



HAL
open science

Modélisation du champ magnétique induit par des tôles - Identification de l'aimantation - Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique

Olivier Chadebec

► To cite this version:

Olivier Chadebec. Modélisation du champ magnétique induit par des tôles - Identification de l'aimantation - Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT: . tel-00549747

HAL Id: tel-00549747

<https://theses.hal.science/tel-00549747v1>

Submitted on 22 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

/ / / / / / / / / / / / / / / /

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : « Génie électrique »

**Préparée au sein du Laboratoire de Magnétisme du Navire
et au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble**

dans le cadre de l'Ecole Doctorale
« Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunication, Signal »

présentée et soutenue publiquement par

Olivier CHADEBEC

Ingénieur ENSIEG

Le 13 juin 2001

**MODELISATION DU CHAMP MAGNETIQUE INDUIT PAR DES
TOLES**

IDENTIFICATION DE L'AIMANTATION

**Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque
ferromagnétique**

Directeur de thèse : **Jean-Louis COULOMB**

Madame	F. RIOUX-DAMIDAU	(Rapporteur)	Présidente
Messieurs	L. KRAHENBUHL P. PENVEN H. HENOCQ J-L. COULOMB G. CAUFFET	(Rapporteur)	Examineur Examineur Examineur Examineur Examineur
Monsieur	J.P. BONGIRAUD		Invité



Remerciements

Difficile tâche que celle des remerciements, qui consiste à témoigner de la reconnaissance à chacun et surtout à n'oublier personne. Tentons quand même l'exercice...

Mes premiers remerciements vont évidemment aux membres du jury qui ont accepté de juger ce travail avec intérêts, compétences et indulgences :

Madame Françoise RIOUX-DAMIDAU, Directeur de Recherche au CNRS à l'U2R2M, Faculté des sciences d'Orsay,

Monsieur Laurent KRAHENBUHL, Directeur de Recherche au CNRS au CEGELY, Ecole Centrale Lyon,

Monsieur Paul PENVEN de Thomson Marconi Sonar,

Monsieur Hugues HENOCQ du Groupe d'Etudes Sous-Marines de l'Atlantique,

Monsieur Jean-Louis COULOMB, Professeur à l'INPG et directeur du Laboratoire de Magnétisme du Navire,

Monsieur Gilles CAUFFET, Maître de Conférence à l'ISTG,

Monsieur Jean-Paul BONGIRAUD, Ingénieur de recherche au Laboratoire de Magnétisme du Navire.

Je tiens à exprimer à Jean-Louis COULOMB ma plus profonde reconnaissance, d'une part pour m'avoir proposé ce sujet passionnant et d'autre part pour l'avoir encadré. Sa très grande compétence scientifique, son recul, sa grande disponibilité, ses qualités humaines et son incroyable humilité font de lui le directeur de recherche idéal dans toutes les circonstances. Qu'il trouve dans ces quelques lignes le gage de ma plus profonde admiration et de ma plus sincère amitié.

Merci à Jean-Paul BONGIRAUD pour m'avoir accueilli au sein du LMN. Véritable bibliothèque du magnétisme du navire, il a toujours su me conseiller et m'aider efficacement, ceci avec enthousiasme et bonne humeur. J'espère qu'il a trouvé dans cette thèse la concrétisation d'idées qu'il avait formulées de nombreuses années auparavant.

Il me tient également à cœur de remercier Laure-Line ROUVE, sans qui ses trois années n'aurait certainement pas été aussi agréables. Toujours de très bon conseil et très attentionnée, certains résultats de cette thèse lui doivent beaucoup. J'espère qu'elle gardera un bon souvenir

de nos nombreuses conversations, scientifiques ou non, avec ou sans café, conduisant à des réponses ou amenant parfois encore plus de questions. Je lui témoigne ici toute mon amitié.

Evidemment merci à Gilles CAUFFET pour son aide, sa compétence dans le domaine des capteurs et pour sa bonne humeur. Sa grande disponibilité et sa gentillesse en font un partenaire de travail très agréable.

Merci aussi à Philippe LE THIEC qui a toujours été très attentionné à mon égard, m'aidant à de nombreuses reprises, évidemment en me faisant profiter de sa très grande compétence dans le domaine de la mesure, mais aussi en acceptant de corriger mon anglais souvent très approximatif.

J'aimerais également exprimer ma reconnaissance à Hervé MAGNAT. Véritable bourreau de travail, la maquette du LMN a été un véritable défi à son grand sens « mécanique ». La réussite des campagnes de mesures doit lui être attribuée en très grande partie. Je ne le remercierai jamais assez pour tout le travail effectué et pour les coups de main divers qu'il m'a donné, toujours avec le sourire.

Je tiens également à remercier Corinne RANNOU et Hugues HENOCQ du Groupe d'Etudes Sous-Marines de l'Atlantique qui ont été mes correspondants DGA pendant ces trois années. Ils ont toujours été très intéressés par mes travaux, faisant preuve de grandes compétences scientifiques, et m'ont soutenu dans toutes les circonstances. Je garderai un très bon souvenir de nos nombreuses réunions ou rencontres à Grenoble, Brest ou ailleurs.

Il me reste bien sur à remercier tous les membres permanents du LEG ; Gérard MEUNIER pour ses conseils et son intérêt constant envers mes travaux, Albert FOGGIA pour nos discussions, scientifiques ou non, et son humour, Patrice LABIE pour son aide lors de mes relations épisodiques avec Flux3d et pour nos dissertations culturelles ou montagneuses, Patrick EUSTACHE, grand dompteur de Macintosh, Yves MARECHAL, et bien sur Etienne CALLEGHER et Patrick GUILLOT, du service informatique, qui ont toujours su me dépanner avec compétence et sourire.

Enfin, tous les thésards avec qui j'ai partagé ces trois années : Benoît, l'autre bourguignon du LMN, et ceux du LEG, citons Mauricio, Singva, Alita, Ali, Vincent, Afef, Jean-Daniel, Olivier et bien d'autres qui je l'espère ne me tiendront pas rigueur de leur absence dans ces lignes.

Et enfin, merci à Nat pour son soutien et surtout pour sa présence à mes côtés.

A mon père, pour m'avoir donné le goût des sciences

Table des matières

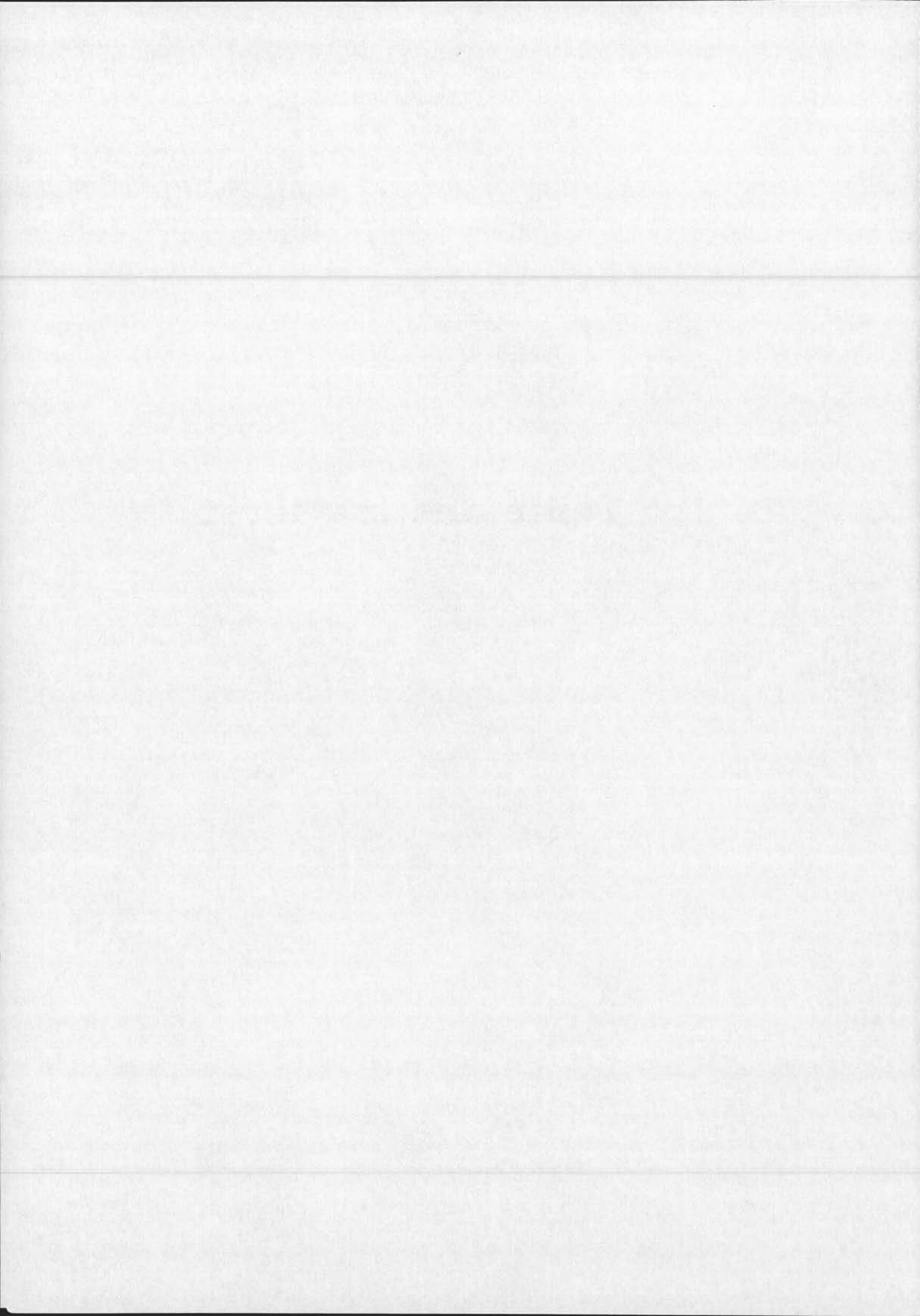


Table des matières

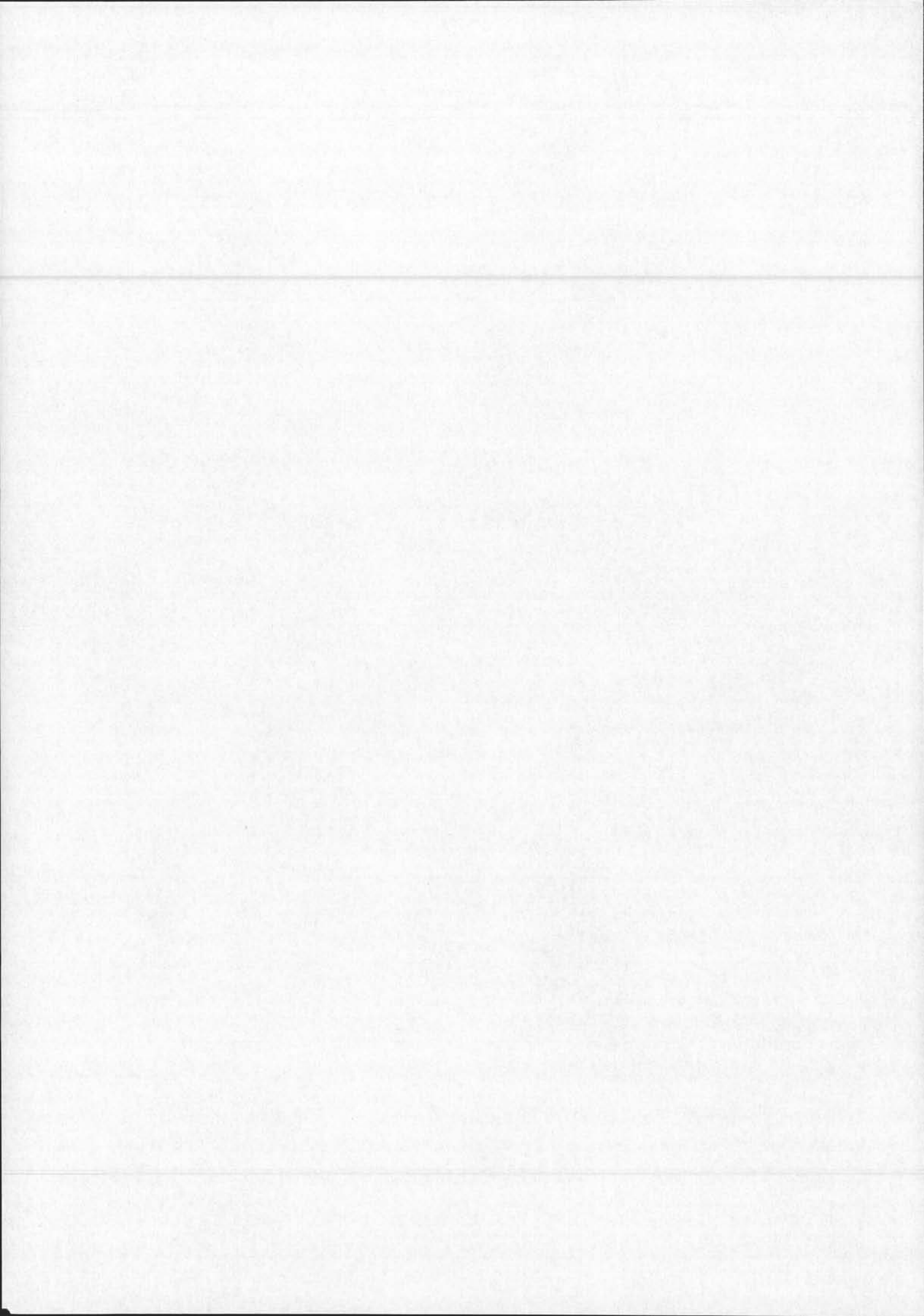
AVANT-PROPOS.....	7
Chapitre I – INTRODUCTION AU MAGNETISME DU NAVIRE.....	9
I - Enjeux du magnétisme du navire.....	9
I.1 - LA DISCRÉTION, UNE QUALITÉ NÉCESSAIRE	9
I.2 - LES DIFFÉRENTES SOURCES D'INDISCRÉTION	10
I.2.1 - <i>Indiscrétion acoustique</i>	10
I.2.2 - <i>Indiscrétion électromagnétique</i>	10
I.3 - LES MOYENS DE DÉTECTION.....	11
II - Les aimantations d'un navire	13
II.1 - UN PEU DE PHYSIQUE.....	13
II.1.1 - <i>Domaine d'étude et approximation liés au magnétisme du navire</i>	15
II.1.2 - <i>Les différentes aimantations d'un bâtiment</i>	17
III - Les variations d'aimantation	18
III.1 - LA VARIATION DE L'AIMANTATION INDUITE	18
III.2 - LA VARIATION DE L'AIMANTATION PERMANENTE	18
III.2.1 - <i>Les variations à la construction</i>	19
III.2.2 - <i>Les variations par contrainte mécanique</i>	19
III.2.3 - <i>Les variations d'aimantation par contraintes thermiques</i>	21
III.3 - CONCLUSION	21
IV - Les techniques pour la discrétion magnétique	21
IV.1 - LE TRAITEMENT MAGNÉTIQUE OU DÉSAIMANTATION	21
IV.2 - L'IMMUNISATION.....	22
V - L'immunisation en boucle fermée	23
V.1 - ETAT DE L'ART.....	23
V.1.1 - <i>La détermination des aimantations et des signatures</i>	23
V.1.2 - <i>Le réglage des boucles</i>	24
V.1.3 - <i>Les limites du système actuel</i>	25
V.2 - VERS UN NOUVEAU SYSTÈME, L'IBF	27
V.3 - LE POINT DE DÉPART	30
Chapitre II –METHODES DIRECTES DE CALCUL DES AIMANTATIONS INDUITES.....	31
I - Introduction	31
II - Généralité sur le problème magnétostatique	32
II.1 - LE PROBLÈME EN ÉQUATIONS	31
II.2 - LES GRANDEURS DE RÉOLUTION ET ÉQUATIONS ASSOCIÉES	33
II.2.1 - <i>Le potentiel vecteur</i>	33
II.2.2 - <i>Les grandeurs scalaires</i>	34
III - Les équations par région	36
III.1 - LE CAS GÉNÉRAL.....	36
III.1.1 - <i>Notations</i>	36

III.1.2 - Equations locales	37
III.1.3 - Les conditions aux limites.....	37
III.1.4 - Conclusions.....	39
III.2 - UN CAS PARTICULIER : LA TÔLE	39
III.2.1 - Généralité et notations	39
III.2.2 - Un peu de physique	40
III.2.3 - Vers une équation surfacique de la tôle	41
III.2.4 - Comportement du potentiel au passage de l'élément mince.....	42
IV - Les méthodes de résolution par assemblage de régions	44
IV.1 - GÉNÉRALITÉ SUR L'ÉCRITURE INTÉGRALE	44
IV.2 - MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR LA MODÉLISATION DE LA TÔLE	45
IV.3 - MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR LA MODÉLISATION DE L'AIR.....	46
IV.3.1 - Méthode des éléments finis.....	46
IV.3.2 - Méthodes intégrales de frontières	47
IV.3.3 - Intérêt pour la résolution du problème inverse.....	48
IV.4 - CONCLUSION SUR LES MÉTHODES DE RÉOLUTION LOCALES	49
V - Les méthodes de résolution globales.....	49
V.1 - LE CHOIX DES SOURCES	50
V.1.1 - Deux types de sources	50
V.1.2 - Signification physique des sources	53
V.1.3 - Un exemple didactique	54
V.2 - EVALUATION DES SOURCES	55
V.2.1 - Des équations intégrales	55
V.2.2 - Les méthodes par condensation.....	57
V.2.3 - Vers un modèle mixte	63
V.3 - EXEMPLE NUMÉRIQUE.....	65
V.3.1 - Présentation du cas test.....	66
V.3.2 - Validation en champ lointain	67
V.3.3 - Validité en champ proche.....	72
VI - Complément sur les méthodes globales	77
VI.1 - LES MATÉRIAUX NON LINÉAIRES	77
VI.2 - L'INTÉGRATION DU CHAMP SOURCE	78
VI.3 - DES MÉTHODES GLOBALES VOLUMIQUES.....	79
VII - Conclusions	79
Chapitre III –RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE.....	81
I - Introduction	81
II - Généralités sur le problème inverse magnétostatique.....	82
II.1 - GÉNÉRALITÉS SUR LE PROBLÈME INVERSE	82
II.1.1 - La paramétrisation du système.....	82
II.1.2 - Les deux familles de problèmes inverses	83
II.1.3 - Ecriture mathématique.....	83
II.2 - LE PROBLÈME INVERSE MAGNÉTOSTATIQUE.....	83
II.2.1 - Applications médicales	84
II.2.2 - Application géophysique	84
II.2.3 - Les activités de conception.....	84
II.2.4 - L'identification d'aimantation	84
II.3 - CARACTÉRISTIQUES DU PROBLÈME	85
II.3.1 - Spécificités du problème	85
II.3.2 - Qualités nécessaires de l'algorithme proposé	85
II.4 - CARACTÈRE « MAL-POSÉ »	86

III - Ecriture matricielle du problème inverse.....	88
III.1 - LA RELATION DIRECTE	88
III.1.1 - Etat des lieux.....	88
III.1.2 - Remarque sur l'aimantation permanente	89
III.2 - ECRITURE DU SYSTÈME MATRICIEL.....	89
III.2.1 - Les fonctions de forme.....	90
III.2.2 - Les systèmes en charges.....	90
III.2.3 - Les systèmes en dipôles.....	90
III.2.4 - Le système associé au modèle mixte.....	92
III.2.5 - L'écriture du système.....	92
IV - Les méthodes d'inversion	94
IV.1 - L'ÉQUATION NORMALE	94
IV.2 - LES RÉOLUTIONS DIRECTES	95
IV.2.1 - La décomposition LU.....	95
IV.2.2 - La décomposition en valeur singulière.....	95
IV.2.3 - Les méthodes itératives.....	99
IV.3 - EXEMPLES D'INVERSION SANS RÉGULARISATION	99
IV.3.1 - Présentation du cas test	98
IV.3.2 - Ecriture des systèmes linéaires	101
IV.3.3 - Un exemple de résolution sans régularisation.....	102
V - Les méthodes de régularisation	104
V.1 - L'INVERSION PAR TRONCATURE DU SPECTRE	104
V.1.1 - Approche théorique.....	104
V.1.2 - Exemple numérique.....	106
V.1.3 - Conclusion sur la troncature de la SVD	107
V.2 - TECHNIQUE DE RÉGULARISATION DE TIKHONOV	108
V.2.1 - Approche théorique.....	108
V.2.2 - Exemple numérique.....	110
V.2.3 - Conclusion sur la régularisation de Tikhonov	112
V.3 - CONCLUSION SUR LES MÉTHODES DE RÉGULARISATION	113
VI - Vers une nouvelle approche	114
VI.1 - REMARQUES SUR LA RÉDUCTION DU NOMBRE DES CAPTEURS.....	114
VI.2 - UNE ÉQUATION INTERNE À LA TÔLE.....	115
VI.2.1 - Une nouvelle équation pour la tôle	115
VI.2.2 - Ecriture d'un nouveau système pour le modèle mixte	116
VI.2.3 - Ecriture d'un nouveau système pour le modèle en charges ponctuelles.....	118
VI.3 - RÉOLUTION DU SYSTÈME GLOBAL	119
VI.3.1 - Remarques sur les aimantations induites.....	119
VI.3.2 - La résolution du système global.....	120
VI.4 - EXEMPLE NUMÉRIQUE.....	120
VI.4.1 - Un cas test modifié.....	120
VI.4.2 - Résolution du problème mixte	121
VI.4.3 - Résolution du système en charges ponctuelles.....	124
VI.4.4 - Conclusion sur la nouvelle approche de résolution.....	127
VII - Conclusions	127
Chapitre IV –VALIDATIONS EXPERIMENTALES.....	129
I - Introduction	129
II - Présentation des moyens expérimentaux	130
II.1 - LES MOYENS DE MESURE DU LMMCF	130

II.2 - LA MAQUETTE DU LMN	130
II.2.1 - <i>Présentation</i>	130
II.2.2 - <i>Intérêts</i>	131
III - Validation expérimentale du calcul des aimantations induites	133
III.1 - PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL	133
III.2 - MODÉLISATION	134
IV - Validation expérimentale du problème inverse.....	138
IV.1 - REMARQUES PRÉLIMINAIRES	138
IV.2 - PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL	138
IV.3 - VALIDATION DE L'APPROCHE INVERSE	140
IV.3.1 - <i>Inversion par le modèle mixte avec le système « interne »</i>	140
IV.3.2 - <i>Inversion par le modèle en charges ponctuelles avec le système interne</i>	142
IV.3.3 - <i>Exemples d'inversions sans système « interne »</i>	143
IV.4 - CONCLUSION SUR L'APPROCHE INVERSE.....	146
V - Conclusions	146
CONCLUSIONS GENERALES.....	149
ANNEXES.....	151
A - Equivalence volume aimanté / charges surfaciques.....	151
B - Matrice de régularisation pour les dipôles	153
C - Vers un rapprochement des capteurs de la tôle.....	156
C.1 - OBJECTIFS	155
C.2 - PRÉSENTATION DU CAS TEST.....	155
C.3 - INVERSION DU MODÈLE MIXTE	156
C.3.1 - <i>Remarque préliminaire sur la composante normale mesurée</i>	156
C.3.2 - <i>Inversion</i>	157
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	161

Avant-propos



Avant-propos

Un navire à coque ferromagnétique, sous l'influence du champ magnétique terrestre et de contraintes mécaniques, s'aimante. Il crée alors une anomalie locale de ce champ, qui peut être la source de sa localisation et ou même de sa destruction. Au cours des dernières décennies, la discrétion magnétique des navires a été l'objet de nombreuses études. La simulation numérique, associée à des moyens de mesure de plus en plus performants, permet aujourd'hui une meilleure connaissance des phénomènes mis en jeu.

L'immunisation en boucle fermée est un système permettant l'identification et la minimisation en temps réel de ces anomalies. Avec l'aide de boucles de courant installées dans le navire, elle doit permettre de réduire la signature à tout instant, quels que soient l'histoire magnétique du bâtiment et son cap. Si l'idée a été émise depuis de nombreuses années, il semble aujourd'hui envisageable de la mettre en œuvre sur des bâtiments réels.

Le présent travail tente d'apporter une contribution à ce projet. Il a été réalisé au Laboratoire de Magnétisme du Navire (LMN) ainsi qu'au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG) au sein de l'équipe Modélisation. Il se place dans le cadre d'un projet d'étude amont (PEA) de la Délégation Générale pour l'Armement (DGA) et a été effectué en étroite collaboration avec le Groupe d'Etude Sous-Marine Atlantique (GESMA) de Brest.

La grande complexité des processus d'aimantation des navires à coques ferromagnétiques rend une modélisation totale des phénomènes impossible. Il est donc absolument nécessaire de faire intervenir la mesure. Le travail, tel qu'il nous a été proposé, consistait en la mise au point d'un système, qui à partir de mesures de champs magnétiques effectuées à l'intérieur d'une coque de navire, permettrait de prévoir le champ à l'extérieur.

Ce mémoire se compose principalement de quatre parties. La première constitue une introduction au magnétisme du navire. Elle situe, tout d'abord, les enjeux du projet. Elle définit ensuite les différentes aimantations d'un bâtiment et les causes de leurs variations. Enfin, elle explicite les systèmes actuellement utilisés pour minimiser ces aimantations, expose leurs lacunes et met en valeur un nouveau système : l'immunisation en boucle fermée. Elle se termine par la présentation de l'outil que nous avons eu à développer.

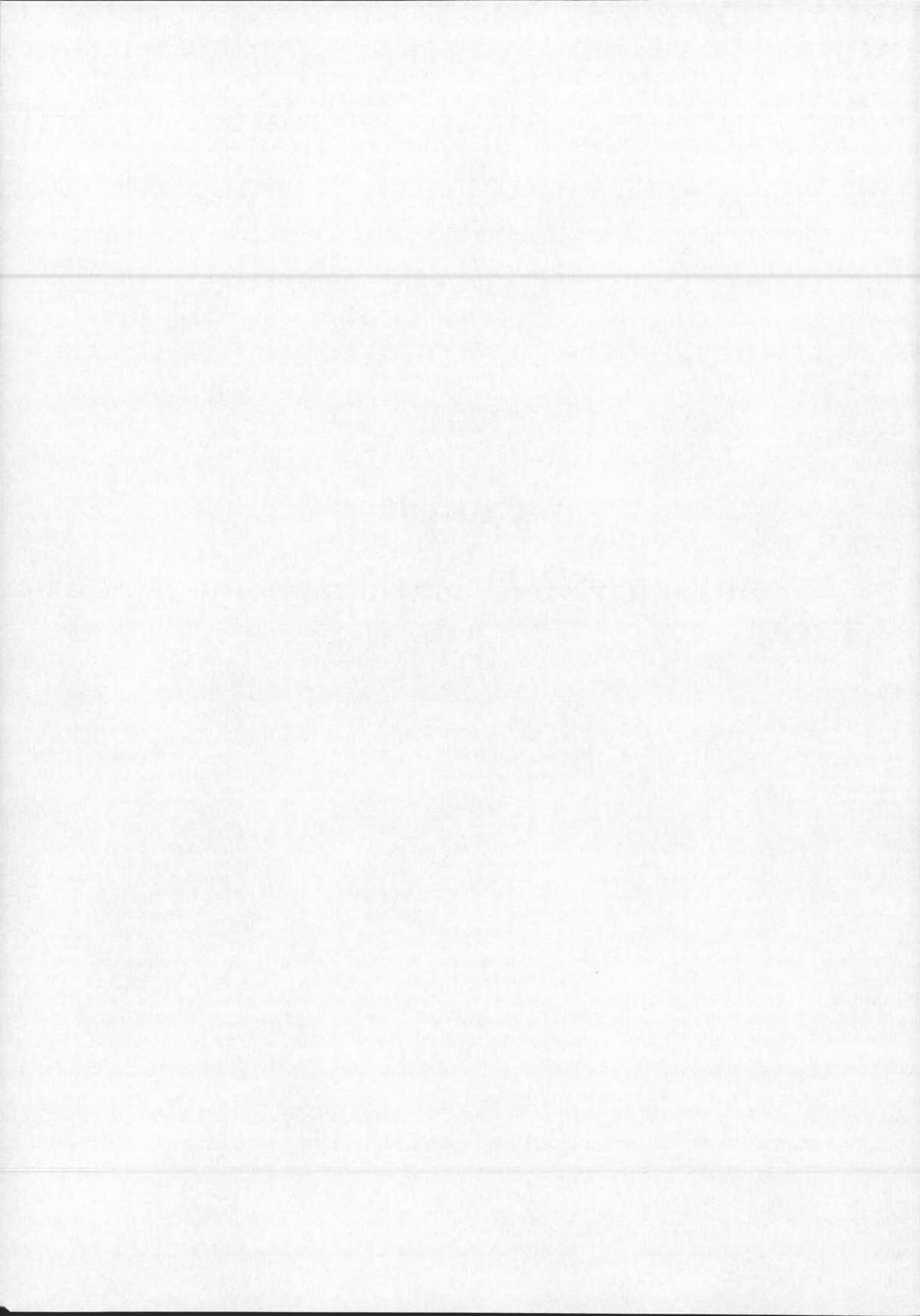
La seconde partie se concentre sur la modélisation du problème direct, c'est-à-dire le calcul de l'aimantation et du champ créé par un bâtiment lorsqu'il est placé dans un champ inducteur, le champ magnétique terrestre. Si certaines méthodes sont aujourd'hui largement maîtrisées (éléments finis, intégrales de frontières), nous en présentons certaines, moins connues, qui peuvent apporter un début de solution à notre problème.

Une fois le problème direct maîtrisé, il est alors possible de tenter de résoudre le problème inverse. La résolution de ce problème consiste en l'identification des sources (l'aimantation de la coque) en fonction des effets (la mesure de champs magnétiques sur des capteurs placés à l'intérieur de celle-ci). Une fois cette aimantation déterminée, il est alors possible de calculer le champ n'importe où dans l'air, en particulier à l'extérieur. Si l'étude des problèmes inverses a fait l'œuvre d'un nombre considérable de travaux, les approches demeurent souvent très mathématiques. Or, nous verrons que c'est par une approche directement issue de la physique que nous avons réussi à résoudre notre problème.

Enfin, la dernière partie comporte la validation expérimentale de nos algorithmes. Cette validation a été effectuée avec l'aide d'une maquette de navire que nous avons instrumentée.

Chapitre I

Introduction au magnétisme du navire



Chapitre I

INTRODUCTION AU MAGNETISME DU NAVIRE

I - Enjeux du magnétisme du navire

Dès la première guerre mondiale, l'apparition de mines dont le dispositif de mise à feu était magnétique imposa à toutes les marines du monde d'étudier des moyens de lutte efficace contre ce danger. La marine française se sensibilisa à cette nouvelle forme de risque naval, le risque magnétique. Les premiers travaux furent menés avec succès par Louis Néel, le père du magnétisme du navire, pendant la seconde guerre mondiale et font aujourd'hui encore référence dans le domaine. Aujourd'hui, l'évolution technologique des mines nécessite des systèmes de protection magnétique de plus en plus perfectionnés afin d'assurer de façon efficace la protection des bâtiments militaires et surtout de celle de leurs équipages.

I.1 - La discrétion, une qualité nécessaire

La discrétion est, aujourd'hui, une des qualités primordiales d'un bâtiment militaire. En effet, existe-t-il une meilleure protection que la discrétion, qui prive l'agresseur potentiel de cible ? Elle doit permettre aux bâtiments de s'approcher sans risque des côtes et est également la base de la dissuasion nucléaire. Les concepteurs de bâtiments militaires ont donc fourni des efforts constants dans ce domaine. L'invention du sous-marin est d'ailleurs la conséquence directe de ce concept, puisqu'il est par nature invisible pour un observateur à la surface de l'eau.

I.2 - Les différentes sources d'indiscrétion

Les sources d'indiscrétion sont nombreuses et diversifiées. Nous allons tenter, dans cette partie, de les présenter brièvement et de les classer. Leur énumération ne se veut évidemment pas exhaustive.

I.2.1 - Indiscrétion acoustique

La source d'indiscrétion la plus connue est acoustique. C'est, à l'heure actuelle, la principale préoccupation des marines et celle qui engendre le plus de travaux. Elle permet, en effet, une détection à très grande distance.

Un bâtiment est le siège de bruits divers dont le plus important est celui du système de propulsion (moteur et hélice). L'onde sonore se propage dans l'eau et peut donc être interceptée. Les marines disposent, en effet, de bon nombre « d'oreilles » parfaitement entraînées et capables d'identifier le type et le tonnage d'un navire à plusieurs kilomètres. Cette surveillance est appelée écoute passive, car elle ne nécessite l'émission d'aucun signal. Elle est à mettre en opposition avec l'écoute active, qui consiste en l'envoi d'une onde acoustique puis en l'attente de son retour, si celle-ci a rencontré un corps étranger. C'est la technologie du sonar. Son inconvénient essentiel est qu'elle nécessite l'émission d'un signal. Repérer avec un sonar, c'est donc avoir la certitude d'être également repéré. C'est pour cela que l'écoute passive est actuellement privilégiée dans les sous-marins.

I.2.2 - Indiscrétion électromagnétique

Une autre source d'indiscrétion importante est l'indiscrétion électromagnétique. C'est évidemment dans ce cadre que se situent nos travaux. Les navires sont le siège de phénomènes électromagnétiques divers qui vont perturber leur environnement et ainsi créer une anomalie locale soit du champ électrique, soit du champ magnétique. On peut distinguer effets directs et effets indirects. Les premiers ayant pour source le bâtiment lui-même et les deuxièmes les perturbations qu'il engendre (le sillage, par exemple). Nous ne nous intéresserons ici qu'aux effets directs qui sont connus pour être les plus importants.

a - Les effets statiques

Ces anomalies sont regroupées sous le nom de phénomènes ULF (Ultra Low Frequency) qui regroupent les perturbations des champs électriques et magnétiques pour des fréquences variant de 0 à 10 Hertz.

Les courants de corrosion

L'eau de mer présente une salinité importante et contient des impuretés (métaux, oxydes...). Ceci lui confère des propriétés à la fois corrosives et conductrices. Des processus de corrosion vont donc se développer sur la coque d'un navire. Ils ont pour origine les différences de potentiels électrochimiques entre le bâtiment et les constituants de l'eau de mer. C'est une véritable réaction chimique d'oxydo-réduction qui se crée tout autour du bâtiment. La coque d'un navire va alors se comporter comme une anode et l'ensemble arbre moteur plus hélice comme une cathode. Ces deux parties présentent alors des potentiels électriques différents appelés UEP (Undersea Electric Potential). Cette différence de potentiel génère un champ électrique et donc des courants, parfois très importants, qui se rebouclent dans le milieu conducteur qu'est l'eau de mer. Ils sont à l'origine d'une anomalie locale du

champ électrique autour du bâtiment et, conséquence directe, d'une anomalie du champ magnétique statique.

Ce phénomène de corrosion est pénalisant pour la coque puisque qu'il accélère son vieillissement. De nombreux bâtiments sont maintenant équipés d'anodes sacrificielles qui concentrent le processus de corrosion en un point. Il est ainsi plus facile et moins onéreux de changer cette anode que de traiter la coque endommagée. Les anomalies statiques électriques et magnétiques dues à la présence de ces courants n'en demeurent pas moins. Les marines sont maintenant sensibilisées à cette forme d'indiscrétion et de nombreux travaux ont été entrepris récemment, citons, par exemple, la référence [HOITHAM 99].

L'aimantation de la coque et des masses internes

Matériau peu cher, résistant et facilement usinable, l'acier est très présent dans tous les navires. Il est le constituant fondamental de la coque (sauf pour les bâtiments appelés chasseurs de mines), mais aussi des ponts, cloisons et d'une multitude de structures regroupées sous le nom générique de masses internes. Ce matériau en présence du champ magnétique terrestre va s'aimanter suivant des processus très complexes, créant à son tour un champ magnétique et donc une anomalie locale de celui-ci. Le bateau va donc se comporter comme un aimant. Cette anomalie magnétique statique constitue la principale source d'indiscrétion électromagnétique. C'est elle que nous allons tenter de prédire dans ce travail.

b - Les effets dynamiques

Champs électriques et champs magnétiques sont intimement liés dès que des phénomènes alternatifs apparaissent. Il est donc difficile de dissocier les causes à partir des effets. On peut pourtant énumérer quelques phénomènes.

Nous avons évoqué le fait que les courants de corrosion circulaient de la coque à l'hélice. Or celle dernière ayant un mouvement alternatif, les courants de corrosion vont eux aussi posséder une petite composante alternative. Par ailleurs, la position du bâtiment n'est pas rigoureusement fixe dans le champ terrestre. Ce mouvement relatif, composition du tangage et du roulis, va engendrer des courants de Foucault dans la coque conductrice. Ces courants vont donc être la source de perturbations locales alternatives des champs magnétiques et électriques.

Il existe d'autres sources alternatives directes. Dans les nouveaux systèmes de propulsion tout électrique sont utilisés des moteurs de fortes puissances. Ces moteurs génèrent des fuites magnétiques importantes. Celles-ci peuvent être en partie masquées par la coque par effet de blindage. Cependant, pour des raisons d'encombrement, de nouvelles technologies permettent d'installer ces moteurs à l'extérieur de la coque dans des nacelles appelées POD. Les sources de fuites magnétiques ne sont alors plus blindées par la coque. Le Laboratoire du Magnétisme du Navire étudie actuellement le rayonnement créé par ces moteurs de propulsion. Il faut pourtant noter que ces phénomènes sont d'une importance moindre par rapport aux effets statiques. D'autre part, comme nous l'avons déjà évoqué, l'eau est un très bon conducteur, elle va donc permettre le développement de courants qui vont atténuer la propagation des phénomènes alternatifs (effet de peau).

I.3 - Les moyens de détection

Nous ne nous intéresserons dans cette partie qu'aux moyens de détection électromagnétiques. Il existe principalement deux grandeurs perturbées par la présence d'un navire : Le champ électrique et le champ magnétique. Détecter, c'est différencier les variations naturelles de ces grandeurs de leurs variations artificielles.

a - Le capteur de champ électrique : L'électromètre

Le principe de l'électromètre est particulièrement simple. Celui-ci est constitué de deux électrodes reliées par un voltmètre. Le champ électrique moyen vu par l'appareil de mesure est alors égal au potentiel mesuré divisé par la distance entre les deux électrodes. Il faut noter que sa réalisation, pour une utilisation en eau de mer, est plus complexe [POULBOT 93].

b - Le capteur de champ magnétique : Le magnétomètre

Alors que la mesure de champ électrique est généralement toujours inspirée de la même technique, il existe une importante diversité dans les façons de mesurer le champ magnétique. Dans tous les cas, la détection sous-marine nécessite la mesure de champs magnétiques très faibles. Pour fixer les idées, un bâtiment d'une centaine de tonnes crée une anomalie de 500 nanoteslas à 15 mètres.

Les sondes à RMN [GUICHON 94], [DURET 94]

Ces magnétomètres font appel à la résonance magnétique nucléaire (RMN). Un système moléculaire est soumis à un champ magnétique statique ainsi qu'à un champ magnétique radio-fréquence. Le système possède alors une réponse résonante dont la fréquence est directement proportionnelle au champ statique. On distingue plusieurs variantes pour cette technologie. Notons les sondes RMN à polarisation continue et précession libre, les sondes à polarisation dynamique ainsi que les magnétomètres à pompage optique. Ces magnétomètres sont d'une grande fiabilité mais généralement encombrants. Ils sont actuellement utilisés pour la détection de sous-marins depuis des avions.

Les magnétomètres fluxgate

Ils utilisent les propriétés de saturation des matériaux ferromagnétiques. Un barreau ferromagnétique est bobiné par un enroulement d'excitation et par un enroulement de prélèvement. L'idée est d'exciter le barreau à saturation en faisant circuler un courant périodique dans le bobinage d'excitation. Une tension proportionnelle à la dérivée du flux est alors mesurée en sortie du bobinage de prélèvement. La superposition d'un champ extérieur crée alors une dissymétrie de cette tension, identifiée par détection synchrone. Ces magnétomètres sont largement utilisés pour des applications où une mesure vectorielle du champ magnétique est nécessaire. Actuellement, c'est ce type de capteurs qu'utilise la marine française pour qualifier magnétiquement ses navires. Les validations expérimentales présentées dans le quatrième chapitre de ce recueil ont également été réalisées avec des fluxgates.

Les magnétomètres SQUID

Ces magnétomètres n'ont pas encore été utilisés dans le domaine de la détection navale. Ils sont réalisés à partir de matériaux supraconducteurs et présentent, à l'heure actuelle, certainement les meilleures performances. Ils sont basés sur la propriété qu'ont les supraconducteurs à quantifier le flux d'induction. Ils ne peuvent pourtant fonctionner qu'à

très basse température et nécessitent l'utilisation d'un système de réfrigération. Ces magnétomètres sont essentiellement destinés à des applications médicales telles que la magnéto-cardiographie.

Les autres types de magnétomètres

On peut citer d'autres technologies de capteurs dédiées à la mesure de champs plus importants : Les sondes à effet Hall, les boussoles, les bobines à induction, les magnéto-diodes, les magnéto-résistances...

II - Les aimantations d'un navire

II.1 - Un peu de physique

On désigne par ferromagnétisme la propriété qu'ont certains matériaux, comme l'acier, à s'aimanter fortement en présence d'un champ extérieur. Cette aimantation est très supérieure à celle observée pour les corps paramagnétiques et tend à perdurer même si le champ externe s'annule. Ces matériaux se comportent alors comme des aimants et peuvent créer un champ significatif en leur voisinage. Pour expliquer le ferromagnétisme, il faut remonter à son origine atomique. Il existe, d'une part, le magnétisme orbital, dont la cause est le mouvement des électrons autour du noyau, et d'autre part, le magnétisme de spin propre à la rotation de l'électron sur lui-même. C'est l'échelle mésoscopique (située entre l'échelle atomique et l'échelle macroscopique) qui nous donne un aperçu du phénomène un peu plus global. Les matériaux ferromagnétiques se divisent spontanément en domaines, appelés domaine de Weiss, portant tous une aimantation constante et majoritairement parallèle M_s . Ces domaines sont séparés par les parois de Bloch, zone où l'aimantation change de direction en s'inversant. Le corps est localement aimanté à saturation. Pourtant, la grandeur M telle que nous la connaissons est une grandeur continûment variable. Il s'agit, en fait, d'une grandeur statistique à l'échelle macroscopique [BRISSONNEAU 97].

Supposons un matériau parfaitement désaimanté. Cette aimantation nulle correspond à une répartition des domaines de Weiss dans laquelle ceux-ci sont orientés sans aucune direction privilégiée. Leurs effets se compensent et donc s'annulent macroscopiquement. Si on applique à cet échantillon un champ croissant, les domaines vont suivre des comportements distincts suivant trois phases (fig.I.1). La première phase est un déplacement réversible des parois. Les parois vont se déformer pour privilégier la direction du champ magnétique interne H . Ce déplacement est qualifié de réversible car si on annule le champ inducteur, le matériau revient dans son comportement initial (phase 1). Si le champ augmente de façon conséquente, les parois vont subir des déplacements irréversibles. L'aimantation va toujours croître mais rencontrer des minima locaux d'énergie (phase 2). Si le champ est annulé, l'aimantation va se stabiliser dans un de ces minima. Si on applique de nouveau une faible augmentation, les domaines de Weiss vont se redéformer réversiblement puis acquérir une nouvelle configuration irréversible. Enfin, pour des champs très forts, les parois disparaissent, une augmentation du champ n'a plus aucun effet sur l'aimantation. C'est ce qu'on appelle communément la saturation (phase 3).

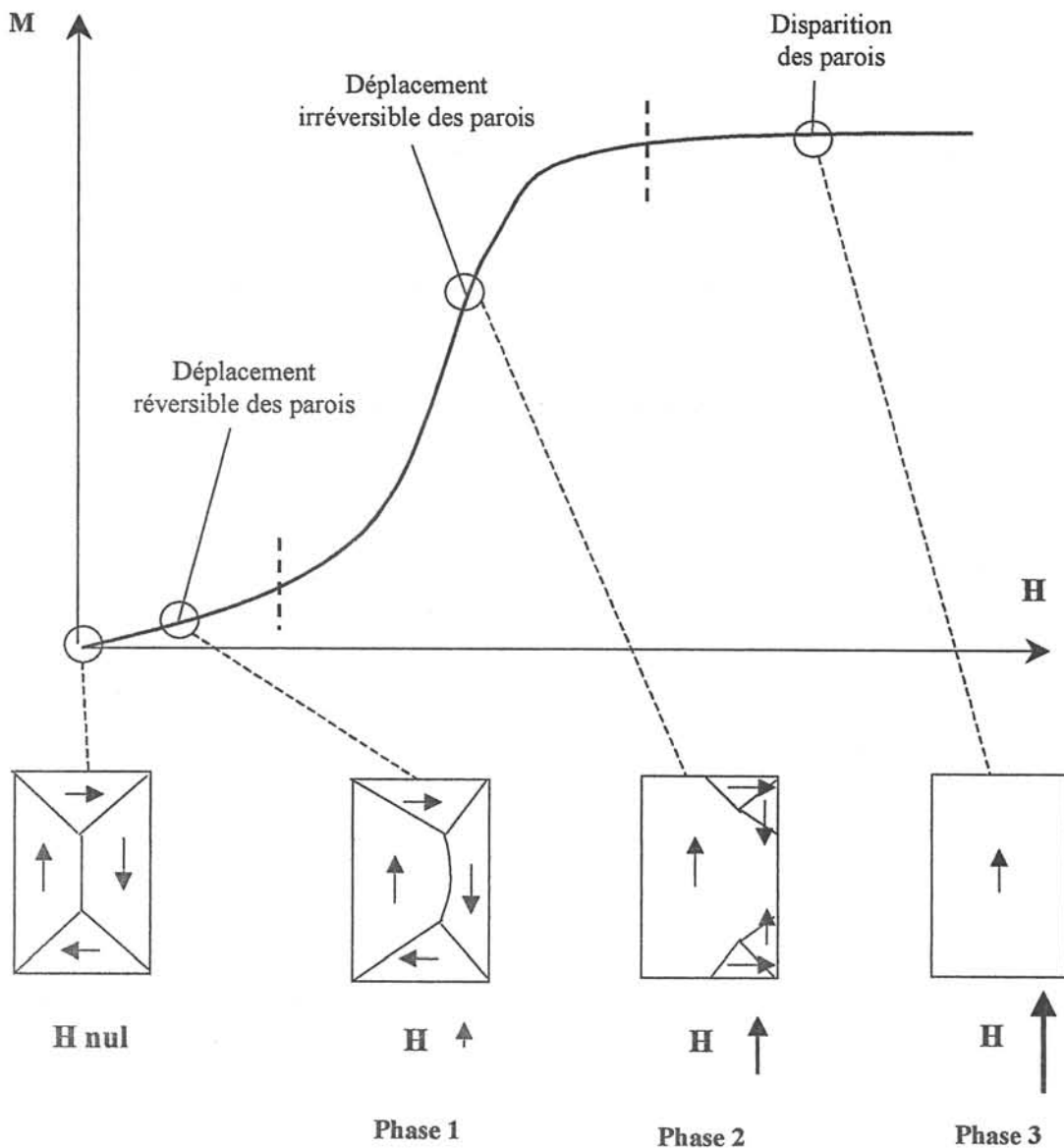


Figure I.1 : Les différentes phases du processus d'aimantation

Les deux grandeurs H et M permettent de connaître l'état magnétique d'un matériau. Pourtant, d'après ce qui précède, la connaissance de ces deux grandeurs n'est pas suffisante, il est également nécessaire de connaître la façon dont l'échantillon a atteint cet état. Seul un passage de l'échantillon par son état saturé peut permettre d'« effacer » son passé magnétique. Les matériaux ferromagnétiques gardent donc la mémoire de tous leurs états d'aimantation. Ce phénomène a été appelé par J-A Ewing « hystérésis ». La fonction $M(H)$ est une fonction très complexe, impossible à décrire analytiquement. Il existe des modèles mathématiques, donnant des résultats satisfaisants, mais ils ne sont que des approximations.

Il est physiquement possible de trouver tout couple (H, M) à l'intérieur du cycle d'hystérésis limite. Celui-ci est obtenu par application quasi-statique d'un champ variant entre $+H_{max}$ et $-H_{max}$ permettant d'atteindre l'aimantation à saturation (fig.I.2).

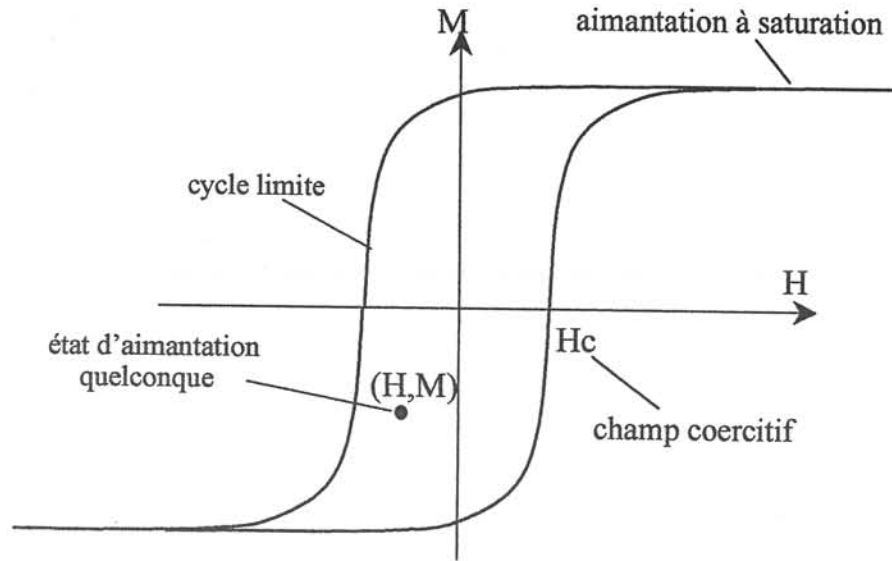


Figure I.2 : Cycle limite d'aimantation

II.1.1 - Domaine d'étude et approximation liés au magnétisme du navire

a - Matériau et champ inducteur

Pour toute étude de comportements de matériaux magnétiques, il convient de définir l'ordre de grandeur des champs mis en jeu, ce qui nous permettra de procéder à des simplifications des phénomènes. Le magnétisme du navire se situe dans le domaine d'étude des champs faibles. Les matériaux utilisés sont des aciers écrouis dont le champ coercitif varie de 300 à 800 A/m. Leur valeur d'aimantation à saturation est de 1,5 teslas, mais cette donnée ne sera pas importante pour nous, puisque le matériau n'atteindra jamais de tels niveaux.

Nous définissons par champ inducteur, le champ magnétique statique local dans lequel le matériau est plongé. Ce champ inducteur est, pour un navire, le champ magnétique terrestre. Les valeurs de son induction en France sont les suivantes :

- composante longitudinale 22000 nT du Sud vers le Nord
- composante verticale 40000 nT de bas en haut
- module 46000 nT

Il faut noter que le module du champ terrestre est sensiblement le même partout à la surface du globe terrestre et se situe autour des 35 A/m, c'est-à-dire très en dessous du champ coercitif de l'acier. En revanche, sa direction varie. La composante verticale du champ est nulle, par exemple, à l'équateur.

b - Approximation en champ faible

En 1887, Lord Rayleigh a établi expérimentalement une loi de variation de l'aimantation en champ faible. Considérons un matériau dans un état magnétique (H, M) qui est, d'après les remarques précédentes, un minimum local de l'énergie. Si le champ H

augmente légèrement et atteint une valeur H_1 , l'aimantation M_1 qui résulte peut être calculée grâce à l'expression suivante :

$$M_1 = M + \chi(H - H_1) + \frac{\nu}{2}(H - H_1)^2 \quad (I.1)$$

où χ et ν sont deux constantes dépendant du matériau et indépendantes du champ si celui-ci reste faible. Si inversement, le champ H est légèrement diminué et atteint une valeur H_2 , l'aimantation M_2 est alors :

$$M_2 = M + \chi(H - H_2) - \frac{\nu}{2}(H - H_2)^2 \quad (I.2)$$

Ces relations sont connues sous le nom de lois de Raleigh. Dans ce cas, l'aimantation suit des morceaux de paraboles. Le terme linéaire représente la partie réversible de la variation d'aimantation tandis que le terme au carré représente la partie irréversible. Dans le cas de petites variations, le terme irréversible peut être négligé vis-à-vis du terme réversible. L'aimantation devient alors une fonction linéaire du champ et la variation d'aimantation réversible. En d'autre terme en partant d'un couple (H, M) , si on augmente le champ jusqu'à une valeur H_1 , puis qu'on le fait diminuer à nouveau jusqu'à H , l'aimantation de l'échantillon sera M , la valeur initiale. Cette équation ne fait que traduire le déplacement réversible de parois de Bloch. Notons que la loi de Rayleigh reste valide pour des champs ne dépassant pas $1/20$ du champ coercitif ce qui est toujours le cas dans le magnétisme naval, le champ interne à la tôle étant toujours beaucoup plus faible que le champ inducteur.

Remarque : Le coefficient χ est appelé susceptibilité du matériau, il est relié à la perméabilité relative par la relation :

$$\chi = \mu_r - 1 \quad (I.3)$$

On peut représenter un processus de variation d'aimantation de la façon suivante (fig.I.3) :

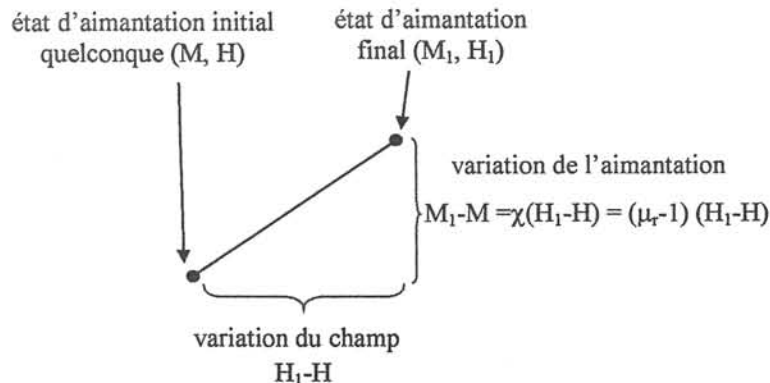


Figure I.3 : Variation d'aimantation en champ faible

II.1.2 - Les différentes aimantations d'un bâtiment

Un navire se trouve a priori dans un état magnétique quelconque représenté par une infinité de couples (H, M) repartis dans tous les points de la coque. Cet état dépend de l'histoire magnétique des matériaux constituant le navire.

Supposons qu'un navire dans un état aimanté quelconque soit plongé dans un champ inducteur nul. Cet état est un minimum local de l'énergie. Ce minimum local est appelé **aimantation permanente**. Il ne faut pas confondre aimantation permanente et aimantation rémanente, l'aimantation rémanente étant l'aimantation pour un champ interne H nul. Or, même si le champ inducteur est nul, le champ à l'intérieur de la coque n'a aucune raison de l'être (la tôle aimantée créant évidemment un champ sur elle-même).

Plaçons maintenant ce bâtiment dans un champ inducteur faible, le champ magnétique terrestre par exemple. D'après les lois de Rayleigh, celui-ci va voir son aimantation varier de façon réversible en fonction du cap, c'est-à-dire de sa position dans ce champ inducteur. Son aimantation sera alors la somme de l'aimantation permanente et de cette aimantation réversible. Cette partie réversible est appelée **aimantation induite**. Elle dépend essentiellement de la géométrie du navire, du champ terrestre et de la susceptibilité (appelée également susceptibilité induite ou réversible). On peut définir l'aimantation induite comme l'aimantation d'un bâtiment d'aimantation permanente nulle sous un champ inducteur donné.

L'aimantation varie donc autour d'un minimum d'énergie local plus ou moins stable. Pourtant sous certaines conditions, soit magnétiques, soit mécaniques, l'aimantation peut franchir une barrière de potentiel et rejoindre un autre état localement stable. L'aimantation permanente se met donc à varier, évidemment si le champ inducteur reste le même sa partie induite reste inchangée. Si nous n'avons encore que peu d'informations sur l'aimantation permanente et en particulier sur ses variations, il existe pourtant un état magnétique le plus probable sous un champ inducteur donné. Cet état ne réalise plus un minimum d'énergie local mais un minimum global. C'est l'état de plus faible énergie. On l'appelle **aimantation permanente d'équilibre**. Cette aimantation est obtenue, à plus ou moins long terme, par l'effet conjugué de contraintes mécaniques et d'un champ inducteur constant. Elle demeure pourtant théorique, le navire tendant vers cet état mais ne l'atteignant jamais. Cette aimantation est alors un point sur la courbe réversible anhystérétique, obtenue à partir du cycle d'hystérésis statique limite (fig I.4)

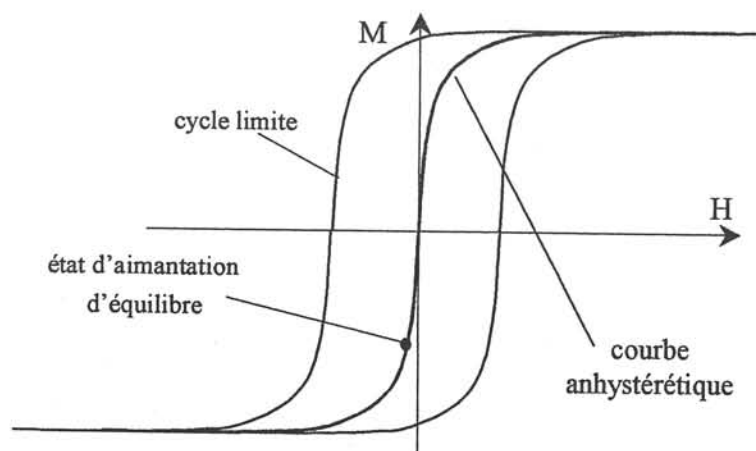


Figure I.4 : Courbe anhystérétique

Remarque : La courbe anhystérétique est réversible. De plus, nous travaillons toujours dans le domaine des champs faibles, le couple (\mathbf{H}, \mathbf{M}) se situe donc dans une région où cette courbe peut être assimilée à une droite. \mathbf{H} et \mathbf{M} sont alors directement proportionnels suivant la loi :

$$\mathbf{M} = \chi_a \mathbf{H} \quad (\text{II.4})$$

$$\mathbf{M} = (\mu_a - 1) \mathbf{H} \quad (\text{II.5})$$

où χ_a et μ_a sont respectivement appelées susceptibilité et perméabilité anhystérétiques.

III - Les variations d'aimantation

Comme nous l'avons déjà laissé entendre, les aimantations d'un navire sont susceptibles de varier. Les causes de ces variations sont à la fois nombreuses et complexes. Cette partie a pour but d'expliquer les phénomènes succinctement et de citer leurs principales causes.

III.1 - La variation de l'aimantation induite

L'aimantation induite dépend de la géométrie, du champ inducteur et de la susceptibilité réversible. Sa principale cause de variation est évidemment la variation du champ inducteur, c'est-à-dire la position relative du bâtiment par rapport au champ magnétique terrestre. Il faut pourtant noter que, devant les contraintes mécaniques et thermiques s'exerçant sur la coque, la susceptibilité réversible peut varier légèrement dans le temps. L'aimantation induite varie donc en conséquence. Pourtant, cette variation possède une durée relativement courte dans le temps et intervient au début de l'histoire magnétique d'un navire. La susceptibilité tend ensuite à se stabiliser vers une valeur constante. On considérera donc, par la suite, que l'aimantation induite ne varie qu'en fonction du champ inducteur.

Le problème de calcul des aimantations induites est maintenant bien connu. Il s'agit de résoudre les équations de Maxwell de la magnétostatique en connaissant la géométrie de la structure et la relation $\mathbf{M}(\mathbf{H})$. Pour le magnétisme naval, ce calcul est grandement simplifié, puisque dans le domaine de champ dans lequel nous nous trouvons, cette relation est linéaire. Les variations d'aimantations induites peuvent être considérées comme déterministes. C'est un exemple typique de ce que nous appellerons par la suite un problème direct, c'est-à-dire le calcul de grandeurs physiques tout en connaissant les équations à résoudre, la géométrie et les caractéristiques des matériaux.

III.2 - La variation de l'aimantation permanente

Le champ magnétique \mathbf{H} peut être considéré comme une contrainte magnétique s'exerçant sur les différentes parois séparant les domaines de Weiss aimantés à saturation. Ces parois sont déformées ou modifiées créant ainsi une réaction à cette contrainte en terme d'aimantation. Il est donc assez naturel de penser que d'autres contraintes vont intervenir sur l'état magnétique d'un matériau. Rappelons qu'une aimantation permanente est un état

d'énergie localement minimum, un apport d'énergie, quel qu'il soit (mécanique ou thermique, par exemple) peut donc le faire varier.

III.2.1 - Les variations à la construction

Ce problème est très complexe. Il dépend des modes de construction mais aussi de la position des différentes parties du navire dans le champ terrestre pendant l'assemblage. On peut citer des effets modifiant fortement le permanent tels que les soudures par arc électrique ou la manutention par électro-aimants.

III.2.2 - Les variations par contrainte mécanique

Les contraintes mécaniques s'exerçant sur un échantillon ferromagnétique et ses propriétés magnétiques sont intimement liées. Ces interactions sont regroupées sous le nom générique de magnétostriction et ont été mises en évidence au milieu du XIXe siècle. On peut principalement dissocier deux types d'effets. Le premier est une réaction mécanique du matériau magnétostrictif vis-à-vis de contraintes magnétiques. Par exemple, un barreau magnétostrictif plongé dans un champ peut s'allonger. Ce processus est connu sous le nom d'effet Joule. Le deuxième effet consiste en la modification de l'aimantation d'un tel corps lorsqu'il subit des contraintes mécaniques. Ce processus est connu sous le nom d'effet Villari. Les deux effets sont évidemment fortement couplés et en théorie indissociables. C'est pourtant l'effet Villari qui va nous intéresser le plus. En effet, il semble difficile de penser que la géométrie d'un navire va changer quand sa position vis-à-vis du champ magnétique terrestre évolue. Par contre, lorsque sa coque va subir des contraintes, son aimantation permanente va évoluer.

Ces problèmes sont encore relativement mal connus. Pourtant, certains travaux ont déjà été menés pour établir des lois de variation d'aimantation. Les expériences et les modèles sont relativement simples. On distingue deux types d'expériences différentes. La première est appelée (σH), il s'agit d'étudier un modèle d'hystérésis pour un matériau sous contrainte mécanique constante voyant un champ inducteur variable. La seconde est appelée ($H\sigma$) qui consiste à placer un matériau dans un champ constant et à faire varier les contraintes mécaniques s'exerçant sur lui.

Il est intéressant, afin d'illustrer notre propos, d'évoquer une série d'essais qui ont eu lieu au Laboratoire de Magnétisme du Navire [PERRIOU 84]. Ses travaux s'appuyaient sur les variations d'aimantation d'une maquette placée dans un champ inducteur sous une variation de contrainte de pression uniforme. La maquette était relativement proche de la forme d'un sous-marin (composée d'un cylindre et de deux cônes tronqués). La contrainte de pression était obtenue par compression d'un fluide à l'intérieur de la structure puis décompression (processus $H\sigma$). Afin d'étudier les répercussions en termes de variation d'aimantation, un capteur de champ était placé directement sur la coque, à l'extérieur (fig.I.5).

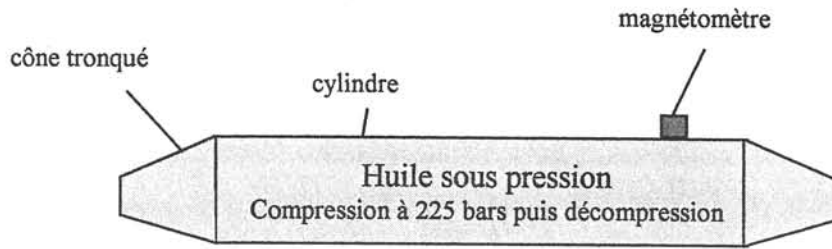


Figure I.5 : Schéma expérimental

La maquette, préalablement désaimantée, est placée dans un champ longitudinal de 20000 nT (valeur de la composante longitudinale du champ terrestre à nos latitudes). L'huile est compressée jusqu'à 225 bars puis décompressée. La courbe suivante montre la variation de l'anomalie magnétique mesurée en module par le capteur suivant la pression du fluide (fig.I.6).

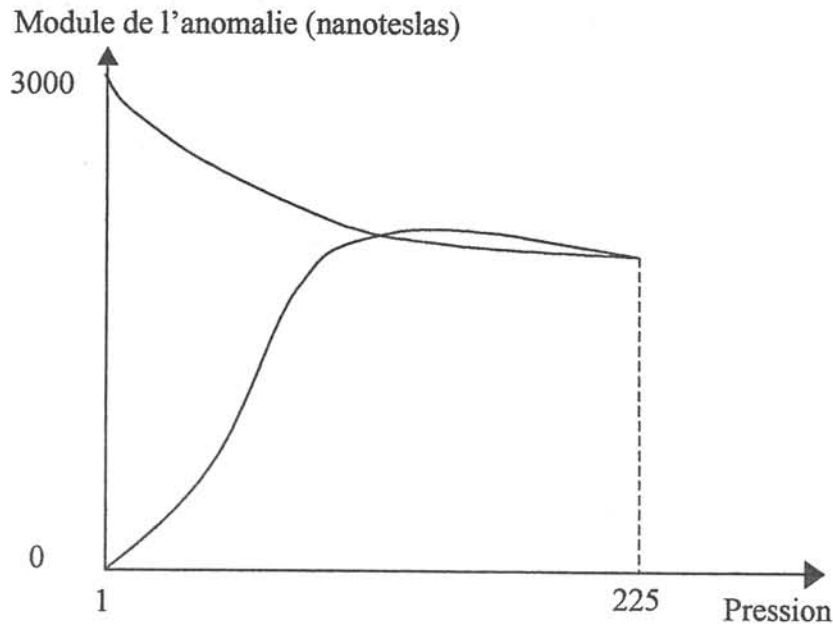


Figure I.6 : Variation de champ sur le capteur externe

La compression crée donc une variation d'anomalie de 3000 nT. Cette courbe traduit l'effet externe de la variation d'aimantation permanente. Il est donc clair que les contraintes de pression ont un effet très important sur les aimantations permanentes. Il est à noter que cette expérience était censée représenter la plongée d'un sous-marin dans le champ terrestre. Les résultats demeurent pourtant empiriques.

Il convient ici de remarquer que ces résultats ne peuvent être applicables aux bâtiments de surface, seule la partie en dessous de la ligne de flottaison étant sujette à des pressions plus fortes. En revanche, notons que des phénomènes tels que la houle semblent avoir une réelle répercussion [MONPETIT 62]. Les contraintes sur les bâtiments de surface sont donc moindres, ce qui semble justifier le fait que leurs aimantations permanentes varient plus lentement. Par contre, pour les sous-marins, ces variations sont très importantes lors des plongées. Des mesures ont été réalisées, mais les données sont évidemment classifiées.

On peut également citer les contraintes exceptionnelles. On entend par contraintes exceptionnelles, les chocs (collision au port, par exemple) ou les contraintes dues à la mer particulièrement importantes (tempêtes). Pour les chocs, des travaux ont été menés sur de simples barreaux. Il est de toute façon impossible de prévoir leurs effets puisqu'ils sont imprévisibles et non mesurables pour un navire.

III.2.3 - Les variations d'aimantation par contraintes thermiques

Des variations de température de l'ordre de la dizaine de degrés centigrades ont une importance notable sur l'aimantation d'un échantillon ferromagnétique. Il semble donc plausible qu'une variation de la température du milieu marin se répercute d'une façon sensible sur l'aimantation de la coque. Nous ne disposons que de très peu d'informations concernant ce phénomène et aucune mesure sur un bâtiment réel n'a été effectuée.

III.3 - Conclusion

Que conclure de cette énumération d'effets à la fois différents et complexes ? On peut avancer à l'heure actuelle que le problème de calcul des aimantations induites est aujourd'hui bien maîtrisé, les causes de variations étant bien identifiées (celle du champ terrestre). Ce type de considération nous place face à un problème déterministe. Par contre, pour l'aimantation permanente le problème est hautement plus complexe. Si des travaux ont été menés dans la modélisation des matériaux magnétostrictifs [BODY 96], il concerne essentiellement l'effet joule magnétostrictif. Si certains modèles de processus σH commencent à apparaître dans la littérature [SABLIK 97], il semble difficile de les utiliser pour prévoir les variations de l'aimantation permanente. En effet, pour envisager un calcul déterministe, il faudrait dans un premier temps, disposer de l'histoire magnétique du bâtiment, ceci de la conception des matériaux jusqu'à la date d'évaluation. Même si c'était réalisable, il faudrait encore disposer de modèle fiable applicable à des géométries très complexes. Le calcul déterministe se place donc, pour l'instant, dans le domaine de l'utopie, et ceci certainement pour encore de très nombreuses années. C'est ce qui faisait dire à Louis Néel que « le magnétisme des navires pose le problème du magnétisme dans un enchevêtrement exceptionnel ».

IV - Les techniques pour la discrétion magnétique

L'apparition de ces techniques date de la seconde guerre mondiale, en particulier du célèbre embarquement de Dunkerque.

IV.1 - Le traitement magnétique ou désaimantation

Désaimanter signifie ramener l'aimantation permanente à son zéro théorique. Cette opération s'effectue en plaçant l'objet concerné sous un champ statique nul auquel on superpose un champ alternatif de faible fréquence (afin d'éviter les courants de Foucault) dont l'amplitude décroît progressivement jusqu'à zéro [NEEL 46]. En théorie, cette opération conduit à un matériau dont l'aimantation est nulle en tous ses points. En pratique, il est évidemment très difficile de placer un bateau dans un champ nul. La marine préfère donc se rapprocher d'un état désaimanté global. Il est ainsi possible d'aimanter une partie du bateau dans un sens et une autre partie dans un autre sens afin d'obtenir une anomalie magnétique

globalement nulle, sur un plan de référence situé sous le navire. Il est aussi courant, pour les bâtiments dédiés à la navigation dans une zone précise du globe (où l'on connaît la composante verticale du champ terrestre), de leur conférer une aimantation permanente verticale la plus proche possible de l'opposée de l'aimantation induite verticale. Pratiquement, le bâtiment est saucissonné par des boucles de courant dans lesquelles circulent de très fortes intensités. Il existe une multitude de processus de désaimantation souvent basés sur l'expérience. Nous n'allons pas nous étendre sur ce point, car ces techniques sont de moins en moins usitées. Elles sont, en effet, relativement lourdes à mettre en place (le simple fait d'imaginer des boucles amovibles autour d'un porte-avions suffit à comprendre la complexité des traitements) et conduisent à des états dont, à l'heure actuelle, personne n'a d'idée sur la stabilité. Comme nous l'avons déjà évoqué, les aimantations permanentes, comme leur nom l'indique, varient avec le temps...

IV.2 - L'immunisation

Cette technique, plus récente, est appliquée maintenant à la plupart des navires. Il s'agit d'installer des boucles de courants à l'intérieur même de la coque. Ces boucles sont appelées circuits d'immunisation. Elles sont conçues pour créer une aimantation locale inverse à l'aimantation propre de la tôle (fig.I.7).

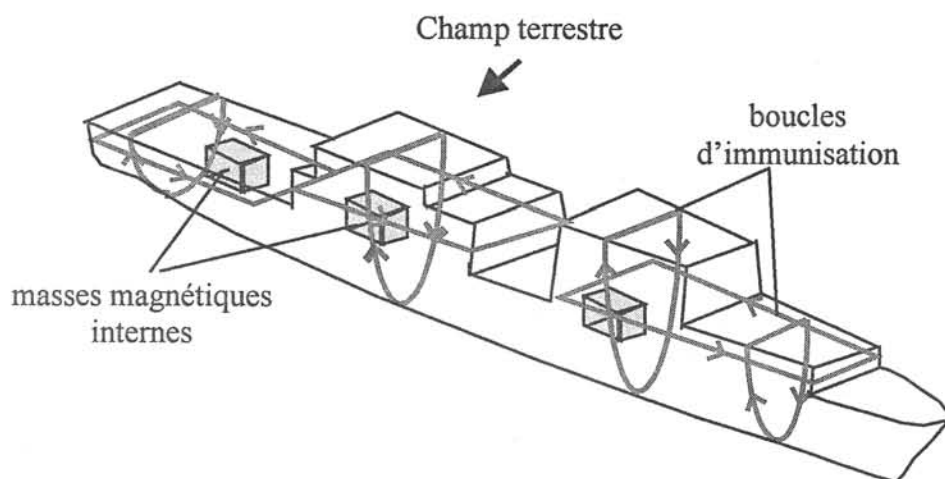


Figure I.7 : Un bâtiment et son système d'immunisation

Les boucles d'immunisation se séparent en trois familles distinctes. Les boucles M (de l'anglais « main ») sont des boucles dans le plan horizontal. Elles créent une aimantation de la coque principalement verticale. Elles compensent donc les anomalies dites verticales qui sont, en module, les plus importantes. Les boucles L minimisent les anomalies longitudinales (L pour « longitudinal ») et les boucles A, les anomalies transversales (nommées A pour « athwartship »).

Un navire possède deux systèmes d'immunisation composés de boucles de ces trois familles. Le premier permet de compenser les signatures issues des aimantations induites. Ces courants sont destinés à évoluer selon le cap du navire. Le deuxième permet de compenser les signatures des aimantations permanentes et ses courants sont fixes. Les deux systèmes sont alimentés par des sources dissociées.

Notons qu'évidemment, le nombre de boucles est limité dans un navire par des considérations de puissance, de place et de prix. La compensation n'est donc pas parfaite. Elle vise surtout à annuler l'anomalie magnétique sur un plan localisé sous le bâtiment à une distance choisie.

La meilleure technique pour l'immunisation magnétique combine les deux systèmes. Un traitement magnétique est généralement effectué sur un bâtiment à sa mise en service afin de stabiliser son aimantation. En opération, ce sont les boucles d'immunisation qui sont alors utilisées. La partie suivante s'attache à la description du système d'immunisation actuel et au projet de sa future amélioration par la mise au point d'un système « boucle fermée ».

V - L'immunisation en boucle fermée

V.1 - Etat de l'art

V.1.1 - La détermination des aimantations et des signatures

a - La mesure

Avant le développement d'outils numériques spécifiques, la détermination des signatures dues aux aimantations se faisait exclusivement en station de mesures. Le but de tels réglages est de minimiser l'anomalie sur le plan de référence (situé de 5 à 15m sous le navire). La marine dispose d'une station située en mer (à Lanvéoc, vers Brest) possédant des « polygones » de mesures, constitués de lignes de capteurs fluxgate placés dans l'eau.

Notons qu'il est impossible de différencier par une seule mesure l'anomalie créée par une aimantation permanente d'une anomalie créée par une aimantation induite. La procédure classique est donc d'évaluer les influences des diverses aimantations par soustraction. Prenons le cas d'un bâtiment naviguant cap Nord, celui-ci possède une aimantation permanente plus une aimantation induite correspondant à ce cap. Si le navire navigue ensuite suivant un cap sud et que les deux mesures sont réalisées successivement, le navire possède la même aimantation permanente, une aimantation induite verticale elle aussi égale mais une aimantation induite longitudinale opposée. En réalisant la demi-différence des anomalies mesurées, on obtient directement l'influence de l'aimantation induite longitudinale sur le plan de référence. Notons que cette approche permet de différencier également les aimantations transverses. Par contre, elle ne s'applique évidemment pas aux aimantations verticales, retourner un navire étant impossible.

Cette approche pose un problème. S'il est possible d'évaluer l'influence des composantes longitudinales et transversales du champ terrestre, l'influence de la composante verticale n'est pas dissociable de l'aimantation permanente verticale. Seule la somme des deux grandeurs est accessible et est valide uniquement à une latitude donnée, la latitude de mesure. Un bâtiment naviguant à l'équateur possède alors une aimantation verticale impossible à déterminer en l'absence de station portable.

b - La modélisation

L'utilisation des techniques numériques est relativement récente dans l'histoire du magnétisme du navire [BRUNOTTE 91]. Développée il y a une dizaine d'année au Laboratoire du Magnétisme du Navire, elle a nécessité la mise en œuvre de codes spécifiques, aujourd'hui largement utilisés dans d'autres domaines. Cette technique, basée sur la méthode des éléments finis et sur laquelle nous reviendrons, permet maintenant de calculer avec une bonne précision les aimantations induites et les signatures associées.

Si les méthodes éléments finis permettent de calculer également les aimantations d'équilibre, l'état d'équilibre n'en demeure pas moins un état théorique atteint à plus ou moins long terme sous un champ inducteur donné. De plus, les aimantations permanentes peuvent présenter des anomalies locales fortement marquées et la plupart des bâtiments n'atteignent jamais leur état d'équilibre global. De ce fait, évaluer les influences de ces aimantations permanentes est, aujourd'hui encore, impossible directement par le calcul. Leurs mesures sont donc toujours nécessaires.

V.1.2 - Le réglage des boucles

Une fois les aimantations calculées ou tout du moins leurs effets en termes d'anomalies sur un plan de référence connus, il est nécessaire de trouver le réglage optimal pour les deux systèmes d'immunisation.

Il faut tout d'abord connaître l'effet de chaque boucle. Cet effet peut être déterminé par la mesure. L'évaluation est réalisée ici aussi par demi-différence (+I et -I sur chaque boucle). Il est alors possible de connaître l'influence de la boucle pour un courant quelconque, cette influence étant linéaire vis-à-vis du courant. Si une modélisation boucle par boucle est possible avec un logiciel éléments finis classique, prendre en compte la globalité du système d'immunisation se heurte à des problèmes de taille de mémoire machine. En effet, la distance tôle-boucle, petite par rapport aux autres dimensions du bâtiment, nécessite un maillage de cet espace et conduit à des systèmes énormes qu'il est très difficile de résoudre. C'est pour cela que le Laboratoire de Magnétisme du Navire a développé ses propres codes de calcul. La thèse de Fabrice Ledorze et sa méthode du « saut de potentiel » a conduit à de bons résultats tout en gardant des systèmes de taille raisonnable [LEDORZE 97].

Pour régler les courants du système d'immunisation des aimantations induites, il est nécessaire de connaître les composantes du champ terrestre. Pour les bâtiments de surface, le champ est mesuré par un magnétomètre situé dans la mâture (le plus loin possible de la perturbation créée par la coque). Pour les sous-marins, il existe maintenant des microprocesseurs associés à des systèmes de navigation capables de calculer avec précision les composantes du champ local.

Une fois l'influence des aimantations ainsi que l'influence du courant dans les boucles sur le plan de référence connues, il suffit de les combiner pour minimiser l'anomalie sur ce plan. Le paramètre de réglage est alors l'intensité circulant dans chaque boucle. L'approche classique consiste à choisir un nombre discret de points du plan et par une minimisation par les moindres-carrés à annuler l'anomalie en ces points. Cette approche est un exemple classique de problème inverse de conception et nous y reviendrons dans la troisième partie de ce mémoire. Si l'inversion est réalisée avec soin, l'anomalie est globalement faible sur tout le plan de référence.

Remarque : Il est à noter que tous les algorithmes de minimisation de signatures par les boucles sont basés sur une minimalisation sur un plan. Les récentes améliorations dans le calcul des aimantations des navires pourraient maintenant permettre de travailler directement sur l'aimantation de la coque. Ceci aurait plusieurs avantages. D'une part, il serait possible d'optimiser le placement des boucles d'une façon beaucoup plus soignée. D'autre part, le fait de minimiser une signature sur un plan sous le bâtiment ne nous assure pas que l'anomalie soit optimale ailleurs, par exemple, au-dessus du navire. Si ce n'est pas problématique pour les bâtiments de surface, ceci est fondamental pour les sous-marins.

V.1.3 - Les limites du système actuel

Les aimantations induites sont asservies par rapport au champ terrestre local. Même s'il n'y a évidemment pas de code éléments finis embarqués dans chaque bâtiment, des abaques combinés avec des coefficients de linéarité conduisent à des résultats tout à fait acceptables. On peut parler d'asservissement et donc de boucle fermée pour la compensation des induits (fig.I.8).

Par contre, les aimantations permanentes sont compensées à chaque passage sur station. Les réglages sont alors conservés jusqu'au passage suivant (tous les ans pour des bâtiments classiques, plus souvent pour les bâtiments sensibles). Le système actuel repose donc sur le postulat que les aimantations permanentes varient peu. Il faut tout d'abord noter que ce type de réglage en station est très pénalisant en terme de temps, puisque le navire doit se rendre à une station de mesures, et donc, évidemment, en terme de coûts. De plus, l'hypothèse selon laquelle les aimantations permanentes varient peu doit être sérieusement nuancée. En effet, cette affirmation est, comme nous l'avons déjà dit, rigoureusement fautive pour les sous-marins, leurs aimantations pouvant varier du simple au double entre deux plongées. Elle est aussi à nuancer pour les bâtiments de surface. Il est à noter que les navires se rendent la plupart du temps vers les stations en suivant le même cap. Ils peuvent donc atteindre un équilibre qui a de fortes chances d'être toujours le même. Les aimantations permanentes retrouvées ont donc également de fortes chances d'être très proches de celles mesurées précédemment, alors qu'elles ont pu varier entre temps. Le but n'est pas ici de remettre en cause tout le système d'immunisation des aimantations permanentes mais de nuancer certaines pratiques. De toute façon, l'absence de mesures externes effectuées sur un bâtiment pendant une mission de plusieurs mois ne peut pas permettre de conclure rigoureusement.

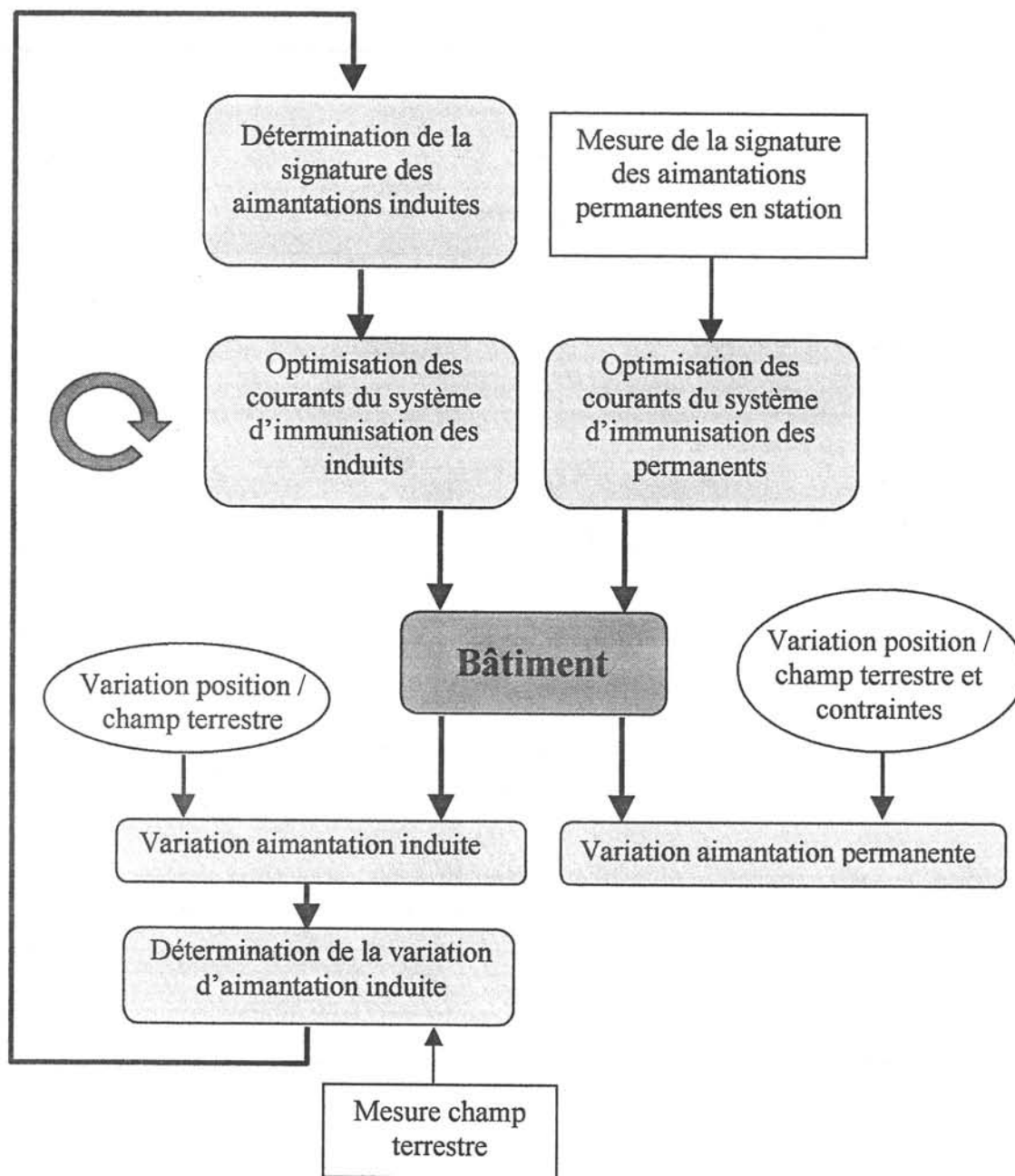


Figure I.8 : Schéma-bloc du système actuel

V.2 - Vers un nouveau système, l'IBF

L'idée d'IBF ou d'immunisation en boucle fermée (Closed Loop Degaussing ou CLDG en anglais) des navires à coques ferromagnétiques n'est pas nouvelle. C'est un des grands thèmes de la recherche en magnétisme naval, qui préoccupe aujourd'hui toutes les marines du monde. En France, le projet est un PEA (projet d'étude amont) de la DGA (Délégation Générale pour l'Armement). C'est dans ce contexte que se situe cette thèse. L'idée de départ semble séduisante. Elle consiste en la conception d'un système capable d'asservir les courants d'immunisation aux variations d'aimantation. Ce système doit donc prendre en compte tous les types de variations, c'est-à-dire aussi bien les variations d'aimantation induite que les variations d'aimantation permanente.

A l'heure actuelle, la compensation des aimantations induites en boucle fermée est déjà réalisée. Même si elle pourrait encore être techniquement améliorée, les méthodes nécessaires à ces futurs développements sont maintenant bien maîtrisées. Il reste donc à développer un outil capable d'identifier l'aimantation permanente et ses éventuelles variations et de déterminer ainsi les éventuelles répercussions sur la signature externe.

Deux approches sont possibles. La première est une approche déterministe. Celle-ci consiste à prendre en compte tous les phénomènes mis en jeu en particulier l'effet Villari. Nous avons vu que ces phénomènes étaient très complexes et les modèles existants encore peu développés. De plus, certains événements tels que les chocs sont difficilement identifiables et donc très difficilement modélisables. L'approche déterministe semble donc vouée à l'échec.

La seconde approche consiste à faire intervenir la mesure de champ magnétique. Cette mesure doit permettre d'identifier l'aimantation permanente de la coque et de prédire l'anomalie sur le plan de référence. Le placement des capteurs répond à des contraintes. Il semble difficile de les placer à l'extérieur du navire. En effet si cette solution semble, pour notre problème, séduisante, elle est irréalisable (risque élevé de détérioration, trous dans la coque pour la connectique). Les capteurs de champs magnétiques seront donc à l'intérieur. De plus, leur nombre devra rester raisonnable, ceci pour des contraintes de prix (un magnétomètre fluxgate coûte environ 5000 euros) et de gestion des données.

Le problème que nous nous proposons de résoudre dans ce mémoire est le suivant : comment à partir de mesures de champ magnétique réalisées dans l'air à l'intérieur d'une structure composée de tôles d'aimantation quelconque, peut-on prédire le champ magnétique créé à l'extérieur ?

Cette application est un exemple typique de problème inverse d'identification. Il s'agit, en effet, de reconstruire des sources à partir de leur effet, le champ magnétique. Sa résolution se heurtera à toutes les difficultés inhérentes aux problèmes inverses. Nous proposons de le résoudre principalement en trois étapes (fig.I.9). La première étape sera la mesure de champ magnétique à l'intérieur d'une structure constituée de tôles. Il faut noter que les champs magnétiques mesurés seront faibles (de l'ordre de la centaine ou du millier de nanoteslas), ce qui complique considérablement le problème et confère à cette thèse une forte composante expérimentale. La deuxième étape, à partir de ces valeurs de champ, sera d'obtenir un modèle de l'aimantation. Sans trop anticiper sur notre propos, celui-ci sera, d'une

façon assez naturelle, localisé sur la tôle. Enfin, la troisième et dernière étape devra permettre le calcul de l'anomalie à l'extérieur du navire, en particulier sur le plan de référence. La validation de cet outil permettra alors d'envisager l'immunisation en boucle fermée (figI.10).

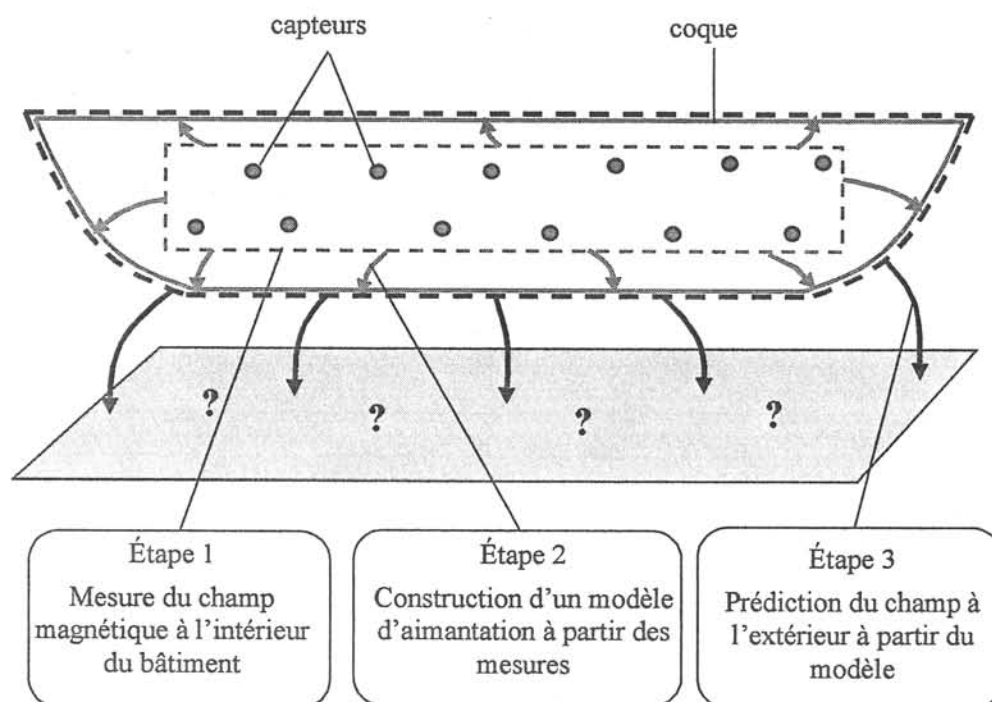


Figure I.9 : Schéma synthétique de l'outil à développer

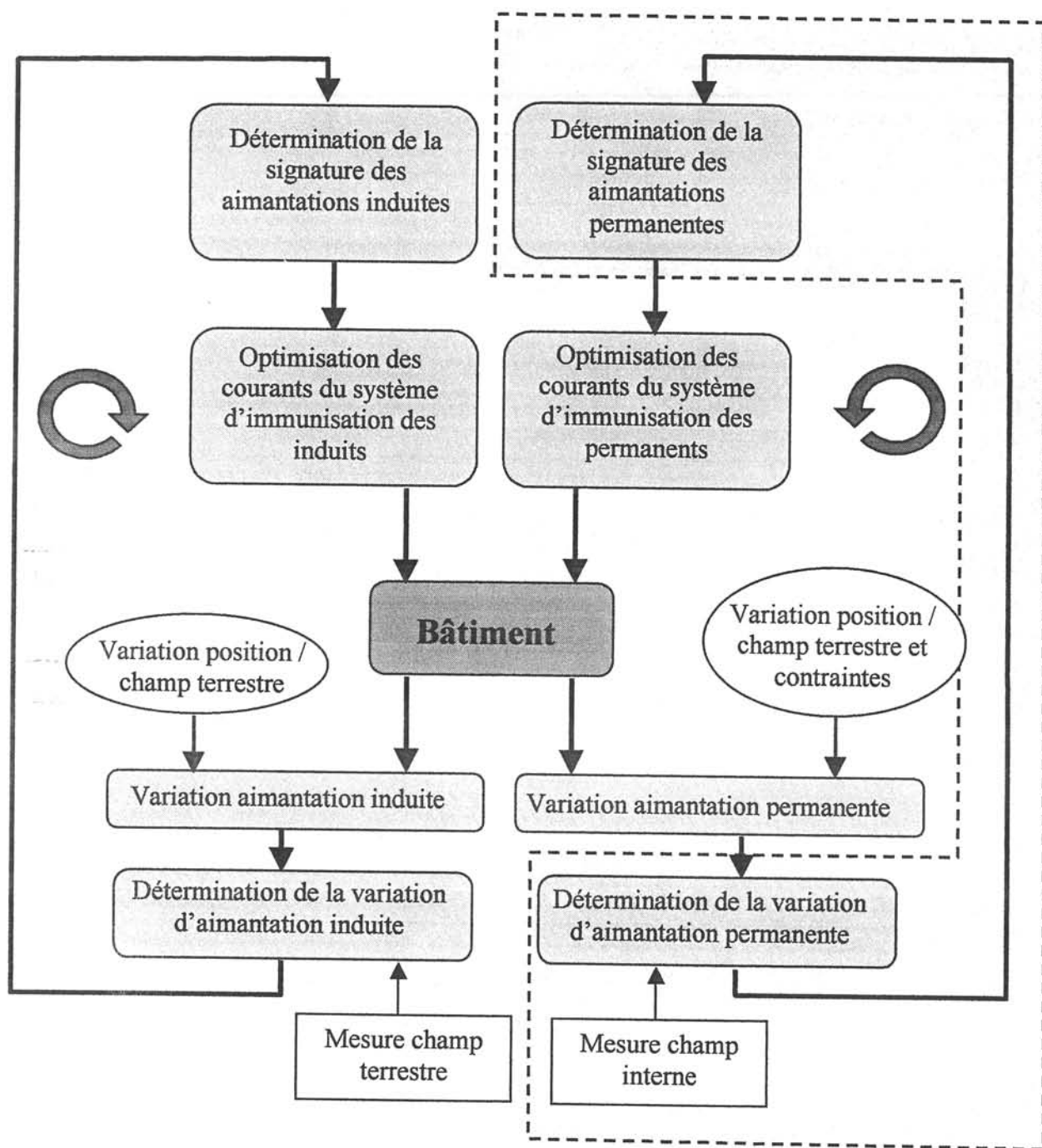


Figure I.10 : Schéma-bloc de l'Immunité en Boucle Fermée

La partie grisée est l'outil que nous nous proposons de développer

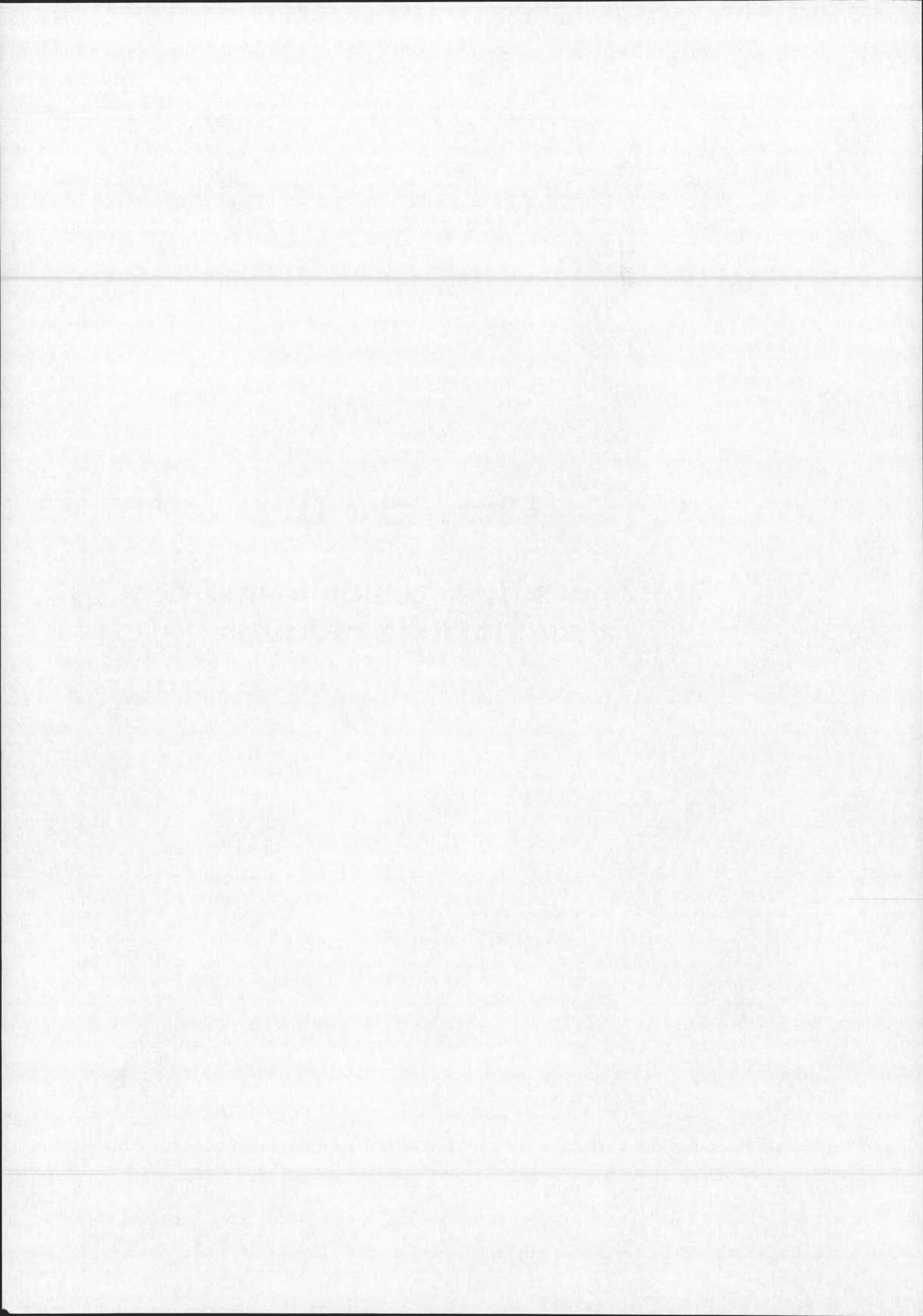
V.3 - Le point de départ

Un système d'immunisation en boucle fermée a déjà été développé pour des navires à coques amagnétiques. Ces navires sont des chasseurs de mines. Étant particulièrement exposés aux mines magnétiques, leurs coques sont constituées de fibre de verre. Il est pourtant impossible de construire un navire performant sans matériau ferromagnétique, en particulier pour les moteurs de propulsion. Les bâtiments de lutte anti-mines possèdent donc des sources d'indiscrétion ponctuelles qu'il faut immuniser. Chaque source de champ est isolée indépendamment des autres. Un système de boucles d'immunisation est installé autour de celle-ci ainsi qu'un ensemble de capteurs. Grâce à ces mesures de champ magnétique, il est possible de reconstruire un modèle d'aimantation qui permet ensuite de calculer le champ partout dans l'espace. La thèse de Michel Legris a été la base de ce système [LEGRIS 96] et pour nous une large source d'inspiration même si notre problème paraissait, d'un premier abord, plus complexe. En effet, l'ensemble des capteurs se trouve autour des sources alors que pour une coque ferromagnétique, ceux-ci sont entourés par les sources. De plus, l'extrapolation du champ se fait dans la même région que le champ mesuré, ce qui semble mathématiquement parlant, plus favorable. En effet, pour notre problème, le champ mesuré est à l'intérieur tandis que le champ à prédire est à l'extérieur.

Devant ces difficultés prévisibles, nous avons choisi l'attitude d'humilité qui s'imposait. Avant de vouloir résoudre un problème inverse, il est absolument nécessaire d'avoir une parfaite connaissance du problème direct [TARANTOLA 87]. C'est le but du deuxième chapitre.

Chapitre II

Méthodes directes de calcul des aimantations induites



Chapitre II

METHODES DIRECTES DE CALCUL DES AIMANTATIONS INDUITES

I - Introduction

Ce chapitre présente les méthodes de calcul des aimantations induites des navires. En particulier, nous considérerons, tout au long de cette partie, que l'aimantation permanente de la coque est nulle. Nous avons qualifié ce type de problème de direct, par opposition au problème inverse, qui fera l'objet du troisième chapitre de ce mémoire. Même si la dénomination de problème direct n'est pas réellement usitée, elle fait référence à un type d'approche aujourd'hui largement répandue. Il s'agit, à partir d'une géométrie, de lois physiques et de modèles de matériaux, de calculer les variations d'une grandeur, ceci dans un domaine donné. Nous sommes face à une approche très classique en modélisation des milieux continus. La résolution de ce type de problème ne fait évidemment pas apparaître la notion de mesure.

La première partie de ce chapitre traite de généralités. Elle commence par définir le problème magnétostatique et les équations qui lui sont associées. Une fois ces équations établies ainsi que leurs spécificités, elles sont simplifiées dans le but de les résoudre pour la géométrie particulière des coques des navires.

Nous verrons ensuite les méthodes numériques employées pour résoudre les équations obtenues. Nous avons divisé ces méthodes en deux familles distinctes, locales et globales, ceci dans un but de clarté de l'exposé. Les méthodes locales permettent de résoudre notre problème « par morceaux » en considérant ses différentes régions. Des sous-systèmes sont obtenus par régions et ceux-ci sont ensuite associés dans un système global avec l'aide des conditions aux limites. Les méthodes globales permettent de ne considérer qu'une seule

région, l'air, dans laquelle est placée une distribution de sources de champ représentative du comportement magnétique de la tôle. Cette distribution est déterminée par collocation d'équations appropriées. Toutes ces méthodes reposent sur une formulation intégrale du problème et sur une discrétisation de l'espace associé. Elles conduisent à des systèmes linéaires qu'il est alors nécessaire de résoudre.

Si les méthodes locales sont largement connues, les approches globales se rencontrent moins souvent dans la littérature. Les deux dernières parties de ce chapitre proposent une comparaison critique entre ces formulations. Les critères seront, par exemple, la validité des modèles en certains points, les possibilités de s'adapter à des matériaux différents de ceux traditionnellement utilisés en construction navale ou la possibilité de prendre en compte les effets de boucles correctement. Enfin, nous statuerons sur le choix d'une méthode pertinente, adaptée à notre objectif : la résolution du problème inverse.

II - Généralité sur le problème magnétostatique

II.1 - Le problème en équations

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le calcul de l'induction magnétique en présence d'un ou de plusieurs corps ferromagnétiques plongés dans un champ inducteur \mathbf{H}_0 . Nous considérerons que ce problème est statique, c'est-à-dire que les différentes grandeurs ne varient pas en fonction du temps. En particulier, cette approche ne prend pas en compte d'éventuels effets dynamiques dus, par exemple, à un brusque changement de cap du navire ou au tangage. Nous considérerons donc que le bâtiment est fixe par rapport au champ inducteur ou que tout du moins sa position varie lentement. Ce champ inducteur peut être soit le champ terrestre, soit le champ créé par les boucles d'immunisation dans l'air, soit la combinaison des deux (voir chapitre I).

Les équations de Maxwell simplifiées pour le problème magnétostatique sont :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (\text{II.2})$$

\mathbf{B} est le vecteur induction magnétique

\mathbf{H} est le vecteur champ magnétique

\mathbf{j} est le vecteur densité de courants sources

Il convient de rajouter à ces deux équations un modèle représentatif du comportement du matériau. Rappelons que nous voulons, dans cette partie, calculer les aimantations induites. Nous avons vu, dans le premier chapitre, que celle-ci est proportionnelle au champ magnétique et réversible par rapport à ce même champ. Nous adopterons donc comme loi de comportement, l'équation linéaire suivante, traduction directe des lois de Rayleigh (cf. chapitre I, partie I.1.2.b) :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (\text{II.3})$$

où \mathbf{M} est le vecteur aimantation (limité à l'aimantation induite)
 χ est la susceptibilité magnétique induite, coefficient constant pour notre problème et isotrope.

Si on considère que \mathbf{H} est une grandeur définie par :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (\text{II.4})$$

où μ_0 est la perméabilité du vide. On obtient une relation classique liant \mathbf{B} et \mathbf{H} :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\chi + 1) \mathbf{H} \quad (\text{II.5})$$

Le coefficient $\mu_0(\chi + 1)$ est constant et porte le nom de perméabilité du matériau. Il est noté μ .

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{II.6})$$

Cette relation est linéaire, isotrope et réversible. De plus, la nullité du champ magnétique en un point impose la nullité de l'aimantation en ce même point. Notre modèle impose bien que le matériau qui lui est associé possède des aimantations permanentes ainsi que rémanentes nulles.

II.2 - Les grandeurs de résolution et équations associées

Nous disposons donc de trois équations à résoudre simultanément. Il s'agit des équations (II.1), (II.2) et, par exemple, (II.6), équation intrinsèque au matériau. Traditionnellement, trois types de grandeurs sont utilisés pour résoudre ce type de problème.

II.2.1 - Le potentiel vecteur

Le potentiel vecteur est une grandeur vectorielle couramment utilisée en magnétostatique. Son utilisation s'est imposée face à la relative complexité de la formule de Biot et Savart. Il est défini par :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{II.7})$$

D'après (II.2) et (II.6), nous avons :

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{j} \quad (\text{II.8})$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{j} \quad (\text{II.9})$$

L'équation (II.9) est valable sur tout le domaine considéré. Elle est vectorielle, ce qui peut conduire à des difficultés pour sa résolution. Il faut noter qu'en deux dimensions et avec des courants perpendiculaires au plan de modélisation, \mathbf{A} est également perpendiculaire à ce plan. Sa direction étant connue, cette grandeur devient scalaire (représentée par son module). C'est principalement ce qui fait l'intérêt des formulations en potentiel vecteur. Elles ont été largement utilisées pour résoudre le problème magnétostatique appliqué aux tôles [IGARASHI

96]. Elles deviennent pourtant difficiles à mettre en œuvre en trois dimensions où elles posent des problèmes de stabilité numérique. Devant la relative complexité des géométries que nous aurons à modéliser, nous laisserons délibérément cette approche de côté.

II.2.2 - Les grandeurs scalaires

Certains champs de vecteurs possèdent la remarquable propriété de dériver de fonctions « potentiels ». Ces fonctions sont scalaires et généralement beaucoup plus simples à résoudre.

a - Le potentiel scalaire total

Supposons que le domaine considéré soit dépourvu de courant. Nous avons alors :

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Le rotationnel de \mathbf{H} est nul, ce qui le fait, par définition, dériver d'un potentiel que nous appellerons φ .

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi \quad (\text{II.11})$$

L'équation globale à résoudre est alors :

$$\text{div}(\mu \text{grad } \varphi) = 0 \quad (\text{II.12})$$

Cette équation présente l'avantage d'être scalaire. Pourtant, elle pose des problèmes de validité en présence de densités de courants non nulles, ainsi, elle ne pourra pas permettre de traiter dans sa globalité un modèle comportant des boucles de courants.

b - Le potentiel scalaire réduit

Une approche peut consister en la séparation du champ créé par les inducteurs et du champ créé par la matière. Nous posons alors :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{red}} \quad (\text{II.13})$$

où \mathbf{H}_0 est le champ inducteur (champ terrestre ou champ créé par les boucles de courants)
 \mathbf{H}_{red} est le champ réduit, créé par la matière

On a alors :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{H}_0 + \text{rot } \mathbf{H}_{\text{red}} = \mathbf{j} \quad (\text{II.14})$$

Comme par définition :

$$\text{rot } \mathbf{H}_0 = \mathbf{j} \quad (\text{II.15})$$

Il vient naturellement :

$$\text{rot } \mathbf{H}_{\text{red}} = 0 \quad (\text{II.16})$$

soit

$$\mathbf{H}_{\text{red}} = -\text{grad}\varphi_{\text{red}} \quad (\text{II.17})$$

Le champ réduit dérive d'un potentiel scalaire et ceci sans aucune contrainte sur la nullité des densités de courant. L'équation à résoudre est alors :

$$\text{div}(\mu(\mathbf{H}_0 - \text{grad}\varphi_{\text{red}})) = 0 \quad (\text{II.18})$$

Cette équation est scalaire et valable dans tout le domaine.

c - Le choix d'une formulation en champ réduit

Les formulations en champ réduit présentent l'avantage de séparer naturellement le champ inducteur de l'anomalie magnétique. Elles permettent de traiter indifféremment les régions avec et sans courants. De plus, les régions conductrices n'ont pas besoin d'être maillées. En effet, la réaction du matériau ne perturbant pas les courants dans l'approximation magnétostatique, \mathbf{H}_0 pourra être calculé simplement par la loi de Biot et Savart.

Cependant, pour de fortes perméabilités, \mathbf{H} dans le matériau est très faible. \mathbf{H}_0 et \mathbf{H}_{red} sont alors des vecteurs de normes importantes dont la somme vectorielle est comparativement très petite. Le problème bien connu de soustraction des grands nombres peut alors conduire à un résultat entaché d'une forte incertitude. Le champ calculé à l'intérieur de matériaux de perméabilités importantes est donc soumis à de fortes imprécisions. Ce phénomène peut avoir une répercussion catastrophique sur le résultat final [PEAIYOUNG 89].

La solution classique consiste à utiliser une formulation en potentiel réduit dans des régions comportant des conducteurs où des sources de champs inducteurs (typiquement l'air) et de la coupler avec la formulation en potentiel total pour les matériaux ferromagnétiques. Remarquons que pour le problème qui nous intéresse, l'approche en potentiel réduit est satisfaisante même dans le matériau, les perméabilités relatives n'étant pas démesurément importantes pour les matériaux traditionnellement utilisés en construction navale (de l'ordre de 100) [BRUNOTTE 91].

Nous allons donc exclusivement nous intéresser aux formulations en champ et en potentiel réduit. Toutes les méthodes explicitées dans la suite de cette partie font appel à ces notions et à ces grandeurs. Pour une commodité de lecture et de notation, φ_{red} , le potentiel réduit, sera noté φ dans toute la suite de ce mémoire.

d - Analogie du champ réduit avec le champ électrostatique

Le champ réduit possède un rotationnel nul. Exprimons sa divergence. D'après (I.1) :

$$\text{div}(\mu\mathbf{H}) = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$\text{grad}(\mu)\mathbf{H}_0 + \mu\text{div}(\mathbf{H}_0) + \text{grad}(\mu)\mathbf{H}_{\text{red}} + \mu\text{div}(\mathbf{H}_{\text{red}}) = 0 \quad (\text{II.20})$$

Or comme :

$$\text{div}(\mathbf{H}_0) = 0 \quad (\text{II.21})$$

On obtient :

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}_{\text{red}}) = -\frac{1}{\mu} \operatorname{grad}(\mu) \mathbf{H} \quad (\text{II.22})$$

Ce calcul montre clairement que la divergence du champ réduit n'a aucune raison d'être nulle sur tous les points du domaine d'étude. En particulier, cette divergence est non nulle aux endroits où la perméabilité est discontinue, c'est-à-dire aux interfaces air/matériau. Le champ \mathbf{H}_{red} présente donc un rotationnel nul et une divergence non nulle en certains points. C'est dans ce sens qu'on peut le rapprocher d'un champ électrostatique \mathbf{E} . Ces deux champs possèdent des propriétés mathématiques similaires. Il apparaît d'ailleurs dans certains ouvrages sous la notation \mathbf{E}^* [DURAND 64]. \mathbf{H}_{red} possède donc des propriétés mathématiques résolument différentes de \mathbf{H} et \mathbf{B} , on lui donne également le nom de champ démagnétisant.

III - Les équations par région

Nous disposons d'une équation à résoudre, (II.18), et d'une grandeur pertinente de résolution, le potentiel réduit. Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'interface air/matériau est le siège de comportements mathématiques particuliers. L'idée des méthodes de résolution locales consiste à résoudre le problème par « morceaux ». Il s'agit de considérer chaque domaine séparément en simplifiant l'équation associée. Cette équation devient alors indissociable des conditions aux limites sur les frontières du domaine considéré. Le problème est alors résolu dans son ensemble en associant les différents sous-problèmes grâce aux conditions aux limites. Il existe deux types de sous-domaines dans notre cas : l'air et le matériau.

III.1 - Le cas général

III.1.1 - Notations

Considérons un domaine constitué de deux sous-domaines. Le premier est le domaine Ω_1 , représentant l'air, le deuxième est Ω_f , représentant le matériau ferromagnétique. Dans un souci de simplification, nous considérerons, dans un premier temps, que Ω_f est connexe, entouré par Ω_1 et délimité par S_1 . Définissons par \mathbf{n} , la normale sortante du domaine Ω_f (fig.II.1).

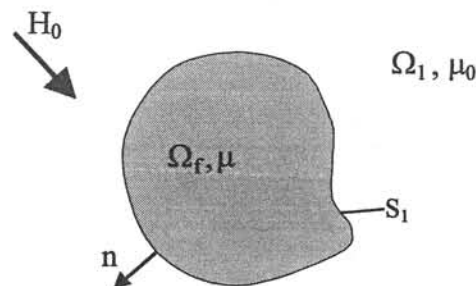


Figure II.1 : Notations du cas général

III.1.2 - Equations locales

Dans l'air, la perméabilité μ est constante et égale à μ_0 . Ceci permet de sortir ce terme de l'opérateur divergence de (II.18). Celle-ci devient en la combinant avec (II.21) :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\text{II.23})$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Laplace.

Pour la tôle, le coefficient μ , étant constant et isotrope suivant nos hypothèses de travail, peut également être sorti de l'opérateur divergence. Nous retrouvons l'équation de Laplace dans le matériau ferromagnétique, pour le potentiel réduit :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\text{II.24})$$

L'équation locale à résoudre pour les deux milieux est donc la même.

III.1.3 - Les conditions aux limites

Dans une approche locale, les équations ne peuvent être dissociées des conditions aux limites agissant sur les inconnues aux bornes des domaines. Ces conditions seront fondamentales par la suite pour résoudre le problème dans sa globalité. L'inconnue choisie étant le potentiel réduit, il convient donc d'explicitier ses variations, à la fois sur S_1 ainsi qu'à l'infini.

a - Interface air/matériau

Aux interfaces, entre deux milieux de perméabilités différentes et en l'absence de courants surfaciques, \mathbf{H} et \mathbf{B} vérifient:

$$H_t = H_{t_f} \quad (\text{II.25})$$

$$B_n = B_{n_f} \quad (\text{II.26})$$

où l'indice t correspond à la composante tangentielle du vecteur et l'indice n correspond à la composante normale. L'absence de courant surfacique est ici fondamentale. Cette hypothèse est vérifiée pour notre problème puisque les courants des boucles d'immunisations, même s'ils sont très près de la tôle, sont dans l'air. Il y a donc conservation, d'une part de la composante tangentielle du champ magnétique et d'autre part de la composante normale de l'induction. En combinant (II.13) avec (II.25), nous obtenons :

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{t}_1 - \text{grad}_t \varphi_1 = \mathbf{H}_0 \mathbf{t}_f - \text{grad}_t \varphi_f \quad (\text{II.27})$$

Puisqu'il n'y a pas de courant surfacique, le champ \mathbf{H}_0 est continu au passage de la tôle. Il y a donc également continuité du champ réduit tangentiel. On peut écrire cette relation vectoriellement :

$$\mathbf{n} \wedge (\text{grad} \varphi_1 - \text{grad} \varphi_f) = 0 \quad (\text{II.28})$$

Cette relation impose alors au passage de la tôle la continuité du potentiel réduit [DURAND 64] :

$$\varphi_1 = \varphi_f \quad (\text{II.29})$$

Considérons maintenant (II.26).

$$\mu_0 H n_1 = \mu H n_f \quad (\text{II.30})$$

$$\mu_0 (H_0 n_1 - \mathbf{grad}_n \varphi_1) = \mu (H_0 n_f - \mathbf{grad}_n \varphi_f) \quad (\text{II.31})$$

Remarque : Généralement, la projection du gradient d'une fonction sur une normale se note de la façon suivante :

$$\mathbf{grad}_n f = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial n} \quad (\text{II.32})$$

Avec cette notation, nous obtenons :

$$\mu \frac{\partial \varphi_f}{\partial n} - \mu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = (\mu - \mu_0) H_0 n \quad (\text{II.33})$$

Il y a donc discontinuité de la dérivée normale du potentiel réduit. Ce saut de dérivée est fixé, d'une part par la perméabilité du matériau ferromagnétique et d'autre part par la composante normale du champ inducteur.

Pour résumer, nous pouvons présenter la variation du potentiel réduit sur une droite perpendiculaire à l'interface air/tôle (fig.II.2).

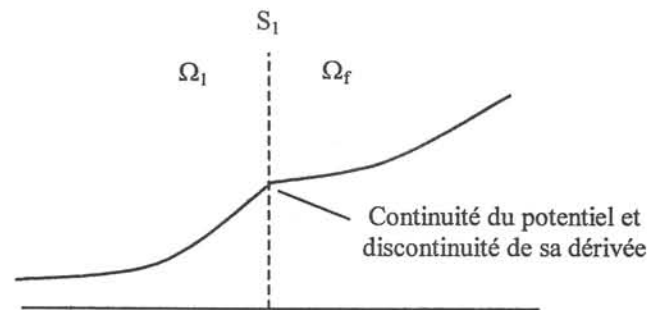


Figure II.2 Variation du potentiel au voisinage de la frontière air/fer

b - Comportement du potentiel réduit à l'infini

A l'infini, ou tout du moins loin du matériau ferromagnétique, le champ réduit peut être considéré comme nul puisque le matériau ne doit plus perturber le champ inducteur. Le potentiel est donc par définition constant. Nous imposerons sa valeur ainsi que celle de sa dérivée à zéro.

III.1.4 - Conclusions

Nous disposons donc maintenant de tous les éléments pour résoudre le problème magnétostatique dans le cas de géométries générales. Pourtant, notre problème possède des caractéristiques géométriques bien particulières. Il s'applique à des coques de navires. En particulier, les structures que nous aurons à modéliser seront des tôles. Ces tôles présentent une dimension (l'épaisseur) très faible par rapport aux autres grandeurs géométriques.

Cette constatation n'est pas sans conséquences pour la suite de la modélisation. En effet, les méthodes numériques que nous nous proposons d'étudier sont toutes basées sur une discrétisation de la géométrie.

Pour les éléments finis, cette discrétisation est volumique. La qualité du résultat obtenu dépend fortement de la forme des éléments. En particulier, ceux-ci doivent être le plus régulier possible. Un maillage volumique de la tôle par des éléments réguliers imposerait un nombre considérable d'éléments dans l'air au voisinage de celle-ci. Ce nombre considérable rendrait, pour des raisons de mémoire numérique, le problème impossible à résoudre.

Le problème est similaire pour les méthodes intégrales. Celles-ci nécessitent le maillage surfacique des frontières entre les différents milieux. Les deux frontières, de part et d'autre de la tôle, sont très proches en comparaison des autres grandeurs géométriques. Ceci pose des problèmes d'intégration si la distance entre deux éléments en vis-à-vis est petite par rapport à leurs tailles respectives. Il faut donc, en théorie, réduire la surface de ces éléments et donc augmenter leur nombre de façon importante. La taille des systèmes s'en trouve considérablement augmentée, tout comme pour les éléments finis [VISHNEVSKY 95].

III.2 - Un cas particulier : la tôle

III.2.1 - Généralités et notations

L'étude de la modélisation des tôles a fait l'objet d'un certain nombre de travaux. Notre problème est constitué de trois domaines. La région air extérieure sera notée Ω_1 et la région air intérieure Ω_2 . Ces deux régions sont séparées par la région occupée par la tôle notée $\Omega_{\text{tôle}}$. Les deux frontières de la tôle notées S_1 et S_2 sont très proches l'une de l'autre. L'idée que nous nous proposons de développer est de moyenner ces deux surfaces par une surface S . La tôle n'est alors plus une entité volumique mais devient une simple surface. Les équations et les conditions aux limites dans l'air restent les mêmes. Il est alors nécessaire de trouver une nouvelle équation pour la tôle qu'il faudra résoudre surfaciquement. Cette approche est la base de la théorie des éléments minces. Les notations adoptées dans la suite sont les suivantes (fig.II.3) :

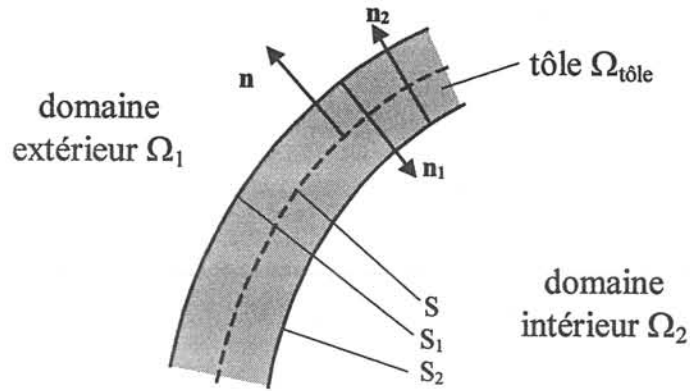


Figure II.3. Notations pour la tôle

III.2.2 - Un peu de physique

La propriété fondamentale des matériaux ferromagnétiques, qui les rend indispensables dans le domaine de l'électrotechnique, est leur capacité à canaliser le flux d'induction. Les coques des bâtiments vont donc se comporter comme de véritables « canalisations » de champ magnétique (fig.II.4).

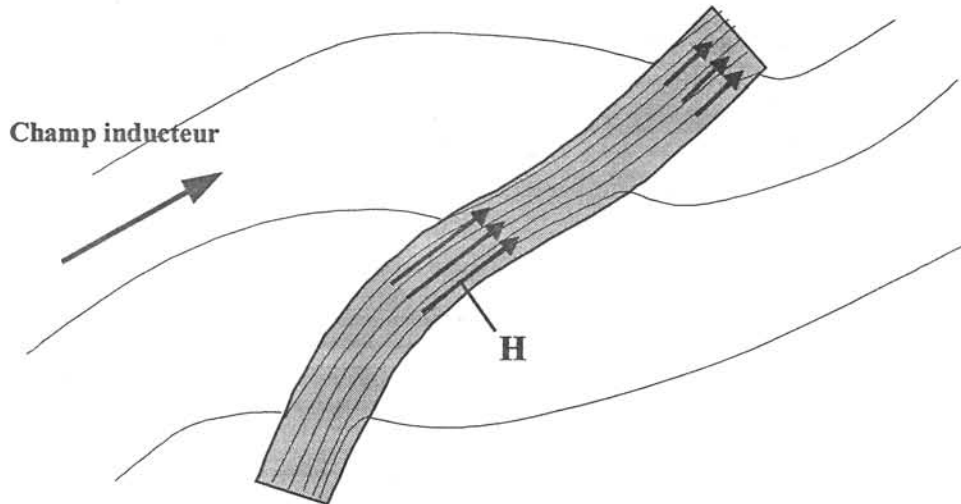


Figure II.4. Répartition des lignes d'induction et du champ magnétique dans la tôle

Ce phénomène est encore plus amplifié si l'épaisseur de la tôle est petite par rapport aux autres grandeurs géométriques et si la perméabilité du matériau est importante par rapport à celle de l'air. Dans ces conditions, le champ dans la tôle peut alors être considéré comme essentiellement tangentiel à celle-ci. De plus, cette composante tangentielle est constante à sa traversée. Cette approximation s'applique aux coques des navires [BRUNOTTE 91].

Remarque : Il convient de remarquer que c'est le champ total \mathbf{H} qui est tangentiel et non le champ réduit.

III.2.3 - Vers une équation surfacique de la tôle

Pour simplifier notre propos nous allons considérer une projection de tôle dans un plan et ainsi raisonner en deux dimensions. Réalisons un bilan des flux sur cette portion de tôle (fig.II.5).

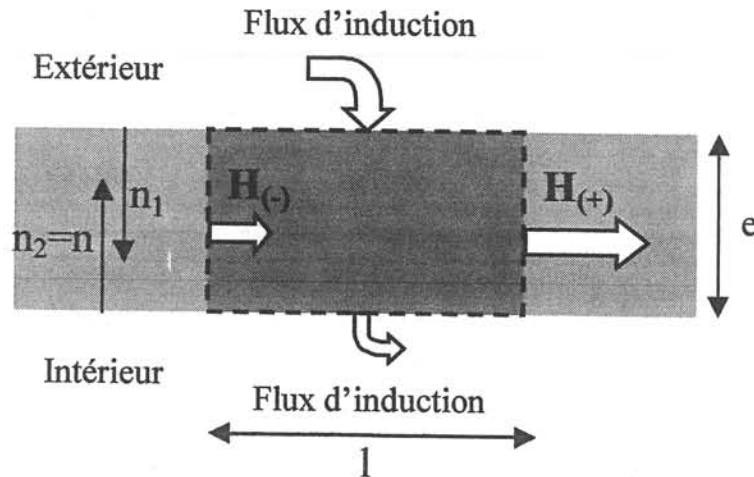


Figure II.5. Bilan des flux sur une portion de tôle

La longueur de la portion considérée est l et l'épaisseur de la tôle e . Comme nous l'avons annoncé, le champ est tangential. De plus, il est constant le long des lignes pointillées verticales. L'induction ayant un flux conservatif, nous obtenons pour cet exemple simplifié, l'équation suivante :

$$e(\mu H(-) - \mu H(+)) = l(-B_{n_1} - B_{n_2}) \quad (\text{II.34})$$

Comme les composantes normales de \mathbf{H}_0 varient peu de S_1 à S_2 , nous obtenons :

$$e \frac{(\mu H(-) - \mu H(+))}{l} = \mu_0 \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \quad (\text{II.35})$$

En passant à la limite sur l et en généralisant pour l'espace à deux dimensions qu'est la tôle, on obtient [KRAHENBUHL 93] :

$$e \operatorname{div}_s (\mu \mathbf{H}) = \mu_0 \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \quad (\text{II.36})$$

où div_s est l'opérateur divergence classique dont les directions de dérivées sont limitées aux composantes locales tangentielles de la surface S .

Cette équation s'applique sur la surface moyenne S . En toute rigueur, son utilisation entraîne une légère erreur en augmentant artificiellement le volume d'air. L'énergie totale est alors légèrement augmentée. Une méthode corrective consiste à remplacer l'induction par sa valeur moins celle qu'elle aurait en l'absence de matériau [BRUNOTTE 91]. L'équation (II.36) devient alors :

$$e \operatorname{div}_s (\mu \mathbf{H} - \mu_0 \mathbf{H}) = \mu_0 \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \quad (\text{II.37})$$

Soit

$$e (\mu_r - 1) \operatorname{div}_s (\mathbf{H}_0 - \mathbf{grad} \varphi_{\text{red}}) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (\text{II.38})$$

Cette équation représente le comportement surfacique de la tôle. Elle permet de modéliser des matériaux de plus faibles perméabilités que l'équation (II.36). En particulier, elle peut s'appliquer aux tôles dont la perméabilité relative est supérieure à 10.

Remarque : Si nous considérons que la perméabilité relative du matériau est égale à 1, c'est-à-dire que la tôle est de l'air, l'équation (II.38) impose alors une continuité du saut des dérivées normales du potentiel réduit au passage de S. Ceci est en accord avec le phénomène physique puisque, à priori, dans l'air, la dérivée du potentiel n'a aucune raison de subir de discontinuité. En revanche, si nous imposons une perméabilité égale à 1 dans l'équation (II.36), une telle discontinuité va apparaître.

III.2.4 - Comportement du potentiel au passage de l'élément mince

Nous avons remplacé la tôle par une surface. Il convient maintenant d'étudier les variations du potentiel réduit au passage de S. Nous pouvons décomposer \mathbf{H} sur S en sa composante tangentielle et sa composante normale.

$$\mathbf{H} = \mathbf{Hn} + \mathbf{Ht} = \mathbf{H}_0 \mathbf{n} + \mathbf{H}_0 \mathbf{t} + \mathbf{H}_{\text{red}} \mathbf{n} + \mathbf{H}_{\text{red}} \mathbf{t} \quad (\text{II.39})$$

Or, \mathbf{Hn} est nul ce qui implique que :

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{n} = -\mathbf{H}_{\text{red}} \mathbf{n} \quad (\text{II.40})$$

De plus si l'épaisseur est petite, les composantes tangentielles de \mathbf{H}_0 varient peu entre deux points en vis-à-vis sur S_1 et S_2 . Comme les composantes tangentielles de \mathbf{H} sont, elles aussi, constantes, il en est de même pour les composantes tangentielles du champ réduit :

$$\mathbf{H}_{\text{red}} \mathbf{t}_1 = \mathbf{H}_{\text{red}} \mathbf{t}_2 \quad (\text{II.41})$$

Cette relation implique la continuité du potentiel réduit au passage de S.

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{II.42})$$

La figure II.6. compare les variations du potentiel réduit pour un cas général et pour le cas particulier de l'élément mince.

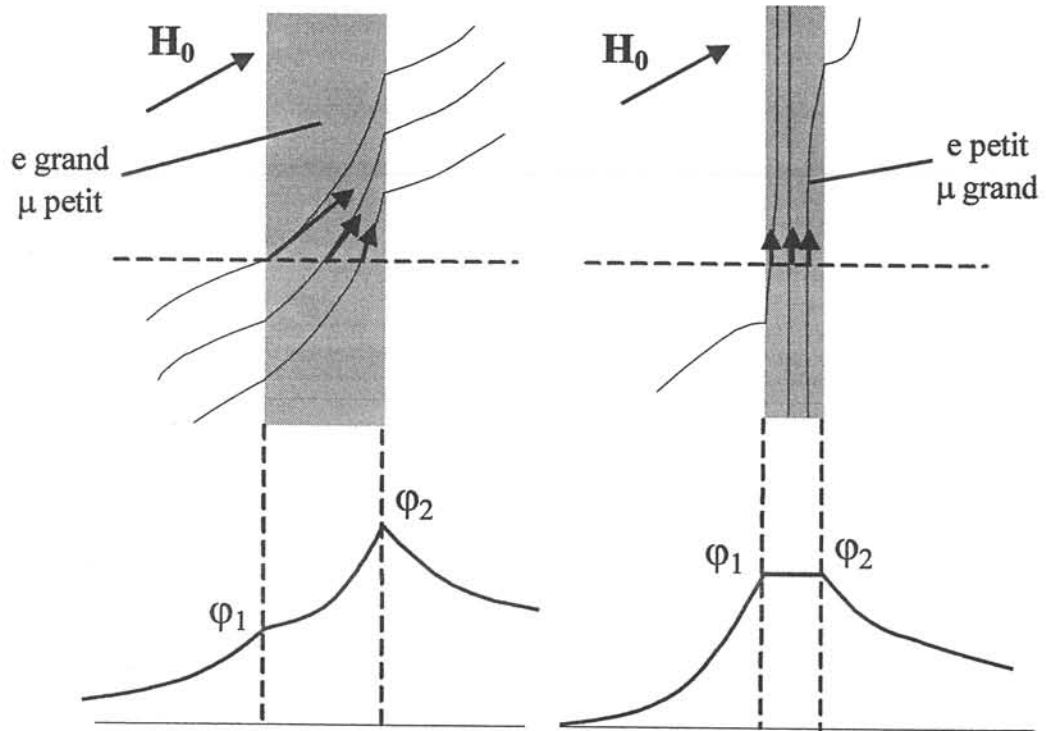


Figure II.6 : Comparaison des variations du potentiel réduit (cas général / cas de l'élément mince)

Nous pouvons donc maintenant résumer les équations à résoudre dans les différentes régions sous forme d'un tableau :

Air intérieur Ω_2	Equation de Laplace (II.23)
Interface Ω_2/S	Equation de passage air/matériau (II.33 à un signe près)
Tôle (surface S)	Equation surfacique de la tôle (II.38)
Interface Ω_1/S	Equation de passage matériau / air (II.33)
Air extérieur Ω_1	Equation de Laplace (II.23)

IV - Les méthodes de résolution par assemblage de régions

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour appliquer une méthode numérique de résolution aux équations du problème ainsi simplifiées. Dans cette quatrième partie, Nous allons d'abord traiter de la modélisation de la région tôle puis de la modélisation de la région air.

IV.1 - Généralité sur l'écriture intégrale

Le comportement physique d'un système dans un domaine Ω est décrit par une équation d'état. Cette équation, représentée sous forme d'une équation aux dérivées partielles, doit être combinée avec des équations aux limites sur S , la frontière du domaine Ω . C'est cette équation et ces conditions aux limites que nous nous sommes efforcés d'obtenir dans les paragraphes précédents. Nous pouvons décomposer notre problème en plusieurs sous-problèmes qui s'écrivent sur Ω et sur S de la façon suivante :

$$L_{\Omega}(\varphi(x)) + f_{\Omega}(x) = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$L_S(\varphi(x)) + f_S(x) = 0 \quad (\text{II.44})$$

où x représente la variable d'espace, L est un opérateur différentiel caractérisant le système et f est une fonction dite de « sollicitations ».

La méthode des résidus pondérés est une approche permettant d'obtenir une formulation intégrale du problème à partir des équations aux dérivées partielles. Elle est également appelée formulation variationnelle. Nous allons chercher un ensemble de fonctions φ satisfaisant les conditions aux limites (II.44) et annulant l'expression suivante [DHATT 84] :

$$\iiint_{\Omega} \psi(x) (L_{\Omega}(\varphi(x)) + f_{\Omega}(x)) d\Omega = 0 \quad (\text{II.45})$$

où ψ est un ensemble de fonctions de pondération qu'il faudra choisir avec soin. Toute fonction satisfaisant (II.43) et (II.44) annule (II.45), par contre si une fonction φ annule (II.45), elle n'est qu'une solution approchée du problème. Cette approche est connue sous le nom de méthode de Galerkin.

Si L_{Ω} est, par exemple, le Laplacien, et que f_{Ω} est nulle, (II.45) devient :

$$\iiint_{\Omega} \psi(x) \Delta\varphi(x) d\Omega = 0 \quad (\text{II.46})$$

Les conditions sur φ sont alors relativement contraignantes :

- φ doit être C_2 sur l'espace
- φ doit satisfaire les conditions aux limites

Il est donc préférable d'obtenir une écriture faible de l'intégrale (II.45). Cette écriture faible est réalisée par une intégration par parties. Il est évident que le résultat de l'intégration

par parties va dépendre de l'opérateur L_Ω . En considérant toujours que φ est solution de l'équation de Laplace, nous obtenons, par exemple :

$$-\iiint_{\Omega} \text{grad}\psi(x) \text{grad}\varphi(x) d\Omega + \iint_S \psi(x) \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0 \quad (\text{II.47})$$

Cette écriture possède plusieurs avantages :

- φ doit être C_1 sur Ω , par contre la condition de dérivabilité de ψ augmente d'un ordre.
- Les conditions aux limites sur la dérivée normale de φ sont directement prises en compte dans (II.47).

Remarque : Il est possible de continuer les intégrations par parties pour obtenir une formulation de (II.47) que nous pourrions alors qualifier de « encore plus faible ». C'est la base des méthodes dites intégrales de frontières.

Une fois l'écriture de la forme faible réalisée, il reste à approcher la fonction φ et à trouver un espace de fonctions ψ . C'est le but des prochaines parties.

Remarque : Il est possible d'obtenir une formulation intégrale en utilisant la stationnarité de la fonctionnelle énergie du système. Cette approche connue sous le nom de méthode de Ritz est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés.

IV.2 - Méthode numérique pour la modélisation de la tôle

L'écriture d'une formulation intégrale pour la tôle sur la surface S nous donne :

$$\iint_S \psi e(\mu_r - 1) \text{div}_s(\mathbf{H}_0 - \text{grad}\varphi) dS = \iint_S \psi \left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) dS \quad (\text{II.48})$$

Réalisons une intégration par parties.

$$e(\mu_r - 1) \left[\iint_S \text{grad}\psi \cdot \mathbf{H}_0 dS - \iint_S \text{grad}\psi \cdot \text{grad}\varphi dS + \iint_S \psi \left(H_{0n} - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS \right] = \iint_S \psi \left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) dS \quad (\text{II.49})$$

Qui se simplifie d'après (II.40) par :

$$e(\mu_r - 1) \left[\iint_S \text{grad}\psi \cdot \mathbf{H}_0 dS - \iint_S \text{grad}\psi \cdot \text{grad}\varphi dS \right] = \iint_S \psi \left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) dS \quad (\text{II.50})$$

La méthode des éléments finis repose sur une discrétisation totale du sous-domaine de résolution. Nous définissons par φ^* , l'approximation nodale de φ sur un de ces éléments. Cette fonction s'écrit :

$$\varphi^*(x) = \sum_{j=1}^N W_j(x) \varphi_j \quad (\text{II.51})$$

où N est le nombre d'éléments finis sur la tôle
 W_j sont les fonctions d'interpolation
 φ_j sont les valeurs prises par la fonction en chacun des nœuds de l'élément i

Il est classique de choisir pour fonctions de projection, les fonctions d'interpolation. Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$e(\mu_r - 1) \sum_{j=1}^N \varphi_j \iint_S \mathbf{grad} W_i \cdot \mathbf{grad} W_j dS = e(\mu_r - 1) \iint_S \mathbf{grad} W_i \cdot \mathbf{H}_0 dS - \sum_{j=1}^N \iint_S \left(\frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial n} \right) W_i ds \quad (\text{II.52})$$

Cette formulation est la plus rencontrée dans la littérature pour modéliser le comportement des tôles [KRAHENBUHL 93], [RIOUX-DAMIDAU 95]. C'est une approche éléments finis, ou plus exactement variationnelle. Elle possède un grand nombre d'avantages, tels que la possibilité de traiter des matériaux non linéaires ou anisotropes. Elle permet également l'utilisation de différentes fonctions de forme. Celles-ci peuvent être de différents ordres et permettre ainsi des variations du potentiel associées.

Elle conduit à un sous-système creux dont les inconnues sont les valeurs du potentiel réduit sur la tôle et dont le second membre dépend du champ inducteur et des dérivées normales du potentiel sur S .

IV.3 - Méthode numérique pour la modélisation de l'air

IV.3.1 - Méthode des éléments finis

Dans l'air, le potentiel réduit est solution de l'équation de Laplace et les conditions aux limites sont définies par l'équation (II.33). Une écriture intégrale faible, comme nous l'avons vu, est :

$$- \iiint_{\Omega} \mathbf{grad} \psi(x) \cdot \mathbf{grad} \varphi(x) d\Omega + \iint_S \psi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0 \quad (\text{II.53})$$

La fonction approximant le potentiel aura la même forme que (II.51) :

$$\varphi^*(x) = \sum_{j=1}^M W_j(x) \varphi_j \quad (\text{II.54})$$

où M est le nombre d'éléments finis dans la région air considérée
 W_i sont les fonctions d'interpolation
 φ_i sont les valeurs prises par la fonction en chacun des nœuds de l'élément i

Les fonctions de projection sont toujours choisies comme égales aux fonctions de forme. Nous obtenons alors pour le domaine intérieur, par exemple :

$$\sum_{j=1}^M \varphi_j \iiint_{\Omega_i} \mathbf{grad} W_i \cdot \mathbf{grad} W_j dv = \iiint_{\Omega_i} \mathbf{grad} W_i \cdot \mathbf{H}_0 dv - \sum_{j=1}^N \iint_S \left(\frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial n} \right) W_i ds \quad (\text{II.55})$$

Remarques 1: Il est possible d'intégrer le terme source surfaciquement. Cette approche limite le nombre de calculs lors du processus d'intégration [BRUNOTTE 91].

Remarque 2: Cette écriture intégrale faible nous permet d'implémenter directement la condition aux limites (II.33) dans l'équation (II.55).

Le domaine extérieur ne peut être discrétisé dans sa totalité puisqu'il est infini. Il est alors nécessaire d'utiliser une transformation portant le nom de « boîte infinie ». Cet outil permet de transformer un domaine infini en un domaine borné [BRUNOTTTE 90].

Nous obtenons ainsi pour les deux régions air, deux sous-systèmes dont les inconnues sont la valeur du potentiel réduit en chaque noeud et la valeur des dérivées du gradient de ce potentiel projetées sur les normales de S en chaque noeud de S. Ces sous-systèmes sont creux.

Ils peuvent être aisément couplés avec le système (II.52), les termes comportant les dérivées normales se simplifiant avantageusement. Nous obtenons alors un système global, creux, dont les inconnues sont les valeurs du potentiel réduit en chaque point du maillage. Ce système étant creux, il peut être résolu par des méthodes itératives adaptées [SABONNADIÈRE 86].

La méthode des éléments finis possède l'énorme avantage de conduire à des grandeurs numériquement convergentes, ceci même près des sources, en particulier près de la tôle. En effet, le potentiel sur celle-ci a une valeur finie, contrairement aux méthodes intégrales de frontières, où il diverge numériquement. Par contre, les éléments finis fournissent des résultats légèrement bruités, ceci étant dû à la présence du maillage volumique de l'air. Pour obtenir des signatures plus « lissées », il peut être intéressant d'utiliser des méthodes de lissage comme celle des « éléments diffus » [MARECHAL 93], qui moyenne le potentiel, non pas en fonction de ses valeurs aux noeuds de l'élément considéré, mais en fonction des valeurs aux noeuds voisins.

IV.3.2 - Méthodes intégrales de frontières

a - Mise en équation

Si la méthode des éléments finis semble avantageuse pour la tôle, la spécificité de notre problème peut nous orienter vers une autre approche pour traiter la région air. En effet, celui-ci est à frontière ouverte. Il est alors nécessaire de développer des outils de modélisation de l'infini pour une résolution du problème par éléments finis, tâche qui peut se révéler délicate. Le potentiel dans l'air vérifie l'équation de Laplace puisque la perméabilité dans cette région est constante et isotrope. La méthode des intégrales de frontières est particulièrement bien adaptée pour résoudre ce type de problème « ouvert ».

Réalisons une intégration par parties de la forme faible (II.53).

$$\iiint_{\Omega} \Delta \psi(x) \varphi(x) dV + \iint_S \left(\psi(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \varphi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (\text{II.56})$$

Si nous choisissons ψ égale à la fonction de Green telle que :

$$\psi = G_p(Q) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi PQ} \quad (\text{II.57})$$

où P est un point de la surface S
Q est un point courant de S

Nous obtenons alors :

$$c(P)\varphi(P) + \iint_S \left(G \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n} - \varphi(Q) \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (\text{II.58})$$

où $c(P)$ prend différentes valeurs suivant si la région est intérieure ou extérieure [BRUNOTTE 90] :

- Problème intérieur (région air intérieure)

$$c = \iint_S \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (\text{II.59})$$

- Problème extérieur (région air extérieure)

$$c = -1 + \iint_S \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (\text{II.60})$$

Ces équations représentent l'angle solide sous lequel on voit les frontières du domaine du point P. Remarquons que dans l'équation (II.60) le coefficient -1 prend en compte l'infini.

En écrivant alors (II.58) sur chaque élément du maillage surfacique de S choisi pour discrétiser (II.52), nous obtenons un système linéaire. Cette approche n'est pas variationnelle mais dite par « collocation ». Nous obtenons, par exemple pour la région Ω_1 :

$$c_{i1}\varphi_i + \sum_{j=1}^N \varphi_j \iint_{S_j} \frac{\partial G_{ij}}{\partial n} ds_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial n} \iint_{S_j} G_{ij} ds_j \quad (\text{II.61})$$

Ce système possède comme inconnues les valeurs du potentiel sur la tôle ainsi que les valeurs de ses dérivées. Il peut, ici encore, être couplé avantageusement avec (II.52). Le groupement des deux systèmes conduit alors à un système plein [KRAHENBUHL 93], dont les inconnues sont également le potentiel et ses dérivées sur S. Ce système plein peut, par exemple, être résolu par une inversion par décomposition en valeurs singulières [PRESS 92].

L'avantage des méthodes intégrales est de conduire à des solutions lissées dans l'air pour le potentiel réduit. Par contre, les valeurs de celui-ci sont divergentes près de la tôle, si les intégrations sont calculées numériquement, par des condensations aux points de Gauss.

IV.3.3 - Intérêt pour la résolution du problème inverse

Si P dans l'équation (II.58) est un point de l'air, et non un point de S, le coefficient c vaut alors 1. La valeur du potentiel dans l'air dépend alors directement de ses valeurs sur S ainsi que des valeurs de ses dérivées. C'est ainsi que l'on calcule le champ réduit dans l'air.

Rappelons que notre but est de résoudre un problème inverse. Les formulations par intégrales de frontières sont le plus souvent rencontrées pour résoudre ce type de problèmes. Leur intérêt est de conduire à une relation directe entre le potentiel dans l'air (ou le champ) et une distribution de grandeurs sur la frontière du domaine, contrairement aux éléments finis qui n'offrent pas une telle relation.

IV.4 - Conclusions sur les méthodes de résolution locales

Nous venons de réaliser un inventaire des méthodes locales de résolution adaptées à notre problème. Elles sont basées sur une résolution « par morceaux » du problème et une association des différents sous-problèmes avec l'aide des conditions aux limites.

L'approche entièrement éléments finis (pour la tôle et pour l'air) a été développée au cours de la thèse de Xavier Brunotte et est implantée dans le logiciel éléments finis Flux3D, développé par Cedrat et le LEG. C'est l'outil numérique qui est actuellement utilisé par la marine pour modéliser les aimantations des navires.

Au début de nos travaux nous disposions du code éléments finis de Flux3D dans lequel est également implanté un code intégrales de frontières. Notre première approche a donc été de développer, dans ce logiciel, le couplage éléments minces/intégrales de frontières en potentiel réduit. Cette première étape a été réalisée avec succès mais il n'en demeurait pas moins certains problèmes. Les systèmes générés par cette formulation sont pleins. Or, nous utilisons un solveur éléments finis classique qui procède par résolution de systèmes approchés jusqu'à convergence vers une solution acceptable pour une incertitude donnée. Ce type de solveur, particulièrement bien adapté pour des matrices creuses, s'est avéré parfaitement inadapté pour résoudre des systèmes pleins. Il était, en effet, possible de converger vers des solutions acceptables pour des géométries simples, en revanche, dès que le nombre d'inconnues augmentait de façon conséquente, l'algorithme de résolution échouait. Il semblait donc irréaliste de modéliser des géométries telles que celles des navires tout en gardant un solveur éléments finis classique.

L'étape suivante aurait donc nécessité le développement d'un nouveau solveur, adapté à la résolution des systèmes pleins et à l'implanter dans le logiciel Flux3D. Cette solution paraissait parfaitement envisageable, toutefois, nous n'avons pas effectué ce travail. En effet, à ce stade de notre étude, nous nous sommes demandé si les formulations locales étaient bien adaptées à la résolution du problème inverse, qui rappelons le, est notre objectif final. Nous expliciterons, plus en détails, ce point en conclusion de ce chapitre. Nous avons donc abandonné l'idée de perfectionner nos algorithmes couplant éléments finis et intégrales de frontières afin de concentrer nos efforts sur les méthodes que nous avons appelées « méthodes globales ».

V - Les méthodes de résolution globales

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à une approche résolument différente des méthodes de résolution locales, pour lesquelles le domaine était divisé en sous-domaines, représentant les divers matériaux en présence. Nous allons maintenant considérer que le

domaine d'étude n'est constitué que d'un seul matériau, l'air. Des distributions de sources vont alors être placées dans celui-ci et créeront le champ magnétique.

La formulation en champ ou potentiel réduit étant particulièrement bien adaptée à notre problème, nous ne la remettons pas en cause. Nous sommes donc face à deux types de champs bien distincts auxquels il faut associer des sources, le champ inducteur et le champ réduit.

Considérons tout d'abord le champ inducteur. Comme nous l'avons évoqué, ces sources sont des courants situés à l'infini, pour le cas du champ terrestre, ou des boucles d'immunisation. Ce champ peut donc soit être considéré comme uniforme à l'échelle du navire, soit calculé par la loi de Biot et Savart. Sa prise en compte sera traitée comme dans les approches locales.

Le champ réduit représente la réaction de la tôle vis-à-vis du champ inducteur. Il est donc naturel de localiser ces sources sur celle-ci. L'approche par l'élément mince nous paraissant très séduisante, nous allons évidemment la conserver et considérer que les sources créant l'anomalie magnétique sont localisées sur la surface moyenne S de la coque. Cette partie donc expose quel type de sources pouvons nous placer sur S pour représenter le comportement magnétique de la tôle et une fois la nature de ces sources déterminée, comment les calculer.

V.1 - Le choix des sources

V.1.1 - Deux types de sources

Quelles sont les sources susceptibles de créer le champ réduit ? Rappelons que celui-ci possède des propriétés analogues au champ électrostatique (cf. chapitre II, paragraphe II.2.2.d). La source de champ en électrostatique étant la charge, celle-ci nous semble être à étudier avec soin. Il est aussi possible d'envisager des sources qui sont la réunion de deux charges très proches : le dipôle, et si nécessaire, des sources de champ réduit d'ordre supérieur telles que les quadripôles ou les octopôles.

Toutes ces différentes distributions de sources sur S vont créer des répartitions de potentiel dans l'air. Le comportement du potentiel réduit, pour notre cas, a fait l'objet d'une étude approfondie et est maintenant bien connu. Les distributions de sources que nous sélectionnerons devront donc répondre à des critères bien précis, en particulier en terme de variation du potentiel réduit au passage de S . Les distributions doivent donc assurer, d'après la partie II.3.4 de ce même chapitre :

- La continuité du potentiel au passage de S
- La discontinuité des dérivées normales du potentiel au passage de S

a - Distribution surfacique de charges

Nous sommes face à plusieurs types de distributions possibles, la première, a priori la plus simple, est le cas d'une distribution de charges. Ce type de distribution peut être également appelé distribution monopolaire ou potentiel simple couche et nous la notons ρ .

D'après [DURAND 64], les variations du potentiel au passage de S en un point M d'une telle répartition possèdent les caractéristiques suivantes :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{II.62})$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\rho(M) \quad (\text{II.63})$$

Cette distribution assure bien la continuité du potentiel au passage de S ainsi que la discontinuité des dérivées normales. Au passage de la tôle, le champ suivra l'équation:

$$\mathbf{H}_{\text{red1}} - \mathbf{H}_{\text{red2}} = \rho(M)\mathbf{n} \quad (\text{II.64})$$

Il y a donc conservation de la composante tangentielle du champ réduit et saut de sa composante normale. Ces caractéristiques sont exactement celles que nous cherchions. Il apparaît donc qu'une répartition surfacique de charges sur S est susceptible de représenter le comportement de la tôle. Les valeurs du potentiel réduit et du champ réduit sont alors, pour un point P quelconque au domaine :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\rho}{r} dS \quad (\text{II.65})$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \rho(M) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{II.66})$$

où P est un point quelconque du domaine
M est un point courant de S
r est le vecteur MP

Remarque : Les deux intégrales (II.65) et (II.66) peuvent sembler divergentes si P se rapproche de M. Ce n'est en réalité pas le cas, le potentiel et le champ étant finis sur la tôle. Ces intégrales sont analytiquement convergentes. Il faudra pourtant réaliser les intégrations très soigneusement en particulier si elles sont numériques. Ce point fera l'objet de précisions ultérieures.

b - Distribution surfacique de dipôles tangentiels

La grandeur qui nous vient à l'idée après la charge est évidemment le dipôle. Considérons donc que la surface S porte une répartition de dipôles d'orientation quelconque. D'après [DURAND 64], cette distribution que nous noterons $\mathbf{p}(M)$ assure en M un point de passage de S, les variations suivantes pour le potentiel :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = p_n(M) \quad (\text{II.67})$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \text{div}_S \mathbf{p}_t(M) \quad (\text{II.68})$$

où p_n représente la composante normale à S de la distribution \mathbf{p}

\mathbf{p}_t représente la composante tangentielle à S de la distribution \mathbf{p}
 div_S est l'opérateur divergence surfacique.

Une distribution de dipôles assure donc à la fois une discontinuité du potentiel et de sa dérivée normale, ce qui ne peut nous satisfaire puisque le potentiel doit être continu. Supposons que la distribution soit exclusivement tangentielle à la surface, nous avons alors :

$$p_n = 0 \quad (\text{II.69})$$

et donc :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{II.70})$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \text{div}_S \mathbf{p}(M) \quad (\text{II.71})$$

Cette répartition répond donc également à notre problème. Il semble possible de représenter la tôle par une distribution dipolaire, à la condition que celle-ci soit exclusivement tangentielle. En terme de champ, on aura, au passage de la tôle :

$$\mathbf{H}_{\text{red1}} - \mathbf{H}_{\text{red2}} = -\text{div}_S \mathbf{p}(M) \mathbf{n} \quad (\text{II.72})$$

Les expressions du potentiel réduit et du champ réduit en un point P seront alors :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{p}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{II.73})$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \text{grad}(\mathbf{p}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) dS \quad (\text{II.74})$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r^5} (3(\mathbf{p}(M) \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}(M)) dS \quad (\text{II.75})$$

L'équation (II.75) est l'expression du champ créé par une distribution dipolaire. Remarquons que les intégrales (II.73), (II.74) et (II.75) sont, elles aussi, analytiquement convergentes.

c - Distributions d'ordres supérieurs

Nous disposons déjà de deux grandeurs susceptibles de répondre à notre problème. Nous allons nous en satisfaire, ceci principalement pour deux raisons. D'une part, nous ne connaissons pas de distribution d'un ordre supérieur évidente qui serait en mesure d'assurer les mêmes variations du potentiel. Nous avons même de fortes raisons de penser qu'il en n'existe pas, mais ce résultat n'ayant pas été démontré, nous sommes dans l'impossibilité de l'affirmer. D'autre part, des distributions d'un ordre supérieur (quadrupôle, octopôles...) imposent le calcul d'intégrales présentant de très fortes divergences au voisinage de la tôle, ce qui serait très pénalisant pour la suite de notre approche.

V.1.2 - Signification physique des sources

Les deux grandeurs que nous avons présentées sont essentiellement mathématiques. Elles ont d'ailleurs été introduites mathématiquement. Nous allons nous efforcer dans cette partie de leur donner un sens physique et de les ramener à des grandeurs interprétables.

Il faut noter que les deux distributions sont censées représenter le même phénomène physique et donc, en particulier, créer le même champ en tout point de l'espace et imposer la même discontinuité des dérivées du potentiel sur S . Cette remarque impose, d'après (II.64) et (II.72) [DURAND 64] :

$$\operatorname{div}_S \mathbf{p} = -\rho \quad (\text{II.76})$$

A cette condition, les champs et les potentiels créés par les intégrales (II.65), (II.66), (II.73) et (II.74) sont strictement les mêmes. Nous affirmons ici ce point, sa démonstration se trouve dans [DURAND 64].

a - Signification physique de la charge

D'après l'équation (II.63), la charge en un point M de la tôle a pour expression :

$$\rho(M) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (\text{II.77})$$

Si on considère que H_0 varie peu entre deux points en vis-à-vis sur la surface S_1 et S_2 , on peut écrire :

$$\mu_0 \rho(M) = \mu_0 (H_{0n_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}) - \mu_0 (H_{0n_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}) \quad (\text{II.78})$$

$$\rho(M) = \frac{1}{\mu_0} (B_{n1} - B_{n2}) \quad (\text{II.79})$$

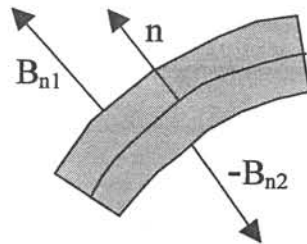


Figure II.7. Rappel des notations

Il apparaît donc que la charge $\rho(M)$ est directement proportionnelle au flux d'induction s'échappant de la tôle dans l'air (à un coefficient $1/\mu_0$ près). Cette remarque présente l'intérêt d'expliquer physiquement une grandeur a priori mathématique. De plus, elle ne sera pas sans conséquence pour la suite de la modélisation.

b - Signification physique du dipôle

Intéressons nous maintenant à la signification physique du dipôle. Considérons un volume aimanté Ω . Celui-ci crée un potentiel, qui a pour expression [BRISSONNEAU 97] :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \mathbf{M}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{II.80})$$

où \mathbf{M} représente l'aimantation en un point du matériau.

Supposons maintenant que le volume considéré soit une tôle. D'après l'hypothèse de l'élément mince, \mathbf{H} est tangent et constant au passage de la tôle. \mathbf{H} et \mathbf{M} étant rigoureusement proportionnels dans le matériau, il en est de même pour \mathbf{M} . La grandeur \mathbf{M} étant constante, le long de la direction perpendiculaire à l'épaisseur, l'intégrale volumique (II.80) peut donc être remplacée par une intégrale surfacique :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{e} \mathbf{M}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{II.81})$$

En comparant (II.81) et (II.73), il vient assez naturellement :

$$\mathbf{p} = \mathbf{e} \mathbf{M} \quad (\text{II.82})$$

La distribution tangentielle dipolaire est donc une image de l'aimantation, à un coefficient près. Ceci donne un grand intérêt à cette représentation puisqu'elle est directement proportionnelle à la grandeur physique qui nous intéresse particulièrement.

V.1.3 - Un exemple didactique

Nous allons illustrer nos propos par un exemple simple, ceci dans le but de familiariser le lecteur avec les grandeurs employées. Dans cet exemple, l'espace d'étude se limitera à un domaine en deux dimensions. Considérons une portion de tôle dont l'aimantation est minimale à son extrémité gauche, maximale en son centre et de nouveau minimum à son extrémité droite (fig.II.8).

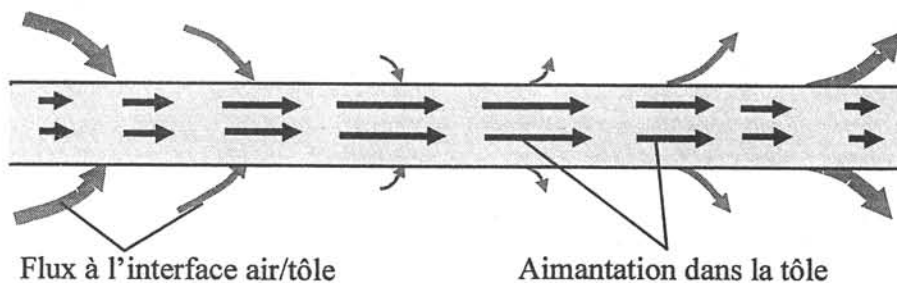


Figure II.8. Représentation de la tôle.

La tôle canalise le flux. L'aimantation est donc créée par le flux d'induction rentrant dans celle-ci. Celui-ci est donc fort aux extrémités. Il est négatif sur la partie de gauche car rentrant et positif sur la partie de droite car sortant. Remarquons qu'il est relativement faible au centre de la plaque car nous considérons que l'aimantation varie peu dans cette portion.

Représentons la répartition de dipôles dans la plaque. Celle-ci est, comme nous l'avons annoncé, directement proportionnelle à l'aimantation (fig II.9).

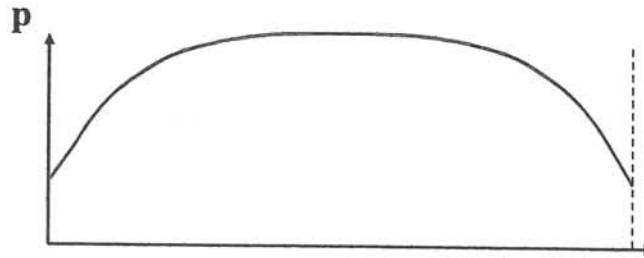


Figure II.9. Module de distribution dipolaire le long de la plaque.

Nous avons démontré que la distribution de charges équivalente est proportionnelle au flux d'induction s'échappant dans l'air. La répartition de charge sera donc (fig.II.10) :

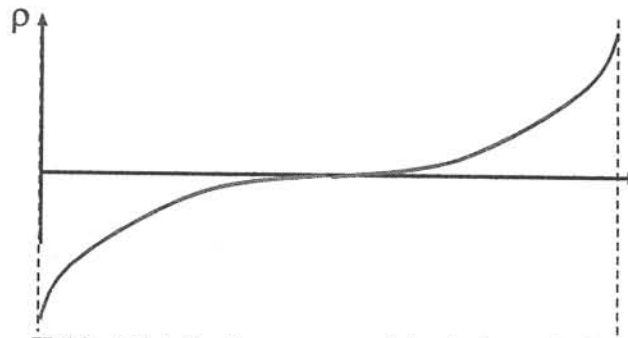


Figure II.10 : Distribution monopolaire le long de la plaque.

Remarque : Rappelons que les distributions p et ρ sont reliées par l'équation (II.76). Pour l'exemple que nous venons de décrire, l'opérateur divergence surfacique se limite à une seule direction, celle de la tôle. Il devient donc une simple dérivée le long de celle-ci. La charge est donc, toujours pour cet exemple, l'opposée de la dérivée du module de l'aimantation.

Les deux distributions créent le même champ dans l'air. Remarquons que si on se place loin de la plaque, on peut considérer celle-ci macroscopiquement comme un dipôle (ramené à un espace deux dimensions). L'équivalent en charges nous conduit à une plaque portant une forte charge négative à l'une de ses extrémités et une forte charge positive à l'autre. Celle-ci est également équivalente, loin de la plaque, à un dipôle.

V.2 - Evaluation des sources

Nous avons défini deux grandeurs susceptibles d'être représentatives du comportement de la tôle. Il faut maintenant trouver des approches permettant de calculer ces distributions.

V.2.1 - Des équations intégrales

Dans cette partie, nous allons déterminer les équations que suivent les deux distributions que nous venons de définir.

a - Une représentation intégrale pour la distribution monopolaire

Considérons l'équation (II.38), représentative du comportement physique de la tôle. En la combinant avec (II.77), qui relie la valeur de la charge avec le saut des dérivées du potentiel, nous obtenons :

$$e(\mu_r - 1) \operatorname{div}_s (\mathbf{H}_0 - \operatorname{grad} \varphi) = -\rho \quad (\text{II.83})$$

Or, le potentiel réduit est créé par la tôle, c'est-à-dire par toutes les charges de la distribution. L'équation (II.66) conduit alors à :

$$e(\mu_r - 1) \operatorname{div}_s (\mathbf{H}_0 + \frac{1}{4\pi} \iint_s \rho(M) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS) = -\rho \quad (\text{II.84})$$

$$-\rho - \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \operatorname{div}_s \iint_s \rho(M) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = e(\mu_r - 1) \operatorname{div}_s \mathbf{H}_0 \quad (\text{II.85})$$

Cette équation intégrale relie les charges à la géométrie et aux caractéristiques physiques du problème.

b - Une représentation intégrale pour la distribution dipolaire

Considérons maintenant l'équation intrinsèque au matériau :

$$\mathbf{M} = (\mu_r - 1) \mathbf{H} \quad (\text{II.86})$$

\mathbf{H} se décompose en deux parties. La première est le champ inducteur, la deuxième le champ créé par la tôle, représentée par des dipôles. Projetons cette équation vectoriellement sur la tôle, nous obtenons :

$$\frac{\mathbf{p}}{e} = (\mu_r - 1) (\mathbf{H}_{0s} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_s \iint_s (\mathbf{p}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) dS) \quad (\text{II.87})$$

$$\mathbf{p} + \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \operatorname{grad}_s \iint_s (\mathbf{p}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) dS = e(\mu_r - 1) \mathbf{H}_{0s} \quad (\text{II.88})$$

où \mathbf{H}_{0s} représente la composante du champ inducteur tangentielle à la tôle.

Nous obtenons donc une écriture intégrale reliant les dipôles et les caractéristiques physiques et géométriques du problème. Remarquons qu'une écriture intégrale où l'inconnue est l'aimantation \mathbf{M} est possible. L'écriture est très proche de (II.88).

$$\mathbf{M} + \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \operatorname{grad}_s \iint_s (\mathbf{M}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) dS = (\mu_r - 1) \mathbf{H}_{0s} \quad (\text{II.89})$$

c - Conclusion sur les écritures intégrales

Les équations (II.85) et (II.88) apparaissent dans la référence [VISHENSKY 93]. Elles ont été développées par une équipe russe impliquée comme nous dans la modélisation des

aimantations des navires. Leurs démonstrations n'ont été à notre connaissance publiées que dans des ouvrages en langue russe, c'est pourquoi nous nous sommes attachés à les justifier. Nous devons donc maintenant résoudre ces équations.

Celles-ci présentent l'intérêt d'être générales, mais leur résolution se heurte à des difficultés. Elles présentent, en effet, de fortes singularités. Une fois les opérateurs dérivés introduits sous les intégrales, les intégrations à effectuer sont en $1/r^3$. Ces intégrales sont évidemment convergentes en chaque point de la tôle mais l'intégration de l'influence du point sur lui-même n'est pas sans difficulté, en particulier si celle-ci est numérique. Si nous utilisons des intégrations analytiques, le problème se règle de lui-même, mais elles sont complexes et peu développées pour des fonctions en $1/r^3$.

V.2.2 - Les méthodes par condensation

a - Généralités sur la condensation

L'approche développée par [VISHNEVSKY 93] permet de s'affranchir des problèmes de singularité des intégrales à calculer. Rappelons que l'idée que nous développons dans les méthodes de résolution globales est de remplacer la tôle par de l'air portant des distributions de sources. En théorie, la meilleure distribution envisageable est la distribution volumique de sources. Nous avons vu que nous pouvions la remplacer avantageusement par une distribution superficielle mais cette distribution n'en demeure pas moins singulière pour r devenant petit. L'idée est ici de condenser ces sources en des points bien précis. Les répartitions deviennent alors ponctuelles. Des points de collocation seront alors choisis sur la surface S , mais où il n'y a pas de source ponctuelle. Ces points seront, bien entendu, à définir et cette approche devrait alors nous permettre de nous affranchir de ces problèmes de singularité.

Ce choix de condensation n'est évidemment pas sans conséquence sur le calcul du champ dans l'air. En effet, ces modèles ne permettront de calculer l'anomalie magnétique que relativement loin des sources.

Dans toute la suite, nous considérerons que la surface S est maillée en N éléments surfaciques plats de forme quelconque. Ces éléments sont construits à partir de M nœuds et les nœuds sont reliés à leurs voisins par des arêtes (fig.II.11).

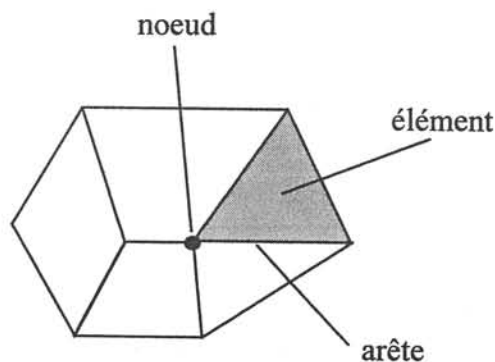


Figure II.11. Nœuds, éléments et arêtes

b - Condensation des dipôles

Nous allons appliquer cette méthode de condensation à la distribution dipolaire sur la surface S . Celle-ci est une image de l'aimantation, grandeur interne à la tôle. Il nous faut choisir un point où la condenser. Il semble naturel de choisir le barycentre de chaque élément. Notre modèle de sources va donc être constitué de N dipôles ponctuels. Considérons S_i l'élément i et \mathbf{P}_i , le dipôle ponctuel qui lui est associé, nous posons donc :

$$\mathbf{P}_i = \iint_{S_i} \mathbf{p} \, dS \quad (\text{II.90})$$

Avec l'aide de (II.87) projetée sur l'élément S_i , nous obtenons :

$$\frac{\mathbf{P}_i}{e} = \iint_{S_i} (\mu_r - 1) \left(\mathbf{H}_{0s} - \frac{1}{4\pi} \sum_j \text{grad} \frac{\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) dS_i \quad (\text{II.91})$$

$$\frac{\mathbf{P}_i}{e(\mu_r - 1)} + \iint_{S_i} \frac{1}{4\pi} \sum_j \text{grad} \frac{\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} dS_i = \iint_{S_i} \mathbf{H}_{0s} dS_i \quad (\text{II.92})$$

La première intégrale de l'expression (II.92) est divergente pour $i=j$, au point de condensation. En effet, au barycentre de l'élément i , r_{ij} est nul. Pour éviter cette divergence, nous pouvons remarquer que [ANGOT 72] :

$$\iiint_V \text{grad} f \, dV = \iint_S f \mathbf{n} \, dS \quad (\text{II.93})$$

où V est un volume, S la surface délimitant ce volume et \mathbf{n} la normale sortante. En limitant cette formule à un élément surfacique de la tôle, nous obtenons :

$$\iint_{S_i} \text{grad} \frac{\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} dS_i = \int_{L_i} \frac{\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \mathbf{n}_i dL \quad (\text{II.94})$$

où \mathbf{n}_i est la normale sortante extérieure à l'élément i et tangente à celui-ci.

Cette formule est très utilisée pour calculer ce type d'intégrale. Elle permet de projeter le champ rayonné par un dipôle sur un élément sur ses arêtes. On peut la visualiser schématiquement sur la figure II.12.

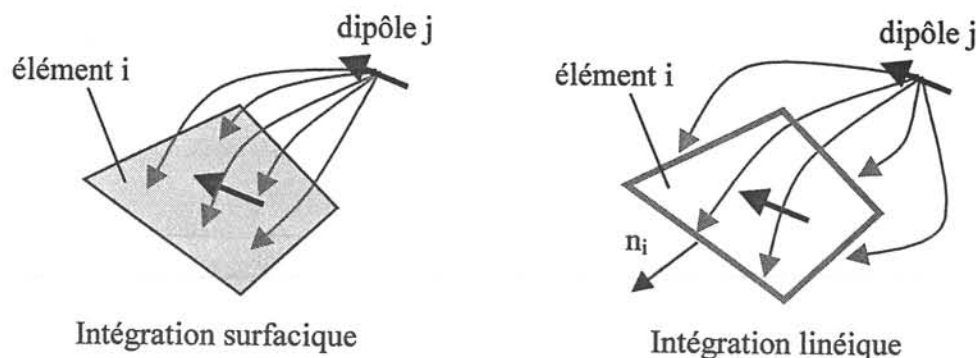


Figure II.12 : Les deux intégrations possibles

L'équation (II.93) est particulièrement bien adaptée pour calculer l'influence du dipôle P_i sur l'élément i . En effet, l'intégration linéique permet de s'affranchir du calcul des intégrales singulières (fig.II.13). De plus, elle fait décroître la singularité d'un ordre.

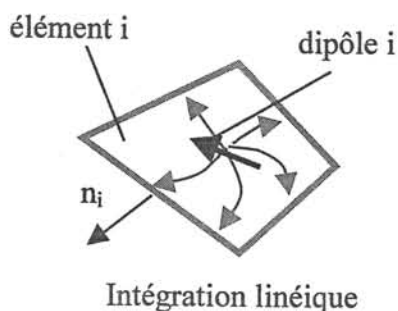


Figure II.13. Influence du dipôle i sur l'élément i

En appliquant cette formule à (II.92), nous obtenons :

$$\frac{P_i}{e(\mu_r - 1)} + \frac{1}{4\pi} \sum_j^N \int_{L_i} \frac{P_j \cdot r_{ij}}{r_{ij}^3} n_i dL = \iint_{S_i} H_{0s} dS_i \quad (II.95)$$

Cette équation est vectorielle et projetée dans le plan de la tôle. Si nous écrivons (II.95) pour chaque élément, nous obtenons un système de $2N$ équations pour $2N$ inconnues. En effet, chaque dipôle possède deux inconnues qui sont ses projections dans une base de vecteurs orthonormés tangentiels à chaque élément. Ces vecteurs de base ont a priori des directions quelconques, tout en restant perpendiculaires. L'équation vectorielle (II.95) peut donc être ramenée à deux équations scalaires. Une fois le système résolu, le champ dans l'air peut être calculé par :

$$H_{red} = -\frac{1}{4\pi} \sum_j^N \text{grad} \left(P_j \cdot \frac{r_j}{r_j^3} \right) \quad (II.96)$$

Remarque : Cette formulation réalise une condensation de l'aimantation au barycentre de l'élément. Chaque équation est obtenue en réalisant un bilan des champs en présence projetée

sur les arêtes de chaque élément. On peut la qualifier de « bilan de champ sur les arêtes de chaque élément ».

c - Condensation des charges

Nous avons condensé les dipôles au barycentre de chaque élément, ceci semblait naturel car l'aimantation est une grandeur interne à la tôle. Il faut maintenant définir où condenser les charges. Rappelons que la charge représente, à un coefficient multiplicatif près, le flux d'induction s'échappant dans l'air. Supposons une structure non fermée, les arêtes directement en contact avec l'air seront l'endroit privilégié d'où le flux va s'échapper. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de pointe et il semble donc logique de placer des charges à cet endroit pour le prendre en compte. Si nous voulons condenser les charges, une localisation s'impose donc : les nœuds du maillage. Remarquons que les charges sont les dérivées des dipôles. Comme d'autre part, les dipôles sont les dérivées des charges, une condensation sur les nœuds nous permettra de conserver une relative symétrie à notre problème.

Lorsque nous avons développé nos algorithmes, nous disposions d'un mailleur type élément finis. Celui-ci nous fournissait un maillage surfacique classique composé d'éléments plans reliés entre eux par des nœuds. Pour réaliser la condensation des charges, nous avons été dans l'obligation de définir un type d'élément quelque peu particulier. L'approche que nous nous proposons de développer est un bilan des flux sur les frontières d'éléments entourant les charges. Considérons un nœud i et les arêtes partant de celui-ci. Les frontières de l'élément qui lui seront associées relieront les milieux de chaque arête en suivant la surface (fig.II.14).

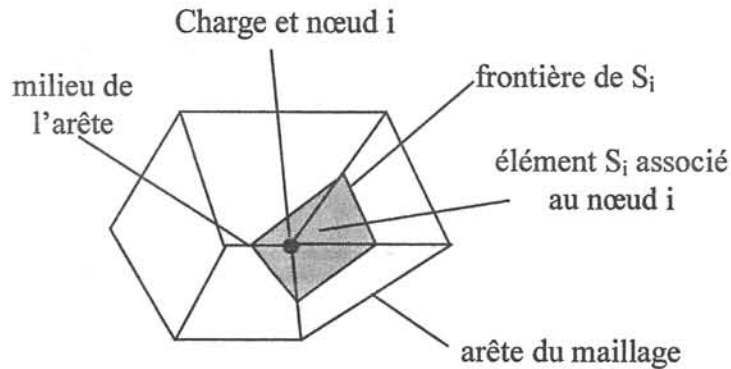


Figure II.14 : Représentation des éléments pour la condensation par les charges

Il faut noter que si le nœud i est un coin d'une tôle, l'élément associé ne sera pas plan. Comme dans le cas précédent, nous définissons la charge condensée par :

$$Q_i = \iint_{S_i} \rho dS \quad (\text{II.97})$$

Reprenons l'équation (II.83), nous obtenons

$$-Q_i = \iint_{S_i} e(\mu_r - 1) \operatorname{div}_s \left(\mathbf{H}_0 - \sum_j^M Q_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) dS \quad (\text{II.98})$$

$$-\frac{Q_i}{e(\mu_r - 1)} = \iint_{S_i} \text{div}_S \mathbf{H}_0 dS + \sum_j^M Q_j \iint_{S_i} \text{div}_S \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} dS \quad (\text{II.99})$$

Cette équation est encore singulière pour $i=j$. Pour nous affranchir de cette singularité, nous allons utiliser le théorème classique suivant [ANGOT 72] :

$$\iiint_V \text{div} \mathbf{A} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{II.100})$$

Cette relation sera limitée à une surface et à l'opérateur divergence surfacique. Nous obtenons alors une nouvelle équation pour (II.99)

$$-\frac{Q_i}{e(\mu_r - 1)} - \sum_j^M Q_j \int_{L_i} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \mathbf{n}_j dL = \int_{L_i} \mathbf{H}_{0s} \cdot \mathbf{n}_i dL \quad (\text{II.101})$$

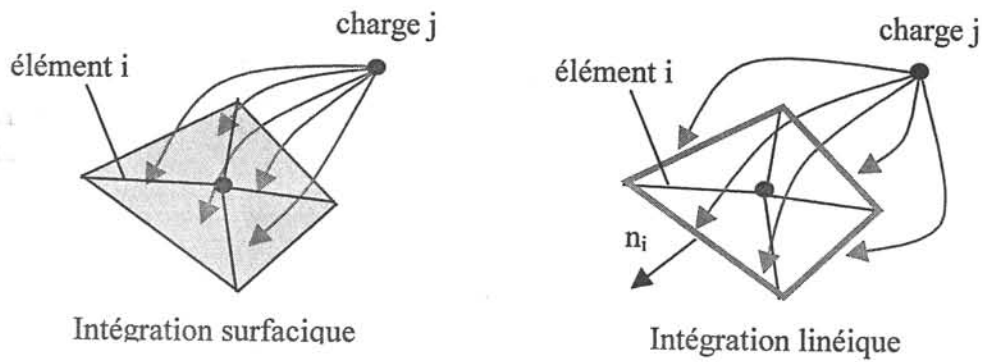


Figure II.15. Equivalence entre les deux intégrations

L'intérêt de ce type d'intégration est le même que pour la formulation en dipôles ponctuels. D'une part, l'intégration de l'influence de la charge sur son élément est possible, d'autre part la singularité décroît d'un ordre (fig.II.16).

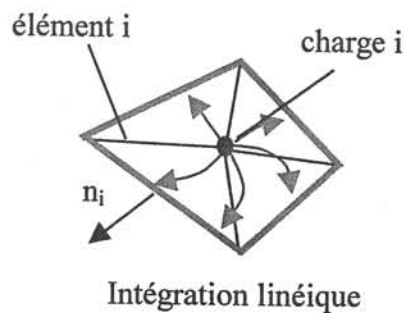


Figure II.16. Intégration de la charge sur son élément

Cette formulation réalise un bilan des flux pour chaque élément. Les termes en intégrales linéiques sont la partie du flux circulant dans la tôle. L'opposée de la somme de ces flux

s'échappe donc dans l'air (le flux est conservatif) et est égale à la charge. Cette remarque nous indique comment réaliser le bilan pour des éléments portant des charges localisées sur des arêtes directement en contact avec l'air. Il suffit simplement d'intégrer linéiquement sur les frontières ayant un contact direct avec la tôle (fig II.17).

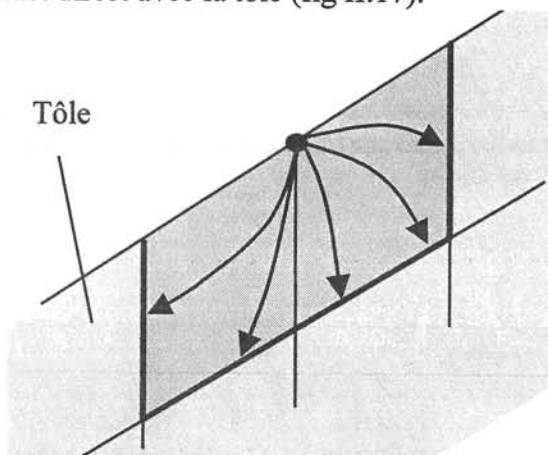


Figure II.17 : Intégration pour une charge en contact direct avec l'air

L'écriture de (II.101) sur chaque élément conduit à un système linéaire. L'équation étant scalaire, le système obtenu est carré et le nombre d'inconnues égal à M , le nombre de nœuds du maillage. Une fois le système résolu, la répartition ponctuelle de charges permet de calculer le champ dans l'air :

$$\mathbf{H}_{\text{red}} = \frac{1}{4\pi} \sum_j^N Q_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad (\text{II.102})$$

Remarque : Cette approche condense la charge tout en réalisant un bilan des flux sur les frontières. On peut la qualifier de « bilan de flux sur les frontières de chaque élément ».

d - Critique des méthodes de condensation

Comme nous l'avons déjà mentionné, ces deux formulations ont été développées dans [VISHNEVSKI 93], publication qui a largement inspiré nos travaux. Seules les justifications sont réellement nouvelles. Il convient pourtant d'avoir un regard critique sur ces deux approches. Le principal reproche que l'on peut leur formuler est qu'elle réalise une condensation de la grandeur sur la tôle.

Pour les dipôles, cette condensation est catastrophique. Elle fera l'objet d'une étude plus approfondie dans une partie ultérieure, mais sans trahir nos propos, nous pouvons déjà prévoir que la validité du champ calculé dans l'air ne sera assurée que très loin du matériau. Ceci est dû, d'une part à la condensation et d'autre part à la décroissance du champ dipolaire en $1/r^3$. Cette approche ne peut donc en aucun cas nous satisfaire pleinement. Rappelons, en effet, que notre but est de résoudre un problème inverse à partir de mesures sur des capteurs qui pourront être près de la tôle, ceci afin de nous rapprocher des sources et ainsi de maximiser le rapport signal sur bruit ou pour répondre à des problèmes pratiques d'installation.

L'approche en charges condensées est plus favorable. Il y a évidemment toujours condensation, mais la charge assure une décroissance du champ en $1/r^2$. Nous avons donc une validité du champ calculé plus près de S. Ce modèle peut-être considéré comme satisfaisant. Par contre, la charge reste une grandeur mathématique, peu interprétable. Nous sommes plutôt intéressés par des formulations en aimantation, qui pourront nous permettre d'inclure, à plus ou moins long terme, des modèles représentatifs de phénomènes tels que l'hystérésis ou la magnétostriction, dans notre problème direct.

Nous nous sommes donc efforcés de développer un modèle qui possède les avantages des deux formulations sans en avoir les inconvénients. Les qualités fondamentales de ce nouveau modèle seront donc :

- un modèle en aimantation, c'est-à-dire dont les inconnues sont dipolaires.
- une validité du champ calculé près de la tôle de même qualité que la formulation en charges, c'est-à-dire en $1/r^2$.

V.2.3 - Vers un modèle mixte

a - Un théorème fondamental

Avant d'exposer notre formulation, nous allons tout d'abord énoncer un résultat largement connu. Pour plus de précisions, le lecteur se reportera à l'Annexe A. Considérons un volume uniformément aimanté Ω , délimité par une surface S et \mathbf{n} la normale sortante de S. Ce volume aimanté crée un champ dans l'air ayant pour expression :

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \text{grad}\left(\mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) dV \quad (\text{II.103})$$

A la condition que la divergence de \mathbf{M} soit nulle dans le volume aimanté, le champ créé par le matériau peut s'écrire :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{II.104})$$

Nous remarquons que le champ créé par la distribution d'aimantation \mathbf{M} est rigoureusement le même que celui créé par une distribution de charges localisée sur S. La valeur de cette distribution surfacique de charges a pour expression $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$. Il y a validité de cette approche partout dans l'air, mais aussi à l'intérieur du matériau, la seule condition étant que la divergence de l'aimantation soit effectivement nulle. Cette formule s'applique pour un volume uniformément aimanté.

Remarque : Si la divergence de l'aimantation est, par hypothèse, non nulle dans le matériau, il y a apparition d'une densité volumique de charges à l'intérieur de Ω .

Ce résultat peut être appliqué aisément à une tôle représentée par une surface S et d'épaisseur e. Considérons que cette tôle possède une aimantation constante et tangentielle à celle-ci. Le calcul du champ peut être réalisé de deux façons différentes.

$$\mathbf{H} = -\frac{e}{4\pi} \iint_S \text{grad}_s \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dS \quad (\text{II.105})$$

$$\mathbf{H} = \frac{e}{4\pi} \int_L \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dL \quad (\text{II.106})$$

où \mathbf{n} est la normale sortante de S tangentielle à cette surface. La distribution surfacique d'aimantation constante est alors strictement équivalente à une distribution linéique de charges (fig.II.18).

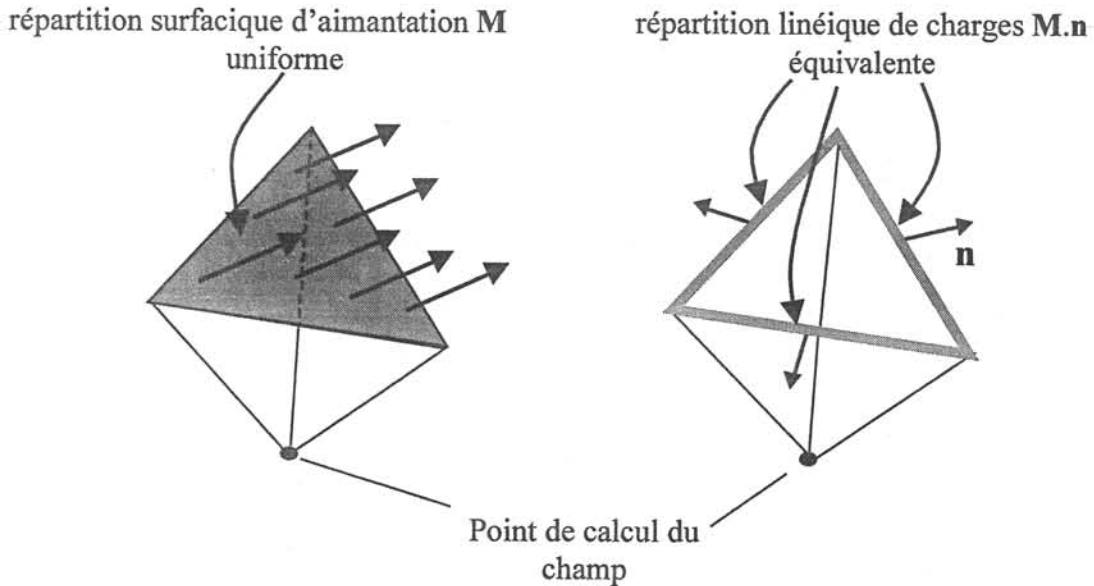


Figure II.18. Equivalence aimantation uniforme/distribution de charges linéiques

b - Une nouvelle formulation

Nous allons considérer que sur chaque élément i du maillage est affectée une aimantation uniforme \mathbf{M}_i . Si nous écrivons l'équation (II.89) au barycentre de l'élément i , nous obtenons :

$$\mathbf{M}_i + \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \sum_j^N \iint_{S_j} \text{grad}_s \left(\mathbf{M}_j \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) = (\mu_r - 1) \mathbf{H}_{0s_i} \quad (\text{II.107})$$

Cette équation est une fois de plus singulière pour $i=j$. Appliquons lui maintenant la transformation précédente :

$$\mathbf{M}_i + \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \sum_j^N \int_{L_j} (\mathbf{M}_j \cdot \mathbf{n}_j) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} dL = (\mu_r - 1) \mathbf{H}_{0s_i} \quad (\text{II.108})$$

- où L_j représente le contour de l'élément j
- \mathbf{n}_j représente la normale tangentielle sortante à l'élément j
- \mathbf{H}_{0s_i} représente les composantes tangentielles du champ inducteur au barycentre de S_i .

La formulation que nous proposons est différente par son approche des formulations précédentes. Au lieu de condenser les grandeurs en un point et de réaliser le bilan d'une grandeur sur les frontières de chaque élément, elle considère une répartition surfacique de la grandeur et effectue une collocation au barycentre de l'élément. On peut la schématiser de la façon suivante (fig.II.19) :

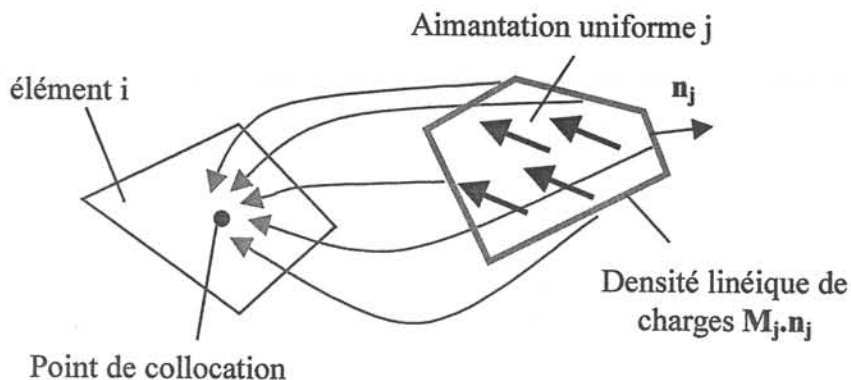


Figure II.19. Représentation schématique de l'intégration

Remarquons que le problème d'intégration de l'élément en son barycentre est levé par l'apparition de la densité linéique de charges.

L'équation obtenue est vectorielle. Tout comme l'approche en dipôles ponctuels, il est nécessaire de la projeter sur des bases orthonormées de chaque élément. Si on l'écrit au barycentre de chacun de ces éléments, on obtient alors un système à $2N$ inconnues.

La formulation présente principalement deux avantages. Le premier est d'offrir une résolution en terme d'aimantation. Une fois résolu, le système conduira aux valeurs de l'aimantation uniformément répartie sur chaque élément. Le deuxième avantage est évidemment l'intégration linéique de charges. Le modèle est équivalent à des charges $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ constantes par arête. La décroissance du champ est donc en $1/r^2$. Le champ dans l'air est calculable soit par (II.105) soit par (II.106). C'est évidemment l'intégration linéique que nous privilégierons :

$$\mathbf{H}_{\text{red}} = \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \sum_i^N \int_{L_i} (\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}) dL \quad (\text{II.109})$$

Nous avons ainsi développé une nouvelle formulation qui cumule les avantages des deux précédentes. Nous l'appelons, par la suite, formulation ou modèle « mixte ».

V.3 - Exemple numérique

Nous allons tester les trois formulations sur un exemple simple avec deux objectifs. Le premier est de déterminer dans quelle mesure ces trois méthodes peuvent nous permettre de modéliser les aimantations des navires sur le plan de référence. Le deuxième est de savoir si ces formulations sont satisfaisantes en terme de validité du champ calculé près de la coque, c'est-à-dire où nous serons susceptibles de placer nos capteurs.

V.3.1 - Présentation du cas test

Nous choisissons délibérément un cas simple, afin de maîtriser le maximum de paramètres. Considérons une plaque carrée de 2 m de côté et d'épaisseur 1,4 mm, placée dans un champ inducteur qui lui est parallèle. La valeur de ce champ sera de 40000 nT (nanoteslas), ordre de grandeur de la composante verticale du champ magnétique terrestre à nos latitudes. La perméabilité relative du matériau sera de 96, correspondant à l'acier qui sera utilisé pour la maquette de validation et qui est traditionnellement utilisé en construction navale (fig.II.20).

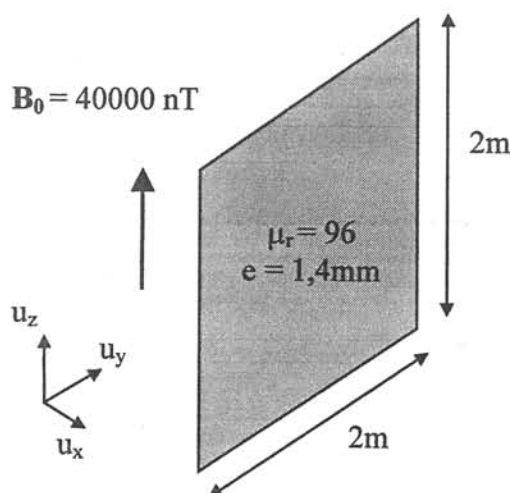


Figure II.20 : Géométrie et caractéristiques du cas test

Le problème a été modélisé par éléments finis à l'aide du logiciel Flux3D avec les caractéristiques suivantes :

- Résolution en potentiel réduit pour toutes les régions (tôle et air).
- Utilisation des éléments minces pour représenter la tôle.
- Utilisation de la boîte infinie
- Utilisation d'un maillage volumique très dense pour obtenir une solution de référence

La méthode des éléments finis étant bien maîtrisée, les résultats obtenus seront considérés comme notre référence. Nous n'avons pas jugé utile de mettre en place une expérimentation qui demanderait un investissement non négligeable en temps, pour tester de simples convergences numériques. De plus, tous nos algorithmes seront validés expérimentalement dans la dernière partie de ce mémoire. Nous nous contenterons donc ici de cette référence numérique.

La méthode des éléments finis présente l'avantage de ne pas diverger à proximité des sources, en particulier, près de la tôle. Elle va donc nous être d'une grande utilité pour évaluer les divergences de nos formulations. Par contre, elle génère un léger bruit de maillage dont sont dépourvues les méthodes intégrales, pour le calcul du champ dans l'air. Après résolution, nous obtenons l'aimantation de la plaque et la valeur du champ partout dans l'espace (fig.II.21).

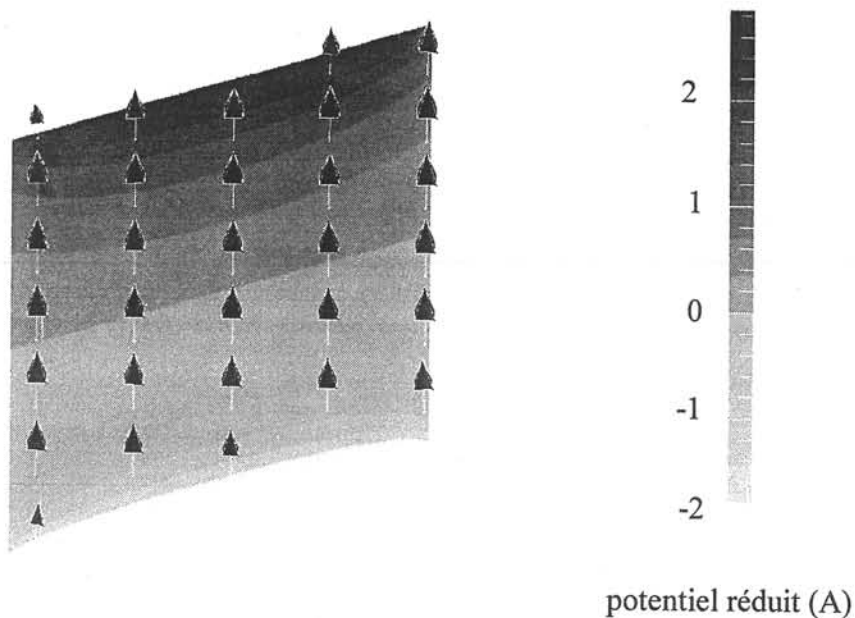


Figure II.21 : Exemple de modélisation de la plaque sous Flux3D
Répartition de potentiel réduit et champ dans la plaque

V.3.2 - Validation en champ lointain

Nous allons considérer un maillage grossier de la plaque, ceci dans le but de tester nos algorithmes. Nous allons, tout d'abord, vérifier la validité du champ calculé relativement loin de la tôle. Ce test pourra nous permettre de déterminer si les trois formulations globales peuvent effectivement nous permettre de calculer l'anomalie sur le plan de référence, pour un bâtiment réel par exemple. La plaque est maillée en 16 éléments et constituée de 25 nœuds (fig.II.22). Le problème sera résolu successivement avec nos trois formulations globales.

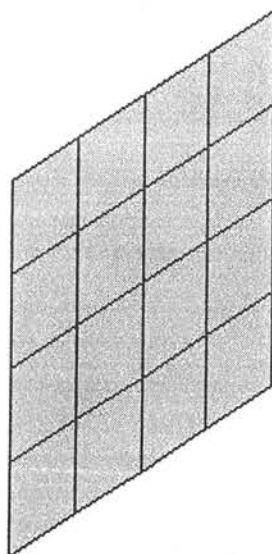


Figure II.22 : Maillage de la plaque

a - Résultat pour les dipôles ponctuels

Cette formulation conduit à un système carré de 32 inconnues (2 fois le nombre d'éléments). Pour toutes les approches, nous précisons le conditionnement, cette grandeur étant mieux explicitée dans le chapitre III. Ce conditionnement permet de statuer sur la facilité d'inversion d'un système et de savoir si la solution va être sensible aux imprécisions numériques. Plus le conditionnement est fort, plus le système est difficilement inversible. Un conditionnement de 1 est idéal. Nous noterons cette grandeur ξ . Pour la formulation en dipôles ponctuels, il est de :

$$\xi = 1,841$$

Ce conditionnement est bon, il est donc possible d'inverser le système sans précautions particulières, par une simple décomposition en valeurs singulières, par exemple [PRESS 92]. Nous obtenons alors la répartition de dipôles sur la plaque (fig.II.23).

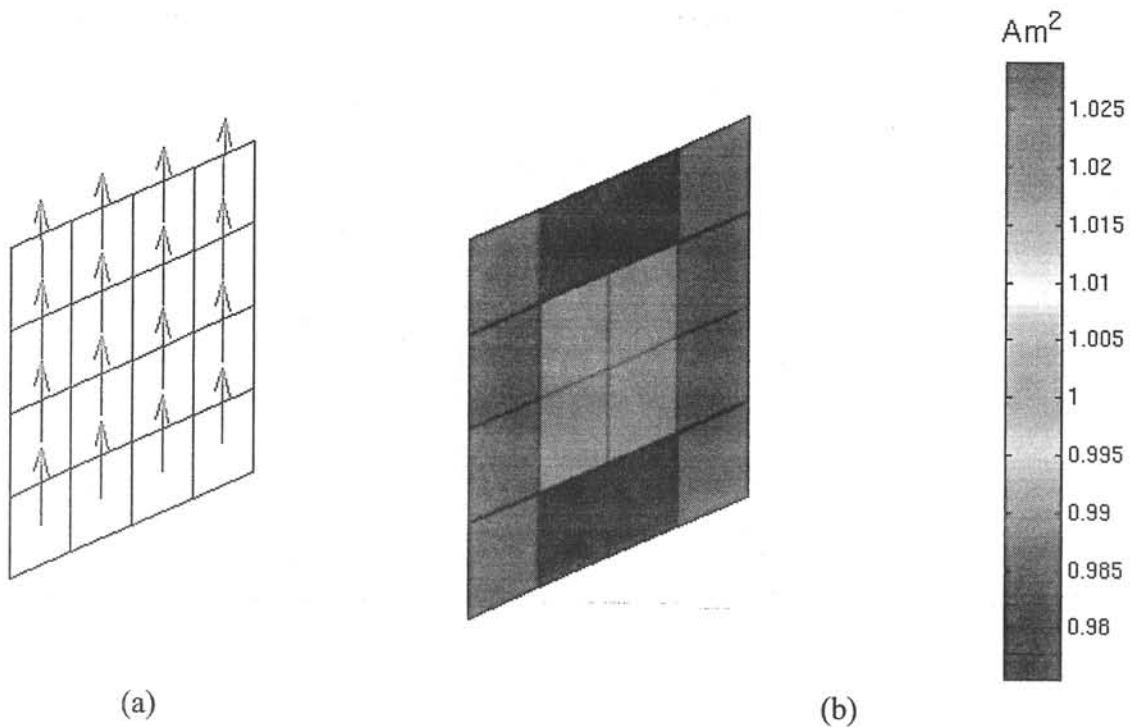


Figure II.23 : (a) Direction des dipôles ponctuels
(b) Module des dipôles ponctuels

Remarquons que les dipôles ont tendance à s'aligner avec le champ inducteur, ce qui est en accord avec la physique du phénomène. De plus, leurs modules sont quasiment constants sur la plaque.

b - Résultat pour les charges ponctuelles

Le système obtenu pour la formulation en charges comporte 25 inconnues (le nombre de nœuds). Son conditionnement est également faible :

$$\xi = 1,312$$

La répartition de charges est la suivante (fig.II.24) :

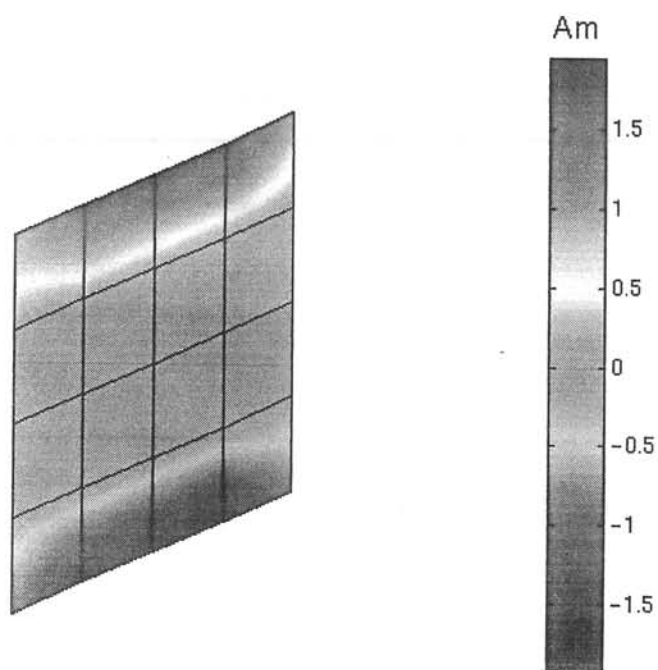


Figure II.24 : Répartition des charges ponctuelles sur la plaque

Il faut préciser ici que les charges sont ponctuelles et localisées sur chaque nœud, la figure II.24. réalise une interpolation graphique, pour de simples raisons de lisibilité et d'esthétisme.

Les fortes valeurs de charges sont localisées sur le haut et le bas de la plaque. L'aimantation dans la plaque étant quasiment verticale, le flux d'induction rentre par le bas et sort par le haut. Notons également que les charges sont quasi nulles au centre de la plaque puisque le module des dipôles est presque constant.

c - Résultat pour le problème mixte

La formulation en problème mixte conduit à 32 inconnues et le conditionnement est le suivant :

$$\xi = 1,312$$

Nous obtenons la répartition d'aimantation (fig.II.25) ainsi que la répartition de charges linéique qui lui est associée (fig.II.26).

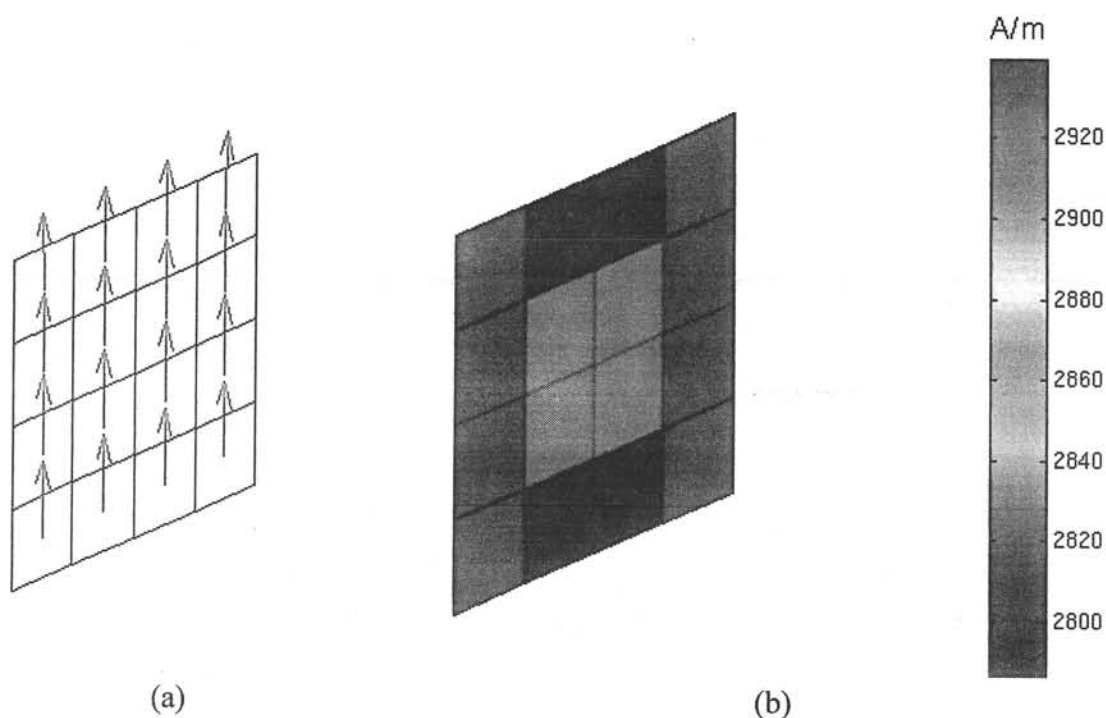


Figure II.25 : (a) Direction de l'aimantation
(b) Module de l'aimantation

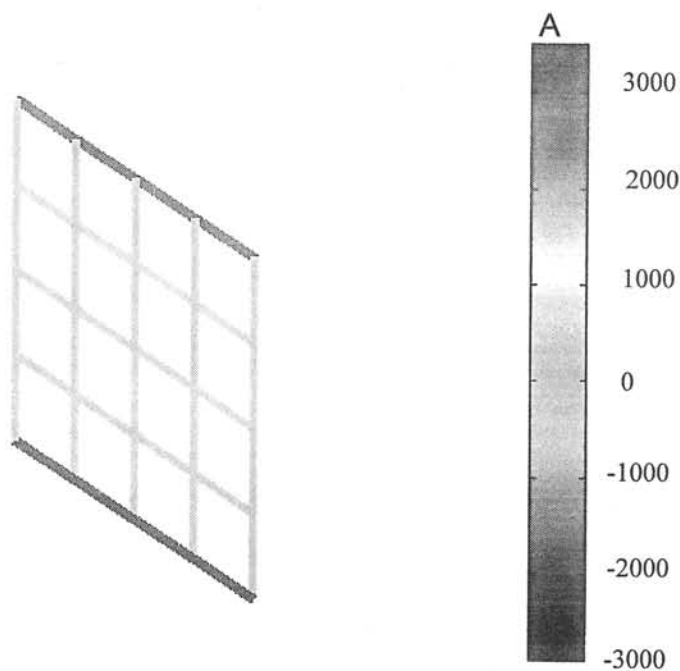


Figure II.26 : Densité linéique de charges associée à la distribution d'aimantation constante par élément

Quelques remarques sur ces figures s'imposent. Tout d'abord la figure II.26, bien que graphiquement équivalente à la figure II.24 (à l'échelle près), ne représente pas le même type de distribution. Pour le modèle mixte, il s'agit d'une distribution constante par élément et non ponctuelle. Elle est équivalente à des charges constantes par arête et c'est cette distribution linéique qui est utilisée pour calculer le champ dans l'air.

d - Calcul du champ

Les trois formulations permettent de calculer le champ réduit dans l'air. Nous allons calculer celui-ci sur une ligne verticale située loin de la plaque, c'est-à-dire à une distance importante par rapport à la taille d'un élément du maillage. Les éléments ayant 50 cm de côté, nous choisirons une ligne située à 2 m qui sera contenue dans le plan de symétrie de la plaque et aura 4 m de long (fig II.27).

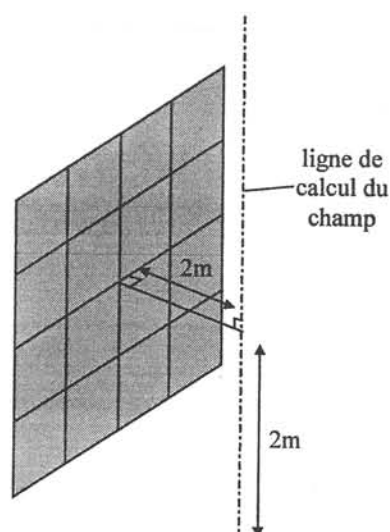


Figure II.27 : Ligne d'exploitation en champ lointain

Ces champs sont comparés avec le calcul éléments finis. Seules les composantes x (fig.II.28) et z (fig.II.29) sont présentées, la composante y du champ réduit étant nulle par raison de symétrie.

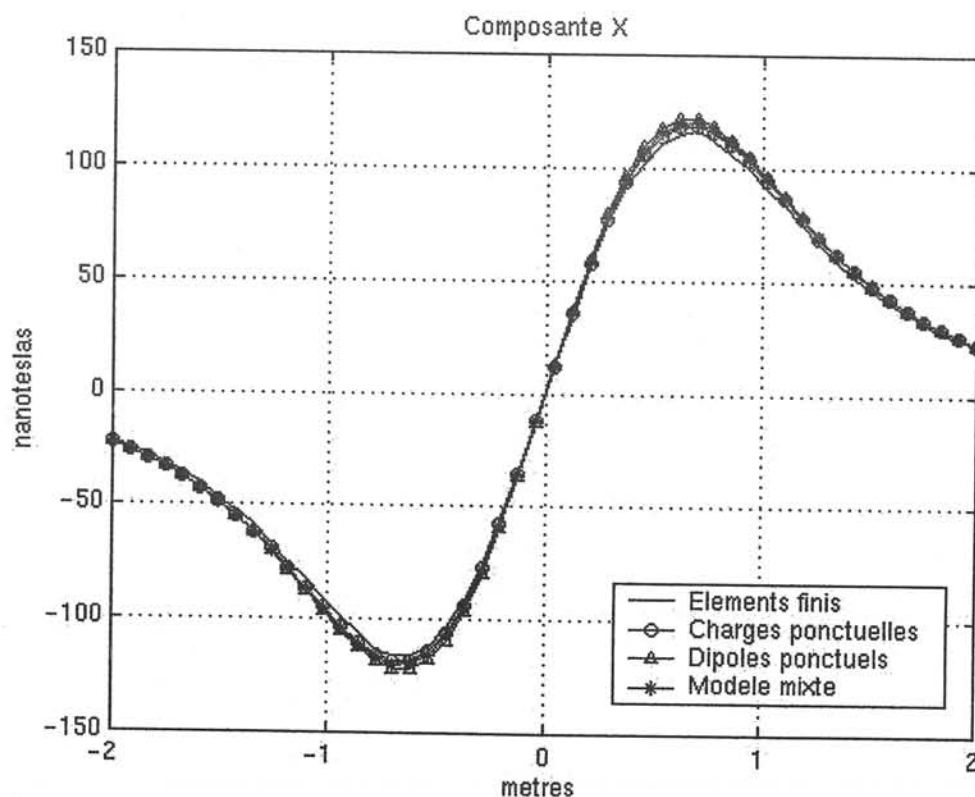


Figure II.28 : Composante x du champ réduit

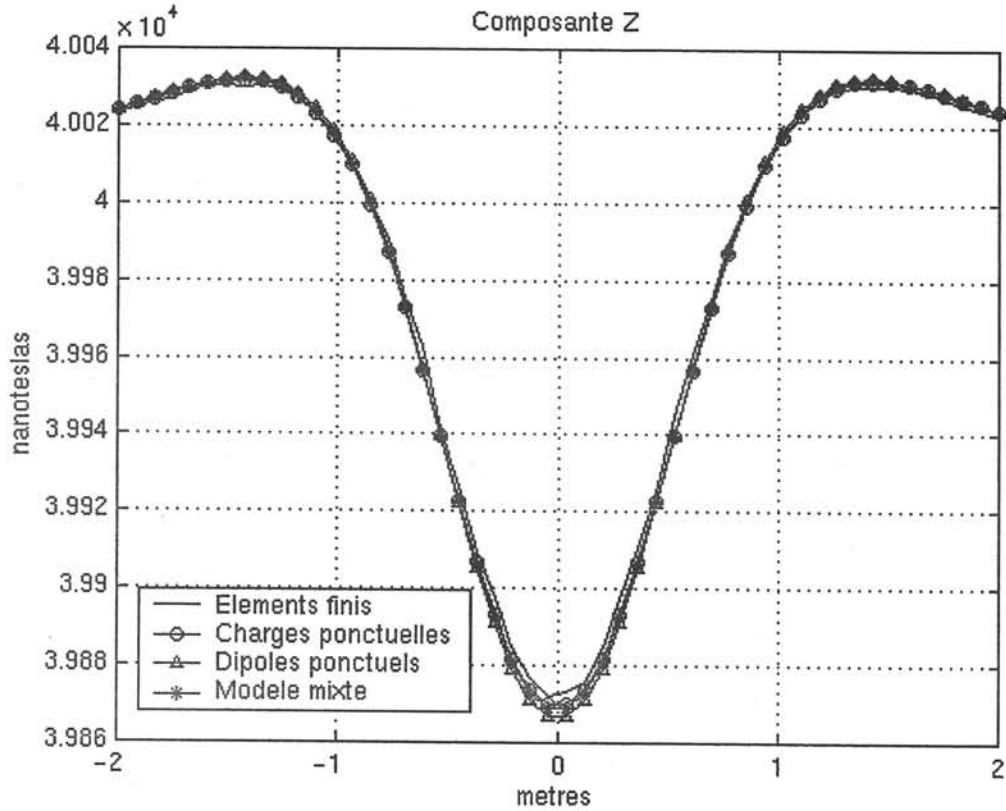


Figure II.29 : Composante y du champ réduit

Les champs calculés par éléments finis ou par formulations globales sont en bonne adéquation. Les différences sont minimales et il semble difficile de mettre en avant une méthode au détriment de l'autre, ceci pour le calcul en champ lointain. Cet exemple très simple nous permet d'être relativement optimiste quant à la validité de nos formulations pour le calcul de l'anomalie magnétique créée par un bâtiment, sur son plan de référence. Nous pouvons donc considérer que nous avons validé nos méthodes en champ lointain. Pourtant, des interrogations subsistent. Les méthodes intégrales sont divergentes au voisinage des sources, c'est-à-dire pour notre cas de la coque. Or, notre but est de résoudre un problème inverse par des mesures à l'intérieur de celle-ci. La qualité fondamentale que nous devons demander à ce modèle est d'être effectivement valide à l'emplacement des capteurs. Dans le cas contraire, l'inversion n'a évidemment aucune chance d'aboutir. Il convient donc d'étudier précisément la validité des formulations globales près de la tôle.

V.3.3 - Validité en champ proche

a - Remarques sur les intégrations

Les intégrales (II.66) et (II.74), qui permettent le calcul du champ réduit dans la région air, sont convergentes. En effet, l'induction et donc le champ réduit n'ont aucune raison de diverger, il s'agit de grandeurs physiques finies partout dans l'espace. Les divergences auxquelles nous sommes confrontés sont donc purement artificielles et ont été introduites par nos approximations et modèles. On peut principalement dégager trois origines :

Divergences sur les arêtes de la géométrie

Considérons une surface S , non fermée, s'appuyant sur un contour fermé C (fig.II.30). Supposons qu'il existe sur cette surface une distribution de charges ou de dipôles tangentiels.

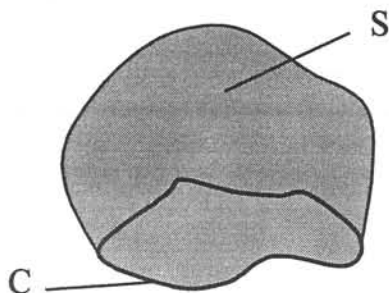


Figure II.30 : Surface S et contour C

Les intégrales (II.65) et (II.73) sont convergentes en tout point de S et même de C . Le potentiel prend donc une valeur finie n'importe où dans l'espace. Par contre, pour le champ, la situation est différente. Si celui-ci est fini sur tout point de S , il prend une valeur infinie sur C [DURAND 64]. L'intégrale est alors analytiquement divergente. En réalité de telles distributions n'existent évidemment pas, leurs définitions reposent sur la théorie de l'élément mince qui remplace la tôle par une surface. Le modèle n'est pas représentatif de la réalité à cet endroit. Même si physiquement, le champ en ces points est fort (c'est ce qu'on appelle l'effet de pointe), il n'a aucune raison d'être divergent. Une conclusion immédiate s'impose : quelle que soit la méthode d'intégration ou le modèle utilisé, le champ calculé très près de courbes analogues à C sera faux, ou tout du moins beaucoup trop important en module, puisqu'il y est singulier. Cette remarque est fondamentale pour la modélisation de structures non fermées telles que, par exemple, la maquette utilisée au Laboratoire de Magnétisme du Navire. Notons également que si l'on considère une plaque uniformément aimantée, le champ est aussi divergent au voisinage des arêtes de celle-ci, pour les mêmes raisons. Nos modèles présentent donc des divergences analytiques.

Divergences par condensation

Dans les formulations en distributions ponctuelles, nous avons condensé les grandeurs en quelques points. Ce type d'approche implique de fortes divergences au voisinage de ces points de condensation.

Divergences par intégration numérique

Il existe des calculs analytiques complexes et relativement lourds à mettre en œuvre de l'intégrale (II.104) [CHUBAR 98]. Ces calculs montrent bien que l'intégrale est analytiquement divergente au voisinage des arêtes des éléments. Pourtant, nous avons préféré développer des intégrations numériques pour évaluer ces intégrales. Basée sur la méthode des points de Gauss (au nombre de 3 par arête et de 5 par élément), nous réalisons en quelque sorte une forme de condensation, puisque cette méthode convertit une intégration en un calcul de la fonction sur nombre fini de points de l'arête ou de l'élément.

b - Le cas test

Nous allons donc maintenant calculer le champ réduit à proximité de la tôle. Le cas test est toujours le même. Il semble ici difficile de limiter notre exploitation à une ligne, puisque les condensations des charges et des dipôles ne se font pas aux mêmes endroits. Nous avons donc choisi un carré dans lequel nous allons évaluer le champ et le comparer au calcul éléments finis qui donne des résultats convergents. Notons que nous restons délibérément éloignés des arêtes effectives de la plaque puisque quelle que soit la formulation choisie, le champ calculé est faux. Ce sera d'ailleurs également le cas pour les éléments finis.

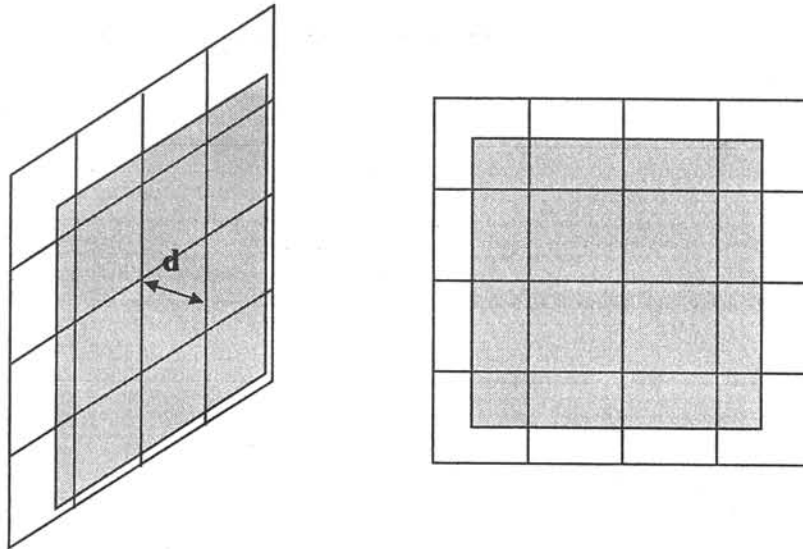


Figure II.31 : Surface d'exploitation pour le calcul en champ proche

La figure II.31 présente la surface de calcul du champ réduit. Nous allons considérer deux distances d . La première surface S_1 sera à une distance égale au côté d'un élément, soit 50 cm. La deuxième S_2 sera à une distance d_2 de 25 cm, moitié du côté d'un élément (fig.II.32).

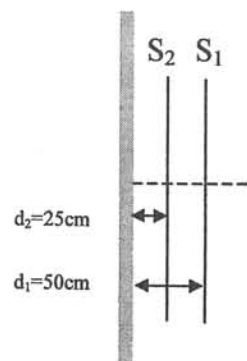


Figure II.32 : Surfaces d'exploitation S_1 et S_2

Les résultats sont présentés en pourcentage de différence par rapport au calcul élément finis. Les figures suivantes montrent ces différences sur les surfaces S_1 et S_2 . Les composantes en y étant très faibles, nous ne présenterons pas de résultats les concernant, ceux-ci n'étant pas en pourcentage représentatifs.

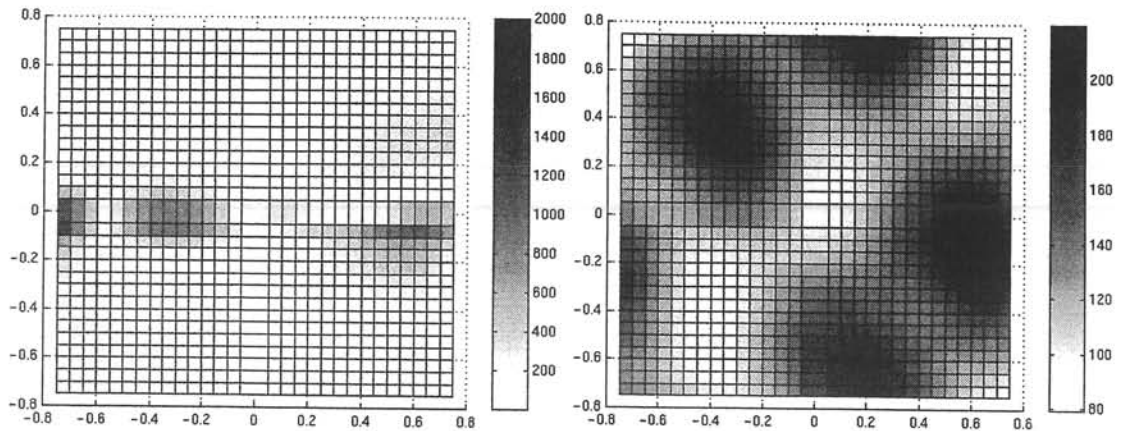
c - Résultats pour S_1 

Figure II.33 : Dipôles ponctuels – différence avec les éléments finis sur S_1 en pourcentages
Composante x – Composante z

Comme nous l'avons annoncé pour le modèle dipolaire ponctuel, les résultats obtenus en champ proche sont très mauvais. Si les différences dépassent les 200% pour la composante z, parallèle à la tôle, elles sont énormes pour la composante x. Nous avons donc ici une visualisation des fortes divergences engendrées par combinaison du champ dipolaire en $1/r^3$ et de la condensation. Si le modèle dipolaire peut nous être d'une grande utilité pour calculer l'anomalie créée par un bâtiment à moyenne distance, le champ évalué près de la tôle est résolument faux. En particulier, si nous voulons garder un maillage de taille raisonnable, le champ calculé à l'intérieur de la coque n'aura aucune validité. Ceci élimine définitivement ce modèle pour la résolution du problème inverse.

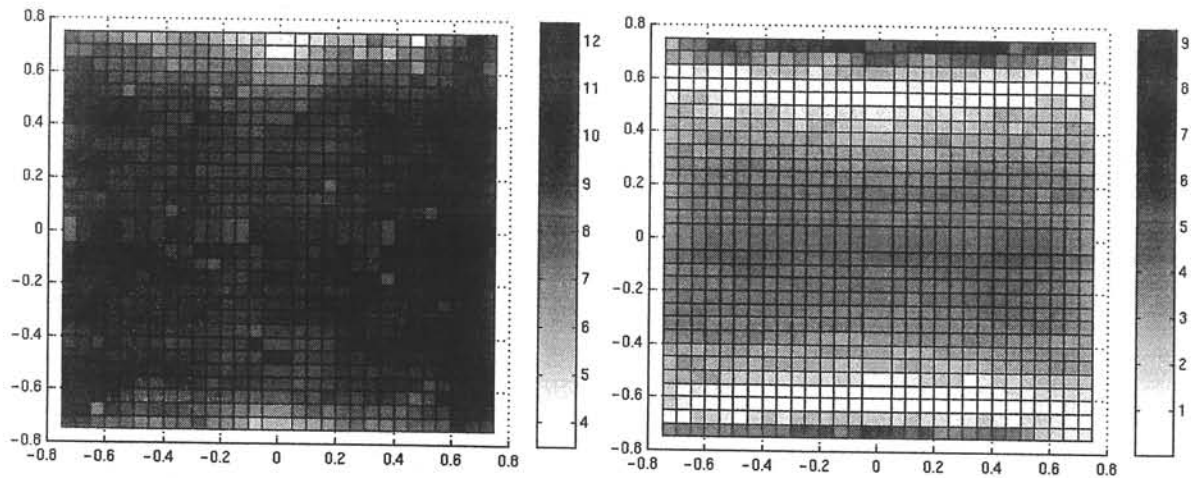


Figure II.34 : Charges ponctuelles – différence avec les éléments finis sur S_1 en pourcentages
Composante x – Composante z

Les résultats pour l'approche monopolaire ponctuelle sont ici satisfaisants, les différences avec les éléments finis avoisinant seulement les 10%. Remarquons que pour la composante parallèle à la tôle (la composante z), vers le milieu de la surface, elles ne sont que de l'ordre de 5%.

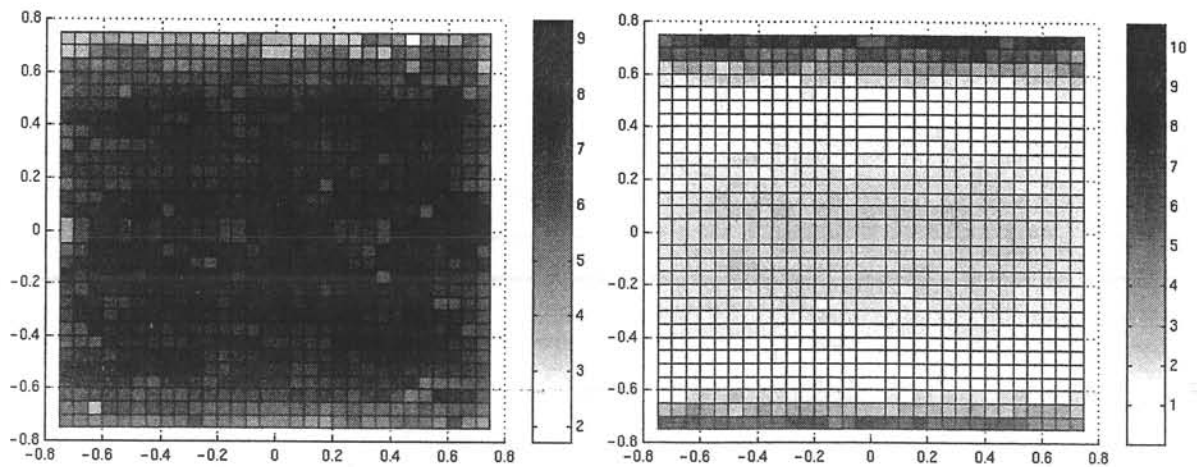


Figure II.35 :Modèle mixte – différence avec les éléments finis sur S_1 en pourcentages
Composante x – Composante z

Les résultats pour le modèle mixte sont, eux aussi, très satisfaisants et même légèrement meilleurs que pour le modèle monopolaire ponctuel. C'est la composante tangentielle qui est, là encore, la mieux calculée.

d - Résultats pour S_2

La surface S_2 étant encore plus proche de la tôle que la surface S_1 , nous ne présentons pas les résultats concernant les dipôles ponctuels.

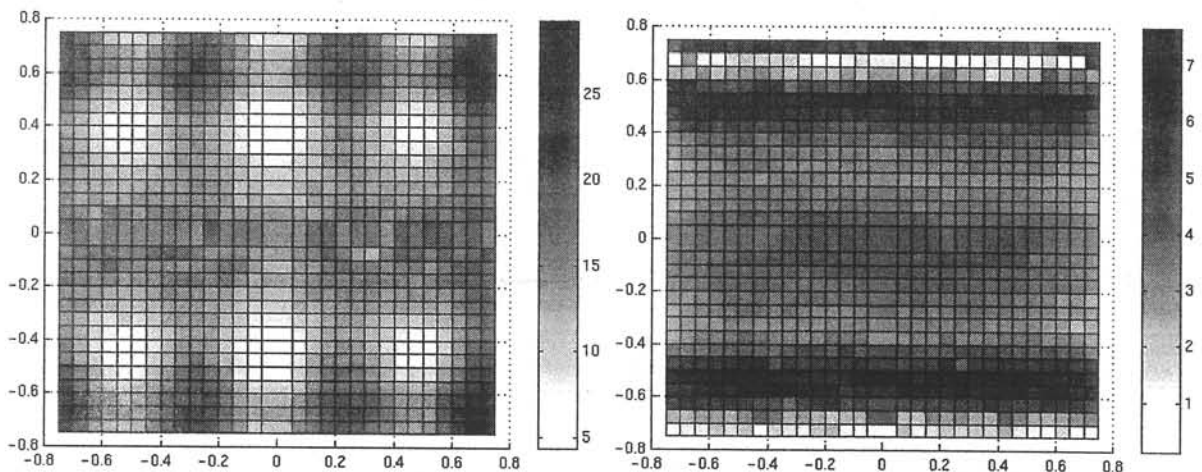


Figure II.36 :Charges ponctuelles– différence avec les éléments finis sur S_2 en pourcentages
Composante x – Composante z

Pour l'approche monopolaire ponctuelle, la composante tangentielle est relativement bien calculée. Par contre, la composante normale présente de légères divergences (25% au maximum). Remarquons que ces divergences apparaissent évidemment en vis-à-vis des charges ponctuelles importantes.

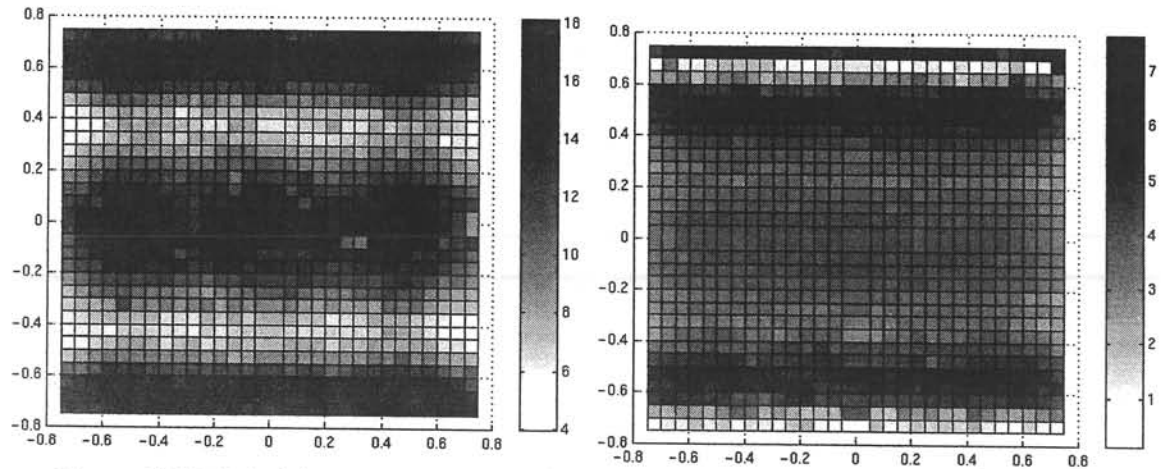


Figure II.37 :Modèle mixte – différence avec les éléments finis sur S_2 en pourcentages
Composante x – Composante z

Les résultats sont à peu près équivalents à ceux présentés précédemment, avec une légère amélioration.

e - Conclusion

Cette rapide étude nous a permis, dans un premier temps, d'éliminer le modèle dipolaire ponctuel pour l'inversion. En effet, il n'est pas réaliste d'inverser un modèle non valide à l'endroit où seront placés les capteurs. Les deux modèles restants sont donc les charges ponctuelles et le modèle mixte. Le champ est légèrement mieux calculé près de la tôle par le modèle mixte et celui-ci permet, de plus, de remonter à l'aimantation, ce qui répond parfaitement aux objectifs que nous nous étions fixés pour le développer.

Remarquons que, même proche de la tôle, le champ est calculé à 10%, loin des effets de pointe. Notre mesure ne sera, elle aussi, pas parfaite, une précision meilleure que 10% semble difficile à obtenir sur un navire. Notre modèle numérique semble donc compatible avec les imprécisions expérimentales. Ces résultats nous donnent de premières indications sur le futur placement des capteurs. Il faudra éviter de les placer trop près des arêtes physiques de la maquette et de préférence en vis-à-vis des barycentres des éléments pour s'éloigner des points divergents. De plus, nous devons porter un regard critique sur l'information concernant les composantes normales à la tôle. Celles-ci risquent, en effet, d'être mal prises en compte par nos modèles. En cas de doute, il ne faudra pas hésiter à les supprimer tout simplement, ce type d'information ayant de grandes chances d'être erroné (voir Annexe C).

VI - Complément sur les méthodes globales

VI.1 - Les matériaux non linéaires

L'équation (II.52) est particulièrement bien adaptée pour prendre en compte les comportements généraux de la tôle. C'est cette équation qui est résolue dans la plupart des logiciels de modélisation magnétostatique. Basée sur une approche variationnelle, elle permet en particulier de modéliser des comportements non linéaires. Il convient donc de préciser dans

quelles mesures nos formulations sont, elles aussi, capables de prendre en compte le comportement de ces non-linéarités. La loi comportementale des matériaux pour la modélisation des navires est basée sur la loi de Rayleigh. Celle-ci introduit une relation linéaire entre l'aimantation \mathbf{M} et le champ magnétique \mathbf{H} par la susceptibilité χ . Cette approximation est due au fait que les champs sont faibles à l'intérieur des matériaux. Supposons maintenant que les matériaux considérés ne soient pas linéaires et que l'on ait, en particulier :

$$\mathbf{M} = \chi(\mathbf{H})\mathbf{H} \quad (\text{II.110})$$

Cette situation ne devrait pas se révéler trop pénalisante pour les modèles dipolaires. En fait, nos formulations reposent sur l'équation (II.108) qu'elles résolvent. Il semble donc possible d'écrire notre système pour un χ initial et de le résoudre. Nous obtiendrions alors les aimantations associées qui nous conduiraient par conséquent au champ sur chaque élément. Il suffirait alors, en fonction de ce champ, de déterminer les nouvelles susceptibilités associées à chaque élément et de résoudre à nouveau le système. Cette approche devrait alors converger pour une méthode de résolution du type Newton-Raphson. Nous n'avons effectué aucun test dans ce sens, nous nous permettons simplement de faire preuve d'optimisme.

VI.2 - L'intégration du champ source

Il faut garder présent à l'esprit que notre modèle, à plus ou moins long terme, devra prendre en compte les effets des boucles. Or, dans certaines configurations, la modélisation de tels effets n'est pas triviale, et semble même très délicate.

Cette modélisation des effets de boucles a fait l'objet d'une thèse au Laboratoire de Magnétisme du Navire [LEDORZE 97]. Avant ces travaux, la modélisation classique de tels effets conduisait à des résultats souvent différents des mesures (parfois plus de 100%). Dans les navires, les boucles d'immunisation sont placées très près de la tôle en comparaison aux autres grandeurs géométriques. L'effet des boucles crée une variation très rapide et très localisée du potentiel réduit sur la tôle, que seul un maillage excessivement fin est capable de prendre en compte. La nécessité de générer de tels maillages pour intégrer correctement cette variation conduisait alors à faire exploser la taille des systèmes matriciels.

L'idée du « saut de potentiel » permet de résoudre ce problème. Elle consiste à calculer analytiquement ce saut en connaissant la distance boucle/tôle ainsi que le courant. Il est alors possible de l'imposer dans une modélisation éléments finis comme une simple contrainte. Cette technique a conduit à des résultats très satisfaisants.

Il convient donc de préciser comment sont intégrés les champs inducteurs sur les éléments au voisinage de la boucle pour nos trois formulations. Pour la formulation en dipôles ponctuels, le champ inducteur est intégré surfaciquement sur l'élément. Pour la formulation en charges ponctuelles, celui-ci est intégré linéiquement sur les arêtes de l'élément. Enfin pour le modèle mixte aimantation constante/charges linéiques, le champ source est simplement évalué au barycentre de l'élément. Ceci présente le premier inconvénient de notre formulation par rapport aux deux autres, car le champ inducteur, et en particulier ses rapides variations, sont moins bien prises en compte, ce qui pourra être une source de difficulté future.

VI.3 - Des méthodes globales volumiques

Ces approches ne sont en rien limitées aux éléments minces. En effet, on peut les adapter aisément à des géométries volumiques, en soulignant toutefois que les systèmes obtenus sont pleins. Ceci risque d'être très pénalisant pour des maillages présentant un nombre important d'éléments, à la résolution en particulier. La formulation à privilégier serait alors celle avec les charges ponctuelles puisqu'elle conduirait à des systèmes ayant trois fois moins d'inconnues.

VII - Conclusions

Dans tout ce chapitre, nous nous sommes efforcés de cerner les diverses solutions susceptibles de résoudre le problème direct. La plupart des formulations exposées sont connues depuis longue date, seule la dernière formulation que nous avons appelée « mixte », est nouvelle. Comme nous l'avons déjà évoqué, celle-ci est une formulation intégrale globale assurant une bonne validité du champ près de la tôle et dont les inconnues sont représentatives de l'aimantation, deux qualités principales que nous cherchions.

Il convient maintenant de préciser dans quelle mesure ces formulations vont nous être utiles pour résoudre le problème inverse. Nous avons différencié approches locales et approches globales, classement volontairement orienté en vue de la résolution en approche inverse.

Rappelons les caractéristiques de notre problème inverse. Il s'agit d'effectuer des mesures de champ magnétique dans la région Ω_2 afin de prédire le champ dans la région Ω_1 . La région dans laquelle le champ est mesuré est donc différente de la région dans laquelle il doit être prédit. C'est la principale caractéristique de ce problème et ce qui fait sa difficulté. Il n'a été encore que peu sinon pas abordé dans la littérature.

La résolution d'un problème inverse nécessite de trouver une relation entre les effets, (le champ mesuré) et les sources de ce champ qui sont, si on excepte le champ inducteur, localisées sur la tôle. Considérons nos différentes formulations dans l'optique de trouver cette relation.

Pour l'approche exclusivement éléments finis, le champ en un point de Ω_2 dépend des valeurs du potentiel aux nœuds de l'élément contenant ce point. Cette constatation rend la relation reliant les effets aux sources très difficile à trouver et de toute façon très complexe. C'est pourquoi les formulations éléments finis ne sont pas utilisées pour résoudre les problèmes inverses.

Pour l'approche intégrales de frontières, une relation existe entre le champ créé dans la région Ω_2 et le potentiel ainsi que sa dérivée normale sur S_2 . Cette relation est l'équation (II.58) traduite en terme de champ avec un coefficient c égal à 1. Supposons que nous réussissions à résoudre le problème inverse. A partir du champ mesuré, nous obtenons donc les valeurs du potentiel et de sa dérivée normale sur S_2 . Que pouvons nous faire alors de ces valeurs ? Elles peuvent nous permettre de recalculer le champ partout dans la région Ω_2 . Cette approche fait la popularité des méthodes intégrales pour résoudre les problèmes inverses. Elle a d'ailleurs largement contribué à la résolution du problème inverse thermique [LAGIER 99].

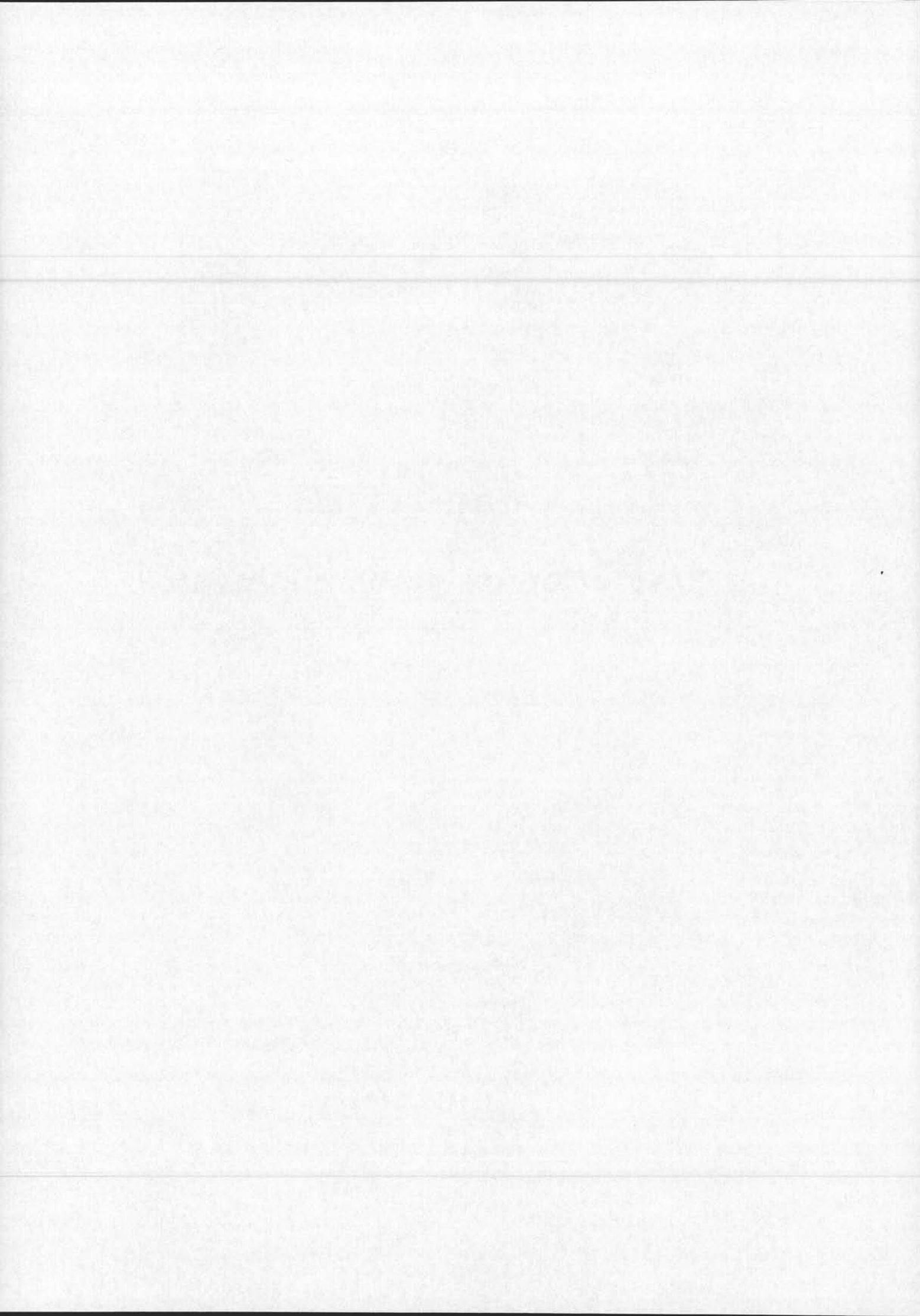
Pourtant, la région où nous devons recalculer le champ est Ω_1 . Ceci implique qu'il nous faudrait connaître les valeurs du potentiel et de sa dérivée non pas sur S_2 mais sur S_1 , c'est-à-dire de l'autre côté de S . Comme nous l'avons vu, si le potentiel est le même, ce n'est pas du tout le cas pour sa dérivée normale. Or, il n'existe pas de relation simple reliant ces deux dérivées, sinon l'équation (II.38) qui impose la connaissance de \mathbf{H} , c'est-à-dire la solution même du problème. C'est pourquoi l'approche intégrales de frontières classique semble être mal adaptée pour résoudre notre problème.

En fait, la principale critique que l'on peut adresser aux méthodes locales est qu'elles ne permettent pas de trouver une relation simple entre le champ de n'importe quel point de l'air et ces sources. La nécessité d'une approche globale nous a fait nous intéresser aux méthodes du même nom, qui proposent une telle relation. Ces relations entre le champ en n'importe quel point de l'air, quelle que soit la région considérée, et les différentes sources sont représentées par les équations (II.96), (II.102) et (II.109).

Muni de ces relations et de la connaissance du problème direct que nous avons acquise tout au long de ce chapitre, nous allons maintenant pouvoir résoudre le problème inverse.

Chapitre III

Résolution du problème inverse



Chapitre III

RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE

I - Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons traité des méthodes de calcul des aimantations induites. Il s'agit d'un problème direct que l'on peut considérer comme bien identifié et pour lequel un certain nombre d'outils efficaces sont maintenant disponibles. Il faut pourtant rappeler que l'aimantation d'un navire se décompose en deux parties, l'aimantation induite et l'aimantation permanente. D'après ce que nous avons vu précédemment, l'aimantation induite est calculable, ceci à la condition de connaître la géométrie du bâtiment, la perméabilité du matériau ainsi que le champ inducteur. Nous pouvons, dans ces conditions, qualifier ce type d'approche de déterministe. Par contre, la détermination de l'aimantation permanente est non déterministe, puisque l'histoire du matériau ne peut être connue dans sa totalité. Nous pouvons tout au plus avoir une idée de l'aimantation permanente vers laquelle tend le navire à plus ou moins long terme, ceci en évaluant l'aimantation permanente d'équilibre (cf. chapitre I). Cette aimantation permanente d'équilibre peut être calculée par les méthodes précédentes, en affectant au matériau la perméabilité anhystérétique. Pourtant cette approche ne peut nous satisfaire puisque cette aimantation permanente varie, lors de navigations prolongées à différents caps, lors de changement de zones d'opérations ou lors de plongées, par exemple. Il est donc absolument nécessaire de faire intervenir la mesure pour l'évaluer. Ce chapitre détaille notre démarche pour résoudre ce problème qui est un exemple typique de problème inverse.

Nous présenterons, tout d'abord, des généralités sur les problèmes inverses et plus particulièrement sur le problème inverse magnétostatique puis les spécificités de notre cas.

Les systèmes matriciels obtenus à partir des modèles que nous avons développés dans le chapitre II seront ensuite explicités.

Une fois le système matriciel écrit, il est nécessaire de le résoudre pour obtenir la solution du problème inverse. Des méthodes de résolution de ces systèmes linéaires seront présentées.

Nous verrons que la spécificité des problèmes inverses est que leur solution n'est pas unique, il est alors nécessaire d'ajouter certains critères pour obtenir une solution physique. Il existe un nombre important d'approches pour choisir cette solution, nous en exposerons quelques-unes.

Enfin, nous présenterons une approche originale, qui nous a permis de résoudre le problème inverse avantageusement.

II - Généralités sur le problème inverse magnétostatique

II.1 - Généralités sur le problème inverse

Depuis maintenant une trentaine d'années, la théorie des problèmes inverses connaît un formidable essor, en partie grâce à la puissance croissante des ordinateurs qui rend possible des calculs impensables il y a seulement une dizaine d'années. La raison fondamentale s'explique par la situation que tout expérimentateur a rencontrée un jour ou l'autre. Le point de départ de toute science est souvent basé principalement sur l'observation. Un expérimentateur se trouve parfois face à des phénomènes qui lui échappent et qu'il cherche à expliquer. Il se crée alors des modèles et établit des lois qui leur sont associées. C'est ce qu'on peut appeler la « recherche des causes à partir des effets ». La théorie des problèmes inverses, formalisation mathématique de ce concept, n'a fait que généraliser cette approche et la rendre applicable à n'importe quel domaine scientifique. Cette théorie, qui peut parfois devenir très complexe, puise sa raison d'être dans la mauvaise connaissance qu'a l'homme de son environnement.

II.1.1 - La paramétrisation du système

La première étape pour la résolution d'un problème inverse est appelée « paramétrisation du système ». Cette étape consiste en la simplification du système physique étudié. Il est évidemment illusoire d'envisager la détermination de toutes les causes à partir de tous les effets.

Les effets doivent donc être ciblés soigneusement en fonction du domaine d'étude et de ses applications. Pour une application thermique par exemple, ces effets pourront être la répartition de température. Cette application porte le nom de PICC (Problème inverse de Conduction de Chaleur) [LAGIER 99].

Il convient également de cibler soigneusement les causes. Celles-ci peuvent être de plusieurs types. On peut distinguer :

- Les géométries : une partie de la géométrie est inconnue et il est nécessaire de la déterminer.

- Les sources : la géométrie est parfaitement connue, mais les sources ne sont pas déterminées (par exemple détermination de flux de chaleur aux frontières du système).
- Les propriétés physiques des matériaux (par exemple, la détermination de la conductivité thermique d'un matériau).

Enfin, une fois que les effets et leurs causes ont été déterminés, il est nécessaire de simplifier le système physique afin d'obtenir un modèle utilisable, sous la forme d'une relation simple liant les causes aux effets. On parle alors de résolution du problème direct. Une partie du second chapitre répond à cette étape nécessaire.

II.1.2 - Les deux familles de problèmes inverses

a - Le problème inverse d'identification

Ce type d'approche inverse a pour point de départ l'observation. On entendra généralement par observation la mesure. Ces mesures doivent alors nous permettre de reconstruire les paramètres indéterminés d'un système physique (sources, caractéristiques physiques de matériaux, géométrie,...). Cette approche nécessite donc une forte composante expérimentale. C'est à ce type de problème que nous allons être confrontés.

b - Le problème inverse de conception

Ces applications se situent dans le domaine plus général de l'optimisation et essaient de répondre à la question suivante : comment, à partir d'effets désirés, optimiser les causes ? Une application peut être, par exemple, de positionner des sources de chaleur afin d'obtenir le profil de température souhaité. Cette approche, très orientée vers des domaines de la CAO, ne possède plus aucune composante expérimentale. Les effets ne sont plus des mesures, mais des valeurs souhaitées de grandeurs physiques.

II.1.3 - Ecriture mathématique

Un problème inverse peut s'écrire de la façon suivante :

$$a(x) = b \quad \text{(III.1)}$$

où a est une fonction dépendant du modèle choisi et peut être qualifiée de « relation de cause à effet ».

x représente le vecteur des paramètres à identifier. Il peut s'agir de caractéristiques de sources, de grandeurs géométriques ou de matériaux.

b représente l'objectif, c'est-à-dire soit des mesures, soit des valeurs désirées de grandeurs.

Résoudre un problème inverse, c'est alors trouver x en connaissant à la fois a et b .

II.2 - Le problème inverse magnétostatique

Nous avons, pour l'instant, évoqué des applications exclusivement thermiques. Ce choix est délibéré car la théorie des problèmes inverses est largement utilisée dans ce domaine

et la littérature associée est très importante. Pourtant, les problèmes inverses prennent une place croissante dans beaucoup d'autres champs d'études. Citons, par exemple, le traitement d'image, le contrôle non destructif ou les techniques de localisation diverses (sonar, etc...).

Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement au problème qui nous est soumis. Il consiste, à partir de mesures de champ magnétique statique, de retrouver les sources de ce même champ, d'où son nom générique de problème inverse magnétostatique. Plusieurs domaines d'application sont concernés par cette démarche.

II.2.1 - Applications médicales

C'est certainement, à l'heure actuelle, le domaine où les connaissances ont le plus progressé. La technologie des capteurs de champ magnétique Squid, que nous avons déjà évoquée, a connu un formidable essor ces dernières années et a rendu possible la mesure de champs d'une très faible amplitude. Ces capteurs, localisés autour de la boîte crânienne d'un patient, peuvent permettre d'évaluer des modèles de courants neuronaux et ainsi d'établir un diagnostic concernant l'activité cérébrale [SAOTOME 93]. La magnétocardiographie est également basée sur ce principe.

II.2.2 - Application géophysique

Afin d'éviter tout forage inutile, les géophysiciens impliqués dans la recherche de ressources naturelles (pétrole, gaz...) ont développé des techniques de localisation par problème inverse. Certaines anomalies locales du champ magnétique terrestre peuvent attester de la présence d'un gisement. L'approche est alors appelée passive et consiste à déterminer la taille et la localisation du gisement à partir de cette observation. Citons également l'approche active qui consiste en l'envoi d'une onde électromagnétique dans la région prospectée et en l'analyse de l'onde de retour, approche qui n'est plus statique mais dynamique. Cette technique peut être mise en parallèle avec les méthodes de contrôle non destructif.

II.2.3 - Les activités de conception

Les techniques de problème inverse sont de plus en plus usitées pour l'optimisation de systèmes magnétiques ou électrotechniques. Les applications les plus courantes consistent à optimiser des sources pour obtenir des profils de champ désirés, ces sources étant des aimants ou des courants. Pour les aimants, citons l'optimisation de leurs positions dans les structures RMN, afin d'assurer la meilleure homogénéité possible du champ [BEGOT 00]. En ce qui concerne les courants, l'application qui s'impose à nous est évidemment l'optimisation de ceux-ci dans les boucles d'immunisation des navires pour annuler leurs signatures sur un plan de référence.

II.2.4 - L'identification d'aimantation

C'est le domaine qui nous intéresse tout particulièrement. Très récemment, des premiers résultats ont été publiés concernant l'identification d'aimantations à partir de mesures de champ magnétique. Ces travaux ont été menés en même temps que les nôtres. Les domaines d'application proposés étaient la reconstruction d'aimantation de tête d'impression d'imprimantes [IGARASHI 99] ainsi que d'aimantation de stator de moteur [IGARASHI 00].

II.3 - Caractéristiques du problème

II.3.1 - Spécificités du problème

Les informations dont nous disposerons seront des mesures de champ magnétique à l'intérieur du navire. A partir de ces mesures, nous devons reconstruire un modèle d'aimantation de la coque qui permettra, par la suite, de calculer le champ à l'extérieur. Il s'agit typiquement d'un problème d'identification de sources de champ magnétique pour lesquelles il faut trouver une répartition telles qu'elles soient compatibles avec les mesures. La géométrie de la coque sera connue ainsi que sa perméabilité réversible. Il en sera de même pour le champ inducteur dans lequel se trouve le bâtiment.

De plus, notre problème possède les caractéristiques suivantes :

Stationnarité

Nous considérons que l'aimantation varie relativement lentement dans le temps. Le problème est donc stationnaire. Cette remarque nous permettra de nous affranchir de tous les problèmes liés à la résolution des problèmes inverses non stationnaires et des divergences qui leurs sont associées. Elle ne remet pas en cause la mise au point d'un système temps réel. En effet, le terme de temps réel n'est utilisé qu'en comparaison avec les temps de changement de cap d'un bâtiment. Une mesure du champ toutes les dix secondes sera à notre niveau nettement suffisante.

Caractère « discret »

Nous allons effectuer des mesures à l'aide de capteurs de champ magnétique. Ces capteurs seront des magnétomètres vectoriels du type fluxgate. Leur nombre sera évidemment fini. A l'issue de la campagne de mesure, nous serons donc en possession d'un nombre fini d'informations sur les composantes du champ magnétique en des points bien définis. Ce type de problème est appelé « problème inverse avec données discrètes ».

Linéarité

Comme nous l'avons déjà laissé entendre en fin du chapitre précédent, les sources que nous allons identifier seront soit des charges soit des dipôles tangentiels. Ces sources seront en nombre fini, puisque associées à un maillage de la coque. De plus, Nous avons vu que la relation reliant les sources au champ qu'elles créent est linéaire. L'équation (III.1) peut donc être simplifiée par :

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{III.2})$$

où \mathbf{A} est une matrice reliant les sources au champ qu'elles créent.
 \mathbf{x} représente les sources à déterminer (charges ou dipôles).
 \mathbf{b} représente les valeurs du champ magnétique mesurées.

Nous allons donc devoir résoudre un système linéaire.

II.3.2 - Qualités nécessaires de l'algorithme proposé

L'algorithme que nous nous proposons de développer devra posséder les qualités suivantes :

Stabilité

Les mesures seront nécessairement bruitées et entachées d'une incertitude. Il est toujours difficile de quantifier précisément ces incertitudes, nous ne pourrions estimer que l'ordre de grandeur de l'erreur commise. En ce qui concerne les mesures effectuées sur maquette, en environnement magnétique contrôlé, nous espérons atteindre une précision meilleure que 5%. Par contre, dans un environnement tel qu'un bâtiment réel, il semble illusoire d'espérer mieux que 10%. Notre algorithme devra donc montrer une bonne stabilité vis-à-vis des bruits de mesure.

Viabilité

Il doit être effectivement utilisable sur un navire. En particulier, conduire à des temps de calcul relativement courts si l'on veut s'approcher du temps réel. De plus, il doit offrir la possibilité de rapprocher les capteurs de la coque afin d'éviter les perturbations accidentelles (passage d'objets ferromagnétiques à proximité d'un capteur, par exemple) et ainsi d'optimiser le rapport signal sur bruit. Un autre critère important à prendre en compte sera le nombre de capteurs. En effet, le coût de l'installation et la complexité de la gestion des données augmenteront rapidement avec leur nombre.

Aspect critique

Il devra avoir un regard critique sur l'aimantation reconstruite. Il s'agit, en effet, d'un algorithme participant à la protection des équipages et du bâtiment. La présence d'un capteur défaillant ne doit pas avoir de conséquences catastrophiques et augmenter le risque magnétique, plutôt que de le diminuer.

II.4 - Caractère « mal-posé »

La grandeur x à identifier possède en théorie une dimension infinie (ou tout du moins très importante, puisque tous les domaines de Bloch de la coque créent le champ réduit). Par contre, le nombre de mesures est fini et de dimension très inférieure. Cette relation n'est donc pas inversible. La paramétrisation du système nous permet de limiter la dimension de x d'une façon très importante, ceci par l'intermédiaire d'un maillage. Pourtant, l'utilisation de ce modèle simplifié ne va en rien assurer l'injectivité de la fonction. La solution n'est, en effet, pas unique. Le problème est alors dit « mal posé » [HADAMARD 32]. Ce caractère mal posé se manifeste sous deux formes différentes.

Problème sous-déterminé

Supposons tout d'abord que nous disposions de moins d'informations, données par les capteurs, que d'inconnues à identifier. Le système linéaire est alors sous dimensionné. La solution est alors naturellement non unique. En effet, toute combinaison linéaire de vecteurs du noyau de A est alors non observable. Ces solutions n'ont aucune répercussion sur les mesures, mais participent aux solutions plausibles. Le problème est alors dit sous-déterminé.

Problème mal conditionné

Il existe généralement plusieurs distributions de sources qui créent un champ très proche de celui mesuré et ces distributions sont souvent très différentes les unes de autres. Or, nos mesures sont entachées d'une incertitude conséquente, il est donc difficile de privilégier une distribution par rapport à une autre. Dans ce sens, il n'y a également pas unicité de la solution. Nous nous trouvons donc face à une caractéristique intrinsèque aux problèmes inverses, la très grande instabilité de leurs solutions vis-à-vis de petites imprécisions

inhérentes aux mesures. Ceci explique pourquoi une des qualités que nous demanderons à notre algorithme est la stabilité.

Une grandeur permet de quantifier cette instabilité, il s'agit du conditionnement. Il dépend exclusivement de la matrice A , nous le noterons $\xi(A)$. Pour un problème carré ou surdimensionné, il vérifie la relation suivante :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \xi(A) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (\text{III.3})$$

Le conditionnement nous donne un majorant de l'erreur commise lors de l'inversion d'un système. Il faut noter que ce nombre est un majorant, donc qu'un mauvais conditionnement n'implique en rien une forte erreur. Ce nombre est simplement une indication et est supérieur ou égal à 1. En particulier, un conditionnement de 1 indique que si les mesures sont entachées d'une incertitude de 5%, la solution sera, au maximum, entachée de la même incertitude.

Les problèmes inverses surdimensionnés possèdent généralement un très mauvais conditionnement. Certaines expériences numériques, que nous expliciterons par la suite, nous ont conduit à des conditionnements de l'ordre de 10^{18} . Ceci traduit la quasi-contradiction entre certaines équations obtenues lors de l'écriture d'un problème inverse.

Remarque 1 : La relation (III.3) ne s'applique qu'aux systèmes linéaires carrés ou possédant plus d'équations que d'inconnues. Si nous l'appliquons aux problèmes sous-déterminés, dont la solution est naturellement non unique, le conditionnement de ces systèmes est alors infini. Nous préférons pourtant lui donner une autre définition par la suite.

Remarque 2 : L'écriture d'un problème direct conduit à des systèmes linéaires généralement bien conditionnés (proche de 1), ce qui permet de résoudre le système sans précaution particulière (par une simple décomposition en valeurs singulières, par exemple). Il faut pourtant noter qu'il est possible d'écrire des problèmes directs très mal conditionnés ce qui conduit évidemment à des résultats inexploitable. Une partie de l'art de la modélisation repose sur la recherche de formulations bien conditionnées.

Des équations contradictoires peuvent aussi apparaître dans l'écriture de problèmes inverses sous-déterminés. Ces problèmes cumulent alors les deux difficultés, c'est-à-dire une grande instabilité vis-à-vis des bruits de mesures et une solution naturellement non unique.

La solution d'un problème inverse est donc, en pratique, non unique. Nous devons donc définir des critères de choix pour extraire de ce panel de solutions, la distribution qui va nous paraître la plus satisfaisante. Les techniques qui permettent le choix d'une solution d'un problème inverse sont appelées « techniques de régularisation », elles font appel à des outils mathématiques qui peuvent être complexes. Le but de toutes ces théories est de permettre de « résoudre un problème mal posé ».

III - Ecriture matricielle du problème inverse

III.1 - La relation directe

III.1.1 - Etat des lieux

Nous nous sommes, jusqu'à présent, exclusivement intéressés à l'aimantation induite créée par un champ inducteur dans une tôle en acier. Le champ dans la tôle, et donc son aimantation, sont alors parallèles à celle-ci.

A cette condition, la tôle peut être remplacée par une surface S et l'anomalie créée par celle-ci calculée soit par une répartition de charges, soit par une répartition de dipôles tangentiels. Ce modèle est global, dans le sens où il assure la validité du champ dans les deux régions air (intérieure et extérieure). Il faut insister sur le fait que de telles répartitions ne sont envisageables que pour une aimantation tangentielle à S .

Si l'aimantation est effectivement tangentielle, nous pouvons alors écrire une relation reliant le champ dans l'air, c'est-à-dire le champ mesuré par un capteur, à la distribution sur la tôle (figIII.1).

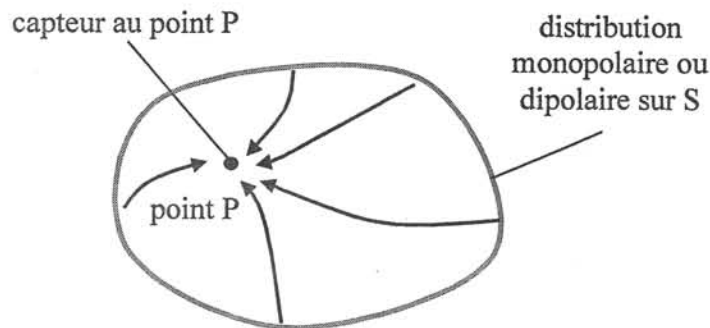


Figure III.1 : Notations pour l'écriture du problème inverse

D'après (II.66), (II.74) et (II.105), nous avons :

Pour une distribution monopolaire ρ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(\mathbf{P})) + \frac{1}{4\pi} \iint_S \rho(\mathbf{M}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{III.4})$$

Pour une distribution dipolaire \mathbf{p} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(\mathbf{P})) - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{M})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{III.5})$$

Pour une distribution en aimantation \mathbf{M} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(\mathbf{P})) - \frac{e}{4\pi} \iint_S \mathbf{grad}(\mathbf{M}(\mathbf{M})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{III.6})$$

Ces trois équations représentent la relation (III.1) appliquée à notre problème avec des modèles différents.

III.1.2 - Remarque sur l'aimantation permanente

Nous sommes cependant maintenant dans un cas plus général que dans le chapitre II. En effet, l'aimantation n'est plus constituée exclusivement de l'aimantation induite mais possède deux composantes. La première est toujours l'aimantation induite, la seconde est l'aimantation permanente. L'aimantation totale est la somme des deux :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ind}} + \mathbf{M}_{\text{per}} \quad (\text{III.7})$$

où \mathbf{M} est l'aimantation totale
 \mathbf{M}_{ind} est l'aimantation induite
 \mathbf{M}_{per} est l'aimantation permanente

Pour utiliser les relations (III.4), (III.5) et (III.6) pour l'écriture du problème inverse, il nous faut justifier que \mathbf{M} est tangentielle à la tôle. Si c'est effectivement le cas pour \mathbf{M}_{ind} , qu'en est-il pour \mathbf{M}_{per} ?

L'apparition et les variations de l'aimantation permanente se font sous l'action combinée d'un champ interne et de contraintes mécaniques et thermiques. Cette aimantation tend alors à s'orienter dans la direction du champ interne, lors de l'application de ces contraintes. Or, dans le cas d'une tôle, le champ interne est principalement tangentiel. Les tôles d'acier utilisées pour la construction navale sont pour la plupart obtenues par laminage et ce procédé favorise l'apparition d'aimantation permanente dans leur plan, ceci d'ailleurs pour les raisons précédentes. On peut aussi remarquer qu'une composante normale importante de l'aimantation permanente créerait des contraintes énergétiques trop importantes [BRISSONNEAU 97]. Nous considérerons donc que l'aimantation permanente est elle aussi tangentielle.

\mathbf{M} étant la somme vectorielle de deux grandeurs vectorielles tangentielles à S, elle est également tangentielle. Nos deux modèles monopolaires et dipolaires vont donc être applicables pour le cas général d'une aimantation possédant une composante induite ainsi qu'une composante permanente.

Remarque : Les expressions (III.5) et (III.6) sont en réalité parfaitement générales et n'imposent en rien que l'aimantation soit tangentielle. Cette considération va pourtant les simplifier en supprimant un de leurs degrés de liberté (les composantes normales à S de \mathbf{p} ou \mathbf{M} seront imposées nulles). Par contre, le modèle monopolaire (III.4) impose que l'aimantation soit tangentielle.

III.2 - Ecriture du système matriciel

Nous allons maintenant expliciter plus précisément le passage de (III.1) à (III.2) afin d'obtenir les systèmes linéaires que nous aurons à inverser par la suite.

III.2.1 - Les fonctions de forme

Nous considérons que la surface S est discrétisée en N éléments surfaciques plans de formes quelconques et qu'elle possède, de plus, M nœuds. Considérons un capteur de champ magnétique situé en un point P de la région air intérieur. Sur chaque élément, nous allons considérer une fonction d'approximation de la distribution qui va nous permettre de définir ses variations sur l'élément considéré. Ces fonctions sont appelées fonction de forme et peuvent être de plusieurs types.

Fonctions de forme associées à une distribution ponctuelle

Les distributions monopolaires et dipolaires sont considérées comme ponctuelles. Les grandeurs sont condensées en des points particuliers du maillage. Rappelons que les dipôles sont condensés aux barycentres de chaque élément et les charges aux nœuds (cf. chapitre II). Par extension, on peut les qualifier de fonctions de forme d'ordre -1 .

Fonctions de forme d'ordre 0

Chaque distribution est considérée comme constante sur chaque élément. L'intégration est donc surfacique pour les charges et pour les dipôles. Remarquons que le modèle mixte en charges linéiques que nous avons développé en est un exemple, puisqu'il est strictement équivalent à une répartition uniforme d'aimantation par élément.

Fonction de forme d'ordre supérieur

Nous n'avons pas jugé utile de développer des fonctions de forme d'ordres supérieurs à 0. Cette approche est pourtant tout à fait envisageable. La suite du mémoire explicitera au lecteur la raison de ce choix.

Muni de ces différentes fonctions de forme, nous obtenons plusieurs écritures matricielles reliant les distributions aux mesures.

III.2.2 - Les systèmes en charges

$$\text{Ordre } -1 : \quad \mathbf{B}(P) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(P) + \frac{1}{4\pi} \sum_j^M Q_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}) \quad (\text{III.7})$$

Rappelons que r_j représente la distance entre le nœud j et le capteur au point P . Cette équation vectorielle présente M inconnues (une charge par nœud). On peut la décomposer en trois équations scalaires par points de mesure, les capteurs étant vectoriels (fig III.2).

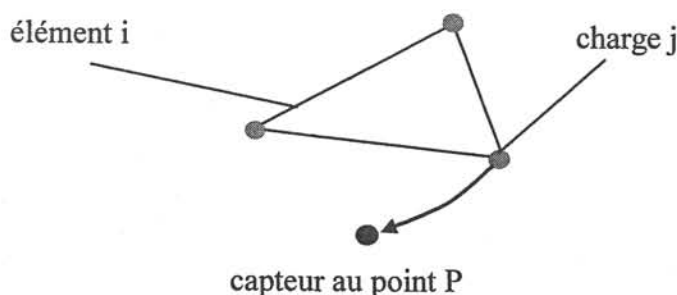


Figure III.2. Représentation schématique de l'équation (III.7)

Ordre 0 :
$$\mathbf{B}(P) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(P) + \frac{1}{4\pi} \sum_i^N \rho_i \iint_{S_i} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} dS_i) \quad (\text{III.8})$$

De même, cette équation peut être décomposée en trois équations scalaires et présente N inconnues, les valeurs des charges uniformes sur chaque élément (fig.III.3).

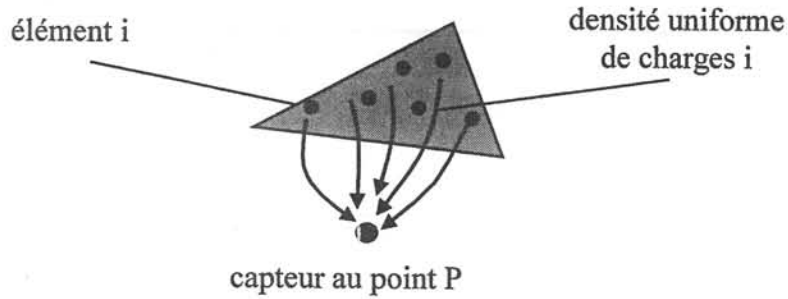


Figure III.3. Représentation schématique de l'équation (III.8)

III.2.3 - Les systèmes en dipôles

Ordre -1 :
$$\mathbf{B}(P) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(P) + \frac{1}{4\pi} \sum_i^N (3 \frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{r}_i}{r_i^5} \mathbf{r}_i - \frac{\mathbf{P}_i}{r_i^3})) \quad (\text{III.9})$$

Comme dans le chapitre précédent, à chaque élément est associée une base orthonormée de vecteurs tangentiels. A chaque dipôle est donc associé deux inconnues. Nous obtenons trois équations scalaires de 2xN inconnues (fig.III.4).

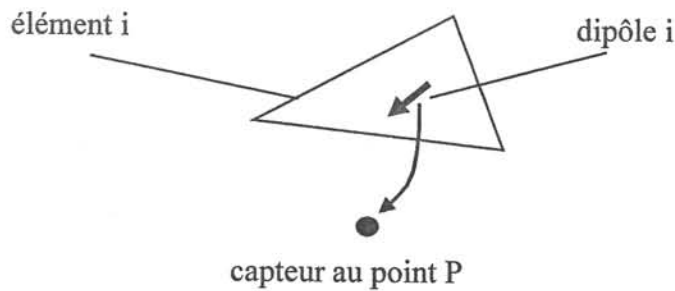


Figure III.4. Représentation schématique de l'équation (III.9)

Ordre 0 :
$$\mathbf{B}(P) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(P) + \frac{1}{4\pi} \sum_i^N \iint_{S_i} (3 \frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{r}_i}{r_i^5} \mathbf{r}_i - \frac{\mathbf{P}_i}{r_i^3})) dS_i \quad (\text{III.10})$$

Dans ce cas, nous obtenons trois équations vectorielles de 2xN inconnues (fig.III.5).

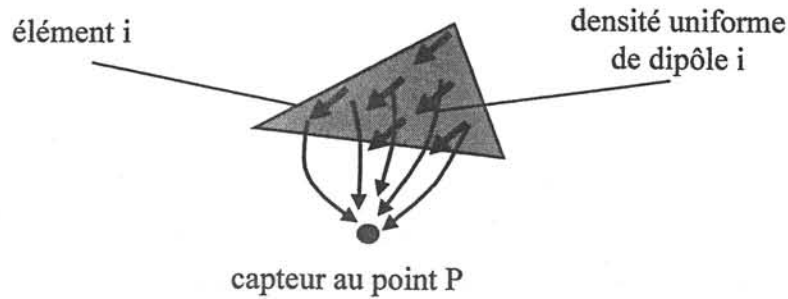


Figure III.5. Représentation schématique de l'équation (III.10)

III.2.4 - Le système associé au modèle mixte

Une distribution surfacique uniforme de dipôles est mathématiquement équivalente à une distribution linéique de charges constantes par arête. Ce résultat peut, ici encore, être utilisé avantageusement pour l'écriture matricielle du problème inverse. Nous obtenons une nouvelle équation vectorielle, dont les inconnues sont l'aimantation sur chaque élément, que nous appelons toujours modèle mixte.

$$\mathbf{B}(P) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(P) + \frac{e}{4\pi} \sum_i^N \int_{L_i} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} dL_i) \quad (\text{III.11})$$

Cette équation vectorielle conduit à trois équations scalaires à $2 \times N$ inconnues qui sont les composantes de l'aimantation sur chaque élément (fig.III.6).

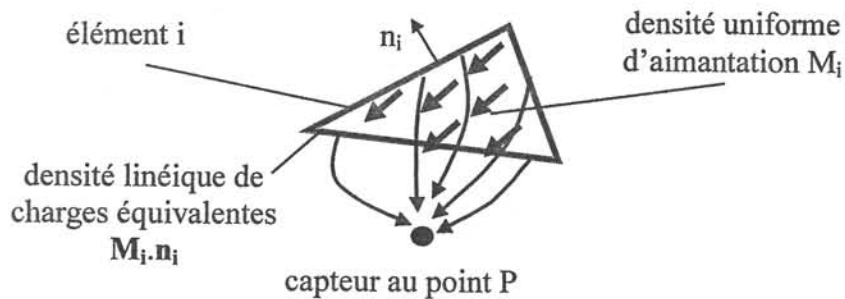


Figure III.6. Représentation schématique de l'équation (III.11)

III.2.5 - L'écriture du système

Nous avons trois équations par capteur, et pour P capteurs, nous obtenons un système de $3 \times P$ lignes. Par la suite, nous appellerons ce système « système mesure » et nous le noterons :

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{III.12})$$

- où **A** est une matrice dépendant du modèle choisi, du maillage et de la position des capteurs. **A** est une matrice pleine.
b est un vecteur dépendant du champ mesuré et du champ inducteur (en fait du champ réduit).
x est le vecteur représentatif des sources que nous cherchons.

Nous pouvons résumer nos différents modèles par le tableau suivant :

Modèle	Nombre d'inconnues	Divergence du champ près de la tôle
Charges ponctuelles	M inconnues	$1/r^2$ + condensation ponctuelle
Charges uniformes	N inconnues	$1/r^2$
Dipôles ponctuels	$2 \times N$ inconnues	$1/r^3$ + condensation ponctuelle
Dipôles uniformes	$2 \times N$ inconnues	$1/r^3$
Modèle mixte (charges linéiques)	$2 \times N$ inconnues	$1/r^2$ + condensation linéique

Ce tableau appelle quelques remarques. Tout d'abord le modèle en dipôles ponctuels conduit à de fortes divergences près de la tôle (cf. chapitre II). Si nous plaçons des capteurs à cet endroit, l'inversion sera très défavorable, puisqu'il n'y a pas validité du modèle au point où le champ est mesuré. Le modèle en dipôles uniformes présente également de telles divergences. Par contre, le modèle mixte équivalent présente l'intérêt de conduire à une relativement faible divergence du champ près des sources. C'est donc ce modèle mixte que nous allons privilégier pour toute identification de distributions de sources dipolaires.

Nous disposons également de deux modèles en charges qui conduisent à un calcul du champ relativement peu divergent près de la tôle. Pourtant, rappelons que les charges de modules importants se localisent sur les arêtes (elles représentent le flux d'induction qui s'échappe dans l'air). Une répartition uniforme sur un élément risque donc de ne pas être réellement représentatif de la réalité physique, surtout si la structure est non fermée. Il faudrait donc, en théorie, adopter des distributions de charges d'ordre supérieures, telles que l'ordre 1 ou mieux encore l'ordre 2.

Nous devons maintenant résoudre le système (III.12) afin de déterminer **x** et ainsi, à partir de la distribution obtenue, calculer le champ sur le plan de référence, en réponse au problème initial posé. Ce calcul se fera par l'intermédiaire des équations (III.7), (III.8), (III.9), (III.10) et (III.11), suivant le modèle choisi et où P sera un point du plan de référence.

IV - Les méthodes d'inversion

Nous allons maintenant nous intéresser aux différentes méthodes qui peuvent nous permettre de résoudre le système (III.12). Cette partie n'a aucune prétention mathématique, son but est uniquement de présenter les différentes approches susceptibles de résoudre les problèmes inverses. Elle se veut essentiellement pragmatique et propose des repères face à la diversité des méthodes numériques. Aucune indication n'est donnée concernant les algorithmes permettant d'obtenir les différentes décompositions. Ces décompositions sont, en effet, disponibles dans la plupart des bibliothèques d'outils d'analyse numérique. Pour plus de précisions, nous laisserons au lecteur le soin de consulter la référence [PRESS 92].

Notons que pour notre problème, la matrice A n'a, sauf cas particulier, aucune raison d'être carrée (autant d'équations que d'inconnues) et que cette matrice est pleine. C'est pourquoi nous n'aborderons pas les méthodes de résolution des systèmes creux, particulièrement utiles pour résoudre des systèmes issus d'une approche éléments finis.

IV.1 - L'équation normale

Il n'existe pas de solution \mathbf{x} qui vérifie rigoureusement (III.12). En effet, la grandeur $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ ne peut pas être exactement égale à un vecteur dont toutes les composantes sont nulles, ne serait-ce que pour des raisons informatiques (le zéro relatif numérique d'une machine est de l'ordre de 10^{-16}). L'idée est alors de trouver la solution la plus satisfaisante en terme de norme. Il s'agit alors de minimiser le résidu suivant :

Trouver \mathbf{x} tel que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ soit minimum

Il est possible, à ce stade, d'utiliser plusieurs types de normes. La solution la plus souvent retenue est la norme Euclidienne. Il suffit alors de dériver son expression en fonction des inconnues du système pour obtenir des équations. Ce calcul étant classique, nous ne le développerons pas ici. Cette approche conduit au système carré suivant :

$$(A^T A)\mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \quad (\text{III.13})$$

où A^T est la transposée de la matrice A . Cette équation est appelée équation normale du système linéaire. Cette méthode de résolution des systèmes linéaires est connue sous le nom de moindres carrés, puisqu'elle minimise une norme 2.

Il est nécessaire de résoudre le système (III.13) pour obtenir la solution \mathbf{x} . Deux possibilités s'offrent à nous. Il est tout d'abord possible d'inverser la matrice $A^T A$ pour obtenir une équation en fonction de \mathbf{x} .

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \quad (\text{III.14})$$

Le calcul de $(A^T A)^{-1}$ peut pourtant se révéler coûteux en temps de calcul. Si la matrice est de dimension N , elle correspond à la résolution de N systèmes linéaires. Une deuxième approche possible consiste en la résolution du système (III.13) directement, ce qui correspond donc à la résolution d'un seul et unique système. Cette résolution peut être effectuée par les méthodes exposées dans la partie suivante.

L'approche par l'équation normale est en réalité à proscrire pour la résolution des problèmes inverses. Sa popularité vient du fait que la matrice $A^T A$ est carrée et que le système possède donc autant d'équations que d'inconnues. Pourtant, la matrice A est généralement très mal conditionnée, or, la matrice $A^T A$ est encore plus mal conditionnée. Son inversion va donc être plus sujette aux divergences que le système initial. Il est donc préférable de résoudre directement le système (III.12), même si la matrice qui lui est associée n'est pas carrée.

IV.2 - Les résolutions directes

Plutôt que de convertir notre problème en un problème de minimisation de norme, ce qui contribue à dégrader son conditionnement, nous allons le résoudre directement. L'idée est ici de décomposer la matrice A en un produit de sous-matrices, celles-ci étant plus facilement inversibles.

IV.2.1 - La décomposition LU

La matrice A est décomposée en un produit de deux matrices L et U . La matrice L est une matrice triangulaire ayant des éléments non nuls sur et sous sa diagonale (matrice « low »), La matrice U possède des éléments non nuls sur et au-dessus de sa diagonale (matrice « upper »). Il est alors possible de résoudre le système (III.12) par la résolution successive de deux sous-systèmes.

$$L y = b \quad (\text{III.15})$$

puis

$$U x = y \quad (\text{III.16})$$

L'intérêt de cette approche est que la résolution d'un système dont la matrice est triangulaire est triviale. Une fois la décomposition LU effectuée, la résolution est facile et rapide.

La décomposition LU permet de résoudre le système en tenant compte directement du second membre, plutôt que d'inverser une matrice (ce qui est très coûteux en temps de calcul) et d'obtenir ensuite le résultat en fonction d'un second membre particulier. Par contre, elle ne permet pas de savoir si l'inversion est effectuée dans de bonnes conditions. En effet, si la matrice est mal conditionnée, le résultat obtenu par une telle inversion sera entaché de divergences et l'expérimentateur n'aura a priori aucune possibilité de le savoir.

IV.2.2 - La décomposition en valeur singulière

La décomposition en valeur singulière (SVD pour « single value decomposition » en anglais) est l'outil fondamental de résolution des problèmes inverses. Elle constitue, à la fois, une méthode d'inversion efficace mais aussi un outil de diagnostic précis.

a - Un outil d'inversion

Considérons une matrice A possédant n lignes et p colonnes. Toute matrice A peut se décomposer de la façon suivante :

$$A = U_{nn} W_{np} V_{pp}^T \quad (\text{III.17})$$

où U_{nn} est une matrice orthogonale dont les p premières colonnes forment une base orthonormée de l'image de A .

W_{np} est une matrice de la même dimension que A . Les termes diagonaux que nous noterons w_i sont les valeurs singulières de A . Elles sont positives ou nulles, classées dans l'ordre décroissant et au nombre de p . Le nombre de valeurs singulières strictement positives nous donne le rang de A . Si une de ces valeurs est strictement nulle, la matrice est singulière, c'est-à-dire qu'une équation est combinaison linéaire d'autres équations.

V_{pp} est une matrice orthogonale dont les colonnes telles que $w_i \neq 0$ forment une base orthonormée de l'antécédent de A et les colonnes telles que $w_i = 0$ forment une base orthonormée du noyau de A .

L'intérêt de cette décomposition est que les matrices U_{nn} et V_{pp} sont orthogonales, leurs matrices inverses sont donc égales à leurs transposées. On a donc :

$$U_{nn}^T U_{nn} = V_{pp}^T V_{pp} = I_d \tag{III.18}$$

Supposons maintenant deux cas de figures, suivant si la matrice A est surdimensionnée ou sous-dimensionnée (sous-déterminée).

Matrice A surdimensionnée (plus d'équations que d'inconnues) :

La matrice W_{np} est de la forme :

$$W_{np} = \begin{pmatrix} w_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & w_p & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si toutes les valeurs singulières w_i sont non nulles, la solution du système est alors :

$$x = V_{pp} W_{pn}^{-1} U_{nn}^T b \tag{III.19}$$

où la matrice W_{pn}^{-1} est de la forme :

$$W_{pn}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/w_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/w_p & & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice A sous-dimensionnée (moins d'équations que d'inconnues) :

La matrice W_{np} est alors de la forme :

$$W_{np} = \begin{pmatrix} w_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & 0 & & & \\ & & & & w_p \\ & & & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas de figure, les colonnes $(p+1, \dots, n)$ représentent une base orthonormée du noyau de A . La dimension du noyau de A est non nulle, toute combinaison linéaire des vecteurs de cette base est alors non observable, c'est-à-dire qu'elle n'a aucune répercussion sur la mesure. Il y a donc naturellement une infinité de solutions à notre système. Une solution particulière nommée « pseudo-solution » peut pourtant être dégagée. C'est la solution de norme minimale, parmi toutes les solutions possibles [PRESS 92]. La pseudo solution a alors pour expression :

$$x = V_{pp} W_{pn}^{-1} U_{nn}^T b \tag{III.20}$$

où la matrice W_{pn}^{-1} est de la forme :

$$W_{pn}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/w_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & 0 & & & \\ & & & & 1/w_p \\ & & & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi en partie résolu notre problème en y apportant une solution pour le cas de systèmes de tailles quelconques et non singuliers. Les matrices issues des problèmes inverses n'ont quasiment aucune chance d'être rigoureusement singulières, en effet, les équations ne sont jamais strictement combinaisons linéaires les unes des autres. La plus petite valeur singulière ne sera jamais rigoureusement nulle (le zéro relatif étant égal à 10^{-16}). Il est donc toujours possible de trouver une solution x , telle que nous l'avons définie.

Remarque : Il est courant de trouver une définition légèrement différente pour l'expression (III.17). En particulier, les matrices issues de la décomposition possèdent parfois des dimensions différentes. Il s'agit en réalité d'une écriture exclusivement valable pour les systèmes surdimensionnés, qui permet de manipuler des matrices de tailles réduites. L'écriture que nous proposons est valable pour des matrices de tailles quelconques.

Nous avons évoqué le fait que la SVD était, non seulement un outil d'inversion, mais aussi un outil de diagnostic.

b - Un outil de diagnostic

Le problème inhérent à toute approche inverse provient du fait que les données sont mal dissociées les unes des autres. Pour éclaircir notre propos considérons les deux figures suivantes (fig.III.7) :

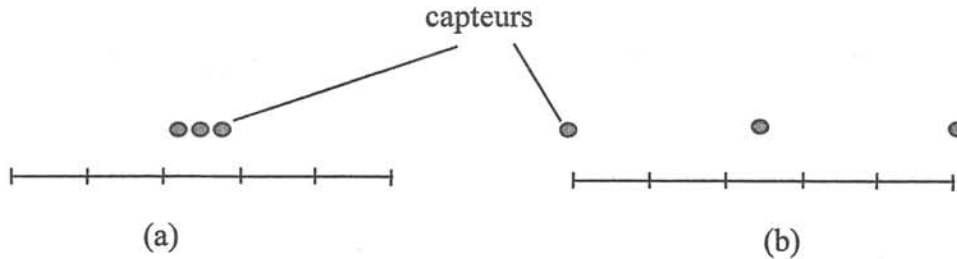


Figure III.7 : Deux cas de figure.

Le cas (a) présente une situation où trois capteurs sont très proches les uns des autres. Les équations obtenues pour chacun des capteurs ont donc de grandes chances d'être très peu dissociées. Ce phénomène est moins présent pour le cas (b), où les capteurs sont éloignés et donc les équations a priori bien dissociées. Les cas (a) et (b) conduisent à 9 équations (3 composantes par vecteur). La matrice A issue du cas (a) possède alors trois fois trois équations fortement semblables. Supposons maintenant que les mesures soient bruitées. Les trois équations, qui sont sensiblement les mêmes ont de grandes chances d'avoir des seconds membres relativement différents. Elles deviennent alors quasi-contradictoires. C'est cette situation, certes exagérée, qui rend les problèmes inverses mal conditionnés. Certaines équations sont « quasi-parallèles » et associées à des seconds membres différents.

Pour statuer sur ce quasi-parallélisme, la SVD va nous être d'une grande utilité, ceci par le biais des valeurs singulières. En effet, plus une valeur singulière est petite, plus les équations qui lui sont associées sont parallèles. Notons d'ailleurs qu'une valeur singulière nulle témoigne de la présence d'équations qui sont combinaisons linéaires les unes des autres (c'est-à-dire rigoureusement parallèles). Plus un système possède des valeurs singulières petites, plus il sera difficile à inverser. Une définition du conditionnement est le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière. Elle s'applique à n'importe quel système.

$$\xi(A) = \frac{w_{\max}}{w_{\min}} \quad (\text{III.21})$$

Plus le conditionnement est grand, plus le système est instable vis-à-vis des incertitudes de mesures.

En effet, si les valeurs singulières w_i sont petites, les termes en $1/w_i$ deviennent très grands et fortement imprécis (c'est le problème classique de division par un petit nombre). La solution qui dépend de ces termes devient donc fortement imprécise et divergente. Une valeur singulière minimale relativement très petite fait « exploser » la solution et amplifie alors démesurément le bruit de mesure.

c - Conclusion sur la SVD

L'étape fondamentale dans la résolution d'un problème inverse est donc, avant toute tentative de résolution, d'effectuer une SVD afin d'avoir un regard critique sur le résultat. La SVD est également un outil puissant d'inversion. Elle permet en effet d'inverser les systèmes de dimensions quelconques, et en cas de non unicité de la solution, c'est la pseudo-solution qui est obtenue, c'est-à-dire la solution de norme minimum. Ce rappel est fondamental pour la suite de notre exposé.

IV.2.3 - Les méthodes itératives

Les méthodes de résolution itératives sont très générales et permettent de minimiser le résidu par approximations successives en calculant le gradient de celui-ci [ALIFANOV 95]. Ne les ayant pas utilisées dans le cadre de ces travaux, nous ne les mentionnerons ici que pour mémoire.

IV.3 - Exemples d'inversion sans régularisation

IV.3.1 - Présentation du cas test

Afin d'illustrer nos propos tout au long de ce chapitre, nous allons choisir un exemple numérique pour tester nos algorithmes. Cet exemple doit être à la fois simple et le plus proche possible des conditions dans lesquelles nous allons effectuer nos mesures.

Notre choix s'est porté sur un parallélépipède de 1 m^2 de section (un carré de 1 m de côté) et d'une longueur de 4 m, l'épaisseur de la tôle étant de 1,4 mm. Nous avons choisi cette géométrie pour ses similitudes avec la maquette du LMN.

Le parallélépipède, de perméabilité relative de 96, est baigné dans un champ inducteur longitudinal 20000 nT. De plus, nous affecterons à une portion de cette structure une aimantation rémanente longitudinale M_r de 0,05 tesla. Cette portion devrait créer une aimantation permanente dans la tôle, ce qui nous placera dans une configuration proche des futures conditions expérimentales (voir fig.III.8).

Cette configuration a été simulée par la méthode des éléments finis avec le logiciel Flux3D. Le choix de cette méthode de résolution n'est pas anodin. En effet, comme nous l'avons évoqué, la méthode des éléments finis génère un bruit numérique dû au maillage. La présence de ce léger bruit nous rapprochera de conditions expérimentales. Le maillage n'a pas été choisi très fin délibérément mais il reste acceptable pour conduire à un calcul du champ suffisamment précis. Cette simulation nous permettra donc d'une part de nous créer un jeu de mesures internes et d'autre part de calculer le champ à l'extérieur du parallélépipède.

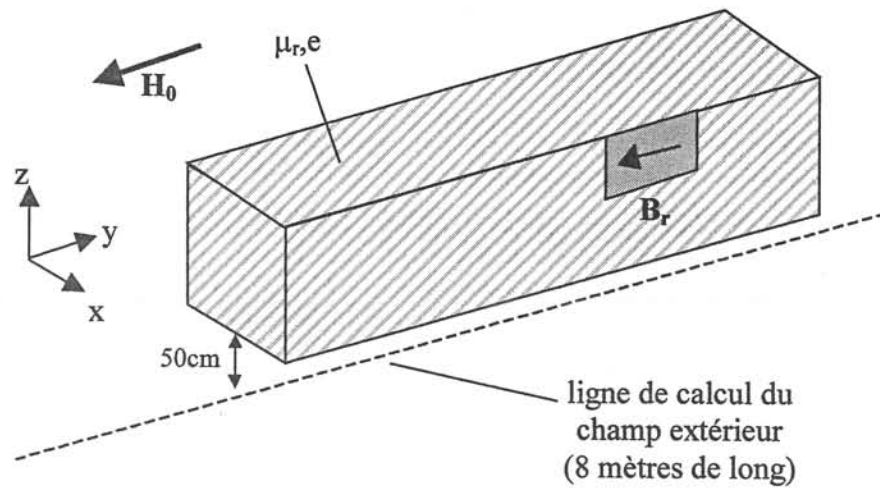


Figure III.8 : Géométrie et localisation de l'aimantation rémanente

Le champ externe sera calculé sur une ligne de 8 m de long située à 50 cm sous la structure et dans son plan de symétrie. Le but de ce test est évidemment de résoudre le problème inverse grâce aux simulations de mesures internes, puis à partir de la solution, de calculer le champ sur cette ligne. Le champ obtenu sera alors comparé aux résultats donnés par la méthode des éléments finis qui, rappelons, le est considérée comme notre référence.

Nous allons choisir un grand nombre de capteurs, ceci afin de prendre en compte au maximum les variations du champ à l'intérieur du parallélépipède. Nous verrons par la suite que cette approche n'est pas forcément la plus judicieuse, c'est pourtant celle que nous avons adoptée en premier lieu et qui paraît la plus naturelle. En effet, devant un problème mal connu, un expérimentateur tend à multiplier les observations. Nous choisissons de placer 90 « capteurs numériques vectoriels » à l'intérieur de la structure. Ils sont placés régulièrement dans un parallélépipède dont la distance à la tôle sera toujours supérieure à 20cm. La tôle a été maillée en 288 éléments surfaciques carrés (fig.III.9).

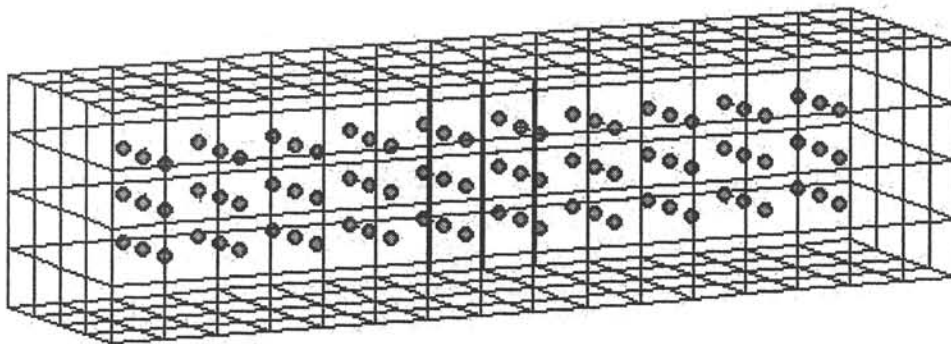


Figure III.9 : Maillage du parallélépipède et position des capteurs

IV.3.2 - Ecriture des systèmes linéaires

Pour chaque modèle présenté, nous explicitons les tailles des systèmes obtenus, les conditionnements ainsi que les spectres de décomposition en valeurs singulières.

Modèle en charges ponctuelles :

Taille du système : 270×290 (équation III.7)

Conditionnement : $1,08 \cdot 10^{17}$

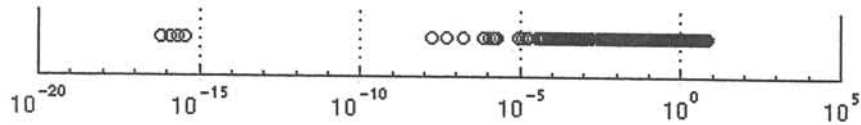


Figure III.10 : Spectre de la SVD pour les charges ponctuelles

Modèle en charges constantes par élément :

Taille du système : 270×288 (équation III.8)

Conditionnement : $6,16 \cdot 10^{18}$

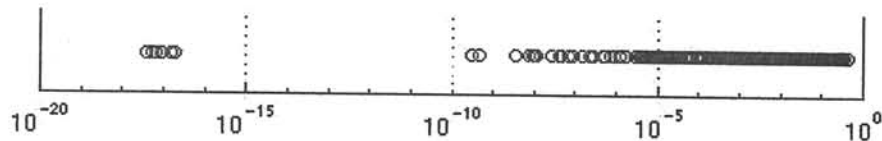


Figure III.11 : Spectre de la SVD pour les charges constantes par élément

Modèle en dipôles ponctuels :

Taille du système : 270×576 (équation III.9)

Conditionnement : $8,06 \cdot 10^4$

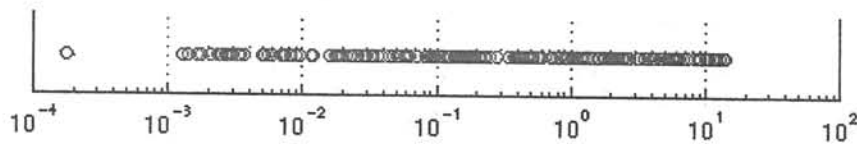


Figure III.12 : Spectre de la SVD pour les dipôles ponctuels

Modèle en dipôles constants par élément :

Taille du système : 270×576 (équation III.10)

Conditionnement : $1,73 \cdot 10^5$

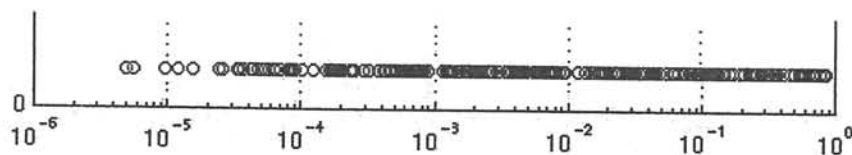


Figure III.13 : Spectre de la SVD pour les dipôles constants par élément

Modèle mixte en charges linéiques ou aimantation :

Taille du système : 270×576 (équation III.11)

Conditionnement : $5,30 \cdot 10^5$

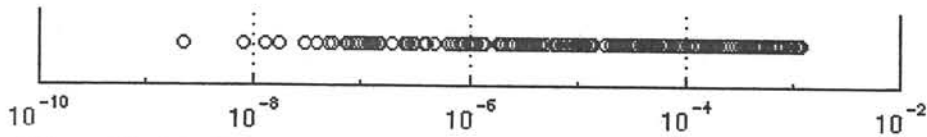


Figure III.14 : Spectre de la SVD pour le modèle en charges linéiques

Les conditionnements obtenus pour les cinq systèmes sont, comme nous l'attendions, catastrophiques. Les bruits générés par la simulation éléments finis vont inévitablement faire diverger les solutions. Les problèmes sont donc tous « mal posés », ils sont en effet très mal conditionnés et sous-déterminés. Nous cumulon sur ces exemples, les deux difficultés classiques intrinsèques aux problèmes inverses.

Il convient pourtant de comparer les modèles entre eux. Les modèles en charges comportent moins d'inconnues que les modèles en dipôles, ce qui, à première vue, peut sembler être un avantage. Pourtant, les systèmes associés aux modèles dipolaires sont mieux conditionnés que leurs homologues monopolaires (en moyenne 10^5 contre 10^{17}). Il est difficile de trouver une explication rigoureuse à ce phénomène. Nous pouvons pourtant signaler que la décroissance du champ créé par une charge est en $1/r^2$ alors qu'elle est en $1/r^3$ pour les dipôles. Les charges rayonnent donc en moyenne plus que les dipôles et un capteur « observera » donc globalement plus de charges que de dipôles. Les équations pour les modèles en dipôles semblent donc être mieux découplées les unes des autres, ce qui pourrait expliquer le meilleur conditionnement. Pourtant, le modèle mixte fait intervenir un champ en $1/r^2$ et conduit quand même à un conditionnement proche des modèles dipolaires. C'est donc peut-être le fait que les inconnues soient vectorielles qui explique ce phénomène. A l'heure actuelle, nous ne disposons pas d'explication plus satisfaisante.

IV.3.3 - Un exemple de résolution sans régularisation

Nous donnons à titre d'exemple le résultat obtenu avec l'inversion d'un des systèmes. Nous avons choisi le modèle en charges constantes par élément correspondant au système (III.8). La méthode d'inversion est basée sur la décomposition en valeurs singulières.

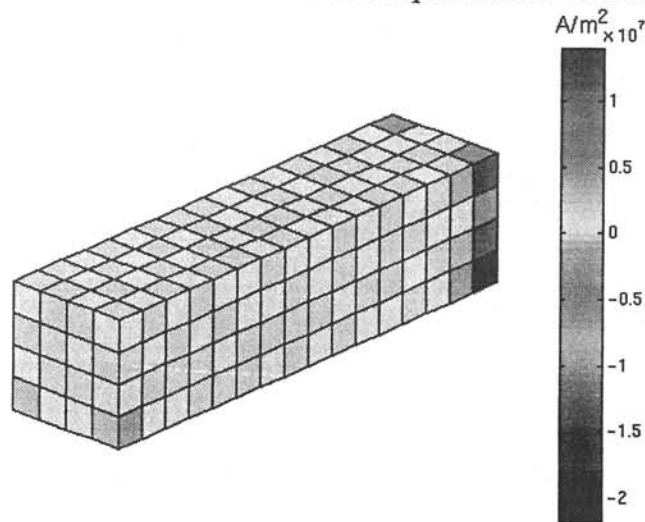


Figure III.15 : Distribution surfacique de charges obtenue par inversion par une simple SVD.

La répartition de charges est effectivement divergente (variant de 10^7 à -10^7). Elle ne présente aucune régularité et n'est absolument pas en accord avec la physique (fig.III.15). Le champ calculé à l'extérieur est totalement incohérent avec celui évalué par éléments finis (fig.III.16).

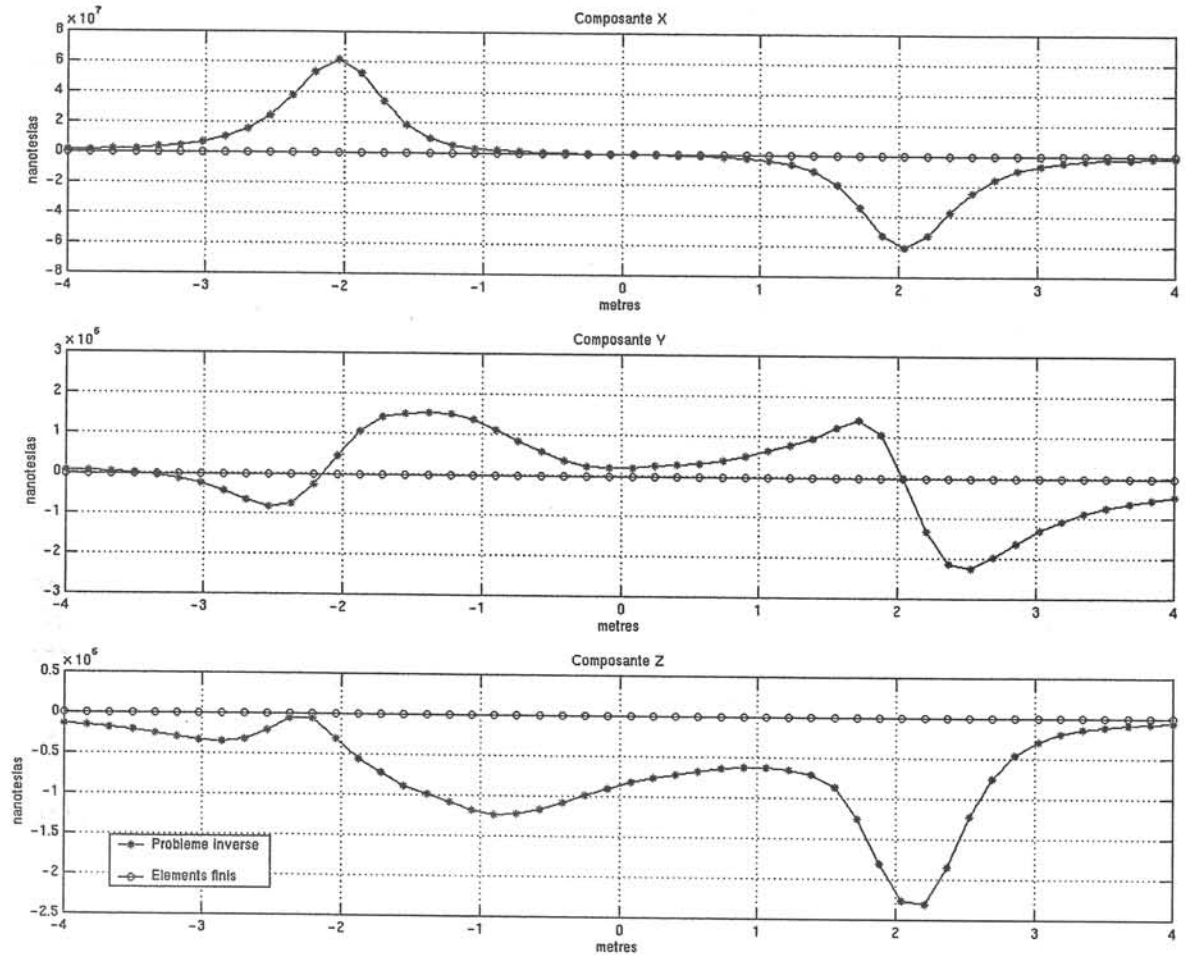


Figure III.16 : Comparaison du champ reconstruit par résolution « naïve » du problème inverse et du champ calculé par éléments finis sur une ligne à 50 cm sous le parallélépipède

Remarque : Le champ calculé par éléments finis n'est évidemment pas nul sur la ligne extérieure. Il s'agit simplement d'un effet d'échelle dû à la divergence du champ prédit par problème inverse.

V - Les méthodes de régularisation

Les techniques de régularisation sont nombreuses et très diversifiées. Dans ce paragraphe, nous considérons deux grandes familles. Celles-ci sont généralement suffisantes pour résoudre les problèmes relativement « simples ».

Le but de ces méthodes est d'assurer la stabilité de la solution vis-à-vis des bruits de mesure. Le moyen qu'elles mettent en œuvre est le plus souvent l'ajout d'information a priori. Ces méthodes nécessitent très souvent d'avoir une idée de la forme de la solution avant la résolution.

V.1 - L'inversion par troncature du spectre

V.1.1 - Approche théorique

Nous avons vu que la plupart des problèmes inverses étaient quasi-singuliers, dans le sens où une ou plusieurs de leurs valeurs singulières étaient très proches de zéro. En inversant ces faibles valeurs, on amplifie démesurément les bruits de mesures dans ces directions quasi-singulières. La solution devient alors numériquement instable.

Ces faibles valeurs singulières témoignent de la présence d'équations quasiment linéairement dépendantes. Combinées avec un second membre bruité, l'information est alors proche de la contradiction et crée ainsi l'instabilité. L'idée développée dans cette partie est d'écarter délibérément ces équations, en les supprimant. En revanche, nous allons augmenter notre espace de solutions possibles en sous-déterminant artificiellement le système.

Pratiquement une troncature du spectre de la SVD consiste en l'annulation des valeurs singulières trop petites. Les directions quasi-singulières sont intégrées directement dans le noyau de **A**. Seules les directions significatives de **A** sont alors conservées. Supposons qu'une matrice possède *p* valeurs singulières (w_1, \dots, w_p), w_p étant la plus petite. Nous allons fixer un seuil de tolérance en dessous duquel ces valeurs seront annulées. Ce seuil peut être, par exemple, toutes les valeurs inférieures à w_m . La solution de notre système devient alors :

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}_{pp} \mathbf{W}_{\text{tronquée}}^{-1} \mathbf{U}_{nn}^T \mathbf{b} \tag{III.22}$$

Avec, pour un système sous-déterminé tel que le nôtre :

$$\mathbf{W}_{\text{tronquée}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/w_1 & 0 & \text{gris} \\ 0 & 1/w_m & 0 \\ \text{gris} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que pour un système surdimensionné, la forme de la matrice est légèrement différente :

$$W_{\text{tronquée}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/w_1 & 0 & \text{gris} & \text{gris} \\ 0 & \diagdown & 0 & 0 \\ & & 1/w_m & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Remarque : Il peut sembler paradoxal d'annuler des grandeurs en $1/w_i$ pour des w_i petits. En effet, si w_i est très petit, les valeurs de $1/w_i$ tendent vers l'infini. En réalité, cette troncature du spectre ne fait qu'intégrer dans le noyau de **A** les équations « corrompues » et annule ainsi leur influence en les rendant inobservables.

Il faut de plus, avoir quelques points présents à l'esprit. Tout d'abord, notre solution va être une moins bonne solution du système dans le sens où le résidu auquel elle conduit est plus grand que pour une inversion sans troncature. Les modèles « fit » légèrement moins bien les mesures. De plus, nous avons dégradé artificiellement le rang de **A**, l'espace des solutions plausibles, c'est-à-dire le noyau de **A**, a donc vu sa dimension augmenter. La solution retenue par (III.22) est la solution de norme minimum ou pseudo-solution qui, si le seuil de troncature est suffisamment important ne diverge pas. Remarquons aussi qu'augmenter ce seuil de la plus petite valeur singulière contribue à améliorer le conditionnement. On peut employer l'expression de « reconditionnement du système ».

Il nous reste maintenant à expliciter comment choisir le seuil de tolérance. Ce choix est indissociable de la mesure. Considérons un coefficient ε , pour lequel toutes les valeurs singulières inférieures seront imposées à 0. Une expression de ce seuil de tolérance est donnée dans [LAGIER 99] :

$$\varepsilon = w_1 \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (\text{III.23})$$

- où $\Delta \mathbf{b}$ est l'incertitude sur la mesure
 \mathbf{b} est le vecteur des mesures
 w_1 est la plus grande des valeurs singulières

Cette approche nécessite une très bonne connaissance du dispositif de mesure, avec, en particulier, une bonne estimation des erreurs commises. L'estimation peut se faire plus ou moins empiriquement ou à l'aide d'une étude statistique rigoureuse (avec un comportement statistique des capteurs, par exemple). Par contre, pour notre application, certains paramètres sont mal maîtrisés, tels que les erreurs géométriques ou les mésalignements des capteurs. Ces considérations rendent l'utilisation de (III.23) délicate.

La résolution des problèmes inverses par troncature du spectre est la méthode de régularisation la plus simple que l'on puisse rencontrer. Pratiquement, toutes les bibliothèques d'analyse numérique proposent actuellement un tel outil. Le paramètre de tolérance peut, de plus, être choisi plus ou moins empiriquement, et cette approche peut donner des résultats tout à fait satisfaisants. De plus, la solution proposée est de norme faible ce qui peut présenter des avantages.

V.1.2 - Exemple numérique

Nous considérons toujours l'exemple du parallélépipède. Le modèle inversé est celui en charges constantes par élément correspondant toujours à l'équation (III.8). Nous allons donc tronquer le spectre de la SVD de la matrice A (fig.III.11). Il est difficile d'évaluer l'erreur commise sur le second membre lors de la simulation par éléments finis. C'est pourquoi nous avons procédé par tâtonnement. Le paramètre ϵ retenu est 10^{-3} . Nous obtenons alors la distribution de charges suivante (fig.III.17).

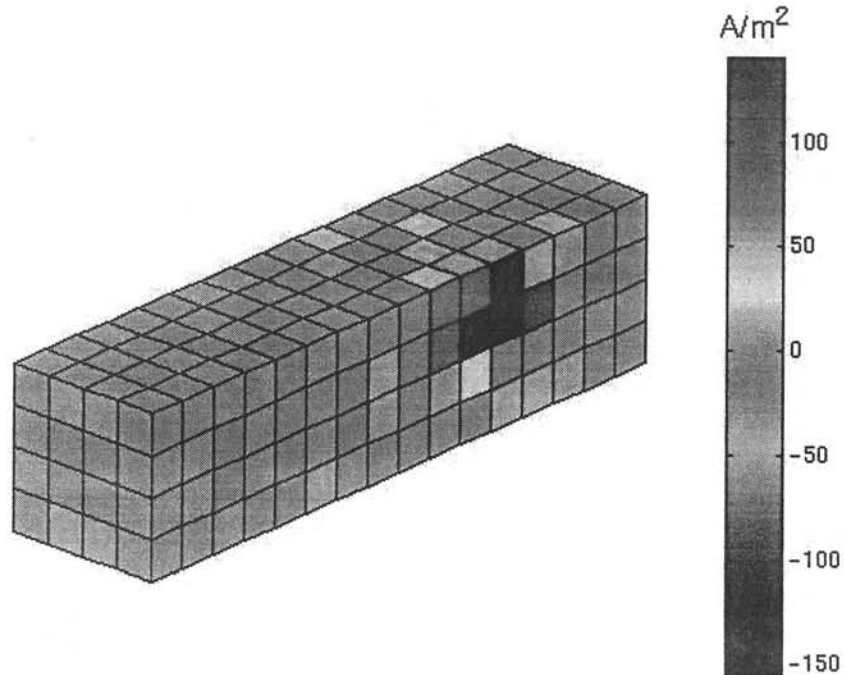


Figure III.17 : Distribution de charges obtenue par troncature du spectre de la SVD ($\epsilon=10^{-3}$)

Cette solution semble physique. En effet, tout d'abord la valeur des charges ne semble pas diverger. Ensuite, nous retrouvons des charges de signes opposés à proximité de la partie de la tôle à laquelle nous avons affecté une aimantation rémanente. Ces charges de signes opposés forment un dipôle orienté dans le sens de cette aimantation. Cette distribution permet alors de calculer le champ à l'extérieur (fig.III.18) :

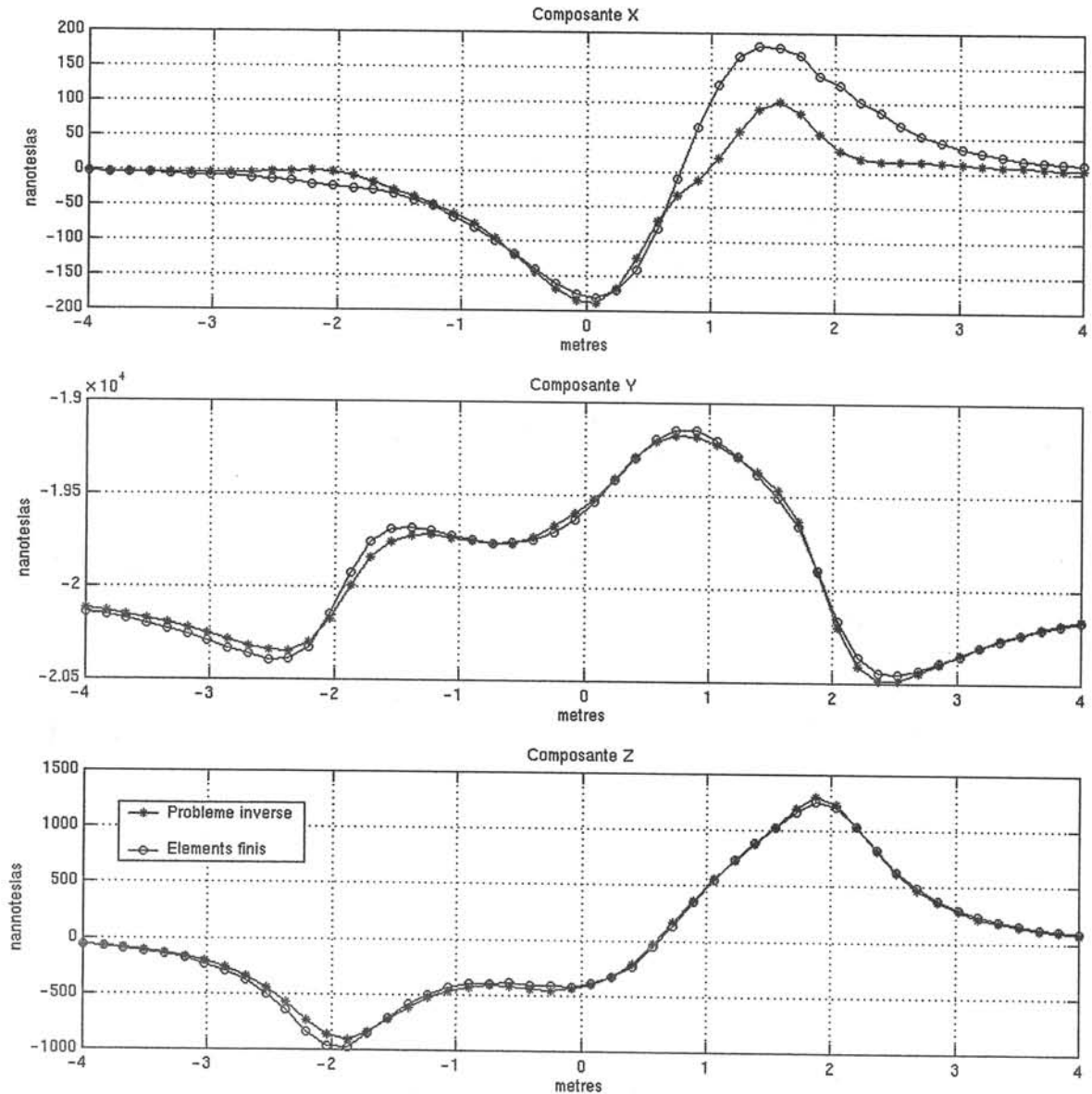


Figure III.18 : Comparaison du champ reconstruit par problème inverse régularisé par troncature du spectre de la SVD et du champ calculé par éléments finis sur une ligne à 50 cm sous le parallélépipède

V.1.3 - Conclusion sur la troncature de la SVD

La méthode proposée apporte donc bien une solution à notre problème. A la vue des courbes de la figure III.18, le champ prédit par problème inverse et le champ calculé par éléments finis sont en bonne adéquation (notons que la composante x est faible par rapport aux autres composantes). Ce résultat a été obtenu pour le modèle en charges constantes par élément. Le modèle en charges ponctuelles conduit à des résultats similaires pour l'inversion.

Il faut noter que le choix empirique du coefficient ϵ est très pénalisant. En effet, un coefficient de 10^{-4} conduit à des résultats nettement moins bons. Il semble donc délicat d'utiliser une telle approche pour un bâtiment réel, où il est impossible de vérifier l'adéquation entre le champ prédit et le champ effectif. De plus, ce coefficient de tolérance

dépend des mesures. Il va donc dépendre, en théorie, du cap du bâtiment et de l'aimantation de la coque. Or, nous ne disposons pas de moyen pour le déterminer à chaque acquisition sur les capteurs.

Il faut également noter que la troncature du spectre de la SVD est particulièrement bien adaptée pour résoudre les problèmes en charges. En effet, comme nous l'avons déjà évoqué, cette méthode tend à privilégier les solutions de norme minimum. Ce cas est très favorable pour les charges puisqu'il minimise le flux s'échappant dans l'air. Par contre, la méthode est défavorable pour les dipôles, puisqu'elle minimise leurs composantes et donc celles de l'aimantation. En effet, toutes nos tentatives de régularisation par troncature du spectre des modèles où les inconnues sont dipolaires se sont soldées par un échec, les distributions obtenues n'ayant alors aucune cohérence avec le modèle initial et les champs externes prédits aucune adéquation avec ceux calculés par éléments finis. Il a donc été nécessaire d'envisager d'autres méthodes de régularisation.

V.2 - Technique de régularisation de Tikhonov

V.2.1 - Approche théorique

Nous avons vu que la troncature du spectre de la SVD consistait à écarter certaines équations. Cette approche peut être contestée dans le sens où elle supprime délibérément de l'information et augmente artificiellement le nombre de solutions plausibles. En 1974, A. Tikhonov et V. Arsenine proposèrent une approche permettant de résoudre les problèmes inverses linéaires mal posés [TIKHONOV 76] et de stabiliser les solutions.

L'idée est relativement simple. La solution n'étant pas unique, parmi les solutions plausibles (c'est-à-dire celles qui correspondent aux mesures avec une incertitude donnée), comment choisir celle qui correspond le mieux à notre problème ? Cette question met en évidence un problème de choix. Ce choix va s'effectuer par l'ajout d'information a priori, par exemple, c'est la solution de norme la plus petite ou la solution la plus régulière qui sera retenue.

a - Choix d'un opérateur régularisant

Nous allons définir un opérateur régularisant L qui va contenir l'information a priori que nous voulons rajouter. Notre problème va donc être modifié. Afin d'illustrer notre propos, considérerons l'équation normale du système. Au lieu de :

$$\text{Trouver } x \text{ tel que } \|Ax - b\| \text{ soit minimum}$$

Nous allons résoudre le nouveau problème qui consiste à :

$$\text{Trouver } x \text{ tel que } \|Ax - b\| + \alpha \|Lx\| \text{ soit minimum}$$

où L est une matrice carrée appelée opérateur régularisant
 α est le paramètre de régularisation.

L dépend évidemment du type d'information que l'on désire ajouter. Si par exemple, l'information est que la solution soit de norme minimum, on choisira alors L égale à la matrice identité (régularisation d'ordre 0), ce qui nous conduira à résoudre le problème :

$$\text{Trouver } \mathbf{x} \text{ tel que } \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| + \alpha \|\mathbf{x}\| \text{ soit minimum}$$

Supposons maintenant que l'information choisie concerne la régularité de la solution. En particulier, qu'il n'y ait pas de brusques variations entre deux composantes de \mathbf{x} géométriquement voisines. L'opérateur régularisant pourra alors être l'opérateur discret de dérivation (régularisation d'ordre 1). Si x_i et x_{i+1} sont voisins, on aura, par exemple, pour expression de L :

$$L = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

On peut imaginer d'autres opérateurs, tels que par exemple, le Laplacien discret (régularisation d'ordre 2). Le choix de l'opérateur de régularisation est donc fondamental et, en particulier, il doit être non singulier. L'ajout d'information mal conditionnée contribuerait, en effet, à dégrader le problème, plus qu'à l'améliorer.

La technique d'inversion de Tikhonov a trouvé un nombre considérable d'applications. La plus simple est l'ordre 0, qui dans son approche de minimisation de norme de la solution se rapproche de la troncature de la SVD. Cette régularisation possède l'énorme avantage d'être indépendante de la géométrie. Les régularisations d'ordres supérieures conduisent généralement à des solutions plus acceptables par rapport à l'ordre 0 (qui tend à « tasser la solution »). Pourtant, les opérateurs dérivés sont parfois difficiles à exprimer. Si pour des géométries à deux dimensions, le problème est souvent simple, il peut devenir très délicat pour des géométries à trois dimensions. C'est pourquoi on trouve relativement peu d'applications de cette technique de régularisation en trois dimensions.

Une fois l'opérateur choisi, la résolution de l'équation normale nous donne la solution du problème :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \tag{III.25}$$

Remarque : Nous avons évoqué les inconvénients que pouvait engendrer la résolution de l'équation normale. Il est en fait possible de résoudre directement le système en réalisant une décomposition en valeur singulière de \mathbf{A} et \mathbf{L} simultanément, ce qui permet de s'affranchir du mauvais conditionnement de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Cette décomposition se nomme décomposition en valeurs singulières généralisée et on pourra trouver dans la référence [HANSEN 98] toutes les informations utiles à son propos.

b - Le choix du coefficient de régularisation

Une autre difficulté de ces techniques de régularisation est le choix du coefficient α . Le choix de coefficient pondère l'importance que l'on donne à un système par rapport à

l'autre. Il doit être petit par rapport à 1 puisque le système à résoudre est en priorité le système « mesures » $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Il existe une multitude de travaux sur le choix de ce paramètre et de techniques associées. Nous n'en exposerons qu'une. Celle-ci possède l'avantage d'être simple et pragmatique. Il s'agit de la méthode de la « courbe en L » [HANSEN 93].

Le système à privilégier est donc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Si α est petit, le résidu de $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ est petit et celui de \mathbf{Lx} trop important (les solutions divergent, elles sont équivalentes à une simple résolution par les moindres carrés). Si α est trop grand, la norme de $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ croît (les mesures ne sont plus respectées) et nous nous rapprochons de la solution du système $\mathbf{Lx} = 0$. Pour optimiser le paramètre, il suffit de tracer la courbe norme de $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ en fonction de la norme de \mathbf{Lx} . Cette courbe présente une forme de L (L-curve en anglais). Le paramètre idéal se situe au niveau du coude juste avant que la croissance de la norme de $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ commence à s'amorcer de façon significative, c'est-à-dire lorsque que le modèle commence à ne plus correspondre aux mesures.

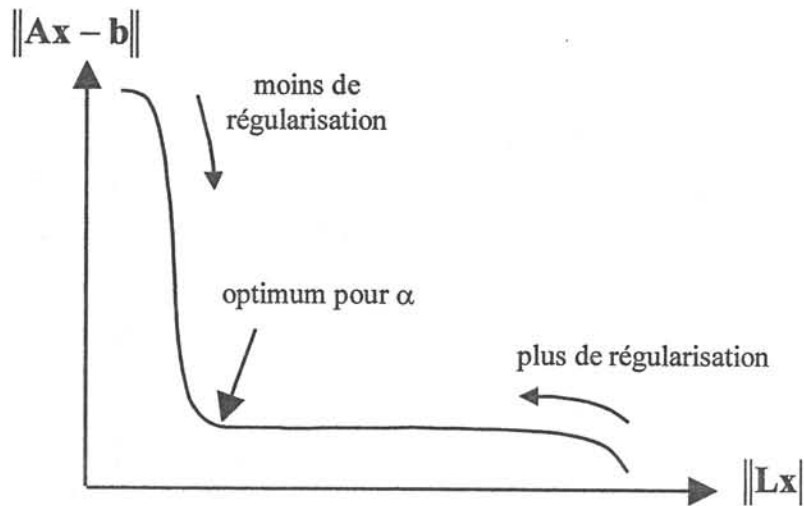


Figure III.19 : La technique de la L-curve

V.2.2 - Exemple numérique

Nous considérons le même exemple numérique que précédemment, c'est-à-dire le modèle en charges constantes par élément. La régularisation choisie est à l'ordre 0, elle minimise donc la norme de la solution, c'est-à-dire l'amplitude des charges. La matrice \mathbf{L} est donc la matrice identité. Afin de déterminer le paramètre α , nous appliquons la technique de la « L-curve ». Cette approche nécessite la résolution de plusieurs systèmes avec des paramètres de régularisation différents. Le coefficient optimum trouvé est de 10^{-6} (fig.III.20). Une fois ce paramètre déterminé, nous obtenons la solution (fig.III.21), puis le champ sur la ligne extérieure au parallélépipède que nous comparons au calcul éléments finis (fig.III.22).

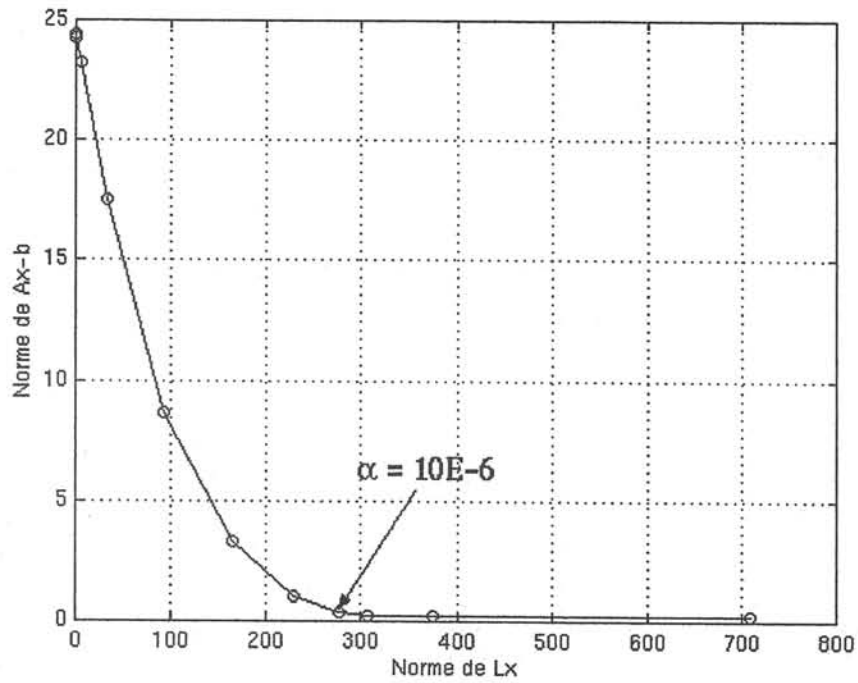


Figure III.20 : L-curve pour le modèle en charges constantes par élément

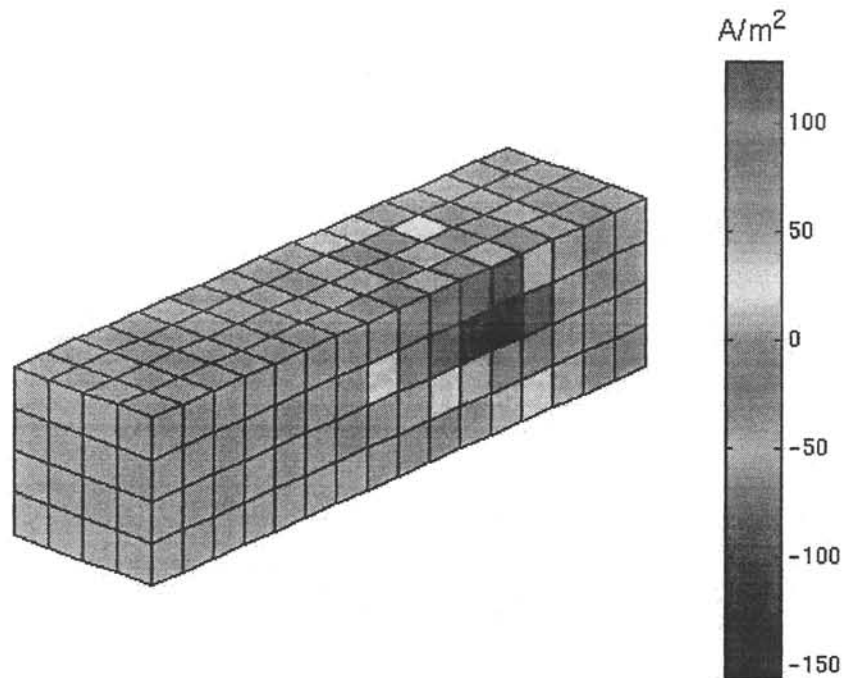


Figure III.21 : Solution du modèle en charges constantes par élément pour une régularisation par la méthode de Tikhonov à l'ordre 0 ($\alpha=10^{-6}$)

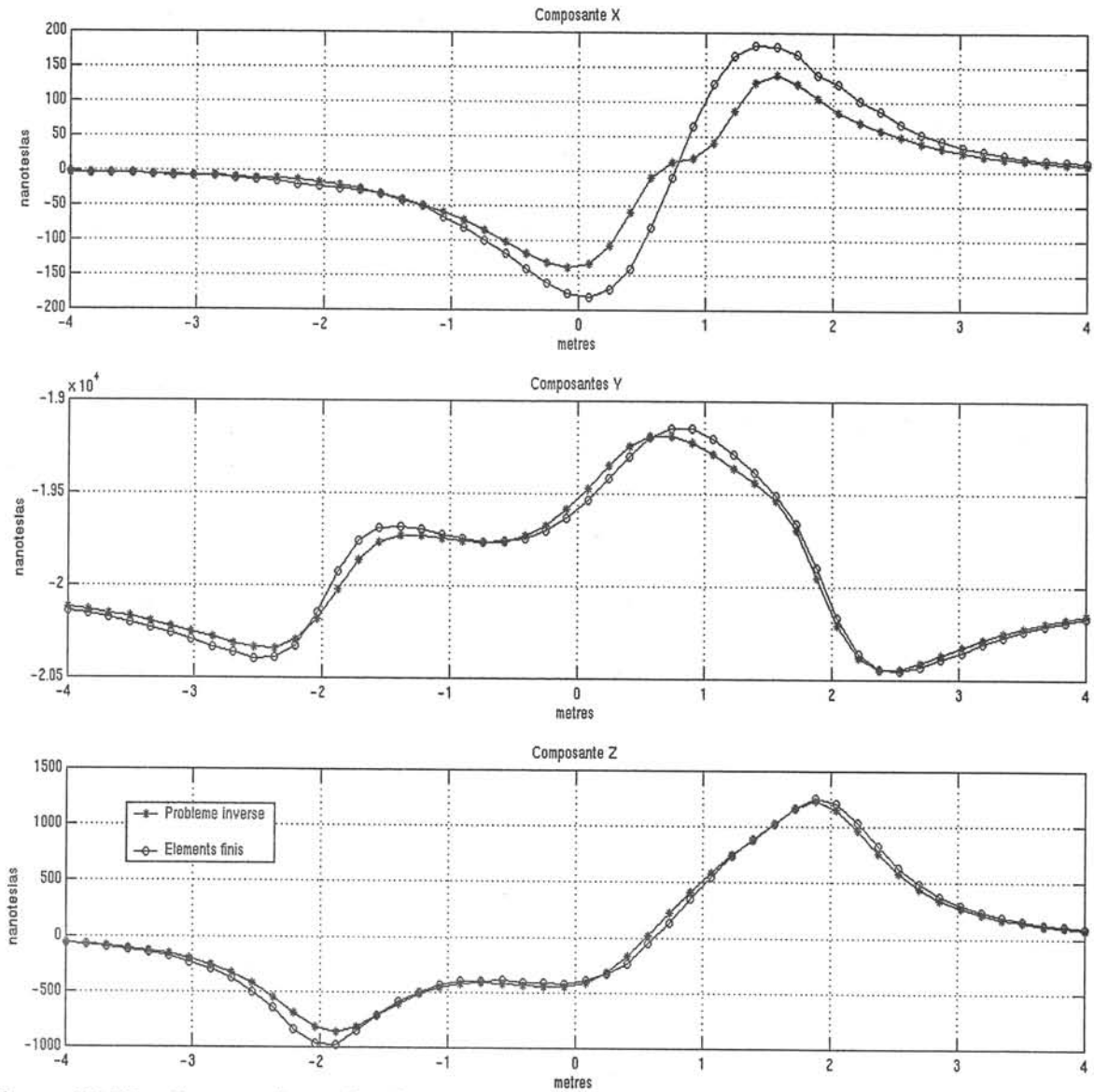


Figure III.22 : Comparaison du champ reconstruit par problème inverse régularisé selon la méthode de Tikhonov à l'ordre 0 et du champ calculé par éléments finis sur une ligne à 50 cm sous le parallépipède

V.2.3 - Conclusion sur la régularisation de Tikhonov

Les résultats sont, pour ce cas de figure, tout à fait probants. Le champ prédit par problème inverse et le champ calculé sont en bonne adéquation. Cette technique de régularisation présente l'avantage d'offrir une méthode de choix du paramètre de régularisation efficace et déterministe. Pourtant, remarquons que ce choix dépend toujours des valeurs des mesured et donc du cap et de l'aimantation du bâtiment. Le paramètre doit donc être optimisé à chaque inversion. Cette optimisation demande beaucoup de calculs, en particulier la résolution de plusieurs systèmes, ce qui pourra être pénalisant pour le temps réel.

Si le choix de la régularisation à l'ordre 0 est pertinent pour les modèles en charges et conduit à de bons résultats, il n'est pas le mieux adapté pour les modèles où les inconnues

sont dipolaires. En effet, minimiser les composantes de l'aimantation n'est toujours pas satisfaisant. Il semble plus naturel de privilégier la continuité de cette grandeur entre des éléments voisins sur la coque. Cette affirmation est encore plus explicite si nous considérons que la charge est la divergence du dipôle. Ainsi une régularisation à l'ordre 0 des charges, correspond à une minimisation de la divergence des dipôles sur la coque, c'est-à-dire à une régularisation qui privilégie leur continuité entre deux éléments voisins. C'est donc une régularisation à l'ordre 1 qui semble nécessaire pour résoudre des problèmes dipolaires.

Nous avons observé ce phénomène en deux dimensions. Alors qu'une régularisation à l'ordre 0 était parfaitement suffisante pour les charges, elle se révélait inadaptée pour les modèles dipolaires. Il nous a donc été nécessaire de régulariser à l'ordre 1, ce qui ne pose pas de problème particulier pour les géométries en deux dimensions, chaque inconnue x_i possédant deux voisins x_{i-1} et x_{i+1} . Cette approche s'est alors révélée parfaitement satisfaisante.

Nous avons donc essayé d'étendre cette approche en trois dimensions, mais la matrice L est très difficile à trouver. En effet, chaque élément possède plusieurs éléments voisins et les bases de projection des dipôles ne sont pas les mêmes. De plus, comment traiter les éléments voisins séparés par une arête de la géométrie de la coque. L'aimantation présente-t-elle les mêmes caractéristiques de régularité à son passage ? Nous nous trouvons donc face à au problème inhérent à l'application des techniques de régularisation de Tikhonov pour des géométries à trois dimensions. Le choix de la matrice L pour un ordre supérieur à 0 est très délicat. Si effectivement de telles matrices peuvent être déterminées (voir Annexe B), celles-ci sont singulières, ce qui rend la technique de la « L-curve » inutilisable. Le choix du paramètre de régularisation devient alors une réelle difficulté. De plus, le champ calculé à l'extérieur de la structure n'est pas réellement satisfaisant. Nous mettons ici en valeur la principale difficulté de notre problème, une géométrie complexe constituée de tôles non coplanaires à laquelle est associé des éléments de forme différente (le maillage surfacique de la maquette du LMN nécessitera l'utilisation d'éléments surfaciques à la fois triangulaires et quadrangulaires).

V.3 - Conclusion sur les méthodes de régularisation

Nous avons mis en avant deux techniques de régularisation : la troncature du spectre de la SVD et les méthodes issues de la théorie de Tikhonov. Notons que des solutions obtenues par les méthodes de résolutions itératives peuvent également être régularisées [BEGOT 00]. Il s'agit d'arrêter la descente par les gradients lorsque la fonction objectif atteint une valeur égale à l'incertitude des bruits de mesure. Cette approche devrait conduire sensiblement aux mêmes résultats que les méthodes présentées dans ce mémoire et nécessite également le choix d'un paramètre.

Nous avons, d'ores et déjà, apporté des réponses au problème qui nous était posé. En effet, nous disposons maintenant d'algorithmes capables de prédire le champ magnétique extérieur à partir de mesures à l'intérieur d'une structure constituée de tôles. Cet algorithme repose sur un modèle en charges, mais cette solution ne nous satisfait pas entièrement.

Tout d'abord, les choix, soit du niveau de troncature, soit du coefficient α , dépendent des valeurs des mesures. Ceci rend nécessaire la détermination d'un paramètre à chaque inversion. Nous avons vu, de plus, que ce choix n'était pas évident et qu'il conditionne en

grande partie la solution. Nous aimerions cependant éviter qu'une part d'empirisme intervienne dans nos algorithmes.

Par ailleurs, les tentatives d'inversion des modèles dipolaires se sont, jusqu'à présent, soldées par des échecs. Or, ceux-ci présentent une image de l'aimantation de la coque. La résolution de tels problèmes offrirait pourtant un intérêt réel pour la connaissance des phénomènes et des possibilités à long terme très intéressantes (ajout de lois de magnétostriction, par exemple).

Dans nos précédents tests numériques, le nombre de capteurs reste très important en comparaison de la relative simplicité de notre géométrie. La réduction du nombre de capteurs est une étape absolument fondamentale. En effet, les coûts et les difficultés d'installation et de gestion augmentent très rapidement en fonction du nombre de capteurs. De plus, il faut avoir conscience que l'espace est limité à l'intérieur d'un bâtiment et que les capteurs ne peuvent être installés n'importe où.

La faisabilité étant acquise, nous allons maintenant décrire une autre approche qui s'efforce de satisfaire au mieux les remarques précédentes.

VI - Vers une nouvelle approche

VI.1 - Remarques sur la réduction du nombre des capteurs

Lorsqu'on désire résoudre un problème inverse, la première attitude est d'effectuer un nombre important de mesures. En effet, on pense naturellement que ces mesures vont nous donner une meilleure connaissance du système à étudier. Cette affirmation est pourtant à tempérer, la nécessité de régulariser venant en partie d'un conflit entre les équations. Dans l'exemple que nous avons étudié, les capteurs sont très près les uns des autres, ce qui traduit l'existence d'équations quasi-semblables dans le système linéaire. Un léger bruit de mesure fait alors diverger la solution. Il semble donc inutile de « mesurer plusieurs fois la même chose », puisque ceci va dégrader les qualités mathématiques du système.

Il semble donc naturel de répartir les capteurs uniformément le long de la coque afin d'assurer une surveillance de toutes ses parties tout en évitant les redondances d'information. Plus nous diminuons leur nombre, plus les capteurs seront éloignés les uns des autres et plus nous diminuerons le nombre d'équations du système « mesures ». Les équations auront donc moins de chances d'être quasi-contradictoires puisque résolument différentes et moins nombreuses. Ceci devrait donc limiter les divergences dues aux bruits de mesures et donc améliorer le conditionnement. Nous allons donc améliorer la stabilité numérique de notre système vis-à-vis des bruits de mesure. Par contre, inutile de préciser que le nombre de capteurs doit rester suffisant pour assurer une surveillance de la globalité de la coque. Le choix de leur nombre est un compromis à trouver entre l'amélioration du conditionnement et la nécessité d'observer toute la coque.

En contrepartie, l'amélioration de cette stabilité ne sera évidemment pas que bénéfique. En diminuant le nombre de capteurs, le système deviendra nettement sous-déterminé. La solution ne sera alors pas unique et l'espace des solutions plausibles augmenté

en conséquence. L'inversion par simple SVD nous donnera alors la pseudo-solution, celle de norme minimale. Par contre, nous n'aurons plus à choisir de coefficient de régularisation.

Pour le modèle en charge, réduire le nombre de capteurs pourra donc se révéler très avantageux. En effet, le conditionnement sera nettement amélioré. Par contre, l'espace des solutions non-observables sera augmenté en conséquence. Pourtant, la solution retournée par la SVD est la pseudo-solution (solution de norme minimum) et cette solution, à condition que la distribution d'aimantation ne subisse pas d'énormes variations, est généralement la plus physique. En fait, la régularisation se fera naturellement par la SVD.

Le modèle dipolaire est largement plus sous-déterminé par rapport aux modèles en charges à un nombre de capteurs fixé (deux fois plus d'inconnues). L'espace des solutions plausibles est donc beaucoup plus important. La SVD retournera également la pseudo-solution. Or, rien n'indique que la solution physique soit la solution dont les composantes de l'aimantation sont minimales. C'est d'ailleurs le problème que nous rencontrons dans les tests numériques précédents. Le système était déjà, en effet, nettement sous-déterminé.

Il nous faut donc ajouter de l'information plus précise afin de réduire l'espace des solutions plausibles. Notre problème est certes mal connu de par sa complexité (hystérésis, magnétostriction...), mais la répartition des sources, c'est-à-dire de l'aimantation, n'a rien d'aléatoire. Celles-ci sont reliées entre elles par des principes physiques que nous pouvons décrire en partie. Nous allons donc rajouter des équations représentatives du comportement propre de la tôle et, une fois ce système obtenu, nous l'ajouterons à notre système « mesures ». Cette approche se veut résolument différente des techniques classiques, elle vise en effet, à augmenter la description du modèle par un comportement physique des sources et non plus par un critère mathématique.

VI.2 - Une équation interne à la tôle

L'approche que nous nous proposons de développer consiste à écrire un système linéaire représentatif du comportement de la tôle. Ce système sera donc indépendant des mesures. Il reliera les sources entre elles et donnera une cohérence physique à leur distribution. A priori, l'écriture de ce système ne semble pas évident mais nous disposons de développements théoriques dans le chapitre II qui nous font dire qu'une grande partie du chemin a déjà été parcouru.

VI.2.1 - Une nouvelle équation pour la tôle

Le deuxième chapitre proposait un aperçu des méthodes de calcul des aimantations induites. Rappelons l'équation comportementale du matériau que nous avons considérée :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{III.26})$$

Cette équation est la conséquence directe des lois de Rayleigh. Elle considère implicitement que le matériau ne possède pas d'aimantation rémanente, mais uniquement une aimantation induite. Nous allons maintenant considérer que notre matériau possède à la fois une aimantation rémanente et une aimantation induite. L'induction dans le matériau est donc la somme de deux termes, d'une part un terme proportionnel au champ magnétique et d'autre part une induction rémanente « dure » \mathbf{B}^{rem} . La loi suivante est classiquement utilisée comme équation comportementale pour les aimants [DURAND 68].

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}^{\text{rem}} \quad (\text{III.27})$$

De plus, si on considère de plus l'équation générale suivante :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{III.28})$$

où \mathbf{M} est l'aimantation totale. Nous obtenons alors par combinaison de (III.27) et (III.28) :

$$\mu \mathbf{H} + \mathbf{B}^{\text{rem}} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{III.29})$$

En considérant que :

$$\mathbf{B}^{\text{rem}} = \mu_0 \mathbf{M}^{\text{rem}} \quad (\text{III.30})$$

Nous obtenons

$$\mu_r \mathbf{H} + \mathbf{M}^{\text{rem}} = \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (\text{III.31})$$

$$(\mu_r - 1)\mathbf{H} = \mathbf{M} - \mathbf{M}^{\text{rem}} \quad (\text{III.32})$$

Rappelons que \mathbf{M} est l'aimantation totale et donc la somme de l'aimantation rémanente et de l'aimantation induite.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\text{rem}} + \mathbf{M}^{\text{ind}} \quad (\text{III.33})$$

Nous obtenons l'équation que nous allons résoudre :

$$\mathbf{M}^{\text{ind}} = (\mu_r - 1)\mathbf{H} \quad (\text{III.32})$$

VI.2.2 - Ecriture d'un nouveau système pour le modèle mixte

a - Système interne

Par un cheminement équivalent au paragraphe V.2.b du chapitre II, c'est-à-dire en considérant que l'aimantation est tangentielle à S et que le champ est créé par toute la tôle et le champ inducteur, nous obtenons une équation intégrale pour la tôle équivalente à l'équation (II.89).

$$\mathbf{M}^{\text{ind}} + \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \text{grad}_S \iint_S (\mathbf{M}(M) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) dS = (\mu_r - 1)\mathbf{H}_{0S} \quad (\text{III.33})$$

Soit en décomposant \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M}^{\text{ind}} + \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \text{grad}_S \iint_S (\mathbf{M}^{\text{ind}}(M) + \mathbf{M}^{\text{rem}}(M)) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = (\mu_r - 1)\mathbf{H}_{0S} \quad (\text{III.34})$$

où \mathbf{H}_{0S} représente la composante du champ inducteur projetée sur la tôle et M un point courant de S

L'équation (III.34) peut être résolue suivant différentes méthodes. Ces méthodes sont explicitées dans la partie V du chapitre II. En particulier, nous allons la résoudre dans le formalisme du modèle mixte, modèle que nous avons développé dans l'optique de résolution du problème inverse. Rappelons que ce modèle est basé sur l'équivalence éléments uniformément aimantés/charges linéiques.

Sans reprendre tous les calculs effectués dans la partie V.2.3 qui sont rigoureusement équivalents à l'exception que \mathbf{M} est égale à la somme de \mathbf{M}^{rem} et de \mathbf{M}^{ind} , nous obtenons l'équation suivante similaire à (II.106).

$$\mathbf{M}_i^{\text{ind}} + \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \left(\sum_j \int_{L_j} (\mathbf{M}_i^{\text{ind}} \cdot \mathbf{n}_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}) dL + \sum_j \int_{L_j} (\mathbf{M}_i^{\text{rem}} \cdot \mathbf{n}_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}) dL \right) = (\mu_r - 1) \mathbf{H}_{0s_i} \quad (\text{III.35})$$

Le champ réduit dans l'air a alors pour expression :

$$\mathbf{H}_{\text{red}} = -\frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \sum_j \int_{L_j} (\mathbf{M}_j^{\text{ind}} + \mathbf{M}_j^{\text{rem}}) \cdot \mathbf{n}_j \frac{\mathbf{r}}{r^3} dL \quad (\text{III.36})$$

En écrivant l'équation (III.35) pour chaque élément nous obtenons un système linéaire, différent de celui obtenu dans le chapitre II. Rappelons que le maillage comporte N éléments surfaciques. L'écriture de l'équation conduit à $2 \times N$ équations. Or chaque aimantation possède deux composantes par élément (deux pour l'aimantation induite et deux pour l'aimantation permanente). Le système comporte donc $4 \times N$ inconnues, nous l'écrivons :

$$[\mathbf{C} + \mathbf{I}_d \quad \mathbf{C}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\text{ind}} \\ \mathbf{x}^{\text{rem}} \end{bmatrix} = \mathbf{d} \quad (\text{III.37})$$

où \mathbf{C} représente les termes en intégrales linéiques, \mathbf{I}_d est la matrice identité qui correspond au terme d'aimantation induite au barycentre de chaque élément et \mathbf{d} dépend de la perméabilité et du champ inducteur \mathbf{H}_0 .

Ce système représente le comportement de la tôle. Il dépend du champ inducteur, de l'épaisseur et de la perméabilité réversible relative. Il est sous-déterminé et possède donc une infinité de solutions.

Nous pouvons, de plus, rajouter une autre information interne à la tôle. Rappelons que la charge est proportionnelle au flux s'échappant dans l'air. Or, il n'y a aucune raison, a priori, qu'une partie de la tôle conserve du flux d'induction. En d'autres termes, tout flux qui rentre est amené à sortir. Ceci nous permet de considérer que la somme des charges sur toute la tôle est nulle. Il est possible de traduire cette information sous forme d'une équation ayant la forme suivante :

$$\sum_j \int_{L_j} (\mathbf{M}_j^{\text{ind}} + \mathbf{M}_j^{\text{rem}}) \cdot \mathbf{n}_j dL = 0 \quad (\text{III.38})$$

Nous pouvons représenter (III.38) par :

$$[S] \begin{bmatrix} X^{ind} \\ X^{per} \end{bmatrix} = 0 \quad (III.39)$$

Cette équation est scalaire et nous la rajoutons au système (III.37). L'association de (III.37) et (III.39) conduit à un système matriciel que nous appellerons par la suite système « interne ».

b - Système « mesures »

Nous allons évidemment choisir le même modèle afin d'identifier les mêmes inconnues. L'équation (III.11) devient donc:

$$B(P) = \mu_0 (H_0(P) + \frac{e}{4\pi} \sum_i^N \int_{L_i} M_i^{ind} \cdot n_i \frac{r_i}{r_i^3} dL_i + \frac{e}{4\pi} \sum_i^N \int_{L_i} M_i^{rem} \cdot n_i \frac{r_i}{r_i^3} dL_i) \quad (III.40)$$

où P est la position du capteur.

En l'appliquant à tous les capteurs, nous obtenons un système linéaire. S'il y a P capteurs, le système possède $3 \times P$ lignes pour $4 \times N$ inconnues. Ce système « mesures » sera noté :

$$[A \ A] \begin{bmatrix} X^{ind} \\ X^{rem} \end{bmatrix} = b \quad (III.41)$$

où A représente les termes en intégrale linéique et b représente le champ mesuré.

Remarque : Il est possible d'adapter ce type de calcul au modèle dipolaire ponctuel. Comme nous avons vu que celui-ci présentait des divergences très importantes près des sources, il ne nous a donc pas semblé judicieux de développer une telle formulation.

VI.2.3 - Ecriture d'un nouveau système pour le modèle en charges ponctuelles

a - Système interne

En appliquant l'opérateur divergence surfacique à l'équation (III.32), nous obtenons une nouvelle écriture intégrale pour la tôle, inspirée de (II.85) :

$$\rho^{ind} - \frac{e(\mu_r - 1)}{4\pi} \operatorname{div}_s \iint_S (\rho^{ind}(M) + \rho^{per}(M)) \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3} dS = e(\mu_r - 1) \operatorname{div}_s H_0 \quad (III.42)$$

Cette équation, par un calcul équivalent à celui de la partie V.2.2.c, nous conduit au système suivant :

$$\frac{Q_i^{ind}}{e(\mu_r - 1)} + \sum_j^M Q_j^{ind} \int_{L_j} \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3} n_j dL + \sum_j^M Q_j^{per} \int_{L_j} \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3} n_j dL = - \int_{L_j} H_{0s} \cdot n_j dL \quad (III.43)$$

Ce système est lui aussi sous dimensionné, si M est le nombre de nœuds, il possède M équations pour $2 \times M$ inconnues.

Nous pouvons également imposer que la somme des charges soit nulle par l'équation :

$$\sum_j^M (Q_j^{\text{per}} + Q_j^{\text{ind}}) = 0 \quad (\text{III.44})$$

La réunion de (III.43) et (III.44) formera le système interne pour les charges ponctuelles.

b - Système « mesures »

L'équation reliant les charges aux mesures réalisées sur les capteurs devient :

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \mu_0 (\mathbf{H}_0(\mathbf{P}) + \frac{1}{4\pi} \sum_j^M Q_j^{\text{per}} \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + \frac{1}{4\pi} \sum_j^M Q_j^{\text{ind}} \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}) \quad (\text{III.45})$$

Ce système comporte $3 \times P$ équations pour $2 \times M$ inconnues et possède la même forme que le système (III.41).

VI.3 - Résolution du système global

Nous avons ainsi deux systèmes à résoudre simultanément, d'une part le système « mesures » et d'autre part le système « interne » à la tôle. Il faut bien souligner que même si le nombre d'inconnues est plus important que dans les modèles précédents (deux fois plus), nous disposons maintenant d'une information beaucoup plus riche. Il s'agit d'un système qui va imposer un comportement des sources entre elles, cohérent avec la physique. Ce système prend en compte des informations telles que l'épaisseur, la perméabilité réversible et surtout le champ inducteur qui vont influencer la solution. Les approches antérieures ne se contentaient que d'une approche « mesure ».

VI.3.1 - Remarques sur les aimantations induites

Nous avons considéré dans cette formulation que les composantes des aimantations induites étaient inconnues. Ceci n'est pas en contradiction avec les chapitres précédents où nous avons affirmé que celles-ci ne dépendaient que de la perméabilité relative et du champ inducteur. En réalité, il existe maintenant une autre source de champ inducteur, l'aimantation rémanente. Celle-ci étant inconnue, l'aimantation induite l'est également.

Supposons que nous ne résolvions que le système interne (III.37) en l'absence de mesures. Ce système possède une infinité de solutions. Si nous le résolvons par la méthode de décomposition en valeurs singulières, la solution retournée sera celle de norme minimum, parmi toutes celles plausibles. Supposons que les composantes des aimantations permanentes soient toutes nulles et que les aimantations induites soient celles créées par le champ inducteur \mathbf{H}_0 . Cette répartition d'aimantation est solution du système (III.37). De plus, sa norme, par rapport à toutes les solutions plausibles, est minimum. En effet, d'une part la moitié de ces composantes sont nulles (les composantes de l'aimantation rémanente). D'autre part, si on considère une répartition d'aimantation rémanente non nulle, celle-ci tendrait à augmenter les composantes de l'aimantation induite. Notre approche dévoile donc, à ce stade, l'un de ces principaux avantages. En l'absence de mesure, la résolution unique du système

(III.37) conduit à la solution la plus probable : Une aimantation induite dépendant uniquement du champ inducteur H_0 et une aimantation rémanente nulle, c'est-à-dire la solution la plus physiquement plausible.

VI.3.2 - La résolution du système global

Il est possible d'écrire le système dans sa globalité en associant simplement toutes les équations des différents sous-systèmes pour les deux modèles. Le système global a alors la forme :

$$\begin{bmatrix} C + Id & C \\ A & A \\ s & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{ind} \\ x^{per} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (III.46)$$

S'il présente un conditionnement satisfaisant, nous pourrions l'inverser alors par une simple SVD, sans régularisation ou troncature.

Remarque : L'information contenue dans l'équation (III.38) est déjà présente implicitement dans les systèmes (III.37) et (III.41). Le fait d'imposer que la somme des charges est nulle pour l'inversion en aimantation est donc redondant. En particulier, le conditionnement du système final s'en trouve dégradé. Pourtant, l'ajout de cette équation conduit à des résultats plus satisfaisants pour le cas réel (cf. chapitre IV). En effet, la somme des charges nulle n'est pas rigoureusement vérifiée par la résolution des systèmes « interne » et « mesures » seuls, ceci pour un simple problème numérique dû à la soustraction de grands nombres.

VI.4 - Exemple numérique

VI.4.1 - Un cas test modifié

Nous considérons toujours le même parallélépipède auquel nous avons imposé une aimantation rémanente locale identique à l'exemple précédent. La simulation éléments finis reste inchangée. Par contre, le nombre de capteurs est fixé à 28 (fig.III.23). Remarquons que nous avons privilégié les positions des capteurs près de la tôle. En effet, les capteurs au centre ne sont pas très riches en informations puisque loin des sources.

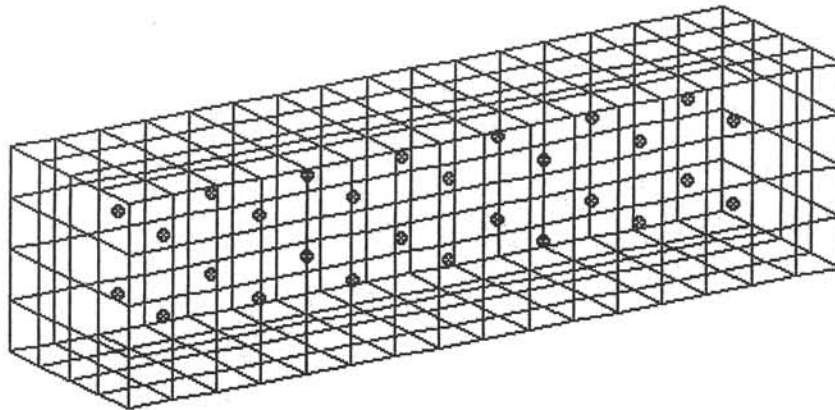


Figure III.23 : Positionnement des 28 capteurs

VI.4.2 - Résolution du problème mixte

a - Résolution sans mesure interne

Notre première approche est de considérer le problème sans mesure interne. Nous résolvons donc uniquement le système (III.37). Celui-ci présente le conditionnement suivant :

$$\xi = 1.675$$

Ce conditionnement est très bon. Nous avons donc enrichi notre système de 576 équations linéaires parfaitement indépendantes (il y a 288 éléments surfaciques). Cet ajout d'information va considérablement réduire l'espace des solutions plausibles.

La résolution du système (III.37) seul est réalisée par une simple SVD, sans précaution particulière. La répartition d'aimantation obtenue apparaît sur la figure III.24 :

Comme prévu, nous obtenons une répartition d'aimantation rémanente quasiment nulle. Seule l'aimantation induite est significative. L'aimantation totale se résume donc à l'aimantation induite. Ce résultat est conforme à ce que nous affirmions. En l'absence de mesure, la solution retournée est l'aimantation induite créée par le champ H_0 . Remarquons que cette aimantation est effectivement majoritairement alignée avec le champ inducteur.

b - Résolution des deux systèmes

Nous allons maintenant résoudre les deux systèmes globalement suivant l'équation (III.46), l'équation imposant la somme des charges nulle n'étant pas utilisée. Le conditionnement du système total est de :

$$\xi = 6,405$$

Ce conditionnement est très bon, le système est donc inversé par simple SVD et nous obtenons pour la première fois une solution qui semble acceptable pour le modèle dipolaire (fig.III.25).

Il est alors possible de calculer le champ sur la ligne extérieure (III.26). Ce champ est en très bonne adéquation avec le champ calculé par éléments finis.

Nous avons donc pour la première fois réussi à inverser le modèle en aimantation dans de bonnes conditions. Les équations internes que nous avons rajoutées ont bien joué leur rôle en contraignant suffisamment le système pour conduire à une solution acceptable. Il faut pourtant noter que c'est toujours une pseudo-solution qui est ici présentée, mais l'espace des solutions non observables est maintenant suffisamment petit pour que cette pseudo-solution soit réaliste. C'est donc par l'ajout d'information physique que nous avons réussi à contraindre la solution.

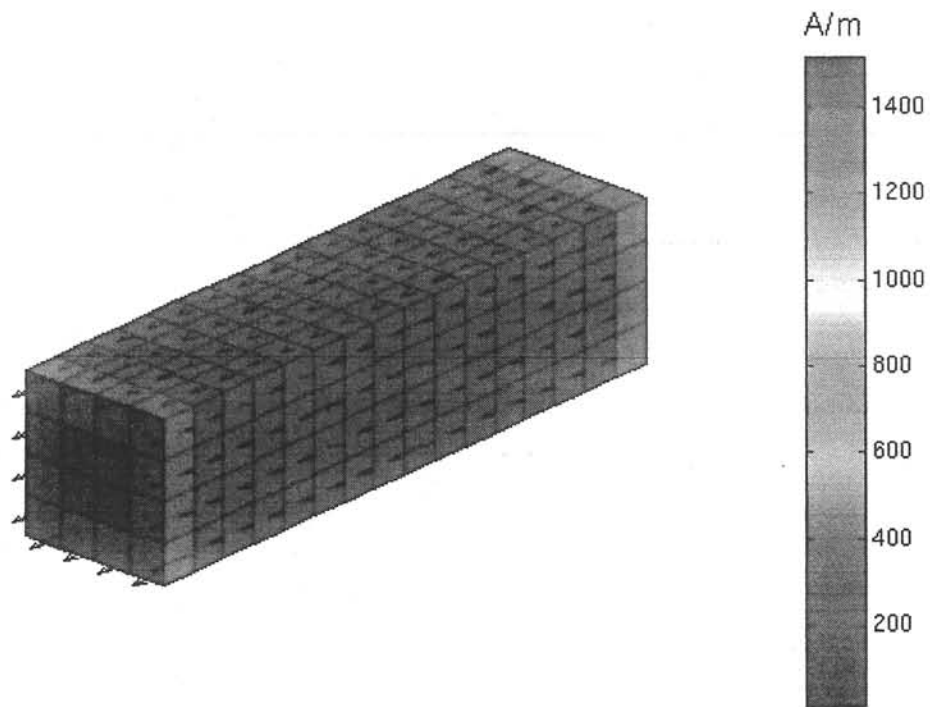


Figure III.24 : Répartition d'aimantation (A/m) obtenue par résolution du système interne seul

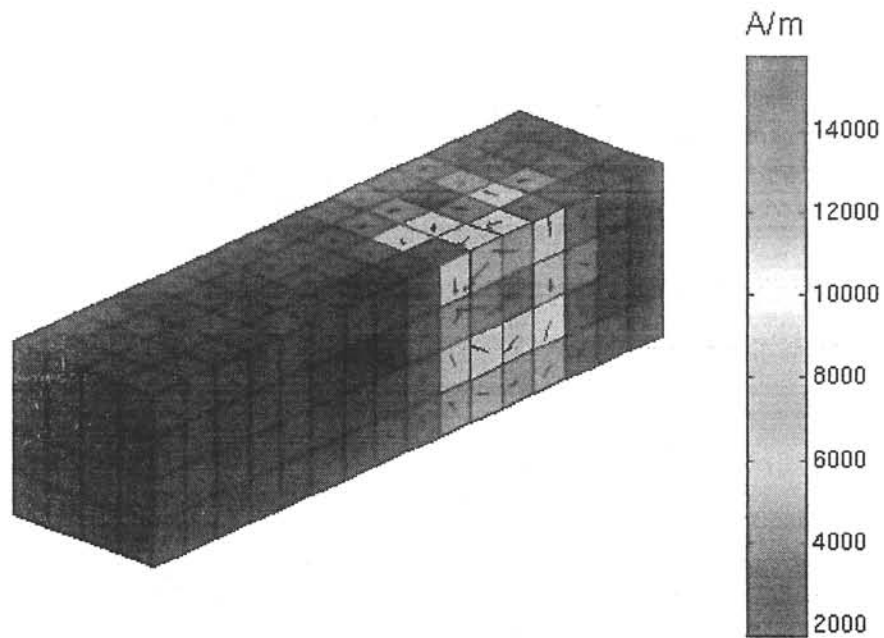


Figure III.25 : Aimantation totale (A/m) obtenue par inversion avec la système interne (28 capteurs)

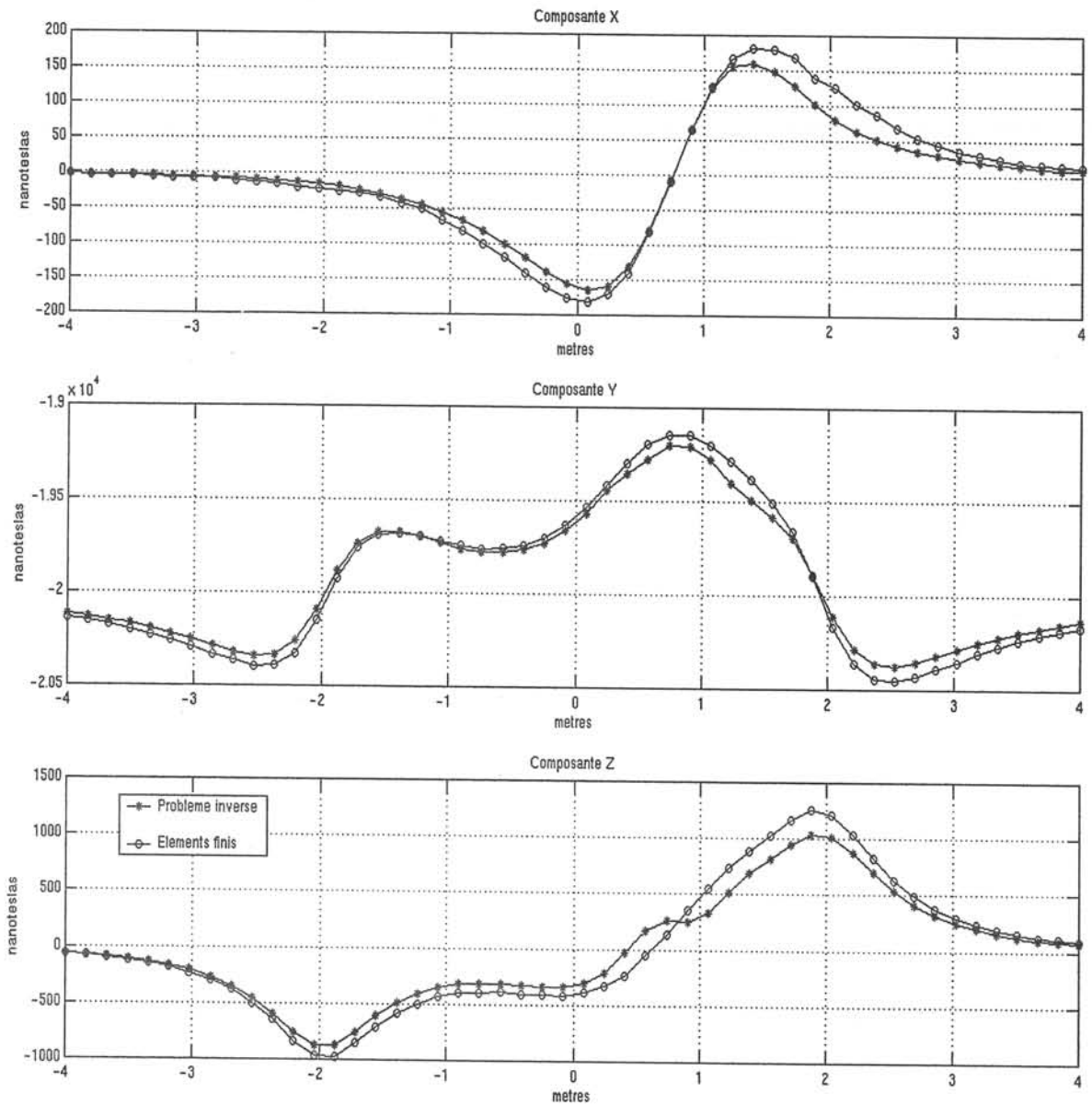


Figure III.26 : Comparaison du champ reconstruit par résolution du problème inverse par la nouvelle méthode et du champ calculé par éléments finis sur une ligne à 50 cm sous le parallélépipède

VI.4.3 - Résolution du système en charges ponctuelles

a - Résolution sans mesure interne

Nous ne considérons que le système interne seul pour le modèle en charges ponctuelles. Son conditionnement est :

$$\xi = 1,795$$

Ici encore, l'information rajoutée est bien conditionnée et les équations associées sont parfaitement indépendantes. La résolution de ce seul système nous conduit à une distribution de charges ponctuelles représentative de l'aimantation induite (fig.III.27).

b - Résolution des deux systèmes

Nous allons maintenant résoudre les deux systèmes globalement suivant l'équation (III.46). Le conditionnement du système est de :

$$\xi = 23,752$$

Ce conditionnement est légèrement moins bon que le modèle mixte précédent. Nous avons déjà observé que les modèles en charges étaient moins bien conditionnés que leurs homologues dipolaires. Le système est également inversé par simple SVD. Nous obtenons une répartition de charges ponctuelles conforme au résultat attendu (fig.III.28)

Cette distribution nous conduit au champ sur la ligne extérieure (fig.III.29).

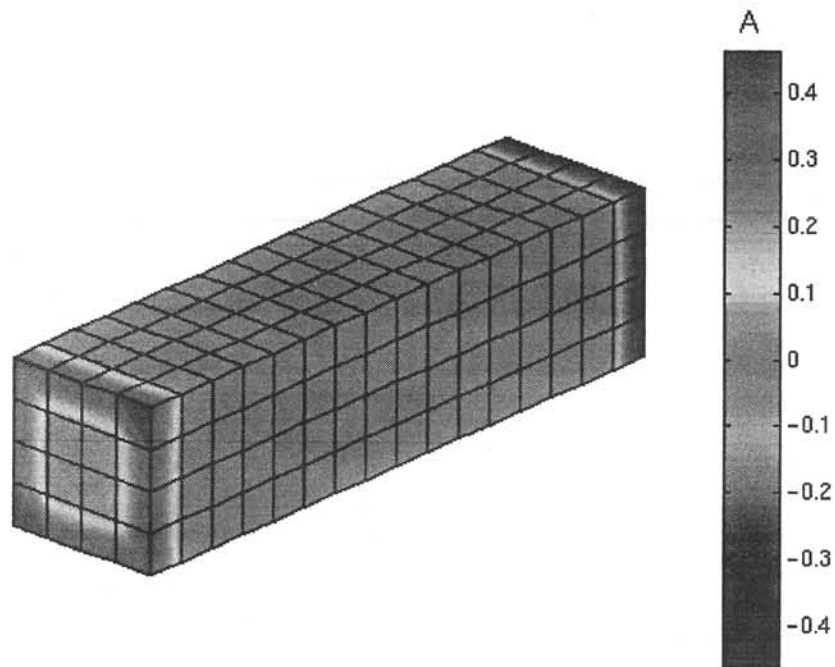


Figure III.27 : Répartition de charges ponctuelles obtenue par résolution du système interne seul (l'interpolation est graphique)

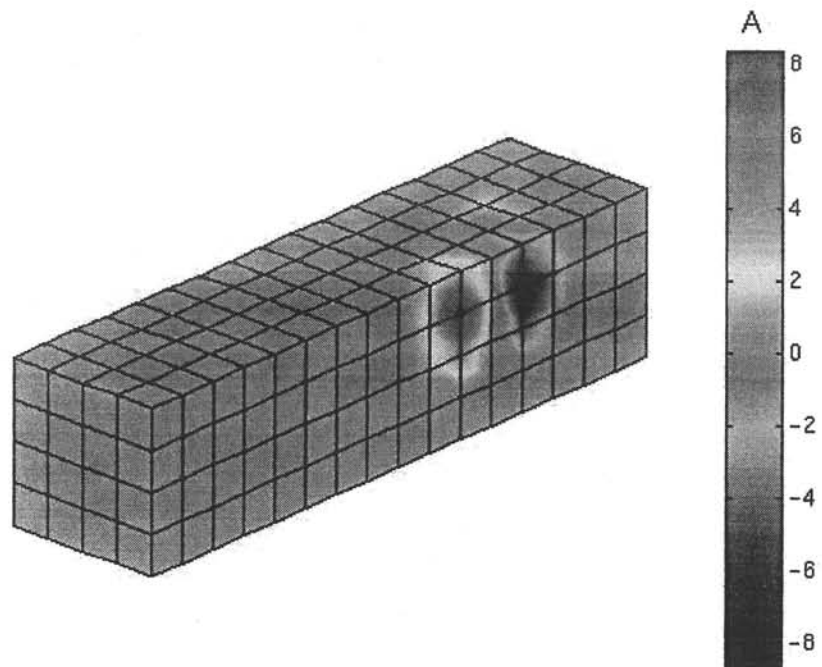


Figure III.28 : Distribution de charges ponctuelles obtenue par inversion avec le système interne (28 capteurs)

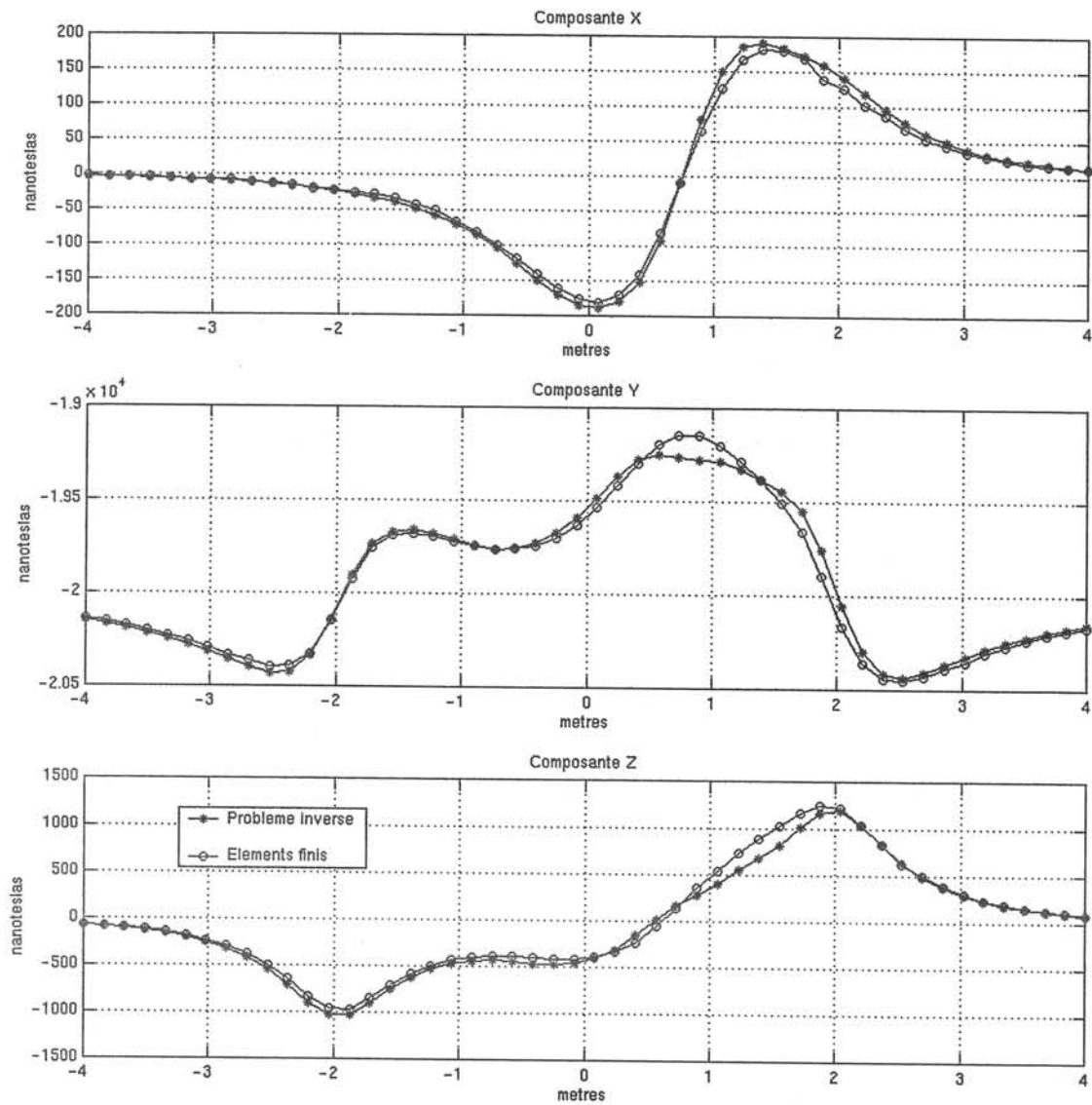


Figure III.29 : Comparaison du champ reconstruit par résolution du problème inverse par la nouvelle méthode (28 capteurs) et du champ calculé par éléments fins sur une ligne à 50 cm sous le parallélépipède

VI.4.4 - Conclusion sur la nouvelle approche de résolution

Le champ évalué par notre nouvelle approche du problème inverse et le champ calculé par éléments finis sont en très bonne adéquation alors que le nombre de capteurs est peu important en comparaison avec le nombre d'inconnues.

Cette approche originale nous a donc permis de résoudre le problème en terme d'aimantation. C'est une véritable avancée car jusqu'à présent les méthodes classiques avaient échoué à cette tâche. Nous pouvons maintenant évaluer l'aimantation réelle de la coque, qui est la grandeur physique que nous cherchions à identifier. La résolution du problème inverse directement en terme d'aimantation pourra nous permettre par la suite d'intégrer de nouveaux modèles encore plus déterministes, tels que des lois de magnétostriction, par exemple. Cette résolution offre ainsi de nombreuses perspectives pour la suite du projet.

Ces deux inversions n'ont nécessité aucun paramètre de régularisation ce qui constitue également une avancée importante. A ce sujet, l'augmentation du nombre des capteurs n'est donc pas forcément une solution judicieuse pour notre problème. Il faut privilégier une bonne connaissance physique du système à identifier. Un nombre de mesures trop important nécessite l'utilisation de méthodes de régularisation et implique le choix de coefficients, ce qui est toujours délicat.

A ce sujet, considérons l'exemple du parallélépipède avec 90 capteurs. L'utilisation du modèle mixte conduit à un système mesure mal conditionné. L'association avec le système interne va nous donner un système global tout aussi mal conditionné. Il est alors nécessaire de régulariser. Pourtant, le système, qui est contraint par une information physique imposant un comportement cohérent des différentes aimantation entre elles, va pouvoir être résolu par une simple régularisation à l'ordre 0. Les résultats sont alors parfaitement satisfaisants. Le choix délicat d'une matrice de régularisation à l'ordre 1 n'est alors plus à effectuer et la technique de la L-curve est parfaitement utilisable. C'est, ici encore, le système interne qui contraint suffisamment le système et la pseudo-solution devient alors une solution physique pour le modèle en aimantation.

Si l'avancée est significative pour l'inversion du modèle en aimantation, il convient de la nuancer pour le modèle en charges ponctuelles. En effet, le système étant sous-déterminé, la SVD conduit à la solution de norme minimum. Or, cette solution est généralement physiquement acceptable pour les charges. Nous avons tenté des inversions par SVD portant uniquement sur le système mesure sans le contraindre par le système « interne ». La formulation choisie était le modèle en charges surfaciques. Or, les résultats étaient tout à fait satisfaisants et l'approche d'une grande simplicité, en effet, aucune régularisation n'était utilisée. Ce test ne remet pas en cause notre approche. En effet, le cas étudié est simple par rapport à un problème réel, où l'aimantation peut subir de brusques variations (point de soudure, de pliage...). Il pourra exister des cas où cette solution de norme minimum ne sera pas la solution physique, même pour un modèle en charges. Contraindre le système par de l'information physique ne pourra être alors que bénéfique.

VII - Conclusions

Nous arrivons à la fin de cette partie consacrée à la résolution du problème inverse. Cette étude a été riche d'enseignements pour nous.

Nous disposons maintenant d'algorithmes capables pour un cas numérique simple et à partir de mesures de champ magnétique effectuées à l'intérieur d'une structure en tôle, de calculer le champ à l'extérieur. Les inversions ont été réalisées sans aucun paramètre empirique. La cohérence de la solution est assurée par l'ajout d'information physique, ce qui est novateur pour ce type d'application. Elle demande un placement de capteurs judicieux, basé pour le moment sur l'expérience.

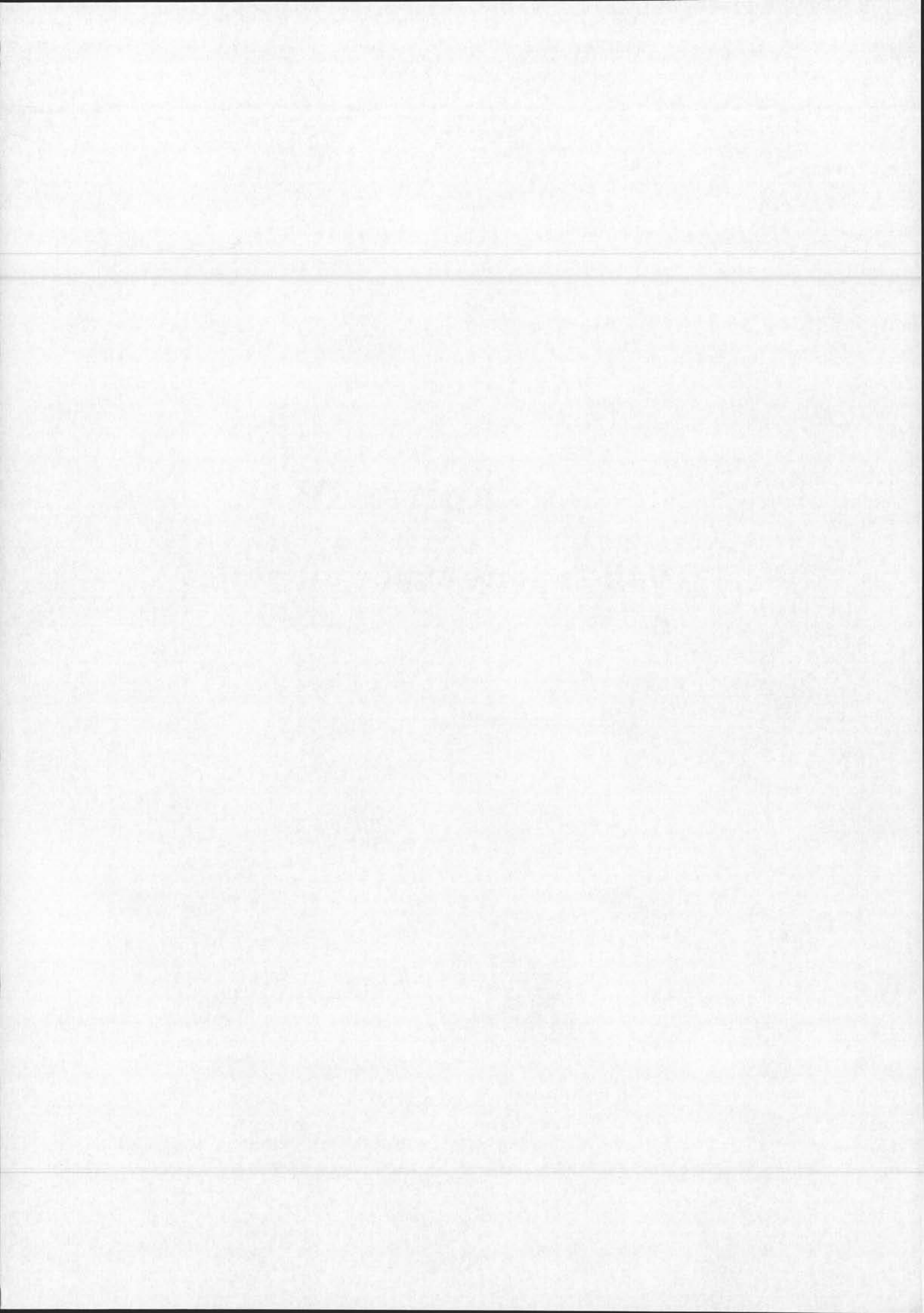
Ce choix du nombre de capteurs et de leur position reste un compromis. Pour être certain que toute la coque soit observable, les capteurs doivent donc être régulièrement répartis le long de celle-ci. Pendant nos travaux, la question du nombre et de la position optimum a évidemment été soulevée. Cette question n'a pas réellement trouvé de réponse à l'heure actuelle. Nous avons été tentés d'utiliser des algorithmes d'optimisation. Le problème d'utilisation de tout algorithme d'optimisation est le choix de la fonction objectif. Celui qui semble s'imposer est la norme de la différence entre champ calculé par éléments finis sur la ligne extérieure et champ prédit par problème inverse. Il est évidemment impossible de trouver une expression analytique de cette fonction, ce qui nous oriente vers des méthodes stochastiques. Le calcul de la fonctionnelle est alors relativement long et des méthodes telles que les algorithmes génétiques nécessitent un nombre d'appels très important de cette fonction. Une telle approche nous paraissait donc irréalisable à la vue des capacités de calcul dont nous disposions. Nous avons cependant effectué des tests avec un nombre de capteurs fixé sur des géométries en deux dimensions et en considérant comme fonction objectif le conditionnement. Ces tests ont évidemment conforté l'idée que nous avons déjà émise : plus les capteurs sont éloignés les uns des autres, meilleur le conditionnement est. Les algorithmes génétiques tendaient donc à éloigner les capteurs les uns des autres, résultat qui ne présente pas réellement d'intérêt à la vue de la complexité de la méthode employée.

Une partie importante de ce chapitre traite des méthodes de régularisation. Nous n'avons fait qu'effleurer la grande complexité de ces méthodes de résolution. Nous avons voulu rester pragmatique, afin qu'une personne, peu familière à ces problèmes, trouve rapidement des points de repère. Les deux approches que nous avons développées sont parmi les plus simples que l'on trouve dans la littérature, il en existe une multitude d'autres. Citons, en particulier, une approche statistique très puissante développée par [TARANTOLA 87] et utilisée par [LEGRIS 96] pour l'application magnétostatique. Cette méthode peut, par exemple, permettre de statuer sur la défaillance d'un capteur, si celui-ci retourne une mesure de champ en contradiction avec le modèle et les autres mesures. Remarquons qu'elle peut être parfaitement applicable à notre cas lors de la résolution du système global, ce sera d'ailleurs certainement le cas pour la mise au point du système final.

Le choix d'un cas test pour un problème inverse est toujours délicat. En effet, la façon de résoudre un problème inverse dépend souvent de l'idée que l'on a de la solution. Le problème est donc biaisé puisque la solution est d'abord créée avant l'inversion. Notre exemple n'est évidemment pas parfait, puisque trop simple par rapport à la réalité. Nous allons donc maintenant nous attacher à la validation expérimentale de nos algorithmes.

Chapitre IV

Validations expérimentales



Chapitre IV

VALIDATIONS EXPERIMENTALES

I - Introduction

Nous nous sommes contentés dans le chapitre III de tester nos algorithmes d'inversion avec l'aide de modèles numériques. Le cas test choisi était relativement simple et les mesures de champ magnétique étaient simulées par l'intermédiaire du logiciel élément finis Flux3D. Etant confiant quant aux résultats donnés par celui-ci, nous avons pu valider, en partie, notre approche pour l'inversion. L'exemple choisi n'en demeure pas moins critiquable. En effet, l'aimantation rémanente imposée était très localisée et ne pouvait en aucun cas être considérée comme représentative d'une aimantation réelle. En fait, il nous a été difficile de choisir un modèle représentatif d'une aimantation à identifier. D'une part, nous n'avons, en réalité, que peu d'idée sur ce qu'elle pourrait être effectivement pour un cas réel. D'autre part, même si nous avons eu cette idée, il aurait été très délicat de générer un jeu de mesures par l'intermédiaire d'un modèle numérique. Il est donc, pour nos travaux, absolument essentiel de procéder à une validation expérimentale.

Dans ce chapitre, nous présenterons brièvement les moyens expérimentaux dont nous avons disposés, c'est-à-dire, plus particulièrement, le simulateur de champ magnétique du LMCF et la maquette de navire spécialement réalisée pour le projet.

Nous nous attacherons ensuite à la validation expérimentale des algorithmes de calcul des aimantations induites, c'est-à-dire des développements théoriques du chapitre II.

Enfin, nous validerons les résultats obtenus dans le chapitre III, c'est-à-dire l'inversion à partir de mesures internes.

II - Présentation des moyens expérimentaux

II.1 - Les moyens de mesure du LMMCF

Le LMMCF (Laboratoire de Métrologie de Mesure en Champ Faible) est situé à Herbeys, loin des perturbations électromagnétiques de Grenoble. Le Laboratoire de Magnétisme du Navire y effectue ses études expérimentales sur les phénomènes d'aimantation en champ faible. Cette installation comporte une chaîne de mesure permettant de relever le champ magnétique créé par des objets quelconques.

La mesure des champs magnétiques faibles est une activité nécessitant rigueur et précision. Les mesures doivent être effectuées en environnement contrôlé. C'est pourquoi le LMMCF dispose d'un simulateur de champ magnétique permettant d'annuler ou d'obtenir toutes les valeurs du champ magnétique terrestre. Sa taille (26 m de long et 8 m de diamètre) ainsi que son homogénéité (5.10^{-4} à l'intérieur d'un volume de 15 m de long sur 4 m² de section) en font un instrument unique en Europe.

Le simulateur est entièrement construit en matériaux amagnétiques et dispose d'un chemin de roulement sur lequel se déplace un chariot capable de supporter des structures allant jusqu'à une tonne.

A ce simulateur, est associé un ensemble de capteurs de champ magnétique. Il s'agit principalement de magnétomètres vectoriels Fluxgate de très bonne sensibilité.

II.2 - La maquette du LMN

II.2.1 - Présentation

Avant l'avènement de la simulation numérique, les aimantations des navires, ou tout du moins leurs effets, étaient mesurés sur des maquettes réduites. Une maquette doit évidemment être représentative du bâtiment réel. En particulier, le facteur d'échelle doit être respecté pour l'épaisseur. Or, il est très difficile d'obtenir des tôles d'acier de très faibles épaisseurs (moins de 1 mm). Les maquettes en tôles pleines doivent donc être de dimensions conséquentes. Ceci est un réel inconvénient puisque leur mesure nécessite de disposer d'un simulateur de champ magnétique d'un volume important. A l'époque des premières études, le laboratoire ne disposait pas d'un tel simulateur. Les échelles adoptées ont donc conduit à la construction de maquette « treillis », méthode mise au point par Louis Néel alors directeur du LMN. Ce type de construction remplace chaque surface élémentaire par des fils de section magnétiquement équivalente, selon les deux axes principaux du plan de la tôle. Pourtant, si ces maquettes étaient représentatives des signatures de bâtiments réels, elles étaient moins utilisables pour l'évaluation des effets de circuit [LEDORZE 97].

La construction relativement récente du LMMCF a permis au laboratoire d'envisager la mesure d'objets plus volumineux. C'est pourquoi la décision de construire une maquette en tôle pleine a été prise. Cette maquette possède une longueur de 4,40 m, une hauteur de 65 cm, une largeur de 60 cm et une épaisseur de 1,4 mm. Nous avons estimé que sa géométrie

présentait une imprécision inférieure à 1%. On peut la considérer comme une représentation simplifiée au 1/30^{ème} d'un bâtiment réel.

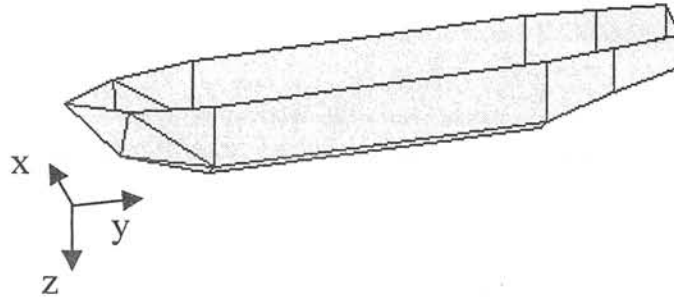


Figure IV.1 : Représentation de la maquette et repère associé aux résultats

La figure précédente montre la maquette et le repère qui lui est associé. Tous les résultats de ce chapitre seront présentés dans ce même repère.

Elle a été construite par pliage et soudage de tôles en acier écroui 355FP, matériau couramment utilisé par la marine pour la construction navale. Ce matériau possède les caractéristiques suivantes :

- Perméabilité réversible relative : 96
- Perméabilité anhystérétique relative : 2700
- Champ coercitif : 736 A/m

Il suit les lois d'aimantation en champs faibles. En particulier, la théorie de Rayleigh lui est applicable (cf. chapitre I, partie II.1.1.b).

II.2.2 - Intérêts

Considérons un élément infinitésimal d'une coque de bâtiment réel. Cet élément crée une induction en un point de l'air proportionnelle à l'aimantation, au volume de l'élément et à l'inverse du cube de la distance entre l'élément et le point de mesure.

$$B_{\text{réel}} \propto \frac{M}{r^3} V \quad (\text{IV.1})$$

Soit K , le coefficient de réduction de la maquette ($K = 30$ pour notre cas). Le volume de l'élément de la maquette est donc divisé par K^3 . Si nous mesurons un champ à la distance r/K , c'est-à-dire en respectant le coefficient de réduction pour le placement des capteurs, nous obtenons, si l'aimantation est la même :

$$B_{\text{maquette}} \propto \frac{M}{(r/K)^3} (V/K^3) = B_{\text{réel}} \quad (\text{IV.2})$$

Les niveaux des champs mesurés sur la maquette et sur un bâtiment sont donc identiques, à condition que l'aimantation de la tôle soit la même.

Considérons maintenant, par exemple, l'équation (II.108). Nous remarquons, par des considérations équivalentes, que l'aimantation induite de la maquette et celle d'un bâtiment réel sont les mêmes pour un champ inducteur et un matériau donné. Il en sera de même pour l'aimantation permanente qui dépend de l'aimantation induite et de contraintes diverses à un instant donné.

Ses remarques nous amènent à dire que si l'on respecte le coefficient de réduction pour le placement des capteurs sur la maquette, les niveaux des champs mesurés seront les mêmes que sur un bâtiment réel. Expérimentalement, on peut donc s'attendre à obtenir le même rapport signal sur bruit pour nos capteurs. Notre maquette est donc magnétiquement représentative d'un bâtiment réel.

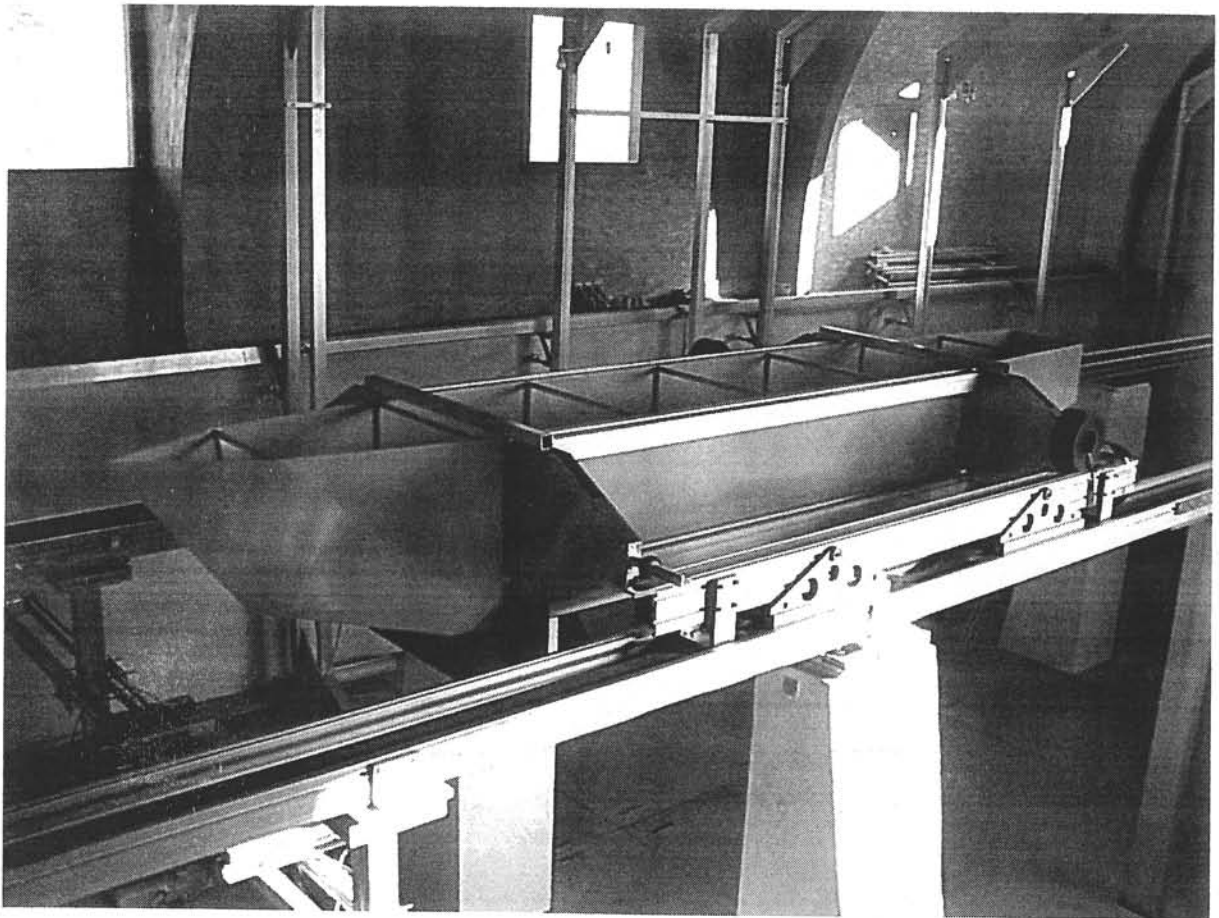


Figure IV.2 : La maquette sur le chemin de roulement du simulateur de champ du LMMCF

III - Validation expérimentale du calcul des aimantations induites

Cette partie s'attache à la validation de nos algorithmes de calcul des aimantations induites (cf. chapitre II).

III.1 - Protocole expérimental

Les mesures sont réalisées sur un plan de référence extérieur situé à 30cm sous la maquette. Les capteurs du plan de référence seront fixes et c'est la maquette qui sera mobile. En effet, il est plus précis de garder des capteurs vectoriels fixes lors de la mesure. Ces capteurs sont des fluxgates, au nombre de sept et disposés tous les 15 cm (fig.IV.3). Le plan de référence possède une largeur de 90 cm pour une longueur totale de 10 m. Nous ne présenterons ici que les mesures effectuées sur le capteur central situé dans le plan de symétrie de la maquette.

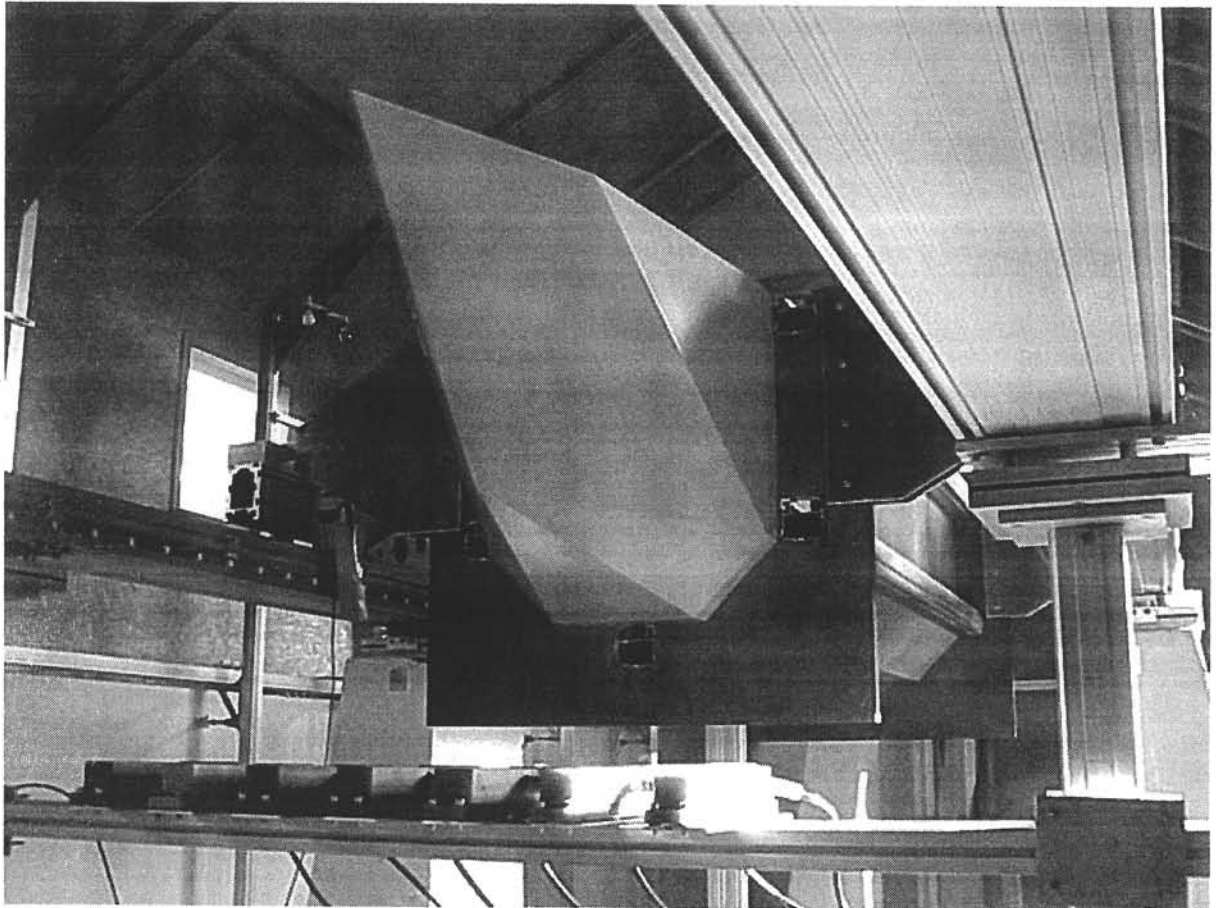


Figure IV.3 : La maquette et les capteurs du plan de référence

Les mesures sont réalisées en deux étapes. Avec l'aide du simulateur, la maquette est placée dans un champ magnétique égal au champ terrestre auquel on superpose un champ longitudinal de 10000 nT (dans la direction $-y$). La maquette effectue un passage sur le chemin de roulement et une acquisition est effectuée sur les sept capteurs tous les 10 cm. Le même processus est ensuite réalisé pour un champ égal au champ terrestre auquel on superpose un champ de 10000 nT dans la direction opposée. Il suffit ensuite de soustraire les deux mesures pour obtenir les effets d'un champ inducteur longitudinal de 20000 nT, sur le plan de référence, les influences des aimantations permanentes s'annulant. Cette technique est applicable pour des directions de champ inducteur également transverses et verticales.

III.2 - Modélisation

Nous allons comparer les mesures aux champs calculés par nos trois modèles numériques (dipôles ponctuels, charges ponctuelles et modèle mixte). La perméabilité retenue est évidemment la perméabilité réversible. Le champ inducteur est fixé à :

$$B_{0y} = -20000 \text{ nT}$$

La maquette est maillée en 271 éléments surfaciques à la fois triangulaires et quadrangulaires. L'épaisseur de la tôle est de 1,4 mm.

Les résultats sont présentés dans l'ordre suivant :

- Résolution en charges ponctuelles : fig. IV.4 et fig. IV.5.
- Résolution en dipôles ponctuels : fig. IV.6 et fig. IV.7.
- Résolution en aimantation (modèle mixte) : fig. IV.8 et fig. IV.9.

Ils sont tous comparés à la mesure réalisée sur le capteur situé sous quille, dans le plan de symétrie de la maquette.

Les mesures et les calculs présentent une très bonne adéquation pour les trois modèles, ce qui permet de valider effectivement nos trois approches pour le calcul des signatures induites de bâtiments sur un plan de référence extérieur. Remarquons que ces algorithmes permettent également le calcul des signatures permanentes d'équilibre. Il suffit simplement de remplacer la perméabilité relative réversible par la perméabilité relative anhystérique.

Le plan de référence est relativement loin de la maquette (30 cm). Cet éloignement est suffisant pour ne pas observer les divergences de nos modèles, en particulier celles du modèle dipolaire ponctuel. Notons que pour des distances inférieures, le champ calculé par celui-ci diverge de façon conséquente (à partir de 25cm).

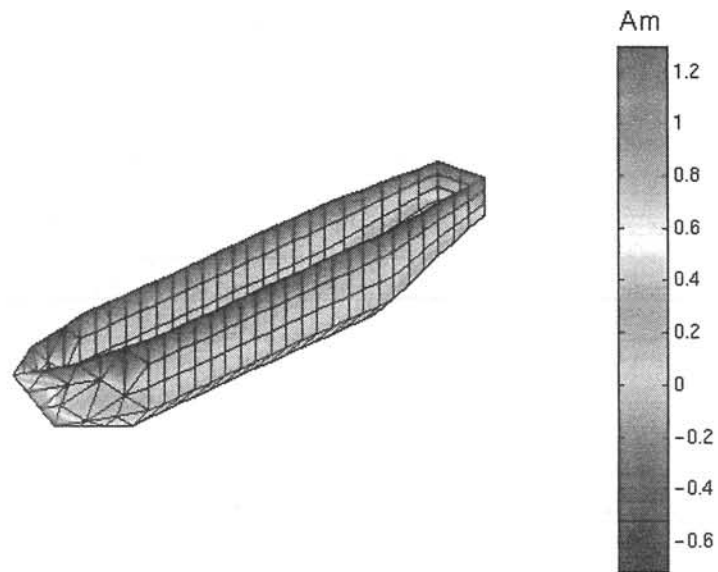


Figure IV.4 : Distribution de charges ponctuelles pour un champ inducteur longitudinal de 20000 nT

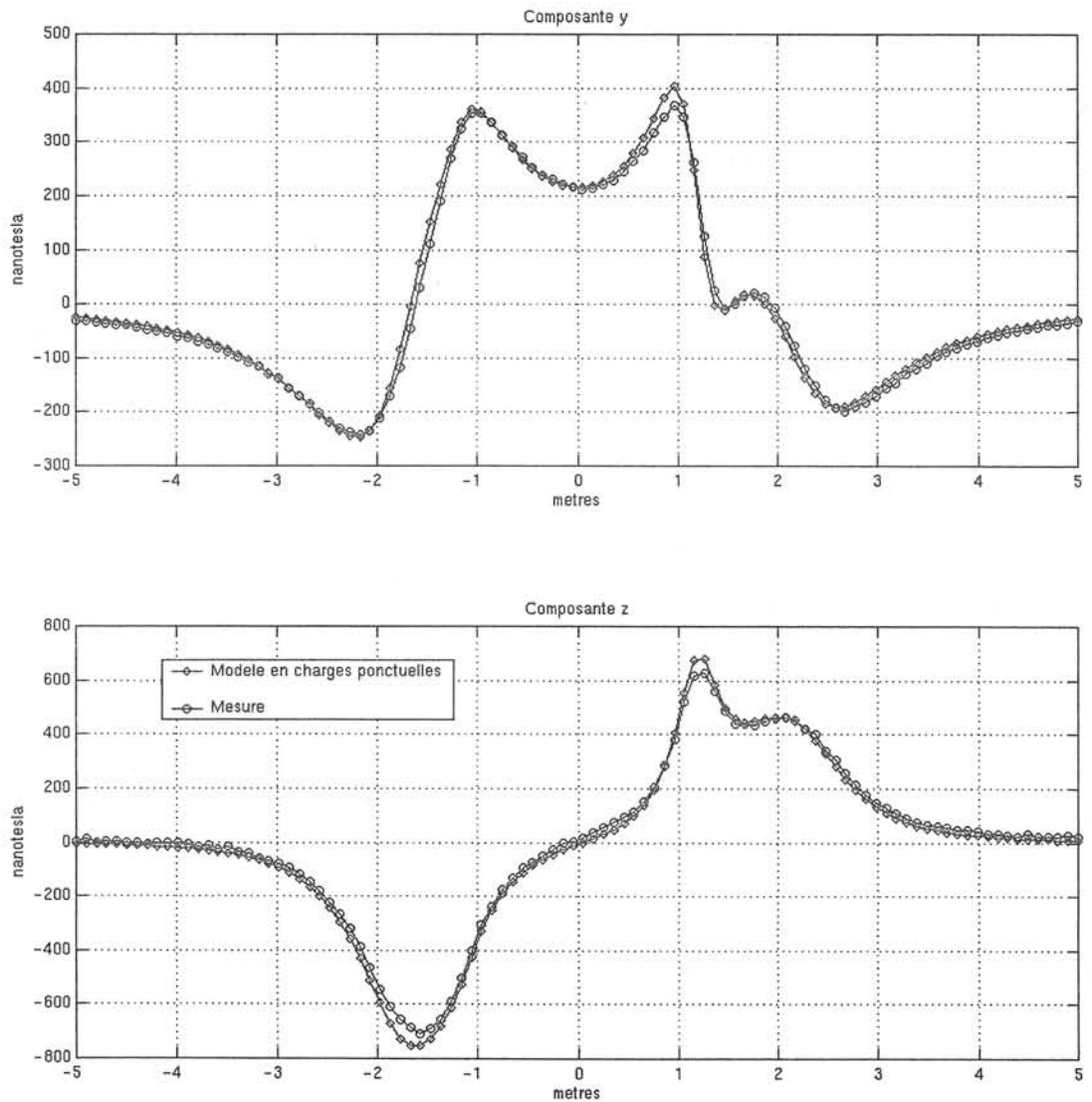


Figure IV.5 : Comparaison du champ calculé par le modèle en charges ponctuelles et du champ mesuré sur le capteur central du plan de référence

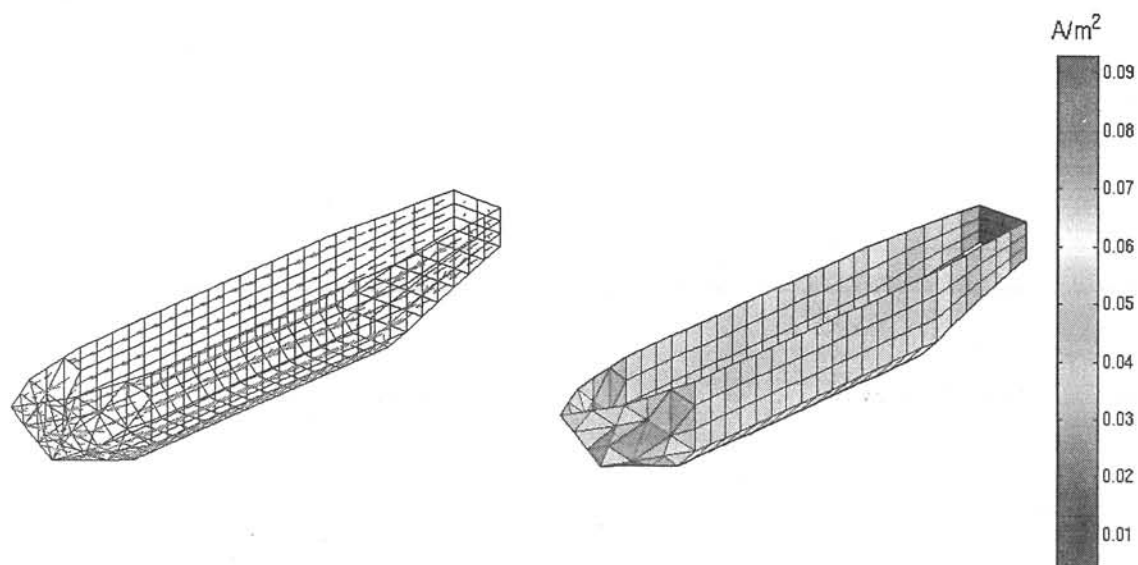


Figure IV.6 : Distribution de dipôles ponctuels pour un champ inducteur longitudinal de 20000 nT

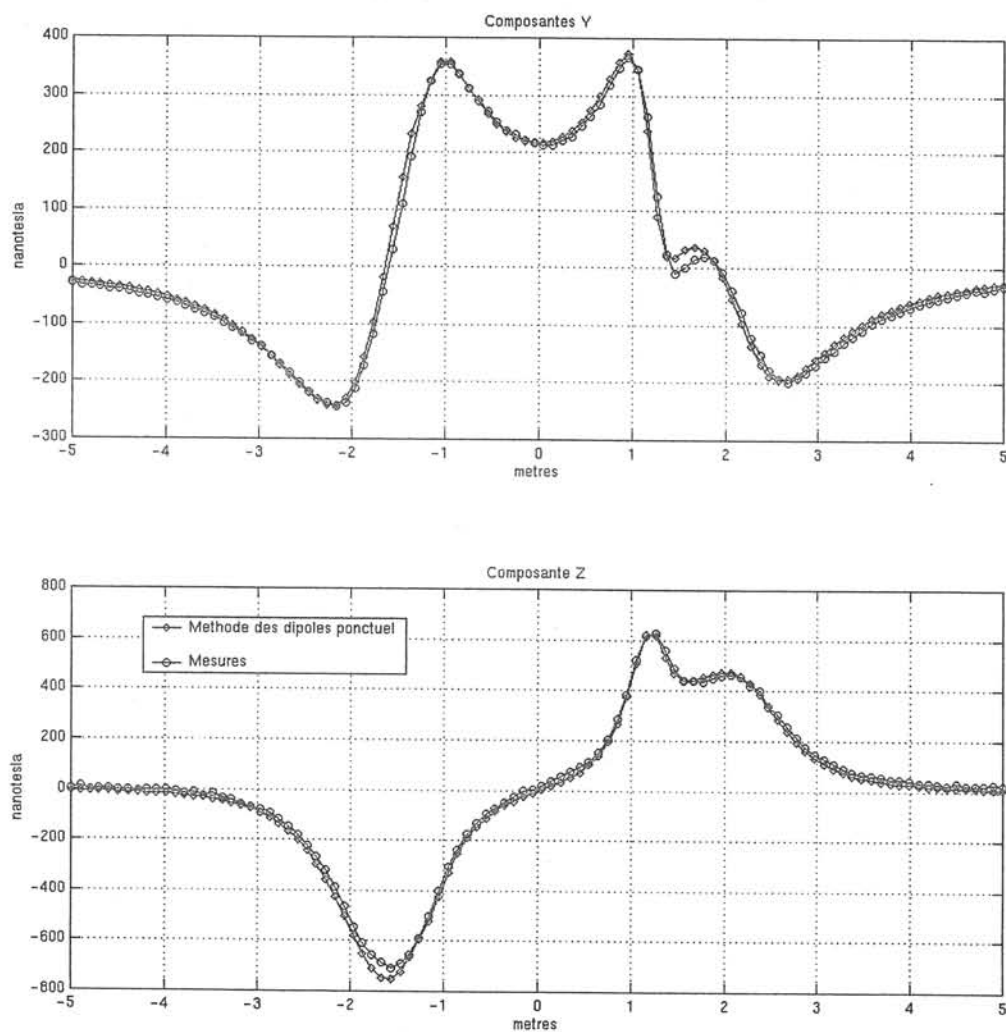


Figure IV.7 : Comparaison du champ calculé par le modèle en dipôles ponctuels et du champ mesuré sur le capteur central du plan de référence

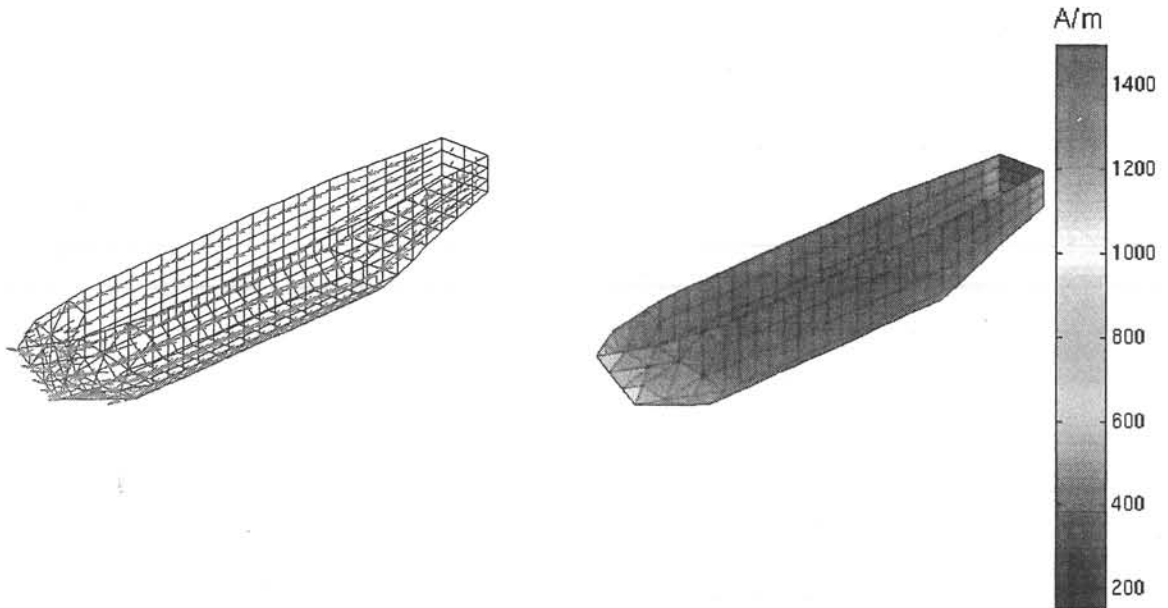


Figure IV.8 : Distribution d'aimantation pour un champ inducteur longitudinal de 20000 nT

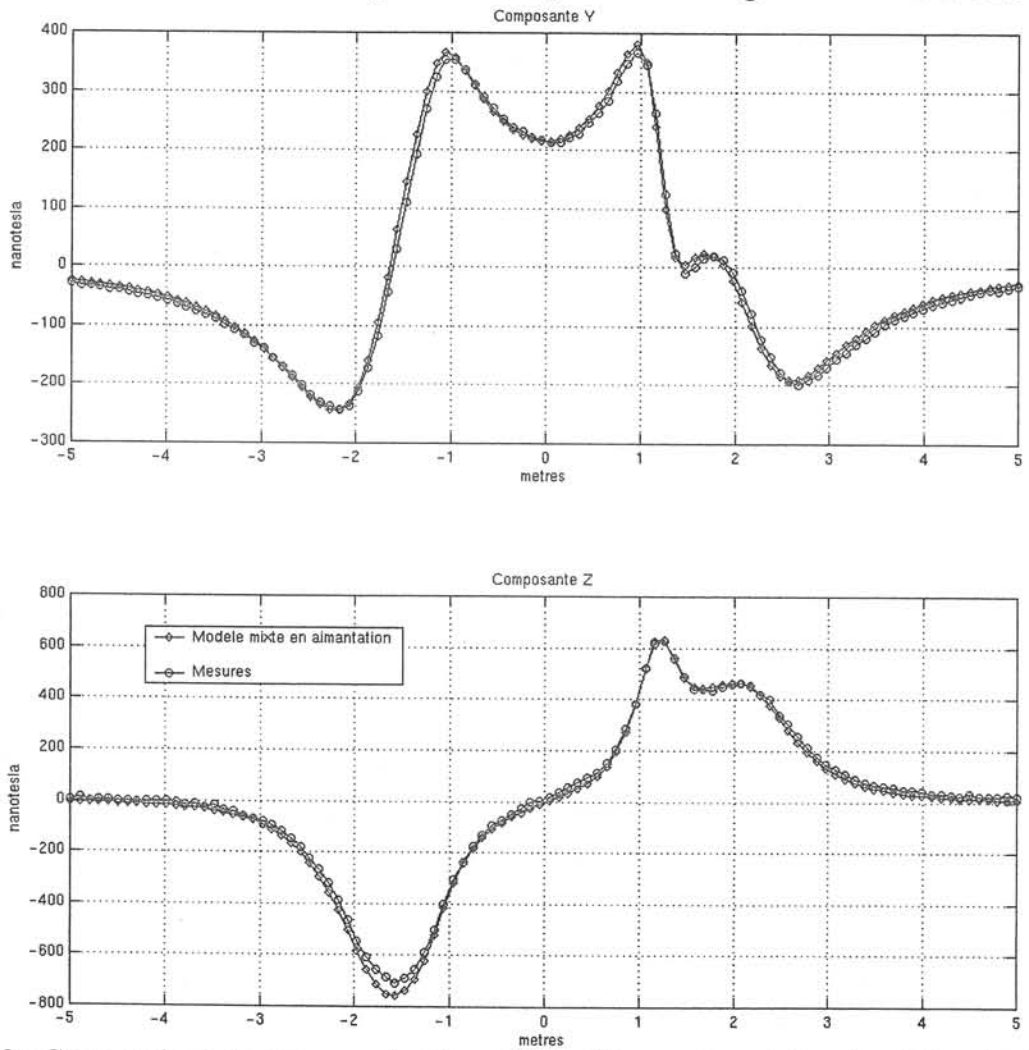


Figure IV.9 : Comparaison du champ calculé par le modèle en aimantation (modèle mixte) et du champ mesuré sur le capteur central du plan de référence

IV - Validation expérimentale du problème inverse

IV.1 - Remarques préliminaires

La maquette a été construite par le pliage et le soudage de tôles laminées. De plus, elle a subi de nombreuses manipulations dans le champ magnétique terrestre à l'issue de sa fabrication. Il y a donc de fortes chances qu'elle se trouve dans un état de forte aimantation permanente avec des aimantations locales particulièrement marquées.

Nous avons signalé qu'un bâtiment tendait à rejoindre un état d'équilibre, ceci sous l'influence d'un champ inducteur constant et de contraintes de pression. La maquette du LMN n'ayant évidemment pas navigué, il est peu probable qu'elle se trouve dans cet état. Il est possible de l'amener dans un état proche de cet état d'équilibre, ceci par l'intermédiaire d'un four à désaimanter dont dispose le laboratoire. Son obtention est effective après plusieurs désaimantations sous un champ inducteur constant donné.

Cependant, nous ne voulions pas que la maquette se trouve dans une telle configuration. En effet, l'idée était de tester nos algorithmes en présence d'anomalies locales de l'aimantation de la coque, ceci pour savoir si nous étions en mesure de les identifier. La maquette n'a donc été désaimantée qu'une seule fois, ce qui nous assurait la présence de ces anomalies mais aussi un comportement magnétique proche d'un bâtiment réel.

IV.2 - Protocole expérimental

La mesure des champs magnétiques faibles est une technique difficile. En particulier, les capteurs possèdent des offsets souvent mal maîtrisés. Pour s'affranchir de ce type de problèmes, il est courant de travailler « en différentiel ». Pour mesurer l'anomalie créée par un objet ferromagnétique, cette technique consiste à réaliser une mesure en présence de l'objet puis une mesure sans cet objet. Par différence, on obtient alors l'anomalie qu'il crée. Pour assurer la qualité de nos mesures, nous avons souhaité travailler « en différentiel », il nous a donc fallu concevoir un système permettant de réaliser ces deux mesures. Les capteurs ont été installés sur une structure autonome amovible rigide. Les mesures sont réalisées en deux étapes. Dans un premier temps, la structure est positionnée dans la maquette, l'ensemble étant repéré dans un référentiel fixe, au milieu du chemin de roulement. Les capteurs ont été préalablement fixés sur la structure aux bons emplacements par rapport à la maquette et la précision de ce positionnement a été estimée à 2 mm. Une mesure est alors réalisée (fig.IV.10). La structure est ensuite élevée et la maquette extraite suffisamment loin pour considérer que son influence est négligeable (fig.IV.11). On effectue ensuite une deuxième mesure avec la structure seule, replacée dans sa position initiale (fig.IV.12). La différence de ces deux mesures nous donne alors directement l'anomalie créée par la maquette.

Cette approche permet de mesurer le champ magnétique avec une grande précision. Par contre le positionnement des capteurs par rapport à la maquette est délicat, il a donc été nécessaire de réaliser un montage mécanique particulièrement soigné.

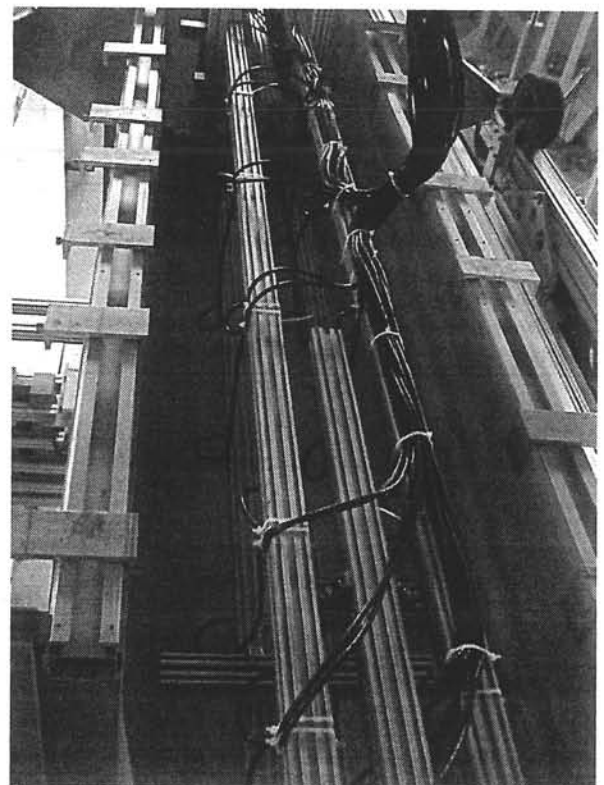
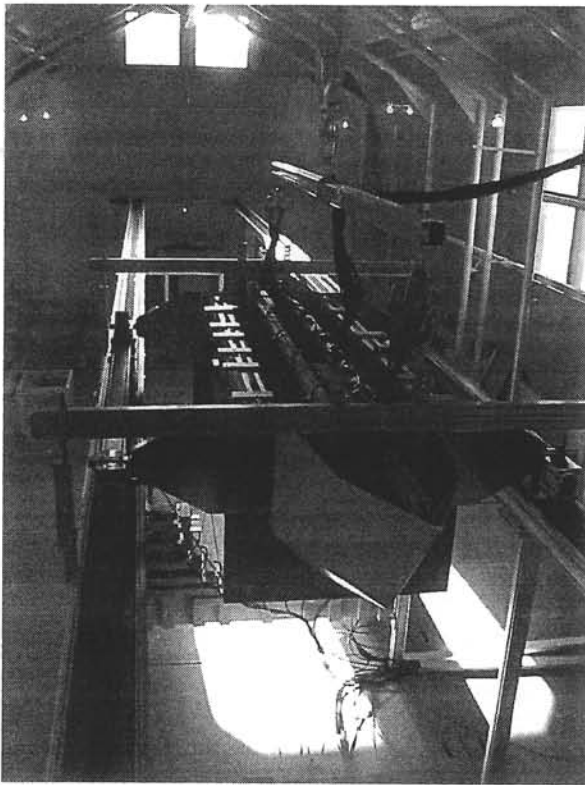


Figure IV.10 : La structure positionnée dans la maquette

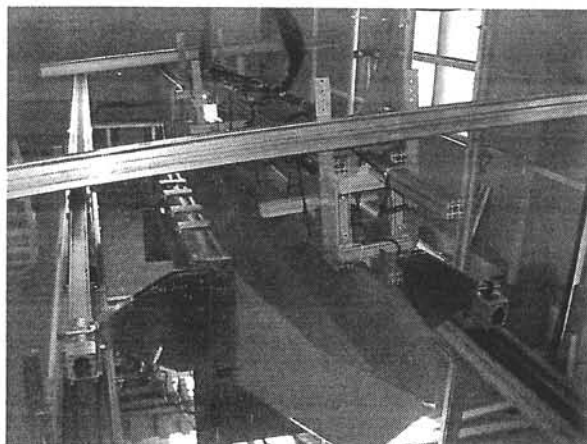


Figure IV.11 : Extraction de la maquette

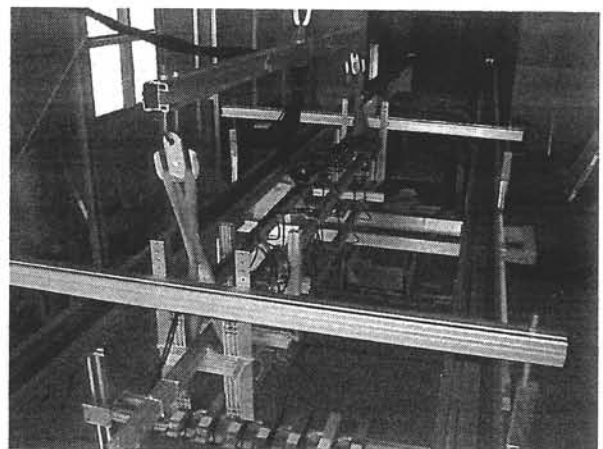


Figure IV.12 : Mesure sans maquette

IV.3 - Validation de l'approche inverse

Nous avons choisi une configuration avec 32 capteurs fluxgate tri-axiaux régulièrement répartis à l'intérieur de la maquette. Celle-ci a été maillée en 271 éléments surfaciques. Afin d'éviter tout problème de divergence, les capteurs ont été placés directement en vis-à-vis du barycentre de l'élément le plus proche (voir annexe C). Leurs positions et le maillage apparaissent sur la figure IV.13.

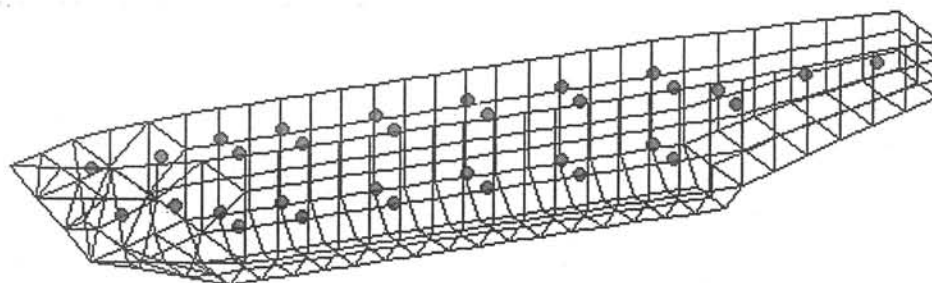


Figure IV.13 : Maillage et position des capteurs dans la maquette pour les mesures

Dans l'exemple que nous présentons, la maquette est orientée dans un cap proche du cap nord. Les composantes du champ terrestre sont, dans le repère de référence :

$$\begin{aligned} B_{0x} &= -553 \text{ nT} \\ B_{0y} &= -22549 \text{ nT} \\ B_{0z} &= -40662 \text{ nT} \end{aligned}$$

IV.3.1 - Inversion par le modèle mixte avec le système « interne »

Nous allons tout d'abord réaliser une inversion avec l'aide du modèle mixte. Comme explicité dans le chapitre III, nous résolvons les deux systèmes matriciels globalement (système « mesure » et système « interne »). Les conditionnements obtenus sont les suivants :

$$\begin{aligned} \text{Système mesure :} & \quad \xi = 12,50 \\ \text{Système global (sans III.39):} & \quad \xi = 13,02 \\ \text{Système global (avec III.39):} & \quad \xi = 3,44 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Après inversion du système (III.46) par simple SVD, nous obtenons une distribution d'aimantation pour la coque de la maquette (fig.IV.14). Cette distribution nous permet de prédire le champ sur le plan de référence et de le comparer au champ mesuré sur le capteur sous quille (fig.IV.15).

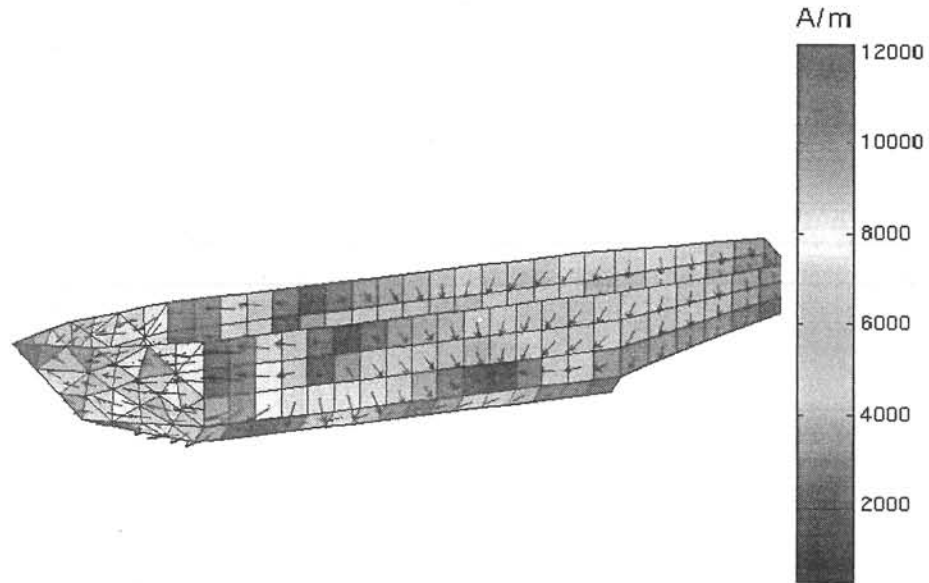


Figure IV.14 : Aimantation de la maquette reconstruite par problème inverse

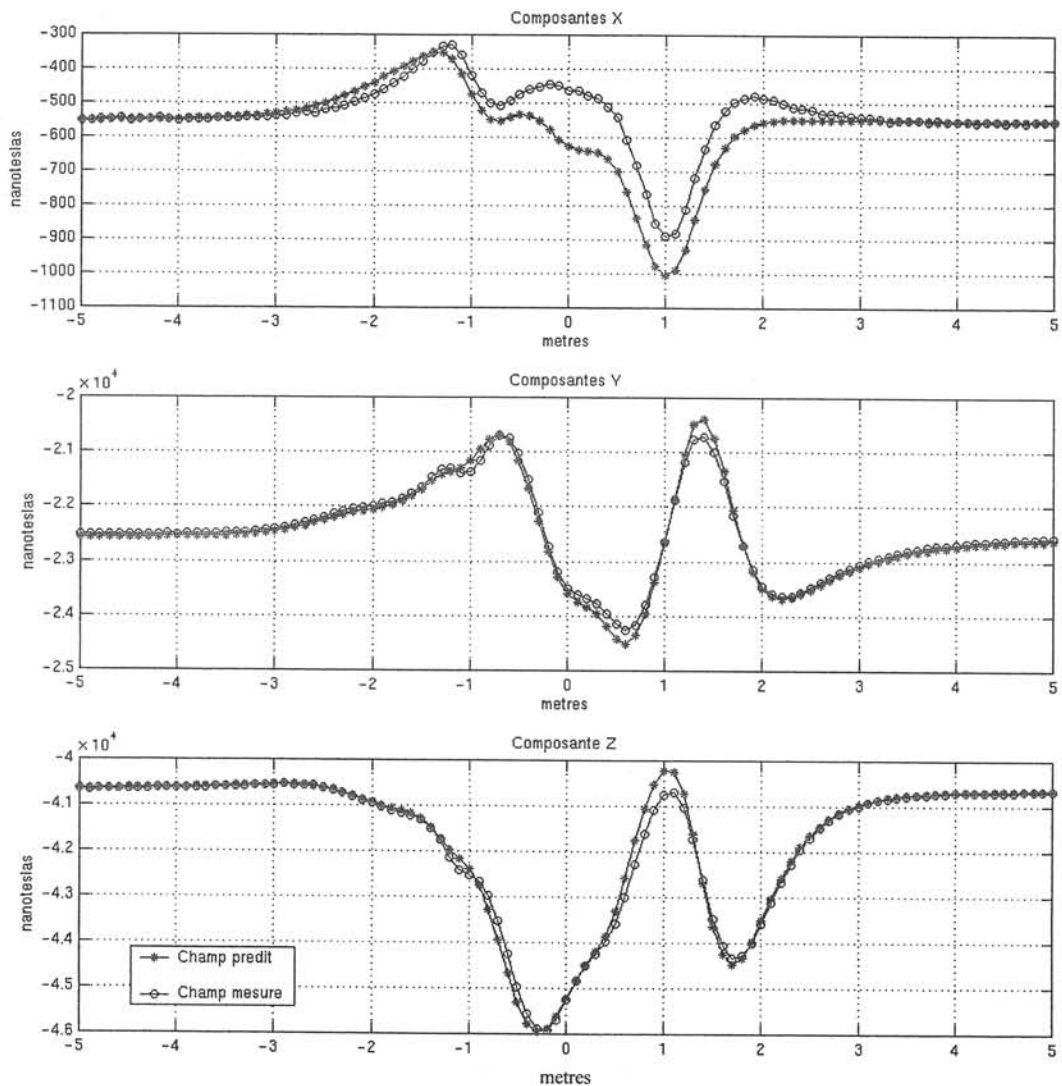


Figure IV.15 : Comparaison du champ mesuré et du champ prédit pour le capteur sous quille (modèle mixte inversé avec système « interne » et somme des charges nulle)

IV.3.2 - Inversion par le modèle en charges ponctuelles avec le système interne

L'inversion par charges ponctuelles est ici testée. Nous utilisons également notre approche par l'écriture des deux systèmes. Les conditionnements obtenus sont :

$$\text{Système mesure : } \xi = 35,69$$

$$\text{Système global : } \xi = 52,07$$

La résolution du système nous conduit à une répartition ponctuelle de charges en chaque nœud du maillage de la maquette (figIV.16)

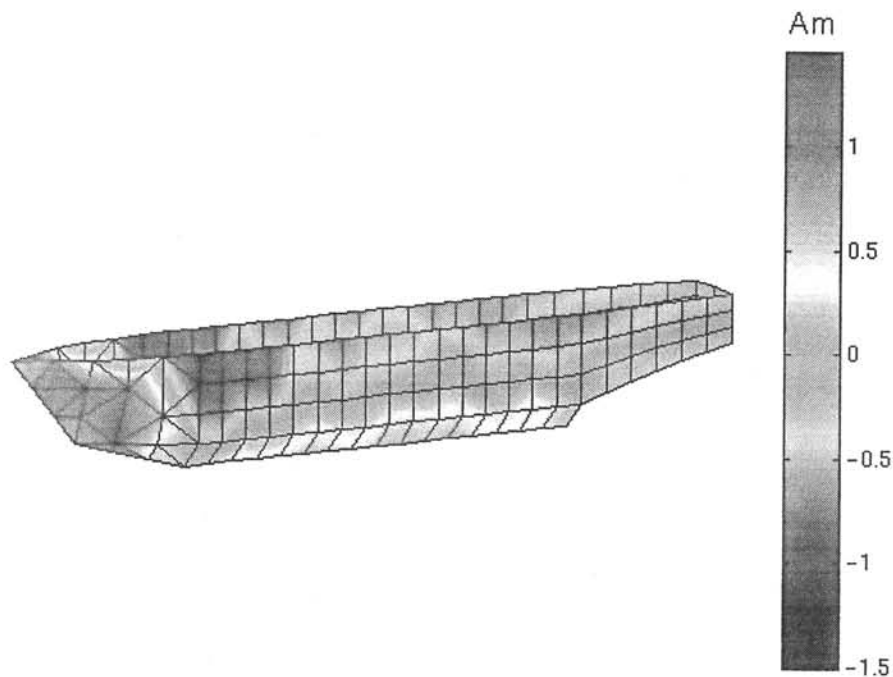


Figure IV.16 : Distribution ponctuelle de charges reconstruite par problème inverse

Il est alors possible de comparer le champ prédit à celui mesuré (fig.IV.17).

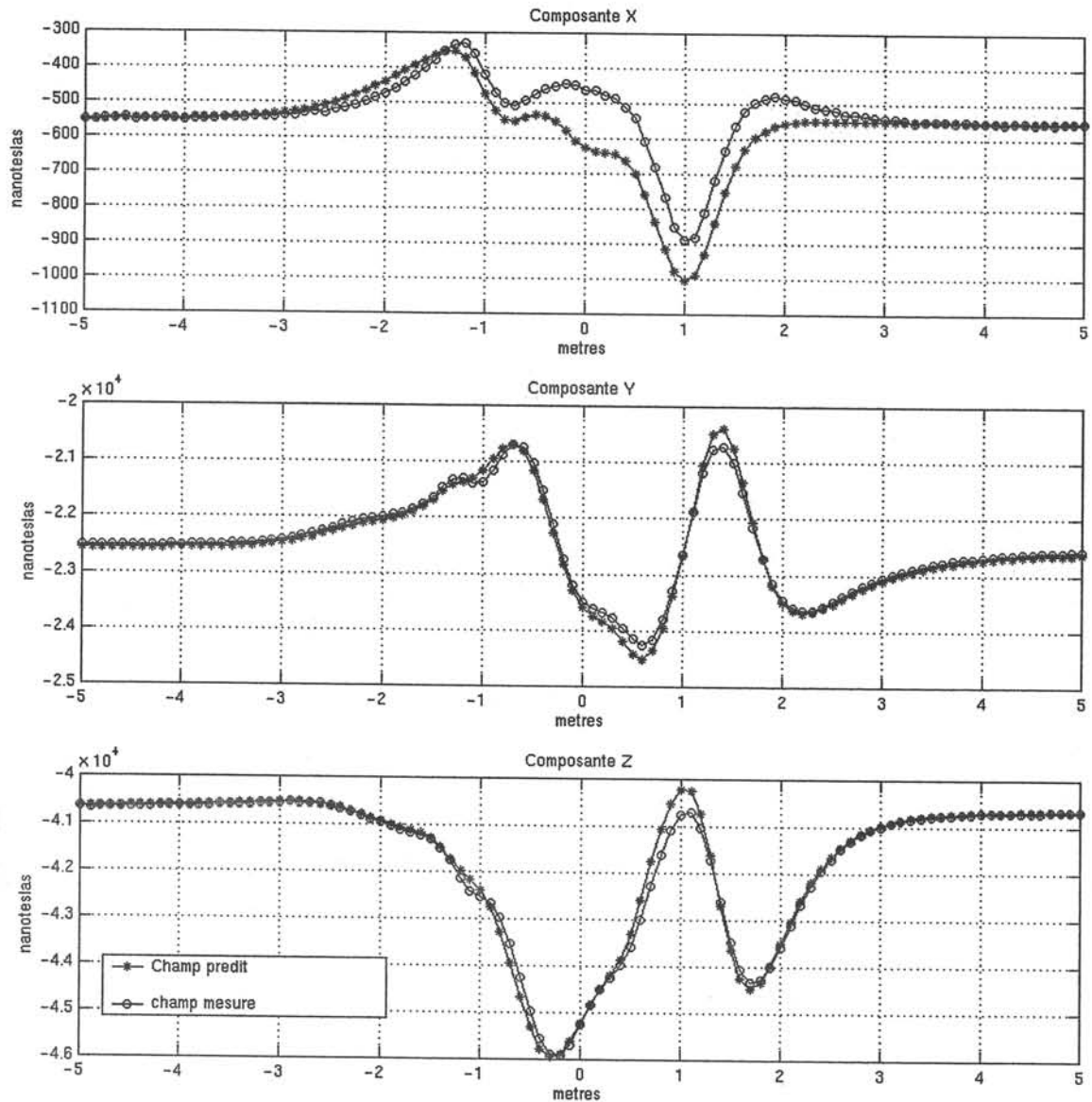


Figure IV.17 : Comparaison du champ mesuré et du champ prédit pour le capteur sous quille (modèle en charges ponctuelles inversé avec le système « interne »)

IV.3.3 - Exemples d'inversions sans système « interne »

Afin de mettre en valeur notre approche, nous présentons, pour comparaison, les résultats obtenus par la résolution du système mesure seul, c'est-à-dire sans résolution globale avec le système interne représentatif du comportement de la tôle. Les systèmes sont inversés par une simple SVD. Les résultats de l'inversion des modèles mixtes et monopolaires ponctuels sont présentés dans les figures IV.18 et IV.19.

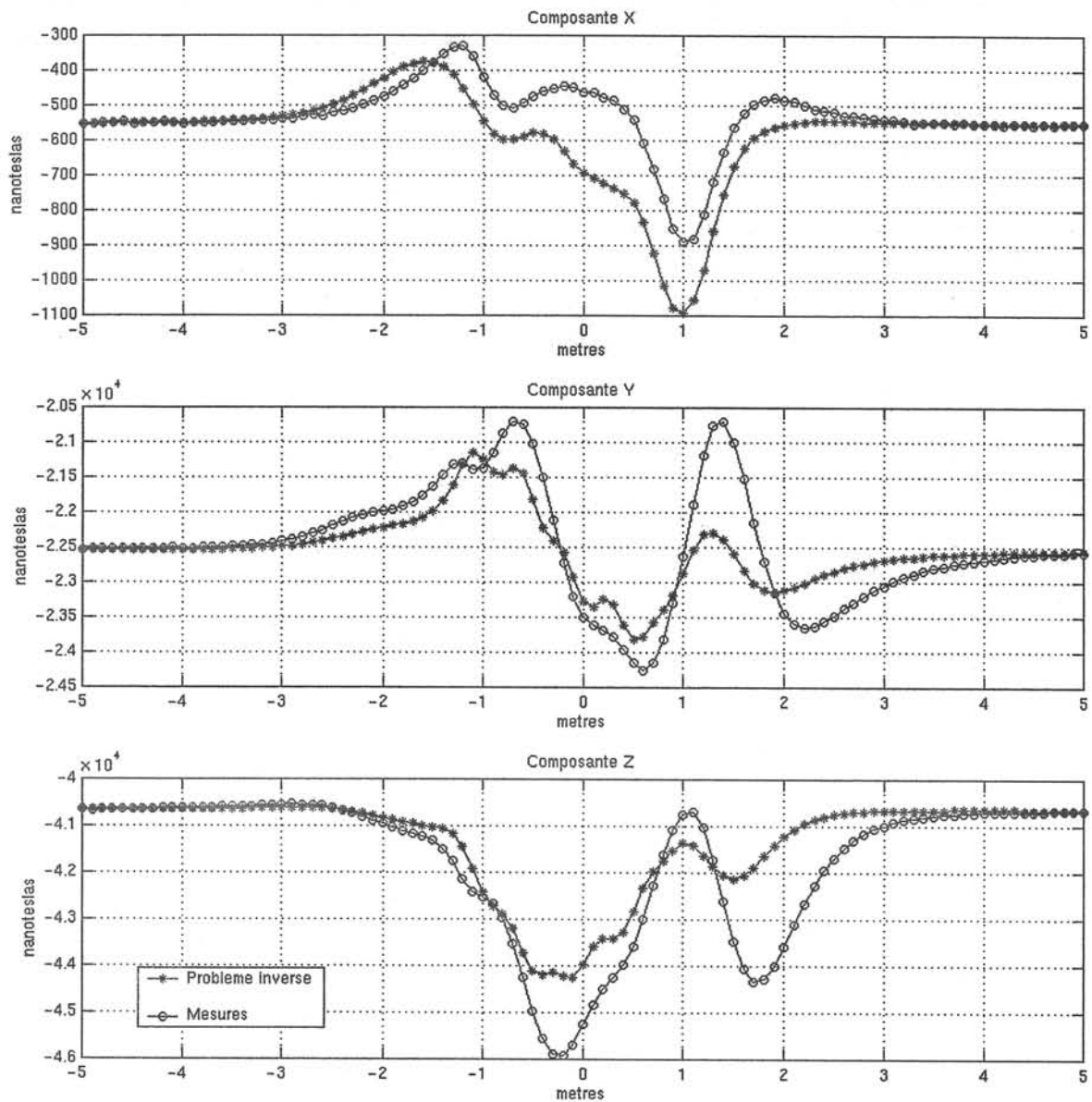


Figure IV.18 : Comparaison du champ mesuré et du champ prédit pour le capteur sous quille (modèle mixte inversé sans système « interne »)

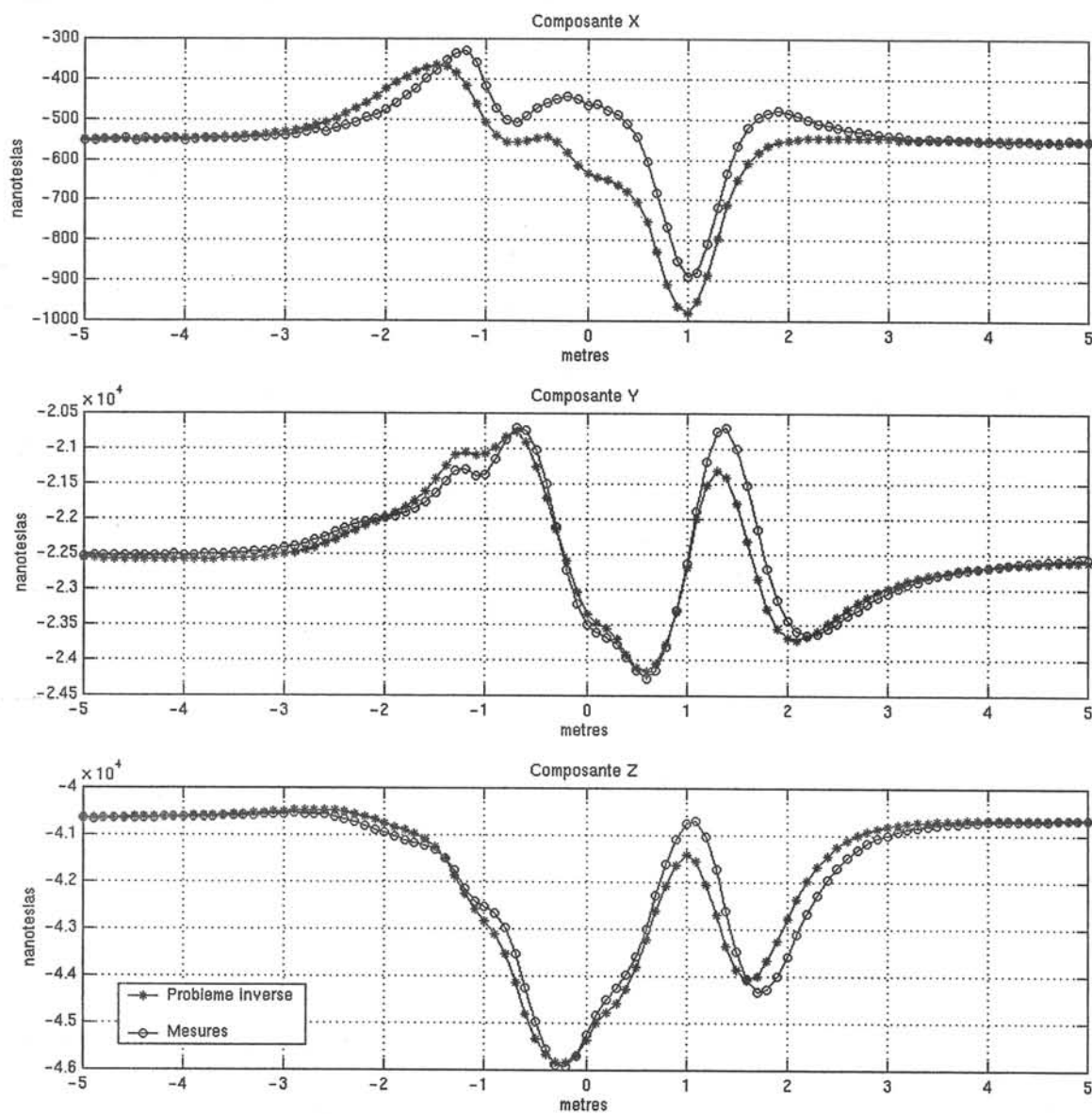


Figure IV.19 : Comparaison du champ mesuré et du champ prédit pour le capteur sous quille (modèle en charges ponctuelles inversé sans système « interne »)

IV.4 - Conclusions sur l'approche inverse

Les champs prédits et mesurés sont en bonne adéquation pour la résolution du problème inverse avec le système « interne ». Les différences sont de l'ordre de 10% pour la composante transversale qui est la plus faible et n'excèdent pas 5% pour les deux autres composantes. Ce résultat est très encourageant. De plus, les conditionnements des systèmes inversés sont satisfaisants, ce qui nous permet d'être relativement confiant quant à la stabilité de la solution pour une inversion sur un bâtiment réel. En effet, les mesures seront alors plus bruitées que lors de notre expérience réalisée dans un environnement magnétique contrôlé.

Les champs prédits et mesurés présentent de plus grandes différences lorsque seul le système « mesure » est inversé, sans être couplé avec le système interne. Cette différence est particulièrement manifeste pour le modèle mixte en aimantation où elle peut avoisiner les 50% pour les composantes Y et Z (contre 5% avec notre approche). En revanche, la différence est beaucoup moins flagrante pour le modèle en charges ponctuelles, même si notre approche présente une légère amélioration. En effet, comme nous l'avons déjà annoncé, la pseudo-solution pour les modèles monopolaires est souvent proche de la solution physique.

Les distributions obtenues à partir des résolutions avec systèmes « internes » sont réalistes. En effet, elles indiquent une forte zone d'aimantation rémanente à l'avant de la maquette, en particulier où celle-ci a été soudée. Nous nous attendions à un tel résultat, ce type de contraintes générant des anomalies magnétiques marquées. De plus, les deux distributions sont toutes les deux en accord, rappelons en effet, que la charge est l'inverse de la divergence surfacique de l'aimantation.

Les champs prédits par les deux modèles sont relativement peu différents. Il semble donc difficile de les différencier par la qualité du champ calculé. Par contre, le modèle mixte nous permet une identification de l'aimantation de la tôle, avec tous les avantages précédents mentionnés.

D'autres tests, non présentés dans ce mémoire, ont été réalisés pour des caps différents (cap ouest). Ces essais ont conduit à des résultats de mêmes qualités.

V - Conclusions

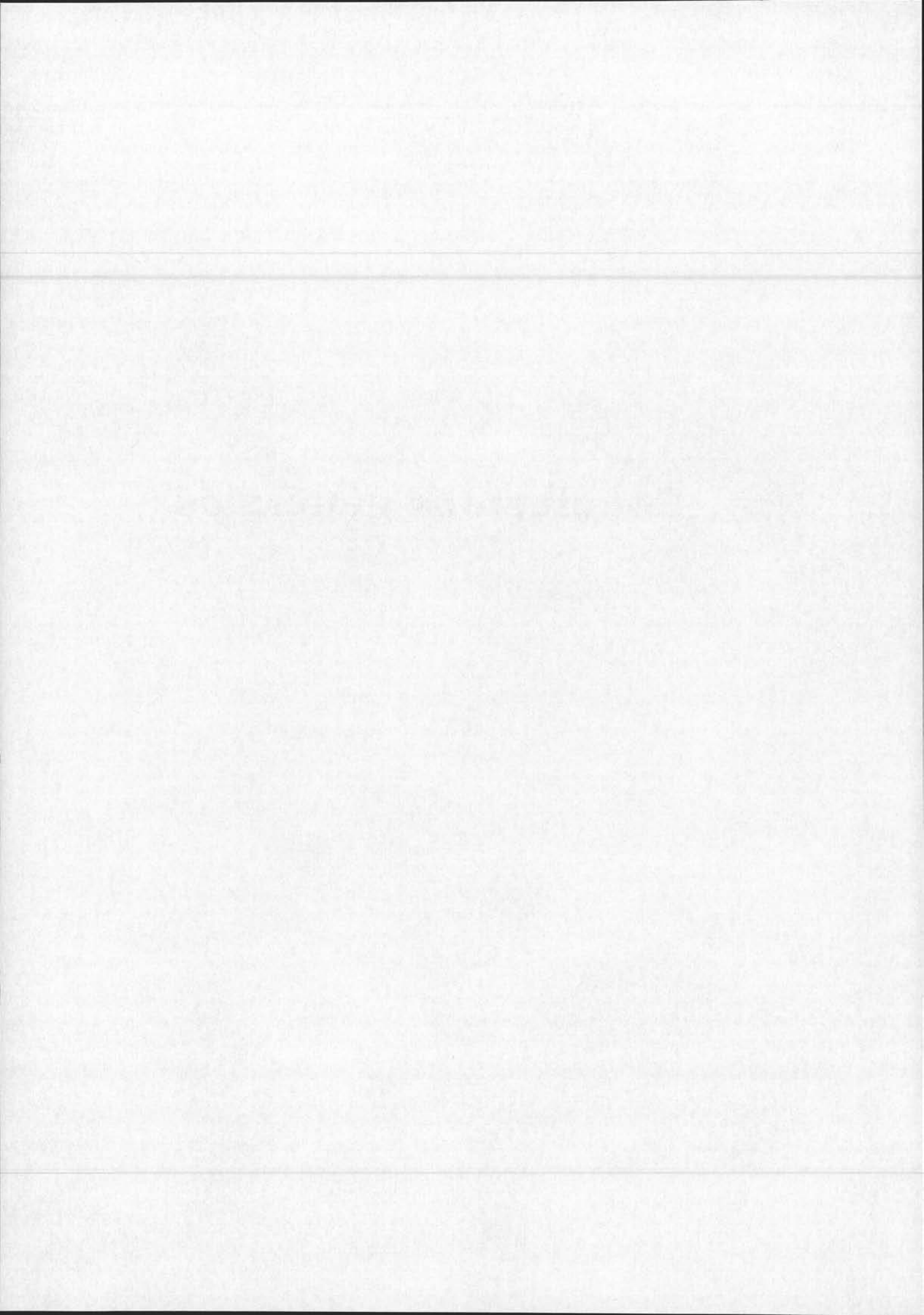
Les mesures réalisées sur la maquette du LMN sont très encourageantes. Les signatures créées par les aimantations induites sont calculées avec une bonne précision (moins de 5%). Remarquons que les calculs par éléments finis présentent les mêmes précisions. Nous disposons donc maintenant de nouveaux algorithmes pour calculer ces aimantations.

Les résultats pour la résolution du problème inverse répondent pleinement à l'objectif que nous nous étions fixé au début de ce mémoire, c'est-à-dire retrouver le champ magnétique extérieur à partir d'un nombre fini de mesures effectuées à l'intérieur de la maquette. Le champ prédit présente une différence inférieure à 10% avec le champ mesuré.

De plus, nous avons développé une nouvelle approche qui nous permet d'identifier un modèle d'aimantation de la tôle, ceci grâce à l'ajout d'un modèle, non pas mathématique, mais physique. Cet ajout d'information sur le comportement des sources entre elles peut être utilisé dans deux cas. D'une part, quand les systèmes sont largement sous-déterminés (c'est

notre cas ici), le sous-système interne permettant le choix d'une solution physique parmi toutes celles correspondant aux mesures. D'autre part, elle peut être également utile pour la résolution de systèmes très mal conditionnés. En effet, l'ajout du système interne rend alors une régularisation à l'ordre 0 ou une simple troncature du spectre de la SVD parfaitement satisfaisante. Ce type de régularisation est alors parfaitement indépendant de la géométrie et les méthodes telles que celles de la « L-curve » sont parfaitement applicables.

Conclusions générales



Conclusions générales

Nous arrivons à la fin de ce mémoire, il est donc temps de réaliser un bilan sur le travail effectué, de le situer par rapport aux objectifs initiaux et de mettre en valeur son aspect novateur. Ce recueil s'articule principalement autour de deux grands thèmes, la résolution des problèmes directs et inverses magnétostatiques pour le cas particulier des tôles ferromagnétiques.

Le premier thème abordé traite de méthodes de résolution du problème direct que nous avons qualifiées de globales. Elles consistent à remplacer le matériau par des distributions de sources bien choisies. Il est courant de rencontrer de telles formulations dans la littérature sous l'appellation de « méthode des moments ». Pourtant, nous n'avons pas employé ce terme, puisque que nous avons montré qu'elles n'étaient pas limitées à des distributions dipolaires. Parmi ces formulations, une est nouvelle et nous lui avons donné le nom de « modèle mixte ». Elle est particulièrement bien adaptée à notre cas, puisqu'elle permet de résoudre le problème en terme d'aimantation tout en limitant les divergences près de la tôle. Ces formulations ont été validées par la mesure et ont conduit à des résultats parfaitement convaincants. Elles peuvent potentiellement concurrencer les méthodes éléments finis actuellement utilisées pour le calcul des aimantations. Il reste cependant à déterminer dans quelle mesure sont-elles capables de prendre en compte des géométries très complexes, telles que celles des bâtiments réels.

Le deuxième thème abordé dans ce mémoire concerne la résolution du problème inverse. Il s'agit, à partir de mesures ponctuelles de champ magnétique de retrouver l'aimantation d'une structure constituée de tôles et ainsi de prévoir le champ n'importe où dans l'air. Notre contribution à sa résolution constitue une approche originale. C'est peut-être notre formation de physicien et nos faibles connaissances initiales des méthodes de résolution des problèmes inverses qui nous a conduit vers cette solution. Au lieu d'appliquer des méthodes mathématiques de résolutions des problèmes mal posés, nous avons préféré enrichir notre problème par un modèle physique et le rendre ainsi « mieux posé ». Cela nous a ainsi permis de nous affranchir de l'utilisation toujours délicate de méthodes de régularisation, bien que certaines aient probablement pu conduire à des résultats similaires.

Il faut remarquer que notre approche ne se limite évidemment pas aux structures composées de tôles. Elle est, en effet, généralisable à n'importe quelle géométrie volumique

et son utilisation est envisageable pour toutes les applications où l'identification de l'aimantation de matériaux est nécessaire. La seule contrainte reste la taille des systèmes générés et surtout leurs résolutions.

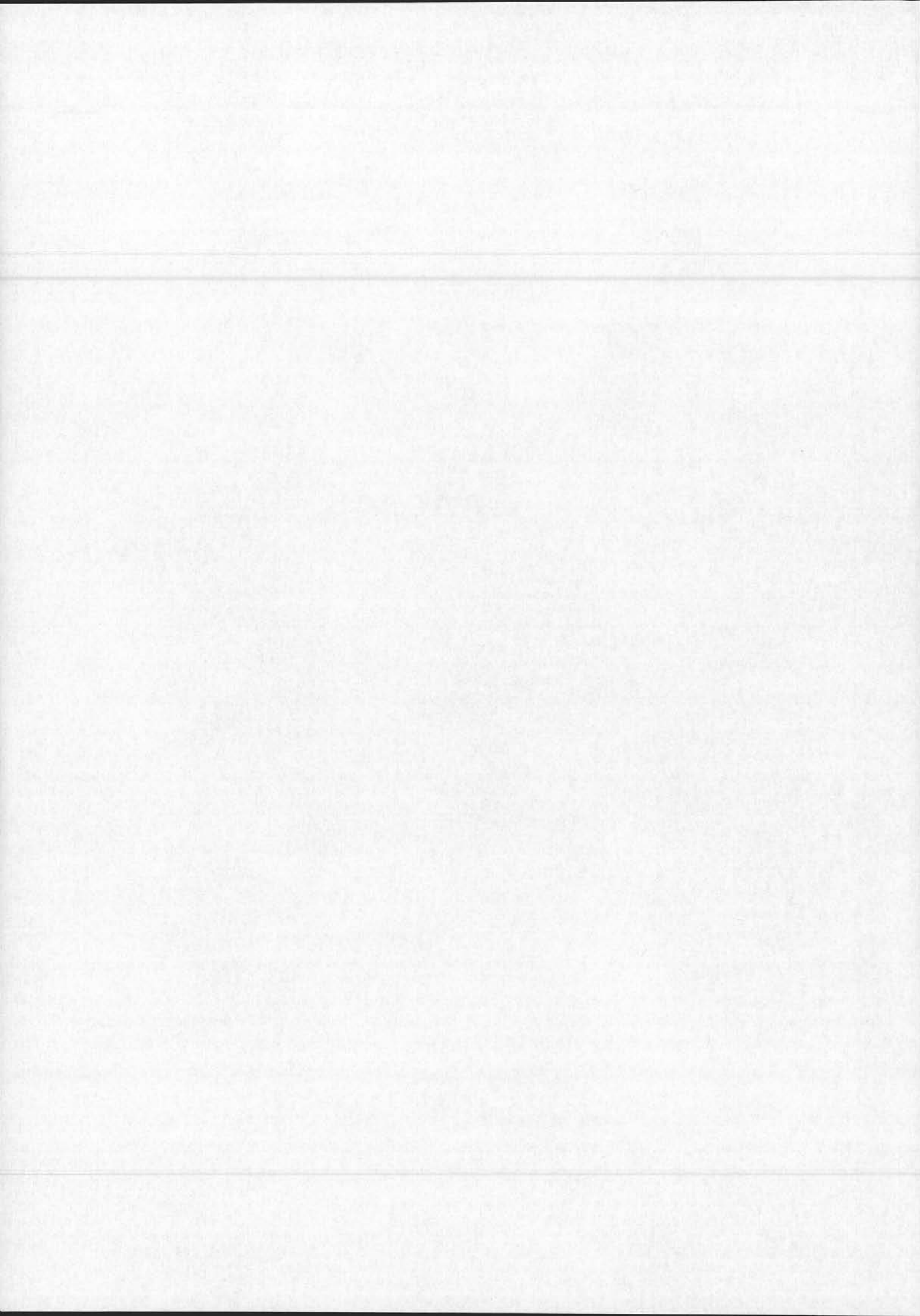
L'objectif de cette thèse était de valider expérimentalement un concept d'inversion sur une maquette simplifiée de navire, ceci en obtenant un modèle d'aimantation de la coque. Dans ce sens, nous avons atteint notre but. Pourtant, il reste encore un chemin important à parcourir avant que l'immunisation en boucle fermée ne soit effectivement envisageable.

Il faudra tout d'abord étudier le problème du rapprochement des capteurs de la tôle avec soin. Il semble, en effet, inimaginable d'installer ceux-ci au milieu du bâtiment. Cette validation ne sera envisageable que quand de telles mesures seront disponibles, ce qui sera bientôt le cas au LMN.

Il reste ensuite un point que nous avons délibérément écarté : la prise en compte des effets de circuits dans notre modèle. En effet, il ne sera pas envisageable de couper les courants d'immunisation en opération, afin de réaliser une identification de l'aimantation. Or, la modélisation de ces effets, comme nous l'avons évoqué, est un point très délicat. Certains travaux ont déjà été menés sur ce sujet pour des formulations éléments finis. Il conviendra donc d'étudier avec soin dans quelle mesure les concepts développés sont applicables à notre approche.

Il sera aussi nécessaire d'instrumenter un bâtiment. Cette étape devrait commencer sous peu et sera menée par le GESMA. Cette expérimentation constituera une source d'information très riche puisque nous ne disposons, à l'heure actuelle, d'aucune mesure de champ magnétique à l'intérieur d'un navire. Elle permettra, de plus, une bien meilleure connaissance des processus de variation d'aimantation de la coque et pourra conduire, par une meilleure connaissance des phénomènes, à l'ajout d'une information a priori, toujours plus fine et mieux maîtrisée.

Annexes



Annexes

A - Equivalence volume aimanté/charges surfaciques

Considérons un volume aimanté V . Ce volume est délimité par une surface S , portant une normale extérieure \mathbf{n} . L'aimantation du volume est notée \mathbf{M} (fig.A.1). Soient Q un point du volume aimanté et P un point de l'air.

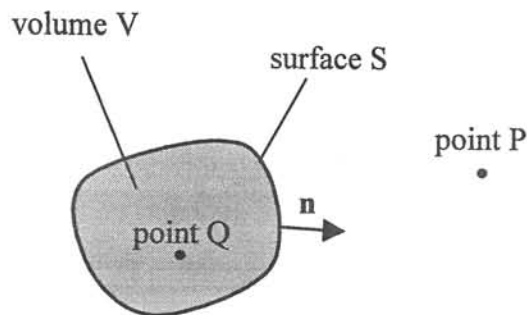


Figure A.1 : Notations

Le potentiel réduit créé par ce volume aimanté en un point P est égal à :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dV \quad (\text{A.1})$$

où \mathbf{r} est le vecteur \mathbf{QP} . On peut également écrire cette équation en faisant apparaître un gradient :

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dV \quad (\text{A.2})$$

En considérant que :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{M}}{r}\right) = \frac{1}{r} \operatorname{div}\mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{A.3})$$

On obtient :

$$\varphi(\text{P}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{M}}{r}\right) dV - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{r} \operatorname{div}\mathbf{M} dV \quad (\text{A.4})$$

Si nous appliquons à la première intégrale le théorème d'Ostrogradsky, nous obtenons :

$$\varphi(\text{P}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{r} dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{r} \operatorname{div}\mathbf{M} dV \quad (\text{A.5})$$

La formule (A.5) est l'expression du potentiel créé par deux distributions monopolaires. La première est une distribution surfacique localisée sur S et de valeur $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$. La deuxième est une distribution volumique dans V et de valeur $-\operatorname{div}\mathbf{M}$. A la condition que :

$$\operatorname{div}\mathbf{M} = 0 \quad (\text{A.6})$$

La distribution volumique s'annule et il ne reste que la distribution de charges linéiques.

$$\varphi(\text{P}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{r} dS \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\text{P}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \operatorname{grad} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{r} dS \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{H}_{\text{red}}(\text{P}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \quad (\text{A.9})$$

Cette équivalence matière aimantée/charges magnétiques est souvent rencontrée dans la littérature. Nous venons de démontrer le passage de l'équation (II.101) à (II.102).

B - Matrice de régularisation pour les dipôles

Nous avons vu, dans la partie V.2.2 du chapitre III, qu'une régularisation par la méthode de Tikhonov à l'ordre 0 pour les charges conduisait à des résultats tout à fait satisfaisants. Cette régularisation nous permet de choisir une solution de norme faible parmi les solutions plausibles. En revanche, elle s'est révélée incapable de résoudre les modèles en aimantation (ou dipolaires). En effet, la charge étant proportionnelle à la divergence de l'aimantation, une régularisation à l'ordre 1 semble beaucoup mieux adaptée.

Il nous faut donc trouver un opérateur régularisant qui impose, en quelque sorte, que la dérivée de l'aimantation soit faible ou en d'autres termes, que celle-ci varie peu d'un élément à l'autre. Le choix de cet opérateur dérivée n'est pourtant pas évident. En effet, la géométrie de notre structure est complexe. Il s'agit d'un espace à deux dimensions (une surface) contenu dans un domaine en trois dimensions, cette surface étant, de plus, constituée de plusieurs plans non coplanaires.

Nous avons développé un opérateur de régularisation inspiré des méthodes de Tikhonov à l'ordre 1, afin d'inverser les modèles dipolaires. Il ne s'agit pas réellement de l'opérateur dérivée discret. En effet, celui-ci est difficilement exprimable puisque des dipôles voisins sont écrits dans des bases (deux vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 orthonormés et tangentiels à chaque élément) qui n'ont aucun rapport entre elles.

Nous allons, quand même, tenter d'imposer que les aimantations varient peu sur chaque plan de la structure. Nous considérons donc que les aimantations de deux éléments voisins ne varient pas énormément, ceci à la condition que ces deux éléments ne soient pas séparés par une arête qui corresponde à un pliage géométrique de la tôle. Considérons deux éléments i et j portant respectivement des aimantations \mathbf{M}_i et \mathbf{M}_j (fig.B.1).

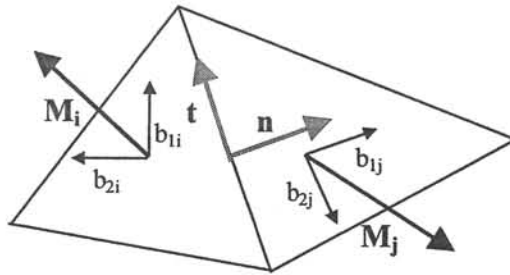


Figure B.1 : Deux éléments voisins

Nous allons effectuer un test préliminaire. Si les deux éléments i et j sont non coplanaires, c'est-à-dire s'ils sont séparés par un pliage géométrique de la tôle, nous n'associons aucune nouvelle équation à leur arête commune. En effet, rien ne nous indique que leurs aimantations présentent une quelconque similitude. Si par contre, les deux éléments sont coplanaires, nous imposons deux nouvelles équations. Nous allons projeter les deux composantes \mathbf{M}_i et \mathbf{M}_j sur les vecteurs tangentiels et normaux de l'arête commune.

Ces équations sont alors :

$$(\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_j) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$(\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_j) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Remarquons que l'équation (B.1) impose que la charge portée par l'arête commune aux deux éléments soit nulle. Les arêtes n'étant pas communes à deux éléments sont évidemment laissées de côté. En testant ainsi toutes les arêtes de la géométrie, nous obtenons alors une matrice de régularisation \mathbf{L} .

Reprenons le cas du parallélépipède du chapitre III avec la configuration de 90 capteurs. Pour ce cas, la matrice \mathbf{L} possède 970 lignes pour 576 colonnes. Appliquons la technique de régularisation de Tikhonov qui revient à :

Trouver \mathbf{x} tel que $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| + \alpha \|\mathbf{Lx}\|$ soit minimum

Il reste évidemment à choisir α et ce choix peut devenir ici très délicat. En effet \mathbf{L} est singulière avec une dizaine de valeurs singulières nulles. Il s'agit donc d'information excessivement mal conditionnée que nous allons ajouter et ceci ne va pas être sans conséquences. Les techniques classiques de choix de ce paramètre sont alors difficiles à appliquer [HANSEN 98]. En particulier, la « L-curve » (cf. chapitre III, partie V.2.1.b) peut présenter des irrégularités difficilement interprétables. Il est alors nécessaire de procéder par tâtonnements pour trouver le bon paramètre.

Cette approche peut permettre d'obtenir des répartitions d'aimantations plausibles (fig.B.2), en particulier, elle permet d'obtenir une distribution non divergente. Pourtant, elle n'est pas satisfaisante par rapport à notre méthode qui consiste en l'ajout du système interne et qui rend ainsi une régularisation à l'ordre 0 tout à fait satisfaisante. En effet, d'une part, le choix du coefficient est complètement empirique et la distribution d'aimantation varie énormément par rapport à ce choix. D'autre part, le champ est calculé à l'extérieur d'une façon très imprécise.

Cet exemple n'a pas été exposé dans le chapitre III. En effet, il conduit à des résultats médiocres. D'autres matrices de régularisation à l'ordre 1 ont été testées, toujours basées sur le même principe, mais les inversions ne se sont jamais révélées réellement satisfaisantes. C'est la relative complexité de notre géométrie, constituée de tôles non coplanaires, qui rend une matrice de régularisation si difficile à trouver.

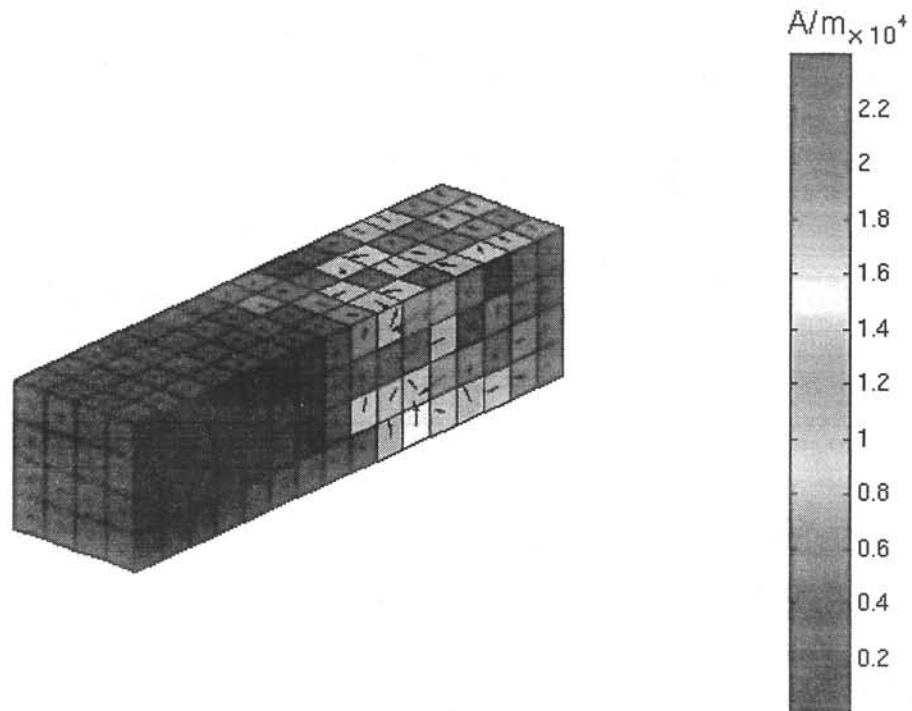


Figure B.II :Distribution d'aimantation obtenue par une tentative de régularisation du modèle mixte par matrice « équivalent » à l'ordre 1 ($\alpha= 1,5 \cdot 10^{-11}$)

C - Vers un rapprochement des capteurs de la tôle

C.1 - Objectifs

Dans la configuration que nous avons testée expérimentalement, les capteurs sont à une distance approximative de 20 cm de la tôle. Plaçons nous maintenant à l'échelle d'un bâtiment réel, en considérant que le coefficient de réduction de la maquette est de 30, nos capteurs seraient à une distance de 6 m de la coque. Cette configuration peut poser problème, en effet, une telle position de capteurs les rendrait très sujets à des perturbations involontaires extérieures (passages de personnes avec des objets ferromagnétiques, par exemple). Les capteurs seraient trop éloignés de la coque et de ses sources. Il semble donc nécessaire de tester une configuration avec des capteurs plus proches de la coque, ceci pour maximiser le rapport signal sur bruit.

Les résultats présentés dans cette annexe ne sont que numériques. Nous n'avons pas pu tester de configuration de capteurs collés à la tôle expérimentalement, ceci faute de temps. Ces expérimentations semblent être une étape future fondamentale pour la suite de ce projet.

C.2 - Présentation du cas test

Il est difficile de coller rigoureusement les capteurs à la coque dans un bâtiment réel. Nous avons choisi, à l'échelle de notre maquette, une distance de 3 cm, ce qui correspond pour un navire à une distance de l'ordre de 1 m et est, aux dires des spécialistes, la distance minimale admissible.

Pour inverser dans de bonnes conditions, il faut s'assurer qu'il y a effectivement validité du modèle numérique à l'endroit où les capteurs sont placés. Pour le modèle mixte, cette validité est assurée à la proximité du barycentre de chaque élément, endroit où les divergences dues aux charges réparties sur chaque arête se compensent. Nous allons donc placer nos capteurs directement en vis-à-vis des barycentres des éléments (fig.C.1)

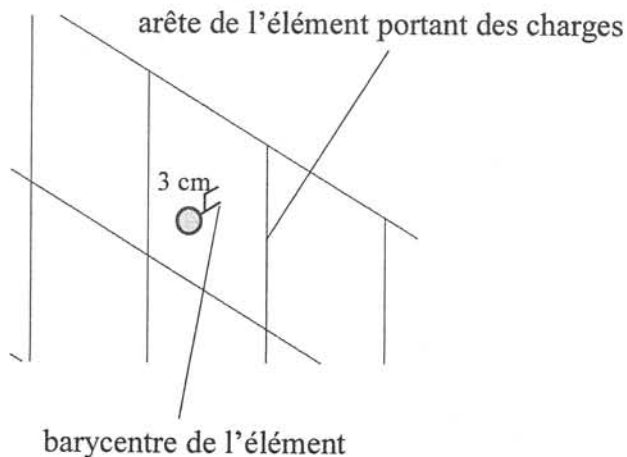


Figure C.1 : Position d'un capteur par rapport à un élément

Les capteurs seront au nombre de 32 et répartis de la façon suivante (fig.B.2) :

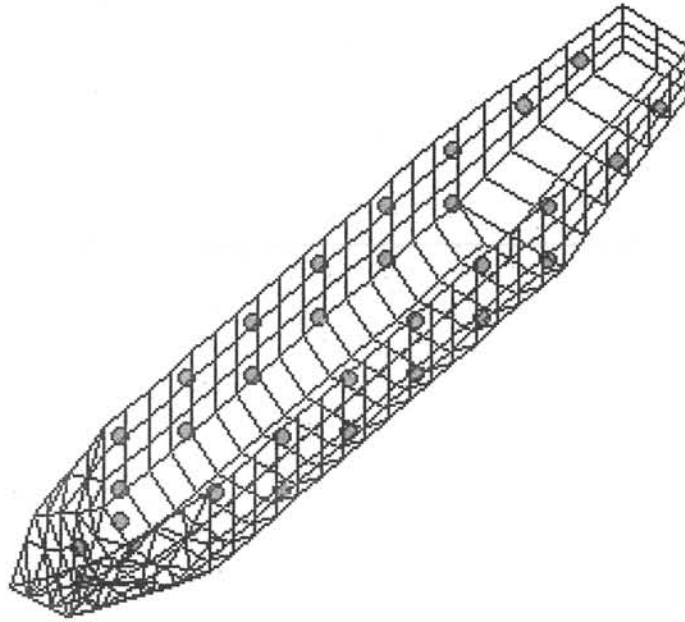


Figure C.2 : Position des capteurs proches de la coque

Les mesures internes vont être simulées numériquement. Pour cela, nous considérons la distribution d'aimantation obtenue au chapitre IV par résolution du problème inverse avec mesures réelles (modèle mixte). Nos modèles numériques nous permettent alors de calculer le champ au nouvel emplacement des capteurs. Afin de rendre la situation proche des mesures réelles, nous avons superposé à ce résultat un bruit de 10 nanoteslas (représentatif du bruit généré par un capteur réel). Nous disposons alors d'un jeu de mesures qui nous permet de tester l'inversion dans des conditions proches d'une expérience réelle.

C.3 - Inversion du modèle mixte

C.3.1 - Remarque préliminaire sur la composante normale mesurée

Nous avons annoncé dans le chapitre II que, physiquement, la composante normale du champ au passage de la tôle subissait une discontinuité. Cette discontinuité est due au saut des dérivées du potentiel réduit de part et d'autre de la coque. En revanche, la composante tangentielle est conservée. Cette considération impose une remarque. Plaçons nous au barycentre d'un élément en vis-à-vis d'un capteur. En ce point, le champ calculé par notre modèle mixte n'a aucune raison de présenter une telle discontinuité. En particulier, sa composante normale est continue (fig.C.3).

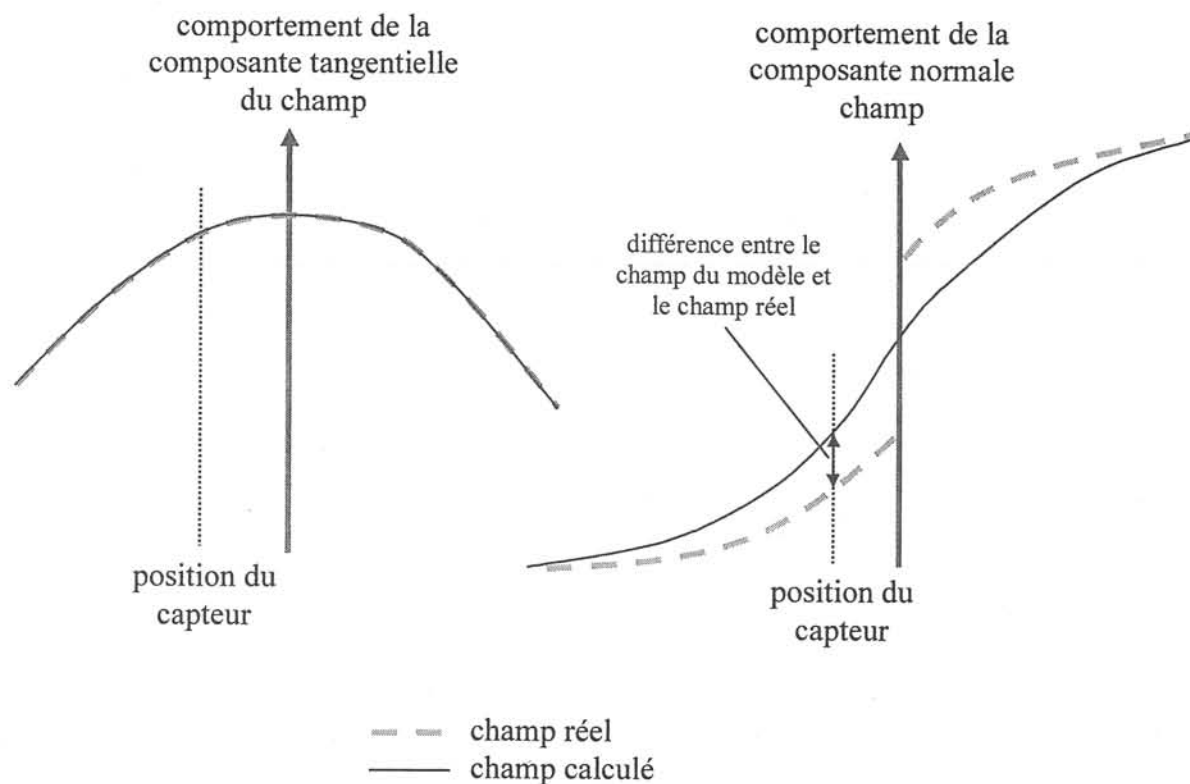


Figure C.3 : Comparaison des composantes des champs réels et calculés par le modèle mixte sur une ligne perpendiculaire à la tôle et passant par le barycentre d'un élément.

A une distance très faible de la tôle, une partie de l'information donnée par les capteurs risque donc d'être en désaccord avec le modèle. Ceci est amplifié par le fait que la composante normale réelle de l'induction est faible, l'aimantation étant essentiellement tangentielle. La composante mesurée risque donc d'être, dans une large mesure, composée de bruit. Cette information concernant cette composante a donc de grandes chances d'être fautive. En effet, d'une part le modèle est inadapté, d'autre part la mesure est beaucoup trop bruitée en comparaison à la valeur du signal. Nous allons donc la supprimer, ceci en enlevant tout simplement les équations qui lui sont associées, c'est-à-dire une voie par capteur. Cette approche va nous permettre d'éviter que les bruits de ces voies aient des comportements néfastes pendant l'inversion. En fait, près de la tôle, la seule information réellement importante est la composante tangentielle de l'induction puisque c'est l'aimantation que nous cherchons à identifier. Nous ne disposerons donc plus que de deux équations par capteur.

C.3.2 - Inversion

Le système est la réunion des systèmes « mesures » sans les composantes normales et du système « interne ». Il est inversé par simple SVD. La répartition d'aimantation obtenue est la suivante :

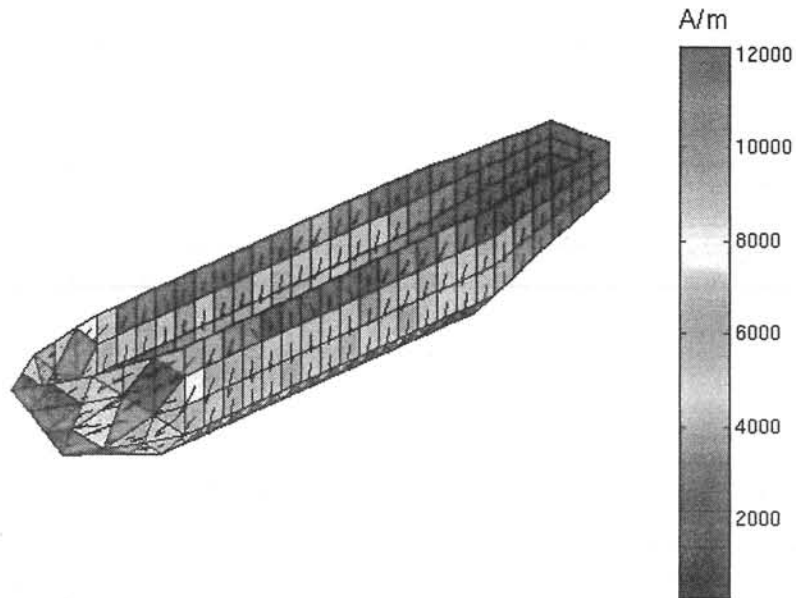


Figure C.4 : Répartition d'aimantation obtenue pour les capteurs à 3 cm de la coque

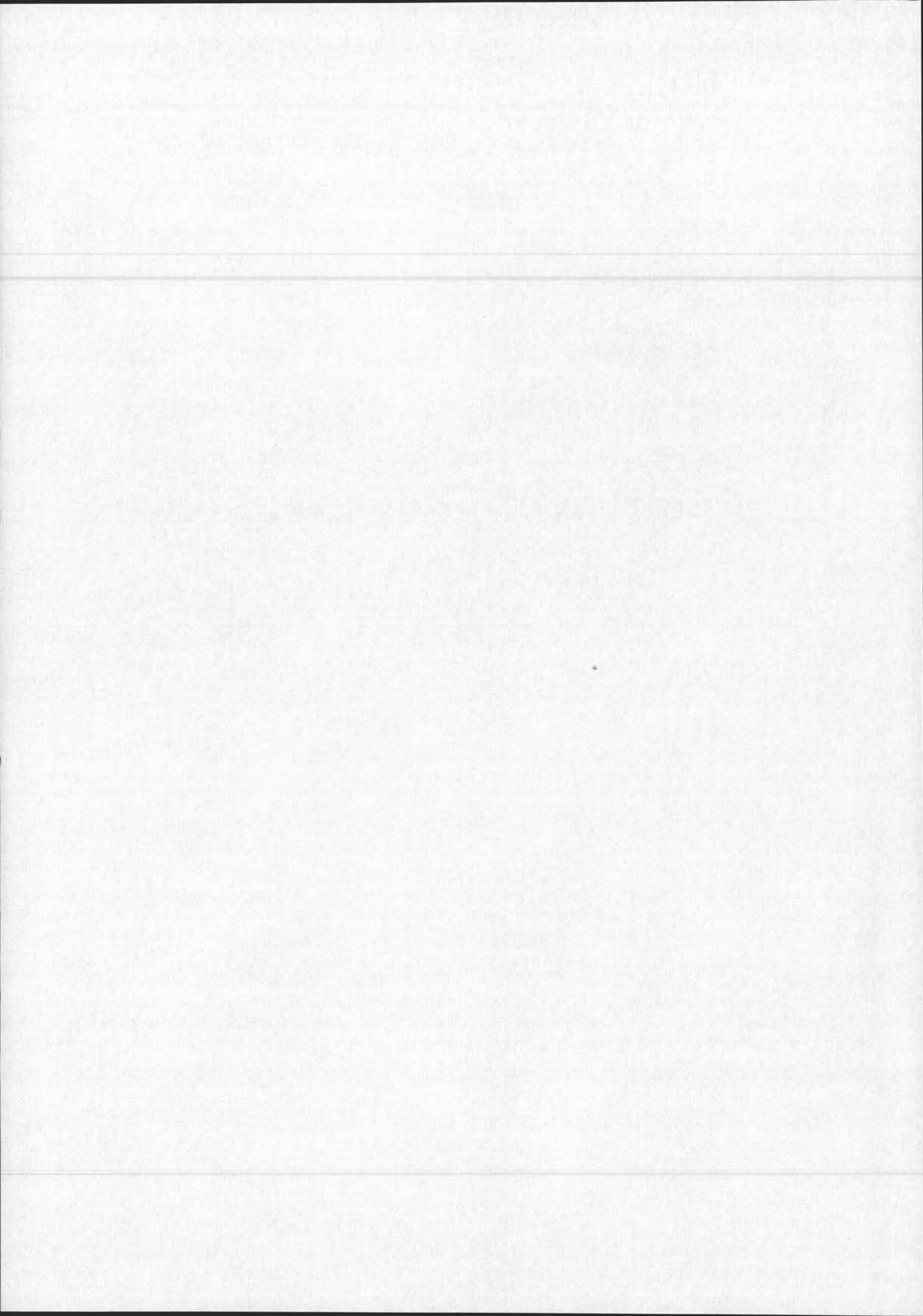
Cette répartition, bien que voisine de la répartition obtenue dans le chapitre IV, présente pourtant une légère différence qui génère des écarts notables entre le champ prédit par problème inverse et le champ calculé par problème direct (de l'ordre de 40%).

En examinant plus soigneusement la répartition d'aimantation, on s'aperçoit que si les aimantations des éléments directement en vis-à-vis des capteurs sont bien retrouvées, les autres sont légèrement sous-évaluées et contribuent donc à dégrader le calcul du champ extérieur. En réalité, le fait que les capteurs soient très proches de la tôle réduit leur zone d'observation. Ils n'assurent plus une surveillance globale de la coque. Même si le système interne joue son rôle de liaison, en régularisant la distribution, certaines aimantations très marquées localement ne peuvent être observées. Ceci est particulièrement vrai à l'avant de la maquette où cette aimantation varie très rapidement.

Le rapprochement des capteurs de la tôle semble donc être un cas complexe. Il sera, en effet, difficile de prendre en compte des variations très locales, à moins que les capteurs ne soient d'emblée placés au bon endroit. Il faudra alors espérer, pour un bâtiment réel que les anomalies locales ne seront pas trop marquées, ce qui peut être envisagé si on considère qu'un bâtiment atteint un état d'équilibre à long terme, état d'équilibre présentant une aimantation relativement régulière le long de sa coque.

Remarque : Il semble possible de régulariser le système global (système « mesures » plus système « interne ») par la matrice L de l'annexe B. Cette approche permet un calcul du champ extérieur légèrement meilleur. Pourtant le choix du coefficient reste toujours très problématique.

Références bibliographiques



Références bibliographiques

- [ALIFANOV 95] O. Alifanov, E. Artyukhin, S. Rumyantsev, « Extreme methods for solving ill-posed problems with applications to inverse heat transfer problem », Begell House, 1995.
- [ANGOT 72] A. Angot, « Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications », Masson & C^{ie}, 1972.
- [BEGOT 00] S. Bégot, E. Voisin, J.M. Kauffmann, E. Artioukhine, « Résolution du problème inverse magnétostatique par la méthode de régularisation itérative », proceeding de Numélec'2000, Poitiers, Mars 2000.
- [BODY 96] C. Body, « Modélisation des couches minces magnétostrictives, application aux microsystèmes », Thèse de doctorat INPG, 1996.
- [BRISSONNEAU 97] P. Brissonneau, « Magnétisme et matériaux magnétiques », édition Hermès, 1997.
- [BRUNOTTE 90] X. Brunotte, J.F. Imhoff, G. Meunier, « Méthodes intégrales de frontières pour les problèmes magnétiques à symétries axiales et couplage avec la méthode des éléments finis », Revue Phys. Appl. pp 613-626, No 25, 1990.
- [BRUNOTTE 91] X. Brunotte, « Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces – Application à la modélisation des aimantations des navires », Thèse de doctorat INPG, 1991.
- [CHUBAR 98] O. Chubar, P. Elleaume, J. Chavanne, « A three-dimensional magnetostatics computer code for insertion devices », J. Synchrotron Rad., No 5, pp481-484, 1998.

- [DHATT 84] G. Dhatt, G. Touzot, « Une présentation de la méthode des éléments finis », Maloine S.A. Editeur, deuxième édition, 1984.
- [DURAND 64] E. Durand, « Electrostatique tome I – Les distributions », Masson 1664.
- [DURAND 68] E. Durand, « Magnétostatique », Masson 1668.
- [DURET 94] D. Duret, « Mesure du champ magnétique terrestre et de ses anomalies », Proceeding de Champs Magnétiques faibles – mesures et application, Grenoble, 1994.
- [GUICHON 94] H. Guichon, « Détection sous-marine », Proceeding de Champs Magnétiques faibles – mesures et application, Grenoble, 1994.
- [HADAMARD 32] J. Hadamard, « Le problème de Cauchy », Hermann, 1932.
- [HANSEN 93] C. Hansen, D. O’Leary, « The use of the L-curve in regularization in discretization of discrete ill-posed problems », J. Sci. Comput., No 14, pp 1487-1503, 1993.
- [HANSEN 98] C. Hansen, « Rank-deficient and ill-posed problems – Numerical aspect of linear inversion », Edition Siam, 1998
- [HOITHAM 99] P. Hoitham, I. Jeffrey, B. Brooking, T. Richards, « Electromagnetic signature modelling and reduction », Proceeding de UDT 99, Nice, 1999.
- [IGARASHI 96] H. Igarashi, T. Honma, « An analysis of thin magnetic materials using hypersingular integral equations », IEEE Trans. Mag., pp 682-685, vol 32, No 3, may 1996.
- [IGARASHI 99] H. Igarashi, A. Kost, T. Honma, “Inverse inference of magnetization distribution in cylindrical permanent magnets”, Proceeding de Compumag’1999, vol.2, p310-311, 1999.
- [IGARASHI 00] H. Igarashi, A. Kost, T. Honma, “Inverse analysis of permanent magnets in motors”, Proceeding de CEFC’2000, p 445, 2000.
- [KRAHENBUHL 93] L. Krahenbuhl, D. Muller, « Thin layer in electrical engineering. Example of shell models in analyzing eddy-currents by boundary and finite element methods », IEEE Trans. Magn., Vol 29, No 2, pp 1450-1455, March 1993.
- [LAGIERS 99] G.L. Lagier, « Application de la méthode des éléments de frontières à la résolution du problème inverse de conduction de la chaleur multidimensionnel : Régularisation par troncature du spectre », Thèse de doctorat INPG, 1996.

- [LEDORZE 97] L. Ledorze, « Modélisation des effets de boucles d'immunisation dans les navires », Thèse de doctorat INPG, 1997.
- [LEGRIS 96] M. Legris, « Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche », Thèse de doctorat INPG, 1996.
- [MARECHAL 93] Y. Maréchal, J.L. Coulomb, G. Meunier, G. Touzot, « Use of the diffuse elements method for electromagnetic field computation », IEEE Trans. Magn., Vol 29, No 2, march 1993.
- [MONPETIT 62] E. Monpetit, E. Carcénac de Torné, « Considération générales sur le magnétisme du navire », Rapport interne Gesma, 1962.
- [NEEL 46] L. Néel, « Recueil de mémoire sur la démagnétisation », 1946.
- [PEAIYOUNG 89] S. Peaiyoung, S. Salon, I. Mayergoyz, « Some technical aspects of implementing boundary elements equations », IEEE Trans. Mag., pp 2998-2300, Vol 25, No 4, july 1989.
- [PERRIOU 84] J.J. Perriou, « Variation d'aimantation sous contraintes – Etude et réalisation d'un système de compensation automatique de ces variations », Thèse de doctorat INPG, 1984.
- [POULBOT 93] V. Poulbot, « Contribution à l'étude des champs électriques très basses fréquences en milieu océanique », Thèse de doctorat de l'ECL, 1993.
- [PRESS 92] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Vetterling, « Numerical recipes », Cambridge university press, 1992.
- [RIOUX-DAMIDAU 95] F. Rioux-Damidau F., B. Bandelier , P. Penven , « A fast and precise determination of the static magnetic field in presence of iron plates », IEEE Tans. Magn., vol 31, No 6, pp 3491-3493, November 1995.
- [SABLIK 97] M. Sablik, « A model for Asymmetry in magnetic property behavior under tensile and compressive stress in steel », IEEE Tans. Magn., vol 33, No 5, pp 3998-3960, September 1997.
- [SABONNADIÈRE 86] J.C. Sabonnadière, J.L. Coulomb, « Eléments finis et CAO eb électrotechnique », Traité des nouvelles technologie, Hermès Edition, 1986.
- [SAOTOME 93] H. Saotome, K. Kitsuta, S. Hayona, Y. Saito, « A neural behavior estimation by the generalized correlative analysis », IEEE Tans. Magn., vol 29, No 2, pp1389-1394, March 1993.
- [TIKHONOV 76] A. Tikhony, V. Arsénine, « Méthode de résolution des problèmes mal posés », Edition Mir, 1976.

- [TARENTOLA 87] A. Tarentola, « Inverse problem theory – Methods for data fitting and model parameters estimation », Elsevier, 1987.
- [WISHNEVSKI 93] A. Vishnevski, I Krasnov, A. Lapokov « Calculation of static magnetization for thin-walled constructions by boundary element method », IEEE Trans. Magn., Vol. 29, pp 2152-2155, September 1993.
- [WISHNEVSKI 95] A. Vishnevski, A. Lapokov, « Conservative methods in boundary-element calculations of static fields », IEEE Proc.-Sci. Meas Technol., pp 151-156, Vol 142, No 2, March 95.