



HAL
open science

Contribution à l'étude des méthodes des équations intégrales et à leur mise en œuvre numérique en élastoplasticité

Bertrand Burgardt

► **To cite this version:**

Bertrand Burgardt. Contribution à l'étude des méthodes des équations intégrales et à leur mise en œuvre numérique en élastoplasticité. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 1999. Français. NNT: . tel-00550209

HAL Id: tel-00550209

<https://theses.hal.science/tel-00550209>

Submitted on 24 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NANTES

ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGENIEUR
DE NANTES

1999

Thèse de Doctorat

Discipline : Sciences de l'Ingénieur
Spécialité : Génie Mécanique

présentée et soutenue publiquement par :

Bertrand BURGARDT

Le 6 décembre 1999
à l'Ecole Centrale de Nantes

**Contribution à l'étude des méthodes des
équations intégrales et à leur mise en
œuvre numérique en élastoplasticité**

devant le jury ci-dessous :

<i>Rapporteur</i>	BONNET M.	<i>Chargé de Recherche, Ecole Polytechnique</i>
<i>Examineur</i>	DÉBORDES O.	<i>Professeur, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille</i>
<i>Président et Rapporteur</i>	DUVAUT G.	<i>Professeur, Université de Paris VI</i>
<i>Examineur</i>	LE VAN A.	<i>Maître de Conférences, Ecole Centrale de Nantes</i>
<i>Rapporteur</i>	LORET B.	<i>Professeur, Institut de Mécanique de Grenoble</i>
<i>Examineur</i>	ROYER J.	<i>Professeur, Ecole Centrale de Nantes</i>
<i>Examineur</i>	WENDLAND W.	<i>Professeur, Université de Stuttgart</i>
<i>Examineur</i>	WIELGOSZ C.	<i>Professeur, Université de Nantes</i>

Directeur de thèse : LE Van Anh
Laboratoire Mécanique et Matériaux - Ecole Centrale de Nantes
BP 92101 - 44321 NANTES Cedex 3

N° ED 82-418

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique et Matériaux de l'Ecole Centrale de Nantes sous la direction d'Anh LE VAN et en collaboration avec Marc BONNET du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique.

J'aimerais tout d'abord remercier Anh LE VAN pour m'avoir proposé ce sujet et je lui suis infiniment reconnaissant pour sa confiance, son soutien constant au cours de ce travail et les nombreuses discussions que nous avons eues. J'aimerais également exprimer ma sincère gratitude à Marc BONNET pour son accueil et sa disponibilité lors de mes séjours à Palaiseau. Son intérêt, ses orientations et ses conseils pour cette étude tiennent une part essentielle dans la réussite de cette thèse.

Je remercie Georges DUVAUT de m'avoir fait l'honneur d'être le président de mon jury et d'avoir accepté de rapporter mon travail. Je tiens à remercier vivement Benjamin LORET pour sa contribution en tant que rapporteur, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour cette thèse et pour sa patience. Ma reconnaissance s'adresse également à Olivier DÉBORDES, Jean ROYER, Wolfgang WENDLAND et Chistian WIELGOSZ pour avoir examiné mon travail et m'avoir fait part de leurs commentaires et de leurs interrogations.

Je remercie tout particulièrement Jean ROYER pour son aide, sa confiance et pour m'avoir permis de présenter mes travaux à l'étranger. J'ai également été très honoré de l'accueil de Donatien LE HOUDEC au sein du laboratoire. Je le remercie pour sa confiance et pour m'avoir permis de découvrir l'expérience de l'enseignement.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Thierry KLEIN et à Eric LUTZ, deux *compagnons de route* avec lesquels j'ai pu partager mes idées et mes doutes, pour leur soutien, leur amitié et leur confiance. Je tiens également à remercier les *anciens* thésards et tout spécialement Pierre CHARRIER, Etienne ARNOULT, Nicolas COURONEAU pour les très bon moments que nous avons partagés ainsi que Fabien LEBRIS, Hélène LAURENT, Eric DIDIER pour les longues soirées à *taper le volant*. Je tiens également à remercier Guy MARTIN-BORRET pour nos divers échanges de points de vue sur différents domaines de la mécanique, qui furent des plus fructueux.

Je remercie aussi l'ensemble des membres du laboratoires, pour leur aide et leur soutien. Une pensée toute particulière va à Patrice CARTRAUD, pour m'avoir donné le goût de la recherche, m'avoir encouragé à m'investir dans la préparation d'une thèse et m'avoir fait découvrir sa cave. Je remercie Isabelle GUILLOTEAU et les *nouveaux* thésards, Natacha BUANNIC, Bundi DONGUY, Jessy LEFEUVE pour leur sympathie et leur bonne humeur et je leur souhaite beaucoup de

réussites. Je tiens également à témoigner toute ma sympathie aux thésards du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, avec une attention particulière pour Sandrine AUBERT, Marta DRAGON-LOUISET et Nicolas TARDIEU.

Enfin, que tous ceux qui m'ont apporté leur concours et leur soutien durant ces trois années soient assurés de ma sincère reconnaissance.

Table des Matières

Résumé	4
Introduction	7
Chapitre I Description du cadre de l'étude	9
Introduction	9
I.1 Définitions et notations	10
I.2 Equations associées au problème mécanique	11
I.2.1 Présentation du modèle élastoplastique en H.P.P.	11
I.2.2 Résolution du problème d'évolution par une méthode incrémentale	17
I.2.3 Intégration locale et algorithme de Retour Radial	19
I.3 Algorithmes élastoplastiques par éléments finis de domaine	21
I.3.1 Formulation en déplacement	21
I.3.2 Formulation mixte contrainte-déplacement	23
I.3.3 Formulation générale de type Hu-Washizu	25
Conclusion	27
Chapitre II Représentations intégrales et méthodes des équations intégrales	29
Introduction	29
II.1 Rappels de géométrie différentielle	31
II.2 Représentations intégrales du problème avec déformations initiales	38
II.2.1 Problème élastostatique avec déformations initiales	39
II.2.2 Formules de représentations intégrales	42
II.3 Algorithmes élastoplastiques par éléments finis de frontière	44
II.3.1 Méthodes directe et indirecte	45
II.3.2 Introduction des équations intégrales du problème	48
II.3.3 Prise en compte des lois d'évolution	49
Conclusion	50
Chapitre III Propriétés des potentiels aux points réguliers	53
Introduction	53
III.1 Théorème de convergence dominée	55
III.2 Régularité des potentiels surfaciques	55
III.2.1 Préliminaires	56

III.2.2	Evaluation des traces des potentiels surfaciques	60
III.2.3	Evaluation des traces du gradient des potentiels surfaciques	66
III.3	Etude des potentiels volumiques	82
III.3.1	Préliminaires	83
III.3.2	Continuité des potentiels volumiques	84
III.3.3	Dérivabilité des potentiels volumiques	85
III.3.4	Remarques et commentaires	97
III.4	Formes explicites des équations intégrales	98
III.4.1	Méthodes directes	98
III.4.2	Méthodes indirectes	102
III.4.3	Equations intégrales et opérateurs pseudo-différentiels	103
Conclusion	104
Chapitre IV	Résolution par une méthode de collocation	107
Introduction	107
IV.1	Etude des potentiels dans des domaines polyédraux	110
IV.1.1	Préliminaires	110
IV.1.2	Traces des potentiels surfaciques	111
IV.1.3	Traces du gradient de la représentation intégrale des déplacements	113
IV.1.4	Equations du problème pour un domaine polyédral	120
IV.2	Mise en oeuvre numérique d'un algorithme par collocation	121
IV.2.1	Discrétisation des représentations intégrales	121
IV.2.2	Equations intégrales du problème discrétisé	123
IV.2.3	Résolution du problème d'évolution élastoplastique	124
IV.3	Evaluation numérique des intégrales	125
IV.3.1	Intégration singulière surfacique	126
IV.3.2	Intégration singulière volumique	128
Conclusion	130
Chapitre V	Résolution par une méthode de Galerkin	133
Introduction	133
V.1	Formulation variationnelle du problème	135
V.1.1	Equations intégrales sous forme variationnelle	135
V.1.2	Représentation intégrale des contraintes et déformations	145
V.1.3	Formulations variationnelles du problème élastoplastique	152
V.1.4	Remarques et commentaires	154
V.2	Mise en oeuvre numérique d'un algorithme par Galerkin	155
V.2.1	Résolution du problème d'évolution élastoplastique en contrainte	155
V.2.2	Résolution du problème d'évolution élastoplastique en deformation	162
V.3	Evaluation numérique des intégrales doubles	166
Conclusion	169

Chapitre VI	Exemples numériques	171
Introduction		171
VI.1	Cylindre en torsion	172
VI.1.1	Description du problème et solution analytique	172
VI.1.2	Résultats numériques	172
VI.1.3	Simulation de sollicitations cycliques	175
VI.2	Cavité sphérique en milieu infini	177
VI.2.1	Description du problème et solution analytique	177
VI.2.2	Résultats numériques	178
VI.3	Plaque trouée	182
Conclusion		186
Références bibliographiques		187
Annexe A	Théorie du potentiel scalaire	199
A. 1	Généralités sur les potentiels scalaires	199
A. 2	Trace du gradient du potentiel de simple couche	199
A. 3	Trace du gradient du potentiel de double couche	201
A. 4	Prolongement par continuité en des points singuliers	202
Annexe B	Généralités sur les noyaux des opérateurs intégraux	205
B. 1	Evaluation du tenseur $\mathbf{K}(\mathbf{r})$	205
B. 2	Evaluation du tenseur $\mathbf{B}(\mathbf{r})$	206
B. 3	Evaluation du tenseur $\mathbf{D}(\mathbf{r})$	208
B. 4	Evaluation du tenseur $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{r})$	209

Ce travail traite de l'utilisation de méthodes de type éléments finis de frontière appliquées à la résolution de problèmes de plasticité associée en petites perturbations. Après avoir rappelé le formalisme thermodynamique de l'étude, nous présentons les algorithmes d'intégration locale résultant de la discrétisation en temps de équations régissant le système mécanique, ainsi que les méthodes des éléments finis de domaine rencontrés dans la littérature.

L'approche directe par équations intégrales classiquement utilisée dans la littérature consiste à identifier la trace de la représentation intégrale du champ de déplacement à la densité du potentiel élastique de double couche en un nombre fini de points de la surface. Il en résulte l'équation intégrale, dite *en déplacement* ou DBIE (Displacement Boundary Integral Equation). Une approche régularisée [Bonnet86] permet de s'affranchir du calcul d'intégrales en valeur principale de Cauchy.

Cette démarche est néanmoins mise en défaut pour des problèmes plus spécifiques, pour lesquels il est nécessaire de déterminer l'équation intégrale dite *en vecteur-contrainte* [Bui77] et [Weaver77], ce qui entraîne l'évaluation de la trace des dérivées des potentiels élastiques sur la frontière. Ce sujet constitue depuis une quinzaine d'années une branche très active dans le développement des méthodes des éléments finis de frontière et a donné lieu à de très nombreuses publications ([Sladek et al.83], [Polch et al.87], [Levan88], [Guiggiani et al.92], [Bonnet et al.93], [Huber et al.93], [Cruse et al.96]). Le calcul numérique des intégrales singulières (valeur principale de Cauchy [Guiggiani et al.90] et partie finie de Hadamard [Guiggiani et al.92]) ne pose plus de problèmes conceptuels ([Mikhlin et al.86] et [Schwab et al.92a]) mais les expressions des traces sur la frontière proposées pour le gradient des potentiels élastique ne sont établis qu'en des points réguliers de la surface et sont très lourdes à mettre en œuvre numériquement ([Huber et al.96], [Poon et al.98b] et [Poon et al.98a]).

Nous proposons une représentation intégrale originale du gradient du déplacement valable en tout point de la frontière, formulation qui fait intervenir les mêmes opérateurs intégraux que ceux apparaissant dans la représentation intégrale du déplacement. Cette procédure généralisant l'approche proposée dans [Polch et al.87] est basée sur l'introduction d'une quantité auxiliaire représentant le gradient reconstitué du déplacement sur la frontière. On obtient alors une nouvelle équation intégrale en vecteur-contrainte (Traction Boundary Integral Equation - TBIE), indispensable en mécanique de la rupture, pouvant être écrite aux noeuds du maillage surfacique. Cette approche permet alors d'aboutir à un système d'équations intégrales de type Fredholm de seconde espèce connu pour son bon conditionnement et rend également possible l'évaluation du champ de déformation ou de contrainte en tout point du domaine fermé de manière cohérente. Ce dernier point s'avère être crucial dans le développement d'algorithmes non-linéaires par éléments finis de frontière [Foerster et al.94]. Cette procédure est implémentée

dans un algorithme basé sur une approche par collocation, reposant sur une discrétisation temporelle implicite et intégrant la notion d'Opérateur Tangent Cohérent (CTO), largement répandu en éléments finis de domaine [Simo et al.85] et introduit pour la première fois en éléments finis de frontière dans [Bonnet et al.96].

Parallèlement à la méthode de collocation, nous proposons une formulation variationnelle symétrique entièrement régularisée par équations intégrales, basée sur un principe à trois champs, dont les inconnues du problème représentent les densités surfaciques, les déformations totales et les déformations plastiques. Cette formulation généralise la procédure proposée en élasticité dans [Bonnet95b] et est largement inspirée de [Maier et al.87], [Maier et al.93] et [Polizzotto et al.94]. L'originalité de notre algorithme est d'intégrer la notion de CTO et d'aboutir à une matrice tangente symétrique après écriture des lois d'évolution sous forme faible. Cette formulation est d'autant plus intéressante qu'elle permet de donner une signification énergétique aux différentes matrices d'influence. Les interpolations des champs de déformations sont prises continues et il est alors possible, comme pour l'algorithme de collocation, de faire évoluer la loi de comportement en des noeuds du maillage volumique.

La mise en œuvre numérique de ce deux algorithmes et les résultats numériques obtenus permettent de valider les différentes formulations proposées et de montrer la faisabilité d'une implémentation des méthodes des éléments finis de frontière dans les codes de calcul existants.

Introduction

L'utilisation de la methode des éléments finis de frontière est particulièrement adaptee pour resoudre des problemes specifiques de la mecanique (frontières mobiles, milieux infinis) et est principalement appliquee a la resolution de problemes lineaires [Bonnet95a] (rupture fragile, contact de solides elastiques, analyse inverse, optimisation de forme, ...). Des extensions des methodes des équations intégrales a des problèmes non-lineaires ont ete proposees (voir par exemple [Sledow et al.71], [Mukherjee et al.87] et [Foerster et al.94]). Leur mise en œuvre numerique pour resoudre des problèmes ayant des non-linearites confinees (rupture ductile, contact avec déformations permanentes, endommagement, elastoplasticite dans un massif infini, ...) consitue un axe de recherche des plus interessants et fait actuellement l'objet d'investigations poussees [Leitao et al.95], [Bonnet et al.96], [Huber et al.96] [Herding et al.96], [Kuhn et al.99] et [Aliabadi et al.99].

Dans la representation intégrale du champ de déplacement, il apparaît dans ce cas, en plus des operateurs surfaciques, un operateur integral de volume faisant intervenir des quantites caracteristiques du problème non-lineaire (déformations plastiques pour des modeles elastoplastiques en petites perturbations). Le fait que l'on s'interesse aux methodes integrales se justifie d'autant plus que la zone susceptible de presenter des non-linearites est petite devant les dimensions caracteristiques du domaine considere, ce qui est le cas en mecanique non-lineaire de la rupture et du contact.

La principale difficulte des methodes integrales provient de la relative complexite des formulations. La presence d'operateurs integraux surfaciques demande beaucoup de soins dans la manipulation des differentes expressions, notamment dans l'obtention de la trace sur la frontière des potentiels surfaciques [Krishnasamy et al.92a] et du gradient du potentiel de volume [Bui78]. Ceci explique tres certainement, la place plutôt marginale dans la litterature qu'occupent les methodes des éléments finis de frontière dans la resolution de problèmes non-lineaires.

Les principaux objectifs que nous nous sommes fixes sont les suivants :

- ◇ Retablir un juste equilibre entre les methodes des équations intégrale et les methodes des éléments finis dans le domaine de la mecanique numerique non-lineaire,
- ◇ Faire la synthese des differents algorithmes proposes dans la litterature et concernant la resolution d'un probleme elastoplastique,
- ◇ Donner une approche synthetique des techniques de regularisation des operateurs integraux singuliers.

Chapitre I

Description du cadre de l'étude

Introduction

L'objectif de ce chapitre d'introduction est double : préciser le cadre mathématique de l'étude et le contexte mécanique défini par le modèle de l'élastoplasticité en petites transformations.

Le premier paragraphe regroupera donc les principales notations utilisées dans ce mémoire, suivi de la description des espaces fonctionnels qui nous seront particulièrement utiles dans l'obtention des résultats de ce travail.

Le second paragraphe rappelle la théorie des matériaux standard généralisés décrite dans [Halphen et al.75], qui s'applique parfaitement au comportement élastoplastique des matériaux métalliques envisagés dans notre étude et dont le formalisme thermodynamique permet d'obtenir de façon élégante les lois d'état et d'évolution. Nous incluons une description de la résolution locale, qui représente un des noyaux durs du calcul de l'évolution élastoplastique et qui est d'ailleurs commune à toute approche de résolution numérique, par éléments finis de domaine ou de frontière. En particulier, il résultera de la discrétisation en temps effectuée par le schéma d'Euler conduit, deux types d'algorithmes d'intégration locale, pilotés respectivement en déformation [Simo et al.85] et en contrainte [Simo et al.89].

La résolution du problème non linéaire discrétisé en espace est quant à lui discuté dans le dernier paragraphe. Nous ajouterons au contenu fort classique du sujet quelques développements nouveaux, en montrant qu'il est possible de construire plusieurs fonctionnelles dont le point-selle correspond à l'état élastoplastique recherché et qui engendrent les méthodes de résolution de type *éléments finis de domaine*. Ceci nous permettra de proposer enfin pour un matériau avec écrouissage isotrope et cinématique linéaire trois formulations différentes, une en déplacement, une mixte contrainte-déplacement et une de type de Hu-Washizu.

I.1 Définitions et notations

NOTATIONS

Certaines conventions et notations que nous définissons dans ce paragraphe sont constamment utilisées dans ce mémoire. Les caractères maigres désignent des quantités scalaires et les caractères gras, des grandeurs vectorielles ou tensorielles. La convention de sommation d'Einstein sur les indices latins variant de 1 à 3, est employée sauf mention explicite.

Toutes les composantes tensorielles sont rapportées à un repère cartésien orthonormé direct $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, de manière à pouvoir écrire

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v} &= v_k \mathbf{e}_k \\ \forall \mathbf{T} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{T} &= T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

Nous définissons également l'opérateur *gradient* dans \mathbb{R}^3 , noté ∇ et défini par la relation ci-dessous, où $(\bullet)_{,i}$ désigne la dérivation partielle par rapport à la i -ème composante.

$$\nabla(\bullet) = (\bullet)_{,i} \otimes \mathbf{e}_i \quad (\text{I.2})$$

Pour une partie Ω bornée ou non de \mathbb{R}^3 , l'orientation sur S est toujours choisie de telle manière que la normale $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ soit *sortante* au domaine Ω .

ESPACES FONCTIONNELS

Considérons un ouvert Ω de \mathbb{R}^n avec $n \in \mathbb{N}$. Nous définissons alors classiquement certains espaces fonctionnels sur Ω . Ainsi $C^k(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables à l'ordre k de dérivées continues dans Ω .

Dans la littérature portant sur les équations intégrales, on introduit généralement l'espace des fonctions Höldériennes $C^{k,\beta}(\Omega)$ avec $(k, \beta) \in \mathbb{N} \times]0, 1]$ et $f \in C^{k,\beta}(\Omega)$ si f vérifie la propriété,

$$f \in C^k(\Omega) \quad \text{et} \quad \exists C > 0 / \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega^2, \quad \|\nabla^k f(\mathbf{y}) - \nabla^k f(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^\beta \quad (\text{I.3})$$

L'espace $L^p(\Omega)$ avec $p \in \mathbb{N}$ correspond à l'ensemble des fonctions d'exposant p intégrables sur Ω . Pour l'étude des méthodes variationnelles, il est commode de considérer les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$ et admettant la définition suivante [Lions et al.67] :

Definition I.1 On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions u définies dans Ω telles que :

1. lorsque $s = m$ est entier $\nabla^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$,
2. lorsque $s = m + \sigma$ est non-entier et positif (m entier et $0 < \sigma < 1$),

$$u \in H^m(\Omega) \quad \text{et pour} \quad |\alpha| = m, \quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\|\nabla^\alpha u(\mathbf{y}) - \nabla^\alpha u(\mathbf{x})\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{n+2\sigma}} d\mathbf{y} d\mathbf{x} < +\infty \quad (\text{I.4})$$

Pour $s > 0$, $H_0^s(\Omega)$ désigne la fermeture dans $H^s(\Omega)$ de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ et $H^{-s}(\Omega)$ représente le dual de $H_0^s(\Omega)$. Nous noterons également

- ◇ $\tilde{H}^s(\Omega)$ pour $s > 0$, le sous-espace de $H^s(\Omega)$ des fonctions dont le prolongement par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$,

- ◇ $H_{loc}^s(\Omega)$, l'espace des distributions u sur Ω telles que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, la distribution φu appartienne à $H^s(\Omega)$.

Dans la suite du mémoire, nous appellerons $B_n(\mathbf{x}, \varepsilon)$, la boule dans \mathbb{R}^n pour $n \in \mathbb{N}^+$, centrée en \mathbf{x} et de rayon ε .

I.2 Equations associées au problème mécanique

Ce paragraphe fait appel à des notions très classiques de mécanique des milieux continus que l'on peut par exemple trouver dans [Lemaitre et al.85], [Germain86], [Duvaut90] ou [Salençon92]. Après avoir brièvement rappelé les relations découlant des états cinématique et sthénique du milieu, nous nous intéresserons plus particulièrement aux lois de conservation de l'énergie donnant lieu au formalisme thermodynamique des milieux continus. Il en résultera les équations caractéristiques des lois de comportement et d'évolution du système.

Les équations du problème posées, nous présenterons une méthode de résolution couramment utilisée en mécanique numérique, consistant à discrétiser les relations en temps et à résoudre les équations en espace ainsi obtenues à chaque pas de temps au moyen d'une formulation faible.

I.2.1 Présentation du modèle élastoplastique en H.P.P.

ÉQUATIONS MÉCANIQUES DU PROBLÈME

Considérons un milieu occupant un domaine borné ou non, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière S et nous introduisons le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{y})$, caractérisant l'évolution au cours du temps de la position du point \mathbf{y} défini dans la configuration initiale Ω . Nous supposons que Ω est soumis à un chargement volumique $\rho \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$, à un chargement surfacique $\tilde{\mathbf{t}}^0(\mathbf{y}, t)$ sur S_t et à un déplacement imposé $\tilde{\mathbf{u}}^0(\mathbf{y}, t)$ sur S_u sur un intervalle de temps $t \in [0, T]$.

Par la suite nous négligerons toujours les quantités d'accélération pour se ramener à un problème quasi-statique pour lequel la notion de temps physique t disparaît et devient un paramètre cinématique de l'histoire du chargement. Nous nous placerons également dans le cadre des *petites perturbations* de manière à pouvoir constamment confondre la configuration à l'instant t avec Ω et à ne considérer que la partie linéaire du tenseur des déformations.

Compte tenu de toutes ces hypothèses, nous obtenons une première classe d'équations mécaniques et prenant la forme ci-dessous

- ◇ Équations de champ,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.6})$$

- ◇ Équations aux limites,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}^0(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.7})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{t}}^0(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.8})$$

Les relations de domaine représentent les *équations d'équilibre* du milieu et les *équations de compatibilité* du champ des déformations. Il nous reste à introduire la notion de comportement et d'évolution, faisant l'objet du prochain paragraphe.

ÉQUATIONS THERMODYNAMIQUES DU PROBLÈME

La formulation des lois d'état et des lois d'évolution nécessite de satisfaire les principes de thermodynamique ou plus précisément de *thermostatique* [Germain86]. Ces relations reviennent à considérer que chaque élément de matière est à tout instant en état d'équilibre au cours du temps. Notons au passage que la méthode de l'*état local* n'est pas universelle et n'est par exemple pas justifiée en mécanique des fluides. Pour l'étude des solides, cette hypothèse est actuellement communément admise et permet de placer les modèles généralement rencontrés dans un même formalisme.

La présentation retenue dans ce paragraphe est principalement inspirée de [Duvaut90], [Germain86] et [Lemaitre et al.85] et repose sur l'application du premier et du second principe de la thermodynamique, représentant respectivement la conservation de l'énergie et l'existence de processus irréversibles.

Enonce I.1 (Premier Principe)

A tout système matériel quasistatique, il est possible de définir une *énergie interne spécifique* e telle que la dérivée particulaire de l'énergie interne totale soit égale à la somme des puissances des efforts externes et du taux de chaleur reçue.

Soit \mathcal{B} une partie quelconque de Ω . En appliquant le premier principe au système contenu dans \mathcal{B} , il vient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho e \, dV = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \rho r \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{I.9})$$

où r et \mathbf{j} désignent respectivement l'apport spécifique de chaleur par unité de temps et le flux de chaleur. En tenant compte de l'équation d'équilibre (I.5) et du fait que l'égalité précédente est valable pour toute partie de \mathcal{B} de Ω , il vient la forme locale du premier principe.

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho r - \text{div} \mathbf{j} \quad (\text{I.10})$$

Le caractère irréversible d'une transformation est donné par le second principe de la thermodynamique. Une introduction tout à fait élégante, suivant la forme initialement due à Carathéodory, peut être trouvée dans [Germain86] et donne une idée précise des différentes étapes suivies pour bâtir la théorie.

Enonce I.2 (Second Principe)

Etant donné un état d'équilibre \mathcal{E} , il existe dans tout voisinage de \mathcal{E} au moins un état d'équilibre \mathcal{E}' , tel qu'aucune transformation adiabatique ne permette de passer de \mathcal{E} à \mathcal{E}' .

On montre alors en s'aidant du *principe zero* définissant la notion de température absolue T , qu'il existe un repérage associée à T et appelé entropie S . On associe alors à S , l'*entropie*

spécifique notée s et on énonce finalement le second principe sous sa forme classique suivante : pour toute partie \mathcal{B} de Ω et pour toute évolution thermodynamique du système, on a l'inégalité

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho s \, dV \geq \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho r}{T} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dS \quad (\text{I.11})$$

Cette dernière inégalité admet la forme locale suivante

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{\rho r}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{j}}{T} \right) \quad (\text{I.12})$$

Il est intéressant d'éliminer la quantité ρr dans (I.10) en s'aidant de (I.12) et d'introduire l'*énergie libre spécifique* $\psi = e - T s$, ce qui permet d'obtenir l'inégalité de Clausius-Duhem, donnée par

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{\mathbf{j}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (\text{I.13})$$

Le relation (I.13) est une loi très générale indépendante du matériau considéré et que nous chercherons constamment à satisfaire. Intéressons-nous plus particulièrement au cas du milieu élastoplastique. Nous supposons donc par la suite que les phénomènes thermiques sont négligeables et que la température T reste constante. Pour une étude plus générale, nous renvoyons le lecteur à [Lemaitre et al.85] et [Halphen et al.75].

LOIS D'ÉTAT POUR UNE TRANSFORMATION ISOTHERME

Afin de formuler les lois de comportement de tels matériaux, on définit leur état thermodynamique par un ensemble de variables, dites d'état, constitué de grandeurs mesurables et de quantités, n'étant pas nécessairement accessibles expérimentalement. Ces dernières sont qualifiées de *variables internes* et nous les notons de manière formelle $\boldsymbol{\alpha}$, pouvant représenter un ensemble de quantité scalaires ou tensorielles. Le choix de ces quantités est basé sur des observations phénoménologiques et résulte en grande partie de considérations subjectives.

En petites perturbations, nous distinguons la partie réversible $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ de la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$, de la partie irréversible $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et nous introduisons l'hypothèse supplémentaire que $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$.

On admet alors que l'énergie libre spécifique ψ peut se mettre sous la forme $\psi = \tilde{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})$. En introduisant cette définition dans l'inégalité de Clausius-Duhem (I.13), il vient alors

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (\text{I.14})$$

On considère alors toute transformation réversible pour laquelle il n'y a aucune évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et des variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ et qui correspond au comportement élastique du matériau au point étudié. L'inégalité (I.14) est alors vérifiée si

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (\text{I.15})$$

Par analogie à (I.15), il est commode d'introduire les forces thermodynamiques \mathbf{q} associées aux variables d'écroutissage $\boldsymbol{\alpha}$ et définies par

$$\mathbf{q} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{I.16})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem prend finalement la forme ci-dessous

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (\text{I.17})$$

Les relations liant les quantités $\boldsymbol{\sigma}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$, \mathbf{q} et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ ne peuvent être quelconques puisqu'elles doivent satisfaire l'inégalité ci-dessus, stipulant que la dissipation en chaque point du milieu ne peut être que positive. La théorie des *matériaux standard généralisés* consiste à postuler l'existence d'un potentiel de dissipation φ convexe, semi-continu inférieurement, positif et nul en 0 [Halphen et al.75], vérifiant

$$\varphi = \tilde{\varphi}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{q}) \in \partial_{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\boldsymbol{\alpha}})} \tilde{\varphi}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (\text{I.18})$$

où $\partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P} \tilde{\varphi}$ et $\partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \tilde{\varphi}$ désignent respectivement les sous-différentiels par rapport aux variables $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ et $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ de la fonction $\tilde{\varphi}$.

Remarque I.1 Rappelons qu'une définition *simple* du sous-différentiel d'une fonction $\varphi(a)$ au point $a_0 \in E$ avec E un espace de Hilbert, peut se mettre sous la forme suivante

$$\partial_a \varphi(a_0) = \{A \in E^* / \forall a \in E, (A, a - a_0) \leq \varphi(a) - \varphi(a_0)\} \quad (\text{I.19})$$

□

On vérifie alors aisément qu'en imposant les conditions (I.18), on satisfait automatiquement l'inégalité (I.17) en tenant compte de la définition (I.19).

Remarque I.2 Le choix (I.18) nous place implicitement dans le cadre des matériaux standard généralisés initialement proposés dans [Halphen et al.75]. On peut définir une classe de matériaux plus large que celle des matériaux standard généralisés, les *matériaux standard implicites* introduits dans [Saxcé et al.97]. □

Notons que la définition de la dissipation (I.17) fait correspondre en dualité la vitesse des grandeurs cinématiques $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ et les forces associées $(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{q})$. La formulation (I.18) privilégie l'approche cinématique et il est possible d'obtenir une approche sthénique, on introduisant le potentiel dual $\tilde{\varphi}^*$ de $\tilde{\varphi}$ défini par la transformée de Legendre-Fenchel de $\tilde{\varphi}$ comme suit

$$\tilde{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{q}) = \sup_{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\boldsymbol{\alpha}})} \left(\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \tilde{\varphi}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \right) \quad (\text{I.20})$$

et il suffit alors d'avoir les propriétés (I.21) pour vérifier systématiquement le second principe.

$$\varphi^* = \tilde{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{q}) \quad \text{et} \quad (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \in \partial_{(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{q})} \tilde{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{q}) \quad (\text{I.21})$$

Cette forme s'avère souvent plus intéressante, comme lors de la définition du modèle élastoplastique. Notons que le modèle du matériau est alors entièrement déterminé par la donnée de deux fonctions

- ◇ L'énergie interne spécifique de la forme $\psi = \tilde{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})$ permettant de relier les variables de déformations généralisées aux variables de contraintes généralisées,
- ◇ Le pseudo-potentiel de dissipation sous la forme (I.18) ou (I.21).

APPLICATION À UN MATÉRIAU ÉLASTOPLASTIQUE

Pour un matériau élastoplastique, les variables internes α contiennent en chaque point, les informations liées à l'histoire de cet élément de matière et sont qualifiées de *variables d'érouissage*. Si on suppose de plus que le comportement élastique du matériau n'est pas altéré par l'érouissage du milieu, hypothèse justifiée pour les métaux (voir par exemple les arguments donnés dans [François et al.92]), on peut envisager $\tilde{\psi}$ sous la forme suivante.

$$\tilde{\psi}(\varepsilon - \varepsilon^p, \alpha) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) : C : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \Theta(\alpha) \quad (\text{I.22})$$

où $\Theta(\alpha)$ désigne l'énergie d'érouissage que nous supposons par la suite convexe et deux fois différentiable.

Pour définir le domaine d'élasticité i.e. l'ensemble des états (σ, q) pour lesquels la transformation reste réversible, on introduit la fonction de charge $f(\sigma, q)$. L'adoption d'un modèle de plasticité suivant le *principe du travail plastique maximal*, souvent introduit dans la littérature (voir [Halphen et al.87]), nous incite à choisir le potentiel de dissipation sous la forme

$$\tilde{\varphi}^*(\sigma, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\sigma, q) \leq 0 \\ +\infty & \text{si } f(\sigma, q) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

ce qui peut encore s'écrire $\tilde{\varphi}^*(\sigma, q) = I_C$ où I_C représente la fonction indicatrice du domaine d'élasticité \mathcal{C} . Si la fonction $f(\sigma, q)$ est différentiable, le sous-différentiel représentant le cône des normales extérieures, se réduit à la direction normale extérieure à la surface de charge. Il vient alors en appliquant les définitions (I.22) et (I.23), les lois d'état et les lois de normalité :

$$\sigma = C : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad q = \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}(\alpha) \quad (\text{I.24})$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma, q) \quad - \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q}(\sigma, q) \quad (\text{I.25})$$

$$\text{avec } \dot{\lambda} \geq 0, \quad f(\sigma, q) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f(\sigma, q) = 0 \quad (\text{I.26})$$

Remarque I.3 Le fait de s'être placé d'emblée dans le cadre des matériaux standard généralisés, induit implicitement un modèle de plasticité de type *associé*. \square

Ces équations peuvent à présent être résolues et le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ peut être explicitement donné. Supposons qu'il y ait charge au point considéré. Le point (σ, q) reste sur la frontière du domaine d'élasticité et la condition de cohérence $f = 0$ n'évolue pas. Nous pouvons alors écrire

$$\dot{f}(\sigma, q) \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \quad (\text{I.27})$$

Notons qu'il est possible d'exprimer $\dot{\lambda}$ en fonction d'une vitesse, soit de déformation, soit de contrainte.

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{M_\sigma} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \right\rangle \quad \text{avec} \quad M_\sigma = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \quad (\text{I.28})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{M_\varepsilon} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C : \dot{\varepsilon} \right\rangle \quad \text{avec} \quad M_\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : C : \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \quad (\text{I.29})$$

où $\langle y \rangle$ désigne la partie positive de la quantité y donnée par $\langle y \rangle = (y + |y|)/2$.

Notons que, contrairement à l'obtention de (I.28), il nous faut tenir compte de la loi de Hooke $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ pour arriver à (I.29). On peut également remarquer que pour un matériau parfaitement plastique, la relation (I.28) n'est pas définie.

Le fait d'introduire un écrouissage a un effet régularisant sur les solutions recherchées. De plus dans le cas où l'énergie spécifique d'écrouissage $\Theta(\boldsymbol{\alpha})$ est une forme quadratique (comme cela est le cas pour les problèmes avec écrouissage isotrope et cinématique linéaire), on montre par exemple dans [Nguyen77] que le problème d'évolution est unique en contraintes généralisées. Les résultats d'existence de l'état élastostatique sont donnés dans [Johnson78].

Par la suite, nous envisagerons toujours le cas où

$$\Theta(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mathbf{q}^2} = \boldsymbol{\Theta} \quad (\text{I.30})$$

Remarque I.4 Lorsqu'on se place en plasticité parfaite, la définition d'un *bon* cadre fonctionnel nécessite l'introduction de l'espace des *déformations bornées* [Suquet88] et [Temam84]. On constate également l'existence de discontinuités pour les champs de vitesses de déplacement [Suquet88]. Ces travaux font largement appel à la notion de régularisation de Yosida, qui revient à envisager un matériau visco-plastique de type Perzyna de viscosité μ , admettant un pseudo-potential de dissipation $\tilde{\varphi}^*$ différentiable et à effectuer un processus de passage à la limite $\mu \rightarrow 0$ (voir [Duvaut et al.72] et [Johnson76]). \square

MODÈLE AVEC ÉCROUISSAGE ISOTROPE ET CINÉMATIQUE LINÉAIRE

Lors de la mise en œuvre numérique, nous nous limiterons à des matériaux élastoplastiques obéissant au critère de von Mises et rendant compte d'un écrouissage isotrope et cinématique linéaire mais ce choix n'enlève en rien le caractère général de l'étude.

Introduisons alors les forces thermodynamiques $\boldsymbol{\beta}$ et R , désignant respectivement le centre et la variation d'amplitude du domaine d'élasticité $\mathcal{C}(\boldsymbol{\beta}, R)$ et appelons $\boldsymbol{\gamma}$ et p , les variables d'écrouissage correspondantes. Nous avons alors $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\gamma}, p)$ et $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\beta}, R)$ et il vient les relations suivantes

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\gamma}, p) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{1}{2} h p^2 + \frac{1}{3} H \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\gamma} \quad (\text{I.31})$$

$$f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}, R) = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) : \mathbf{J} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_0 + R) \quad (\text{I.32})$$

où \mathbf{J} représente le tenseur déviateur défini par $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, $\mathbf{J} : \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{1}$. Les relations de normalité et les lois d'état s'écrivent alors pour ce modèle sous la forme suivante

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \partial_{\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{\xi}, R), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\lambda} \partial_{\boldsymbol{\gamma}} f(\boldsymbol{\xi}, R), \quad \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta} \quad (\text{I.33})$$

$$\text{avec} \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\xi}, R) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\xi}, R) = 0 \quad (\text{I.34})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{2}{3} H \boldsymbol{\gamma}, \quad R = h p \quad (\text{I.35})$$

BILAN DES ÉQUATIONS

Nous pouvons à ce stade établir le bilan des équations et des inconnues. Après regroupement des différentes relations rencontrées au cours de ce paragraphe, il en résulte que le problème d'évolution en élastoplasticité est régi par le système d'équations suivant

- ◇ **Equations de champ mécaniques** (*équilibre et compatibilité des déformations*),

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.36})$$

- ◇ **Lois d'état** découlant du premier principe

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = C : [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t)] \quad \text{et} \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.37})$$

- ◇ **Conditions aux limites** de type *Dirichlet* et *Neuman*,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}^0(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{t}}^0(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.38})$$

- ◇ **Lois d'évolution** provenant du second principe,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t) = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad -\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.39})$$

- ◇ **Conditions de cohérence.**

$$\dot{\lambda}(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad f(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda}(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{I.40})$$

- ◇ **Conditions initiales** du problèmes permettant d'initialiser toutes les variables.

Il s'agit à présent de résoudre le problème d'évolution ainsi posé. Notons que ces équations font simultanément intervenir les variables en temps t et en espace \mathbf{x} .

I.2.2 Résolution du problème d'évolution par une méthode incrémentale

Une technique couramment employée consiste à envisager une méthode incrémentale. Celle-ci repose sur une discrétisation en temps des équations ci-dessus et on est alors ramené à résoudre à chaque pas de temps un problème non-linéaire en espace.

Remarque I.5 Une technique alternative consiste à mettre en œuvre la *méthode à grand incrément de temps* proposée dans [Ladevèze96]. Dans le cadre de ce mémoire, nous ne nous occuperons pas de savoir, laquelle des deux méthodes est la plus efficace pour résoudre le problème d'évolution élastoplastique. Le choix d'une méthode incrémentale s'est uniquement fait pour des raisons de commodité.

Remarquons seulement que l'algorithme proposé dans le paragraphe II.3 a une structure identique à celui rencontré en appliquant une technique *éléments finis de domaine* standards, faisant l'objet de la section I.3. Une procédure de résolution de type *méthode à grand incrément de temps*, peut donc aisément être déduite des formulations présentées dans ce mémoire. Pour ce faire, nous ne manquerons pas de donner quelques éléments de réponse. \square

Pour obtenir les équations discrétisées en temps, on se propose d'appliquer un schéma d'intégration d'Euler en temps d'ordre θ , avec $0 \leq \theta \leq 1$. Ce type de méthode est caractérisé par un pas de temps Δt_n . Notons que certaines études utilisant des techniques à pas multiples ont été proposées comme dans [Papadopoulos et al.94]. Le choix d'une méthode à un pas, est principalement motivé pour sa simplicité de mise en œuvre numérique. De plus l'étude des algorithmes qui en découlent a donné lieu à de nombreuses publications traitant des propriétés de stabilité, de consistance et de convergence. Citons à titre d'exemple, les travaux de [Simo et al.91], [Moreau76], [Nguyen77], [Ortiz et al.85] et [Simo et al.98].

Pour toute grandeur \mathbf{g} intervenant dans le problème, on construit une suite $\{\mathbf{g}_n\}$ composée des valeurs prises par \mathbf{g} au pas de temps t_n et on force les équations du système à être vérifiées à $t_{n+\theta}$. Introduisons les notations suivantes,

$$t_{n+\theta} = t_n + \theta \Delta t_n \quad (\text{I.41})$$

$$g(x, t_{n+\theta}) = (1 - \theta)g(x, t_n) + \theta g(x, t_{n+1}) \quad (\text{I.42})$$

$$q_n \equiv g(x, t_n) \quad \text{et} \quad g_{n+1} = g_n + \Delta g_{n+1} \quad (\text{I.43})$$

Resultat I.1

Après avoir écrit les relations régissant le système d'évolution au temps $t_{n+\theta}$, nous obtenons le système d'équations en espace, donné par les formulations suivantes et admettant pour inconnues les champs définis à t_{n+1} .

◇ **Equations de champ mécanique** (*équilibre et compatibilité des déformations*),

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \rho \mathbf{f}_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \nabla^s \mathbf{u}_{n+1} \quad (\text{I.44})$$

◇ **Lois d'état** avec notamment la *loi de Hooke*,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_{n+1} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad (\text{I.45})$$

◇ **Conditions aux limites** de type *Dirichlet* et *Neuman*,

$$\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \quad (\text{I.46})$$

◇ **Lois de normalité** définissant les règles d'écoulement plastique,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \lambda_{n+1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{q}_{n+\theta}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n - \lambda_{n+1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{q}_{n+\theta}) \quad (\text{I.47})$$

◇ **Conditions de cohérence** ou de *Kuhn-Tucker*.

$$\lambda_{n+1} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{q}_{n+\theta}) = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_{n+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{q}_{n+\theta}) \leq 0 \quad (\text{I.48})$$

A ces équations s'ajoutent bien évidemment les conditions initiales du problème qui sont nulles dans la majorité des cas.

Lorsque θ prend les valeurs 0, 1/2 ou 1, nous aboutissons respectivement à un schéma d'intégration en temps de type explicite, semi-implicite ou implicite.

Ces équations engendrent l'algorithme de *Retour Radial*, basé sur une méthode de prédiction élastique et d'une éventuelle correction plastique, se traduisant par la projection, au sens de la norme $(\mathbf{C}^{-1}, \Theta^{-1})$, de la prédiction élastique sur le domaine élastique défini à $t_{n+\theta}$. Ce point fait l'objet du prochain paragraphe.

I.2.3 Intégration locale et algorithme de Retour Radial

Pour le problème continu, il est possible de déterminer le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ de deux manières. On peut faire apparaître une vitesse, soit de déformation $\dot{\varepsilon}$, soit de contrainte $\dot{\sigma}$. Dans la construction d'un algorithme d'intégration locale de la loi de comportement, nous sommes amené à faire la même distinction.

Le principe de l'algorithme de Retour Radial, noté par la suite ARR, est de donner pour un état $(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \mathbf{q}_n, \boldsymbol{\alpha}_n)$ défini à un instant t_n , un état au temps t_{n+1} caractérisé par $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p, \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1})$, vérifiant les règles de normalité et les lois d'état et induit par un accroissement fini, soit de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, soit de contrainte $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. On parle alors respectivement d'ARR piloté en déformation et en contrainte.

La démarche mise en œuvre est très simple et est basée sur une méthode de type *prédiction / correction*. On considère ainsi un incrément de déformation ou de contrainte et il en résulte un état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta}^E \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_n + \theta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ ou de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}^E \equiv \boldsymbol{\sigma}_n + \theta\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, dite d'*essai*, reposant sur une réponse élastique du milieu. Si l'état d'essai ne satisfait pas le critère de plasticité, on détermine l'accroissement de déformation plastique et des variables pour vérifier la condition de cohérence.

ALGORITHME DE RETOUR RADIAL PILOTÉ EN DÉFORMATION

Ce schéma d'intégration locale est très utilisé dans les méthodes par éléments finis de domaine basées sur des formulations en déplacement [Simo et al.85] et a été introduit dans les méthodes par équations intégrales dans [Bonnet et al.96].

Il est intéressant d'introduire les parties déviatoriques \mathbf{e} et \mathbf{s} de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. Définissons de plus les contraintes déviatoriques d'essai en utilisant la loi de Hooke.

$$\mathbf{s}_{n+1}^E = \mathbf{s}_n + 2G\Delta\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{I.49})$$

$$\mathbf{s}_{n+\theta}^E = (1 - \theta)\mathbf{s}_n + \theta\mathbf{s}_{n+1}^E \quad (\text{I.50})$$

$$\mathbf{s}_{n+\theta}^E = \mathbf{s}_n + 2G\theta\Delta\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{I.51})$$

Il est également commode d'introduire le vecteur $\hat{\mathbf{n}} \equiv \partial_{\boldsymbol{\xi}} f$ et en tenant compte des notations précédentes, il vient alors

$$\mathbf{s}_{n+\theta} = \mathbf{s}_{n+\theta}^E - 2G\theta \lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \quad (\text{I.52})$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \equiv \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta} - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta}, p_{n+\theta}) = \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}\|} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}_{n+\theta} = \mathbf{s}_{n+\theta} - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta} \quad (\text{I.53})$$

En généralisant l'approche utilisée dans le cas implicite [Simo et al.85], on peut exprimer $\mathbf{s}_{n+\theta}$ en fonction du déviateur d'essai $\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E = \mathbf{s}_{n+\theta}^E - \boldsymbol{\beta}_n$ et on montre que les vecteurs $\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E$ et $\hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}$ sont colinéaires, ce qui permet d'en conclure que

$$\mathbf{s}_{n+\theta} - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta} = \mathbf{s}_{n+\theta}^E - \boldsymbol{\beta}_n - (2G + \frac{2}{3}H)\theta \lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E\|} \quad (\text{I.54})$$

Il ne reste alors qu'à déterminer le multiplicateur plastique $\lambda_{n+1}^\varepsilon$ que l'on obtient en écrivant les conditions de cohérence (I.48).

$$\|\mathbf{s}_{n+\theta} - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_0 + p_{n+\theta}) = 0 \quad (\text{I.55})$$

$$\lambda_{n+1}^\varepsilon = \frac{\|\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_0 + p_n)}{2\theta(G + \frac{H+h}{3})} \quad \text{ou} \quad \lambda_{n+1}^\varepsilon = \frac{1}{2\theta(G + \frac{H+h}{3})} \langle f(\mathbf{s}_{n+\theta}^E - \boldsymbol{\beta}_n, p_n) \rangle \quad (\text{I.56})$$

Remarque I.6 Il est intéressant de déterminer le multiplicateur plastique λ_{n+1} dans le cas d'un schéma *explicite*. En faisant tendre $\theta \rightarrow 0$ dans (I.56), on retrouve l'expression ci-dessous, ce qui permet de donner un sens à $\lambda_{n+1}^\varepsilon$ dans le cas explicite.

$$\lambda_{n+1}^\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{H+h}{3G}} \langle \partial_{\boldsymbol{\xi}} f(\mathbf{s}_n - \boldsymbol{\beta}_n, p_n) : \Delta \mathbf{e}_{n+1} \rangle \quad (\text{I.57})$$

□

Traisons le cas de l'ARR piloté en contrainte. Cet algorithme est rencontré pour les formulations éléments finis de domaine, basées sur un principe mixte comme dans [Simo et al.89].

ALGORITHME DE RETOUR RADIAL PILOTÉ EN CONTRAINTE

Comme lors du calcul de $\dot{\lambda}$, il est possible d'obtenir une formulation en contrainte, ne faisant pas intervenir la loi de Hooke. On pilote alors l'A.R.R. en contrainte et il est intéressant de définir les tenseurs déviatoriques suivants.

$$\mathbf{s}_{n+\theta}^E = \mathbf{s}_n + \theta \Delta \mathbf{s}_{n+1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E = \mathbf{s}_{n+\theta}^E - \boldsymbol{\beta}_n \quad (\text{I.58})$$

$$\mathbf{s}_{n+\theta} - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta} = \boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E - \frac{2H}{3}\theta \lambda_{n+1}^\sigma \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \quad (\text{I.59})$$

Une démarche similaire au cas d'un algorithme piloté en déformation, permet alors de déterminer $\hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}$. Comme précédemment on retrouve la propriété remarquable (I.54) et l'écriture de la condition de cohérence $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta} - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta}, p_{n+\theta}) = 0$ donne finalement le multiplicateur plastique λ_{n+1}^σ et il vient,

$$\frac{2}{3}(H+h)\theta \lambda_{n+1}^\sigma = \|\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_0 + hp_n) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n+1}^\sigma = \frac{3}{2(H+h)\theta} \langle f(\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E, p_n) \rangle \quad (\text{I.60})$$

Remarque I.7 On constate que pour un matériau élastoplastique parfait, l'ARR piloté en contrainte ne donne aucun résultat vu qu'il n'est pas possible d'évaluer λ_{n+1}^σ . □

PROPRIÉTÉS DES ALGORITHMES DE RETOUR RADIAL

Les algorithmes de Retour Radial possèdent des propriétés bien établies issues de l'étude des équations différentielles [Crouzeix et al.84], qui se révèlent déterminantes d'un point de vue numérique. Des résultats de stabilité, de consistance et de convergence des différentes méthodes sont donnés dans [Simo et al.91] et se résument de la manière suivante

- ◊ la propriété de consistance est vérifiée pour tout $\theta \in [0, 1]$,
- ◊ l'ARR est d'ordre 2 pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et d'ordre 1 pour les autres valeurs de α ,
- ◊ l'ARR est stable au sens de la B-stabilité pour $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, i.e. toute perturbation dans les conditions initiales n'est pas amplifiée par l'algorithme.

Les propriétés de consistance et de stabilité entraînant la convergence, on en déduit que les schémas numériques basés sur l'ARR sont convergents pour $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Rappelons que l'ARR fournit un état intermédiaire $(\tilde{\sigma}_{n+1}, \tilde{\varepsilon}_{n+1}, \tilde{\varepsilon}_{n+1}^p, \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\alpha}_{n+1})$ qui satisfait les relations liées au comportement mais ne tient pas compte des équations mécaniques du problème. Ces dernières restent à être vérifiées et font l'objet de la prochaine section.

I.3 Algorithmes élastoplastiques par éléments finis de domaine

Après avoir discrétisé les équations en temps, il nous faut à présent résoudre le problème en espace. On envisage très classiquement une méthode de type élément fini de domaine qui repose dans la grande majorité des cas, sur une formulation variationnelle.

L'objet de ce paragraphe est double

- ◊ présenter brièvement les méthodes classiquement utilisées et les placer dans un formalisme énergétique,
- ◊ montrer qu'il est possible de construire différentes formulations variationnelles associées au problème d'évolution élastoplastique.

I.3.1 Formulation en déplacement

Le principe de la formulation en déplacement repose sur la constatation suivante. Etant donné un champ de déplacement, l'algorithme de Retour Radial en déformation permet de déterminer entièrement l'état élastoplastique χ_{n+1} du système et il reste à satisfaire deux équations mécaniques du système, à savoir les équations d'équilibre et les conditions aux limites du problème.

Il est alors intéressant d'introduire comme en élasticité, une fonctionnelle pour laquelle l'état élastoplastique représente un point-selle, ce qui permet d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité de la solution et de la convergence de la méthode de galerkin associée grâce aux résultats d'analyse convexe [Moreau76] et [Ciarlet82]. En introduisant classiquement l'ensemble des *déplacements admissibles* noté \mathcal{V}_{n+1} et l'ensemble \mathcal{V}_{n+1}^0 définis par

$$\mathcal{V}_{n+1} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) / \mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0 \text{ sur } S_u\} \quad (\text{I.61})$$

$$\mathcal{V}_{n+1}^0 = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) / \mathbf{v}_{n+1} = 0 \text{ sur } S_u\} \quad (\text{I.62})$$

nous allons montrer le résultat suivant

Resultat I.2

Soit \mathbf{u}_{n+1} le champ de déplacement solution du problème élastoplastique au pas de temps t_{n+1} . Alors \mathbf{u}_{n+1} minimise sur l'ensemble \mathcal{V}_{n+1} la fonctionnelle $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathbf{u}}$ définie ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n+1}^{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{n+1}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{v}_{n+1} : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{v}_{n+1} dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{v}_{n+1} dV \\ & - \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \mathbf{v}_{n+1} dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta^2(G + \frac{H+h}{3})} \left\langle f(\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E(\nabla^s \mathbf{u}_{n+1}), \mathbf{q}_n) \right\rangle^2 dV \end{aligned} \quad (\text{I.63})$$

où $\boldsymbol{\chi}_n$ désigne l'état élastoplastique à t_n et $\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E(\nabla^s \mathbf{u}_{n+1})$, le déviateur d'essai de l'ARR piloté en déformation.

Preuve

Considérons la fonctionnelle $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathbf{u}}$ et déterminons le champ \mathbf{u}_{n+1} pour lequel la première variation de $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{n+1})$ est nulle. Il vient alors en tenant compte des relations (I.54) et (I.56).

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\delta u} \in \mathcal{V}_{n+1}^0, \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\delta u} : \mathbf{C} : \left(\nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - (\lambda_{n+1}^{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})(\nabla^s \mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) \right) dV \\ - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\delta u} dV - \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \boldsymbol{\delta u} dS = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

Ces relations sont la traduction sous forme faible des équations régissant le problème discrétisé en temps, pour lequel toutes les quantités ont été écrites en fonction de \mathbf{u}_{n+1} . ■

Il convient de noter que l'équation variationnelle (I.64) est *non-linéaire*. Pour la résoudre, on envisage une méthode de type Newton-Raphson (également rencontrée sous le nom de *méthode d'Usawa*). Nous sommes alors ramené à résoudre le problème itératif suivant

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\delta u} \in \mathcal{V}_{n+1}^0, \langle \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\delta u} \rangle \equiv \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\delta u} : \mathbf{C} : \left(\nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - (\lambda_{n+1}^{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})(\nabla^s \mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) \right) dV \\ - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\delta u} dV - \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \boldsymbol{\delta u} dS = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.65})$$

Schéma itératif de Newton-Raphson

$$\forall \boldsymbol{\delta u} \in \mathcal{V}_{n+1}^0, \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\delta u} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}(\nabla^s \mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\chi}_n) : \nabla^s \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} dV = - \langle \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k), \boldsymbol{\delta u} \rangle \quad (\text{I.66})$$

$$\text{avec } \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - (\lambda_{n+1}^{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) \quad (\text{I.67})$$

Il apparait de façon naturelle dans le schéma, une quantité très intéressante qualifiée d' *Opérateur Tangent Cohérent* que l'on notera CTO par la suite et défini par la relation

$$\text{CTO} \equiv \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) \quad (\text{I.68})$$

Ce tenseur a été introduit pour la première fois dans [Simo et al.85] pour le schéma implicite et représente l'opérateur tangent du schéma numérique (I.66). Nous allons montrer dans la proposition suivante que le CTO diffère de l'opérateur tangent continu.

Resultat I.3

L'Opérateur Tangent Cohérent pour l'algorithme de Retour Radial piloté en déformation est donné par la relation ci-dessous

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) = \mathbf{C} - 2G \left(2G \frac{\theta \lambda_{n+1}^\varepsilon}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E\|} (J - \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) + \frac{\hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{1 + \frac{H+h}{3G}} \right) \quad (\text{I.69})$$

Preuve

La définition du CTO nous permet d'écrire la relation suivante

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) = \mathbf{C} - \mathbf{C} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}(\lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) \quad (\text{I.70})$$

En calculant cette dernière quantité et en tenant compte des expressions ci-dessous, il vient finalement le résultat.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}(\lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) &= \frac{\partial \lambda_{n+1}^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} + \lambda_{n+1}^\varepsilon \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \\ \frac{\partial \lambda_{n+1}^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} &= \frac{1}{2\theta(G + \frac{H+h}{3})} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} : \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{H+h}{3G}} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} : J \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{\partial \xi} : \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{2G\theta}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E\|} [I - \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}] : J \end{aligned} \quad (\text{I.71})$$

avec la définition des tenseurs suivants

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad \text{et} \quad J_{ijkl} = I_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (\text{I.72})$$

et en remarquant que

$$\hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} : J = \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \quad \text{et} \quad [I - \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}] : J = J - \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \quad (\text{I.73})$$

■

Remarque I.8 Dans [Halphen et al.87], on trouve également une formulation en contraintes définie sur l'ensemble des champs statiquement admissibles pour le problème continu en temps. Ce résultat très intéressant sur la plan théorique est difficilement applicable d'un point de vue numérique, puisqu'une approximation *éléments finis* de l'ensemble des champs statiquement admissibles n'est pas aisée à construire. □

I.3.2 Formulation mixte contrainte-déplacement

Quelques formulations basées sur des principes à deux champs ont également été proposées dans la littérature. Citons [Carstensen97] qui présente une fonctionnelle faisant intervenir comme inconnues principales, le champ de déplacement \mathbf{u}_{n+1} et le champ des déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$. Ce résultat fait cependant apparaître le pseudo-potential de dissipation ϕ exprimé dans l'espace des variables cinématiques, ce qui ne rentre pas dans le cadre des algorithmes de Retour Radial présentés.

Une formulation plus intéressante, peut être trouvée dans [Simo et al.89] et provient d'un principe de type Hellinger-Reissner, appliqué au cas élastoplastique. En introduisant l'espace fonctionnel $\mathcal{S}_{n+1} = \{\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)\}$, nous allons montrer le résultat suivant mettant en jeu le couple $(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$.

Resultat I.4

Soit $(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$ le champ de déplacement et le champ de contrainte, solution du problème élastoplastique au pas de temps t_{n+1} . Alors le couple $(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$ est un point-selle de la fonctionnelle \mathcal{J}_{n+1}^H donnée ci-dessous et définie sur $\mathcal{V}_{n+1} \times \mathcal{S}_{n+1}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n+1}^H(\mathbf{v}_{n+1}, \boldsymbol{\tau}_{n+1}) = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}_{n+1} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\tau}_{n+1} dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}_{n+1} : \nabla^s \mathbf{v}_{n+1} dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{v}_{n+1} dV \\ & - \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \mathbf{v}_{n+1} dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{3}{4G\theta^2(H+h)} \left\langle f(\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}), \boldsymbol{\chi}_n) \right\rangle^2 dV \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

où $\boldsymbol{\chi}_n$ désigne l'état élastoplastique à t_n et $\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})$, le déviateur d'essai intervenant dans l'ARR piloté en contrainte.

Preuve

Soit $(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$ un couple représentant le point-selle de \mathcal{J}_{n+1}^H . Il en résulte de l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle et des relations (I.54) et (I.60), que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\sigma} : \left(-\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - \frac{1}{2G} (\lambda_{n+1}^{\sigma} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) \right) dV = 0 \quad (\text{I.75})$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\delta u} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\delta u} dV + \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \boldsymbol{\delta u} dS \quad (\text{I.76})$$

$$\forall (\boldsymbol{\delta u}, \boldsymbol{\delta\sigma}) \in \mathcal{V}_{n+1}^0 \times \mathcal{S}_{n+1} \quad (\text{I.77})$$

La première relation n'est autre que la loi de Hooke combinée avec l'expression explicite de la $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$, exprimée sous forme faible tandis que la seconde représente l'équation d'équilibre, ce qui achève la démonstration. ■

Il est intéressant de noter que ce système d'équations est composé d'un équation linéaire (relation d'équilibre) et d'une équation non-linéaire traduisant la relation de comportement. On montre aisément que l'opérateur tangent cohérent global de la méthode de Newton-Raphson associé au schéma (I.75) est *symétrique*. Il en résulte alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}), \boldsymbol{\delta u} \rangle & \equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\sigma} : \left(-\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - \frac{1}{2G} (\lambda_{n+1}^{\sigma} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) \right) dV \\ \langle \mathbf{r}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\delta\sigma} \rangle & \equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\delta u} dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\delta u} dV - \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \boldsymbol{\delta u} dS \end{aligned} \quad (\text{I.78})$$

Schéma itératif de Newton-Raphson

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} : \left(-\mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} (\lambda_{n+1}^{\boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) \right) : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} dV + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} dV \\ = - \langle \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k), \delta \boldsymbol{\sigma} \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.79})$$

$$\int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} dV = - \langle \mathbf{r}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}^k), \delta \mathbf{u} \rangle, \quad \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{V}_{n+1}^0 \times \mathcal{S}_{n+1} \quad (\text{I.80})$$

$$\text{avec } (\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1}) = (\mathbf{u}_{n+1}^k, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k) + (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{k+1}, \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1}) \quad (\text{I.81})$$

L'opérateur tangent global est entièrement déterminé en tenant compte de l'expression du multiplicateur plastique pour l'ARR piloté en contrainte, ce qui amène aux relations ci-dessous

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} (\lambda_{n+1}^{\boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) &= \frac{\partial \lambda_{n+1}^{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} + \lambda_{n+1}^{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ \frac{\partial \lambda_{n+1}^{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \frac{3}{2\theta(H+h)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} : \frac{\partial \xi_{n+\theta}^E}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{3}{2(H+h)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{\partial \xi} : \frac{\partial \xi_{n+\theta}^E}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{\theta}{\|\xi_{n+\theta}^E\|} [\mathbf{J} - \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}] \end{aligned} \quad (\text{I.82})$$

Même si cette formulation qui s'apparente à une méthode de type Hellinger-Reissner, est lourde à mettre en œuvre sur le plan numérique, elle a l'intérêt de montrer qu'il est possible comme en élasticité de construire des fonctionnelles pour lesquelles la solution du problème d'évolution élastoplastique représente un point-selle.

En plus, elle permet de construire dans le paragraphe suivant une représentation très générale de type Hu-Washizu qui englobe les deux formulations précédentes comme cas particuliers. La méthodologie ainsi mise en évidence permettra de bien comprendre les techniques de résolution développées dans le cadre des éléments finis de frontière.

I.3.3 Formulation générale de type Hu-Washizu

Nous proposons dans ce paragraphe un principe s'apparentant à une formulation de type Hu-Washizu et consistant à chercher une fonctionnelle faisant intervenir l'état élastoplastique total $\boldsymbol{\chi}_{n+1}$. Tous les algorithmes mis en œuvre dans ce travail sont en fait regroupés dans ce principe. La présentation retenue est inspirée des travaux de [Simo et al.89] et [Simo et al.98]. Enonçons alors le résultat suivant

Resultat I.5

Soit $\boldsymbol{\chi}_{n+1} = (\mathbf{u}, \mathbf{t}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda)_{n+1}$ la solution au pas de temps t_{n+1} du problème mécanique d'évolution élastoplastique. Alors, connaissant $\boldsymbol{\chi}_n$, l'état élastoplastique $\boldsymbol{\chi}_{n+1}$ est un point-selle de la fonctionnelle $\bar{L}(\boldsymbol{\chi}_{n+1})$ définie ci-dessous pour $\boldsymbol{\chi}_{n+1} \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(S_u) \times (L^2(\Omega))^5 \times K$, où K désigne le cône positif donné par $K = \{\boldsymbol{\gamma} \in L^2(\Omega), \boldsymbol{\gamma} \geq 0\}$

$$\bar{L}(\boldsymbol{\chi}_{n+1}) = \int_{\Omega} \rho \psi_{n+1} dV + \int_{\Omega} \mathcal{D}_n^{n+1} dV - \mathcal{P}_{n+1}^{ext} - \int_{\Omega} \frac{\lambda_{n+1}}{\theta} f(\nabla W_{n+\theta}, \mathbf{q}_{n+\theta}) dV \quad (\text{I.83})$$

avec les notations suivantes

$$\rho\psi_{n+1} = W_{n+1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : (\nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \quad (\text{I.84})$$

$$\mathcal{D}_n^{n+1} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \nabla W_{n+1} - (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n) \cdot \mathbf{q}_{n+1} \quad (\text{I.85})$$

$$\mathcal{P}_{n+1}^{ext} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{n+1} \cdot \mathbf{u}_{n+1} dV + \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \mathbf{u}_{n+1} dS + \int_{S_u} \mathbf{t}_{n+1} \cdot (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0) dS \quad (\text{I.86})$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (\text{I.87})$$

$$\nabla W_{n+\theta} = \theta \nabla W_{n+1} + (1 - \theta) \nabla W_n \quad (\text{I.88})$$

Notons que W_{n+1} représente l'énergie de déformation élastique du système au pas de temps t_{n+1} et $\rho\psi_{n+1}$, l'énergie libre spécifique *totale*. La quantité \mathcal{P}_{n+1}^{ext} désigne le travail des efforts et de liaison. La quantité \mathcal{D}_n^{n+1} est plus difficilement interprétable physiquement et est caractéristique de la dissipation entre t_n et t_{n+1} .

Preuve

En écrivant les conditions de stationnarité de cette fonctionnelle, on obtient les équations sous forme faible, du problème élastoplastique discrétisé en temps. Il en résulte les équations variationnelles du système.

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{u} \equiv \int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 dS = 0 \quad (\text{I.89})$$

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{t} \equiv - \int_{S_u} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0) dS = 0 \quad (\text{I.90})$$

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} \equiv \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} : [\nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}] dV = 0 \quad (\text{I.91})$$

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : [-\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \nabla W_{n+1} + \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \lambda_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+\theta})] dV = 0 \quad (\text{I.92})$$

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \equiv - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p : [\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \lambda_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+\theta})] dV = 0 \quad (\text{I.93})$$

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \boldsymbol{\alpha} \equiv \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot [\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \mathbf{q}_{n+1}] dV = 0 \quad (\text{I.94})$$

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{q} \equiv - \int_{\Omega} \delta \mathbf{q} \cdot [\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n + \lambda_{n+1} \partial_{\mathbf{q}} f_{n+\theta}] dV = 0 \quad (\text{I.95})$$

$$D\bar{L}_{n+1} \cdot \delta \lambda \equiv \int_{\Omega} \delta \lambda f(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{q}_{n+\theta}) dV = 0 \quad (\text{I.96})$$

Ces relations sont écrites pour tous les champs variés $\delta \boldsymbol{\chi} \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(S_u) \times (L^2(\Omega))^5 \times K$, avec $\delta \boldsymbol{\chi} = (\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{t}, \delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \delta \mathbf{q}, \delta \boldsymbol{\alpha}, \delta \lambda)$ et on achève ainsi la démonstration. ■

Il est intéressant de noter que cette formulation englobe *tous* les schémas de résolution numérique. Ainsi si les équations (I.96), (I.95), (I.94), (I.93) et (I.91) sont satisfaites en tout point du domaine Ω , on retrouve la formulation mixte de type Hellinger-Reissner. Si de plus on

choisit σ_{n+1} de manière à vérifier automatiquement (I.92), on obtient la formulation classique en déplacement.

Numériquement, le schéma en déplacement repose toujours sur l'écriture des lois de comportement et d'évolution, aux points de Gauss de chaque élément fini de domaine. On constate de ce fait que cette opération revient à choisir pour champ varié, des mesures de Dirac concentrées aux points de Gauss. Dans tous les cas, les équations finales sont partitionnées en deux groupes, le premier étant résolu au niveau *global* de la structure et le second au niveau *local* (généralement aux points de Gauss) et on peut appliquer toutes les méthodes de décomposition par sous-domaines [Carstensen97].

Conclusion

Ce chapitre a permis de rappeler le système d'équations régissant le modèle de l'élastoplasticité en petites transformations et a introduit un cadre mathématique de l'étude. Deux aspects intéressants obtenus dans ce chapitre méritent d'être soulignés :

- ◇ La résolution des équations discrétisées en temps conduit à l'intégration locale qui est commune à toute les méthodes de résolution numérique du problème incrémental. L'algorithme de Retour Radial qui en découle et qui donne explicitement le multiplicateur plastique peut être piloté soit en déformation, soit en contrainte.
- ◇ Nous avons montré qu'il est possible de construire différentes formulations variationnelles du problème élastoplastique sous forme incrémentale pour un matériau avec écrouissage isotrope et cinématique linéaire. Ces formulations sont à la base de toutes des méthodes des éléments finis de domaine.

Après avoir défini le cadre de cette étude et rappelé les méthodes des éléments finis de domaine qui sont généralement utilisées pour résoudre ce type de problème, nous allons montrer dans le prochain chapitre comment intégrer les approches par équations intégrales dans la résolution d'un problème d'évolution élastoplastique.

Représentations intégrales et méthodes des équations intégrales

Introduction

Les formulations par éléments finis de frontière en *élasticité* reposent sur la notion de représentation intégrale du champ de déplacement, qui à l'aide d'une quasi-inversion de l'opérateur de Lamé-Navier permet d'explicitier toute solution des équations de champ en fonction des informations sur la frontière. Cette technique intégrale peut aussi s'étendre à des problèmes élastoplastiques du fait de la partition de la déformation totale en une déformation élastique et une déformation plastique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \rho \mathbf{f}_{n+1} = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \nabla^s \mathbf{u}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \mathbf{u}_{n+1} \text{ solution de l'équation de Lamé-Navier} \\ \operatorname{div} [\mathbf{C} : (\nabla^s \mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)] + \rho \mathbf{f}_{n+1} = 0 \end{array} \right. \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \nabla^s \mathbf{u}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{array} \right.$$

La forme des équations ci-dessus montre que la résolution du problème d'évolution élastoplastique se ramène à celle d'un problème d'élasticité linéaire en traitant les déformations plastiques comme des déformations initiales d'un type particulier.

Ce chapitre traite de l'obtention de la représentation intégrale du champ de déplacement issue des équations précédentes et des algorithmes de résolution du problème d'évolution élastoplastique qui en découle.

Nous rappellerons dans le premier paragraphe certains résultats de géométrie différentielle en insistant sur la notion de régularité d'une surface, notion essentielle pour bien fixer le cadre fonctionnel des densités définies sur une surface. Cette révision géométrique permettra de montrer dans quelles conditions les résultats connus pour les surfaces régulières peuvent être étendus au cas des variétés polyédrales comportant des singularités géométriques.

Nous montrons dans le second paragraphe une méthode systématique pour obtenir une représentation intégrale du champ de déplacement, qui s'écrira sous la forme d'une somme de potentiels définis sur la frontière du domaine et de potentiels volumiques dont les densités représentent les forces de volume et les déformations plastiques.

Si l'approche choisie, basée sur la théorie des distributions, peut paraître plus abstraite que l'approche classique, elle a l'avantage de conférer une structure mathématique rigoureuse à l'étude des équations intégrales et de regrouper de manière élégante sous le même formalisme aussi bien les approches qualifiées de directes et d'indirectes, que les problèmes en milieu borné et en milieu infini, ce dernier cas représentant un domaine d'application de prédilection des éléments finis de frontière.

Signalons que cette présentation se révèle aussi très intéressante en mécanique de la rupture, car elle formule directement le problème en terme de *saut* de vecteur-contrainte et de déplacement. Cette dernière quantité une fois connue, permet d'obtenir directement les facteurs d'intensité de contrainte (voir par exemple [Bui77] et [Levan88]). Nous n'aborderons pas explicitement ce type de problème mais les formulations établies pourront être aisément étendues à des milieux fissurés, bornés ou non.

Le dernier paragraphe sera consacré aux algorithmes de résolution des équations intégrales déduites des représentations intégrales obtenues précédemment. Nous montrerons que les équations se réduisent formellement à un système de deux équations, l'une linéaire et l'autre non-linéaire, dont les inconnues principales sont soit $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$, soit $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$. L'algorithme est donc directement piloté en contrainte ou en déformation, le champ de déplacement \boldsymbol{u}_{n+1} devenant du coup une information secondaire. Enfin, nous montrerons comment incorporer les algorithmes d'intégration locale présentés dans le chapitre I dans les schémas de résolution numérique du problème d'évolution élastoplastique par les éléments finis de frontière.

II.1 Rappels de géométrie différentielle

Les méthodes des équations intégrales reposent sur le principe que le problème initial aux dérivées partielles, posé en terme d'un champ de déplacement \mathbf{u} sur un domaine Ω , peut être reformulé en un problème sur la frontière S de Ω ne faisant intervenir que les traces de \mathbf{u} sur S .

On conçoit alors l'importance des notions de *surface* et de fonctions ou densités définies sur S qui doivent être introduites avec le plus grand soin. Ce travail s'avèrera essentiel dans l'étude réalisée dans le chapitre III, où l'obtention des équations intégrales sera fortement assujettie à la régularité des densités des opérateurs intégraux. Certains résultats auxquels nous ferons appel sont très classiques mais par souci de clarté et d'autonomie, nous faisons ce rappel de géométrie différentielle pour bien fixer les définitions et les propriétés qui seront indispensables pour la suite.

Du point de vue de la modélisation du problème mécanique, les domaines rencontrés dans la pratique comportent très généralement des *arêtes* et des *coins*. Ces singularités géométriques nécessitent une modélisation et une analyse mathématique rigoureuse et feront largement l'objet de la discussion qui suit.

Si l'on écarte les considérations de topologie, on peut se représenter une surface comme une *variété différentielle* [Lafontaine96] ou [Egorov et al.97], notion qui est constamment utilisée dans l'étude d'équations faisant intervenir des opérateurs surfaciques (voir [Wendland87a] et [Schwab et al.92a]). Dans le cadre de ce mémoire, nous allons brièvement rappeler comment il est possible de se ramener à cette description de S , en mettant en évidence les points délicats de la construction.

La présentation suivie reprend dans les grandes lignes celle de [Wloka87], auquel nous renvoyons le lecteur pour un exposé plus complet et pour se rendre compte de la complexité du problème dès que l'on considère des ouverts admettant des singularités géométriques. Cette approche est reprise par différents auteurs comme par exemple dans [Hackbusch92].

RÉGULARITÉ D'UNE SURFACE ET PARAMÉTRISATION LOCALE NORMALE

Soit Ω_1 un ouvert borné de \mathbb{R}^3 . Nous définissons le domaine $\Omega_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_1$ et la frontière $S = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$. La surface bornée S peut alors être caractérisée par une propriété de régularité de type $N^{k,\beta}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\beta \in [0, 1]$. Celle-ci définie ci-dessous a également été introduite dans [Nečas67].

Definition II.1

Soit S la frontière d'un domaine borné Ω_1 . On dit que S est de régularité $N^{k,\beta}$, s'il existe un recouvrement fini de S par des ouverts $(\mathcal{U}_i)_{i \in [1, M]}$ tel que pour tout $i \in [1, M]$, il existe un repère orthonormé \mathcal{R}_i , deux réels positifs (d_i, h_i) et une fonction α_i de classe $C^{k,\beta}$ sur le voisinage \mathcal{U}_i , vérifiant les propriétés

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in B_2(0, d_i), \quad (\boldsymbol{\xi}, \alpha(\boldsymbol{\xi})) \in \mathcal{U}_i \quad (\text{II.1})$$

$$\forall (\boldsymbol{\xi}, \delta) \in (B_2(0, d_i) \times]-h_i, 0]), \quad (\boldsymbol{\xi}, \alpha(\boldsymbol{\xi}) + \delta) \in \Omega_1 \quad (\text{II.2})$$

$$\forall (\boldsymbol{\xi}, \delta) \in (B_2(0, d_i) \times]0, h_i]), \quad (\boldsymbol{\xi}, \alpha(\boldsymbol{\xi}) + \delta) \in \Omega_2 \quad (\text{II.3})$$

où $(\boldsymbol{\xi}, \delta)$ désigne la décomposition sur le repère $\mathcal{R}_i \equiv (\mathbf{f}_k^{(i)})_{k \in [1, 3]}$ du vecteur $\xi_1 \mathbf{f}_1^{(i)} + \xi_2 \mathbf{f}_2^{(i)} + \delta \mathbf{f}_3^{(i)}$. On vérifie alors la propriété $\|(\boldsymbol{\xi}, \delta)\|^2 = \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \delta^2$.

On dira également que S admet une *paramétrisation locale normale* en tout point $\mathbf{z} \in S$.

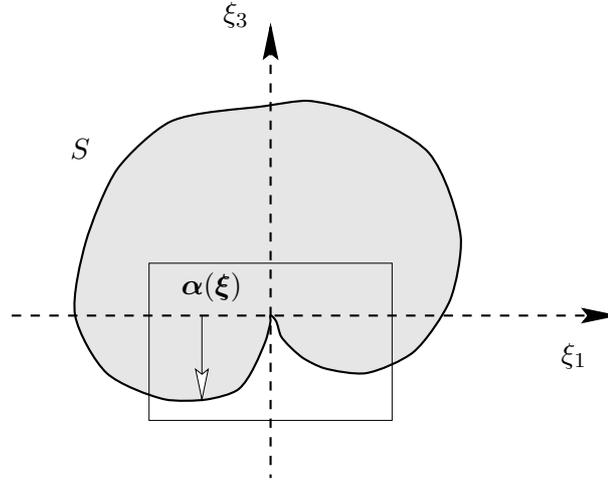


Figure II.1 : Régularité d'une surface

On constate que cette définition confère un rôle privilégié à la troisième direction \mathbf{f}_3 , naturellement prise comme le vecteur normal à la surface lorsqu'on se place en un point régulier [Kupradze et al.79]. Cette définition est très intuitive et revient à projeter l'élément de surface contenu dans le cylindre d'axe \mathbf{f}_3 , de hauteur h_i et rayon d_i sur un plan de normale \mathbf{f}_3 .

RÉGULARITÉ D'UN DOMAINE ET PARTITION DE L'UNITÉ

La propriété de régularité $N^{k,\beta}$ n'est malheureusement pas suffisamment commode pour définir simplement les notions de *trace* et de *relèvement* qui seront constamment évoquées dans ce travail. La trace correspond à la valeur prise sur S par une fonction définie dans un voisinage de \mathbb{R}^3 de la frontière et le relèvement, à un prolongement dans un voisinage volumique d'une densité de support S .

On lui préfère par conséquent une définition plus intrinsèque basée sur la notion de régularité $C^{k,\beta}$ d'un domaine ouvert borné Ω_1 . Cette approche est utilisée dans la quasi-majorité des travaux traitant de problèmes d'équations aux dérivées partielles (voir [Wloka87], [Brezis83], [Mikhlin et al.86] et [Hackbusch92]).

Definition II.2 Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\beta \in [0, 1]$. Nous dirons que Ω_1 est de classe $C^{k,\beta}$, si pour tout $\mathbf{z} \in S$, il existe un voisinage $U \in \mathbb{R}^3$ de \mathbf{z} tel qu'il existe une application bijective ϕ définie par $\phi : B_2(0, 1) \times]-1, 1[\rightarrow U$, vérifiant les propriétés

$$\phi \in C^{k,\beta}(B_2(0, 1) \times]-1, 1[) \quad \text{et} \quad \phi^{-1} \in C^{k,\beta}(U) \quad (\text{II.4})$$

$$\phi^{-1}(U \cap \Omega_1) = B_2(0, 1) \times]-1, 0[\quad \text{et} \quad \phi^{-1}(U \cap \Omega_2) = B_2(0, 1) \times]0, 1[\quad (\text{II.5})$$

$$\phi^{-1}(U \cap S) = B_2(0, 1) \times \{0\} \quad (\text{II.6})$$

où $B_2(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ désigne la boule centrée en 0 de rayon 1.

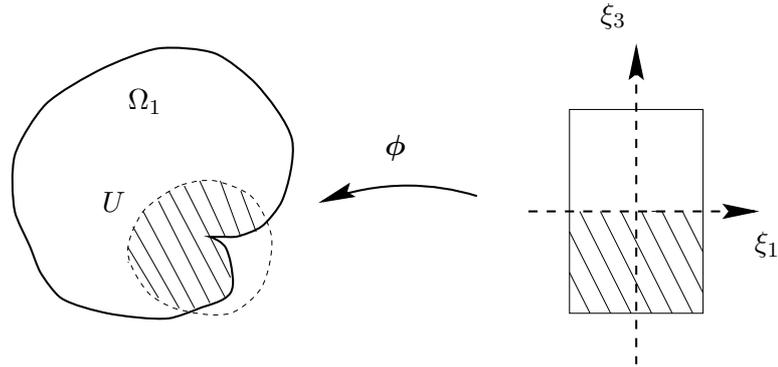


Figure II.2 : Régularité d'un domaine

Remarque II.1 Il est important de constater que la présence d'un coin ou d'une arête ne confère à Ω_1 qu'une régularité $C^{0,1}$, même si le domaine est plus régulier *presque partout* ailleurs. Pour nous en convaincre, considérons en effet la géométrie très simple d'un cube. Compte tenu de la définition (II.2), nous pouvons seulement affirmer que $\Omega_1 \in C^{0,1}$ alors que celui-ci est de classe C^∞ *presque partout*, excepté aux points situés sur les arêtes. La définition (II.2) bien que très restrictive permettra néanmoins de définir une topologie sur S . \square

La définition (II.2) permet alors de construire un atlas de S au moyen de la donnée des voisinages $(U^i)_{i \in [0, M]}$ et de conférer à S la structure de variété différentielle, comme dans [Mikhlin et al.86] et [Egorov et al.97].

Resultat II.1

Soit Ω_1 un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^3 de classe $C^{k, \beta}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$, une famille finie d'ouverts bornés $(U^i)_{i \in [0, M]} \in \mathbb{R}^3$, telle que l'on puisse construire une famille d'ouverts de S et une application, notée $(\mathcal{U}_i, \vartheta_i)_{i \in [1, M]}$ avec les propriétés

$$U^0 \subset\subset \Omega_1, \quad \bar{\Omega}_1 \subset \bigcup_{i=0}^{i=M} U^i \quad \text{et} \quad S = \bigcup_{i=1}^{i=M} \mathcal{U}_i \quad \text{avec} \quad \forall i \in [1, M], \quad \mathcal{U}_i = U^i \cap S \quad (\text{II.7})$$

$$\forall \xi \in B_2(0, 1), \quad \vartheta_i(\xi) = \phi^i(\xi, 0) \quad \text{et} \quad (\phi^i)_{i \in [1, M]} \quad \text{vérifiant la définition (II.2)} \quad (\text{II.8})$$

Preuve

Nous reprenons la démonstration dans [Hackbusch92]. compte tenu de sa relative simplicité, nous nous proposons de la rappeler brièvement.

Comme Ω_1 est de classe $C^{k, \beta}$, il existe pour tout point $z \in S$, un couple (U_z, ϕ_z) vérifiant la définition (II.2). Soit $(V^j)_{j \in \mathbb{N}}$, un ensemble d'ouverts satisfaisant $V^j \subset\subset \Omega_1$ donné par

$$V^j \equiv \{x \in \Omega_1 / \text{dist}(x, S) > 1/j\}$$

L'ensemble $\bigcup_{z \in S} U_z \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V^j$ constitue alors un recouvrement de Ω_1 par des ouverts. Le domaine Ω_1 étant *compact*, il existe de ce fait un recouvrement *fini* de $\bar{\Omega}_1$ composé de $U^i \equiv U_{z_i}$

pour $i = [1, M]$, avec $(z_i)_{i \in [1, M]}$ un nombre fini de points de S , et d'au moins un des ouverts V^j que nous notons U^0 .

La famille de *cartes* $(\phi^i)_{i \in [1, M]}$ est donnée par $(\phi_{z_i})_{i \in [1, M]}$ et on choisit $(\vartheta_i)_{i \in [1, M]}$ comme les restrictions à S des $(\phi^i)_{i \in [1, M]}$ ■

Le résultat (II.1) permet de construire naturellement un système de coordonnées associé à S . On note de plus que la donnée de $(\mathcal{U}_i, \vartheta_i)_{i \in [1, M]}$ représente un *atlas* de S où chaque ouvert \mathcal{U}_i de S est mis en bijection avec $B_2(0, 1)$ conformément à la définition (II.2).

Remarque II.2 On peut noter que le résultat (II.1) et la définition (II.1) sont très similaires mais cette dernière est moins générale puisqu'elle impose une forme particulière des cartes $\vartheta(\xi)$. □

[Wloka87] a montré que si S possède la propriété de régularité $N^{k, \beta}$, alors le domaine Ω_1 est de classe $C^{k, \beta}$. Il est possible de prouver que ces deux notions sont équivalentes lorsque $k \geq 1$. Dans le cadre de cette étude, il n'existe à notre connaissance aucune correspondance établie pour ces deux définitions pour le cas lipschitzien. Ceci a peu d'importance dans la mesure où la régularité $N^{0,1}$ sera entièrement suffisante puisqu'elle entraîne $\Omega_1 \in C^{0,1}$ et de ce fait, la définition (II.1) est un cas particulier de (II.2).

Dans toute la suite du mémoire, nous supposons toujours qu'il existe en tout point de la surface S , une représentation paramétrique normale de classe lipschitzienne, i.e. que S est régulière de classe $N^{0,1}$.

La dernière notion dont nous aurons besoin est la *partition de l'unité*. Nous nous contenterons d'énoncer le résultat suivant, sachant qu'une démonstration peut être trouvée dans [Wloka87].

Resultat II.2

Soit une famille finie d'ouverts $(U^i)_{i \in [0, M]}$ satisfaisant la propriété suivante

$$\bar{\Omega}_1 \subset \bigcup_{i=0}^{i=M} U^i \quad \text{et} \quad U^0 \subset\subset \Omega_1 \quad (\text{II.9})$$

alors il existe un ensemble fini de fonctions lisses $\sigma_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ pour $i \in [1, M]$, telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_1, \quad \sum_{i=0}^{i=M} \sigma_i(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall i \in [1, M], \quad \text{supp}(\sigma_i) \subset U^i \quad \text{et} \quad \sigma_i \geq 0 \quad (\text{II.10})$$

Notons que cette définition induit naturellement une partition de l'unité propre à S associée aux ouverts $(U_i)_{i \in [1, M]}$ et composée des fonctions $(\sigma_i)_{i \in [1, M]}$ restreintes aux points de la frontière.

FONCTIONS DÉFINIES SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE

Tous les éléments sont à présent à notre disposition pour définir la notion de régularité d'une fonction de support S qui s'énonce de la manière suivante.

Definition II.3

Soit Ω_1 un ouvert de classe $C^{k,\beta}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\beta \in [0,1]$ tels que $k + \beta \geq 1$. Pour tout couple (p, γ) tel que $p \leq k$ et $\gamma \leq \beta$, l'espace $C^{p,\gamma}(S)$ est défini comme l'ensemble des fonctions $\mathbf{v} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, telles que

$$\forall i \in [1, M], (\sigma_i \mathbf{v}) \circ \boldsymbol{\vartheta}_i \in C_0^{p,\gamma}(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\|_{C^{p,\gamma}(S)} \equiv \sum_{i=1}^{i=M} \|(\sigma_i \mathbf{v}) \circ \boldsymbol{\vartheta}_i\|_{C_0^{p,\gamma}(\mathbb{R}^2)}$$

De la même manière, nous introduisons l'espace $H^s(S)$ pour $s \leq k + \beta$ comme l'ensemble des fonctions $\mathbf{v} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, telles que

$$\forall i \in [1, M], (\sigma_i \mathbf{v}) \circ \boldsymbol{\vartheta}_i \in H_0^s(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{H^s(S)} \equiv \sum_{i=1}^{i=M} \left((\sigma_i \mathbf{v}) \circ \boldsymbol{\vartheta}_i, (\sigma_i \mathbf{w}) \circ \boldsymbol{\vartheta}_i \right)_{H_0^s(\mathbb{R}^2)}$$

On montre que la définition (II.3) des espaces fonctionnels sur S est bien indépendante du système de coordonnées locales $(\mathcal{U}_i, \boldsymbol{\vartheta}_i)_{i \in [1, M]}$ choisi.

Remarque II.3 Il est essentiel de remarquer que la définition de la régularité d'une fonction définie sur S est intimement liée à la régularité du domaine puisque $\boldsymbol{\vartheta}$ apparaît dans cette construction. Une conséquence de la définition (II.3) est qu'il n'est pas possible de définir (du moins dans le cadre classique de la géométrie différentielle) la classe de fonction $C^{1,\beta}(S)$ pour S présentant des singularités géométriques de type arête ou coin. \square

RÉGULARITÉ LOCALE DE FONCTIONS DÉFINIES SUR S

Les remarques (II.1) et (II.3) montrent que les définitions (II.2) et (II.3) rendent compte de propriétés *globales* sur S . Une caractérisation *locale* peut être introduite par la définition suivante utilisant directement le système de coordonnées locales $(\mathcal{U}_i, \alpha_i)_{i \in [1, M]}$ apparaissant dans la définition (II.1).

Definition II.4

Soit $\mathbf{z} \in S$ avec S de régularité $N^{k,\beta}$. Il existe alors une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}_i, \alpha_i, \mathcal{R}_i)$ avec i fixé dans un voisinage de S au point $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\eta}, \alpha_i(\boldsymbol{\eta}))$. On dit que pour $l + \gamma \geq 1$, la frontière S est de classe $N^{l,\gamma}$ au voisinage de \mathbf{z} , s'il existe $(d(\mathbf{z}), h(\mathbf{z}))$ tel que

$$\alpha(\boldsymbol{\xi}) \in C^{l,\gamma}(B_2(\boldsymbol{\eta}, d(\mathbf{z}))) \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\xi}, \alpha(\boldsymbol{\xi})) \in S \quad (\text{II.11})$$

$$\forall \delta \in]-h(\mathbf{z}), 0[, (\boldsymbol{\xi}, \alpha(\boldsymbol{\xi}) + \delta) \in \Omega_1 \quad \text{et} \quad \forall \delta \in]0, h(\mathbf{z})[, (\boldsymbol{\xi}, \alpha(\boldsymbol{\xi}) + \delta) \in \Omega_2 \quad (\text{II.12})$$

On introduit de manière identique à la définition (II.3), des classes de fonctions définies localement dans un voisinage de S en \mathbf{z} .

Remarque II.4 Il est intéressant de noter que l'on peut avoir $l \geq k$ et $\gamma \geq \beta$. Le caractère *local* de cette définition provient du fait que le système de coordonnées locales fait intervenir \mathbf{z} . Pour des géométries pouvant présenter des singularités de type arête ou coin, les dimensions (d, h) du voisinage d'un point régulier \mathbf{z} dans lequel la surface reste localement régulière, doit nécessairement dépendre de \mathbf{z} puisque plus on se rapproche d'un point singulier, plus ces dimensions deviennent petites. \square

Dans toute la suite, nous supposons toujours que S est de classe $N^{0,1}$ et peut être définie comme une variété polyédrale, i.e. S peut se décomposer en un nombre fini de surfaces ouvertes régulières de classe $C^{1,\beta}$. Un élément de surface de classe $C^{1,\beta}$ est également appelé surface de *Liapunov*.

$$S \in N^{0,1} \quad \text{et} \quad S = \bigcup_{n=1}^{n=N} S^{(n)} \quad \text{avec} \quad \forall n \in [1, N], \quad S^{(n)} \in C^{1,\beta}, \quad \beta \in]0, 1] \quad (\text{II.13})$$

Pour ce type de géométrie, il convient alors de distinguer les points réguliers pour lesquels on définit un plan tangent, des points singuliers pour lesquels il n'en existe pas. Notons que pour un domaine polyédral, il est possible de faire correspondre à tout point de chaque composante régulière de S un système de coordonnées locales $(\mathcal{U}_i, \boldsymbol{\vartheta}_i)$ et d'y associer les vecteurs $\mathbf{a}_1(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{\vartheta}_{,1}(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{a}_2(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{\vartheta}_{,2}(\boldsymbol{\xi})$ de la base naturelle, définissant le plan tangent $T_{\mathbf{z}}$ à S en \mathbf{z} et d'y définir classiquement des opérateurs différentiels tangentiels.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS TANGENTIELS

Il est essentiel d'introduire la notion de différentiabilité pour une fonction \mathbf{v} définie sur S . La principale difficulté est qu'on ne peut pas utiliser la définition du gradient $\nabla(\bullet)$ sur \mathbb{R}^3 vu que le support de \mathbf{v} se restreint à S . On considère alors la *dérivée surfacique* introduite à l'aide du système de coordonnées locales $(\mathcal{U}_i, \boldsymbol{\vartheta}_i)_{i \in [1, M]}$ et utilisant (II.3).

Definition II.5 Soit $\mathbf{z} = \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\eta})$ un point régulier de S . Soit $f(\boldsymbol{\xi})$ une fonction scalaire définie et dérivable sur $B_2(\boldsymbol{\eta}, d(\mathbf{z}))$. On appelle *dérivée surfacique* la forme différentielle $\mathbf{d}f \in T_{\mathbf{z}}^*$ définie sur $T_{\mathbf{z}}$ donnée par

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} d\xi^i \quad \text{avec} \quad d\xi^i : \mathbf{X} = X^j \mathbf{a}_j \in T_{\mathbf{z}} \longrightarrow X^i \in \mathbb{R} \quad (\text{II.14})$$

Remarquons que cette définition fait intervenir les covecteurs $d\xi^i$ et on préfère identifier chacune de ces formes différentielles à un vecteur du plan tangent (qui a une signification plus physique) en utilisant la dualité entre $T_{\mathbf{z}}$ et $T_{\mathbf{z}}^*$. On obtient alors le résultat suivant

Resultat II.3 Soit $\mathbf{z} = \boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\eta})$ un point régulier de S . Soit $f(\boldsymbol{\xi})$ une fonction scalaire définie et dérivable sur $B_2(\boldsymbol{\eta}, d(\mathbf{z}))$. La dérivée surfacique de f peut alors être identifiée au vecteur $\mathbf{D}f \in T_{\mathbf{z}}$ avec

$$\mathbf{D}f = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} g^{ij} \mathbf{a}_j \quad \text{avec} \quad \forall \mathbf{X} \in T_{\mathbf{z}}, \quad (\mathbf{D}f, \mathbf{X}) = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{X} \rangle \quad (\text{II.15})$$

où g^{ij} désigne les composantes contravariantes du tenseur métrique en \mathbf{z} .

Preuve

Soit $\mathbf{X} \in T_z$, nous pouvons alors écrire $\mathbf{X} = X^i \mathbf{a}_j$ ce qui permet d'obtenir la relation ci-dessous.

$$\forall \mathbf{X} \in T_z, \quad g_{ij} X^i = (\mathbf{a}_j, \mathbf{X}) \quad \text{avec} \quad g_{ij} = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \quad (\text{II.16})$$

On montre très facilement que l'inverse du tenseur métrique g_{ij} écrit sous forme covariante, n'est autre que l'expression de \mathbf{g} défini dans la base contravariante, i.e. $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$, ce qui mène au résultat escompté. ■

Il est également intéressant d'introduire le *rotationnel surfacique* en posant la définition suivante, valable en un point régulier de S et admettant l'expression très simple (II.18).

Definition II.6 Soit z un point régulier de S . Le rotationnel surfacique de f est le vecteur $\mathbf{R}f \in T_z$ donné par la relation ci-dessous.

$$\mathbf{R}f(z) = \mathbf{n}(z) \wedge \mathbf{D}f(z) \quad \text{avec} \quad \mathbf{n}(z) = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \xi_i} \quad (\text{II.17})$$

$$\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| \mathbf{R}f(z) = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \mathbf{a}_2 - \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \mathbf{a}_1 \quad (\text{II.18})$$

FORMULES D'INTÉGRATION PAR PARTIES

Les notions de dérivée et de rotationnel surfacique sont très intéressantes car elles permettent de définir des formules d'intégration par parties sur des surfaces. Celles-ci sont obtenues à l'aide du système de coordonnées locales et de la partition de l'unité associée qui permet de localiser l'étude sur chaque élément de surface. Nous obtenons alors les théorèmes suivants :

Resultat II.4

Soit un élément de surface \mathcal{S} de classe $C^{1,\beta}$ limité par un nombre fini d'arcs réguliers. On désigne par $\boldsymbol{\ell}$ le vecteur tangent à la courbe $\partial\mathcal{S}$, \mathbf{n} la normale à \mathcal{S} et $\boldsymbol{\nu}$ la normale au bord contenue dans le plan tangent. Ainsi $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{n}$. Soit f une fonction scalaire définie sur \mathcal{S} et admettant une dérivée surfacique sur \mathcal{S} . Nous avons alors :

• Formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathcal{S}} D_i f(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial\mathcal{S}} f(\mathbf{y}) \nu_i(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} + \int_{\mathcal{S}} D_j n_j(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) n_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.19})$$

• Formule de Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} R_i f(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial\mathcal{S}} f(\mathbf{y}) \ell_i(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.20})$$

Notons que les relations (II.19) et (II.20) ne sont établies que pour une surface \mathcal{S} *régulière*. Dans le cadre de cette étude, nous supposons que la frontière du domaine considéré est définie

par (II.13), i.e. pouvant admettre des singularités géométriques. Il est donc essentiel de voir dans quelle mesure les formules d'intégration par parties sont généralisables à des variétés polyédrales.

Prenons un exemple très simple d'une surface \mathcal{S} non-nécessairement fermée et composée de la réunion de deux surfaces de Liapunov \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . L'application de (II.19) et de (II.20) à chaque composante régulière de \mathcal{S} permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{D}f(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} &= \int_{\mathcal{S}} \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \mathbf{n}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\partial \mathcal{S}_1} f(\mathbf{y}) \boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{\partial \mathcal{S}_2} f(\mathbf{y}) \boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{R}f(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial \mathcal{S}_1} f(\mathbf{y}) \boldsymbol{\ell}_1(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} + \int_{\partial \mathcal{S}_2} f(\mathbf{y}) \boldsymbol{\ell}_2(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.22})$$

On remarque que les termes de contour ne se réduisent pas à une intégrale sur $\partial \mathcal{S}$ et que les contributions sur $\partial \mathcal{S}_1 \cap \partial \mathcal{S}_2$ ne disparaissent pas. La formule (II.19) n'est donc pas directement transposable à une variété polyédrale et il convient de l'utiliser avec précaution.

Les choses sont plus simples pour la formule de Stokes (II.20). En effet compte tenu des conventions d'orientation cohérentes définies sur \mathcal{S} , les vecteurs $\boldsymbol{\ell}_1(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\ell}_2(\mathbf{y})$ sont opposés sur $\partial \mathcal{S}_1 \cap \partial \mathcal{S}_2$ et l'intégrale sur ce contour s'annule pour f continue sur \mathcal{S} . Le résultat (II.20) reste alors valable pour S définie par (II.13) et f continue sur S et différentiable sur chaque composante régulière.

Remarque II.5 Le fait que la relation (II.19) ne soit pas directement transposable à une surface régulière par morceaux est très contraignant d'un point de vue numérique. En effet la frontière discrétisée étant composée d'une multitude de facettes, l'application de (II.19) sur la surface formée des éléments finis de frontière devient très lourde à mettre en œuvre. \square

Comme nous aurons également besoin d'une formule d'intégration par parties sur un domaine, rappelons la formule de Gauss-Ostrogradsky donnée pour une quantité tensorielle $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ admettant une dérivée intégrable sur un domaine borné D .

$$\int_D \nabla \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \int_{\partial D} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.23})$$

II.2 Représentations intégrales du problème avec déformations initiales

L'obtention d'une représentation intégrale du champ de déplacement en élasticité repose sur la linéarité du système d'équations aux dérivées partielles et peut trouver son origine dans le *théorème de réciprocité de Maxwell-Betti* comme dans [Bonnet95a] ou [Balas et al.89]. L'extension des formulations intégrales à des problèmes élastoplastiques est alors facilement envisageable du fait de la partition de la déformation totale en une déformation élastique et une déformation plastique. Compte tenu de la forme de la loi de Hooke $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$, les déformations plastiques peuvent alors être assimilées à des *déformations libres*, en reprenant la dénomination employée dans [François et al.92] et le problème revient à considérer un milieu élastique linéaire soumis à une répartition de déformations initiales, ces dernières étant supposées connues.

Un intérêt majeur des éléments finis de frontière réside dans la résolution de problèmes définis sur des domaines infinis. Pour ce faire, nous nous inspirons largement des travaux de [Costabel et al.86], [Hamdi82] et [Bousquet90], qui permet de traiter simultanément les cas de milieu borné ou non et regroupe du même coup dans un même formalisme, les approches qualifiées de *directe* et *indirecte*.

II.2.1 Problème élastostatique avec déformations initiales

ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Considérons comme précédemment un ouvert borné lipschitzien Ω_1 de \mathbb{R}^3 et définissons $\Omega_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_1}$. La frontière commune notée S , variété polyédrale, est orientée de manière à ce que la normale soit sortante par rapport à Ω_1 . Dans chaque sous-domaine Ω_j avec $j = 1, 2$ nous pouvons définir un état élastostatique $(\mathbf{u}_j, \boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\rho}\mathbf{f}_j, \boldsymbol{\varepsilon}_j^0)$ représentant respectivement le champ de déplacement, de contrainte, des efforts volumiques et de déformation initiale restreint à Ω_j . Le problème se ramène alors à trouver les couples $(\mathbf{u}_j, \boldsymbol{\sigma}_j)$ solution dans Ω_j pour $j = 1, 2$ du système :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\rho}\mathbf{f}_j = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_j = \mathbf{C} : (\nabla^s \mathbf{u}_j - \boldsymbol{\varepsilon}_j^0) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_j \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad (\text{II.24})$$

Le problème ainsi posé introduit naturellement la surface de discontinuité S . Ce type de

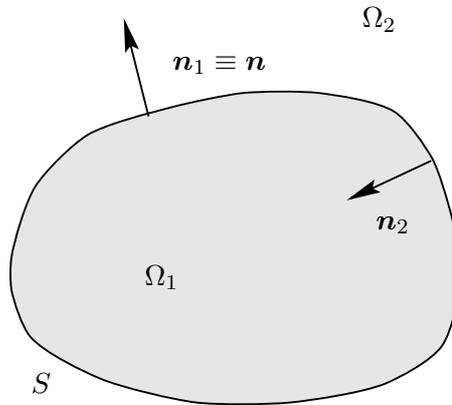


Figure II.3 : Introduction des notations géométriques

problème est généralement rencontré en aérodynamique dans l'étude d'écoulements de fluides supposés parfaits et incompressibles. Il est alors intéressant de rechercher une solution au sens des distributions de (II.24). Ce choix est principalement motivé par le fait que les opérations de dérivation dans l'espace des distributions conservent les informations liées à d'éventuels sauts à la traversée d'une surface [Bousquet90]. Le lecteur désireux d'approfondir ce sujet peut se reporter à [Bousquet90], [Costabel et al.86], [Schwartz66] et [Chen et al.92]. Notons qu'il s'agit d'une démarche couramment utilisée dans l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles [Schwartz65], [Dautray et al.85].

SOLUTION AU SENS DES DISTRIBUTIONS

Introduisons classiquement $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, l'ensemble des fonctions infiniment dérivables et à support borné i.e. $\forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\exists R(\boldsymbol{\varphi}) > 0$, $\forall |x| > R(\boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{\varphi}(x) = 0$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, l'espace des distributions représentant l'ensemble des formes linéaires continues sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Les équations (II.24) peuvent alors être reformulées de manière faible et le système (II.24) est équivalent à

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Omega_j} [\mathcal{L}(\nabla) \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}_{|\Omega_j} - \operatorname{div}(\nabla) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_j^0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_{|\Omega_j} + \boldsymbol{\rho} \mathbf{f}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}_{|\Omega_j}] d\Omega_j = 0 \quad (\text{II.25})$$

où $\mathcal{L}(\nabla)$ désigne l'opérateur de Lamé-Navier. Le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ étant à support compact, nous pouvons alors appliquer la *formule de réciprocité* [Nečas67] associée à l'opérateur d'élasticité $\mathcal{L}(\nabla)$, aux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Reprenant les notations de [Bonnet95a] et introduisant $\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\varphi}_{|\Omega_j}$, nous avons

$$\int_{\Omega_j} [\mathcal{L}(\nabla) \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}_j - \mathbf{u}_j \cdot \mathcal{L}(\nabla) \boldsymbol{\varphi}_j] d\Omega_j = \int_{S_j} [\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_j) \mathbf{u}_j \cdot \gamma_0^j \boldsymbol{\varphi} - \gamma_0^j \mathbf{u} \cdot \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_j) \boldsymbol{\varphi}_j] dS_j \quad (\text{II.26})$$

avec $\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_j) \mathbf{u}_j = (\mathbf{C} : \gamma_0^j \nabla^s \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_j$, souvent dénommé *dérivée conormale* où \mathbf{n}_j représente la normale extérieure au domaine Ω_j de frontière S_j . Rappelons que l'opérateur $\gamma_0^j(\bullet)$ désigne la trace sur S_j d'une fonction définie dans Ω_j et que les surfaces S_1 et S_2 coïncident géométriquement mais ont des orientations opposées.

Remarque II.6 Du fait de la présence des déformations initiales, $\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_j) \mathbf{u}_j$ n'est pas le vecteur-contrainte de \mathbf{u}_j sur la frontière de Ω_j . \square

S étant une surface de discontinuité des différentes quantités recherchées, il est intéressant d'introduire des *sauts* de déplacement et de dérivée conormale à la traversée de S définis comme suit [Hamdi82], [Maier et al.87]

$$\begin{aligned} [[\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}]] &= -\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_2) \mathbf{u}_2 - \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_1) \mathbf{u}_1 = \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_1) \mathbf{u}_2 - \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_1) \mathbf{u}_1 \\ [[(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{n}]] &= -(\mathbf{C} : \gamma_0^2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^0) \cdot \mathbf{n}_2 - (\mathbf{C} : \gamma_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^0) \cdot \mathbf{n}_1 = (\mathbf{C} : \gamma_0^2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^0) \cdot \mathbf{n}_1 - (\mathbf{C} : \gamma_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^0) \cdot \mathbf{n}_1 \\ [[\mathbf{u}]] &= \gamma_0^2 \mathbf{u}_2 - \gamma_0^1 \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Cette définition du saut de vecteur-contrainte ne fait intervenir que \mathbf{n}_1 , normale extérieur à Ω_1 et qui sera notée plus simplement \mathbf{n} par la suite puisque $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ pour presque tout point de S . Compte tenu de la définition de la dérivée conormale, nous écrirons également

$$\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_1) \mathbf{u}_1 = \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}_2) \mathbf{u}_2 = -\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}_2$$

S'aidant de (II.26) et en procédant à une intégration par parties sur le terme de volume faisant apparaître les déformations initiales, il est possible de reformuler (II.25) pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Omega_j} \mathbf{u}_j \cdot \mathcal{L}(\nabla) \boldsymbol{\varphi}_j d\Omega_j &= - \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\Omega_j} [\boldsymbol{\rho} \mathbf{f}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j^0 : \mathbf{C} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_j] d\Omega_j \\ &- \int_S [[(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{n}]] \cdot \gamma_0 \boldsymbol{\varphi} dS - \int_S [[\mathbf{u}]] \cdot \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}) \boldsymbol{\varphi} dS + \int_S [[\mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}) \mathbf{u}]] \cdot \gamma_0 \boldsymbol{\varphi} dS \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

puisque le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ vérifie toutes les conditions de transmission, à savoir continuité $\boldsymbol{\varphi}$ et de $\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\boldsymbol{\varphi}$ à la traversée de S , à savoir $\gamma_0\boldsymbol{\varphi} \equiv \gamma_0^2\boldsymbol{\varphi} = \gamma_0^1\boldsymbol{\varphi}$ et $\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n}_1)\boldsymbol{\varphi}_1 = -\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n}_2)\boldsymbol{\varphi}_2$.

L'interprétation des intégrales de volume dans (II.28) est alors immédiate. Considérons en effet les distributions \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et $\boldsymbol{\rho f}$ respectivement associées aux fonctions $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $(\boldsymbol{\varepsilon}_1^0, \boldsymbol{\varepsilon}_2^0)$ et $(\boldsymbol{\rho f}_1, \boldsymbol{\rho f}_2)$ définies sur \mathbb{R}^3 . Compte tenu du caractère autoadjoint de $\mathcal{L}(\boldsymbol{\nabla})$ et de la définition de $\text{div}(\boldsymbol{\nabla})$, nous avons [Schwartz66]

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \langle \text{div}(\boldsymbol{\nabla})\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\varphi} \rangle = - \int_{\Omega_1} (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_1^0) : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_1 \, d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_2^0) : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\varphi}_2 \, d\Omega_2 \quad (\text{II.29})$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \langle \mathcal{L}(\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\Omega_1} \mathbf{u}_1 \cdot \mathcal{L}(\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\varphi}_1 \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot \mathcal{L}(\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\varphi}_2 \, d\Omega_2 \quad (\text{II.30})$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \langle \boldsymbol{\rho f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\rho f}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\rho f}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \, d\Omega_2 \quad (\text{II.31})$$

Les termes surfaciques peuvent être assimilés à des distributions de Dirac sur S i.e. ayant leur support contenu dans S . Une introduction complète des fonctions généralisées définies sur une variété différentielle représentées par $\mathcal{T}^k(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\boldsymbol{\delta}_S$ peut être trouvée dans [Gel'fand et al.64] ou [Schwartz65]. Par définition nous pouvons alors reconnaître pour $\boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\langle [[\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\mathbf{u} - (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{n}]] \otimes \boldsymbol{\delta}_S, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_S [[\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\mathbf{u} - (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{n}]] \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dS \quad (\text{II.32})$$

$$\langle [[\mathbf{u}]] \otimes \mathcal{T}^*(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\boldsymbol{\delta}_S, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_S [[\mathbf{u}]] \cdot \mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\boldsymbol{\varphi} \, dS \quad (\text{II.33})$$

où l'opérateur adjoint de $\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})$ est noté $\mathcal{T}^*(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})$. Son expression explicite n'est pas nécessaire comme nous le verrons par la suite. On peut d'ores et déjà remarquer l'apparition du *saut de vecteur-conainte* que l'on assimile à $[[\mathbf{t}]] = [[\mathcal{T}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\mathbf{u}]] - [[(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{n}]]$.

L'équation (II.28) est réécrite au sens des distributions avec $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, $(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\rho f}) \in L^1(\mathbb{R}^3)^2$ et $([[\mathbf{u}]], [[\mathbf{t}]]) \in L^1(S)^2$ et prend la forme suivante

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\boldsymbol{\rho f} + \text{div}(\boldsymbol{\nabla})\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 + [[\mathbf{u}]] \otimes \mathcal{T}^*(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{n})\boldsymbol{\delta}_S - [[\mathbf{t}]] \otimes \boldsymbol{\delta}_S \quad (\text{II.34})$$

La relation (II.34) contient toutes les informations à savoir, les équations d'équilibre dans Ω_1 et Ω_2 ainsi que les discontinuités du déplacement et du vecteur-conainte à la traversée de S . De plus son obtention n'a introduit aucune hypothèse de comportement à l'infini. Cette équation linéaire aux dérivées partielles exprimée au sens des distributions est alors résolue de manière formelle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, ce point faisant l'objet du prochain paragraphe.

II.2.2 Formules de représentations intégrales

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES

Considérons de manière générale, un opérateur différentiel linéaire $\mathcal{P}(\nabla)$ dans \mathbb{R}^n d'ordre m donné par la définition suivante

$$\mathcal{P}(\nabla) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \nabla^\alpha \quad \text{avec} \quad \nabla^\alpha = \nabla_1^{\alpha_1} \nabla_2^{\alpha_2} \cdots \nabla_n^{\alpha_n},$$

$$\nabla_i^{\alpha_j} \equiv \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_i^{\alpha_j}} \quad \text{et} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$$

On appelle *solution élémentaire* $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ toute distribution solution de l'équation ci-dessous où δ_0 désigne la mesure de Dirac en θ et \mathbf{I}_n le tenseur unité de \mathbb{R}^n .

$$-\mathcal{P}(\nabla)\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \delta_0 \mathbf{I}_n \quad \text{avec} \quad \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (\text{II.35})$$

On montre dans [Egorov et al.97] que toute opérateur différentiel linéaire admet une solution élémentaire. Bien évidemment le problème d'obtention d'une solution élémentaire n'est pas unique puisque deux solutions de (II.35) diffèrent d'un champ $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ vérifiant $\mathcal{P}(\nabla)\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = 0$.

En particulier pour le problème d'élasticité homogène isotrope, on introduit très souvent la *solution élémentaire de Kelvin* $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ et le tenseur des contraintes $\Sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{C} : \nabla \mathbf{U}(\mathbf{r})$ associé, définis par

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) \equiv U_i^k(r) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \Sigma(\mathbf{r}) \equiv \Sigma_{ij}^k(r) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{avec} \quad r = \|\mathbf{r}\| \quad \text{et}$$

$$U_i^k(r) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k}] \quad (\text{II.36})$$

$$\Sigma_{ij}^k(r) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [3r_{,i} r_{,j} r_{,k} + (1-2\nu) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k})] \quad (\text{II.37})$$

Physiquement la k -ième ligne de $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ représente le champ de déplacement dans l'espace \mathbb{R}^3 induit par une force concentrée d'amplitude 1 et de direction \mathbf{e}_k . Nous envisagerons exclusivement le tenseur de Kelvin dans la suite du mémoire. D'autres solutions élémentaires (solution de Mindlin, solution de Rongved, ...) sont données dans [Bonnet95a].

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT

L'obtention d'une formule explicite de toute solution du problème élastique avec déformations initiales repose sur l'introduction d'une solution élémentaire et sur la définition de *produit de convolution*. A cet effet introduisons $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ l'espace dual de $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, étant également identifié au sous-ensemble de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ des distributions à support compact [Schwartz66], [Bousquet90]. Soient alors deux distributions $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3))$. Le produit de convolution de \mathbf{f} et \mathbf{g} est donné par (voir [Schwartz66] ou [Gel'fand et al.64])

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \langle \mathbf{f} * \mathbf{g}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \langle \mathbf{g}(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \rangle \quad (\text{II.38})$$

Certaines propriétés du produit de convolution se révèlent très intéressantes et on rappelle brièvement que pour tout opérateur différentiel linéaire $\mathcal{P}(\nabla)$,

$$\mathcal{P}(\nabla)(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = \mathcal{P}(\nabla)\mathbf{f} * \mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathcal{P}(\nabla)\mathbf{g}$$

$$\delta_0 \mathbf{I}_3 * \mathbf{f} = \mathbf{f} \quad (\text{II.39})$$

Reprenons l'équation aux dérivées partielles régissant le problème élastique avec inclusions initiales. (II.34) peut alors être mise sous la forme ci-dessous :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(\nabla)\mathbf{u} &= \mathbf{g} \quad \text{avec} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{g}) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))^2 \quad \text{et} \\ \mathbf{g} &= \rho\mathbf{f} - \operatorname{div}(\nabla)\mathbf{C} : \varepsilon^0 - [[\mathbf{u}]] \otimes \mathcal{T}^*(\nabla, \mathbf{n})\delta_S + [[\mathbf{t}]] \otimes \delta_S \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Supposons à présent que $\mathbf{g} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$, hypothèse que nous discuterons à la fin de ce paragraphe. Il est alors possible de se ramener à une définition équivalente du produit de convolution de \mathbf{U} et de \mathbf{g} en posant comme dans [Dautray et al.85]

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \langle \mathbf{U} * \mathbf{g}, \varphi \rangle &= \langle \mathbf{g}, \mathbf{U}^t * \varphi \rangle \\ \text{avec} \quad \mathbf{U} * \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \varphi(\mathbf{y}) \, dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Remarque II.7 Cette définition a bien un sens car pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{U} * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, ce qui justifie le crochet de dualité du second membre. \square

Nous obtenons alors l'inversion de l'opérateur d'élasticité $\mathcal{L}(\nabla)$ en tenant compte de (II.39) pour $(\mathbf{u}, \mathbf{g}) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3))$

$$-\mathcal{L}(\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad -\mathbf{U} * \mathcal{L}(\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{U} * \mathbf{g} \quad -\mathcal{L}(\nabla)\mathbf{U} * \mathbf{u} = \mathbf{U} * \mathbf{g} \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} * \mathbf{g} \quad (\text{II.42})$$

La relation (II.42) constitue la *formule de représentation intégrale du champ de déplacement* qui permet d'exhiber toute solution de (II.34). Il nous reste à expliciter le second membre.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, il est possible d'écrire en tenant compte de (II.41) et en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U} * \rho\mathbf{f}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho f_i(\mathbf{y}) \left(\int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} \right) \, dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) \, dV_{\mathbf{y}} \right) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Le terme faisant intervenir les déformations initiales est réarrangé de la manière suivante

$$\begin{aligned} -\langle \mathbf{U} * \operatorname{div}\mathbf{C} : \varepsilon^0, \varphi \rangle &= -\langle \operatorname{div}(\mathbf{U} * (\mathbf{C} : \varepsilon^0)), \varphi \rangle = \langle \mathbf{U} * (\mathbf{C} : \varepsilon^0), \nabla\varphi \rangle \\ &= \langle \mathbf{C} : \varepsilon^0, \mathbf{U} * \nabla\varphi \rangle = \langle \mathbf{C} : \varepsilon^0, \nabla\mathbf{U} * \varphi \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

cette dernière relation étant justifiée par le fait que $\nabla\mathbf{U} \in L^1(\mathbb{R}^3)$, ce qui implique $\nabla(\mathbf{U} * \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Explicitons le dernier crochet de dualité

$$\begin{aligned} \langle -\mathbf{U} * \operatorname{div}\mathbf{C} : \varepsilon^0, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} C_{pqij} \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) \left(\int_{\mathbb{R}^3} U_{p,q}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} \right) \, dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} C_{pqij} U_{p,q}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) \, dV_{\mathbf{y}} \right) \varphi_k(\mathbf{x}) \, dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Les produits de convolution avec les distributions de support S sont déterminés en reprenant les définitions (II.32).

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U} * [[t]] \otimes \delta_S, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_S [[t]]_i(\mathbf{y}) \left(\int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \right) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[t]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \varphi_k(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{aligned} \langle [[u]] \otimes \mathcal{T}^*(\nabla, \mathbf{n})\delta_S, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \int_S [[u]]_i(\mathbf{y}) \mathcal{T}(\nabla, \mathbf{n}) \left(\int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \right) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) [[u]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \varphi_k(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Remarque II.8 L'obtention des relations (II.46) et (II.47) repose sur la continuité de $\mathbf{U} * \boldsymbol{\varphi}$ et de $\nabla \mathbf{U} * \boldsymbol{\varphi}$ à la traversée de S . Ces résultats font l'objet du paragraphe (III.3) et découlent des propriétés $\mathbf{U} \in L^1(\mathbb{R}^3)$, $\nabla \mathbf{U} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{\varphi}$ régulière. \square

On aboutit finalement à l'expression classique de la formule de représentation intégrale de \mathbf{u} qui peut être trouvée par exemple dans [Cruse88] ou [Telles83].

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{x}) &= \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) [[u]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[t]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

où le noyau T est défini par $T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y})$

Remarque II.9 L'obtention de (II.48) a supposé que $\mathbf{g} \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}^3)$ i.e. \mathbf{g} est une distribution à support borné. Les potentiels surfaciques vérifient automatiquement cette hypothèse. Quant aux potentiels de volume, on montre par exemple dans [Bonnet95a] qu'il est possible de se ramener à des intégrales de surface lorsque les forces de volume découlent d'un potentiel (pesanteur, inertie centrifuge, ...), en introduisant le vecteur de Galerkin. Les déformations initiales se restreignent généralement à une partie bornée de l'espace (déformations plastiques localisées) et dans la suite du mémoire, nous envisagerons toujours cette hypothèse, ce qui justifie alors le choix $\mathbf{g} \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}^3)$.

Au cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, on obtient tout de même la représentation intégrale (II.48), en introduisant la notion de *distribution régulière à l'infini* intervenant également dans des problèmes où S est non borné, propriété que doit alors satisfaire \mathbf{g} . Nous renvoyons le lecteur à [Dautray et al.85] pour de plus amples précisions. Dans la suite du mémoire, nous envisagerons toujours un champ de déformations plastiques nul en dehors d'une région bornée. \square

Remarque II.10 Notons juste que le fait de choisir $\mathbf{g} \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}^3)$, entraîne que \mathbf{u} vérifie automatiquement les conditions de radiations à l'infini. Les conditions de radiations à l'infini, même si elles n'apparaissent pas explicitement, doivent bien être contenues dans la formulation. \square

II.3 Algorithmes élastoplastiques par éléments finis de frontière

Le chapitre I a permis de mettre en place le cadre de l'étude et a donné les équations régissant le problème d'évolution élastoplastique. L'objet du précédent paragraphe a été de

résoudre implicitement certaines des relations, en ramenant le système d'équations non plus à un problème posé en terme de *déplacement* comme dans le paragraphe I.3, mais en terme de sauts de traces sur la frontière S des déplacements.

L'obtention d'une représentation intégrale du champ de déplacement a introduit deux problèmes posés respectivement dans Ω_1 et Ω_2 . Nous avons adopté cette démarche pour rendre compte de deux techniques rencontrées dans la littérature, à savoir la méthode *directe* et la méthode *indirecte* et pour montrer qu'elles découlent finalement d'une même formulation.

II.3.1 Méthodes directe et indirecte

Le principal argument utilisé pour obtenir la représentation (II.48) a été d'assimiler certaines des relations du problème d'évolution élastoplastique écrites sous forme incrémentale, aux équations définies dans le domaine et gouvernant un problème d'élasticité incluant des déformations initiales. Ce type d'approche est par exemple constamment mis en avant dans [Polizzotto88a] et [Polizzotto88b].

Dès lors si on suppose ε_{n+1}^p *a priori* connue, les relations d'équilibre, de compatibilité et la loi de Hooke, jointes aux conditions aux limites, constituent alors un problème élastique qu'il est possible de résoudre. Ce dernier peut alors être résolu au moyen d'une méthode par équations intégrales et s'écrit sous la forme suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \rho \mathbf{f}_{n+1} = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \nabla^s \mathbf{u}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^0 \quad \text{sur } S_u \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{n+1}^0 \quad \text{sur } S_t \end{array} \right. \quad (\text{II.49})$$

Le paragraphe II.2 a permis d'exhiber tout champ de déplacement solution des équations de Lamé-Navier. Les champs de déformation et de contrainte sont alors obtenus après dérivation de la représentation intégrale du déplacement et application de la loi de Hooke. Les relations restant à être satisfaites sont alors les conditions aux limites.

On remarque que les inconnues intervenant dans le problème (II.49) se réduisent aux discontinuités de déplacement et de vecteur-contrainte à travers S . Examinons plus précisément les relations traduisant les conditions aux limites et considérons un point \mathbf{z} de la surface S . L'application de la formule de Green au sens des distributions fait intervenir *quatre* quantités en ce point, à savoir le déplacement et le vecteur-contrainte de part et d'autre de S . D'un autre côté pour qu'un problème soit bien posé, on peut au plus imposer *deux* de ces conditions aux limites (une correspondant au problème intérieur, l'autre au problème extérieur). Ayant affaire à un système sous-déterminé, il est alors nécessaire d'émettre des hypothèses supplémentaires sur les densités surfaciques, consistant souvent à annuler certaines quantités de surface, afin de se ramener à un problème bien posé.

Ce choix induit donc plusieurs méthodes par équations intégrales qui ne sont pas équivalentes comme nous allons le montrer.

MÉTHODES DIRECTES

Les méthodes directes sont très largement utilisées dans la littérature car elles permettent de donner une signification immédiate des densités sur la frontière. leur principe repose sur le fait qu'initialement, le problème à résoudre est posé soit sur Ω_1 , soit sur Ω_2 . L'introduction du problème fictif adjoint n'est qu'un jeu d'écriture pour obtenir une représentation intégrale

du champ de déplacement la plus générale possible. Distinguons alors le problème intérieur du problème extérieur, les deux étant entièrement découplés.

Problème intérieur

Envisageons le problème d'évolution élastoplastique défini sur Ω_1 . Le champ \mathbf{u}_2 n'ayant aucune réalité physique, nous le prenons *nul* et nous notons \mathbf{u} , le champ de déplacement du domaine Ω_1 . Bien évidemment les traces de \mathbf{u}_2 sur la surface orientée S_2 (voir le paragraphe II.2) sont alors nulles et la représentation intégrale (II.48) se réduit à la formule classique

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)}(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) = & \int_{S_1} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_1} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega_1} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.50}) \end{aligned}$$

où $(\tilde{u}(\mathbf{y}), \tilde{t}(\mathbf{y}))$ représentent respectivement le champ de déplacement et le vecteur-contrainte sur S_1 . Le terme $\kappa^{(1)}(\mathbf{x})$ est égal à 1 pour $\mathbf{x} \in \Omega_1$ et à 0 pour $\mathbf{x} \in \Omega_2$. Rappelons que (II.50) n'est valable que pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$.

Problème extérieur

En suivant la démarche duale de la précédente, on annule le champ fictif \mathbf{u}_1 . En notant \mathbf{u} le champ de déplacement défini dans Ω_2 et en tenant compte de l'orientation opposée sur S_2 , frontière du domaine Ω_2 , on aboutit finalement à la représentation intégrale suivante

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)}(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) = & \int_{S_2} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_2} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega_2} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.51}) \end{aligned}$$

où $(\tilde{u}(\mathbf{y}), \tilde{t}(\mathbf{y}))$ désigne cette fois, le champ de déplacement et le vecteur-contrainte sur S_2 . Le terme $\kappa^{(2)}(\mathbf{x})$ est égal à 1 pour $\mathbf{x} \in \Omega_2$ et à 0 pour $\mathbf{x} \in \Omega_1$.

Remarquons que les expressions (II.50) et (II.51) sont en tout point similaires et nous pouvons finalement donner une représentation intégrale pour la méthode directe sous la forme générale suivant.

Resultat II.5

Toute solution des équations de Lamé-Navier dans le domaine Ω de frontière S avec $\Omega \equiv \Omega_m$ où m désigne soit 1, soit 2, admet la représentation intégrale pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$, définie ci-dessous.

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) = & \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.52}) \end{aligned}$$

où $\kappa(\mathbf{x})$ désigne un réel valant 1 si $\mathbf{x} \in \Omega$ et 0 sinon. Les grandeurs surfaciques $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})$ représentent la trace du déplacement et le vecteur-contrainte sur la frontière S de Ω .

Cette formulation est quasi-unanimement utilisée actuellement, car elle donne une signification physique aux densités réparties sur la frontière, vu qu'elle fait explicitement intervenir le déplacement et le vecteur-contrainte sur S .

Remarque II.11 Notons que la relation (II.52) peut directement être obtenue en appliquant le *théorème de réciprocité de Maxwell-Betti* au couple formé d'une solution élémentaire et du champ de déplacement vérifiant les équations de Lamé-Navier dans Ω_m ainsi que les conditions de radiations à l'infini. \square

MÉTHODES INDIRECTES

Les méthodes indirectes apparaissent peu dans les travaux traitant de la résolution numérique de problèmes de mécanique des solides par des méthodes de type éléments finis de frontière. Nous pouvons néanmoins citer [Nédelec82] et [Bonnet95b]. Ces approches restent très utiles pour l'étude théorique des équations intégrales comme dans [Kupradze et al.79] et sont plus courantes en acoustique [Hamdi82] ou en aérodynamique [Bousquet90].

Première variante

Nous pouvons annuler certaines grandeurs sur la surface vu que le problème complémentaire a introduit des conditions sur la frontière, qui ne nous intéressent pas.

Supposons que le problème soit défini dans $\Omega \equiv \Omega_m$ avec $m \in [1, 2]$ et appelons S , la frontière de Ω orientée de manière à ce que la normale à S soit sortante. Une première approche consiste à imposer les mêmes conditions aux limites aux deux problèmes, ce qui revient à annuler le saut de déplacement sur S_u et le saut de vecteur-contrainte sur S_t . Introduisons alors les notations suivantes

$$\begin{cases} [[\mathbf{u}]](\mathbf{y}) = 0 \\ [[\mathbf{t}]](\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) \end{cases} \quad \text{sur } S_u \quad \text{et} \quad \begin{cases} [[\mathbf{u}]](\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \\ [[\mathbf{t}]](\mathbf{y}) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } S_t \quad (\text{II.53})$$

où $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})$ désignent respectivement le saut de déplacement sur S_t et le saut de vecteur-contrainte sur S_u et deviennent du coup les quantités à évaluer pour connaître entièrement la solution du problème (II.49). En reportant ce choix dans la représentation intégrale (II.48), on en tire l'expression utilisée dans [Nédelec82] et [Bonnet95b] et se mettant sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} u_k^{(m)}(\mathbf{x}) = & \int_{S_t} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_u} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.54}) \end{aligned}$$

Seconde variante

Une approche duale de la précédente consiste à annuler respectivement les sauts de déplacement et de vecteur-contrainte, sur S_t et S_u . Les inconnues du problème (II.49) deviennent alors le saut de déplacement sur S_u et le saut de vecteur-contrainte sur S_t , notés $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})$.

$$\begin{cases} [[\mathbf{u}]](\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \\ [[\mathbf{t}]](\mathbf{y}) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } S_u \quad \text{et} \quad \begin{cases} [[\mathbf{u}]](\mathbf{y}) = 0 \\ [[\mathbf{t}]](\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) \end{cases} \quad \text{sur } S_t \quad (\text{II.55})$$

Cette technique peut être trouvée dans [Kupradze et al.79] et il en résulte alors la représentation intégrale ci-dessous.

$$u_k^{(m)}(\mathbf{x}) = \int_{S_u} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_t} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.56})$$

Remarque II.12 Les méthodes indirectes ne découplent pas les problèmes intérieur et extérieur. Le déplacement donné par les relations (II.54) et (II.56) n'est donc pas nul dans le complémentaire du domaine étudié comme cela est le cas par la méthode directe. \square

A ce stade de l'étude, nous avons levé les indéterminations qu'avait naturellement introduit le fait de considérer le problème complémentaire. Il nous reste à présent à trouver les relations que doivent satisfaire les densités surfaciques, pour que la représentation intégrale obtenue selon la méthode choisie précédemment soit la solution en déplacement du problème d'évolution élastoplastique à t_{n+1} .

II.3.2 Introduction des équations intégrales du problème

Rappelons que la représentation intégrale du champ de déplacement n'est valable que pour des points n'étant pas situés sur la frontière. Les équations que doivent alors satisfaire les densités sont alors déduites du comportement de la représentation intégrale du champ de déplacement au voisinage de S .

Ainsi pour la méthode directe, nous identifions les densités surfaciques avec la trace de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et le vecteur-contrainte dérivant de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Quant aux méthodes indirectes, il convient de satisfaire aux conditions aux limites *données* du problème. Les relations auxquelles on aboutit donnent lieu aux *équations intégrales* du problème.

Remarque II.13 Notons que la détermination des limites de (II.52), (II.54) et (II.56), pour un point tendant vers un point de la frontière n'est pas immédiate et qu'elle nécessite un traitement soigneux étant donné que les opérateurs intégraux font apparaître des noyaux singuliers pour \mathbf{x} situé sur S . Ce sujet est longuement abordé dans le chapitre III pour des points réguliers de S .

Remarquons également que S étant une surface de discontinuité du champ de déplacement défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus S$, il convient de distinguer les limites de part et d'autre de la frontière de la représentation intégrale du champ de déplacement. \square

Sans entrer dans les détails, l'écriture des équations intégrales prend alors la forme ci-dessous, donnant les densités surfaciques introduites $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})_{n+1}$ en fonction de ε_{n+1}^p . L'obtention explicite de ces relations fait l'objet de la section (III.4). Nous pouvons formellement écrire

$$\mathcal{K}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})_{n+1} = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}^0, \tilde{\mathbf{t}}^0, \rho \mathbf{f})_{n+1} + \mathcal{Q}\varepsilon_{n+1}^p \\ \implies (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})_{n+1} = \mathcal{K}^{-1} \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}^0, \tilde{\mathbf{t}}^0, \rho \mathbf{f})_{n+1} + \mathcal{K}^{-1} \mathcal{Q}\varepsilon_{n+1}^p \quad (\text{II.57})$$

où \mathcal{K} , \mathcal{F} et \mathcal{Q} sont des opérateurs intégraux linéaires. L'inversibilité de \mathcal{K} est directement liée au fait qu'il existe une solution au problème élastique.

On constate également que le terme $\mathcal{K}^{-1}\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{u}}^0, \tilde{\mathbf{t}}^0)_{n+1}$ a une signification physique immédiate. Il s'agit en effet de la réponse du problème supposé purement *élastique* aux sollicitations extérieures $(\tilde{\mathbf{u}}^0, \tilde{\mathbf{t}}^0)_{n+1}$. En reportant la relation (II.57) dans l'équation de compatibilité et la loi de Hooke et en notant $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{elas})$ les champs de contrainte et de déformation du problème fictif élastique, il vient alors

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})_{n+1} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})_{n+1}^{elas} + \mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (\text{II.58})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{elas} - \mathcal{X}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (\text{II.59})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas} - \mathcal{X}^\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (\text{II.60})$$

où \mathcal{X}^ε et \mathcal{X}^σ sont des opérateurs intégraux volumiques linéaires, restant constants au cours du problème d'évolution. Ce dernier point est crucial lors de la mise en œuvre numérique car ces quantités n'ont à être évaluées qu'une fois au cours du calcul.

Remarque II.14 Cette présentation peut sembler abstraite mais elle permet de mieux appréhender la structure générale d'un algorithme de résolution d'un problème élastoplastique basé sur une méthode de type équations intégrales. De nombreux points seront éclaircis lorsqu'on aura donné une forme explicite des différents opérateurs intervenant dans la formulation (II.58), obtenue à la fin du chapitre III. \square

Au cours de ce paragraphe, nous avons montré comment insérer une formulation de type équations intégrales dans la méthode de résolution du problème d'évolution élastoplastique. Le prise en compte d'un premier groupe de relations (II.49) nous a amené à chercher la solution d'un problème élastique intermédiaire présentant des déformations initiales assimilées à $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$. La résolution de problème nous donne en définitive une expression explicite liant les champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ aux déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$. Cette relation est *linéaire* et doit être vérifiée à tout instant. Il ne nous reste à présent qu'à introduire les lois d'évolution du système.

II.3.3 Prise en compte des lois d'évolution

L'intégration locale des lois d'évolution engendre les algorithmes de Retour Radial (ou de rattrapage) qu'il suffit d'ajouter aux relations (II.58) pour résoudre entièrement le problème élastoplastique. Nous distinguerons les formulations pilotées directement en déformation et en contrainte. Il en résulte alors les systèmes d'équations suivants, chacun se réduisant à une équation non-linéaire que doivent respectivement vérifier $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Rappelons que $\boldsymbol{\chi}_n$ désigne l'état élastoplastique au temps t_n .

• Méthode de résolution pilotée en déformations

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{elas} - \mathcal{X}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + (\lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

$$\implies \mathbf{r}^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \mathcal{X}^\varepsilon(\lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\chi}_n) + \mathcal{X}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{elas} = 0 \quad (\text{II.62})$$

• Méthode de résolution pilotée en contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{elas} - \mathcal{X}^\sigma \varepsilon_{n+1}^p \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + (\lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{n}_{n+\theta})(\sigma_{n+1}, \chi_n) \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

$$\implies r^\sigma(\sigma_{n+1}) \equiv \sigma_{n+1} + \mathcal{X}^\sigma(\lambda_{n+1}^\sigma \hat{n}_{n+\theta})(\sigma_{n+1}, \chi_n) + \mathcal{X}^\sigma \varepsilon_n^p - \sigma_{n+1}^{elas} = 0 \quad (\text{II.64})$$

Les deux algorithmes proposés ont une structure similaire, faisant intervenir une équation linéaire traduisant les relations de Lamé-Navier et la loi d'évolution. Notons que l'opérateur \mathcal{X}^σ n'est pas inversible (voir [Bui et al.70] et [Polizzotto88b]) car il est possible de construire des champs de déformations initiales, n'induisant pas de contraintes. On parle alors de champs de déformations initiales autocontraint. La même remarque s'applique à \mathcal{X}^ε .

Dans les deux cas, l'équation non-linéaire obtenue est directement pilotée soit en déformation, soit en contrainte. On constate que le champ de déplacement n'intervient plus dans la formulation et joue un rôle secondaire [Telles83]. Ainsi le schéma de résolution du problème d'évolution élastoplastique admet la structure donnée ci-dessous. Prenons le cas de l'algorithme en déformation ε_{n+1} .

$$\begin{cases} \left(\mathbf{I} + \mathcal{X}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} (\lambda_{n+1}^\varepsilon \hat{n}_{n+\theta})(\varepsilon_{n+1}^k, \chi_n) \right) : \Delta \varepsilon_{n+1}^{k+1} = -r^\varepsilon(\varepsilon_{n+1}^k) \\ \varepsilon_{n+1}^{k+1} = \varepsilon_{n+1}^k + \Delta \varepsilon_{n+1}^{k+1} \end{cases}$$

⇓

Calcul du champ de déformation ε_{n+1} dans le domaine

⇓

Mise à jour de $(\varepsilon_{n+1}^p, \alpha_{n+1}, \sigma_{n+1}, q_{n+1})$ dans le domaine (II.65)

|

Etape facultative

↓

$$\begin{cases} \text{Evaluation de } (\tilde{u}_{n+1}, \tilde{t}_{n+1}) \text{ sur la frontière} \\ \text{Détermination de } u_{n+1} \text{ dans tout le domaine} \end{cases}$$

L'algorithme (II.65) explicitant clairement une équation non-linéaire à résoudre et utilisant le concept d'*Opérateur Tangent Cohérent*, a été introduit pour la première fois dans l'article [Bonnet et al.96].

Notons à titre d'information que des algorithmes similaires ont été proposés dans [Telles83] et [Banerjee et al.86]. Dans ces deux travaux, un processus itératif analogue au schéma (II.65) y est décrit mais le test de convergence porte sur la correction en déformation plastique donnée par $\Delta \varepsilon_{n+1}^{p\ k+1} \equiv \varepsilon_{n+1}^{p\ k+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ k}$. Citons également [Cruse et al.86b] où l'équation intégrale (II.57) est insérée dans la résolution du problème non-linéaire et le critère d'arrêt établi sur la quantité $\mathcal{K}^{-1} Q \Delta \varepsilon_{n+1}^{p\ k+1}$.

Pour les travaux antérieurs à [Bui78], nous renvoyons le lecteur aux références citées dans [Telles83] pour une analyse critique des résultats obtenus jusqu'alors.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'obtenir la représentation intégrale du champ de déplacement \mathbf{u}_{n+1} du problème élastoplastique en fonction des informations sur la frontière, des forces volumiques et des déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P$ et a donné l'algorithme général de résolution du problème d'évolution élastoplastique qui en découle. Plusieurs points importants ont été mis en évidence.

- ◇ L'obtention de la représentation intégrale de \mathbf{u}_{n+1} a largement fait appel à la théorie des distributions et nous avons clairement fait apparaître que la recherche d'une solution au sens des distributions des équations de Lamé-Navier, revient à considérer la frontière S comme une surface de discontinuité, dont les termes de saut sont précisément les densités intervenant dans les potentiels surfaciques. Cette approche nous a alors permis de regrouper dans un même formalisme l'étude des problèmes intérieur et extérieur.
- ◇ La prise en compte du problème complémentaire étant totalement fictive, l'introduction d'hypothèses supplémentaires permet de se ramener à un problème bien posé. Nous avons montré que selon les choix effectués, les densités surfaciques et les représentations intégrales obtenues ne reçoivent pas la même interprétation et nous avons ainsi pu mettre en évidence les liens existant entre les approches directe et indirecte.
- ◇ Nous avons montré comment intégrer la notion de représentation intégrale dans un algorithme de résolution du problème d'évolution élastoplastique. Dans ce type de formulation, le champ de déplacement joue un rôle tout à fait secondaire et il est alors possible d'obtenir une relation linéaire liant directement les déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P$, soit aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, soit aux contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$.

A l'issu de ce chapitre, il nous reste à donner les expressions explicites des équations intégrales du problème d'évolution élastoplastique et du champ gradient de la représentation intégrale de \mathbf{u}_{n+1} , ces points faisant l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III

Propriétés des potentiels aux points réguliers

Introduction

Le précédent chapitre a permis de résoudre de manière implicite les équations de champ d'un problème d'élastoplasticité et d'obtenir la solution sous la forme d'une représentation intégrale faisant intervenir des potentiels surfaciques et volumiques à noyaux singuliers.

L'algorithme général de résolution du problème d'évolution élastoplastique tenant compte de cette représentation intégrale du champ de déplacement, a montré la nécessité de déterminer le gradient de ces potentiels ainsi que leur comportement au voisinage de la surface S . En particulier, la formule de représentation intégrale du champ de déplacement n'étant pas valable pour un point de la frontière, il convient de traiter le passage à la limite avec le plus grand soin.

L'objet de ce chapitre est de déterminer d'une part les conditions de régularité que doivent satisfaire les densités des différents potentiels pour que les champs $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et $\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})$ puissent être prolongés par continuité de part et d'autre de la surface S et d'autre part les expressions de ces prolongements.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux potentiels surfaciques. Nous évaluerons précisément le comportement de ces potentiels et de leur gradient en des points réguliers de la surface. L'étude plus difficile du comportement aux points singuliers de type arête ou coin, formant un ensemble de mesure nulle, sera menée à part dans la section IV.1.

S'agissant de points réguliers, le sujet a été abordé dans une littérature très vaste et la diversité des approches a été très bien représentée dans l'article de synthèse de [Tanaka et al.94]. Ici nous suivrons plutôt l'approche développée dans [Toh et al.94] dans le cadre de la théorie du potentiel scalaire afin de présenter une méthode originale permettant de regrouper tous les processus existants de régularisation dans un même formalisme et d'évaluer de manière systématique la trace d'un opérateur intégral surfacique.

Nous développerons en particulier l'étude délicate du prolongement par continuité du gradient de $\nabla\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ et nous montrerons que la technique de *régularisation aux second ordre* menant à une formulation hypersingulière est équivalente à la *régularisation au premier ordre précédée d'une intégration par parties*.

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude des potentiels volumiques et un accent tout particulier est mis sur l'obtention du gradient des opérateurs intégraux volumiques. En exploitant

un procédé décrit dans [Bui et al.70] nous montrerons qu'il est possible d'aboutir à une version singulière et régularisée du gradient du potentiel volumique de seconde espèce.

Nous établirons alors une expression singulière et une expression régularisée de la dérivée conormale des potentiels volumiques sur la frontière. Ces expressions permettront dans la suite de déduire l'équation intégrale en vecteur-contrainte et constituent une généralisation des résultats obtenus dans [Huber et al.96], [Sladek et al.98], [Poon et al.98b] et [Poon et al.98a].

En combinant les méthodes présentées dans le chapitre II.2 avec les résultats du présent chapitre, nous expliciterons les systèmes d'équations intégrales dans le dernier paragraphe. Ces relations, écrites sous forme singulière pour presque tout point de la frontière, font ressortir la structure des équations à résoudre, en particulier le fait qu'elles ne sont pas équivalentes [Chen et al.92], et peuvent s'étudier dans le cadre très général de la théorie des *opérateurs pseudo-différentiels* présentée dans [Wendland87a] et [Schwab et al.92a].

Ce chapitre constitue une synthèse des résultats plus ou moins connus dans le domaine de l'étude des potentiels élastiques. Il permettra aussi de cerner les limites des techniques de régularisation proposées dans la littérature et de montrer à travers la lourdeur des expressions obtenues l'intérêt de l'approche qui sera développée dans le chapitre IV.

III.1 Théorème de convergence dominée

La présentation adoptée tout au long de ce paragraphe est inspirée de [Dautray et al.85] et [Kupradze et al.79] et la démarche suivie fait largement appel au *théorème de convergence dominée de Lebesgue* qui constitue un résultat classique en théorie de l'intégration [Schwartz65] ou [Brezis83].

Resultat III.1 (théorème de Lebesgue) Soit D un ensemble muni d'une mesure $d\mathbf{x}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad p.p. \quad \mathbf{x} \in D$$

Supposons de plus qu'il existe $g \in L^1(D)$ telle que pour presque tout $\mathbf{x} \in D$, $\|f_n(\mathbf{x})\| \leq g(\mathbf{x})$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(D)} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Ce théorème constitue la pièce maîtresse de notre argumentation et permet de justifier toutes les techniques de régularisation, comme nous le montrerons par la suite. Il donne lieu au résultat fondamental suivant [Schwartz65], donnant des informations sur la continuité de grandeurs définies à l'aide d'une intégrale.

Resultat III.2

Soient (D, E) deux sous-ensembles de \mathbb{R}^3 et introduisons une fonction $f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ définie sur $D \times E$. Si $f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ est séparément continue en \mathbf{x} au point \mathbf{x}_0 , pour presque toutes les valeurs de \mathbf{y} et si $f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ est uniformément majorée en module par une fonction $g(\mathbf{y}) \geq 0$ sommable, alors $F(\mathbf{x})$ définie ci-dessous est continue en \mathbf{x} au point \mathbf{x}_0

$$F(\mathbf{x}) = \int_D f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{y}$$

Dans la pratique le théorème (III.2) se révèle être d'une très grande efficacité dans l'étude des potentiels surfaciques et volumiques. Il suffit en effet d'exhiber une dominante qui n'a pas besoin d'être bornée mais uniquement intégrable et indépendante du point considéré, pour assurer la continuité du potentiel en ce point.

III.2 Régularité des potentiels surfaciques

Le cas des potentiels surfaciques est abordé dans de nombreux travaux comme par exemple [Dautray et al.85], [Chen et al.92] ou [Kress89] pour la théorie du potentiel et [Kupradze et al.79] ou [Chen et al.92] pour des problèmes d'élasticité. La principale difficulté réside dans le fait que l'on ne peut pas directement utiliser les résultats de régularité des fonctions représentées par une intégrale [Schwartz65]. Par souci de clarté, il est nécessaire de rappeler ici certains résultats obtenus dans [Kupradze et al.79] et [Chen et al.92] pour des points réguliers de S , de manière à cerner les hypothèses sous-jacentes à l'obtention des expressions.

Nous montrerons dans cette section que le comportement des potentiels surfaciques est dicté par les propriétés géométriques locales et la régularité locale des densités des différents potentiels au point considéré. Nous expliciterons également les différents liens existant entre les techniques de régularisation dites *directe* et *indirecte* (voir [Tanaka et al.94], [Bonnet95a] et [Krishnasamy et al.92a]). L'extension de ces résultats à des *points irréguliers* fera l'objet du paragraphe IV.1.

III.2.1 Préliminaires

Appliquons le résultat (III.2) à l'étude du prolongement par continuité sur S des opérateurs intégraux surfaciques. Considérons un potentiel surfacique quelconque $\mathcal{K}_n\chi(\mathbf{x})$ de densité $\chi(\mathbf{y})$ définie sur une variété S . $\mathcal{K}_n\chi(\mathbf{x})$ peut alors s'écrire de manière très générale sous la forme

$$\mathcal{K}_n\chi(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{K}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{avec} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad \|\mathbf{K}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq M \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-n} \quad (\text{III.1})$$

où $n \in \mathbb{Z}$ désigne l'ordre du noyau $\mathbf{K}_n(\mathbf{y}, \mathbf{r})$ de $\mathcal{K}_n\chi(\mathbf{x})$ et M un réel positif. On distingue généralement deux classes d'opérateurs intégraux :

- ◇ opérateurs intégraux admettant un noyau intégrable ($n < 2$), qualifiés de *faiblement singuliers* pour lesquels il est possible de définir $\mathcal{K}_n\chi(\mathbf{z})$ pour $\mathbf{z} \in S$. Ces potentiels possèdent la propriété d'être de Fredholm [Kress89],
- ◇ opérateurs intégraux présentant une singularité non-intégrable ($n \geq 2$), qualifiés de *singuliers* voire d'*hypersinguliers* dans la littérature mécanique [Krishnasamy et al.92a] et pour lesquels une représentation en $\mathbf{z} \in S$ n'est pas immédiate.

Intéressons-nous tout d'abord au comportement au voisinage d'un point \mathbf{z} de la surface S d'un opérateur intégral quelconque de la forme (III.1). Il est clair qu'il n'est pas possible d'appliquer directement le résultat (III.2) car on ne peut pas trouver de dominante intégrable de l'intégrande de $\mathcal{K}_n\chi(\mathbf{x})$ qui ne dépende que de \mathbf{y} . On peut néanmoins se restreindre à l'étude du potentiel induit par un voisinage de S en \mathbf{z} , par exemple $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ où ε désigne un réel positif suffisamment petit. Considérons alors

$$\mathcal{K}_n^\varepsilon\chi(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.2})$$

OPÉRATEURS INTÉGRAUX FAIBLEMENT SINGULIERS

Pour $\mathbf{K}_1(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \in L^1(S, \mathbb{R}^3 \setminus S)$, nous établissons le lemme suivant.

Lemme III.1

Considérons $n = 1$ et $\chi(\mathbf{y}) \in L^p$ avec $p > 2$ dans un voisinage d'un point $\mathbf{z} \in S$. Soit $\varepsilon > 0$, alors le potentiel faiblement singulier $\mathcal{K}_1^\varepsilon\chi(\mathbf{x})$ de densité $\chi(\mathbf{y})$ peut être prolongé par continuité au point \mathbf{z} en posant

$$\mathcal{K}_1^\varepsilon\chi(\mathbf{z}) \equiv \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{K}_1^\varepsilon\chi(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}_1(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

Preuve

Soit \mathbf{z} un point de S . En reprenant les notations du paragraphe (II.1), il existe alors une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ pour laquelle $\mathbf{z} \in \mathcal{U}$ et $\mathbf{z} = (\eta, \alpha(\eta))$. Introduisons $\varepsilon > 0$ tel que $(S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \subset \mathcal{U}$. Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ suffisamment proche de \mathbf{z} , l'intégrale est réécrite en terme de coordonnées locales (ξ, h) dans le repère \mathcal{R} avec $\mathbf{x} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}) + \tilde{\delta})$ et $\mathbf{y} = (\xi, \alpha(\xi))$ avec $(\xi, \tilde{\eta}) \in (B_2(0, d))^2$ et $\tilde{\delta} \in]-h, 0[$.

$$\mathcal{K}_1^\varepsilon \chi(\mathbf{x}) = \int_{\alpha^{-1}(S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon))} \mathbf{K}_1((\xi, \alpha(\xi)), (\xi - \tilde{\eta}, \alpha(\xi) - \alpha(\tilde{\eta}) - \tilde{\delta})) \cdot \chi(\xi, \alpha(\xi)) (1 + \|D\alpha(\xi)\|^2)^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (\text{III.3})$$

La propriété suivante justifie l'introduction d'une représentation normale de la surface S au voisinage de \mathbf{z} et permet d'exhiber une dominante intégrable de l'intégrande de $\mathcal{K}_1^\varepsilon \chi(\mathbf{x})$

$$\forall (\xi, \tilde{\eta}) \in B_2(0, d), \forall \tilde{\delta} \in]-h, 0[, \|y - x\|^2 \equiv \|(\xi - \tilde{\eta}, \alpha(\xi) - \alpha(\tilde{\eta}) - \tilde{\delta})\|^2 \quad (\text{III.4}) \\ = \|\xi - \tilde{\eta}\|^2 + |\alpha(\xi) - \alpha(\tilde{\eta}) - \tilde{\delta}|^2 \geq \|\xi - \tilde{\eta}\|^2$$

Le noyau vérifiant la propriété $\|\mathbf{K}_1(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq M \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-1}$ il en résulte que le terme sous l'intégrale $\mathcal{K}_1^\varepsilon \chi(\mathbf{x})$ est absolument majoré par la quantité $\mathcal{I}(\xi)$ définie par

$$\mathcal{I}(\xi) = C \frac{\|\chi(\xi, \alpha(\xi))\|}{\|\xi - \tilde{\eta}\|} \quad \text{avec} \quad C = M \sup_{\xi \in B_2(0, d)} (1 + \|D\alpha(\xi)\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.5})$$

Puisque $\|\mathbf{r}\|^{-n} \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^3)$ pour tout $q < 2$, la fonction $\mathcal{I}(\xi)$ est intégrable sur $B_2(0, d)$ pour p vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\psi \in L^p(S)$ en vertu de l'inégalité de Hölder (III.6)

$$\left| \int_{B_2(0, d)} \mathcal{I}(\xi) d\xi \right| \leq C \left(\int_{B_2(0, d)} \frac{1}{\|\xi - \tilde{\eta}\|^q} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{B_2(0, d)} \|\chi(\xi, \alpha(\xi))\|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{III.6})$$

Pour $(\xi, \tilde{\eta}) \in (B_2(0, d))^2$, on établit aisément que $\xi - \tilde{\eta} \in B_2(0, 2d)$. La première intégrale peut alors être réécrite en introduisant les coordonnées polaires, sous la forme

$$\int_{B_2(0, d)} \frac{1}{\|\xi - \tilde{\eta}\|^q} d\xi \leq 2\pi \int_0^{2d} \frac{1}{r^{q-1}} dr \quad \text{avec} \quad \xi = \tilde{\eta} + r (\cos\theta, \sin\theta) \quad (\text{III.7})$$

La dominante ainsi obtenue est intégrable pour $q < 2$ et est indépendante du point \mathbf{x} . En appliquant le résultat (III.2), on achève la démonstration. ■

OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS

Le traitement des opérateurs intégraux singuliers demande plus de soin et est spécifique au noyau considéré. Il suffit pour s'en convaincre de constater qu'on ne peut pas appliquer brutalement la démarche retenue pour obtenir le lemme (III.1), l'obtention d'une dominante de $\mathcal{I}(\xi)$ intégrable n'étant plus assurée.

Fixons un point régulier $\mathbf{z} \in S$ et considérons une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ associée à un voisinage de \mathbf{z} . Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ un point suffisamment proche de \mathbf{z} .

Comme précédemment, \mathbf{x} est réexprimé sous la forme $\mathbf{x} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}) + \tilde{\delta})$ avec $\tilde{\eta} \in B_2(0, d)$ et $\tilde{\delta} \in]-h, 0[$.

Il est alors commode d'introduire le point de la frontière $\tilde{\mathbf{z}}$ défini par $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}))$ et représentant le projeté sur S du point \mathbf{x} selon la troisième direction du repère \mathcal{R} . Clairement pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$, il en résulte que $\tilde{\mathbf{z}} \rightarrow \mathbf{z}$. L'idée consiste alors à introduire un développement de Taylor de la densité $\chi(\mathbf{y})$ au voisinage du point $\tilde{\mathbf{z}} \in S$ et de réécrire l'opérateur intégral sous la forme suivante, pour $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{2+k}^\varepsilon \chi(\mathbf{x}) = & \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}_{2+k}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \left(\chi(\mathbf{y}) - \sum_{p=0}^{p=k} \frac{1}{p!} (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{z}})^p \mathbf{D}_p \chi(\tilde{\mathbf{z}}) \right) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \sum_{p=0}^{p=k} \frac{1}{p!} \mathbf{D}_p \chi(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}_{2+k}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{z}})^p dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.8}) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors obtenir un résultat analogue à (III.1) pour la première intégrale, en imposant des conditions de régularité plus sévères à la densité $\chi(\mathbf{y})$. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire la notion de *continuité au sens de Dini* et définie ci-dessous. Le traitement des termes restants, qualifiés de *termes libres*, reste spécifique au noyau considéré et demandera un traitement particulier.

Definition III.1 Soit D un ensemble compact muni d'une distance ρ . Une fonction $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ appartient à l'ensemble des fonctions continues au sens de Dini, noté $Di^0(D)$, s'il existe une fonction croissante continue $\omega(\mathbf{u}, r)$ telle que

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})\| \leq \omega(\mathbf{u}, \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{\omega(\mathbf{u}, r)}{r} dr < \infty$$

Un choix naturel pour construire $\omega(\mathbf{u}, r)$ consiste à prendre le *module de continuité* de \mathbf{u} donné par la relation

$$\omega(\mathbf{u}, r) = \sup_{\substack{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D^2 \\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r}} \|\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})\|$$

On définit ensuite classiquement les espaces $Di^k(D)$ pour $k \geq 1$ en posant $\mathbf{u} \in Di^k(D)$ si et seulement si $\mathbf{u} \in C^k(D)$ et $\nabla^k \mathbf{u} \in Di^0(D)$.

Remarque III.1 Pour construire les classes de fonctions du type $Di^k(S)$ avec S une variété différentielle, nous devons implicitement supposer S de classe Di^k , i.e. S définie à l'aide d'un atlas de régularité $Di^k(S)$. \square

Il convient de noter que l'ensemble $Di^k(D)$ contient les fonctions hõlderiennes $C^{k, \beta}(D)$ qui sont generalement introduites pour la définition d'intégrales singulières. Certaines questions liées aux conditions nécessaires et suffisantes d'existence de telles intégrales sont posées dans [Krishnasamy et al.92b] et l'introduction de $Di^k(D)$ permet d'y répondre comme dans [Mikhlin et al.86] et [Dautray et al.85]. Le lemme suivant est alors établi pour les opérateurs singuliers d'ordre $2 + k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Lemme III.2

Soit $n = 2 + k$, avec $k \geq 0$ et considérons \mathbf{z} un point régulier de S . Supposons de plus que S est de classe D_i^k au voisinage de \mathbf{z} , ce qui nous permet de considérer $\chi(\mathbf{y}) \in D_i^k(S)$. Le potentiel suivant défini par

$$\tilde{\mathcal{K}}_{2+k}^\varepsilon \chi(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \left(\chi(\mathbf{y}) - \sum_{p=0}^{p=k} \frac{1}{p!} (\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{z}})^p \mathbf{D}^p \chi(\tilde{\mathbf{z}}) \right) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.9})$$

peut être prolongé par continuité en \mathbf{z} en posant

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \tilde{\mathcal{K}}_{2+k}^\varepsilon \chi(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot \left(\chi(\mathbf{y}) - \sum_{p=0}^{p=k} \frac{1}{p!} (\mathbf{y} - \mathbf{z})^p \mathbf{D}_p \chi(\mathbf{z}) \right) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.10})$$

Preuve

Fixons un point régulier $\mathbf{z} \in S$ et considérons une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ en \mathbf{z} . De manière analogue à l'étude des opérateurs intégraux faiblement singuliers, $\tilde{\mathcal{K}}_{2+k}^\varepsilon \chi(\mathbf{x})$ est réécrite dans les coordonnées locales associés à un voisinage de \mathbf{z} pour ε suffisamment petit. On obtient la formulation

$$\tilde{\mathcal{K}}_{2+k}^\varepsilon \chi(\mathbf{x}) = \int_{\alpha^{-1}(S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon))} \left(\mathbf{K}_n[(\xi, \alpha(\xi)), (\xi - \tilde{\eta}, \alpha(\xi) - \alpha(\tilde{\eta}) - \tilde{\delta})] \cdot \left(\chi(\xi, \alpha(\xi)) - \sum_{p=0}^{p=k} \frac{1}{p!} (\mathbf{y} - \mathbf{z})^p \mathbf{D}^p \chi(\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta})) \right) (1 + \|D\alpha(\xi)\|^2)^{\frac{1}{2}} \right) d\xi$$

La densité $\chi(\mathbf{y})$ étant de régularité D_i^k dans un voisinage de \mathbf{z} , il vient après écriture d'un développement de Taylor au voisinage de $\tilde{\mathbf{z}}$

$$\left\| \chi(\xi, \alpha(\xi)) - \sum_{p=0}^{p=k} \frac{1}{p!} (\mathbf{y} - \mathbf{z})^p \mathbf{D}_p \chi(\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta})) \right\| \leq \frac{\|\xi - \tilde{\eta}\|^k}{k!} \omega(\mathbf{D}^k \chi, \|\xi - \tilde{\eta}\|) \quad (\text{III.11})$$

Le noyau \mathbf{K}_{2+k} étant supposé vérifier la propriété $\|\mathbf{K}_{2+k}(\mathbf{r})\| \leq M \|\mathbf{r}\|^{-2-k}$, il en résulte que l'intégrande de $\tilde{\mathcal{K}}_{2+k}^\varepsilon \chi(\mathbf{x})$ est majorée par la quantité $\mathcal{J}(\xi)$ définie ci-dessous, en utilisant l'inégalité (III.4) $\forall (\xi, \tilde{\eta}) \in (B_2(0, \varepsilon))^2, \forall \tilde{\delta} \in]-h(\mathbf{z}), 0[, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \|\xi - \tilde{\eta}\|$.

$$\mathcal{J}(\xi) = C \frac{\omega(\mathbf{D}^k \chi, \|\xi - \tilde{\eta}\|)}{k! \|\xi - \tilde{\eta}\|^2} \quad \text{avec} \quad C = M \sup_{\xi \in B_2(0, \varepsilon)} (1 + \|D\alpha(\xi)\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.12})$$

Compte tenu des hypothèses portant sur $\omega(\mathbf{D}^k \chi, \|\xi - \tilde{\eta}\|)$, il reste à montrer que $\mathcal{J}(\xi)$ est localement intégrable sur \mathbb{R}^2 et admet une dominante intégrable indépendante de \mathbf{x} ou $\tilde{\eta}$.

Pour $(\xi, \tilde{\eta}) \in (B_2(0, \varepsilon))^2$, on a $\xi - \tilde{\eta} \in B_2(0, 2\varepsilon)$ et après introduction des coordonnées polaires sur \mathbb{R}^2 , l'intégrale de $\mathcal{J}(\xi)$ peut finalement être majorée par la quantité

$$\int_{B_2(0, 2\varepsilon)} C \frac{\omega(\mathbf{D}^k \chi, \|\tilde{\xi}\|)}{k! \|\tilde{\xi}\|^2} d\tilde{\xi} = \frac{2\pi C}{k!} \int_0^{2\varepsilon} \frac{\omega(\mathbf{D}^k \chi, r)}{r} dr \quad \text{pour} \quad \xi = \tilde{\eta} + r (\cos\theta, \sin\theta)$$

$D^k \chi$ étant continue au sens de Dini, le terme de droite est intégrable par définition et est de plus indépendant de \mathbf{x} ou $\tilde{\eta}$, d'où le résultat annoncé en vertu du résultat (III.2). ■

Ces résultats vont être d'un grand intérêt pour l'obtention de la trace sur S des potentiels élastiques surfaciques et leur gradient. Nous verrons que l'application de la technique de régularisation des opérateurs singuliers (III.8) permettra systématiquement de mener au résultat. Le traitement spécifique des termes libres sera également abordé.

III.2.2 Evaluation des traces des potentiels surfaciques

L'objet de ce paragraphe est de déterminer la limite de part et d'autre de S des potentiels surfaciques de simple couche $\mathcal{V}_1[[\psi]]$ et de double couche $\mathcal{V}_2[[\phi]]$ pour un point $\mathbf{x} \in \Omega_i$ ($i = 1, 2$) tendant vers un point de la frontière \mathbf{z} . De ce fait, nous serons amené à définir les conditions de régularité portant sur les densités ϕ et ψ , fonctions définies sur S , pour que le prolongement par continuité de $\mathcal{V}_1[[\psi]]$ et $\mathcal{V}_2[[\phi]]$ soit possible. Définissons alors

$$\mathcal{V}_1 \psi_k(\mathbf{x}) = \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{x}) = \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.13})$$

Remarque III.2 Il est aisé de montrer en utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme (III.10) que les potentiels surfaciques $\mathcal{V}_1 \phi(\mathbf{x})$ et $\mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ sont de régularité $C^\infty(\Omega_0)$ pour $(\phi, \psi) \in (L^1(S))^2$ où Ω_0 désigne un ensemble compact strictement inclus dans Ω_1 ou Ω_2 , i.e. $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1$ ou $\Omega_0 \subset\subset \Omega_2$. □

POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE

Resultat III.3

Soit $\psi(\mathbf{y}) \in L^p(S)$ avec $p > 2$. Alors le potentiel de simple couche $\mathcal{V}_1 \psi$ de ψ est continu sur \mathbb{R}^3 et est défini en un point \mathbf{z} de S par

$$\mathcal{V}_1 \psi_k(\mathbf{z}) \equiv \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{V}_1 \psi_k(\mathbf{x}) = \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.14})$$

Preuve

Soit \mathbf{z} un point régulier de S . En reprenant les notations du paragraphe (II.1), il existe alors une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ pour laquelle $\mathbf{z} \in \mathcal{U}$ et $\mathbf{z} = (\eta, \alpha(\eta))$. Introduisons $\varepsilon > 0$ tel que $(S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \subset \mathcal{U}$. Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ nous pouvons écrire $\mathcal{V}_1 \psi_k(\mathbf{x}) = I_k^{(I)}(\mathbf{x}) + I_k^{(II)}(\mathbf{x})$ avec

$$I_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad I_k^{(II)}(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

Puisque $\mathbf{U}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ est borné pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$, le théorème de Lebesgue donne la limite de la première intégrale.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.15})$$

La limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ du terme $\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x})$ est établie grâce au lemme (III.1) en remarquant que $\mathbf{U}(r) = O(r^{-1})$ et nous obtenons pour $\psi(\mathbf{y}) \in L^p(S)$ avec $p > 2$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.16})$$

La démonstration est achevée en recombinaut les deux intégrales. ■

Intéressons nous à présent au prolongement par continuité sur S du potentiel de double couche. L'obtention des relations ci-dessous fait appel à la notion de continuité au sens de Dini, définie dans le paragraphe III.2.1.

POTENTIEL DE DOUBLE COUCHE

Resultat III.4

Soit $\phi(\mathbf{y}) \in Di^0(S)$ et considérons ε un réel arbitraire strictement positif. Alors le potentiel de double couche intérieur $\mathcal{V}_2^{(1)}\phi(\mathbf{x})$ défini par $\phi(\mathbf{y})$ se prolonge par continuité à $\bar{\Omega}_1$ en posant pour \mathbf{z} un point de S

$$\begin{aligned} \gamma_0^1 \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} - \frac{\omega(\mathbf{z}, \mathcal{S}_2(\mathbf{z}, \varepsilon))}{4\pi} \phi_k(\mathbf{z}) \\ &\quad + \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) \quad (\text{III.17}) \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_2(\mathbf{z}, \varepsilon)$ désigne la portion de surface régulière $\partial B(\mathbf{z}, \varepsilon) \cap \bar{\Omega}_2$, orientée comme $\partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et où $C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z})$ est donné par la définition

$$C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) = \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} K_q^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \ell_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.18})$$

De la même manière le potentiel de double couche extérieur $\mathcal{V}_2\phi(\mathbf{x})$ de $\phi(\mathbf{y})$ se prolonge par continuité à $\bar{\Omega}_2$, en introduisant $\mathcal{S}_1(\mathbf{z}, \varepsilon) = \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon) \cap \bar{\Omega}_1$ par

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} + \frac{\omega(\mathbf{z}, \mathcal{S}_1(\mathbf{z}, \varepsilon))}{4\pi} \phi_k(\mathbf{z}) \\ &\quad + \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) \quad (\text{III.19}) \end{aligned}$$

Preuve

Fixons un point $\mathbf{z} \in S$ et considérons une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ en \mathbf{z} . De manière analogue au paragraphe précédent, $\mathcal{V}_2\phi_k(\mathbf{x}) = I_k^{(I)}(\mathbf{x}) + I_k^{(II)}(\mathbf{x}) + I_k^{(III)}(\mathbf{x})$ pour

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ avec

$$\begin{aligned} I_k^{(I)}(\mathbf{x}) &= \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ I_k^{(II)}(\mathbf{x}) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} \\ I_k^{(III)}(\mathbf{x}) &= \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Le terme $\mathbf{I}^{(I)}(\mathbf{x})$ ne pose pas de problème, l'intégrande restant bornée pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$ et après passage à la limite $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$, on obtient l'intégrale de la limite. Traitons à présent l'intégrale $\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x})$. Le tenseur des contraintes associé à la solution de Kelvin vérifiant $\|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{r})\| \leq M \|\mathbf{r}\|^{-2}$, il s'agit d'un noyau singulier d'ordre 2. La densité $\phi(\mathbf{y})$ étant supposée continue au sens de Dini, il en résulte après application du lemme (III.2) que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_k^{(II)}(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.20})$$

L'intégrale $\mathbf{I}^{(III)}(\mathbf{x})$ qualifiée de *terme libre* fait apparaître le terme de saut et est généralement traité en utilisant une propriété des solutions élémentaires appelée *identité de corps rigide* [Bonnet95a]. Modifions quelque peu l'expression de $\mathbf{I}^{(III)}(\mathbf{x})$. On montre dans [Tanaka et al.94] que le noyau $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{r})$ admet la décomposition suivante (voir l'annexe B).

$$\Sigma_{ij}^k(\mathbf{r}) = e_{qjs} K_{iq,s}^k(\mathbf{r}) + \delta_{ik} G_{,j}(\mathbf{r}) \quad (\text{III.21})$$

$$K_{iq}^k(\mathbf{r}) = \frac{e_{qpi}}{8\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)\delta_{pk} + r_{,p}r_{,k}] \quad \text{et} \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} \quad (\text{III.22})$$

L'intégrale $\mathbf{I}^{(III)}(\mathbf{x})$ se réécrit sous la forme ci-dessous et on procède à une intégration par parties en utilisant le théorème de Stokes (II.20), ce qui aboutit à

$$I_k^{(III)}(\mathbf{x}) = \phi_k(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} + \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.23})$$

où $H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ désigne le potentiel de double couche relatif à l'opérateur de Poisson c'est-à-dire $H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$.

L'intégrale de contour ne pose manifestement aucune difficulté, l'intégrande étant régulière et nous avons grâce au théorème de Lebesgue et à la définition (III.18) du terme libre $\mathcal{C}_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z})$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = \mathcal{C}_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \quad (\text{III.24})$$

Quant à la première intégrale, il est nécessaire de distinguer les cas de la représentation intérieure et de la représentation extérieure. Introduisons respectivement $\mathcal{S}_m(\mathbf{z}, \varepsilon) = \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon) \cup \Omega_m$ pour $m \in [1, 2]$. La normale sur $\mathcal{S}_m(\mathbf{z}, \varepsilon)$ est prise sortante par rapport à $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ i.e. $\mathcal{S}_m(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et $\partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ ont la même orientation.

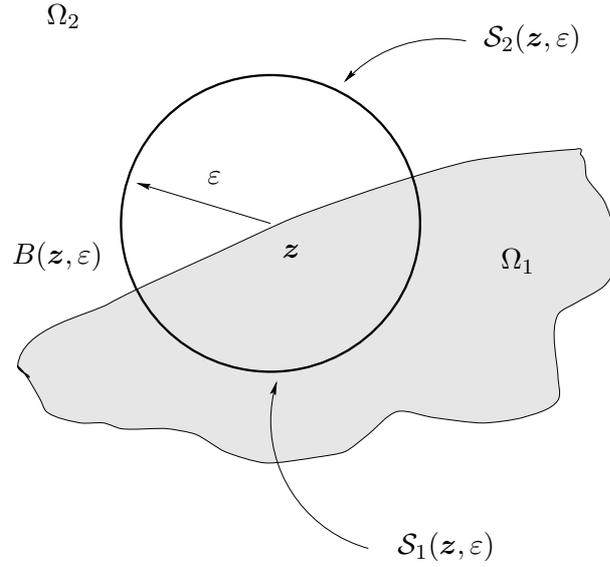


Figure III.1 : Surfaces élémentaires associées au voisinage d'exclusion

Représentation intérieure $\mathbf{x} \in \Omega_1$

Considérons $\mathbf{x} \in \Omega_1$ et définissons l'ouvert $\mathcal{O}_1(\mathbf{z}, \varepsilon) = \Omega_2 \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Par construction nous avons $\mathbf{x} \notin \Omega_1(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et l'identité de corps rigide [Bonnet95a] pour l'opérateur de Laplace, appliquée au domaine $\mathcal{O}_1(\mathbf{z}, \varepsilon)$, conduit à la relation

$$\int_{\partial\mathcal{O}_1(\mathbf{z}, \varepsilon)} H_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{n}_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 0 \quad (\text{III.25})$$

où $\tilde{\mathbf{n}}$ désigne la normale extérieure à $\mathcal{O}_1(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Effectuons alors la partition de la frontière $\partial\mathcal{O}_1(\mathbf{z}, \varepsilon)$ selon $\partial\mathcal{O}_1(\mathbf{z}, \varepsilon) = (S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \cup \mathcal{S}_2(\mathbf{z}, \varepsilon)$. L'identité (III.25) peut alors être reformulée comme suit et $\mathbf{I}^{(III)}(\mathbf{x})$ admet l'expression suivante

$$\int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\mathcal{S}_2(\mathbf{z}, \varepsilon)} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.26})$$

La fonction $\phi(\mathbf{y})$ étant continue en \mathbf{z} et le noyau $H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ étant uniformément borné pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}_2(\mathbf{z}, \varepsilon) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$, on en déduit après application du théorème de Lebesgue que

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} I_k^{(III)}(\mathbf{x}) = \phi_k(\mathbf{z}) \int_{\mathcal{S}_2(\mathbf{z}, \varepsilon)} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) dS_{\mathbf{y}} + C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) \quad (\text{III.27})$$

Représentation extérieure $\mathbf{x} \in \Omega_2$

De manière analogue au problème intérieur, on introduit pour un point $\mathbf{x} \in \Omega_2$ l'ouvert $\mathcal{O}_2(\mathbf{z}, \varepsilon) = \Omega_1 \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et un raisonnement similaire conduit aux conclusions suivantes

$$\int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} = - \int_{\mathcal{S}_1(\mathbf{z}, \varepsilon)} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.28})$$

ce qui engendre la limite de $\mathbf{I}^{(III)}(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \Omega_2 \rightarrow \mathbf{z}$

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_2 \rightarrow \mathbf{z}} I_k^{(III)}(\mathbf{x}) = -\phi_k(\mathbf{z}) \int_{S_1(\mathbf{z}, \varepsilon)} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) dS_{\mathbf{y}} + C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) \quad (\text{III.29})$$

■

Les termes de noyau $H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z})$ admettent une interprétation géométrique et représentent l'angle solide algébrique $\omega(\mathbf{z}, \mathcal{S}_m)$ au facteur 4π près, sous lequel \mathbf{z} voit la portion de surface \mathcal{S}_m . Afin d'alléger la présentation, nous noterons par la suite dans les expressions de $\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{z})$

$$\omega^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) = \begin{cases} \omega(\mathbf{z}, \mathcal{S}_2) & \text{pour } m = 1 \\ -\omega(\mathbf{z}, \mathcal{S}_1) & \text{pour } m = 2 \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

ce qui permet de réexprimer la trace de $\mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{y})$ de part et d'autre de S , sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = & \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} - \frac{\omega^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)}{4\pi} \phi_k(\mathbf{z}) \\ & + \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) \quad (\text{III.31}) \end{aligned}$$

Notons que les résultats obtenus reposent principalement sur l'utilisation du théorème de Lebesgue et sur les propriétés de régularité *locale* de la densité $\phi(\mathbf{y})$.

Il est essentiel de noter que l'expression de la trace du potentiel de double couche de part et d'autre de S est *indépendante* du réel $\varepsilon > 0$. Celui-ci a été introduit au cours de la démonstration de manière arbitraire pour permettre le traitement des intégrales singulières. L'expression (III.31) est la plus générale qui soit et on peut par exemple choisir d'éliminer ε pour retrouver deux processus de régularisation que l'on qualifie dans la littérature de *directe* et d'*indirecte* et correspondant respectivement aux cas $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Régularisation indirecte

Ω_1 étant borné, on peut trouver ε_0 suffisamment grand pour lequel $\forall \varepsilon > \varepsilon_0, \forall \mathbf{z} \in S, \Omega_1 \subset B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Les relations (III.17) et (III.19) s'écrivent alors [Bonnet95a]

$$\begin{aligned} \gamma_0^1 \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) &= -\phi_k(\mathbf{z}) + \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ \gamma_0^2 \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) &= \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Ces relations peuvent encore se mettre sous forme condensée en définissant classiquement $\kappa^{(m)}$ pour $m \in [1, 2]$ par $\kappa^{(1)} = 1$ et $\kappa^{(2)} = 0$

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = -\kappa^{(m)} \phi_k(\mathbf{z}) + \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.32})$$

Régularisation directe

Le processus de passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nécessite plus de soin et il est alors nécessaire de déterminer la limite quand ε devient petit des différents termes de (III.17) et (III.19). L'intégrale de support $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ étant régulière, sa contribution disparaît. De plus \mathbf{z} étant un point régulier de S , on montre aisément que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_m} H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) dS_{\mathbf{y}} = -\frac{1}{2} \quad (\text{III.33})$$

L'évaluation du terme de support $S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ est plus délicate et on peut noter qu'il n'a a priori aucune raison de disparaître. Il s'agit d'ailleurs du principal argument (voir [Bonnet95a]) pour montrer que l'intégrale sur S de noyau $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ est singulière pour $\mathbf{x} \in S$. Ce terme demeure néanmoins borné, compte tenu du fait que $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = O(r^{-1})$.

En faisant tendre ε vers 0, on constate que la somme des contributions dues à l'intégrale de support $S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et au terme de contour, reste borné. On peut également noter que la forme du voisinage d'exclusion n'a aucune influence sur le résultat (III.4), puisqu'aucune hypothèse concernant ce voisinage n'est jamais intervenue explicitement lors de la démonstration.

Introduisons de ce fait la *partie finie* du potentiel de double couche en \mathbf{z} , définie par la relation

$$\text{pf} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) \right) \quad (\text{III.34})$$

où $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ peut à présent, représenter tout voisinage quelconque de \mathbf{z} gardant une forme fixe au cours du processus de passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Le choix d'une boule de rayon ε et centrée en \mathbf{z} se fait uniquement par commodité et l'on peut considérer pour $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ toute surface régulière représentée en coordonnées sphériques par $r = \varepsilon \hat{r}(\varphi, \vartheta)$, comme dans [Schwab et al.92a] et [Toh et al.94].

On constate que l'expression de la limite ne dépend plus du voisinage d'exclusion et est donnée par la relation (III.35). Il en va de même pour le terme libre qui ne contient que des informations géométriques locales, à savoir l'angle solide à un facteur près, sous lequel \mathbf{z} voit S . Un résultat analogue a été obtenu dans le cadre de la théorie du potentiel par [Kieser92] référencé dans [Schwab et al.92a] et dans le cadre de l'élasticité par [Toh et al.94].

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)} \right) \phi_k(\mathbf{z}) + \text{pf} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.35})$$

Cette approche est des plus plaisantes car elle donne un caractère intrinsèque au problème de régularisation des intégrales singulières et généralise la notion de valeur principale qui est très couramment rencontrée dans la littérature [Kupradze et al.79] ou [Guiggiani et al.90]. La quantité finalement intéressante est la partie finie de cette intégrale définie par (III.34).

Remarque III.3 Si on reprend un voisinage d'exclusion représentant la boule de rayon ε centrée en \mathbf{z} , il est alors possible de montrer que $C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z})$ s'annule lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ comme dans [Kupradze et al.79].

En effet, supposons tout d'abord que $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ soit localement plane autour de \mathbf{z} . Il vient naturellement que $S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ est un cercle centré en \mathbf{z} et de rayon ε . Etant donné que le noyau $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ est pair i.e. $\mathbf{K}(-\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r})$, on constate que l'intégrale de contour disparaît puisque les

contributions de deux points diamétralement opposés s'annulent. Ce résultat est valable pour tout voisinage d'exclusion présentant une symétrie centrale [Fiedler95]. Dans le cas plus général d'une surface localement de Liapunov en \mathbf{z} i.e. $S \in C^{1,\beta}$, il est possible de montrer [Hartmann81] que l'intégrale de contour $\mathcal{C}_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z})$ est un $O(\varepsilon^\beta)$ et tend de ce fait vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et il en découle finalement que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = 0 \quad (\text{III.36})$$

En reprenant l'expression (III.31), il reste à déterminer le terme de support $S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Ce terme a une limite finie que l'on note *valeur principale* sur S de $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot \phi(\mathbf{y})$ et est définie par

$$\text{vp} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.37})$$

En regroupant les différents termes obtenus, nous pouvons finalement mettre la relation (III.31) pour $m \in [1, 2]$, sous la forme définitive

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)} \right) \phi_i(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.38})$$

On peut noter que pour un point régulier $\mathbf{z} \in S$, il n'y a pas de différence fondamentale entre les expressions (III.35) et (III.38). Celle-ci n'apparaîtra que lors de l'étude en des points irréguliers, faisant l'objet du paragraphe (IV.1). \square

Remarque III.4 Les relations définies dans (III.35) montrent que le potentiel de double couche est discontinu à la traversée de la surface S en \mathbf{z} et la valeur de cette discontinuité n'est autre que $\phi(\mathbf{z})$ puisque $\gamma_0^2 \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) - \gamma_0^1 \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = \phi_k(\mathbf{z})$. \square

III.2.3 Evaluation des traces du gradient des potentiels surfaciques

Cette section traite de l'évaluation des traces de part et d'autre de S des gradients des potentiels de simple et de double couche. L'expression de ces derniers est obtenue pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ après dérivation sous le signe somme par rapport à \mathbf{x} de $\mathcal{V}_1 \phi(\mathbf{x})$ et $\mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{V}_1 \psi_{kl}(\mathbf{x}) &= - \int_S U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ \nabla \mathcal{V}_2 \phi_{kl}(\mathbf{x}) &= - \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

PRÉLIMINAIRES

Pour déterminer les traces sur S de $\mathcal{V}_1 \phi(\mathbf{x})$ et $\mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$, nous nous proposons de reprendre la méthodologie adoptée dans le paragraphe III.2.2. Celle-ci repose sur deux points essentiels qui, associés au théorème de Lebesgue, permettent d'aboutir au résultat :

- ◇ l'introduction d'un voisinage d'exclusion suivie d'une technique de régularisation basée sur un développement de Taylor de la densité,
- ◇ le traitement spécifique des termes libres invoquant les propriétés intrinsèques du noyau.

Le prolongement par continuité sur S des gradients des potentiels surfaciques peut alors être réalisé en utilisant les techniques précédentes couplées à une décomposition des noyaux $\nabla U(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et $\nabla \Sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$ dans un système de coordonnées locales associées à $\mathbf{y} \in S$ comme dans [Kupradze et al.79]. Par souci de clarté, rappelons brièvement quelques résultats classiques tirés de la théorie du potentiel scalaire. Considérons les potentiels scalaires $\mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x})$ et $\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x})$, définis pour $(\phi, \psi) \in (L^1(S))^2$ par

$$\mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x}) = \int_S G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x}) = \int_S \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

L'évaluation de la trace sur S du gradient des potentiels scalaires est par exemple traitée dans [Chen et al.92] et l'idée principale consiste à exprimer pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ le noyau $(\nabla G)_{|S}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ en un point courant de la surface \mathbf{y} en fonction de sa composante surfacique $DG_{|S}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et normale $\nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$ selon

$$(\nabla G)_{|S}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = DG_{|S}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.40})$$

Il est alors possible de réexprimer $\nabla \mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x})$ et $\nabla \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x})$ à l'aide d'opérateurs intégral-différentiels de noyaux $G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et $\nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$ dont on connaît le comportement au voisinage de S . Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.

Pour les opérateurs élastiques, la situation est nettement plus compliquée puisque le noyau $\nabla U(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$ n'apparaît pas explicitement dans les formulations. L'idée consiste alors à décomposer le noyau $(\nabla U)_{|S}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ selon sa *composante surfacique* $DU_{|S}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et sa *composante conormale* $(\mathbf{C} : \nabla U(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$ [Kupradze et al.79]. Pour ce faire, nous utilisons le résultat classique suivant obtenu dans le cadre de l'élasticité linéaire et pouvant être trouvé dans [Telles83], [Bonnet95a] ou [Balas et al.89].

Resultat III.5

Soit \mathbf{y} un point régulier de S et considérons une fonction $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in C^1(\mathcal{O}(\mathbf{y}))$ avec $\mathcal{O}(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^3$ un voisinage de \mathbf{y} . Notons respectivement $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ et $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})$, la trace et la dérivée conormale de \mathbf{u} en \mathbf{y} . Nous pouvons alors écrire

$$(\nabla \mathbf{u})_{|S}(\mathbf{y}) = D\mathbf{u}_{|S}(\mathbf{y}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.41})$$

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{1}{G} \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y})}{2(1-\nu)} \right] \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) - \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot D\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) - \frac{\nu}{1-\nu} (\text{div}_S \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.42})$$

$$\text{avec} \quad \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}_{|S}(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{C} : (\nabla \mathbf{u})_{|S}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.43})$$

Ces relations peuvent se mettre sous la forme condensée ci-dessous

$$(\nabla \mathbf{u})_{|S}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y}) : D\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \quad u_{k,l}(\mathbf{y}) = \Phi_{kli}(\mathbf{y}) \tilde{\tau}_i(\mathbf{y}) + \Psi_{kl ij}(\mathbf{y}) D_j \tilde{u}_i(\mathbf{y}) \quad (\text{III.44})$$

avec $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y})$, deux opérateurs linéaires dépendant du point courant \mathbf{y} , représentés par deux tenseurs définis par les expressions

$$\Phi_{kli}(\mathbf{y}) = \frac{1}{G} \left(\delta_{ki} - \frac{n_k(\mathbf{y}) n_i(\mathbf{y})}{2(1-\nu)} \right) n_l(\mathbf{y}) \quad (\text{III.45})$$

$$\Psi_{kli}(\mathbf{y}) = \delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} n_l(\mathbf{y}) n_i(\mathbf{y}) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} n_k(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \quad (\text{III.46})$$

Preuve

Introduisons la notation $\partial_n \mathbf{u}(\mathbf{y}) = (\nabla \mathbf{u})|_S(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$. Il est alors possible d'exprimer la dérivé conormale $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})$ sous la forme ci-dessous, en insérant la décomposition $(\nabla \mathbf{u})|_S(\mathbf{y}) = D\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) + \partial_n \mathbf{u}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y})$ dans $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) \equiv (\mathbf{C} : (\nabla \mathbf{u})|_S(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$.

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) = G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} (\operatorname{div}_S \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot D\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \right) + G \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y})}{1-2\nu} \right) \cdot \partial_n \mathbf{u}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.47})$$

L'opérateur apparaissant devant $\partial_n \mathbf{u}(\mathbf{y})$ est inversible et admet pour inverse l'opérateur défini ci-après, ce qui mène à la relation (III.42).

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y})}{1-2\nu} \right)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y})}{2(1-\nu)} \quad (\text{III.48})$$

■

Remarque III.5 Rappelons que pour un problème d'élasticité linéaire avec déformations (ou contrainte) initiales $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, le vecteur-contrainte $\tilde{\boldsymbol{t}}(\mathbf{y})$ est relié à la dérivé conormale $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})$ par la relation

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) = \tilde{\boldsymbol{t}}(\mathbf{y}) + (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{|S}^0(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.49})$$

□

Intéressons-nous à présent au prolongement par continuité de part et d'autre de S du gradient du potentiel de simple couche.

GRADIENT DU POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE

Resultat III.6

Soit \mathbf{z} un point régulier de S et soit $\varepsilon > 0$ un réel quelconque. Si $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) \in Di^0(S)$ et $S \in C^{1,\beta}$ en \mathbf{z} alors les restrictions à Ω_m , $m \in [1, 2]$ du gradient du potentiel de simple couche, notées $\nabla \mathcal{V}_1^{(m)} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$, peuvent être prolongées par continuité en $\mathbf{z} \in S$ en posant

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_1 \boldsymbol{\psi}_{k,l}(\mathbf{z}) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z} \in S} \mathcal{V}_1 \boldsymbol{\psi}_{k,l}(\mathbf{x}) = - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\psi_i(\mathbf{y}) - \psi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - A_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \psi_i(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

avec la définition suivante

$$\begin{aligned} A_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_p^i(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\Phi_{klp}(\mathbf{y}) - \Phi_{klp}(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \Phi_{klp}(\mathbf{z}) \left(\mathcal{C}_{ip}^\varepsilon(\mathbf{z}) - \frac{\omega^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)}{4\pi} \delta_{ip} \right) + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\Psi_{klpq}(\mathbf{y}) - \Psi_{klpq}(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \Psi_{klpq}(\mathbf{z}) \left(\mathcal{A}_{pqi}^\varepsilon(\mathbf{z}) + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_a n_a(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

où les quantités $\Phi(\mathbf{y})$ et $\Psi(\mathbf{y})$ sont définies par les relations (III.45) et (III.46) et où le coefficient $\mathcal{A}_{pqi}^\varepsilon(\mathbf{z})$ du terme libre vaut

$$\mathcal{A}_{pqi}^\varepsilon(\mathbf{z}) = \int_{S^{(n)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.52})$$

Preuve

Soit $\mathbf{z} \in S$ un point régulier de la frontière. Considérons alors comme précédemment un réel strictement positif quelconque ε et écrivons $\nabla \mathcal{V}_1 \psi(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ sous la somme suivante avec $\mathbf{x} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}) + \tilde{h})$ et $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}))$ dans une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ associée à \mathbf{z} .

$$I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.53})$$

$$I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\psi_i(\mathbf{y}) - \psi_i(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.54})$$

$$I_{kl}^{(III)}(\mathbf{x}) = -\psi_i(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.55})$$

L'intégrande de $I^{(I)}(\mathbf{x})$ étant uniformément bornée pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$, il est possible d'écrire en appliquant le théorème de Lebesgue

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.56})$$

Etant donné que $\nabla \mathbf{U}(\mathbf{r}) = O(r^{-2})$ et $\psi(\mathbf{y})$ est supposée continue au sens de Dini sur $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$, nous obtenons la limite du terme $I^{(II)}(\mathbf{x})$ après application du lemme (III.2). Il en résulte alors

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\psi_i(\mathbf{y}) - \psi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.57})$$

Le terme $I^{(III)}(\mathbf{x})$ est traité en utilisant le résultat (III.5) appliqué au noyau $\nabla \mathbf{U}(r)$. Nous pouvons ainsi exprimer ce dernier par l'intermédiaire de (III.44) sous la forme suivante

$$U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \Phi_{klp}(\mathbf{y}) T_p^i(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) + \Psi_{klpq}(\mathbf{y}) D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (\text{III.58})$$

En notant $I_{kl}^{(III)}(\mathbf{x}) = -A_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon) \psi_i(\tilde{\mathbf{z}})$, nous obtenons une expression de $A_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ faisant intervenir des opérateurs intégraux de noyau $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ et $\mathbf{DU}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ associés respectivement aux densités $\Psi(\mathbf{y})$ et $\Phi(\mathbf{y})$. Ainsi $A_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ admet formellement la décomposition suivante $A_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon) = A_{kli}^\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon) + A_{kli}^\Psi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ avec

$$A_{kli}^\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_p^i(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \Phi_{klp}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.59})$$

$$A_{kli}^\Psi(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Psi_{klpq}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.60})$$

Il reste à évaluer la limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ de ces deux expressions.

La surface S étant supposée de classe $C^{1,\beta}$ en \mathbf{z} , pour ε suffisamment petit, le champ de normale vérifie la propriété $\mathbf{n}(\mathbf{y}) \in C^{0,\beta}(S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon))$, ce qui nous permet d'avoir les propriétés de régularité $(\Phi(\mathbf{y}), \Psi(\mathbf{y})) \in [C^{0,\beta}(S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon))]^2$.

Traitement de l'intégrale $A_{kli}^\Phi(\mathbf{x})$

Le terme $A_{kli}^\Phi(\mathbf{x})$ étant un potentiel de double couche de densité $\Phi(\mathbf{y})$ vérifiant la continuité de Dini, nous sommes amenés à distinguer les cas des représentations intérieure et extérieure.

En introduisant de manière analogue à la démonstration du résultat (III.3), les surfaces $S_m(\mathbf{z}, \varepsilon) = \Omega_m \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et en les orientant comme $\partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$, il vient pour $m \in [1, 2]$,

$$A_{kli}^{\Phi(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_p^i(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\Phi_{klp}(\mathbf{y}) - \Phi_{klp}(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ + \Phi_{klp}(\mathbf{z}) \left(-\frac{\omega^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)}{4\pi} \delta_{ip} + C_{ip}^\varepsilon(\mathbf{z}) \right) \quad (\text{III.61})$$

Traitement de l'intégrale $A_{kli}^\Psi(\mathbf{x})$

La densité $\Psi(\mathbf{y})$ étant de classe Di dans un voisinage de \mathbf{z} , nous pouvons écrire pour ε suffisamment petit

$$A_{kli}^\Psi(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\Psi_{klpq}(\mathbf{y}) - \Psi_{klpq}(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} \\ + \Psi_{klpq}(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.62})$$

Comme $DU = O(r^{-2})$ et $\Psi(\mathbf{y})$ vérifie la condition de Dini en \mathbf{z} , l'utilisation du lemme (III.2) donne la limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ de la première intégrale.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\Psi_{klpq}(\mathbf{y}) - \Psi_{klpq}(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} \\ = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\Psi_{klpq}(\mathbf{y}) - \Psi_{klpq}(\mathbf{x})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.63})$$

Le second terme ne fait intervenir que le noyau $DU(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et est traité en effectuant une intégration par partie. Rappelons que S est une réunion d'un nombre fini de surface de Liapunov $S^{(n)}$, il résulte alors après écriture de la relation (II.19) sur chaque partie régulière $S^{(n)}$ de S ,

$$\int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{S^{(n)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \nu_q^{(n)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \\ + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_a n_a(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.64})$$

Les limites de ces deux intégrales pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ ne posent plus de problème et sont obtenues après application du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ainsi \mathbf{z} étant un point régulier de S , aucune arête n'intersecte \mathbf{z} et l'intégrande de la première intégrale est uniformément bornée pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$, ce qui mène en vertu du résultat (III.2) pour tout $n \in [1, N]$ à

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S^{(n)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \nu_q^{(n)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = \int_{S^{(n)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \nu_q^{(n)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.65})$$

La seconde intégrale de la relation (III.64) représente le potentiel de simple couche d'une densité $\chi(\mathbf{y})$ restreinte à $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et définie par $\chi(\mathbf{y}) = \operatorname{div}_S \mathbf{n}(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y})$. Il nous suffit de montrer que $\chi(\mathbf{y}) \in L^p(S)$ pour $p > 2$.

La surface S étant de classe $C^{1,\beta}$ en \mathbf{z} , nous avons pour ε suffisamment petit,

$$\exists C \geq 0, \forall (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in (S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon))^2, \|\mathbf{n}(\mathbf{y}_1) - \mathbf{n}(\mathbf{y}_2)\| \leq C \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|^\beta \quad (\text{III.66})$$

Il en résulte la propriété intéressante

$$\exists C \geq 0, \forall \mathbf{y} \in S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon), \|\mathbf{D}\mathbf{n}(\mathbf{y})\| \leq C \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^{\beta-1} \quad (\text{III.67})$$

ce qui nous permet finalement de majorer la densité $\chi(\mathbf{y})$ dans un voisinage de \mathbf{z} par la quantité

$$\|\chi(\mathbf{y})\| \equiv \|\operatorname{div}_S \mathbf{n}(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y})\| \leq C \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^{\beta-1} \quad (\text{III.68})$$

On vérifie alors très aisément que $\chi(\mathbf{y}) \in L^p(S)$ pour $p > 2$, ce qui nous permet finalement d'obtenir en appliquant le résultat (III.3), la limite suivante

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_a n_a(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_a n_a(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.69})$$

Après avoir regroupé les différents termes, nous aboutissons finalement à l'expression de la limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ de $A_{kli}^\Psi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ donnée par

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} A_{kli}^\Psi(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\Psi_{klpq}(\mathbf{y}) - \Psi_{klpq}(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.70}) \\ &+ \Psi_{klpq}(\mathbf{z}) \left(\int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_a n_a(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{S^{(n)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \nu_q^{(n)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned}$$

La limite de part et d'autre de S en \mathbf{z} du terme libre $A_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ est obtenue en tenant compte de (III.61) et (III.70), ce qui achève la démonstration. ■

Remarque III.6 Pour une surface S régulière de Liapunov, le terme relatif aux intégrales de contour s'élimine. En effet $\Psi(\mathbf{y})$ est alors continue sur S et compte tenu des conventions d'orientation cohérentes des $S^{(n)}$, on a la propriété

$$\forall (n_1, n_2) \in [1, N]^2, \nu^{(n_1)} + \nu^{(n_2)} = 0 \quad \text{sur} \quad S^{(n_1)} \cap S^{(n_2)} \quad (\text{III.71})$$

□

Remarque III.7 Le processus de régularisation ainsi mis en œuvre est indépendant de la forme du voisinage d'exclusion choisi et $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ peut désigner un voisinage arbitraire gardant une forme donnée au cours du passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. □

L'expression des traces du gradient du potentiel de simple couche de part et d'autre de S fait intervenir un réel positif arbitraire positif ε qu'il est possible d'éliminer comme lors de l'étude du potentiel de double couche, en considérant deux cas limites : $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow \infty$ correspondant respectivement aux processus de régularisation directe et indirecte.

On se propose d'évaluer les expressions des traces ainsi obtenues, ce qui nous permettra de retrouver certaines expressions rencontrées dans la littérature.

Régularisation indirecte

Considérons ε suffisamment grand de manière à avoir la propriété $\forall \mathbf{z} \in S$, $S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon) = \emptyset$, ce qui entraîne que $\forall \mathbf{z} \in S$, $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon) = S$. Les surfaces $\mathcal{S}_m(\mathbf{z}, \varepsilon)$ se réduisent alors à

$$\mathcal{S}_1(\mathbf{z}, \varepsilon) = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2(\mathbf{z}, \varepsilon) = S \quad (\text{III.72})$$

Les traces $\gamma_0^m \nabla \mathcal{V}_1 \psi(\mathbf{z})$ en \mathbf{z} de part et d'autre de S pour $m \in [1, 2]$, admettent les expressions suivantes

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_1 \psi_{k,l}(\mathbf{z}) = - \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\psi_i(\mathbf{y}) - \psi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} - A_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) \psi_i(\mathbf{z}) \quad (\text{III.73})$$

et le terme libre $A_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty)$ peut finalement être mis sous la forme suivante

$$\begin{aligned} A_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) &= -\kappa^{(m)} \phi_{kli}(\mathbf{z}) + \int_S T_p^i(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\Phi_{klp}(\mathbf{y}) - \Phi_{klp}(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_S U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_a n_a(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) \Psi_{klpq}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_q \Psi_{klpq}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\partial S^{(n)}} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \Psi_{klpq}(\mathbf{y}) \nu_q^{(n)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

L'expression (III.74) est bien définie puisque la densité $\Psi(\mathbf{y})$ est de classe $C^{0,\beta}(S^{(n)})$ pour $n \in [1, N]$ et que sa dérivée surfacique au sens des distributions est alors intégrable sur chaque composante régulière de S . Notons que l'écriture de la dernière intégrale contient également une sommation sur n (conventions d'Einstein).

La formulation (III.74) ainsi obtenue est composée d'une intégrale de noyau $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z})$ et de trois opérateurs intégral-différentiels de noyau $\mathbf{U}(\mathbf{y} - \mathbf{z})$. On constate l'apparition de dérivées surfaciques d'ordre 2, ce qui numériquement n'est pas très intéressant. Cette expression peut toutefois être reformulée comme dans [Bonnet et al.93], vu que

$$A_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) = \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z}} \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.75})$$

Régularisation directe

Les méthodes de régularisation directe faisant apparaître des intégrales singulières, correspondent au cas où $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que pour tout \mathbf{z} de S pour lequel il existe un voisinage $\mathcal{O}(\mathbf{z})$ de S de Liapunov, il correspond $n_0 \in [1, N]$, tel que $\mathcal{O}(\mathbf{z}) \subset S^{(n_0)}$. On peut alors choisir ε suffisamment petit de manière à avoir $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon) \subset S^{(n_0)}$. Il est alors possible d'exprimer $\mathbf{A}_{kli}^{\Psi}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ donné par (III.70) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{kli}^{\Psi}(\mathbf{z}, \varepsilon) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_q U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\Psi_{klpq}(\mathbf{y}) - \Psi_{klpq}(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \Psi_{klpq}(\mathbf{z}) \left(\int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_a n_a(\mathbf{y}) n_q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{S^{(n_0)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \nu_q^{(n_0)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned}$$

On peut distinguer trois types d'intégrales apparaissant dans l'expression de $\gamma_0^m \mathcal{V}_1 \psi_{k,l}(\mathbf{z})$. Tout d'abord, les termes de support $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ sont réguliers et tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Quant aux termes de contour, ils restent bornés lorsque ε devient très petit. En effet, prenons l'exemple de l'intégrale de noyau $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, nous pouvons, en tenant compte du fait que $\forall \lambda > 0$, $\mathbf{U}(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^{-1} \mathbf{U}(\mathbf{r})$, la réexprimer sous la forme

$$\mathcal{A}_{pqi}^\varepsilon(\mathbf{z}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{S^{(n_0)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{z}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|} \right) \nu_q^{(n_0)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = O(\varepsilon^0) \quad (\text{III.76})$$

Notons que ces termes dépendent implicitement de la forme du voisinage d'exclusion choisi. Il en est de même pour $\mathcal{C}_{ip}^\varepsilon(\mathbf{z})$ déjà rencontrée lors de l'étude du potentiel de double couche.

En reprenant l'idée de *partie finie* introduite pour le potentiel de double couche, nous définissons alors de manière analogue à [Krishnasamy et al.90] et [Toh et al.94] pour un voisinage d'exclusion arbitraire $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ gardant une forme donnée lors du processus $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \text{pf} \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\Phi_{klp}(\mathbf{z}) \mathcal{C}_{ip}^\varepsilon(\mathbf{z}) + \Psi_{klpq}(\mathbf{z}) \mathcal{A}_{pqi}^\varepsilon(\mathbf{z}) \right) \psi_i(\mathbf{z}) \right] \quad (\text{III.77}) \end{aligned}$$

Ces notations permettent alors de réécrire la relation (III.50) sous une formulation plus générale, indépendante du voisinage d'exclusion. Là encore, le terme libre ne contient que la valeur de l'angle solide et ne fait plus intervenir la forme de $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Nous obtenons finalement comme [Chen et al.92]

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_1 \psi_{k,l}(\mathbf{z}) = \tilde{a}_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{z}) - \text{pf} \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.78})$$

$$\text{et } \tilde{a}_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}) = \left(\kappa^{(m)} - \frac{1}{2} \right) \Phi_{kli}(\mathbf{z}) \quad (\text{III.79})$$

Remarque III.8 Il est intéressant d'évaluer les termes de contour pour $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. En tenant compte de la relation (III.36), le terme de noyau $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ disparaît. Il nous reste à traiter l'intégrale de noyau $\mathbf{U}(\mathbf{r})$.

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ est une surface plane. Le contour $S_p \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ est alors un cercle de rayon ε centré en \mathbf{z} . Compte tenu de la parité de $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, c'est-à-dire $\mathbf{U}(-\mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r})$, on vérifie facilement que

$$\int_{S_p^{(n_0)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \nu_q^{(n_0)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = 0 \quad (\text{III.80})$$

Dans le cas plus général d'un voisinage $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ de Liapunov $C^{1,\beta}$, les variations des différentes grandeurs géométriques par rapport aux mêmes quantités définies dans le plan tangent, sont de l'ordre de ε^β (voir par exemple [Kupradze et al.79], [Hartmann81] et [Hartmann82]), ce qui permet d'en conclure que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^{(n_0)} \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_p^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \nu_q^{(n_0)}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = 0 \quad (\text{III.81})$$

Le terme libre $A_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ ayant une limite finie pour $\varepsilon \rightarrow 0$, il en résulte que l'intégrale de noyau $\nabla \mathbf{U}(\mathbf{r})$ existe en valeur principale de Cauchy et on aboutit à l'expression définitive de

$\gamma_0^m \mathcal{V}_1 \psi_{k,l}(\mathbf{z})$. Ce résultat peut par exemple être trouvé pour le cas d'une surface S de Liapunov dans [Kupradze et al.79], [Balas et al.89] et [Chen et al.92]. Ainsi

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_1 \psi_{k,l}(\mathbf{z}) = \tilde{a}_{kli}^{(m)}(\mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{z}) - \text{vp} \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.82})$$

$$\text{avec } \text{vp} \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.83})$$

□

Remarque III.9 Il est intéressant d'évaluer le saut de la dérivée conormale de $\mathcal{V}_1 \psi(\mathbf{x})$ à la traversée de S au point régulier \mathbf{z} . Nous avons alors

$$C_{abkl} : \left[\gamma_0^2 \mathcal{V}_1 \psi_{k,l}(\mathbf{z}) - \gamma_0^1 \mathcal{V}_1 \psi_{k,l}(\mathbf{z}) \right] \cdot n_b(\mathbf{z}) = -C_{abkl} n_b(\mathbf{z}) \Phi_{kli}(\mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{z}) = -\psi_a(\mathbf{z}) \quad (\text{III.84})$$

Ce saut vaut la densité ψ prise au point \mathbf{z} du potentiel de simple couche $\mathcal{V}_1 \psi(\mathbf{x})$. On retrouve de ce fait un résultat très classique [Kupradze et al.79] et [Chen et al.92]. □

Intéressons-nous au prolongement par continuité en S du gradient du potentiel de double couche $\mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ de la densité surfacique $\phi(\mathbf{y})$. Une démarche analogue à l'étude de $\mathcal{V}_1 \psi(\mathbf{x})$, reposant sur la technique de régularisation (III.8) et sur la décomposition (III.5), est mise en œuvre.

GRADIENT DU POTENTIEL DE DOUBLE COUCHE

L'étude du prolongement par continuité sur la frontière du potentiel de double couche a donné lieu à de nombreux travaux. Remarquons que $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ fait intervenir un noyau $\nabla \Sigma(\mathbf{r}) = O(r^{-3})$, ce qui rend le processus de passage à la limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} \in S$ a priori plus délicat. Deux méthodes sont rencontrées dans la littérature pour résoudre ce problème.

- ◇ On applique la technique de régularisation (III.8) directement à $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ et il vient une formulation directe où apparaît une intégrale devant être prise au sens de la partie finie de Hadamard. La formulation indirecte obtenue par une *régularisation au second ordre* peut être trouvée dans [Bonnet et al.93],
- ◇ On procède à une intégration par parties de $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$, permettant de réduire l'ordre de singularité de l'opérateur intégral et aboutissant à une intégrale singulière en valeur principale de Cauchy [Sladek et al.83]. La formulation indirecte associée est donnée dans [Bonnet et al.93].

En suivant une démarche analogue à [Toh et al.94] et [Krishnasamy et al.92a], nous nous proposons de présenter le prolongement par continuité de $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ par ces deux méthodes, aux points réguliers. Nous montrerons que ces techniques mettent en jeu les mêmes conditions de régularité pour $\phi(\mathbf{y})$ et qu'elles ne sont pas transposables à une étude aux points singuliers de la frontière S .

Régularisation au second ordre

Le noyau de $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ étant singulier d'ordre trois, on applique un développement de Taylor à l'ordre deux de la densité $\phi(\mathbf{y})$ et on étudie séparément les termes libres apparaissant. Cette méthode donne alors lieu au résultat suivant.

Resultat III.7

Soit \mathbf{z} un point régulier de S et soit $\varepsilon > 0$ un réel quelconque. Si $\phi(\mathbf{y}) \in D^1(S)$ et $S \in C^{1,\beta}$ en \mathbf{z} alors les restrictions à Ω_m , $m \in [1, 2]$ du gradient du potentiel de simple couche, notées $\nabla \mathcal{V}_2^{(m)} \phi(\mathbf{x})$, peuvent être prolongées par continuité en $\mathbf{z} \in S$ en posant

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) = & - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z}) - D_p \phi_i(\mathbf{z}) (y_p - z_p)] dS_{\mathbf{y}} \\ & - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \mathcal{E}_{kli}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) - F_{klip}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) D_p \phi_i(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

où les termes libres $\mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{z})$ et $\mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ admettent alors les expressions ci-dessous avec $\mathbf{A}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ introduit dans l'obtention du résultat (III.6).

$$\begin{aligned} F_{klip}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) = & n_l(\mathbf{z}) C_{ipab} A_{abk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) + \delta_{ki} \delta_{lp} \frac{\omega^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)}{4\pi} - C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \delta_{lp} + \mathcal{F}_{klip}^\varepsilon(\mathbf{z}) \\ & + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \left(n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z}) \right) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

$$\mathcal{F}_{klip}^\varepsilon(\mathbf{z}) \equiv \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) (y_p - z_p) e_{jlp} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.87})$$

$$\mathcal{E}_{kli}^\varepsilon(\mathbf{z}) \equiv \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) e_{jlp} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.88})$$

Preuve

Soit $\mathbf{z} \in S$ un point régulier de la frontière. Considérons alors comme précédemment un réel strictement positif quelconque ε et écrivons $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ sous la somme suivante avec $\mathbf{x} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}) + \tilde{h})$ et $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}))$ dans une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ associée à \mathbf{z} .

$$I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.89})$$

$$I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) - D_p \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) (y_p - \tilde{z}_p)] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.90})$$

$$I_{kl}^{(III)}(\mathbf{x}) = - \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.91})$$

$$I_{kl}^{(IV)}(\mathbf{x}) = - D_p \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) (y_p - \tilde{z}_p) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.92})$$

L'intégrande de $\mathbf{I}^{(I)}(\mathbf{x})$ étant uniformément bornée pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$, il est possible d'écrire en appliquant le théorème de Lebesgue

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.93})$$

Etant donné que $\nabla \Sigma(\mathbf{r}) = O(r^{-3})$ et que $\phi(\mathbf{y})$ est supposée de classe D_i^1 sur $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$, nous obtenons la limite du terme $\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x})$ après application du lemme (III.2). Il en résulte alors

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z}) - D_p \phi_i(\mathbf{z}) (y_p - z_p)] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.94})$$

Les deux termes libres restants sont traités en utilisant la propriété suivante, que l'on peut par exemple trouver dans [Bonnet95a]

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) &= D_{jl} \Sigma_{ij,j}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{car} \quad \forall \mathbf{r} \neq 0, \quad \Sigma_{ij,j}^k(\mathbf{r}) = 0 \\ \text{et} \quad D_{jl} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) &= \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) - \Sigma_{ij,j}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

Introduisons également les notations suivantes

$$\begin{aligned} I_{kl}^{(III)}(\mathbf{x}) &= -\phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) E_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon) \quad \text{et} \quad I_{kl}^{(IV)}(\mathbf{x}) = -D_p \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) F_{klip}(\mathbf{x}, \varepsilon) \\ E_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z} \in S} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.96})$$

$$F_{klip}(\mathbf{x}, \varepsilon) \equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z} \in S} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) (y_p - \tilde{z}_p) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.97})$$

La limite du terme $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ est obtenue en utilisant la relation (III.95) en se ramenant à une intégrale de contour après application de la formule de Stokes (II.20). Ainsi

$$E_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_{jl} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{jlp} dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.98})$$

L'intégrande étant uniformément bornée pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$, on applique le résultat (III.2) et on en déduit par définition (III.88) du terme libre $\mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{z})$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} E_{kli}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) e_{jlp} dL_{\mathbf{y}} \equiv \mathcal{E}_{kli}^\varepsilon(\mathbf{z}) \quad (\text{III.99})$$

De manière analogue, on procède à une intégration de Stokes du terme libre $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \varepsilon)$. En tenant compte de (III.95), il vient alors la relation

$$\begin{aligned} F_{klip}(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_{jl} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (y_p - \tilde{z}_p) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_{jl} \left(\Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (y_p - \tilde{z}_p) \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{jl} y_p dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (y_p - \tilde{z}_p) e_{jlp} dL_{\mathbf{y}} + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \delta_{pl} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.100})$$

$$\text{car} \quad D_{jl} y_p = n_j(\mathbf{y}) \delta_{pl} - n_l(\mathbf{y}) \delta_{jp}$$

Le point \mathbf{z} admettant un voisinage de S de classe $C^{1,\beta}$, le champ de normale est Höldérien dans ce voisinage et l'intégrale peut finalement être mise sous la forme suivante

$$\begin{aligned} F_{klip}(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (y_p - \tilde{z}_p) e_{jlq} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} + n_l(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} - \delta_{pl} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.101}) \end{aligned}$$

L'évaluation de la limite lorsque $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ de ces différentes intégrales ne pose plus de problème. Ainsi le terme de contour a une intégrande uniformément bornée pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$. Nous pouvons de ce fait écrire compte tenu de la définition (III.87),

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (y_p - \tilde{z}_p) e_{jlq} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \\ = \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) (y_p - z_p) e_{jlq} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \equiv \mathcal{F}_{klip}^\varepsilon(\mathbf{z}) \quad (\text{III.102}) \end{aligned}$$

En remarquant que $\Sigma_{ip}^k(\mathbf{r}) = C_{ipab} \mathbf{U}_{a,b}^k(\mathbf{r})$, il vient la limite ci-dessous

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z}} n_l(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} = n_l(\mathbf{z}) C_{ipab} A_{abk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \quad (\text{III.103})$$

Le champ $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ étant de classe $C^{1,\beta}$ dans un voisinage de S en \mathbf{z} , il vérifie la condition de continuité au sens de Dini, ce qui permet d'aboutir après application du lemme (III.2) au résultat

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} \\ = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.104}) \end{aligned}$$

L'intégrale restante de noyau $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ a été traitée au cours de la démonstration précédente, ce qui mène finalement au résultat (III.7). ■

Comme pour les études précédentes, nous pouvons considérer deux cas extrêmes pour le paramètre ε . Envisageons tout d'abord la régularisation indirecte puis nous traiterons le cas $\varepsilon \rightarrow 0$, donnant lieu à l'obtention des formulations hypersingulières.

Régularisation indirecte

Nous nous proposons de choisir ε suffisamment grand de manière à avoir $\forall \mathbf{z} \in S, S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon) = S$, ce qui entraîne que $S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon) = \emptyset$. Les intégrales de support $S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ s'annulent également et tenant compte des relations (III.32), il en découle que

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{x}) = -F_{klip}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) D_p \phi_i(\mathbf{z}) \\ &- \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z}) - D_p \phi_i(\mathbf{z}) (y_p - z_p)] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.105}) \end{aligned}$$

On constate que le terme libre $\mathbf{E}(\mathbf{z}, \infty)$ disparaît et les expressions de $\mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty)$ de part et d'autre de S , sont données par

$$F_{klip}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) = n_l(\mathbf{z}) B_{ipk}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) + \int_S \Sigma_{ip}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} - \kappa^{(m)} \delta_{ki} \delta_{lp} \quad (\text{III.106})$$

où $B_{ipk}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) = C_{ipab} A_{abk}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty)$ et où $\mathbf{A}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty)$ est donné par la relation (III.74).

Régularisation directe

Le second cas limite correspond à faire tendre ε vers 0 et il est intéressant d'examiner le comportement des différentes intégrales lorsque ε devient petit. Les termes de support $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ tendent classiquement vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Quant aux intégrales de contour on vérifie très aisément les ordres de grandeur des intégrales de contour lorsque ε devient petit, compte du fait que $\Sigma(\mathbf{r}) = O(r^{-2})$ et que $\Sigma(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = O(r^{-1})$

$$\mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{z}) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{z}) = O(\varepsilon^0) \quad (\text{III.107})$$

Comme précédemment, ces termes dépendent du choix du voisinage d'exclusion. Notons également que le premier terme n'a manifestement pas de limite pour $\varepsilon = 0$. Il n'en demeure pas moins que la trace du gradient du potentiel de double couche de part et d'autre de S existe comme le prouve le résultat (III.7). Nécessairement l'intégrale de support $S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ est également un $O(\varepsilon^{-1})$ et en suivant [Krishnasamy et al.90], [Guiggiani et al.92] ou [Toh et al.94], on introduit

$$\begin{aligned} \text{pf} \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) + \left(\mathcal{F}_{klip}^\varepsilon(\mathbf{z}) + n_l(\mathbf{z}) C_{ipab} [\Phi_{abp}(\mathbf{z}) \mathcal{C}_{kq}^\varepsilon(\mathbf{z}) + \Psi_{abqs}(\mathbf{z}) \mathcal{A}_{qsk}^\varepsilon(\mathbf{z})] \right) D_p \phi_i(\mathbf{z}) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.108})$$

Avec ces notations, nous pouvons alors mettre $\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{z})$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) &= \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)} \right) [n_l(\mathbf{z}) C_{ijab} \Phi_{kab}(\mathbf{z}) + \delta_{ki} \delta_{lj}] D_j \phi_i(\mathbf{z}) \\ &\quad - \text{pf} \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.109})$$

L'expression du terme libre se simplifie quelque peu, en tenant compte de la relation (III.79). Tout d'abord

$$C_{ijab} \Phi_{abk}(\mathbf{z}) = \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} n_k(\mathbf{z}) + \delta_{kj} n_i(\mathbf{z}) + \delta_{ki} n_j(\mathbf{z}) - \frac{n_i(\mathbf{z}) n_j(\mathbf{z}) n_k(\mathbf{z})}{1-\nu} \quad (\text{III.110})$$

ce qui permet finalement d'obtenir la relation (III.112) en tenant compte du fait que la dérivée surfacique est contenue dans le plan tangent $D_p \phi_i(\mathbf{z}) n_p(\mathbf{z}) = 0$. L'expression définitive de

$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{z})$ est alors la suivante

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) = \tilde{b}_{klj}^{(m)}(\mathbf{z}) D_j \phi_i(\mathbf{z}) - \text{pf} \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.111})$$

$$\text{avec } \tilde{b}_{klj}^{(m)}(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)} \right) \Psi_{klj}(\mathbf{z}) \quad (\text{III.112})$$

Remarque III.10 Dans le voisinage d'exclusion $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$, on montre que les deux intégrales de contour bornées s'annulent lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Les quantités apparaissant dans $\mathbf{A}^m(\mathbf{z})$ ont fait l'objet de la remarque III.8 et il reste à évaluer $\mathcal{F}^\varepsilon(\mathbf{z})$. Le noyau $\Sigma(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = O(r^{-1})$ de cette dernière intégrale étant pair, nous en tirons facilement le résultat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) (y_p - z_p) e_{jlp} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = 0 \quad (\text{III.113})$$

Toutes les intégrales de contour qui restent bornées, s'annulent alors et nous retrouvons alors la définition de la partie finie de l'intégrale de noyau $\nabla \Sigma(\mathbf{r})$, initialement introduite dans les travaux de [Guiggiani et al.92] et donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\text{pf}} \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. - \phi_i(\mathbf{z}) \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) e_{jlp} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \right) \quad (\text{III.114}) \end{aligned}$$

□

Remarque III.11 Il est intéressant d'évaluer le saut de la dérivée conormale de $\mathcal{V}_2 \psi(\mathbf{x})$ à la traversée de S au point \mathbf{z} . Nous avons alors

$$C_{abkl} : \left[\gamma_0^2 \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) - \gamma_0^1 \mathcal{V}_1 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) \right] \cdot n_b(\mathbf{z}) = C_{abkl} n_b(\mathbf{z}) \Psi_{klip}(\mathbf{z}) D_p \phi_i(\mathbf{z}) = 0 \quad (\text{III.115})$$

compte tenu de la définition de $\Psi(\mathbf{z})$. On retrouve la propriété classique, montrant que la dérivée conormale du potentiel de double couche est continue à la traversée de S en un point régulier $\mathbf{z} \in S$ [Kupradze et al.79]. □

Intégration par parties et régularisation au premier ordre

La méthode précédente a consisté à appliquer abruptement les techniques de régularisation contenues dans l'expression (III.8) à $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$. L'évaluation des limites pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ des intégrales $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ et $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ est basée sur la propriété très intéressante (III.95). L'idée apparaissant dans [Kupradze et al.79] et [Sladek et al.83], consiste à réaliser une intégration par parties en utilisant (II.20) sur $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$, ce qui permet alors de réduire l'ordre de la singularité du noyau. On fait de ce fait apparaître le rotationnel surfacique de $\phi(\mathbf{y})$. Ainsi en tenant compte de (III.95) et S étant fermée, on obtient [Bonnet95a],

$$\mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{x}) = \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.116})$$

La suite de ce paragraphe traite du prolongement par continuité de (III.116) sur la frontière S et on se propose de comparer les deux approches : régularisation au second ordre et régularisation au premier ordre après intégration par parties.

Resultat III.8

Soit \mathbf{z} un point régulier de S et soit $\varepsilon > 0$ un réel quelconque. Si $\phi(\mathbf{y}) \in Di^1(S)$ et $S \in C^{1,\beta}$ en \mathbf{z} alors les restrictions à Ω_m , $m \in [1, 2]$ du gradient du potentiel de simple couche, notées $\nabla \mathcal{V}_2^{(m)} \phi(\mathbf{x})$, peuvent être prolongées par continuité en $\mathbf{z} \in S$ en posant

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) - D_{jl} \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + B_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) D_{jl} \phi_i(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (\text{III.117})$$

avec la définition suivante

$$B_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z} \in S} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.118})$$

Le terme libre $B^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ admet alors l'expression $B_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) = C_{ijab} A_{abk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ où $A^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ a été introduit dans l'obtention du résultat (III.6).

Preuve

Soit $\mathbf{z} \in S$ un point régulier de la frontière. Considérons alors comme précédemment un réel strictement positif quelconque ε et écrivons $\nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ sous la somme suivante avec $\mathbf{x} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}) + \tilde{h})$ et $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}))$ dans une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ associée à \mathbf{z} .

$$I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.119})$$

$$I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) - D_{jl} \phi_i(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.120})$$

$$I_{kl}^{(III)}(\mathbf{x}) = D_{jl} \phi_i(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.121})$$

L'intégrande de $I^{(I)}(\mathbf{x})$ étant uniformément bornée pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{z}, \varepsilon/2)$, il est possible d'écrire en appliquant le théorème de Lebesgue

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.122})$$

Etant donné que $\Sigma(\mathbf{r}) = O(r^{-2})$ et que $\phi(\mathbf{y})$ étant supposée de classe Di^1 sur $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$, nous avons $\text{rot}_S \phi(\mathbf{y}) \in Di$ et la limite du terme $I^{(II)}(\mathbf{x})$ est alors obtenue après application du lemme (III.2). Il en résulte

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) - D_{jl} \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.123})$$

La limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ du terme libre est donnée au facteur \mathbf{C} près par le résultat (III.6). On a ainsi $B_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) = C_{ijab} [A_{abk}^{\Phi(m)}(\mathbf{z}) + A_{abk}^{\Psi(m)}(\mathbf{z})]$, où les quantités $A^{\Phi(m)}(\mathbf{z})$ et $A^{\Psi(m)}(\mathbf{z})$ sont respectivement définies par les relations (III.61) et (III.70).

■

Comme pour les études précédentes, nous pouvons considérer deux cas extrêmes pour le paramètre ε . Envisageons tout d'abord la régularisation indirecte puis nous traiterons le cas $\varepsilon \rightarrow 0$, donnant lieu à l'obtention des formulations singulières.

Régularisation indirecte

Nous nous proposons de choisir ε suffisamment grand de manière à avoir $\forall \mathbf{z} \in S$, $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon) = S$, ce qui entraîne que $S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon) = \emptyset$. Les intégrales de support $S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ s'annulent également et tenant compte des relations (III.32), il en découle que

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) = B_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) D_{jl} \phi_i(\mathbf{z}) + \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) - D_{jl} \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.124})$$

Le terme libre vaut $B_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty) = C_{ijab} A_{abk}^{(m)}(\mathbf{z}, \infty)$ où $A^{(m)}(\mathbf{z}, \infty)$ est obtenue en utilisant la relation (III.74).

Régularisation directe

Etudions le processus $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'expression (III.117). Comme lors de l'étude des limites précédentes, la quantité $\tilde{\mathbf{B}}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ contient des intégrales de contour qui ne s'annulent pas lorsque ε devient petit. Ces termes demeurent néanmoins bornés comme le montre par exemple (III.76). De manière analogue à (III.77), nous définissons alors la partie finie de l'opérateur intégral-différentiel de noyau $\Sigma(\mathbf{r})$ comme suit

$$\text{pf} \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + C_{klab} \left(\Phi_{abp}(\mathbf{z}) \mathcal{C}_{ip}^\varepsilon(\mathbf{z}) + \Psi_{abpq}(\mathbf{z}) \mathcal{A}_{pqi}^\varepsilon(\mathbf{z}) \right) D_{jl} \phi_i(\mathbf{z}) \right] \quad (\text{III.125})$$

En introduisant cette notion, la relation (III.117) prend finalement la forme ci-dessous en tenant compte de la définition du terme libre $\tilde{\mathbf{b}}^{(m)}(\mathbf{z})$ donnée par (III.112)

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) = -C_{ijab} \tilde{a}_{abk}^{(m)}(\mathbf{z}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{z}) + \text{pf} \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.126})$$

en rappelant que $\tilde{a}_{abk}^{(m)}(\mathbf{z})$ est fourni par l'expression (III.79). En simplifiant l'expression du terme libre et en utilisant la définition de l'opérateur $D_{jl}(\bullet)$, il vient finalement

$$C_{ijab} \Phi_{abk}(\mathbf{z}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{z}) = \Psi_{klij}(\mathbf{z}) D_j \phi_i(\mathbf{z}) \quad (\text{III.127})$$

et la représentation de $\gamma_0^m \nabla \mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{z})$ prend en définitive la forme (III.128) où le terme libre $\tilde{\mathbf{b}}^{(m)}(\mathbf{z})$ a été introduit par la relation (III.112).

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) = \tilde{b}_{klij}^{(m)}(\mathbf{z}) D_j \phi_i(\mathbf{z}) + \text{pf} \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.128})$$

Remarque III.12 A notre grand soulagement, les deux méthodes sont strictement équivalentes et aboutissent à des expressions des traces de part et d'autre de S de $\nabla \mathcal{V}\phi(\mathbf{x})$, très analogues. Ainsi les techniques de régularisation au second ordre et de régularisation au premier ordre mènent aux résultats suivants valables aux points réguliers de S .

$$\begin{aligned}\gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) &= \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)}\right) \Psi_{kl ij}(\mathbf{z}) D_j \phi_i(\mathbf{z}) - \text{pf} \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_{k,l}(\mathbf{z}) &= \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)}\right) \Psi_{kl ij}(\mathbf{z}) D_j \phi_i(\mathbf{z}) + \text{pf} \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_{jl} \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

Les deux termes libres sont identiques mais les ordres de singularités des opérateurs intégraux différent. \square

Ce paragraphe a permis d'évaluer les traces sur la frontière S des potentiels surfaciques définis par (III.13) ainsi que de leur gradient en des points *réguliers* $\mathbf{z} \in S$. Notons que l'obtention des résultats (III.6) et (III.7), a clairement mis en évidence la nécessité d'ajouter les hypothèses de régularité de la surface en \mathbf{z} . Les questions d'un prolongement par continuité en des points singuliers demeurent à ce stade de l'étude sans réponse.

L'application systématique de la technique de régularisation représentée par la relation (III.8) s'est également montrée très robuste et à permis de résoudre les problèmes de passage à la limite sur la frontière.

III.3 Etude des potentiels volumiques

L'étude des potentiels volumiques est très peu abordée dans la littérature. L'utilisation de méthodes basées sur les équations intégrales est généralement associée au fait que seule la discrétisation de la frontière du domaine est nécessaire. Pour les forces de volume dérivant d'un gradient, il est possible de ramener l'intégrale de domaine $\mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sur la frontière. Lorsque cela n'est pas possible, il est alors nécessaire d'introduire un maillage volumique, composé d'éléments finis de domaine souvent appelés *cellules d'intégration*.

La représentation intégrale du champ de déplacement pour un problème avec déformations initiales fait de plus intervenir $\mathcal{W}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$ représentant un potentiel volumique d'ordre deux. La méthodologie présentée dans la section II.3 fait clairement apparaître la nécessité du calcul du gradient de la représentation intégrale du champ de déplacement, ce qui demande un traitement soigné de la dérivation de $\mathcal{W}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$.

L'obtention des équations intégrales du problème demande également l'évaluation de la trace des potentiels volumiques. Comme S est assimilée à une surface de discontinuité du modèle, il convient de noter que le comportement des opérateurs intégraux de volume peuvent a priori différer de part et d'autre de S . Avant d'entrer dans le vif du sujet, procédons à quelques rappels.

III.3.1 Préliminaires

Comme pour les potentiels surfaciques, considérons un potentiel volumique de densité $\chi(\mathbf{y})$ défini sur un variété D de dimension trois, sous sa forme la plus générale

$$\mathcal{Q}_n \chi(\mathbf{x}) = \int_D \mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.129})$$

avec $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D^2, \|\mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq M \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-n}$

Là encore, il convient de distinguer les opérateurs intégraux de noyau intégrable et de noyau singulier. Pour les potentiels de noyau régulier, il est possible d'établir le lemme suivant, pouvant être trouvé par exemple dans [Kupradze et al.79]

Lemme III.3

Considérons $n \leq 2$. Si la densité $\chi(\mathbf{y})$ est de régularité $L^p(D)$, avec $p > \frac{3}{3-n}$, alors le potentiel $\mathcal{Q}_n \chi(\mathbf{x})$ est continu sur \bar{D} .

Preuve

Comme pour l'étude des traces sur S des potentiels surfaciques, il n'est pas envisageable d'appliquer directement le résultat (III.2), vu qu'il n'est pas possible d'exhiber une dominante intégrable de l'intégrande.

Soit alors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Introduisons classiquement un voisinage d'exclusion $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ que nous choisissons par commodité, égal à la boule centrée en \mathbf{x} et de rayon $\varepsilon > 0$. Considérons alors la décomposition suivante $\mathcal{Q}_n \chi(\mathbf{x}) = I^{(I)}(\mathbf{x}) + I^{(II)}(\mathbf{x})$ avec

$$I_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.130})$$

$$I_k^{(II)}(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.131})$$

Le noyau de la première intégrale étant uniformément borné pour $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in (\mathbb{R}^3 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)) \times B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ et $\chi(\mathbf{y})$ étant intégrable, il vient l'inégalité (III.132)

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \right\| \leq \frac{M}{\varepsilon^n} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\chi(\mathbf{y})\| dV_{\mathbf{y}} \right) \quad (\text{III.132})$$

ce qui entraîne que $I^{(I)}(\mathbf{x})$ est continue en \mathbf{x} en vertu du résultat (III.2). Le second terme $I^{(II)}(\mathbf{x})$ est traité de manière analogue en introduisant les coordonnées sphériques locales pour éliminer la singularité de $\mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$

$$\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon), \mathbf{y} = \mathbf{x} + r \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \quad \text{avec } 0 \leq r < \varepsilon \quad (\text{III.133})$$

L'inégalité de Hölder (III.6) appliquée à l'intégrale $I^{(II)}(\mathbf{x})$ pour le couple (p, q) vérifiant la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donne alors l'inégalité (III.134).

$$\left\| \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \right\| \leq 4\pi M \left(\int_0^\varepsilon r^{2-q} n dr \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\chi(\mathbf{y})\|^p dV_{\mathbf{y}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{III.134})$$

Le noyau $\mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ vérifiant la propriété $\forall n \ q < 3$, $\mathbf{Q}_n(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \in L_{loc}^q(\mathbf{y}, \mathbb{R}^3)$, les deux intégrales du membre de droite de (III.134) sont définies pour $p > \frac{3}{3-n}$ et sont indépendantes de \mathbf{x} , ce qui achève la démonstration en vertu du résultat (III.2). ■

Notons qu'intuitivement la dérivée du potentiel de seconde espèce fera vraisemblablement intervenir un noyau singulier vu que $\Sigma(\mathbf{r}) = O(r^{-2})$. Comme pour les potentiels surfaciques, l'étude de la régularité des opérateurs volumiques singuliers se fera par l'intermédiaire d'un résultat analogue au lemme (III.2).

En reprenant les notations introduites pour le lemme (III.3), nous obtenons pour un opérateur volumique singulier, le résultat suivant.

Lemme III.4

Soit $\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ un noyau singulier d'ordre 3. Si $\chi(\mathbf{y})$ est continue au sens de Dini sur D , alors le potentiel suivant défini ci-dessous est continu sur D et on a pour tout $\mathbf{x} \in \bar{D}$.

$$\tilde{\mathcal{Q}}_3^\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_D \mathbf{Q}_3(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x})) \, dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.135})$$

Preuve

Soit $\mathbf{x} \in \bar{D}$. La densité $\chi(\mathbf{y})$ étant de classe Di , on vérifie aisément que $\chi(\mathbf{y})$ est continue sur \bar{D} , ce qui permet de donner un sens à $\chi(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \partial D$.

Considérons ε un réel positif arbitraire. Le potentiel volumique $\tilde{\mathcal{Q}}_3^\varepsilon(\mathbf{x})$ est alors la somme des deux termes suivants

$$\mathbf{I}^{(I)}(\mathbf{x}) = \int_{D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mathbf{Q}_3(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x})) \, dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.136})$$

$$\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x}) = \int_{D \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mathbf{Q}_3(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x})) \, dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.137})$$

La première intégrale ayant un noyau uniformément borné, il vient que $\mathbf{I}^{(I)}(\mathbf{x})$ est continu en \mathbf{x} . Le second terme est traité en introduisant les coordonnées sphériques dans un voisinage de \mathbf{x} pour ε suffisamment petit.

Nous avons $\|\mathbf{Q}_3(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq M \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-3}$ et $\|\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x})\| \leq \omega(\varepsilon^0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\left\| \int_{D \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mathbf{Q}_3(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x})) \, dV_{\mathbf{y}} \right\| \leq 4\pi C \int_0^\varepsilon \frac{\omega(\varepsilon^0, r)}{r} \, dr \quad (\text{III.138})$$

L'intégrale du second membre étant indépendante de \mathbf{x} et intégrable par définition de la continuité au sens de Dini, on achève la démonstration, en vertu du résultat (III.2). ■

III.3.2 Continuité des potentiels volumiques

L'objet de ce paragraphe est de déterminer les propriétés de régularité des potentiels volumiques de première espèce $\mathbf{W}^1(\mathbf{x}) = \mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et de seconde espèce $\mathbf{W}^2(\mathbf{x}) = \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ avec

les définitions

$$\mathcal{W}_1 \rho f_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad \mathcal{W}_2 \varepsilon_k^0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.139})$$

pour un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ainsi que les conditions de régularité portant sur les densités $\rho \mathbf{f}(\mathbf{y})$ et $\varepsilon^0(\mathbf{y})$, fonctions définies sur \mathbb{R}^3 , pour que les potentiels induits $\mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ soient continus.

Resultat III.9

Soient $\rho \mathbf{f}(\mathbf{y}) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > \frac{3}{2}$ et $\varepsilon^0(\mathbf{y}) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$. Alors les potentiels volumiques de première et seconde espèce, $\mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$, sont des fonctions continues sur \mathbb{R}^3 .

Preuve

On vérifie aisément que les noyaux $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{r})$ sont singuliers respectivement d'ordre 1 et 2. En appliquant le lemme (III.3), on en conclut que les potentiels volumiques sont continus pour des densités satisfaisant les conditions de régularité, $\rho \mathbf{f}(\mathbf{y}) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > \frac{3}{2}$ et $\varepsilon^0(\mathbf{y}) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$. ■

Remarque III.13 Il est important de remarquer que les potentiels volumiques sont continus sur \mathbb{R}^3 pour des densités suffisamment régulières, conditions établies précédemment. Lors de l'obtention des relations (II.46) et (II.47), nous avons admis la continuité à la traversée de S de ces potentiels pour $\varphi(\mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Les résultats (III.9) permettent de justifier ces propriétés. □

III.3.3 Dérivabilité des potentiels volumiques

L'étude des gradients des potentiels volumiques soulèvent certaines interrogations, liées à l'obtention des formules de représentations comme dans [Bui78]. Il est en effet légitime de se demander comment obtenir les expressions des gradients de fonctions définies à l'aide d'intégrale présentant des singularités.

PRÉLIMINAIRES

Ce paragraphe va débiter par un bref rappel de la *dérivation sous le signe intégrale*, que l'on peut par exemple trouver dans [Schwartz65] et qui est très classiquement utilisée pour aboutir au résultat. Il convient néanmoins de bien comprendre dans quelle mesure, il est possible d'appliquer cette technique pour éviter l'oubli des *termes convectifs* et pour donner un sens aux intégrales singulières apparaissant dans les formulations [Bui et al.70].

Resultat III.10 (Dérivation sous le signe somme) Soit (D, E) deux sous-ensembles de \mathbb{R}^3 et introduisons une fonction $f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ définie sur $D \times E$. Si $f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ admet un gradient $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pour presque tout $\mathbf{y} \in D$, si $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ est séparément continue en \mathbf{x} au point \mathbf{x}_0 , pour presque toutes les valeurs de \mathbf{y} , si $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ est majorée en module par une fonction $g(\mathbf{y}) \geq 0$ sommable

et si $F(\mathbf{x})$ définie ci-dessous existe au moins pour un élément de E alors $F(\mathbf{x})$ est continue et dérivable en \mathbf{x} au point \mathbf{x}_0

$$F(\mathbf{x}) = \int_D f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad \text{et} \quad \nabla F(\mathbf{x}) = \int_D \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{y}$$

Reprenons alors par exemple, la définition du potentiel volumique de première espèce et essayons de déterminer le gradient par rapport à \mathbf{x} de l'intégrande. Nous avons

$$W_k^1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_l} (U_i^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y})) = -U_{i,l}^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) \quad (\text{III.140})$$

Il est clair qu'il n'est pas possible d'obtenir directement une dominante indépendante de \mathbf{x} dans le but d'appliquer le théorème (III.10). Une approche développée dans [Bui et al.70] et [Bui78], se basant sur les travaux de S.G. Mikhlin, consiste à exclure un petit voisinage $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ de \mathbf{x} de l'intégrale (avec $\varepsilon > 0$ comme lors de l'évaluation des traces des potentiels surfaciques) et à traiter le terme singulier en utilisant (III.10) après s'être placé dans le système de coordonnées locales (III.133) comme dans [Kupradze et al.79].

Dans ce mémoire, nous avons préféré présenter les choses en se plaçant dans le cadre des *distributions* comme pour l'obtention des formules de représentations intégrales, en suivant la démarche de [Dautray et al.85], ceci pour deux raisons essentielles :

- ◇ la dérivée au sens des distributions existe toujours et il suffit alors de montrer que l'on peut l'identifier à une fonction intégrable,
- ◇ il est alors possible de développer une méthodologie très générale pour traiter tout type d'opérateur intégral volumique de noyau quelconque (par exemple l'opérateur Δ^2 apparaissant dans l'étude des plaques de Kirchhoff-Love).

L'objet des prochaines sections est d'étudier la régularité des deux potentiels volumiques et de leur comportement à la traversée de la surface de discontinuité S .

GRADIENT DU POTENTIEL DE PREMIÈRE ESPÈCE

Resultat III.11

Soit $\rho \mathbf{f}(\mathbf{y}) \in L^p(\mathbf{y})$ avec $p > 3$. Alors le potentiel volumique de première espèce $\mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ et on a

$$W_1 \rho f_{k,l}(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.141})$$

Preuve

Le gradient de $\mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est défini au sens des distributions par la relation

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \langle \nabla \mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \right) \varphi_{i,l}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad (\text{III.142})$$

La fonction $\varphi(\mathbf{y})$ étant à support compact et le noyau $\nabla U(\mathbf{r})$ étant intégrable, il vient après avoir appliqué le théorème de Fubini et intégré par parties

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \langle \nabla \mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \right) \varphi_i(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad (\text{III.143})$$

en tenant compte du fait que $\nabla U(-\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$. Ceci montre que $\mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ admet comme dérivée, la distribution définie par (III.141). En utilisant le résultat (III.9), on en conclut de plus que $\nabla \mathcal{W}_1 \rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est continue pour $\rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ de régularité $L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$. ■

L'obtention du gradient du potentiel de seconde espèce pose plus de problèmes et on constate intuitivement que la formulation fera intervenir des opérateurs singuliers du fait que $\nabla \Sigma(\mathbf{r})$ n'est pas intégrable. Un autre aspect délicat concerne le comportement à la traversée de S qui rappelons-le, est une surface de discontinuité du problème.

GRADIENT DU POTENTIEL DE SECONDE ESPÈCE

Nous allons considérer séparément les restrictions à Ω_m pour $m \in [1, 2]$ du gradient du potentiel volumique de seconde espèce induit par les déformations initiales dans Ω_1 et Ω_2 . La principale difficulté provient du fait que S constitue une surface de discontinuité de $\varepsilon^0(\mathbf{y})$. Notons alors pour $m \in [1, 2]$,

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_m, \mathcal{W}_2^{(m)} \varepsilon_k^0(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.144})$$

On se propose de déterminer les conditions de régularité portant sur la densité $\varepsilon^0(\mathbf{y})$ pour que le potentiel $\mathcal{W}_2^{(m)} \varepsilon^0(\mathbf{x})$ soit différentiable dans Ω_m .

La démarche suivie peut être trouvée dans [Bui et al.70] et consiste à se ramener à un potentiel intégro-différentiel pour lequel il est possible d'appliquer le résultat (III.11). Considérons tout d'abord le potentiel intérieur.

Représentation intérieure

Resultat III.12

Si $\varepsilon_{|\Omega_1}^0(\mathbf{y}) \in Di(\Omega_1)$, alors le potentiel volumique de seconde espèce $\mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon^0(\mathbf{x})$ est de classe $C^1(\Omega_1)$ et on a pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) = & - \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ & - \int_{\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_{\partial(\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.145})$$

Preuve

Considérons $\mathbf{x} \in \Omega_1$ et $\varepsilon > 0$. Supposons de plus que $\varepsilon^0(\mathbf{y})$ est continue au sens de Dini dans $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ pour ε suffisamment petit. Nous avons alors d'après la définition (III.1), la propriété suivante

$$\forall (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)^2, \quad \|\varepsilon^0(\mathbf{y}_2) - \varepsilon^0(\mathbf{y}_1)\| \leq \omega(\varepsilon^0, \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|) \quad \text{avec} \quad \int_0^\varepsilon \frac{\omega(\varepsilon^0, r)}{r} dr < +\infty \quad (\text{III.146})$$

Il est de ce fait possible d'écrire que,

$$\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon/2), \quad \forall \mathbf{h} \in B(0, \varepsilon/2), \quad \frac{\|\varepsilon^0(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - \varepsilon^0(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \frac{\omega(\varepsilon^0, \|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|} \quad (\text{III.147})$$

En faisant tendre $\mathbf{h} \rightarrow 0$, on montre du coup que $\varepsilon^0(\mathbf{y})$ admet une dérivée au sens des distributions, intégrable [Schwartz65]. Appliquons alors la formule d'Ostrogradsky (II.23) à la définition (III.144) en remarquant que $\Sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{C} : \nabla \mathbf{U}(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon_k^0(\mathbf{x}) &\equiv \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_1} C_{ijab} U_{a,b}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_S C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_1} dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\Omega_1} C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.148})$$

Les deux premières intégrales sont différentiables par rapport à \mathbf{x} pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_1$, vu que l'intégrande étant C^∞ , il est possible de dériver sous le signe somme. Le terme de support Ω_1 l'est également compte tenu du résultat (III.11) et il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(m)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_S C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_1} dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_1} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.149})$$

Toute la démarche consiste à présent à réexprimer ces quantités en éliminant les termes en $\nabla \varepsilon^0(\mathbf{y})$. En effet les opérateurs intégraux apparaissant dans l'expression (III.149) font intervenir la dérivée de $\varepsilon^0(\mathbf{y})$ sur laquelle on ne dispose que de très peu d'informations. On ne peut qu'affirmer que $\nabla \varepsilon^0(\mathbf{y})$ est intégrable, ce qui est insuffisant pour pouvoir appliquer le lemme (III.3). En reprenant une démarche que l'on peut trouver dans [Bui et al.70], le terme de volume est ainsi reformulé de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \int_{\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.150})$$

Le noyau $\nabla \mathbf{U}(\mathbf{r})$ étant borné sur $\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, nous pouvons appliquer le théorème d'Ostrogradsky (II.23) à l'intégrale de support $\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, pour aboutir à l'expression ci-dessous.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \int_{\partial(\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon))} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} C_{ijab} U_{a,bl}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.151})$$

Quant à l'intégrale sur $\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, on écrit finalement que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\partial(\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dS_{\mathbf{y}} \\ & \quad - \int_{\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} C_{ijab} U_{a,bl}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.152})$$

En remarquant que $S = \partial(\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)) \cup \partial(\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))$, nous pouvons regrouper les termes surfaciques qui finalement s'éliminent excepté le terme libre en $\varepsilon^0(\mathbf{x})$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ & - \int_{\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_{\partial(\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.153})$$

L'intégrale de surface peut être reformulée de la manière suivante, en utilisant une intégration par parties (II.20) pour faire apparaître le noyau $\Sigma(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial(\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= C_{ijab} \int_{\partial(\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))} D_{bl} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\partial(\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.154})$$

Le premier terme du membre de droite disparaît, vu que S est fermée et il vient finalement l'expression (III.145).

Quant à la continuité de $\nabla \mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon^0(\mathbf{x})$, celle-ci résulte de l'application du résultat (III.2). En effet pour $\mathbf{x} \in \Omega_1$, l'intégrande du potentiel surfacique est uniformément bornée, ce qui assure la continuité de ce terme. Il en va de même pour les intégrales de support $\Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ et Ω_2 . Le terme défini sur $\Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ est traité en utilisant le lemme (III.4). ■

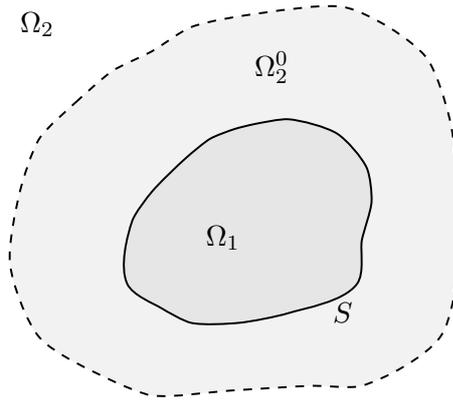
Représentation extérieure

Le traitement du potentiel extérieur se fait de manière similaire. Rappelons néanmoins, que nous supposons que la taille de la zone plastique reste finie. Mathématiquement cette hypothèse revient à considérer $\varepsilon^0(\mathbf{y})$ de support borné (voir paragraphe II.2), ce qui se traduit par la propriété suivante

$$\exists \Omega_2^0 \subset \Omega_2 \quad \text{avec} \quad \text{mes}(\Omega_2^0) < +\infty, \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2^0), \quad \varepsilon^0(\mathbf{y}) = 0 \quad (\text{III.155})$$

Le potentiel extérieur de seconde espèce peut alors se réécrire sous la forme suivante, avec Ω_2^0 borné, ce qui permet d'obtenir le résultat (III.13)

$$\mathcal{W}_2^{(2)} \varepsilon_k^0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_2^0} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_2} dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_1} dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.156})$$

Figure III.2 : Définition de Ω_2^0 **Resultat III.13**

Si $\varepsilon_{|\Omega_2}^0(\mathbf{y}) \in Di(\Omega_2)$, alors le potentiel volumique de seconde espèce $\mathcal{W}_2^{(2)}\varepsilon^0(\mathbf{x})$ est de classe $C^1(\Omega_2)$ et on a pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(2)}\varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) = & - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_2^0 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ & - \int_{\Omega_2^0 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_{\partial(\Omega_2^0 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.157})$$

Preuve

Vu que Ω_2^0 est borné et tenant compte de la relation (III.156), le résultat (III.13) est obtenu de manière analogue à (III.12). ■

Comme lors de l'étude des potentiels surfaciques, les expressions du gradient des potentiels de seconde espèce intérieur et extérieur, font intervenir un paramètre ε qui peut être éliminé en le faisant tendre soit vers 0 soit vers ∞ . Nous retrouvons alors les notions de régularisations directe et indirecte.

Régularisation indirecte

Les ensembles Ω_1 et Ω_2^0 étant bornés, lorsque ε devient très grand, il est possible de trouver ε_0 , tel qu'on ait les propriétés suivantes

$$\forall \varepsilon > \varepsilon_0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \cup \Omega_2^0, \begin{cases} \Omega_1 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \emptyset & \text{et} & \Omega_1 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \Omega_1 \\ \Omega_2^0 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \emptyset & \text{et} & \Omega_2^0 \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \Omega_2^0 \end{cases} \quad (\text{III.158})$$

Les expressions de $\nabla \mathcal{W}_2^{(m)} \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$ pour $m \in [1, 2]$, se mettent alors sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\Omega_2^0} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.159})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(2)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega_2^0} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_{\partial\Omega_2^0} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.160})$$

La formulation du gradient du potentiel extérieur peut être modifiée en tenant compte de la propriété suivante. Soit $R > \varepsilon_0$, l'intégrale de support Ω_2^0 est réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2^0} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} &= \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_{B(\mathbf{x},R) \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2^0)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{B(\mathbf{x},R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.161})$$

car $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, R) \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2^0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{y}) = 0$ et le noyau $\nabla \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{r})$ est régulier pour la première intégrale pour $\mathbf{y} \in \Omega_2^0$. Cette dernière devient après intégration par parties et en tenant compte des orientations choisies pour $\partial\Omega_2^0$ et S ,

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{x},R) \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2^0)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{y}} &= \int_{\partial B(\mathbf{x},R)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_2^0} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.162})$$

La première intégrale du second membre est un tenseur d'ordre quatre, ne dépendant ni de \mathbf{x} , ni de R et est appelé *tenseur d'Eshelby* pour une boule. Par la suite, on le note $\tilde{d}_{kl ij}$. Il en résulte alors l'expression de la représentation extérieure de $\nabla \mathcal{W}_2^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$ avec $R \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(2)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \left(\tilde{d}_{kl ij} - \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.163})$$

Ce dernier résultat a été obtenu dans [Sladek et al.98] dans le cas d'un solide élastique anisotrope soumis à des déformations ou contraintes initiales. Rappelons brièvement que dans le cadre de l'élasticité isotrope, on a

$$\tilde{d}_{kl ij} = \frac{1}{15(1-\nu)} \left[(1-5\nu)\delta_{kl}\delta_{ij} - (4-5\nu)(\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}) \right] \quad (\text{III.164})$$

Régularisation directe

On considère à présent le processus de passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour ε suffisamment petit, nous avons pour $\mathbf{x} \in \Omega_m$ la propriété $\Omega_m \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon) = B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ car \mathbf{x} est un point intérieur à Ω_m . Le terme libre se réduit alors au tenseur d'Eshelby et l'intégrale de support $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ disparaît quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il en résulte que le terme de support $\Omega_m \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ reste borné lorsque ε devient petit et il vient finalement [Bui78] pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(m)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) &= -\tilde{d}_{klij} \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) - \text{vp} \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.165}) \\ \text{avec } \text{vp} \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Cette formulation est prédominante dans la littérature et est utilisée dans des nombreux travaux sur les éléments finis de frontière appliqués à la résolution de problèmes élastoplastiques. On peut notamment citer [Telles83], [Cruse et al.86a], [Banerjee94] et [Leitao94].

Remarque III.14 Le principal inconvénient de cette formulation, est de ne pouvoir donner d'informations de $\nabla \mathcal{W}_2^{(m)} \varepsilon^0(\mathbf{x})$ au voisinage de S , vu qu'il existe à la connaissance de l'auteur aucun résultat analogue au théorème de convergence dominée de Lebesgue pour des intégrales singulières, du moins définies au sens de la valeur principale de Cauchy. \square

TRACES DU GRADIENT DU POTENTIEL VOLUMIQUE DE SECONDE ESPÈCE

Le potentiel volumique $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ est parfaitement défini pour un point de S et est continu à sa traversée. Il n'en est pas de même pour $\nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ dont il est nécessaire d'évaluer les traces de part et d'autre de S pour déterminer le gradient du champ de déplacement sur la frontière, lors de l'obtention de l'équation intégrale en vecteur-contrainte ou de la représentation intégrale des déformations sur S .

Dans la suite de l'exposé nous considérerons uniquement la forme régularisée compte tenu de la remarque (III.14). Nous montrons que nous sommes alors capable d'obtenir une formulation singulière et régulière de trace $\gamma_0^m \nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{z})$.

Représentation intérieure

Envisageons tout d'abord la représentation intérieure et considérons une suite de points $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega_1$ tendant vers $\mathbf{z} \in S$. Nous obtenons alors la limite suivante.

Resultat III.14

Soit \mathbf{z} un point régulier de S et soit ε un réel arbitraire positif arbitraire. Si les densités $\varepsilon_{|\Omega_m}^0(\mathbf{y})$ sont continues au sens de Dini dans Ω_m , alors la représentation intérieure $\nabla \mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon^0(\mathbf{x})$ est prolongeable par continuité en S au point \mathbf{z} et en désignant $[[\varepsilon^0]](\mathbf{z})$, l'amplitude de discontinuité du champ de déformations initiales à la traversée de S , i.e. $[[\varepsilon^0]](\mathbf{z}) = \varepsilon_{|\Omega_2}^0(\mathbf{z}) - \varepsilon_{|\Omega_1}^0(\mathbf{z})$.

on a l'expression suivante

$$\begin{aligned}
\gamma_0^1 \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{z}) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{W}_2^{(1)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1}] dV_{\mathbf{y}} \\
&- \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} - \tilde{d}_{kl ij} \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2} \\
&+ [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{z}) \left(\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + n_l(\mathbf{z}) B_{ijk}^{(1)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \right. \\
&\quad \left. + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z})] dV_{\mathbf{y}} \right) \tag{III.166}
\end{aligned}$$

Preuve

De manière analogue à l'étude des potentiels surfaciques, considérons \mathbf{z} un point régulier de S . En reprenant les notations du paragraphe (II.1), il existe alors une représentation paramétrique normale $(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{R})$ pour laquelle $\mathbf{z} \in \mathcal{U}$ et $\mathbf{z} = (\eta, \alpha(\eta))$. Introduisons $\varepsilon > 0$ tel que $(S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)) \subset \mathcal{U}$. Pour $\mathbf{x} \in \Omega_1$ suffisamment proche de \mathbf{z} , nous avons $\mathbf{x} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}) + \tilde{h})$ et $\mathbf{y} = (\xi, \alpha(\xi))$ avec $(\xi, \tilde{\eta}) \in (B_2(0, d))^2$ et $-1 < \tilde{h} < 0$. On introduit également le point de la frontière $\tilde{\mathbf{z}}$ défini par $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\eta}, \alpha(\tilde{\eta}))$

Soit $\varepsilon > 0$. Le point \mathbf{z} étant régulier, la représentation intérieure de $\nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ est alors donnée par la somme des termes suivants.

$$I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} \tag{III.167}$$

$$I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega_2^0} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \tag{III.168}$$

$$I_{kl}^{(III)}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \tag{III.169}$$

$$I_{kl}^{(IV)}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} \tag{III.170}$$

$$I_{kl}^{(V)}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}) n_l(\tilde{\mathbf{z}}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \tag{III.171}$$

Les restrictions de la densité $\varepsilon^0(\mathbf{y})$ à Ω_m étant de classe Di , on vérifie aisément qu'elles sont uniformément continues sur $\bar{\Omega}_m$ et qu'elles admettent de ce fait, une valeur en \mathbf{z} de part et d'autre de S , notée $\varepsilon_{|\Omega_m}^0(\mathbf{z})$. Ceci étant, on montre sans difficulté en utilisant le résultat (III.2) et les propriétés spécifiques à la représentation normale introduite (III.4), que

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(III)}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1} \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \tag{III.172}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(IV)}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \tag{III.173}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(V)}(\mathbf{x}) = -B_{ijk}^{(1)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1} n_l(\mathbf{z}) \tag{III.174}$$

où le terme libre $\mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)$ a été introduit lors de l'obtention du résultat (III.8). Il nous reste à traiter les termes de volume.

La continuité de $\mathbf{I}^{(I)}(\mathbf{x})$ est obtenue en appliquant le lemme (III.4), ce qui nous permet d'écrire la limite ci-dessous.

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(I)}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})|_{\Omega_1}] dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.175})$$

Le terme $\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x})$ pose plus de problèmes et il n'est pas vraiment possible d'exhiber une dominante intégrable vu que $\nabla \Sigma(\mathbf{r})$ est singulier d'ordre 3. Nous allons alors envisager une technique de régularisation analogue à (III.8). Mais avant toute chose, remarquons que pour R suffisamment grand

$$I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{B(\mathbf{z}, R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) \quad (\text{III.176})$$

car les déformations initiales sont supposées nulles en dehors du domaine Ω_2^0 . Il est alors possible de reformuler le terme $\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x})$ sous la forme suivante.

$$I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{B(\mathbf{z}, R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\tilde{\mathbf{z}})|_{\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} \\ - \varepsilon_{ij}^0(\tilde{\mathbf{z}})|_{\Omega_2} \int_{B(\mathbf{z}, R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.177})$$

On montre par une démonstration analogue à celle du lemme (III.2), que la limite de la première intégrale du second membre quand $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ est donnée par

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} \int_{B(\mathbf{z}, R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\tilde{\mathbf{z}})|_{\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} \\ = \int_{B(\mathbf{z}, R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})|_{\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.178})$$

Le terme libre restant admettant une intégrande régulière pour $\mathbf{x} \in \Omega_1$, on peut appliquer le théorème d'Ostrogradsky (II.23) et il vient alors en tenant compte des conventions d'orientations sur S .

$$\int_{B(\mathbf{z}, R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{y}} = \tilde{d}_{kl ij} - \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.179})$$

La limite pour \mathbf{x} tendant vers \mathbf{z} de l'intégrale de support S est finalement traitée de manière classique en excluant un voisinage de la forme $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. On obtient en définitive pour le terme $\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x})$, la limite suivante

$$\lim_{\mathbf{x} \in \Omega_1 \rightarrow \mathbf{z}} I_{kl}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{B(\mathbf{z}, R) \setminus \Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})|_{\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} \\ - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})|_{\Omega_2} \left(\tilde{d}_{kl ij} - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - n_l(\mathbf{z}) B_{ijk}^{(1)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \right. \\ \left. - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z})] dV_{\mathbf{y}} \right) \quad (\text{III.180})$$

R étant un paramètre arbitraire, il est possible de l'éliminer en le faisant tendre vers l'infini. Il ne nous reste alors qu'à regrouper les différents termes pour en déduire la relation (III.166) et finir la démonstration. ■

Nous pouvons alors obtenir une représentation ne présentant que des intégrales régulières, en faisant tendre ε vers ∞ . Ce type de régularisation peut être trouvée dans les travaux [Poon et al.98b], [Poon et al.98a], [Huber et al.96] et [Sladek et al.98], pour l'obtention d'une représentation du champ de gradient des déplacements en un point de la frontière S . Notons que l'hypothèse de régularité de S en \mathbf{z} , joue un rôle essentiel.

Représentation extérieure

Un résultat analogue à (III.14) concerne le prolongement par continuité de la représentation extérieure de $\nabla \mathcal{W}_2^{(2)} \varepsilon^0(\mathbf{y})$. On obtient ainsi le résultat suivant.

Resultat III.15

Soit \mathbf{z} un point régulier de S et soit ε un réel arbitraire positif arbitraire. Si les densités $\varepsilon_{|\Omega_m}^0(\mathbf{y})$ sont continues au sens de Dini dans Ω_m , alors la représentation intérieure $\nabla \mathcal{W}_2^{(2)} \varepsilon^0(\mathbf{x})$ est prolongeable par continuité en S au point \mathbf{z} et on a

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{z}) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_2 \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{W}_2^{(2)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1}] dV_{\mathbf{y}} \\ &- \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} - \tilde{d}_{kl ij} \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2} \\ &+ [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{z}) \left(\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + n_l(\mathbf{z}) B_{ijk}^{(2)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \right. \\ &\left. + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z})] dV_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.181})$$

Preuve

La démonstration est obtenue de manière analogue à celle du résultat (III.14) en reprenant l'expression (III.163) pour $\nabla \mathcal{W}_2^{(2)} \varepsilon^0(\mathbf{x})$. ■

On peut noter que les expressions (III.166) et (III.181) peuvent s'écrire de manière condensée sous la forme suivante où m désigne soit 1 ou 2.

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{z}) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{W}_2^{(m)} \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1}] dV_{\mathbf{y}} \\ &- \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} - \tilde{d}_{kl ij} \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2} \\ &+ [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{z}) \left(\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + n_l(\mathbf{z}) B_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon) \right. \\ &\left. + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [n_l(\mathbf{y}) - n_l(\mathbf{z})] dV_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.182})$$

Comme pour les potentiels surfaciques, le paramètre ε peut être éliminé au moyen de deux processus de passage à la limite $\varepsilon \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$. Ce dernier se révèle très intéressant pour la remarque (III.15). Quoiqu'il en soit nous avons alors

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{z}) &= - \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1}] dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2}] dV_{\mathbf{y}} - \tilde{d}_{kl ij} \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2} \\ &\quad + [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{z}) \left(\tilde{b}_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.183})$$

La relation (III.183) peut être reformulée de manière à ne faire intervenir que des opérateurs intégraux singuliers qui sont plus intéressants pour les études théoriques (voir [Bui et al.70] et [Schwab et al.92a]). Il est en effet possible d'écrire pour $m \in [1, 2]$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_m}] dV_{\mathbf{y}} &= \text{vp} \int_{\Omega_m} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_m \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.184})$$

On procède alors à une intégration par parties sur le seconde intégrale en utilisant le théorème d'Ostrogradsky (II.23) et il en résulte les égalités ci-dessous

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{S_1(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.185})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2 \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \tilde{d}_{ijkl}(\mathbf{z}) - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{S_2(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.186})$$

où on rappelle que $S_m(\mathbf{z}, \varepsilon) \equiv \bar{\Omega}_m \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. En regroupant les différents termes et en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient finalement l'expression de la trace de part et d'autre de S de $\nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ sous forme singulière.

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{z}) &\equiv = -\text{vp} \int_{\Omega_1} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \text{vp} \int_{\Omega_2} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \tilde{b}_{ijk}^{(m)}(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{z}) + \tilde{h}_{kl ij}^{(1)}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_1} + \tilde{h}_{kl ij}^{(2)}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{z})_{|\Omega_2} \\ \text{avec } \tilde{h}_{kl ij}^{(m)}(\mathbf{z}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_m(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.187})$$

Notons simplement que la somme de $\tilde{\mathbf{h}}^{(1)}(\mathbf{z})$ et $\tilde{\mathbf{h}}^{(2)}(\mathbf{z})$ est égale au tenseur d'Eshelby $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{z})$ et $\tilde{\mathbf{h}}^{(m)}(\mathbf{z})$ joue un rôle analogue à $\tilde{\mathbf{c}}^{(m)}(\mathbf{z})$ défini dans le paragraphe IV.1 pour le potentiel de double couche. Il est également important de rappeler que l'expression (III.187) n'est valable qu'en un point *régulier* de S .

Remarque III.15 Evaluons le saut à travers S de la dérivée conormale de $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ défini par la relation ci-dessous, en choisissant la normale extérieure à Ω_1 comme normale de référence. Nous avons ainsi

$$[[C_{abkl} \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0 n_b]](\mathbf{z}) = C_{abkl} [\gamma_0^2 \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{z}) - \gamma_0^1 \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{z})] n_b(\mathbf{z}) \quad (\text{III.188})$$

On constate que le seul terme faisant intervenir un terme de discontinuité dans les expressions (III.187) est $\tilde{\mathbf{b}}^{(m)}(\mathbf{z})$. Il vient finalement

$$\begin{aligned} [[C_{abkl} \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0 n_b]](\mathbf{z}) &= C_{abkl} n_b(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) C_{ijpq} \Phi_{pqk}(\mathbf{z}) [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{z}) \\ &= C_{abij} n_b(\mathbf{z}) [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (\text{III.189})$$

On retrouve bien la discontinuité introduite dans le chapitre II lors de l'obtention de la représentation intégrale du champ de déplacement. \square

III.3.4 Remarques et commentaires

Ces commentaires concernent les résultats obtenus quant à la dérivabilité du potentiel de seconde espèce $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ et de son comportement au voisinage de la surface S . Notons tout d'abord que les formulations obtenues sont relativement lourdes mais permettent en contrepartie d'imposer des conditions de régularité des densités volumiques garantissant la continuité du gradient, ce qui est d'une importance capitale pour la mise en œuvre numérique.

Notons qu'au cours de la démonstration des théorèmes (III.12) et (III.13), nous avons obtenu une représentation de $\nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ faisant intervenir le gradient des déformations initiales. Nous étions malheureusement incapable de conclure sans imposer des hypothèses plus sévères sur la régularités des densités volumiques, ce qui nous a poussé dans les développements précédents.

Rappelons brièvement, que le potentiel $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ peut se mettre sous la forme ci-dessous, expression obtenue après application de la formule d'Ostrogradsky sur Ω_1 et Ω_2 et en tenant compte du fait que toute fonction continue au sens de Dini, admet une dérivée intégrable.

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \mathcal{W}_2 \varepsilon_k^0(\mathbf{x}) &= - \int_S C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \int_{\Omega_1} C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_1} dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_2} C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_2} dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.190})$$

Comme précédemment, ces termes sont dérivables au sens des distributions et il est finalement possible d'écrire

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \mathcal{W}_2 \varepsilon_{k,l}^0(\mathbf{x}) &= \int_S C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) [[\varepsilon_{ij}^0]](\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{\Omega_1} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_1} dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_2} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_2} dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.191})$$

Remarque III.16 La quantité (III.191) étant strictement équivalente aux expressions singulières (III.145) et (III.157), les résultats concernant ces dernières sont directement transposables à la nouvelle formulation, ce qui justifie a posteriori l'étude précédente. \square

Aussi curieux que cela puisse paraître, cette représentation du gradient de $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ n'est jamais énoncée et ne peut être trouvée que dans [Bui et al.70]. En fait, l'évaluation de gradient de $\varepsilon^0(\mathbf{y})$ n'est généralement pas très intéressante du point de vue de la mise en œuvre numérique, ce qui peut justifier ce constat mais nous montrerons dans le chapitre IV que ces expressions pourront être considérablement simplifiées.

III.4 Formes explicites des équations intégrales

Les sections III.2 et III.3 ont permis d'obtenir les valeurs des prolongement par continuité en tout point régulier de la frontière S des opérateurs surfaciques et volumiques, intervenant dans la représentation intégrale de tout champ de déplacement, solution des équations de Lamé-Navier. D'un point de vue mathématique, ces résultats sont alors suffisants pour déterminer les équations intégrales du problème d'évolution élastoplastique, vu que pour une variété polyédrale de classe $N^{0,1}$, les points sont réguliers *presque partout*.

Compte tenu des résultats obtenus précédemment, il est grand temps de donner les relations (II.57) sous une forme explicite. Il convient de distinguer les méthodes directes, des méthodes indirectes et nous montrons que la structure du système d'équations intégrales du problème n'est pas unique et résulte d'un choix [Wendland87a]. Nous n'envisagerons que les formulations résultant du processus de régularisation directe, i.e. faisant clairement intervenir des opérateurs intégraux même singuliers.

III.4.1 Méthodes directes

Rappelons brièvement le résultat (II.5). Soit $\Omega \equiv \Omega_m$ avec $m = 1$ ou $m = 2$, un domaine borné ou non de \mathbb{R}^3 de frontière finie S . Alors le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ solution des équations de Lamé-Navier admet la représentation intégrale suivante dans Ω .

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega, u_k(\mathbf{x}) = & \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{II.52}) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats des paragraphes III.2 et III.3, il est alors possible de déterminer les traces sur S de la représentation intégrale (II.52) et de son gradient, représentant les limites de ces expressions lorsque $\mathbf{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{z} \in S$. Il vient alors pour $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}) \in Di^1(S) \times Di(S)$, les relations ci-dessous.

• Trace de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sur la frontière

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{z}) = & \frac{1}{2} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) - \text{vp} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.192}) \end{aligned}$$

• Trace de $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ sur la frontière

$$\begin{aligned}
u_{k,l}(\mathbf{z}) = & \frac{1}{2} \left(\Phi_{kli}(\mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{z}) + \Psi_{klij}(\mathbf{z}) D_j \tilde{u}_i(\mathbf{z}) \right) + \text{pf} \int_S \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\
& - \text{vp} \int_S U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \tilde{h}_{klij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{z}) \\
& - \text{vp} \int_{\Omega} \Sigma_{ij,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} C_{ijpq} \Phi_{pqk}(\mathbf{z}) n_l(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{z}) \quad (\text{III.193})
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \tilde{h}_{klij}(\mathbf{z}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_l(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

Ayant le gradient de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sur la frontière, on détermine simplement le vecteur-contrainte sur S et on obtient tout calcul fait

$$\begin{aligned}
t_k(\mathbf{z}) \equiv & C_{klab} \left(\nabla u_{a,b} |_{S}(\mathbf{z}) - \varepsilon_{ab}^p(\mathbf{z}) \right) n_l(\mathbf{z}) \\
= & \text{pf} \int_S n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) \\
& - \text{vp} \int_S n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\
& + \tilde{g}_{kij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{z}) - \text{vp} \int_{\Omega} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.194})
\end{aligned}$$

avec la définition suivante du terme libre $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z})$

$$\tilde{g}_{kij}(\mathbf{z}) = C_{klab} \left(\tilde{h}_{abij}(\mathbf{z}) + \frac{1}{2} C_{ijpq} \Phi_{pqa}(\mathbf{z}) n_b(\mathbf{z}) \right) n_l(\mathbf{z}) \quad (\text{III.195})$$

Si $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ donné par la représentation intégrale (II.52) est la solution du problème élastique auxiliaire avec déformations initiales, nous pouvons alors écrire les égalités suivantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{z}) \quad p.p. \quad \mathbf{z} \in S_t \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{z}) \quad p.p. \quad \mathbf{z} \in S_u \\
\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{u}}^0(\mathbf{z}) \quad p.p. \quad \mathbf{z} \in S_u \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{t}}^0(\mathbf{z}) \quad p.p. \quad \mathbf{z} \in S_t \quad (\text{III.196})
\end{aligned}$$

Si on effectue un rapide bilan des équations et des inconnues du problème on constate que si on écrit simultanément l'équation intégrale en déplacement (Displacement Boundary Integral Equation - DBIE) et l'équation intégrale en vecteur-contrainte (Traction Boundary Integral Equation - TBIE), on aboutit à un système sur-déterminé et il y a deux fois plus de relations à satisfaire que d'inconnues du problème.

On choisit alors de satisfaire la moitié des équations provenant de l'écriture de (III.192) et (III.194), ce choix étant a priori arbitraire. Bien évidemment, la solution du problème vérifiera toutes les équations. Pour une résolution approchée du problème, les relations non-satisfaites, constitue un bon indicateur d'erreur.

Sans ôter le caractère général de cette étude et pour ne pas alourdir inutilement les expressions, nous supposons que les forces de volume $\rho \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sont nulles.

SYSTÈME D'ÉQUATIONS DE FREDHOLM DE PREMIÈRE ESPÈCE

On se propose de satisfaire les relations découlant directement des conditions aux limites du problème et revenant à écrire $\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{u}}^0(\mathbf{z})$, *p.p.* $\mathbf{z} \in S_u$ et $\mathbf{t}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{t}}^0(\mathbf{z})$, *p.p.* $\mathbf{z} \in S_t$. On aboutit alors à un système d'équations de Fredholm de Première espèce ci-dessous.

• Equation intégrale en déplacement sur S_u

$$\begin{aligned} & \int_{S_u} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_t} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{u}_k^0(\mathbf{z}) - \text{vp} \int_{S_u} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{u}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_t} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & \quad + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.197})$$

• Equation intégrale en vecteur-contrainte sur S_t

$$\begin{aligned} & \int_{S_u} n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \text{pf} \int_{S_t} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{S_u} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \text{vp} \int_{S_t} n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & \quad - \frac{1}{2} \tilde{t}_k^0(\mathbf{z}) + \tilde{g}_{kij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{z}) - \text{vp} \int_{\Omega} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.198})$$

Le système précédent peut ainsi être mis sous la forme plus condensée suivante.

$$\mathcal{K} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{t}} \end{pmatrix} (\mathbf{z}) = \ell^S \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^0 \\ \tilde{\mathbf{t}}^0 \end{pmatrix} (\mathbf{z}) + \ell^V (\rho \mathbf{f}) (\mathbf{z}) + \mathcal{Q} \varepsilon^p(\mathbf{z}) \quad (\text{III.199})$$

Dans la littérature, on évite généralement de considérer cette formulation car elle est connue pour être mal conditionnée [Bonnet95a] et dans le cadre de la *théorie des opérateurs* il n'existe pas de résultats d'existence et d'unicité du problème. De plus la TBIE fait intervenir un opérateur *hypersingulier*.

Il convient néanmoins de tempérer ce constat et il découle de ce système d'équations d'autres propriétés tout à fait essentielles que nous mentionnerons dans le chapitre V. Nous renvoyons le lecteur aux travaux [Costabel et al.86] et [Wendland87a] pour se faire une idée plus juste du traitement de systèmes d'équations intégrales.

SYSTÈME D'ÉQUATIONS DE FREDHOLM DE SECONDE ESPÈCE

Cette formulation repose sur l'écriture des conditions aux limites duales de la méthode précédente. Ainsi on envisage de satisfaire $\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{z})$, *p.p.* $\mathbf{z} \in S_t$ et $\mathbf{t}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{z})$, *p.p.* $\mathbf{z} \in S_u$. On aboutit alors à un système d'équations de Fredholm de Seconde espèce, prenant la forme ci-dessous.

• **Equation intégrale en déplacement sur S_t**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) - \text{vp} \int_{S_u} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{S_t} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{S_t} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_u} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.200})$$

• **Equation intégrale en vecteur-contrainte sur S_u**

$$\begin{aligned} & \int_{S_t} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \tilde{t}_k(\mathbf{z}) - \text{vp} \int_{S_u} n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= - \int_{S_u} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{S_t} n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & \quad - \tilde{g}_{kij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_{\Omega} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.201})$$

Ce système d'équations admet la représentation formelle suivante

$$\left(\frac{1}{2} \mathcal{I} + \mathcal{K} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{t}} \end{pmatrix}(\mathbf{z}) = \ell^S \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^0 \\ \tilde{\mathbf{t}}^0 \end{pmatrix}(\mathbf{z}) + \ell^V(\rho \mathbf{f})(\mathbf{z}) + \mathcal{Q} \varepsilon^p(\mathbf{z}) \quad (\text{III.202})$$

Cette structure est généralement très intéressante car le terme libre confère au système d'équations un bon conditionnement. La formulation faisant intervenir des opérateurs intégraux singuliers, on montre dans [Kupradze et al.79], qu'il est possible de se ramener dans le cadre de l'*alternative de Fredholm* après régularisation du système d'équations. On dispose alors de résultats d'existence et d'unicité de la solution, issus de la théorie spectrale des opérateurs.

SYSTÈMES MIXTES

Bien évidemment, il est possible d'obtenir tous les cas intermédiaires où le système global peut être partitionné en deux sous-systèmes possédant respectivement une structure de type Fredholm de première et seconde espèce.

Dans la plupart des travaux publiés jusqu'à présent, on écrit l'équation intégrale la plus simple à mettre en oeuvre, la DBIE que fournit la relation (III.192). Cette dernière n'est néanmoins plus suffisante pour des problèmes de mécanique de la rupture où l'on observe le phénomène de *dégénérescence de la DBIE* et il est alors nécessaire d'écrire la TBIE aux points situés sur la fissure. Dans [Levan88], la TBIE est appliquée avec succès sur toute la frontière du domaine et sur la fissure et la DBIE n'est jamais utilisée.

Nous avons montré dans ce paragraphe, que le système d'équations intégrales régissant le problème direct n'est pas obtenu de manière unique. Nous verrons dans les chapitres IV et V, qu'il est plus intéressant de résoudre une équation de Fredholm de *seconde espèce* pour une méthode de collocation alors qu'une formulation variationnelle induit naturellement un système de Fredholm de *première espèce* pour une méthode directe.

III.4.2 Méthodes indirectes

Nous allons brièvement donner les équations intégrales obtenues en considérant une méthode indirecte. Rappelons que les inconnues de frontière apparaissant dans la formulation n'ont plus de grande signification physique et peuvent au mieux être assimilées à des sauts de déplacement ou de vecteur-contrainte en introduisant le problème complémentaire. L'écriture des conditions aux limites se résume alors aux relations suivantes.

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{u}}^0(\mathbf{z}) \quad p.p. \mathbf{z} \in S_u \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{t}}^0(\mathbf{z}) \quad p.p. \mathbf{z} \in S_t \quad (\text{III.203})$$

On vérifie alors facilement que selon la variante considérée (voir paragraphe II.3.1), on obtient un système de Fredholm, soit de première espèce, soit de seconde espèce. Ainsi

EQUATIONS INTÉGRALE POUR LA PREMIÈRE VARIANTE

En reprenant la représentation intégrale donnée par l'expression et en appliquant les conditions aux limites ci-dessus, il vient finalement le système de Fredholm de *première espèce*.

• Equation intégrale en déplacement sur S_u

$$\begin{aligned} & \int_{S_u} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_t} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & = u_k^0(\mathbf{z}) - \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.204})$$

• Equation intégrale en vecteur-contrainte sur S_t

$$\begin{aligned} & \text{pf} \int_{S_t} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{S_u} n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & = t_k^0(\mathbf{z}) - \tilde{g}_{kij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_{\Omega} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.205})$$

EQUATIONS INTÉGRALE POUR LA SECONDE VARIANTE

Le fait de considérer la seconde variante, aboutit à un système d'équations intégrales de Fredholm de *seconde espèce*, pouvant par exemple être trouvé dans [Kupradze et al.79]. Les relations à satisfaire admettent alors l'expression suivante.

• Equation intégrale en déplacement sur S_t

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \tilde{u}_k(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_{S_u} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_t} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & = \tilde{u}_k^0(\mathbf{z}) - \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.206})$$

• **Equation intégrale en vecteur-contrainte sur S_u**

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\tilde{t}_k(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_{S_u} n_l(\mathbf{z}) \Sigma_{kl}^i(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_t} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y}-\mathbf{z}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & = \tilde{t}_k^0(\mathbf{z}) - \tilde{g}_{kij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_{\Omega} n_l(\mathbf{z}) C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.207})$$

Ces approches sont utilisées dans [Kupradze et al.79] pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité des problèmes élastiques définis sur des ouverts réguliers de classe $C^{1,\beta}$.

III.4.3 Equations intégrales et opérateurs pseudo-différentiels

Au cours de ce paragraphe, nous avons donné une expression explicite des équations intégrales du problème données formellement dans la section II.3. La structure de ces équations est étudiée de manière très générale dans [Costabel et al.86] et fait intervenir la notion d'*opérateur pseudo-différentiel* défini par un *symbole*, permettant de donner un cadre mathématique propice à l'étude d'équations intégrales obtenues. Une introduction très claire aux opérateurs pseudo-différentiels peut par exemple être trouvée dans [Durand83] et dans [Egorov et al.97].

L'objet de ces rappels est de rendre compte des principales propriétés qui résultent de l'introduction de cette théorie mathématiques et de familiariser le lecteur avec certains concepts qui généralement ne sortent pas de la sphère mathématique. Nous nous contenterons de définir la notion d'opérateur pseudo-différentiel en suivant [Egorov et al.97] et de donner quelques remarques justifiant ces définitions.

Definition III.2

Un opérateur $P(\mathbf{x}, \nabla)$ est *pseudo-différentiel* dans Ω , un ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n avec $n \in \mathbb{N}$, s'il est de la forme suivante

$$P(\mathbf{x}, \nabla) f(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{F}_{\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}}^{-1} \left(p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathcal{F}_{\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{\xi}) \right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\mathbf{y}) e^{i\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \rangle} d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{III.208})$$

où $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est appelé *symbole* satisfait la condition suivante

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \quad \|\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\alpha} \nabla_{\mathbf{x}}^{\beta} p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\| \leq C_{\alpha\beta} (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|)^{m-|\alpha|} \quad (\text{III.209})$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{x} \in K$, avec K un ensemble compact de Ω . L'entier m est appelé *ordre* de l'opérateur $P(\mathbf{x}, \nabla)$.

L'ensemble des symboles d'ordre m est noté $S^m(\Omega)$. On vérifie aisément que si $P(\mathbf{x}, \nabla)$ est un opérateur différentiel linéaire introduit dans la section II.2.2, son symbole sera un polynôme de degré m en $\boldsymbol{\xi}$. La notion d'opérateur pseudo-différentiel est donc une extension du concept d'opérateur différentiel linéaire.

Un opérateur pseudo-différentiel $P(\mathbf{x}, \nabla)$ de symbole $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ d'ordre m est dit *classique* s'il vérifie les conditions suivantes.

$$\forall N \in \mathbb{N}, p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \sum_{j=0}^{j=N} p_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^{m-N}(\Omega) \quad (\text{III.210})$$

$$\text{avec } \forall j \in \mathbb{N}, \forall t \leq 0, \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0, p_j(\mathbf{x}, t\boldsymbol{\xi}) = t_{m-j} p_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{III.211})$$

La fonction $p_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est appelé *symbole principal*.

Une propriété analogue à la caractérisation des opérateurs différentiels linéaire peut alors être écrite pour les opérateurs pseudo-différentiels. Cette propriété très intéressante s'énonce de la manière suivante.

Resultat III.16

Soit $P(\mathbf{x}, \nabla)$ un opérateur pseudo-différentiel de symbole $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^m(\Omega)$. Alors pour toute fonction lisse $h(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall u(\mathbf{x}) \in H^s(\mathbb{R}^n), \|h(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, \nabla)u(\mathbf{x})\|_{H^{s-m}} \leq C \|u\|_{H^s} \quad (\text{III.212})$$

autrement dit pour tout $s \in \mathbb{R}$ nous avons continuité de l'application $P(\mathbf{x}, \nabla) : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

On montre dans [Schwab et al.92a] que tout opérateur pseudo-différentiel classique peut être interprété comme un opérateur intégral, le noyau de ce dernier étant alors la transformée de Fourier inverse par rapport à $\boldsymbol{\xi}$ du symbole $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Si le noyau n'est pas intégrable, il convient de considérer une *régularisation* du noyau au sens des distributions (voir [Schwartz66]) et on retrouve naturellement les *conditions de Giraud-Mikhlin* en imposant à la régularisation du noyau d'être une distribution homogène.

De nombreux résultats issus de la théorie de Fredholm [Mikhlin et al.86], de la régularisation des noyaux singuliers [Kupradze et al.79] et de l'introduction d'opérateurs intégraux *très singuliers* [Schwab et al.92a], découlent directement de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Nous renvoyons le lecteur aux premiers chapitres de [Egorov et al.97] pour s'en convaincre.

Ayant défini les opérateurs pseudo-différentiels sur un domaine, on étend cette notion sur une variété différentielle en considérant un atlas $(\mathcal{U}_i, \boldsymbol{\vartheta}_i)_{i \in [1, M]}$ et en *localisant* l'opérateur au moyen de la partition de l'unité. On retrouve cette démarche dans [Wendland87a].

Il est également possible d'étendre la notion d'*ellipticité forte* définie pour les opérateurs elliptiques différentiels linéaires. Rappelons que cette dernière entraîne l'*inégalité de Garding* permettant d'obtenir les résultats d'existence et d'unicité du problème élastique [Nečas67]. Ces notions sortent largement du cadre de ce travail et le lecteur désireux d'approfondir ces notions pourra se référer aux travaux de [Costabel84], [Costabel et al.86], [Wendland87b], [Wendland87a] et [Costabel88] pour un exposé sur l'obtention d'une inégalité de Garding relative aux opérateurs de frontière apparaissant dans les différents systèmes d'équations intégrales du problème élastique fictif introduit au début de ce paragraphe.

Conclusion

L'étude du comportement de la représentation intégrale de \mathbf{u}_{n+1} et de son gradient au voisinage de points réguliers de la frontière d'un domaine polyédral est une étape indispensable vu

que les points réguliers constituent la quasi-majorité des points surfaciques. Cette étude menée dans ce chapitre a permis d'aboutir aux résultats suivants :

- **Comportement des potentiels surfaciques**

- ◇ Nous avons présenté et mis en œuvre une méthodologie générale permettant d'obtenir un prolongement par continuité des potentiels surfaciques aux points réguliers de la frontière. Cette technique basée sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue et sur un développement de Taylor de la densité surfacique présente le principal intérêt de pouvoir regrouper les approches qualifiées de directe et indirecte dans un même formalisme et de montrer qu'elles correspondent à deux cas limites d'un processus de régularisation plus général.
- ◇ Nous avons pu mettre en évidence les conditions nécessaires et suffisantes portant sur la densité surfacique pour qu'un tel prolongement soit possible. La continuité au sens de Dini, plus faible que la continuité höldérienne, joue un rôle déterminant et permet d'aboutir au résultat.
- ◇ L'indépendance de la forme du voisinage d'exclusion dans le processus de régularisation, établie dans le cadre de la théorie du potentiel scalaire, a été étendue au problème élastique. Bien évidemment ce voisinage d'exclusion doit garder une forme homothétique au cours du passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.
- ◇ Nous avons introduit une notion de partie finie plus générale que les définitions classiques et qui présente l'avantage d'être une quantité intrinsèque au noyau de l'intégrale singulière considérée.

- **Comportement des potentiels volumiques**

- ◇ Il a clairement été montré que l'utilisation de la théorie des distributions dans l'étude de la dérivabilité des potentiels volumiques, permet d'aboutir directement au résultat.
- ◇ Nous avons établi que les formulations singulières et régularisées du gradient du potentiel volumique de seconde espèce sont obtenues à partir d'une expression plus générale.
- ◇ Afin de pouvoir écrire l'équation intégrale en vecteur-contrainte pour un problème élastoplastique, une expression singulière et régularisée de la trace sur la frontière du gradient du potentiel de seconde espèce ont été établies.

- **Equations intégrales du problème**

- ◇ Les systèmes d'équations intégrales apparaissant pour les divers formulations envisagées dans le précédent chapitre ont été donnés de manière explicite sous forme singulière. Deux structures particulières ont été mises en évidence : les systèmes d'équations intégrales de Fredholm de première et de seconde espèce, possédant des propriétés différentes [Chen et al.92].
- ◇ Pour la méthode directe, nous avons montré qu'un choix se posait quant à l'écriture en un point de la frontière, soit de la DBIE, soit de la TBIE et que la nature du système d'équations intégrales obtenu dans chacun des cas diffèrait. Nous verrons dans les prochains chapitres, que la méthode de résolution mise en œuvre conditionne grandement ce choix.

Par la suite, nous ne considérerons que les méthodes directes car les densités surfaciques représentent directement le déplacement et le vecteur-contrainte sur la frontière, ce qui donne une signification physique aux densités surfaciques et permet d'envisager un couplage simple avec les méthodes de type éléments finis de domaine.

Chapitre IV

Résolution par une méthode de collocation

Introduction

Ce chapitre traite d'une nouvelle méthode de résolution du problème d'évolution élastoplastique utilisant une approche par collocation. Rappelons que cette dernière consiste à introduire une approximation de type *élément fini* des champs inconnus et à écrire que les équations régissant le système sont vérifiées en un certain nombre de points dont le nombre est au moins égal au nombre d'inconnues nodales du modèle. Il s'agit de l'approche utilisée dans de très nombreux travaux du fait que le formalisme par équations intégrales s'y prête naturellement.

Dans le but de développer une méthode simple et systématique, nous chercherons toujours à confondre les points de collocation et les points définissant le maillage. Nous nous proposons également de développer une formulation permettant d'écrire indifféremment la DBIE et la TBIE en un point de la frontière pour un problème élastoplastique, de manière à pouvoir envisager tous les systèmes d'équations intégrales présentés dans la section III.4. Il est intéressant de noter que la TBIE obtenue, indispensable pour l'étude des problèmes en mécanique de la rupture, est tout aussi importante en l'absence des fissures. En effet, cette équation utilisée en bonne alternance avec la DBIE permettra d'obtenir un système final de Fredholm de *seconde espèce* dont la stabilité est bien établie en analyse numérique. Rappelons de plus que la TBIE est intimement liée à l'obtention d'une représentation intégrale du gradient du champ de déplacement sur S (Gradient Boundary Integral Representation - GBIR).

Les résultats du paragraphe III.2 ont montré la nécessité de vérifier l'hypothèse $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \in Di^1(S)$, soit de façon équivalente $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \in Di^0(S)$, en tout point de collocation *régulier*, hypothèse assez forte puisque l'utilisation brutale des éléments finis classiques permet seulement de réaliser la condition $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \in C^{0,\beta}(S)$. D'autre part, négliger cette condition peut entraîner des résultats numériques peu satisfaisants [Krishnasamy et al.92b] et dépendants du maillage [Sladek et al.96].

Une des tentatives les plus naturelles en élasticité qui consistait à introduire les éléments de Overhauser [Liu et al.91] satisfaisant par construction $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \in C^{1,\beta}(S)$ n'a pas été très concluante dans la mesure où ces éléments sont difficiles à mettre en œuvre numériquement. En fait, [Polch et al.87] ont été les premiers à proposer un procédé efficace pour vérifier $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \in C^{0,\beta}(S)$, cependant leur formulation n'est valable que sur les parties régulières de S .

La situation se complique encore en plasticité, car il est indispensable d'évaluer la trace sur

S du potentiel volumique $\nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon_{n+1}^p(\mathbf{x})$ pour obtenir une représentation intégrale du champ gradient du déplacement sur la frontière. Ce dernier point est très délicat puisqu'une intégrale de frontière de noyau singulier $\Sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{y})$ apparaît dans la formulation. Très tôt, [Telles83] a par exemple indiqué une méthode simple de calcul des tenseurs complets de déformation et de contrainte à la frontière connaissant les quantités surfaciques $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p)$. Cependant, [Guiggiani94] a déjà montré en élasticité que si cette méthode n'impliquant que des calculs algébriques est simple, elle ne fournit pas de résultats assez précis et qu'il est préférable d'obtenir les champs ε et σ à l'aide d'une représentation intégrale. Ce constat est confirmé dans [Foerster et al.94], où il est clairement établi que pour des problèmes fortement non-linéaires, l'évaluation des champs de déformation ou de contrainte dans $\bar{\Omega}$ doit être réalisée de façon cohérente, i.e. en considérant une représentation intégrale de ε_{n+1} ou σ_{n+1} pour les points intérieurs et sur la frontière.

Afin de contourner la singularité forte due à la présence de deux intégrales surfaciques de noyau en $O(r^{-2})$, [Leitao94] et [Leitao et al.95] ont considéré des éléments finis spéciaux dits à *interpolation semi-continue*, où les noeuds au lieu d'être sur la frontière sont disposés à une certaine distance de celle-ci. Bien que ce retrait permette d'éviter les intégrales singulières, il conduit néanmoins à évaluer des intégrales d'autant plus quasi-singulières que le point interne se rapproche de S . Par ailleurs, ces éléments finis ayant un comportement assez sensible à la distance de retrait, ils ne peuvent être utilisés de façon fiable. Cette technique est applicable si l'on envisage uniquement de satisfaire la DBIE mais devient caduque dès que l'on veut écrire la TBIE en un point de la frontière, comme cela est nécessaire pour les problèmes de rupture élastoplastique.

[Huber et al.96] ont proposé une alternative plus intéressante pour satisfaire la condition $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \in C^{1,\beta}(S)$ en prenant des points de collocation sur l'élément surfacique mais distincts des positions des noeuds et a ainsi réussi à obtenir une GBIR en des points réguliers de la surface. Allant plus loin dans cette direction, [Poon et al.98b] et [Poon et al.98a] ont proposé une version régularisée du résultat de [Huber et al.96] et sont parvenus en plus à généraliser à la plasticité le travail accompli en élasticité dans [Polch et al.87]. Notons que tous les résultats cités s'appliquent uniquement aux points réguliers de la frontière.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier le problème d'évolution élastoplastique par la méthode collocation. Les développements présentés formant une généralisation des résultats de la littérature sont caractérisés par les points suivants :

- ◇ Les formulations proposées sont valables en *élastoplasticité*,
- ◇ Les noeuds de collocation sont *confondus* avec les noeuds de l'élément fini. Nous écrirons ainsi les expressions GBIR et TBIE qui sont valables aux points *réguliers* et *singuliers* de la frontière et nous remplacerons par la même occasion la condition $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \in C^{0,\beta}(S)$, uniquement valable aux points réguliers, par une autre plus générale,
- ◇ Enfin, tous les résultats obtenus sont fournis sous une forme *singulière* et *régularisée*.

Dans un premier paragraphe, nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les densités des différents potentiels, pour que le champ de déplacement induit soit de régularité $C^1(\bar{\Omega})$. Insistons sur le fait que nous ne chercherons pas à satisfaire des conditions de *régularité réelle* de la solution recherchée. Nous établirons une représentation intégrale du

gradient du champ de déplacement qui admet un prolongement par continuité en *tout point* de la frontière.

Après discrétisation des équations et application d'une méthode de collocation, nous présenterons deux algorithmes de résolution du problème d'évolution élastoplastique, pilotés respectivement en contrainte et en déformation.

Dans un dernier paragraphe, nous présenterons les procédures d'intégration numérique mises en œuvre. Deux méthodes de régularisation seront données, basées respectivement sur une introduction d'un système de coordonnées triangulaires de Duffy et d'un système de coordonnées polaires.

IV.1 Etude des potentiels dans des domaines polyédraux

Par souci de clarté nous avons tout d'abord traité le cas des points réguliers dans le chapitre III. Le fait de considérer une méthode de collocation, qui puisse admettre un point singulier comme point de collocation, nous pousse à étudier plus en détail les propriétés des potentiels élastiques au voisinage des points singuliers de la frontière.

Rappelons que les conditions de régularité obtenues dans les sections III.2 et III.3 ne sont en aucun cas liées à des notions de *régularité réelle* des solutions du problème élastique. Cet aspect du problème fait l'objet de nombreux travaux parmi lesquels on peut par exemple citer [Grisvard92] et [Petersdorff89] traitant spécifiquement de la régularité de la solution du modèle élastique au voisinage des arêtes et coins.

Il convient toutefois de noter que même en un point *régulier* de la surface, il peut y avoir singularité de la solution élastique. Il suffit par exemple de considérer les points de S , pour lesquels on impose une discontinuité du vecteur-contrainte.

Nous allons montrer qu'il est possible de prolonger la représentation intégrale du champ de déplacement et son gradient en tout point de la frontière S sous la condition que certaines densités tensorielles de support S , définies à partir de $[[\mathbf{u}]]$, $[[\mathbf{t}]]$ et $[[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{P}}]]$, soient de régularité suffisante. Nous donnerons également une signification physique à ces densités auxiliaires que nous nommerons *gradient du déplacement reconstitué* et *contrainte reconstituée* sur la frontière.

IV.1.1 Préliminaires

L'objet du prochain paragraphe est l'étude du prolongement par continuité des potentiels surfaciques $\mathcal{V}_1\psi(\mathbf{y})$ et $\mathcal{V}_2\phi(\mathbf{y})$ en un point singulier $\mathbf{z} \in S$. Rappelons que l'obtention des résultats en des points réguliers repose principalement sur les lemmes (III.1) et (III.2). La question qui se pose à nous, est de voir dans quelle mesure, il est possible d'étendre ces lemmes aux points irréguliers. Deux remarques s'imposent alors quant aux résultats obtenus pour les points réguliers.

- ◇ L'introduction d'un système de coordonnées locales donné par l'hypothèse $S \in N^{0,1}$, permettant l'écriture de la propriété (III.4), est l'argument décisif pour obtenir une majoration uniforme par rapport à \mathbf{x} des intégrandes de $\mathcal{K}_1^\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\tilde{\mathcal{K}}_{2+k}^\varepsilon(\mathbf{x})$, ce qui rend le prolongement par continuité possible.
- ◇ Le lemme (III.2) est établi pour une régularité de la densité surfacique relativement sévère qui est intrinsèquement liée à la régularité de la géométrie par la définition (II.3).

Dans le cas présent, l'hypothèse $S \in N^{0,1}$ permet d'exhiber en tout point de S , un système de coordonnées possédant la propriété (III.4). Il est donc possible d'étendre en des points singuliers le lemme (III.1) puisque l'introduction d'une représentation paramétrique locale normale est toujours assurée et la quantité $\mathbf{D}\alpha \in L^\infty(S)$ reste bornée par définition de S . Il vient alors le lemme ci-dessous.

Lemme IV.1

Soit \mathbf{z} un point quelconque de $S \in N^{0,1}$ et soit $\varepsilon > 0$. Considérons $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}) \in L^p(S)$ avec $p > 2$, alors le potentiel faiblement singulier $\mathcal{K}_1^\varepsilon\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})$ de $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y})$ peut être prolongé par continuité en \mathbf{z} en

définissant $\mathcal{K}_1^\varepsilon \chi(\mathbf{z})$ de la manière suivante,

$$\mathcal{K}_1^\varepsilon \chi(\mathbf{z}) \equiv \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{K}_1^\varepsilon \chi(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}_1(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot \chi(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}}$$

où nous rappelons que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \mathcal{K}_1^\varepsilon \chi(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}_1(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \chi(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}}$$

Intéressons-nous à présent aux potentiels surfaciques pouvant présenter un noyau singulier. Le résultat (III.2) relatifs aux potentiels singuliers, ne peut être étendu aussi abruptement aux points irréguliers, vu qu'il n'est plus possible de définir la classe de fonctions Di^k pour $k \geq 1$, la géométrie n'étant localement que lipschitzienne. Nous pouvons au mieux aboutir au résultat suivant, en reprenant la démonstration adoptée pour le lemme (III.2).

Lemme IV.2

Considérons \mathbf{z} un point quelconque de S , frontière de classe $N^{0,1}$ d'un domaine Ω . Supposons que la densité $\chi(\mathbf{y})$ est continue au sens de Dini dans un voisinage de S en \mathbf{z} , alors le potentiel suivant défini par la relation ci-dessous, où $\tilde{\mathbf{z}}$ a été introduit dans la section III,

$$\tilde{\mathcal{K}}_2^\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot [\chi(\mathbf{y}) - \chi(\tilde{\mathbf{z}})] \, dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.1})$$

peut être prolongé par continuité en \mathbf{z} en posant

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \tilde{\mathcal{K}}_2^\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot [\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{z})] \, dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.2})$$

Le lemme (IV.2) reste donc le seul résultat qui soit à notre disposition pour traiter les potentiels singuliers. Nous allons montrer dans le prochain paragraphe que ces deux lemmes sont suffisants pour évaluer la trace des potentiels surfaciques sur la frontière.

IV.1.2 Traces des potentiels surfaciques

Compte tenu des lemmes (IV.1) et (IV.2), il est alors possible de prolonger les potentiels surfaciques de part et d'autre de S , et on montre aisément que les résultats (III.3) et (III.4) restent vrais en un point quelconque \mathbf{z} de $S \in N^{0,1}$. Rappelons brièvement que

$$\gamma_0^m \mathcal{V}_1 \psi_k(\mathbf{z}) = \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \psi_i(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] \, dS_{\mathbf{y}} - \frac{\omega^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)}{4\pi} \phi_k(\mathbf{z}) \\ &\quad + \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} + \mathcal{C}_{ki}^\varepsilon \phi_i(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Il est intéressant de reprendre les processus de passage à la limite $\varepsilon \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$, dans le but d'éliminer le paramètre ε . On aboutit alors aux formulations suivantes.

RÉGULARISATION INDIRECTE

Ayant déterminé la relation (III.31) pour tout point de S , nous pouvons écrire que pour $\phi(\mathbf{y}) \in Di(S)$, le potentiel de double couche admet de part et d'autre de S , le prolongement par continuité suivant [Rigolot78] et [Bonnet86].

$$\forall \mathbf{z} \in S, \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = -\kappa^{(m)} \phi_k(\mathbf{z}) + \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [\phi_i(\mathbf{y}) - \phi_i(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.3})$$

La densité $\phi(\mathbf{y})$ étant continue au sens de Dini, elle admet sur S un rotationnel surfacique faible $\mathbf{R}\phi(\mathbf{y})$ intégrable et utilisant la décomposition (III.21), l'intégrale peut être reformulée après application du théorème de Stokes (II.20). Il vient alors

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{z} \in S, \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = & - \left(\kappa^{(m)} + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) dS_{\mathbf{y}} \right) \phi_k(\mathbf{z}) \\ & + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) R_q \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

où $\mathbf{R}(\bullet)$ désigne le rotationnel surfacique défini par $R_q(\bullet) = e_{qjs} n_j(\mathbf{y}) D_s(\bullet)$. Rappelons qu'une telle formulation peut être trouvée dans [Tanaka et al.94], [Bonnet95a] et [Li et al.98].

RÉGULARISATION DIRECTE

Le processus de passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ est très intéressant dans le cas d'un point singulier de la géométrie. Ces résultats théoriques sont connus suite aux travaux [Rigolot78], [Hartmann81] et [Hartmann82] et le traitement numérique de ces formulations est abordé dans [Guiggiani et al.90].

Bien entendu la formulation (III.35) en *partie finie* reste valable puisque la formule de Stokes (II.20) peut être utilisée pour une surface S de Liapunov. Il est néanmoins intéressant de comparer l'expression (III.35) avec les relations obtenus dans la littérature. Rappelons de ce fait la formulation (III.35), dans laquelle $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ peut désigner *tout* voisinage gardant une forme quelconque au cours du processus $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{pf} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \mathcal{C}_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) \right) \\ \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) &= \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)} \right) \phi_k(\mathbf{z}) + \text{pf} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Remarquons que l'intégrale de contour de noyau $\mathbf{K}(\mathbf{r})$, reste bornée lorsque ε devient petit mais ne s'annule plus pour un point irrégulier. Dans [Hartmann81], on introduit alors l'expression suivante

$$\forall \mathbf{z} \in S, \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = \tilde{c}_{ki}^{(m)}(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) + \text{vp} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{avec } \tilde{c}_{ki}^{(m)}(\mathbf{z}) = \frac{\omega^m(\mathbf{z}, 0)}{4\pi} + \mathcal{C}_{ki}^0(\mathbf{z}) \quad (\text{IV.6})$$

Dans la formulation (III.35), le terme libre $\tilde{c}(\mathbf{z})$ a été introduit dans la définition de la partie finie de l'intégrale de noyau $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z})$, ce qui lui confère une valeur intrinsèque puisqu'elle regroupe tous les termes faisant explicitement intervenir le voisinage d'exclusion.

Remarque IV.1 Une notion analogue à (III.34) a été introduite dans [Cruse et al.96] mais où l'intégrale de contour ne prend en compte que la partie singulière du noyau $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z})$. Ainsi ce dernier admet la décomposition

$$T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) = \tilde{T}_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) + D_{ki} \left(\frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|} \right) \quad (\text{IV.7})$$

où $\tilde{T}_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z})$ désigne la partie *intégrable* de $T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z})$. On définit alors la partie finie de l'intégrale par la relation suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\text{pf}} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - 2\nu}{8\pi(1 - \nu)} \phi_i(\mathbf{z}) \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \frac{e_{ikq}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

[Cruse et al.96] montre alors qu'à l'aide de la définition (IV.8), la trace du potentiel de double couche se met sous la forme suivante

$$\forall \mathbf{z} \in S, \gamma_0^m \mathcal{V}_2 \phi_k(\mathbf{z}) = \tilde{c}_{ki}^{(m)}(\mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{z}) + \tilde{\text{pf}} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \phi_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.9})$$

Notons que le terme libre $\tilde{c}^{(m)}(\mathbf{z})$ ne renferme plus d'information liée à la forme du voisinage d'exclusion [Cruse et al.96] mais est encore fonction du noyau singulier considéré, ce qui n'est pas le cas de la formulation en partie finie (III.34) proposée dans ce mémoire. \square

IV.1.3 Traces du gradient de la représentation intégrale des déplacements

La question du prolongement par continuité des gradients de $\mathcal{V}_1 \psi(\mathbf{y})$ et $\mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{y})$ est beaucoup plus problématique. Notons tout d'abord que les résultats (III.6) et (III.7) ont clairement fait intervenir l'hypothèse de régularité de type Liapunov, du voisinage de S au point \mathbf{z} de la surface. L'annexe A traitant de la théorie du potentiel, permet de montrer clairement qu'il n'est pas possible de généraliser la méthode utilisée pour les points réguliers, au traitement des points singuliers. En fait il apparaît alors des termes portant sur des arêtes contenant le point \mathbf{z} , pour lesquels l'obtention d'une dominante intégrable nous paraît exclue.

De plus $\gamma_0^m \nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{z})$ n'a pour l'instant de sens, que pour \mathbf{z} admettant un voisinage de S de Liapunov, comme le montrent les résultats (III.14) et (III.15). [Mura82] montre même que pour un champ de déformations initiales constant dans un volume parallélépipédique, le potentiel $\gamma_0^m \nabla \mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{x})$ est singulier aux points situés sur les arêtes, ce qui rend toute investigation aux points irréguliers caduque.

Nous allons contourner le problème, en remarquant que nous avons constamment cherché à prolonger séparément par continuité les gradients des potentiels $\mathcal{V}_1 \psi(\mathbf{y})$, $\mathcal{V}_2 \phi(\mathbf{y})$ et $\mathcal{W}_2 \varepsilon^0(\mathbf{y})$. L'idée consiste alors à traiter ces termes de manière globale. L'annexe A applique cette nouvelle approche dans le cadre de la théorie du potentiel et nous y renvoyons le lecteur pour mieux comprendre les motivations qui nous ont poussées dans cette voie.

Insistons bien sur le fait que dans ce paragraphe il n'est nullement question de régularité de la solution réelle du problème élastique avec déformations initiales. Nous nous proposons uniquement de déterminer des conditions suffisantes portant sur les densités

des différents potentiels pour que la représentation intégrale du champ de déplacement admette un gradient qui puisse être prolongé par continuité dans $\tilde{\Omega}$. Notre seule motivation est de pouvoir mettre en œuvre numériquement la méthode de collocation de la manière la plus *simple* qui soit.

REPRÉSENTATION INTÉGRALE POUR UN POINT INTÉRIEUR

Le gradient du potentiel volumique de première espèce ne pose aucun problème et est continu à la traversée de S . Rappelons alors que le gradient de toute solution de l'équation de Lamé-Navier pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$, se met sous la forme

$$\begin{aligned} u_{k,l}(\mathbf{x}) = & - \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{jl}[[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\mathbf{t}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_S C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) [[\boldsymbol{\varepsilon}^0]]_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\mathbb{R}^3} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

En remarquant que $U_k^i(\mathbf{r}) = U_i^k(\mathbf{r})$ et en introduisant le saut du vecteur conormal défini par (II.27), les deux intégrales surfaciques peuvent être regroupées et il en résulte que

$$\begin{aligned} u_{k,l}(\mathbf{x}) = & - \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{lj}[[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\boldsymbol{\tau}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

en rappelant que $[[\boldsymbol{\tau}]]_i(\mathbf{y}) = [[\mathbf{t}]]_i(\mathbf{y}) + C_{ijab} [[\boldsymbol{\varepsilon}^0]]_{ab}(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y})$. En reprenant les quantités $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y})$ introduites dans le paragraphe III.2.3, nous allons définir le tenseur d'ordre deux suivant, défini sur S .

Definition IV.1

Soient $(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}), \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}))$ deux densités surfaciques. En supposant que $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ admette une dérivée surfacique intégrable sur chaque composante régulière de S , on appelle *gradient du déplacement reconstitué* du couple $(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}), \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}))$, le tenseur d'ordre deux de support S donné par la relation

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y}) : D\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \quad (\text{IV.12})$$

Cette quantité est introduite dans certains travaux [Telles83], [Balas et al.89] et [Leitao94] pour évaluer directement les champs de déformations ou de contraintes sur la frontière. Le principal inconvénient de cette technique est de ne pas être *cohérente* avec le calcul des déformations ou des contraintes aux points intérieurs utilisant une représentation intégrale.

Remarque IV.2 Insistons sur le fait que la dénomination *gradient du déplacement reconstitué* n'entraîne en rien que cette quantité soit la trace d'une fonction gradient définie dans le domaine ou du moins dans un voisinage tridimensionnel de S . \square

L'introduction de la densité auxiliaire $\tilde{h}(\mathbf{y})$ est motivée par la constatation suivante. Soit \mathbf{z} un point de la frontière S . Considérons alors un champ $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ défini dans un voisinage $\mathcal{O}(\mathbf{z}) \subset \mathbb{R}^3$ de \mathbf{z} et de classe C^1 . On cherche à déterminer la régularité de la dérivée surfacique $D\mathbf{v}|_S(\mathbf{y})$ et de la dérivée conormale $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{C} : (\nabla \mathbf{v})|_S(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$.

Le champ $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ étant de classe $C^1(\mathcal{O}(\mathbf{z}))$, il en résulte que $(\nabla \mathbf{v})|_S(\mathbf{y})$ est continue sur le voisinage $S \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})$ de S . Bien évidemment si \mathbf{z} est un point régulier de S , le champ de la normale $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ étant continu sur $S \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})$, on vérifie aisément que

$$D\mathbf{v}|_S(\mathbf{y}) \in C(S \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \in C(S \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})) \quad (\text{IV.13})$$

Le problème se complique quelque peu lorsque \mathbf{z} est un point singulier de S . Si S est la réunion d'un nombre fini ($n \in [1, N]$) de surfaces régulières $S^{(n)}$ (hypothèse de variété polyédrale), alors il existe un nombre fini de surfaces $S^{(n)}$ qui intersectent le voisinage $\mathcal{O}(\mathbf{z})$. Sur chacune des composantes régulières de S , il est alors possible de définir la dérivée surfacique et le vecteur conormale de $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ et on note que

$$\begin{aligned} \forall n \in [1, N] \setminus \mathcal{O}(\mathbf{z}) \cap S^{(n)} &\neq \emptyset, \\ D\mathbf{v}|_S(\mathbf{y}) \in C(S^{(n)} \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \in C(S^{(n)} \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})) \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Pourtant du fait de la discontinuité du champ de la normale $\mathbf{n}(\mathbf{y})$, il nous est impossible d'écrire la continuité de la dérivée surfacique et de la conormale. Ainsi

$$D\mathbf{v}|_S(\mathbf{y}) \notin C(S \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \notin C(S \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})) \quad (\text{IV.15})$$

$$\text{mais} \quad (\nabla \mathbf{v})|_S(\mathbf{y}) \in C(S \cap \mathcal{O}(\mathbf{z})) \quad (\text{IV.16})$$

L'idée est alors de reformuler les gradients des différents potentiels élastiques surfaciques, $\mathcal{V}_1[[\boldsymbol{\tau}]](\mathbf{x})$ et $\mathcal{V}_2[[\mathbf{u}]](\mathbf{x})$ en fonction du gradient du déplacement reconstitué de $[[\boldsymbol{\tau}]](\mathbf{y})$ et $[[\mathbf{u}]](\mathbf{y})$, noté $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ et d'essayer d'exprimer des conditions de régularité portant cette fois-ci sur $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ pour obtenir le prolongement par continuité de (IV.11) en des points singuliers de S .

Remarque IV.3 Un point très intéressant qui va dans le sens de cette intuition concerne les termes libres de la représentation de ces opérateurs intégraux pour un point régulier. Rappelons brièvement que pour \mathbf{z} ayant un voisinage dans S de Liapunov, on obtient pour $m \in [1, 2]$, les limites

$$\begin{aligned} \gamma_0^m \mathcal{V}_1[[\boldsymbol{\tau}]]_{k,l}(\mathbf{z}) &= \left(\kappa^{(m)} - \frac{1}{2} \right) \Phi_{kli}(\mathbf{z}) [[\boldsymbol{\tau}]]_i(\mathbf{z}) - \text{pf} \int_S U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\boldsymbol{\tau}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ \gamma_0^m \mathcal{V}_2[[\mathbf{u}]]_{k,l}(\mathbf{z}) &= \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)} \right) \Psi_{klj}(\mathbf{z}) D_j [[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) + \text{pf} \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_{jl} [[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

On constate que la différence des deux termes libres n'est autre que le gradient du déplacement reconstitué $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ affecté au signe près de l'angle solide sous lequel \mathbf{z} voit S . \square

On se propose de reprendre la formulation (IV.11) et d'y intégrer la quantité $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$. Il vient alors le résultat suivant

Resultat IV.1

Soit $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ le gradient du déplacement reconstitué du couple ($[[\mathbf{u}]](\mathbf{y}), [[\boldsymbol{\tau}]](\mathbf{y})$). Alors le gradient de tout champ de déplacement vérifiant les équations de Lamé-Navier et donné par la relation (IV.11), admet l'expression ci-dessous pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$.

$$u_{k,l}(\mathbf{x}) = \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S D_{lj} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.17})$$

où $[[\boldsymbol{\sigma}]](\mathbf{y})$ désigne le saut de *contrainte reconstituée* sur S donné par

$$[[\boldsymbol{\sigma}]](\mathbf{y}) = \mathbf{C} : [[[\mathbf{h}]](\mathbf{y}) - [[\boldsymbol{\varepsilon}^0]](\mathbf{y})] \quad (\text{IV.18})$$

Preuve

Soit un champ $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ donné pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ par la relation (IV.11) et introduisons le gradient du déplacement reconstitué $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ du couple ($[[\mathbf{u}]](\mathbf{y}), [[\boldsymbol{\tau}]](\mathbf{y})$). Rappelons que nous avons la relation (IV.11)

$$u_{k,l}(\mathbf{x}) = - \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{lj} [[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\boldsymbol{\tau}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ + \int_{\mathbb{R}^3} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\mathbb{R}^3} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.11})$$

Nous allons alors reformuler les différentes intégrandes et on montre simplement que

$$D_{lj} [[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) \equiv n_l(\mathbf{y}) D_j [[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) - n_j(\mathbf{y}) D_l [[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) = n_l(\mathbf{y}) [[\mathbf{h}]]_{ij}(\mathbf{y}) - n_j(\mathbf{y}) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) \quad (\text{IV.19})$$

Cette propriété résulte directement de la définition même de $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$. L'intégrale surfacique de noyau $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{r})$ se réécrit alors

$$- \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{lj} [[\mathbf{u}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ - \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) [[\mathbf{h}]]_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.20})$$

Par construction de $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$, nous avons également $[[\boldsymbol{\tau}]]_i(\mathbf{y}) = C_{ijab} [[\mathbf{h}]]_{ab}(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y})$, ce qui nous permet de reformuler la quantité de noyau $\boldsymbol{\nabla} \mathbf{U}(\mathbf{r})$ de la manière ci-dessous

$$\int_S U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\boldsymbol{\tau}]]_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_S C_{ijab} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) [[\mathbf{h}]]_{ab}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.21})$$

Notons qu'à ce stade de l'étude, nous avons totalement éliminé les densités surfaciques ($[[\mathbf{u}]](\mathbf{y})$ et $[[\boldsymbol{\tau}]](\mathbf{y})$) de la formulation de (IV.11) et seuls apparaissent encore $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{y})$.

Remarquons néanmoins que l'intégrale de volume portant sur les déformations initiales, fait intervenir un tenseur d'ordre cinq qui est numériquement très lourd à évaluer. Il est alors préférable de modifier quelque peu cette expression. L'idée est de se ramener à une intégrale de noyau $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{r})$, que l'on voit apparaître si on arrive à permuter les indices l et b .

Les déformations initiales étant à support compact, on introduit comme dans le paragraphe III.3 la partie bornée Ω_2^0 de Ω_2 contenant les déformations plastiques non-nulles. Il vient alors après application du théorème d'Ostrogradsky

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \int_S C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_1} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})|_{\Omega_1}] dS_{\mathbf{y}} \\ &- \int_{\Omega_1} C_{ijab} U_{a,b,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_2^0} C_{ijab} U_{a,b,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})] dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\partial\Omega_2^0} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) [\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{y})|_{\Omega_2^0} - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x})|_{\Omega_2^0}] dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

On constate que les termes volumiques font intervenir une dérivation double selon b et l et on réapplique le théorème d'Ostrogradsky par rapport à l'indice l . On aboutit ainsi à la formulation ci-dessous, faisant clairement apparaître le noyau $\Sigma(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} C_{ijab} U_{a,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,b}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_S C_{ijab} D_{lb} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\varepsilon^0]]_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Il nous suffit alors de regrouper les différents termes obtenus. En introduisant la décomposition $\Sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{C} : \nabla \mathbf{U}(\mathbf{r})$ dans l'intégrale surfacique de noyau $\Sigma(\mathbf{r})$, il vient l'expression suivante,

$$\begin{aligned} u_{k,l}(\mathbf{x}) &= \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &- \int_S C_{ijab} U_{i,j}^k n_l(\mathbf{y}) [[\mathbf{h}]]_{ab}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S C_{ijab} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) [[\mathbf{h}]]_{ab}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_S C_{ijab} D_{lj} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [[\varepsilon^0]]_{ab}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Remarquons que tous les termes de noyau $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ se réarrangent de manière très intéressante et en introduisant le saut de *contrainte reconstituée* sur S , on aboutit finalement à l'expression (IV.17), ce qui achève la démonstration. ■

On constate que le noyau du potentiel volumique considéré se réduit à un tenseur d'ordre trois, ce qui justifie la démarche retenue. Il est également important de noter que la relation (IV.17) fait intervenir simultanément le saut du gradient du déplacement et de la contrainte reconstitués sur S , ce qui restaure la dualité de la formulation. On ne privilégie donc pas $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ au profit de $[[\boldsymbol{\sigma}]](\mathbf{y})$ comme cela est le cas si nous ne reformulons pas le potentiel volumique de manière à faire apparaître le noyau $\Sigma(\mathbf{r})$.

Le principal intérêt de l'expression (IV.17) est qu'elle fait intervenir des opérateurs intégraux de noyau $\mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$, $\mathbf{R}\mathbf{U}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ et $\Sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, qui peuvent à présent être prolongés par continuité en *tout point* de S , régulier ou non. Rappelons à cet effet, que ces mêmes noyaux sont présent dans la représentation intégrale du champ de déplacement solution des équations de Lamé-Navier. On restaure du coup une certaine dualité entre les représentations intégrales de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$, aspect qui est totalement perdu dans le chapitre III. De ce fait, il n'est pas plus difficile d'évaluer $\gamma_0^m \nabla \mathbf{u}(\mathbf{z})$ que $\gamma_0^m \mathbf{u}(\mathbf{z})$, comme nous allons le montrer.

REPRÉSENTATION INTÉGRALE POUR UN POINT SURFACIQUE

Resultat IV.2

Si les densités ($[[\mathbf{u}]](\mathbf{y}), [[\mathbf{t}]](\mathbf{y}), \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{y})$) sont telles que $\boldsymbol{\varepsilon}_{|\Omega_m}^0(\mathbf{y}) \in Di(\Omega_m)$ pour $m \in [1, 2]$ et $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y}) \in Di(S)$, où $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ désigne le saut de gradient du déplacement reconstitué donné par la définition (IV.1), alors le gradient de tout champ de déplacement vérifiant les équations de Lamé-Navier, est prolongeable par continuité en tout point $\mathbf{z} \in S$ et l'expression de sa trace de part et d'autre de S , s'écrit pour tout réel arbitraire $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \gamma_0^m u_{k,l}(\mathbf{z}) &= \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \left(C_{ki}^\varepsilon(\mathbf{z}) - \frac{\omega^{(m)}(\mathbf{z}, \varepsilon)}{4\pi} \delta_{ki} \right) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{z}) + \\ &\int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \left([[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) - [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{z}) \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_{lj} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &- \mathcal{H}_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{z}) [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{z}) - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_{lj} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \left([[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{y}) - [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{z}) \right) dS_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

$$\text{avec la définition} \quad \mathcal{H}_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{z}) = \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) e_{ljq} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.26})$$

Preuve

Soit \mathbf{z} un point de S . La limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ des opérateurs intégraux volumiques ne posent aucun problème vu que les noyaux sont intégrables et les intégrales sont continues à la traversée de S en vertu du résultat (III.9). La limite du potentiel de double couche pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ a été évaluée dans le paragraphe III.2.2 et fait apparaître un terme libre.

Intéressons-nous à l'intégrale de noyau $\mathbf{R}\mathbf{U}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Après avoir introduit un voisinage d'exclusion $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et en appliquant la technique classique de régularisation (III.8), nous sommes alors amené à évaluer la limite pour $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$ de l'intégrale de $\mathbf{R}\mathbf{U}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ sur le voisinage $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Après utilisation de la formule de Stokes, il vient alors en tenant compte de la définition (IV.26) de $\mathcal{H}_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{z})$:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} D_{lj} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{ljq} \ell_q(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} = \mathcal{H}_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{z}) \quad (\text{IV.27})$$

ce qui mène finalement à l'expression (IV.25) et achève la démonstration. ■

Comme lors de l'étude des potentiels aux points réguliers, l'expression (IV.25) dépend d'un paramètre arbitraire ε qu'il est possible d'éliminer au moyen de deux passages à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow \infty$, correspondant respectivement aux processus de régularisation direct et indirect.

Régularisation directe

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, toutes les intégrales de contour restent bornées. Le potentiel de double couche existe en valeur principale et admet donc une limite finie pour ε devenant petit.

Il en résulte immédiatement que l'opérateur intégral de noyau $\mathbf{R}U(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ peut également être défini au sens de la valeur principale et on a la relation,

$$\begin{aligned} \gamma_0^m u_{k,l}(\mathbf{z}) = & \text{vp} \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \left(\mathcal{C}_{ki}^0(\mathbf{z}) - \frac{\omega^{(m)}(\mathbf{z}, 0)}{4\pi} \delta_{ki} \right) [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{z}) \\ & - \text{vp} \int_S D_{lj} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \mathcal{G}_{ijkl}^0(\mathbf{z}) [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{z}) \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Notons que pour un point régulier les termes libres $\mathcal{C}_{ki}^0(\mathbf{z})$ et $\mathcal{G}_{ijkl}^0(\mathbf{z})$ s'annulent et il reste la quantité relative à l'angle solide qui vaut alors un demi au signe près. La même valeur avait été obtenue dans le chapitre III.

Régularisation indirecte

Lorsque ε devient très grand, les intégrales de support $S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ et $S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ disparaissent et il vient la formulation

$$\begin{aligned} \gamma_0^m u_{k,l}(\mathbf{z}) = & -\kappa^{(m)} [[\mathbf{h}]]_{kl}(\mathbf{z}) + \int_S T_i^k(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \left([[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) - [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{z}) \right) dS_{\mathbf{y}} \\ & - \int_S D_{lj} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \left([[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{y}) - [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{z}) \right) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Remarque IV.4 Dans le cadre de ce mémoire, i.e. S est une surface fermée de classe $N^{0,1}$, on peut procéder à une intégration par partie sur les intégrales surfaciques et on obtient l'expression ci-dessous.

$$\begin{aligned} \gamma_0^m u_{k,l}(\mathbf{z}) = & -\left(\kappa^{(m)} + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) dS_{\mathbf{y}} \right) [[\mathbf{h}]]_{kl}(\mathbf{z}) + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) [[\mathbf{h}]]_{kl}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & - \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) R_q [[\mathbf{h}]]_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) D_{lj} [[\boldsymbol{\sigma}]]_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Ceci se justifie car $[[\boldsymbol{\sigma}]](\mathbf{y})$ et $[[\mathbf{h}]](\mathbf{y})$ étant de classe $Di(S)$, leur rotationnel surfacique au sens des distributions, peut être identifié à une fonction intégrable sur S . Cette opération n'est plus justifiée si le milieu comporte une fissure. \square

Remarque IV.5 Notons que la relation (IV.30) est *entièrement régularisée* c'est-à-dire qu'aucune intégrale n'y apparaît, ce qui va grandement faciliter l'implémentation numérique de cette formulation. \square

Avant de pousser plus loin l'exposé, effectuons un rapide bilan des résultats obtenus jusqu'ici. Rappelons que par souci de clarté, nous avons simultanément traité le problème intérieur et le problème extérieur et en assimilant S à S_1 la surface du domaine borné Ω_1 .

IV.1.4 Equations du problème pour un domaine polyédral

Revenons au problème initial posé sur un domaine Ω de frontière S pouvant être *borné ou non*. Dans le cadre d'une **méthode directe**, il convient d'annuler les grandeurs du problème complémentaire et en prenant soin de choisir la bonne orientation pour S , il est possible de présenter les résultats obtenus de la manière suivante,

- **Grandeurs reconstituées sur S**

$$\tilde{h}_{ij}(\mathbf{y}) = \Phi_{ijk}(\mathbf{y}) [\tilde{t}_k(\mathbf{y}) + C_{klab} \varepsilon_{ab}^p(\mathbf{y}) n_l(\mathbf{y})] + \Psi_{ijkl}(\mathbf{y}) D_l \tilde{u}_k(\mathbf{y}) \quad (\text{IV.31})$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) = C_{ijkl} (\tilde{h}_{kl}(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y})) \quad (\text{IV.32})$$

- **Représentation intérieure à Ω du champ de déplacement**

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{x}) = & - \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

- **Représentation intérieure à Ω du champ gradient de déplacement**

$$\begin{aligned} u_{k,l}(\mathbf{x}) = & \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) D_{jl} \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{h}_{kl}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q \tilde{h}_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

- **Représentation intérieure à Ω des champ de déformation et de contrainte**

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = I_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} [u_{k,l}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] \quad (\text{IV.35})$$

- **Représentation de frontière du champ de déplacement**

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{z}) = & \left(\kappa + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) dS_{\mathbf{y}} \right) \tilde{u}_k(\mathbf{z}) - \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{u}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_S U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tilde{t}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) R_q \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

• **Représentation de frontière du champ gradient de déplacement**

$$\begin{aligned}
u_{k,l}(z) = & \left(\kappa + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - z) dS_{\mathbf{y}} \right) \tilde{h}_{kl}(z) - \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - z) \tilde{h}_{kl}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\
& + \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - z) R_q \tilde{h}_{il}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_i^k(\mathbf{y} - z) D_{jl} \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\
& + \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - z) \varepsilon_{ij,l}^0(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \int_{\mathbb{R}^3} U_{i,l}^k(\mathbf{y} - z) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{IV.37})
\end{aligned}$$

• **Représentation de frontière des champ de déformation et de contrainte**

$$\varepsilon_{ij}(z) = I_{ijkl} u_{k,l}(z) \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}(z) = C_{ijkl} [u_{k,l}(z) - \varepsilon_{kl}^p(z)] \quad (\text{IV.38})$$

où I représente le *symétriseur* introduit dans la section I.2.3 et où κ désigne un réel valant 1 s'il s'agit d'un problème défini en milieu borné et 0 sinon.

A ce stade de l'étude, nous disposons de tous les éléments pour mettre en oeuvre une méthode de collocation simple et originale. Ce point constitue l'objet de la prochaine section.

IV.2 Mise en oeuvre numérique d'un algorithme par collocation

Dans la section précédente, l'introduction de la densité *surfactive* auxiliaire $\tilde{h}_{n+1}(\mathbf{y})$ définie à partir de $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})$, $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$ est déterminante dans l'obtention d'une représentation intégrale du gradient de la représentation intégrale du champ de déplacement $\nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{y})$ en tout point du domaine $\bar{\Omega}$.

Nous allons montrer que $\tilde{h}_{n+1}(\mathbf{y})$ joue un rôle capital dans la mise en oeuvre d'une méthode de résolution du problème d'évolution élastoplastique basée sur une approche par *collocation*. L'algorithme qui en résulte permet alors d'atteindre les objectifs suivants :

- ◇ Développement d'un schéma de résolution numérique par collocation, pour lequel les points de collocation et les points définissant le maillage sont confondus, ce qui évite l'apparition d'intégrales quasi-singulières,
- ◇ Evaluation du champ de contrainte ou de déformation en tout point du maillage volumique même en un point irrégulier de la frontière permettant le calcul de déformations plastiques sur S ,
- ◇ Possibilité d'écrire une équation intégrale en vecteur-contrainte (TBIE) en tout point du maillage de S même irrégulier. Dans ce dernier cas, on choisit la normale attachée en ce point à une des portions régulières de surface adjacentes à la singularité géométrique.

L'idée consiste à considérer $\tilde{h}_{n+1}(\mathbf{y})$ comme une inconnue du problème et s'apparente au procédé très intéressant proposé dans [Polch et al.87], permettant l'écriture de la TBIE en un noeud du maillage d'une fissure et reposant sur l'introduction de l'inconnue auxiliaire $R\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})$.

IV.2.1 Discrétisation des représentations intégrales

Dans le but de résoudre numériquement le système d'équations relatif au problème d'évolution élastoplastique, nous considérons une méthode de type *élément fini*. Pour ce faire, on introduit

une discrétisation de la frontière S caractérisée par E_S éléments finis de frontière et N_S points surfaciques (\mathbf{y}_i) pour $i \in [1, N_S]$ et un maillage volumique de Ω_p composé de E_Ω éléments finis de domaine associés à une famille de N_Ω points volumiques (\mathbf{x}_i) avec $i \in [1, N_\Omega]$.

On construit alors sur chaque élément fini de frontière une approximation des quantités $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})$, $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y})$ et $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y})$ et on interpole $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$ sur chaque élément fini de domaine. On peut alors formellement écrire.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}) &= N_u(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}, & \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y}) &= N_t(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, \\ \tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y}) &= N_h(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{n+1} & \text{et} & \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x}) = N_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

où les $N_{(\bullet)}(\mathbf{x})$ désignent des fonctions d'interpolation classiquement utilisées en éléments finis de domaine [Batoz et al.90] ou en éléments finis de frontière [Bonnet95a].

NATURE DES INTERPOLATIONS CHOISIES

L'introduction des quantités discrétisées doit garantir un champ de déplacement, donné par la représentation intégrale de $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ et induit par les différentes interpolations, qui soit physiquement acceptable. Rappelons que suite aux résultats obtenus dans la section IV.1, il est possible d'écrire pour tout point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ les représentations intégrales $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ et $\nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ sous la forme suivante

$$\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{U}[\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p](\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{GU}[\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p](\mathbf{x}) \quad (\text{IV.40})$$

Nous devons imposer à $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ d'être continu dans $\bar{\Omega}$, ce qui nous force à choisir $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})$ continue au sens de Dini sur S . Nous envisageons de ce fait une interpolation *continue* classique qui permet d'avoir $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}) \in C^{0,\beta}(S)$.

La condition de régularité imposée au vecteur-contraainte pour obtenir un champ de déplacement $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{y})$ est beaucoup moins sévère. Le comportement de $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y})$ est étroitement lié au vecteur normal à S et est généralement discontinu au passage des singularités géométriques de type arêtes ou coins. Nous pouvons physiquement choisir une interpolation de $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y})$ non-continue et définie indépendamment sur chaque élément fini de frontière. Cette technique augmente fortement le nombre d'inconnues du problème et nous préférons considérer une approximation *partiellement* continue [Bonnet86], ne présentant de discontinuités qu'au voisinage des points irréguliers de S . Notons néanmoins que nous n'introduisons pas de quantités nodales définies à l'intérieur de l'élément fini de frontière. Les grandeurs nodales en vecteur-contraainte sont directement rattachées aux points définissant l'interpolation géométrique.

L'introduction de $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y})$ a permis d'obtenir une représentation intégrale de $\nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ en tout point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ si on assure une continuité au sens de Dini des densités $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$. Comme pour le champ de déplacement surfacique, nous considérons alors une interpolation continue pour $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$.

FORME MATRICIEL DES REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DISCRÉTISÉE

L'introduction des discrétisations des inconnues, induit en tout point $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ des champs $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ et $\nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ donnés par les expressions,

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{n+1} + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{IV.41})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{n+1} + \mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{IV.42})$$

En s'inspirant du procédé présenté dans [Polch et al.87], il est possible d'exprimer le vecteur des inconnues nodales $\tilde{\mathbf{H}}_{n+1}$ en fonction des vecteurs $\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}$, $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et \mathbf{E}_{n+1}^p . Dans ce but, rappelons que la densité $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y})$ est définie par la relation (IV.31) qui ne peut être satisfaite si on introduit séparément des interpolations pour $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y})$, $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})$, $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$. En cherchant à satisfaire *au mieux* la relation (IV.31) par une méthode au sens des moindres carrés, il en résulte une relation du type

$$\tilde{\mathbf{H}}_{n+1} = \mathbf{L}_u \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{L}_t \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{n+1} + \mathbf{L}_\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{n+1}^p \quad (\text{IV.43})$$

Il ne reste à présent qu'à tenir compte des conditions aux limites données du problème d'évolution élastoplastique et à éliminer le vecteur $\tilde{\mathbf{H}}_{n+1}$, ce qui permet de réexprimer les expressions (IV.41) et (IV.42) sous la forme ci-dessous,

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}_u(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} + \mathbf{Q}_u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{F}_u(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.44})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}_{\nabla u}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} + \mathbf{Q}_{\nabla u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{F}_{\nabla u}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.45})$$

où $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}$ désigne le vecteur des densités surfaciques nodales inconnues et où les vecteurs $\mathbf{F}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{F}_{\nabla u}(\mathbf{x})$ contiennent les conditions aux limites données du problème.

Il est essentiel de noter que les relations (IV.44) et (IV.45) ont une structure identique et sont définies pour tout point de $\bar{\Omega}$. Il suffit de reprendre l'algorithme général de résolution du problème d'évolution élastoplastique décrit dans la section II.3, pour obtenir une solution numérique.

IV.2.2 Equations intégrales du problème discrétisé

La démarche utilisée pour obtenir les équations intégrales consiste à identifier la trace sur S et le vecteur-contrainte obtenus à partir des représentations intégrales de $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ et $\nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ avec les densités surfaciques, ce qui nous permet d'obtenir une relation directe que doivent vérifier les densités surfaciques inconnues. Dans ce but, nous envisageons une méthode de *collocation* qui consiste à vérifier ces relations en un nombre suffisant de points de S . Une synthèse claire de la technique d'obtention des équations intégrales pour des conditions aux limites mixtes, reposant sur l'utilisation de la DBIE peut être trouvée dans [Bonnet86].

Remarquons que l'obtention des relations (IV.44) et (IV.45) permet d'écrire de manière très simple la DBIE ou la TBIE en *tout point* de la frontière S . Notons également que le système d'équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce est particulièrement intéressant puisqu'il permet d'obtenir *directement* un système matriciel carré, vu que l'on écrit en chaque point ($\mathbf{y}^{(i)}$) du maillage de S l'équation intégrale correspondant à la condition de frontière inconnue.

L'écriture des équations intégrales en un nombre de points suffisants de la frontière permet finalement en tenant compte des expressions (IV.41) et (IV.42) d'obtenir la relation matriciel ci-dessous.

$$\mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{IV.46})$$

La résolution de ce système pouvant être carré ou surabondant [Bonnet86] conduit à l'expression de vecteur des densités nodales inconnues pouvant se mettre sous la forme suivante,

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{IV.47})$$

Le vecteur $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas}$ désigne la réponse du système si celui-ci est supposé purement élastique et la notation \mathbf{K}^{-1} est à définir plus précisément dans le cas d'un système matriciel surabondant [Ciarlet82] et [Bonnet86].

IV.2.3 Résolution du problème d'évolution élastoplastique

Il nous reste à prendre en compte l'évolution élastoplastique du système mécanique. Deux formulations duales peuvent être proposées, reposant respectivement sur une approche en contrainte et en déformation. Cette dernière est la moins rencontrée dans la littérature mais présente l'avantage de pouvoir incorporer l'algorithme de Retour Radial [Bonnet et al.96] même pour des problèmes de plasticité parfaite. Nous n'exposerons dans ce mémoire que l'approche en déformation sachant que la formulation en contrainte est obtenue de manière strictement identique.

la résolution des équations intégrales a nécessité l'introduction d'un maillage volumique de Ω_p définis à l'aide des points $(\mathbf{x}^{(i)})$ pour interpoler le champ de déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$. Notons que la connaissance de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$ détermine entièrement l'état élastoplastique du système grâce à la relation (IV.45) permettant d'évaluer en tout point le champ de déformation ou de contrainte et d'obtenir le multiplicateur plastique $\lambda_{n+1}(\mathbf{y})$ à l'aide des algorithmes d'intégration locale.

Nous allons donc tout naturellement introduire une approximation des quantités restantes du même type que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y})$ et définie aux points $(\mathbf{x}^{(i)})$ par les grandeurs nodales correspondantes. Nous avons ainsi,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_{n+1} \quad , \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_{n+1} \quad , \\ p_{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}_{n+1} \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1}(\mathbf{x}) = \max(\mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}), 0) \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

En restant dans l'optique d'une approche par collocation, l'introduction d'une interpolation du champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{y})$ permet alors d'exprimer le vecteur nodal des déformations \mathbf{E}_{n+1} en s'aidant de la relation (IV.42) aux points $(\mathbf{x}^{(i)})$. Il en résulte que,

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{A}' \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} + \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{F}'_{n+1} \quad (\text{IV.49})$$

En tenant compte de l'expression du vecteur $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}$ donné par la relation (IV.47), il vient finalement,

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_{n+1}^{elas} - \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{IV.50})$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{E}_{n+1}^{elas} = \mathbf{F}'_{n+1} + \mathbf{A}' \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Xi} = -\mathbf{Q}' - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \quad (\text{IV.51})$$

A ce stade de l'étude il ne nous reste qu'à prendre en compte les lois d'évolution du système discrétisées en temps et à forcer ces relations à être vérifiées aux points $(\mathbf{x}^{(i)})$. Nous obtenons

ainsi en introduisant le vecteur $\Psi^{(i)} \equiv \Lambda_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)}$,

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \Psi(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad (\text{IV.52})$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + \frac{2H}{3} \Lambda_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)} \quad (\text{IV.53})$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_n^{(i)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda_{n+1}^{(i)} \quad (\text{IV.54})$$

$$\Lambda_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{2\theta(G + \frac{H+h}{3})} \langle f(\mathbf{C} : (\mathbf{E}_{n+\theta}^{(i)} - \mathbf{E}_n^{p(i)}) - \mathbf{B}_n^{(i)}, \mathbf{P}_n^{(i)}) \rangle \quad (\text{IV.55})$$

où la notation $(\bullet)^{(i)}$ désigne la valeur nodale du champ considéré et $\tilde{\mathbf{X}}^{(i)}$ l'état élastoplastique nodal au point $\mathbf{x}^{(i)}$.

Finalement en reportant l'équation (IV.52) dans la représentation intégrale discrétisée du champ de déformation (IV.50), il en résulte l'équation non-linéaire pilotée en déformation [Bonnet et al.96] définie ci-dessous

$$\mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}) \equiv \mathbf{E}_{n+1} + \Xi_\varepsilon \cdot \partial_{\mathbf{E}} \Psi(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) - \mathbf{E}_{n+1}^{elas} + \Xi_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_n^p = \mathbf{0} \quad (\text{IV.56})$$

Pour résoudre cette équation non-linéaire en \mathbf{E}_{n+1} , on envisage un schéma itératif de type Newton-Raphson prenant la forme suivante,

$$\left(\mathbf{I} + \Xi_\varepsilon \cdot \partial_{\mathbf{E}} \Psi(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \right) \cdot \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{k+1} = -\mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}^k) \quad (\text{IV.57})$$

$$\text{avec } \partial_{\mathbf{E}} \Psi(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \equiv \frac{\partial(\Lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})}{\partial \mathbf{E}_{n+1}}(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \text{diag} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}}(\lambda_{n+1}^{\varepsilon(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)})$$

$$\text{et } \mathbf{E}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{E}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{k+1}$$

Notons que la matrice $\partial_{\mathbf{E}} \Psi(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n)$ est une matrice diagonale par bloc, où chaque bloc représente l'opérateur tangent local au point $(\mathbf{x}^{(i)})$ [Bonnet et al.96].

Dans cette section, nous avons présenté la structure générale d'un algorithme de résolution du problème d'évolution élastoplastique dans le cadre d'une approche par collocation exprimée en terme de déformation. Il convient de souligner qu'une procédure tout à fait identique peut être développée pour une formulation en contrainte. L'originalité de la méthode proposée repose sur l'utilisation du gradient du déplacement reconstitué sur S qui permet de faciliter grandement la mise en œuvre numérique et de donner une réponse simple quant à l'écriture de la GBIR ou TBIE en tout point singulier de la frontière même singulier.

IV.3 Evaluation numérique des intégrales

La discrétisation des équations intégrales du problème et l'évaluation du champ de déformation ou de contrainte basée sur une représentation intégrale engendre le calcul d'intégrales dites *élémentaires* ayant pour support un élément fini donné. L'avantage des formulations obtenues à l'aide d'un processus de régularisation indirecte est de ne faire intervenir que des intégrales élémentaires régulières ou faiblement singulières.

Le traitement des intégrales régulières ne pose pas de problème majeure et est par exemple traité dans [Lachat et al.76] et [Rezayat et al.86]. Des méthodes spécifiques pour l'évaluation d'intégrales quasi-singulières sont données dans [Hayami et al.88] et [Hackbusch et al.94].

Concernant l'évaluation des intégrales faiblement singulières apparaissant lorsque le support de l'intégrale contient le point de collocation, on subdivise l'élément fini en triangles ou pyramides et un changement de variables adéquat permet de se ramener à une intégration régulière réalisée à l'aide d'une règle par points de Gauss. Deux changements de variables sont principalement préconisés dans la littérature [Schwab et al.92b],

- ◇ l'introduction des coordonnées triangulaires de Duffy,
- ◇ l'introduction des coordonnées radiales (polaire ou sphérique).

L'introduction des coordonnées triangulaires de Duffy est très largement utilisée dans l'approche en collocation [Mutsoe84], [Schwab et al.92b], [Huber et al.96] et [Wendland97] et ne sera pas rappelée dans ce mémoire. Signalons que cette technique est de mise en oeuvre très simple et est basée sur la dégénérescence d'un élément quadrangulaire ou parallélépipédique [Mutsoe84], ce qui fait ne intervenir qu'un changement de variable de type *polynomial*.

Dans cette section, nous nous intéresserons tout particulièrement à l'approche utilisant un système de coordonnées radiales que nous couplerons à des transformations angulaires. Cette technique développée pour l'intégration surfacique dans [Hayami et al.88] sera étendue à l'intégration volumique.

Sans perdre le caractère général de cette étude, nous nous limiterons à l'évaluation d'intégrales singulières définies sur des éléments finis quadrangulaires ou parallélépipédiques. De plus nous ne chercherons pas à donner de règles liées à un choix optimal du nombre de points de Gauss, qui constitue un travail de longue haleine.

IV.3.1 Intégration singulière surfacique

Considérons un point source \mathbf{x} situé sur un élément fini de frontière noté S_e . Nous sommes alors amenés à évaluer une intégrale élémentaire singulière pouvant formellement s'écrire,

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_{S_e} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{avec} \quad \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq C \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-1} \quad (\text{IV.58})$$

En utilisant la bijection Φ existant entre l'élément fini réel S_e et l'élément de référence Δ_e [Batoz et al.90], nous introduisons les antécédents $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$ de $\mathbf{y} = \Phi(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\eta})$ et il est alors possible de réexprimer l'intégrale $\mathcal{I}(\mathbf{x})$ sous la forme suivante

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_{\Delta_e} f(\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi})) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad \text{où} \quad \Delta_e = [-1, 1]^2 \quad (\text{IV.59})$$

L'élément de référence Δ_e est alors subdivisé en quatre triangles $\mathcal{T}_e^{(i)}$ de sommet $\boldsymbol{\eta}$. On associe à un chaque triangle $\mathcal{T}_e^{(i)}$ un système de coordonnées locales cartésiennes $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ et une représentation

polaire, définis par,

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^{(i)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \rho(\cos \theta, \sin \theta) \quad (\text{IV.60})$$

$$\text{avec} \quad 0 \leq \rho \leq \bar{\rho}^{(i)}(\theta), \quad \bar{\rho}^{(i)}(\theta) = \frac{\rho_0^{(i)}}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad \theta_1^{(i)} \leq \theta \leq \theta_2^{(i)} \quad (\text{IV.61})$$

$$\text{où} \quad \rho_0^{(i)} = 1 - \tilde{\eta}_1, \quad \tan \theta_1^{(i)} = -\frac{1 + \tilde{\eta}_2}{\rho_0^{(i)}} \quad \text{et} \quad \tan \theta_2^{(i)} = \frac{1 - \tilde{\eta}_2}{\rho_0^{(i)}} \quad (\text{IV.62})$$

où les matrices de passages $\mathbf{P}^{(i)}$ sont données sur chaque triangle $\mathcal{T}_e^{(i)}$ par les relations ci-dessous,

- ◇ Triangle $\mathcal{T}_e^{(1)}$ de base $\xi_2 = -1$: $\tilde{\xi}_1 = -\xi_2$ et $\tilde{\xi}_2 = \xi_1$,
- ◇ Triangle $\mathcal{T}_e^{(2)}$ de base $\xi_1 = 1$: $\tilde{\xi}_1 = \xi_1$ et $\tilde{\xi}_2 = \xi_2$,
- ◇ Triangle $\mathcal{T}_e^{(3)}$ de base $\xi_2 = 1$: $\tilde{\xi}_1 = \xi_2$ et $\tilde{\xi}_2 = -\xi_1$,
- ◇ Triangle $\mathcal{T}_e^{(4)}$ de base $\xi_1 = -1$: $\tilde{\xi}_1 = -\xi_1$ et $\tilde{\xi}_2 = -\xi_2$.

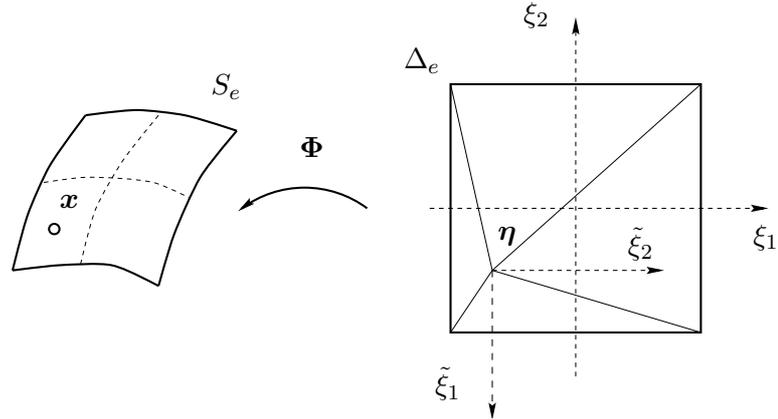


Figure IV.1 : Changement de variable régularisant l'intégrale

En tenant compte de la représentation paramétrique polaire, l'intégrale $\mathcal{I}(\mathbf{x})$ peut alors se réexprimer sous la forme suivante

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=4} \int_{\theta_1^{(i)}}^{\theta_2^{(i)}} \int_0^{\bar{\rho}^{(i)}(\theta)} f[\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta))] J(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta)) \rho \, d\rho \, d\theta \quad (\text{IV.63})$$

Il est essentiel de remarquer que l'intégrande ainsi obtenue est régulière sur chaque triangle $\mathcal{T}_e^{(i)}$, car $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ étant polynomiale [Bonnet86], nous pouvons écrire

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \equiv \|\Phi(\boldsymbol{\xi}) - \Phi(\boldsymbol{\eta})\| = \rho \hat{\Phi}(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta), \boldsymbol{\eta}) \quad \text{avec} \quad \hat{\Phi} \neq 0 \quad (\text{IV.64})$$

$$\|\rho f[\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta))]\| \leq C \hat{\Phi}(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta), \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{IV.65})$$

Un changement de variable supplémentaire permet de ramener les bornes d'intégration de ρ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et il en résulte,

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=4} \int_{\theta_1^{(i)}}^{\theta_2^{(i)}} \frac{\rho_0^{(i)}}{2 \cos \theta} \int_{-1}^1 f[\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi}(u, \theta))] J(\boldsymbol{\xi}(u, \theta)) \hat{\rho}(u, \theta) du d\theta \quad (\text{IV.66})$$

$$\text{avec } \rho \equiv \hat{\rho}(u, \theta) = \frac{\rho^{(i)}}{2 \cos \theta} (1 + u) \quad \text{pour } u \in [-1, 1] \quad (\text{IV.67})$$

Notons que la représentation polaire engendre un terme indésirable en $\frac{1}{\cos \theta}$, qui peut présenter des variations très importantes lorsque $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, ce qui entraîne une augmentation significative du nombre de points de Gauss pour garantir une évaluation précise de l'intégrale. En reprenant une idée développée dans [Hayami et al.88], on introduit alors un changement de variable $\theta = \hat{\theta}(t)$ tel que

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{d'où } t \equiv \hat{t}(\theta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \quad (\text{IV.68})$$

La variable θ parcourant l'intervalle $[\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}]$ et la transformation $\hat{t}(\theta)$ étant croissante et bijective puisque $\frac{dt}{d\theta} > 0$, le paramètre t varie entre les valeurs $\hat{t}(\theta_1^{(i)})$ et $\hat{t}(\theta_2^{(i)})$ et un ultime changement de variable $t \mapsto v$ permet de se ramener à l'intervalle $[-1, 1]$ en posant

$$t = \frac{\hat{t}(\theta_1^{(i)}) + \hat{t}(\theta_2^{(i)})}{2} + \frac{\hat{t}(\theta_2^{(i)}) - \hat{t}(\theta_1^{(i)})}{2} (1 + v) \quad \text{avec } v \in [-1, 1] \quad (\text{IV.69})$$

Ces méthodes ont été étudiées sur les plans théorique et numérique dans [Hayami et al.88], [Kieser et al.92] et [Hackbusch et al.94] et ces travaux montrent clairement que l'introduction de la transformation angulaire (IV.68) améliore nettement la robustesse du schéma d'intégration numérique et le nombre de points de Gauss dans chaque triangle $\mathcal{T}_e^{(i)}$ est quasi-indépendant de la position de $\boldsymbol{\eta}$ dans l'élément de référence Δ_e .

Remarque IV.6 L'impact de cette méthode d'intégration numérique sur l'évaluation d'intégrale singulières dans l'approche par collocation n'est néanmoins pas très significatif. En effet, pour une méthode de collocation utilisant comme points de collocation les *points du maillage*, le terme en $\frac{1}{\cos \theta}$ varie *peu*, ce qui permet d'obtenir de très bons résultats avec l'introduction d'un système de coordonnées triangulaires ou polaires. \square

IV.3.2 Intégration singulière volumique

Nous nous proposons d'étendre les concepts développés pour l'intégration singulière surfacique à l'évaluation d'intégrales singulières volumiques.

Considérons un point source \mathbf{x} situé sur un élément fini volumique V_e . Nous cherchons à évaluer la quantité,

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \int_{V_e} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad \text{avec } \|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq C \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-2} \quad (\text{IV.70})$$

En utilisant la bijection Φ existant entre l'élément fini réel V_e et l'élément de référence Δ_e [Batoz et al.90], nous introduisons comme précédemment les antécédents $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$ de $\mathbf{y} = \Phi(\boldsymbol{\xi})$ et

$\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\eta})$ et il est alors possible de réexprimer l'intégrale $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ sous la forme suivante

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \int_{\Delta_e} g(\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi})) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad \text{où} \quad \Delta_e = [-1, 1]^3 \quad (\text{IV.71})$$

L'élément de référence Δ_e est alors subdivisé en six pyramides $\mathcal{P}_e^{(i)}$ de sommet $\boldsymbol{\eta}$. On associe à un chaque triangle $\mathcal{P}_e^{(i)}$ un système de coordonnées locales cartésiennes $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ et une représentation sphérique, définis par,

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^{(i)} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \rho(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \quad (\text{IV.72})$$

$$\text{avec} \quad 0 \leq \rho \leq \bar{\rho}^{(i)}(\theta, \phi), \quad \bar{\rho}^{(i)}(\theta, \phi) = \frac{\rho_0^{(i)}}{\cos \theta \cos \phi} \quad \text{et} \quad \theta_1^{(i)} \leq \theta \leq \theta_2^{(i)} \quad (\text{IV.73})$$

$$\text{où} \quad \rho_0^{(i)} = 1 - \tilde{\eta}_1, \quad \tan \phi_1^{(i)} = -\frac{1 + \tilde{\eta}_2}{\rho_0^{(i)}}, \quad \tan \phi_2^{(i)} = \frac{1 - \tilde{\eta}_2}{\rho_0^{(i)}} \quad (\text{IV.74})$$

$$\tan \theta_1^{(i)}(\phi) = -\frac{1 + \tilde{\eta}_3}{\rho_0^{(i)}} \cos \phi \quad \text{et} \quad \tan \theta_2^{(i)}(\phi) = \frac{1 - \tilde{\eta}_3}{\rho_0^{(i)}} \cos \phi \quad (\text{IV.75})$$

où les matrices de passages $\mathbf{P}^{(i)}$ sont données sur chaque pyramide $\mathcal{P}_e^{(i)}$ par les relations ci-dessous,

- ◇ **Pyramide $\mathcal{P}_e^{(1)}$ de base $\xi_2 = -1$:** $\tilde{\xi}_1 = -\xi_2, \tilde{\xi}_2 = \xi_1$ et $\tilde{\xi}_3 = \xi_3$
- ◇ **Pyramide $\mathcal{P}_e^{(2)}$ de base $\xi_1 = 1$:** $\tilde{\xi}_1 = \xi_1, \tilde{\xi}_2 = \xi_2$ et $\tilde{\xi}_3 = \xi_3$
- ◇ **Pyramide $\mathcal{P}_e^{(3)}$ de base $\xi_2 = 1$:** $\tilde{\xi}_1 = \xi_2, \tilde{\xi}_2 = -\xi_1$ et $\tilde{\xi}_3 = \xi_3$
- ◇ **Pyramide $\mathcal{P}_e^{(4)}$ de base $\xi_1 = -1$:** $\tilde{\xi}_1 = -\xi_1, \tilde{\xi}_2 = -\xi_2$ et $\tilde{\xi}_3 = \xi_3$
- ◇ **Pyramide $\mathcal{P}_e^{(5)}$ de base $\xi_3 = -1$:** $\tilde{\xi}_1 = -\xi_3, \tilde{\xi}_2 = \xi_2$ et $\tilde{\xi}_3 = \xi_1$
- ◇ **Pyramide $\mathcal{P}_e^{(6)}$ de base $\xi_3 = -1$:** $\tilde{\xi}_1 = \xi_3, \tilde{\xi}_2 = -\xi_2$ et $\tilde{\xi}_3 = \xi_1$

En tenant compte de la représentation paramétrique sphérique, l'intégrale $\mathcal{I}(\mathbf{x})$ peut alors se réexprimer sous la forme suivante

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^6 \int_{\phi_1^{(i)}}^{\phi_2^{(i)}} \int_{\theta_1^{(i)}(\phi)}^{\theta_2^{(i)}(\phi)} \int_0^{\bar{\rho}^{(i)}(\theta, \phi)} g[\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta, \phi))] J(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta, \phi)) \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta d\phi \quad (\text{IV.76})$$

Il est essentiel de remarquer que l'intégrande de $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ ainsi obtenue est régulière sur chaque pyramide $\mathcal{P}_e^{(i)}$, car $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ étant polynomiale, nous pouvons écrire

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \equiv \|\Phi(\boldsymbol{\xi}) - \Phi(\boldsymbol{\eta})\| = \rho^2 \hat{\Phi}(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta, \phi), \boldsymbol{\eta}) \quad \text{avec} \quad \hat{\Phi} \neq 0 \quad (\text{IV.77})$$

$$\|\rho^2 g[\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta, \phi))]\| \leq C \hat{\Phi}(\boldsymbol{\xi}(\rho, \theta, \phi), \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{IV.78})$$

Un changement de variable supplémentaire permet de ramener les bornes d'intégration de ρ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et il en résulte,

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=6} \int_{\phi_1^{(i)}}^{\phi_2^{(i)}} \frac{1}{\cos \phi} \int_{\theta_1^{(i)}(\phi)}^{\theta_2^{(i)}(\phi)} \frac{1}{\cos \theta} \mathcal{J}^{(i)}(\theta, \phi, \mathbf{x}) d\theta d\phi \quad (\text{IV.79})$$

$$\mathcal{J}^{(i)}(\theta, \phi, \mathbf{x}) = \int_{-1}^1 \frac{\rho_0^{(i)}}{2} f[\Phi(\boldsymbol{\eta}), \Phi(\boldsymbol{\xi}(u, \theta, \phi))] J(\boldsymbol{\xi}(u, \theta, \phi)) \hat{\rho}^2(u, \theta, \phi) \cos \theta du \quad (\text{IV.80})$$

$$\text{avec } \rho \equiv \hat{\rho}(u, \theta, \phi) = \frac{\rho_0^{(i)}}{2 \cos \phi \cos \theta} (1 + u) \quad \text{pour } u \in [-1, 1] \quad (\text{IV.81})$$

Comme pour l'intégration surfacique, on introduit les changements de variables $s = \hat{s}(\phi)$ et $t = \hat{t}(\theta)$ permettant d'absorber les termes indésirables $\frac{1}{\cos \theta}$ et $\frac{1}{\cos \phi}$. Il en résulte ainsi,

$$\hat{s}(\phi) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad \text{et} \quad \hat{t}(\theta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \quad (\text{IV.82})$$

$$\text{avec } s \in [s_1^{(i)}, s_2^{(i)}] \quad \text{et} \quad t \in [t_1^{(i)}(\phi), t_2^{(i)}(\phi)] \quad \text{où} \quad s_j^{(i)} = \hat{s}(\phi_j^{(i)}) \quad \text{et} \quad t_j^{(i)}(\phi) = \hat{t}(\theta_j^{(i)}(\phi))$$

On se ramène finalement au domaine d'intégration $[-1, 1]^3$ en considérant les changements de variables affines permettant de transformer les intervalles $[s_1^{(i)}, s_2^{(i)}]$ et $[t_1^{(i)}(\phi), t_2^{(i)}(\phi)]$ en $[-1, 1]$.

Cette section a présenté une technique d'intégration singulière valable pour des intégrales surfaciques et volumiques et basée sur l'introduction d'un système de coordonnées radiales suivi d'une transformation angulaire adéquate. Cette approche est numériquement très robuste [Hayami et al.88] et [Kieser92] et permet à faible coût une bonne évaluation en tout point de S_e ou V_e .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés dans un premier temps au prolongement par continuité en S du gradient de la représentation intégrale du champ de déplacement \mathbf{u}_{n+1} , puis nous avons proposé une méthode de résolution du problème d'évolution élastoplastique basée sur une approche par collocation. Les résultats importants obtenus dans ce chapitre sont les suivants :

• Gradient de la représentation intégrale du champ de déplacement

- ◇ Nous avons montré que les techniques de prolongement par continuité développées dans le chapitre III ne sont plus valables aux points irréguliers de la frontière et les différents potentiels ne peuvent plus être séparément prolongés par continuité.
- ◇ Nous avons montré qu'il est néanmoins possible de trouver une limite, pour un point atteignant la frontière, du gradient de la représentation intégrale du champ de déplacement sous la condition qu'une grandeur tensorielle auxiliaire définie sur S , appelée le *gradient du déplacement reconstitué sur S* , soit de régularité suffisante.

- ◇ La nouvelle représentation intégrale du gradient du déplacement permet une évaluation *cohérente* de $\nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ en tout point du domaine fermé $\bar{\Omega}$, même les points irréguliers de S et diffère des approches classiquement rencontrées, donnant le gradient du déplacement sur la frontière comme solution d'un système linéaire.
- ◇ Les noyaux apparaissant dans la représentation intégrale $\nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ proposée sont les mêmes que ceux intervenant dans la représentation intégrale de $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$. On restaure du coup la dualité entre la DBIE et la TBIE, dualité qui est perdue dans les formulations classiques où les noyaux des opérateurs intégraux de la TBIE sont plus singuliers que ceux de la DBIE.

- **Mise en œuvre d'une méthode de collocation**

- ◇ La méthode présentée utilise une interpolation *continue* des champs de déformation, de contrainte et de déformation plastique, ce qui est une caractéristique tout à fait originale des méthodes basées sur l'utilisation de la représentation intégrale de $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$.
- ◇ La nouvelle expression de la représentation intégrale du gradient de $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$ permet d'évaluer numériquement de *manière cohérente*, le champ de déformation ou de contrainte en tout point, régulier, irrégulier et intérieur du domaine. Cette formulation fait intervenir une approximation continue de $\tilde{\mathbf{h}}_{n+1}(\mathbf{y})$, obtenue par une technique de lissage à partir des approximations $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}), \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{y}))$ et généralisant l'approche proposée dans [Polch et al.87].
- ◇ L'approche par collocation présentée dans ce chapitre permet de choisir les points définissant le maillage, qu'ils soient réguliers ou non, comme points de collocation. Il en résulte une méthode numérique simple et systématique.
- ◇ Le fait d'envisager une formulation régularisée permet de faciliter la mise en œuvre numérique de la méthode puisqu'aucune procédure d'intégration singulière n'a à être développée. Quant à l'évaluation des intégrales faiblement singulières, nous avons présenté une nouvelle technique permettant le calcul des intégrales volumiques et inspirée de [Hayami et al.88].

Seule la formulation en déformation a été implémentée car l'algorithme de Retour Radial piloté en déformation se dégrade bien dans le cas de la plasticité parfaite. Les résultats numériques obtenus seront présentés dans le dernier chapitre.

Chapitre V

Résolution par une méthode de Galerkin

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en œuvre une méthode par collocation pour résoudre le système d'évolution élastoplastique. Même si cette technique est très largement utilisée, elle n'est pas la seule possible dans la mesure où il est possible de construire comme pour les algorithmes par éléments finis de domaine une formulation variationnelle du problème élastoplastique.

Cette dernière approche a fait l'objet de nombreux exposés mathématiques parmi lesquels on peut citer [Nédelec82], [Costabel84], [Costabel et al.86] et [Wendland87b] et traitant du problème élastique. Parallèlement une formulation variationnelle des équations du problème d'évolution élastoplastique a été présentée pour la première fois à la communauté des mécaniciens dans [Maier et al.87] suivi des articles [Polizzotto88a] et [Polizzotto88b].

La formulation définitive découlant directement de considérations énergétiques fait l'objet des travaux [Polizzotto et al.93] et [Polizzotto et al.94]. Le fait de pouvoir rattacher la formulation à un principe énergétique est crucial pour la mise en œuvre numérique car elles permet de donner une signification physique aux matrices d'influence et de les rendre *symétriques*. Pour un exposé plus détaillé des principaux arguments permettant de justifier l'intérêt accordé à la méthode variationnelle, nous renvoyons le lecteur à l'article de synthèse [Bonnet et al.98].

La formulation variationnelle présente plusieurs avantages. Tout d'abord elle engendre automatiquement un système d'équations intégrales s'apparentant à un système de Fredholm de *première espèce* [Costabel84] et la question du choix, apparaissant dans la méthode de collocation, entre l'écriture en un point de la DBIE et celle de la TBIE ne se pose plus. Nous verrons que les conditions de régularité que doivent satisfaire les champs inconnus sont également plus faibles que celles rencontrées dans l'approche en collocation (voir chapitre IV). Enfin on dispose de plus de résultats de stabilité et de convergence du schéma numérique qui sont donnés en éléments finis de domaine dans [Simo et al.91] et qui ont été appliqués dans le cadre des méthodes des équations intégrales dans [Comi et al.92].

Dans ce chapitre, après avoir défini le cadre fonctionnel de l'étude, nous présenterons une démarche inspirée de celle proposée dans [Bonnet95b] pour un problème d'élasticité, permettant d'aboutir à une formulation variationnelle des équations régissant le problème d'évolution élastoplastique. Notre point de départ sera la formulation de type Hu-Washizu obtenu dans le paragraphe I.3.3, pour laquelle nous envisagerons des champs tests en déplacement $\delta \mathbf{u}$ obtenus à

partir de la variation de la représentation intégrale du champ de déplacement (II.48). L'incorporation de $\delta \mathbf{u}$ dans les équations variationnelles associées aux conditions de stationnarité de la fonctionnelle définie par la relation (I.83) conduira finalement à une formulation par équations intégrales du problème d'évolution élastoplastique.

Deux algorithmes de résolution équivalents seront présentés, le premier en *contrainte* et le second en *déformation*, et nous montrerons comment incorporer les algorithmes de Retour Radial dans ces formulations. Nous établirons alors que le schéma de Newton-Raphson associé à chacune de ces formulations est *symétrique*, ce qui constitue un résultat tout à fait original et justifiant pleinement l'intérêt que suscite la méthode de Galerkin.

Nous expliciterons les équations variationnelles du problème sous une forme *entièrement régularisée*, ce qui sera d'un intérêt crucial lors de la mise en œuvre numérique. En reprenant l'approche décrite dans [Costabel88] pour des domaines lipschitziens, nous généraliserons la méthode de régularisation de l'opérateur hypersingulier proposée dans [Nédelec82] et [Bonnet95b] pour les surfaces régulières et appliquée avec succès dans [Nishimura et al.90] et [Li et al.98].

Nous nous intéresserons finalement à l'évaluation numérique des intégrales doubles engendrées par la méthode. Le principal avantage de la formulation entièrement régularisée est de pouvoir réutiliser les algorithmes d'intégration numérique développés pour le schéma par collocation et d'obtenir des procédures de calcul d'intégrales doubles, qui soient simples et systématiques.

Nous discuterons en fin de chapitre les différentes améliorations et perspectives qui sont envisageables dans l'approche variationnelle.

V.1 Formulation variationnelle du problème

Les premiers travaux relatifs aux formulations variationnelles des équations intégrales concernent la théorie du potentiel scalaire [Nédelec76], [Nédelec77] et [Hsiao et al.77]. L'approche de ces auteurs est très simple et consiste à reformuler les équations variationnelles du problème en termes de *traces* sur la frontière du champ de potentiel inconnu. L'ensemble de ces travaux supposent toujours la frontière *régulière*. La résolution numérique, décrite dans [Nédelec76], des équations obtenues pour l'opérateur de Laplace a donné des résultats tout à fait satisfaisants dans [Hamdi82].

Ces formulations théoriques ont été étendues à l'élasticité dans [Nédelec82], [Costabel84] et [Costabel et al.86]. Certains travaux traitent plus spécifiquement de l'équation intégrale en vecteur-contrainte [Nédelec83] et [Stephan86]. Une revue très détaillée de l'ensemble des résultats obtenus peut être trouvée dans [Costabel88]. L'étude de la solution de problème élastique associé à des conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neuman) dans un domaine à frontière polyédrale et résultant d'un système d'équations intégrales, est clairement détaillée dans [Petersdorff89] où des conditions de régularité de la solution sont également exhibées. Ces approches sont très intéressantes car elles permettent de donner un cadre mathématique aux formulations par équations intégrales, relié à des quantités énergétiques.

Parallèlement à ces études mathématiques du problème, une formulation variationnelle plus mécanique utilisant la notion de représentation intégrale du champ de déplacement ont été proposées dans [Maier et al.87] et [Polizzotto88b] dans le cadre du problème élastoplastique. Il est clairement montré dans [Polizzotto et al.93] et [Polizzotto et al.94] que l'écriture des équations sous forme faible, résulte de la stationnarité d'une fonctionnelle donnée explicitement pour un matériau élastoplastique parfait. L'implémentation de cette méthode et la présentation de quelques résultats numériques, sont décrites dans [Maier et al.93]. Le champ de déplacement est pris linéaire sur S et le champ de vecteur-contrainte et les déformations plastiques sont choisis constants par élément respectivement sur S et dans Ω_p .

Quelques travaux en élasticité, basés sur des formulations variationnelles, ont été présentés et nous renvoyons le lecteur à [Bonnet et al.98] pour un exposé exhaustif. Les premiers résultats significatifs pour une implémentation tridimensionnelle du problème élastique ont été obtenus dans les travaux [Bonnet95b], [Andrá et al.97] et [Xiao98] et présentent l'avantage de pouvoir prendre en compte n'importe quel type d'élément fini. Dans le premier article, la régularisation de l'opérateur hypersingulier est achevée de manière *indirecte* [Nédelec82] alors que dans le second, on envisage des expressions faisant intervenir des intégrales singulières et hypersingulières.

Dans le cadre de ce travail, nous nous proposons d'étendre la formulation régularisée proposée dans [Bonnet95b], à un corps comportant des singularités géométriques et ayant un comportement élastoplastique. La formulation que nous établirons permettra de considérer une large gamme d'éléments finis comme nous le verrons dans la section V.2.

V.1.1 Equations intégrales sous forme variationnelle

Le paragraphe II.3 a mis en évidence la structure générale d'un algorithme de résolution du problème d'évolution élastoplastique, à savoir

- ◇ Ecriture des équations intégrales d'un problème élastique fictif où les déformations plastiques ε_{n+1}^p sont supposées connues et traitées comme des déformations initiales,

- ◇ Elimination des conditions aux limites inconnues et obtention d'une relation linéaire entre $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ pour l'approche en déformation et entre $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ pour l'approche en contrainte,
- ◇ Prise en compte des lois d'évolution (loi d'écoulement plastique et lois d'écrouissage).

L'idée fondamentale de l'obtention d'une formulation variationnelle des équations intégrales consiste à reprendre les équations sous forme faible résultant de la stationnarité de (I.83) et de faire certains choix sur les champs variés $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\chi}$.

Comme pour la présentation de la méthode de collocation au chapitre IV, Ω désigne un ouvert borné ou non de \mathbb{R}^3 , de frontière S bornée et on appelle $\Omega_p \subset \Omega$ la zone bornée susceptible de plastifier. On introduit également le réel κ valant 1 s'il s'agit d'un problème intérieur et 0 sinon.

PROBLÈME ÉLASTIQUE AVEC INCLUSIONS INITIALES

Considérons une approche en déplacement comme dans [Bonnet95b]. Soit $(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{t}_{n+1})$, le champ de déplacement dans Ω et le champ de vecteur-contrainte sur S_u , solution du problème défini par les relations (II.49) à t_{n+1} . Nous avons alors d'après les équations (I.89) et (I.90) la relation suivante

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{t}) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(S_u), \quad & \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}^s \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) dV \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f}_{n+1} dV - \int_{S_t} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 dS - \int_{S_u} \boldsymbol{\delta}\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0) dS = 0 \quad (\text{V.1}) \end{aligned}$$

En imposant des conditions plus fortes sur les champs variés, à savoir $\text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\nabla}^s \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}) = 0$ dans Ω et $\boldsymbol{\delta}\mathbf{t} = (\mathbf{C} : \boldsymbol{\nabla}^s \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ sur S_u , l'intégrale de volume portant sur \mathbf{u}_{n+1} se réduit à une intégrale surfacique ne portant que sur la trace de \mathbf{u}_{n+1} sur S et la conormale de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$. Après avoir reformulé la relation (V.1), on obtient alors la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{L}, \Omega) / \text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\nabla}^s \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}) = 0, \\ \int_{S_t} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \cdot [\mathbf{C} : \gamma_0 \boldsymbol{\nabla}^s \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_u} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0 \cdot [\mathbf{C} : \gamma_0 \boldsymbol{\nabla}^s \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f}_{n+1} dV \\ - \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \gamma_0 \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} dS - \int_{S_u} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \gamma_0 \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} dS - \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p dV = 0 \quad (\text{V.2}) \end{aligned}$$

où le couple $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1})$ désigne le déplacement et le vecteur-contrainte inconnus sur la frontière. Rappelons que $\mathbf{v} \in H^1(\mathcal{L}, \Omega)$ signifie que $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$ et que $\mathcal{L}\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$.

Les conditions imposées à $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ peuvent paraître très strictes. Toutefois tout élément du sous-espace vectoriel $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\mathcal{L}, \Omega) / \mathcal{L}\mathbf{v} = 0\}$ est entièrement connu sous la forme d'une représentation intégrale faisant intervenir la trace et la dérivée conormale de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ sur S . Nous montrerons alors que les équations variationnelles (V.2) se ramènent à un problème défini sur la frontière. Il vient ainsi le résultat suivant.

Resultat V.1

Soit \mathbf{u}_{n+1} le champ de déplacement solution du problème d'évolution élastoplastique à t_{n+1} . Alors \mathbf{u}_{n+1} admet la représentation intégrale suivante où $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ est supposé connu,

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{x})_{n+1} = & \int_{S_u} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_t} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{S_t} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i^0(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} - \int_{S_u} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \tilde{u}_i^0(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} \\ & + \int_{\Omega} U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho \mathbf{f}_i(\mathbf{y})_{n+1} dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_p} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{y})_{n+1} dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

avec $((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}^0)_{n+1}, (\tilde{\mathbf{t}}^0, \tilde{\mathbf{t}})_{n+1}) \in H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(S)$, les champs $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t) \times H^{-\frac{1}{2}}(S_u)$ représentant les conditions aux limites inconnues sur S . Ces dernières sont solution du problème variationnel *symétrique* ci-dessous.

$$\forall (\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}) \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t) \times H^{-\frac{1}{2}}(S_u), \quad (\text{V.4})$$

$$\begin{cases} a_{uu}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + a_{ut}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) = \ell_u(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}) + a_{u\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ a_{tu}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + a_{tt}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) = \ell_t(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}) + a_{t\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

$$\text{avec les propriétés} \quad \begin{cases} a_{uu}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = a_{uu}(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}) \\ a_{tt}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}) = a_{tt}(\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}) \\ a_{ut}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}) = a_{tu}(\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}) \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

Les différentes formes bilinéaires intervenant dans le premier membre de la formulation (V.4) sont données par les expressions ci-dessous.

$$a_{uu}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{S_t} \int_{S_t} R_s \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.7})$$

$$\begin{aligned} a_{tu}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}) = & \int_{S_u} \int_{S_t} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & - \int_{S_u} \int_{S_t} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q \tilde{u}_i(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

$$\begin{aligned} a_{ut}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}) = & \int_{S_t} \int_{S_u} \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & - \int_{S_t} \int_{S_u} R_q \delta \tilde{u}_i(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

$$a_{tt}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}) = - \int_{S_u} \int_{S_u} \delta \tilde{t}_i(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.10})$$

Les formes bilinéaires relatives aux déformations plastiques peuvent s'écrire sous forme régularisée de la manière suivante.

$$a_{u\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = - \int_{S_t} \int_{\Omega_p} R_s \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \Upsilon_{ksij}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.11})$$

$$a_{t\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \int_{S_u} \int_{\Omega_p} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.12})$$

Quant aux formes linéaires du second membre contenant les conditions aux limites données à t_{n+1} et les forces de volume appliquées au système, elles admettent les expressions suivantes,

$$\begin{aligned} \ell_u(\delta\tilde{\mathbf{u}}) = & - \int_{S_t} \int_{S_u} R_s \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q \tilde{u}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & + \int_{S_t} \int_{\Omega} R_q \delta\tilde{u}_i(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_k(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} - \int_{S_t} \int_{\Omega} \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho f_k(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & + \int_{S_t} \int_{S_t} R_q \delta\tilde{u}_i(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} - \int_{S_t} \int_{S_t} \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{t}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & + \int_{S_t} \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) \left(\kappa + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \right) \tilde{t}_k^0(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

$$\begin{aligned} \ell_t(\delta\tilde{\mathbf{t}}) = & \int_{S_u} \int_{\Omega} \delta\tilde{t}_k(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} + \int_{S_u} \int_{S_t} \delta\tilde{t}_k(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & + \int_{S_u} \int_{S_u} \delta\tilde{t}_k(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q \tilde{u}_i^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} - \int_{S_t} \int_{S_u} \delta\tilde{t}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{u}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & + \int_{S_t} \delta\tilde{t}_k(\mathbf{x}) \left(\kappa - 1 + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \right) \tilde{u}_k^0(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Les différents noyaux apparaissant dans ces formulations seront explicitées au cours de la démonstration. Notons que toutes les intégrandes mises en jeu sont sommables.

Preuve

Les conditions aux limites inconnues du problème formées du couple $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1})$ sont les solutions de l'équation variationnelle (V.2) écrites pour tout champ $\delta\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{L}, \Omega)$. Cet ensemble est exactement connu et fut l'objet de la section II.2.

Compte tenu de l'expression de la représentation intégrale de \mathbf{u}_{n+1} donnée par la relation (V.3), nous allons choisir un champ varié sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \delta u_k(\mathbf{y}) = & \int_{S_u} \delta\tilde{t}_i(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{x}} - \int_{S_t} T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta\tilde{u}_i(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \\ = & \int_{S_u} \delta\tilde{t}_i(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{x}} + \int_{S_t} K_{iq}^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) R_q \delta\tilde{u}_i(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \\ & - \int_{S_t} H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

Cette relation est obtenue en tenant compte de la décomposition (III.21) du tenseur $\Sigma(\mathbf{r})$ proposée initialement dans [Tanaka et al.94] et du fait que $\delta\tilde{\mathbf{u}}(x) = 0$ sur le contour ∂S_t de la partition de surface S_t , ce qui annule l'intégrale sur le contour ∂S_t issue de l'intégration par partie du terme de noyau $T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$.

CADRE FONCTIONNEL DE L'ÉTUDE

Définissons d'abord le cadre fonctionnel. La question qui se pose à nous est de choisir les espaces fonctionnels adéquats pour le couple $(\delta\tilde{\mathbf{u}}, \delta\tilde{\mathbf{t}})$, pour avoir $\delta\mathbf{u} \in V$. Pour ce faire,

[Costabel88] montre que les potentiels surfaciques pour des densités définies sur la frontière S d'un domaine Ω de classe $C^{0,1}$ agissent de la manière suivante.

$$\forall s \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad \mathcal{V}_1 : H^{-\frac{1}{2}+s}(S) \rightarrow H_{loc}^{1+s}(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_2 : H^{\frac{1}{2}+s}(S) \rightarrow H^{1+s}(\Omega) \quad (\text{V.16})$$

Dans la suite de la démonstration, nous aurons souvent à caractériser la restriction à S_u ou S_t d'une fonction $\mathbf{v} \in H^s(S)$, où $H^s(S)$ est donné dans le paragraphe II.1 par la définition (II.3). Pour une densité \mathbf{v} de support $S \equiv S_t \cup S_u$, nous introduisons la notation $\mathbf{v} \equiv (\mathbf{v}_{|S_t}, \mathbf{v}_{|S_u})$.

En reprenant les définitions des espaces de Sobolev de la section I.1, il vient les propriétés suivantes que l'on peut par exemple trouver dans [Costabel et al.85]

$$\begin{aligned} \forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t), \quad \mathcal{V}_1 : (\delta \tilde{\mathbf{u}}, 0) \in H^{\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \\ \forall \delta \tilde{\mathbf{t}} \in H^{-\frac{1}{2}}(S_u), \quad \mathcal{V}_2 : (0, \delta \tilde{\mathbf{t}}) \in H^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

Compte tenu des relations (V.17), nous prendrons par la suite le couple $(\delta \tilde{\mathbf{u}}, \delta \tilde{\mathbf{t}})$ dans les espaces fonctionnels $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t) \times H^{-\frac{1}{2}}(S_u)$.

Le cadre fonctionnel de notre étude étant défini, nous pouvons réexprimer l'équation variationnelle (V.2) en y reportant la représentation intégrale de $\delta \mathbf{u}$. Il est possible de décomposer l'équation variationnelle (V.2) de la manière ci-dessous où les fonctionnelles $J^{(I)}(\delta \mathbf{u})$, $J^{(II)}(\delta \mathbf{u})$ et $J^{(III)}(\delta \mathbf{u})$ seront traitées séparément.

$$\forall \delta \mathbf{u} \in V, \quad J^{(I)}(\delta \mathbf{u}) - J^{(II)}(\delta \mathbf{u}) - J^{(III)}(\delta \mathbf{u}) - J^{(IV)}(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{V.18})$$

$$\begin{aligned} J^{(I)}(\delta \mathbf{u}) &= \int_{S_t} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \cdot [\mathbf{C} : \gamma_0 \nabla^s \delta \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_u} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0 \cdot [\mathbf{C} : \gamma_0 \nabla^s \delta \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\equiv \int_S (\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^0) \cdot [\mathbf{C} : \gamma_0 \nabla^s \delta \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

$$J^{(II)}(\delta \mathbf{u}) = \int_{S_t} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0 \cdot \gamma_0 \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{S_u} \tilde{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \gamma_0 \delta \mathbf{u} \, dS \equiv \int_S (\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^0, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) \cdot \gamma_0 \delta \mathbf{u} \, dS \quad (\text{V.20})$$

$$J^{(III)}(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f}_{n+1} \, dV \quad (\text{V.21})$$

$$J^{(IV)}(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_p} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^p \, dV = 0 \quad (\text{V.22})$$

TRAITEMENT DE $J^{(I)}(\delta \mathbf{u})$

L'évaluation du terme $J^{(I)}(\delta \mathbf{u})$ est la partie la plus délicate de la démonstration. Il convient en effet de rappeler que l'expression de $\gamma_0 \nabla^s \delta \mathbf{u}$ donne lieu à des formulations mettant en jeu des intégrales hypersingulières [Andrá et al.97], comme nous l'avons montré dans la section III.2.

Un moyen pour contourner cette difficulté consiste à appliquer une technique de régularisation reposant sur une double intégration par parties et initialement introduite dans [Nédelec77]. Cette technique a été étendue à un problème d'élasticité 3D avec conditions aux limites mixtes dans [Bonnet95b]. Cette approche consiste à introduire une surface auxiliaire $\tilde{S}(\eta)$ *extérieure* à Ω et construite à partir de S supposée régulière à l'aide du paramètre $\eta > 0$ de la manière suivante :

$$\forall \mathbf{y} \in S, \quad \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{S}(\eta) \equiv \mathbf{y} + \eta \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (\text{V.23})$$

La représentation intégrale (V.15) n'est plus écrite sur S mais sur $\tilde{S}(\eta)$, ce qui permet d'effectuer des opérations classiques sur les intégrales. Lorsque la formulation obtenue ne fait plus apparaître que des intégrales faiblement singulières, on procède à un passage à la limite consistant à faire tendre *uniformément* la surface $\tilde{S}(\eta)$ vers S correspondant à $\eta \rightarrow 0$ et on obtient une formulation régularisée sous forme variationnelle des équations intégrales.

Cette approche est très naturelle et permet de bien rendre compte du processus de régularisation. Malheureusement elle n'est pas directement transposable à des domaines pouvant présenter des singularités géométriques et qui constituent l'objet de ce travail. Nous allons néanmoins montrer que la formulation obtenue dans [Bonnet95b] reste valable pour des ouverts de classe $C^{0,1}$. Pour ce faire, nous allons considérer la définition de la dérivée conormale au sens des distributions d'une fonction $\mathbf{v} \in H^1(\mathcal{L}, \Omega)$ [Costabel88].

$$\forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S), \quad \int_S \varphi \cdot [\mathbf{C} : \gamma_0 \nabla^s \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_\Omega \nabla \gamma_0^- \varphi : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{v} \, dV - \int_\Omega \gamma_0^- \varphi \cdot \mathcal{L} \mathbf{v} \, dV \quad (\text{V.24})$$

où $\gamma_0^-(\bullet)$ désigne l'opérateur de *relèvement* sur S . La fonction $\gamma_0^- \varphi$ définie dans Ω représente donc un relèvement arbitraire de la fonction φ de support S . On vérifie très aisément que la relation (V.24) est bien indépendante du relèvement $\gamma_0^- \varphi$ choisi.

Ayant choisi $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}^0)_{n+1} \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ et $\delta \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{L}, \Omega)$ vérifiant $\mathcal{V} \delta \mathbf{u} = 0$, introduisons un relèvement arbitraire de $\gamma_0^- \mathbf{u}$ de la densité $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}^0)_{n+1}$. Il en résulte alors

$$J^{(I)}(\delta \mathbf{u}) \equiv \int_\Omega \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \gamma_0^- \mathbf{u} \, dV = J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) + J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}}) \quad (\text{V.25})$$

$$J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) = \int_\Omega \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y}) \int_{S_t} C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_l(\mathbf{x}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} \, dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{V.26})$$

$$J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}}) = - \int_\Omega \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y}) \int_{S_u} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} \, dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{V.27})$$

Evaluation de $J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}})$

Compte tenu du caractère hypersingulier du noyau $\Sigma(\mathbf{r}) = O(r^{-3})$, nous ne pouvons pas permuter les deux intégrations par le biais du théorème de Fubini. L'idée est alors de réduire l'ordre de singularité en effectuant une intégration par parties par rapport à \mathbf{y} . Pour ce faire, nous introduisons la décomposition suivante [Bonnet et al.98]

$$C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{r}) = -e_{jfq} e_{lhs} B_{iqks, fh}(\mathbf{r}) - C_{ijkl} \delta(0) \quad (\text{V.28})$$

Il vient alors la relation

$$\begin{aligned} \int_{S_t} C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} &= -e_{jfq} \int_{S_t} e_{slh} D_h B_{iqks, f}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_l(\mathbf{x}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} \\ &= -e_{jfq} \int_{S_t} R_s B_{iqks, f}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} \quad p.p. \, \mathbf{y} \in \Omega \quad (\text{V.29}) \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que l'on fait apparaître le rotationnel surfacique du noyau $\nabla \mathbf{B}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ par rapport à \mathbf{x} et de rappeler que la formule de Stokes (II.20) est valable pour une surface de

Liapunov par morceaux. Nous allons donc pouvoir intégrer par parties de manière à diminuer l'ordre de singularité de l'opérateur surfacique apparaissant dans (V.29). Ayant $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t)$, on obtient finalement

$$\int_{S_t} C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_l(\mathbf{y}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} = e_{jfq} \int_{S_t} B_{iqks,f}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) R_s \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \quad p.p. \mathbf{y} \in \Omega \quad (\text{V.30})$$

Le noyau $\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r})$ étant intégrable dans \mathbb{R}^3 , il est alors possible d'appliquer le théorème de Fubini et de permuter les signes intégraux dans l'expression de $J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}})$ après avoir tenu compte de la relation (V.30).

$$J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) = - \int_{S_t} R_s \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \gamma_0 \int_{\Omega} B_{iqks,f}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{jfq} \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{x}} dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{V.31})$$

Intéressons-nous tout d'abord au potentiel volumique de la variable \mathbf{x} . Modifions quelque peu son expression en appliquant le théorème d'Ostrogradsy (II.23) par rapport à \mathbf{y} . Nous avons alors l'expression suivante *p.p.* $\mathbf{x} \in \Omega$.

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} B_{iqks,f}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{jfq} \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \int_{\Omega} [B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{qfj} \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y})],_f dV_{\mathbf{y}} \\ - \int_{\Omega} B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{qfj} \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} &= \int_S B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q(\tilde{u}, \tilde{u}^0)_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{V.32})$$

L'intégrale portant sur Ω est bien nulle, vu que la densité représente le rotationnel du gradient de $\gamma_0^- \mathbf{u}$. Quant à la trace sur S de l'intégrale de noyau $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, celle-ci est égale à l'intégrale de la trace de l'intégrande sur S . Le noyau $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est en effet faiblement singulier puisque $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = O(r^{-1})$, ce qui permet de conclure grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. On aboutit alors à la formulation définitive de $J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}})$.

$$J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{S_t} \int_{S_t} R_s \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q(\tilde{u}, \tilde{u}^0)_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.33})$$

Evaluation de $J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}})$

Le terme $J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}})$ fait intervenir le noyau $\Sigma(\mathbf{r})$ qui est intégrable dans \mathbb{R}^3 . En permutant les signes intégraux et en tenant compte de la décomposition (III.21), nous pouvons alors écrire $J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}})$ sous la forme ci-dessous.

$$\begin{aligned} J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}}) &= \int_{S_u} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) \gamma_0 \int_{\Omega} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}}) &\equiv \int_{S_u} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) \gamma_0 [I_{2k}^{(1)}(\mathbf{x}) + I_{2k}^{(2)}(\mathbf{x})] dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

avec les définitions des quantités $I_{2k}^{(1)}(\mathbf{x})$ et $I_{2k}^{(2)}(\mathbf{x})$ suivantes

$$I_{2k}^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} e_{qjr} G_{iq,r}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \gamma_0^- u_{i,j}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad I_{2k}^{(2)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_{,j}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \gamma_0^- u_{k,j}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}$$

Les deux intégrales $I_2^{(1)}(\mathbf{x})$ et $I_2^{(2)}(\mathbf{x})$ sont reformulées en appliquant le théorème d'Ostrogradsky (II.23) et en faisant apparaître la quantité $\text{rot} \nabla \gamma_0^- \mathbf{u}$ qui est bien évidemment nulle. Il vient alors les expressions valables à l'intérieur du domaine *p.p.* $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$\begin{aligned} I_2^{(1)}(\mathbf{x}) &= \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q(\tilde{u}, \tilde{u}^0)_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{rjq} \gamma_0^- u_{i,jq}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &= - \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q(\tilde{u}, \tilde{u}^0)_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

$$\begin{aligned} I_2^{(2)}(\mathbf{x}) &= \int_S G_{,j}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) (\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} G_{,jj}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \gamma_0^- u_k(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) (\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} + \gamma_0^- u_k(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

Toutes les intégrales apparaissant dans la formulation ci-dessus ont un comportement connu au voisinage de la frontière S et il ne nous reste qu'à déterminer les traces sur S_u des différentes quantités. Il vient alors les expressions *p.p.* $\mathbf{x} \in S_u$,

$$\gamma_0 I_2^{(1)}(\mathbf{x}) = - \int_S K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q(\tilde{u}, \tilde{u}^0)_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{V.37})$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 I_2^{(2)}(\mathbf{x}) &= \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) (\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} + (1 - \kappa) \tilde{u}_k^0(\mathbf{x})_{n+1} \\ &\quad - \tilde{u}_k^0(\mathbf{x})_{n+1} \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{V.38})$$

En recombinaison les différents termes obtenus, il en résulte l'expression définitive du terme $J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}})$, se mettant sous la forme,

$$\begin{aligned} J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}}) &= - \int_{S_u} \int_S \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_q(\tilde{u}, \tilde{u}^0)_i(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{S_u} \int_S \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) (\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{S_u} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) \left(1 - \kappa - \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \right) \tilde{u}_k^0(\mathbf{x})_{n+1} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.39})$$

Remarque V.1 Notons que les expressions de $J_1^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{u}})$ et $J_2^{(I)}(\delta \tilde{\mathbf{t}})$ ne font intervenir que des champs surfaciques et les formulations définitives obtenues sont bien indépendantes du relèvement $\gamma_0^- \mathbf{u}$ choisi. \square

TRAITEMENT DE $J^{(II)}(\delta \mathbf{u})$

La détermination de $J^{(II)}(\delta \mathbf{u})$ est beaucoup plus simple et se réduit à l'évaluation de la trace de la représentation intégrale (V.15) sur la frontière S . La trace de $\delta \mathbf{u}$ sur S_u ne pose aucun problème vu que le potentiel de simple couche est continu à la traversée de S . Quant à la trace sur S_t , elle fait apparaître le terme libre résultant de la discontinuité du potentiel de double couche au voisinage de la frontière. Compte tenu des résultats obtenus dans la section IV.1, nous obtenons les formulations régularisées suivantes

- Trace de $\delta \mathbf{u}$ sur S_t valable *p.p.* $\mathbf{y} \in S_t$

$$\begin{aligned} \gamma_0 \delta u_k(\mathbf{y}) &= \int_{S_u} U_i^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{t}_i(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} + \int_{S_t} K_{iq}^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) R_r \delta \tilde{u}_i(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{S_t} H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} + \left(\kappa + \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{x}} \right) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

- Trace de $\delta \mathbf{u}$ sur S_u valable *p.p.* $\mathbf{y} \in S_u$

$$\begin{aligned} \gamma_0 \delta u_k(\mathbf{y}) &= \int_{S_u} U_i^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{t}_i(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} + \int_{S_t} K_{iq}^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) R_r \delta \tilde{u}_i(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{S_t} H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

Ces résultats sont alors incorporés dans l'expression du terme $J^{(II)}(\delta \mathbf{u})$ et il vient une formulation où n'apparaissent que des densités définies sur S , s'exprimant de la manière ci-dessous.

$$\begin{aligned} J^{(II)}(\delta \mathbf{u}) &= \int_{S_u} \int_S \delta \tilde{t}_i(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\tilde{t}^0, \tilde{t})_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{S_t} \int_S R_q \delta \tilde{u}_i(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\tilde{t}^0, \tilde{t})_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{S_t} \int_S \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) (\tilde{t}^0, \tilde{t})_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{S_t} \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \left(\kappa + \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \right) \tilde{t}_k^0(\mathbf{x})_{n+1} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.42})$$

On note que les termes de noyau $H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ et $H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ sont exactement connus et valent $\frac{1}{2}$ au signe près. Rappelons en effet qu'une variété polyédrale est régulière presque partout sauf aux points situés sur les arêtes. Néanmoins pour une question de *cohérence* de l'évaluation des différents termes et contrairement à [Li et al.98], nous ne tiendrons pas compte de ce résultat et nous envisagerons les expressions du résultat (V.1) pour la mise en œuvre numérique.

TRAITEMENT DE $J^{(III)}(\delta \mathbf{u})$

Le terme $J^{(III)}(\delta \mathbf{u})$ prend en compte l'influence des forces volumiques et son expression est immédiate. Tous les noyaux apparaissant dans la représentation intégrale de $\delta \mathbf{u}$ sont intégrables dans \mathbb{R}^3 et après avoir appliqué le théorème de Fubini il en résulte,

$$\begin{aligned} J^{(III)}(\delta \mathbf{u}) &= \int_{S_u} \int_{\Omega} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{S_t} \int_{\Omega} R_q \delta \tilde{u}_i(\mathbf{x}) K_{iq}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} - \int_{S_t} \int_{\Omega} \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho f_i(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.43})$$

TRAITEMENT DE $J^{(IV)}(\boldsymbol{\delta u})$

La quantité $J^{(IV)}(\boldsymbol{\delta u})$ contient les termes de déformations initiales assimilées à $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P$. Par définition de $J^{(IV)}(\boldsymbol{\delta u})$, nous avons la relation ci-dessous

$$J^{(IV)}(\boldsymbol{\delta u}) = - \int_{\Omega_p} \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) \int_{S_t} C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_l(\mathbf{x}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} dV_{\mathbf{y}} \\ + \int_{\Omega_p} \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) \int_{S_u} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} dV_{\mathbf{y}} \quad (\text{V.44})$$

En tenant compte de l'égalité (V.30), nous pouvons reformuler l'intégrale contenant le noyau hypersingulier et ne faire apparaître que des noyaux intégrables dans \mathbb{R}^3 . D'après les résultats de continuité des potentiels volumiques, obtenus dans la section III.3, il est alors permis de permuter les intégrations surfacique et volumique et il vient alors l'expression définitive de $J^{(IV)}(\boldsymbol{\delta u})$,

$$J^{(IV)}(\boldsymbol{\delta u}) = \int_{S_t} \int_{\Omega_p} R_s \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) \Upsilon_{ksij}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ - \int_{S_u} \int_{\Omega_p} \delta \tilde{t}_k(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.45})$$

où nous avons préalablement défini $\Upsilon_{ksij}(\mathbf{r}) = e_{jfq} B_{iqks,f}(\mathbf{r})$. Notons également que l'expression (V.45) ne fait intervenir que des intégrales faiblement singulières.

A ce stade de l'étude, tous les termes de l'équation variationnelle (V.2) ont été évalués et en regroupant les différentes quantités, il vient finalement le système variationnel (V.4) défini sur l'espace des traces $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t) \times H^{-\frac{1}{2}}(S_u)$. ■

Remarque V.2 Les formes bilinéaires faisant intervenir les traces $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1})$ peuvent également être trouvées dans [Bonnet95b] et [Li et al.98]. Quant aux formes relatives aux déformations plastiques, une version singulière est donnée dans [Maier et al.93]. □

Remarquons simplement que les équations relatives à $\tilde{\mathbf{u}}$ et à $\tilde{\mathbf{t}}$ représentent respectivement les équations intégrales en vecteur-contrainte sur S_u et en déplacement sur S_t , écrites sous forme faible. Le résultat (V.1) a l'avantage de ne faire apparaître que des quantités intégrables, ce qui s'avère crucial lors de la mise en œuvre numérique. Le fait d'avoir choisi un champ varié $\boldsymbol{\delta \tilde{u}}$ suffisamment régulier dans l'écriture sous forme faible de la TBIE, nous permet d'imposer moins de régularité sur la densité $\tilde{\mathbf{u}}$. Rappelons simplement que pour la méthode de collocation, cette équation ne peut être directement écrite qu'en un point régulier et il faut de plus vérifier $\tilde{\mathbf{u}} \in Di^1$.

En anticipant sur la section V.3 concernant la mise en œuvre numérique de la méthode, il est possible d'intégrer par parties les formes bilinéaires relatives à la présence de déformations initiales, ce qui permet de réduire l'ordre de la singularité des intégrales, à condition que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P$ soit suffisamment régulière.

Le résultat qui va suivre n'intègre aucune considération relative à la régularité *réelle* de l'état élastoplastique recherché. Il permet juste de réexprimer les formes bilinéaires $a_{u\varepsilon}(\boldsymbol{\delta \tilde{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P)$ et $a_{t\varepsilon}(\boldsymbol{\delta \tilde{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P)$ sous une forme qui sera plus intéressante sur le plan numérique.

Resultat V.2

Pour un champ de déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ suffisamment régulier $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \in H^1(\Omega)$, les formes bilinéaires $a_{u\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ et $a_{t\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ admettent les expressions ci-dessous.

$$\begin{aligned} a_{u\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = & - \int_{S_t} \int_{S_p} R_s \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{qfj} n_f(\mathbf{y}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & + \int_{S_t} \int_{\Omega_p} R_s \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{qfj} \varepsilon_{ij,f}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.46})$$

$$\begin{aligned} a_{t\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = & \int_{S_u} \int_{S_p} \delta\tilde{t}_a(\mathbf{x}) C_{ijkl} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ & - \int_{S_u} \int_{\Omega_p} \delta\tilde{t}_a(\mathbf{x}) C_{ijkl} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij,l}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

Ce dernier résultat pose les équations variationnelles régissant le problème élastique avec déformations initiales $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ où ces dernières sont supposées connues. Il est important de noter que le système (V.4) n'est autre que le système d'équations intégrales correspondant au *système de Fredholm de première espèce* et qui a largement été étudié dans les travaux [Costabel84] et [Costabel et al.86].

V.1.2 Représentation intégrale des contraintes et déformations

Les travaux [Maier et al.87], [Polizzotto88a] et [Polizzotto88b] ont permis de montrer qu'il existe une dualité entre le système d'équations intégrales du problème sous forme variationnelle et l'écriture sous forme faible, dans le domaine Ω_p , du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ dérivant de la représentation intégrale (V.3). Nous allons ainsi montrer que l'on retrouve les formes bilinéaires adjointes à $a_{u\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ et $a_{t\varepsilon}(\boldsymbol{\delta}\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ dans l'expression de $\langle \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \rangle_{\Omega_p}$, où $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^p$ désigne un champ test quelconque.

Compte tenu du cadre fonctionnel fixé par le résultat (I.5), nous avons $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \in L^2(\Omega_p)$, ce qui nous amène naturellement à considérer l'expression sous forme faible de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ définie par la relation ci-dessous et correspondant à l'équation (I.92) résultant de la stationnarité de la fonctionnelle représentée par I.83.

$$\forall \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^p \in L^2(\Omega_p), \quad \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV = \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{C} : [\boldsymbol{\nabla}^s \mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p] dV \quad (\text{V.48})$$

La représentation du champ gradient de déformation sous sa forme régularisée [Bonnet et al.96], rappelée dans le paragraphe III.3, est donnée par la relation ci-dessous valable pour un point intérieur $x \in \Omega_p$.

$$\begin{aligned} u_{a,b}(\mathbf{x})_{n+1} = & \int_S \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) (\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} - \int_S U_{k,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\tilde{t}^0, \tilde{t})_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} \\ & - \int_{\Omega_p} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y})_{n+1} - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})_{n+1}] dV_{\mathbf{y}} - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})_{n+1} \int_{S_p} \Sigma_{kl}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{V.49})$$

En reportant la représentation intégrale (V.49) dans l'expression sous forme faible du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, il vient alors le résultat suivant :

Resultat V.3

Soit \mathbf{u}_{n+1} le champ de déplacement solution du problème d'évolution élastoplastique. Alors le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ correspondant à \mathbf{u}_{n+1} est donné sous forme faible dans Ω_p par la relation ci-dessous,

$$\forall \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \in L^2(\Omega_p), \quad \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV = \ell_\varepsilon(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) + a_{\varepsilon u}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + a_{\varepsilon t}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - a_{\varepsilon \varepsilon}^\sigma(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (\text{V.50})$$

où les formes linéaires et bilinéaires apparaissant dans la relation (V.50) admettent les expressions suivantes.

$$a_{\varepsilon \varepsilon}^\sigma(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{\Omega_p} C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \left(C_{ijkl} + \int_{S_p} C_{ijab} \Sigma_{kl}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \varepsilon^p(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.51})$$

$$a_{\varepsilon u}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_p} \int_{S_t} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \Upsilon_{ksij}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_s \tilde{u}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.52})$$

$$a_{\varepsilon t}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{t}}) = - \int_{\Omega_p} \int_{S_u} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.53})$$

$$\ell_\varepsilon(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \int_{\Omega_p} \int_{S_u} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \Upsilon_{ksij}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_s \tilde{u}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega_p} \int_{S_t} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.54})$$

Preuve

Considérons la forme faible de la représentation intégrale du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ donné par la relation (V.48) et substituons la représentation intégrale (V.49) à $\nabla^s \mathbf{u}_{n+1}$ dans (V.48). Il nous est alors possible d'écrire

$$\int_{\Omega_p} \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_S C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) (\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_S \Sigma_{ij}^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\tilde{t}^0, \tilde{t})_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{\Omega_p} C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \left(C_{ijkl} + \int_{S_p} C_{ijab} \Sigma_{kl}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \varepsilon^p(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.55})$$

En tenant compte de la relation (V.30) établie précédemment, on reformule les termes invoquant

l'opérateur hypersingulier de la manière ci-dessous et on achève la démonstration.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_S C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) (\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ = \int_{\Omega_p} \int_S \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \Upsilon_{ksij}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_s(\tilde{u}, \tilde{u}^0)_k(\mathbf{y})_{n+1} dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

■

Il est intéressant de noter que les formes bilinéaires faisant simultanément intervenir des densités surfacique et volumique, possèdent les propriétés de symétrie ci-dessous qui vont être décisives pour aboutir à une formulation entièrement symétrique.

$$a_{\varepsilon u}(\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}) = a_{u\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}, \varepsilon) \quad \text{et} \quad a_{\varepsilon t}(\varepsilon, \tilde{\mathbf{t}}) = a_{t\varepsilon}(\tilde{\mathbf{t}}, \varepsilon) \quad (\text{V.57})$$

On montre également que la forme bilinéaire $a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\delta\varepsilon, \varepsilon)$ est *autoadjointe*. En effet en remarquant que pour $\delta\varepsilon^p \in L^2(\Omega_p)$, il est toujours possible d'écrire la relation suivante, en notant $C_{ijab} \Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{r}) \equiv S_{ijkl}(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{\Omega_p} S_{ijkl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ = - \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} [\delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) - \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x})] S_{ijkl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ + \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} S_{ijkl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{y}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.58})$$

En évaluant la différence entre $a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\delta\varepsilon, \varepsilon)$ et $a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\varepsilon, \delta\varepsilon)$, il en résulte en tenant compte de la relation précédente que

$$a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\delta\varepsilon, \varepsilon) - a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\varepsilon, \delta\varepsilon) = \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} S_{ijkl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\delta \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{y}) - \delta \varepsilon_{ij}(\mathbf{y}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.59})$$

Il est clair que $S_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijab} C_{klpq} U_{p,qb}^a(\mathbf{r})$ possède la symétrie majeure $S_{ijkl}(\mathbf{r}) = S_{klij}(\mathbf{r})$ et est de plus *paire*, i.e. $\mathbf{S}(-\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r})$. Ces remarques permettent alors d'en conclure que l'intégrale double du second membre de la relation (V.59) est nulle.

En utilisant des considérations énergétiques, il est également possible de montrer que la forme bilinéaire est *semi-définie positive* [Bui et al.70] et [Polizzotto88b]. Malheureusement l'inégalité stricte ne peut être obtenue car il existe des états de déformations initiales vérifiant automatiquement les équations d'équilibre.

Comme pour les formes bilinéaires intervenant dans le système d'équations intégrales sous forme variationnelle, il est possible de réexprimer les quantités $\ell_{\varepsilon}(\delta\varepsilon^p)$, $a_{\varepsilon u}(\delta\varepsilon^p, \tilde{\mathbf{u}})$ et $a_{\varepsilon t}(\delta\varepsilon^p, \tilde{\mathbf{t}})$ en faisant apparaître des noyaux moins singuliers. Cette opération est effectuée au moyen d'une intégration par parties, en utilisant le théorème d'Ostrogradsky et en supposant $\delta\varepsilon^p$ suffisamment régulière. Il en résulte alors,

Resultat V.4

Soit $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \in H^1(\Omega)$. Les formes linéaires et bilinéaires $\ell_\varepsilon(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$, $a_{\varepsilon u}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{u}})$ et $a_{\varepsilon t}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{t}})$ admettent alors les expressions ci-dessous.

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon u}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{u}}) &= - \int_{S_p} \int_{S_t} e_{jfq} n_f(\mathbf{x}) \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_s \tilde{u}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{\Omega_p} \int_{S_t} e_{jfq} \delta\varepsilon_{ij,f}^p(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_s \tilde{u}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.60})$$

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon t}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{t}}) &= \int_{S_p} \int_{S_u} \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) n_b(\mathbf{x}) C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{\Omega_p} \int_{S_u} \delta\varepsilon_{ij,b}^p(\mathbf{x}) C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.61})$$

$$\begin{aligned} \ell_\varepsilon(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) &= - \int_{S_p} \int_{S_u} e_{jfq} n_f(\mathbf{x}) \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_s \tilde{u}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{\Omega_p} \int_{S_u} e_{jfq} \delta\varepsilon_{ij,f}^p(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) R_s \tilde{u}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{S_p} \int_{S_t} n_b(\mathbf{x}) \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{\Omega_p} \int_{S_t} \delta\varepsilon_{ij,b}^p(\mathbf{x}) C_{ijab} U_a^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \tilde{t}_k^0(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.62})$$

Le caractère autoadjoint de $a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$ peut être montré de manière plus immédiate si l'on suppose les densités $(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$ plus régulières. On aboutit alors à une variante de l'expression de $a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$ qui admet directement une formulation symétrique. Cette propriété s'avère très importante car elle permet de prendre en compte le caractère autoadjoint de $a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$ lors de la mise en œuvre numérique, contrairement à la formulation (V.51).

Resultat V.5

Soit $(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p) \in (H^1(\Omega_p))^2$. La forme bilinéaire $a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$ admet alors l'expression ci-dessous.

$$a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{\Omega_p \Omega_p} + \langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p \Omega_p} + \langle \boldsymbol{\varepsilon}^p, \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p \Omega_p} + \langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p S_p} \quad (\text{V.63})$$

où les différentes formes bilinéaires introduites dans la relation (V.63) peuvent être formulées de la manière suivante

$$\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{\Omega_p \Omega_p} = \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} (e_{qjf} \delta\varepsilon_{ij,f}^p)(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (e_{shl} \varepsilon_{kl,h}^p)(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.64})$$

$$\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p \Omega_p} = - \int_{S_p} \int_{\Omega_p} (e_{qfj} n_f \delta\varepsilon_{ij}^p)(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (e_{shl} \varepsilon_{kl,h}^p)(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.65})$$

$$\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p S_p} = \int_{S_p} \int_{S_p} (e_{qfj} n_f \delta\varepsilon_{ij}^p)(\mathbf{x}) B_{iqks}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (e_{shl} n_h \varepsilon_{kl}^p)(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.66})$$

Preuve

Insérons la décomposition (V.28) du tenseur hypersingulier dans la définition (V.51) de $a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p)$. En rappelant la relation (V.28), il vient alors

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p) &= - \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{\Omega_p} e_{jfq} e_{lhs} B_{iqks, fh}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{\Omega_p} C_{ijkl} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \left(C_{ijkl} + \int_{S_p} C_{ijab} \Sigma_{kl}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.67}) \end{aligned}$$

Par définition de la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{r})$, la deuxième intégrale du second membre disparaît. On note que le noyau apparaissant dans le premier terme fait apparaître un double gradient et en suivant l'idée appliquée lors de la régularisation de l'opérateur hypersingulier, nous allons intégrer cette double intégrale par parties, tout d'abord par rapport à \mathbf{y} , puis selon \mathbf{x} .

Ainsi en appliquant le théorème d'Ostrogradsky (II.23) par rapport à \mathbf{y} , il en résulte la formulation suivante

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p) &= - \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{S_p} e_{jfq} B_{iqks, f}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{lhs} n_h(\mathbf{y}) \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{\Omega_p} e_{jfq} B_{iqks, f}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{lhs} \varepsilon_{kl, h}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) \left(C_{ijkl} + \int_{S_p} C_{ijab} \Sigma_{kl}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_p} e_{jfq} e_{lhs} B_{iqks, f}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_h(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \varepsilon^p(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.68}) \end{aligned}$$

Les noyaux apparaissant dans les deux premières intégrales doubles sont à présent intégrables dans \mathbb{R}^3 et il est donc possible de permuter les signes intégraux en vertu du théorème de Fubini. Après intégration par parties selon \mathbf{x} , on aboutit au résultat. En effet la décomposition (V.28) de $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ engendre l'égalité ci-dessous, valable *p.p.* $\mathbf{x} \in \Omega_p$.

$$\int_{S_p} C_{ijab} \Sigma_{kl}^a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_b(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{S_p} e_{jfq} e_{lhs} B_{iqks, f}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_h(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + C_{ijkl} = 0 \quad (\text{V.69})$$

■

Remarque V.3 Notons que la formulation (V.63) fait très nettement ressortir le caractère autoadjoint de la forme bilinéaire $a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\delta\varepsilon, \varepsilon)$. Comme nous le verrons dans le paragraphe V.2, cette expression est plus avantageuse sur le plan de la mise en œuvre numérique. □

Le relation (V.63) ne fait intervenir que le produit contracté deux fois du noyau $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ avec le tenseur de permutation \mathbf{e} . Il est néanmoins possible d'éliminer \mathbf{e} dans l'expression de (V.63) en reformulant le noyau $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ défini par $D_{ijfklh}(\mathbf{r}) = e_{qjfe_{shl} B_{iqks}(\mathbf{r})$. Cette opération est détaillée dans la section B. 3 située en annexe.

En reportant l'expression de $D_{ijklh}(\mathbf{r})$ ainsi obtenue dans la définition de la forme bilinéaire des déformations plastiques, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{\Omega_p \Omega_p} &= \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij,f}^p(\mathbf{x}) D_{ijklh}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{kl,h}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p \Omega_p} &= - \int_{S_p} \int_{\Omega_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) n_f(\mathbf{x}) D_{ijklh}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varepsilon_{kl,h}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p S_p} &= \int_{S_p} \int_{S_p} \delta \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{x}) n_f(\mathbf{x}) D_{ijklh}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) n_h(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.70})$$

Pour la mise en œuvre numérique, nous avons choisi la formulation (V.70) proposée précédemment. En fait cette expression n'est pas la seule possible et on est également en mesure de reformuler la forme bilinéaire en faisant apparaître le noyau $\mathbf{U}(\mathbf{r})$. Il nous a semblé important d'explicitier cette formulation pour donner au lecteur une expression strictement équivalente sur le plan théorique mais qui peut être plus ou moins intéressante d'un point de vue numérique.

Pour obtenir la relation (V.63), nous avons utilisé la décomposition (V.28) du noyau hyper-singulier $\mathbf{S}(\mathbf{r})$. D'après [Bonnet], une autre possibilité consiste à envisager plus simplement le résultat suivant

$$S_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijab} C_{klpq} U_{p,qb}^a(\mathbf{r}) \quad (\text{V.71})$$

De manière analogue à l'obtention du résultat (V.5), nous allons supposer $(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ suffisamment réguliers et intégrer par parties tout d'abord selon \mathbf{y} puis par rapport à \mathbf{x} . Il vient alors le résultat suivant,

Resultat V.6

Soit $(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p) \in (H^1(\Omega_p))^2$. La forme bilinéaire $a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$ admet alors l'expression ci-dessous.

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p) &= \langle \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{\Omega_p \Omega_p}^* + \langle \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p \Omega_p}^* \\ &\quad + \langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p \Omega_p}^* + \langle \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \rangle_{S_p S_p}^* + \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p dV \end{aligned} \quad (\text{V.72})$$

où les différentes formes bilinéaires introduites dans la relation (V.63) peuvent être formulées de la manière suivante

$$\begin{aligned} \langle \delta \boldsymbol{\sigma}^p, \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_{\Omega_p \Omega_p}^* &= - \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \delta \sigma_{ij,j}^p(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \sigma_{kl,l}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ \langle \delta \boldsymbol{\sigma}^p, \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_{\Omega_p S_p}^* &= \int_{S_p} \int_{\Omega_p} \delta \sigma_{ij}^p(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \sigma_{kl,l}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \\ \langle \delta \boldsymbol{\sigma}^p, \boldsymbol{\sigma}^p \rangle_{S_p S_p}^* &= - \int_{S_p} \int_{S_p} \delta \sigma_{ij}^p(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) \sigma_{kl}^p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.73})$$

Preuve

Considérons à nouveau la forme linéaire $a^\sigma(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p)$ et introduisons la décomposition (V.71). En posant $\sigma^p \equiv \mathbf{C} : \varepsilon^p$ et $\delta\sigma^p = \mathbf{C} : \delta\varepsilon^p$, nous reformulons alors $a^\sigma(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p)$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} a^\sigma(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p) &= \int_{\Omega_p} \delta\sigma_{ij}^p(\mathbf{x}) \int_{\Omega_p} U_{k,lj}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\sigma_{kl}^p(\mathbf{y}) - \sigma_{kl}^p(\mathbf{x})] dV_{\mathbf{y}} dV_{\mathbf{x}} \\ &\quad + \int_{\Omega_p} \delta\sigma_{ij}^p(\mathbf{x}) \left(C_{ijkl} + \int_{S_p} U_{k,l}^i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) \sigma_{kl}^p(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.74})$$

Il ne reste alors qu'à appliquer deux fois le théorème d'Ostrogradsky respectivement par rapport aux variables \mathbf{y} et \mathbf{x} . L'intégrale surfacique du terme libre se simplifie et il ne demeure qu'une intégrale simple faisant intervenir \mathbf{C} . ■

Il convient de noter que les formes bilinéaires intervenant dans l'expression (V.72) de $a^\sigma(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p)$ ont exactement la même forme que celles apparaissant dans (V.63). Dans le deux cas, le noyau des intégrales doubles est singulier en $O(r^{-1})$.

Ce paragraphe nous a permis d'obtenir une représentation sous forme faible du champ de contrainte σ_{n+1} qui s'avère très intéressante dans la mise en œuvre numérique. Elle donne ainsi en presque tout point du domaine Ω_p une valeur σ_{n+1} pour des densités surfaciques qui ne présentent pas les conditions de régularités décrites dans les précédents chapitres.

Numériquement l'application d'un schéma de type Galerkin à la relation (V.50) revient en définitive à rechercher la meilleure interpolation de σ_{n+1} correspondant à une norme énergie.

Tout au long de ce mémoire, nous faisons constamment apparaître la dualité entre les approches en déformation et en contrainte. Nous pouvons déterminer une représentation intégrale sous forme faible du champ de déformation ε_{n+1} , comme pour le champ de contrainte σ_{n+1} . Il vient alors tout naturellement le résultat suivant, en ayant simplement utilisé la loi de Hooke $\sigma_{n+1} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)$.

Resultat V.7

Soit \mathbf{u}_{n+1} le champ de déplacement solution du problème d'évolution élastoplastique. Alors le champ de déformation ε_{n+1} correspondant à \mathbf{u}_{n+1} est donné sous forme faible dans Ω_p par la relation ci-dessous,

$$\begin{aligned} \forall \delta\varepsilon^p \in L^2(\Omega_p), \quad \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon^p : \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1} dV &= \ell_\varepsilon(\delta\varepsilon^p) + a_{\varepsilon u}(\delta\varepsilon^p, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) \\ &\quad + a_{\varepsilon t}(\delta\varepsilon^p, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - a_{\varepsilon\varepsilon}^\varepsilon(\delta\varepsilon^p, \varepsilon_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (\text{V.75})$$

où le forme bilinéaire $a_{\varepsilon\varepsilon}^\varepsilon(\delta\varepsilon^p, \varepsilon_{n+1}^p)$ admet l'expression suivante,

$$a_{\varepsilon\varepsilon}^\varepsilon(\delta\varepsilon^p, \varepsilon_{n+1}^p) = a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta\varepsilon^p, \varepsilon_{n+1}^p) - \int_{\Omega_p} \delta\varepsilon^p : \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^p dV \quad (\text{V.76})$$

où les formes linéaires et bilinéaires $\ell_\varepsilon(\delta\varepsilon^p)$, $a_{\varepsilon u}(\delta\varepsilon^p, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1})$ et $a_{\varepsilon t}(\delta\varepsilon^p, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1})$ ont été introduites pour l'obtention du résultat (V.3).

Notons que la relation (V.75) représente la représentation intégrale de ε_{n+1} au facteur \mathbf{C} près. Ce facteur intervient naturellement dans la formulation pour donner une signification énergétique à l'expression (V.75).

Remarque V.4 Nous avons établi que la forme bilinéaire $a^\sigma(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p)$ pouvait admettre deux expressions régularisées pour $(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p) \in (H^1(\Omega_p))^2$, faisant respectivement intervenir le noyau $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ et le noyau $\mathbf{U}(\mathbf{r})$. Notons que l'intégrale simple de noyau \mathbf{C} disparaît dans la relation (V.76) si on utilise l'expression (V.72) pour déterminer $a^\sigma(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p)$. Nous obtenons alors, en tenant compte de la définition des différents produits scalaires dans le résultat (V.6),

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon\varepsilon}^\varepsilon(\delta\varepsilon^p, \varepsilon^p) = & \langle \mathbf{C} : \delta\varepsilon^p, \mathbf{C} : \varepsilon^p \rangle_{\Omega_p\Omega_p}^* + \langle \mathbf{C} : \delta\varepsilon^p, \mathbf{C} : \varepsilon^p \rangle_{S_p\Omega_p}^* \\ & + \langle \mathbf{C} : \varepsilon^p, \mathbf{C} : \delta\varepsilon^p \rangle_{S_p\Omega_p}^* + \langle \mathbf{C} : \delta\varepsilon^p, \mathbf{C} : \varepsilon^p \rangle_{S_pS_p}^* \quad (\text{V.77}) \end{aligned}$$

□

V.1.3 Formulations variationnelles du problème élastoplastique

Tous les éléments sont à présent à notre disposition pour obtenir une formulation variationnelle du problème d'évolution élastoplastique basée sur une méthode par équations intégrales. Comme depuis le début, nous distinguerons les approches en déformation et en contrainte et considérerons un principe très général du type Hu-Washizu obtenu dans le résultat (I.5).

En reprenant les équations sous forme faible des résultats (V.1), (V.3) et (V.7) et en intégrant les lois d'évolution et la condition de cohérence, nous pouvons alors reformuler le problème d'évolution élastoplastique de la manière ci-dessous.

FORMULATION EN CONTRAINTE

Cette formulation du problème est actuellement la seule approche rencontrée dans la littérature. Elle peut notamment être trouvée dans [Polizzotto88b], [Comi et al.92], [Polizzotto et al.94] et [Maier et al.95]. Dans [Polizzotto et al.94], on montre clairement que le système d'équations sous forme faible du problème élastoplastique dérive de la stationarité d'une fonctionnelle pour un matériau élastoplastique.

Nous allons généraliser l'approche précédente et présenter le résultat suivant valable pour un matériau élastoplastique écrouissable. Définissons alors l'état élastoplastique χ_{n+1}^σ regroupant les quantités suivantes $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}, \lambda_{n+1})$

Resultat V.8

Soit χ_{n+1}^σ caractérisant l'état élastoplastique au temps t_{n+1} . Alors χ_{n+1}^σ est le point-selle de la fonctionnelle $\Pi^\sigma(\chi_{n+1}^\sigma)$ définie par la relation ci-dessous.

$$\begin{aligned} \Pi^\sigma(\chi_{n+1}^\sigma) = & \Pi_{elas}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} dV + \frac{1}{2} a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \ell_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ & + \int_{\Omega_p} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \mathbf{q}_{n+1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n)] dV - \int_{\Omega_p} \frac{\lambda_{n+1}}{\theta} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{q}_{n+\theta}) dV \quad (\text{V.78}) \end{aligned}$$

où la fonctionnelle $\Pi_{elas}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ est associée au problème élastique avec inclusions initiales et admet l'expression suivante,

$$\begin{aligned} \Pi_{elas}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) &= \frac{1}{2} a_{uu}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + \frac{1}{2} a_{tt}(\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) + a_{ut}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) \\ &\quad - \ell_u(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) - \ell_t(\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - a_{u\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - a_{t\varepsilon}(\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{aligned} \quad (\text{V.79})$$

où nous rappelons que $(\bullet)_{n+\theta} = (1 - \theta) (\bullet)_n + \theta (\bullet)_{n+1}$.

FORMULATION EN DÉFORMATION

De manière analogue à l'approche en contrainte, la formulation en déformation résulte de la solution d'un problème d'optimisation proposé ci-dessous et faisant intervenir l'état élastoplastique inconnu $\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon$ défini par les quantités $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}, \lambda_{n+1})$.

Resultat V.9

Soit $\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon$ caractérisant l'état élastoplastique au temps t_{n+1} . Alors $\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon$ est le point-selle de la fonctionnelle $\Pi^\varepsilon(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon)$ définie par la relation ci-dessous.

$$\begin{aligned} \Pi^\varepsilon(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon) &= \Pi_{elas}(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{n+1} dV - \int_{\Omega_p} \mathbf{q}_{n+1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n) dV \quad (\text{V.80}) \\ &\quad + \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) dV - \int_{\Omega_p} \frac{\lambda_{n+1}}{\theta} f(\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta}^p), \mathbf{q}_{n+\theta}) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} a_{\varepsilon\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \ell_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{aligned}$$

où la fonctionnelle $\Pi_{elas}(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ a été définie précédemment par la relation (V.79).

On constate que les fonctionnelles $\Pi^\sigma(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\sigma)$ et $\Pi^\varepsilon(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon)$ sont très similaires et se déduisent l'une de l'autre par le simple changement de variable $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$, relation qui n'apparaît jamais explicitement dans les formulations variationnelles.

Il ne reste qu'à résoudre l'ensemble des équations variationnelles régissant les problème d'évolution élastoplastique et dérivant de la stationnarité de $\Pi^\sigma(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\sigma)$ ou de $\Pi^\varepsilon(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon)$, en y intégrant les procédures d'intégration locale décrites dans le paragraphe I.2.3. Nous distinguerons les approches en déformation et en contrainte qui font respectivement intervenir l'algorithme de Retour Radial piloté en déformation ou en contrainte.

V.1.4 Remarques et commentaires

Avant d'aborder la résolution du problème d'évolution élastoplastique, intéressons-nous plus particulièrement aux propriétés fondamentales du problème auxiliaire élastique avec déformations initiales.

En élasticité, une propriété constamment mise en avant dans les résultats théoriques concernant l'étude des systèmes d'équations intégrales est l'existence d'une *inégalité de Garding*. Celle-ci traduit concrètement une propriété de coercivité [Nečas67] qui assure l'existence et l'unicité de la solution mais également la convergence et la stabilité du schéma de Galerkin, lorsque la taille caractéristique du maillage tend vers 0. Notons que cette dernière propriété est déterminante sur le plan numérique.

Un résultat très important concerne le système d'équations intégrales de Fredholm de *première espèce* du problème élastique. Dans les travaux [Costabel84] et [Costabel88], il est montré qu'il est possible d'obtenir une inégalité de Garding sur la fonctionnelle définie sur les traces $(\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1})$ découlant directement de l'inégalité de Korn même pour des domaines polyédraux. Le système de Fredholm de première espèce résulte donc de considérations énergétiques comme cela est présenté plus physiquement dans [Bonnet95b].

Dans la section III.4, nous avons montré qu'il était possible d'écrire deux types de système d'équations intégrales, à savoir les systèmes de Fredholm de première et seconde espèce. Ainsi on peut envisager une expression différente de (V.15) pour $\delta \mathbf{u}$, en prenant par exemple le choix dual suivant,

$$\begin{aligned} \delta u_k(\mathbf{y}) = & \int_{S_t} \delta \tilde{t}_i(\mathbf{x}) U_i^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{x}} + \int_{S_u} K_{iq}^k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) R_q \delta \tilde{u}_i(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \\ & - \int_{S_u} H(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{V.81})$$

Sans entrer dans le détail des calculs, remarquons que ce choix aboutit alors à un système d'équations intégrales de Fredholm de *seconde espèce* [Costabel et al.86]. Malheureusement les formes bilinéaires croisées perdent les propriétés de dualité (V.6) et (V.57), qui sont déterminantes pour obtenir une formulation variationnelle du problème et il n'est alors plus possible de ramener la résolution du problème d'évolution élastoplastique à la recherche d'un point-selle d'une fonctionnelle.

De plus bien qu'il soit possible d'exhiber une inégalité de Garding pour le système d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce pour des domaines réguliers, l'obtention d'une inégalité de Garding en *élasticité* est malheureusement mise en défaut pour des ouverts présentant des singularités géométriques [Costabel et al.86].

Il n'y a donc aucune raison de retenir la représentation intégrale (V.81) et la démarche présentée dans cette section est donc absolument nécessaire pour obtenir un système d'équations sous forme faible traduisant les conditions de stationnarité d'une fonctionnelle.

Cette remarque achève la présentation théorique d'une formulation variationnelle par équations intégrales pour le problème d'évolution élastoplastique. Nous avons montré que les équations sous forme faible du problème d'évolution élastoplastique résultent de la stationnarité des fonctionnelles $\Pi^e(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^e)$ et $\Pi^\sigma(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\sigma)$ selon qu'on choisissait une approche en déformation ou en contrainte. Il est grand temps de décrire les algorithmes correspondants et d'explicitier les différents termes intervenant dans les formulations.

V.2 Mise en oeuvre numérique d'un algorithme par Galerkin

Dans la section précédente, nous avons établi deux formulations variationnelles du problème d'évolution élastoplastique utilisant la représentation intégrale du champ de déplacement \mathbf{u}_{n+1} , basées respectivement sur une approche en contrainte et en déformation. Assez curieusement, seule la méthode en contrainte est actuellement présentée dans la littérature [Polizzotto88b], [Maier et al.93], [Polizzotto et al.94], [Maier et al.95] et [Bonnet et al.98] et l'algorithme de Retour Radial n'est jamais explicitement introduit.

Nous nous proposons de présenter dans cette section la mise en oeuvre numérique de ces deux formulations. Nous incorporerons les algorithmes de Retour Radial décrits dans le paragraphe I.2.3 et le problème non-linéaire qui en résulte sera résolu par une méthode itérative de type Newton-Raphson. Nous montrerons également que l'Opérateur Tangent Cohérent *global* associé à ce schéma de résolution numérique est toujours *symétrique*.

V.2.1 Résolution du problème d'évolution élastoplastique en contrainte

La formulation en contrainte du problème d'évolution élastoplastique découle des conditions de stationnarité de la fonctionnelle (V.78) définie dans le résultat (V.8). Il nous reste à expliciter clairement ces relations.

EQUATIONS VARIATIONNELLES DE L'APPROCHE EN CONTRAINTE

En écrivant l'annulation de la première variation de la fonctionnelle $\Pi^\sigma(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\sigma)$ donnée par la relation (V.78), il vient les équations variationnelles ci-dessous,

$$\forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t), \forall \delta \tilde{\mathbf{t}} \in H^{-\frac{1}{2}}(S_u), \forall (\delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \delta \boldsymbol{\beta}, \delta p) \in (L^2(\Omega))^4, \forall \delta \lambda \in K,$$

- Variation dans la direction $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}$

$$a_{uu}(\delta \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + a_{ut}(\delta \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - a_{u\varepsilon}(\delta \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = \ell_u(\delta \tilde{\mathbf{u}}) \quad (\text{V.82})$$

- Variation dans la direction $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}$

$$a_{tu}(\delta \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + a_{tt}(\delta \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - a_{t\varepsilon}(\delta \tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = \ell_t(\delta \tilde{\mathbf{t}}) \quad (\text{V.83})$$

- Variation dans la direction $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$

$$-a_{\varepsilon u}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) - a_{\varepsilon t}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) + a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV = \ell_\varepsilon(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{V.84})$$

- Variation dans la direction $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$

$$\int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p dV = \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) dV \quad (\text{V.85})$$

- Variation dans la direction $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$

$$\int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}_{n+1} dV = \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\beta}_n + \frac{2H}{3} \lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) dV \quad (\text{V.86})$$

• **Variation dans la direction p_{n+1}**

$$\int_{\Omega_p} \delta p p_{n+1} dV = \int_{\Omega_p} \delta p \left(p_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{n+1} \right) dV \quad (\text{V.87})$$

• **Variation dans la direction λ_{n+1}**

$$\int_{\Omega_p} \delta \lambda f(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta} - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta}, p_{n+\theta}) dV = 0 \quad (\text{V.88})$$

Vu que cette formulation fait intervenir explicitement le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ comme inconnue du problème, nous envisageons de traiter la non-linéarité du problème à l'aide l'ARR piloté en contrainte. Pour un **matériau écrouissable**, on substitue alors la relation (I.60) sous forme faible à l'équation de cohérence (V.88), ce qui permet d'écrire

$$\int_{\Omega_p} \delta \lambda \lambda_{n+1}^\sigma dV = \int_{\Omega_p} \delta \lambda \frac{3}{2(H+h)\theta} \langle f(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\beta}_n + \theta \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, p_n) \rangle dV \quad (\text{V.89})$$

Il nous faut à présent discrétiser ce système d'équations non-linéaires et nous allons mettre en évidence qu'un choix adéquat du type d'approximation des champs inconnus et variés permet d'aboutir à un opérateur tangent symétrique.

DISCRÉTISATION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS VARIATIONNELLES

Dans le but de résoudre numériquement le système variationnel ci-dessus, nous considérons une méthode de type *élément fini*. Pour ce faire, on introduit une discrétisation de la frontière S caractérisée par E_S éléments finis de frontière et N_S points surfaciques (\mathbf{y}_i) pour $i \in [1, N_S]$ et un maillage volumique de Ω_p composé de E_Ω éléments finis de domaine associés à une famille de N_Ω points volumiques (\mathbf{x}_i) avec $i \in [1, N_\Omega]$

On construit alors sur chaque élément fini de frontière ou de domaine une approximation des différentes grandeurs inconnues. Celles-ci peuvent formellement être écrites sur chaque élément fini de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y}) &= \mathbf{N}_u(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}, & \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y}) &= \mathbf{N}_t(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_{n+1}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_{\varepsilon^p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p, & \boldsymbol{\beta}_{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_{n+1}, & p_{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}_p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}_{n+1} \\ \text{et } \lambda_{n+1}(\mathbf{x}) &= \max(\mathbf{N}_\lambda(\mathbf{x}), 0) \cdot \mathbf{A}_{n+1} \quad \text{d'où } \lambda_{n+1} \in K \end{aligned} \quad (\text{V.90})$$

où les $\mathbf{N}_{(\bullet)}(\mathbf{x})$ désignent des fonctions d'interpolation classiquement utilisées en éléments finis de domaine [Batoz et al.90] ou en éléments finis de frontière [Bonnet95a]. Notons qu'on introduit une approximation du multiplicateur plastique λ_{n+1} [Polizzotto et al.93]. Cette démarche se retrouve également dans les méthodes des éléments finis de domaine mais ce manière moins explicite. En effet le champ λ_{n+1} étant calculé aux points de Gauss des éléments du maillage, on peut considérer que λ_{n+1} est lié à une approximation nodale définie aux points de Gauss sur chaque élément fini de domaine [Simo et al.89].

Nature des approximations et des champs variés des quantités surfaciques

Le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{y})$ est pris *continu* sur S de manière à garantir la conformité de la méthode. Quant à l'approximation du vecteur-contraainte $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}(\mathbf{y})$, on peut théoriquement la choisir continue par morceaux, par exemple définie indépendamment sur chaque élément fini (non-conformité totale) comme cela est préconisé dans [Bonnet95b] ou [Andrá et al.97]. Cette méthode augmente fortement le nombre d'inconnues nodales $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et nous avons préféré envisager, comme pour l'approche en collocation, une approximation partiellement non-continue, ne présentant de discontinuités qu'au voisinage des arêtes et des coins.

Une méthode de type Bubnov-Galerkin étant envisagée pour résoudre ce système d'équations, nous choisirons tout naturellement les mêmes types d'interpolations pour les champs inconnus et les champs variés.

$$\forall \mathbf{y} \in S_t, \delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \mathbf{N}_u(\mathbf{y}).\delta \tilde{\mathbf{U}} \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{y} \in S_u, \delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = \mathbf{N}_t(\mathbf{y}).\delta \tilde{\mathbf{T}} \quad (\text{V.91})$$

Il convient de noter que nous devons également satisfaire $\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t)$. Le choix précédent pour $\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ entraînant $\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \in C^{0,\beta}(S_t)$, il nous faut alors vérifier $\forall \mathbf{y} \in \partial S_t, \delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = 0$. Cette dernière condition se traduit numériquement en imposant un champ varié $\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ nul sur les noeuds situés sur le contour ∂S_t délimitant la partie de la frontière S_t .

Nature des approximations et des champs variés des grandeurs volumiques

Comme pour la méthode de collocation, nous envisageons des approximations *continues* pour les grandeurs définies dans Ω_p rencontrées dans la méthode des éléments finis de domaine. Ceci nous amène tout naturellement à introduire des valeurs nodales aux points (\mathbf{x}_i) comme inconnus du problème. Nous prendrons de plus les mêmes interpolations pour le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et le champ de déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$, i.e. $\mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\sigma(\mathbf{x})$, de manière à avoir une approximation *cohérente* des différentes inconnues. Notons que toutes les interpolations considérées sont bien contenues dans $L^2(\Omega_p)$.

Il nous reste à choisir la forme des champs variés volumiques. Remarquons que les champs de déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x})$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x})$ jouent un rôle particulier puisqu'ils apparaissent explicitement de manière duales dans les formes bilinéaires croisées $a_{u\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon})$, $a_{t\varepsilon}(\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon})$, $a_{\varepsilon u}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\mathbf{u}})$ et $a_{\varepsilon t}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\mathbf{t}})$. Pour pouvoir pleinement utiliser la propriété de symétrie (V.57), nous allons considérer les champs variés $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x})$ et $\delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ sous la forme suivante

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_p, \delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\sigma(\mathbf{x}).\delta \mathbf{S} \quad \text{et} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\sigma(\mathbf{x}).\delta \mathbf{E}^p \quad (\text{V.92})$$

Pour les quantités variées restantes, à savoir le multiplicateur plastique et les variables d'écroutissage isotrope et cinématique, nous prenons des mesures de Dirac concentrées au points (\mathbf{x}_i) du maillage volumique. Ceci revient physiquement à appliquer l'algorithme de Retour Radial, non pas aux points de Gauss comme pour les éléments finis de domaine, mais directement aux noeuds du maillage de Ω_p .

Remarque V.5 Notons que ce choix diffère de l'approche présentée dans [Polizzotto et al.93] et [Maier et al.95] où les approximations et les champs variés des champs de contrainte et de déformation plastique sont définis indépendamment dans chaque élément fini de domaine du maillage de Ω_p .

Nous avons opté pour une interpolation *continue* des différentes quantités volumiques pour les raisons suivantes :

- ◇ Dans la méthode des éléments finis de domaine, les champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et de déplacement \mathbf{u}_{n+1} sont liés par la loi de Hooke. Le champ $\nabla \mathbf{u}_{n+1}$ étant uniquement continu par morceaux, on adopte pour des raisons de cohérence une interpolation analogue pour $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ [Simo et al.89] et [Simo et al.98]. Dans la méthode des éléments finis de frontière, la représentation intégrale du déplacement \mathbf{u}_{n+1} fournit un champ très régulier, ce qui nous permet d'envisager un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et de déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ continu.
- ◇ Le fait de choisir des champs volumiques définis indépendamment dans chaque élément fini de domaine, augmente considérablement le nombre d'inconnues du système discrétisé.
- ◇ Ce choix nous permet de vérifier directement la condition de cohérence aux points (\mathbf{x}_i) du maillage de Ω_p , ce qui rend possible l'évaluation des variables internes sur la surface S .

□

Forme discrétisée des équations variationnelles

Définissons le vecteur $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}$ regroupant les valeurs nodales des conditions aux limites inconnues du problème élastoplastique au temps t_{n+1} . En restreignant la formulation variationnelle obtenue au début de ce paragraphe aux champs inconnus et variés précédents et en écrivant les conditions de stationnarité pour toute variation des champs discrets, il vient le système discret suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{F}_{n+1} \\ -\mathbf{Q}^t \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} + \boldsymbol{\Theta}_\sigma \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{G}_{n+1} \\ \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p - \boldsymbol{\Psi}_\sigma(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{E}_n^p \end{array} \right. \quad (\text{V.93})$$

$$+ \text{Lois d'écoulement et condition de cohérence écrites aux points } (\mathbf{x}_i) \quad (\text{V.94})$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + \frac{2H}{3} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)}, \quad \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_n^{(i)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} = \lambda_{n+1}^\sigma(\mathbf{S}_{n+1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{(i)})$$

où la notation $(\bullet)^{(i)}$ désigne la valeur de la quantité nodale au point $\mathbf{x}^{(i)}$ du maillage de Ω_p . Rappelons que $\tilde{\mathbf{X}}_n$ désigne l'état élastoplastique du système discrétisé en espace à l'instant t_n , i.e. $\tilde{\mathbf{X}}(\bullet) = (\tilde{\mathbf{Y}}(\bullet), \mathbf{S}(\bullet), \mathbf{E}_{(\bullet)}^p, \mathbf{B}(\bullet), \mathbf{P}(\bullet))$.

Les vecteurs \mathbf{F}_{n+1} et \mathbf{G}_{n+1} contiennent les conditions aux limites et les sollicitations volumiques données à t_{n+1} et les différentes matrices d'influence qui restent *constantes* au cours de l'évolution du système admettent les expressions ci-dessous :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_{uu}(\mathbf{N}_u^t, \mathbf{N}_u) & a_{ut}(\mathbf{N}_u^t, \mathbf{N}_t) \\ a_{tu}(\mathbf{N}_t^t, \mathbf{N}_u) & a_{tt}(\mathbf{N}_t^t, \mathbf{N}_t) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{uu}(\mathbf{N}_u^t, \mathbf{N}_u) \geq 0 \\ a_{tt}(\mathbf{N}_t^t, \mathbf{N}_t) < 0 \end{array} \right. ,$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_{u\varepsilon}(\mathbf{N}_u^t, \mathbf{N}_\sigma) \\ a_{t\varepsilon}(\mathbf{N}_{ft}^t, \mathbf{N}_\sigma) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Theta}_\sigma = a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\mathbf{N}_\sigma^t, \mathbf{N}_\sigma) \quad \text{avec} \quad a_{\varepsilon\varepsilon}^\sigma(\mathbf{N}_\sigma^t, \mathbf{N}_\sigma) \geq 0 \quad (\text{V.95})$$

$$\mathbf{M}_\sigma = \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_\sigma^t(\mathbf{x}) \mathbf{N}_\sigma(\mathbf{x}) dV_x \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Psi}_\sigma(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_\sigma^t(\mathbf{x}) \lambda_{n+1}^\sigma(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} dV_x$$

Le caractère semi-défini positif des matrices $a_{uu}(\mathbf{N}_u^t, \mathbf{N}_u)$ et $a_{\varepsilon\varepsilon}^{\sigma}(\mathbf{N}_{\sigma}^t, \mathbf{N}_{\sigma})$ et la définie négativité de $a_{tt}(\mathbf{N}_t^t, \mathbf{N}_t)$ sont clairement montrés dans [Polizzotto et al.94]. Notons par exemple que pour la frontière S d'un domaine simplement connexe Ω , on peut avoir une matrice $a_{uu}(\mathbf{N}_u^t, \mathbf{N}_u)$ *définie positive* si les conditions aux limites sont telles que $S_u \neq \emptyset$.

Les équations du système régissant le problème d'évolution élastoplastique étant posées, il nous reste à résoudre ce système non-linéaire. Pour ce faire, nous envisageons un schéma de type Newton-Raphson piloté en \mathbf{S}_{n+1} . En introduisant le résidu $\mathbf{R}_{\sigma}(\mathbf{X}_{n+1})$, nous devons alors satisfaire,

$$\mathbf{R}_{\sigma}(\mathbf{X}_{n+1}) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p - \mathbf{F}_{n+1} \\ -\mathbf{Q}^t \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} + \Theta_{\sigma} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{M}_{\sigma} \cdot \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{G}_{n+1} \\ \mathbf{M}_{\sigma} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p - \Psi_{\sigma}(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) - \mathbf{M}_{\sigma} \cdot \mathbf{E}_n^p \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (\text{V.96})$$

Lorsque l'état de contrainte \mathbf{S}_{n+1} sera connu, la condition de cohérence permettra de déterminer le multiplicateur plastique en chaque point $(\mathbf{x}^{(i)})$ à l'aide de la relation suivante,

$$\Lambda_{n+1}^{(i)} = \lambda_{n+1}^{\sigma}(\mathbf{S}_{n+1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{(i)}) \quad (\text{V.97})$$

et les variables d'érouissage seront mises à jour en écrivant les lois d'érouissage aux points $(\mathbf{x}^{(i)})$ définissant le maillage de Ω_p .

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + \frac{2H}{3} \Lambda_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_n^{(i)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda_{n+1}^{(i)} \quad (\text{V.98})$$

Nous sommes donc amenés à déterminer les inconnues principales $\mathbf{X}_{n+1} \equiv (\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}, \mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p)$ qui sont solution du système non-linéaire donné par $\mathbf{R}_{\sigma}(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathbf{0}$.

Nous allons montrer que la matrice tangente associée au schéma de résolution de type Newton-Raphson de l'équation non-linéaire (V.96) d'inconnue \mathbf{X}_{n+1} est *symétrique*, ce qui justifie totalement les interpolations choisies pour les champs inconnus et variés au début de ce paragraphe.

Resultat V.10

Considérons une résolution de l'équation non-linéaire (V.96) par un schéma de type Newton-Raphson. Alors l'opérateur tangent cohérent global associé à ce schéma est *symétrique* et est donné par la relation ci-dessous,

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}}(\mathbf{X}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) \cdot \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} = -\mathbf{R}_{\sigma}(\mathbf{X}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{X}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} \quad (\text{V.99})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma}}{\partial \mathbf{X}_{n+1}}(\mathbf{X}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^t & \Theta_{\sigma} & \mathbf{M}_{\sigma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\sigma} & \partial_{\mathbf{S}} \Psi_{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\text{V.100})$$

où la matrice $\partial_{\mathbf{S}} \Psi_{\sigma}$ est définie de la manière suivante,

$$\partial_{\mathbf{S}} \Psi_{\sigma} \equiv \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}}(\mathbf{S}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_{\sigma}^t(\mathbf{x}) \frac{\partial(\lambda_{n+1}^{\sigma} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})}{\partial \sigma_{n+1}} \mathbf{N}_{\sigma}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.101})$$

Preuve

En reprenant la définition du vecteur $\Psi_\sigma(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n)$ et en différentiant par rapport au vecteur \mathbf{S}_{n+1} , il vient la relation ci-dessous.

$$\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \equiv \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_\sigma^t(\mathbf{x}) \frac{\partial(\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_\sigma^t(\mathbf{x}) \frac{\partial(\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \mathbf{N}_\sigma(\mathbf{x}) dV \quad (\text{V.102})$$

Le tenseur d'ordre quatre apparaissant dans la dernière intégrale est donné par la relation (I.82) et est *symétrique*, ce qui achève la démonstration. ■

Compte tenu de la taille très élevée de la matrice tangente (V.100), il n'est numériquement pas envisageable d'inverser à chaque itération le système matriciel (V.99). Reprenons alors le système d'équations formées des équations intégrales, de la représentation intégrale du champ de contrainte et de la loi d'écoulement plastique.

$$\mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{V.103})$$

$$\mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{G}_{n+1} + \mathbf{Q}^t \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} - \boldsymbol{\Theta}_\sigma \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{V.104})$$

$$\mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{E}_n^p + \Psi_\sigma(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad (\text{V.105})$$

Comme pour la méthode de collocation, les densités surfaciques inconnues peuvent être évaluées en inversant l'équation (V.103) pour \mathbf{E}_{n+1}^p connu a priori. On constate que la recherche de \mathbf{S}_{n+1} se réduit alors à la résolution d'un système de deux inconnues caractérisé par une équation linéaire et une équation non-linéaire représentant la loi d'écoulement plastique sous forme faible, ce qui permet de retrouver la structure décrite dans la section II.3. Il vient alors,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Xi}_\sigma \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{S}_{n+1}^{elas} \\ \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p - \Psi_\sigma(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{E}_n^p \end{cases} \quad (\text{V.106})$$

$$+ \text{Mise à jour des densités surfaciques inconnues} \quad (\text{V.107})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{V.108})$$

où les relations ci-dessus ont été obtenues à l'aide des définitions suivantes

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{n+1}, \quad \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{S}_{n+1}^{elas} = \mathbf{G}_{n+1} + \mathbf{Q}^t \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Xi}_\sigma = \boldsymbol{\Theta}_\sigma - \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \quad (\text{V.109})$$

Remarquons que $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas}$ et \mathbf{S}_{n+1}^{elas} représentent respectivement les vecteurs des densités surfaciques inconnues et des contrainte nodales dans Ω_p du milieu supposé uniquement élastique. On peut noter que l'opérateur tangent cohérent du schéma de Newton associé au système d'équations (V.106) est symétrique et résulte de la condensation de la matrice (V.100) par rapport à la variable $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}$.

Algorithme pour la formulation variationnelle en contrainte

L'idée est de trouver une équation non-linéaire de très petite taille dont l'inconnue \mathbf{S}_{n+1} est déterminée par un processus itératif de type Newton-Raphson. Nous allons montrer, comme

pour la méthode de collocation, que les équations (V.106) se réduisent à une seule équation non-linéaire d'inconnue \mathbf{S}_{n+1} , dont la structure du schéma itératif est très similaire au schéma donné par la relation (IV.57).

Resultat V.11

Soit \mathbf{S}_{n+1} le champ de contraintes nodales, solution du problème d'évolution élastoplastique à t_{n+1} . Alors \mathbf{S}_{n+1} est solution de l'équation non-linéaire ci-dessous.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\sigma}(\mathbf{S}_{n+1}) \equiv \mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{M}_{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Xi}_{\sigma} \cdot \mathbf{M}_{\sigma}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{S}_{n+1}) + \mathbf{M}_{\sigma} \cdot \mathbf{E}_n^p) - \mathbf{S}_{n+1}^{elas} = 0 \quad (\text{V.110})$$

Cette équation est résolue au moyen d'un schéma de type Newton-Raphson donné par l'algorithme

$$[\mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Xi}_{\sigma} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_{\sigma}^t(\mathbf{x}) \frac{\partial(\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \mathbf{N}_{\sigma}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}] \cdot \Delta \mathbf{S}_{n+1}^{k+1} = -\tilde{\mathbf{R}}_{\sigma}(\mathbf{S}_{n+1}^k) \quad (\text{V.111})$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{S}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{S}_{n+1}^{k+1} \quad (\text{V.112})$$

où nous rappelons que l'opérateur tangent local admet l'expression suivante,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} (\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) = \frac{\theta \lambda_{n+1}}{\| \boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E \|} (J - \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) + \frac{3 \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{2(H+h)} \quad (\text{V.113})$$

L'état élastoplastique $\tilde{\mathbf{X}}_{n+1}$ est ensuite entièrement déterminé en réactualisant toutes les quantités inconnues en s'aidant des relations ci-dessous

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \mathbf{M}_{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad (\text{V.114})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{V.115})$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + \frac{2H}{3} (\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)})(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad (\text{V.116})$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_n^{(i)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)}(\mathbf{S}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad (\text{V.117})$$

Preuve

Les interpolations de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ étant prises continues, la matrice \mathbf{M}_{σ} est définie positive donc *invertible*. Après avoir reporté le vecteur \mathbf{E}_{n+1}^p issu de la loi d'écoulement plastique dans la relation reliant les déformations plastiques \mathbf{E}_{n+1}^p aux contraintes \mathbf{S}_{n+1} , il vient l'équation non-linéaire (V.110).

La solution de cette équation d'inconnue \mathbf{S}_{n+1} est recherchée à l'aide d'un schéma itératif de Newton-Raphson admettant trivialement la forme (V.111). ■

Remarque V.6 La structure de l'algorithme de Newton-Raphson est très similaire à celui obtenu pour la méthode de collocation. On constate la présence de la matrice identité \mathbf{I} et d'un terme correctif représentant le produit de deux matrices symétriques. Il convient cependant de noter que la matrice tangente dans (V.111) n'est *plus symétrique*, bien que l'opérateur tangent global de (V.106) le soit.

On peut également envisager un schéma de type Newton-Raphson modifié en choisissant comme direction de descente la matrice \mathbf{I} . On obtient alors un algorithme très simple et rapide, qui ne nécessite aucune inversion de matrice. Cette technique est par exemple utilisée dans les travaux [Maier et al.93] et [Maier et al.95]. \square

Dans ce paragraphe, nous avons montré qu'il était possible d'obtenir en élastoplasticité une formulation variationnelle symétrique d'inconnue $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Nous allons également proposer une méthode duale reposant sur une formulation en déformation qui présente l'avantage d'introduire un algorithme de Retour Radial qui se dégenère bien en élastoplasticité.

V.2.2 Résolution du problème d'évolution élastoplastique en déformation

La formulation variationnelle en déformation se déduit de manière très simple de la formulation en contrainte par le simple changement de variable $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$. Les équations variationnelles régissant le problème élastoplastique sont donc très similaires.

EQUATIONS VARIATIONNELLES DE L'APPROCHE EN DÉFORMATION

Les équations sous forme variationnelle sont obtenues en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle définie dans la section V.1 par la relation (V.80). Nous avons ainsi,

$$\forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_t), \forall \delta \tilde{\mathbf{t}} \in H^{-\frac{1}{2}}(S_u), \forall (\delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \delta \boldsymbol{\beta}, \delta p) \in (L^2(\Omega))^4, \forall \delta \lambda \in K,$$

- **Variation dans la direction $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}$**

$$a_{uu}(\delta \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + a_{ut}(\delta \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - a_{u\varepsilon}(\delta \tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = \ell_u(\delta \tilde{\mathbf{u}}) \quad (\text{V.82})$$

- **Variation dans la direction $\tilde{\mathbf{t}}_{n+1}$**

$$a_{tu}(\delta \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) + a_{tt}(\delta \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) - a_{t\varepsilon}(\delta \tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = \ell_t(\delta \tilde{\mathbf{t}}) \quad (\text{V.83})$$

- **Variation dans la direction $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$**

$$-a_{\varepsilon u}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) - a_{\varepsilon t}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}) + a_{\varepsilon\varepsilon}^{\varepsilon}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} dV = \ell_{\varepsilon}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{V.118})$$

- **Variation dans la direction $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$**

$$\int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p dV = \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) dV \quad (\text{V.119})$$

- **Variation dans la direction $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$**

$$\int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}_{n+1} dV = \int_{\Omega_p} \delta \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\beta}_n + \frac{2H}{3} \lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) dV \quad (\text{V.86})$$

- **Variation dans la direction p_{n+1}**

$$\int_{\Omega_p} \delta p p_{n+1} dV = \int_{\Omega_p} \delta p (p_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{n+1}) dV \quad (\text{V.87})$$

• **Variation dans la direction $\delta\lambda$**

$$\int_{\Omega_p} \delta\lambda f(\mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta}^p) - \boldsymbol{\beta}_{n+\theta}, p_{n+\theta}) dV = 0 \quad (\text{V.120})$$

Il est intéressant de noter que les équations correspondant aux variations $\delta\tilde{\mathbf{u}}$, $\delta\tilde{\mathbf{t}}$, $\delta\boldsymbol{\beta}$ et δp de la fonctionnelle $\Pi^\varepsilon(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\varepsilon)$ sont identiques aux variations de $\Pi^\sigma(\boldsymbol{\chi}_{n+1}^\sigma)$ dans ces mêmes directions.

Remarque V.7 Le fait de considérer une formulation en déformation fait apparaître le tenseur d'élasticité \mathbf{C} dans certains termes des relations (V.118) et (V.119), de manière à donner une signification énergétique à ces quantités. \square

Cette formulation faisant intervenir le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ comme inconnue du problème, nous substituons la relation (I.56) écrite sous forme faible à l'équation de cohérence (V.120) et il vient alors pour tout $\delta\lambda \in K$,

$$\int_{\Omega_p} \delta\lambda \lambda_{n+1}^\varepsilon dV = \int_{\Omega_p} \delta\lambda \frac{1}{2\theta(G + \frac{H+h}{3})} \langle f(\boldsymbol{\sigma}_n + \theta\mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_n, p_n) \rangle dV \quad (\text{V.121})$$

Il nous reste à présent à discrétiser ces équations et compte tenu de la forte similitude existant entre les formulations en contrainte et en déformation, nous allons montrer dans le prochain paragraphe que toutes les propriétés obtenues pour l'algorithme en contrainte restent valables pour l'algorithme en déformation.

Le principal avantage de l'approche en déformation est de pouvoir donner un sens au multiplicateur plastique λ_{n+1} dans le cas d'un matériau élastoplastique parfait.

DISCRÉTISATION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS VARIATIONNELLES

Nous envisageons les mêmes types d'interpolation des champs inconnus et variés que pour l'approche en contrainte. La seule différence concerne la prise en compte de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ au lieu de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Afin d'envisager des approximations *cohérentes* pour les champs de déformation totale et plastique et de profiter pleinement des propriétés de dualité (V.57), nous envisageons les approximations et les champs variés de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ et de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ sous la forme suivante,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{V.122})$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{E} \quad \text{et} \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{E}^p \quad (\text{V.123})$$

En restreignant la formulation variationnelle obtenue au début de ce paragraphe aux champs inconnus et variés précédents et en écrivant les relations obtenues pour toutes variations des champs discrets, il vient le système discret suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{F}_{n+1} \\ -\mathbf{Q}^t \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} + \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{G}_{n+1} \\ \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p - \boldsymbol{\Psi}_\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_n^p \end{array} \right. \quad (\text{V.124})$$

$$+ \text{Lois d'érouissage et condition de cohérence écrites aux points } (\mathbf{x}_i) \quad (\text{V.125})$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + \frac{2H}{3} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)}, \quad \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_n^{(i)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} = \lambda_{n+1}^\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{(i)})$$

où la notation $\tilde{\mathbf{X}}_n$ désigne comme précédemment l'état élastoplastique du système discrétisé en espace à l'instant t_n et donné par $\tilde{\mathbf{X}}_{(\bullet)} = (\tilde{\mathbf{Y}}_{(\bullet)}, \mathbf{E}_{(\bullet)}, \mathbf{E}_{(\bullet)}^p, \mathbf{B}_{(\bullet)}, \mathbf{P}_{(\bullet)})$.

Les vecteurs \mathbf{F}_{n+1} et \mathbf{G}_{n+1} et les matrices \mathbf{K} et \mathbf{Q} représentent les mêmes quantités introduite pour l'approche en contrainte. Seuls les termes Θ_ε , \mathbf{M}_ε et $\Psi_\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n)$ sont propres à la formulation en déformation et valent,

$$\begin{aligned} \Theta_\varepsilon &= a_{\varepsilon\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{N}_\varepsilon^t, \mathbf{N}_\varepsilon), \quad \mathbf{M}_\varepsilon = \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_\varepsilon^t(\mathbf{x}) : \mathbf{C} : \mathbf{N}_\varepsilon(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \\ \text{et } \Psi_\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) &\equiv \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_\varepsilon^t(\mathbf{x}) \lambda_{n+1}(\mathbf{x}) \mathbf{C} : \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \\ &= 2G \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_\varepsilon^t(\mathbf{x}) \lambda_{n+1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Ce système d'équations non-linéaire régissant le problème d'évolution élastoplastique est finalement résolu au moyen d'un schéma de type Newton-Raphson piloté en \mathbf{E}_{n+1} et il vient en introduisant le résidu $\mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{X}_{n+1})$,

$$\mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{X}_{n+1}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p - \mathbf{F}_{n+1} \\ -\mathbf{Q}^t \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} + \Theta_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p + \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{G}_{n+1} \\ \mathbf{M}_\varepsilon \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p - \Psi_\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) - \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{E}_n^p \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (\text{V.126})$$

La structure de l'algorithme de résolution numérique est identique à celle relative à l'approche en contrainte. Ainsi si l'état de déformation \mathbf{E}_{n+1} est connu, la condition de cohérence permet de déterminer le champ de multiplicateur plastique Λ_{n+1} en chaque point $(\mathbf{x}^{(i)})$ à l'aide de la relation suivante,

$$\Lambda_{n+1}^{(i)} = \lambda_{n+1}^\varepsilon(\mathbf{E}_{n+1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}_n^{(i)}) \quad (\text{V.127})$$

et les variables d'écroutissage nodales sont ensuite mises à jour à l'aide des expressions ci-dessous.

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + \frac{2H}{3} \Lambda_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_n^{(i)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Lambda_{n+1}^{(i)} \quad (\text{V.128})$$

Nous sommes donc amenés à déterminer les inconnues principales $\mathbf{X}_{n+1} \equiv (\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p)$ qui sont solution du système non-linéaire donné par $\mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathbf{0}$.

Pour l'approche en déformation, il vient un résultat analogue à (V.10) s'énonçant de la manière suivante,

Resultat V.12

Considérons une résolution de l'équation non-linéaire (V.126) par un schéma de type Newton-Raphson et introduisons le vecteur inconnu $\mathbf{X}_{n+1} = (\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p)$. Alors l'opérateur tangent cohérent global du schéma itératif est *symétrique* et est donné par la relation ci-dessous,

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\varepsilon}{\partial \mathbf{X}_{n+1}}(\mathbf{X}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) \cdot \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} = -\mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{X}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{X}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} \quad (\text{V.129})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\varepsilon}{\partial \mathbf{X}_{n+1}}(\mathbf{X}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^t & \Theta_\varepsilon & \mathbf{M}_\varepsilon \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_\varepsilon & \partial_{\mathbf{E}} \Psi_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (\text{V.130})$$

où la matrice $\partial_{\mathbf{E}}\Psi_{\varepsilon}$ est définie de la manière suivante,

$$\partial_{\mathbf{E}}\Psi_{\varepsilon} \equiv \frac{\partial\Psi_{\varepsilon}}{\partial\mathbf{E}_{n+1}}(\mathbf{E}_{n+1}^k, \tilde{\mathbf{X}}_n) = 2G \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_{\varepsilon}^t(\mathbf{x}) \frac{\partial(\lambda_{n+1}^{\varepsilon} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \mathbf{N}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} \quad (\text{V.131})$$

où le tenseur d'ordre quatre intervenant dans la dernière intégrale est donné par la relation (I.71).

La démonstration est immédiate et identique à celle du résultat (V.10). Il est également possible de se ramener à un système de deux équations, l'une linéaire et l'autre non-linéaire, portant sur les inconnues $(\mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p)$, dont le schéma de Newton-Raphson correspondant admet une matrice tangente *symétrique*.

Nous ne détaillerons pas les calculs permettant d'obtenir des expressions analogues aux relations (V.106). L'algorithme numérique qui a été mise en oeuvre repose sur le résultat ci-dessous et permet de se ramener à la résolution d'une équation non-linéaire portant sur \mathbf{E}_{n+1} , les autres quantités inconnues étant mises à jour une fois \mathbf{E}_{n+1} connu.

Resultat V.13

Soit \mathbf{E}_{n+1} le champ de contraintes nodales, solution du problème d'évolution élastoplastique à t_{n+1} . Alors \mathbf{E}_{n+1} est solution de l'équation non-linéaire ci-dessous.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\varepsilon}(\mathbf{E}_{n+1}) \equiv \mathbf{E}_{n+1} + \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Xi}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1} \cdot (\Psi_{\varepsilon}(\mathbf{E}_{n+1}) + \mathbf{M}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p) - \mathbf{E}_{n+1}^{elas} = 0 \quad (\text{V.132})$$

Cette équation est résolue au moyen d'un schéma de type Newton-Raphson donné par l'algorithme

$$[\mathbf{I} + 2G \mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Xi}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \int_{\Omega_p} \mathbf{N}_{\varepsilon}^t(\mathbf{x}) \frac{\partial(\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta})}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \mathbf{N}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}] \cdot \Delta\mathbf{E}_{n+1}^{k+1} = -\tilde{\mathbf{R}}_{\varepsilon}(\mathbf{E}_{n+1}^k) \quad (\text{V.133})$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{E}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{E}_{n+1}^{k+1} \quad (\text{V.134})$$

où nous rappelons que l'opérateur tangent local admet l'expression suivante,

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}(\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) = 2G \frac{\theta \lambda_{n+1}}{\|\boldsymbol{\xi}_{n+\theta}^E\|} (J - \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}) + \frac{\hat{\mathbf{n}}_{n+\theta} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}}{1 + \frac{H+h}{3G}} \quad (\text{V.135})$$

L'état élastoplastique $\tilde{\mathbf{X}}_{n+1}$ est ensuite entièrement déterminé en réactualisant toutes les quantités inconnues en s'aidant des relations ci-dessous

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1} \cdot \Psi_{\varepsilon}(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad (\text{V.136})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p \quad (\text{V.137})$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{B}_n^{(i)} + \frac{2H}{3} (\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_{n+\theta}^{(i)})(\mathbf{E}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_n) \quad (\text{V.138})$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_n^{(i)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{(i)}(\mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{X}_n) \quad (\text{V.139})$$

où la réponse $(\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas}, \mathbf{E}_{n+1}^{elas})$ du milieu supposé purement élastique et la matrice $\boldsymbol{\Xi}_{\varepsilon}$ sont définies par les expressions,

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{n+1}, \quad \mathbf{M}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^{elas} = \mathbf{G}_{n+1} + \mathbf{Q}^t \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{n+1}^{elas} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Xi}_{\varepsilon} = \boldsymbol{\Theta}_{\varepsilon} - \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \quad (\text{V.140})$$

Ce résultat achève ce paragraphe consacré à la mise en œuvre numérique de formulations variationnelles en élastoplasticité mettant en jeu des équations intégrales. Plusieurs points méritent d'être soulignés

- ◇ Deux formulations variationnelles reposant respectivement sur une approche en contrainte et en déformation ont été présentées, intégrant tous deux les algorithmes d'intégration locale du chapitre I.
- ◇ L'application d'une méthode de type Bubnov-Galerkin pour le triplet de champs inconnus $((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}), \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p)_{n+1}$ ou $((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}), \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p)_{n+1}$ engendre un schéma de Newton-Raphson appliqué au système global qui présente une matrice tangente cohérente globale *symétrique*.
- ◇ Nous avons montré que le système non-linéaire global peut se réduire à une unique équation non-linéaire portant, soit sur \mathbf{E}_{n+1} , soit sur \mathbf{S}_{n+1} , représentant respectivement les déformations et les contraintes *nodales* du maillage de Ω_p . L'algorithme qui en découle est en tout point analogue à l'algorithme obtenu pour l'approche en collocation.

Le schéma de résolution étant clairement défini, il nous reste à traiter les procédures d'intégration numérique permettant d'évaluer les différentes intégrales doubles apparaissant dans les formulations, ce point faisant l'objet de la prochaine section.

V.3 Evaluation numérique des intégrales doubles

La discrétisation des relations issues de l'approche variationnelle font intervenir des intégrales doubles. En reprenant l'expression des formes bilinéaires obtenues par les résultats (V.1), (V.4) et (V.5), nous pouvons distinguer trois types d'intégrales doubles élémentaires respectivement définies sur des couples élémentaires Surface-Surface, Surface-Volume et Volume-Volume. Dans tous les cas de figures, nous sommes amenés à évaluer l'intégrale double \mathcal{I} définie par la relation ci-dessous.

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{D}_e^{(1)}} \int_{\mathcal{D}_e^{(2)}} f_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathcal{D}_y^{(2)} d\mathcal{D}_x^{(1)} \quad \text{avec} \quad f_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{-n}) \quad (\text{V.141})$$

où $\mathcal{D}_e^{(1)}$ et $\mathcal{D}_e^{(2)}$ représentent les supports géométriques de deux éléments finis pouvant être surfaciques ou volumiques. L'entier n vaut 1 si $\mathcal{D}_e^{(2)}$ est un élément fini de frontière et n vaut 2 s'il s'agit d'un élément fini de domaine.

Nous introduisons l'élément de référence $\Delta_e^{(i)}$ et la bijection $\Phi^{(i)}$ associés à chaque élément réel $\mathcal{D}_e^{(i)}$ et \mathcal{I} peut être reformulée de la manière suivante,

$$\mathcal{I} = \int_{\Delta_e^{(1)}} \int_{\Delta_e^{(2)}} f_n(\Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta}), \Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) J_y(\boldsymbol{\xi}) J_x(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} \quad (\text{V.142})$$

Comme pour l'approche en collocation, l'intégration régulière correspondant au cas où les supports $\Delta_e^{(1)}$ et $\Delta_e^{(2)}$ sont disjoints, ne pose aucun problème et une technique inspirée de [Lachat et al.76] est utilisée dans [Andrá et al.97] pour adapter le nombre de points de Gauss

de manière optimale.

Dans ce mémoire, nous nous focaliserons essentiellement sur l'intégration double singulière. Des techniques d'intégration numérique respectant la symétrie de l'intégration double, i.e. ne privilégiant a priori aucune des deux sommations, ont été abordés en 3D dans les travaux [Andrá et al.97], [Sauter et al.97b], [Sauter et al.97a] et [Erichsen et al.98]. Malheureusement tous ces schémas d'intégration sont obtenus en *élasticité* et ces résultats ne concernent par conséquent que des intégrations doubles singulières surfaciques avec $\mathcal{D}_e^{(1)} \equiv S_e^{(1)}$ et $\mathcal{D}_e^{(2)} \equiv S_e^{(2)}$. De plus il est nécessaire de distinguer trois cas d'intégrations singulières :

- ◇ les supports $S_e^{(1)}$ et $S_e^{(2)}$ sont confondus (*coincident elements*),
- ◇ les supports $S_e^{(1)}$ et $S_e^{(2)}$ ont une arête commune (*edge-adjacent elements*),
- ◇ les supports $S_e^{(1)}$ et $S_e^{(2)}$ ont un coin commun (*vertex-adjacent elements*).

Ces règles d'intégration présentent de nombreux avantages sur le plan théorique [Sauter et al.96]. Néanmoins leur mise en œuvre numérique demande un investissement très lourd.

Pour le problème élastoplastique, remarquons que le nombre de cas d'intégration à considérer augmente très rapidement et qu'il n'existe actuellement aucun résultat publié concernant l'évaluation d'intégrales singulières de type Surface-Volume et Volume-Volume. Par conséquent, nous avons adopté un choix plus simple décrit par exemple dans [Bonnet95b] et appliqué avec succès dans [Li et al.98] et [Xiao98]. Cette technique utilise pleinement le caractère régularisé de la formulation.

Nous avons montré dans le chapitre III que les potentiels surfaciques et volumiques admettant des noyaux intégrables sont *continus* en tout point de l'espace pour des densités suffisamment régulières. Nous pouvons alors écrire les relations suivantes,

$$\mathcal{I} = \int_{\Delta_e^{(1)}} \mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}) J_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}) \equiv \int_{\Delta_e^{(2)}} f_n(\Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta}), \Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) J_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{V.143})$$

où $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta})$ est une fonction continue pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \Delta_e^{(1)}$. Afin de lever proprement le caractère singulier de l'intégrande, nous introduisons pour tout point $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}_e^{(1)}$ le point $\boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta}) \in \Delta_e^{(2)}$ défini par

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in \Delta_e^{(1)}, \quad \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta}) = \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e^{(2)}} \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\| \quad (\text{V.144})$$

L'intersection des supports $\mathcal{D}_e^{(1)}$ et $\mathcal{D}_e^{(2)}$ n'étant pas vide, il existe un élément unique $\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\eta})$ de $\mathcal{D}_e^{(1)}$ tel que

$$\Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\eta})) = \Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta})) \quad (\text{V.145})$$

L'introduction des points $\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\eta})$ et $\boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta})$ va être déterminante pour obtenir un changement de variable adéquat permettant de se ramener à une intégrande de \mathcal{I} *bornée* et *continue*.

CAS OÙ $\mathcal{D}_e^{(2)}$ EST UN ÉLÉMENT FINI DE FRONTIÈRE

Envisageons le cas où le support $\mathcal{D}_e^{(2)}$ est surfacique. Pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}_e^{(1)}$ fixé, nous allons alors introduire une représentation *polaire* du domaine de référence $\mathcal{D}_e^{(2)}$, en subdivisant ce dernier en triangles. Nous pouvons ainsi écrire,

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta}) + \rho(\cos \theta, \sin \theta) \quad (\text{V.146})$$

Il est alors possible de réexprimer l'intégrale intérieure $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta})$ de la manière suivante,

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\rho}(\theta)} f_1(\Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta})) J_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\xi}) \rho \, d\rho \, d\theta \quad (\text{V.147})$$

Pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}_e^{(1)}$, il en résulte que l'intégrale $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta})$ est toujours *régulière* et ceci grâce à l'introduction d'un système de coordonnées polaires dépendant de $\boldsymbol{\eta}$. En utilisant la relation (V.145), nous avons en effet l'expression ci-dessous.

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}_e^{(1)}, \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) - \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta})\| \quad (\text{V.148})$$

$$= \|\Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) - \Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta})) + \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\eta})) - \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta})\| \quad (\text{V.149})$$

$$= \|\rho \hat{\Phi}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta})) + \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_0(\boldsymbol{\eta})) - \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta})\| \quad (\text{V.150})$$

avec la propriété remarquable que $\hat{\Phi}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta}))$ ne s'annule jamais, ce qui montre que ce changement de variables (V.146) régularise l'intégrale interne $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta})$, permettant du coup l'évaluation de \mathcal{I} par points de Gauss.

CAS OÙ $\mathcal{D}_e^{(2)}$ EST UN ÉLÉMENT FINI DE DOMAINE

Envisageons le cas où le support $\mathcal{D}_e^{(2)}$ est volumique. Pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}_e^{(1)}$ fixé, nous introduisons une représentation *sphérique* du domaine de référence $\mathcal{D}_e^{(2)}$, en subdivisant ce dernier en pyramides. Nous pouvons ainsi écrire,

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta}) + \rho(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \quad (\text{V.151})$$

Comme pour le traitement de l'intégration surfacique, il est alors possible de réexprimer l'intégrale intérieure $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta})$ de la manière suivante,

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\bar{\rho}(\phi, \theta)} f_2(\Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta})) J_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\xi}) \rho^2 \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi \quad (\text{V.152})$$

L'introduction du système de coordonnées sphériques mobile (V.151) absorbe la singularité ρ^{-2} de la fonction f_2 , ce qui rend l'intégrande de $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta})$ bornée et continue. Il est alors possible d'évaluer l'intégrale double en utilisant une règle d'intégration numérique par points de Gauss.

Remarque V.8 Dans les travaux [Hayami et al.88] et [Xiao98], tout le processus de régularisation décrit précédemment est réalisé sur l'élément réel. On introduit ainsi un point $\boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta}) \in \Delta_e^{(2)}$ donné par

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in \Delta_e^{(1)}, \quad \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta}) = \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e^{(2)}} \|\Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) - \Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta})\| \quad (\text{V.153})$$

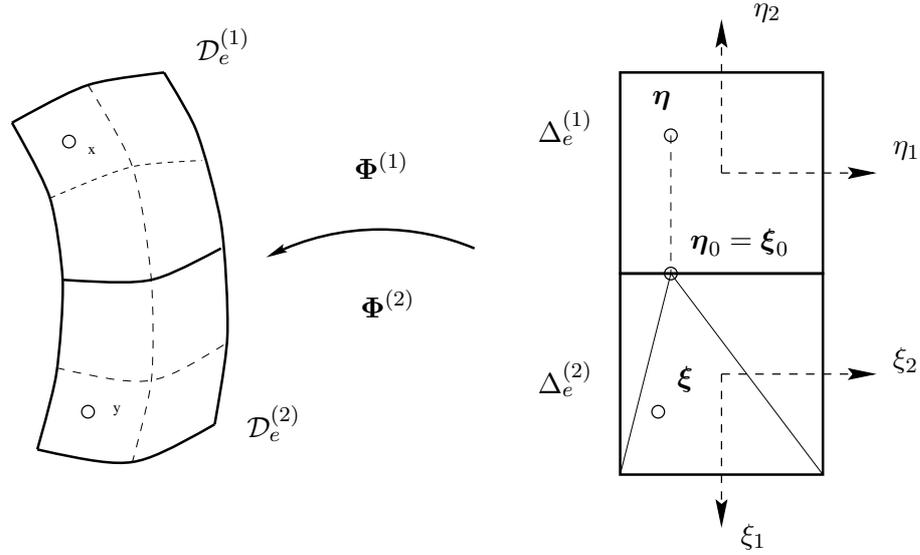


Figure V.1 : Cas d'une intégration surfacique singulière adjacente

Lorsque les éléments finis ne sont pas trop distordus, ces notions sont bien évidemment équivalentes car les fonctions d'interpolation ont alors des gradients modérés. Notons néanmoins que la recherche de $\xi_0(\boldsymbol{\eta})$ donné par (V.153) fait intervenir un calcul *non-linéaire* [Xiao98] et peut admettre plusieurs solutions pour des éléments courbes, alors que la définition (V.144) n'induit pas ces problèmes. \square

MISE EN OEUVRE NUMÉRIQUE

Etant donné que $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}) \in C(\Delta_e^{(1)})$, nous pouvons utiliser classiquement la règle d'intégration par points de Gauss $(\omega^{(i)}, \boldsymbol{\eta}^{(i)})$ sur le domaine $\Delta_e^{(1)}$ pour la sommation par rapport à la variable \boldsymbol{x} et il en résulte que

$$\mathcal{I} \simeq \sum_{i=1}^{N_G^{(1)}} \omega^{(i)} J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\eta}^{(i)}) \mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}^{(i)}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}^{(i)}) = \int_{\Delta_e^{(2)}} f_n(\Phi^{(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(i)}), \Phi^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) J_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{V.154})$$

L'intégrale $\mathcal{I}(\boldsymbol{\eta}^{(i)})$ est ensuite évaluée à l'aide de la procédure d'intégration singulière décrite dans la section IV.2, en introduisant un système de coordonnées radiales centré au point $\xi_0(\boldsymbol{\eta}^{(i)})$ défini par la relation (V.144).

Remarque V.9 Le développement de la méthode d'intégration singulière dans la section IV.2 se justifie pleinement lors de l'évaluation des intégrales doubles singulières. Pour certains points d'intégrations externes, la subdivision de l'élément interne conduit à l'existence de triangles si obtus que la transformation angulaire devient nécessaire. \square

Conclusion

Nous avons présenté une formulation variationnelle symétrique entièrement régularisée basée sur une approche mixte éléments finis de frontière/éléments finis de domaine, valable pour un

problème intérieur et extérieur de frontière lipschitzienne. Cette formulation est caractérisée par les points suivants :

• **Formulation variationnelle du problème élastoplastique**

- ◇ Ce système d'équations variationnelles découlent directement de la stationnarité d'une fonctionnelle de type Hu Washizu. Pour l'obtention de ces équations, nous avons restreint l'ensemble des déplacements tests aux éléments donnés sous la forme d'une variation de la représentation intégrale de \mathbf{u}_{n+1} . Nous avons également montré que ce choix engendrant un système d'équations intégrales de Fredholm de première espèce est le seul à mener à une formulation variationnelle.
- ◇ La régularisation de l'opérateur surfacique hypersingulier a été effectuée en considérant l'opérateur de dérivation conormale au sens des distributions. Si le champ de déformation plastique est suffisamment régulier, il est possible de reformuler les formes bilinéaires relatives aux déformations plastiques et d'atténuer le caractère singulier de l'intégrande, en ne faisant intervenir que des noyaux en $O(r^{-1})$.
- ◇ Deux algorithmes basés respectivement sur une approche en contrainte et en déformation ont été proposés et présentent une structure identique. Tous deux engendrent un opérateur tangent global *symétrique*. Cette propriété est une conséquence de l'écriture sous forme faible de la loi d'écoulement plastique.

• **Mise en œuvre d'une méthode de type Bubnov-Galerkin**

- ◇ Nous avons présenté les algorithmes pilotés en contrainte et en déformation résultant d'une approche de type Bubnov-Galerkin admettant pour inconnues principales, les densités surfaciques, les déformations plastiques et les contraintes ou les déformations totales.
- ◇ Cette méthode se révèle d'une mise en œuvre numérique très simple et le fait de ne considérer que des noyaux intégrables permet de réutiliser les procédures d'intégrations développées pour l'approche en collocation.
- ◇ Les approximations des champs de déformations totales, de déformations plastiques et de contraintes pouvant être prises *continues*, nous avons montré que seule la formulation ne faisant intervenir que des noyaux en $O(r^{-1})$ permet une évaluation satisfaisante des différentes matrices d'influence à un moindre coût et permet de rester dans des temps de calcul acceptables.
- ◇ Nous avons clairement établi la nécessité d'utiliser les systèmes de coordonnées sphériques lors de l'évaluation numérique des intégrales internes faiblement singulières. Ce changement de variables permet de mieux représenter les variations rapides de l'intégrande au voisinage de la singularité que le système de coordonnées triangulaires de Duffy.

La mise en œuvre numérique de la méthode variationnelle n'envisage que la formulation en déformation car seul l'algorithme de Retour Radial piloté en déformation se dégenère bien dans le cas de la plasticité parfaite. Les résultats obtenus seront présentés dans le prochain chapitre.

Chapitre VI

Exemples numériques

Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous nous proposons de traiter plusieurs exemples numériques à l'aide des différentes méthodes de résolution par équations intégrales décrites dans ce mémoire. Trois procédures numériques ont été développées dans le cadre de cette thèse :

- ◇ Approche par collocation reposant sur l'écriture de l'équation intégrale en déplacement DBIE (*Displacement Boundary Integral Equations*).
- ◇ Approche par collocation utilisant respectivement l'équation intégrale en déplacement et en vecteur-contrainte aux points du maillage de S associés à des conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet. Cette méthode mène à un système d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce MBIE (*Mixed Boundary Integral Equations*),
- ◇ Approche variationnelle reposant sur une méthode de résolution de type Bubnov-Galerkin GBEM.

L'objet principal de ce chapitre est de valider les formulations relativement complexes obtenues dans ce mémoire pour des problèmes définis sur des domaines polyédraux et de discuter des résultats obtenus à l'aide des différentes méthodes. Nous nous proposons de traiter les trois exemples numériques suivants :

- ◇ Cylindre élastoplastique sollicité en torsion,
- ◇ Cavité sphérique en milieu infini soumis, soit à un déplacement radial constant, soit à une pression interne uniforme,
- ◇ Plaque trouée sollicitée en traction.

VI.1 Cylindre en torsion

Cet exemple numérique constitue un cas-test très intéressant car ce problème admet une solution analytique et la géométrie considérée présente des singularités de type *arête*, situées à l'intersection des faces supérieure et inférieure et de l'enveloppe latérale.

VI.1.1 Description du problème et solution analytique

On considère un cylindre élastoplastique parfait de rayon $c = 100 \text{ mm}$ et de hauteur $h = 50 \text{ mm}$, soumis à ses deux extrémités à une rotation angulaire $\pm\theta/2$ de torsion. Les constantes caractérisant le matériau sont données par le module d'Young $E = 200000 \text{ MPa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et la limite élastique $\sigma_E = 240 \text{ MPa}$. À partir de ces valeurs, on définit classiquement le module d'élasticité en cisaillement G et la limite d'élasticité en cisaillement k_E à l'aide des relations ci-dessous :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad k_E = \frac{\sigma_E}{\sqrt{3}} \quad (\text{VI.1})$$

Introduisons alors la rotation de la section θ_E pour laquelle il y a début de plastification et T_E le moment de torsion correspondant. Nous obtenons alors,

$$\theta_E = \frac{k_E h}{G c} \quad \text{et} \quad T_E = \frac{\pi k_E}{2} c^3 \quad (\text{VI.2})$$

La solution du problème d'évolution élastoplastique peut être facilement caractérisée par la loi de comportement intégrée reliant le moment de torsion à la rotation angulaire et s'exprimant sous la forme suivante,

$$T(\theta) = T_E \frac{\theta}{\theta_E} \quad \text{pour} \quad \theta \leq \theta_E \quad (\text{VI.3})$$

$$T(\theta) = \frac{4}{3} T_E \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_E}{\theta} \right)^3 \right] \quad \text{pour} \quad \theta \geq \theta_E \quad (\text{VI.4})$$

VI.1.2 Résultats numériques

Le modèle numérique est obtenu à partir des maillages surfacique et volumique représentés sur la figure (VI.1), constitués de 48 éléments finis de frontière de type Q_9 et 8 éléments finis de domaine de type H_{27} . Les relations obtenues, liant le moment de torsion T à la rotation angulaire θ sont représentées sur les figures suivantes

- ◇ Approche par une méthode de collocation DBIE sur la figure (VI.2),
- ◇ Approche par une méthode de collocation mixte MBIE sur la figure (VI.3),
- ◇ Approche par une méthode variationnelle sur la figure (VI.4).

On constate une très bonne adéquation entre les résultats numériques obtenus et la solution analytique du problème. Nous avons également comparé les valeurs locales des différents champs inconnus à savoir, le déplacement sur la frontière, le vecteur-contrainte sur les faces supérieure et inférieure ainsi que les contraintes, déformations et déformations plastiques et les écarts entre la solution analytique et les solutions numériques ne dépassent pas 0,7 %.

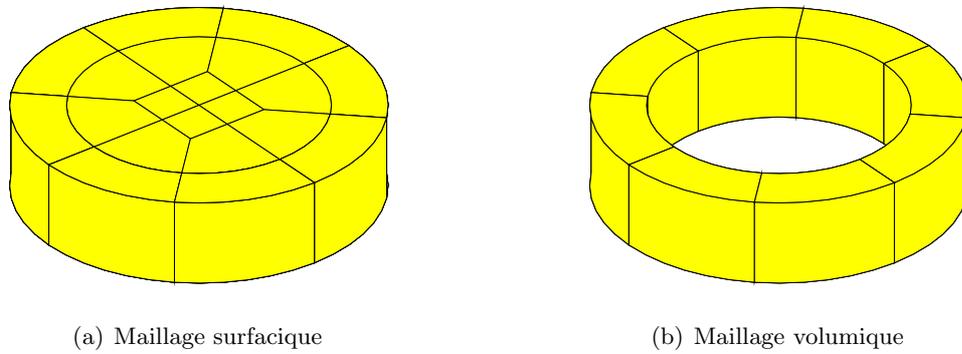


Figure VI.1 : Discretisations EFF / EFD du cylindre

Loi de comportement integree

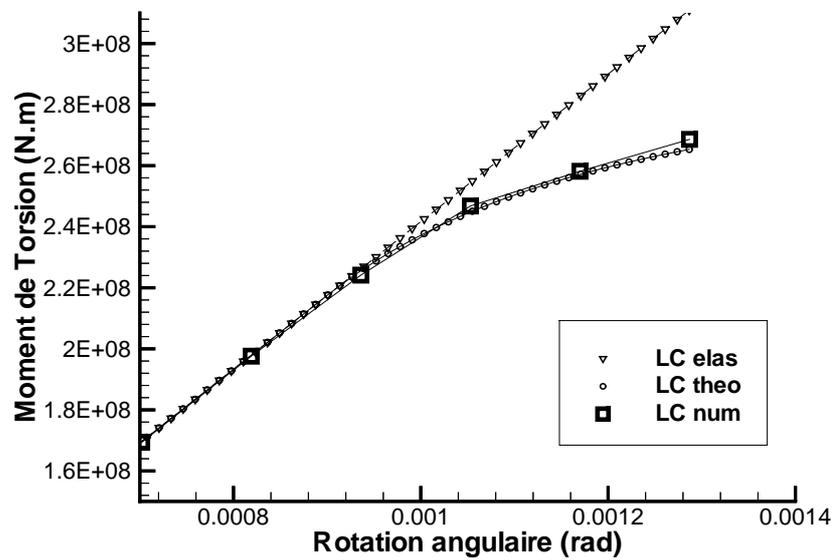


Figure VI.2 : Approche par une méthode de collocation DBIE

Loi de comportement integree

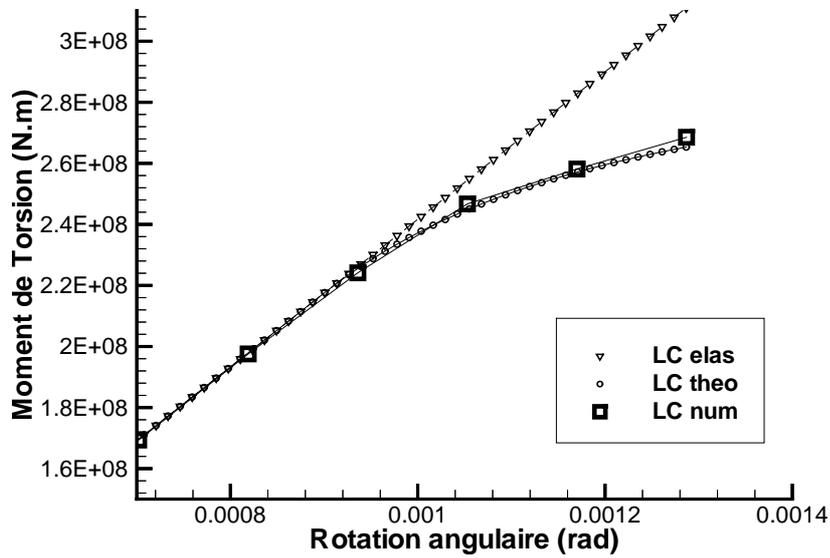


Figure VI.3 : Approche par une méthode de collocation MBIE

Loi de comportement integree

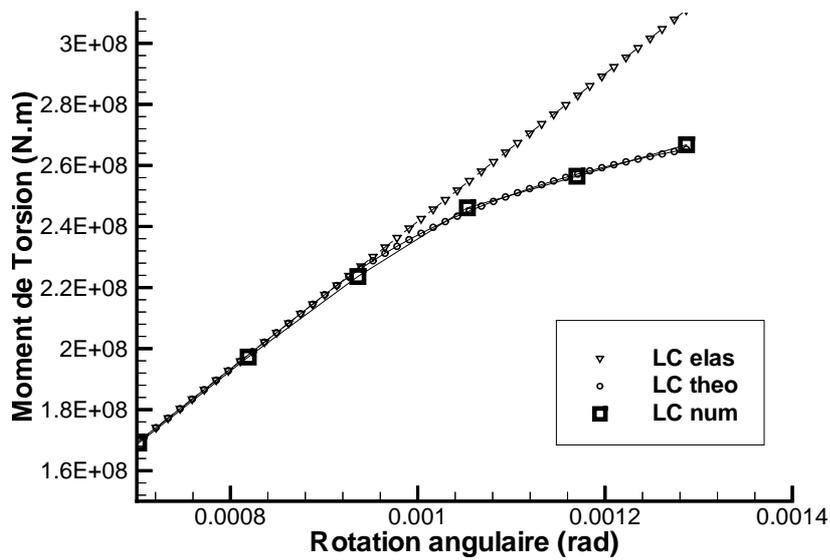


Figure VI.4 : Approche par une méthode variationnelle

VI.1.3 Simulation de sollicitations cycliques

Une perspective intéressante de l'utilisation des méthodes intégrales concerne la simulation de sollicitations cycliques. Pour ce type de problème, un très grand nombre d'incrément doit être pris en compte pour bien représenter l'histoire du chargement, ce qui génère des coûts de calcul prohibitifs, vu qu'il est nécessaire de résoudre un système linéaire à chaque itération.

En éléments finis de domaine, l'utilisation d'une méthode de *Newton-Raphson modifiée* permet de se restreindre à une décomposition de Cholesky à chaque incrément et à deux remontées de système triangulaire à chaque itération. Ce type d'approche peut engendrer une augmentation du nombre d'itérations au cours d'un incrément [Simo et al.85].

En éléments finis de frontière, il convient de remarquer que la fait d'envisager une méthode de *Newton-Raphson modifiée* pour résoudre les équations non-linéaires (IV.56) ou (V.132) revient à choisir la matrice identité \mathbf{I} comme opérateur tangent. Ce choix est des plus intéressants car il ne demande *aucune inversion de système matriciel*. De plus, on s'aperçoit qu'une grande partie du temps CPU global concerne l'évaluation des matrices d'influence [Jiang et al.97]. Plus le nombre d'incrément est important, plus le calcul de ces différents termes de (IV.56) ou (V.132) peut ainsi être amorti.

Un calcul simulant 7 cycles alternés, correspondant à 98 incrément, a été effectué en incluant un effet d'érouissage du matériau. Les informations liées au temps CPU et au temps CPU relatifs des phases d'évaluation des systèmes matriciels sont consignées dans le tableau (IV.1). Remarquons que le temps consacré à l'obtention du modèle numérique est très important et représente au moins 90 % du temps CPU global.

	Collocation MBIE		Galerkin GBEM	
	Calcul Système	Schéma itératif	Calcul Système	Schéma itératif
Temps CPU (en s)	230	32	3375	32
Temps CPU relatif	88 %	12 %	99 %	1 %

Tableau VI.1: Simulation de sollicitations cycliques - Comparaison des temps CPU

Nous présentons les résultats obtenus pour un matériau avec un érouissage tout d'abord isotrope linéaire correspondant à $h = 20000 \text{ MPa}$ (voir figure VI.5) puis cinématique linéaire avec $H = 20000 \text{ MPa}$ (voir figure VI.6).

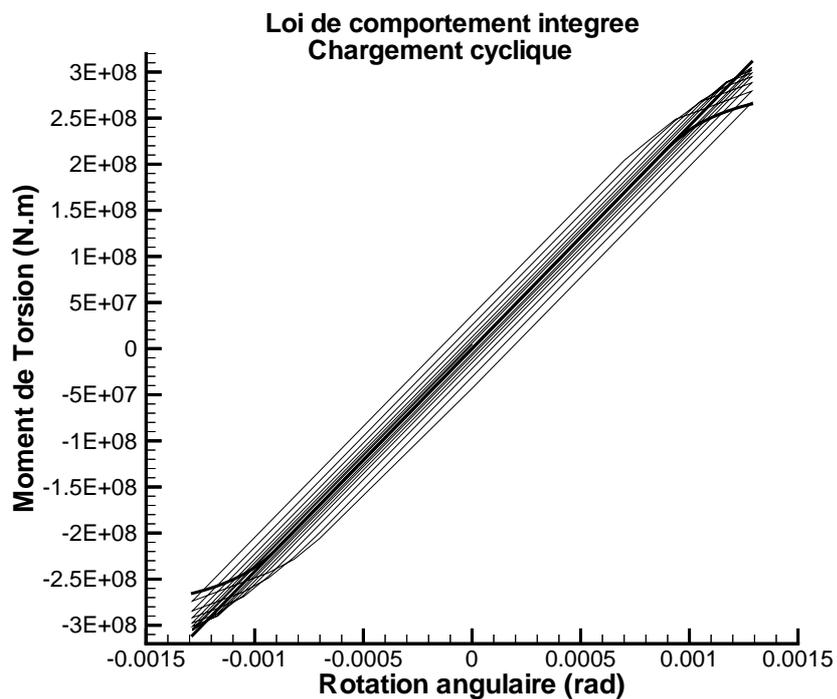


Figure VI.5 : Approche variationnelle - Simulation avec écrouissage isotrope

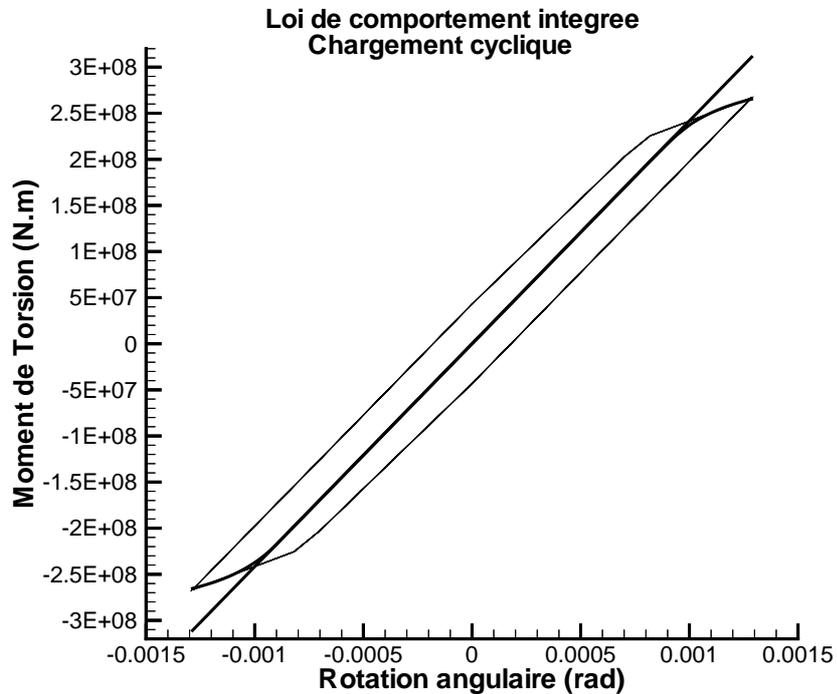


Figure VI.6 : Approche variationnelle - Simulation avec écrouissage cinématique

VI.2 Cavité sphérique en milieu infini

Le deuxième exemple numérique traite de l'étude d'une cavité sphérique dans un milieu infini élastoplastique parfait. La résolution par équations intégrales est particulièrement bien adaptée à ce type de problème, vu que contrairement aux éléments finis de domaine le maillage considéré n'a pas à être tronqué arbitrairement.

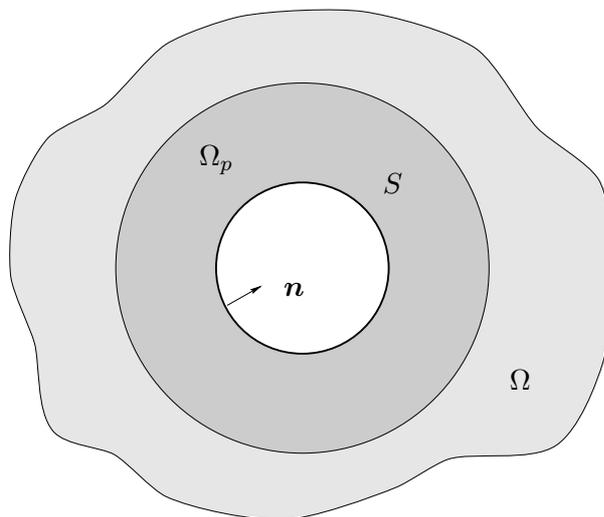


Figure VI.7 : Cavité sphérique en milieu infini

VI.2.1 Description du problème et solution analytique

On considère une cavité sphérique de rayon a avec $a = 1 \text{ mm}$ dans un milieu infini élastoplastique caractérisé par les constantes matérielles suivantes, module d'Young $E = 200000 \text{ MPa}$, coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et limite élastique $\sigma_E = 240 \text{ MPa}$.

Le choix de ce cas-test est motivé par le fait que ce problème admet une solution analytique simple. Notons $u(r)$ le déplacement radial, $p(r) \equiv \sigma_{rr}(r)$ la pression radiale du tenseur des contraintes, c le rayon de la zone plastifiée et introduisons p_E la pression correspondant au début de plastification du milieu. Nous avons alors $p_E = \frac{2}{3} \sigma_E$ et les grandeurs surfaciques, à savoir déplacement radial et pression sur S , sont données par les expressions suivantes :

- **Solution élastique**

$$\frac{u(a)}{a} = \frac{1 + \nu}{2 E} p(a) \quad (\text{VI.5})$$

- **Solution élastoplastique**

$$\frac{u(a)}{a} = \frac{\sigma_E}{E} \left[(1 - \nu) \left(\frac{c}{a} \right)^3 - \frac{2}{3} (1 - 2\nu) \left(1 + 3 \ln \frac{c}{a} \right) \right] \quad (\text{VI.6})$$

$$p(a) = \frac{2}{3} \sigma_E \left[1 + 3 \ln \frac{c}{a} \right] \quad (\text{VI.7})$$

Remarquons qu'il est possible de considérer ce problème, posé soit en terme de déplacement imposé (*problème de Dirichlet*), soit en terme de vecteur-contrainte imposé (*problème de Neumann*), ce qui confère à ce cas-test un intérêt supplémentaire.

VI.2.2 Résultats numériques

Le modèle numérique envisagé est très grossier (24 éléments finis de frontière de type Q_9 et 24 éléments finis de domaine de type H_{27}) et est caractérisé par les maillages surfacique et volumique représentés sur les figures (VI.8). Nous allons successivement envisager des conditions

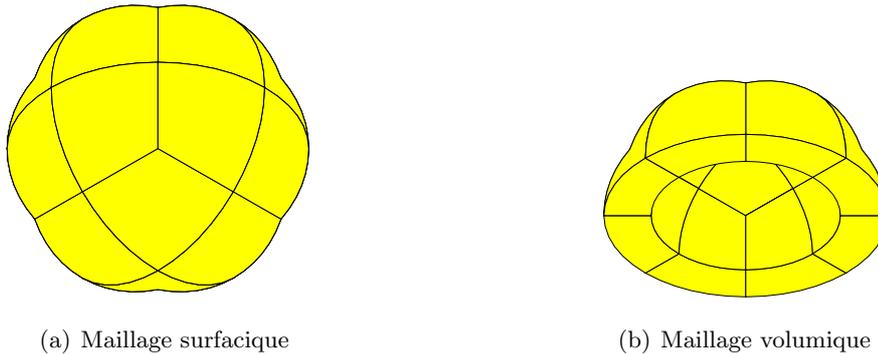


Figure VI.8 : Discrétisations EFF / EFD de la cavité

aux limites de type *déplacement radial imposé* et de type *pression imposée* et comparer les résultats obtenus à l'aide des différentes méthodes des équations intégrales.

CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE DIRICHLET

L'introduction de conditions aux limites de type *déplacement imposé* engendre un système d'équations intégrales, qui diffère selon la méthode de résolution envisagée.

- ◇ DBIE : Ecriture de l'équation intégrale en déplacement aboutissant à une équation de Fredholm de *première espèce*,
- ◇ MBIE : Ecriture de l'équation intégrale en vecteur-contrainte aboutissant à une équation de Fredholm de *seconde espèce*,
- ◇ GBEM : Ecriture de l'équation intégrale en déplacement aboutissant à une équation de Fredholm de *première espèce* sous forme variationnelle.

Nous nous sommes dans un premier temps intéressé à la réponse élastique du milieu soumis à un déplacement imposé $u(a) = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ correspondant à une pression théorique $p(a) = 80 \text{ MPa}$. Le maillage étant tridimensionnel, on relève pour chaque point de la frontière la pression résultant du calcul.

On constate alors que les méthodes DBIE et GBEM donnent des résultats très similaires et ne permettent pas une bonne évaluation du vecteur-contrainte inconnu sur la frontière, ce qui met clairement en évidence le caractère numériquement mal posé du système de Fredholm de *première espèce*. Par contre, le fait d'envisager un système de Fredholm de *seconde espèce*

fournit de très bons résultats (voir tableau (VI.2)), ce qui justifie et valide pleinement l'approche originale par collocation présentée dans le chapitre IV.

	Collocation DBIE	Collocation MBIE
Pression minimale (en MPa)	61	77
Pression maximale (en MPa)	91	82
Amplitude (en MPa)	30	5
Erreur maximale	25 %	4 %

Tableau VI.2: Evaluation du vecteur-contrainte pour une réponse élastique

Les résultats élastiques présentés ne sont néanmoins pas très bons et ce constat résulte vraisemblablement d'une discrétisation trop grossière de la géométrie. Nous n'avons donc pas jugé nécessaire de poursuivre le calcul dans le domaine élastoplastique.

CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE NEUMANN

Nous nous proposons à présent de considérer le problème de la cavité sphérique soumise à une pression interne. Les inconnues de frontière deviennent ainsi les valeurs nodales du champ de déplacement sur S . Notons que les deux approches par collocation sont équivalentes et résultent de la discrétisation de l'équation intégrale en déplacement.

Etant en présence d'un problème de Neumann, la matrice \mathbf{K} est singulière pour l'approche GBEM et les modes rigides ont été supprimés à l'aide du procédé décrit dans [Huang et al.97]. Pour la méthode de collocation, le problème étant extérieur, la matrice \mathbf{K} n'est pas singulière [Kupradze et al.79] et [Chen et al.92].

La réponse élastoplastique du milieu, obtenue respectivement à l'aide des approches par collocation et variationnelle, est représentée sur les figures (VI.9) et (VI.10). Le nuage de points résulte du fait que le problème n'est pas numériquement axisymétrique, ce qui induit un déplacement radial non uniforme sur S . Nous avons également tracé sur la même figure, la réponse théorique et la réponse du milieu supposé purement élastique.

On constate que les résultats sont très encourageants mais les deux modèles numériques demeurent trop raides, ce qui occasionne une erreur relative maximale atteignant 12%. Il convient cependant de noter que la discrétisation adoptée par rendre compte du comportement élastoplastique est très grossière.

Pour s'en convaincre, nous avons adopté de représenter le nuage de points (u, p) en prenant pour p la composante σ_{rr} issu de la représentation intégrale du tenseur de contrainte. Il est alors possible de mieux se rendre compte de la pertinence des discrétisations adoptées et on note une dispersion très importante des résultats représentés sur les figures (VI.11) et (VI.12). Nous n'avons malheureusement pas été en mesure de raffiner les maillages surfacique et volumique, ceci conduisant à un modèle numérique trop important.

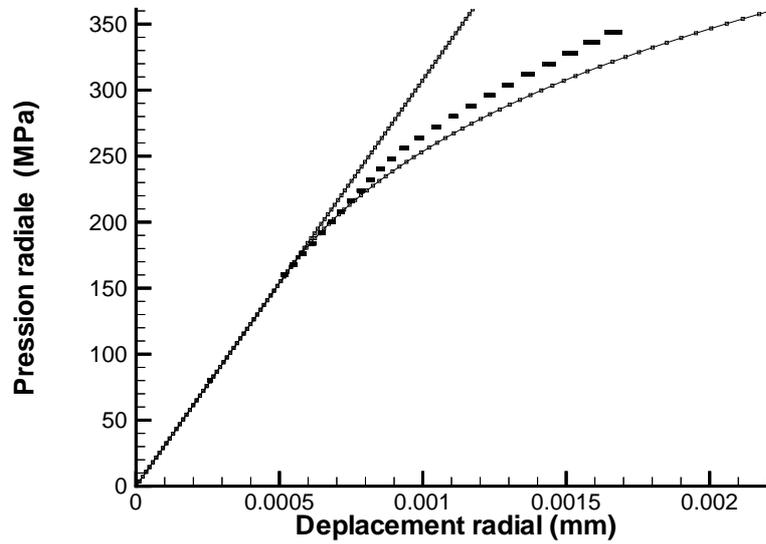


Figure VI.9 : Approche par collocation - DBIE

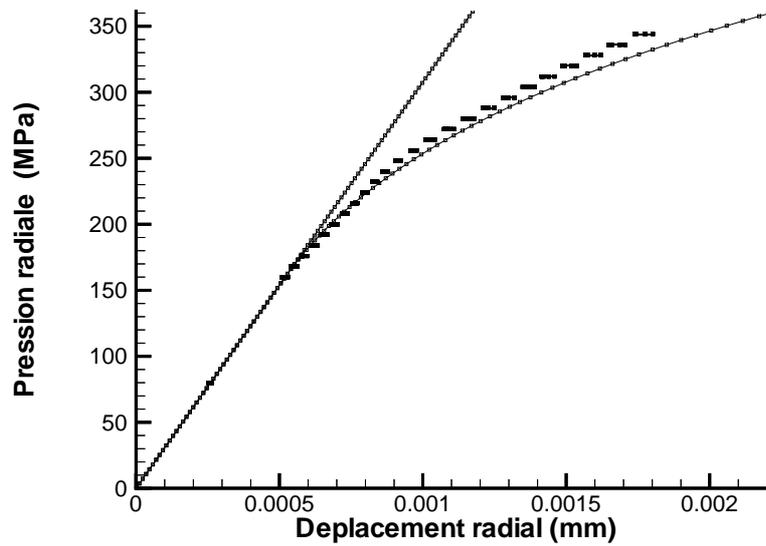


Figure VI.10 : Approche variationnelle - GBEM

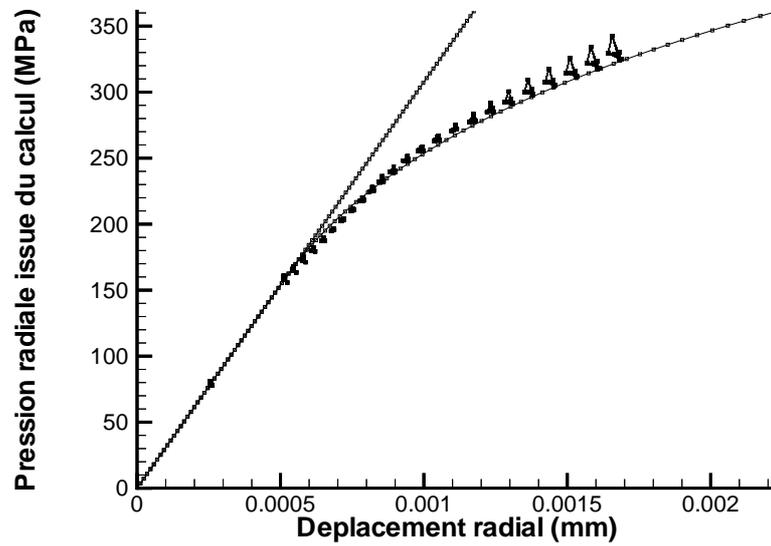


Figure VI.11 : Approche par collocation - DBIE

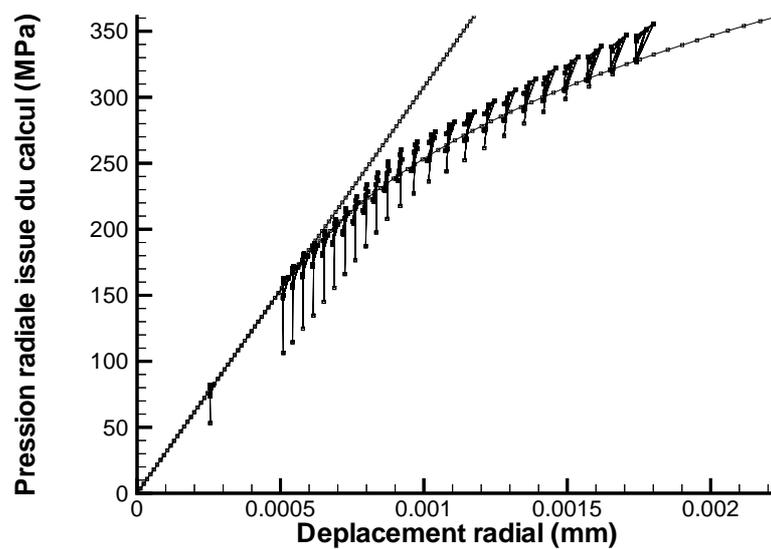


Figure VI.12 : Approche variationnelle - GBEM

VI.3 Plaque trouée

Ce dernier exemple numérique concerne l'étude d'une plaque trouée sollicitée en traction. Ce cas-test a été abordé dans de nombreuses publications (voir [Banerjee et al.86], [Cruse et al.86b], [Huber et al.96] et [Cisilino et al.97]) et constitue de ce fait une bonne référence pour valider les formulations proposées.

Considérons la géométrie définie sur la figure (VI.13) avec $L = 360 \text{ mm}$, $l = 200 \text{ mm}$, $r = 50 \text{ mm}$ et la hauteur valant $h = 40 \text{ mm}$. Les constantes matérielles du matériau sont données par le module d'Young $E = 70000 \text{ MPa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,2$, la limite élastique $\sigma_E = 243 \text{ MPa}$ et un coefficient d'écrouissage isotrope $h = 2240 \text{ MPa}$ (voir par exemple [Huber et al.96]). Le problème élastoplastique de la plaque trouée n'admettant pas de

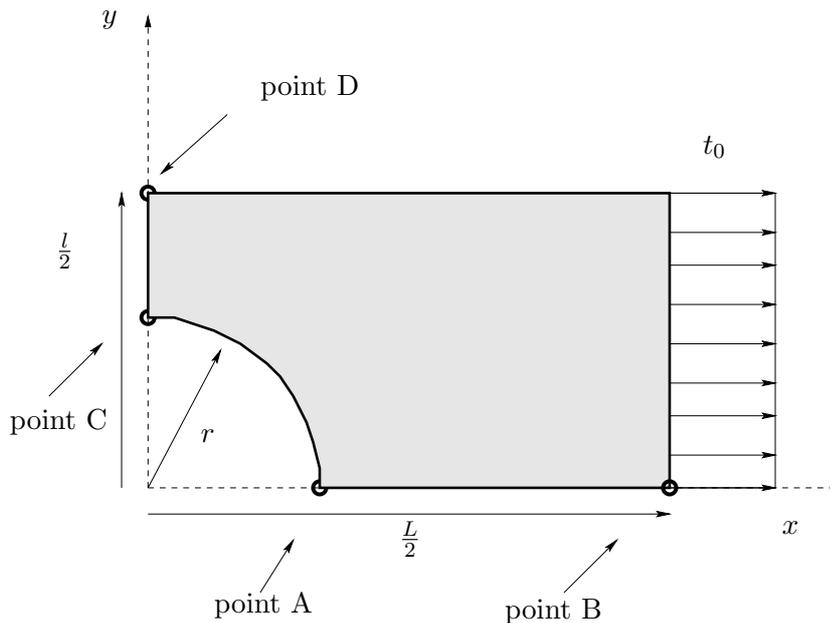


Figure VI.13 : Définition de la géométrie de la plaque trouée

solution analytique, nous avons établi une solution de référence à l'aide d'un calcul éléments finis de domaine en considérant un maillage *fin*, noté *FEM 2* et représenté sur la figure (VI.14).

Les maillages utilisés par les formulations par équations intégrales sont donnés sur la figure (VI.14). Nous nous proposons également de comparer les méthodes des éléments finis de frontière et des éléments finis de domaine à maillage égal, noté *FEM 1*. Pour ce faire, nous représentons le déplacement caractéristique (u/r ou v/r) aux points A, B, C et D en fonction du paramètre de chargement λ , défini par $t_0 = \lambda \sigma_E$. Les résultats obtenus sont donnés sur les figures (VI.15), (VI.16), (VI.17) et (VI.18).

A l'issue des différents résultats présentés, il convient de tirer deux conclusions majeures :

- ◇ Le modèle numérique DBIE résultant de l'approche en collocation est plus raide que celui obtenu par la méthode variationnelle GBEM. Ceci résulte du fait que la formulation de Galerkin, basée sur des considérations énergétiques, est plus *globale* et donc moins sensible à d'éventuelles inadaptations de la représentation des déformations plastiques.

- ◇ Les modèles FEM 1 et GBEM fournissent des résultats quasi-identiques concernant les courbes force-déplacement. L'évaluation plus fine des champs de contrainte et de déformation plastique permettra de mieux comparer les précisions relatives des deux méthodes. Pour ce faire, il sera nécessaire de placer *deux éléments* dans le sens de la hauteur [Huber et al.96]. Malheureusement, le modèle numérique qui en résulte est trop volumineux et n'a pu être traité. La prise en compte d'éventuelles symétries permettrait de remédier à cet inconvénient.

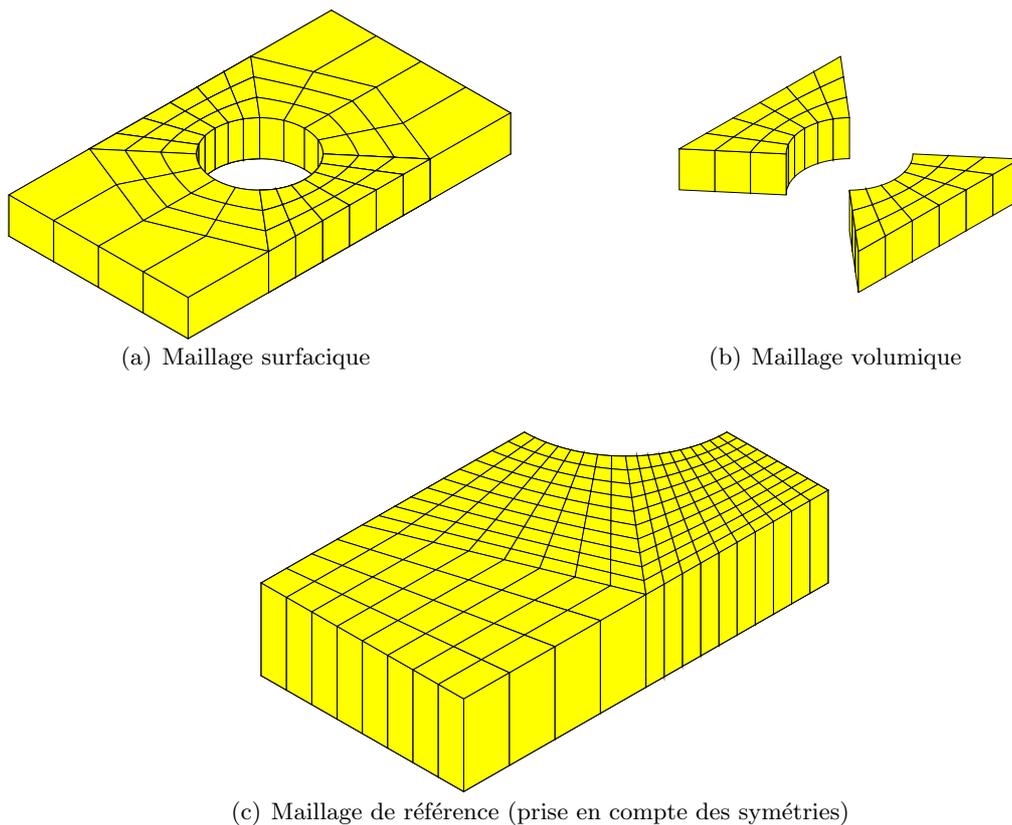


Figure VI.14 : Maillages de la plaque trouée

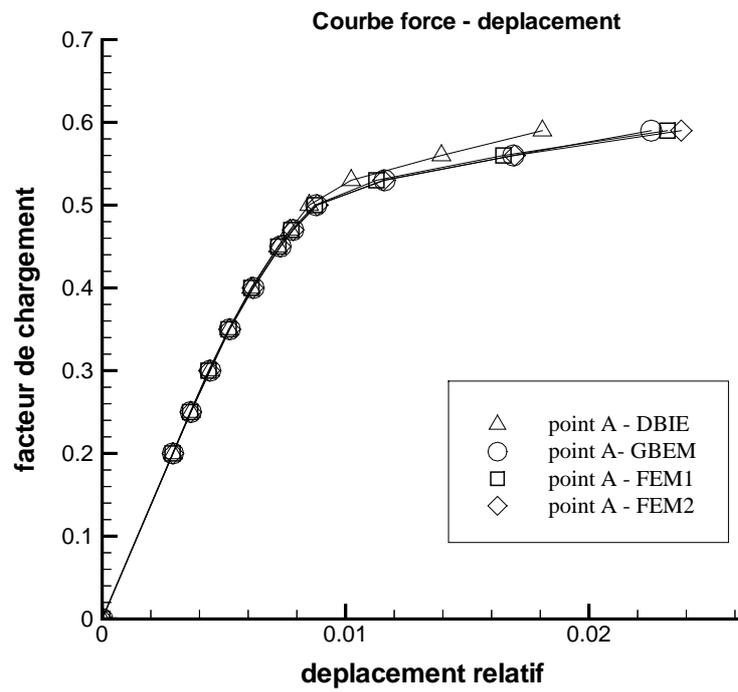


Figure VI.15 : Réponse élastoplastique au point A

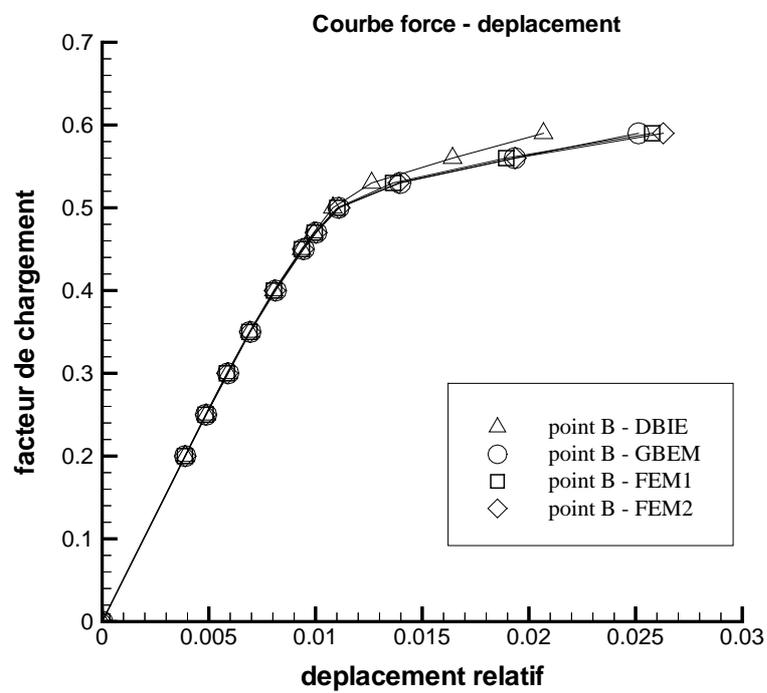


Figure VI.16 : Réponse élastoplastique au point B

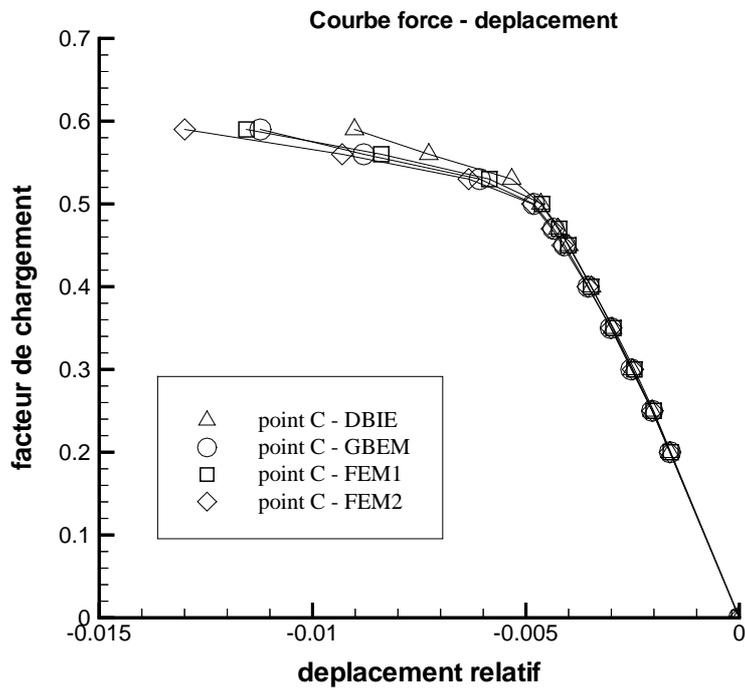


Figure VI.17 : Réponse élastoplastique au point C

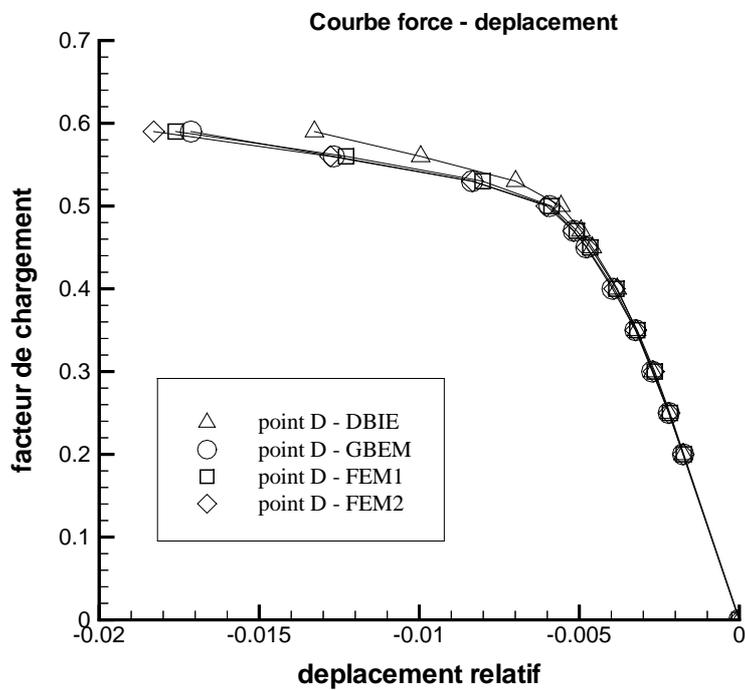


Figure VI.18 : Réponse élastoplastique au point D

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en œuvre les différentes formulations présentées dans ce mémoire dans le but de résoudre des problèmes élastoplastiques tridimensionnels à l'aide de méthodes intégrales. Plusieurs points méritent d'être rappelés :

- ◇ Nous avons montré que les algorithmes proposés, à savoir méthode de collocation et méthode variationnelle, donnent des résultats tout à fait satisfaisants, ce qui permet d'envisager un développement plus optimisé des procédures actuelles et leur incorporation dans des codes de calcul standard. Certains aspects plus mineurs, comme la prise en compte d'éventuelles symétries, devront également être programmés à court terme.
- ◇ Les méthodes numériques proposées permettent de traiter indifféremment des problèmes posés en milieu borné ou infini.
- ◇ Pour les méthodes de collocation, nous avons prouvé la robustesse et la validité de la nouvelle équation intégrale en vecteur-contrainte proposée dans le chapitre IV. Ceci nous permettra de traiter dans un avenir proche des problèmes de mécanique de la rupture, pour lesquels la TBIE est indispensable.
- ◇ Lors de l'étude de la plaque trouée, la formulation variationnelle s'est avérée plus précise que l'approche par collocation, ce qui justifie a posteriori les investissements très lourds, nécessaires au développement de cette méthode, décrits dans le chapitre V.
- ◇ La principale difficulté rencontrée concerne des temps de calcul plutôt prohibitifs qu'engendrent les méthodes intégrales et notamment le temps CPU nécessaire à évaluer les différentes matrices du modèle numérique. L'approche par collocation est actuellement la plus achevée et l'intégration numérique est bien maîtrisée et optimisée, ce qui aboutit à des temps de calcul raisonnables. L'algorithme de Galerkin souffre encore de problèmes liés au choix de la méthode d'évaluation des intégrales doubles. Les procédures d'intégration numériques développées sont certes simples et systématiques mais privilégient une des intégrations. Le développement très récent dans le cadre de l'élasticité de méthodes respectant la symétrie des domaines d'intégration ([Sauter et al.97b] et [Andrá et al.97]) devrait permettre de diminuer de manière significative le temps CPU.
- ◇ Les phases de calcul étant entièrement découplées et la construction des systèmes matriciels représentant la partie gourmande en temps CPU, la parallélisation du calcul devrait rendre les méthodes développées plus compétitives [Jiang et al.97]. Bien évidemment, il ne faudra pas perdre de vue le couplage éléments finis de frontière / éléments finis de domaine qui apparaît comme une solution à court terme tout à fait intéressante ([Zienkiewicz et al.77], [Brink et al.95] et [Hsiao et al.99]).

L'implémentation des différentes procédures dans des codes de calcul existants s'avère à présent primordiale. En disposant d'un environnement numérique adéquat, il sera certainement possible de mieux cerner les performances des méthodes intégrales appliquées à des problèmes non-linéaires. Certains travaux en cours, comme la thèse de Saida Mouhoubi au Laboratoire de Génie Civil d'Egletons (Université de Limoges), permettront de donner une première réponse.

Bibliographie générale

- [Aliabadi et al.99] M.H. Aliabadi et D. Martin. – A new procedure for modelling non-conforming discretization in elastoplastic contact problems. *Advanced Mathematical and Computational Mechanics Aspects of the Boundary Element Method*, éd. par T. Burczynski. p. à paraître. – Kluwer, 1999.
- [Andrá et al.97] H. Andrá et E. Schnak. – Integration of singular Galerkin-type boundary element integrals for 3D elasticity problems. *Num. Math.*, vol. 76, 1997, pp. 143–165.
- [Balas et al.89] J. Balas, J. Sladek, et V. Sladek. – *Stress Analysis by Boundary Element Methods*. – Elsevier, 1989, *Studies in Applied Mechanics*, volume 23.
- [Banerjee et al.86] P.K. Banerjee et S.T. Raveendra. – Advanced boundary element analysis of two-and three-dimensional problems of elastoplasticity. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 23, 1986, pp. 985–1002.
- [Banerjee94] P.K. Banerjee. – *The Boundary Element Method in Engineering*. – McGraw-Hill Book Company, 1994. 2nd edition.
- [Batoz et al.90] J.L. Batoz et G. Dhatt. – *Modélisation des structures par éléments finis*. – Hermès Editions, 1990.
- [Bonnet] M. Bonnet. – Communication privée. – novembre 1998.
- [Bonnet et al.93] M. Bonnet et H.D. Bui. – Regularization of the displacement and traction BIE for 3D elastodynamics using indirect methods. *Advances in Boundary Element Techniques*, éd. par J.H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, et S.N. Atluri, pp. 1–29. – Springer Verlag, 1993.
- [Bonnet et al.96] M. Bonnet et S. Mukherjee. – Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 33, 1996, pp. 4461–4480.
- [Bonnet et al.98] M. Bonnet, G. Maier, et C. Polizzotto. – Symmetric Galerkin boundary element method. *Appl. Mech. Review*, vol. 51, 1998, pp. 669–704.
- [Bonnet86] M. Bonnet. – *Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique*. – Thèse de PhD, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1986.

- [Bonnet95a] M. Bonnet. – *Equations intégrales et éléments de frontière - Applications en mécanique des solides et des fluides.* – CNRS Editions - Eyrolles, 1995.
- [Bonnet95b] M. Bonnet. – Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity. *Eng. Anal. with Bound. Elem.*, vol. 15, 1995, pp. 93–102.
- [Bousquet90] J. Bousquet. – *Aérodynamique : méthode des singularités.* – Cepadues Editions, 1990, *Mechanics : Computational Mechanics.*
- [Brezis83] H. Brezis. – *Analyse fonctionnelle.* – Masson, 1983, *Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise.*
- [Brink et al.95] U. Brink, O. Klaas, R. Niekamo, et E. Stein. – Couplong of adaptively refined dual mixed finite elements and boundary elements in linear elasticity. *Adv. in Engng. Soft.*, vol. 24, 1995, pp. 13–26.
- [Bui et al.70] H.D. Bui et K. Dang van. – Sur le problème aux limites en vitesse des contraintes du solide élasto-plastique. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 6, 1970, pp. 183–193.
- [Bui77] H.D. Bui. – An integral equation method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 25, 1977, pp. 29–39.
- [Bui78] H.D. Bui. – Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 14, 1978, pp. 935–939.
- [Carstensen97] C. Carstensen. – Domain decomposition for a non-smooth convex minimization problem and its application to plasticity. *Num. Linear Algebra with Appl.*, vol. 4, 1997, pp. 177–190.
- [Chen et al.92] G. Chen et J. Zhou. – *Boundary Element Methods.* – Academic Press, 1992, *Computational Mathematics and Applications.*
- [Ciarlet82] P.G. Ciarlet. – *Analyse numérique matricielle et optimisation.* – Masson, 1982, *Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise.*
- [Cisilino et al.97] A.P. Cisilino, M.H. Aliabadi, et J.L. Otegui. – A direct formulation for three-dimensional elastoplastic boundary elements. *Boundary Elements 19*, éd. par M. Marchetti, C.A. Brebbia, et M.H. Aliabadi, pp. 169–179. – Computational Mechanics Publications, 1997.
- [Comi et al.92] C. Comi et G. Maier. – Extremum, convergence and stability properties of the finite-increment problem in elastic-plastic boundary element method. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 29, 1992, pp. 249–270.

- [Costabel et al.85] M. Costabel et E.P. Stephan. – Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation. *Mathematical Models and Methods in Mechanics*, éd. par W. Fiszdon et K. Wilmański, pp. 175–251. – PWN-Polish Scientific Publisher (Warsaw), 1985.
- [Costabel et al.86] M. Costabel et W.L. Wendland. – Strong ellipticity of boundary integral operator. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 372, 1986, pp. 39–63.
- [Costabel84] M. Costabel. – *Starke Elliptizität von Randintegraloperatoren erster Art*. – Habilitationsschrift, Technische Hochschule Darmstadt, 1984.
- [Costabel88] M. Costabel. – Boundary integral operators on Lipschitz domains : elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 19, 1988, pp. 613–626.
- [Crouzeix et al.84] M. Crouzeix et A.L. Mignot. – *Analyse numériques des équations différentielles*. – Masson, 1984, *Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*.
- [Cruse et al.86a] T.A. Cruse et E.Z. Polch. – Elastoplastic BIE analysis of cracked plates and related problems. Part 1 : Formulation. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 23, 1986, pp. 429–437.
- [Cruse et al.86b] T.A. Cruse et E.Z. Polch. – Elastoplastic BIE analysis of cracked plates and related problems. Part 2 : Numerical results. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 23, 1986, pp. 439–452.
- [Cruse et al.96] T.A. Cruse et J.D. Richardson. – Non-singular Somigliana stress identities in elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 39, 1996, pp. 4461–4480.
- [Cruse88] T.A. Cruse. – *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. – Kluwer Academic Publishers, 1988, *Mechanics : Computational Mechanics*.
- [Dautray et al.85] R. Dautray et J.L. Lions. – *L'opérateur de Laplace*. – Masson, 1985, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 2.
- [Durand83] M. Durand. – Boundary Value Problems Analysis and Pseudo-Differential Operators in Acoustics. *Theoretical Acoustics and Numerical Techniques*, éd. par P. Filippi, pp. 217–263. – Springer Verlag, 1983.
- [Duvaut et al.72] G. Duvaut et J.L. Lions. – *Les inéquations en mécanique et en physique*. – Masson Editions, 1972.
- [Duvaut90] G. Duvaut. – *Mécanique des milieux continus*. – Masson, 1990, *Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*.

- [Egorov et al.97] Y.V. Egorov et B.W. Schulze. – *Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications*. – Birkhäuser Verlag, 1997, *Operator Theory*, volume 93.
- [Erichsen et al.98] S. Erichsen et S.A. Sauter. – Efficient automatic quadrature in 3-D Galerkin BEM. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 157, 1998, pp. 215–224.
- [Fiedler95] C. Fiedler. – On the calculation of boundary stresses with Somigliana Stress identity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 38, 1995, pp. 3275–3295.
- [Foerster et al.94] A. Foerster et G. Kuhn. – A field boundary element formulation for material nonlinear problems at finite strains. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 31, 1994, pp. 1777–1792.
- [François et al.92] D. François, A. Pineau, et A. Zaoui. – *Comportement mécanique des matériaux - Élasticité et plasticité*. – Hermès Editions, 1992.
- [Gel'fand et al.64] I.M. Gel'fand et G.E. Shilov. – *Generalized Functions*. – Academic Press, 1964.
- [Germain86] P. Germain. – *Mécanique*. – Ellipses, 1986.
- [Grisvard92] P. Grisvard. – *Singularities in Boundary Value Problems*. – Masson / Springer Verlag, 1992, *Research Notes in Applied Mathematics*, volume 22.
- [Guiggiani et al.90] M. Guiggiani et A. Gigante. – A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. *J. of Appl. Mech.*, vol. 57, 1990, pp. 906–915.
- [Guiggiani et al.92] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T.J. Rudolph, et F.J. Rizzo. – A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *J. of Appl. Mech.*, vol. 59, 1992, pp. 604–614.
- [Guiggiani94] M. Guiggiani. – Hypersingular formulation for boundary stress evaluation. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, vol. 13, 1994, pp. 169–179.
- [Hackbusch et al.94] W. Hackbusch et S.A. Sauter. – On numerical cubature of nearly singular integrals arising in BEM Collocation. *Computing*, vol. 52, 1994, pp. 139–159.
- [Hackbusch92] W. Hackbusch. – *Elliptic Differential Equations*. – Springer Verlag, 1992, *Computational Mathematics*, volume 18.
- [Halphen et al.75] B. Halphen et Q.S. Nguyen. – Sur les matériaux standard généralisés. *J. Méca*, vol. 14, 1975, pp. 39–63.
- [Halphen et al.87] B. Halphen et J. Salençon. – *Elastoplasticité*. – Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.

- [Hamdi82] M.A. Hamdi. – *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains.* – Thèse de PhD, Université de Technologie de Compiègne, 1982.
- [Hartmann81] F. Hartmann. – The Somigliana identity on piecewise smooth surfaces. *J. of Elas.*, vol. 11, 1981, pp. 403–423.
- [Hartmann82] F. Hartmann. – Elastic potentials on piecewise smooth surfaces. *J. of Elas.*, vol. 12, 1982, pp. 31–50.
- [Hayami et al.88] K. Hayami et C.A. Brebbia. – Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3D boundary element method. *Boundary Elements 10*, éd. par C.A. Brebbia, pp. 237–264. – CMP Southampton, 1988.
- [Herding et al.96] U. Herding et G. Kuhn. – A field boundary element formulation for damage mechanics. *Eng. Anal. with Bound. Elem.*, vol. 18, 1996, pp. 137–147.
- [Hsiao et al.77] G.C. Hsiao et W. Wendland. – A finite element method for some integral equations of the first kind. *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 58, 1977, pp. 449–481.
- [Hsiao et al.99] G.C. Hsiao, E. Schnack, et W.L. Wendland. – A hybrid coupled finite-boundary element method in elasticity. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 173, 1999, pp. 287–316.
- [Huang et al.97] C. Huang et G. Verchery. – An exact structural static reanalysis method. *Comm. in Num. meth. in Engng.*, vol. 13, 1997, pp. 103–112.
- [Huber et al.93] O. Huber, A. Lang, et G. Kuhn. – Evaluation of the stress-vector in 3D elastostatics by direct solving of hypersingular integrals. *Comput. Mech.*, vol. 12, 1993, pp. 39–50. – version hypersinguliere de bonnet.
- [Huber et al.96] O. Huber, R. Dallner, P. Partheymueller, et G. Kuhn. – Evaluation of the stress tensor in 3-D elastoplasticity by direct solving of hypersingular integrals. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 39, 1996, pp. 3273–3304.
- [Jiang et al.97] S.S. Jiang et Y.S. Jiang. – Parallel computation of inelastic problems with boundary element methods. *Boundary Elements 19*, éd. par M. Marchetti, C.A. Brebbia, et M.H. Aliabadi, pp. 583–592. – Computational Mechanics Publications, 1997.
- [Johnson76] C. Johnson. – Existence theorems for plasticity problems. *J. Math. pures et Appl.*, vol. 55, 1976, pp. 431–444.
- [Johnson78] C. Johnson. – On plasticity with hardening. *J. of Math. Anal. and Appl.*, vol. 62, 1978, pp. 325–336.

- [Kieser et al.92] R. Kieser, C. Schwab, et W.L. Wendland. – Numerical evaluation of singular and finite-part integrals on curved surfaces using symbolic manipulation. *Computing*, vol. 49, 1992, pp. 279–301.
- [Kieser92] R. Kieser. – *Über einseitige Sprungrelationen und hypersinguläre Operatoren in der Methode der Randelemente*. – Thèse de PhD, Université de Stuttgart (Allemagne), 1992.
- [Kress89] R. Kress. – *Linear Integral Equations*. – Springer Verlag, 1989, *Applied Mathematical Series*, volume 82.
- [Krishnasamy et al.90] G. Krishnasamy, L.W. Schmerr, T.J. Rudolph, et F.J. Rizzo. – Hypersingular Boundary Integral Equations : some applications in acoustic and elastic wave scattering. *J. of Appl. Mech.*, vol. 57, 1990, pp. 404–414.
- [Krishnasamy et al.92a] G. Krishnasamy, F.J. Rizzo, et T.J. Rudolph. – Hypersingular Boundary Integral Equations : their occurrence, interpretation, regularization and computation. *Developments in Boundary Element Methods*, éd. par P.K. Banerjee et S. Kobayashi, pp. 207–252. – Elsevier, 1992.
- [Krishnasamy et al.92b] G. Krishnasamy, F.J. Rizzo, et T.J. Rudolph. – Continuity requirements for density functions in the boundary integral equation method. *Comput. Mech.*, vol. 9, 1992, pp. 267–284.
- [Kuhn et al.99] G. Kuhn et O. Köhler. – Solution of hyperelastic and elastoplastic finite deformation problems by the Boundary-Domain Integral Method. *European Conference on Computational Mechanics ECCM 99*, éd. par W. Wunderlich. – *actes sur CD-ROM*, 1999.
- [Kupradze et al.79] V.D. Kupradze, T.G. Gegelia, M.O. Basheleishvili, et T.V. Burchuladze. – *Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. – North-Holland publishing Company, 1979, *Applied Mathematics and Mechanics*.
- [Lachat et al.76] J.C. Lachat et J.O. Watson. – Effective numerical treatment of boundary integral equations : a formulation for three-dimensional elastostatics. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 10, 1976, pp. 991–1005.
- [Ladevèze96] P. Ladevèze. – *Mécanique non-linéaire des structures*. – Hermès Editions, 1996, *Etudes en mécanique des matériaux et des structures*.
- [Lafontaine96] J. Lafontaine. – *Introduction aux variétés différentielles*. – Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [Leitao et al.95] V. Leitao, M.H. Aliabadi, et D.P. Rooke. – The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 38, 1995, pp. 315–333.

- [Leitao94] V.M.A. Leitao. – *Boundary Elements in Nonlinear Fracture Mechanics*. – Computational Mechanics Publications, 1994, *Topics in Engineering*, volume 21.
- [Lemaitre et al.85] J. Lemaitre et J.C. Chaboche. – *Mécanique des matériaux solides*. – Dunod, 1985.
- [Levan88] A. Levan. – *Etude des équations intégrales singulières pour fissures tridimensionnelles et contribution à la régularisation*. – Thèse de PhD, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1988.
- [Li et al.98] S. Li, M. E. Mear, et L. Xiao. – Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 51, 1998, pp. 669–704.
- [Lions et al.67] J.L. Lions et E. Magenes. – *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. – Dunod, 1967, *Travaux et Recherches mathématiques*, volume 1.
- [Liu et al.91] Y.J. Liu et F.J. Rizzo. – Application of Overhauser C^{-1} continuous boundary elements to hypersingular BIE for 3D acoustic wave problems. *Boundary Elements 13*, éd. par C.A. Brebbia et G.S. Gipson, pp. 957–966. – CMP Southampton, 1991.
- [Maier et al.87] G. Maier et C. Polizzotto. – A Galerkin approach to boundary element elastoplastic analysis. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Eng.*, vol. 60, 1987, pp. 175–194.
- [Maier et al.93] G. Maier, S. Miccoli, G. Novati, et S. Sirtori. – A Galerkin symmetric boundary element method in plasticity : formulation and implementation. *Advances in Boundary Element Techniques*, éd. par J.H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, et S.N. Atluri, pp. 288–328. – Springer Verlag, 1993.
- [Maier et al.95] G. Maier, S. Miccoli, G. Novati, et U. Perego. – Symmetric Galerkin boundary element method in plasticity and gradient plasticity. *Comput. Mech.*, vol. 17, 1995, pp. 115–129.
- [Mikhlin et al.86] S.G. Mikhlin et S. Prössdorf. – *Singular Integral Operators*. – Springer Verlag, 1986.
- [Moreau76] J.J. Moreau. – Existence theorems for plasticity problems. *J. Differential Equations*, vol. 26, 1976, pp. 347–374.
- [Mukherjee et al.87] S. Mukherjee et A. Chandra. – Chapitre 6 : Nonlinear Solid Mechanics. *Boundary Element Methods in Mechanics*, éd. par D.E. Beskos, pp. 285–331. – Elsevier, 1987.
- [Mura82] T. Mura. – *Micromechanics of Defects in Solids*. – Martinus Nijhoff, 1982.

- [Mutsoe84] G.G.W. Mutsoe. – Advanced integration schemes over boundary elements and volume cells for two- and three dimensional linear analysis. *Developments in Boundary Element Method*, éd. par P.K. Banerjee et S. Mukherjee, pp. 213–270. – Elsevier, 1984.
- [Nédelec76] J C. Nédelec. – Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surface in \mathbb{R}^3 . *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 8, 1976, pp. 61–80.
- [Nédelec77] J C. Nédelec. – *Approximation des équations intégrales en physique et en mécanique*. – Rapport interne, Ecole Polytechnique, 1977.
- [Nédelec82] J C. Nédelec. – Integral equations with non-integrable kernels. *Integral equations and operator theory*, vol. 5, 1982, pp. 562–572.
- [Nédelec83] J C. Nédelec. – *Le potentiel de double couche pour les ondes élastiques*. – Rapport interne n° 99, Ecole Polytechnique, 1983.
- [Nečas67] J. Nečas. – *Méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. – Masson Editions / Academia, 1967, *Applied Mathematics and Mechanics*.
- [Nguyen77] Q.S. Nguyen. – On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 11, 1977, pp. 817–832.
- [Nishimura et al.90] N. Nishimura et S. Kobayashi. – A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems. *Comput. Mech.*, vol. 54, 1990, pp. 319–328.
- [Ortiz et al.85] M. Ortiz et E.P. Popov. – Accuracy and Stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 21, 1985, pp. 1561–1576.
- [Papadopoulos et al.94] P. Papadopoulos et R.L. Taylor. – On the application of multi-step integration methods to infinitesimal elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 37, 1994, pp. 3169–3184.
- [Petersdorff89] T. von Petersdorff. – *Randwertprobleme der Elastizitätstheorie für Polyeder - Singularitäten and Approximation mit Randelementmethoden*. – Thèse de PhD, Technische Hochschule Darmstadt (Allemagne), 1989.
- [Polch et al.87] E.Z. Polch, T.A. Cruse, et C.J. Huang. – Traction BIE solutions for flat cracks. *Comput. Mech.*, vol. 2, 1987, pp. 253–267.
- [Polizzotto et al.93] C. Polizzotto, C. Panzeca, et M. Zito. – A consistent boundary/interior element method for evolutive elastic-plastic structural analysis. *Advances in Boundary Element Techniques*, éd. par J.H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, et S.N. Atluri, pp. 349–369. – Springer Verlag, 1993.

- [Polizzotto et al.94] C. Polizzotto et M. Zito. – A step-wise variational approach to elastic-plastic analysis by boundary-interior elements. *Int. J. of Plasticity*, vol. 10, 1994, pp. 81–101.
- [Polizzotto88a] C. Polizzotto. – An energy approach to the boundary element method. Part 1 : Elastic solids. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 69, 1988, pp. 167–184.
- [Polizzotto88b] C. Polizzotto. – An energy approach to the boundary element method. Part 2 : Elastic-plastics solids. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 69, 1988, pp. 263–276.
- [Poon et al.98a] H. Poon, S. Mukherjee, et M. Bonnet. – Hypersingular formulation for boundary strain evaluation in the context of a CTO-based implicit BEM scheme for small strain elasto-plasticity. *Int. J. of Plas.*, vol. 14, 1998, pp. 1033–1058.
- [Poon et al.98b] H. Poon, S. Mukherjee, et M. Bonnet. – Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the bem solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 22, 1998, pp. 257–269.
- [Rezayat et al.86] M. Rezayat, D.J. Shippy, et F.J. Rizzo. – On time-harmonic elastic wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 55, 1986, pp. 349–367.
- [Rigolot78] C. Rigolot. – Potentiel élastique sur une surface non-régulière. *C. R. A. S.*, vol. 286, 1978, pp. 1019–1022.
- [Salençon92] J. Salençon. – *Mécanique des milieux continus*. – Presses de l'Ecole Polytechnique, 1992.
- [Sauter et al.96] S.A. Sauter et A. Krapp. – On the effect of numerical integration in the Galerkin boundary element method. *Numer. Math.*, vol. 74, 1996, pp. 337–360.
- [Sauter et al.97a] S. A. Sauter et C. Lage. – *Transformation of hypersingular integrals and black-box cubature*. – Technical Report n° 97-17, Universität Kiel, 1997. Extended version.
- [Sauter et al.97b] S.A. Sauter et C. Schwab. – Quadrature for hp-Galerkin BEM in R^3 . *Num. Linear Algebra with Appl.*, vol. 4, 1997, pp. 177–190.
- [Saxcé et al.97] G. de Saxcé et M. Hjjaj. – Sur l'intégration numérique de la loi d'érouissage cinématique non-linéaire. *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, pp. 773–778. – Presses académiques de l'Ouest, 1997.
- [Schwab et al.92a] C. Schwab et W.L. Wendland. – Kernel properties of Boundary Integral Operators. *Math. Nachr.*, vol. 156, 1992, pp. 187–218.

- [Schwab et al.92b] C. Schwab et W.L. Wendland. – On numerical cubatures of singular surface integrals in boundary element methods. *Numer. Math.*, vol. 62, 1992, pp. 343–369.
- [Schwartz65] L. Schwartz. – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* – Editions Hermann, 1965.
- [Schwartz66] L. Schwartz. – *Théorie des distributions.* – Editions Hermann, 1966.
- [Simo et al.85] J.C. Simo et R.L. Taylor. – Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 48, 1985, pp. 101–118.
- [Simo et al.89] J. C. Simo, J. G. Kennedy, et R. L. Taylor. – Complementary mixed finite element formulations for elastoplasticity. *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 74, 1989, pp. 177–206.
- [Simo et al.91] J.C. Simo et S. Govindjee. – Non-linear B-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 31, 1991, pp. 151–176.
- [Simo et al.98] J.C. Simo et T.J.R. Hughes. – *Computational Inelasticity.* – Springer Verlag, 1998, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, volume 7.
- [Sladek et al.83] J. Sladek et V. Sladek. – Three-dimensionnal curved crack in an elastic body. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 19, 1983, pp. 425–436.
- [Sladek et al.96] V. Sladek et J. Sladek. – Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, vol. 17, 1996, pp. 5–18.
- [Sladek et al.98] V. Sladek, J. Sladek, et A. Levan. – Completely regularized integral representations and integral equations for anisotropic bodies with initial strains. *Z.A.M.M.*, vol. 78, 1998, pp. 771–780.
- [Sledow et al.71] J.L. Sledow et T.A. Cruse. – Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elsto plastic flow. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 7, 1971, pp. 1673–1683.
- [Stephan86] E.P. Stephan. – A boundary integral equation method for three-dimensional crack problems in elasticity. *Math. Meth. Appl. Sci.*, vol. 8, 1986, pp. 1609–623.
- [Suquet88] P. Suquet. – Discontinuities and Plasticity. *Non-smooth Mechanics and Applications*, éd. par J.J. Moreau, pp. 279–341. – Springer, 1988.
- [Tanaka et al.94] M. Tanaka, V. Sladek, et J. Sladek. – Regularization techniques applied to boundary element methods. *ASME Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, 1994, pp. 457–499.

- [Telles83] J.C.F. Telles. – *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*. – Springer Verlag, 1983, *Lecture Notes in Engineering*, volume 1.
- [Temam84] R. Temam. – *Problèmes mathématiques en plasticité*. – Gauthier-Villars, 1984, *Méthodes Mathématiques de l'Informatique*.
- [Toh et al.94] K.C. Toh et S. Mukherjee. – Hypersingular and finite part integrals in the Boundary Element Method. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 31, 1994, pp. 2299–2312.
- [Weaver77] J. Weaver. – Three-dimensional crack analysis. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 13, 1977, pp. 321–330.
- [Wendland87a] W.L. Wendland. – Mathematical properties and asymptotic error estimates for elliptic boundary element methods. *Advanced Boundary Element Methods*, éd. par T.A. Cruse, pp. 475–489. – Springer Verlag, 1987.
- [Wendland87b] W.L. Wendland. – Strongly elliptic boundary integral equations. *The State of the Art in Numerical Analysis*, éd. par A. Iserles et M. Powell, pp. 511–561. – Clarendon Press, 1987.
- [Wendland97] W.L. Wendland. – *Boundary Element Topics*. – Springer Verlag, 1997.
- [Wloka87] J. Wloka. – *Partial Differential Equations*. – Cambridge University Press, 1987.
- [Xiao98] L. Xiao. – *Symmetric weak-form integral equation method for three dimensional fracture analysis*. – Thèse de PhD, University of Texas at Austin, 1998.
- [Zienkiewicz et al.77] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, et P. Betess. – The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, vol. 11, 1977, pp. 355–375.

Annexe A

Théorie du potentiel scalaire

Cette annexe fait le point sur l'étude des potentiels scalaire de simple et double couche dans le cas d'une surface de discontinuité représentée par une variété polyédrale. On se propose de mettre en œuvre sur l'opérateur elliptique le plus simple (opérateur de Laplace) toutes les techniques de prolongement par continuité développées dans les paragraphes III.2 et IV.1. Ceci permet généralement de mieux faire transparaître la méthode utilisée et de mieux cerner les difficultés rencontrées. En effet les formulations obtenues dans le cadre de la théorie du potentiel scalaire ont une expression très simple et évitent de perdre le lecteur dans les notations tensorielles.

A. 1 Généralités sur les potentiels scalaires

On considère très classiquement (voir paragraphe II.2) un ouvert borné Ω_1 , son complémentaire Ω_2 dans \mathbb{R}^3 et on note S , la frontière de Ω_1 supposée être une variété polyédrale. Comme dans le reste du mémoire, on envisage le cas où S est une réunion finie de surfaces de Liapunov. On note alors respectivement $\mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x})$ et $\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x})$, les potentiels de simple et double couche des densités surfaciques $\psi(\mathbf{y})$ et $\phi(\mathbf{y})$. Ainsi pour $(\phi(\mathbf{y}), \psi(\mathbf{y})) \in (L^1(S))^2$

$$\mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x}) = \int_S G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x}) = \int_S \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.1})$$

avec $G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}$ et $r = \|\mathbf{r}\|$

Soit \mathbf{z} un point de S . On montre aisément en appliquant les lemmes (IV.1) et (IV.2) que $\mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x})$ est continu en \mathbf{z} pour $\psi(\mathbf{y}) \in L^p(S)$ avec $p > 2$ et que $\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x})$ est prolongeable par continuité de part et d'autre de S en \mathbf{z} pour une régularité $\phi(\mathbf{y}) \in Di(S)$. On a de plus

$$\gamma_0^m \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{z}) \equiv \lim_{\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z}} \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x}) = \left(\kappa^{(m)} - \frac{1}{2} \right) \phi(\mathbf{z}) + \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{z}) \quad (\text{A.2})$$

Intéressons-nous à présent au comportement du gradient des potentiels de simple et double couche au voisinage de S .

A. 2 Trace du gradient du potentiel de simple couche

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$, la fonction $\nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ est uniformément bornée et il en résulte après application du théorème de dérivation sous le signe somme (résultat (III.10)) que le potentiel de

simple couche est dérivable et il vient l'expression

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad \nabla \mathcal{K}_1 \psi(\mathbf{x}) = - \int_S \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.3})$$

On se propose de déterminer la limite quand $\mathbf{x} \in \Omega_m \rightarrow \mathbf{z}$ de $\nabla \mathcal{K}_1 \psi(\mathbf{x})$. Dans ce but, introduisons un réel $\varepsilon > 0$ et considérons un voisinage d'exclusion $B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ que l'on choisit par commodité comme la boule centrée en \mathbf{z} et de rayon ε . Nous pouvons alors écrire en décomposant le noyau $\nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ selon sa composante normale et surfacique, que

$$\nabla \mathcal{K}_1 \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{I}^{(I)}(\mathbf{x}) + \mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{I}^{(I)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \setminus B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} [\nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})] \psi(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{I}^{(III)}(\mathbf{x}) = - \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.7})$$

Le premier terme ne pose aucun problème puisque l'intégrande est uniformément borné et l'application du théorème de Lebesgue (III.2) aboutit au résultat.

La quantité $\mathbf{I}^{(II)}(\mathbf{x})$ représente au signe près, le potentiel de double couche de la densité $\psi(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y})$ restreinte à $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$, dont la limite est de ce fait connue mais uniquement pour $\psi(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \in Di(S)$ i.e. \mathbf{z} est un point régulier. Dans ce cas, il existe un voisinage de S en \mathbf{z} régulier et l'intégrale de noyau $\mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ est traitée de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(III)}(\mathbf{x}) &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.8}) \\ &= \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} + \psi(\mathbf{z}) \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Le dernier terme est alors reformulé moyennant une intégration par parties et en utilisant (II.19), il en résulte

$$\begin{aligned} & \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \nu(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \text{div}_S \mathbf{n}(\mathbf{y}) G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \text{div}_S \mathbf{n}(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \text{div}_S \mathbf{n}(\mathbf{y}) G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

car $G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ est constant et vaut $1/(4\pi\varepsilon)$ sur le contour $S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Le voisinage $S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ étant de classe $C^{1,\beta}$, on montre que ces intégrales sont de l'ordre de grandeur de ε^β . Après avoir fait tendre ε vers 0, on aboutit finalement à la limite valable en \mathbf{z} régulier

$$\gamma_0^m \nabla \mathcal{K}_1 \psi(\mathbf{z}) = \left(\frac{1}{2} - \kappa^{(m)} \right) \psi(\mathbf{z}) \mathbf{n}(\mathbf{z}) - \text{vp} \nabla \mathcal{K}_1 \psi(\mathbf{z}) \quad (\text{A.10})$$

Remarque A.1 Notons que nous utilisons la formule d'intégration par parties (II.19) qui n'est valable que pour des surfaces de Liapunov. Dans la paragraphe II.1, nous avons montré que l'extension de (II.19) à des variétés polyédrale engendre des intégrales définies sur les contours des différentes parties régulières de S .

Dans notre cas, si le point \mathbf{z} est singulier, il existe au moins une arête de S qui rencontre \mathbf{z} . Or tout le processus de régularisation est basé sur le théorème de Lebesgue et la contribution des intégrales d'arêtes n'admet a priori plus de dominante intégrable et on ne peut pas conclure.

On peut dans un premier temps envisager d'imposer une densité nulle aux points singuliers. Mais ceci n'est physiquement pas envisageable et il doit nécessairement exister des techniques pour contourner ce problème. En effet il existe des solutions analytiques à des problèmes présentant des singularités géométriques (le cas du cylindre en torsion est traité dans le chapitre VI et dont le gradient ne s'annule pas aux points irréguliers. \square

Avant d'essayer de vouloir résoudre le problème des points singuliers, donnons à titre de rappel le prolongement par continuité du gradient du potentiel de double couche $\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x})$.

A. 3 Trace du gradient du potentiel de double couche

Concernant l'étude de $\nabla\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x})$, nous allons tout d'abord transformer quelque peu l'expression du potentiel de double couche comme dans [Chen et al.92]. On a ainsi

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \int_S G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = -\nabla \cdot \mathcal{K}_1(\phi \mathbf{n})(\mathbf{x}) \quad (\text{A.11})$$

En utilisant la propriété classique $\nabla(\nabla \cdot (\bullet)) = \Delta(\bullet) + \nabla \wedge (\nabla \wedge (\bullet))$ et en remarquant que $\Delta\mathcal{K}_1(\phi \mathbf{n}) = 0$, il vient finalement que

$$\nabla\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x}) = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathcal{K}_1(\phi \mathbf{n})(\mathbf{x})) \quad (\text{A.12})$$

En tenant compte du fait que $\mathbf{n}(\mathbf{y}) \wedge \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, il est alors possible de montrer la relation ci-dessous

$$\nabla \wedge \mathcal{K}_1(\phi \mathbf{n})(\mathbf{x}) = - \int_S \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.13})$$

Rappelons que $\mathbf{R}(\bullet)$ désigne le rotationnel surfacique défini par $\mathbf{R}(\bullet) = \mathbf{n}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{D}(\bullet)$. On procède ensuite à une intégration par parties en appliquant la formule de Stokes (II.20) et il vient finalement l'expression du gradient du potentiel de double couche

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \nabla\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x}) = - \int_S \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge \mathbf{R}\phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.14})$$

On reconnaît l'expression analogue au gradient de simple couche et une démonstration identique permet de déterminer en un point régulier \mathbf{z} de S , la limite suivante

$$\gamma_0^m \nabla\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{z}) = \left(\kappa^{(m)} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{D}\phi(\mathbf{z}) - \text{vp} \nabla\mathcal{K}_2\phi(\mathbf{z}) \quad (\text{A.15})$$

Remarquons que l'obtention de (A.15) repose sur la continuité au sens de Dini de $\mathbf{D}\phi(\mathbf{y})$ i.e. $\phi(\mathbf{y}) \in Di^1$ dans un voisinage de \mathbf{z} . Là encore, nous utilisons l'hypothèse de régularité de la surface au point \mathbf{z} considéré, puisque le point doit être régulier pour définir la classe de fonction $Di^1(S)$.

A. 4 Prolongement par continuité en des points singuliers

L'obtention d'une représentation intégrale aux points singuliers n'est pas immédiate. Tout d'abord, il n'est pas possible de définir la classe de fonctions $D_i^1(S)$ pour $S \in C^{0,1}$ par la définition (II.3). Comme mentionné dans la remarque (A.1), l'approche consistant à isoler la singularité au point \mathbf{z} au travers d'une intégrale de contour ne contenant plus \mathbf{z} , devient obsolète puisqu'il demeure les contributions d'arêtes passant par \mathbf{z} . L'idée consiste alors à

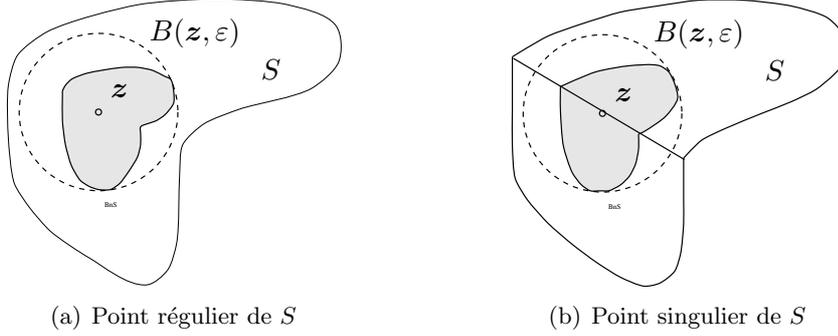


Figure A.1 : Prolongement par continuité des potentiels

ne plus considérer les deux potentiels de manière séparée. Rappelons que toute solution de l'équation de poisson $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ admet la représentation intégrale suivante

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S, u(\mathbf{x}) = \mathcal{K}_2\phi(\mathbf{x}) - \mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x}) \quad (\text{A.16})$$

où $\phi(\mathbf{z})$ et $\psi(\mathbf{z})$ désignent respectivement les éventuels sauts de potentiel et de flux à travers S . Remarquons qu'en un point régulier, il apparaît alors un saut de $\nabla u(\mathbf{x})$ d'amplitude $\mathbf{D}\phi(\mathbf{z}) + \psi(\mathbf{z})\mathbf{n}(\mathbf{z})$ au facteur un demi près. Modifions alors les expressions des gradients des potentiels surfaciques de la manière suivante.

Dans un premier temps, on décompose de noyau $\nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ selon sa composante normale et surfacique. Il vient alors en posant $H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})$,

$$\nabla \mathcal{K}_1\psi(\mathbf{x}) = - \int_S \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \mathcal{K}_2\psi(\mathbf{x}) = - \int_S \mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge \mathbf{R}\phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{R}\phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.18})$$

Les quantités suivantes sont reformulées en utilisant le fait que les vecteurs $\mathbf{D}f(\mathbf{y})$ et $\mathbf{R}f(\mathbf{y})$ pour une fonction surfacique $f(\mathbf{y})$ appartiennent au plan tangent en \mathbf{y} et on obtient

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{R}\phi(\mathbf{y}) = -\mathbf{D}\phi(\mathbf{y}) \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = -\mathbf{n}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{D}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge \mathbf{R}\phi(\mathbf{y}) = \mathbf{D}\phi(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (\text{A.21})$$

Compte tenu de ces remarques, il vient finalement que le gradient du champ $u(\mathbf{x})$ admet

l'expresssion ci-dessous

$$\begin{aligned} \nabla u(\mathbf{x}) = \int_S H(\mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) [\mathbf{D}\phi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}} \\ + \int_S \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge [\mathbf{D}\phi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

Les techniques classiques de régularisation (III.8) peuvent à nouveau être appliquées à condition d'avoir la densité $\mathbf{h}(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{D}\phi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})$ de classe Di au point singulier. En effet la seconde intégrale n'est autre que le potentiel de double couche de $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ dont on connaît le comportement au voisinage de S . Le premier terme a la propriété très intéressante de faire intervenir le noyau $\mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Ainsi soit $\mathbf{z} \in S$ et supposons que $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ soit de classe Di dans un voisinage de \mathbf{z} dans S . Nous pouvons écrire en utilisant la formule de Stokes (II.20) pour $\varepsilon > 0$ et en introduisant classiquement $\tilde{\mathbf{z}} \in S$,

$$\begin{aligned} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge [\mathbf{h}(\mathbf{y}) - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{z}})] dS_{\mathbf{y}} - \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{z}}) \wedge \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \frac{1}{4\pi\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \boldsymbol{\ell}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

Comme la formule de Stokes est valable pour des *surfaces de Liapunov par morceaux*, l'intégrale de contour ne contient jamais \mathbf{z} et le prolongement par continuité est possible. Il vient finalement

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{S \cap B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \mathbf{R}G(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge [\mathbf{h}(\mathbf{y}) - \mathbf{h}(\mathbf{z})] dS_{\mathbf{y}} - \mathbf{h}(\mathbf{z}) \wedge \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{S \cap \partial B(\mathbf{z}, \varepsilon)} \boldsymbol{\ell}(\mathbf{y}) dL_{\mathbf{y}} \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

Généralités sur les noyaux des opérateurs intégraux

Cette annexe traite de l'obtention des différents noyaux introduits dans ce mémoire, intervenant dans l'établissement de nombreux résultats. Toutes les expressions obtenues sont valables pour le tenseur de Kelvin et repose sur l'introduction du vecteur de Galerkin. Il vient facilement

$$U_i^k(\mathbf{r}) = 2(1 - \nu)G_{i,pp}^k - G_{p,pi}^k \quad (\text{B.1})$$

$$G_i^k(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\delta_{ki} \quad (\text{B.2})$$

$$F(\mathbf{r}) = \frac{r}{16\pi G(1 - \nu)} \quad (\text{B.3})$$

En modifiant quelque peu cette formulation, les expressions précédentes se reformulent de la manière suivante

$$G_{i,i}^k(\mathbf{r}) = F_{,k}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.4})$$

$$U_i^k(\mathbf{r}) = 2(1 - \nu)F_{,pp}(\mathbf{r})\delta_{ik} - F_{,ik}(\mathbf{r})$$

B. 1 Evaluation du tenseur $K(\mathbf{r})$

L'idée principale consiste à remarquer que du fait de la définition du tenseur de Kelvin, on a

$$\Sigma_{ij,j}^k(\mathbf{r}) - \delta_{ik}G_{,j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Rappelons qu'en introduisant le vecteur de Galerkin, nous pouvons écrire les relations suivantes

$$\Sigma_{ij}^k(\mathbf{r}) = \mu \left[2\nu \delta_{ij}F_{,ppk}(\mathbf{r}) + 2(1 - \nu)(\delta_{ik}F_{,ppj}(\mathbf{r}) + \delta_{jk}F_{,ppi}(\mathbf{r})) - 2F_{,ijk}(\mathbf{r}) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$G_{,j}(\mathbf{r}) = 2\mu(1 - \nu)F_{,ppj}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.7})$$

ce qui nous permet alors d'évaluer la différence

$$\Sigma_{ij}^k(\mathbf{r}) - \delta_{ik}G_{,j}(\mathbf{r}) = \mu [2\nu\delta_{ij}F_{,ppk}(\mathbf{r}) + 2(1 - \nu)\delta_{jk}F_{,ppi}(\mathbf{r}) - 2F_{,ijk}(\mathbf{r})] \quad (\text{B.8})$$

ce qui devient après avoir réarrangé les termes

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^k(\mathbf{r}) - \delta_{ik}G_{,j}(\mathbf{r}) &= \mu [2(1 - \nu)\delta_{jk}F_{,lli}(\mathbf{r}) - 2F_{,ijk}(\mathbf{r}) + 2\delta_{ij}F_{,llk}(\mathbf{r}) - 2(1 - \nu)\delta_{ij}F_{,llk}(\mathbf{r})] \\ &= \mu(\delta_{jl}\delta_{ip} - \delta_{ij}\delta_{pl}) [2(1 - \nu)\delta_{kl}F_{,aap}(\mathbf{r}) - 2F_{,klp}(\mathbf{r})] \\ &= \mu e_{jppq}e_{liq} [2(1 - \nu)\delta_{kl}F_{,aa}(\mathbf{r}) - 2F_{,kl}(\mathbf{r})],_p \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Définissons alors le tenseur $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ donné par la relation

$$K_{iq}^k(\mathbf{r}) = 2\mu e_{liq} [(1 - \nu)\delta_{kl}F_{,aa}(\mathbf{r}) - F_{,kl}(\mathbf{r})] \quad (\text{B.10})$$

$$\Sigma_{ij}^k(\mathbf{r}) = e_{jppq}K_{iq,p}^k(\mathbf{r}) + \delta_{ik}G_{,j}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.11})$$

Après introduction de l'expression du vecteur de Galerkin, il vient la relation suivante qui est également proposée dans [Tanaka et al.94] et [Li et al.98].

$$K_{iq}^k(\mathbf{r}) = \frac{e_{liq}}{8\pi(1 - \nu)r} [(1 - 2\nu)\delta_{kl} + r_{,k}r_{,l}] \quad (\text{B.12})$$

B. 2 Evaluation du tenseur $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

L'opérateur hypersingulier $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ est défini par la relation suivante

$$S_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijab}\Sigma_{kl,b}^a(\mathbf{r}) \quad (\text{B.13})$$

Ce tenseur intervient dans l'expression de la représentation intégrale du champ de contrainte. Il nous reste alors à remplacer l'expression de $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ dans $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ pour essayer d'obtenir une formulation plus sympathique.

$$\begin{aligned} S_{ijkl}(\mathbf{r}) &= C_{ijab} C_{klpq} U_{p,qb}^a(\mathbf{r}) \quad (\text{B.14}) \\ &= C_{ijab} \mu [2(1 - \nu)[F_{,pplb}(\mathbf{r})\delta_{ak} + F_{,ppkb}(\mathbf{r})\delta_{al}] + 2\nu F_{,ppab}(\mathbf{r})\delta_{kl} - 2F_{,abkl}(\mathbf{r})] \\ &= \mu^2 [\frac{4\nu^2}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl}F_{,ppqq}(\mathbf{r}) + 4\nu F_{,ppkl}(\mathbf{r})\delta_{ij} + 4\nu F_{,ppij}(\mathbf{r})\delta_{kl} \\ &\quad + 2(1 - \nu)[F_{,pplj}(\mathbf{r})\delta_{ik} + F_{,ppil}(\mathbf{r})\delta_{jk} + F_{,ppkj}(\mathbf{r})\delta_{il} + F_{,ppki}(\mathbf{r})\delta_{jl}] - 4F_{,ijkl}(\mathbf{r})] \end{aligned}$$

On obtient en réorganisant les termes

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2} S_{ijkl}(\mathbf{r}) &= -4\nu [F_{,ijkl}(\mathbf{r}) - \delta_{ij}F_{,ppkl}(\mathbf{r}) - \delta_{kl}F_{,ppij}(\mathbf{r})] \\ &\quad - 2(1 - \nu)[F_{,ijkl}(\mathbf{r}) - \delta_{ik}F_{,pplj}(\mathbf{r}) - \delta_{jl}F_{,ppik}(\mathbf{r}) + F_{,ijkl}(\mathbf{r}) \\ &\quad - \delta_{il}F_{,ppjk}(\mathbf{r}) - \delta_{jk}F_{,ppil}(\mathbf{r})] + \frac{4\nu^2}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl}F_{,ppqq}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

On peut alors facilement montrer les expressions suivantes

$$\begin{aligned} &e_{iep} e_{jfq} e_{kgr} e_{lhs} \delta_{pq} \delta_{rs} F_{,efgh}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.16}) \\ &= F_{,ijkl}(\mathbf{r}) - \delta_{ij} F_{,ppkl}(\mathbf{r}) - \delta_{kl}F_{,ppij}(\mathbf{r}) + \delta_{ij}\delta_{kl}F_{,ppqq}(\mathbf{r}) \\ &e_{iep} e_{jfq} e_{kgr} e_{lhs} \delta_{pr} \delta_{qs} F_{,efgh}(\mathbf{r}) \\ &= F_{,ijkl}(\mathbf{r}) - \delta_{ik}F_{,ppjl}(\mathbf{r}) - \delta_{jl}F_{,ppik}(\mathbf{r}) + \delta_{ik}\delta_{jl}F_{,ppqq}(\mathbf{r}) \\ &e_{iep} e_{jfq} e_{kgr} e_{lhs} \delta_{pq} \delta_{rs} F_{,efgh}(\mathbf{r}) \\ &= F_{,ijkl}(\mathbf{r}) - \delta_{il}F_{,ppjk}(\mathbf{r}) - \delta_{jk}F_{,ppil}(\mathbf{r}) + \delta_{il}\delta_{jk}F_{,ppqq}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

On aboutit finalement aux relations

$$S_{ijkl}(\mathbf{r}) = -e_{jfq}e_{lhs} \tilde{B}_{iqks, fh}(\mathbf{r}) + S_{ijkl}^0 \delta(0) \quad (\text{B.17})$$

$$\tilde{B}_{iqks}(\mathbf{r}) = e_{iep} e_{kgr} [4\nu\delta_{pq}\delta_{rs} + 2(1 - \nu)(\delta_{pr}\delta_{qs} + \delta_{ps}\delta_{qr})] \mu^2 F_{,eg}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.18})$$

$$S_{ijkl}^0 \delta(0) = 2(1 - \nu) [\frac{2\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ik}\delta_{jl}] \mu^2 F_{,ppqq}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.19})$$

On utilise alors la relation définissant $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ pour obtenir le tenseur \mathbf{S}^0 et il en résulte l'expression définitive

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{r}{16\pi G(1-\nu)} \\ \Delta^2 F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2G(1-\nu)} \Delta^2 \left(\frac{r}{8\pi} \right) \\ S_{ijkl}^0 &= G \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Remarque B.1 Le terme constant \mathbf{S}^0 n'est autre que le tenseur d'élasticité \mathbf{C} et apparaît dans l'article de [Nishimura et al.90] mais n'est jamais explicité. \square

Il nous reste à expliciter le tenseur $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ défini précédemment.

$$\tilde{B}_{iqks}(\mathbf{r}) = e_{iep} e_{kgr} [4\nu \delta_{pq} \delta_{rs} + 2(1-\nu)(\delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr})] \mu^2 F_{,eg}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{1}{\mu^2} \tilde{B}_{iqks}(\mathbf{r}) = 4\nu e_{ieq} e_{kgs} F_{,eg}(\mathbf{r}) + 2(1-\nu) e_{ier} e_{kgr} \delta_{qs} F_{,pp}(\mathbf{r}) + 2(1-\nu) e_{ies} e_{kqg} F_{,eg}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.22})$$

Modifions quelque peu l'expression des termes apparaissant avec les signes de permutations [Bonnet].

$$\begin{aligned} e_{ies} e_{kqg} F_{,eg}(\mathbf{r}) &= e_{kqg} [e_{ies} F_{,eg}(\mathbf{r}) - e_{igs} F_{,pp}(\mathbf{r})] + e_{kqg} e_{igs} F_{,pp}(\mathbf{r}) \\ e_{ies} F_{,eg}(\mathbf{r}) - e_{igs} F_{,pp}(\mathbf{r}) &= e_{ims} [\delta_{em} \delta_{gn} - \delta_{en} \delta_{gm}] F_{,en}(\mathbf{r}) \\ e_{ies} F_{,eg}(\mathbf{r}) - e_{igs} F_{,pp}(\mathbf{r}) &= e_{ims} e_{egt} e_{mnt} F_{,en}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

On obtient alors, tout calcul fait

$$\begin{aligned} e_{ies} e_{kqg} F_{,eg}(\mathbf{r}) &= \delta_{iq} F_{,ks}(\mathbf{r}) - \delta_{qs} F_{,ki}(\mathbf{r}) - \delta_{ik} F_{,qs}(\mathbf{r}) + \delta_{ks} F_{,iq}(\mathbf{r}) + [\delta_{ik} \delta_{qs} - \delta_{iq} \delta_{ks}] F_{,pp}(\mathbf{r}) \\ e_{ieq} e_{kgs} F_{,eg}(\mathbf{r}) &= \delta_{is} F_{,kq}(\mathbf{r}) - \delta_{qs} F_{,ki}(\mathbf{r}) - \delta_{ik} F_{,qs}(\mathbf{r}) + \delta_{kq} F_{,is}(\mathbf{r}) + [\delta_{ik} \delta_{qs} - \delta_{is} \delta_{kq}] F_{,pp}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

En reportant ces relations dans l'expression de $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, on aboutit aux expressions

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{iqks}(\mathbf{r}) &= B_{iqks}(\mathbf{r}) + B_{iks,q}^{(q)}(\mathbf{r}) + B_{iqk,s}^{(s)}(\mathbf{r}) + B_{ik,qs}^{(qs)}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{\mu^2} B_{iqks}(\mathbf{r}) &= -4\delta_{qs} F_{,ik}(\mathbf{r}) + [4\delta_{ik} \delta_{qs} - 4\nu \delta_{is} \delta_{kq} - 2(1-\nu) \delta_{iq} \delta_{ks}] F_{,pp}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{\mu^2} B_{iks}^{(q)}(\mathbf{r}) &= 4\nu \delta_{is} F_{,k}(\mathbf{r}) + 2(1-\nu) \delta_{ks} F_{,i}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{\mu^2} B_{iqk}^{(s)}(\mathbf{r}) &= 4\nu \delta_{kq} F_{,i}(\mathbf{r}) + 2(1-\nu) \delta_{iq} F_{,k}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{\mu^2} B_{ik}^{(qs)}(\mathbf{r}) &= -2(1+\nu) \delta_{ik} F(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Reportons alors l'expression obtenue pour $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ dans la définition du tenseur $\mathbf{S}(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} S_{ijkl}(\mathbf{r}) &= -e_{jfq} e_{lhs} \tilde{B}_{iqks, fh}(\mathbf{r}) + C_{ijkl} \delta(0) \\ &= -e_{jfq} e_{lhs} [B_{iqks, fh}(\mathbf{r}) + B_{iks, qfh}^{(q)}(\mathbf{r}) + B_{iqk, sfh}^{(s)}(\mathbf{r}) + B_{ik, qsfh}^{(qs)}(\mathbf{r})] + C_{ijkl} \delta(0) \\ &= -e_{jfq} e_{lhs} B_{iqks, fh}(\mathbf{r}) + C_{ijkl} \delta(0) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Les termes croisés s'annulent, vu qu'ils représentent le rotationnel d'un gradient. Seule la partie notée $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ dans [Li et al.98] demeure et il vient

$$B_{iqks}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r} [\delta_{qs}r_{,i}r_{,k} + \delta_{ik}\delta_{qs} - 2\nu\delta_{is}\delta_{kq} - (1-\nu)\delta_{iq}\delta_{ks}] \quad (\text{B.26})$$

B. 3 Evaluation du tenseur $\mathbf{D}(\mathbf{r})$

Dans la représentation intégrale, soit du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, soit du champ de contrainte élastique $\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, intervient une forme bilinéaire de noyau, un tenseur composé du produit contracté de $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ et de deux tenseurs de permutation.

$$\tilde{D}_{ijfklh}(\mathbf{r}) = e_{jfq}e_{lhs}B_{iqks}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{1}{G^2}B_{iqks}(\mathbf{r}) = -4\delta_{qs}F_{,ik}(\mathbf{r}) + [4\delta_{ik}\delta_{qs} - 4\nu\delta_{is}\delta_{kq} - 2(1-\nu)\delta_{iq}\delta_{ks}]F_{,pp}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.28})$$

Trois termes apparaissent alors

$$e_{jfq}e_{lhs}\delta_{qs} = \delta_{jl}\delta_{fh} - \delta_{jh}\delta_{fl} \quad (\text{B.29})$$

$$e_{jfq}e_{lhs}\delta_{is}\delta_{qk} = e_{jfk}e_{lhi} \quad (\text{B.30})$$

$$e_{jfq}e_{lhs}\delta_{iq}\delta_{ks} = e_{jfi}e_{lhk} = e_{ijf}e_{klh} \quad (\text{B.31})$$

Le dernier terme est laissé sous la forme ci-dessus mais on se propose de modifier la deuxième expression en remarquant que

$$-\delta_{is}\delta_{qk} = (\delta_{ik}\delta_{qs} - \delta_{is}\delta_{qk}) - \delta_{ik}\delta_{qs} = e_{miq}e_{mks} - \delta_{ik}\delta_{qs} \quad (\text{B.32})$$

Après avoir remplacé l'expression obtenue dans la définition de $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2}\tilde{D}_{ijfklh}(\mathbf{r}) &= [4(1-\nu)\delta_{ik}F_{,pp}(\mathbf{r}) - 4F_{,ik}(\mathbf{r})](\delta_{jl}\delta_{fh} - \delta_{jh}\delta_{fl}) \\ &\quad + 4\nu e_{miq}e_{mks}e_{jfq}e_{lhs}F_{,pp}(\mathbf{r}) - 2(1-\nu)e_{ijf}e_{klh}F_{,pp}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

ce qui peut se mettre sous la forme définitive

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2}\tilde{D}_{ijfklh}(\mathbf{r}) &= [4(1-\nu)\delta_{ik}F_{,pp}(\mathbf{r}) - 4F_{,ik}(\mathbf{r})](\delta_{jl}\delta_{fh} - \delta_{jh}\delta_{fl}) \\ &\quad + 4\nu [\delta_{if}\delta_{jl}\delta_{kh} - \delta_{if}\delta_{jh}\delta_{kl} - \delta_{ij}\delta_{kh}\delta_{fl} + \delta_{fh}\delta_{ij}\delta_{kl}]F_{,pp}(\mathbf{r}) \\ &\quad - 2(1-\nu)e_{ijf}e_{klh}F_{,pp}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Notons $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, la partie de $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r})$ apportant une réelle contribution à l'intégrale. Compte tenu de la symétrie des déformations initiales, on peut écrire

$$e_{ijf}e_{klh} \delta\varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (\text{B.34})$$

On obtient alors l'expression suivante pour $\mathbf{D}(\mathbf{r})$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2}\tilde{D}_{ijfklh}(\mathbf{r}) &= [4(1-\nu)\delta_{ik}F_{,pp}(\mathbf{r}) - 4F_{,ik}(\mathbf{r})](\delta_{jl}\delta_{fh} - \delta_{jh}\delta_{fl}) \\ &\quad + 4\nu [\delta_{if}\delta_{jl}\delta_{kh} - \delta_{if}\delta_{jh}\delta_{kl} - \delta_{ij}\delta_{kh}\delta_{fl} + \delta_{fh}\delta_{ij}\delta_{kl}]F_{,pp}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

ce qui devient après avoir réexprimer $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ en fonction de $\nabla\mathbf{r}$,

$$D_{ijfklh}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r} [(\delta_{jl}\delta_{fh} - \delta_{jh}\delta_{fl})(r_{,i}r_{,k} + (1-2\nu)\delta_{ik}) + 2\nu [\delta_{if}\delta_{jl}\delta_{kh} - \delta_{if}\delta_{jh}\delta_{kl} - \delta_{ij}\delta_{kh}\delta_{fl} + \delta_{fh}\delta_{ij}\delta_{kl}]] \quad (\text{B.36})$$

B. 4 Evaluation du tenseur $\Upsilon(\mathbf{r})$

Ce tenseur intervient dans les formes bilinéaires couplant le champ de déplacement au champ de déformation plastique. Il est donné par

$$\tilde{\Upsilon}_{ksij}(\mathbf{r}) = e_{jfq} B_{iqks,f}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.37})$$

Déterminons le gradient de $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. On a ainsi

$$\begin{aligned} B_{iqks,f}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\delta_{qs}}{r} (r_{,if}r_{,k} + r_{,i}r_{,kf}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_{,f}}{r^2} (\delta_{qs}r_{,i}r_{,k} + \delta_{ik}\delta_{qs} - 2\nu\delta_{is}\delta_{kq} - (1-\nu)\delta_{iq}\delta_{ks}) \right] \\ &= \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[\delta_{qs} (\delta_{if}r_{,k} + \delta_{kf}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,f} - 3r_{,i}r_{,k}r_{,f}) \right. \\ &\quad \left. + (2\nu\delta_{is}\delta_{kq} + (1-\nu)\delta_{iq}\delta_{ks})r_{,f} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

De cette relation, on tire alors l'expression définitive de $\tilde{\Upsilon}(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}_{ksij}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu e_{jfq}}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[\delta_{qs} (\delta_{if}r_{,k} + \delta_{kf}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,f} - 3r_{,i}r_{,k}r_{,f}) \right. \\ &\quad \left. + (2\nu\delta_{is}\delta_{kq} + (1-\nu)\delta_{iq}\delta_{ks})r_{,f} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Remarquons enfin que

$$e_{jfq}\delta_{qs}\delta_{if} = e_{jis} \quad \text{et} \quad e_{jfq}\delta_{iq}\delta_{ks} = e_{ijf}\delta_{ks} \quad (\text{B.40})$$

Ces termes n'apportent aucune contribution à l'intégrale et en notant $\Upsilon(\mathbf{r})$ la partie de $\tilde{\Upsilon}(\mathbf{r})$ privée des termes précédents, il en résulte

$$\Upsilon_{ksij}(\mathbf{r}) = \frac{\mu e_{jfq}}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[\delta_{qs}\delta_{kf}r_{,i} - \delta_{qs}\delta_{ik}r_{,f} - 3\delta_{qs}r_{,i}r_{,k}r_{,f} + 2\nu\delta_{is}\delta_{kq}r_{,f} \right] \quad (\text{B.41})$$

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES MÉTHODES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES ET À LEUR MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE EN ÉLASTOPLASTICITÉ.

Résumé : Cette étude traite des méthodes des équations intégrales appliquées à la résolution d'un problème élastoplastique sous l'hypothèse des petites perturbations. L'introduction de l'identité de Somigliana intégrant des déformations initiales permet d'obtenir une formulation du problème directement pilotée en déformations ou en contraintes dans la zone potentiellement plastique, ce qui constitue une différence fondamentale avec les méthodes des éléments finis de domaine.

La résolution numérique du système non-linéaire est réalisée à l'aide de deux méthodes distinctes (Collocation et Galerkin), pour lesquelles les conditions de régularités des champs inconnus diffèrent. Dans les deux cas, l'intégration locale de la loi de comportement est effectuée au moyen d'un algorithme de type Retour Radial et la notion d'opérateur tangent cohérent (CTO) est introduite dans le schéma itératif de Newton-Raphson. Après avoir présenté une méthode systématique de régularisation des opérateurs intégraux en des points réguliers de la frontière, nous étendons ces résultats à des géométries singulières, ce qui conduit à une représentation intégrale originale des déformations en tout point du domaine fermé. Cette expression donne lieu à une méthode de collocation simple et cohérente, rétablissant en outre la dualité entre les équations intégrales en déplacement et en vecteur-contrainte.

Nous montrons également que le système d'équations régissant le problème dérive de la stationnarité d'une fonctionnelle ne comportant que des intégrales régulières et admet un opérateur tangent global symétrique. La mise en oeuvre numérique de la méthode de Galerkin qui en résulte est décrite et nous présentons une règle de quadrature simple et systématique des intégrales doubles, celle-ci devant néanmoins être optimisée à long terme. Des exemples numériques permettent de valider les formulations et les algorithmes proposés.

Mots-clés : représentations intégrales, équations intégrales, élastoplasticité, régularisation, Collocation, Galerkin.

BOUNDARY-DOMAIN ELEMENT METHODS APPLIED TO SMALL-STRAIN ELASTOPLASTICITY : THEORY AND NUMERICAL IMPLEMENTATION.

Abstract : This study deals with Boundary-Domain Element Methods (BDEM) applied to small-strain elastoplasticity. The governing equations are obtained by using the Somigliana displacement identity with initial strains and unlike in Finite Element Methods (FEM), the main unknown of the resulting formulation is the strain or the stress field in the potentially plastic region.

In order to solve the problem, two numerical procedures (Collocation and Galerkin methods) are implemented. It is worth noting that the regularity requirements of the unknown fields are not identical in both approaches. An implicit scheme is adopted for constitutive time integration, which leads to the well-known Return Mapping Algorithm ; moreover the Consistent Tangent Operator (CTO) is inserted in the iterative Newton-Raphson method. An unified presentation of the regularisation techniques at regular points of the boundary is given. These concepts are extended to singular boundary points by introducing the "reconstituted displacement gradient". As a result, a new integral representation of the strain field, even valid for singular boundary points, is proposed and implemented in a Collocation method. This evaluation of the boundary strain gives rise to a new Traction Boundary Integral Equation (TBIE), which can be written at boundary nodes.

It is also shown that the governing equations, which take into account the Somigliana identity, result from the stationarity conditions of a fully regularised functional. This result gives an energetic meaning to the BDEM formulation. The numerical implementation of the resulting Galerkin scheme is described and a simple quadrature rule is presented to evaluate the singular double integrals. This procedure however needs to be optimised in future work. Some numerical results validate the proposed formulations and algorithms.

Keywords : integral representations, integral equations, elastoplasticity, regularization, Collocation, Galerkin.