \rho_s, u_n, u_s)$ is a regular solution of (3.7), then $(\rho_n, \rho_s, u_n, u_s, p \equiv \tilde{c} \rho_n^{5/3})$ will be a regular solution of (3.1). However, this is not true any more when dealing with weak solutions. The reason is that the entropy does not remain constant along shock waves as mentioned in remark 3.1. Hence, system (3.7) is actually an approximation of system (3.1), and not just a particular case of it.

4. Hyperbolicity and regular solutions

In view of giving some mathematical justifications to the derivation of the hydrodynamic model (3.1) and of its isentropic approximation (3.7), it is necessary to have a good understanding of its structure and a good mathematical theory of existence and stability. We are therefore interested in this section in finding smooth solutions to (3.7).

In Section 5, we will deal with weak solutions of this system. As it will be more convenient to work with a system of conservation laws, we introduce right now the following

system of equations:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_n + \partial_x(\rho_n u_n) = 0 \\ \partial_t \rho_s + \partial_x(\rho_s u_s) = 0 \\ \partial_t(\rho_n u_n + \rho_s u_s) + \partial_x(\rho_n u_n^2 + \rho_s u_s^2 + \tilde{c} \rho_n^{5/3} + \frac{\alpha}{4}(2\rho_n + \rho_s)^2) = 0 \\ \partial_t(\frac{1}{2}\rho_n u_n^2 + \frac{1}{2}\rho_s u_s^2 + \frac{3}{2}\tilde{c}\rho_n^{5/3} + \alpha(\rho_n + \frac{1}{2}\rho_s)^2) \\ \quad + \partial_x(\frac{1}{2}\rho_n u_n^3 + \frac{1}{2}\rho_s u_s^3 + \frac{5}{2}\tilde{c}\rho_n^{5/3} u_n + \alpha(\rho_n + \frac{1}{2}\rho_s)(2\rho_n u_n + \rho_s u_s)) = 0 \end{cases}$$

Actually, the invertibility of the function

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ (\rho_n, \rho_s, u_n, u_s) &\mapsto (\rho_n, \rho_s, \rho_n u_n + \rho_s u_s, \frac{1}{2}\rho_n u_n^2 + \frac{1}{2}\rho_s u_s^2 \\ &\quad + \frac{3}{2}\tilde{c}\rho_n^{5/3} + \alpha(\rho_n + \frac{1}{2}\rho_s)^2) \end{aligned}$$

(whose jacobian is $j_F = \rho_n \rho_s (u_s - u_n)$) on the sets

$$\mathcal{O}_+ = \left\{ U = \begin{pmatrix} \rho_n \\ \rho_s \\ u_n \\ u_s \end{pmatrix} \quad \text{s.t.} \quad \rho_n, \rho_s > 0 \quad \text{and} \quad u_n > u_s \right\}$$

and

$$\mathcal{O}_- = \left\{ U = \begin{pmatrix} \rho_n \\ \rho_s \\ u_n \\ u_s \end{pmatrix} \quad \text{s.t.} \quad \rho_n, \rho_s > 0 \quad \text{and} \quad u_n < u_s \right\}$$

is enough to say that on these sets, the smooth solutions to (3.7) are also solutions of (4.1), and conversely. In addition, they are also solutions of

$$(4.2) \quad \partial_t U + A \partial_x U = 0$$

where

$$(4.3) \quad A = \begin{pmatrix} u_n & 0 & \rho_n & 0 \\ 0 & u_s & 0 & \rho_s \\ c\rho_n^{-\frac{1}{3}} + 2\alpha & \alpha & u_n & 0 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2} & 0 & u_s \end{pmatrix}$$

(with $c = \frac{5}{3}\tilde{c} > 0$), and any of this problem is (strictly) hyperbolic provided the others are.

4.1. Hyperbolicity. For a system of the form (4.2), the right property to study is hyperbolicity, that is, the possibility to diagonalize the matrix A given by (4.3). Indeed, this property allows to claim the existence and uniqueness of smooth solutions to (4.2) (see [101]). It will also be useful when dealing with weak solutions.

Since system (3.7) is hyperbolic if and only if system (4.1) or system (4.2) is, it is enough to investigate the eigenvalues of the matrix A given by (4.3) to conclude on the hyperbolicity of any of these systems. The characteristic polynomial of A writes

$$P_A(\lambda) = \left((\lambda - u_n)^2 - c\rho_n^{\frac{2}{3}} - 2\alpha\rho_n \right) \left((\lambda - u_s)^2 - \frac{\alpha}{2}\rho_s \right) - \alpha^2 \rho_n \rho_s.$$

Even if it is of degree 4 and there are explicit formulae for the roots of polynomials of degree 4, they are very complicated and we are not able to use them here. Our analysis

relies only on basic analytical tools to find cases where the polynomial has 4 different roots. The main result of this section is the following:

THEOREM 4.1. *Systems (3.7), (4.1) and (4.2) are strictly hyperbolic if $\rho_n, \rho_s > 0$ and if one of these conditions holds:*

$$(4.4) \quad (u_n - u_s)^2 < c\rho_n^{2/3}$$

$$(4.5) \quad (u_n - u_s)^2 < \frac{c\frac{\alpha}{2}\rho_s\rho_n^{2/3}}{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n}$$

$$(4.6) \quad \rho_n \leq \left(\frac{c}{2\alpha}\right)^3.$$

Obviously, the condition (4.6) is the most interesting, because it can be propagated by the solution, whereas the other two may fail to hold after a small time.

PROOF. We work with $U = (\rho_n, \rho_s, u_n, u_s)$ and α fixed, with $\rho_n, \rho_s, \alpha > 0$. We first notice that

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} P_A(\lambda) = +\infty.$$

On the other hand, if we let

$$\begin{cases} \lambda_1^* = u_s - \sqrt{\frac{\alpha}{2}\rho_s} \\ \lambda_2^* = u_s + \sqrt{\frac{\alpha}{2}\rho_s} \end{cases},$$

we can remark that

$$\forall i = 1, 2 \quad P(\lambda_i^*) = -\alpha^2\rho_n\rho_s < 0.$$

But $u_s \in (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ satisfies

$$P_A(u_s) = -\frac{\alpha}{2}\rho_s \left((u_n - u_s)^2 - c\rho_n^{2/3} \right).$$

Hence, if we assume that (4.4) holds, we have

$$P_A(u_s) > 0.$$

Since P_A is a continuous function of λ , we claim that it has four distinct roots $(\lambda_i)_{i=1..4}$ depending on U and α and satisfying (see Figure 2)

$$\lambda_1 < u_s - \sqrt{\frac{\alpha}{2}\rho_s} < \lambda_2 < u_s < \lambda_3 < u_s + \sqrt{\frac{\alpha}{2}\rho_s} < \lambda_4.$$

In the same way, we let

$$\begin{cases} \lambda_3^* = u_n - \sqrt{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n} \\ \lambda_4^* = u_n + \sqrt{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n} \end{cases};$$

then

$$P_A(\lambda_3^*) = P_A(\lambda_4^*) = -\alpha^2\rho_n\rho_s < 0$$

and

$$P_A(u_n) = c\frac{\alpha}{2}\rho_s\rho_n^{2/3} - (u_n - u_s)^2(c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n).$$

Thus, under the condition (4.5), P_A has four distinct roots $(\lambda_i)_{i=1..4}$ which satisfy

$$\lambda_1 < u_n - \sqrt{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n} < \lambda_2 < u_n < \lambda_3 < u_n + \sqrt{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n} < \lambda_4.$$

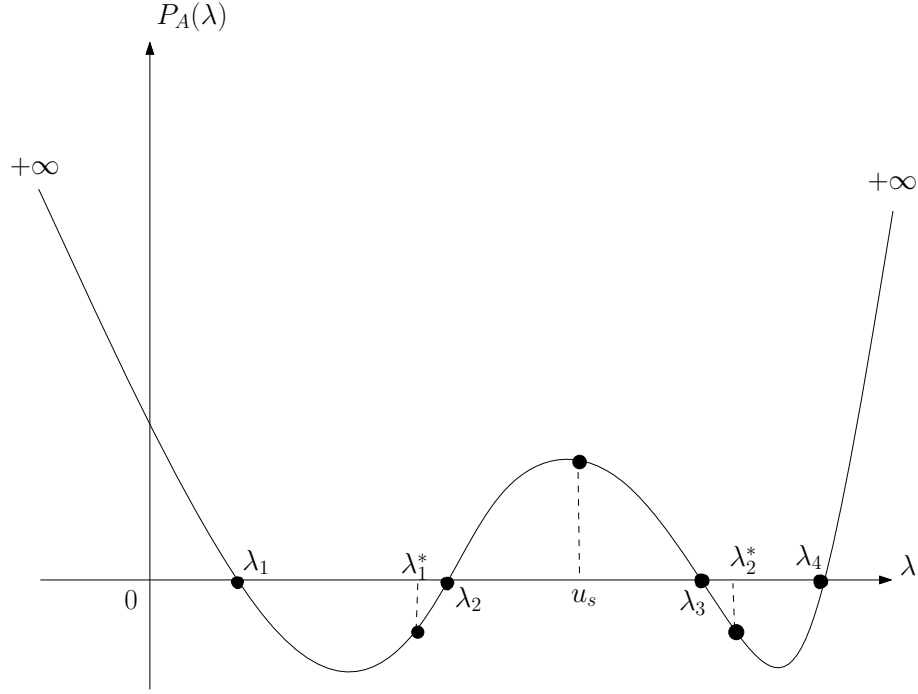


FIGURE 2. In the case when $P_A(u_s) > 0$, the polynomial P_A has four distinct roots.

We have then proved that under the condition (4.4) or (4.5), the systems (3.7), (4.1) and (4.2) are strictly hyperbolic.

We now assume that neither (4.4) nor (4.5) are verified, that is,

$$(4.7) \quad (u_n - u_s)^2 \geq c\rho_n^{2/3}$$

and

$$(4.8) \quad (u_n - u_s)^2 \geq \frac{c\frac{\alpha}{2}\rho_s\rho_n^{2/3}}{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n}.$$

Thus, $u_n \neq u_s$, $P_A(u_n) \leq 0$ and $P_A(u_s) \leq 0$. Let us study the sign of $P_A\left(\frac{u_n+u_s}{2}\right)$:

$$P_A\left(\frac{u_n+u_s}{2}\right) = \frac{1}{16}(u_n - u_s)^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\rho_s + c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n\right)(u_n - u_s)^2 + c\frac{\alpha}{2}\rho_s\rho_n^{2/3}.$$

Let $Q(X)$ be the polynomial defined by

$$Q(X) = \frac{1}{16}X^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\rho_s + c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n\right)X + c\frac{\alpha}{2}\rho_s\rho_n^{2/3}.$$

Its discriminant is

$$\delta = \frac{1}{16}\left(\frac{\alpha}{2}\rho_s - c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n\right)^2 + c\frac{\alpha}{2}\rho_n^{5/3} > 0,$$

and its two roots write

$$\beta_- = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\rho_s + c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n\right) - \sqrt{\delta}\right)$$

$$\beta_+ = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\rho_s + c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n\right) + \sqrt{\delta}\right).$$

Hence,

$$P\left(\frac{u_n + u_s}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow (u_n - u_s)^2 > \beta_+ \quad \text{or} \quad (u_n - u_s)^2 < \beta_-.$$

Let us assume that (4.6) holds, or equivalently, that

$$2\alpha\rho_n \leq c\rho_n^{2/3}.$$

Then,

$$\beta_+ < \frac{1}{64} \left(\frac{\alpha}{2} \rho_s + 3c\rho_n^{2/3} \right).$$

But, thanks to (4.7) and (4.8), we know that

$$(u_n - u_s)^2 > c\rho_n^{2/3}$$

and

$$(u_n - u_s)^2 > \frac{\alpha}{4} \rho_s,$$

from which we deduce that

$$(u_n - u_s)^2 > \beta_+.$$

Moreover, we notice that $P'_A(u_s)P'_A(u_n) \neq 0$. We can conclude that the systems (3.7), (4.1) and (4.2) are strictly hyperbolic under the condition (4.4), or (4.5), or under the only condition (4.6). In this case, the eigenvalues of A satisfy

$$\lambda_1 < u_n \leq \lambda_2 < \frac{u_n + u_s}{2} < \lambda_3 \leq u_s < \lambda_4$$

if $u_n < u_s$, or the same thing inverting u_n and u_s if $u_s < u_n$. \square

4.2. Entropy. We are now interested in finding a convex entropy to system (3.7), that is, a convex function $E(U)$ such that there exists a function $G(U)$ which satisfies

$$\partial_t E(U) + \partial_x G(U) = 0.$$

Our research is motivated by the fact that a strictly hyperbolic system having a strictly convex entropy admits regular solutions (see [101] for example).

The entropy we are looking for is given by the physical energy:

$$E(U) = \frac{1}{2}\rho_n u_n^2 + \frac{1}{2}\rho_s u_s^2 + \frac{9}{10}c\rho_n^{5/3} + \alpha(\rho_n + \frac{1}{2}\rho_s)^2.$$

We can find the equation satisfied by E just from (4.2); it writes

$$\partial_t E(U) + \partial_x G(U) = 0$$

with

$$G(U) = \frac{1}{2}\rho_n u_n^3 + \frac{1}{2}\rho_s u_s^3 + \frac{3}{2}c\rho_n^{5/3}u_n + \alpha(\rho_n + \frac{1}{2}\rho_s)(2\rho_n u_n + \rho_s u_s).$$

Let us now study its convexity. Its Hessian matrix is given by

$$\nabla_{U,U}^2 E(U) = \begin{pmatrix} c\rho_n^{-1/3} + 2\alpha & \alpha & u_n & 0 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2} & 0 & u_s \\ u_n & 0 & \rho_n & 0 \\ 0 & u_s & 0 & \rho_s \end{pmatrix}.$$

If we denote $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, where T is the transposition operator, then

$$\begin{aligned} X^T (\nabla_{U,U}^2 E(U)) X = & \rho_s \left(x_4 + \frac{u_s}{\rho_s} x_2 \right)^2 + \rho_n \left(x_3 + \frac{u_n}{\rho_n} x_1 \right)^2 \\ & + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{u_s^2}{\rho_s} \right) \left(x_2 + \frac{2\alpha\rho_s}{\alpha\rho_s - 2u_s^2} x_1 \right)^2 \\ & + \left(c\rho_n^{-\frac{1}{3}} + 2\alpha - \frac{u_n^2}{\rho_n} - \frac{2\alpha^2\rho_s}{\alpha\rho_s - 2u_s^2} \right) x_1^2. \end{aligned}$$

Hence, E will be strictly convex uniformly on every compact subset of \mathcal{O} under the conditions

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \frac{u_s^2}{\rho_s} > 0 \\ c\rho_n^{-\frac{1}{3}} + 2\alpha - \frac{u_n^2}{\rho_n} - \frac{2\alpha^2\rho_s}{\alpha\rho_s - 2u_s^2} > 0 \end{cases}$$

which are equivalent to

$$(4.9) \quad \begin{cases} u_s^2 < \frac{\alpha}{2}\rho_s \\ P_A(0) > 0 \end{cases}.$$

We can now write the following theorem of existence of solutions:

THEOREM 4.2. *Let $\alpha > 0$, and*

$$\mathcal{A} = \left\{ (\rho_n, \rho_s, u_n, u_s)^T, \quad \rho_n, \rho_s > 0, \quad (4.4), (4.5) \text{ or } (4.6) \text{ holds,} \right. \\ \left. u_s^2 < \frac{\alpha}{2}\rho_s, \quad P_A(0) > 0, \quad u_n \neq u_s \right\}.$$

Let $U_0 \in C^1(\mathbb{R}; \Omega)$ where Ω is a compact subset of \mathcal{A} , such that $\partial_x U_0 \in H^l$ for some $l > \frac{1}{2}$. Then there exists T_∞ , such that $0 < T_\infty \leq \infty$, and a unique function $U \in C^1([0, T_\infty) \times \mathbb{R}; \mathcal{A})$, which is a classical solution of the problem (4.2) on $[0, T_\infty)$ with the initial condition

$$U(0, x) = U_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

and of the problem (4.1) with same initial condition. Moreover,

$$\partial_x U(\cdot, t) \in C^0([0, T_\infty); H^l).$$

5. Weak solutions and the Riemann problem

In Section 4, we have proved the existence of smooth solutions to the problem (3.7), or equivalently to (4.1) or (4.2). However, these solutions are not satisfactory. First, they exist only for small times, while we would like to have global solutions. Moreover, physical experiments often show non regular behaviours to physical problems. The solutions of hyperbolic systems having a physical meaning should therefore be authorized to be discontinuous. It is then natural to define a weaker notion of solutions.

In this section, we will recall the usual definition of weak solutions to a system of conservation laws, and state an existence and uniqueness result for the system (4.1). We will then give some details on the qualitative behaviour of such a solution by studying the characteristic fields and the shock curves.

5.1. Existence of weak solutions. When dealing with weak solutions, systems (3.7), (4.1) and (4.2) are no more equivalent. Indeed, the usual definition of weak solutions

for an hyperbolic system is valid only for systems of conservation laws. We consequently restrict our analysis to the system (4.1), which we rewrite here:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho_n + \partial_x(\rho_n u_n) = 0 \\ \partial_t \rho_s + \partial_x(\rho_s u_s) = 0 \\ \partial_t(\rho_n u_n + \rho_s u_s) + \partial_x(\rho_n u_n^2 + \rho_s u_s^2 + \tilde{c} \rho_n^{5/3} + \frac{\alpha}{4}(2\rho_n + \rho_s)^2) = 0 \\ \partial_t(\frac{1}{2}\rho_n u_n^2 + \frac{1}{2}\rho_s u_s^2 + \frac{3}{2}\tilde{c}\rho_n^{5/3} + \alpha(\rho_n + \frac{1}{2}\rho_s)^2) \\ \quad + \partial_x(\frac{1}{2}\rho_n u_n^3 + \frac{1}{2}\rho_s u_s^3 + \frac{5}{2}\tilde{c}\rho_n^{5/3} u_n + \alpha(\rho_n + \frac{1}{2}\rho_s)(2\rho_n u_n + \rho_s u_s)) = 0 \end{cases}$$

With obvious notations, we can write it

$$\partial_t F(U) + \partial_x H(U) = 0.$$

We define weak solutions in the usual way:

DEFINITION 5.1. Let $U_0 = (\rho_n^0, \rho_s^0, u_n^0, u_s^0) \in (L^\infty(\mathbb{R}))^4$. We say that the bounded vector field $U = (\rho_n, \rho_s, u_n, u_s)$ is a weak solution of system (5.1) supplemented with the initial condition U_0 if for all $\Phi \in (C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))^4$ compactly supported we have

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(F(U(t, x)) \cdot \partial_t \Phi(t, x) + H(U(t, x)) \cdot \partial_x \Phi(t, x) \right) dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}} F(U_0(x)) \Phi(0, x) dx = 0. \end{aligned}$$

Moreover, we say that U is a solution of the Riemann problem if the initial condition is of the form

$$U_0(x) = \begin{cases} U_0^- & \text{if } x < 0 \\ U_0^+ & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

where U_0^\pm are two constant states in \mathbb{R}^4 .

We now state the existence and uniqueness result:

THEOREM 5.2. Let $\bar{U} = (\bar{\rho}_n, \bar{\rho}_s, \bar{u}_n, \bar{u}_s)$ be a constant state such that $\bar{\rho}_n, \bar{\rho}_s > 0$ and $\bar{u}_n \neq \bar{u}_s$. Let $U^0 = (\rho_n^0, \rho_s^0, u_n^0, u_s^0)$ be a bounded function of x having small total variation and such that $\|U^0 - \bar{U}\|_{L^\infty}$ is sufficiently small; in particular, there exists a constant $r > 0$ such that $\rho_n^0 > r$ and $\rho_s^0 > r$, and such that $u_n^0 - u_s^0 > r$ almost everywhere, or $u_s^0 - u_n^0 > r$ a.e.. Then the system (5.1) endowed with the initial condition U^0 admits a unique weak global entropic (in the sense of Liu) solution.

Weak solutions of hyperbolic equations are not unique in general. The entropy criterion of Liu is a way of selecting physical solutions, and weak solutions are unique in that class. See [98] for details and more general results on uniqueness of solutions to hyperbolic systems. General existence theorems for hyperbolic systems can be found in [99] or [104]. Let us just mention that this theorem holds true because of the hyperbolicity condition (4.6) which is propagated by the solutions.

5.2. Nature of the characteristic fields. Let λ be an eigenvalue of A , that is, a solution of

$$(5.2) \quad \left((\lambda - u_n)^2 - c \rho_n^{2/3} - 2\alpha \rho_n \right) \left((\lambda - u_s)^2 - \frac{\alpha}{2} \rho_s \right) - \alpha^2 \rho_n \rho_s = 0.$$

An associated eigenvector is

$$X = \begin{pmatrix} (\lambda - u_s)^2 - \frac{\alpha}{2}\rho_s \\ \alpha\rho_s \\ \frac{1}{\rho_n}(\lambda - u_n)((\lambda - u_s)^2 - \frac{\alpha}{2}\rho_s) \\ \alpha(\lambda - u_s) \end{pmatrix}.$$

We can compute the derivatives of λ directly from (5.2) and then we get, letting

$$K = -\frac{1}{2}P'_A(\lambda) \neq 0,$$

$$\nabla_U \lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2K}(\frac{2}{3}c\rho_n^{-1/3} + 2\alpha)(\frac{\alpha}{2}\rho_s - (\lambda - u_s)^2) \\ \frac{1}{4K}(c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n - (\lambda - u_n)^2) \\ \frac{1}{K}(\lambda - u_n)(\frac{\alpha}{2}\rho_s - (\lambda - u_s)^2) \\ \frac{1}{K}(\lambda - u_s)(c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n - (\lambda - u_n)^2) \end{pmatrix}.$$

Thus, we get for the associated characteristic field

$$\begin{aligned} \nabla_U \lambda \cdot X &= \frac{1}{K} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}c\rho_n^{-1/3} + 2\alpha \right) \left(\frac{\alpha}{2}\rho_s - (\lambda - u_s)^2 \right)^2 \right. \\ &\quad + \frac{\alpha}{4}\rho_s \left(c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n - (\lambda - u_n)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_n}(\lambda - u_n)^2 \left((\lambda - u_s)^2 - \frac{\alpha}{2}\rho_s \right)^2 \\ &\quad \left. + \alpha(\lambda - u_s)^2 \left(c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n - (\lambda - u_n)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

It is easy to see that if

$$(5.3) \quad (\lambda - u_n)^2 - c\rho_n^{2/3} - 2\alpha\rho_n > 0,$$

holds, then the field is genuinely nonlinear. Since

$$P_A(u_n - \sqrt{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n}) = P_A(u_n + \sqrt{c\rho_n^{2/3} + 2\alpha\rho_n}) = -\alpha^2\rho_n\rho_s < 0,$$

condition (5.3) always holds for the fields 1 and 4 associated with the extremal eigenvalues. Hence these fields are genuinely nonlinear, and they will induce the formation of shock or rarefaction waves. Nevertheless, we have not been able to establish anything for the fields 2 and 3.

5.3. Shock curves. In this part, we are interested in the shock solutions of the Riemann problem for system (4.1). The solutions we are looking for are of the form

$$U(t, x) = \begin{cases} U^- & \text{if } x < \sigma t \\ U^+ & \text{if } x > \sigma t \end{cases}$$

with $U^\pm = (\rho_n^\pm, \rho_s^\pm, u_n^\pm, u_s^\pm)$ the left and right constant states, and $\sigma \in \mathbb{R}$ the shock speed. They must satisfy the Rankine-Hugoniot equations, which write for our system

$$(5.4) \quad \sigma \begin{bmatrix} \rho_n \\ \rho_s \\ \rho_n u_n + \rho_s u_s \\ \frac{1}{2} \rho_n u_n^2 + \frac{1}{2} \rho_s u_s^2 + \frac{3}{2} \tilde{c} \rho_n^{5/3} + \alpha (\rho_n + \frac{1}{2} \rho_s)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_n u_n \\ \rho_s u_s \\ \rho_n u_n^2 + \rho_s u_s^2 + \tilde{c} \rho_n^{5/3} + \frac{\alpha}{4} (2\rho_n + \rho_s)^2 \\ \frac{1}{2} \rho_n u_n^3 + \frac{1}{2} \rho_s u_s^3 + \frac{5}{2} \tilde{c} \rho_n^{5/3} u_n + \alpha (\rho_n + \frac{1}{2} \rho_s) (2\rho_n u_n + \rho_s u_s) \end{bmatrix}.$$

Here, the bracket means

$$[X] = X^+ - X^-.$$

Let

$$w_n = u_n - \sigma$$

and

$$w_s = u_s - \sigma.$$

Then, the first two equations of (5.4) write simply

$$(5.5) \quad \begin{cases} [\rho_n w_n] = 0 \\ [\rho_s w_s] = 0. \end{cases}$$

Hence, if we know the left state $U^- = (\rho_n^-, \rho_s^-, u_n^-, u_s^-)$, the shock speed σ and the right densities ρ_n^+, ρ_s^+ , it is easy to compute the right velocities u_n^+ and u_s^+ .

The third equation in (5.4) writes

$$[\rho_n u_n^2 - \rho_n u_n \sigma + \rho_s u_s^2 - \rho_s u_s \sigma + \tilde{c} \rho_n^{5/3} + \frac{\alpha}{4} (2\rho_n + \rho_s)^2] = 0.$$

Using (5.5) and letting

$$M_n = \rho_n^- w_n^- = \rho_n^+ w_n^+, \quad M_s = \rho_s^- w_s^- = \rho_s^+ w_s^+,$$

and

$$\tau_n = \frac{1}{\rho_n}, \quad \tau_s = \frac{1}{\rho_s},$$

it becomes

$$(5.6) \quad M_n^2 [\tau_n] + M_s^2 [\tau_s] + \tilde{c} [\rho_n^{5/3}] + \frac{\alpha}{4} [(2\rho_n + \rho_s)^2] = 0.$$

In the same way, the fourth Rankine-Hugoniot relation (5.4) becomes, using (5.6):

$$(5.7) \quad M_n^3 [\tau_n^2] + M_s^3 [\tau_s^2] + 5M_n [\rho_n^{2/3}] + \alpha (2M_n + M_s) [2\rho_n + \rho_s] = 0.$$

Let

$$J(\rho_n, \rho_s, u_n, u_s, \sigma) = \begin{pmatrix} \rho_n (u_n - \sigma) \\ \rho_s (u_s - \sigma) \\ \rho_n (u_n - \sigma)^2 + \rho_s (u_s - \sigma)^2 + \tilde{c} \rho_n^{5/3} + \frac{\alpha}{4} (2\rho_n + \rho_s)^2 \\ \rho_n (u_n - \sigma)^3 + \rho_s (u_s - \sigma)^3 + \frac{5}{2} \rho_n^{5/3} (u_n - \sigma) \\ + \frac{\alpha}{2} (2\rho_n + \rho_s) (2\rho_n (u_n - \sigma) + \rho_s (u_s - \sigma)) \end{pmatrix}.$$

Equations (5.5), (5.6), (5.7) imply that the Rankine-Hugoniot relations are satisfied if and only if

$$J(\rho_n^+, \rho_s^+, u_n^+, u_s^+, \sigma) = J(\rho_n^-, \rho_s^-, u_n^-, u_s^-, \sigma).$$

Thanks to the implicit functions theorem, for any left state $U^- = (\rho_n^-, \rho_s^-, u_n^-, u_s^-)$ and shock velocity σ_0 such that $D_{(\rho_n, \rho_s, u_n, u_s)} J(\rho_n^-, \rho_s^-, u_n^-, u_s^-, \sigma_0)$ is invertible (take for example $\rho_n^- = \rho_s^- = u_n^- = 1, u_s^- = \sigma_0 = 0$), there exist some right states $U^+(\sigma)$ close to U^- for σ in a neighbourhood of σ_0 such that

$$J(U^+(\sigma), \sigma) = J(U^-, \sigma),$$

that is, system (5.1) admits some shock solutions, which can be parametrized by the velocity σ . Note that the entropy criterion will select just half of each shock curve.

Such shock solutions can be observed with numerical simulations. Examples of numerical results using a Lax-Friedrichs scheme (see [105] for example) are given by Figure 3 which represents the quantity ρ_n . The figure is made of three graphics which show the results of the numerical scheme using a spatial grid made of 1000, 5000 and 10000 points. The time step is taken so that

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 5.$$

As expected, the solutions show 5 different states separated by 4 waves. This contrasts with the solutions of the Euler equations which cannot exhibit more than 3 waves in general, 2 waves in the isentropic case. The presence of the superfluid part induces therefore some changes even in the behaviour of the normal part of the fluid compared to a usual (non quantum) fluid.

6. Conclusions

We have derived a two-fluids model for a quantum gas from a system consisting of a Boltzmann-like and a Gross-Pitaevskii equations. Our derivation is formal, and it seems to be very difficult to obtain a rigorous proof of convergence, at least until there is a good existence framework for the quantum Boltzmann-Bose equation. However, we have shown that our hydrodynamic model is well-posed, which is the first step in a good understanding of the limiting process.

The limit system (4.1) that we propose does not seem to exist in the literature. It remains to see whether it provides a good description of the evolution of a superfluid, before any further mathematical exploration of its properties.

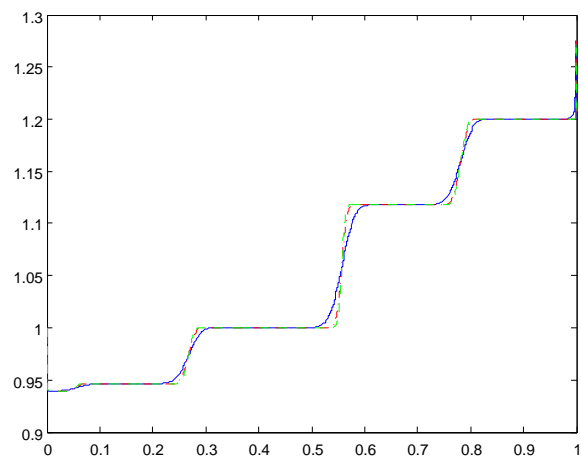


FIGURE 3. The mass of the normal fluid ρ_n .

PARTIE B. L'ÉQUATION DE BOLTZMANN
POUR LES FERMIONS : EXISTENCE DE
SOLUTIONS ET LIMITE HYDRODYNAMIQUE

Existence and conservation laws for the Boltzmann-Fermi-Dirac equation in a general domain

Article publié dans *Comptes Rendus Mathématiques* 348 (13-14), 2010, pp 763-767

Sommaire

Abstract	113
1. Introduction	113
2. The IBV problem	114
3. Conservation laws	116

Abstract

We prove an existence theorem for the Boltzmann-Fermi-Dirac equation for integrable collision cross-sections in possibly bounded domains with specular reflection at the boundaries, using the characteristic lines of the free transport. We then obtain that the solution satisfies the local conservations of mass, momentum and kinetic energy thanks to a dispersion technique.

1. Introduction

In this note, we are concerned with the Boltzmann equation for a gas of fermions. It has been studied for example by J. Dolbeault [113], P.-L. Lions [116] and X. Lu [117]. Our goal is double: first, proving that the existence result and the properties of the solution proved in [113] can be extended to more general domains than \mathbb{R}^3 , if we supplement the equation with a specular reflection condition at the boundaries; and then, establishing the local conservation laws. These two properties are needed in the study of hydrodynamic limits, especially in the incompressible inviscid regime, which is studied in a forthcoming paper [111].

Let us detail the problem. Let Ω be a subset of \mathbb{R}^3 having bounded curvature, and regular enough such that the function $x \mapsto n(x)$, where $n(x)$ is the outer unit normal at point x of $\partial\Omega$, can be extended into a continuously differentiable function on \mathbb{R}^3 .

The Boltzmann equation for a gas of fermions reads

$$(1.1) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f)$$

where $f(t, x, v)$ is the density of particles which at time $t \in \mathbb{R}_+$ are at point $x \in \Omega$ with velocity $v \in \mathbb{R}^3$. It is supplemented with an initial condition

$$(1.2) \quad f(0, x, v) = f_0(x, v) \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$$

and a boundary condition

$$(1.3) \quad f(t, x, v) = f(t, x, R_x(v)) \quad \forall (x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \text{ such that } n(x) \cdot v < 0$$

where $R_x(v)$ is the specular reflection law

$$R_x(v) = v - 2(v \cdot n(x))n(x).$$

The collision integral $Q(f)$ is given by

$$(1.4) \quad Q(f) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} b(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 - f)(1 - f_*) - f f_* (1 - f')(1 - f'_*)) dv_* d\omega$$

with the usual notations

$$f_* = f(t, x, v_*), \quad f' = f(t, x, v'), \quad f'_* = f(t, x, v'_*)$$

and where the precollisional velocities (v', v'_*) are deduced from the postcollisional ones by

$$v' = v - (v - v_*) \cdot \omega \omega, \quad v'_* = v_* + (v - v_*) \cdot \omega \omega.$$

The collision integral differs from the classical one by the terms $(1 - f)$, which take into account the Pauli exclusion principle.

The function $b(w, \omega)$, known as the collision cross-section, is measurable, a.e. positive, and is assumed to be in L^1 as in [113]. For the study of the conservations, we will moreover assume that

$$(1.5) \quad b(w, \omega) = q(|w|, |w \cdot \omega|),$$

which is physically relevant, and endows (formally) $Q(f)$ with symmetry properties:

$$(1.6) \quad \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2) Q(f) dv = 0$$

for all f such that the integrals make sense. Then, integrating equation (1.1) against $1, v, |v|^2$, we obtain that the solution f satisfies formally the following conservation laws:

$$(1.7) \quad \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} v \\ v \otimes v \\ v|v|^2 \end{pmatrix} f dv = 0$$

This note aims at showing first an existence theorem for the initial-boundary value (IBV) problem (1.1)-(1.3), and then that the local conservation laws (1.7) are satisfied rigorously by the solution of the problem.

2. The IBV problem

Following [115] and [114], we define the characteristic lines of the free transport equation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

in the following way: for $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$, the characteristic line is given by $x + vt$, at least if t is small. Then, let $t_0(x, v)$ be the first value of t for which $x + t_0 v \in \partial\Omega$. Then, for $t > t_0$, the trajectory continues as $x + t_0 v + (t - t_0)R_{x+t_0 v}(v)$. If it intersects one more time the boundary of Ω at time $t_1(x, v)$, then the trajectory continues with velocity $R_{x+t_0 v+(t_1-t_0)R_{x+t_0 v}(v)}(R_{x+t_0 v}(v))$, and so on. We then define a family of maps $\{\Psi^t\}$ called the trajectory maps, $\Psi^t(x_0, v_0)$ being the point in phase space at which we arrive at time t following the trajectory line issuing from (x_0, v_0) . For $t = t_0, t_1, \dots$, we define Ψ^t to be continuous (in time) from the right. Since Ω has bounded curvature, the trajectory intersects the boundary finitely many times in finite times. Moreover, the energy is conserved at

each reflection, Ψ^t maps $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3$ onto itself for every t , and the jacobian of Ψ^t is always unity [115].

With this construction, we now define

$$f^\sharp(t, x, v) = f(t, \Psi^t(x, v)),$$

that is, we conjugate f with the free transport semigroup. This notation allows to reformulate the boundary condition in a simpler way. Indeed, notice that if $\Psi^{t-0}(x_0, v_0) = (x, v)$, then $\Psi^t(x_0, v_0) = \Psi^{t+0}(x_0, v_0) = (x, R(v))$, so that the boundary condition can be written

$$(2.1) \quad f^\sharp(t-0, x_0, v_0) = f^\sharp(t+0, x_0, v_0),$$

that is, $t \mapsto f^\sharp(t, x, v)$ is continuous.

The existence result for the IBV problem (1.1)-(1.2)-(2.1) is a consequence of the following lemma:

LEMMA 2.1. *Let $f, h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$. Then f is a solution of*

$$(2.2) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = h \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$$

with boundary condition (2.1) if and only if for almost all $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$, f^\sharp is absolutely continuous with respect to t , $h^\sharp(t, x, v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ and

$$f^\sharp(t, x, v) = f_0^\sharp(t, x, v) + \int_0^t h^\sharp(s, x, v) ds.$$

PROOF. It is very similar to what is done in [112, 114]. It consists un multiplying (2.2) by $\chi(\Psi^t(x, v))\phi(t)$ and integrating, with $\chi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ and $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Using then the change of variables $(X, V) = \Psi^{-t}(x, v)$ leads to

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \chi(x, v) \left(\int_{\mathbb{R}_+} [f^\sharp \phi'(t) + h^\sharp \phi(t)] dt \right) dx dv = 0$$

and then to the announced result, since this is true for every $\chi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ and $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. \square

Equipped with this lemma, it is now possible to apply all the strategy developed in [113], and we obtain the following two theorems:

THEOREM 2.2. *Let Ω be either \mathbb{R}^3 or a regular subset of \mathbb{R}^3 . Let the collision cross-section be such that*

$$(2.3) \quad 0 \leq b \in L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2),$$

and let

$$(2.4) \quad f_0 \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3), \quad 0 \leq f_0 \leq 1.$$

Then, the problem (1.1)-(1.2)-(2.1) has a unique solution f satisfying

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3), \quad 0 \leq f \leq 1 \text{ a.e..}$$

Moreover, f is absolutely continuous with respect to t .

SKETCH OF PROOF. The main idea is to show that the function

$$T : f \mapsto f_0(\Psi^{-t}(x, v)) + \int_0^t Q(\bar{f})(s, \Psi^{s-t}(x, v)) ds$$

has a fixed point, with

$$\bar{f} = \begin{cases} 0 & \text{if } f \leq 0 \\ f & \text{if } 0 \leq f \leq 1 \\ 1 & \text{if } f \geq 1 \end{cases}$$

This is achieved by showing that T is contractive in $L^\infty([0, \theta] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ if θ is small enough. Then, since

$$-B \max(f, 0) \leq -B\bar{f} \leq Q(\bar{f}) \leq B(1 - \bar{f}) \leq B(1 - \min(1, f))$$

where $B = \|b\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)}$, it comes

$$-B \max(f^\sharp, 0) \leq \partial_t f^\sharp \leq B(1 - \min(1, f^\sharp)),$$

which ensures that $f = \bar{f}$. It is then possible to reiterate the process on $[\theta, 2\theta]$, and so on, to construct a global solution. \square

3. Conservation laws

Under the (physically relevant) assumption on the cross-section (1.5) the collision operator $Q(f)$ features the very interesting symmetry properties (1.6), thanks to which f preserves some macroscopic quantities such as the total mass and the total kinetic energy. Indeed the following result holds as in [113] or [117]:

THEOREM 3.1. *Let f_0 satisfy (2.4), and b satisfy (1.5) and (2.3). Then*

- *if $f_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, then the solution f to (1.1)-(1.2)-(2.1) belongs to $C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ and*

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f(t, x, v) dx dv = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_0(x, v) dx dv, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+;$$

- *if $\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_0 dx dv < +\infty$, then the solution f to (1.1)-(1.2)-(2.1) is such that the function $(t, x, v) \mapsto |v|^2 f(t, x, v)$ belongs to $C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ and*

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dx dv = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_0(x, v) dx dv, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Moreover, the function $(t, x, v) \mapsto |v|^2 Q(f)(t, x, v)$ belongs to $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$.

SKETCH OF PROOF. Since the solution f to (1.1) belongs to $C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ it is easy to see that $Q(f) \in C^0(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ and the first point is a consequence of Fubini's theorem. The second point is more tricky and is dealt with as in [113], showing first the result with a fixed point in $L^\infty([0, \theta]; L^1(dx(1 + |v|^2)dv))$ assuming that $\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} b(w, \omega) |w|^2 d\omega dw < \infty$ and then using a stability argument to relax this assumption. \square

We can go further and show that even the microscopic quantities are conserved. This is a consequence of the following dispersion estimate due to B. Perthame [118]:

THEOREM 3.2. *Let $f \in L^1([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ be solution of*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = g, \quad f(t = 0) = f_0$$

with boundary condition (2.1). Assume that

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^3 f_0(x, v) dx dv < +\infty \quad \text{and} \quad \int_0^T \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 g(t, x, v) dx dv dt < C_0.$$

Then, for any bounded subset K of Ω , we have

$$\int_0^T dt \int_K dx \int_{\mathbb{R}^3} |v|^3 f(t, x, v) dv \leq C_K.$$

This dispersion estimate is the key to obtain that f locally conserves the mass, momentum and kinetic energy:

COROLLARY 3.3. *Let the cross-section b satisfy (1.5) and (2.3). Assume that the initial data satisfy (2.4), and*

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (1 + |v|^3) f_0(x, v) dx dv < +\infty.$$

Then, the solution f to (1.1)-(1.2)-(2.1) satisfies, in distributional sense, the local conservation laws (1.7).

Note that because of the boundary condition (1.3), it is easy to see that the momentum is tangential to the boundary:

$$n \cdot \int_{\mathbb{R}^3} v f dv = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

PROOF. In the sense of distributions, f satisfies (1.1). Let $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ and $\Psi_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ satisfy:

$$\Psi_R(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } |v| \leq R \\ 0 & \text{if } |v| > 2R. \end{cases}$$

Then equation (1.1) implies

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \partial_t \phi \left[\int_{\mathbb{R}^3} \Psi_R(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} f dv \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \nabla_x \phi \left[\int_{\mathbb{R}^3} \Psi_R(v) \begin{pmatrix} v \\ v \otimes v \\ v|v|^2 \end{pmatrix} f dv \right] dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \phi \left[\int_{\mathbb{R}^3} \Psi_R(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} Q(f) dv \right] dx dt \end{aligned}$$

We may pass to the limit $R \rightarrow +\infty$ thanks to 3.1 and theorem 3.2. At the end, we get the desired result. \square

The incompressible Euler limit for a gas of fermions

Article soumis

Sommaire

Abstract	119
1. Introduction	119
1.1. The Boltzmann equation for fermions	120
1.2. The formal hydrodynamic limit	122
2. Some details on the Boltzmann equation for fermions	123
2.1. Relations between the coefficients and the macroscopic quantities	123
2.2. Existence theory	124
3. Strategy and main result	125
4. Useful intermediate results	128
4.1. The linearized collision operator	128
4.2. Useful bounds	130
5. The modulated entropy	134
6. Construction of the approximate solutions	136
6.1. Study of W	138
6.2. Construction	138
7. End of the proof	141
7.1. Control of the flux terms	141
7.2. Proof of convergence	144

Abstract

We are interested in the hydrodynamic limit of the Boltzmann equation for a gas of fermions in the incompressible Euler regime. We use the relative entropy method as improved by Saint-Raymond in the classical case [130]. Our result is analogous to the classical case result, but the treatment is slightly complicated by the cubic nonlinearity of the collision operator.

1. Introduction

The study of quantum gases has been given increasing interest in the literature over the last decade. In particular, quantum kinetic theory is an expanding field of research. By quantum gases we mean gases made of quantum particles, that are, bosons or fermions. The first ones aim at aggregating together, forming the so-called "Bose-Einstein condensates". Conversely, fermions obey Pauli's exclusion principle, which prevents any pair of fermions from being in the same state.

Among the possible models for quantum gases, the Boltzmann-type models first proposed by Nordheim in 1928 [128] then Uehling and Uhlenbeck in 1933 [132] are very

popular. Although their range of validity is not clear, they seem to capture some aspects of the behaviour of bosonic or fermionic particles. Indeed, it has been proved, in the bosonic (and space homogeneous) case, that under a threshold temperature, a condensate occurs in infinite time [125, 124]. On the contrary, solutions of the fermionic Boltzmann equation satisfy a natural L^∞ bound which makes the Cauchy problem easier. Indeed, there is no need for renormalized solutions in this case since one can prove the existence of global weak solutions [127, 123, 120].

1.1. The Boltzmann equation for fermions. In this work, we investigate the incompressible Euler limit of the Boltzmann equation for a gas of fermions (or Boltzmann-Fermi equation). It reads in nondimensional form

$$(1.1) \quad \text{Ma} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\text{Kn}} Q(f)$$

where $f(t, x, v)$ is the density of particles which at time $t \in \mathbb{R}_+$ are at the point $x \in \mathbb{R}^3$ with velocity $v \in \mathbb{R}^3$. The left-hand term express the free transport of the particle in absence of interactions, while the right-hand term takes into account the effects of collisions between particles. The positive constants Ma and Kn are numbers determined by the physical situation of the gas and defined by

$$\text{Kn} = \frac{\text{mean free path}}{\text{observation length scale}}$$

$$\text{Ma} = \frac{\text{bulk velocity}}{\text{speed of sound}}.$$

The Knudsen number is a measure of the rarefaction of the gas whereas the Mach number measures its compressibility.

The collision integral $Q(f)$ is given by

$$(1.2) \quad Q(f) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 - f)(1 - f_*) - f f_* (1 - f')(1 - f'_*)) dv_* d\omega$$

with the usual notations

$$f_* = f(t, x, v_*), \quad f' = f(t, x, v'), \quad f'_* = f(t, x, v'_*)$$

and where the precollisional velocities (v', v'_*) are deduced from the postcollisional ones by the relations

$$\begin{cases} v' = v - (v - v_*) \cdot \omega \omega, \\ v'_* = v_* + (v - v_*) \cdot \omega \omega, \end{cases}$$

where ω is a unit norm vector. These relations express the conservation of momentum and kinetic energy at each collision.

The collision integral (1.2) differs from the classical one by the presence of cubic terms, due to Pauli's exclusion principle, and thus take into account the quantum nature of the gas. Indeed the probability for a particle with velocity v' of taking velocity v after a collision is all the more penalized as other particles at the same point already have velocity v . This prevents any pair of two fermions from being in the same quantum state. As a consequence the solution f satisfy a natural L^∞ bound : if the initial datum f_0 is chosen such that

$$0 \leq f_0 \leq 1,$$

this bound is preserved by the solution f for all times. This property is of great help in the study of this equation and make it having very different features from the classical or the bosonic Boltzmann equation although they look very similar.

The function $B(z, \omega)$, known as the collision kernel, is measurable, a.e. positive, and depends only on $|z|$ and on the scalar product $z \cdot \omega$. It is often assumed to satisfy Grad's cutoff assumption:

$$(1.3) \quad 0 < B(z, \omega) \leq C_B(1 + |z|)^\beta \quad \text{a.e. on } S^2 \times \mathbb{R}^3$$

$$(1.4) \quad \int_{S^2} B(z, \omega) d\omega \geq \frac{1}{C_B} \frac{|z|}{1 + |z|} \quad \text{a.e. on } \mathbb{R}^3$$

for some constants $C_B > 0$ and $\beta \in [0, 1]$. These assumptions guarantee the existence of a solution to equation (1.1) in the whole domain \mathbb{R}^3 or in the torus \mathbb{T}^3 [123, 127]. However, in order to have existence of solutions in more general domains and to ensure that they satisfy the local conservation of mass, momentum, and energy, as well as the entropy inequality, we will have to make more restrictive assumptions [120], as will be explained later.

The symmetry properties of the collision operator, coming from the fact that the transformations $(v, v_*) \mapsto (v', v'_*)$ and $(v, v') \mapsto (v_*, v'_*)$ have unit jacobian, imply that at least formally,

$$(1.5) \quad \int_{\mathbb{R}^3} Q(f) \varphi dv = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B (f' f'_* (1 - f)(1 - f_*) - f f_* (1 - f')(1 - f'_*)) \\ \times (\varphi + \varphi_* - \varphi' - \varphi'_*) dv_* d\omega$$

and then

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2) Q(f) dv = 0.$$

As a consequence, the solution f of equation (1.1) formally satisfies the conservations of mass, momentum and kinetic energy:

$$\begin{cases} \partial_t \int f dv + \frac{1}{\text{Ma}} \nabla_x \cdot \left(\int v f dv \right) = 0 \\ \partial_t \int v f dv + \frac{1}{\text{Ma}} \nabla_x \cdot \left(\int v \otimes v f dv \right) = 0 \\ \partial_t \int |v|^2 f dv + \frac{1}{\text{Ma}} \nabla_x \cdot \left(\int v |v|^2 f dv \right) = 0. \end{cases}$$

Moreover, taking $\varphi = \log \left(\frac{f}{1-f} \right)$ in (1.5) leads to the so-called H-theorem, which expresses the second principle of thermodynamics:

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} s(f)(v) dv + \frac{1}{\text{Ma}} \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} v s(f)(v) dv \right) = - \frac{1}{\text{MaKn}} D(f)$$

with

$$s(f) = f \log f + (1 - f) \log(1 - f)$$

and

$$D(f) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B(v - v_*, \omega) (f' f'_* (1 - f)(1 - f_*) - f f_* (1 - f')(1 - f'_*)) \\ \cdot \log \left(\frac{f' f'_* (1 - f)(1 - f_*)}{f f_* (1 - f')(1 - f'_*)} \right) dv_* d\omega.$$

Notice that $D(f)$ is non-negative. The minimizers of the entropy which are also the functions that cancel the collision operator, are given by :

PROPOSITION 1.1. *Assume that $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$ is such that $Q(g)$ and $D(g)$ are well defined and satisfy the bounds $0 \leq f \leq 1$. Then*

$$Q(g) = 0 \iff D(g) = 0 \iff g = \frac{M}{1+M} \text{ or } g = \mathbb{1}_{v \in \Lambda}$$

where M is a maxwellian distribution, that is,

$$M = ae^{-\frac{|v-u|^2}{2b}}$$

with $a \geq 0$, $b > 0$, and for some subset $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. In the first case the distributions are called *Fermi-Dirac* or *Planckian* distributions, whereas they are called *degenerate Fermi-Dirac* distributions in the second case.

Proofs and details are to be found in [123, 125]. The coefficients of the Planckian distribution a, b, u are fully determined by macroscopic parameters of the fluid with distribution g , namely the mass ρ_g , bulk velocity u_g and pressure p_g , defined by

$$\rho_g(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} g(t, x, v) dv, \quad u_g(t, x) = \frac{1}{\rho_g(t, x)} \int_{\mathbb{R}^3} vg(t, x, v) dv$$

and

$$p_g(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} |v - u_g(t, x)|^2 g(t, x, v) dv.$$

This relation will be detailed in the next Section.

1.2. The formal hydrodynamic limit. In the fast relaxation regime, that is, when the Knudsen number goes to 0, the collision process becomes predominant and we expect in view of (1.1) that a local thermodynamic equilibrium is reached almost instantaneously. The distribution f describing the gas is then close to Planckian distribution fully determined by some coefficients a, b, u which in turn are characterized by the hydrodynamic fields $\rho_f(t, x)$, $u_f(t, x)$ and $p_f(t, x)$. The conservation laws then become up to order $O(\text{Kn})$

$$\begin{aligned} \text{Ma} \partial_t \rho_f + \nabla_x \cdot (\rho_f u_f) &= 0 \\ \text{Ma} \partial_t (\rho_f u_f) + \nabla_x \cdot \left(\rho_f u_f \otimes u_f + \frac{1}{3} p_f I_3 \right) &= 0 \\ \text{Ma} \partial_t (\rho_f u_f^2 + p_f) + \nabla_x \cdot \left(\rho_f |u_f|^2 u_f + \frac{5}{3} p_f u_f \right) &= 0 \end{aligned}$$

which are the compressible Euler equations for perfect gases. If now the Mach number also goes to 0, that is, in an incompressible regime, the first equation becomes $\nabla_x \cdot (\rho_f u_f) = 0$, which is nothing but the incompressibility constraint. The other equations of motions are obtained by a systematic multiscale expansion, depending on another parameter: the Reynolds number, defined by

$$\text{Re} = \frac{\text{Ma}}{\text{Kn}}$$

for perfect gases, and measuring the viscosity of the gas. In all the sequel, we are interested in the inviscid incompressible regime, so that we consider

$$\text{Ma} = \varepsilon, \quad \text{Kn} = \varepsilon^q, \quad q > 1$$

and investigate the asymptotic $\varepsilon \rightarrow 0$. The Boltzmann equation for fermions then writes

$$(1.6) \quad \varepsilon \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon^q} Q(f)$$

Moreover, the hydrodynamic fluids will be assumed to be fluctuations around a global constant equilibrium $(\rho_0, 0, p_0)$, so that, denoting the fluctuations around the mass, momentum and pressure by $\tilde{\rho}$, \tilde{u} and \tilde{p} ,

$$\rho_f = \rho_0 + \varepsilon \tilde{\rho}, \quad u_f = \varepsilon \tilde{u}, \quad p_f = p_0 + \varepsilon \tilde{p}.$$

We also define the temperature T_f by

$$p_f = \rho_f T_f$$

and its fluctuation \tilde{T} by $T_f = T_0 + \varepsilon \tilde{T}$ where T_0 is a constant equilibrium value. Plugging these expressions into the hydrodynamic equations (1.2) we get at leading order

$$\nabla_x \tilde{u} = 0, \quad \nabla_x (T_0 \tilde{\rho} + \rho_0 \tilde{T}) = 0$$

which are known as the incompressibility and the Boussinesq relations; at next order it comes

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\rho} + \tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{\rho} &= 0 \\ \partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{u} + \nabla_x (\tilde{\rho} \tilde{T}) &= 0. \end{aligned}$$

The rest of the paper is organized as follows: in Section 2, we give some details about equation (1.6). Then in Section 3 we explain the strategy which is based on the modulated entropy and give our main result Theorem 3.1. We give some useful intermediate results in Section 4. In Section 5 we compute the time derivative of the modulated entropy. In Section 6 we construct an approximate solution of (1.6) the parameters of which satisfy the incompressible Euler equation. Finally in Section 7 we end the proof of the main result by controlling some flux terms.

2. Some details on the Boltzmann equation for fermions

In this Section we explain the relation between the hydrodynamic fields and the coefficients a, u, b of the Planckian distribution defined in Proposition (1.1). We then state the existence result to be used in the sequel.

2.1. Relations between the coefficients and the macroscopic quantities. We recall here the definition of the hydrodynamic fields: for a given distribution function f the mass ρ_f , the bulk velocity u_f and the pressure p_f are defined by

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \quad u_f(t, x) = \frac{1}{\rho_f(t, x)} \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv$$

and

$$p_f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} |v - u_f(t, x)|^2 f(t, x, v) dv.$$

When the thermodynamic equilibrium is reached, the density function is an equilibrium solution

$$f = \frac{M}{1 + M}, \quad M = a e^{-\frac{|v-u|^2}{2b}},$$

with $a, b \geq 0$. It is then clear that $u = u_f$. Let us define for comodity the functions

$$F_p(a) = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^p \frac{a e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 + a e^{-\frac{|v|^2}{2}}}.$$

They are well defined for $a \in [0, +\infty)$. Then we write

$$\rho_f = b^{3/2}F_0(a), \quad p_f = b^{5/2}F_2(a).$$

If we define now the internal energy

$$e_f = \frac{1}{2\rho_f}(p_f - 4\rho_f|u_f|^2),$$

we can quote the following result from [121]:

PROPOSITION 2.1. *There exists a positive constant l such that the mapping*

$$(a, b) \in (0, +\infty)^2 \mapsto (\rho_f, e_f) \in \mathcal{E},$$

where $\mathcal{E} = \{(\rho_f, e_f) \text{ s.t. } e_f > l\rho_f^{2/3}\}$, is one-to-one.

From now on, we will denote by P_0 a global equilibrium defined by

$$(2.1) \quad P_0 = \frac{M_0}{1 + M_0}, \quad M_0 = e^{a_0} e^{-\frac{|v|^2}{2b_0}}$$

where $a_0, b_0 > 0$ and a_0 is such that

$$F_2(e^{a_0}) > 2lF_0(e^{a_0})^{\frac{5}{3}}.$$

2.2. Existence theory. Let Ω be a subset of \mathbb{R}^3 regular enough such that the normal is well defined on the boundary. The equation

$$(2.2) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f)$$

must be supplemented with an initial condition:

$$(2.3) \quad f(0, x, v) = f_0(x, v) \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$$

and a boundary condition we choose to be specular reflection for simplicity:

$$(2.4) \quad f(t, x, v) = f(t, x, R_x(v)) \quad \forall (x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \text{ such that } n(x) \cdot v < 0$$

where $R_x(v)$ is the specular reflection law

$$(2.5) \quad R_x(v) = v + 2(v \cdot n(x))n(x).$$

The choice of the specular reflection as a boundary condition makes all the boundary terms vanish in the weak formulation of the equation. It also cancels the Prandtl layer along the boundary.

The following existence result was proved in [123, 120]:

THEOREM 2.2. *Let Ω be either \mathbb{R}^3 or a regular subset of \mathbb{R}^3 . Let the collision kernel B be such that*

$$(2.6) \quad 0 \leq B \in L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2),$$

and let

$$(2.7) \quad f_0 \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3), \quad 0 \leq f_0 \leq 1.$$

Then, the problem (2.2)-(2.4) has a unique solution f satisfying

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3), \quad 0 \leq f \leq 1 \text{ a.e.}$$

Moreover, f is absolutely continuous with respect to t .

The assumption made on the collision kernel (2.6) is very strong, much more than Grad's cut-off assumption (1.3)-(1.4) which would be enough to ensure the existence of

a solution [127]. However, it is (until now) necessary in order to prove that the local conservation laws are satisfied by the solution. It is the case if we assume that the collision kernel has the symmetry

$$(2.8) \quad B(w, \omega) = q(|w|, |w \cdot \omega|),$$

which is physically relevant. The following proposition was proved in [120] using a dispersion argument which states roughly that if f is the solution to the transport equations

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = g$$

and $\int_0^T \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 g \, dv \, dx \, dt \leq C_0$, then $\int_0^T \int_K \int_{\mathbb{R}^3} |v|^3 f \, dv \, dx \, dt \leq C_K$ for all compact subsets $K \in \mathbb{R}^3$.

PROPOSITION 2.3. *Assume that the collision kernel B is as in (2.6) and (2.8). Assume moreover that the initial data is as in (2.7), and*

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (1 + |v|^3) f_0(x, v) \, dx \, dv < +\infty.$$

Then, the solution f to (2.2)-(2.4) satisfies, in the distributional sense, the local conservation laws

$$(2.9) \quad \begin{cases} \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f \, dv + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} v f \, dv \right) = 0 \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} v f \, dv + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} v \otimes v f \, dv \right) = 0 \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f \, dv + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} v |v|^2 f \, dv \right) = 0 \end{cases}$$

Finally, under the same assumptions, Boltzmann's H-theorem is true:

PROPOSITION 2.4. *Let the collision kernel B satisfy (2.6) and (2.6). Assume that the initial data satisfy (2.7), and*

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (|x|^2 + |v|^2) f_0(x, v) \, dx \, dv < +\infty,$$

and let f be the solution to (2.2)-(2.4). Then,

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} s(f)(t) \, dv \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} D(f) \, dx \, ds = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} s(f_0).$$

3. Strategy and main result

In investigating the incompressible Euler limit of the Boltzmann-Fermi equation, we use the modulated entropy method as in the classical case [130]. Let us first introduce the relative entropy of the solution f_ε to (1.6) with respect to the global thermodynamic equilibrium P_0 :

$$\begin{aligned} H(f_\varepsilon | P_0) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} & \left(f_\varepsilon \log \frac{f_\varepsilon}{P_0} - f_\varepsilon + P_0 \right. \\ & \left. + (1 - f_\varepsilon) \log \frac{1 - f_\varepsilon}{1 - P_0} - (1 - f_\varepsilon) + 1 - P_0 \right) \, dv \, dx. \end{aligned}$$

It is a non-negative Lyapunov functional for the Boltzmann-Fermi equation thanks to the H theorem. In the fast relaxation limit, f_ε is supposed to be close to a thermodynamic equilibrium, we therefore define the modulated entropy by

$$H(f_\varepsilon|P_\varepsilon) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left(f_\varepsilon \log \frac{f_\varepsilon}{P_\varepsilon} - f_\varepsilon + P_\varepsilon + (1 - f_\varepsilon) \log \frac{1 - f_\varepsilon}{1 - P_\varepsilon} - (1 - f_\varepsilon) + 1 - P_\varepsilon \right) dv dx.$$

where $P_\varepsilon = \frac{M_\varepsilon}{1+M_\varepsilon}$ is some local equilibrium which approximates the solution f_ε , with $M_\varepsilon = a_\varepsilon e^{-\frac{|v-u_\varepsilon|^2}{2b_\varepsilon}}$. The relative entropy functional measures this approximation since

$$H(f_\varepsilon|P_\varepsilon) \geq \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left(\sqrt{f_\varepsilon} - \sqrt{P_\varepsilon} \right)^2 dv dx,$$

consequence of the pointwise inequality

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x \log \frac{x}{y} - x + y \quad \forall x, y > 0.$$

We then study the time evolution of the modulated entropy and prove the following stability equality:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon|P_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon,in}|P_{\varepsilon,in}) - \frac{1}{\varepsilon^{q+3}} \int_0^t \int_{\Omega} D(f_\varepsilon) dx ds \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(1, \frac{v - \varepsilon u}{b_\varepsilon}, \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} \right) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(a_1, u, b_1) dx dv ds \\ &\quad - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon b_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_1 dx dv ds - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv ds \\ &\quad + \frac{1}{3\varepsilon^2} \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{\varepsilon^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{\varepsilon^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}} dv dx \right] ds. \end{aligned}$$

where the acceleration term $\mathcal{A}_\varepsilon(a_1, u, b_1)$ is defined by (5.3). It will go to 0 when $\varepsilon \rightarrow 0$ together with the last term by choosing some appropriate functions a_1, u, b_1 thanks to some filtering techniques.

The main difficulty relies in the control of the flux terms

$$\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon b_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_1 dx dv ds \quad \text{and} \quad \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv ds$$

containing translated and rescaled variants of the flux momentum and energy

$$\Phi = v \otimes v - \frac{1}{3} |v|^2 I, \quad \Psi = v(|v|^2 - \tau_0).$$

They are dealt with thanks to some bounds containing the relative entropy and the entropy dissipation, coming from the theory of the linearized collision operator. Using Gronwall's lemma we finally prove that

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon|P_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Our main result is the following:

THEOREM 3.1. *Let Ω be some regular bounded domain of \mathbb{R}^3 . Let $(f_{\varepsilon,in})$ be a family of measurable nonnegative functions over $\Omega \times \mathbb{R}^3$ satisfying the bounds*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|^2 + |v|^3) f_{\varepsilon,in} dv dx &\leq C_\varepsilon, \\ 0 &\leq f_{\varepsilon,in} \leq 1, \end{aligned}$$

and the scaling condition

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_0) \leq C.$$

Without loss of generality, assume that the fluctuation $g_{\varepsilon, in}$ defined by $f_{\varepsilon, in} = P_0(1 + \varepsilon g_{\varepsilon, in})$ converges

$$g_{\varepsilon, in} \rightarrow g_{in} = \frac{1}{1 + M_0} \left(\frac{a_{in}}{a_0} + \frac{u_{in}}{b_0} \cdot v + \frac{b_{in}}{2b_0} |v|^2 \right).$$

We assume moreover that the initial data is well-prepared:

$$(3.1) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{\varepsilon, in}) \rightarrow 0.$$

Let f_ε be some family of solutions to the scaled Boltzmann-Fermi equation

$$(3.2) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^q} Q(f_\varepsilon) \\ f_\varepsilon(0, x, v) = f_{\varepsilon, in}(x, v) \quad \text{on } \Omega \times \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

with $q > 1$, and with $B_\varepsilon(z, \omega) = \mathbb{1}_{|z| \leq \frac{1}{\varepsilon}}$, endowed with the boundary condition

$$(3.3) \quad f_\varepsilon(t, x, v) = f_\varepsilon(t, x, R_x(v)) \quad \forall (x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \quad \text{such that } n(x) \cdot v < 0$$

where $R_x(v)$ is the specular reflection law (2.5). Assume that we have the following control on the tails :

$$(3.4) \quad \int_{\mathbb{R}^3} P_0 \left(\frac{f_\varepsilon - P_0}{P_0} \right)^2 dv \leq C \quad \text{a.e.}$$

and, finally, assume that

$$(3.5) \quad \tilde{\Phi} = \mathcal{L}^{-1} \Phi \quad \text{and} \quad \tilde{\Psi} = \mathcal{L}^{-1} \Psi \quad \text{are at most polynomial as } |v| \rightarrow \infty.$$

Then the fluctuation (g_ε) defined by $f_\varepsilon = P_0(1 + \varepsilon g_\varepsilon)$ converges in $L^1([0, T]; (1 + |v|^2) dv dx)$ weak

$$g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1 + M_0} \left(\frac{\bar{a}}{a_0} + \frac{\bar{u}}{b_0} \cdot v + \frac{\bar{b}}{2b_0} |v|^2 \right)$$

where $(\bar{a}, \bar{u}, \bar{b})$ is the unique Lipschitz solution to the incompressible Euler equations

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{u} + \nabla_x p = 0, \quad \nabla_x \cdot \bar{u} = 0$$

supplemented with

$$\partial_t \bar{a} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{a} = 0, \quad \partial_t \bar{b} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{b} = 0, \quad \nabla_x (b_0 \bar{a} + \tau_0 \bar{b}) = 0$$

on $[0, T]$, and T is the maximal lifespan of the solution.

In (3.5), \mathcal{L} is the linearized collision operator around P_0 . We will see in the next subsection that it is a Hilbert-Schmidt operator and that Φ and Ψ are orthogonal to its kernel. This gives a sense to $\tilde{\Phi}$ and $\tilde{\Psi}$.

It should be very technical but not very hard to prove that (3.5) is true, as it was proved in the classical case in [126]. Actually, the real assumptions are (3.1), which allows us to consider solutions that are close to equilibrium even at $t = 0$, and thus not to talk about relaxation and Knudsen layer; and (3.4), which gives a stronger control that what is needed, but will be used in the control of the flux terms.

4. Useful intermediate results

In this section we define and study the linearized collision operator, and then give some bounds that will be very useful in the proof of Theorem 3.1.

4.1. The linearized collision operator. As we look at solutions of (1.6) which are fluctuations around an equilibrium state, that is,

$$f_\varepsilon = P_\varepsilon(1 + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon),$$

it makes sense to use the linearized collision operator, which is defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon g &= \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} B(v - v_*, \omega) \frac{M_{\varepsilon,*}}{1 + M_{\varepsilon,*}} \frac{1}{1 + M'_\varepsilon} \frac{1}{1 + M'_{\varepsilon,*}} \\ &\quad \times (g(1 + M_\varepsilon) + g_*(1 + M_{\varepsilon,*}) - g'(1 + M'_\varepsilon) - g'_*(1 + M'_{\varepsilon,*})) dv_* d\omega. \end{aligned}$$

Let us define

$$(4.1) \quad \nu_\varepsilon(v) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(v - v_*) M_{\varepsilon,*} (1 + M_\varepsilon)}{(1 + M_{\varepsilon,*})(1 + M'_\varepsilon)(1 + M'_{\varepsilon,*})} dv_* d\omega$$

and recall that $P_\varepsilon = \frac{M_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon}$ with $M_\varepsilon = a_\varepsilon e^{-\frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2b_\varepsilon}}$; the following proposition gives some properties of \mathcal{L}_ε :

PROPOSITION 4.1. *Assume that the cross section $B(z, \omega)$ satisfies Grad's cutoff assumptions (1.3)-(1.4); then \mathcal{L}_ε is a non-negative self-adjoint operator on $L^2(M_\varepsilon dv)$ with domain*

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_\varepsilon) = \{g \in L^2(M_\varepsilon dv) \mid \nu_\varepsilon g \in L^2(M_\varepsilon dv)\} = L^2(\nu_\varepsilon M_\varepsilon dv).$$

and kernel

$$\text{Ker} \mathcal{L}_\varepsilon = \text{span} \left\{ \frac{1}{1 + M_\varepsilon}, \frac{v}{1 + M_\varepsilon}, \frac{|v|^2}{1 + M_\varepsilon} \right\}.$$

It can be decomposed as

$$\mathcal{L}_\varepsilon g(v) = \nu_\varepsilon(v) g(v) + \mathcal{K}_\varepsilon g(v)$$

where \mathcal{K}_ε is a compact integral operator on $L^2(M_\varepsilon dv)$ and

$$0 < \nu_- \leq \nu_\varepsilon(v) \leq C_B(1 + |v|^\beta)$$

provided that

$$(4.2) \quad 0 \leq a_\varepsilon \leq C \quad \text{and} \quad \frac{1}{C} \leq b_\varepsilon$$

with C a positive constant independent of ε .

REMARK 4.2. The assumption about the collision kernel $B(z, \omega)$ (1.3)-(1.4) is not compatible with the assumption $B \in L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)$ that we made to ensure the existence of a solution which satisfies the local conservation laws. To bypass this difficulty, we will consider the simplified situation with a collision kernel

$$(4.3) \quad B_\varepsilon(z, \omega) = \mathbb{1}_{|z| \leq \frac{1}{\varepsilon}},$$

which is in $L^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)$ but satisfies Grad's cutoff assumptions in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$. When spectral properties of the linearized collision operator will be needed, we will consider the cross section $B \equiv 1$ and then evaluate the difference between the terms involving B_ε and those with B .

PROOF. Let $g, h \in L^2(M_\varepsilon dv)$. Then

$$\begin{aligned} \int h \mathcal{L}_\varepsilon g M_\varepsilon dv &= \int h(1 + M_\varepsilon) \mathcal{L}_\varepsilon g \frac{M_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} dv \\ &= \frac{1}{4} \iiint_{S^2} B(v - v_*, \omega) \frac{M_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \frac{M_{\varepsilon,*}}{1 + M_{\varepsilon,*}} \frac{1}{1 + M'_\varepsilon} \frac{1}{1 + M'_{\varepsilon,*}} \\ &\quad \times (g(1 + M_\varepsilon) + g_*(1 + M_{\varepsilon,*}) - g'(1 + M'_\varepsilon) - g'_*(1 + M'_{\varepsilon,*})) \\ &\quad \times (h(1 + M_\varepsilon) + h_*(1 + M_{\varepsilon,*}) - h'(1 + M'_\varepsilon) - h'_*(1 + M'_{\varepsilon,*})) dv dv_* d\omega \end{aligned}$$

which easily shows that \mathcal{L}_ε is a non-negative self-adjoint operator. Moreover, letting $h = g$ implies that g is in the nullspace of \mathcal{L}_ε if and only if, for almost all $(v, v_*, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2$,

$$g(1 + M_\varepsilon) + g_*(1 + M_{\varepsilon,*}) = g'(1 + M'_\varepsilon) + g'_*(1 + M'_{\varepsilon,*}).$$

In other words, $g(1 + M_\varepsilon)$ must be a collision invariant, and therefore the nullspace of \mathcal{L}_ε is made of all linear combinations of $\frac{1}{1+M_\varepsilon}, \frac{v_i}{1+M_\varepsilon}, \frac{|v|^2}{1+M_\varepsilon}$ (see [122]).

The next step is to split \mathcal{L}_ε into two parts:

$$\mathcal{L}_\varepsilon g = \nu_\varepsilon(v)g + \mathcal{K}_\varepsilon h(v)$$

with

$$(4.4) \quad \nu_\varepsilon(v) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(v - v_*) M_{\varepsilon,*} (1 + M_\varepsilon)}{(1 + M_{\varepsilon,*})(1 + M'_\varepsilon)(1 + M'_{\varepsilon,*})} dv_* d\omega.$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\varepsilon g(v) &= \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} B(v - v_*, \omega) \frac{M_{\varepsilon,*}}{1 + M_{\varepsilon,*}} \frac{1}{1 + M'_\varepsilon} \frac{1}{1 + M'_{\varepsilon,*}} \\ &\quad \times (g_*(1 + M_{\varepsilon,*}) - g'(1 + M'_\varepsilon) - g'_*(1 + M'_{\varepsilon,*})) dv_* d\omega. \end{aligned}$$

The bounds on ν_ε can be proved using Grad's cutoff assumptions (1.3)-(1.4). They are uniform in ε thanks to (4.2). The operator \mathcal{K}_ε can be split into two operators in the following way:

$$\mathcal{K}_\varepsilon g(v) = \mathcal{K}_\varepsilon^1 g(v) - \mathcal{K}_\varepsilon^2 g(v)$$

with

$$\mathcal{K}_\varepsilon^1 g(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) M_{\varepsilon,*} \frac{1}{1 + M'_\varepsilon} \frac{1}{1 + M'_{\varepsilon,*}} g_* dv_* d\omega$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\varepsilon^2 g(v) &= \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} B(v - v_*, \omega) \frac{M_{\varepsilon,*}}{1 + M_{\varepsilon,*}} \frac{1}{1 + M'_\varepsilon} \frac{1}{1 + M'_{\varepsilon,*}} \\ &\quad \times (g'(1 + M'_\varepsilon) + g'_*(1 + M'_{\varepsilon,*})) dv_* d\omega. \end{aligned}$$

In the classical case, the same decomposition holds, and a clever change of variables known as ‘‘Carleman’s parametrization’’ allows to show that the following two operators are compact on $L^2(M_\varepsilon dv)$ (see [129] for example):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_1 g(v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) M_{\varepsilon,*} g_* dv_* d\omega \\ \bar{\mathcal{K}}_2 g(v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v_*, \omega) M_{\varepsilon,*} (g' + g'_*) dv_* d\omega. \end{aligned}$$

It is easy to see that

$$\|\mathcal{K}_\varepsilon^1 g\|_{L^2(M_\varepsilon dv)} \leq C \|\bar{\mathcal{K}}_1 g\|_{L^2(M_\varepsilon dv)}$$

and

$$\|\mathcal{K}_\varepsilon^2 g\|_{L^2(M_\varepsilon dv)} \leq C (\|\bar{\mathcal{K}}_2 g\|_{L^2(M_\varepsilon dv)} + \|\bar{\mathcal{K}}_2(M_\varepsilon g)\|_{L^2(M_\varepsilon dv)})$$

from which we deduce that \mathcal{K}_ε is a compact operator on $L^2(M_\varepsilon dv)$. \square

With these results, we can assert that \mathcal{L}_ε is coercive, and therefore is a Fredholm operator:

COROLLARY 4.3. *There exists $C > 0$ such that, for each $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\varepsilon) \cap (\text{Ker}(\mathcal{L}_\varepsilon))^\perp$,*

$$\int g \mathcal{L}_\varepsilon g M_\varepsilon dv \geq C_{\mathcal{L}} \|g\|_{L^2(\nu_\varepsilon M_\varepsilon dv)}^2.$$

If (4.2) holds, then $C_{\mathcal{L}}$ is independent of ε .

PROOF. This result is a consequence of Proposition 4.1. Indeed, the multiplication operator $g \mapsto \nu_\varepsilon g$ is self-adjoint on $L^2(\nu_\varepsilon M_\varepsilon dv)$ and has continuous spectrum, namely the numerical range of ν_ε $[\nu_\varepsilon^-, +\infty[$ where

$$\nu_- \leq \nu_\varepsilon^- = \inf_{v \in \mathbb{R}^3} \nu_\varepsilon(v).$$

Then, since \mathcal{K}_ε is self-adjoint and compact on $L^2(M_\varepsilon dv)$, Weyl's theorem ensures that the spectrum of \mathcal{L}_ε is made of $[\nu_\varepsilon^-, +\infty[$ and of a sequence of eigenvalues on the interval $[0, \nu_\varepsilon^-]$ with ν_ε^- as unique possible accumulation point. Consequently, there exists a smallest eigenvalue λ_ε^1 which is bounded by below by λ^1 if (4.2) holds, and the following spectral gap inequality is satisfied for each $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\varepsilon) \cap (\text{Ker}(\mathcal{L}_\varepsilon))^\perp$:

$$\int g \mathcal{L}_\varepsilon g M_\varepsilon dv \geq C_{\mathcal{L}} \|g\|_{L^2(M_\varepsilon dv)}^2.$$

Recalling that

$$\int g \mathcal{L}_\varepsilon g M_\varepsilon dv = \int \nu_\varepsilon g^2 M_\varepsilon dv - \int g \mathcal{K}_\varepsilon g M_\varepsilon dv$$

and using the continuity of \mathcal{K}_ε , we get the inequality with the weighted norm as stated above. \square

4.2. Useful bounds. This subsection lists some a priori bounds which are needed for the proof of convergence in the hydrodynamic limit. The first estimate comes from Young's inequality:

PROPOSITION 4.4. *For $z > -1$ we define the function*

$$h(z) = (1+z) \log(1+z) - z.$$

It satisfies

$$\begin{aligned} h(z) &\geq 0 \quad \text{for } z > -1, \\ p|z| &\leq \lambda h^*(p) + \frac{1}{\lambda} h(z) \end{aligned}$$

where h^ is the Legendre transform of h*

$$h^*(p) = \max_{z > -1} (pz - h(z)) = e^p - p - 1.$$

The study of the function h is motivated by the relation

$$H(f_\varepsilon | P_\varepsilon) = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} P_\varepsilon h \left(\frac{f_\varepsilon - P_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right) dv dx + \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (1 - P_\varepsilon) h \left(\frac{P_\varepsilon - f_\varepsilon}{1 - P_\varepsilon} \right) dv dx,$$

PROOF. The first two properties are immediate from the definitions of h and the modulated entropy. The last one comes from Young's inequality

$$pz \leq h^*(p) + h(z),$$

supplemented with the two inequalities

$$\begin{aligned} h(|z|) &\leq h(z) \quad z > -1 \\ h^*(\lambda p) &\leq \lambda^2 h^*(p) \quad p \geq 0, \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

□

It will be useful to work in L^2 since it is the natural space for the study of \mathcal{L}_ε , and then we will use renormalized fluctuations instead of the natural one defined as $f_\varepsilon = P_\varepsilon(1 + \varepsilon \hat{g}_\varepsilon)$:

PROPOSITION 4.5. *Let us define the renormalized fluctuations*

$$\hat{g}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{f_\varepsilon}{P_\varepsilon}} - 1 \right)$$

and

$$\hat{h}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1-f_\varepsilon}{1-P_\varepsilon}} - 1 \right).$$

Then

$$(4.5) \quad \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} P_\varepsilon \hat{g}_\varepsilon^2 dv dx + \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (1 - P_\varepsilon) \hat{h}_\varepsilon^2 dv dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon | P_\varepsilon).$$

Moreover,

$$(4.6) \quad \|\varepsilon \sqrt{P_\varepsilon} \hat{g}_\varepsilon\|_{L^\infty(dv dx)} + \|\varepsilon \hat{h}_\varepsilon\|_{L^\infty(dv dx)} \leq C$$

where $C > 0$ does not depend on ε , provided that (4.2) holds.

PROOF. Estimate (4.5) is a direct consequence of the definition of \hat{g}_ε and \hat{h}_ε and the following inequality:

$$x \log \frac{x}{y} - x + y \geq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2, \quad \forall x, y > 0.$$

Recalling that $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$ and that P_ε is bounded independently of ε the second point comes by direct inspection. □

In the L^2 setting, the collision kernel needs also to be renormalized. We repeat here the definition of the entropy dissipation:

$$\begin{aligned} D(f_\varepsilon) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B_\varepsilon(v - v_*, \omega) (f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*}) - f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1 - f'_\varepsilon)(1 - f'_{\varepsilon,*})) \\ &\quad \cdot \log \left(\frac{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})}{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1 - f'_\varepsilon)(1 - f'_{\varepsilon,*})} \right) dv_* d\omega. \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.6. *Define the renormalized collision kernel by*

$$\hat{q}_\varepsilon = \frac{1}{P_\varepsilon} \iint B_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} \left(\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1 - f'_\varepsilon)(1 - f'_{\varepsilon,*})} \right) dv_* d\omega,$$

with

$$\Lambda_\varepsilon = \frac{M_\varepsilon M_{\varepsilon,*}}{(1 + M_\varepsilon)(1 + M_{\varepsilon,*})(1 + M'_\varepsilon)(1 + M'_{\varepsilon,*})}.$$

Assume that (4.2) holds. Then

$$\|\hat{q}_\varepsilon\|_{L^2(\nu_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon dv)}^2 \leq CD(f_\varepsilon)$$

where ν_ε is the collision frequency defined by (4.1) and C is a positive constant independent of ε .

PROOF. This estimate is obtained by the Cauchy-Schwarz inequality:

$$\hat{q}_\varepsilon^2 \leq \frac{1}{P_\varepsilon^2} \left(\iint B_\varepsilon G_\varepsilon^2 dv_* d\omega \right) \left(\iint B_\varepsilon \Lambda_\varepsilon dv_* d\omega \right)$$

with

$$G_\varepsilon = \sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1 - f'_\varepsilon)(1 - f'_{\varepsilon,*})}.$$

We easily see that

$$\iint B_\varepsilon \Lambda_\varepsilon dv_* d\omega = \nu_\varepsilon \frac{P_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon}.$$

Next, using the classical inequality

$$(x - y) \log \frac{x}{y} \geq 4(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2, \quad \forall x, y > 0,$$

we get thanks to (4.2)

$$\|\hat{q}_\varepsilon\|_{L^2(\nu_\varepsilon^{-1}P_\varepsilon dv)}^2 \leq CD(f_\varepsilon).$$

□

Mixing together the previous estimates, we can prove a relaxation result. Define Π_ε as the orthogonal projection in $L^2(P_\varepsilon dv)$ on $\text{Ker } \mathcal{L}_\varepsilon$. The following proposition will be useful in the control of the flux terms: coupled with the control on the tails (3.4) and some interpolation argument, it will allow us to control the third moment of f_ε .

PROPOSITION 4.7. Define \hat{g}_ε and \hat{h}_ε as in Proposition 4.5 and assume (4.2). Then

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} - \Pi_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(P_\varepsilon dv)} \\ &= \varepsilon O \left(\|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(P_\varepsilon)}^2 + \|\hat{h}_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} \int P_\varepsilon h \left(\frac{f_\varepsilon - P_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right) dv} \right) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

PROOF. Plugging the identities

$$f_\varepsilon = P_\varepsilon(1 + \varepsilon\hat{g}_\varepsilon)^2, \quad 1 - f_\varepsilon = (1 - P_\varepsilon)(1 + \varepsilon\hat{h}_\varepsilon)^2$$

into

$$\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})}$$

gives

$$\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})} = \sqrt{P'_\varepsilon P'_{\varepsilon,*} (1 - P_\varepsilon)(1 - P_{\varepsilon,*})} (1 + \varepsilon\hat{g}'_\varepsilon)(1 + \varepsilon\hat{g}'_{\varepsilon,*})(1 + \varepsilon\hat{h})(1 + \varepsilon\hat{h}_{\varepsilon,*})$$

which leads to the key following identity:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*}(1-f_\varepsilon)(1-f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*}(1-f'_\varepsilon)(1-f'_{\varepsilon,*})} \\
&= \varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} \left(\hat{g}'_\varepsilon - \hat{h}'_\varepsilon + \hat{g}'_{\varepsilon,*} - \hat{h}'_{\varepsilon,*} - (\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon) - (\hat{g}_{\varepsilon,*} - \hat{h}_{\varepsilon,*}) \right) \\
&+ \varepsilon^2 \Lambda_\varepsilon^{1/2} \left(\hat{g}'_\varepsilon \hat{g}'_{\varepsilon,*} - \hat{g}_\varepsilon \hat{g}_{\varepsilon,*} + \hat{h}_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{h}'_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} + \hat{g}'_\varepsilon \hat{h}_\varepsilon - \hat{g}_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} \right. \\
(4.7) \quad &+ \hat{g}'_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{g}_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} + \hat{g}'_{\varepsilon,*} \hat{h}_\varepsilon - \hat{g}_{\varepsilon,*} \hat{h}'_\varepsilon + \hat{g}'_{\varepsilon,*} \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{g}_{\varepsilon,*} \hat{h}'_{\varepsilon,*} \left. \right) \\
&+ \varepsilon^3 \Lambda_\varepsilon^{1/2} \left(\hat{g}'_\varepsilon \hat{g}'_{\varepsilon,*} (\hat{h}_\varepsilon + \hat{h}_{\varepsilon,*}) - \hat{g}_\varepsilon \hat{g}_{\varepsilon,*} (\hat{h}'_\varepsilon + \hat{h}'_{\varepsilon,*}) \right. \\
&+ \hat{h}_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} (\hat{g}'_\varepsilon + \hat{g}'_{\varepsilon,*}) - \hat{h}'_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} (\hat{g}_\varepsilon + \hat{g}_{\varepsilon,*}) \left. \right) \\
&+ \varepsilon^4 \Lambda_\varepsilon^{1/2} \left(\hat{g}'_\varepsilon \hat{g}'_{\varepsilon,*} \hat{h}_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{g}_\varepsilon \hat{g}_{\varepsilon,*} \hat{h}'_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} \right)
\end{aligned}$$

Raising it to the square and dividing by ε^2 , we get, thanks to

$$(4.8) \quad \|\varepsilon \sqrt{P_\varepsilon} \hat{g}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathrm{d}v\mathrm{d}x)} + \|\varepsilon \hat{h}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathrm{d}v\mathrm{d}x)} \leq C,$$

the following control:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \mathcal{L}_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} M_\varepsilon \mathrm{d}v \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \iiint \left(\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*}(1-f_\varepsilon)(1-f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*}(1-f'_\varepsilon)(1-f'_{\varepsilon,*})} \right)^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}v_* \mathrm{d}\omega \\
&+ \varepsilon^2 (\|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(P_\varepsilon \mathrm{d}v)}^4 + \|\hat{h}_\varepsilon\|_{L^2(\mathrm{d}v)}^4)
\end{aligned}$$

Note that here we used the fact that, for a given integrable function u , we have (see [119] for more details)

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} u(v') \mathrm{d}v\mathrm{d}\omega \leq C \int_{\mathbb{R}^3} u(v) \mathrm{d}v.$$

The next step is to decompose $B = B_\varepsilon + (B - B_\varepsilon)$, so that

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^2} \iiint B \left(\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*}(1-f_\varepsilon)(1-f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*}(1-f'_\varepsilon)(1-f'_{\varepsilon,*})} \right)^2 \mathrm{d}\omega\mathrm{d}v\mathrm{d}v_* \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^2} D(f_\varepsilon) + \frac{C}{\varepsilon^2} \iiint (B - B_\varepsilon) f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} \mathrm{d}\omega\mathrm{d}v\mathrm{d}v_*
\end{aligned}$$

Recalling that f_ε can be written $f_\varepsilon = P_\varepsilon(1 + 2\varepsilon\hat{g}_\varepsilon + \varepsilon^2\hat{g}_\varepsilon^2)$ and $M_\varepsilon = a_\varepsilon e^{-\frac{|v-u_\varepsilon|^2}{2b_\varepsilon}}$, and thanks to the following inequality

$$(4.9) \quad \mathbb{1}_{|v-v_*| > \frac{1}{\varepsilon}} M_\varepsilon M_{\varepsilon,*} \leq a_\varepsilon^{1/2} M_\varepsilon^{3/4} M_{\varepsilon,*}^{3/4} e^{-\frac{1}{16b_\varepsilon\varepsilon^2}},$$

we get

$$\begin{aligned}
(4.10) \quad & \frac{C}{\varepsilon^2} \iiint \mathbb{1}_{|v-v_*| > \frac{1}{\varepsilon}} f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} \mathrm{d}\omega\mathrm{d}v\mathrm{d}v_* \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{1}{C\varepsilon^2}} + 2 \iiint \mathbb{1}_{|v-v_*| > \frac{1}{\varepsilon}} P_\varepsilon P_{\varepsilon,*} \hat{g}_\varepsilon^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}v_* \\
&+ 2\varepsilon \iiint \mathbb{1}_{|v-v_*| > \frac{1}{\varepsilon}} P_\varepsilon P_{\varepsilon,*} \hat{g}_\varepsilon^2 \hat{g}_{\varepsilon,*} \mathrm{d}v\mathrm{d}v_*
\end{aligned}$$

Using Proposition 4.4 we obtain for $\delta > 0$

$$\begin{aligned} & \iiint \mathbb{1}_{|v-v_*| > \frac{1}{\varepsilon}} P_\varepsilon P_{\varepsilon,*} \hat{g}_\varepsilon^2 dv dv_* \\ & \leq \delta \iint P_{\varepsilon,*} P_\varepsilon h \left(\frac{f_\varepsilon - P_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right) dv dv_* + \iint \mathbb{1}_{|v-v_*| > \frac{1}{\varepsilon}} P_\varepsilon P_{\varepsilon,*} h^* \left(\frac{1}{\delta \varepsilon^2} \right) dv dv_* \\ & \leq C \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int P_\varepsilon h \left(\frac{f_\varepsilon - P_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right) dv \right) + C e^{-\frac{1}{C \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

if δ is chosen big enough. Since $\varepsilon \sqrt{P_{\varepsilon,*} \hat{g}_{\varepsilon,*}}$ is bounded, the same computation works for the second term in the right hand side of (4.10), so that we finally get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \iiint B \left(\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1-f_\varepsilon)(1-f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1-f'_\varepsilon)(1-f'_{\varepsilon,*})} \right)^2 d\omega dv dv_* \\ & \leq \frac{C}{\varepsilon^2} D(f_\varepsilon) + \varepsilon^2 \|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(P_\varepsilon dv)}^4 + C \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int P_\varepsilon h \left(\frac{f_\varepsilon - P_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right) dv \right) + C e^{-\frac{1}{C \varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Collecting all the pieces together and using the coercivity of the linearized operator (Corollary 4.3) leads to the inequality stated above. \square

5. The modulated entropy

The main idea to prove the convergence of the solutions to the scaled Boltzmann-Fermi equation toward a solution of the incompressible Euler equation is to study the time evolution of the modulated entropy. Let

$$P_\varepsilon = \frac{M_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon}, \quad M_\varepsilon = a_\varepsilon e^{-\frac{|v-\varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon}},$$

be a local equilibrium which approximates the solution f_ε , with

$$(5.1) \quad a_\varepsilon = e^{a_0 + \varepsilon a_1}, \quad b_\varepsilon = b_0 e^{\varepsilon b_1}.$$

Recall that a_0 and b_0 are positive constants which were defined in Subsection 2.1. The modulated entropy is defined by

$$H(f_\varepsilon | P_\varepsilon) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left(f_\varepsilon \log \frac{f_\varepsilon}{P_\varepsilon} - f_\varepsilon + P_\varepsilon + (1-f_\varepsilon) \log \frac{1-f_\varepsilon}{1-P_\varepsilon} - (1-f_\varepsilon) + 1 - P_\varepsilon \right) dv dx.$$

PROPOSITION 5.1. *Any solution to the scaled Boltzmann-Fermi equation (1.6) satisfies the following identity*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon | P_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{\varepsilon, in}) - \frac{1}{\varepsilon^{q+3}} \int_0^t \int_\Omega D(f_\varepsilon) dx ds \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(1, \frac{v-\varepsilon u}{b_\varepsilon}, \frac{|v-\varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} \right) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(a_1, u, b_1) dx dv ds \\ &\quad - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon b_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_1 dx dv ds - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv ds \\ &\quad + \frac{1}{3\varepsilon^2} \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}} dv dx \right] ds. \end{aligned}$$

where the acceleration operator $\mathcal{A}_\varepsilon(a_1, u, b_1)$ is defined by (5.3).

PROOF. The modulated entropy can be written as

$$H(f_\varepsilon|P_\varepsilon) = H(f_\varepsilon|P_0) + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left(f_\varepsilon \log \frac{M_0}{M_\varepsilon} + \log \frac{1 + M_\varepsilon}{1 + M_0} \right) dv dx.$$

The H-theorem allows to write

$$(5.2) \quad \begin{aligned} H(f_\varepsilon|P_\varepsilon)(t) &= H(f_{\varepsilon,in}|P_{\varepsilon,in}) - \frac{1}{\varepsilon^{q+1}} \int_0^t \int_{\Omega} D(f_\varepsilon) dx ds \\ &+ \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(-\log a_\varepsilon + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} - \frac{|v|^2}{2} \right) dx dv \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \log(1 + M_\varepsilon) dx dv \right] ds. \end{aligned}$$

The last term is rewritten thanks to an integration per part,

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \log(1 + M_\varepsilon) dx dv = \frac{1}{3} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{1}{b_\varepsilon} |v|^2 \frac{a_\varepsilon e^{-\frac{|v|^2}{2b_\varepsilon}}}{1 + a_\varepsilon e^{-\frac{|v|^2}{2b_\varepsilon}}} dv dx.$$

For the other term in (5.2), we compute the time derivative:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(-\log a_\varepsilon + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} - \frac{|v|^2}{2} \right) dx dv \\ &= \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left[\partial_t f_\varepsilon \left(-\log a_\varepsilon + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} - \frac{|v|^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + f_\varepsilon \left(-\partial_t \log a_\varepsilon - \frac{\partial_t b_\varepsilon}{b_\varepsilon} \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{b_\varepsilon} (v - \varepsilon u) \cdot \partial_t u \right) \right] dx dv. \end{aligned}$$

Using the conservation laws (2.9), it comes

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(-\log a_\varepsilon + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} - \frac{|v|^2}{2} \right) dx dv \\ &= - \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\partial_t \log a_\varepsilon + u \cdot \nabla_x \log a_\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{b_\varepsilon} (v - \varepsilon u) \left(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x u : (v - \varepsilon u) + \frac{1}{\varepsilon^2} b_\varepsilon \nabla_x \log a_\varepsilon \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} \left(\frac{\partial_t b_\varepsilon}{b_\varepsilon} + u \cdot \frac{\nabla_x b_\varepsilon}{b_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} (v - \varepsilon u) \cdot \frac{\nabla_x b_\varepsilon}{b_\varepsilon} \right) \right] dv dx. \end{aligned}$$

Introducing the rescaled translated versions of the momentum and energy fluxes

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon &= \frac{1}{b_\varepsilon} \left((v - \varepsilon u)^{\otimes 2} - |v - \varepsilon u|^2 I \right) \\ \Psi_\varepsilon &= \frac{v - \varepsilon u}{b_\varepsilon^2} \left(|v - \varepsilon u|^2 - \tau_\varepsilon \right), \end{aligned}$$

(τ_ε is chosen so that $\frac{\Psi_\varepsilon}{1+M_\varepsilon} \in (\text{Ker } \mathcal{L}_\varepsilon)^\perp$) we then obtain:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(-\log a_\varepsilon + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} - \frac{|v|^2}{2} \right) dx dv \\ &= - \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\partial_t \log a_\varepsilon + u \cdot \nabla_x \log a_\varepsilon \right. \\ & \quad + \frac{\varepsilon}{b_\varepsilon} (v - \varepsilon u) \left(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \frac{1}{\varepsilon^2} b_\varepsilon \nabla_x \log a_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \tau_\varepsilon \frac{\nabla_x b_\varepsilon}{b_\varepsilon} \right) \\ & \quad \left. + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} \left(\frac{\partial_t b_\varepsilon}{b_\varepsilon} + u \cdot \frac{\nabla_x b_\varepsilon}{b_\varepsilon} + \frac{2}{3\varepsilon} \nabla_x \cdot u \right) \right] dx dv \\ & \quad - \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_\varepsilon dx dv - \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv. \end{aligned}$$

We now replace a_ε and b_ε by (5.1), which leads to

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(-\log a_\varepsilon + \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} - \frac{|v|^2}{2} \right) dx dv \\ &= - \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left[\varepsilon (\partial_t a_1 + u \cdot \nabla_x a_1) \right. \\ & \quad + \frac{\varepsilon}{b_\varepsilon} (v - \varepsilon u) \left(\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \frac{1}{\varepsilon} b_\varepsilon \nabla_x a_1 + \frac{1}{\varepsilon} \tau_\varepsilon \nabla_x b_1 \right) \\ & \quad \left. + \varepsilon \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} \left(\partial_t b_1 + u \cdot \nabla_x b_1 + \frac{2}{3\varepsilon} \nabla_x \cdot u \right) \right] dx dv \\ & \quad - \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_\varepsilon dx dv - \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv. \end{aligned}$$

Summarizing, the modulated entropy satisfies the following equation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon | P_\varepsilon)(t) &= \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{\varepsilon, in}) - \frac{1}{\varepsilon^{q+3}} \int_0^t \int_\Omega D(f_\varepsilon) dx ds \\ & \quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(1, \frac{v - \varepsilon u}{b_\varepsilon}, \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} \right) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(a_1, u, b_1) dx dv ds \\ & \quad - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (b_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_1 + \Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv ds \\ & \quad + \frac{1}{3\varepsilon^2} \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}} dv dx \right] ds. \end{aligned}$$

where the acceleration operator is defined by

$$(5.3) \quad \mathcal{A}_\varepsilon(a, u, b) = \begin{pmatrix} \partial_t a + u \cdot \nabla_x a \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + b_0 \frac{e^{\varepsilon b} - 1}{\varepsilon} \nabla_x a + \frac{1}{\varepsilon} (\tau_\varepsilon - \tau_0) \nabla_x b + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x (b_0 a + \tau_0 b) \\ \partial_t b + u \cdot \nabla_x b + \frac{2}{3\varepsilon} \nabla_x \cdot u \end{pmatrix}$$

□

6. Construction of the approximate solutions

A global equilibrium solution is not expected to be a good approximation of f_ε in the fast relaxation limit since fast oscillations can take place, such as acoustic waves. Hence

we have to find correctors in order to obtain a refined approximation which will lead to the convenient asymptotics.

Define the unknown

$$V = (a_1, u, b_1),$$

the penalization operator

$$WV = \left(0, \nabla_x (b_0 a_1 + \tau_0 b_1), \frac{2}{3} \nabla_x \cdot u \right)$$

and the bilinear operator

$$B(V, V) = \begin{pmatrix} u \cdot \nabla_x a_1 \\ u \cdot \nabla_x u + b_0 b_1 \nabla_x a_1 + \tau_1 \nabla_x b_1 \\ u \cdot \nabla_x b_1 \end{pmatrix}$$

(τ_1 is a linear combination of a_1 and b_1); we want to find $V_\varepsilon = (a_1^\varepsilon, u_\varepsilon, b_1^\varepsilon)$ such that $\mathcal{A}_\varepsilon(a_1^\varepsilon, u_\varepsilon, b_1^\varepsilon) \rightarrow 0$ in L^2 , that is,

$$\partial_t V_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} W V_\varepsilon + B(V_\varepsilon, V_\varepsilon) \rightarrow 0,$$

with the constraint

$$(6.1) \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}} dv dx \rightarrow 0,$$

which is the main difficulty. However, for this constraint to be satisfied, we only need the mass conservation, as shown by Proposition 6.2.

In L^2 equipped with the norm

$$\|V\|_{L^2}^2 = \|a_1\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2\tau_0} \|b_0 a_1 + \tau_0 b_1\|_{L^2}^2,$$

the operator W is skew-symmetric. We can thus defined the associated semigroup \mathcal{W} . If we conjugate the equation with $\mathcal{W}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, it comes

$$\partial_t \left(\mathcal{W}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) V \right) + \mathcal{W}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) B(V, V) = 0.$$

Defining

$$\tilde{V} = \mathcal{W}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) V,$$

it becomes

$$(6.2) \quad \partial_t \tilde{V} + \mathcal{W}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) B\left(\mathcal{W}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \tilde{V}, \mathcal{W}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \tilde{V}\right) = 0.$$

The problem can be dealt with using filtering methods (see [131] for example). We will prove the following result:

THEOREM 6.1. *Let $(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})$ belong to $H^s(\Omega)$ for some $s > \frac{5}{2}$. Then there exists some $T > 0$ and some family $(a_1^{\varepsilon, N}, u^{\varepsilon, N}, b_1^{\varepsilon, N})$ such that*

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(a_1^{\varepsilon, N}, u^{\varepsilon, N}, b_1^{\varepsilon, N})\|_{L^\infty([0, T]; H^s(\Omega))} \leq C_T,$$

$$(a_1^{\varepsilon, N, in}, u^{\varepsilon, N, in}, b_1^{\varepsilon, N, in}) \rightarrow (a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in}) \quad \text{in } H^s(\Omega) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ then } N \rightarrow +\infty,$$

$\mathcal{A}_\varepsilon(a_1^{\varepsilon,N}, u^{\varepsilon,N}, b_1^{\varepsilon,N}) \rightarrow 0$ in $L^2([0, T] \times \Omega)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ then $N \rightarrow +\infty$,

and

$$A_\varepsilon^N = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1^{\varepsilon,N}}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1^{\varepsilon,N} - \frac{e^{-\varepsilon b_1^{\varepsilon,N}} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1^{\varepsilon,N} - \frac{e^{-\varepsilon b_1^{\varepsilon,N}} |v|^2}{2b_0}}} dv dx \rightarrow 0$$

in $L^1([0, T])$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ then $N \rightarrow +\infty$.

6.1. Study of W . At this point, we need spectral properties of the operator W . As it is skew-symmetric, its eigenvalues are purely imaginary, and its eigenvectors satisfy

$$WV_\lambda = i\lambda V_\lambda,$$

which can be written

$$\begin{cases} 0 = i\lambda a_\lambda \\ \nabla_x(b_0 a_\lambda + \tau_0 b_\lambda) = i\lambda u_\lambda \\ \frac{2}{3} \nabla_x \cdot u_\lambda = i\lambda b_\lambda \end{cases}$$

In other words, if $\lambda \neq 0$, the eigenvectors satisfy

$$\begin{cases} a_\lambda = 0 \\ \Delta_x b_\lambda = -\frac{3}{2\tau_0} \lambda^2 b_\lambda \\ \nabla_x b_\lambda = i \frac{\lambda}{\tau_0} u_\lambda \end{cases}$$

Hence, the operator W has the same spectral structure as the laplacian on Ω , which means that is diagonalizable on the orthogonal of its kernel. Indeed, there exists an hilbertian basis $(\phi_n)_{n \in I}$ of $L^2(\Omega)$ such that

$$-\Delta_x \phi_n = \mu_n \phi_n \quad \text{with} \quad n \cdot \nabla_x \phi_n = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

with $\mu_n > 0$ for $n \in \mathbb{N}^*$ and

$$\Delta_x \phi_n = 0 \quad \text{with} \quad n \cdot \nabla_x \phi_n = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

for $n \in I \setminus \mathbb{N}^*$. This yields that the family $(\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ defined by

$$\psi_n = \left(0, i \operatorname{sgn}(n) \sqrt{\frac{3\tau_0}{2\mu_{|n|}}} \nabla_x \phi_{|n|}, \phi_{|n|} \right)$$

is an hilbertian basis of $(\ker W)^\perp$. An explicit computation shows that the orthogonal projection on $\ker W$ is

$$\Pi_0(a, u, b) = \left(a, Pu, \frac{|\Omega|^{-1} \int (b_0 a + \tau_0 b) dx - b_0 a}{\tau_0} \right)$$

where P is the Leray projection, that is, the orthogonal projection onto the divergence-free vectors. In the sequel, Π_λ is the orthogonal projection onto $\ker(W - \lambda I)$.

6.2. Construction. We just sketch here the construction of approximate solutions to (6.2), but we refer to [130] for all the details. The method consists in:

- Decompose the operator W as $W = \sum_{\lambda \in \sigma_p} \lambda \Pi_\lambda$ and plug this into (6.2). It leads to

$$\partial_t \tilde{V} + \sum_{k_1, k_2, k_3 \in \sigma_p} e^{i \frac{t}{\varepsilon} (\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} - \lambda_{k_3})} \Pi_{\lambda_{k_1}} B(\Pi_{\lambda_{k_2}} \tilde{V}, \Pi_{\lambda_{k_3}} \tilde{V}) = 0$$

- The first order approximation \tilde{V}_0 of \tilde{V} is defined as the solution of equation (6.2) when we take into account only the resonant modes, that is,

$$\partial_t \tilde{V}_0 + \sum_{\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} + \lambda_{k_3}} \Pi_{\lambda_{k_1}} B(\Pi_{\lambda_{k_2}} \tilde{V}_0, \Pi_{\lambda_{k_3}} \tilde{V}_0) = 0$$

This equation is known to have solutions in $L_{loc}^\infty([0, T_*), H^s(\Omega))$ provided that $V^{in} \in H^s(\Omega)$ and $s > \frac{5}{2}$. However, \tilde{V}_0 is not an approximation of \tilde{V} in the sense that $\mathcal{A}_\varepsilon(\tilde{V}_0)$ converges weakly but not strongly in L^2 to 0. We therefore have to add correctors.

- Hence, we construct the second order approximation plugging $\tilde{V} = \tilde{V}_0 + \varepsilon \tilde{V}_1 + o(\varepsilon)$ into (6.2). To avoid the problem of small divisors, we introduce the projection onto a finite dimensional subset of $C^\infty(\bar{\Omega})$ J_N , which is the orthogonal projection onto the N first harmonics of W and the N first harmonics in $\ker W$. We then denote $\tilde{V}_0^N = J_N \tilde{V}_0$, and we check that $\int \tilde{V}_0 dx = \int \tilde{V}_0^N dx$. We define \tilde{V}_1^N by

$$\tilde{V}_1^N = J_N \sum_{\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} \neq \lambda_k} \frac{\exp\left(\frac{it}{\varepsilon}(\lambda_k - \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})\right)}{i(\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} - \lambda_k)} \Pi_{\lambda_k} B(\Pi_{\lambda_{k_1}} \tilde{V}_0^N, \Pi_{\lambda_{k_2}} \tilde{V}_0^N).$$

Then, $\tilde{V}_0^N + \varepsilon \tilde{V}_1^N$ is an approximate solution of (6.2). However, it does not satisfy $\frac{1}{\varepsilon^2} \int (\tilde{V}_0^N + \varepsilon \tilde{V}_1^N) dx \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.

- We therefore define the third order approximation \tilde{V}_2^N as in [130] by plugging $\tilde{V}_\varepsilon^N = \tilde{V}_0^N + \varepsilon \tilde{V}_1^N + \varepsilon^2 \tilde{V}_2^N + o(\varepsilon^2)$ into (6.2), and we check that
 - $\tilde{V}_\varepsilon^N = \tilde{V}_0^N + \varepsilon \tilde{V}_1^N + \varepsilon^2 \tilde{V}_2^N$ is an approximate solution of (6.2),
 - $\frac{1}{\varepsilon^2} \int \tilde{V}_\varepsilon^N dx \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.

The key ingredient for the above computations to work is that, for $\lambda, \mu \neq 0$ with $\lambda \neq \mu$, we have

$$\Pi_0 B(\Pi_\lambda V, \Pi_\mu V) = 0.$$

Indeed, writing $\Pi_\lambda V = (a_\lambda, u_\lambda, b_\lambda)$, we get

$$\Pi_0 B(\Pi_\lambda V, \Pi_\mu V) = \frac{1}{2} \Pi_0 \begin{pmatrix} u_\lambda \cdot \nabla_x a_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x a_\lambda \\ u_\lambda \cdot \nabla_x u_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x u_\lambda + b_0 b_\lambda \nabla_x a_\mu + b_0 b_\mu \nabla_x a_\lambda \\ + (c^1 a_\lambda + c^2 b_\lambda) \nabla_x b_\mu + (c^1 a_\mu + c^2 b_\mu) \nabla_x b_\lambda \\ u_\lambda \cdot \nabla_x b_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x b_\lambda \end{pmatrix};$$

but $a_\lambda = a_\mu = 0$ since $\lambda, \mu \neq 0$, so that

$$\begin{aligned} \Pi_0 B(\Pi_\lambda V, \Pi_\mu V) &= \frac{1}{2} \Pi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ u_\lambda \cdot \nabla_x u_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x u_\lambda + c^2 b_\lambda \nabla_x b_\mu + c^2 b_\mu \nabla_x b_\lambda \\ u_\lambda \cdot \nabla_x b_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x b_\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ P(u_\lambda \cdot \nabla_x u_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x u_\lambda) \\ \oint (u_\lambda \cdot \nabla_x b_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x b_\lambda) dx \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note that $\int u_\lambda \cdot \nabla_x b_\mu dx = -\frac{3\mu^2}{2i\lambda} \int b_\lambda \cdot b_\mu dx = 0$ since $\lambda \neq \mu$. Moreover,

$$(u_\lambda \cdot \nabla_x u_\mu + u_\mu \cdot \nabla_x u_\lambda)_i = (\nabla_x (u_\lambda \cdot u_\mu))_i + u_\lambda^j (\partial_j u_\mu^i - \partial_i u_\mu^j) + u_\mu^j (\partial_j u_\lambda^i - \partial_i u_\lambda^j),$$

so that

$$\Pi_0 B(\Pi_\lambda V, \Pi_\mu V) = 0.$$

In addition, if $\lambda \neq 0$,

$$\int_{\Omega} b_{\lambda} dx = -i \frac{2}{3\lambda} \int_{\Omega} \nabla_x \cdot u_{\lambda} dx = i \frac{2}{3\lambda} \int_{\partial\Omega} u \cdot n d\sigma_x = 0.$$

At the end, we get that

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{b} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} b_0 dx = 0$$

and

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{a} dx = 0,$$

which is the key to see that $\frac{1}{\varepsilon^2} \int \tilde{V}_{\varepsilon}^N dx \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.

The equation for the non-oscillating part can be decoupled from the rest of the system, and writes

$$\partial_t \Pi_0 \tilde{V} + \Pi_0 B(\Pi_0 \tilde{V}, \Pi_0 \tilde{V}) = 0,$$

which can be rewritten, with the notation $\Pi_0 \tilde{V} = (\bar{a}, \bar{u}, \bar{b})$,

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{a} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{a} &= 0, & \partial_t \bar{b} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{b} &= 0, & \nabla_x (b_0 \bar{a} + \tau_0 \bar{b}) &= 0, \\ \partial_t \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla_x \bar{u} + \nabla_x p &= 0, & \nabla_x \cdot \bar{u} &= 0. \end{aligned}$$

This is the incompressible Euler system. Now it remains to show that the approximate solution we constructed satisfies the constraint (6.1). This is the object of the following result:

PROPOSITION 6.2. *With the above construction of $\tilde{V}_{\varepsilon}^N = (a_1^N, u^N, b_1^N)$, the quantity*

$$(6.3) \quad A_{\varepsilon}^N = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1^N}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1^N - \frac{\varepsilon^{-\varepsilon b_1^N} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1^N - \frac{\varepsilon^{-\varepsilon b_1^N} |v|^2}{2b_0}}} dv dx$$

goes to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$ for all $N \geq 1$.

PROOF. A_{ε}^N can be rewritten

$$A_{\varepsilon}^N = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{dt} \int (\beta_{\varepsilon}^N)^{3/2} F_2(\alpha_{\varepsilon}^N) dx$$

where

$$\beta_{\varepsilon}^N = b_0 e^{\varepsilon b_1^N}, \quad \alpha_{\varepsilon}^N = e^{a_0 + \varepsilon a_1^N}$$

and

$$F_p(\alpha) = \int |v|^p \frac{\alpha e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{1 + \alpha e^{-\frac{|v|^2}{2}}} dv.$$

Using the equality

$$\alpha F_2'(\alpha) = \frac{3}{2} F_0(\alpha),$$

we compute

$$A_{\varepsilon}^N = \frac{3b_0^{3/2}}{2\varepsilon} \int \left(e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} F_2(\alpha_{\varepsilon}^N) \partial_t b_1^N + e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} F_0(\alpha_{\varepsilon}^N) \partial_t a_1^N \right) dx.$$

We easily prove the two identities

$$e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} (u \cdot \nabla_x b_1^N + \frac{2}{3\varepsilon} \nabla_x \cdot u^N) = \nabla_x \cdot \left(\frac{2}{3\varepsilon} e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} u^N \right)$$

and

$$\int F_2(\alpha_\varepsilon^N) \nabla_x \cdot \left(\frac{2}{3\varepsilon} e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} u^N \right) dx = - \int e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} F_0(\alpha_\varepsilon^N) u^N \cdot \nabla_x a_1^N dx,$$

which imply that

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^N &= \frac{3b_0^{3/2}}{2\varepsilon} \int \left(F_2(\alpha_\varepsilon^N) e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} \left(\partial_t b_1^N + u^N \cdot \nabla_x b_1^N + \frac{2}{3\varepsilon} \nabla_x \cdot u^N \right) \right. \\ &\quad \left. + F_0(\alpha_\varepsilon^N) e^{\frac{3}{2}\varepsilon b_1^N} \left(\partial_t a_1^N + u^N \cdot \nabla_x a_1^N \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Using the fact that $\mathcal{A}(a_1^N, u^N, b_1^N) \rightarrow 0$ in L^2 and the conservation of the mass, we deduce that

$$A_\varepsilon^N \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

□

7. End of the proof

We now have all the ingredients to prove Theorem 3.1. We begin by controlling the flux terms, and then end the proof of the theorem.

7.1. Control of the flux terms. Our goal is to estimate the terms

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon b_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_1 dx dv ds$$

and

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv ds$$

with respect to the modulated entropy and the entropy dissipation. The main difficulty is that $\Psi_\varepsilon = O(|v|^3)$ whereas the modulated entropy allows us to control the powers of v only up to 2, via Young's inequality. We therefore try to gain as much integrability as possible. Here the relaxation estimate (4.3) plays a central role. Since it gives a control on $\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon}$, we use a new decomposition of f_ε

$$(7.1) \quad f_\varepsilon = P_\varepsilon + \varepsilon^2 P_\varepsilon \left(\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) \left(\hat{g}_\varepsilon + \hat{h}_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon} \right)$$

and we obtain the following estimate:

PROPOSITION 7.1. *Assume that $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ and $\tilde{\Psi}_\varepsilon$ have at most polynomial growth and that (4.2) holds. Then the flux terms are bounded by the following quantities:*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon b_\varepsilon \Psi_\varepsilon \cdot \nabla_x b_1 dx dv ds + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (\Phi_\varepsilon \cdot \nabla_x u) dx dv ds \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^t \|D_x(u, b_1)(s)\|_{L^2 \cap L^\infty(\Omega)} \left(H(f_\varepsilon | P_\varepsilon)(s) + \int_\Omega D(f_\varepsilon)(s) dx \right) ds + o(1). \end{aligned}$$

PROOF. The proof for the momentum flux (involving Φ_ε) is identical to the one with the energy flux (involving Ψ_ε), hence we will focus on the first one. Writing f_ε as in (7.1), we use a first decomposition of the flux terms:

$$(7.2) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_\varepsilon f_\varepsilon dv = \frac{2}{\varepsilon} \int \Phi_\varepsilon P_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} dv + \int \Phi_\varepsilon P_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} (\hat{g}_\varepsilon + \hat{h}_\varepsilon) dv$$

since $\int_{\mathbb{R}^3} P_\varepsilon \Phi_\varepsilon dv = 0$. To treat the first term in the right hand side, we use the identity (4.7), which implies

(7.3)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} P_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \Phi_\varepsilon dv = \int_{\mathbb{R}^3} M_\varepsilon \tilde{\Phi}_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} dv \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2} \iiint B \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} \left(\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1 - f'_\varepsilon)(1 - f'_{\varepsilon,*})} \right) dv dv_* d\omega \\
& - \iiint B \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon \left(\hat{g}'_\varepsilon \hat{g}'_{\varepsilon,*} - \hat{g}_\varepsilon \hat{g}_{\varepsilon,*} + \hat{h}_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{h}'_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} + \hat{g}'_\varepsilon \hat{h}_\varepsilon - \hat{g}_\varepsilon \hat{h}'_\varepsilon \right. \\
& \quad \left. + \hat{g}'_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{g}_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} + \hat{g}'_{\varepsilon,*} \hat{h}_\varepsilon - \hat{g}_{\varepsilon,*} \hat{h}'_\varepsilon + \hat{g}'_{\varepsilon,*} \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{g}_{\varepsilon,*} \hat{h}'_{\varepsilon,*} \right) dv dv_* d\omega \\
& - \varepsilon \iiint B \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon \left(\hat{g}'_\varepsilon \hat{g}'_{\varepsilon,*} (\hat{h}_\varepsilon + \hat{h}_{\varepsilon,*}) - \hat{g}_\varepsilon \hat{g}_{\varepsilon,*} (\hat{h}'_\varepsilon + \hat{h}'_{\varepsilon,*}) \right. \\
& \quad \left. + \hat{h}_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} (\hat{g}'_\varepsilon + \hat{g}'_{\varepsilon,*}) - \hat{h}'_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} (\hat{g}_\varepsilon + \hat{g}_{\varepsilon,*}) \right) dv dv_* d\omega \\
& - \varepsilon^2 \iiint B \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon \left(\hat{g}'_\varepsilon \hat{g}'_{\varepsilon,*} \hat{h}_\varepsilon \hat{h}_{\varepsilon,*} - \hat{g}_\varepsilon \hat{g}_{\varepsilon,*} \hat{h}'_\varepsilon \hat{h}'_{\varepsilon,*} \right) dv dv_* d\omega
\end{aligned}$$

The first term can be estimated by the entropy dissipation as showed by the next lemma, while the other terms are controlled straightforwardly by the $L^2(M_\varepsilon dv)$ norm of \hat{g}_ε , and hence by the modulated entropy.

LEMMA 7.2. *Assume that $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ has at most a polynomial growth and that (4.2) holds. Then the first term in the decomposition (7.3) is estimated by:*

$$\begin{aligned}
& \int \left(\int B \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} \left(\sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1 - f'_\varepsilon)(1 - f'_{\varepsilon,*})} \right) dv dv_* d\omega \right)^2 dx \\
& \leq C \left(\int D(f_\varepsilon) dx + e^{\frac{1}{16\varepsilon^2}} \right)
\end{aligned}$$

PROOF. Let

$$G_\varepsilon = \sqrt{f'_\varepsilon f'_{\varepsilon,*} (1 - f_\varepsilon)(1 - f_{\varepsilon,*})} - \sqrt{f_\varepsilon f_{\varepsilon,*} (1 - f'_\varepsilon)(1 - f'_{\varepsilon,*})};$$

We decompose

$$\begin{aligned}
(7.4) \quad & \int B \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} G_\varepsilon dv dv_* d\omega \\
& = \int B_\varepsilon \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} G_\varepsilon dv dv_* d\omega + \int (B - B_\varepsilon) \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} G_\varepsilon dv dv_* d\omega.
\end{aligned}$$

The first term is dealt with thanks to the Cauchy-Schwarz inequality and Proposition (4.6):

$$\int B_\varepsilon \tilde{\Phi}_\varepsilon \Lambda_\varepsilon^{1/2} G_\varepsilon dv dv_* d\omega \leq C \left(\int B(\tilde{\Phi}_\varepsilon)^2 \Lambda_\varepsilon dv_* dv d\omega \right)^{1/2} D(f_\varepsilon)^{1/2}$$

By Corollary 4.3, the coercivity inequality implies, since $\tilde{\Phi}_\varepsilon \in (\text{Ker } \mathcal{L}_\varepsilon)^\perp$, that

$$\int B(\tilde{\Phi}_\varepsilon)^2 \Lambda_\varepsilon dv_* dv d\omega \leq C \int \frac{M_\varepsilon}{(1 + M_\varepsilon)^2} (\Phi_\varepsilon)^2 dv,$$

with $C > 0$ independent of ε .

The second term in the right hand side of (7.4), containing the high velocities, is handled using the inequality

$$\mathbb{1}_{|v-v_*|>\frac{1}{\varepsilon}} M_\varepsilon M_{\varepsilon,*} \leq a_\varepsilon^{1/2} M_\varepsilon^{3/4} M_{\varepsilon,*}^{3/4} e^{-\frac{1}{16b_\varepsilon \varepsilon^2}},$$

using that $\tilde{\Phi}_\varepsilon(1 + M_\varepsilon)$ is at most polynomial:

$$\begin{aligned} & \int (B - B_\varepsilon) \tilde{\Phi}_\varepsilon(1 + M_\varepsilon) \Lambda_\varepsilon^{1/2} G dv dv_* d\omega \\ & \leq C e^{-\frac{1}{32b_\varepsilon \varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

□

The next terms in (7.3) are dealt with using Cauchy-Schwarz inequality and the a priori bound (4.6), and therefore are easily bounded by $C(\|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2[P_\varepsilon dv]}^2 + \|\hat{h}_\varepsilon\|_{L^2}^2)$. Coming back to (7.2), the second term on the right hand side is splitted as follows, in order to use the relaxation estimate:

$$\begin{aligned} \int \Phi_\varepsilon P_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} (\hat{g}_\varepsilon + \hat{h}_\varepsilon) dv &= \int \Phi_\varepsilon P_\varepsilon \left(\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} - \Pi_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) (\hat{g}_\varepsilon + \hat{h}_\varepsilon) dv \\ &+ \int \Phi_\varepsilon P_\varepsilon \Pi_\varepsilon \left(\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) (\hat{g}_\varepsilon + \hat{h}_\varepsilon) dv \end{aligned}$$

The last term is easily handled:

$$\int \Phi_\varepsilon P_\varepsilon \Pi_\varepsilon \left(\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) (\hat{g}_\varepsilon + \hat{h}_\varepsilon) dv \leq C(\|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(P_\varepsilon dv)} + \|\hat{h}_\varepsilon\|_{L^2})$$

while we need some control on the high velocities for the first one. From the hypothesis (3.4), we deduce that

$$\int_{\mathbb{R}^3} P_\varepsilon \left(\frac{f_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right)^{2p} dv \leq C_p \text{ a.e.}$$

for all $p < 1$ and uniformly in ε (which depends on p), since the moments of P_ε differ from that of P_0 only by terms of order ε . This estimate leads to some control on the rescaled fluctuations:

$$\varepsilon|\hat{g}_\varepsilon| + \varepsilon|\hat{h}_\varepsilon| = O(1)_{L^\infty_{i,x} L^{4p}(P_\varepsilon dv)}$$

so that

$$\varepsilon \left(\left(\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) - \Pi_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) = O(1)_{L^\infty_{i,x} L^{4p}(P_\varepsilon dv)}$$

The relaxation estimate (4.3) coupled with some interpolation gives

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} - \Pi_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right\|_{L^{\frac{8p}{2p+1}}(P_\varepsilon dv)} &= O \left(\|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(P_\varepsilon dv)} + \|\hat{h}_\varepsilon\|_{L^2} \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int P_\varepsilon h \left(\frac{f_\varepsilon - P_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right) dv \right)^{1/2} \right) + o(1). \end{aligned}$$

Choosing $p > \frac{1}{2}$ implies $\frac{8p}{2p+1} > 2$, and we can obtain the final estimate:

$$\begin{aligned} \int \Phi_\varepsilon P_\varepsilon \left(\frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} - \Pi_\varepsilon \frac{\hat{g}_\varepsilon - \hat{h}_\varepsilon}{1 + M_\varepsilon} \right) (\hat{g}_\varepsilon + \hat{h}_\varepsilon) dv &= O \left(\|\hat{g}_\varepsilon\|_{L^2(P_\varepsilon dv)}^2 + \|\hat{h}_\varepsilon\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \int P_\varepsilon h \left(\frac{f_\varepsilon - P_\varepsilon}{P_\varepsilon} \right) dv \right) + o(1) \end{aligned}$$

□

7.2. Proof of convergence. In view of the preceding results, we are now able to prove Theorem 3.1. Proposition 5.1 together with Proposition 7.1 imply the following:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon | P_\varepsilon)(t) + \frac{1}{\varepsilon^{q+3}} \int_0^t \int_\Omega D(f_\varepsilon) dx ds \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{\varepsilon, in}) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(1, \frac{v - \varepsilon u}{b_\varepsilon}, \frac{|v - \varepsilon u|^2}{2b_\varepsilon} \right) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(a_1, u, b_1) dx dv ds \\ &\quad + \frac{1}{3\varepsilon^2} \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1 - \frac{e^{-\varepsilon b_1} |v|^2}{2b_0}}} dv dx \right] ds \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^t \|D_x(u, b_1)(s)\|_{L^2 \cap L^\infty(\Omega)} \left(H(f_\varepsilon | P_\varepsilon)(s) + \int_\Omega D(f_\varepsilon)(s) dx \right) ds + o(1). \end{aligned}$$

We plug the functions $(a_1^{\varepsilon, N}, u^{\varepsilon, N}, b_1^{\varepsilon, N})$ constructed in Theorem 6.1 in the approximate solution P_ε . It follows by Gronwall's lemma that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon | P_\varepsilon^N)(t) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{\varepsilon, in}^N) \exp \left(\int_0^t \|D_x(u^{\varepsilon, N}, b_1^{\varepsilon, N})(s)\|_{L^2 \cap L^\infty(\Omega)} ds \right) \\ &\quad + \int_0^t \exp \left(\int_s^t \|D_x(u^{\varepsilon, N}, b_1^{\varepsilon, N})(\tau)\|_{L^2 \cap L^\infty(\Omega)} d\tau \right) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \left(1, \frac{v - \varepsilon u^{\varepsilon, N}}{b_\varepsilon}, \frac{|v - \varepsilon u^{\varepsilon, N}|^2}{2b_\varepsilon} \right) \cdot \mathcal{A}_\varepsilon(a_1^{\varepsilon, N}, u^{\varepsilon, N}, b_1^{\varepsilon, N}) dx dv \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3\varepsilon^2} \left(\frac{d}{dt} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon b_1^{\varepsilon, N}}}{b_0} |v|^2 \frac{e^{a_0 + \varepsilon a_1^{\varepsilon, N} - \frac{e^{-\varepsilon b_1^{\varepsilon, N}} |v|^2}{2b_0}}}{1 + e^{a_0 + \varepsilon a_1^{\varepsilon, N} - \frac{e^{-\varepsilon b_1^{\varepsilon, N}} |v|^2}{2b_0}}} dv dx \right) + o(1) \right] ds \end{aligned}$$

The last term go to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$ then $N \rightarrow 0$ thanks to Theorem 6.1, using the fact that

$$\int_\Omega \mathcal{A}_\varepsilon(a_1^{\varepsilon, N}, u^{\varepsilon, N}, b_1^{\varepsilon, N}) dx = 0.$$

The first term can be decomposed as

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{\varepsilon, in}^N) &= \frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})}) + \frac{1}{\varepsilon^2} H(P_{(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})} | P_{\varepsilon, in}^N) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} \iint \left((f_{\varepsilon, in} - P_{(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})}) \log \frac{P_{(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})}}{P_{\varepsilon, in}^N} \right. \\ &\quad \left. + (P_{(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})} - f_{\varepsilon, in}) \log \frac{1 - P_{(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})}}{1 - P_{\varepsilon, in}^N} \right) dv dx \end{aligned}$$

which tends to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$ and $N \rightarrow \infty$ since $\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_{\varepsilon, in} | P_{(a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})}) \rightarrow 0$ by hypothesis and $(a_1^{\varepsilon, N, in}, u^{\varepsilon, N, in}, b_1^{\varepsilon, N, in}) \rightarrow (a_1^{in}, u^{in}, b_1^{in})$.

This leads to

$$\frac{1}{\varepsilon^2} H(f_\varepsilon | P_\varepsilon^N) \rightarrow 0 \text{ in } L_{loc}^\infty([0; T]) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ then } N \rightarrow \infty,$$

which is a stronger result respect to the one stated above.

Bibliographie

Chapitre 1 : Introduction.

- [1] ALEXANDRE, R. On some related non homogeneous 3D Boltzmann models in the non cutoff case. *J. Math. Kyoto Univ* 40, 3 (2000), 493–524.
- [2] ALEXANDRE, R. A review of Boltzmann equation with singular kernels. *Kinet. Relat. Models* 2, 4 (2009), 551–646.
- [3] ALEXANDRE, R., AND VILLANI, C. On the Boltzmann equation for long-range interactions. *Comm. Pure Appl. Math.* 55, 1 (2002), 30–70.
- [4] ALEXANDRE, R., AND VILLANI, C. On the Landau approximation in plasma physics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 21, 1 (2004), 61–95.
- [5] ARLOTTI, L., AND LACHOWICZ, M. Euler and Navier-Stokes limits of the Uehling-Uhlenbeck quantum kinetic equations. *J. Math. Phys.* 38, 7 (1997), 3571–3588.
- [6] ARSÉNIO, D. *On the Boltzmann equation : hydrodynamic limit with long-range interactions and mild solutions*. PhD thesis, New York University, New York, Sept. 2009.
- [7] BARDOS, C., GOLSE, F., AND LEVERMORE, D. Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations. *J. Statist. Phys.* 63, 1 (1991), 323–344.
- [8] BARDOS, C., GOLSE, F., AND LEVERMORE, D. Fluid dynamic limits of kinetic equations. II. Convergence proofs for the Boltzmann equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 46, 5 (1993), 667–753.
- [9] BASDEVANT, J. *Physique, mécanique quantique*. Ecole polytechnique, Département de physique, 1993.
- [10] BENEDETTO, D., CASTELLA, F., ESPOSITO, R., AND PULVIRENTI, M. Some considerations on the derivation of the nonlinear quantum Boltzmann equation. *J. Statist. Phys.* 116, 1 (2004), 381–410.
- [11] BENEDETTO, D., CASTELLA, F., ESPOSITO, R., AND PULVIRENTI, M. On the weak-coupling limit for bosons and fermions. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 15, 12 (2005), 1811–1843.
- [12] BENEDETTO, D., CASTELLA, F., ESPOSITO, R., AND PULVIRENTI, M. A short review on the derivation of the nonlinear quantum Boltzmann equations. *Commun. Math. Sci.* 5, Supplement (2007), 55–71.
- [13] BENEDETTO, D., CASTELLA, F., ESPOSITO, R., AND PULVIRENTI, M. From the N-body Schrödinger equation to the quantum Boltzmann equation : a Term-by-Term convergence result in the weak coupling regime. *Comm. Math. Phys.* 277, 1 (2008), 1–44.
- [14] BOBYLEV, A. V., DUKES, P., ILLNER, R., AND H. D. VICTORY, J. On Vlasov-Manev equations. I : Foundations, properties, and nonglobal existence. *J. Statist. Phys.* 88, 3/4 (1997), 885–911.

-
- [15] CAFLISCH, R. E. The fluid dynamic limit of the nonlinear boltzmann equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 33, 5 (1980), 651–666.
- [16] CAFLISCH, R. E. Asymptotic expansions of solutions for the boltzmann equation. *Transport Theory Statist. Phys.* 16, 4 (1987), 701–725.
- [17] CERCIGNANI, C., ILLNER, R., AND PULVIRENTI, M. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, vol. 106 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1994.
- [18] CHAPMAN, S., AND COWLING, T. G. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge University Press, New York, 1960.
- [19] DEMASI, A., ESPOSITO, R., AND LEBOWITZ, J. L. Incompressible navier-stokes and euler limits of the boltzmann equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 42, 8 (1989), 1189–1214.
- [20] DESVILLETES, L. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transport Theory Statist. Phys.* 21, 3 (1992), 259–276.
- [21] DESVILLETES, L., AND GOLSE, F. A remark concerning the Chapman-Enskog asymptotics. In *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, vol. 22 of *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.* World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, pp. 191–203.
- [22] DIPERNA, R. J., AND LIONS, P. L. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : Global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)* 130, 2 (1989), 321–366.
- [23] DOLBEAULT, J. Kinetic models and quantum effects : A modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles. *Arch. Rational Mech. Anal.* 127, 2 (1994), 101–131.
- [24] ESCOBEDO, M., AND MISCHLER, S. On a quantum Boltzmann equation for a gas of photons. *J. Math. Pures Appl. (9)* 80, 5 (2001), 471–515.
- [25] ESCOBEDO, M., MISCHLER, S., AND VALLE, M. A. Homogeneous Boltzmann equation in quantum relativistic kinetic theory. *Electron. J. Differential Equations Monograph* 04 (2003).
- [26] ESCOBEDO, M., MISCHLER, S., AND VALLE, M. A. Entropy maximisation problem for quantum relativistic particles. *Bull. Soc. Math. France* 133, 1 (2005), 87–120.
- [27] GOLSE, F., LEVERMORE, D., AND SAINT-RAYMOND, L. La méthode de l'entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques. *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles École Polytech., Palaiseau* (2000).
- [28] GOLSE, F., LIONS, P.-L., PERTHAME, B., AND SENTIS, R. Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *J. Funct. Anal.* 76, 1 (1988), 110–125.
- [29] GOLSE, F., PERTHAME, B., AND SENTIS, R. Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 301, 7 (1985), 341–344.
- [30] GOLSE, F., AND SAINT-RAYMOND, L. A remark about the asymptotic theory of the Boltzmann equation. *Preprint*.
- [31] GOLSE, F., AND SAINT-RAYMOND, L. Velocity averaging in L^1 for the transport equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 334, 7 (2002), 557–562.
- [32] GOLSE, F., AND SAINT-RAYMOND, L. The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels. *Invent. Math.* 155, 1 (2004), 81–161.

-
- [33] GOLSE, F., AND SAINT-RAYMOND, L. The incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials. *J. Math. Pures Appl. (9)* 91, 5 (May 2009), 508–552.
- [34] GRAD, H. Asymptotic theory of the boltzmann equation. *Phys. Fluids* 6, 2 (1963), 147–181.
- [35] GRAD, H. Asymptotic theory of the boltzmann equation. II. In *Rarefied Gas Dynamics (Proc. 3rd Internat. Sympos., Palais de l'UNESCO, Paris, 1962)*, vol. I. Academic Press, New York, 1963, pp. 26–59.
- [36] GUO, Y. The boltzmann equation in the whole space. *Indiana Univ. Math. J.* 53, 4 (2004), 1081–1094.
- [37] HILBERT, D. Sur les problèmes futurs des mathématiques. In *Comptes Rendus du deuxième congrès international des mathématiciens*. Gauthier-Villars, Paris, 1902.
- [38] HILBERT, D. Begründung der kinetischen Gastheorie. *Math. Ann.* 72, 4 (1912), 562–577.
- [39] JABIN, P.-E. Averaging lemmas and dispersion estimates for kinetic equations. *Riv. Mat. Univ. Parma* 8, 1 (2009), 71–138.
- [40] KANIADAKIS, G., AND QUARATI, P. Kinetic equation for classical particles obeying an exclusion principle. *Phys. Rev. E* 48, 6 (1993), 4263–4270.
- [41] KANIADAKIS, G., AND QUARATI, P. Classical model of bosons and fermions. *Phys. Rev. E* 49, 6 (1994), 5103–5110.
- [42] KIESSLING, M. K. Microscopic derivations of Vlasov equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 13, 1 (2008), 106–113.
- [43] KIPNIS, C., AND LANDIM, C. *Scaling limits of interacting particle systems*, vol. 320 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1999.
- [44] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Course of theoretical physics*. Pergamon Press, Third Edition, 1977.
- [45] LANFORD, O. Time evolution of large classical systems. In *Dynamical Systems, Theory and Applications*. Springer Berlin / Heidelberg, 1975, pp. 1–111.
- [46] LEVERMORE, D., AND MASMOUDI, N. From the boltzmann equation to an incompressible Navier-Stokes-Fourier system. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 196, 3 (2010), 753–809.
- [47] LIONS, P. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models*. No. 3 in Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.
- [48] LIONS, P.-L. Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications. I. *J. Math. Kyoto Univ.* 34, 3 (1994), 391–428.
- [49] LIONS, P.-L. Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications. III. *J. Math. Kyoto Univ.* 34, 3 (1994), 539–584.
- [50] LIONS, P.-L. Conditions at infinity for Boltzmann's equation. *Comm. Partial Differential Equations* 19, 1 (1994), 335–367.
- [51] LIONS, P.-L., AND MASMOUDI, N. From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics, I. *Arch. Rational Mech. Anal.* 158, 3 (2001), 173–193.
- [52] LU, X. A modified Boltzmann equation for Bose-Einstein particles : Isotropic solutions and Long-Time behavior. *J. Statist. Phys.* 98, 5 (2000), 1335–1394.

-
- [53] LU, X. On isotropic distributional solutions to the Boltzmann equation for Bose-Einstein particles. *J. Statist. Phys.* 116, 5 (2004), 1597–1649.
- [54] LU, X. The Boltzmann equation for Bose-Einstein particles : Velocity concentration and convergence to equilibrium. *J. Stat. Phys.* 119, 5 (2005), 1027–1067.
- [55] LU, X. On the Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles with very soft potentials : Global existence of weak solutions. *J. Differential Equations* 245, 7 (2008), 1705–1761.
- [56] NIKUNI, T., ZAREMBA, E., AND GRIFFIN, A. Two-Fluid dynamics for a Bose-Einstein condensate out of local equilibrium with the noncondensate. *Phys. Rev. Lett.* 83, 1 (1999), 10–13.
- [57] NORDHEIM, L. W. On the kinetic method in the new statistics and its application in the electron theory of conductivity. *Proc. Roy. Soc. London A* 119, 783 (1928), 689–698.
- [58] NOURI, A. Bose-Einstein condensates at very low temperatures : a mathematical result in the isotropic case. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* 2, 2 (2007), 649–666.
- [59] NOURI, A. An existence result for a quantum BGK model. *Math. Comput. Modelling* 47, 3-4 (2008), 515–529.
- [60] PERTHAME, B. Global existence to the BGK model of Boltzmann equation. *J. Differential Equations* 82, 1 (1989), 191–205.
- [61] POMEAU, Y., BRACHET, M.-E., MÉTENS, S., AND RICA, S. Théorie cinétique d'un gaz de Bose dilué avec condensat. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Astr.* 327, 8 (1999), 791–798.
- [62] REED, M., AND SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory.* Academic Press, Inc, New York, 1979.
- [63] SAINT-RAYMOND, L. Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 166, 1 (2003), 47–80.
- [64] SAINT-RAYMOND, L. Kinetic models for superfluids : a review of mathematical results. *C. R. Phys.* 5, 1 (2004), 65–75.
- [65] SAINT-RAYMOND, L. *Hydrodynamic Limits of the Boltzmann Equation.* Springer, 2009.
- [66] SAINT-RAYMOND, L. Hydrodynamic limits : some improvements of the relative entropy method. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26, 3 (2009), 705–744.
- [67] UEHLING, E. A., AND UHLENBECK, G. E. Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases. i. *Phys. Rev.* 43, 7 (1933), 552–561.
- [68] UKAI, S. On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation. *Proc. Japan Acad.* 50, 3 (1974), 179–184.
- [69] VARADHAN, S. Entropy methods in hydrodynamic scaling. In *Nonequilibrium Problems in Many-Particle Systems.* Springer, 1993, pp. 112–145.
- [70] VILLANI, C. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics I* (2002), 71–305.
- [71] YAU, H. Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. *Lett. Math. Phys.* 22, 1 (1991), 63–80.

Chapitre 2 : The grazing collision limit of Kac caricature of Bose-Einstein particles.

- [72] ALEXANDRE, R., DESVILLETES, L., VILLANI, C., AND WENNBORG, B. Entropy dissipation and Long-Range interactions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 152, 4 (2000), 327–355.
- [73] BAO, W., PARESCHI, L., AND MARKOWICH, P. A. Quantum kinetic theory : modelling and numerics for Bose-Einstein condensation. In *Modeling and computational methods for kinetic equations*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Degond, Pierre ; Pareschi, Lorenzo ; Russo, Giovanni (Eds.), 2004.
- [74] BUET, C., AND CORDIER, S. Numerical method for the compton scattering operator. In *Lecture notes on the discretization of the Boltzmann equation*, vol. 63 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. Bellomo, N.; Gatignol, R. (Eds.), 2003.
- [75] CARRILLO, J., ROSADO, J., AND SALVARANI, F. 1D nonlinear Fokker-Planck equations for fermions and bosons. *Appl. Math. Lett.* 21, 2 (2008), 148–154.
- [76] CHAPMAN, S., AND COWLING, T. G. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge University Press, New York, 1960.
- [77] DESVILLETES, L. About the regularizing properties of the non-cut-off Kac equation. *Comm. Math. Phys.* 168, 2 (1995), 417–440.
- [78] ESCOBEDO, M., HERRERO, M. A., AND VELAZQUEZ, J. J. L. A nonlinear Fokker-Planck equation modelling the approach to thermal equilibrium in a homogeneous plasma. *Trans. Amer. Math. Soc.* 350, 10 (1998), 3837—3901.
- [79] ESCOBEDO, M., AND MISCHLER, S. équation de Boltzmann quantique homogène : existence et comportement asymptotique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 329, 7 (1999), 593–598.
- [80] ESCOBEDO, M., AND MISCHLER, S. On a quantum Boltzmann equation for a gas of photons. *J. Math. Pures Appl. (9)* 80, 5 (2001), 471–515.
- [81] ESCOBEDO, M., MISCHLER, S., AND VALLE, M. A. Homogeneous Boltzmann equation in quantum relativistic kinetic theory. *Electron. J. Differential Equations MON04* (2003), 1–85.
- [82] KAC, M. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*. AMS Bookstore, 1957.
- [83] KANIADAKIS, G., AND QUARATI, P. Kinetic equation for classical particles obeying an exclusion principle. *Phys. Rev. E* 48, 6 (1993), 4263.
- [84] KANIADAKIS, G., AND QUARATI, P. Classical model of bosons and fermions. *Phys. Rev. E* 49, 6 (1994), 5103.
- [85] KIELEK, Z. An application to the convolution iterates to evolution equation in Banach space. *Univ. Iagel. Acta Math. Fasciculus XXVII* (1988).
- [86] KOMPANEETS, A. S. The establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons. *Soviet Phys. JETP* 4 (1957), 730—737.
- [87] LEMOU, M. Multipole expansions for the Fokker-Planck-Landau operator. *Numer. Math.* 78, 4 (1998), 597–618.
- [88] LU, X. A modified Boltzmann equation for Bose-Einstein particles : isotropic solutions and long-time behavior. *J. Statist. Phys.* 98 (2000), 1335–1394.

- [89] LU, X. On isotropic distributional solutions to the boltzmann equation for Bose-Einstein particles. *J. Statist. Phys.* 116, 5 (2004), 1597–1649.
- [90] MARKOWICH, P. A., AND PARESCHI, L. Fast conservative and entropic numerical methods for the boson boltzmann equation. *Numer. Math.* 99, 3 (2005), 509–532.
- [91] PARESCHI, L., RUSSO, G., AND TOSCANI, G. Fast spectral methods for the Fokker-Planck-Landau collision operator. *J. Comput. Phys.* 165, 1 (2000), 216–236.
- [92] PARESCHI, L., TOSCANI, G., AND VILLANI, C. Spectral methods for the non cut-off Boltzmann equation and numerical grazing collision limit. *Numer. Math.* 93, 3 (2003), 527–548.
- [93] SEMIKOV, D., AND TKACHEV, I. Kinetics of Bose condensation. *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995), 3093–3097.
- [94] SEMIKOV, D., AND TKACHEV, I. Condensation of bosons in the kinetic regime. *Phys. Rev. D* 55 (1997), 489–502.
- [95] TOSCANI, G. The grazing collisions asymptotics of the non cut-off Kac equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 32 (1998), 763–772.
- [96] VILLANI, C. On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 143, 3 (1998), 273–307.
- [97] VILLANI, C. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics I* (2002), 71–305.

Chapitre 3 : Derivation of a two-fluids model for a Bose gas from a quantum kinetic system.

- [98] BAITI, P., LEFLOCH, P., AND PICCOLI, B. Uniqueness of Classical and Nonclassical Solutions for Nonlinear Hyperbolic Systems. *J. Differential Equations* 172, 1 (2001), 59–82.
- [99] BIANCHINI, S., AND BRESSAN, A. Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann. of Math. (2)* 161, 1 (2005), 223–342.
- [100] CARLES, R. *Semi-classical analysis for nonlinear Schrödinger equations*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.
- [101] DAFERMOS, C. M. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer, 2000.
- [102] ESCOBEDO, M., AND MISCHLER, S. On a quantum Boltzmann equation for a gas of photons. *J. Math. Pures Appl. (9)* 80 (2001), 471–515.
- [103] ESCOBEDO, M., MISCHLER, S., AND VALLE, M. A. Homogeneous Boltzmann equation in quantum relativistic kinetic theory. *Electron. J. Differential Equations MON04* (2003), 1–85.
- [104] GLASS, O., AND LEFLOCH, P. G. Nonlinear hyperbolic systems : nondegenerate flux, inner speed variation, and graph solutions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 185 (2007), 409–480.
- [105] GODLEWSKI, E., AND RAVIART, P.-A. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer, 1996.
- [106] LANDAU, L., AND LIFSHITZ, E. *Course on theoretical physics, in Fluid mechanics*, vol. 6. Pergamon press, 1987.

- [107] LU, X. A modified Boltzmann equation for Bose-Einstein particles : isotropic solutions and long-time behavior. *J. Statist. Phys.* 98 (2000), 1335–1394.
- [108] NORDHEIM, L. On the Kinetic Method in the New Statistics and Its Application in the Electron Theory of Conductivity. *Proc. Roy. Soc. London A* 119, 783 (1928), 689–698.
- [109] PITAEVSKII, L., AND STRINGARI, S. *Bose-Einstein condensation*. Oxford University Press, New York, 2003.
- [110] POMEAU, Y., BRACHET, M.-A., MÉTENS, S., AND RICA, S. Théorie cinétique d'un gaz de Bose dilué avec condensat. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Astr.* 327 (1999), 791–798.

Chapitre 4 : Existence and conservation laws for the Boltzmann-Fermi-Dirac equation in a general domain.

- [111] ALLEMAND, T. The incompressible Euler limit of the Boltzmann equation for a gas of fermions. *Preprint HAL 00493760* (2010).
- [112] DIPERNA, R. J., AND LIONS, P. L. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : Global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)* 130, 2 (1989), 321–366.
- [113] DOLBEAULT, J. Kinetic models and quantum effects : A modified boltzmann equation for Fermi-Dirac particles. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 127, 2 (1994), 101–131.
- [114] HAMDACHE, K. Initial-Boundary value problems for the boltzmann equation : Global existence of weak solutions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 119, 4 (1992), 309–353.
- [115] KANIEL, S., AND SHINBROT, M. The Boltzmann equation. I. uniqueness and local existence. *Comm. Math. Phys.* 58, 1 (1978), 65–84.
- [116] LIONS, P.-L. Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications. III. *J. Math. Kyoto Univ.* 34, 3 (1994), 539–584.
- [117] LU, X. On the Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles with very soft potentials : Global existence of weak solutions. *J. Differential Equations* 245, 7 (2008), 1705–1761.
- [118] PERTHAME, B. Global existence to the BGK model of Boltzmann equation. *J. Differential Equations* 82, 1 (1989), 191–205.

Chapitre 5 : The incompressible Euler limit for a gas of fermions.

- [119] ALEXANDRE, R., DESVILLETES, L., VILLANI, C., AND WENNBORG, B. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 152 (2000), 327–355.
- [120] ALLEMAND, T. Existence and conservation laws for the Boltzmann-Fermi equation in a general domain. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 348, 13-14 (2010), 763–767.
- [121] ARLOTTI, L., AND LACHOWICZ, M. Euler and Navier-Stokes limits of the Uehling-Uhlenbeck quantum kinetic equations. *J. Math. Phys.* 38, 7 (1997).
- [122] CERCIGNANI, C., ILLNER, R., AND PULVIRENTI, M. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, vol. 106 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1994.
- [123] DOLBEAULT, J. Kinetic models and quantum effects : a modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 127, 2 (1994), 101–131.

- [124] ESCOBEDO, M., MISCHLER, S., AND VALLE, M. A. Homogeneous Boltzmann equation in quantum relativistic kinetic theory. *Electron. J. Differential Equations Monograph 04* (2003).
- [125] ESCOBEDO, M., MISCHLER, S., AND VALLE, M. A. Entropy maximisation problem for quantum relativistic particles. *Bull. Soc. Math. France 133*, 1 (2005), 87–120.
- [126] GOLSE, F., AND SAINT-RAYMOND, L. A remark about the asymptotic theory of the Boltzmann equation. *Preprint*.
- [127] LIONS, P.-L. Compactness in Boltzmann’s equation via Fourier integral operators and applications. III. *J. Math. Kyoto Univ. 34*, 3 (1994), 539–584.
- [128] NORDHEIM, L. W. On the kinetic method in the new statistics and its application in the electron theory of conductivity. *Proc. Roy. Soc. London A 119*, 783 (1928), 689–698.
- [129] SAINT-RAYMOND, L. *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*, vol. 1971 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2009.
- [130] SAINT-RAYMOND, L. Hydrodynamic limits : some improvements of the relative entropy method. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26* (2009), 705–744.
- [131] SCHOCHET, S. Fast singular limits of hyperbolic PDEs. *J. Differential Equations 114*, 2 (1994), 476–512.
- [132] UEHLING, E. A., AND UHLENBECK, G. E. Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases. i. *Phys. Rev. 43*, 7 (1933), 552.