



HAL
open science

Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes.

Eric Mounier

► **To cite this version:**

Eric Mounier. Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes.. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. Français. NNT : . tel-00550721v2

HAL Id: tel-00550721

<https://theses.hal.science/tel-00550721v2>

Submitted on 28 Oct 2011 (v2), last revised 8 Jul 2013 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE PARIS.
DIDEROT (Paris 7)

École doctorale : « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences,
didactique des disciplines »

Doctorat
Didactique des mathématiques

MOUNIER Eric
Une analyse de l'enseignement de la numération au CP
Vers de nouvelles pistes

**Thèse dirigée par Mme PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne et
M. BUTLEN Denis**

Soutenue le 14 décembre 2010

Jury

Mme Teresa ASSUDE, présidente
Mme Lucie DEBLOIS, rapporteur
Mme Claire MARGOLINAS, rapporteur
M. Christophe HACHE, examinateur
Mme Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, directrice de la thèse
M. Denis BUTLEN, directeur de la thèse

Remerciements

Le travail de longue haleine que représente une thèse ne peut être mené à terme sans aide. En tout premier lieu je tiens à remercier mes deux directeurs de thèse. Denis Butlen m'a dirigé dès la première année. Il m'a aidé à mettre en perspective mon travail. Les relectures avisées de Marie-Jeanne Perrin-Glorian m'ont donné confiance et permis de me repérer dans l'ensemble des différents aspects de la recherche.

Je suis très honoré que Lucie DeBlois et Claire Margolinas aient accepté d'être rapporteur. Je les ai croisées dans mes lectures et leurs travaux ont éclairé de manière déterminante ma thèse.

Je remercie vivement Teresa Assude d'avoir accepté de présider le Jury.

Christophe Hache, directeur de l'IREM Paris 7, est membre du Jury. Il est lui aussi intervenu dès mes premières années de formation en didactique. Je suis heureux qu'il fasse partie du Jury.

Enfin, je suis très reconnaissant à Gérard Vergnaud. A un moment délicat de ma thèse, quand j'ai employé la théorie des champs conceptuels, il m'a permis de recadrer mon travail.

Aline Robert est co-auteure avec Janine Rogalski de la double approche, théorie que j'ai employée pour mes analyses en classe. D'un point de vue plus personnel, Aline Robert a influencé mon parcours. Elle m'a donné le goût de la recherche en didactique. Ses convictions, sa gentillesse et sa rigueur se ressentent dans son approche des enseignants dans les formations qu'elle a initiées et dont j'ai pu bénéficier en master.

Aline Robert a encadré mon mémoire de master, ainsi que Nathalie Sayac. Celle-ci a continué depuis lors à m'encourager, de même que Julie Horoks. Le laboratoire de didactique Didirem, devenu André Revuz, a toujours été un lieu d'accueil bienveillant. Je remercie Alain Kuzniak et Michèle Artigue, directeurs de l'école doctorale. Ils permettent aux jeunes chercheurs de participer aux différents groupes de travail et séminaires et veillent ainsi à ce qu'ils soient associés à la vie scientifique. Je remercie aussi les secrétaires et les bibliothécaires du 6^{ème} étage de la rue Chevaleret.

Le groupe des jeunes chercheurs du laboratoire de didactique André Revuz a organisé à Paris de nombreuses rencontres. Le séminaire national organisé par l'ARDM a été l'occasion d'échanges avec tous les chercheurs de la France. Ces moments ont souvent donné un nouveau souffle à ma thèse. Je remercie tous les chercheurs, jeunes ou confirmés, qui ont participé à ces rencontres.

Grâce au soutien institutionnel de l'IUFM de l'Université Paris-Est Créteil, j'ai bénéficié d'un aménagement de service indispensable pour réaliser ce travail de thèse. Tous mes collègues m'ont soutenu et encouragé. Deux ont une place toute particulière.

Nathalie Pfaff m'a formé au métier de formateur et a influencé ma réflexion didactique de manière déterminante. Ce travail lui doit beaucoup. Depuis dix ans je travaille en étroite collaboration avec Annie Bonnet, au lycée, à l'IUFM et durant le master de didactique. Après mes études de mathématiques pures, son énergie, sa volonté, sa joie de vivre m'ont permis de mener à bien cette aventure didactique. Elle m'a accompagné jusque dans la phase ultime de mise en forme de la thèse.

Je remercie très chaleureusement les professeurs des écoles qui m'ont autorisé à filmer leur classe, les directeurs d'école ainsi que les élèves et leurs parents. J'ai eu de la chance de rencontrer Agnès Boué, Nathalie Haegel, Corinne Martin et Elsa Prigent. Sans elles, cette recherche n'aurait pu être menée à bien. Je tiens à saluer le travail au quotidien qu'elles font avec leur classe, leur engagement et la volonté qu'elles ont de faire réussir tous les élèves. Je pense aussi à tous mes collègues et particulièrement à Monique Gascoin et Nicole Lalot.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont soutenu, aidé, encouragé et ... supporté.

En particulier pour leurs aides techniques, leurs relectures, leur coaching, leur rappel à une autre réalité et leurs petits plats,

Hélène Buisson,

Alain Carpot,

Corinne Debeaux,

Elisabeth Desimpel et ses proches Isabelle, Emmanuelle et Marie-Thérèse,

Florence Desnouveaux,

Laurent Dhainaut,

Cathy Felce,

Sandra Gauthiez,

Tristan Haspala,

Jérémy Holcman et ses amis,

Robert Iasoni,

Hugues Leroy,

Claude Melloul,

Philippe Mounier,

Karen Mounier,

Alain Prioul,

Monique Prioul,

Léo Verbrigghe,

...

Je pense aussi à Jean, Andrée, Claude, Cathy, tous mes proches, ainsi qu'à ma mère Colette, à Lucie et à mon ami d'enfance François qui auraient été heureux de partager avec moi la joie que procure l'aboutissement d'un tel projet.

« Chaque discipline construit et construira ses questions, ses objets et ses méthodes. Mais chacune pourrait et devrait s'appropriier, dans sa logique propre, des questions et des réponses produites par d'autres [...]

Une telle ambition implique que les chercheurs eux-mêmes s'interrogent sur leur propre rapport au savoir. »

Bernard Charlot.
Du Rapport au savoir,
Éléments pour une théorie.

Il était une fois ...

Introduction de la thèse 6

1^{ère} Partie

Etude mathématique et sémiotique des numérations

CHAPITRE I

Présentation de la première partie de la thèse : le nombre et les numérations

Introduction	12
1. Les mathématiques dans notre numération écrite et orale : premières descriptions et questions soulevées	12
1.1 Descriptions de Bezout et Reynaud.....	12
1.2 Analyse comparative	19
1.3 Questions soulevées	20
2. Méthodologie d'analyse	22
2.1 Les emprunts à la sémiotique	22
2.2 Choix méthodologiques.....	25
3. Le nombre	27
3.1 Définition « pragmatique » du nombre	27
3.2 Définition de Peano : approche par la fonction successeur.....	28
3.3 Point de vue du cardinal : définition ensembliste	28

CHAPITRE II

La numération écrite chiffrée

Introduction	30
1. Description : du nombre à la numération écrite chiffrée	30
2. Les mathématiques sous-jacentes vues par la théorie des langages	32
3. Un interprétant en deux parties	33
3.1 La décomposition dite polynomiale	33
3.2 Le système d'écritures chiffrées de position comme representamens	34
4. Les procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection	37
4.1 Le premier procédé concret de mise en signes.....	38
4.2 Le deuxième procédé concret de mise en signes.....	39
4.3 Comparaison des deux procédés et lien avec les principes de base	40
5. Comparaison entre différents systèmes de numération utilisant la décomposition polynomiale	41
5.1 Privilégier les ordres.....	41
5.2 Utiliser les ordres et les coefficients	41
5.3 Analyse comparative	41
6. Conclusion sur la numération écrite chiffrée de position	43
6.1 Une définition en terme de processus.....	43
6.2 La première partie de l'interprétant : les principes mathématiques	44
6.3 La deuxième partie de l'interprétant : le choix du système d'écriture dans la mise en signes.	44
6.4 Synthèse	45

CHAPITRE III

La numération parlée en France

1. Compléments méthodologiques	49
1.1 L'étude linguistico-mathématique faite par Cauty	49
1.2 Description de la numération parlée en français	53
2 Les analyses syntaxiques.....	60
2.1 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs et multiplicatifs.....	61
2.2 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs uniquement.....	64
2.3 Une analyse de la numération utilisant des repérants ordinaux	67
3 Les interprétations	71
3.1 La première partie de l'interprétant.....	71
3.2 La deuxième partie de l'interprétant	78
4 Les procédés concrets de mise en signes.....	86
4.1 1 ^{ère} étape : les procédés selon la première partie de l'interprétant	87
4.2 2 ^{ème} étape : la mise en signes : obtenir le dernier appui/repérant et le dernier appuyant/comptant	91
4.3 3 ^{ème} étape : la mise en signes : obtenir les noms des nombres	93
5. Bilan.....	94

COMPLEMENTS HISTORIQUES ET CONCLUSION DE LA 1^{ERE} PARTIE

1. Les numérations étudiées dans une perspective historique.....	100
1.1 La place des deux numérations étudiées dans l'ensemble des numérations	100
1.2 Etude de la genèse du système de numération chiffrée de position et parlée en français	106
1.3 Bilan	108
2. Conclusion de la première partie de la thèse	109
2.1 Synthèse	109
2. 2 Les questions	113

2^{ème} Partie

Apprentissage et enseignement de la numération au CP Une analyse de l'existant

CHAPITRE IV

Cadre théorique, problématique, méthodologie

Introduction	116
1. Des éléments de la théorie des champs conceptuels à adapter au contexte de la thèse	116
1.1 Les points essentiels retenus	117
1.2 Précisions sur le lien interprétation/sujet.....	120
2. Cadre théorique	121
2.1 La comparaison du cardinal de deux collections de points	121
2.2 Vers une modélisation de l'apprentissage de la numération chiffrée de position	124
3. Les stratégies dans les problèmes : analyse en fonction des cheminements cognitifs 132	132
3.1 Définitions	132
3.2 Les stratégies de « base »	134
3.3 Les cheminements cognitifs	140
4. Conclusion	143
4.1 Des outils théoriques pour aborder de nouvelles questions	143
4.2 Les questions soulevées, celle retenues.....	146
4.3 Vers une problématique en termes d'enseignement.....	146

CHAPITRE V

Des itinéraires proposés dans les recherches antérieures

Introduction	154
1. La recherche de Fuson	155
1.1 Description	155
1.2 Analyse.....	158
2. Les autres recherches : différentes approches	160
2.1 La variété des problèmes à aborder	160
2.2 La disponibilité des stratégies	162
2.3 La relation entre écriture chiffrée et désignation parlée en langue maternelle	163
2.4 Variétés des signifiants intervenant dans la numération	165
2.5 Les connaissances préalables à l'introduction de l'écriture dans son aspect positionnel	167
3. Différents choix d'itinéraires pour surmonter le problème de non-congruence	168
3.1 Un 1 ^{er} type d'itinéraire : évolution de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle	170
3.2 Un 2 ^{ème} type d'itinéraire : le recours à une numération orale annexe.....	171
3.3 Un 3 ^{ème} type d'itinéraire : un lien différé avec la numération parlée en langue maternelle	174
4. Conclusions sur les recherches consultées	175
4.1 Synthèse	175
4.2 Questions soulevées	177

CHAPITRE VI

Des itinéraires proposés dans les manuels scolaires

1. Présentation de l'étude.....	180
1.1 Place dans la thèse et apports théoriques complémentaires	180
1.2 Précisions méthodologiques et choix des manuels	181
2. Le manuel « Cap Maths ».....	185
2.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques	185
2.2 Prescriptions relevées	186
2.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « Cap Maths »	190
2.4 L'itinéraire cognitif proposé par « Cap Maths »	194
3. Le manuel « J'apprends les maths avec Tchou »	199
3.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques	199
3.2 Prescriptions relevées	201
3.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « J'apprends les Maths ».....	213
3.4 L'itinéraire cognitif proposé par « J'apprends les maths avec Tchou ».....	217
4. Conclusion et perspectives pour la troisième partie	224
4.1 Bilan	224
4.2 Vers de nouvelles questions	227

3^{ème} Partie

Analyse de réalisations en classe

CHAPITRE VII

Compléments théoriques et méthodologiques

Introduction	230
1. Position du problème étudié	230
1.1 Les questions	230
1.2 Les apports de recherches antérieures	235
2. Cadre théorique	237
2.1 Le cadre général de la double approche	237
2.2 Les outils didactiques d'analyse : des éléments empruntés à la théorie des situations	240
3. Méthodologie	248
3.1 Choix des observations	248
3.2 Méthodologie	250

CHAPITRE VIII

Analyse de séances en classe

Introduction	255
1. Analyse <i>a priori</i>	256
1.1 Séance 1	256
1.2 Séance 2	267
1.3 Séance 3	269
1.4 Séance 4	271
1.5 Analyse <i>a priori</i> de la tâche de l'enseignant	272
2. La classe de Mme B.	281
2.1 Analyse des séances	281
2.2 Conclusion sur la séquence de Mme B	298
3. La classe de Mme H.	303
3.1 Analyse des séances	303
3.2 Conclusion sur la séquence de Mme H.	319
4. Conclusion du chapitre	322
4.1 Bilan selon les composantes cognitive et médiative	323
4.2 Eclairage sur les autres composantes	326
4.3 Mise en forme de certains résultats	328

CHAPITRE IX

Perspectives de recherche : propositions pour une ingénierie didactique

1. Position du problème d'enseignement	332
2. Une proposition pour l'enseignement	334
2.1 La situation	334
2.2 Présentation détaillée des étapes	338
3. Analyse et perspectives de recherche	346
3.1 Analyse didactique de la proposition	346
3.2 Des questions pour la recherche	355

Conclusion de la thèse	359
-------------------------------------	------------

Bibliographie	368
----------------------------	------------

Introduction de la thèse

La numération : les problèmes spécifiques à la classe de cours préparatoire, le CP

La numération décimale de position semble aller de soi, tant elle est naturalisée pour les adultes. Cependant des difficultés d'apprentissage sont à relever : Fischer (1990), DeBlois (1995, 1996), Fuson (1997), ou encore Masselot, Numa Bocage & Vinatier (2007). Ces difficultés se révèlent par exemple lorsque les élèves abordent les opérations ou les nombres décimaux, Parouty (2005), ou bien des décimaux et des fractions, Bednarz et Janvier (1982). Par ailleurs, Delaplace et Weil-Barais (2008) mettent en évidence le fait que les écritures chiffrées sont peu réinvesties dans des problèmes dans lesquelles elles sont pourtant efficaces, au profit de l'utilisation de stratégies de comptage qui s'appuient sur la numération parlée. Qu'en est-il réellement dans les classes ?

En France, la classe de cours préparatoire, le CP, concerne les enfants de 6-7 ans. Ces derniers ont été quasiment tous scolarisés en classe maternelle, la plupart de temps dès l'âge de 3 ans. Ainsi, entre 3 et 6 ans, les élèves ont suivi un enseignement prescrit par des programmes nationaux. Ils ont abordé les nombres via la comptine numérique, « un, deux, trois, etc. », qui est plus ou moins stable jusqu'à environ trente. Les problèmes mathématiques qu'ils rencontrent concernent *a minima* le champ numérique des nombres inférieurs à dix. Cependant, une grande variabilité est susceptible d'être rencontrée selon les élèves et les classes. Néanmoins, dans tous les cas, ce sont les interactions orales qui prédominent en classe. Les désignations chiffrées sont les traces écrites des désignations orales. Par exemple, une file numérique des écritures chiffrées, 1, 2, 3, etc., est le reflet de la comptine orale, un, deux, trois, etc. Le CP est en rupture avec cette situation. Les programmes officiels prescrivent d'utiliser les potentialités spécifiques des écritures chiffrées que permet le principe de position des chiffres.

Voici un exemple que nous avons relevé en classe de CP, en fin d'année, et qui donne un aperçu du problème¹. Chaque élève d'une classe a devant lui une feuille de papier sur laquelle est dessinée une collection de croix (la feuille est identique pour chaque élève et comporte quarante-sept croix). Le professeur demande : « *écrivez combien il y a de croix* ». Un premier élève énumère les croix en inscrivant au fur et à mesure en dessous de chaque croix les écritures chiffrées 1, 2, 3, ..., 47 et en récitant simultanément la comptine numérique un, deux, trois, ..., quarante-sept. Un deuxième compte jusqu'à dix, en rayant dix croix, inscrit à côté « 10 », puis compte encore jusqu'à dix, inscrit encore « 10 », jusqu'à obtenir l'écriture « 10, 10, 10, 10, 7 ». Il énonce alors « dix, vingt, trente, quarante, quarante-sept », puis écrit « 47 ». Un troisième fait des paquets de dix croix en les entourant, puis compte le nombre de groupements et inscrit le chiffre 4, puis compte le nombre de croix restantes, et inscrit « 7 » à côté du 4, pour obtenir « 74 ». Un quatrième inscrit en toutes lettres « quarante sept » et un dernier « 30 ». Le professeur regarde le travail des deux premiers élèves, il signifie au premier qu'il a réussi et lui demande alors de communiquer sa réponse aux autres élèves. L'élève annonce « quarante-sept ». Le professeur indique que tous ceux qui ont écrit « quarante-sept » ont la bonne réponse et demande à ceux qui n'ont pas réussi de recommencer. Ceci illustre deux niveaux de difficulté, au niveau des apprentissages et au niveau de l'enseignement. Pour les apprentissages, la réussite de l'élève assure-t-elle que les connaissances visées aient été construites ? Plus précisément, qu'est-ce qui dans sa procédure peut être relié à des propriétés mathématiques de la numération écrite de position ? En effet, il semble que chacune des procédures utilise à un moment donné la numération parlée mais de manière différente. Du côté de l'enseignement, se pose le problème de la gestion des procédures en classe (celles qui

¹ Pour un autre exemple, voir Masselot, Numa-Bocage & Vinatier (2007).

sont exactes ne sont pas toujours celles qui servent le mieux l'objectif, en particulier du fait de la prédominance de la numération orale), de leur mode de diffusion, de leur mode de validation et finalement du savoir à institutionnaliser. Outre l'enjeu d'apprentissage, le temps qui leur est consacré, le nombre d'élèves, l'hétérogénéité de leurs connaissances, leurs habitudes de communication en classe (langagières entre autres) sont parmi les facteurs avec lesquels le professeur doit jouer.

Précisons le problème au niveau des notions mathématiques en jeu. L'enseignement de la numération écrite chiffrée est lié fortement à la compréhension d'une écriture. Or les écritures chiffrées et leur transcription orale en français ne font pas référence aux mêmes propriétés mathématiques des nombres entiers. Nous pensons notamment aux irrégularités de la numération orale jusqu'à cent, mais, nous allons le voir, ce n'est pas l'unique raison. Ainsi la désignation orale « quatre-vingt-deux », contrairement à la désignation chiffrée « 82 », ne renvoie pas *a priori* à une traduction symbolique de l'organisation d'une collection d'éléments en huit groupements de dix et deux unités. Dans la désignation des nombres, il n'y a pas congruence (au sens de Duval, 2006) entre le registre de l'oral et celui des écritures chiffrées des nombres : on ne peut pas traduire un mot par un chiffre. Certaines désignations sont cependant plus évocatrices. Ainsi l'oral « trente-quatre » peut être interprétable comme trente plus quatre, voire trois dizaines plus quatre. Pour autant, pour les élèves de début de CP, « trente-quatre » est utilisé pour indiquer le cardinal d'une collection essentiellement grâce à la comptine numérique des mots-nombres. Le nombre est très lié à un geste d'énumération un par un et ne peut être envisagé indépendamment de la dénomination de ses prédécesseurs. Ce n'est pas le cas de la désignation chiffrée « 34 » qui peut être associée immédiatement à une organisation globale de la quantité, sans passer par une désignation des nombres inférieurs. En outre, les problèmes abordés par la suite à l'école mettent en jeu des propriétés de l'écriture chiffrée qui ne se retrouvent pas dans les désignations parlées. C'est le cas des écritures des grands nombres, des opérations posées ou encore de l'extension des entiers aux décimaux. L'écriture chiffrée est donc vecteur de mathématiques spécifiques à apprendre et elle ne peut pas constituer une simple transcription écrite du langage oral. Or, en arrivant au CP, les élèves ont une approche des nombres essentiellement en lien avec leur désignation orale, associée le plus souvent à une activité de dénombrement un par un. Par ailleurs, les situations de classe requièrent des médiations gérées par l'enseignant qui ne peuvent faire abstraction des connaissances anciennes des élèves. Comme il semble inévitable de faire une séquence sur les nombres sans les nommer, se pose alors la question de la place des désignations orales dans l'apprentissage de la numération décimale de position : comment en faire une aide et non un obstacle ?

En résumé, tenir compte des désignations orales est incontournable pour l'enseignant. Se pose alors le problème de leur gestion en classe dans l'enseignement de la numération décimale de position, à la fois au niveau du contenu mathématique et des déroulements en classe. Dans l'exemple donné, nous avons vu que ces deux problèmes étaient liés et ne pouvaient être considérés sans des facteurs afférents aux conditions d'exercice.

Le projet de la thèse

Beaucoup de recherches ont été consacrées à la numération. Cependant des problèmes en classe persistent et nous pensons qu'il est important pour les comprendre d'observer le début de l'apprentissage, c'est-à-dire l'enseignement en classe de CP. Le projet de la thèse est de tirer le bilan des travaux existants, de faire le point sur les difficultés résistantes des élèves dans les débuts des apprentissages, de revisiter le contenu pour faire un nouvel inventaire des possibles, et aussi de rendre compte des pratiques actuelles à travers l'analyse des manuels et des mises en œuvre effectives. La finalité est d'ouvrir de nouvelles perspectives pour l'enseignement. Nous considérons que notre travail est en résonance avec le rapport Prost (2001) qui souligne l'accumulation de recherches sur l'école élémentaire et le manque de

condensation sur des résultats acceptés par tous. La thèse doit contribuer à la compréhension des déroulements en classe grâce à une synthèse de ce qui existe, permettant ainsi d'envisager des propositions qui puissent effectivement être mises en œuvre dans les classes « ordinaires » ou du moins aller dans cette direction. Mais notre but n'est pas de faire des propositions. Si cela avait été le cas, nous aurions pu après la première partie, consacrée à l'analyse mathématique des numérations via les signes employés, prendre une autre direction, par exemple en utilisant la théorie des situations didactiques pour élaborer une ingénierie didactique. Ainsi le dernier chapitre de la thèse doit être compris comme un travail qui prépare une future recherche pour approfondir celle que nous avons menée concernant en particulier la compréhension des déroulements en classe : ce chapitre ne doit pas être regardé comme un aboutissement. La proposition d'ingénierie didactique qu'il contient prend en compte des résultats obtenus successivement : ce sont eux qui sont l'enjeu scientifique et l'apport de la thèse.

Approche adoptée pour l'étude

Notre avons entrepris une étude de la notion dans le but de l'enseigner. Elle comprend donc à la fois une analyse de la notion à enseigner et celle d'enseignements effectifs.

Nous avons besoin d'une analyse fine de la notion d'un point de vue sémiotique et mathématique. Ceci nous permet de reconsidérer les nombreuses études menées et méthodes employées antérieurement afin d'apporter un éclairage réellement nouveau. Faire un bilan de l'existant permet de poser le problème sur de nouvelles bases. Notre approche vise à articuler un point de vue « descendant », de la théorie vers la pratique, et un point de vue « ascendant », de la pratique vers la théorie. La pertinence de notre recherche à produire des résultats originaux se fonde sur cette articulation, alliée au fait de considérer le problème selon le point de vue de la non-congruence des deux numérations.

Ajoutons que nous reconnaissons une certaine parenté entre notre démarche et celle que décrit François Conne (2001) :

« Comme il en va classiquement en épistémologie, [...], il n'y a pas de sujets, on en a fait abstraction, on ne présente ici que le point de vue de l'objet que sont les mathématiques, il s'agit d'épistémologie des mathématiques, pas de l'étude de la connaissance de sujets, ni même de savoirs institués. Réintroduire les sujets ne peut se faire sans ouvrir le schéma à deux nouvelles dimensions : celle de leur cognition propre et celle des segments de réalité où elle vient s'exercer. Ce n'est plus seulement à un sujet générique ni à une réalité réduite à un divers empirique que nous avons affaire, mais bel et bien à un sujet connaissant dans l'action sur le réel. Or cette prise en compte des sujets est une nécessité en didactique puisqu'il y a intention d'enseigner et que cela distingue deux types de sujets selon qu'ils en sont porteurs ou bénéficiaires. Les questions de didactique nous ont obligés à faire un retour en arrière sur ce qui avait été abstrait par l'épistémologie, et nous ne faisons que reprendre à notre compte une démarche que Piaget avait inaugurée avec son épistémologie génétique [...]. Il n'y a plus seulement deux blocs à considérer : langage formel/mathématiques d'une part et divers empirique/concepts de l'autre, mais quatre. Deux nouveaux blocs que je désignerai ici, sans doute de manière encore maladroite, par : le bloc connaissance/expérience d'une part, régi par les lois que tentent de découvrir les psychologues et le bloc savoir/situations, d'autre part qui, lui, relève de l'ordre du pragmatique. Pour moi [c'est-à-dire l'auteur, François Conne] la didactique des mathématiques s'occupe à comprendre les liens entre chacun de ces 4 pôles. Et alors oui, il nous faut des théories pour comprendre ce qui se passe dans l'univers des savoirs et des situations tout comme il nous faut des théories pour comprendre les phénomènes cognitifs, ou des théories mathématiques pour comprendre le monde mathématique, ainsi que des théories conceptuelles pour penser tout cela. ».

Plan d'étude

Dans la thèse, chaque partie va apporter des éléments de réponse aux questions soulevées de manière successive et ouvrir un nouveau champ de questionnement. Ainsi, les questions auxquelles nous tentons d'apporter des réponses ne peuvent être que précisées au fur et à mesure.

La première partie, constituée des chapitres 1, 2, 3, est consacrée entièrement à l'étude du contenu mathématique. La question que nous nous posons est celle de la proximité des deux numérations au niveau des mathématiques qui leur sont sous-jacentes. Si une certaine non-congruence est signalée par l'emploi de singularités telles que « quatre-vingts », au-delà, sous-tendent-elles les « mêmes » mathématiques ? Puisqu'il est question de signes désignant l'objet « nombre », nous convoquons pour nos analyses des éléments de sémiotique et de mathématiques, c'est ce que nous précisons dans le **chapitre 1**. La numération écrite chiffrée est étudiée dans le **chapitre 2** dans le cadre de la théorie (mathématique) des langages. La numération parlée en France est initialement utilisée comme un langage par les élèves. Les enfants apprennent à compter oralement avant d'apprendre à écrire les nombres et avant qu'on leur enseigne la base dix. Ils ont donc des représentations et des interprétations des noms des nombres via la langue française. C'est pourquoi nous allons adopter une approche linguistique dans le **chapitre 3**. La conclusion de la première partie fait en outre intervenir des aspects historiques. Nous dégagons différentes interprétations qui sont définies par des principes mathématiques et la mise en signes de ces principes.

La deuxième partie, constituée des chapitres 4, 5, 6, est consacrée à l'étude des recherches existantes et de manuels scolaires en vigueur. Ils sont considérés comme deux sources d'informations pour préciser les questions qui se posent dans les déroulements en classe. Nous les analysons du point de vue de la non-congruence entre les deux numérations qui a été étudiée dans la première partie. Ceci nécessite des apports théoriques pour comprendre ce que deviennent les interprétations des numérations au niveau d'un sujet. C'est l'objet du **chapitre 4** qui fait appel à la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud. Ceci nous conduit à l'élaboration de deux outils d'analyse : tout d'abord les cheminements cognitifs (du côté du sujet en résolution de problème) et ensuite la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement (la transposition au niveau de l'enseignement du premier outil). Ainsi dans le **chapitre 5**, nous caractérisons les recherches antérieures grâce, entre autres, aux itinéraires qu'elles sous-tendent. Le **chapitre 6** est consacré à l'étude des manuels, ce qui permet alors de préciser les itinéraires et de considérer un premier niveau d'étude de l'enseignement proposé en classe.

La troisième partie, constituée des chapitres 7, 8, 9, concerne les déroulements en classe. Dans le chapitre 7, nous précisons les questions étudiées et nous décrivons les compléments théoriques et méthodologiques nécessaires à notre étude, issus de la double approche didactique et ergonomique d'Aline Robert et Janine Rogalski ainsi que de la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau. Dans le **chapitre 8** nous analysons des déroulements de séances filmées en classe de CP afin de comprendre le jeu des différentes interprétations dans les différentes phases des séances. Nous voulons en inférer des informations génériques.

Grâce à l'ensemble des résultats que nous avons recueillis au fur et à mesure, dans le dernier chapitre, le **chapitre 9**, nous pouvons proposer des pistes pour l'enseignement de la numération. Ces pistes permettent de disposer d'un moyen de poursuivre la recherche.

PREMIERE PARTIE

Etude mathématique et sémiotique des numérations

Compléments historiques

CHAPITRE I	p. 11
Présentation de la première partie de la thèse	
Le nombre et les numérations	
CHAPITRE II	p. 29
La numération écrite chiffrée	
CHAPITRE III	p. 48
La numération parlée en France	
COMPLEMENTS HISTORIQUES ET CONCLUSION	p. 99

<p>CHAPITRE I</p> <p>Présentation de la première partie de la thèse</p> <p>Le nombre et les numérations</p>

Introduction	12
1. Les mathématiques dans notre numération écrite et orale : premières descriptions et questions soulevées	12
1.1 Descriptions de Bezout et Reynaud.....	12
a. La description de Bezout (1821)	13
b. La description de Reynaud (1821)	16
1.2 Analyse comparative	19
1.3 Questions soulevées	20
2 Méthodologie d'analyse	22
3. Le nombre	27
3.1 Définition « pragmatique » du nombre	27
3.2 Définition de Peano : approche par la fonction successeur.....	28
3.3 Point de vue du cardinal : définition ensembliste	28

Introduction

L'objectif de cette première partie est de dégager les mathématiques sous-jacentes aux deux systèmes de numération qui sont en jeu dans les apprentissages au CP, de les comparer. Cette étude va nous permettre de préciser la non-congruence entre le système de la numération orale et le système de la numération chiffrée utilisés en France, afin de porter un nouveau regard sur l'enseignement de la numération en CP.

Dans ce premier chapitre, nous allons étudier le problème que pose la numération du point de vue des mathématiques afin de déterminer une méthodologie d'étude adaptée à notre objectif. Nous commençons par examiner des descriptions relativement anciennes qui permettent de faire émerger les questions qui se posent. Ensuite nous décrivons la méthodologie adoptée pour cette première partie de la thèse. Nous terminons ce premier chapitre en donnant les différentes approches mathématiques de la notion de nombre entier auxquelles nous allons nous référer.

1. Les mathématiques dans notre numération écrite et orale : premières descriptions et questions soulevées

1.1 Descriptions de Bezout et Reynaud

Comment (re)trouver les mathématiques dans nos systèmes de numération ? Les textes écrits par Bezout E. et Reynaud A. A. L. (1821)² sont considérés par Chambris (2008) comme caractéristiques des descriptions de la numération que l'on peut fournir. Ce sont ces textes que nous allons considérer.

²Bezout rédige un « *Traité d'arithmétique à l'usage de la Marine et de l'artillerie* » à destination des Gardes de Pavillon de la Marine pour être admis au rang d'Officier de Vaisseaux. Dans l'édition de 1821, Reynaud présente ses « *Notes sur les ouvrages de Bezout* » et en particulier ses « *Notes sur l'arithmétique* » comme un complément (et un approfondissement) du traité de Bezout.

a. La description de Bezout (1821)

De la Numération et des Décimales.

7. La numération est l'art d'exprimer tous les nombres par une quantité limitée de noms et de caractères : ces caractères s'appellent *chiffres*.

Nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres ; c'est une connaissance familière à tout le monde.

Quant à la manière de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici.

zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caractères, on est convenu que de dix unités on en ferait une seule, à laquelle on donnerait le nom de *dixaines*, et que l'on compterait par dixaines comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compterait deux dixaines, trois dixaines, etc., jusqu'à 9 : que pour représenter ces nouvelles unités, on emploierait les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les en distinguerait par la place qu'on leur ferait occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui marque qu'il n'y a point d'unités simples ; et détermine le chiffre 6 à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle ; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il était seul.

10. Depuis 99 on peut compter jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention semblable. De dix dixaines on composera une seule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent ; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi, pour marquer *huit cent cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si l'on avait *huit cent neuf*, qui contiennent huit centaines, point de dixaines, et neuf unités, on écrirait 809 ; c'est-à-dire que l'on mettrait un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquaient aussi, on mettrait deux zéros : ainsi, pour marquer *huit cents*, on écrirait 800.

11. Remarquons encore qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il était seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille ; comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859 ; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009, et pour *sept mille*, on écrira 7000, où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il était seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés sur la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivants, en partant de la droite, *unités, mille, millions, billions, trillions, quadrillions, quintillions, sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche, en partant toujours de la droite, aura le nom de la tranche, le second celui de dixaines, et le troisième celui de centaines.

Ainsi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche comme si elle était seule, et l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche : par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

quadrillions, trillions, billions, millions, mille, unités.
23 456 789 234 565 456.

On dira vingt-trois *quadrillions*, quatre cent cinquante-six *trillions*, sept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent soixante et cinq *mille*, quatre cent cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent, pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc., zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujétisse pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

Bezout ne donne pas tous les noms pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, les considérant comme connus de tous : il se contente d'exemples. Il définit la numération écrite chiffrée (qu'il nomme tout simplement numération) à partir d'une numération orale « en unités » qui elle-même indique un nombre connu grâce à sa désignation

orale usuelle. Cette numération en unités consiste à nommer les nombres en utilisant les mots « dizaine », « centaine », « millier », etc.³. Il l'utilise pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Il explique donc comment nommer un nombre dans la numération en unités en « *comptant* » une quantité à l'aide des différentes unités de mesure que sont l'unité, la dizaine, la centaine etc. Ensuite il indique le passage entre cette désignation dans la numération en unités et l'écriture chiffrée. Ainsi, pour les nombres inférieurs à cent, il explique que le fait de « *compter par dizaines comme on compte par unités* » permet de dire que « *cinquante-quatre renferme cinq dizaines et quatre unités* » et donc pour le « *représenter* », « *il est convenu d'écrire 54* ». Ce procédé lui permet d'obtenir l'écriture chiffrée des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres. Cependant, il a dû auparavant indiquer la correspondance entre les noms des dix premiers nombres et leur écriture chiffrée, y compris zéro qui n'intervient pourtant pas dans les désignations usuelles des nombres. Il indique l'emploi du signe « 0 » lorsque le comptage ne donne pas « *d'unités simples* », sans donner réellement de justification. Pour obtenir les écritures chiffrées de tous les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il procède de même : il indique la correspondance entre la numération orale usuelle et une numération en unités « régulière » (par exemple soixante comporte six dizaines), c'est-à-dire que chaque unité est obtenue à partir de la précédente en en rassemblant dix, puis il indique le passage de cette numération en unités à l'écriture chiffrée. A noter cependant qu'il ne pose pas explicitement le problème de l'unité « dix mille » pour laquelle il n'existe pas de nom spécifique. Il explique néanmoins le découpage en tranches de trois pour les nombres à partir de dix mille, mais dans le sens de la lecture (passage de l'écriture chiffrée à la prononciation orale).

En résumé, l'algorithme utilisé est le suivant :

1. Les nombres sont définis grâce à leur désignation orale usuelle, qui permet en particulier de constituer des collections à partir de leur cardinal.
 2. Les noms des dix premiers nombres sont traduits par des chiffres, y compris le nombre zéro.
 3. A la désignation orale usuelle est associée un principe de dénombrement d'une quantité à l'aide d'unités successives, chacune de ces unités étant déduite de la précédente par multiplication par dix : des paliers sont ainsi mis en évidence, correspondant aux nombres désignés par dix, cent, mille et aux expressions dizaine, centaine, millier.
 4. Pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, une fois un nombre donné par la désignation orale usuelle, sa désignation est traduite dans une numération en unités (« *cinquante quatre renferme cinq dizaines et quatre unités* »), celle-ci est à nouveau traduite en une écriture chiffrée de position (le cinq s'écrivant 5 et le quatre, 4), les chiffres se plaçant au fur et à mesure à gauche les uns des autres.
 5. Pour les nombres supérieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, c'est le principe du passage à l'unité de rang supérieur qui est indiqué pour l'écriture « *en continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre dans une seule unité* » sans plus faire référence à une numération en unités.
 6. Une fois ces principes posés, au-delà de neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, c'est cette fois-ci la désignation orale usuelle qui sera décrite à partir de la désignation chiffrée, en mettant en avant une segmentation en tranches de 3 chiffres. On donne un nom à chaque tranche et « *le premier chiffre de chaque tranche, en partant toujours de la droite, aura le nom de la tranche, le second celui de dizaines, et le troisième celui de centaines* ».
- Ces éléments soulèvent des questions mathématiques :

³ Pour une définition plus précise, voir Chambris (2008).

- Le zéro joue un rôle à part, servant pour noter l'absence d'unité d'un certain ordre : il n'est pas nécessaire de signifier cette absence avec un comptage en unités, pourtant Bezout introduit dès le début zéro comme un nombre.
- Le comptage par dizaines, puis par dizaines de dizaines et ainsi de suite est justifié par le fait que « *dix fois dix font cent* ». Ceci repose-t-il sur l'usage de mots (cent ou centaine) ou sur une nécessité mathématique ? La régularité de l'obtention des différentes unités de mesure par multiplication par dix n'est ainsi pas clairement justifiée. Elle semble aller de soi. Cependant, Bezout annonce à la fin de sa description que la numération (chiffrée) qu'il vient de décrire est « *purement de convention* ».
- La définition des nombres est peu claire. La numération orale semble définir les nombres, on le voit dans la correspondance entre les dénominations orales des premiers nombres et la désignation chiffrée. Cependant, dans un passage précédant l'extrait donné ci-dessus, Bezout indique : « *Le nombre exprime de combien d'unités ou de parties d'unité une quantité est composée* ». La quantité est « *tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution* » et il cite comme quantité l'étendue, la durée, le poids, ce qui correspond dans le langage actuel à la notion de grandeur⁴. Mais il ne considère les quantités « *qu'en telles qu'elles sont exprimées en nombre* ». Et pour cela, il précise ce qu'est une unité c'est « *une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce* » et il donne l'exemple d'un « *corps pèse cinq livres, la livre c'est l'unité* ». Le nombre entier lui-même semble assimilé à sa désignation orale usuelle.
- Bezout affirme que dix « *caractères* » suffisent pour la numération chiffrée, mais il n'y a pas de démonstration d'une telle affirmation. Elle semble une conséquence (évidente) de la construction itérative qu'il propose.
- Le passage de neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf à dix mille est particulier. Dans la description donnée il est nécessaire de le spécifier car dans un comptage en unités il n'existe pas de nom spécifique pour l'unité correspondant à « dix mille ». La dénomination de l'unité n'est cependant pas mathématiquement nécessaire à l'écriture chiffrée. C'est aussi le moment où Bezout inverse son ordre de description, il va indiquer la désignation orale des nombres à partir de leur écriture chiffrée, car il y a en effet ici une non-congruence entre la numération orale (qui fait apparaître des unités par assemblage par mille, ce que nous nommons usuellement les classes) et la numération en unités « régulière », c'est-à-dire celle qui utilise des unités successives « *en continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre dans une seule unité* » (n°13 dans le texte). Ainsi, Bezout poursuit sa logique jusqu'au bout consistant à passer par une numération en unités régulière pour décrire la numération chiffrée (n°15).

⁴ Pour la distinction entre grandeur, quantité, mesure, unité, etc., voir Rouche (1992).

b. La description de Reynaud (1821)

2. Pour former les nombres, on part de l'unité; l'unité ajoutée à elle-même, donne un nombre nommé *deux*; celui-ci augmenté d'un, compose un nouveau nombre nommé *trois*; et en ajoutant successivement l'unité à chaque nombre obtenu, on obtient les nombres, *quatre, cinq, six, sept, huit, neuf*. Ce dernier augmenté d'un, donne le nombre *dix*; la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé *dixaine*; et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on a compté aussi depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines; mais pour abrégér, au lieu des mots composés, une dixaine, deux dixaines, trois dixaines, quatre dixaines, cinq dixaines, six dixaines, sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit: *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix*. On peut substituer aux trois derniers noms, les mots *septante, octante, nonante*, qui désignent mieux, *sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines*. Pour exprimer les neuf nombres compris entre deux dixaines consécutives, on énonce successivement les dixaines et les unités; ainsi, la collection de trois dixaines et de sept unités, se nomme *trente-sept*. Il faut excepter de ce système les six premiers des neuf nombres compris entre dix et vingt; car au lieu des mots, *dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six*, on dit: *onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize*. La collection de neuf dixaines et de neuf unités, compose le nombre *nonante-neuf*; celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *cent*, composé de dix dixaines, et la réunion de dix dixaines se nomme *centaine*. On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines; et pour désigner les nonante-neuf nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajoute aux noms, cent, deux cents, . . . , neuf cents, ceux des nonante-neuf premiers nombres. Par exemple, la collection de quatre centaines et de huit unités, se nomme *quatre cent huit*. On parvient ainsi au nombre *neuf cent nonante-neuf*; celui-ci augmenté d'un, donne dix centaines; cette collection de dix centaines, forme une nouvelle unité principale nommée *mille*; et de même qu'on avait compté par unités, dixaines et centaines d'unité, depuis une unité jusqu'à mille unités, on compte par unités, dixaines et centaines de mille, depuis une unité de mille jusqu'à mille unités de mille, qu'on nomme *million*. Quant aux nombres compris entre deux mille consécutifs, on ajoute au nom des mille, les noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres. Ainsi, la collection de sept mille et de cinq cent sept unités, se nomme *sept mille cinq cent sept*. Le nombre, *neuf cent nonante-neuf mille, neuf cent nonante-neuf*, augmenté d'un, donne une collection de mille mille, appelée *million*; mille millions forment un *billion*; et ainsi de suite.

On peut observer que d'après ce système, le nom d'un nombre ne dépend jamais que de la combinaison des noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres, avec les mots, *unité, mille, million, billion, etc.*; de sorte que l'énoncé d'un nombre n'exprime jamais plus de neuf unités, neuf dixaines, et neuf centaines de chaque espèce.

La manière d'écrire tous les mots à l'aide des diverses combinaisons des lettres de l'alphabet, fit pressentir la possibilité de représenter tous les nombres par un petit nombre de signes; il était même facile de prévoir, que ces derniers, nommés *chiffres*, seraient en moindre nombre que les lettres, car ils ne doivent servir qu'à désigner une très petite partie des mots exprimés par les lettres. Le but qu'on s'est proposé en inventant les chiffres étant d'abrégér l'écriture des nombres, on dut suivre la route déjà tracée par l'invention des mots. Ainsi, de même qu'on avait adopté neuf noms simples pour les neuf premiers nombres, on adopta neuf chiffres pour les représenter; et comme les combinaisons de ces neuf noms avec ceux des différentes unités avaient donné les noms de tous les nombres, on soumit les chiffres à la même loi, en exprimant par un même chiffre, comme on avait énoncé par le même nom, un même nombre d'unités, de dixaines, de centaines, etc. On représenta donc les neuf premiers nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,
par les chiffres,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ce qui fournit le moyen de simplifier l'écriture des nombres, en remplaçant les nombres d'unités, de dixaines et de centaines de chaque ordre, par les chiffres qui les représentent. Ainsi, pour écrire le nombre *neuf cent quarante-sept unités*, on le décomposa en, *neuf centaines, quatre dixaines et sept unités*; ce qui conduisit à 9 centaines 4 dixaines 7 unités.

La nécessité de soumettre les nombres à diverses opérations, fit apercevoir que le mélange des mots, unités, dixaines, etc., avec les chiffres, compliquait l'écriture des nombres, et que par conséquent il était utile de faire entièrement disparaître les lettres. Pour y parvenir, on chissa les noms des unités, dixaines et centaines de chaque ordre, suivant leur rang de formation; les unités simples furent nommées *unités du premier ordre*; les dixaines, *unités du deuxième ordre*; les centaines, *unités du troisième ordre*; etc.; de sorte que le nombre *neuf cent quarante-sept* peut s'écrire:

9 unités du 3^e ordre, 4 unités du 2^e ordre, 7 unités du 1^{er} ordre.

Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente. On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines; et ainsi de suite. D'après cette convention, le nombre, *neuf cent quarante-sept*, peut s'écrire ainsi, 947; car le chiffre 9 occupant la troisième place, vaudra neuf unités du troisième ordre, ou neuf centaines, ou neuf cents; le deuxième chiffre 4, vaudra 4 unités de deuxième ordre, ou quatre dixaines, ou quarante; enfin le premier chiffre 7, vaudra sept unités. L'assemblage 947, exprime donc *neuf cent quarante-sept unités*.

Plusieurs nombres échappent à ce système; on ne saurait, par son moyen, écrire un nombre qui ne contiendrait pas toutes les unités des ordres inférieurs à ses plus hautes unités. Pour vaincre cette difficulté, on a inventé le chiffre *auxiliaire 0*, nommé *zéro*, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux chiffres significatifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Ainsi, pour écrire en chiffres, le nombre *neuf cent sept*, com-

posé de neuf centaines et de sept unités, sans dixaines, on met un zéro entre 9 et 7, pour tenir la place des dixaines; ce qui donne 907.

En général: Pour mettre en chiffres un nombre énoncé; écrivez successivement à côté les uns des autres et en commençant par la gauche, les centaines, les dixaines et les unités de chaque ordre ternaire (*), et remplacez par des zéros, les unités, dixaines et centaines qui pourraient manquer. Parvenu aux unités simples, le nombre énoncé sera écrit. Appliquons cette règle au nombre

deux-sept millions cinq cent deux unités.

Les plus hautes unités de ce nombre étant des millions, il devra renfermer trois tranches, savoir: celle des millions, celle des mille et celle des unités; posant donc à chacune de ces tranches, les centaines, dixaines et unités énoncées et remplaçant celles qui manquent par des zéros, on écrira 17 000 502.

RÉCIPROQUEMENT: Pour énoncer un nombre quelconque écrit en chiffres; partagez-le d'abord en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche; commençant ensuite par la gauche, énoncez chaque tranche significative comme si elle était seule et donnez-lui le nom des unités de cette tranche. Ainsi, les nombres 17 000 502, 1700, s'énoncent dix-sept millions-cinq cent deux, et mil sept-cents; le second nombre étant composé de 17 centaines, s'énonce aussi dix-sept cents.

En général, d'après notre système de numération, pour qu'un nombre exprime des dixaines ou des centaines ou etc., il suffit que son premier chiffre à droite représente des unités de cet ordre, ce qui revient à placer sur la droite de ce nombre un zéro, ou deux zéros, ou etc. Il en résulte que le nombre 327429 peut être considéré comme formé de 327 mille et 429

(*) Par unités des ordres ternaires, on entend des unités simples, les mille, les millions, les billions, etc.

unités, ou de 3274 centaines et 29 unités, ou de 32742 dixaines et 9 unités, ou etc. Cette manière de décomposer les nombres servira par la suite.

Reynaud, quant à lui, définit tout d'abord la numération orale en français. Cette dernière est décrite à partir d'un comptage en unités d'une collection (la dizaine est le deuxième ordre d'unité) qui ne se traduit pas par une numération en unités comme pour Bezout mais par notre numération orale, « *pour abréger* ». D'ailleurs il propose de substituer aux noms soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix les noms septante, octante et nonante. Il commence par définir les désignations usuelles des nombres qui correspondent à des dizaines entières (résultat d'un comptage par dizaines), puis il comble l'intervalle entre deux dizaines en accolant le nom de la première dizaine avec successivement les neuf noms des premiers entiers. Pour la désignation orale usuelle des nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il poursuit de la même manière en désignant tout d'abord les centaines entières, puis en remplissant les intervalles avec les désignations des quatre-vingt-dix-neuf premiers entiers. A noter que cette fois-ci il ne distingue pas le comptage selon telle unité et le nom donné au résultat de ce comptage : ainsi par exemple le passage de quatre centaines à quatre cents n'est plus justifié explicitement, est-ce encore « *pour abréger* » ? La description de la numération orale se poursuit en introduisant des « *unités principales* » : mille, million, billion etc.

Dans un deuxième temps, il définit les écritures chiffrées à partir de ces désignations orales en français. Il motive le passage de la désignation orale en français à l'écriture chiffrée par le fait que la deuxième est une simplification de la première. Il décrit les étapes en les justifiant par des arguments de nécessité (pour les calculs) et d'opportunités offertes au fur et à mesure par les différentes formes obtenues : « *Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse ...* ». Il recrée ainsi une généalogie de l'écriture chiffrée dans laquelle les ordres d'unités ont un rôle prépondérant. Il indique dans cette description, qui concerne les nombres jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, le rôle joué par le zéro : ce dernier marque l'absence d'une unité d'un certain ordre. Cependant, il n'utilise en fait que les unités des trois premiers ordres (unité, dizaine, centaine), bien qu'il envisage auparavant des unités d'un ordre quelconque. En effet, pour les nombres supérieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il introduit la notion d'unités d'ordre ternaire⁵ : « *les unités simples, les mille, les millions, les billions, etc.* ». La méthode pour définir alors l'écriture chiffrée débute par la reconnaissance de ces unités ternaires dans la désignation orale. A noter que Reynaud indique à la fin de son exposé le processus inverse, c'est à dire une méthode pour dire un nombre écrit en chiffres.

En résumé Reynaud décrit un algorithme :

1. Les noms en français des neuf premiers nombres sont donnés (sans le zéro).
2. La définition des désignations orales en français des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres se poursuit en utilisant la notion d'unité de comptage : unité du 1^{er} ordre, unité du 2^{ème} ordre (dizaine), unité du 3^{ème} ordre (centaine). Ce sont d'abord les nombres résultant d'un comptage (d'une collection) menant à un nombre entier de dizaines (une dizaine, deux dizaines, ..., neuf dizaines) qui sont dénommés, afin de simplifier la désignation obtenue avec le mot dizaine. Ensuite les intervalles sont remplis en accolant les noms des neuf premiers entiers. Puis le processus est réitéré : dénomination des nombres obtenus par un comptage entier de centaines (une centaine, deux centaines, ... neuf centaines) puis « remplissage » des intervalles.
3. Ensuite sont définies les désignations orales usuelles des nombres de mille à plusieurs billions : de nouvelles unités principales sont introduites, qui seront dénommées par la suite « *unités des ordres ternaires* ». Le principe reste le même.
4. L'écriture chiffrée des nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est alors construite à partir des noms des nombres. Les neuf premiers nombres sont traduits en neuf chiffres. Puis est décrite une évolution de l'écriture à partir d'un exemple, dans lequel réapparaît une écriture en unités :

⁵ Ce que nous avons appelé « classe » à propos de Bezout.

- neuf cent quarante-sept unités
- neuf centaines, quatre dizaines et sept unités
- 9 centaines 4 dizaines 7 unités
- 9 unités du 3^{ème} ordre, 4 unités du 2^{ème} ordre, 7 unités du 1^{er} ordre
- 947

5. Est introduit ensuite le signe « 0 » jugé comme nécessaire pour écrire tous les nombres. Cette affirmation est justifiée par le fait qu'on ne pourrait pas, par le système qu'il vient de décrire, écrire les nombres qui ne contiennent pas toutes les unités inférieures à leur ordre le plus haut.

6. Le processus se poursuit par la définition de l'écriture chiffrée des nombres supérieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf à partir de leur dénomination orale : introduction des unités des ordres ternaires (les unités simples, les mille, les millions, les billions), chacune comportant des unités, des dizaines et des centaines.

Ces éléments soulèvent là aussi des questions mathématiques :

- Le zéro n'est pas considéré initialement comme un nombre, puisque Reynaud n'indique pas au début comment le désigner oralement. Il est indiqué comme nécessaire afin de désigner tous les nombres par une écriture chiffrée, sans que cette affirmation soit démontrée. Le nom « zéro » désigne alors le chiffre « 0 », dont il est difficile de savoir s'il est perçu comme un nombre.
- Il est clairement dit que la centaine vient de dix dizaines, mais le fait de multiplier par dix ou plus précisément de réunir dix dizaines, puis dix centaines n'est pas justifié. D'autre part, cette façon de compter semble s'arrêter brusquement après l'usage du millier, puisqu'il est introduit des unités des ordres ternaires, sans justification rationnelle là non plus.
- Reynaud donne une définition succincte des nombres. Elle provient du concept d'unité, qui s'ajoute à elle-même et « *donne un nombre nommé deux* », et ainsi de suite, toujours en nommant les nombres. Le nombre est conçu comme étant le résultat d'un comptage d'une collection. C'est donc une conception liée à la numération orale ainsi qu'à des collections obtenues par ajouts successifs d'un élément. L'appellation « unité » suggère l'idée qu'il existe un aspect commun à toutes collections indépendamment de la nature des objets qui les composent.
- Reynaud utilise neuf chiffres plus un (le chiffre « 0 »). Ces neuf chiffres correspondent avant tout aux noms des neuf premiers nombres. Ils permettent ainsi d'indiquer le nombre d'unités, dizaines, centaines que l'on peut comprendre à partir de la dénomination orale du nombre. Le fait qu'il ne faille que ces neuf chiffres (plus un, le 0) n'est pas questionné. Est-ce une conséquence (évidente ?) des mots utilisés dans la numération orale et du fait de compter en unités ?
- Reynaud, à la différence de Bezout, définit la numération orale. Il passe en fait par un comptage en unité et indique que la numération orale est un moyen d'abrégé ce que nous pouvons nommer une numération en unités non régulière (car elle utilise la base dix puis la base mille). Rien ne vient étayer cette affirmation. Dans le même ordre, les arguments avancés pour expliquer le passage de la numération orale à la numération écrite chiffrée, une genèse « naturelle », sont aussi à questionner.
- L'attention portée au passage de la dénomination orale de mille à un million est caractéristique. Ce passage est nécessaire pour définir la numération orale, car « dix mille » ne s'entend pas. Cependant cela n'est pas nécessaire dans la

description qu'il a commencé à faire de la numération écrite⁶. Si Reynaud avait continué avec la même logique, c'est-à-dire en utilisant une numération en unités régulière (fondée exclusivement sur la base dix), il aurait utilisé des unités du 4^{ème} ordre et il aurait ainsi pu se passer des « *unités des ordres ternaires* ». Nous pouvons émettre l'hypothèse que c'est parce qu'il revient sur une logique d'un passage direct de la numération orale à la numération écrite chiffrée, qu'il utilise implicitement une numération en unités non régulière (c'est-à-dire basée sur une base dix avant le nombre mille puis sur une base mille à partir de celui-ci), celle qu'il avait utilisée pour définir la numération orale.

1.2 Analyse comparative

Une unité de mesure sous-jacente

Dans ce texte, Bezout présente tout d'abord le nombre comme venant de la mesure des grandeurs, l'unité étant arbitraire pour chacune des grandeurs considérées et non nécessairement toujours la même : c'est bien ici la notion d'unité de mesure qui est convoquée.

Chez Reynaud, le nombre vient de la mesure du cardinal d'une collection (donc discrète et finie). L'unité est représentée par importe quel élément de la collection, considéré comme étant « un ».

L'ordinal et le cardinal

Pour Bezout, il semble exister prioritairement des aspects cardinaux dans la numération chiffrée. Il s'agit en effet d'utiliser des unités de mesure d'une quantité pour obtenir la dénomination, des opérations sont sous-jacentes. Peut-on rapprocher « *dix fois dix* », « *huit cent cinquante-neuf, qui contient huit centaines, cinq dizaines et neuf unités* » de la décomposition $859=8 \times 100 + 5 \times 10 + 9$, bien qu'il n'y ait pas d'opérations explicites dans son texte ? Mais les aspects ordinaux ne sont pas absents. L'écriture chiffrée suit une logique de définition de proche en proche (tout au moins de tranche en tranche : 1 à 9 puis 10 à 99, puis 100 à 999, etc.). Le comptage se fait à l'aide de la comptine numérique.

Chez Reynaud, du fait qu'il parle de la numération orale d'abord, on retrouve ces deux aspects, mais que nous pouvons néanmoins comprendre dans une importance inverse. Si les collections se constituent par ajouts, il s'agit d'ajouts successifs de un, ce qui se retrouve en particulier quand il s'agit de passer de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf à mille, ou encore de définir les noms entre deux dizaines ou deux centaines. Ainsi c'est plutôt une construction d'une succession de nombres qui est décrite pour la numération orale, qui elle-même sert de support à la définition de la numération écrite chiffrée. L'aspect ordinal y semble donc occuper une place importante.

Les ordres et les classes

Chez Bezout, les nombres (inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf) sont identifiés à leur désignation orale, l'écriture chiffrée est une transposition de la numération en unités. En particulier, l'ordre (dans une classe) est privilégié à la classe⁷ et ce sont les unités

⁶ En fait, théoriquement, on n'a besoin d'introduire des mots nouveaux que lorsqu'on ne peut plus « dire ». Nous le verrons dans le chapitre 3. C'est donc seulement pour les puissances de 2 de la base qu'on aurait besoin de mots nouveaux : pour cent, pour dix mille. On n'en a pas besoin pour mille, on pourrait dire « dix cents » « onze cents » etc. jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, ensuite on aurait besoin d'un mot nouveau pour 10⁸.

⁷ On peut en effet distinguer la classe des milliers, des millions, des milliards, et dans chaque classe trois ordres : l'unité, la dizaine et la centaine. Bezout ne fait apparaître les classes que pour l'énonciation, après les ordres.

obtenues successivement par multiplication par dix qui structurent l'écriture chiffrée des nombres (ce qui est implicitement dit dans le n°13): la base dix semble sous-jacente.

Chez Reynaud, la numération chiffrée est une simplification de la numération orale usuelle, en particulier quand il va s'agir de faire des opérations. Ainsi, c'est la classe (ce qu'il dénomme « *nouvelle unité principale* » puis « unité des ordres ternaires ») qui est privilégiée à l'ordre. En conséquence, ce sont les classes obtenues par multiplication par mille qui structurent l'écriture chiffrée des nombres (ce qui est explicitement dit mais aussi une conséquence de la description de la numération orale, conséquence que Reynaud ne démontre pas). En d'autres termes, pour écrire les nombres à partir de dix mille, la base mille semble sous-jacente, avec une « sous-base » dix pour désigner les nombres de un à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

L'ordre des chiffres

Chez Bezout, l'ordre des chiffres dans l'écriture d'un nombre n'est pas questionné et semble aller de soi en traduction de la numération en unités (qui contiendrait un ordre « naturel » ?).

Chez Reynaud, une hiérarchie des unités en différents ordres (la dizaine correspond ainsi à une unité du deuxième ordre) « *fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente* ».

Le zéro

Chez les deux auteurs, le zéro signifie l'absence d'une unité d'un certain ordre suivant la position qu'il occupe. Mais il a un statut de nombre initialement chez Bezout qu'il n'a pas chez Reynaud. L'introduction de ce zéro semble chez les deux une nécessité qui gêne d'une certaine manière les deux exposés dans leur logique linéaire. Ceci interroge sur les congruences affichées par l'un et l'autre entre les numérations en unités et chiffrées d'une part et la numération orale et chiffrée d'autre part.

Les justifications mathématiques

Les deux auteurs décrivent un mode de construction de la numération écrite chiffrée de position. Aucun des deux ne semble préoccupé par des justifications (mathématiques) de l'opérationnalité de la numération chiffrée de position. Notons cependant que le nom du traité « *Arithmétique à l'usage de la marine et du commerce* » dont est issu le texte de Bezout indique que l'auteur ne s'adresse pas à des mathématiciens : il n'est pas surprenant de ne pas y voir des démonstrations. Il en est de même dans une moindre mesure des commentaires de Reynaud sur ce traité, bien qu'ils se présentent comme des approfondissements mathématiques.

1.3 Questions soulevées

Ces descriptions permettent d'identifier la numération en unités qui peut apparaître comme un système intermédiaire entre la numération orale en français et la numération écrite chiffrée et ouvrent avant tout un champ de questionnement.

Tout d'abord, qui est avant qui ? Quelles sont les places respectives de la numération orale usuelle en français, de la numération en unités, de la numération écrite chiffrée ? Il semble que Reynaud place la numération en unités avant la numération orale usuelle, elle-même avant la numération écrite. Mais pour décrire ce dernier passage, numération orale usuelle/numération chiffrée, l'organisation est différente selon les nombres. Pour les nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, il revient sur un comptage qui mène à une numération en unités, tandis que pour les autres nombres il privilégie un lien direct. Bezout quant à lui s'en tient à une filiation entre la numération en unités et la numération chiffrée. La place de la numération orale « usuelle » n'est cependant pas claire, elle semble être la source de la définition du nombre pour les nombres inférieurs à neuf mille neuf cent quatre-vingt-

dix-neuf, alors qu'ensuite elle semble plutôt provenir de la numération écrite chiffrée de position.

La généalogie de ces différentes numérations ne semble pas si simple, le rôle particulier joué par le chiffre/nombre « 0 » en est une autre illustration. Ceci nous amène à nous poser des questions sur les filiations entre les deux numérations : faut-il imaginer uniquement des descendances ? Les liens ne sont-ils pas plus de l'ordre du cousinage ? La question d'un ancêtre commun est-elle pertinente ?

Les différentes conceptions exposées par les deux auteurs posent aussi la question de savoir ce qu'est un nombre. Selon Reynaud, le nombre semble provenir du comptage des objets d'une collection (discrète, manipulable ou figurée). L'unité est alors une entité abstraite, mais rendue sensible par l'intermédiaire de chaque objet de la collection, unité qui permet de réaliser les comptages (c'est-à-dire à l'aide des désignations orales des nombres). Selon Bezout, nombres et désignations orales semblent de prime abord confondus puisque « *nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres ; c'est une connaissance familière à tout le monde* », tout au moins n'envisage-t-il pas de faire de distinction pour les lecteurs puisqu'il indique dans l'introduction de son traité : « *Je ne suppose d'autres connaissances à mon Lecteur, que celle des noms des nombres et quelques idées familières, sur lesquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales* ». Cependant nous avons indiqué que pour ce dernier, la notion de nombre est liée à celle d'unité utilisée pour la mesure d'une grandeur (qu'il appelle quantité), mesure qui sert à comparer les grandeurs.

Ceci nous renvoie ainsi à des questions fondamentales auxquelles nous devons répondre. Qu'est-ce qu'un nombre, quelles sont les relations avec ses désignations ?

Le rôle de la base, voire sa définition, est à questionner. Il semble qu'on puisse voir deux bases enchevêtrées pour la numération orale, une base dix seule en deçà de neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, une base mille associée à une base dix au delà. Les nombreuses irrégularités dans les dénominations notées par Reynaud posent cependant la question de savoir si cette organisation est une reconstruction de l'auteur ou si la numération s'est fondée sur le principe de base : en particulier il n'est pas clair de savoir si elle provient d'une évolution de systèmes plus anciens « sans base » ou non. En ce qui concerne le système de numération chiffrée, Bezout y voit des principes de base dix, provenant d'une numération en unités « régulière » : il privilégie l'ordre à la classe. Reynaud garde une perception plus proche de la numération orale par le biais implicite d'une numération en unités irrégulière : il complexifie en introduisant les classes après les ordres. Comment trancher ? En effet, si l'écriture 2345687 peut faire pencher la balance du côté de Bezout, c'est l'inverse pour 2 345 687. Cette question n'est évidemment pas déconnectée des généalogies proposées par les deux auteurs. Au-delà de ce problème, qui peut apparaître comme moins important du fait que nous nous intéressons dans cette thèse à des nombres inférieurs à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, comment comprendre l'importance du nombre dix, de la base ? Qu'est-ce qu'une base ?

Ces questions en amènent d'autres plus générales. D'abord, d'un point de vue mathématique, est-ce que les systèmes de numération peuvent attester de leur cohérence uniquement par des principes, comme celui de base ? Ces principes sous-tendent-ils une structuration des nombres, par exemple selon des décompositions additives $859=800+59+9$, dans lesquelles peuvent intervenir ou non des multiplications $859=8 \times 100+5 \times 10+9$? De plus la description de la numération écrite chiffrée à partir de la numération orale ou en unités semble poser le problème de la langue. Quelle place a-t-elle par rapport à une écriture qui apparaît comme

disjointe de toute langue parlée ? Quelle est la part de la convention, de la culture, des mathématiques ?

Pour répondre à ces questions, nous devons analyser les numérations d'un autre œil, c'est ce que nous proposons dans les paragraphes qui suivent et c'est pourquoi nous devons préciser notre méthodologie.

2. Méthodologie d'analyse

Les numérations peuvent être regardées de différents points de vue : mathématique, linguistique, historique, psychologique, sémiotique, etc. Dans la première partie de la thèse, nous avons le projet de comprendre les relations entre les mathématiques et les numérations afin de dégager des points forts pour leur enseignement, en particulier les obstacles épistémologiques liés à la non-congruence des deux numérations : le savoir est ainsi regardé sans considérations psychologiques ni didactiques. Ceci demande de prendre en compte les « signes » qui se présentent à l'élève. En effet, c'est par ce biais que celui-ci découvre de manière essentielle les nombres et c'est leur compréhension qui est objet d'apprentissage.

Plus particulièrement dans notre thèse, il s'agit de comprendre ce que les désignations orales et chiffrées ont de différent alors qu'elles concernent le même objet mathématique, les nombres entiers naturels. La première différence est celle engendrée par l'opposition oral/écrit. Schématiquement, l'oral est spécifique de la communication directe avec quelqu'un ou avec soi dans le temps présent et l'espace immédiat, tandis que l'écrit permet une communication différée dans le temps ou/et l'espace (rôle mémoriel), avec quelqu'un ou avec soi. Or ces différences ne sont pas les seules en ce qui concerne nos deux numérations, sinon le rapport entre le son « douze » et le mot écrit « douze » serait le même que celui entre le son « douze » et l'écriture chiffrée « 12 ». Comprendre ce rapport au-delà des considérations écrit/oral est l'enjeu de ce qui suit, c'est d'ailleurs pourquoi nous allons utiliser le terme de « parlée » au lieu d'« orale » pour qualifier la numération en langue française. Nous avons vu que des essais tels qu'entrepris par Bezout ou Reynaud posaient des questions qui ne mènent pas à des réponses simples et immédiates. C'est pourquoi nous entreprenons une étude approfondie et sans *a priori* qui puisse dépasser en particulier certaines idées « naturelles », communément admises sur la numération. Puisqu'il est question de différentes désignations du nombre dans les numérations, nous nous tournons vers la sémiotique pour nos analyses. Il nous faut alors choisir des notions sémiotiques utiles à notre objectif qui s'inscrivent dans des préoccupations proprement didactiques.

2.1 Les emprunts à la sémiotique

La sémiotique doit donc servir à dégager des éléments d'ordre épistémologique et mathématique à des fins didactiques : chercher les théorèmes, les propriétés, les relations qui sont « en jeu » dans les numérations et la nature de leur lien avec les signes utilisés. Duval (2006) indique trois préoccupations de la didactique des mathématiques qui concernent aussi la sémiotique : « *disposer d'un outil d'analyse suffisamment adapté et discriminant pour étudier l'activité mathématique et ses productions [...], le problème du rôle des signes et des représentations sémiotiques dans le fonctionnement de la pensée [...], les variables cognitives à prendre en compte dans les apprentissages* ». Cette première partie de la thèse concourt principalement à élaborer l'outil d'analyse pertinent pour étudier l'activité mathématique. Ainsi, les outils d'analyse développés doivent nous permettre de distinguer non seulement l'objet « nombre » de ses désignations, mais aussi de comprendre le fonctionnement de celles-ci, c'est-à-dire ici les mathématiques qui y sont associées. Plus précisément, si nous définissons une numération comme servant à désigner chaque nombre par un « signe » écrit ou oral, trois paramètres sont alors en jeu : le nombre (une notion mathématique), la

numération (régit par une syntaxe) et le « signe » (la désignation telle qu'elle nous est donnée à voir ou à entendre). Les descriptions de Bezout et Reynaud nous ont déjà indiqué la non trivialité de ces notions et de leurs relations. Ajoutons encore que sans considérer de désignations dans un système de numération, le nombre peut être déjà défini mathématiquement de plusieurs façons : une définition d'orientation « ordinale » comme celle de Peano ou une d'orientation « cardinale » issue de la théorie ensembliste. Nous aurons à préciser ces définitions. En outre, la numération évoque quant à elle l'idée d'une organisation des « signes » qui permet de lier le « signe » au nombre. Ainsi ce « signe » ne peut être envisagé indépendamment d'un système qui le lie aux autres « signes » ni du nombre qu'il désigne. Des précisions doivent alors être apportées pour analyser quel aspect du nombre, quelles mathématiques sont convoqués dans ces « signes ». Peirce (1906) indique : « *Il n'est rien de plus indispensable à une solide épistémologie qu'une discrimination bien tranchée entre l'objet et l'interprétant de la connaissance* ». C'est pourquoi nous avons choisi d'emprunter des notions à la sémiotique de Peirce, celles qui nous offrent un cadre d'analyse adéquat commun aux deux numérations que nous étudions. Nous allons dans ce qui suit préciser ces emprunts et leur utilité dans le cadre de notre travail. Ces emprunts sont limités mais ils nous suffisent car notre objectif n'est pas l'analyse sémiotique en elle-même. Cependant, nous avons besoin d'un cadre sémiotique général pour ancrer l'analyse des deux numérations, en particulier pour permettre des comparaisons. La rédaction peut comporter certaines maladresses dues à notre compréhension encore *in progress* de la théorie de Peirce (et aussi de nos besoins que nous avons estimés comme limités). Nous tenons à remercier François Conne, qui, en tant que spécialiste, a permis d'en limiter le nombre et la portée. Peirce (1906) conçoit un signe comme « quelque chose qui tient pour quelque objet ». C'est une triade : un representamen (écrit ou oral) qui dénote un objet (un objet de pensée) grâce à un interprétant. La triade est (une totalité) dynamique, et le signe est déterminé par les sémioses qui se développent à son propos (en particulier la composante « interprétant »)⁸. De manière plus précise la détermination du signe enrichit et précise la connaissance de l'objet (qui n'est connu que par la médiation du signe). Les sémioses sont susceptibles de se stabiliser, de se fixer sur des habitudes interprétatives, on parle alors d'interprétant final. Ici il va être question de cet interprétant final, en considérant les différentes « habitudes interprétative » qui peuvent être inférées grâce à une analyse du fonctionnement du système sémiotique, dans sa relation au nombre entier. Ces définitions servent notre étude. L'objet concerne les nombres entiers dont nous allons regarder comment ils sont donnés à connaître par la médiation de chaque ensemble des signes (qui constituent chacune des deux numérations). Les representamens sont les écritures chiffrées ou les sons désignant les nombres en français (dimension dénotative). Ils sont régis par une syntaxe qui fait que les representamens sont liés, sont soumis à des règles. La syntaxe est différente pour chaque numération. Par exemple l'inversion de deux chiffres dans une écriture chiffrée est toujours une écriture chiffrée (un élément de l'ensemble des representamens de la numération écrite chiffrée). Ce type de règle n'est pas toujours respecté dans l'ensemble des representamens de la numération parlée en France (si on considère la constitution de representamen en tant que concaténation de representamens de base). Ainsi, c'est le cas pour « cent trois » et « trois cent » qui sont deux representamens, mais cela ne l'est pas pour « vingt trois » et « trois vingt ». L'interprétant est du ressort de la dynamique des enchaînements sémiotiques derrière lesquels nous cherchons des principes mathématiques. Nous allons rechercher cette dynamique principalement dans la logique qui sous-tend les règles syntaxiques, tout en gardant en arrière-plan le fait que chaque système de numération doit permettre de désigner (au moins potentiellement) tous les nombres entiers et *a minima* tous les « premiers »

⁸ Voir aussi Everaert-Desmedt (2006) et Conne (2008).

nombres entiers. Par exemple une des possibilités (bien connue, mais que nous ré-explorons dans la thèse) est de considérer que la logique des règles syntaxiques de la numération écrite chiffrée de position est à chercher du côté de la décomposition dite polynomiale des nombres (en base dix), avec dans un deuxième temps le fait de choisir des coefficients pour constituer les représentamens (il faut aussi considérer un choix concernant la graphie de chaque chiffres et la disposition spatiale sur un support matériel, choix non nécessairement uniquement mathématiques). En résumé, nous adoptons la terminologie de Peirce essentiellement pour deux types de raisons. Notre but est de disposer d'un cadre pour analyser la complexité des relations entre numération et nombre : il y a deux signes pour le même objet et deux signes liés, il faut le prendre en compte. Par ailleurs, même s'il n'en est pas directement question dans cette première partie de la thèse, la question des relations entre les mathématiques et les signes qui les véhiculent nous semble centrale dans l'apprentissage. Autrement-dit, nous considérons que l'étude sémiotique peircéenne des numérations permet de comprendre comment le nombre (entier) est donné à connaître, tout au moins potentiellement.

Avec ces notions de sémiotique nous pouvons différencier les éléments du signe qui nous sont indispensables : l'objet, les désignations et la relation qui permet de les relier. Dans notre thèse, nous n'envisageons pas d'étudier le signe autrement que pour comprendre d'un point de vue mathématique la non-congruence entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée de position, en vue d'un apprentissage en classe de CP, c'est pourquoi les éléments théoriques exposés précédemment nous suffisent. Nous ne ferons donc pas appel à la complexité de la sémiotique de Peirce. Aussi, pour indiquer cette distance, allons-nous utiliser le verbe « désigner » dans l'acception de « dénoter », c'est-à-dire dans la relation entre le representamen et l'objet. De même, le terme « désignation » est employé dans le sens de representamen. Il n'y a numération que lorsqu'il y a système, c'est-à-dire pour nous, régit par une syntaxe dans l'ensemble des représentamens. Nous allons alors rechercher l'interprétant dans la logique qui sous-tend ces codes et règles. C'est ce jeu de relations qui va nous donner des informations sur les liens (mathématiques entre autres) entre les nombres et les systèmes de numération. En particulier, considérer le signe comme une triade permet de poser aussi la question de l'objet « nombre », question posée de manière fondamentale dans l'analyse que nous avons faite des descriptions de Bezout et Reynaud, analyse qui peut être perçue comme menant à exhiber leur interprétant final. Les écrits de François Conne, en particulier Conne (2008), permettent de mieux comprendre en quoi la vision adoptée ici de la sémiotique peircéenne est simplifiée et minimise certaines de ses caractéristiques. En particulier nous exploitons peu la double dimension du signe, une triade dont chaque composante a un degré (priméité, secondéité ou tiercéité). Cependant, comme les représentamens sont étudiés du point de vue de la syntaxe qui les constitue en système, ils sont considérés comme des légisignes (tiercéité). Les autres degrés des composantes ne sont pas utilisés *a priori* pour établir une méthodologie d'analyse. En outre, sans partir d'une définition de l'objet « nombre », nous en exposons quelques-unes qui vont participer à cette méthodologie. D'une part elles vont permettre de mieux comprendre les aspects du nombre éclairés par l'étude des signes en les mettant en perspective avec un ensemble de propriétés et définitions. D'autre part, nous gardons quelques caractéristiques des numérations liées à la nature des nombres entiers : exhaustivité (désigner, au moins potentiellement, tous les nombres entiers et *a minima* tous les « premiers » nombres entiers), non redondance (deux représentamens différents désignent deux nombres différents) et non ambiguïté (un représentamen ne désigne qu'un seul nombre). Les résultats obtenus par la méthodologie que nous allons adopter permettent de répondre à nos questions. Nous espérons qu'ils peuvent aussi contribuer à une recherche sur la numération qui pourrait être menée dans un cadre strictement peircéen.

2.2 Choix méthodologiques

Le cadre général étant posé, nous allons élaborer une méthodologie pour l'étude des numérations afin de répondre aux questions que nous nous sommes posées. Quel que soit le choix opéré, il est important de rappeler que lorsque nous allons chercher les liens entre les mathématiques et les numérations en considérant l'étude des signes, le résultat obtenu est un point de vue de chercheur. Non seulement dans cette première partie de la thèse nous ne devons pas avoir l'illusion que les mathématiques que nous trouvons sont les mathématiques perçues par celui qui utilise ou apprend les numérations, mais en outre, les conclusions de l'analyse sont contingentes de la méthode employée, ce qui est inhérent à toute recherche. A la fin de cette première partie, nous serons ainsi amené à utiliser le mot « interprétation » pour signaler cet état de fait, il traduit l'idée que nous recherchons l'interprétant final et qu'il est le fruit d'une recherche spécifique, avec une méthodologie qui lui est propre. Il nous semble important alors d'essayer de rendre nos choix explicites afin que les conclusions obtenues puissent être réfutables au sens de Popper. C'est l'objet de ce qui suit.

Chacun des systèmes de numération ayant des spécificités, nous devons en tenir compte. Notre étude a pour but de « *disposer d'un outil d'analyse suffisamment adapté et discriminant pour étudier l'activité mathématique et ses productions* », Duval (2006). Ici nous en sommes à l'étape de l'étude des liens entre les signes et les mathématiques. La linguistique semble donc la plus adaptée pour analyser la numération parlée en français alors que ce sont les mathématiques en ce qui concerne les écritures chiffrées⁹. Cependant les essais faits par Bezout et Reynaud nous amènent à nous poser la question de leur articulation ainsi que de la place à donner aux représentations par rapport à l'objet « nombre ». Les éléments de sémiotique peircéenne indiqués ci-avant nous ont permis de préciser le rapport entre les mathématiques et les signes. Ce point de vue transposé dans le cadre des numérations offre une possibilité de « trouver » des mathématiques dans la logique de constructions des numérations (la syntaxe sur l'ensemble des représentations). Mais comment procéder ? Partir d'une étude syntaxique ou des modèles de logique mathématiques susceptibles d'être à l'œuvre ? Dans le champ de la linguistique contemporaine Seiler (1992)¹⁰ indique deux grandes approches : l'une, « de haut en bas », essaye de partir de la formalisation du savoir en l'illustrant à partir d'une langue (surtout l'anglais), l'autre, « de bas en haut », part du traitement de données empiriques (fournies par la diversité des langues) pour tenter d'y extraire une systématisation théorique. Ceci suppose qu'il existe ce qu'elle appelle un « *tertium comparationis* », une référence, qui est en dehors d'une langue particulière. Nous adoptons ce point de vue méthodologique d'une double approche « de bas en haut » et « de haut en bas » et l'étendons à tout système de numération, sachant que pour nous il ne s'agit pas de rechercher un « *tertium comparationis* » mais une logique de constitution des numérations afin de dégager *in fine* notre interprétant final, celui élaboré dans le cadre de ce travail.

Nous allons donc adopter comme Seiler une démarche qui concilie les deux approches archétypales de la linguistique moderne : onomasiologique (du « concept » à la représentation linguistique) et sémasiologique (des structures linguistiques vers le « concept »). Nous supposons alors l'existence de structures mathématiques sous-jacentes qui peuvent

⁹ Là encore, rappelons que nous ne considérons pas les dimensions psychologiques ou cognitives qu'il faudrait prendre en compte pour accéder à la conceptualisation de telle ou telle personne utilisant la numération. Ceci sera pris en compte dans la suite de la thèse.

¹⁰ Seiler (1992) fait aussi l'hypothèse « *selon quoi les opérations qui aboutissent à la construction des représentations mentales ne diffèrent pas, en principe, des opérations qui aboutissent aux structures linguistiques* », nous ne la suivons pas sur ce point car, dans le cadre de la sémiotique de Peirce, nous ne considérons pas que l'interprétant soit du côté des représentations mentales.

transcender les différentes numérations (écrites et parlées), c'est-à-dire l'interprétant qui permettent d'éclairer leur structure syntaxique et nous nous proposons de les mettre à jour en combinant les deux approches. Nous restons à ce niveau de l'analyse pour l'interprétant. Ceci permet de formuler des hypothèses, d'une part sur les principes sous-jacents, en particulier dégager ceux qui sont mathématiquement nécessaires à la cohérence des systèmes de numération, et d'autre part sur les liens entre les deux numérations. Nous questionnons ensuite ces hypothèses, ce qui est fait en élargissant notre domaine d'étude à d'autres numérations et en envisageant le processus historique de leur genèse. Ceci nous amène alors à considérer les « *opérations de transformation* »¹¹ qu'elles permettent. Nous choisissons donc de n'aborder ces opérations de transformation (mettant en jeu la structure d'ordre et les opérations arithmétiques) que dans un deuxième temps car il nous semble difficile d'avoir deux entrées simultanées. C'est ainsi que nous prenons en compte le fait que la notion de nombre (entier) ne peut être dissociée des structures sur l'ensemble des nombres (ordre et opérations). Ce choix se justifie car, dans les définitions du nombre, les opérations numériques et la relation d'ordre ne sont définies qu'après une approche axiomatique des entiers¹². En outre la genèse historique des numérations indique que les représentations ont servi initialement principalement à noter une quantité (et non à calculer). Finalement, au CP la numération écrite chiffrée est introduite par des problèmes de notation liés aux quantités.

Si nous résumons ce paragraphe, grâce à des notions de sémiotique, de linguistique et de mathématique nous nous centrons donc initialement sur la comparaison de notre numération chiffrée avec notre numération parlée en français. Pour ce faire, nous partons de descriptions des numérations, descriptions que nous voulons les plus neutres possibles¹³ afin de ne pas sous-tendre des principes que nous ne ferions que retrouver dans leur analyse : ce point sensible de notre méthodologie est repris dès le début du premier paragraphe. Nous opérons un double mouvement, des signes vers les mathématiques, des mathématiques vers les signes. Cette méthode amène à ouvrir le champ des possibles quant aux principes sous-jacents, sans *a priori*. Elle permet de découvrir éventuellement différents principes mathématiques pour une même numération. Des hypothèses sont alors élaborées, des questions sont soulevées, qui demandent des éclairages. Nous limitons notre analyse à la recherche d'un interprétant dans la logique des constructions syntaxiques des ensembles de représentations. Ceci ne rend pas compte de tous les aspects du nombre que les numérations peuvent donner à voir. Une analyse sémiotique peircéenne pourrait être poursuivie de manière plus approfondie. Nous avons décidé de procéder différemment car pour le projet de la thèse, il ne nous a pas paru essentiel de s'y engager. De manière économique, nous avons entrepris d'utiliser des résultats venant de recherches historiques. C'est pourquoi, dans une deuxième partie, nous avons adopté ce point de vue en envisageant la genèse de différentes numérations. Nous faisons appel à des recherches anciennes, y compris des recherches sur les constructions linguistiques des numérations orales en général. Ceci nous conduit à affiner nos analyses en considérant le rôle joué par les numérations dans la résolution de problèmes qui mettent en jeu en particulier des opérations. A cette occasion, nous étudions le rôle joué par les mesures des grandeurs. Pour finir, donnons un autre argument justifiant la pertinence de cette approche pour l'étude de l'apprentissage et de l'enseignement de la numération écrite chiffrée de position. Ifrah

¹¹ L'expression est de Duval (2006). Il donne trois « *classes de représentations* » dont chacune « *donne respectivement lieu à trois types d'opérations radicalement différentes : des manipulations concrètes libres, des algorithmes de calcul, des opérations discursives de désignation et de substitution salva veritate* ». Ces transformations sont selon lui d'un intérêt majeur pour la didactique.

¹² Bien que les définitions axiomatiques s'appuient elles-mêmes sur une première approche intuitive du nombre qui est une approche ordinale, que ce soit dans la théorie de Peano ou dans l'axiomatique Zermelo-Frankel, les nombres sont définis par récurrence. Nous reviendrons sur ces considérations dans le paragraphe suivant.

¹³ Dans le sens où nous voulons éviter les écueils rencontrés par Bezout et Reynaud.

(1994), Charbonnier (2004), indiquent que la constitution même des systèmes de numération est le résultat d'un long processus dans lequel les mathématiques ont eu leur place, mais en général de manière non explicite. Autrement dit, ce sont certains principes mathématiques qui ont rendu possibles (c'est-à-dire opérationnelles) les numérations, mais ils ont été éprouvés et utilisés d'une manière pragmatique, expérimentale et culturelle (Crump, 1990). La méthodologie décrite dans ce chapitre consiste à débiter par une analyse dans un cadre sémiotique. Elle nous permet ainsi d'adopter le point de vue de celui qui découvre les numérations, sans en connaître l'historicité ni les possibilités arithmétiques, ce qui est le cas des élèves de CP. Nous pensons de ce fait découvrir des aspects de la numération qui vont être utiles à notre recherche sur l'apprentissage initial de la numération chiffrée de position.

3. Le nombre

Une « définition » du nombre va mettre en perspective les aspects mathématiques que l'analyse des signes donne à voir. En effet, dans notre approche, le nombre n'est pas envisagé d'emblée via une définition axiomatique. Si l'analyse de la triade representamen/objet/interprétant permet d'appréhender comment est donné à voir le nombre, elle ne peut pas suffire à dégager *a priori* toutes les propriétés du nombre entier. Ainsi, puisque nous voulons saisir les mathématiques dans les signes rencontrés, nous devons être capable de saisir quels aspects mathématiques du nombre y sont sollicités ou non. Nous allons fournir trois définitions du nombre. Deux sont proprement mathématiques, ce sont les deux approches qui sont décrites dans l'Atlas des Mathématiques (1997). La troisième est plus pragmatique dans le sens où elle met en jeu des problèmes portant sur des collections d'objets concrètes, figurées ou évoquées : elle ne se situe donc pas au même niveau que les autres et n'a pas la même fonction dans notre travail. C'est elle qui nous sert parfois à comprendre le lien entre les systèmes de numération et le concept mathématique de nombre lorsque la distance est trop grande entre une description des signes et les Mathématiques. Notons que cette troisième « définition » n'est pas choisie au hasard, elle est en relation avec la première approche du nombre qu'ont eue les élèves de CP. En effet à la maternelle, les élèves ont été confrontés à des problèmes relatifs à des cardinaux de collections manipulables, figurées ou évoquées. En outre, elle va dans le sens du développement historique¹⁴. Remarquons que les descriptions de Bezout et Reynaud attestent au début du 19^{ème} siècle d'une perception du nombre encore floue. Les définitions purement mathématiques sont tardives, elles ne sont formalisées rigoureusement qu'après la première partie de ce 19^{ème} siècle avec Peano puis avec le développement de la théorie des ensembles.

3.1 Définition « pragmatique » du nombre

Nous considérons ici le nombre entier comme l'entité abstraite qui permet de rendre compte des quantités discrètes finies, manipulables, figurées, ou évoquées, c'est-à-dire qui permet de résoudre certains problèmes de comparaison et d'évaluation à l'aide si besoin est d'opérations élémentaires. Ces opérations sont « définies » comme une abstraction des actions pouvant être codées à l'aide des signes opératoires usuels. Les problèmes sur le nombre (entier) que nous envisageons sont ceux décrits par Vergnaud (1991) et repris par Fénichel & Pfaff (2004-2005), ils concernent tous des collections manipulables, figurées, ou évoquées. Nous pouvons généraliser l'utilisation du nombre pour résoudre des problèmes de mesurage de grandeurs non discrètes (longueur, masse, durée, angle, aire, etc.). Dans la thèse, ce deuxième aspect n'est tout d'abord pas privilégié du fait que nous nous intéressons prioritairement aux nombres entiers, et donc à la discrétisation du réel qu'ils permettent : les grandeurs qui ne se

¹⁴ Des apports historiques complémentaires sont donnés à la fin de la première partie de la thèse.

perçoivent pas directement comme discrètes n'apparaissent donc qu'en second. Ce point de vue est renforcé par le fait que les mesures de telles grandeurs¹⁵ n'interviennent d'après les programmes qu'en cours de cycle 2 (CP, CE1), non pas à la maternelle. L'objet de ce chapitre n'est pas d'entrer dans les problèmes et questions que pose une telle « définition », nous y reviendrons dans la suite de la thèse. Cette approche doit nous permettre cependant, comme nous l'avons indiqué ci-avant, de faire le lien entre les systèmes de numération et le concept mathématique de nombre lorsque la distance est trop grande entre une description des signes et les Mathématiques. Autrement dit, nous ferons le lien entre les principes mathématiques et ce que nous nommons une mise en signes « concrète » du cardinal d'une collection, c'est-à-dire les actions et paroles associées à l'obtention du représentant du cardinal d'une collection d'objets.

3.2 Définition de Peano : approche par la fonction successeur

L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} est défini de la manière suivante à un isomorphisme près : (1) 0 est un élément de \mathbb{N} ; (2) Il existe une bijection S de \mathbb{N} sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$: $x \rightarrow S(x)$, $S(x)$ est le successeur de x ; (3) Si une partie M de \mathbb{N} contient 0 et le successeur de tout élément de M , alors $M = \mathbb{N}$. Ceci permet en particulier d'établir axiomatiquement le raisonnement par récurrence : soit P une assertion qui dépend d'un entier naturel n , notée de ce fait P_n . Si P_0 est vraie et si l'implication (P_n vraie entraîne $P_{S(n)}$ vraie) est vraie pour tout entier n , alors P_n est vraie pour tout entier n . Les opérations telles que l'addition et la multiplication sont alors définies par récurrence grâce aux successeurs. Pour deux entiers n et m , $n+m := S(n + S^{-1}(m))$; $n \times m := n \times S^{-1}(m) + n$. L'associativité, la commutativité, l'existence d'éléments neutres pour les deux opérations, ainsi que la distributivité sont alors des conséquences (non triviales) de ces définitions. La structure d'ordre total est, elle, une conséquence immédiate. Cette conception met en avant la notion de successeur et de construction de proche en proche : l'ordre y est simple à définir, les opérations et leurs propriétés plus difficilement.

3.3 Point de vue du cardinal : définition ensembliste

Une deuxième approche mathématique est de considérer un nombre comme un cardinal. Deux ensembles¹⁶ ont le même cardinal quand ils sont équipotents, c'est-à-dire en bijection. Ceci définit une relation d'équivalence sur les ensembles. Dans la théorie axiomatique des ensembles, l'axiome du choix permet de mettre un bon ordre sur tout ensemble et de choisir dans chaque classe d'équivalence un ensemble qui la représente : c'est le cardinal. Les opérations telles que l'addition et la multiplication sont définies immédiatement grâce à l'union et au produit cartésien (à définir) : $\text{Card}(A) + \text{card}(B) := \text{card}(A \cup B)$ pour A et B disjoints ; $\text{Card}(A) \times \text{card}(B) := \text{card}(A \times B)$. L'associativité, la commutativité, l'existence d'éléments neutres pour les deux opérations, ainsi que la distributivité sont alors de (simples) conséquences de ces définitions. C'est une conception « globale » qui est ici convoquée puisque tous les nombres (assimilés à des cardinaux) ainsi que les opérations sont définis d'emblée sans passer par une construction de proche en proche, sans notion de successeur *a priori*.

¹⁵ Signalons à nouveau que nous faisons une distinction entre grandeur (longueur, aire, masse, durée, etc.) et mesure (nécessitant la notion d'unité et de nombre). Nous interprétons ainsi les programmes 2008, puisque ce point de vue a été développé antérieurement dans les documents d'accompagnement des programmes 2002. Il est repris dans l'ouvrage de Fénichel & Pfaff (2004-2005).

¹⁶ Bien que ce ne soit pas cette acception dans la théorie des ensembles, nous utilisons ultérieurement fréquemment le mot collection qui est d'un emploi fréquent en didactique pour indiquer un ensemble fini. De même, le terme objet sera employé comme équivalent au terme élément. Pour une approche plus complète, nous renvoyons à la théorie des ensembles décrite par exemple pp. 22-35 dans l'Atlas des Mathématiques (1997).

CHAPITRE II La numération écrite chiffrée
--

Introduction	30
1 Description : du nombre à la numération écrite chiffrée	30
2 Les mathématiques sous-jacentes vues par la théorie des langages	32
3 Un interprétant en deux parties	33
3.1 La décomposition dite polynomiale	33
a. L'échelle de numération	33
b. Description du système de numération	34
3.2 Le système d'écritures chiffrées de position comme representamens	34
4 Les procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection	37
4.2 Le deuxième procédé concret de mise en signes.....	39
4.3 Comparaison des deux procédés et lien avec les principes de base.	40
5. Comparaison entre différents systèmes de numération utilisant la décomposition polynomiale	41
5.1 Privilégier les ordres.....	41
5.2 Utiliser les ordres et les coefficients	41
5.3 Analyse comparative	41
6 Conclusion sur la numération écrite chiffrée de position	43
6.1 Une définition en terme de processus.....	43
6.2 La première partie de l'interprétant : les principes mathématiques	44
6.3 La deuxième partie de l'interprétant : le choix du système d'écriture dans la mise en signes.	44
6.4 Synthèse	45

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la numération écrite chiffrée de position qui utilise les chiffres¹⁷ dits arabes, c'est-à-dire celle qui est objet d'apprentissage en primaire dès le CP et qui est utilisée pour communiquer dans le monde scientifique en particulier.

La méthode d'analyse employée débute par une description non interprétative du système de numération. Ensuite, nous allons nous poser la question de savoir quels sont les principes mathématiques qui rendent ce système cohérent. Nous cherchons donc tout d'abord à interpréter l'écriture de notre système, autrement dit, la suite des écritures des nombres est donnée (avec sa syntaxe) et nous recherchons un système cohérent sur le plan des mathématiques qui permette de l'expliquer (nous le cherchons dans les modèles mathématiques proposés par la théorie des langages formels). C'est la démarche inverse de celle qui est empruntée d'habitude. Elle nous semble adaptée pour dégager les différents aspects des mathématiques qui y sont contingents, par exemple savoir en quoi les principes de base dix sont liés à l'écriture positionnelle adoptée. Une fois choisi un modèle mathématique (ce que nous nommons « principes mathématiques » de la numération), nous regardons si ces principes peuvent être mis en signes autrement que par les signes de la numération que nous étudions. C'est aussi ainsi que nous allons aussi procéder pour la numération orale, à la différence que nous allons consacrer un chapitre entier à élaborer des modèles *a priori* : nous ne les prenons pas dans la théorie des langages.

De manière plus précise, du fait que le système de numération écrite chiffrée est celui employé dans les mathématiques pour désigner des nombres, nous allons poser cette question dans le domaine mathématique. Comme il s'agit d'un système d'écritures, nous avons adopté un cadre théorique, celui de la théorie des langages, qui permette de fournir des modèles pour des principes mathématiques de numération. Ainsi il est question de savoir en quoi la numération écrite chiffrée peut être interprétable dans cette théorie. Nous avons opéré un double mouvement. Tout d'abord des signes vers les mathématiques en regardant quels modèles peuvent convenir pour rendre la numération écrite chiffrée exhaustive non redondante et non ambigu, ce qui permet d'obtenir ce que nous avons nommé la première partie de l'interprétant, les principes mathématiques. Puis des mathématiques vers les signes, puisque y est discutée l'univocité de cette mise en signes, c'est-à-dire que nous nous posons la question de savoir si les principes mathématiques retenus peuvent mener à d'autres systèmes de numération que celui qui est notre objet d'étude.

L'analyse est complétée par la description des procédés relatifs à une mise en signes « concrète » du cardinal d'une collection d'objets. Cette mise en signes traduit les principes mis à jour. En posant la question de l'opérationnalité du système dans une situation concrète, elle questionne différemment le lien entre les signes et les mathématiques.

1. Description : du nombre à la numération écrite chiffrée

Puisque notre approche consiste à considérer les signes pour y retrouver les mathématiques sous-jacentes, sans regard historique, nous devons considérer ici que ces signes sont définis dans les Mathématiques. Ils désignent des nombres, nous nous référons alors aux définitions du nombre données précédemment.

Les écritures chiffrées sont constituées d'une suite de graphèmes, les chiffres, parmi les dix suivants : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pris seul, chacun de ces graphèmes désigne un nombre.

¹⁷ Le terme « chiffre » est précisé ultérieurement, dans un premier temps nous l'employons dans le sens de graphème. Ce n'est qu'une fois expliqué son rôle dans la numération que la définition de chiffre sera complétée.

Avec l'approche de Peano, nous pouvons définir successivement, de proche en proche, les dix premiers chiffres en tant qu'écritures désignant les premiers nombres :

- 1 est le representamen qui désigne S(0)
- 2 est le representamen qui désigne S(1),
- 3 est le representamen qui désigne S(2),
- 4 est le representamen qui désigne S(3),
- 5 est le representamen qui désigne S(4),
- 6 est le representamen qui désigne S(5),
- 7 est le representamen qui désigne S(6),
- 8 est le representamen qui désigne S(7),
- 9 est le representamen qui désigne S(8),

Avec l'approche ensembliste, nous considérons les collections suivantes¹⁸ :

$A = \{ \emptyset \}$; $B = \{ \emptyset, A \}$; $C = \{ \emptyset, A, B \}$; $D = \{ \emptyset, A, B, C \}$; $E = \{ \emptyset, A, B, C, D \}$; $F = \{ \emptyset, A, B, C, D, E \}$; $G = \{ \emptyset, A, B, C, D, E, F \}$; $H = \{ \emptyset, A, B, C, D, E, F, G \}$; $I = \{ \emptyset, A, B, C, D, E, F, G, H \}$ et nous avons alors¹⁹ :

- 0 est le representamen qui désigne le card \emptyset ,
- 1 est le representamen qui désigne le card(A)
- 2 est le representamen qui désigne le card(B),
- 3 est le representamen qui désigne le card(C),
- 4 est le representamen qui désigne le card(D),
- 5 est le representamen qui désigne le card(E),
- 6 est le representamen qui désigne le card(F),
- 7 est le representamen qui désigne le card(G),
- 8 est le representamen qui désigne le card(H),
- 9 est le representamen qui désigne le card(I)²⁰

Maintenant notons temporairement $X := S(9)$, c'est-à-dire $X := \text{card}(\{ \emptyset, A, B, C, D, E, F, G, H, I \})$.

X se note 10 dans le système que nous étudions. Pour les autres nombres, plusieurs méthodes de description peuvent être utilisées pour indiquer quel nombre les representamens désignent. Cependant, cette entreprise est nécessairement interprétative. Par exemple, si nous continuons une description par ordre croissant, elle sera en lien avec la définition du nombre de Peano. Nous voulons éviter un tel a priori. C'est pourquoi nous nous contentons dans ce paragraphe d'indiquer que les écritures employées pour désigner les nombres sont composées d'une suite (finie) de chiffres rangés sur une ligne. Chacun des dix chiffres peut se trouver à n'importe quel emplacement, mis à part les zéros que l'on ne rencontre jamais à gauche de l'écriture. Ainsi toute suite de chiffre a du sens, excepté les suites ayant des zéros à gauche si l'on impose l'unicité de l'écriture.

Dans la suite, sauf si le contexte l'exige, dès qu'un nombre aura été désigné par son representamen, nous confondrons ce representamen et ce nombre dans le sens où nous ne dirons pas toujours « le nombre désigné par le representamen « 3 » » mais « le nombre 3 » ou même parfois directement « 3 ».

¹⁸ Il existe différentes possibilités de construire les entiers naturels à partir de la théorie des ensembles.

¹⁹ Nous admettons sans démonstration que les deux constructions des nombres sont isomorphes, c'est-à-dire que la construction par cardinaux vérifie les axiomes de Peano, S étant définie par $s(\text{card}(\{A\})) := \text{card}(\{A\} \cup \{z\})$, avec $z \notin A$. Nous ne vérifions pas non plus ici que les opérations et propriétés définies à l'aide des cardinaux correspondent alors bien à celles définies à l'aide des successeurs.

²⁰ La construction est de proche en proche car il s'agit d'obtenir des cardinaux par ajout d'un élément à partir de l'ensemble vide.

Notons qu'avec l'approche pragmatique, il est difficile de donner une définition *a priori* des chiffres. En effet, dans la mise en signes du cardinal d'une collection il ne nous est pas possible de voir si prévaut l'aspect « ordinal » de Peano (la notion première est le successeur) ou l'aspect plus « cardinal » présent dans la théorie des ensembles. C'est justement une des questions à laquelle nous devons répondre.

2. Les mathématiques sous-jacentes vues par la théorie des langages

Pour rechercher les éléments mathématiques de la numération écrite chiffrée enjeu d'apprentissage au CP, nous allons analyser cette numération à l'aune de la théorie des langages qui va nous fournir des modèles pour les principes mathématiques.

Quels sont les principes qui permettent de rendre cohérente et exhaustive notre numération chiffrée ? Autrement dit, pourquoi chacun des nombres entiers, sans exception, peut-il être désigné (exhaustion) ? Pourquoi une écriture chiffrée ne désigne-t-elle qu'un seul nombre à la fois (non ambiguïté) ? Pourquoi un nombre n'est-il désigné que par une seule écriture chiffrée (non redondance) ? Qu'est-ce qui est dans la mise en signes du ressort des mathématiques ou, par exemple, de l'ordre du conventionnel ?

D'un point de vue de la théorie des langages formels, Rigo (2003), un système de numération définit une bijection entre l'ensemble des entiers naturels (muni des opérations) et un langage.

Le langage étant lui-même un ensemble de mots, un mot étant une suite finie et ordonnée d'éléments d'un ensemble fini (dit alphabet). Les systèmes de numération dans la théorie des langages sont donc toujours de position. Mais la notion de numération se généralise en utilisant les termes d'une suite, appelée échelle de numération.

Plus précisément, quand on considère la théorie des langages, les numérations généralisées se définissent à l'aide d'une échelle de numération, c'est-à-dire une suite strictement croissante $(d_n)_{n \geq 0}$ d'entiers, de premier terme 1. Ainsi tout entier naturel a admet un développement du

type $\sum_{i=0}^n a_i d_i$, où les a_i sont des entiers positifs ou nuls que nous appellerons des coefficients.

Nous appellerons les termes de la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ des ordres²¹.

C'est le fait que le premier terme soit 1 qui assure que chaque entier naturel admet un tel développement : **la condition d'exhaustivité est donc remplie.**

La théorie étudie les numérations à partir de l'algorithme d'Euclide ou de l'algorithme glouton²². Ainsi par exemple une numération peut se baser sur la suite de Fibonacci. Dans un système de numération, l'utilisation de l'algorithme glouton pour obtenir le mot associé à un nombre permet d'associer un et un seul mot au nombre (exhaustivité et non redondance), ce qui n'est pas le cas en général car il n'y a pas forcément de décomposition unique. La non ambiguïté résulte de l'injectivité de la division euclidienne.

²¹ Nous verrons ultérieurement que c'est une généralisation de la notion d'ordre utilisée par Bezout et Reynaud.

²² L'algorithme glouton consiste ici à effectuer la division euclidienne du nombre dont on veut la décomposition par le plus grand terme d_n de la suite (d) inférieur à ce nombre. Le dividende obtenu est le coefficient a_i correspondant. On continue l'algorithme en divisant le reste par d_{n-1} : le dividende obtenu est le deuxième coefficient. Ainsi de suite.

3. Un interprétant en deux parties

Dans la théorie des langages, un système de numération ne comprend pas le passage aux representamens. Par la suite, nous utilisons « numération » ou « système de numération »²³ comme comprenant nécessairement ce passage. Ainsi le principe d'un système de numération va consister en outre à utiliser le développement $\sum_{i=0}^n a_i d_i$ pour désigner un nombre²⁴. Plusieurs choix sont possibles : utiliser les a_i uniquement, utiliser les a_i et la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ simultanément, utiliser la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ uniquement. Ces choix permettent alors une traduction en representamens écrits et des règles pour décoder le système, c'est-à-dire passer de ces representamens au nombre $\sum_{i=0}^n a_i d_i$ (non ambiguïté). Si la théorie des langages n'étudie pas les désignations elles-mêmes (les representamens), elle s'intéresse cependant à un élément du code (c'est-à-dire de l'interprétant) : le passage de $\sum_{i=0}^n a_i d_i$ au mot $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Ainsi, cette théorie permet d'étudier les numérations produisant des representamens liés à ces mots, mot au sens de la théorie des langages formels.

Dans notre numération chiffrée chaque suite de chiffres renvoie à un nombre. L'ordre des chiffres est significatif : 26 ne désigne pas le même nombre que 62. Ces arguments indiquent donc que notre système est candidat pour s'interpréter à l'aune des systèmes de numération de la théorie des langages. Ainsi, il peut être compris comme l'association entre $\sum_{i=0}^n a_i d_i$ et le mot $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Par la suite nous étudions cette association.

3.1 La décomposition dite polynomiale

a. L'échelle de numération

Nous voulons déterminer les critères que doit remplir une suite $(d_n)_{n \geq 0}$ associée aux écritures chiffrées pour permettre de donner du sens aux representamens qui se présentent à nous. C'est ainsi que nous proposons de comprendre le lien entre le système de representamens et les mathématiques.

Une des premières conditions à remplir pour que le système soit non redondant, est que l'association envisagée soit bijective. Or nous avons le théorème suivant²⁵ :

Le mot $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ associé à ce développement est unique si les inégalités

(1) $a_0 d_0 + \dots + a_j d_j < d_{j+1}$ sont vérifiées pour tout $j = 0, \dots, n$.

²³ Quand nous utilisons le mot système avec celui de numération, c'est pour mettre l'accent sur les principes sous-tendus, en particulier induits de la non-indépendance entre deux representamens quelconques. Cette idée sera reprise dans la partie consacrée aux numérations parlées dans lesquelles le système est moins facile à inférer des representamens.

²⁴ Dans la partie dédiée à notre numération parlée nous utilisons aussi l'expression « mise en signes ». Celle-ci y est aussi utilisée dans un sens plus général car elle peut concerner le lien entre l'objet « les nombres entiers » et le système de representamens propre à une numération. En particulier elle ne préjuge pas de principes comme le développement d'un nombre selon une échelle de numération. Ici, le mot « transcription » est utilisé pour indiquer plus spécifiquement le passage entre des principes mathématiques et des representamens (d'un système de numération), mais nous utilisons aussi parfois l'expression « mise en signes » dans ce sens, quand le contexte indique clairement ce qu'il en est.

²⁵ Voir par exemple Loraud (1995).

Dans ce cas l'algorithme glouton mène nécessairement à l'unique développement et associe à tout nombre un unique mot : la non ambiguïté est assurée par la connaissance de cette association et l'unicité assure la non redondance.

La construction suivante permet de montrer qu'il existe effectivement une suite $(d_n)_{n \geq 0}$ qui va convenir. Soit d définie par $d_i = X^i$ pour tout entier naturel i où $X = S(9)$ (voir la fin du paragraphe 1). En raisonnant par récurrence et par des considérations de majoration, on peut établir que la suite remplit la condition (1), **en imposant le fait que $a_i < X$** : ce qui assure la non redondance²⁶. En reprenant les conventions d'écriture de la fin du dernier paragraphe, l'écriture chiffrée des a_i est donc parmi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. En particulier puisque $1 \times X + 0 \times 1 = X$, **X s'écrit donc 10 dans ce système**. On retrouve ainsi les écritures usuelles de notre système. Nous pouvons alors en donner une description complète qui va le définir et qui, grâce à la théorie des langages, en démontre l'exhaustion, la non ambiguïté²⁷ et la non redondance.

b. Description du système de numération

D'une manière générale, pour obtenir le nombre désigné par son écriture chiffrée, on procède de la manière suivante :

α_i étant un graphème parmi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, à la suite $\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_0$, on fait correspondre le mot $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, chaque α_i désignant conventionnellement le nombre a_i . A

cette suite de nombres on fait correspondre alors le nombre $\sum_{i=0}^n a_i X^i$, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^n a_i 10^i$.

Réciproquement, à partir de la décomposition polynomiale $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ unique d'un nombre, avec

$a_i < X$, on associe le mot $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, que l'on transcrit par $\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_0$.

Les graphèmes α_i désignent les nombres a_i . Ce sont les chiffres de la numération.

C'est en faisant référence à la décomposition $\sum_{i=0}^n a_i 10^i$ telle que $a_i < 10$ pour tout i , que nous

parlerons de numération en base dix. Plus exactement, nous dirons **qu'une numération est de base dix (ou décimale)** lorsque l'interprétation que nous en faisons fait référence à cette décomposition polynomiale.

Ainsi, cette description donne du sens au système d'écriture chiffrée que nous utilisons.

Si nous avons établi un lien entre les systèmes de numération généralisés et nos écritures chiffrées, des questions se posent sur la teneur de ces liens, questions auxquelles nous allons donner des éléments de réponse.

3.2 Le système d'écritures chiffrées de position comme representamens

La théorie des langages ne traite pas dans la mise en signes de la partie concernant l'adoption de tel ou tel code graphique, ce qui constitue pour nous la deuxième partie de l'interprétant. Nous allons questionner ce passage sous la forme de questions/réponses.

²⁶ Il existe en fait une autre possibilité pour assurer une décomposition unique, c'est celle qui impose $1 \leq a_i \leq X$. Elle est indiquée par Lefort (1984) qui cite le système de numération de Charles Cros en base trois prime qui peut se généraliser en base X prime. Mais dans ce système le nombre nul n'est pas désigné : c'est une numération de position qui n'utilise pas de zéro.

²⁷ Cette non ambiguïté est ici mathématique. Pour qu'elle soit opérante d'un point de vue pratique, cela suppose que le scripteur et le descripteur connaissent certaines règles.

Question 1 : Qu'y a-t-il de conventionnel dans la transcription du mot $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ en la suite de chiffres $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0$, α_i étant un graphème parmi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ désignant le nombre a_i ?

Comprendre le code signifie que le lecteur peut retrouver le nombre uniquement à l'aide des coefficients a_i . L'écriture doit donc permettre la connaissance des a_i et l'ordre 10^i auquel chacun se réfère. Chaque a_i peut être indiqué par un représentamen graphique quelconque : pour être non ambigu, chaque représentamen doit désigner un unique nombre et chaque nombre est désigné par un unique représentamen du système. En ce qui concerne l'indication de l'ordre auquel chaque a_i doit se référer, il faut fixer un ordre conventionnel aux ordres 10^i en le couplant à un ordre de lecture des graphèmes, lui aussi conventionnellement fixé. Dans notre numération chiffrée, la solution employée est une disposition en ligne droite des représentamens (les chiffres), mais d'autres sont possibles (colonne, tableau, ligne sinueuse, etc.). Parallèlement, les ordres sont rangés en suite monotone des puissances de dix (ce qui est aussi un choix). Finalement, la lecture de gauche à droite des chiffres est couplée à l'ordre décroissant des ordres, ou, de manière équivalente, la lecture de droite à gauche des chiffres est couplée à l'ordre croissant des ordres.

Ainsi, nous avons mis en exergue des éléments conventionnels de notre système de numération chiffré. Outre leur graphie, l'ordre de prise en compte des chiffres peut être indiqué par d'autres moyens que celui d'une écriture en ligne et un sens de lecture. Cela pourrait être n'importe quelle disposition graphique dans laquelle cette prise en compte des chiffres serait déterminée par convention. Il en est de même pour la suite des ordres qui peut être théoriquement arbitraire et finalement du couplage entre les deux suites chiffres/ordres.

Question 2 : Nous avons indiqué un processus donnant du sens à notre écriture chiffrée à partir d'une décomposition polynomiale avec les ordres 10^i . Y a-t-il d'autres possibilités ? En d'autres termes est-il possible que nos écritures chiffrées puissent désigner un autre nombre que celui donné par la décomposition polynomiale ?

Dans le cadre de ces numérations, nous allons voir qu'une autre interprétation est impossible. En effet, dans ces systèmes de numération (de position) généralisés, le nombre de coefficients pouvant être utilisés à la $i^{\text{ème}}$ place est variable selon chaque ordre d_i ²⁸ : si on considère 0 comme un coefficient, ce nombre est 1 plus la partie entière de $(d_{i+1} - 1)/d_i$. Les écritures chiffrées que nous utilisons couramment utilisent à chaque fois dix chiffres désignant dix coefficients différents (et chacun des dix chiffres peut apparaître dans chacun des ordres). Ceci entraîne nécessairement que $d_i = 10^i$ pour tout i entier.

Nous pouvons donc affirmer, en considérant les numérations généralisées de la théorie des langages, qu'il n'y a aucune autre interprétation possible de la suite (ordonnée) de chiffres que celle de la base 10, si l'on veut que le système soit exhaustif, non ambigu et non redondant. Cependant, ce raisonnement tient au fait que nous considérons chaque chiffre d'une manière indépendante, d'où la question suivante.

Question 3 : Nous avons supposé une lecture chiffre à chiffre des écritures usuelles, y a-t-il une autre interprétation possible ? (Deux chiffres par deux chiffres ? Une segmentation arbitraire ?)

²⁸ Nous appelons « ordre » ces éléments de la suite en référence à la définition d'ordre de Bezout qui en est un cas particulier.

Un assemblage de chiffres deux par deux (resp. n par n), est possible, mais semble poser problème pour un nombre désigné par une écriture chiffrée possédant un nombre impair de chiffres (resp. non divisible par n). Compléter par des zéros est cependant possible. Un autre problème est de savoir par où commencer la segmentation : par la droite, par la gauche ? Ceci montre que des règles pour décoder l'écriture doivent être ajoutées. Supposons par exemple une lecture du nombre 1859 en segmentant 18 59. Ceci peut être interprété comme $18 \times Y + 59 \times 1$. Plus généralement, une numération en base peut y être reconnue. Comme $Y = 1 \times Y + 00 \times 1$, on a Y qui s'écrit 1 00. Cependant, chaque représentant des chiffres de cette numération est composé de deux graphèmes distincts : ceci sous-tend un autre système de numération pour les Y coefficients de la base Y . Or cet autre système de numération est notre système de numération décimal qui se serait « stoppé » à Y et qui de surcroît obligerait à mettre les zéros « inutiles » (00, 01, etc.), excepté lorsqu'il s'agit du coefficient le plus à gauche : on écrit 100 et non 01 00. Remarquons que l'écriture de Y dans notre système décimal est aussi 100, sans introduction du zéro à gauche. Finalement, il faut signaler que pour les nombres inférieurs à 99, la seule interprétation possible est notre numération décimale, sauf à ne voir dans la composition des nombres à deux chiffres qu'une numérotation des entiers successifs. Nous entendons par numérotation une suite de représentants qui permet d'indiquer la succession des entiers (définition de proche en proche voir la définition de Peano) et non de référer directement au cardinal. En conséquence, l'interprétation « base 100 », si elle est théoriquement possible, engage sur des conceptions qui semblent non congruentes. Soit la base dix est sous-tendue pour la composition des chiffres de la base 100 et l'arrêt à 99 de cette conception est non mathématiquement justifiable, soit une numérotation est sous-tendue pour la composition des chiffres de la base 100 et la poursuite avec un système de base est une rupture non mathématiquement justifiable.

Question 4 : En quoi le nombre X , successeur de 9, est-il indispensable à une numération de position ?

La décomposition obtenue met en avant un nombre particulier, le nombre X (qui s'écrit 10 dans notre système), nommé « dix » en français. C'est en référence à cette suite de coefficients que nous parlons de base dix. Cependant l'exposé précédent peut être repris en considérant $d_i = d^i$, i entier quelconque, d étant un nombre entier fixé supérieur à 2. On a

alors l'unicité de la décomposition du type $\sum_{i=0}^n a_i d^i$, d étant un nombre entier fixé supérieur à

2, dès que $a_i < d$. Ceci est constitutif d'une numération en base d . La seule différence avec la numération en base dix est que le nombre de chiffres à considérer pour les représentants est d au lieu de dix. Le X considéré (dix) n'a donc rien d'indispensable pour un système fondé sur une base, en revanche l'écriture 10 pour la base 1 est.

Question 5 : Quelles sont les conséquences si la condition $a_i < X$ n'est pas vérifiée ?

Si $a_i < X$, la décomposition $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ n'est pas unique. Ce qui entraîne différents mots possibles $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ associés à un même nombre et par voie de conséquence différents représentants $\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0$. Le nombre des chiffres à utiliser est alors arbitraire.

Question 6 :

Nous avons pour l'instant décrit la numération en mettant en avant une bijection avec les coefficients de la décomposition utilisant la suite des puissances de dix, dite décomposition

polynomiale. Nous avons vu que, dans le cadre des numérations généralisées, les chiffres ne pouvaient pas indiquer autre chose que les coefficients de la décomposition. Cette décomposition est donc une référence inhérente à notre numération chiffrée : seule celle-ci la rend exhaustive, non ambiguë et non redondante. Mais pour mieux en voir les liens, nous pouvons nous poser la question réciproque : en quoi cette décomposition se traduit-elle nécessairement par la suite chiffrée ? Y a-t-il d'autres systèmes de transcription possibles ? Une première réponse a été donnée précédemment. Nous avons envisagé des systèmes de transcription des informations contenues dans la décomposition prenant en compte non pas uniquement les coefficients, mais soit uniquement les ordres d_i , soit les ordres d_i et les coefficients a_i simultanément. Il nous semble difficile d'aller plus loin sans faire appel à des procédés concrets de mise en signes, d'autant que nous voulons considérer ceux qui ont des liens avec notre système de numération chiffrée. C'est entre autres la raison pour laquelle nous allons indiquer des algorithmes différents menant à l'écriture chiffrée d'une collection. Ensuite nous reviendrons sur les différentes transcriptions possibles du développement décimal dans un système de numération écrit.

4. Les procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection

Dans ce qui précède, c'est surtout l'aspect structurel des nombres entiers qui est mis en avant : le nombre pris comme élément d'un ensemble muni de relations (d'ordre en particulier), d'opérations, de structures algébriques. Même en considérant le passage qui concerne la mise en signes, nous n'avons pas tranché sur la conception sous-jacente du nombre : conception ordinale ou conception cardinale ? C'est à cette question que nous allons plus particulièrement tenter de répondre en utilisant cette fois-ci la définition pragmatique du nombre, c'est-à-dire le nombre comme cardinal d'une collection d'objets figurés ou manipulables dont il s'agit d'obtenir la désignation.

Pour définir une numération opérationnelle, deux éléments sont indispensables : le codage (du nombre à sa désignation) et le décodage (de la désignation au nombre). Le nombre est défini a priori par les mathématiques et nous avons indiqué avec la théorie des langages le lien avec la décomposition polynomiale. Nous allons maintenant nous intéresser à la transcription pratique, c'est-à-dire au codage du cardinal d'une collection d'objets, et réciproquement à l'élaboration d'une collection d'objets d'après une écriture chiffrée. Sans considérer les aspects didactiques ou psychologiques, nous essayons ainsi de voir quels sont les liens entre les mathématiques et les signes en considérant des manipulations d'objets concrets. En fait, l'obtention de la désignation du cardinal d'une collection peut être appréhendée soit par une approche ordinale en référence à l'axiomatique de Peano, soit par une approche cardinale en référence à la notion de bijection, c'est ce que nous allons préciser par la suite.

En considérant l'étude précédente, pour construire une collection d'objets dont le cardinal est indiqué par une écriture chiffrée (décodage) un moyen est de constituer des groupements correspondant aux ordres et d'en prendre le nombre indiqué par le coefficient. Pour constituer des ordres, il nous semble il y avoir deux outils à disposition : utiliser un compteur²⁹ et/ou

²⁹ Un compteur a pour vocation de mettre en bijection les objets d'une collection avec une suite conventionnelle d'items (de mots, de gestes, de signes écrits). Le dernier représentant utilisé indique alors le cardinal de la collection. Cette notion de compteur est particulièrement importante pour la numération parlée. C'est pourquoi nous y revenons dans la partie consacrée à son étude. Notons que la succession des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, « 10 » peut être aussi utilisée comme compteur ou encore 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, voire 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, ce qui n'introduit pas de signe supplémentaire. En ce sens, même si cela peut sembler improbable, le recours uniquement à une numération décimale écrite chiffrée peut convenir pour les procédés de codage et décodage de cardinaux de collections.

utiliser le fait que chaque ordre se déduit du précédent par itération des groupements par dix. Nous allons nous intéresser ici aux procédés qui peuvent être utilisés sans autre ressource que la numération écrite chiffrée. Si le compteur composé de la succession des écritures chiffrées peut être utilisé pour toute la collection, alors aucune spécificité de cette numération n'est convoquée puisque n'importe quel compteur convient. Ce compteur peut être utilisé cependant uniquement pour la constitution de paquets de dix et alors nous devons expliquer comment poursuivre. Il en est de même en ce qui concerne le codage, le principe d'exhaustivité de la numération en base dix se traduit par le fait que toute collection peut s'organiser en groupements successifs (issus des ordres) de 1, 10, 10^2 , etc.³⁰. Ainsi, que ce soit décoder ou coder, les mêmes « actions »³¹ sont en jeu dès qu'il s'agit de traiter une collection concrète : constituer des groupements correspondant aux ordres, faire la correspondance avec les chiffres. C'est pourquoi nous allons décrire deux procédés³² de codage, l'adaptation de ces procédés pour le décodage est immédiate. Ces procédés sont ceux inférés de l'analyse mathématique précédente. Il est possible de « mixer » ceux-ci, ce qui peut d'ailleurs indiquer une différence de conception du nombre et de la numération chez l'utilisateur de tel ou tel procédé, nous reprenons cette discussion ultérieurement dans la thèse.

4.1 Le premier procédé concret de mise en signes

Le procédé 1 est basé sur l'algorithme glouton, divisions euclidiennes successives par la suite décroissante des ordres 10^i

Considérer les langages formels nous a amené à considérer un algorithme permettant d'obtenir les chiffres de la numération : l'algorithme glouton. Rappelons que celui-ci consiste à effectuer la division euclidienne du nombre par la plus grande puissance possible de la suite des puissances de 10 (dans l'exemple qui suit ce sera 10^3), et à poursuivre ainsi avec chacun des restes successifs comme dividende et la suite décroissante des puissances de 10 comme diviseur : la suite des quotients obtenus donne l'écriture chiffrée du nombre. Au niveau de la manipulation des collections d'objets nous pouvons le traduire ainsi : faire des groupements par 10, dès que 10 groupements de 10 sont constitués, faire un groupement de $10 \times 10 = 10^2$, revenir aux groupements par 10 et faire la même opération, etc.

Voici un exemple de ce procédé récursif (il faut s'imaginer une collection d'objets). Pour simplifier I désigne un élément de départ de l'ensemble, A désigne un groupement de 10 I, B un groupement de 10 A, C un groupement de 10 B. On constitue des groupements A jusqu'à l'obtention de dix groupements A, on constitue alors un groupement B, dès qu'il y a dix groupements B, on constitue un groupement C, et on reconsidère les I non encore traités. Dès qu'on ne peut plus faire de groupements A, le processus s'arrête. Voici la description des étapes successives :

A et le reste de la collection

AA et le reste de la collection, les groupements A se poursuivent tant qu'ils sont possibles

AAAAAAAAAA et le reste

Echange de 10A contre B, résultat : B et le reste de la collection

B A et le reste de la collection

³⁰ Puisqu'il s'agit ici de décrire un procédé de codage, le code est supposé connu, c'est pourquoi nous utilisons l'écriture chiffrée 10, avec tous les aspects conventionnels propres à nos notations usuelles (graphie des chiffres, disposition pour indiquer l'ordre auquel chaque chiffre se réfère).

³¹ Conformément à notre approche, nous considérons des « actions » traduisant des principes mathématiques. Ainsi, nous ne considérons pas les facteurs matériels, didactiques ou psychologiques qui peuvent intervenir dans l'effectuation de ces « actions » par telle ou telle personne.

³² Nous utilisons le terme de procédé dans une acceptation courante de « manière de faire », plutôt que celui didactiquement connoté de procédure puisque nous restons dans le cadre d'une analyse non didactique.

B AAAAAAAAAA et le reste de la collection
 BB et le reste de la collection
 Les groupements B se poursuivent ainsi jusqu'à en obtenir dix.

...

BBBBBBBBBB et le reste de la collection
 Echange de 10B contre C, résultat : C et le reste de la collection

C A et le reste de la collection
 Les groupements C se poursuivent ainsi jusqu'à en obtenir dix (si possible)
 CBBBBBBBB et le reste : le maximum de B est atteint dans notre exemple, il n'y a donc pas de nouveau groupement C

CBBBBBBBB AAAAA IIIII IIII

Dans notre exemple, on obtient successivement. $a = 1x 10^3 + n_1$; $n_1 = 8 x 10^2 + n_2$; $n_2 = 5 x 10 + n_3$; $n_3 = 9x1$, d'où a qui s'écrit 1859, et la décomposition (polynomiale) associée $1x10^3 + 8 x 10^2 + 5 x 10 + 9$.

Remarquons que, conformément à l'algorithme glouton, on obtient tout d'abord le coefficient associé à l'ordre le plus grand 10^3 , ici **1**, puis celui associé au deuxième plus grand 10^2 , ici **8**, et ainsi de suite. Remarquons aussi que, même si elle est sous-jacente, on obtient l'écriture sans être obligé de donner la décomposition polynomiale du cardinal a.

4.2 Le deuxième procédé concret de mise en signes

Le procédé 2 est basé sur l'algorithme d'Euclide, divisions euclidiennes successives par 10. La suite des chiffres peut être obtenue en utilisant le principe de la division euclidienne par 10 d'un nombre a puis du quotient obtenu, ainsi de suite.

On obtient : $a = 10b_0 + a_0$; $b_0 = 10b_1 + a_1$; $b_i = 10b_{i+1} + a_{i+1}$ pour i entier variant de 1 à n-1.

La suite $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ des restes successifs est alors le mot qui peut être traduit en l'écriture chiffrée usuelle. Ce principe est utilisé sur les objets dans l'algorithme suivant, valable pour une collection quelconque.

Le maximum de groupements de 10 est constitué. Il reste un nombre d'éléments a_0 strictement inférieur à 10 que l'on met de côté. On considère alors l'ensemble constitué des groupements par 10 et on constitue des groupements par 10 de ses éléments. Il reste un nombre d'éléments a_1 strictement inférieurs à 10 que l'on met de côté. On considère alors l'ensemble de ces nouveaux groupements et on réitère le procédé.

Exemple : I désigne un élément de départ de l'ensemble, A désigne un groupement de 10 I, B un groupement de 10 A, C un groupement de 10 B :

AA
 AA
 AA
 AA
 AA IIIII IIII

BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB AAAAA IIIII IIII

CBBBBBBBB AAAAA IIIII IIII

On obtient successivement. $a = b_0 x 10 + 9$; $b_0 = b_1 x 10 + 5$; $b_1 = b_2 x 10 + 8$; $b_2 = 1$, d'où a qui s'écrit 1859, et la décomposition (polynomiale) associée $1x10^3 + 8 x 10^2 + 5 x 10 + 9$.

Remarquons que, conformément à l'algorithme d'Euclide, on obtient tout d'abord le coefficient associé à l'ordre le plus petit 10^0 , ici **9**, puis celui associé au deuxième plus petit 10, ici **5**, et ainsi de suite. Remarquons aussi que, comme pour le procédé précédent, bien qu'elle soit sous-jacente, on obtient l'écriture sans être obligé de donner la décomposition polynomiale du cardinal a.

4.3 Comparaison des deux procédés et lien avec les principes de base

D'une manière théorique les deux procédés amènent à désigner un même nombre par la même série de chiffres, ceci est démontré dans la théorie de langages. Nous pouvons en donner le principe : il suffit de voir que les décompositions polynomiales associées sont nécessairement les mêmes puisque le développement selon l'échelle (10^i) est unique du fait que les coefficients sont strictement inférieurs à 10. Cependant, comme nous l'avons signalé, le codage (et le décodage) n'amène pas nécessairement à écrire le nombre dans sa forme polynomiale. Plus précisément, si une expression parenthésée directement issue du procédé devait être donnée, celle-ci ne serait pas la même suivant l'algorithme. Ainsi, dans l'exemple que nous avons indiqué, pour le procédé 1 (algorithme glouton), on obtient $(1 \times 10^3) + (8 \times 10^2) + (5 \times 10) + 9$, alors que le procédé 2 (algorithme d'Euclide) donne $((1 \times 10) + 8) \times 10 + 5 \times 10 + 9$. Par ailleurs, le premier procédé permet d'obtenir les chiffres correspondant aux ordres les plus grands jusqu'aux plus petits (1, 8, 5, 9), c'est l'inverse pour le deuxième. Cependant il est important de signaler que les résultats obtenus en termes d'organisation mènent tous les deux à la même suite C BBBBBBBB AAAA I I I I I I I I qui peut se traduire par la même décomposition $1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9$, qui peut être reliée à l'écriture 1859. Plus encore, cette organisation finale, quel que soit le procédé employé (même des procédés mixant l'algorithme glouton et l'algorithme d'Euclide), permet de coder la collection dans notre numération écrite chiffrée.

Remarquons encore que les procédés nécessitent de faire le maximum de groupements possibles par 10 correspondant à chaque ordre. Dans le cas contraire, on obtiendrait une autre décomposition : ceci fait le lien avec la condition $a_i < 10$ rendant le système non redondant.

Cette maximalité est donc suffisante, cependant elle peut ne pas être nécessaire, notamment pour l'ordre le plus grand. En effet, C BBBBBBBB AAAA I I I I I I I I peut être organisée en BBBBBBBB BBBBBBBB AAAA I I I I I I I I, et en référence au développement $18 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9$, on peut obtenir la transcription correcte du point de vue de notre système de numération 1859. Ceci peut éventuellement être étendu à l'ordre suivant : $185 \times 10 + 9$. Mais si le procédé convient d'un point de vue pratique, il n'explique pas en quoi BBBBBBBB BBBBBBBB peut être transcrit en 18, sauf à considérer l'écriture des n premiers nombres ($n > 9$) comme des représentations indépendants les uns des autres comme le sont les représentations graphiques 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Or nous avons montré dans la réponse à la question 3 du paragraphe précédent que ce n'était pas le cas : aux écritures 10, ..., 99 peuvent être associés des principes mathématiques qui les rationalisent. Cette possibilité pragmatique de non maximalité est donc une conséquence de la notion de base sous-jacente au système de numération (elle n'est donc pas propre à la base dix) et à l'adoption de l'écriture chiffrée de position qui permet d'interpréter un certain type de découpage des écritures³³. En fait la non maximalité à une étape comportant par exemple BBBBBBBB BBBBBBBB est reportée à la suivante pour transcrire cette organisation : le procédé consiste à organiser BBBBBBBB BBBBBBBB en C BBBBBBBB.

³³ Ceci est à rapprocher de ce que Chambris (2008) appelle propriété de troncature de la numération, le fait de voir 18 centaines et 59 unités dans 1859.

5. Comparaison entre différents systèmes de numération utilisant la décomposition polynomiale

Nous revenons dans ce paragraphe sur une question que nous nous sommes posée. Nous avons vu que nos écritures chiffrées ne pouvaient indiquer autre chose que les nombres donnés par la décomposition dite polynomiale (première partie de l'interprétant). Mais, réciproquement, en quoi cette décomposition se traduit-elle nécessairement en la suite chiffrée (deuxième partie de l'interprétant) ? La décomposition polynomiale peut-elle être transcrite par un autre code que le mot $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ d'un langage ? Y a-t-il d'autres systèmes de transcription possibles³⁴ ?

En fait, même si notre transcription de la décomposition polynomiale en la suite ordonnée de chiffres est bien dénuée d'ambiguïté quand on connaît le code³⁵, il existe d'autres types de transcription permis par cette décomposition. Le travail fait dans le paragraphe précédent va nous fournir des exemples d'autant plus intéressants qu'ils montrent que les procédés pragmatiques utilisables dans notre numération écrite chiffrée n'amènent pas nécessairement à un codage du cardinal d'une collection utilisant un système de position.

5.1 Privilégier les ordres

Par exemple, nous pouvons utiliser les notations I, A, B, C que nous avons déjà employées pour coder le cardinal de la collection par C BBBBBBBB AAAA I I I I I I I I. Pour décoder cette écriture, il suffit de dégroupier les groupes représentés par chacun des signes, en conséquence leur ordre n'a pas d'importance. Ce système de numération est ainsi analysable par le biais du développement polynomial. Cependant la possibilité d'un système de transcription de type C BBBBBBBB AAAA I I I I I I I I n'est pas constitutive des numérations en base. N'importe quel développement du type $\sum_{i=0}^n a_i d_i$ peut mener à une telle transcription. C'est par exemple le principe de la numération primitive romaine (sans les raccourcis soustractifs) ou de la numération égyptienne.

5.2 Utiliser les ordres et les coefficients

Un autre exemple nous vient de la numération en unités indiquée par Bezout. Nous pouvons transcrire le cardinal d'une collection donnée par la décomposition $1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9$ par « 9 unités, 8 centaines, 5 dizaines, 1 millier ». Si nous reprenons nos codes I, A, B, C, D, nous obtenons 9 I, 8 B, 5 A, 1C : des signes plus ou moins arbitraires peuvent en effet remplacer les différents ordres 10^i . Ici aussi l'ordre des couples (chiffre, ordre) n'a pas d'importance s'ils restent distinguables entre eux. Ici aussi, n'importe quel développement du type $\sum_{i=0}^n a_i d_i$ peut mener à une telle transcription.

5.3 Analyse comparative

Les trois systèmes que nous avons décrits nous semblent ceux qui sont à la base de toute transcription de la décomposition polynomiale $\sum_{i=0}^n a_i 10^i$, $a_i < 10$, puisque le premier (système

³⁴ Signalons dès à présent que cette étude mathématique sera complétée par une étude historique, notamment en considérant les classifications d'Ifrah (1994) et Guitel (1975).

³⁵ C'est ce qui est recherché dans tous les systèmes de numération.

de numération de position) n'utilise que les representamens des coefficients a_i , le deuxième (indication de l'ensemble des types de groupement) n'utilise que les representamens des ordres 10^i , le troisième (système « mixte ») utilise les deux simultanément.

Il nous semble difficile d'envisager tous les systèmes possibles pouvant éventuellement combiner les trois. Cependant nous pourrions voir avec l'étude historique ceux qui ont été développés.

Comparons maintenant ces trois systèmes de numération différents, dont les principes mathématiques sous-jacents (première partie de l'interprétant) ont été considérés ici comme identiques³⁶. Dans la description à partir de la théorie des langages formels, rien n'indique a priori la spécificité du nombre 0. Cependant lorsqu'un des a_i est nul, l'ordre correspondant n'apparaît pas dans le développement (zéro est l'élément neutre de l'addition). Ainsi, une erreur peut s'introduire dans le mot correspondant $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ et par conséquent dans la suite de chiffres $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0$. Quand on considère l'algorithme glouton ou celui d'Euclide, cette erreur ne peut se produire, mais quand on considère un des deux procédés « pragmatiques », elle peut surgir puisque les ordres affectés d'un coefficient 0 ne sont pas visibles dans l'organisation obtenue. Pour ne pas être ambiguë, la transcription pragmatique oblige donc à indiquer l'absence de tel ou tel ordre, absence signalée par le chiffre 0. Autrement dit, la nécessité d'introduire un signe pour noter l'absence oblige à se référer à la décomposition polynomiale, tout au moins à considérer tous les ordres, alors même qu'ils sont absents dans les representamens de la décomposition.

Le deuxième système, celui notifiant chaque groupement, ne requiert pas de noter les nombres a_i , mais chacun des ordres 10^i par un signe graphique par exemple par une lettre (nous avons utilisé les lettres I, A, B, C pour les quatre premières puissances de dix). Le principe est de répéter les signes autant de fois que nécessaire. Il faut alors un nombre infini de signes graphiques pour désigner les entiers mais il n'est pas nécessaire d'utiliser des chiffres pour transcrire les a_i . Nous avons déjà souligné en quoi ce système était tout aussi

bien adapté à n'importe quel développement $\sum_{i=0}^n a_i d_i$, les signes graphiques nécessaires correspondant à chaque terme de la suite (d_i) : $d_0=1$ pour l'exhaustivité, representamens des coefficients d_i différents deux à deux pour une non ambiguïté, condition (1) remplie pour une non redondance. Mais si la condition $d_0=1$ assure l'exhaustivité théorique, une infinité de signes est nécessaire pour constituer une numération rendant compte de tous les nombres, quelle que soit leur grandeur. Remarquons que selon les graphèmes utilisés, le lien entre les ordres peut être indiqué ou non : I, A, B, C, D n'indique rien, mais les notations I, A, A^2 , A^3 donnent des informations supplémentaires sur l'échelle de numération utilisée (ici une base A). Tous les ordres ne sont pas évoqués dans l'écriture de tel nombre, même si cet ordre lui est inférieur. Ainsi, il n'y a pas de nécessité à utiliser de representamen pour désigner le nombre zéro. En ce qui concerne les coefficients a_i , leur visibilité n'est pas immédiate, ils ne sont appréhendables que par la limitation de la répétition de chaque signe. Ceci traduit entre autre une proximité moins forte avec la décomposition polynomiale.

Le troisième système de transcription, celui que nous avons qualifié de « mixte », met en jeu les couples $(a_i, 10^i)$: les a_i étant signalés par une catégorie de representamen et les 10^i par

³⁶ Remarquons que nous n'avons pas étudié les systèmes de numération autres que celui de l'écriture chiffrée de position. Nous n'écartons pas l'hypothèse de pouvoir associer aux deux nouveaux systèmes dont il est question ici des principes mathématiques sous-jacents différents de ceux de la décomposition polynomiale. L'étude que nous ferons sur la numération orale en français va en fournir d'ailleurs des exemples.

une autre. Cette possibilité est offerte aussi avec les couples (a_i, d_i) d'un développement $\sum_{i=0}^n a_i d_i$. Ici aussi l'ordre de prise en compte n'a pas d'importance, et les mêmes remarques que pour le système précédent peuvent être faites sur le zéro et les ordres. Cependant il est nécessaire de transcrire les a_i par des chiffres, ce qui rend cette numération plus facilement interprétable en termes de $\sum_{i=0}^n a_i 10^i$, $a_i < 10$, au moins pour le chercheur.

6. Conclusion sur la numération écrite chiffrée de position

6.1 Une définition en terme de processus

Nous avons décidé d'interpréter notre numération dans le cadre de la théorie des langages et nous avons conclu que notre numération écrite chiffrée s'interprète de manière non ambiguë à l'aide d'un processus mathématique de la théorie des langages.

L'étude nous montre que le qualificatif de numération décimale de position pour notre numération vient de l'interprétation mathématique que nous faisons de cette numération, interprétation qu'il est toujours possible de questionner. Cependant notre numération écrite chiffrée peut être facilement interprétée dans le cadre de la théorie des langages et cette interprétation permet de la rendre cohérente, exhaustive et non redondante. En effet à partir des représentations graphiques 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 désignant les premiers nombres entiers, la théorie des langages permet de fournir un processus de mise en signes de tous les nombres entiers. Le résultat de cette mise en signes correspond à notre numération écrite chiffrée. Dans le cadre de cette théorie, aucune autre interprétation n'est possible, sauf à considérer des systèmes plus complexes mais ceux-ci mettent néanmoins en jeu les mêmes principes de base. Voici le processus mis en évidence :

1. Une définition du nombre entier et des structures algébriques (addition, soustraction, multiplication, ordre).
2. Des représentations graphiques α_i désignant les premiers nombres entiers : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
3. Une expression des nombres mettant en jeu les structures opératoires : $a = \sum_{i=0}^n a_i d_i$, (d_i) étant une suite fixée avec $d_0 = 1$, permettant l'existence d'un tel développement pour tout entier. Nous avons nommé les éléments de (d_i) les *ordres* de l'échelle de la numération et les éléments de (a_i) les *coefficients* qui dépendent du nombre a.
4. Une échelle privilégiée, $d_i = k^i$, mettant en avant un nombre k, ainsi que la condition $a_i < k$ assurant l'unicité du développement appelé alors décomposition polynomiale : ce sont les principes de la base k.
5. Un système de mise en signes qui privilégie la suite (a_i) des coefficients grâce à la bijection entre le développement $\sum_{i=0}^n a_i k^i$ et le mot du langage $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$.
6. Un choix de k comme le successeur de 9 (ou bien désignant le cardinal d'un ensemble dans lequel un élément a été ajouté à un ensemble de cardinal 9). En conséquence 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 permettent de désigner n'importe quel coefficient de la suite (a_i)

7. Des choix conventionnels présentant la suite α_i pour indiquer la bijection entre les coefficients a_i et les ordres k^i , les représentations 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 acquièrent par là même ainsi un statut de chiffre..

Exemples d'écritures chiffrées :

X le successeur de 9, se décompose de manière unique en $1 \times X + 0 \times 1$, X étant la base choisie, selon les conventions d'écriture, 10 est le représentant de X^{37} : la présentation est linéaire, le chiffre le plus à droite indique le coefficient de l'ordre le plus petit, ainsi de suite en remontant par ordre croissant des ordres. De même, comme $X^2 = 1 \times X^2 + 0 \times X + 0 \times 1$, X^2 s'écrit 100 et de la même manière 10^i s'écrit d'un 1 suivi de i 0.

6.2 La première partie de l'interprétant : les principes mathématiques

Les étapes 1, 3, 4, 5 sont propres à la théorie des langages. Elles permettent entre autres de justifier la cohérence, la non-redondance et la non ambiguïté de notre numération écrite chiffrée usuelle. Elles comportent cependant un certain nombre d'arbitraires dans les paramètres : l'échelle en progression géométrique de type k^i et le choix du nombre k. L'échelle permet néanmoins de n'utiliser que k coefficients, les mêmes pour chaque ordre, ce qui va permettre d'élaborer un procédé de mise en signes dans lequel seuls les coefficients a_i apparaissent.

Le choix d'une base k comme échelle de numération est lié à l'utilisation de k chiffres. En effet, en ce qui concerne le choix de la base, l'étape 2 a un statut particulier, elle peut en fait être associée à l'étape 6. Mathématiquement, deux possibilités sont à envisager : soit c'est le fait de fixer la base k comme échelle de numération qui oblige à donner les représentations des k entiers inférieurs à k, soit c'est le fait de n'utiliser que les représentations des k premiers entiers qui fixe la base k. Nous ne pouvons en dire davantage sur le choix de ce paramètre k.

6.3 La deuxième partie de l'interprétant : le choix du système d'écriture dans la mise en signes.

Nous dégageons ici aussi deux points importants.

De la décomposition polynomiale au système d'écriture : le lien avec la numération de position

Les étapes 2, 6 et 7 sont à distinguer des autres, ce sont elles qui utilisent les possibilités offertes par les principes de base k pour finaliser la mise en signes des nombres : les écritures. Même si le choix fait utilise les potentialités offertes par l'état du processus à l'étape 5, d'autres choix sont possibles : la transcription dans notre système de numération de position chiffré est une des possibilités³⁸. Ainsi, le passage de la décomposition polynomiale à nos écritures chiffrées n'est pas obligatoire et n'est qu'un choix parmi d'autres : nous avons donné quelques exemples à ce sujet. Ces systèmes de numération doivent indiquer la décomposition polynomiale par le biais des coefficients et des ordres. Le système objet de notre étude permet de le faire en indiquant uniquement par écrit les coefficients (par des chiffres). L'association de ces coefficients avec un ordre (les k^i) se fait en couplant un ordre de lecture des chiffres

³⁷ Remarquons que dans une base X quelconque, X s'écrit toujours 10 avec un tel procédé. C'est pourquoi, dans la thèse, nous utilisons aussi le mot « dix » pour désigner la base que nous utilisons usuellement.

³⁸ Remarquons que la transcription en signes écrits n'est pas nécessaire pour les mathématiques, puisqu'il est possible de définir le nombre indépendamment de ses désignations. Cependant cette transcription semble bien utile voire nécessaire pour faire des mathématiques, ceci rejoint les questions sur le rôle des représentations et de l'interprétant dans la conceptualisation, questions abordées dans le cadre de la théorie des champs conceptuels.

(indiqué par un sens conventionnel de lecture de chiffres alignés) avec un ordre d'énumération des ordres k^i . Les autres systèmes envisagés n'utilisent pas toutes les potentialités de la décomposition en base permettant en particulier, grâce à l'écriture de position, de n'avoir recours qu'à un nombre fini de chiffres pour désigner tous les nombres entiers. En effet ces systèmes s'adaptent tout aussi facilement à n'importe quelle échelle de numération.

Remarquons aussi qu'une écriture de position ne traduit pas nécessairement la décomposition polynomiale en base dix. Elle peut par exemple faire référence à une autre base, nous l'avons déjà dit. Mais le fait de n'utiliser que dix chiffres que l'on peut rencontrer à n'importe quelle place dans l'écriture et tels que deux dispositions différentes désignent deux nombres différents, ne peut s'interpréter dans la théorie des langages qu'en termes de base dix : si tel n'était pas le cas, la numération serait soit non exhaustive, soit ambiguë, soit redondante.

Des principes de l'écriture de position au système employé de nos jours : des choix et conventions de natures différentes.

Nous pouvons distinguer d'un côté les principes mathématiques de la base dix (étapes 1, 3, 4, 5) et d'un autre côté notre traduction dans un système d'écriture positionnel (étapes 2, 6, 7), celui-ci comportant lui-même un certain nombre de conventions. En outre, les choix ne semblent pas tous du même ordre. Le premier est le choix du nombre de base, nous l'avons déjà évoqué, il est mathématiquement parlant arbitraire et est lié au nombre de chiffres employés. Par ailleurs, dans la disposition des chiffres, nous pouvons distinguer un choix « pragmatique » du fait qu'il semble favoriser la lecture des nombres : celui d'une disposition soit en colonne soit en ligne, c'est-à-dire linéaire, et non pas autrement, par exemple en tableau. Nous pouvons aussi considérer des choix « culturels » : la graphie des chiffres, le fait de choisir entre la disposition ligne ou celle en colonne, ainsi que le sens de lecture. Un dernier choix est à questionner, c'est l'emploi du zéro. Lefort (1984) construit une numération de position chiffrée de base dix sans zéro, (qu'il appelle dix prime) qui repose sur une

décomposition polynomiale unique d'un nombre en $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec la condition $1 \leq a_i \leq X$.

Cependant, le zéro n'est pas mis en signe (il n'a pas de representamen), ce qui oblige par exemple dans la technique de la division à laisser des espaces. En outre, les deux algorithmes mis en évidence pour obtenir la décomposition avec la condition $0 \leq a_i \leq 9$ doivent être revus.

Pour être opérants, ils doivent être modifiés : on ne doit pas grouper « au maximum » dans certaines circonstances. Ainsi on doit obtenir AAA IIIIIIIII et non pas AAAA : il doit toujours rester au moins un groupement de chaque ordre. Le principe de groupement maximum entraîne quant à lui l'utilisation d'un representamen pour marquer l'absence.

6.4 Synthèse

Nous avons pu distinguer dans notre numération écrite chiffrée, d'une part les principes mathématiques de base dix à partir desquels elle peut être interprétée et construite sans doute possible et d'autre part le système d'écriture. Plus précisément, l'écriture de position est liée au fait de n'utiliser que les coefficients dans un développement obtenu dans une échelle de numération. Les possibilités graphiques (disposition ordonnée des chiffres désignant les coefficients) permettent de fournir les informations pour retrouver le développement complet d'un nombre, c'est-à-dire la relation entre coefficients et ordres. Nous avons indiqué les différentes règles, contraintes et conventions liées à ce choix, règles que les utilisateurs du système doivent connaître. Mathématiquement, l'utilisation limitée d'un nombre de chiffres (quelle que soit la place dans l'écriture) est intrinsèquement lié à la notion de base k , c'est-à-

dire au développement $\sum_{i=0}^n a_i k^i$, mais le choix de la base est arbitraire. L'unicité du développement est assurée par $0 \leq a_i < k$ ³⁹. Une fois déterminé le representamen des k nombres strictement inférieurs à k (les k chiffres), les autres nombres s'écrivent de manière unique selon une suite de chiffres. En particulier si 0 et 1 sont les écritures des deux premiers nombres, k s'écrit 10.

L'étude mathématique nous a fourni deux algorithmes qui ont été liés à deux procédés pratiques de mise en signes du cardinal d'une collection à l'aide de groupements. Ces deux procédés peuvent en particulier contribuer à mieux comprendre quels sont les enjeux mathématiques dans l'apprentissage de notre numération écrite chiffrée. Nous retenons qu'ils mettent en exergue le rôle d'une organisation reflétant la décomposition polynomiale. Cependant cette organisation peut être codée de différentes manières. Les deux autres possibilités envisagées n'aboutissent pas à des systèmes de numération de position. En outre, elles ne nécessitent ni zéro, ni utilisation d'un nombre limité de chiffres. En ce sens elles sont tout aussi bien adaptées à un développement non polynomial (c'est-à-dire un développement non relatif à une base). En outre, les deux procédés pratiques de mise en signes sont associés étroitement à deux algorithmes de la théorie des langages. Ils nous indiquent en quoi l'aspect cardinal du nombre est en jeu dans cette numération, plus encore que les structures opératoires et la structure d'ordre des entiers naturels.

Par ailleurs, des éléments de réponse peuvent être apportés sur les relations entre les définitions du nombre et notre système d'écritures chiffrées actuel. La première étape du processus de mise en signes exposé ci-avant met en exergue la distinction entre la définition des entiers naturels et les systèmes de numération. Dans la théorie des langages, ce sont finalement les structures algébriques et la relation d'ordre de l'ensemble des naturels qui sont utilisées. La non nécessité de revenir aux définitions abstraites du nombre (entier naturel) explique pourquoi nous avons aussi indiqué une définition « pragmatique » du nombre. Ces remarques questionnent la position de l'objet « nombre » dans l'ensemble du signe, la triade representamen/objet/interprétant. D'un point de vue de chercheur nous pouvons faire ces distinctions, c'est ce que nous tentons de faire ici, mais pour une personne qui utilise le nombre, aucun des trois n'est facilement dissociable. Ce point important est au cœur de notre thèse et nous l'abordons dans sa deuxième partie. A l'aide de l'analyse que nous avons faite, nous pouvons relier notre numération écrite chiffrée à une définition du nombre. Considérons l'algorithme glouton et l'algorithme d'Euclide. Ils permettent sans ambiguïté d'indiquer le cardinal d'une collection par la même suite de chiffres⁴⁰. Ils sont reliés tous les deux à des égalités numériques équivalentes à la décomposition polynomiale. De ce point de vue, c'est surtout l'aspect structurel des nombres entiers qui est convoqué : les propriétés relatives aux opérations. Cependant quand nous considérons les deux procédés pratiques de mise en signes par des groupements, nous pouvons émettre l'hypothèse que ce sont les propriétés de l'aspect cardinal du nombre (en référence à la définition par les relations d'équipotence) qui sont à l'œuvre dans ces procédés. En effet, ils mettent en jeu une structuration de la collection ne faisant pas appel à l'idée de successeur, si ce n'est éventuellement pour déterminer les groupements de dix éléments par un compteur. Cette méthode n'est cependant pas obligatoire puisqu'il suffit par exemple de disposer d'un gabarit comportant le nombre d'emplacements nécessaires et que l'on se contente de remplir et de vider. Par ailleurs, le code écrit chiffré peut être déduit de l'organisation globale de la collection, qu'elle soit obtenue par un procédé

³⁹ L'autre possibilité est $1 \leq a_i \leq k$, menant à la base k prime, mais dans ce cas zéro n'est pas mis en signe.

⁴⁰ En ce qui concerne l'existence d'autres procédés que ces deux ci, l'analyse mathématique n'a pas fait émerger d'autres possibilités si ce n'est un mélange des deux.

ou l'autre : là encore l'aspect ordinal n'entre pas en compte. Pour être plus précis, l'organisation est considérée indépendamment de la nature des éléments qui composent chaque groupement. De surcroît un groupement peut être considéré lui-même comme un élément d'un groupement supérieur.

Des questions se posent cependant encore, par exemple sur les motivations de l'adoption d'un système de numération fondé sur le principe de base, et du choix de dix comme base. A ce stade de la thèse, certaines pistes sont entrevues. En effet, nous avons indiqué en quoi notre numération décimale de position chiffrée était liée étroitement à la décomposition polynomiale, elle-même étroitement liée à l'organisation d'une collection d'objets. Nous avons aussi montré en quoi cette décomposition ne se traduisait pas nécessairement par une telle numération. Cependant, nous n'avons pas encore considéré les opérations. Rappelons que nous avons fait ce choix afin d'envisager les propriétés, théorèmes et relations entre nombre et numération, sans étude des algorithmes de calculs posés. Ce choix a été conditionné par le fait que les premiers apprentissages en CP ne font pas intervenir *a priori* ces calculs. L'étude des possibilités opératoires peut nous renseigner sur le pourquoi de l'adoption de notre système de numération. Il nous semble alors qu'une étude comparative avec d'autres systèmes de numération écrits peut nous éclairer. C'est pourquoi nous reviendrons sur l'aspect opératoire dans la conclusion de cette première partie de la thèse qui fait appel à des informations historiques.

Avant cette conclusion, il nous reste à étudier la numération parlée en France. En effet, si nous avons décidé d'envisager les écritures chiffrées sans cette dernière, des liens doivent exister entre les deux, du simple fait qu'elles servent à désigner toutes les deux les (mêmes) nombres. Un exemple de ces liens nous est fourni dans les procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection. Nous avons en effet envisagé la détermination de groupements de dix comme pouvant se faire à l'aide d'un compteur « graphique », 1, 2, etc. Nous ne pouvons pas ignorer que si un tel procédé est théoriquement possible, il peut lui être substitué l'emploi d'un compteur oral, la comptine numérique. Interviennent alors non seulement une numération parlée, mais aussi une dimension mémorielle que nous n'avons pas encore considérée. En effet, si l'écriture peut servir à garder la trace des actions, ce n'est pas le cas de l'oral. Or certains procédés « concrets » de mise en signes à partir d'une collection nécessitent aussi de savoir, par exemple, combien de paquets de dix sont constitués au fur et à mesure afin de passer à un ordre supérieur. Il en est ainsi dans le procédé lié à l'algorithme glouton, dans lequel il est nécessaire de s'arrêter à dix à chaque fois. Nous aurons donc à étudier les spécificités des désignations parlées en France en lien avec notre numération écrite chiffrée. Cette étude est aussi nécessaire car en CP, c'est prioritairement via cette numération que les élèves ont eu accès au nombre, avant l'introduction de la numération écrite chiffrée dans son aspect positionnel.

<p>CHAPITRE III</p> <p>La numération parlée en France</p>

1 Compléments méthodologiques	49
1.1 L'étude linguistico-mathématique faite par Cauty.....	49
a. Les types de numération selon Cauty	50
b. Discussion de l'étude de Cauty.	52
c. Plan d'étude	53
1.2 Description de la numération parlée en français.....	53
a. Les mots de base de la numération	54
b. Les noms des autres nombres	55
c. Conclusions relatives à la description de la numération parlée en France	59
2 Les analyses syntaxiques.....	60
2.1 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs et multiplicatifs.....	61
a. De la segmentation aux décompositions arithmétiques des nombres	61
b. Un algorithme de construction	62
c. Bilan de l'analyse syntaxique	63
2.2 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs uniquement.....	64
a. Une autre structure pour d'autres décompositions arithmétiques	64
b. Un autre algorithme de construction	66
c. Bilan de l'analyse syntaxique	66
2.3 Une analyse de la numération utilisant des repérants ordinaux.....	67
a. Des arguments en faveur des repérants	67
b. La numération ordinale	68
c. Bilan de l'analyse syntaxique	69
3 Les interprétations	71
3.1 La première partie de l'interprétant.....	71
a. L'interprétation arithmétique multiplicative	72
b. L'interprétation arithmétique additive	74
c. L'interprétation ordinale avec repérants.....	77
3.2 La deuxième partie de l'interprétant.....	78
a. L'interprétation arithmétique multiplicative	79
b. L'interprétation arithmétique additive	81
c. L'interprétation ordinale avec repérants.....	84
4 Les procédés concrets de mise en signes.....	86
4.1 1 ^{ère} étape : les procédés selon la première partie de l'interprétant.....	87
4.2 2 ^{ème} étape : la mise en signes : obtenir le dernier appui/repérant et le dernier appuyant/comptant.....	91
4.3 3 ^{ème} étape : la mise en signes : obtenir les noms des nombres.....	93
5. Bilan.....	94

1. Compléments méthodologiques

Dans ce chapitre, notre but est de voir quels interprétants peuvent être associés au système sémiotique de la numération parlée en français. Indiquons dès maintenant que nous allons étudier l'échelle longue de cette numération : celle qui emploie le terme de milliard pour 10^9 alors que billion désigne 10^{12} . Le cadre des mathématiques est naturel à l'étude de la numération écrite chiffrée. En ce qui concerne les representamens de la numération parlée en français, le cadre de la linguistique doit aussi être convoqué. Cauty (1986) en fait la démonstration. Il indique en particulier que les notions mathématiques de nombre, d'ordre, d'opération, de base et de numération de position ne peuvent expliquer à eux seuls certains faits. Il donne en exemple les nombres désignés par chacune des six permutations des trois mots « quatre », « vingt », « mille », ou bien le non sens (ou le sens perdu) de certaines expressions comme « quinze-vingts » par rapport à d'autres comme « quatre-vingts », ou encore l'emploi en France de « soixante-dix » plutôt que « dix-soixante » ou « septante ». Notre étude va consister à lier une étude d'orientation linguistique aux mathématiques, mathématiques qui ne peuvent être absentes du fait que l'objet dénoté est le nombre. Rappelons que nous avons écarté pour l'instant la question de la conceptualisation en elle-même qui, elle, questionne en particulier l'idée d'un « même objet » nombre dans les représentations/conceptions de tel ou tel sujet. Rappelons aussi que nous avons décidé de séparer l'étude des deux numérations pour ensuite mieux en saisir les liens : d'abord en comparant les interprétations⁴¹ dégagées dans les chapitres 2 et 3, puis dans la conclusion de cette première partie de la thèse en élargissant l'étude à d'autres numérations par des considérations historiques et linguistiques.

Une fois indiquée une description « non interprétative » de la numération parlée (cf. le §1.2), pour la première partie de notre méthodologie, celle relative à l'établissement de modèles de numération théorique de référence, nous avons indiqué ne pas disposer de théorie mathématique dans laquelle la numération orale en français peut être interprétée *a priori*, du fait de sa composante linguistique. Notre premier travail va alors consister à définir différents types de numérations qui vont nous permettre de disposer d'une référence, de modèles. Pour ce faire nous allons utiliser cette fois-ci des travaux anciens, ceux qui abordent de manière approfondie les liens entre les mathématiques et les numérations. Ceux-ci vont nous amener, un peu à l'exemple des textes de Bezout et Reynaud, à poser les questions puis préciser une méthodologie et un plan d'étude.

1.1 L'étude linguistico-mathématique faite par Cauty

Cauty (1986) a fait une étude syntaxique de la numération parlée : elle consiste en « *une étude de la formation des expressions numériques composées dans une rationalité arithmétique ou ordinale par concaténation de nombrants ou de repérants* », Cauty (1986). Il qualifie la numération parlée en français de « *numération arithmétique (additivo-multiplicative parenthésée) à caractère décimal et vicésimal* ». Nous allons expliquer tous ces termes en les reprenant dans le cadre théorique que nous avons choisi. En particulier nous utilisons les termes de representamen, objet et interprétant pour reprendre certaines notions introduites par Cauty. C'est en partant des notions et résultats qu'il a obtenus que nous entreprenons ensuite notre propre analyse de la numération parlée en France.

⁴¹ Nous utilisons les termes « interprétable » ou « interprétation » quand il s'agit de l'activité du chercheur concernant l'analyse des signes, et en particulier la recherche d'interprétants.

a. Les types de numération selon Cauty

Cauty (1984) distingue deux grands types de numération parlée : les numérations ordinales et les numérations arithmétiques. Les premières permettent de saisir les nombres grâce à des propriétés de la structure d'ordre des entiers naturels et ne font pas appel aux opérations de l'arithmétique. Le principe de construction de ces numérations consiste à établir une suite ordonnée de représentations qui vont servir comme représentations de la suite des nombres entiers (tels que définis par l'axiomatique de Peano). Les secondes, les numérations arithmétiques, permettent de rendre compte de l'existence des composés arithmétiques par addition, multiplication ou élévation à une puissance. La question est alors de classer telle ou telle numération dans un type ordinal ou cardinal (voire dans les deux à la fois). Cauty (1984) relève quatre critères (valables pour tout type de numération, parlée, écrite ou figurative⁴²) : (C0) absence d'organisation ordinale et de toute opération, (C1) présence du principe ordinal, (C2) présence d'une ou plusieurs opérations arithmétiques, (C3) présence du principe de position au sens arithmétique du terme. Le premier critère (C0) comporte l'idée de représentations n'établissant pas de relation avec les autres représentations. Ainsi, il n'y a donc pas de système sémiotique à proprement parler. Le dernier critère (C3) est en fait celui que nous avons exposé dans l'analyse de la numération écrite chiffrée. Il indique que le système sémiotique repose sur le principe de la décomposition d'un nombre selon une base suivie de la mise en signes utilisant un système positionnel de chiffres⁴³. Cauty indique qu'aucune numération parlée ne se base uniquement sur le critère (C0), et il ne signale pas de numération parlée comportant le critère (C3). C'est pourquoi seules deux catégories sont disponibles pour les numérations parlées, celles relevant du critère (C1) et celles du critère (C2). Décrivons plus en détail ces deux catégories.

Les numérations ordinales et cardinales.

La première, celle des numérations ordinales, est caractérisée par le fait que « *l'expression du nombre est in-analysable en termes d'opérations arithmétiques et que ces expressions ne peuvent être dites refléter des processus conceptuels de nature arithmétique* », Cauty (1984). Il précise en outre que « *les opérations conceptuelles du sujet énonciateur sont décrites dans le cadre de la topologie (relation d'ordre) ce qui permet d'introduire et de contrôler des notions comme le repérage sur une échelle, le franchissement d'une limite, la successivité, et d'initialiser le processus de la construction du système des représentations des phénomènes de comptage* ». D'autre part pour préciser ce qu'il entend par numération ordinale, Cauty introduit la notion de comptine et de comptage dont nous avons déjà parlé dans le paragraphe sur la numération chiffrée. Nous précisons ces notions. La comptine est pour Cauty « *une liste (conventionnelle ou idiosyncrasique, parlée, écrite ou mimée) ayant la propriété que tous les items de la liste apparaissent dans un ordre strict et immuable* ». Dans le champ de la didactique, le mot compteur est employé et le mot comptine concerne uniquement une liste parlée : nous adoptons cette terminologie. Le principe ordinal est donc lié intrinsèquement à l'élaboration d'une liste d'items qui sert en tant que comptine comme instrument de comptage. A contrario, le principe cardinal est lié à la construction de la numération selon ce que nous avons appelé une échelle de numération : ses caractéristiques ont été développées dans les paragraphes précédents concernant la numération écrite chiffrée.

Comment interprétons-nous ces notions dans notre recherche ? Nous allons considérer ces deux principes comme constitutifs des premières parties de deux interprétants différents auxquels il faut ajouter une deuxième partie concernant les différentes mises en

⁴² Cauty distingue en effet au moins trois moyens pour représenter des nombres : deux sont linguistiques (oraux et écrits) et un troisième est figuratif (boulier, planche à compter, quipu, etc.).

⁴³ Cauty n'a cependant pas fait l'analyse de la numération écrite chiffrée que nous avons proposée. En particulier il ne distingue pas la décomposition polynomiale et les différentes mises en signe qui peuvent s'y adosser.

representamens (en mots dans une langue) : dans notre numération de position chiffrée nous avons distingué d'un côté les principes de base dix et de l'autre leur mise en representamens (en écriture chiffrée). A travers la comptine numérique, nous voyons aussi poindre un élément pour un procédé pratique de mise en signes du cardinal d'une collection : une énumération des éléments d'une collection associée à la récitation de la comptine. Cependant, si toute numération peut servir pour le comptage, pour autant elle n'est pas nécessairement construite sur un principe ordinal puisque certaines expressions peuvent être interprétables selon une échelle de numération (principe cardinal). Réciproquement, toute numération permet d'indiquer le cardinal d'une collection sans être nécessairement interprétable comme numération arithmétique. L'interprétation qu'en fait le chercheur est donc primordiale.

Une méthode d'analyse.

Comment alors argumenter l'interprétation des numérations pour lui donner des assises rationnelles ? Sur quels éléments s'appuyer ? Selon quelle méthode d'analyse ? Cauty indique un certain nombre de numérations qui sont sans aucun doute ordinales ou arithmétiques selon les critères qu'il expose. Nous allons suivre sa méthode. Il articule une étude syntaxique et une morphologique. Nous allons reprendre ses définitions. La syntaxe est, nous l'avons déjà dit, « une étude de la formation des expressions numériques composées dans une rationalité arithmétique ou ordinale par concaténation de nombrants ou de repérants », Cauty (1986). Précisons ce que signifie cette définition afin de permettre d'élaborer une méthode d'analyse de la numération parlée en français dans le cadre de cette thèse. La concaténation est le principe de mettre bout à bout des éléments (en chaîne). Elle peut aboutir à la chute d'un segment (tri+million devient trillion) ou à un ajout (vingt+un devient vingt-et-un) ou bien ne rien changer (vingt+trois devient vingt-trois). La première étape de l'analyse syntaxique est de relever les différents constituants effectivement engagés et d'établir ainsi le vocabulaire terminal de la numération (qui correspond à l'alphabet dans la théorie des langages) à partir duquel seront constitués tous les representamens : pour le français, « dix » et « sept » font partie de ce vocabulaire terminal mais pas « dix-sept ». Un nombrant est un representamen ayant une valeur numérique cardinale précise, qui n'est pas un composé arithmétique manifeste et qui sert à interpréter une numération dans une vision cardinale. Un repérant est un representamen ayant une valeur numérique ordinale, qui n'est pas analysable dans une analyse morphologique en termes de successeur, ou prédécesseur immédiat des deux entiers qui l'encadrent. Il sert à interpréter une numération dans une vision ordinale. Nous précisons ultérieurement ces notions de nombrant et repérant quand nous allons les utiliser. A signaler que tout nombrant peut être interprété comme repérant (et réciproquement) puisque la comptine numérique peut servir d'instrument de comptage (lien entre nième et n), mais ceci dépend de l'interprétation que l'on en fait⁴⁴. Nous retenons ici que c'est le fait d'interpréter certains representamens comme nombrant ou repérant qui détermine précisément une interprétation ordinale ou cardinale de la numération. Des choix sont à faire, en particulier grâce à une étude syntaxique, certains plus argumentés que d'autres. Une étude morphologique peut nous aider dans certains cas. La morphologie est en effet l'étude de la composition de chaque representamen qui n'est pas manifestement un composé de plusieurs representamens. Elle permet ainsi d'analyser les nombrants et les repérants à un niveau inférieur. Elle nous sert par exemple quand il s'agit de savoir si le representamen « onze » est un nombrant/repérant ou s'il a un lien ou non par exemple avec « dix ».

Ceci nous donne une méthode d'analyse de la numération parlée en français :

1ère étape : à partir du vocabulaire terminal (ce qui inclut une étude morphologique préalable), donner une description des representamens

⁴⁴ Nous verrons que dans la numération parlée en français, les nombrants et interprétants concernent souvent le même representamen.

2ème étape : faire une étude syntaxique, en particulier interpréter les relations entre les representamens en termes de nombrants ou repérants (ce qui engage en outre un classement en numération ordinaire ou cardinale)

3ème étape : dégager de l'étude précédente les interprétations possibles, en distinguant en particulier la mise en representamens en français des principes mathématiques, comme il a été fait pour la numération écrite chiffrée.

b. Discussion de l'étude de Cauty.

Les résultats obtenus

La méthode précédente a été appliquée par Cauty (1986), ce qui l'amène à proposer de qualifier la numération parlée en français de numération arithmétique additivo-multiplicative parenthésée. Il considère que tous les representamens sont soit des nombrants, soit des composés de nombrants analysables en termes d'addition, de multiplication et de parenthèse. Ainsi, trois cent vingt-trois mille huit cent quatre-vingt-deux est analysable comme $((\text{trois} \times \text{cent}) + \text{vingt} + \text{trois}) \times \text{mille} + (\text{huit} \times \text{cent}) + (\text{quatre} \times \text{vingt}) + \text{deux}$. Pour étayer sa thèse, il introduit plusieurs notions. Ainsi, un nombre d'appui additif désigne un nombre n dont le representamen est un nombrant qui est concaténable à d'autres representamens désignant un nombre plus petit que n . Le résultat de cette concaténation « additive » est un representamen désignant un ou tous les nombres de la suite des successeurs de n , jusqu'au prédécesseur du double de n . Par exemple le nombre désigné par « dix » peut être interprété comme un nombre d'appui additif car « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » désignent les trois prédécesseurs au double du nombre désigné par « dix ». Un nombre d'appui multiplicatif m est un nombre d'appui additif dont le representamen est de plus concaténable à quelques éléments des representamens des premiers entiers. Le résultat de la concaténation doit être un representamen désignant un des multiples de m . Le nombre désigné par « cent » est interprétable en tant que nombre d'appui multiplicatif, puisqu'il l'est en tant que nombre d'appui additif (par exemple dans « cent quarante » ou « cent trente-deux ») et que « deux cents » désigne un multiple du nombre désigné par « cent ». Trois éléments permettent alors d'interpréter la numération parlée en français comme une numération arithmétique additivo-multiplicative parenthésée : le tactème d'ordre, les nombres d'appui et la place. Ces éléments permettent tout d'abord d'interpréter sous forme de décomposition additive ou multiplicative des expressions « *élémentaires* » faisant intervenir uniquement deux arguments (donc deux places possibles) dont un des deux est un representamen d'un nombre d'appui. Le tactème d'ordre est le fait que l'ordre d'énonciation a du sens. Par exemple, en français, l'ordre croissant peut être interprété comme indiquant un composé multiplicatif et l'ordre décroissant comme un composé additif. Mais toute expression n'est pas « *élémentaire* », c'est-à-dire constituée de deux arguments dont l'un des deux est le representamen d'un nombre d'appui. Ainsi, pour interpréter toutes les expressions, un troisième élément est requis, c'est le découpage de la chaîne des representamens en « tronçons » ou « tranches » d'expressions « *élémentaires* ». Pour la numération parlée en français, Cauty considère schématiquement les expressions des nombres jusqu'à mille puis celles au-delà. Il indique trois types de « tranches » dans la numération française jusqu'à mille : un premier concernant une séquence de representamens ne faisant pas intervenir « cent », un deuxième faisant intervenir « cent » sans qu'il soit suivi de quoi que ce soit, et un dernier faisant intervenir les deux.

Discussion

Nous allons reprendre à notre compte toutes ces définitions, mais nous allons rediscuter de l'interprétation de Cauty. Celle-ci est en effet fondée sur une description qui, un peu à l'exemple de Bezout et Reynaud, essaye de lier les écritures chiffrées et les expressions orales, en donnant un algorithme qui permet de passer de l'un à l'autre. Cet algorithme est

justifié par une analyse syntaxique très précise. Nous pensons cependant qu'une telle description engage alors nécessairement vers une interprétation d'essence arithmétique. Ifrah (1994) et Guitel (1975) arrivent à des conclusions similaires sans l'analyse de Cauty, mais en recherchant des méthodes pour classer l'ensemble des numérations parlées. Nous ne rejetons pas cette possibilité, mais essayons de voir s'il en existe d'autres, en particulier celle d'une numération « ordinale »⁴⁵. En outre, il nous semble aussi pertinent d'apporter des précisions sur cette interprétation arithmétique de la numération parlée en français en tant que numération arithmétique avec la spécificité d'être additivo-multiplicative parenthésée. En effet, nous pouvons nous poser des questions sur la légitimité d'interpréter tel ou tel representamen en tant qu'appui additif ou multiplicatif⁴⁶ et par la suite sur la raison de ces choix : y a-t-il de manière sous-jacente des raisons mathématiques ? Ainsi, pouvons-nous évaluer la proximité de la numération parlée en France avec la numération écrite chiffrée de position.

c. Plan d'étude

Comme pour l'étude de la numération écrite chiffrée, nous allons constituer un cadre de référence afin d'interpréter celle parlée en France. Trois analyses syntaxiques reprenant les éléments théoriques dus à Cauty vont nous permettre dans le paragraphe 2 de pouvoir comprendre la numération à l'aide de systèmes différents. Ceci nous donne la possibilité ensuite de distinguer dans le paragraphe 3, pour chaque système, les deux parties de l'interprétant que nous dégageons. La première partie concerne les principes plus spécifiquement mathématiques (3.1) : ce sont nos modèles. Ce premier mouvement, des signes (analyse syntaxique) vers les mathématiques (première partie de l'interprétant), pose des questions sur les choix faits dans notre langue et amorce ainsi le deuxième mouvement, des mathématiques vers les signes, la deuxième partie de l'interprétant (3.2). Ceci permet d'avoir des éléments de réponse à la question : « en quoi les principes mathématiques retenus (première partie de l'interprétant) peuvent-ils mener à d'autres numérations que la numération parlée en France ? ».

Pour compléter notre analyse, nous abordons dans le paragraphe 4 les procédés « concrets » de mise en signes du cardinal d'une collection, procédés qui posent un autre regard sur le rapport entre les mathématiques et les signes.

Cependant, en tout premier lieu, il nous faut développer une description « non interprétative » de la numération parlée en France avant d'en faire l'analyse, c'est l'objet de ce qui suit.

1.2 Description de la numération parlée en français

La description de la numération parlée en France ne pose pas les mêmes problèmes que celle de la numération écrite chiffrée : les representamens de la seconde sont des suites de chiffres ayant toutes un sens et analysables dans le cadre de la théorie des langages, ce qui n'est pas le cas pour la première. Cette description est cependant indispensable pour définir l'ensemble des signes que nous voulons étudier. Comme nous l'avons signalé précédemment, utiliser tel ou tel algorithme peut sous-tendre de fait une interprétation et par là même masquer d'autres possibilités.

C'est pourquoi nous allons décrire la numération parlée sans l'aide de la numération écrite chiffrée, à l'inverse par exemple de la méthode de Numa Bocage (1997) et dans une moindre mesure de Cauty (1986), Guitel (1975) et Ifrah (1994). En effet, ces descriptions sont de fait une réorganisation par le chercheur de la numération. Cette réorganisation nous semble

⁴⁵ Qui l'est de fait jusqu'à dix.

⁴⁶ Par exemple jusqu'à cent, il ne semble y avoir que des appuis additifs.

induire d'emblée des principes arithmétiques liés à la numération écrite chiffrée. Or nos conceptions premières, voire nos *a priori*, ne doivent pas faire écran à toutes les possibilités.

Méthodologie

Notre numération parlée associe un representamen à chaque nombre. Dans le cadre propre à une numération parlée, nous parlerons aussi du nom d'un nombre, lorsque le representamen aura été associé au nombre qu'il dénote. Dans le processus de description, nous adoptons le principe de définir tout d'abord le vocabulaire terminal de la numération, c'est à dire les éléments lexicaux qui permettent par concaténation ou non de devenir des noms de nombre. Ensuite nous décrirons ces autres noms.

Pour les nombres inférieurs à une certaine borne, les mots utilisés pour le vocabulaire terminal sont : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ». Dans notre recherche, nous appelons ces mots les mots de base de la numération : ce sont les éléments du vocabulaire terminal de la numération. Les nombres de base seront les nombres que ces mots désignent. Dans cette numération, les nombres sont désignés soit par un de ces mots, soit une concaténation utilisant ces mots : c'est ainsi que nous passons des mots aux noms.

Ultérieurement, nous analysons ces composés, soit en termes arithmétiques soit en en termes d'ordinal, mais dans notre description nous évitons ces interprétations.

Par ailleurs, notre description ainsi que les analyses syntaxiques ultérieures doivent pouvoir s'appuyer sur des analyses des mots de base de la numération, y compris morphologiques. C'est pourquoi nous allons dès maintenant faire ces analyses pour les mots « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « soixante-dix », « quatre-vingts », « quatre-vingt-dix », « cent », « mille », « million », « milliard ».

a. Les mots de base de la numération

De un à neuf, nous considérons que les representamens sont indépendants et in-analysables en termes de liens entre eux⁴⁷. Pour les autres, nous nous référons au dictionnaire historique de la langue française sous la direction d'Alain Rey (1998) duquel sont extraites les origines du nom des nombres. Celles-ci sont données en annexe et nous présentons ici les points principaux sur lesquels nous nous appuyons ultérieurement.

Pour onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, nous retenons essentiellement leur origine latine et la concaténation de *decim* (dix) précédé du representamen latin de chacun des six premiers nombres. A noter que le dictionnaire interprète certaines concaténations, celles donnant onze, treize, quinze, comme une somme : ce n'est pas l'unique interprétation possible, nous le verrons dans la troisième interprétation que nous présentons dans ce travail. L'emploi de onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize en tant que nom indique au moins autant un numéro ou un rang qu'un cardinal. Les ordinaux onzième, ..., quinzième ne sont attestés que tardivement (12^{ème} siècle). Seize a d'abord désigné aussi un ordinal. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'il en était de même pour les autres.

L'origine des representamens vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, indique l'utilisation de deux, trois, quatre, cinq, six, et de dix. Cependant si le suffixe latin *-gint* semble renvoyer à l'idée de dizaine à travers l'indo-européen « *kmt* », Pépin (2003), l'interprétation multiplicative deux fois dix n'est pas la seule : cela peut être par exemple la deuxième dizaine. Il se peut aussi que cela renvoie à une unité d'ordre supérieur, le processus de

⁴⁷ Ceci peut-être discuté mais cela ne rentre pas dans le cadre de ce travail.

concaténation n'est donc pas avéré. De même, il semble qu'au moins à une certaine époque, les representamens de ces dizaines aient une valeur ordinale et cardinale simultanée.

Tous ces termes sont invariables, mais en ce qui concerne un, deux, trois et quatre, ils sont à l'origine déclinables, comme pour tous les representamens oraux des quatre premiers nombres d'origine indoeuropéenne, Marchot (1897).

b. Les noms des autres nombres

Compléments méthodologiques

Nous allons maintenant donner une description de la numération parlée en France. Auparavant, donnons encore quelques précisions. Nous ne pouvons pas affirmer, comme pour la numération écrite chiffrée, que tous les mots du vocabulaire terminal de la numération (qui sont les chiffres pour la numération chiffrée) ont du sens quelle que soit la suite qu'ils constituent. C'est pourquoi, il va nous falloir indiquer les règles de formation des representamens. Mais, sans prendre de précaution, ces règles peuvent constituer déjà une interprétation, comme il nous semble que ce soit le cas pour les recherches anciennes que nous avons consultées. Pour éviter cet écueil, à l'inverse de la description de la numération écrite chiffrée, nous allons devoir dès maintenant relier le representamen au nombre qu'il désigne. Cependant, nous allons voir que cette obligation est d'une certaine manière intrinsèque au système de numération parlée en français, ce qui atténue des effets interprétatifs.

Pour différencier le mot du nom, nous prendrons l'habitude d'utiliser dans ce paragraphe des guillemets quand il va s'agir de le prendre dans le sens d'un mot sans que ce soit encore un nom, c'est-à-dire sans qu'il ait été encore relié au nombre qu'il désigne. Dans le cas contraire, c'est le nombre qui sera signifié à travers son nom. Ainsi, dans notre description, tant que nous n'avons pas introduit le mot en tant que nom de tel nombre, nous ne pourrons pas désigner ce dernier par ce mot. Un nombre sera signifié, nous le verrons, en tant que successeur d'un nombre que nous aurons précédemment désigné par son nom⁴⁸. Notons que par la suite, les representamens ayant été définis, il nous faudra parfois distinguer le representamen du nombre qu'il désigne. Quand il sera nécessaire de lever une ambiguïté, nous utiliserons des guillemets cette fois-ci pour faire cette distinction : « onze » désignera le representamen, onze le nombre qu'il désigne. Les mots de base et les nombres de base sont propres à une numération orale. Ceci induit une structure sous-jacente, des principes et des conventions, que nous voulons mettre en évidence. Dans la description précise de notre numération parlée en France nous voulons éviter les « pièges » indiqués à la suite des descriptions de Bezout et Reynaud. C'est pourquoi nous ne ferons pas référence à notre numération écrite chiffrée, nous l'avons déjà dit, mais nous n'utiliserons pas non plus le biais d'une numération en unités. Dans la numération chiffrée de position, une fois les dix premiers entiers désignés par un chiffre (y compris zéro), nous pouvons donner directement la désignation écrite de tous les autres entiers et chaque suite de chiffres a un sens. A l'inverse, la description de la numération parlée en France suit un ordre, celui des nombres eux-mêmes. C'est une conséquence du fait que notre numération parlée soit constituée de concaténations : par exemple cent vingt-huit comporte le nom de trois autres nombres, noms qu'il est nécessaire d'avoir introduits auparavant pour comprendre la signification de cette désignation. Ajoutons finalement que nous avons décrit le nom des nombres bien au delà de cent (le champ numérique qui concerne le CP). La raison en est que les interprétations doivent être

⁴⁸ Nous voyons ici que nommer est une des façons de désigner un nombre, c'est-à-dire de l'indiquer. Nous pouvons distinguer en ce sens nommer et désigner, comme le fait Briand (1999). Cependant, dans le contexte de ce premier chapitre, mis à part ce passage relatif à la description de la numération parlée en France, cette distinction ne nous est pas utile. En effet, ici, toute désignation fait référence au representamen dans une des deux numérations étudiées, que ce soit une désignation écrite chiffrée ou une désignation orale.

inférées (et discutées) en considérant un large spectre, ceci se voit dans les descriptions de Reynaud et Bezout.

Description de la numération parlée en France

- Pour les premiers nombres : un mot est associé à chaque nombre donnant ainsi le nom du nombre, les mots sont différents deux à deux, ce sont dans l'ordre : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize »⁴⁹.

- Pour les trois nombres qui suivent, le nom du nombre est obtenu par concaténation. Il est composé du mot « dix » suivi respectivement des mots « sept » pour le premier des trois, « huit » pour le deuxième, « neuf » pour le troisième, ce qui donne « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » qui désignent dans cet ordre les trois nombres successeurs de quinze.

- Pour le suivant, un mot nouveau est employé, « vingt ». Puis pour les neuf nombres qui suivent, est utilisé un processus identique à celui de la dénomination des nombres dix-sept, dix-huit, dix-neuf. Deux mots sont juxtaposés. Le premier est toujours le mot « vingt », ensuite sont accolés successivement pour désigner chacun des neuf nombres suivant vingt, les mots désignant les neuf premiers nombres : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ». A noter une exception pour le premier nombre après vingt, pour lequel on intercale le mot « et » entre « vingt » et « un ». Ce qui donne finalement « vingt et un », « vingt-deux », « vingt-trois », « vingt-quatre », « vingt-cinq », « vingt-six », « vingt-sept », « vingt-huit », « vingt-neuf » qui désignent dans cet ordre les neuf nombres successeurs de vingt.

- Le principe est le même en ajoutant un mot nouveau pour chaque dizaine jusqu'à cinquante-neuf.

- Pour le nombre suivant un mot nouveau est employé, « soixante ». Par la suite, on considère le processus de dénomination des dix-neuf nombres qui suivent. Pour ces dix-neuf nombres est utilisé un processus identique à celui de la dénomination des nombres vingt-et-un, vingt-deux, ..., vingt-neuf. Ce qui donne finalement « soixante-et-un », « soixante-deux », « soixante-trois », « soixante-quatre », « soixante-cinq », « soixante-six », « soixante-sept », « soixante-huit », « soixante-neuf », « soixante-dix », « soixante-et-onze », « soixante-douze », « soixante-treize », « soixante-quatorze », « soixante-quinze », « soixante-seize », « soixante-dix-sept », « soixante-dix-huit », « soixante-dix-neuf » qui désignent dans cet ordre les dix-neuf successeurs immédiats de soixante⁵⁰. A noter les cas particuliers de « soixante-et-onze » et « soixante-et-un », dans lesquels le mot « et » a été intercalée. Toutefois cette particularité avait déjà été notée pour les successeurs de vingt, trente, quarante et cinquante.

- Pour le nombre suivant un mot « nouveau » est employé, « quatre-vingts ». Par la suite, on considère le processus de dénomination des dix-neuf nombres qui suivent. Pour ces dix-neuf

⁴⁹ Dans l'analyse morphologique précédente, nous avons vu que les mots « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize » peuvent être interprétés comme le résultat d'une concaténation altérée. Cependant du fait de la non évidence de cette concaténation (qui n'est qu'une interprétation puisque nous n'avons pas trouvé trace du mot dix ou decem), nous gardons l'idée que ces noms apparaissent comme nouveaux. Ajoutons que c'est une particularité de certaines numérations parlées d'altérer certains noms, particularité qui les distingue par exemple de notre numération chiffrée dont les transformations graphiques des chiffres au cours du temps ne sont pas du même ordre.

⁵⁰ A noter que d'autres numérations francophones sont différentes en ce point. Elles utilisent un mot particulier pour désigner soixante-dix, le mot « septante ». Ainsi on doit considérer le processus de dénomination des neufs successeurs à soixante, puis des neufs successeurs à septante, comme pour les nombres inférieurs à soixante. Remarquons qu'un mot, quand il est prononcé, ne garde pas forcément trace de sa composition. Ainsi par exemple « soixante-dix », tant qu'il n'est pas écrit en lettres peut être considéré comme d'un seul tenant « soissant'disse ». Ainsi, dans l'interprétation de la numération, nous aurons à tenir compte du fait qu'il est possible de considérer « soixante-dix » comme un mot de base de la numération. La même remarque est à faire pour « quatre-vingts »/« octante »/« huitante » et « quatre-vingt-dix »/« nonante ».

nombres est utilisé un processus identique à celui de la dénomination des nombres vingt-et-un, vingt-deux, ..., vingt-neuf. Ce qui donne finalement « quatre-vingt-un », « quatre-vingt-deux », « quatre-vingt-trois », « quatre-vingt-quatre », « quatre-vingt-cinq », « quatre-vingt-six », « quatre-vingt-sept », « quatre-vingt-huit », « quatre-vingt-neuf », « quatre-vingt-dix », « quatre-vingt-onze », « quatre-vingt-douze », « quatre-vingt-treize », « quatre-vingt-quatorze », « quatre-vingt-quinze », « quatre-vingt-seize », « quatre-vingt-dix-sept », « quatre-vingt-dix-huit », « quatre-vingt-dix-neuf » qui désignent dans cet ordre les dix-neuf successeurs immédiats de quatre-vingts. Cette fois-ci le mot « et » n'est pas utilisé⁵¹.

- Pour le nombre suivant, un mot nouveau est employé, « cent ». Par la suite, on considère le processus de dénomination des quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent. Pour ceux-ci, une concaténation constitue le nom du nombre. Il est composé du mot « cent » suivi du mot « un » pour le successeur immédiat de cent, du mot « deux » pour le suivant etc., jusqu'au mot « quatre-vingt-dix-neuf » pour le quatre-vingt-dix-neuvième successeur de cent. Ce qui donne « cent un », « cent deux », etc., « cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs immédiats de cent.

- Le nombre suivant est dénommé grâce à la juxtaposition du mot « deux » suivi du mot « cents »⁵². Par la suite, on considère le processus de dénomination des quatre-vingt-dix-neuf nombres qui suivent, processus analogue à celui des nombres entre cent et cent quatre-vingt-dix-neuf. Pour ceux-ci, un mot composé constitue le nom du nombre. Il est composé du mot « deux-cent » suivi du mot « un » pour le successeur immédiat à deux-cent, du mot « deux » pour le suivant etc., jusqu'au mot « quatre-vingt-dix-neuf » pour le quatre-vingt-dix-neuvième successeur de deux-cent. Ce qui donne « deux cent un », « deux cent deux », etc., « deux cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs immédiats de deux cents.

- Le processus continue de la même manière, par l'introduction d'une dénomination particulière pour le nombre qui succède au quatre-vingt-dix-neuvième successeur du dernier nombre désigné successivement en accolant un mot parmi « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf » et le mot « cent ». Ce qui donne :

« Trois cents » suivi de « trois cent un », « trois cent deux », etc., « trois cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs de trois cents, etc. jusqu'à « Neuf cents », suivi de « neuf cent un », « neuf cent deux », etc., « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les quatre-vingt-dix-neuf successeurs de neuf cents.

- Pour le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, un mot nouveau est utilisé qui ne peut pas s'interpréter comme un mot composé de mots déjà utilisés : c'est le mot « mille »⁵³. Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de mille, on accole le mot mille successivement aux désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « mille un », « mille deux », etc., jusqu'à « mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur de mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.

⁵¹ Notons aussi que l'orthographe change : le « s » de « quatre-vingts » tombe dans la concaténation mais cela ne s'entend pas à l'oral.

⁵² Nous verrons ultérieurement en quoi « deux cents » peut jouer d'une certaine manière le rôle d'un mot nouveau, c'est aussi le cas pour « trois cents », etc. Ceci est une conséquence de l'aspect « parlé » de la numération étudiée (importance de la phonétique), comme cela a été signalé dans une note précédente.

⁵³ Il n'était pas nécessaire d'introduire un mot nouveau ici : on aurait pu continuer dix cents, onze cents... quatre-vingt-dix-neuf cents quatre-vingt-dix-neuf. Mais dans l'histoire la numération s'est constituée en ajoutant ce mot mille et nous décrivons la numération parlée telle qu'elle existe.

- Ensuite le successeur de mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est dénommé par « deux mille ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de deux mille, on accole les mots « mille » successivement aux désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « deux mille un », « deux mille deux », etc., jusqu'à « deux mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur de deux mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.

- Le processus continue de la même manière, par l'introduction d'une dénomination particulière pour le nombre qui succède au neuf cent quatre-vingt-dix-neuvième successeur du dernier nombre désigné successivement en accolant le nom désignant les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers entiers et le mot « mille ». Ce qui donne :

« Trois mille » ... puis, « quatre mille » etc., jusqu'à ...

« Neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille » pour désigner le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-huit mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, suivi de « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille un », « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille deux », etc., jusqu'à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille.

- Pour le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, un mot nouveau est utilisé qui ne peut pas s'interpréter comme un mot composé de mots déjà utilisés : c'est le mot « million ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de un million, on accole à « un million » successivement les désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « un million un », « un million deux », etc., jusqu'à « un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur du nombre un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.

- Ensuite le successeur de un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est dénommé par « deux millions ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de deux millions, on accole à « deux millions » successivement les désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « deux millions un », « deux millions deux », etc., jusqu'à « deux millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf ».

- Le processus continue de la même manière, par l'introduction d'une dénomination particulière pour le nombre qui succède au neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuvième successeur du dernier nombre désigné en accolant successivement le nom désignant les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers entiers et « million ». Ce qui donne :

« Trois millions » pour désigner le successeur à deux millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, suivi de « trois millions un », « trois millions deux », etc., jusqu'à « trois millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf ».

Puis, « quatre millions .etc., jusqu'à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions ».

« Neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions » pour désigner le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-huit millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, suivi de « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions un », etc., jusqu'à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour désigner successivement les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions.

- Pour le successeur de neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, un mot nouveau est utilisé qui ne peut pas s'interpréter comme un mot composé de mots déjà utilisés : c'est le mot « milliard ». Pour les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf successeurs de un milliard, on accole à « un milliard » successivement les désignations des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres dénommés. Ce qui donne dans l'ordre successivement : « un milliard un », « un milliard deux », etc., jusqu'à « un milliard neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » pour dénommer le successeur du nombre un million neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-huit.

Le processus continue ainsi avec l'introduction de « deux milliards », puis « trois milliards » etc., jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf milliards. Le nombre succédant à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf milliards neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est désigné par billion⁵⁴.

c. Conclusions relatives à la description de la numération parlée en France

La numération parlée en France se fonde sur le principe de désignation de chaque nombre par un représentant différent. Mais ces différences ne sont pas toutes sans lien comme c'est le cas pour les noms des dix premiers nombre. C'est l'étude de ces liens qui va nous permettre de repérer, à travers une analyse syntaxique, des principes mathématiques sous-jacents et une certaine approche du nombre.

Notre numération orale se construit de proche en proche dans le sens où les nouvelles dénominations prennent en compte les désignations précédentes. Ceci est possible grâce à deux éléments de natures différentes : des mots et des compositions de mots (concaténation en particulier), ces compositions suivant des règles. Précisons ce fonctionnement.

Des noms définis au fur et à mesure, dans l'ordre croissant des entiers naturels

De nouveaux mots sont introduits au fur et à mesure des besoins de désignation des nombres de plus en plus grands, tout en utilisant des noms de nombre déjà introduits : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize (un nom différent pour les seize premiers nombres) puis vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent et enfin mille, million, milliard. Nous avons dénommé ces mots des mots de base, c'est-à-dire ceux qui forment le vocabulaire terminal de la numération. Ainsi par exemple la désignation des nombres entre cent et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nécessite tous les mots utilisés pour désigner les nombres entre un et quatre-vingt-dix-neuf plus le mot « cent ». Cependant un ordre est respecté dans les énonciations, que reflète-t-il mathématiquement ?

Des règles d'énonciation qui peuvent être interprétées comme le reflet d'une structure arithmétique

Cet ordre nous pouvons le traduire, comme le fait Cauty, en règles liées à des décompositions mettant en jeu l'addition et la multiplication. Les nombres peuvent être en effet décomposés en somme(s), et dans certaines sommes certains termes peuvent être décomposés en produits. Les règles d'énonciation peuvent être vues comme la traduction de ces décompositions qui nécessitent au fur à mesure l'introduction de nouveaux mots pour désigner par des noms de nouveaux nombres. Décrivons ces règles pour tous les nombres, ce qui va mettre aussi en

⁵⁴ Nous adoptons ici l'échelle longue. Dans les pays anglo-saxons qui utilisent l'échelle courte, le mot billion désigne le milliard, et c'est le mot trillion qui est utilisé pour ce qui a été appelé ici billion. Pour les noms de ces grands nombres, deux échelles sont en vigueur, l'échelle courte et l'échelle longue, voir par exemple Guitel (1975). Ceci dépasse le cadre de notre recherche qui concerne prioritairement les « petits » nombres.

exergue les nombres qui sont décomposés (et ceux qui ne le sont pas, ceux désignés par les nombrants) et le type de décomposition.

En ce qui concerne l'indication de telle ou telle opération dans les décompositions des nombres, les deux noms sont accolés mais pour une addition le plus grand précède le plus petit, et pour une multiplication, c'est l'inverse. La question que l'on peut se poser est de savoir si, connaissant les noms de base et les principes nous pouvons identifier le nombre désigné. Y a-t-il confusion possible ? Est-ce que cela suppose de connaître le type de décomposition ? Prenons l'exemple de trois cent vingt-trois. La désignation peut se référer à une décomposition en somme de deux termes dont le premier est la centaine immédiatement inférieure et non pas d'un produit : il ne s'agit pas de trois \times (cent vingt-trois) mais par exemple de $(trois \times cent) + (vingt-trois)$. Du fait de l'associativité de l'addition, le problème se pose uniquement pour les nombres dont la désignation sous-tend une décomposition mettant en jeu la multiplication et l'addition en même temps, cependant est-ce que toutes les désignations sous-tendent une décomposition mixte ? Ne peut-on pas aussi avoir une décomposition additive de la forme $(trois cents) + (vingt-trois)$? Comment reconnaître la bonne décomposition uniquement avec l'énonciation ? Y a-t-il une règle qui permet de trancher entre deux décompositions ? Nous voulons trouver les principes mathématiques qui permettent de rendre cohérents et non ambigus des principes d'énonciation.

Notre première analyse syntaxique va nous permettre de répondre à ces questions, en partant d'une segmentation des désignations orales en segments séparés par les mots « cent », « mille », « million », « milliard ». Elle nous mène à considérer des décompositions mixtes. L'interprétation qui va en découler est proche de celle de Cauty, mais elle ne fait intervenir que des appuis multiplicatifs⁵⁵ et donc diffère de celle de Cauty, principalement pour les nombres inférieurs à cent. En outre, nous allons y distinguer une étude de la mise en representamen en français⁵⁶ (2^{ème} partie de l'interprétant) ainsi qu'apporter une réflexion sur les choix de tel ou tel nombre comme appui multiplicatif.

Une deuxième analyse syntaxique va s'intéresser plus particulièrement aux entiers inférieurs à mille en considérant des décompositions additives. Elle donnera un éclairage un peu différent à la structure arithmétique que l'on peut inférer de la description de la numération. Ceci nous conduit alors à une interprétation arithmétique multiplicative.

Des règles qui sont susceptibles d'être interprétées dans une interprétation ordinale de la numération

Mais nous ne devons pas oublier que les décompositions que nous venons de considérer sont une façon de rationaliser des règles d'énonciation. En particulier nous n'avons pour l'instant considéré que des principes arithmétiques. Or la description donnée ne met-elle pas en évidence une construction de proche en proche dans laquelle l'aspect ordinal est prépondérant ? Nous nous posons la question de savoir en quoi une analyse des representamens en tant que repérants est possible : cela mène vers une interprétation de la numération parlée en France en tant que numération ordinale (avec repérants).

2 Les analyses syntaxiques

Dans ce paragraphe, nous indiquons tout d'abord les éléments à partir desquels il va être possible de justifier les différentes interprétations que nous élaborons pour la numération

⁵⁵ Rappelons que dans la définition de Cauty, un appui multiplicatif est aussi nécessairement un appui additif.

⁵⁶ Rappelons qu'avec cette expression de « mise en representamen » nous faisons référence à la distinction que nous avons faite dans l'interprétant entre d'un côté les principes mathématiques (par exemple le développement d'un nombre selon une échelle de numération) et leur transcription dans tel ou tel système de système sémiotique (par exemple l'expression de ce développement dans une langue).

parlée en France. Il s'agit de mener trois analyses syntaxiques différentes qui permettent de structurer notre numération parlée selon trois modèles différents. Ces analyses permettent d'aboutir en particulier à un algorithme de construction des représentations de la numération. Dans le paragraphe 3, ce sont ces constructions qui sont ensuite considérées comme des modèles de système de numération (parlée) afin de déterminer différentes interprétations à la numération parlée en France.

2.1 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs et multiplicatifs

a. De la segmentation aux décompositions arithmétiques des nombres

Comme nous l'avons souligné, outre les nombrants qui désignent des nombres d'appui additifs ou multiplicatifs, nous devons déterminer des tronçons, des tranches, des segments qui structurent la lecture des noms des nombres afin de les interpréter comme composés arithmétiques. Dans l'ordre d'énonciation, on considère le segment de mot jusqu'au mot « milliard », « milliard » non compris (segment des milliards), puis le segment de mots entre le mot « milliard » et le mot « million » (segment des millions), puis le segment de mots entre le mot « million » et le mot « mille » (segment des mille), puis le segment de mots entre le mot « mille » et le mot « cent » (segment des cents), et enfin le segment de mots restants. Nous appelons les mots « cent », « mille », « million », « milliard » des mots-segments, ce sont des mots de base particuliers qui désignent des nombres-segments. Chaque segment va désigner un nombre, qui lorsqu'on le multiplie par le nombre-segment auquel il se réfère, désigne un nouveau nombre. Ainsi chaque nombre segment est un appui multiplicatif de la numération⁵⁷ et tout appui multiplicatif est un nombre segment. Le nombre désigné par l'ensemble est la somme des nombres désignés par chacun de ces nouveaux nombres (ce qui est cohérent avec la règle d'ordre d'énonciation pour désigner une somme, le plus grand avant le plus petit).

Prenons l'exemple de trois millions cinq cent quatre-vingt-un mille trois cent vingt-trois⁵⁸ et décrivons les règles pour chaque segment. Pour le segment de mots restant (« vingt-trois » dans notre exemple) le nombre est désigné par un mot de base ou bien constitué par concaténation d'au plus quatre mots de base. Excepté pour les nombres entre quatre-vingts et quatre-vingt-dix-neuf dont le cas est traité ultérieurement, une des deux règles d'énonciation déjà données nous indique que le segment est interprétable selon une décomposition additive. Ceci met en exergue les nombres d'appui additif désignés par les nombrants « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », auquel on a ajouté ici « quatre-vingts ». A noter que les mots de base « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize » ne désignent pas des appuis additifs (ni donc multiplicatif). Le segment des cents (« trois » dans notre exemple) est composé au maximum d'un mot de base parmi « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ». Pour le segment des mille (« cinq cent quatre-vingt-un » dans notre exemple), l'ensemble des mots avant mille désigne un nombre entre deux et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Cet ensemble est traité selon les règles décrites précédemment, c'est-à-dire dans le cas où seul « cent » peut segmenter le représentant : le segment restant « quatre-vingt-un » désigne quatre-vingts + un et le segment des cent

⁵⁷ Les définitions des appuis multiplicatifs et additifs ont été données auparavant et sont dues à Cauty. Rappelons simplement ici qu'un appui multiplicatif est toujours aussi un appui additif.

⁵⁸ Nous verrons ultérieurement que « cent » ne joue pas toujours le même rôle que les autres mots segments, ce qui va nous permettre entre autres de traiter à part les nombres entiers inférieurs à mille.

« cinq » associé à « cent » désigne cinq fois cent, l'ensemble désigne ainsi (cinq × cent) + (quatre-vingts + un) (puisque cinq × cent est supérieur à quatre-vingts + un).

Le processus est donc décrit de manière itérative dans le sens où l'on réutilise les principes permettant de désigner des nombres inférieurs à celui désigné par un mot-segment. Ensuite le principe d'énonciation s'applique avec cet ensemble de mots qui précède le mot « mille » et le mot « mille » lui-même : le plus petit précède le plus grand ce qui indique un produit des nombres désignés. Il en est de même pour le segment des millions et celui des milliards : on considère le groupe de mots du segment des millions (resp. des milliards), puis on considère l'assemblage constitué de cette désignation et celle du mot « million » (resp. « milliard »). A remarquer que les segments des mille, millions, milliards, etc. désignent toujours un nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

Revenons sur le cas particulier des nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf. On peut énoncer une règle comparable en segmentant la désignation du nombre entre d'un côté les mots « quatre » et « vingt », et d'un autre côté les mots qui suivent (comme ce qui a été fait pour la segmentation s'appuyant sur cent, mille, milliard). « Vingt » joue donc pour les nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf le rôle d'un mot-segment. Le nombre désigné par vingt est donc aussi un nombre d'appui multiplicatif, avec la particularité de ne pouvoir être précédé que de « quatre » et d'être suivi des noms des dix-neuf premiers nombres, ou bien de n'être précédé de rien et suivi des noms des neuf premiers nombres (pour les nombres de vingt à vingt-neuf). Notons finalement que ce qui n'est pas énoncé ne doit pas être pris en compte. Le vide est ainsi l'élément neutre de l'addition, sauf dans deux cas particuliers : devant le mot segment « cent » et devant le mot segment « mille », l'absence de mot signifie un, élément neutre de la multiplication, et non pas l'élément neutre de l'addition, on ne dit pas un-cent, ni un mille, alors qu'on dit un million et un milliard.

Ainsi, en considérant à la fois des principes additifs et multiplicatifs⁵⁹ :

Quarante-trois est décomposé en quarante + trois

Quatre-vingt-un est décomposé en (quatre × **vingt**) + un (vingt joue le rôle de mot-segment pour les nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf)

Trois cent vingt-trois est décomposé en (trois × **cent**) + (vingt + trois),

Cinq cent quatre-vingt-un est décomposé en [cinq × **cent**] + [(quatre × *vingt*) + un]

Cinq cent quatre-vingt-un mille trois cent vingt-trois est décomposé en [[(cinq × **cent**) + [(quatre × **vingt** + un)]] × **mille**] + [(trois × **cent**) + (vingt + trois)].

En gras sont indiqués les nombres-segments principaux, en italique et gras, les nombres-segments qui sont réemployés dans un des segments (des mille, million, etc.). Ainsi cent en italique indique qu'il est utilisé comme nombre-segment secondaire dans le segment des mille ou million ou milliard.

b. Un algorithme de construction

L'algorithme structurant la numération est alors le suivant :

Signification des nombres désignés par les mots de base : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ».

Règle d'ordre de prise en compte des mots : règles de découpage en segments de mots décrites ci-dessus. Les mots de base « cent », « mille », « milliard » ont un rôle particulier⁶⁰,

⁵⁹ Ici nous utiliserons le parenthésage et les symboles + et -, en cohérence avec l'interprétation arithmétique.

⁶⁰ Une sorte d'unité de comptage intermédiaire. A noter que les désignations moins usitées, comme par exemple douze-cent-quarante pour 1240, indiquent que cent peut être considéré comme une unité de comptage au même titre que mille. (cf. la thèse de Chambris, 2008).

ils sont pour cela appelés mots-segments et les nombres qu'ils désignent nombres-segments. Le mot de base « vingt » joue pour les nombres entre quatre-vingts et quatre-vingt-dix-neuf le rôle de mot-segment.

Deux règles d'opération entre un segment et le mot segment auquel il se réfère (segmentation principale et secondaire) ou bien à l'intérieur d'un segment :

- deux désignations accolées signifie faire la somme des nombres quand le nombre désigné en premier est plus grand que le second
- deux désignations accolées signifie faire le produit des nombres quand le nombre désigné en premier est plus petit que le second.

c. Bilan de l'analyse syntaxique

Nous obtenons une analyse syntaxique qui peut être décrite à l'aide des termes empruntés à Cauly.

Le vocabulaire terminal composé des mots de base est constitué des termes suivants qui sont tous des nombrants : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ». On peut ajouter le mot « et ».

Une segmentation est décrite à l'aide de mots-segments : « vingt », « cent », « mille », « million », « milliard ». Elle induit une hiérarchie en segments principaux (segment des cents, des mille, des millions, des milliards). Les segments des mille, million, milliard peuvent comporter une segmentation secondaire faisant intervenir le segment des cents ou/et des vingts. Cette hiérarchisation permet d'indiquer un système de parenthésage, jusqu'à la prise en compte de deux mots de base. Les mots-segments sont des appuis multiplicatifs et additifs.

Le tactème d'ordre permet d'indiquer l'opération en jeu entre deux représentations, selon le mode de prise en compte indiqué par le parenthésage.

Les autres appuis additifs sont désignés par : « dix », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante ».

Les appuis additifs se différencient :

- « trente », « quarante », « cinquante » peuvent être suivis de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf » ;
- « soixante » peut être suivi de « et un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » ;
- « dix » ne peut être suivi que de « sept », « huit », « neuf ».

Les appuis multiplicatifs sont désignés par les mots-segments : « vingt », « cent », « mille », « million », « milliard ».

Les appuis multiplicatifs se différencient :

- « vingt » est précédé de rien ou de « quatre ». Quand il est précédé de rien il peut être suivi de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf », ce qui fait de lui un appui additif comme « trente », « quarante », « cinquante ». Quand il est précédé de « quatre », il peut être suivi de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
- « cent » est précédé de rien ou de « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf ». Dans chaque cas il peut être suivi de n'importe quel nom de nombre entre un et quatre-vingt-dix-neuf.

- « mille » est précédé de rien ou de n'importe quel nom de nombre entre deux et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Dans chaque cas il peut être suivi de n'importe quel nom de nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

- « million » et « milliard » sont précédés de n'importe quel nom de nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Dans chaque cas ils peuvent être suivis de n'importe quel nom de nombre entre un et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf.

Nous retrouvons dans cette analyse des points communs à celle de Cauty (1986) de la numération parlée en France en tant que numération arithmétique avec appuis multiplicatifs, mais en étant parti d'une description ne mettant pas en jeu la numération chiffrée.

2.2 Une analyse de la numération utilisant des appuis additifs uniquement

a. Une autre structure pour d'autres décompositions arithmétiques

Pourquoi une segmentation qui utilise cent comme appui multiplicatif ? Des indices nous permettent de chercher si ce n'est une raison à ce choix, du moins une régularité mathématique autre qu'une justification par dix en tant que premier appui multiplicatif. Pour cette deuxième analyse, nous allons regarder plus particulièrement les désignations des nombres inférieurs à mille.

En ce qui concerne les nombres inférieurs à cent, revenons tout d'abord sur le cas particulier de « vingt » qui intervient dans les désignations des nombres de quatre-vingts à quatre-vingt-dix-neuf. « vingt » y apparaît comme un mot-segment désignant un appui multiplicatif « lacunaire ». Considérons maintenant le cas des nombres inférieurs à soixante, leur désignation peut être interprétée comme un appui sur des dizaines successives, repérées par les mots de base dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante ainsi que sur une simple décomposition additive. Le cas des nombres entre soixante-dix et soixante-dix-neuf semble à la croisée de ces deux derniers principes : un appui sur la vingtaine (la troisième vingtaine) qui ne se traduit pas par l'utilisation du nombre d'appui multiplicatif désigné par vingt (ce qui aurait donné trois-vingts) mais par le mot nouveau « soixante » en cohérence avec l'énonciation de la suite des dizaines commencées par les cinq premières dizaines (un mot différent pour chaque dizaine).

Cette organisation est assez complexe et comporte des irrégularités. Il nous semble qu'elle peut se concevoir selon un autre principe que celui des mots-segments/appuis multiplicatifs en étendant les mots de base du vocabulaire terminal de la numération à un ensemble plus large, que nous dénommons les mots de base additifs. Pour éclairer notre propos nous allons revenir sur les décompositions possibles à partir des désignations.

A partir de vingt, des mots désignent les nombres de dix en dix et ceci jusqu'à soixante. Chaque mot désignant la dizaine est nouveau. Les nombres qui se trouvent entre les dizaines sont alors nommés en prononçant d'abord la dizaine inférieure puis le nom d'un des neuf premiers entiers : ceci peut être interprété comme une somme de deux termes dont un des deux termes est la dizaine inférieure. Pour les nombres entre soixante et quatre-vingts (respectivement entre quatre-vingts et cent), on peut y voir, à travers la concaténation du nom soixante (resp. quatre-vingts) et le nom désignant un des dix-neuf premiers entiers, une décomposition en somme de deux termes dont un des deux est soixante (resp. quatre-vingts). Soixante-dix et quatre-vingt-dix ne semblent donc pas jouer le même rôle que les autres dizaines du fait qu'ils ne servent pas de base à la décomposition en somme (on ne dit pas soixante-dix-un). Par contre, même si son représentant peut faire référence à une décomposition en produit, quatre-vingts, lui, joue ce rôle, un rôle analogue à soixante. Cent

joue aussi ce rôle, le representamen « cent » désigne la dixième dizaine, ce n'est qu'à partir de cent dix qu'il n'y aura plus d'introduction de mot nouveau pour désigner la nième dizaine.

Faisons à nouveau un point pour les nombres inférieurs à cent neuf, en considérant le nombre de mots de base utilisés :

- De un à seize, ainsi que vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent : un mot par nombre (un mot de base de la numération), il n'y a pas de décomposition.
- Pour les nombres : dix-sept, dix-huit, dix-neuf, vingt-et-un à vingt-neuf, trente-et-un à trente-neuf, quarante-et-un à quarante-neuf, cinquante-et-un à cinquante-neuf, soixante-et-un à soixante-seize, deux mots de base de la numération accolés, celui désignant le plus grand précède celui désignant le plus petit, ce qui peut s'interpréter par une décomposition en une somme. Chaque terme de la somme est un nombre qui a été désigné par un mot de base⁶¹.
- Pour quatre-vingts : deux mots de base sont accolés, celui désignant le plus petit nombre en premier, ce qui peut s'interpréter par une décomposition en produit ou bien, nous le verrons, le numéro de la vingtaine.
- Pour les nombres de quatre-vingt-un à quatre-vingt-dix-neuf et de soixante-dix-sept à soixante-dix-neuf : trois ou quatre mots de base sont accolés, leur ordre d'énonciation peut permettre d'interpréter des opérations.

Continuons notre exploration. Cent est la dernière dizaine dans la suite arithmétique de raison dix à être désignée par un seul mot de base. Dans une perspective de décomposition uniquement additive, les dizaines qui suivent sont désignées par un nom composé. Ceci donne la possibilité de lire dans le nom d'un nombre supérieur à cent une décomposition additive qui se fait non pas à partir d'une dizaine inférieure (cent vingt-huit = cent vingt + huit) mais à partir de la centaine inférieure (cent vingt-huit = cent + vingt-huit). En d'autres termes, puisque les désignations des nombres entre un et quatre-vingt-dix-neuf ont été déjà élaborées, le rôle joué par la dizaine pour les nombres inférieurs à cent peut être joué par la centaine pour les nombres entre cent et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. La désignation d'un nombre comme trois cents vingt-huit peut donc s'appuyer sur la décomposition en une somme dont le premier terme est la centaine inférieure trois cents vingt-huit = trois cents + vingt-huit : la décomposition n'est donc plus lue sous la forme trois × cent + vingt-huit. Autrement dit, trois cents peut être perçu comme la somme (deux cents) + cent, comme trente la somme vingt + dix. Tout comme il n'est pas obligatoire d'interpréter trente comme trois × dix ou encore soixante-dix comme sept × dix, nous n'interprétons pas trois cents comme trois × cent. Nous notons cependant que chaque centaine entre deux cents et neuf cents est numérotée, mais nous n'utilisons pas l'interprétation de cette numérotation en termes de produit. Par ailleurs, si le pluriel orthographique plaide en faveur d'une interprétation multiplicative, il ne s'entend pas, ce qui légitime d'en rechercher une autre.

C'est pourquoi, nous sommes amenés à considérer non pas les mots de base précités, mais des mots de base additifs, c'est-à-dire des representamens qui jouent le même rôle que les mots de base dans une perspective de décomposition additive uniquement : dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents. Quatre-vingt-dix et soixante-dix sont des candidats particuliers que nous devons étudier : en Belgique ou en Suisse, leur nom est nonante et septante, pour quatre-vingts c'est octante ou huitante.

⁶¹ La présence du mot « et » sera étudiée ultérieurement.

b. Un autre algorithme de construction

Nous obtenons ainsi une autre description des régularités et irrégularités. Ainsi par exemple tous les nombres inférieurs à cent suivent la même règle de désignation orale : le nom de la dizaine inférieure pour les nombres inférieurs à soixante (resp. la vingtaine inférieure pour les nombres entiers de l'intervalle [[soixante ; cent]]) suivi du nom d'un nombre entre un et neuf (resp. le nom d'un nombre entier entre un et dix-neuf). A partir de cent, tous les nombres suivent aussi la même règle : le nom de la centaine inférieure suivi du nom du nombre d'un entier entre un et quatre-vingt-dix-neuf.

Ceci mène à considérer d'autres principes d'énonciation que ceux indiqués précédemment afin de comprendre la désignation d'un nombre.

- connaissance des nombres désignés par les noms de base additifs (et non pas seulement les mots du vocabulaire terminal de la numération),
- règles d'énonciation : accoler deux noms de base additifs signifie faire la somme des nombres désignés,
- règle de maximalité : les décompositions emploient systématiquement les nombres correspondant aux nombres de base les plus grands, ainsi deux cent cent vingt-huit n'est pas un nom de nombre, mais trois cent vingt-huit en est un,
- règle de distinction des mots de base : ils sont énoncés toujours dans l'ordre décroissant des nombres qu'ils désignent : ainsi on dit trois cent vingt-huit et non pas vingt-huit-trois-cent.

c. Bilan de l'analyse syntaxique

Avec les termes empruntés à Cauty, nous obtenons l'analyse syntaxique suivante :

Le vocabulaire terminal étendu est composé des mots de base additifs suivants qui sont tous des nombrants : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « quatre-vingts », « cent », « deux cents », « trois cents », « quatre cents », « cinq cents », « six cents », « sept cents », « huit cents », « neuf cents ». On peut ajouter le mot « et ».

Tous les nombres désignés par les mots de base additifs sont des appuis additifs : une concaténation de ceux-ci indique une addition.

Les appuis additifs se différencient :

- « dix » ne peut être suivi que de « sept », « huit », « neuf » ;
- « vingt », « trente », « quarante », « cinquante » peuvent être suivi de « et un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit » ou « neuf » ;
- « soixante » peut être suivi de « et un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « et onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
- « quatre-vingts » peut être suivi de « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».
- « cent », « deux cents », « trois cents », « quatre cents », « cinq cents », « six cents », « sept cents », « huit cents », « neuf cents » peuvent être suivis de n'importe quel nom de nombre entre un et quatre-vingt-dix-neuf.

A remarquer qu'alors il n'y a plus besoin théoriquement de segmentation (indiquant un parenthésage) et de tactème d'ordre puisque la seule opération en jeu est l'addition et qu'elle est commutative. Cependant, lorsqu'il va s'agir d'énoncer un nombre, un ordre peut sembler nécessaire pour des raisons de non confusion dans les concaténations : trois cents et cent trois par exemple. Cependant, il est possible de considérer dans les codes langagiers oraux trois cents comme un nom non décomposable, la même phonétique que « troissan ».

Nous voyons que ces principes nous permettent de nous abstraire de la multiplication, seules des décompositions additives sont convoquées. A noter qu'ici nous nous sommes restreint aux nombres inférieurs à mille, bien qu'il soit théoriquement possible d'aller au-delà. Cependant, l'hypothèse d'une numération additive nous semble plus difficile à envisager. En effet, les appuis candidats seraient mille, deux mille, ... puis dix mille, onze mille, ..., cent mille, etc. Il nous semble difficile de ne pas considérer que mille est un appui multiplicatif.

2.3 Une analyse de la numération utilisant des repérants ordinaux

a. Des arguments en faveur des repérants

A la différence des autres, l'analyse que nous allons faire est moins fréquente, par exemple ni Cauty, ni Guitel, ni Ifrah ne l'envisagent pour la numération en langue française. Cependant, même si elle ne se fait pas nécessairement sous l'angle linguistique ou historique, elle est familière aux didacticiens qui étudient les premiers pas des élèves dans l'utilisation de la numération parlée en France à travers la comptine numérique. En outre, une certaine proximité avec l'analyse précédente pourrait la faire apparaître comme une variante de cette dernière. Pour nous, il n'en est rien. Pour étayer notre thèse, rappelons ce que Cauty entend par numération ordinale. C'est une numération dont la construction s'est faite principalement en regard de son utilité en tant que compteur. Ainsi, il n'y est pas privilégié les aspects arithmétiques, mais l'élaboration d'une succession de representamens (ici oraux), a priori indépendants les uns des autres, qui vont servir de compteur. Ceci entraîne une construction, de proche en proche, qui n'est pas sans rappeler la construction de Peano des nombres entiers. La comparaison peut être poursuivie du fait que l'aspect cardinal est d'une certaine manière second, comme une conséquence de l'aspect ordinal : c'est précisément l'utilisation de la chaîne immuable des representamens oraux qui permet d'accéder à la désignation du cardinal d'une collection, via le dernier nom énoncé. Avant de décrire les éléments qui permettent d'envisager une analyse de la numération parlée en France en tant que numération ordinale, c'est-à-dire principalement la donnée des representamens qui vont servir de repérant, nous allons donner des arguments qui indiquent en quoi cette interprétation est envisageable et peut répondre à certaines questions qui ont émergé dans les analyses précédentes.

Tout d'abord, l'adoption d'un ordre d'énonciation, que ce soit dans l'interprétation additive ou multiplicative, a pour conséquence que la commutativité des opérations n'est pas traduite dans les interprétants. On ne dit pas trente-deux-cent mais cent trente-deux, ni cinq-quarante mais quarante-cinq. Ainsi les structures arithmétiques que l'on pourrait mettre en avant sont « incomplètes ». L'étude morphologique des representamens, montre que les noms des nombres jusqu'à dix au moins ne sont pas analysables : il semble qu'ils soient indépendants les uns des autres. Donc, au moins jusqu'à dix, l'hypothèse ordinale est attestée, la numération pouvant servir comme « compteur ». Si nous poursuivons, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize renforcent cette hypothèse ordinale. En effet, s'il est possible d'y voir des traces de dix et d'un representamen des nombres de un à six, le changement à dix-sept pose une question : pourquoi apparaît-il bien après dix ? Des hypothèses ont été faites quand nous nous sommes tourné vers l'origine latine de la numération parlée en français. Nous n'avons pas pu nécessairement y voir des concaténations, par exemple des noms comme « dix-un » éventuellement altérés. Ceci permet que les representamens des nombres jusqu'à seize puissent être interprétés comme poursuivant une logique purement ordinale. Remarquons en outre que l'analyse morphologique mène à une décomposition de type « un-dix » et non « dix-un », ce qui n'est plus le cas après dix-sept, ce qui renforce leur spécificité par rapport aux autres representamens

Par ailleurs, nous avons interprété pour l'instant la concaténation « vingt-et-un » comme vingt plus un ou $(deux \times dix) + un$. « Vingt-et-un » comporte le mot de liaison « et » que nous

avons interprété pour l'instant en un signe +. Le dictionnaire historique de la langue française (1998) nous donne l'origine de ce mot : « *Réfection graphique étymologique (XII^e s.) de e (842), est issu du latin et, conjonction de coordination utilisée pour unir deux mots ou deux phrases, pour exprimer l'opposition, le renforcement ; cette conjonction est fréquente en tête de phrases exclamatives ou interrogatives. Et est un mot d'origine indoeuropéenne, à rapprocher du grec eti « de plus, encore », du gaulois etic « et », du sanskrit ati « au-delà », ce qui semble être le sens initial de cette famille de mots. ».* Ainsi, « et » a, à l'origine, le sens de au-delà et non le sens additif de l'arithmétique. Dans le même dictionnaire, nous notons : « *La conjonction française conserve ces valeurs [...], (il) s'ajoute au terme d'une énumération pour mettre en évidence un processus* ». Il est donc tout à fait possible d'interpréter « vingt-et-un » comme un au-delà de vingt, comme la reprise d'une énumération après avoir atteint une première étape, « vingt ». Le dictionnaire ajoute « Et a servi autrefois, dans les nombres composés, à joindre les unités au mot dix (dix et sept, remplacé par dix-sept) ». Il est ainsi possible d'interpréter d'autres representamens comme « quarante-sept » venant de « quarante-et-sept » en tant que « sept au-delà de quarante ». Dans le même esprit, « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », gardent des traces de deux, trois, quatre, cinq, six. Nous l'avons interprété comme « deux fois dix », ..., « six fois dix » dans la première interprétation, mais nous avons souligné que pour la deuxième interprétation avancée, celle utilisant les nombres d'appui additifs, il est possible d'y voir une numérotation des dizaines (cf. annexe). Ainsi, est-il permis aussi de le considérer comme le marquage de la succession des dizaines, la deuxième, la troisième etc., et non l'obtention successive des dizaines par ajout de dix. Nous notons cependant une différence entre la formation linguistique des representamens de la suite des centaines (simple juxtaposition de « cent » et de ce que nous proposons d'interpréter comme le numéro de la centaine) et celle de la suite des dizaines. Pour aller dans le sens d'une interprétation ordinale, nous pouvons formuler l'hypothèse que l'accent est mis dans les deux suites, non pas sur le rang ou le nombre de dizaines auquel se réfère par exemple « quarante » (c'est la quatrième dizaine ou il y a quatre dizaines), mais sur le fait de placer le nom de dizaine (et aussi celui de la centaine) parmi la suite des dizaines « dix », « vingt », « trente », etc., dans l'ordre d'énonciation établi (quarante c'est après trente et avant cinquante). Remarquons cependant qu'alors « soixante-dix », « quatre-vingts », « quatre-vingt-dix », et plus encore cent ne permettent pas de se situer dans cette suite par des indices sur la composition de leur representamen.

Nous avons indiqué dans les lignes qui précèdent différents facteurs contribuant à motiver une interprétation ordinale de la numération parlée en français. Afin de nous permettre dans un deuxième temps de définir les principes généraux d'une numération arithmétique avec repérants, nous allons indiquer dans ce qui suit quels sont les representamens qui peuvent nous servir comme repérants dans notre description. Nous revenons pour ce faire tout d'abord sur la définition de repérant et plus généralement sur la notion de numération ordinale.

b. La numération ordinale

Une numération ordinale est caractérisée par le fait que « *l'expression du nombre est in-analysable en termes d'opérations arithmétiques et que ces expressions ne peuvent être dites refléter des processus conceptuels de nature arithmétique* », Cauty (1984). Il précise en outre que « *les opérations conceptuelles du sujet énonciateur sont décrites dans le cadre de la topologie (relation d'ordre) ce qui permet d'introduire et de contrôler des notions comme le repérage sur une échelle, le franchissement d'une limite, la successivité, et d'initialiser le processus de la construction du système des représentations des phénomènes de comptage* ». De plus pour préciser ce qu'il entend par numération ordinale, Cauty introduit la notion de comptine et de comptage, dont nous avons déjà parlé dans notre travail. Rappelons qu'une

comptine est « une liste (conventionnelle ou idiosyncrasique, parlée, écrite ou mimée) ayant la propriété que tous les items de la liste apparaissent dans un ordre strict et immuable », Cauty (1984). Dans notre travail une comptine sera toujours orale et donc nous appelons compteur ce que Cauty nomme comptine. Le comptage est alors « une opération qui consiste à mettre en correspondance les termes d'une comptine⁶² et les éléments d'un ensemble dans le but d'en déterminer le nombre d'éléments (le cardinal) ». Le comptage « implique qu'il y ait désignation - sans répétition ni omission - des éléments de l'ensemble par les items de la comptine, et que le dernier item énoncé soit utilisé comme une désignation du cardinal de l'ensemble ».

Le principe ordinal est lié intrinsèquement à l'élaboration d'une liste d'items qui sert en tant que comptine comme instrument de comptage. Comment se traduit-il dans les representamens ? Nous reprenons la notion de repérant due à Cauty, en la traduisant dans notre terminologie. Un repérant est ainsi un representamen ayant une valeur numérique ordinale, que l'on n'interprète pas en termes de successeur⁶³, et qui sert à interpréter une numération dans une vision ordinale. Par exemple « vingt » peut être considéré comme un repérant car il peut indiquer un nombre atteint après la comptine de un à dix-neuf, il n'a pas de lien explicite avec son prédécesseur⁶⁴ et il peut permettre d'interpréter « vingt-quatre » comme le quatrième après vingt. Le principe général d'une numération ordinale avec repérant est alors de permettre à la numération de rendre compte de la succession des nombres entre deux repérants. Ainsi, deux repérants ne désignent pas deux nombres successifs, ils sont des éléments d'une graduation non unitaire. Deux principes peuvent être convoqués pour désigner un nombre à partir d'un repérant : un principe de postériorité, « un après trente », ou un principe d'antériorité, « neuf avant quarante ». Cauty (1986) introduit alors l'idée de divisions qui sont des éléments d'une graduation unitaire, c'est-à-dire de la suite ordonnée des premiers nombres. Ces divisions seront les moyens d'indiquer la succession des nombres entre deux repérants. Ils servent de comptine numérique que ce soit dans un principe d'antériorité ou de postériorité. Comme le mot division nous semble ambivalent, nous introduisons le mot de comptant. Une suite de comptants est donc une suite de representamens qui servent comme comptine pour désigner les nombres entre deux repérants.

Nous allons considérer qu'un representamen comme « quarante » est un repérant, bien qu'il soit possible d'y voir un lien de succession avec trente, du fait du lien entre trois et quatre dans la succession des nombres. Mais ici quarante n'est pas le successeur immédiat de trente : le lien n'est pas du même ordre qu'entre trente et trente-et-un. Nous allons donc interpréter quarante comme le successeur de trente dans la suite des repérants, du fait qu'il vient à sa suite dans l'ordre des nombres et que l'on peut l'atteindre à partir de trente avec la suite des comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ».

c. Bilan de l'analyse syntaxique

Pour les nombres inférieurs à cent, avec les notions décrites précédemment, nous pouvons faire l'analyse syntaxique suivante :

Le vocabulaire terminal de la numération, jusqu'à mille exclu, est constitué des mots de base suivants rangés dans l'ordre croissant : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze »,

⁶² Ou d'un « compteur » pour nous.

⁶³ Successeur pour une numération ordinale utilisant un principe de postériorité (par exemple neuf après le repérant dix, ce qui donne en français dix-neuf) et prédécesseur, pour une numération ordinale utilisant un principe d'antériorité (par exemple un avant le repérant vingt, qui a donné le latin undeviginti). Ces principes sont repris ultérieurement.

⁶⁴ Il n'est pas interprétable comme le successeur de dix-neuf.

« seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « quatre-vingts », « cent ». On peut ajouter le mot « et ».

Le premier mot énoncé est toujours un repérant, il est concaténé à un comptant. C'est le principe de postériorité qui est toujours utilisé.

Les repérants sont : « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « quatre-vingts », « cent »

Les comptants sont : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».

Les comptants se différencient :

- Suivant l'interprétation choisie, la suite des comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf » ou « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » permet d'atteindre le premier repérant « dix » ou le premier repérant « vingt ».

- « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », ne sont pas morphologiquement décomposables : ils sont utilisés comme comptants entre les repérants désignés par vingt, trente, quarante, cinquante, soixante.

- « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », peuvent être analysés comme une concaténation altérée de « dix » et du représentant d'un des six premiers nombres. Avec cette hypothèse « dix » acquiert un statut de repérant utilisé pour les nombres entre dix et vingt.

- « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » sont des concaténations mettant en jeu le repérant dix.

- « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » sont des comptants utilisés entre les repérants soixante, quatre-vingts, cent.

- Les repérants se différencient :

- « vingt », « trente », « quarante », « cinquante » sont des repérants entre lesquels sont utilisés la suite de comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ».

- « soixante », « quatre-vingts », « cent » sont des repérants entre lesquels est utilisée la suite de comptants « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».

- « dix » est un repérant qui est utilisé pour désigner les trois nombres avant le repérant « vingt ».

- Dans l'hypothèse d'une interprétation de « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize » avec le repérant dix, dix est alors un repérant de même nature que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », c'est-à-dire qui est utilisé avec les comptants un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf »

- « dix » est le seul à pouvoir être repérant et comptant.

Ainsi, pour les nombres inférieurs à cent, il n'y a plus besoin ni de segmentation (indiquant un parenthésage), mais d'une suite ordonnée de comptants, ni de tactème d'ordre puisque les comptants sont toujours inférieurs aux repérants.

Pour une extension au-delà de cent, théoriquement, il est possible de considérer que cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille sont des repérants. Les comptants sont alors les représentants des nombres entre un et quatre-vingt-dix-neuf. Le processus peut se poursuivre théoriquement au-delà. Notons alors que, du fait de la morphologie des repérants, lorsqu'il va s'agir d'énoncer un nombre, un

ordre peut sembler nécessaire pour des raisons de non confusion dans les concaténations : trois cents et cent trois par exemple. Comme pour la numération arithmétique additive, il est possible de considérer dans les codes langagiers oraux trois cents comme un nom non décomposable, la même phonétique que « troissan ». Cependant, pour ces raisons et du fait de l'emploi d'une comptine « longue », l'hypothèse d'une numération ordinale nous semble plus difficile à tenir pour les nombres supérieurs à cent⁶⁵ (et plus encore pour les nombres supérieurs à mille).

C'est pourquoi, nous centrons principalement la suite de notre étude sur des nombres inférieurs à cent. La description faite ci-avant laisse envisager plusieurs possibilités dans le choix des repérants et comptants. D'une manière générale nous retrouvons les options dégagées dans l'analyse précédente. Nous nous attacherons essentiellement alors dans la suite à indiquer quelles sont les différences.

Nous allons maintenant voir quels principes mathématiques sous-jacents permettent de rendre opérationnel ces principes de désignation.

3 Les interprétations

A la suite de ce qui précède, il nous faut étudier les choix faits dans la numération parlée en France. Quels sont-ils ? Y a-t-il plusieurs options ? En quoi sont-ils mathématiquement nécessaires ?

Rappelons que nous employons le mot interprétation pour mettre en avant le fait que celle-ci est une construction du chercheur. En outre, nous utilisons le mot interprétant dans une acception relativement naïve de la sémiotique de Peirce, c'est-à-dire sans utiliser toutes les ressources que celle-ci comporte. C'est pourquoi nous préférons ne pas employer le mot interprétant dans la formulation du résultat de nos recherches. Cependant, comme dans l'analyse de la numération chiffrée, nous distinguons dans l'interprétant les principes mathématiques du choix des representamens, ici en langue française. Dans ce paragraphe, nous indiquons trois interprétations différentes qui font écho aux trois analyses syntaxiques précédentes. Ces interprétations comportent deux parties : tout d'abord la première partie de l'interprétant, les éléments plus particulièrement mathématiques (§3.1), ensuite la deuxième partie, le choix des representamens (§3.2).

Pour les deux premières interprétations, nous avons choisi de mettre en annexe certains éléments qui précisent nos analyses afin de ne pas alourdir la lecture et mettre ainsi en relief les points essentiels. Ainsi, les annexes détaillent le processus de définition des principes mathématiques, indiquent des algorithmes qui permettent de construire les representamens à partir de ces principes et donne un éclairage sur les choix des appuis/appuyants

3.1 La première partie de l'interprétant

Nous allons voir quels principes mathématiques sous-jacents nous permettent de rendre opérationnels les principes de désignation dégagés dans les analyses syntaxiques du paragraphe 2. L'élaboration des définitions des types de numération se fonde en particulier sur les principes d'exhaustivité (tous les entiers doivent pouvoir avoir un nom), de non redondance (un entier n'a qu'un seul nom) et de non ambiguïté (un nom ne désigne qu'un seul nombre) auxquels doit se conformer *a minima* une numération. A titre indicatif, nous indiquons ici aussi les choix faits dans la numération parlée en France en ce qui concerne les

⁶⁵ D'ailleurs l'orthographe, deux cents, trois cents, etc. (le « s » pris par cent) peut aller dans le sens du cardinal et non de l'ordinal.

appuis ou repérants. Leur étude fait partie de la deuxième partie de l'interprétant qui est entreprise dans le paragraphe 3.2 (et complétée en annexe).

Nous adoptons la convention suivante : le representamen est noté en italique, par exemple $p_i(n)$, le nombre qu'il désigne ne l'est pas, par exemple $p_i(n)$.

a. L'interprétation arithmétique multiplicative

Les principes

En considérant l'analyse syntaxique précédente, nous posons que le principe général constitutif d'une numération arithmétique avec appui multiplicatif qui permet de relier un nombre à son representamen est le suivant :

Soit la suite (M_n) , n entier strictement positif, la suite croissante de ces nombres d'appui multiplicatif. A chacun, on associe la suite croissante des appuyants multiplicatifs $(p_i(n))$ et la suite croissante des appuyants additifs $(s_j(n))$ de sorte que la concaténation $p_i(n) M_n s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n) M_n p_i(n)$ désigne le nombre $p_i(n) \times M_n + s_j(n)$.

Pour fixer les idées, prenons l'exemple de l'appui multiplicatif désigné par cent dans notre numération parlée en France. Ses appuyants multiplicatifs sont les nombres de un à neuf, tandis que ses appuyants additifs sont les nombres de zéro à quatre-vingt-dix-neuf⁶⁶. Ce principe seul n'assure pas une non ambiguïté, une exhaustivité et une non redondance au système. Notre méthode va consister à chercher quels sont les principes mathématiques qui rendent non ambigu, non redondant et exhaustive le système de désignation d'un nombre. Ceci va nous amener en particulier à pouvoir ensuite questionner les choix des nombres d'appui additifs et multiplicatifs faits en français. Le respect de ces trois principes impose des contraintes. Cette étude est donnée en annexe. Elle conduit à ajouter à l'encadré précédent les règles suivantes qui permettent de définir une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs :

Les appuis et appuyants doivent vérifier :

- (1) La suite $(s_j(n))$ est constituée des entiers naturels de 1 à $M_n - 1$. On note $s(n)$ son maximum.
- (2) Pour tout n , les nombres $p_i(n)$ sont en nombre fini, ils peuvent être rangés selon une progression arithmétique de raison un à partir de un. On note $p(n)$ son maximum.
- (3) $p(n)$, le maximum de la suite $(p_i(n))$ est tel que $M_{n+1} = (p(n)+1) \times M_n$.
- (4) Les representamens M_n des nombres M_n ainsi que les representamens $s_j(1)$ sont définis de manière conventionnelle et non redondante.
- (5) Principes de récurrence :
 - comme $s_j(n)$ est strictement inférieur à M_n , il sera obtenu via une décomposition analysable en terme de division euclidienne de $s_j(n)$ par un appui multiplicatif strictement inférieur à M_n . Le procédé de concaténation est appliqué alors pour obtenir $s_j(n)$.
 - en imposant de plus l'inégalité $p_i(n) \leq M_n$ les representamens $p_i(n)$ des nombres $p_i(n)$ peuvent aux aussi être définis par un procédé identique au précédent.

⁶⁶ Nous avons déjà signalé que l'absence de representamen accolé à cent signifiait tantôt un (appuyant multiplicatif), tantôt zéro (appuyant additif).

Cet ensemble, l'encadré et les cinq règles, définissent dans le cadre de cette thèse une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs, que nous nommerons parfois de manière plus courte « numération arithmétique multiplicative ». Les trois premières règles permettent au système d'être exhaustif et non ambigu, elles reviennent à choisir la division euclidienne, ce choix est commenté en annexe. La quatrième permet d'amorcer un procédé de définition des désignations des nombres de proche en proche. La cinquième indique comment obtenir les appuyants de chaque appui multiplicatif. A noter cependant que pour les appuyants additifs d'un certain appui multiplicatif M_n , le fait de décrire tous les entiers de 1 à M_n entraîne que leur représentant a déjà été défini par le système de numération. Il n'en est pas de même pour les appuyants multiplicatifs $p_i(n)$. En effet, l'inégalité $p_i(n) \leq M_n$ n'est imposée que pour ne pas avoir à introduire de nouveaux représentants qui pourraient alors être en concurrence avec ceux introduits ultérieurement par le système, menant à une redondance de la numération. Par ailleurs, rien n'oblige à ce que $p_i(n)$ décrivent les entiers de 1 à M_{n-1} comme pour les appuyants additifs : la suite peut s'arrêter avant.

Comparaison avec une échelle de numération

Les règles (4) et (5) permettent de décrire l'algorithme sur lequel s'appuie la mise en signe⁶⁷. Elles mettent en avant une élaboration du système nécessairement de proche en proche, en partant des premiers nombres. Les intervalles de nombre qui doivent être définis sont successivement inclus dans: $[[1 ; M_1]]$ ⁶⁸, $[[1 ; M_2]]$, ..., $[[1 ; M_n]]$, sachant que $M_{n+1} \leq M_n^2$. L'élaboration de l'égalité permettant la mise en signes d'un nombre x se fait par récurrence à partir du reste de la division euclidienne de x par le plus grand nombre d'appui multiplicatif qui lui est inférieur : on établit l'égalité traduisant la division euclidienne de ce reste par le plus grand nombre d'appui multiplicatif qui lui est inférieur et ainsi de suite. On obtient alors les égalités :

$x = q_{x1} M_{x1} + r_{x1}$, puis $r_{x1} = q_{x2} M_{x2} + r_{x2}$ etc. On obtient finalement $x = \sum_{i=1}^n q_{xi} M_{xi} + r_{xn}$, avec

la condition (α) $q_{xi} < M_{xi}$ et $r_{x1} < M_{xn}$. Cette égalité est à rapprocher de l'égalité obtenue

par l'échelle de numération $x = \sum_{i=0}^n x_i M_i$, en posant $M_0 = 1$, avec la condition $x_i < M_i$.

Elles sont mathématiquement équivalentes, cependant notons que pour être une suite de nombres d'appuis multiplicatifs, l'échelle de numération doit remplir les conditions supplémentaires suivantes : $M_{n+1} \leq M_n^2$ et M_{n+1} multiple de M_n . Ceci justifie *a posteriori* le fait de ne pas être parti de la théorie des langages pour définir des modèles pour les numérations parlées : nous n'aurions pas pu envisager ces deux relations entre les appuis multiplicatifs comme inhérentes à une numération parlée.

Indication des choix pour la numération parlée en France

1^{er} choix : M_1 désigné par cent, M_2 par mille, M_3 par million, M_4 par milliard.

2^{ème} choix : M_1 désigné par dix, M_2 par cent, M_3 par mille, M_4 par million et M_5 par milliard.

Ces choix sont discutés dans le paragraphe 3.2 concernant la deuxième partie de l'interprétant.

⁶⁷ Un algorithme de construction associé qui éclaire cette mise en signes est indiqué en annexe.

⁶⁸ Rappelons qu'on note $[[a, b]]$, les nombres entiers de l'intervalle $[a, b]$.

b. L'interprétation arithmétique additive

Nous donnerons deux descriptions pour l'interprétation arithmétique additive : la première choisit les principes les plus simples ; la seconde tente de plus de rendre compte de relations entre les appuis additifs qui sont décomposés en plusieurs suites.

Les principes (1^{ère} description)

Voici la définition d'une numération arithmétique avec appuis additifs.

Soit la suite (A_n) , n entier strictement positif, une suite croissante de nombres d'appui additif. A chacun, on associe la suite croissante des appuyants additifs $(s_j(n))$ de sorte que la concaténation $A_n s_j(n)$ ⁶⁹ désigne le nombre $A_n + s_j(n)$.

(1) Pour tout $n > 0$, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2A_n$

Pour tout $n > 0$, $s_j(n)$ décrit tous les entiers de l'intervalle $[[1 ; A_{n+1} - A_n - 1]]$.

Soit x un nombre entier quelconque, la décomposition additive est obtenue par soustraction entre x et A_k , A_k étant le plus grand nombre d'appui inférieur à x . On a donc $x = A_k + s_{j(x)}(k)$ et ainsi le représentant de x est $s_{j(x)}(k) A_k$.

Cet ensemble constitue les principes fondateurs qui définissent une numération arithmétique avec appuis additifs : c'est la première partie de l'interprétant. Son élaboration est justifiée grâce à nouveau aux principes de non redondance, d'exhaustivité et de non ambiguïté qui entraînent de respecter des contraintes. Elle est donnée en annexe et à sa suite nous donnons aussi un algorithme de construction qui permet de comprendre son fonctionnement.

Indication des choix pour la numération parlée en France

1^{er} choix

Il s'agit du choix le plus « régulier » :

dix pour A_1 le premier appui additif, vingt pour A_2 , trente pour A_3 , quarante pour A_4 , cinquante pour A_5 , soixante pour A_6 , soixante-dix (septante) pour A_7 , quatre-vingts (octante, huitante) pour A_8 , quatre-vingt-dix (nonante) pour A_9 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

2^{ème} choix

Pour les nombres inférieurs à mille et pour tenir compte de la rupture d'énonciation des dizaines après soixante, une deuxième possibilité nous est offerte pour notre système de numération oral qui est plus cohérent avec la numération parlée en France.

On obtient dix pour A_1 le premier appui additif, vingt pour A_2 , trente pour A_3 , quarante pour A_4 , cinquante pour A_5 , soixante pour A_6 , quatre-vingts pour A_7 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3^{ème} choix

Ici, nous prenons en compte le fait que les nombres inférieurs à vingt peuvent constituer la première « vingtaine », vingtaine qui peut se retrouver à partir de soixante.

On obtient vingt pour A_1 le premier appui additif, trente pour A_2 , quarante pour A_3 , cinquante pour A_4 , soixante pour A_5 , quatre-vingts pour A_6 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

⁶⁹ Ou bien la concaténation $s_j(n) A_n$.

Un 4^{ème} choix consiste à prendre pour appuis additifs la suite vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix (septante), quatre-vingts (octante), quatre-vingt-dix (nonante), puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

Les principes (2^{ème} description)

Nous proposons maintenant une description d'une numération arithmétique avec appuis additifs qui va fournir un autre moyen d'analyser les choix faits en français pour les appuis et appuyants additifs (2^{ème} partie de l'interprétant étudiée dans le paragraphe 3.2).

On considère la suite (A_i) des appuis additifs introduite pour définir la numération arithmétique additive comme composée de plusieurs suites (ou groupements) d'appui additifs avec les mêmes appuyants. L'idée vient de la possibilité de considérer dans la numération parlée en France l'appui A_1 (dix) et ses appuyants de un à neuf qui permettent d'obtenir les autres appuis de la même « famille » A_2, A_3, A_4, A_5 ; l'appui soixante (A_6) et ses appuyants de un à dix-neuf qui permettent d'obtenir l'autre appui de la même « famille » A_7 (quatre-vingts) ; l'appui A_8 (cent) et ses appuyants de un à quatre-vingt-dix-neuf qui permettent d'obtenir les autres appuis de la même « famille » A_9 (deux cents), A_{10} (trois cents), A_{11} (quatre cents) A_{12} (cinq cents), A_{13} (six cents), A_{14} (sept cents), A_{15} (huit cents), A_{16} (neuf cents). A partir d'une notion de groupement d'appui, nous allons dégager des principes généraux qui permettent de donner une définition d'une numération arithmétique additive équivalente à celle donnée précédemment.

Pour ce faire nous introduisons une suite de couples (G_k, n_k) , k entier, G_k étant les groupements d'appui, que nous allons relier à la suite (A_i) des appuis additifs introduite pour définir la numération arithmétique additive.

Afin de mieux comprendre cette nouvelle description, nous allons l'élaborer en l'illustrant avec un des choix possible pour la numération parlée en France.

Description des principes avec les couples (G_k, n_k) .

Nous utilisons la suite (G_k) , qui génère les n_k appuis additifs $G_k, 2G_k, \dots, n_k G_k$. Il est important de signaler que si nous les notons avec un produit, le representamen n'est pas *a priori* une concaténation des deux facteurs et n'est pas interprété ici comme un produit. La notation multiplicative est pour nous une économie d'écriture pour une numérotation de ces appuis. Nous allons indiquer un algorithme de construction du système de numération qui permet de donner la description avec les couples (G_k, n_k) .

G_1 est le premier groupement d'appui utilisé pour décrire notre organisation des nombres. Le deuxième est $G_1 + G_1$ que nous notons $2G_1$, le suivant est $2G_1 + G_1$ que nous notons $3G_1$, etc., jusqu'à $n_1 G_1$ qui désigne ainsi le nombre $(n_1 - 1)G_1 + G_1$. n_1 est donc le nombre de fois que G_1 est additionné successivement (à partir e zéro).

Si on considère le couple d'entiers non nuls (G_1, n_1) , $n_1 > 1$, on définit les representamens des nombres $G_1, 2G_1, 3G_1, \dots, n_1 G_1$ ainsi que ceux de l'intervalle $[[1, G_1 - 1]]$ par des mots de base additifs désignant des appuis additifs et des appuyants additifs. G_1 est donc aussi un appui additif. Il suffit ensuite d'accoler les representamens de l'ensemble $\{G_1, 2G_1, 3G_1, \dots$

, $(n_1-1)G_1$ } à un representamen d'un nombre de l'intervalle $[[1, G_1-1]]$ pour désigner (par additivité) n'importe quel nombre entier de l'intervalle $[[1, n_1 G_1-1]]$. Un des choix possible pour la numération parlée en France est de prendre dix pour G_1 et six pour n_1 . Dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante sont les representamens de $G_1, 2G_1, 3G_1, \dots, 6G_1$. Ceux de l'intervalle $[[1, G_1-1]]$ sont un, deux, trois, ..., neuf. On peut ainsi définir par concaténation les representamens des nombres jusqu'à cinquante-neuf (à des exceptions près, les concaténations étant plus ou moins altérées ou plus ou moins facilement identifiables par une analyse morphologique).

D'une manière générale, les premiers appuyants additifs sont : un, ..., G_1-1 ,

et les premiers appuis additifs sont :

$$A_{1,1}=G_1, A_{1,2}=2G_1, A_{1,3}=3G_1, \dots, A_{1,n_1-1}=(n_1-1)G_1, A_{1,n_1}=n_1G_1$$

L'appui $n_1 G_1$ se distingue par le fait qu'il n'a pas nécessairement les mêmes appuyants que les appuis qui lui sont inférieurs. En effet à partir de ce nombre, c'est un nouveau groupement d'appui qui est utilisé, G_2 , qui va être successivement additionné n_2 fois. On considère donc un deuxième couple d'entiers non nuls (G_2, n_2) , $n_2 > 1$. On définit les representamens des appuis additifs $n_1 G_1 + G_2, (n_1 G_1 + G_2) + G_2$ noté $n_1 G_1 + 2G_2, \dots, n_1 G_1 + n_2 G_2$ par des mots de base additifs. Il suffit ensuite d'accoler (concaténation) un nom de base désignant un nombre de l'ensemble des appuis additifs $\{n_1 G_1, n_1 G_1 + G_2, n_1 G_1 + 2G_2, n_1 G_1 + 3G_2, \dots, n_1 G_1 + (n_2-1)G_2\}$ à un nom désignant un nombre de $[[1, G_2-1]]$ (la deuxième série d'appuyants additifs) pour désigner par additivité n'importe quel nombre de l'intervalle $[[n_1 G_1, n_1 G_1 + n_2 G_2 - 1]]$.

Pour poursuivre notre exemple, nous prenons vingt pour G_2 et deux pour n_2 . Quatre-vingts et cent désignent les nouveaux appuis additifs $n_1 G_1 + G_2$ (soixante plus vingt) et $(n_1 G_1 + G_2) + G_2$ (quatre-vingts plus vingt). Comme G_2 est inférieur à soixante ($n_1 G_1$, le plus grand appui obtenu avec G_1 uniquement dans la première boucle), on peut choisir pour les nombres de l'intervalle $[[1, G_2-1]]$ les representamens déjà définis, c'est-à-dire un, eux, trois, ..., dix-neuf. On peut ainsi définir par concaténation les representamens des nombres jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf (à des exceptions près, les concaténations étant plus ou moins altérées ou plus ou moins facilement identifiables par une analyse morphologique).

On obtient ainsi les n_2 nombres d'appui additif suivants :

$$A_{2,1}=n_1 G_1 (=A_{1,n_1}), A_{2,2}=n_1 G_1 + G_2, A_{2,3}=n_1 G_1 + 2G_2, \dots, A_{2,n_2-1}=n_1 G_1 + (n_2-1)G_2, A_{2,n_2}=n_1 G_1 + n_2 G_2.$$

Le deuxième couple d'entiers non nuls (G_2, n_2) , $n_2 > 1$ sert à désigner des nombres que le premier algorithme n'a pas encore considérés, il prend le relais à partir de $n_1 G_1$. Cependant pour être viable, les nombres de $[[1, G_2-1]]$ doivent déjà avoir été désignés. Ceci nous amène pour $A_{2,1}$ et $A_{2,2}$ à l'inégalité $n_1 G_1 + G_2 \leq 2n_1 G_1$, c'est-à-dire à $G_2 \leq n_1 G_1$. Par construction, (1) est alors vérifié pour tout couple $A_{2,i}, A_{2,i+1}$.

On obtient ainsi un procédé de description des entiers naturels à l'aide de couples d'entiers strictement supérieurs à 1, (G_k, n_k) , tels que $G_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} n_i G_i$, permettant de dénommer au fur

et à mesure les nombres des intervalles $I_1 = [[1, n_1 G_1 - 1]]$ et $I_k = [[\sum_{i=1}^{k-1} n_i G_i, -1 + \sum_{i=1}^k n_i G_i]]$,
uniquement avec des principes additifs et des mots de base additifs. Ces intervalles forment
une partition des entiers naturels non nuls. Leur amplitude est $n_k G_k$.

On obtient successivement les nombres d'appui additifs :

...

$$A_{k,1} = A_{k-1,n_{k-1}}, A_{k,2} = A_{k-1,n_{k-1}} + G_k, A_{2,3} = A_{k-1,n_{k-1}} + 2G_k, \dots, A_{k,n_k} = A_{k-1,n_{k-1}} + n_k G_k$$

....

L'inégalité $G_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} n_i G_i$ traduit sur les couples (G_k, n_k) ce que l'inégalité (1) indiquait
pour les A_n (ici notés $A_{k,i}$).

Indication des choix exprimés avec les couples (G_k, n_k) .

Le 1^{er} choix

$G_1 =$ dix, $G_2 =$ cent, $G_3 =$ mille, $n_1 =$ dix et $n_2 =$ neuf. Ceci correspond aux appuis additifs, dix (G_1), vingt ($G_1 + G_1$ noté $2G_1$), trente ($2G_1 + G_1$ noté $3G_1$), quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix ($8G_1 + G_1$ noté $9G_1$), cent ($9G_1 + G_1 = n_1 G_1$), deux cents ($n_1 G_1 + G_2$), trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents ($n_1 G_1 + (n_2 - 1)G_2$), mille ($n_1 G_1 + n_2 G_2$), deux mille ($n_1 G_1 + n_2 G_2 + G_3$)

Le 2^{ème} choix : (c'est celui qui a servit à illustrer la définition ci-avant).

Pour les nombres inférieurs à mille, nous pouvons considérer que $G_1 =$ dix, $G_2 =$ vingt, $G_3 =$ cent, $n_1 =$ six, $n_2 =$ deux et $n_3 =$ neuf. Ceci correspond aux appuis additifs, dix (G_1), vingt ($G_1 + G_1$ noté $2G_1$), trente ($2G_1 + G_1$ noté $3G_1$), quarante, cinquante ($4G_1 + G_1$ noté $5G_1$), soixante ($5G_1 + G_1 = n_1 G_1$), quatre-vingts ($n_1 G_1 + G_2$), cent ($n_1 G_1 + 2G_2 = n_1 G_1 + n_2 G_2$), deux cents ($n_1 G_1 + n_2 G_2$) + G_3 , trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille ($(n_1 G_1 + n_2 G_2) + 9G_3 = (n_1 G_1 + n_2 G_2) + n_3 G_3$).

Le 3^{ème} choix :

$G_1 =$ vingt, $n_1 =$ un ; $G_2 =$ dix, $n_2 =$ quatre ; $G_3 =$ vingt, $n_3 =$ deux, $G_4 =$ cent, $n_4 =$ neuf. Ceci correspond aux appuis additifs, vingt ($G_1 = n_1 G_1$), trente ($n_1 G_1 + G_2$), quarante ($n_1 G_1 + 2G_2$), cinquante ($n_1 G_1 + 3G_2$), soixante ($n_1 G_1 + 4G_2 = n_1 G_1 + n_2 G_2$), quatre-vingts ($(n_1 G_1 + n_2 G_2) + G_3$), cent ($(n_1 G_1 + n_2 G_2) + 2G_3 = n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3$), deux cents ($(n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3) + G_4$), trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille ($(n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3) + 9G_4 = n_1 G_1 + n_2 G_2 + n_3 G_3 + n_4 G_4$).

D'autres choix sont possibles encore par exemple si on considère qu'à partir de soixante, le groupement de vingt est additionné à trois reprises. Nous allons discuter de ces choix dans le §3.2.

c. L'interprétation ordinale avec repérants

Les principes

Voici alors le principe de construction d'une numération ordinale : il permet de relier un nombre à son représentant.

Soit la suite (A_n) , n entier strictement positif, une suite croissante de nombres désignés par des repérants. A chacun, on associe la suite croissante $(s_j(n))$ de nombres désignés par des comptants. La concaténation $A_n s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n) A_n$ désigne le $s_j(n)$ ^{ième} successeur de A_n .

Cette description est formellement identique à celle faite pour les appuis additifs, la différence étant que le nombre est défini non par une somme mais par son rang dans deux suites « imbriquées » de repérants et comptants.

Pour une numération exhaustive, non ambiguë, non redondante, on doit avoir ici aussi

(1) Pour tout $n > 0$, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2A_n$

Indication des choix pour la numération parlée en France

Nous avons les mêmes possibilités que pour l'interprétation (additive) précédente, les repérants jouant le rôle des appuis additifs.

1^{er} choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2 , trente pour A_3 , quarante pour A_4 , cinquante pour A_5 , soixante pour A_6 , septante (soixante-dix) pour A_7 , octante (quatre-vingts) pour A_8 , nonante (quatre-vingt-dix) pour A_9 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

2^{ème} choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2 , trente pour A_3 , quarante pour A_4 , cinquante pour A_5 , soixante pour A_6 , quatre-vingts pour A_7 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3^{ème} choix

vingt pour A_1 le premier repérant, trente pour A_2 , quarante pour A_3 , cinquante pour A_4 , soixante pour A_5 , quatre-vingts pour A_6 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3.2 La deuxième partie de l'interprétant

L'étude faite en 3.1 concerne la première partie de l'interprétant, la partie mathématique. Nous amorçons ici le mouvement des mathématiques vers les signes afin d'appréhender les spécificités de la mise en signes dans la numération parlée en français : c'est la deuxième partie de l'interprétant, l'incarnation de ces principes dans la langue.

Pour chaque interprétation, elle concerne tout d'abord des éléments de réponses éclairant les choix faits pour les appuis/appuyants repérants/comptants que nous avons indiqués par ailleurs qui permettaient de classer la numération parlée en France dans un des trois types : arithmétique multiplicative, arithmétique additive ou ordinale (avec repérants). En ce qui concerne ce premier volet, des éléments complémentaires sont fournis en annexe.

Ensuite sont abordées les questions sur le choix des representamens, en particulier leur phonétique et leur ordre d'énonciation.

a. L'interprétation arithmétique multiplicative

a.1 Le choix des appuis et des appuyants

Nous avons vu que dans la numération orale en français deux choix sont possibles pour la suite des appuis multiplicatifs :

1^{er} choix : M_1 désigné par cent, M_2 par mille, M_3 par million, M_4 par milliard.

2^{ème} choix : M_1 désigné par dix, M_2 par cent, M_3 par mille, M_4 par million et M_5 par milliard.

Dans les justifications données en annexe, nous détaillons des arguments linguistiques pour les éclairer, la segmentation, la « lisibilité » de cette segmentation et des concaténations, mais aussi l'utilisation d'un nombre limité de representamens non analysables en termes de concaténation (c'est-à-dire un nombre limité de mots à retenir pour le vocabulaire de base de la numération). En particulier, nous indiquons que l'utilisation au maximum de deux niveaux de segmentation permet une lisibilité plus claire de ces dernières. Ceci pourrait éclairer en particulier l'utilisation des appuis multiplicatifs (principaux) mille, million, milliard, etc., en progression géométrique de raison mille. C'est par ce biais que nous retrouvons des principes de base mille à partir d'une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs, sans être parti initialement des principes de base mille. Par ailleurs, ces choix nécessitent une désignation des nombres inférieurs à mille. En ne considérant que des principes de base mille, ces désignations sont théoriquement arbitraires. Cependant l'analyse morphologique nous permet de voir qu'il n'en est rien. Pour ces nombres, nous pouvons notamment modéliser les principes sous-jacents à nouveau à l'aide d'un appui multiplicatif, celui désigné par cent. Ce qui requiert cette fois-ci une définition des representamens des nombres inférieurs à cent. Le choix de cent comme premier appui multiplicatif pose en effet le problème de nécessiter quatre-vingt-dix-neuf appuyants additifs. Pour résoudre ce problème, tout en restant dans une interprétation multiplicative de la numération, nous proposons le choix de l'appui multiplicatif désigné par dix. Il met en évidence de nombreuses irrégularités, en particulier la présence « parasite » d'un appui multiplicatif « lacunaire » vingt ainsi que la spécificité des nombres de onze à seize.

Ainsi est-il possible d'interpréter notre numération parlée en France comme une numération arithmétique avec appuis multiplicatifs. Pour les nombres supérieurs à mille, les choix faits permettent d'y voir des principes de base mille (M_1 désigné par mille comme premier appui multiplicatif), et pour les nombres inférieurs à mille des principes de base dix (M_1 désigné par dix comme premier appui multiplicatif) ou non (M_1 désigné par cent comme premier appui multiplicatif). Les deux systèmes, concernant les nombres inférieurs à mille et ceux supérieurs à mille, sont « compatibles ». En effet, le deuxième permet de construire un système de désignation des nombres inférieurs à mille qui est nécessaire au premier. Mais de nombreuses irrégularités (surtout pour les nombres inférieurs à cent) permettent de penser que ces choix n'ont pas été faits à partir des principes mathématiques traduits ensuite en representamens oraux. Certains arguments linguistiques (concaténation, niveau de segmentation, étude morphologique, etc.) en lien avec la définition mathématique ont déjà été avancés pour éclairer les options prises en langue française. Pour mieux comprendre les liens entre les mathématiques et notre numération parlée nous allons regarder, comme pour la numération écrite chiffrée, le lien entre les principes exposés et la mise en representamens oraux dans notre langue.

a.2 Les choix liés à la constitution des representamens en langue française

En ce qui concerne les désignations pour le vocabulaire terminal de la numération (les mots de base), leur phonétique est arbitraire. Tout en soulignant des irrégularités, l'étude morphologique a permis d'interpréter la numération parlée en France comme une numération

arithmétique avec appuis multiplicatifs. Ceci a été développé précédemment, nous n'y revenons pas ici.

En ce qui concerne la notion de tactème d'ordre, elle n'est pas à considérer indépendamment de la segmentation. En effet, la présence de ce tactème est inhérente aux principes mathématiques fondateurs. Une fois reconnue la segmentation, c'est-à-dire repérées les désignations des nombres d'appui multiplicatif, nous avons en effet les deux possibilités indiquées dans les principes : la concaténation $p_i(n) M_n s_j(n)$ ou bien la concaténation $s_j(n) M_n p_i(n)$ pour désigner le nombre $p_i(n) \times M_n + s_j(n)$. Ce qui donne deux choix d'ordre d'énonciation. Fixer un choix permet en pratique de rendre la numération non ambiguë : différencier cent deux de deux cents. Il est difficile de justifier ici le choix de l'un ou l'autre. Nous constatons que dans notre numération parlée nous énonçons l'appuyant multiplicatif avant l'appui, et l'appuyant additif après⁷⁰. Parallèlement, nous constatons qu'en français les noms des nombres sont aussi adjectifs numéraux⁷¹, et la règle est qu'ils précèdent le nom. Ainsi, deux cents pourrait se comprendre en considérant cent comme un nom (synonyme de centaine) et donc donnerait deux centaines, ce qui ferait référence au double de cent. Bien entendu, nous pourrions aussi entendre cent comme adjectif et deux comme nom dans cent deux (il y aurait ainsi cent « deuzaines »), mais l'usage des petits nombres comme adjectifs numéraux est plus fréquent. Nous n'allons pas plus loin dans notre analyse et relevons cette proximité entre les désignations des nombres et la langue parlée.

La segmentation est, elle aussi, inhérente aux principes mathématiques fondateurs. Cependant, nous avons indiqué une hiérarchie dans la segmentation, hiérarchie qu'il faut signifier dans l'énonciation du nombre.

Un premier niveau de segmentation concerne uniquement les nombres supérieurs à mille : il faut par exemple connaître la segmentation utilisée pour un nombre tel que trois cent vingt mille. Considérer que cent est du même niveau que mille, conduit à interpréter ce nombre en tant que $(trois \times cent) + (vingt \times mille)$, ce qui est erroné. L'interprétation « base mille » est à mettre en parallèle avec une mise en signes non ambiguë comportant les segmentations principales délimitées par les mots-segments principaux mille, million, milliard, etc.

Le deuxième niveau de segmentation concerne les nombres inférieurs à mille qui vont servir d'appuyant à chaque nombre-segment principal (appuis multiplicatifs principaux). Nous avons vu que deux choix sont possibles, avec chacun des spécificités. Si on considère un seul niveau de segmentation, le seul appui multiplicatif est cent. On ne tient pas compte de la morphologie des appuyants additifs (les nombres inférieurs à cent), les appuyants multiplicatifs étant les nombres de un à neuf. Si on utilise deux niveaux de segmentation, on considère deux appuis multiplicatifs, dix et cent. Les appuyants sont les mêmes pour les deux, les nombres de un à neuf, et on retrouve des principes de base dix.

Le repérage de l'un ou l'autre niveau de segmentation est nécessaire à la compréhension de la numération et nous n'avons trouvé aucun indicateur linguistique qui permet de le signifier dans l'énonciation, mise à part une hiérarchie des segmentations. En effet, l'ordre d'énonciation des segments est *a priori* arbitraire. Le choix fait dans notre numération parlée, quel que soit le niveau de segmentation, est d'énoncer les segments par ordre décroissant des appuis auxquels ils se réfèrent. Le type de classification, c'est-à-dire une classification monotone des appuis, peut être mis en parallèle avec le procédé de construction « par récurrence », de proche en proche. Cependant le choix de l'ordre décroissant n'est pas cohérent avec le sens de construction des désignations des nombres, des plus petits aux plus

⁷⁰ A noter les exceptions des nombres de onze à seize. Mais ici, leur formation peut ne pas être issue d'un procédé de concaténation. Nous y reviendrons dans le troisième interprétant.

⁷¹ Sauf million et milliard qui sont des noms. Remarquons en outre que les codes d'écritures avant sa réforme ne comportaient pas de trait d'union.

grands. Nous verrons que des processus de mise en signes « concrets » du cardinal d'une collection suivent par contre cet ordre.

b. L'interprétation arithmétique additive

b.1 Le choix des appuis additifs et des appuyants

Nous exposons tout d'abord des principes d'économie de mots. Nous les avons élaborés à partir de la description en termes de couples (G_k, n_k) . Ils vont nous donner un éclairage linguistique sur les différents choix de la numération en France.

Les principes linguistiques de maximalité forte et faible

Pour éclairer les choix faits pour la numération parlée en français, nous proposons d'introduire l'idée d'un principe linguistique de maximalité dans l'utilisation des dénominations anciennes. Ce principe consiste à tenter de désigner le maximum de nombres à partir du minimum de mots, en conservant le principe d'additivité. Ceci va jouer sur les choix successifs des couples (G_k, n_k) .

Supposons G_1 choisi et donc des mots de base désignant les nombres entiers de l'intervalle $[[1, G_1]]$. Pour le choix de n_1 , le principe linguistique de maximalité va consister à essayer de désigner tous les nombres de $[[1, n_1 G_1 - 1]]$ avec ces mots. Dans notre interprétation, cela entraîne de déterminer un nom pour les appuis additifs $2G_1, 3G_1, \dots, n_1 G_1$. Il suffit pour cela de former un mot composé à partir d'un des n_1 premiers entiers et le nom de G_1 . Notons la parenté avec la première interprétation qui utilise les appuis multiplicatifs. Mais à la différence de cette dernière, les nombres $2G_1, 3G_1, \dots, n_1 G_1$ ne sont pas pris *a priori* comme appuis multiplicatifs. L'idée ici est de les numéroter et pour les nommer d'utiliser les noms déjà à disposition. Il suffit ainsi de prendre $n_1 \leq G_1$. Le principe de maximalité sera de prendre $n_1 = G_1$, c'est-à-dire de numéroter en utilisant tous les noms des nombres inférieurs à G_1 . Ceci peut fournir une explication à la morphologie des noms des six premières dizaines. Quarante indique la dizaine numéro quatre, elle est obtenue à partir de la précédente par addition de dix, addition réitérée à partir de la première qui est l'appui additif principal.

Essayons maintenant de voir les incidences sur le choix de G_2 . D'après ce même principe, on doit avoir $G_2 \leq n_1 G_1$ pour pouvoir nommer les nombres entre $n_1 G_1$ et $n_1 G_1 + G_2$. Le principe de maximalité « forte » entraîne donc que $G_2 = n_1 G_1$.

Pour le choix de n_2 , le principe de maximalité impose de le prendre égal à $n_1 G_1$. En effet tous ces nombres ont déjà été désignés auparavant. Mais on peut aussi penser à un principe de maximalité faible qui demande de réutiliser uniquement les premiers mots de base, ceux désignant les nombres entiers de l'intervalle $[[1, G_1]]$. Mais si auparavant on a pris $G_2 = n_1 G_1$, il s'agit de numéroter à partir de $n_1 G_1$. On obtient alors $n_2 = G_1 - 1$.

En généralisant, une fois le couple (G_k, n_k) utilisé pour définir les nombres jusqu'à

$-1 + \sum_{i=1}^k n_i G_i$, nous disposons donc de deux principes pour le choix du couple suivant (G_{k+1}, n_{k+1}) . Le principe de maximalité forte consiste à réutiliser tous les (noms des) nombres jusqu'à $-1 + \sum_{i=1}^k n_i G_i$, celui de maximalité faible à n'utiliser que les nombres de $[[1, G_1]]$ ou $[[1, G_1 - 1]]$.

Les éclairages sur les choix exprimés avec les couples (G_k, n_k)

Le 1^{er} choix

$G_1 =$ dix, $G_2 =$ cent, $G_3 =$ mille, $n_1 =$ dix et $n_2 =$ neuf.

On considère ici, que soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix sont des appuis additifs (désignant les nombres $7G_1$, $8G_1$ et $9G_1$) sans se préoccuper de leur morphologie (ni de celles de leurs successeurs). L'alternance des principes de maximalité forte pour les G_i et faible pour les n_i permet d'éclairer la constitution des representamens dans la numération orale « régulière » en français de Belgique et de Suisse.

Remarquons que la maximalité forte entraîne que le dernier appui généré par un groupement d'appui G_{k-1} devienne le nouveau groupement d'appui G_k . Or dès que $k > 1$, n_k donne le nombre de fois que G_k est ajouté successivement à partir du dernier appui généré par un groupement d'appui. C'est donc $1+n_k$ et non n_k qui donne le nombre de fois qu'apparaît en fait G_k . Ainsi $n_2 =$ neuf, mais en fait le nombre désigné par $G_2 =$ cent apparaît dix fois : il est répété neuf fois à partir de $G_2 = n_1 G_1$.

Si cette alternance continue au-delà de mille, on obtient la structure de base dix. Ceci oblige à donner un nouveau nom pour « dix mille », « cent mille », etc. Ce n'est pas le choix qui a été fait dans les numérations parlées en langue française. En fait, à partir de mille, pour les n_k , un choix intermédiaire a été fait entre la maximalité forte et faible. L'appui est répété neuf cent quatre-vingt-dix-neuf fois. Comme l'appui G_k est toujours le dernier appui généré par le groupement d'appui G_{k-1} précédent (maximalité forte), les différents appuis G_k apparaissent ainsi mille fois. D'où $G_4 =$ million, $G_5 =$ milliard, etc. et $n_k =$ neuf cent quatre-vingt-dix-neuf pour $k > 2$. Cette dernière remarque permet d'éclairer les choix pour les nombres supérieurs à mille. Nous retrouvons en particulier une structure de base mille.

Le 2^{ème} choix : (c'est celui qui a servit à illustrer la définition ci-avant).

Pour les nombres inférieurs à mille, nous pouvons considérer que $G_1 =$ dix, $G_2 =$ vingt, $G_3 =$ cent, $n_1 =$ six, $n_2 =$ deux et $n_3 =$ neuf.

Si $G_1 =$ dix, le choix de $n_1 =$ six ne peut pas s'expliquer par le principe de maximalité forte. Notons cependant que, mis à part vingt, le nom des premières dizaines garde bien trace de l'utilisation des noms des entiers de un à six. Pour $G_1 =$ dix et $n_1 =$ six, pourquoi $G_2 =$ vingt, puis pourquoi $n_2 =$ deux et $G_3 =$ cent ? Une fois choisi $G_1 =$ dix, $n_1 =$ six, le principe de maximalité forte aurait dû mener à $G_2 = n_1 G_1$ donc soixante, ce qui n'a pas été le cas. Nous pouvons faire l'hypothèse que $G_2 =$ vingt est la trace d'une autre numération telle que $G_1 =$ vingt, $n_1 =$ cinq et $G_2 =$ cent qui se superpose à celle décrite auparavant (jusqu'à mille), superposition rendue possible du fait que certains nombres de base additifs sont identiques : 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} dizaines correspondent aux 2^{ème}, 4^{ème}, 6^{ème}, 8^{ème} et 10^{ème} dizaines. Ceci nous mène alors vers le troisième choix : $G_1 =$ vingt, $n_1 =$ un ; $G_2 =$ dix, $n_2 =$ quatre ; $G_3 =$ vingt, $n_3 =$ deux, $G_4 =$ cent, $n_4 =$ neuf. Il peut être éclairé par les mêmes arguments, dès l'appui vingt, la superposition de deux systèmes de numération.

Dans le cadre de notre thèse, nous retenons qu'il est possible de faire une telle analyse, mais nous ne nous lui donnons pas le statut de cause, d'explication des choix faits dans notre langue. Nous retenons cependant que les particularités mises en évidence dans la numération

parlée en France par rapport à celle parlée en Belgique ou en Suisse pourraient s'expliquer par une superposition de deux logiques de numération : une avec un premier appui additif (principal) de dix, générant avec les appuyants additifs de un à neuf⁷² d'autres appuis additifs, une autre avec un premier appui additif (principal) de vingt, générant avec les appuyants additifs de un à dix-neuf⁷³ d'autres appuis additifs. Par la suite, dans ces deux logiques de numération, le deuxième appui additif principal est cent et il génère à l'aide des appuyants additifs de un à quatre-vingt-dix-neuf⁷⁴ d'autres appuis additifs. Nous retenons aussi une certaine proximité avec les principes mathématiques de la base.

Pour les nombres supérieurs à mille, nous avons $1+n_i = 10^3$ et $G_i = 10^{3i-6}$ pour $i > 3$, ce qui correspond mathématiquement au système de base mille que nous avons vu précédemment. En outre, une alternance de principe de maximalité « forte » pour les G_i et « faible » pour les n_i permet de retrouver les principes mathématiques de base dix pour les nombres inférieurs à mille. Cependant pour ceux-ci, des irrégularités sont à noter dans la formation des representamens dans la numération parlée en France. Nous avons émis alors l'hypothèse du chevauchement avec une numération utilisant $G_2 =$ vingt.

Nous sommes conscient qu'une analyse comparable peut être menée pour une numération multiplicative, les notations que nous avons prises en attestent. Cependant, nous avons voulons observer comment, dans la numération, les principes multiplicatifs pouvaient dériver de principes additifs quand il s'agit de réitérer une addition. C'est pourquoi nous avons recherché des arguments linguistiques et adopté la solution pratique consistant à numéroter les additions opérées. Ici ce sont bien des principes additifs qui sont considérés *a priori*.

Par ailleurs, d'autres choix sont à éclairer dans le système de numération parlée en France, choix liés à la constitution des representamens en français. C'est ce que nous faisons dans le paragraphe qui suit.

b.2 Les choix liés à la constitution des representamens en langue française

Le choix des representamens oraux pour les appuis additifs principaux est arbitraire, il en est de même pour les nombres inférieurs au premier appui.

En étudiant les autres contraintes liées à la mise en mots des principes d'une numération arithmétique additive, c'est-à-dire le passage des principes au système de representamens oraux utilisés, nous allons éclairer certains choix faits en France : pourquoi quarante-trois et non pas trois-quarante, pourquoi l'analyse morphologique de seize renvoie à six-dix et non pas à dix-six ? Comme dans l'interprétation précédent nous allons essayer de comprendre ces choix en considérant l'intelligibilité des representamens constitués. Cependant, nous n'avons pas *a priori* d'arguments concernant la « lisibilité de la segmentation » comme pour l'interprétation multiplicative. En effet, l'addition, seule opération en jeu, étant commutative les différents mots de base et appuis additifs peuvent être énoncés dans n'importe quel ordre. Pourtant un ordre est à relever, puisque pour les nombres supérieurs à dix-sept, l'appui additif est toujours énoncé avant l'appuyant. Nous allons formuler la même hypothèse avancée dans l'interprétation précédente. En français, les noms des nombres sont aussi adjectifs numéraux, et la règle est qu'ils précèdent le nom. Ainsi, deux-quarante pourrait se comprendre en considérant quarante comme un nom (synonyme de quarantaine) et donc donnerait deux quarantaines, ce qui ferait référence au double de quarante.

⁷² C'est-à-dire les nombres strictement inférieurs à ce premier appui additif « principal ».

⁷³ C'est-à-dire ici aussi les nombres strictement inférieurs à ce premier appui additif « principal ».

⁷⁴ C'est-à-dire les nombres strictement inférieurs à ce deuxième appui additif « principal ».

Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, pour les six premiers successeurs de dix, une analyse morphologique nous a amené à y voir une construction dans laquelle dix ou l'idée de dizaine est toujours indiqué en second : onze pour un/dix, douze pour deux/dix. L'hypothèse linguistique précédente n'est plus valable⁷⁵.

c. L'interprétation ordinale avec repérants

c.1 Le choix des repérants et comptants

Rappelons ces choix :

1^{er} choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2 , trente pour A_3 , quarante pour A_4 , cinquante pour A_5 , soixante pour A_6 , septante (soixante-dix) pour A_7 , octante (quatre-vingts) pour A_8 , nonante (quatre-vingt-dix) pour A_9 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

2^{ème} choix

dix pour A_1 le premier repérant, vingt pour A_2 , trente pour A_3 , quarante pour A_4 , cinquante pour A_5 , soixante pour A_6 , quatre-vingts pour A_7 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

3^{ème} choix

vingt pour A_1 le premier repérant, trente pour A_2 , quarante pour A_3 , cinquante pour A_4 , soixante pour A_5 , quatre-vingts pour A_6 , puis, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, mille.

Nous observons que nous pouvons interpréter la numération parlée en France comme une numération ordinale décrivant (au moins partiellement) des suites arithmétiques de raison dix ou/et vingt pour les nombres inférieurs à cent. En outre le choix fait est une numération ordinale qui n'est pas avec antériorité réflexive (Cauty, 1988). Autrement dit la suite des comptants est utilisée dans l'ordre croissant à partir du repérant qui la précède. Ainsi, par exemple « trente-deux », désigne le deuxième après trente et non le deuxième avant trente. Ce choix sera peu questionné par la suite car nous n'avons pas trouvé d'argument linguistique qui peut l'éclairer.

Par ailleurs, lorsqu'on prend le plus grand A_n possible à chaque fois, on obtient l'égalité $A_{n+1} = 2 A_n$, qui mène à la suite géométrique $A_n = 2^{n-1} A_1$. Quelles que soient les possibilités envisagées, les repérants de la numération parlée en français ne suivent pas cette progression. Ainsi, comme pour l'interprétation précédente, cette description de la première partie de l'interprétant, la partie spécifiquement dédiée aux principes mathématiques, ne permet pas d'éclairer complètement les choix faits. Nous allons reprendre ici l'argument linguistique de l'interprétation additive, argument qui concerne une économie de mots à introduire au fur et à mesure de la mise en signes.

Le principe consiste à tenter de désigner le maximum de nombres à partir du minimum de mots, en conservant les principes mathématiques d'une numération ordinale décrits précédemment. Ceci va jouer sur les choix successifs des couples (G_k, n_k) . Nous allons extraire les conclusions principales de l'interprétation additive en les adaptant à l'interprétation ordinale, surtout en ce qui concerne les nombres inférieurs à cent.

⁷⁵ Remarquons que dans certaines langues, comme l'allemand, il y a changement de l'ordre d'énonciation entre les dizaines et les centaines mais quand le petit à ajouter est avant on met « und ».

Nous avons vu qu'une alternance de principe de maximalité pour les G_i et pour les n_i permet de retrouver des principes mathématiques de base, que ce soit de base dix pour les nombres inférieurs à mille, ou de base mille pour les nombres supérieurs à mille. La différence principale avec l'interprétation additive est que la maximalité « faible » concerne les repérants et non les appuis additifs. Elle consiste alors à utiliser la comptine de un à neuf pour numérotter les repérants successifs jusqu'à mille, celle de un à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf pour les repérants au-delà de mille. La maximalité forte porte, elle, sur les comptants disponibles entre repérants : de un à neuf pour les repérants avant cent, de un à quatre-vingt-dix-neuf pour les repérants avant mille, de un à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf au-delà de mille. Avec ces principes de maximalité, nous retrouvons donc les principes de base dix et base mille. Pour les nombres inférieurs à cent⁷⁶, cette analyse de la numération permet d'éclairer de manière plus convaincante les choix faits dans la numération parlée en français de Suisse et de Belgique, dans laquelle, septante, octante (huitante) et nonante sont employés pour soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix. En France, un plus grand nombre d'irrégularités est à noter. Nous avons déjà émis l'hypothèse du chevauchement entre une numération utilisant deux types de groupement, vingt et dix. Nous reprenons cette hypothèse dans le cadre d'une numération ordinale, hypothèse qui correspond au 3^{ème} choix. Entre un et vingt ainsi qu'entre soixante et cent (voire même cent vingt) on peut interpréter la numération comme utilisant les comptants de un à dix-neuf entre deux repérants. Si ces comptants avaient été utilisés pour tous les nombres on aurait la suite des repérants suivants : vingt, deux-vingts, trois-vingts, quatre-vingts, cinq-vingts, etc. jusqu'à dix-neuf-vingt si on considère le principe de maximalité faible pour les repérants. Or dans cette suite, « quatre-vingts » désigne le même nombre que « quatre-vingts » dans la numération parlée en France. C'est cet élément qui rend mathématiquement possible une hypothèse de chevauchement de deux numérations⁷⁷, ce qui a été signalé par ailleurs. Chacune de ces deux numérations peut donc être modélisée avec des couples (G_k, n_k) , différents pour chacune, et nos éclairages linguistiques peuvent leur convenir.

D'autres particularités sont à éclairer dans le système de numération parlée en France, comme celles liées à la constitution de certains representamens en français qui ne suivent pas toujours exactement les règles données dans la définition.

c.2 Les choix liés à la constitution des representamens en langue française

Nous allons nous tourner vers un deuxième argument linguistique pour voir en quoi il peut expliquer certaines irrégularités dans la constitution des representamens. Nous allons nous centrer sur les nombres inférieurs à cent. Il s'agit en particulier d'expliquer⁷⁸ pourquoi « seize » pourrait provenir de six-dix et non pas de dix-six, question laissée en suspend dans les interprétations précédentes. En effet, une analyse morphologique nous a déjà mené à formuler l'hypothèse d'une altération ou évolution du latin dans laquelle l'idée de dix est indiquée en second, par exemple « onze » venant de la concaténation latine « undecim », « un-dix ». Dans une interprétation ordinale, nous pouvons formuler l'hypothèse que le suffixe « ze » indique que le dernier repérant passé est dix, sans (plus) nécessairement faire référence à une concaténation ancienne. Si ceci renforce la possibilité d'une interprétation ordinale de la numération, cela n'explique pas l'inversion repérant/comptant à partir de dix-sept. Nous faisons cependant deux remarques. D'abord, les nombres après vingt sont désignés en énonçant en premier le repérant, ceci peut-être pour mettre en avant cette fois-ci le

⁷⁶ Nous avons déjà indiqué les raisons d'étudier tout particulièrement les nombres inférieurs à cent.

⁷⁷ Cette hypothèse est renforcée du fait des emplois attestés de formes anciennes comme quinze-vingts qui reste dans le nom d'un hôpital.

⁷⁸ L'emploi de « quarante-deux » et non celui de « deux-quarante » a déjà été traité dans l'interprétation additive.

repérant, information qui devient primordiale pour l'ordre de grandeur des nombres ou pour se souvenir du dernier repérant (ceci est une hypothèse qui pourra être questionnée en considérant les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection). Ensuite, en latin (Noel, 1833), dix-sept se dit « decem et septem »⁷⁹, dix-huit se dit « decem et octo », dix-neuf se dit « decem et novem », alors que seize se dit sexdecim. Comme en français, de onze à seize la racine latine nomme dix (decem) après les representamens latin des nombres de un à six (voire sept). La même irrégularité est donc à noter, ce qui ne l'explique pas, mais en fournit une origine. Notons encore que le latin utilise aussi « duodeviginti » pour « dix huit » et « undeviginti » pour « dix-neuf ». Les representamens sont donc interprétables dans une numération ordinale avec antériorité réflexive (Cauty, 1988), c'est-à-dire que « duodeviginti » est analysable comme deux avant vingt et non comme vingt moins deux. Plus précisément, « de » signifie « à cause de » ou encore « provenant de », « avant la fin de », « relativement à » et ne fait pas référence à une soustraction (Goelzer, 1966). A ce propos nous avons déjà indiqué dans l'introduction de l'interprétation ordinale en quoi le « et » français peut s'interpréter comme « après » (et non forcément comme plus) : le « et » latin a aussi cette acception.

Nous allons finir ce paragraphe par des remarques sur la présence de « et » pour « soixante et onze » ainsi que pour le premier successeur des repérants « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », et de son absence pour « quatre-vingt-un » et « quatre-vingt-onze ». En fait, d'après le dictionnaire historique de la langue française de Rey (1997) et le dictionnaire français-latin de Goelzer (1966), le « et » était la règle entre repérant et comptant : il a donc disparu plus qu'il n'est apparu. Le fait qu'il subsiste pour le representamen du nombre succédant immédiatement après un repérant peut être interprété comme un signe indiquant la rupture entre repérant et comptant, l'amorçage d'un processus à réitérer. Mais cette analyse convient aussi pour les deux premières interprétations.

Concluons ce paragraphe en insistant sur le fait que, comme pour l'interprétation additive, l'éclairage linguistique que nous avons fourni n'explique pas tout et n'est (donc) pas forcément premier. Autrement dit nous ne lui donnons pas le statut de cause. D'autres éclairages sont possibles, en particulier ceux issus de l'étude des procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection, c'est l'objet du paragraphe suivant.

4 Les procédés concrets de mise en signes

Dans le paragraphe précédent les éclairages donnés permettent de distinguer les éléments de notre système de numération parlée qui sont inhérents aux principes mathématiques (1^{ère} partie de l'interprétant) de ceux qui relèvent de nécessités linguistiques de mise en mots et d'intelligibilité. Cependant, nous n'avons pas d'éclairage d'origine linguistique complet quant aux choix qui sont faits, par exemple ceux afférents à l'ordre d'énonciation Or d'autres paramètres peuvent intervenir, ceux liés aux activités pratiques (en référence à une définition pragmatique du nombre). Nous nous centrons sur celle consistant à déterminer la désignation orale d'une collection d'objets (ou d'éléments dans la terminologie ensembliste). Nous suivons ainsi la progression utilisée pour la numération écrite chiffrée de position.

Nous allons indiquer des procédés d'obtention de cardinaux de collections manipulables ou figurées qui sont cohérents avec nos interprétations de la numération. **Il ne s'agit donc pas de décrire des procédés qui nous semblent les plus efficaces ou les plus usités.** La description de ces procédés consiste en une narration des mots prononcés et (des résultats) des actions sur

⁷⁹ Noel (1833) indique aussi septemdecem. Goelzer (1966) indique quant à lui uniquement septemdecem, ce qui continue la logique de formation de la désignation en latin des nombres de onze à seize. Les deux existaient sans doute.

la collection afin d'obtenir la désignation parlée. Dans l'interprétant nous avons distingué les contingences mathématiques des contingences linguistiques. Nous tiendrons compte des deux. En outre, pour les désignations orales, deux problèmes pratiques se posent, différents de ceux de la mise en signes des principes de base dix dans la numération écrite chiffrée de position. Le premier concerne la mémorisation des mots utilisés, problème dû au fait que l'oralité n'assure pas une fonction mémorielle de la même façon que l'écrit. Le deuxième concerne le passage des mots obtenus à la désignation parlée (par exemple de sept (dix) cinq à soixante-quinze), ce qui est cette fois-ci dû aux choix d'ordre d'énonciation et de segmentation ainsi qu'aux concaténations plus ou moins altérées. Par exemple, dans une interprétation multiplicative, pour les nombres inférieurs à cent, cette désignation n'est en effet jamais une simple juxtaposition appuyant multiplicatif/appui/appuyant additif. Nous allons nous limiter à décrire les procédés pour les nombres inférieurs à cent dix, ceux qui nous intéressent en premier lieu pour la suite de la thèse, sachant qu'il a été tenu compte d'un spectre numérique plus large pour les interprétations dont ils sont issus.

Voici les notations que nous allons employer, qui permettent de prendre en compte les deux logiques de groupement que nous avons dégagées :

I désigne une unité

α_1 est un groupement dont le cardinal est dix

α_2 est un groupement dont le cardinal est vingt,

α_3 est un groupement dont le cardinal est trente,

α_4 est un groupement dont le cardinal est quarante,

α_5 est un groupement dont le cardinal est cinquante,

α_6 est un groupement dont le cardinal est soixante,

α_7 est un groupement dont le cardinal est soixante-dix (septante)

α_8 est un groupement dont le cardinal est quatre-vingts (octante, huitante)

α_9 est un groupement dont le cardinal est quatre-vingt-dix (nonante),

$\alpha_{10} (= \delta_1)$ est un groupement dont le cardinal est cent,

β_1 est un groupement dont le cardinal est (un) vingt,

β_2 est un groupement dont le cardinal est deux-vingts (quarante),

β_3 est un groupement dont le cardinal est trois-vingts (soixante),

β_4 est un groupement dont le cardinal est quatre-vingts,

$\beta_5 (= \delta_1)$ est un groupement dont le cardinal est cinq-vingts (cent).

La description des procédés consiste alors à donner l'organisation de la collection obtenue au fur et à mesure des mots prononcés. Les points virgules qui séparent les différents groupements indiquent que les groupements sont disjoints.

4.1 1^{ère} étape : les procédés selon la première partie de l'interprétant

Les procédés sont tout d'abord indiqués selon les principes mathématiques de chacune des interprétations et les différents choix faits pour les appuis/repérants. Rappelons que nous traitons des nombres strictement inférieurs à cent dix.

Pour l'interprétation arithmétique multiplicative

Il s'agit de considérer le nombre de groupements de dix par addition réitérée.

Le choix 1 consiste en l'appui multiplicatif cent, (puis mille, million, milliard).

Issu de ce choix, le procédé « multiplicatif » 1 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un	I ; le reste de la collection
deux	I ; I ; le reste de la collection
...	I ; I ; ... ; I ; le reste de la collection
quatre-vingt-dix-neuf	I ; I ; ... ; I ; I ; le reste de la collection
cent	δ_1 ; le reste de la collection

Le choix 2 consiste en la suite des appuis multiplicatifs dix, cent, (puis mille, million et milliard).

Issu de ce choix, le procédé « multiplicatif » 2 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$ le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1 ; \alpha_1$; le reste de la collection
cent	$10\alpha_1 (= \delta_1)$; le reste de la collection

En ce qui concerne le procédé 1, pour les nombres inférieurs à cent, il s'agit d'une interprétation purement ordinale, qui ne pose pas de problème de mise en signes. Par la suite nous analysons alors le seul procédé 2, qui lui fait intervenir des principes arithmétiques multiplicatifs pour les nombres inférieurs à cent dix.

Pour l'interprétation arithmétique additive

Il s'agit ici d'ajouter au fur et à mesure dix éléments à la collection des éléments déjà dénombrés.

Le choix 1 consiste en la suite des appuis additifs dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix (septante), quatre-vingts (octante, huitante) quatre-vingt-dix (nonante), cent (puis deux cents, trois cents, etc.).

Issu de ce choix, le procédé « additif » 1 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_6 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_7 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_8 ; le reste de la collection

un, deux, ..., neuf, dix,
un, deux, ..., neuf, dix,

α_9 ; le reste de la collection

$\alpha_{10}(= \delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 2 consiste en la suite des appuis additifs dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).

Issu de ce choix, le procédé « additif » 2 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	$\alpha_6 (= \beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, vingt,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, vingt,	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 3 consiste en la suite des appuis additifs vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).

Issu de ce choix, le procédé « additif » 3 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., dix-neuf, vingt,	β_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix	$\alpha_6 (= \beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, vingt,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, vingt,	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Pour l'interprétation ordinale avec repérants

Il s'agit à partir d'un repérant atteint, d'atteindre le repérant suivant : soit avec la comptine de un à neuf, soit avec celle de un à dix-neuf suivant les choix opérés.

Le choix 1 consiste en la suite des repérants dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix (septante), quatre-vingts (octante, huitante) quatre-vingt-dix (nonante), cent (puis deux cents, trois cents, etc.).

Issu de ce choix, le procédé « ordinal » 1 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix ,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, vingt ,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, trente ,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, quarante ,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, cinquante ,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, soixante ,	α_6 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, soixante-dix ,	α_7 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, quatre-vingts ,	α_8 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, quatre-vingt-dix ,	α_9 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, cent	$\alpha_{10} (= \delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 2 consiste en la suite des repérants dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).

Issu de ce choix, le procédé « ordinal » 2 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., neuf, dix ,	α_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, vingt ,	α_2 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, trente ,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, quarante ,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, cinquante ,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, soixante ,	$\alpha_6 (= \beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, quatre-vingts ,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, cent .	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Le choix 3 consiste en la suite des appuis additifs vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts, cent (puis deux cents, trois cents, etc.).

Issu de ce choix, le procédé « ordinal » 3 est :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., dix-neuf, vingt ,	β_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, trente ,	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, quarante ,	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, cinquante ,	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, soixante ,	$\alpha_6 (= \beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, quatre-vingts ,	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, cent .	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Commentaires

Les deux procédés arithmétiques, multiplicatif 2 et additif 1, se différencient dans l'organisation de la collection : dans le procédé multiplicatif les dizaines restent constituées, dans le procédé additif, ce n'est pas nécessaire (à cette étape tout au moins).

Les procédés additifs et ordinaux se distinguent par le fait de prononcer la comptine jusqu'à dix (ou vingt) pour l'un et neuf (ou dix-neuf) pour l'autre. Mais aussi le fait de prononcer ou non les appuyants/repérants.

Ces distinctions vont avoir une conséquence pour obtenir le représentant du cardinal de la collection : comment obtenir le dernier appui/repérant et le dernier appuyant/comptant ?

4.2 2^{ème} étape : la mise en signes : obtenir le dernier appui/repérant et le dernier appuyant/comptant

En ce qui concerne le nom du dernier appuyant ou comptant, il est obtenu de fait par les mots prononcés à la fin du procédé. Il n'en est pas toujours de même pour le dernier appui/repérant.

Pour l'interprétation arithmétique multiplicative

Le nombre de « dix » obtenus peut soit être compté à la fin du procédé grâce à l'organisation de la collection, soit il est compté au fur et à mesure (est prononcé alors à chaque fois qu'a été

formé un groupement de dix, successivement les mots de la comptine un, deux, trois, etc.), ce qui n'oblige plus *a priori* à garder l'organisation de la collection sous forme de groupements de dix.

Pour l'interprétation arithmétique additive

Pour connaître le dernier appui additif, deux possibilités sont envisageables : utiliser les mots prononcés ou utiliser l'organisation, et ceci pour chacun des trois procédés, ce qui donne six autres procédés. Nous allons donner deux exemples.

Utilisation de l'organisation pour le procédé 1 :

Nous obtenons l'organisation du procédé multiplicatif 1. Mais il reste néanmoins différent de ce dernier car le dernier appui additif s'obtient en considérant un ajout de dix au fur et à mesure (dix (plus dix), vingt (plus dix), trente (plus dix), quarante, etc.), et non en comptant les groupements de dix obtenus.

Utilisation des mots prononcés pour le procédé 3 :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., dix-neuf, vingt, (vingt)	β_1 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, trente	α_3 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, quarante	α_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, cinquante	α_5 ; le reste de la collection
un, deux, ..., neuf, dix, soixante	$\alpha_6 (= \beta_3)$; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, vingt, quatre-vingts	β_4 ; le reste de la collection
un, deux, ..., dix-neuf, vingt, cent	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Ce procédé est proche des procédés ordinaux (du 3 plus exactement, car nous avons pris comme exemple le procédé additif 3), à la différence que dix (ou vingt) est prononcé à chaque fois pour constituer des groupes de dix ou vingt⁸⁰

Notons qu'une variante est la suivante :

⁸⁰ Rappelons que nous considérons des procédés théoriques, qui sont issus des interprétations et nous ne discutons pas de leur usage pratique « réel ».

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., dix-neuf, vingt, (vingt) ,	α_3 ; le reste de la collection
vingt-un, vingt-deux, ..., vingt-neuf, vingt-dix, <u>trente</u>	α_4 ; le reste de la collection
trente-un, ..., trente-neuf, trente-dix, <u>quarante</u>	α_5 ; le reste de la collection
quarante-un, ..., quarante-neuf, quarante-dix, <u>cinquante</u>	$\alpha_6 (= \beta_3)$; le reste de la collection
cinquante-un, ..., cinquante-neuf, cinquante-dix, <u>soixante</u>	β_4 ; le reste de la collection
soixante-un, ..., soixante-dix-neuf, soixante-vingt, <u>quatre-vingts</u>	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection
quatre-vingt-un, ..., quatre-vingt-dix-neuf, quatre-vingt- vingt, <u>cent</u>	$\beta_4 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Cette dernière permet de nommer le dernier appui additif obtenu au fur et à mesure (et donc le retenir).

Pour l'interprétation ordinale avec repérants

Le procédé permet d'obtenir le dernier appui obtenu. Cependant, à l'exemple du précédent, il est aussi possible de nommer le dernier repérant atteint au fur et à mesure. Ce qui donne par exemple pour le procédé ordinal 3 :

<u>Les mots prononcés</u>	<u>L'organisation de la collection</u>
un, deux, ..., dix-neuf, (vingt) ,	α_3 ; le reste de la collection
vingt-un, vingt-deux, ..., vingt-neuf, <u>trente</u>	α_4 ; le reste de la collection
trente-un, ..., trente-neuf, <u>quarante</u>	α_5 ; le reste de la collection
quarante-un, ..., quarante-neuf, <u>cinquante</u>	$\alpha_6 (= \beta_3)$; le reste de la collection
cinquante-un, ..., cinquante-neuf, <u>soixante</u>	β_4 ; le reste de la collection
soixante-un, ..., soixante-dix-neuf, <u>quatre-vingts</u>	$\beta_5 (= \delta_1)$; le reste de la collection
quatre-vingt-un, ..., quatre-vingt-dix-neuf, <u>cent</u>	$\beta_4 (= \delta_1)$; le reste de la collection

Sa similitude avec le dernier est grande. En outre il correspond exactement au procédé issu d'une interprétation ordinale sans repérant, donc aussi au procédé multiplicatif 1.

4.3 3^{ème} étape : la mise en signes : obtenir les noms des nombres

La question qui se pose est de passer de la donnée des appuis/appuyants ou des repérants/comptants au nom des nombres.

Pour la dizaine qui doit être nommée, nous retrouvons des problèmes déjà soulevés. Ainsi pour le procédé multiplicatif 2, il s'agit de passer de l'appuyant multiplicatif de la 2^{ème} étape un, deux, ... ou dix, au nom de la dizaine (qui correspond au nom du groupement de 2^{ème} ordre dans le cas de dix groupements de dix). Outre les cas particuliers de dix et vingt, les dizaines soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix posent des problèmes spécifiques à la

numération parlée en France qu'on ne rencontre pas en Suisse ou en Belgique. Pour le reste des dizaines leur marque en tant qu'ordre supérieur est indiquée par le suffixe « ante »⁸¹.

Dans les différents procédés additifs le problème est identique, avec les mêmes spécificités suivant les appuis choisis. Cependant les variantes données à la deuxième étape pour accéder au dernier appui fournissent des solutions.

Finalement, en ce qui concerne les procédés ordinaux, dès la première étape le problème peut être résolu, toujours avec les spécificités signalées qui apparaissent ou non selon les repérants utilisés.

5. Bilan

La première partie de l'interprétant : de l'analyse syntaxique vers la définition mathématique de trois types de numération.

Notre numération parlée établit une bijection entre une partie finie de l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls et un ensemble de désignations. Ce problème est résolu en utilisant un nombre limité de mots. L'analyse a permis de dégager les principes mathématiques sous-jacents. Pour ce faire, nous avons décrit précisément le système de numération parlée en français. Nous avons distingué les représentations entre eux : ceux morphologiquement indépendants les uns des autres et indécomposables (un, deux, trois, ...), ceux qui se répètent régulièrement (vingt, trente, deux cents, trois mille, ...), ceux enfin qui sont une concaténation non altérée des représentations des deux premiers types (trente-deux, deux cent vingt-quatre, ...). Selon le rôle que nous avons fait jouer à chacun, une analyse syntaxique a permis de dégager des principes mathématiques généraux qui définissent trois types de numération⁸² : une numération arithmétique multiplicative fondée sur des décompositions mixtes⁸³ utilisant des appuis multiplicatifs et additifs, une numération arithmétique additive (dont nous avons présenté deux versions) fondée sur des décompositions additives utilisant des appuis additifs et enfin une numération ordinale fondée sur l'obtention de cardinaux par des principes ordinaux et utilisant des repérants. Par exemple quarante a été analysé comme quatre fois dix (appuyant multiplicatif/appui multiplicatif), comme trente plus dix (obtention de l'appui additif par ajout de dix) et comme quatrième repère (succession des repérants). Dans la détermination des interprétations, ces définitions ont permis d'envisager trois alternatives pour la première partie de l'interprétant. Nous sommes alors revenu sur la mise en représentations dans la numération parlée en France à partir de chacun de ces trois principes mathématiques.

La deuxième partie de l'interprétant : des définitions mathématiques aux choix de la mise en signes dans la numération parlée en France.

Bien qu'élaborés à partir d'une analyse de la numération parlée en langue française, ces principes mathématiques ne sont pas nécessairement traduits d'une manière univoque dans une langue et donc ne conduisent pas nécessairement à la numération parlée dans notre

⁸¹ Rappelons que nous n'avons pas trouvé d'articles ou d'ouvrages attestant d'une concaténation certaine, la racine indo-européenne « kmt », Pépin (2003), renvoyant à l'idée de dizaine (ou unité d'ordre supérieur ?) sans que l'on sache s'il s'agit de désigner le nom du nombre dix.

⁸² Dans l'élaboration des définitions des principes mathématiques de la première partie de l'interprétant nous avons dû faire pendant certains choix. Il fallait en effet arbitrer entre ce qui peut être retenu de suffisamment général pour permettre de définir une numération non ambiguë, non redondante et exhaustive, et de suffisamment précis pour permettre d'analyser la numération parlée en français. Ainsi par exemple, pour définir un type de numération, nous avons retenu le principe de concaténation et le rôle particulier de certains nombres, sans pour autant ni indiquer l'ordre dans la concaténation ni imposer le choix de tel ou tel nombre pour jouer ces rôles particuliers.

⁸³ C'est-à-dire mettant en jeu des produits et des sommes.

langue. Nous avons indiqué les choix qui ont été faits en français et tenté de les éclairer. Deux catégories de choix sont à distinguer : ceux liés aux nombres qui vont servir à structurer la numération (les repérants ou appuis additifs ou appuis multiplicatifs, en parallèle des comptants ou appuyants), et ceux liés à la formulation dans une langue afin de rendre non ambiguës les expressions utilisées pour désigner le nombre.

Dans cette deuxième catégorie, certains choix sont des conventions qui ne sont pas toutes du même ordre. Nous distinguons une convention « utilitaire » dans le sens où nous pouvons supposer qu'elle favorise une lecture non ambiguë du système, par exemple le choix d'un ordre d'énonciation des appuis additifs, multiplicatifs ou repérants, soit par ordre croissant soit par ordre décroissant et non pas dans un ordre arbitraire. Nous pouvons aussi considérer des conventions « culturelles » : l'expression phonétique choisie pour dire les nombres ou encore le fait de choisir entre l'énonciation par ordre croissant ou décroissant des appuis additifs, multiplicatifs ou repérants⁸⁴. A propos de l'ordre d'énonciation des nombres intervenant dans les concaténations, nous avons avancé des arguments basés sur des considérations linguistiques qui gardent un statut d'hypothèse quelle que soit l'interprétation choisie.

En ce qui concerne la première catégorie des choix, ceux des éléments structurant la numération (les repérants ou appuis additifs ou appuis multiplicatifs, en parallèle des comptants ou appuyants), nous avons aussi avancé des éclairages d'ordre linguistique en référence à la mise en representamen dans une langue (par exemple une économie de mots) ou pratique en référence à l'obtention du representamen du cardinal d'une collection d'objets (par exemple des appuis ou repérants réguliers pour faciliter leur mémorisation, l'utilisation de comptines ou de comptants toujours identiques entre deux appuis ou repérants). Il nous est difficile à partir de l'analyse entreprise de savoir si ce sont les appuis/repérants qui sont premiers dans la constitution de la numération ou si ce sont les appuyants/comptants : nous émettons l'hypothèse qu'ils se codéterminent pour des raisons à la fois mathématiques, linguistiques et pratiques. Nous n'excluons d'ailleurs pas qu'il y ait d'autres éclairages possibles, comme une numération en unités sous-jacente. Nous allons revenir sur ces interrogations dans la conclusion de la première partie de la thèse qui inclut un paragraphe consacré à l'étude historique. Pour autant, nous constatons que les choix opérés dans la numération permettent de dégager des structures pour l'ensemble des entiers naturels à l'aide de nombres comme dix, vingt, cent ou mille. Ces structures, différentes selon les interprétations, renvoient alors à des principes mathématiques plus précis que ceux contenus dans les définitions des trois numérations.

Les trois interprétations : le rôle de « dix » et les irrégularités.

Ainsi, pour l'interprétation arithmétique multiplicative, les choix dégagés permettent de retrouver une structure de base mille pour la décomposition des nombres supérieurs à mille et de base dix pour ceux qui lui sont inférieurs. Ces choix sont en fait permis par les principes d'une numération arithmétique multiplicative mais ils n'y ont pas de caractère obligatoire : c'est grâce à une certaine régularité dans les appuis multiplicatifs que nous retrouvons une décomposition polynomiale des nombres selon des principes de base dix ou base mille.

Avec l'interprétation arithmétique additive, il nous est possible de dire que dix, puis éventuellement cent vont jouer un rôle spécifique puisque les appuis additifs s'obtiennent par des suites arithmétiques de raison dix, puis éventuellement cent. Ce sont alors ces suites arithmétiques qui permettent de décrire plus précisément les principes mathématiques sous-jacents à l'interprétation arithmétique additive, sans que les principes de base (dix) y soient présents d'emblée. Cependant, un argument plus fort nous semble celui du champ numérique pour lequel l'interprétation arithmétique additive est la plus pertinente, c'est à dire celui des

⁸⁴ Ce choix peut être cependant lié à d'autres facteurs que nous ne pouvons cependant pas considérer ici.

nombres inférieurs à cent. Le passage au groupement d'un ordre supérieur qui caractérise la notion de base (ici d'un groupement de dix à dix groupement de dix), c'est-à-dire le groupement de groupements, n'est de fait pas en jeu. En outre, les nombreuses irrégularités semblent indiquer pour la numération parlée en France un mélange de deux types de groupements dix et vingt (donc de nombres d'appuis additifs principaux). Ainsi nous n'avons pas la régularité des types de groupements (cf. la description en termes de couple (G_k, n_k)) nécessaire aux principes de base (ici de base dix).

Finalement, en ce qui concerne l'interprétation ordinale avec repérants, nous retrouvons aussi le rôle joué par dix, mais cette fois-ci il apparaît comme une conséquence de l'énonciation de neuf représentants de nombres (les comptants) entre deux nombres (les repérants) : le dixième, étant le repérant suivant. Ici, c'est donc la régularité des suites de comptants employés successivement qui affine la structure mathématique en jeu. Les remarques précédentes sur le champ numérique et l'irrégularité des repérants dans la numération parlée en France sont aussi valables ici.

Les « irrégularités » qui viennent d'être évoquées attestent de la difficulté de justifier⁸⁵ la pertinence de telle ou telle interprétation. Nous n'allons pas ici les reprendre en détail. Indiquons cependant que ces « exceptions », loin de constituer un obstacle, nous ont permis au contraire d'envisager des interprétations qui sans elles auraient été difficilement perceptibles (nous pensons en particulier à l'ordinale). Cependant, il n'en reste pas moins que chacune d'entre elles est mieux adaptée à une certaine catégorie de nombres : les nombres inférieurs à cent pour une numération ordinale avec repérants, inférieurs à mille pour une numération arithmétique additive, au-delà de cent (et mieux encore mille) pour une numération arithmétique multiplicative

Les procédés « concrets » de mise en signes du cardinal d'une collection d'objets : prise en compte de l'interprétation et résolution de deux problèmes pratiques spécifiques.

Dans notre étude nous avons abordé la mise en signes « concrète » du cardinal d'une collection d'objets. Ce passage nous a semblé utile à analyser car il est emblématique des activités mathématiques premières en ce qui concerne une numération : premières à la fois dans les apprentissages scolaires (nous pensons au comptage) et dans la genèse historique. Il est aussi sous-jacent aux descriptions de Bezout et Reynaud, et est directement lié à la définition pragmatique du nombre donnée dans le chapitre 1. Les descriptions des différents procédés avaient pour but de fournir d'autres sources d'éclaircissements sur certains choix dans la numération parlée en français, de mettre en perspective les relations entre mathématiques et numération telle qu'elles avaient été envisagées jusque là. Elles nous permettaient aussi de rendre plus tangible les différences entre les trois interprétations. Ainsi, ces mises en signes « concrètes » du cardinal d'une collection ne constituent pas des descriptions de procédés réels (même s'ils peuvent être observés) mais des transcriptions des interprétations dégagées en termes de gestes et de mots. Nous avons alors noté des différences significatives, mais aussi des ressemblances, dues au fait de résoudre deux problèmes spécifiques. Le premier est le passage entre d'un côté les mots dits et l'organisation obtenue au fur et à mesure et d'un autre la désignation dans le système de numération en français. Le deuxième concerne la mémorisation inhérente au caractère oral de la numération (dans le sens où un son ne laisse pas de trace durable). Trois étapes ont été étudiées : l'adéquation aux principes mathématiques, l'obtention des repérants/appuis et comptants/appuyants, et enfin l'obtention de la désignation du cardinal à partir de ces derniers. Ceci nous a mené alors à

⁸⁵ Le fait même de dégager plusieurs interprétations possibles témoigne déjà de ces difficultés.

distinguer les trois interprétations selon son degré d'« adaptation » au problème de mise en signes du cardinal d'une collection figurée ou manipulable. La mise en signes complète peut être effectuée dès la première étape en ce qui concerne l'interprétation ordinale avec repérant, l'interprétation arithmétique additive nécessite de traiter la seconde, et la troisième étape requiert un traitement particulier pour l'interprétation arithmétique multiplicative. Ceci étant à relativiser suivant les différents choix pour les appuis/repérants modélisant les numérations.

En outre nous avons mis en exergue des procédés qui se ressemblent mais ne sont pas élaborés pour les mêmes raisons. Ils peuvent ainsi être issus de deux interprétations différentes mais mettre en jeu une même organisation de la collection ou encore issus de deux interprétations différentes et mettre en jeu la même séquence de mots prononcés. Plus encore, une fois le choix des appuis/repérants fixé, il est souvent possible de justifier *a posteriori* tel ou tel procédé comme émanant de telle interprétation. C'est en sens que nous indiquons qu'il est impossible de faire une bijection entre une mise en signes concrète et une interprétation. Nous reviendrons sur cette question dans la conclusion générale de cette partie.

La question de l'« objet » nombre

Dans ce bilan nous abordons finalement une des questions posées initialement, celle relative à la relation entre l'objet « nombre » et la numération parlée en France. Les trois interprétations ont en commun d'être intrinsèquement liées à un procédé de définition des nombres par récurrence. Ceci est une conséquence des définitions mêmes des différents types de numération, puisqu'elles sous-tendent un processus de concaténation à partir de nombres déjà désignés (voir aussi la description des désignations dans le paragraphe 1.2). Ainsi, le système de numération élabore la désignation des nombres, si ce n'est de proche en proche, tout au moins d'intervalle en intervalle et les désignations sont données en respectant l'ordre des entiers naturels. C'est donc ici la structure d'ordre des nombres qui est mise en avant. Cependant, les deux premières interprétations se fondent sur des structures algébriques, mettant en jeu l'addition ou/et la multiplication. Ainsi avons nous interprété vingt-et-un comme étant le nombre vingt plus un ou encore deux fois dix plus un. Ceci est d'une certaine manière contradictoire avec une vision ordinale stricto-sensu, une vision qui correspondrait à l'approche des nombres de Peano dans laquelle les opérations arithmétiques sont « secondes ». L'interprétation ordinale, dans laquelle chaque signe additif d'une interprétation arithmétique peut se comprendre par la locution « suivi de », est une manière de rester dans une approche ordinale⁸⁶. L'objet de notre étude n'est pas de trancher sur une « meilleure » interprétation, toutes les hypothèses ont leurs avantages et inconvénients. En particulier, toutes doivent composer avec des exceptions dans les désignations de certains nombres.

Cependant, nous l'avons déjà souligné, du fait de la constitution des representamens, chacune d'entre elles est mieux adaptée à une certaine catégorie de nombres, ce qui met en relief des aspects différents des nombres entiers selon le champ numérique concerné : pour les nombres inférieurs à seize, une interprétation ordinale sans repérant ; pour les nombres inférieurs à cent, un choix entre arithmétique additif ou ordinal avec repérant ; pour les nombres inférieurs à mille un choix entre arithmétique additif ou multiplicatif ; au delà, une interprétation arithmétique multiplicative.

Finalement, nous notons que dans les définitions mathématiques du nombre, l'ensemble des nombres entiers est muni d'une relation d'ordre et d'une structure arithmétique qui sont liées par des relations⁸⁷. Selon la définition « ordinale » ou « cardinale » du nombre, c'est la

⁸⁶ Notons pour autant que l'application S de l'axiomatique de Peano, qui associe à un nombre son successeur, est surtout adaptée pour considérer les premiers nombres désignés par leur nom en français. Dans la définition de la numération ordinale, nous avons introduit l'idée de repérants qui n'a pas de correspondant dans l'axiomatique de Peano.

⁸⁷ Visibles par exemple dans le maniement des inégalités.

relation d'ordre ou la structure arithmétique qui est mise en avant, mais l'une et l'autre sont présentes. En considérant la définition pragmatique du nombre, le représentant du cardinal d'une collection peut être obtenu par un principe ordinal (à l'aide d'une comptine numérique) ou cardinal (la bijection avec une autre collection dont le cardinal est connu). Ainsi, la pertinence de l'interprétation arithmétique additive et de celle ordinale pour les nombres inférieurs à cent est à mettre en parallèle avec le fait que les principes cardinaux et ordinaux sont difficilement séparables dans les définitions du nombre.

Limites de l'analyse

Indiquons pour conclure ce bilan quelques remarques qui indiquent des limites à l'analyse que nous avons faite. Du fait de la méthode employée, les éclaircissements sur les choix faits pour modéliser notre numération parlée en France sont prioritairement linguistiques et mènent à des hypothèses. Ils ont été avancés car les principes mathématiques fondateurs ne peuvent pas nous éclairer au-delà d'un certain point. Nous devons cependant nous poser la question de l'existence d'autres influences en revenant par exemple sur les procédés de dénombrement. En effet, nous avons pour l'instant imaginé des procédés concrets de mise en signes qui correspondent aux modélisations que nous avons avancées. D'autres démarches peuvent être empruntées, comme celle consistant à considérer cette fois-ci la quantité (d'éléments) comme une grandeur (discrète), grandeur que l'on peut mesurer en fixant des unités de mesures : par exemple la dizaine, la centaine etc. La traduction parlée en est alors une numération en unités : par exemple « une centaine, deux dizaines, trois unités ». Mais alors se pose la question de la distance entre la numération parlée (celle que nous étudions) et cette numération en unités. Il nous semble difficile, comme le suggère Reynaud, de voir dans la numération parlée une « simplification » de la numération en unités. Les liens entre numération en unités et numération parlée sont donc à éclaircir. D'une manière plus générale, se pose la question de l'utilité et de l'utilisation des numérations : mesurer, mais aussi calculer. En outre, une autre distance doit être précisée, et c'est celle qui nous intéresse en premier lieu dans la thèse, c'est celle avec la numération décimale écrite chiffrée de position. Pour aborder ces questions, nous menons une étude historique au préalable de la conclusion de cette première partie de la thèse.

COMPLEMENTS HISTORIQUES ET CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

1. Les numérations étudiées dans une perspective historique.....	100
1.1. La place des deux numérations étudiées dans l'ensemble des numérations	100
a. Quelles sont les interprétations envisageables pour les autres numérations parlées ? 100	
b. Quelles sont les interprétations possibles pour les autres numérations écrites ?	102
c. Quelles sont les filiations et évolutions repérées ?	103
1.2. Etude de la genèse du système de numération chiffrée de position et parlée en français	106
a. Quelles sont les filiations et évolutions repérées ?	107
b. Le rôle de la mesure, celui des problèmes à résoudre	107
1.3 Bilan	108
2. Conclusion de la première partie de la thèse	109
2.1 Synthèse	109
a. Les interprétations	109
b. Bilan : de la non-congruence.....	112
2. 2 Les questions	113

1. Les numérations étudiées dans une perspective historique

La méthodologie adoptée a permis d'interpréter d'une part la numération écrite chiffrée de position dans le cadre de la théorie des langages, d'autre part la numération parlée en français dans un cadre linguistico-mathématique. Des questions sont apparues en creux dans notre analyse entre les interprétations mais aussi sur la place des calculs et de la mesure.

Rappelons que des auteurs comme Ifrah (1994) et Charbonnier (2004), entre autres, montrent que la constitution même des systèmes de numération est le résultat d'un long processus dans lequel les mathématiques ont eu leur place, mais initialement au moins, de manière non explicite. Ce sont certains principes mathématiques qui ont rendu possibles (c'est-à-dire opérationnelles) les numérations, mais ils ont été éprouvés et utilisés d'une manière pragmatique, expérimentale et culturelle (Crump 1990). L'étude de ces processus est susceptible d'avoir des résonances dans l'enseignement et l'apprentissage. Ils nous renseignent sur les difficultés, les obstacles rencontrés par les Hommes pour construire les notions de numération objets d'enseignement. Le but de ce paragraphe est de compléter l'analyse faite précédemment afin de mieux comprendre la relation entre les mathématiques et les numérations.

1.1 La place des deux numérations étudiées dans l'ensemble des numérations

Il s'agit ici de confronter les interprétations⁸⁸ mises à jour de la numération parlée en français à d'autres numérations en utilisant les travaux existants comme ceux de Guitel, Ifrah, Cauty et Numa Bocage. Le chapitre s'appuie principalement sur des exemples montrant la diversité des cas rencontrés. La plus grande partie est extraite de Ifrah (1994). Dans le texte qui suit nous ne précisons alors les références que pour celles qui viennent d'autres auteurs. Cette prise de distance éclaire différemment les spécificités à chaque numération relevées précédemment.

Ifrah définit un système de numération comme une numération ayant adopté le « principe de la base », c'est-à-dire des « systèmes dont la base n'est autre que le nombre d'unités qu'il est nécessaire de grouper à l'intérieur d'un ordre donné pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur », p. 73. Ainsi il distingue les numérations concrètes (bouliers, abaqués, quipus), orales ou écrites « selon que ce principe a été appliqué à des intermédiaires matériels, à des mots d'une langue ou à des signes graphiques ».

a. Quelles sont les interprétations envisageables pour les autres numérations parlées ?

Ifrah classe les numérations parlées selon des principes arithmétiques sous-jacents. Pour une grande partie des numérations, l'analyse de chaque représentant provenant de concaténation (plus ou moins altérée) se fait en termes de développement utilisant des multiplications et des additions, comme nous l'avons fait pour l'interprétation de la numération parlée en France : avec le même succès, mais aussi avec les mêmes irrégularités. Ainsi, deux « problèmes » sont à signaler : la décomposition n'est pas toujours polynomiale de base dix et la mise en signes est différente selon les appuis prononcés.

⁸⁸ Le mot interprétation désigne toujours ici le résultat du travail d'auteurs et de chercheurs plus particulièrement.

Ainsi quelques langues se prêtent particulièrement bien à une telle analyse pour tous les nombres, comme la numération orale tibétaine et chinoise⁸⁹ (p. 628) ainsi que les numérations orales indiennes (en particulier le sanskrit). A noter que les appuis multiplicatifs sont parfois prononcés (tibétaine et chinoise) et parfois non prononcés (dans certaines langues utilisées en Inde, il s'agit d'énoncer une suite de chiffres). En outre certaines sont de base dix, d'autres non. La langue api des Nouvelles-Hébrides, le khmer en Asie, le guarani en Amérique du Sud, le peul en Afrique (p. 96) peuvent être analysables comme ayant des principes de base cinq. Pour la base vingt (vigésimale) l'exemple le plus emblématique est la langue aztèque (p. 97) : les appuis multiplicatifs sont prononcés et les noms des dix-neuf premiers nombres sont analysables avec des repérants/appuis cinq voire dix. Mais des langues indo-européennes, celtes en particulier comme l'irlandais ou le gallois, utilisent aussi la base vingt, les appuis multiplicatifs étant toujours prononcés et les noms des dix-neuf premiers nombres étant analysables avec le repérant/appui dix.

Dans un grand nombre de langues indo-européennes les appuis sont prononcés, et nous y rencontrons les mêmes irrégularités que pour la numération parlée en France pour les nombres inférieurs à cent : les noms des dizaines sont des concaténations altérées. Donnons en exemple respectivement en latin, français, espagnol, allemand et anglais : quadraginta, quarante, cuarenta, vierzig, forty. Pour celles-ci, l'interprétation ordinale (qu'aucun auteur consulté ne fait) est donc aussi envisageable. Signalons en outre qu'il existe différents choix pour l'ordre d'énonciation des appuis/repérants : drei und vierzig en allemand, forty three en anglais. Qui plus est, certaines langues utilisent un équivalent du « et » de notre numération parlée en France. Par exemple « ar » est aussi attesté pour l'irlandais ou le gallois (p. 100) mais aussi le danois, et il semble ne pas signifier une opération d'ajout⁹⁰. Par ailleurs, la langue mongole (p. 78) utilise pour désigner les dizaines un dérivé des unités et n'utilise pas de concaténation (ainsi le mot signifiant dix (arban) n'est pas utilisé) : deux se dit qoyar et vingt qorin⁹¹. En outre, page 308, Walter (1977) indique que le danois utilise donc une base vigésimale, mais au-delà, la façon de dire cinquante est intéressante. Cinquante est en fait « *une demie vingtaine avant la troisième vingtaine* ». Elle fait une analogie avec la façon qu'ont les Allemands de dire l'heure (une demi-heure avant la sixième heure pour 5h30). Il s'agit donc là d'une conception purement basée sur la position de cinquante, et non plus une quantité. Ceci renvoie à l'antériorité réflexive que nous avons indiquée pour le latin (duodeviginti, mais aussi pour les adjectifs numéraux relatifs aux deux nombres précédant les dizaines, comme duodenonaginta pour quatre-vingt-huit selon Goelzer (1966)).

Toutes ces remarques renforcent la possibilité d'une interprétation ordinale avec repérants de notre numération parlée pour les nombres inférieurs à cent. Un dernier argument pouvant provenir de l'attestation du fait que les premières numérations étaient d'essence ordinale strictement, faites en particulier de mots reliés à des parties du corps humain, dont certaines sont encore utilisées (une suite de trente-trois items pour des insulaires du détroit de Torrès, p. 47). Les systèmes basés sur les doigts (p. 67 et 119) pouvant expliquer alors l'usage de cinq

⁸⁹ C'est aussi le cas d'un certain nombre de numérations asiatiques.

⁹⁰ Walter (1977) donne « Un et Quinze » comme traduction du gallois « un ar bymtheg » (seize). Or, le mot « ar » en gallois (comme les autres langues Celtiques) semble plutôt signifier « près de » ou « au dessus de » (par exemple « Armoric », près de la mer). Seize se dirait donc en langue celtique « un près (après?) quinze », et ainsi de suite jusqu'à dix-neuf. A noter que les langues celtiques sont antérieures au latin, et que ce sont aussi des langues indo-européennes.

⁹¹ C'est aussi le cas du turc archaïque. De la deuxième à la cinquième dizaine, l'analyse morphologique citée par Ifrah (p. 79) ne permet pas de retrouver de lien évident avec les nombres de deux à cinq. Les sixième et septième dizaines utilisent le suffixe « mis » accolé au nom des nombres six et sept, alors que dans les huitième et neuvième on retrouve le mot dix, par exemple säkiz (huit) on (dix). Plus encore, dans cette langue, les nombres sont désignés par rapport à la dizaine qui les suit. Ainsi par exemple onze (bir yegirmi) est littéralement la un (bir) (avant) vingt (yegirmi), ce que nous pouvons interpréter comme la première unité de la deuxième dizaine.

(une main), dix (deux mains) et vingt (deux mains, deux pieds) comme repérants rencontrés presque qu'exclusivement.

b. Quelles sont les interprétations possibles pour les autres numérations écrites ?

Quelle première partie de l'interprétant rencontre-t-on ?

Mises à part les numérations purement ordinales, Ifrah utilise une analyse des numérations écrites en fonction des décompositions arithmétiques qui peuvent les modéliser. Ainsi, nous y voyons, en utilisant les termes que nous avons utilisés, une première partie de l'interprétant analysable avec une échelle de numération issue de la théorie des langages du type $\sum a_i d_i$, où les a_i sont des coefficients et la suite $(d_i)_{i \geq 0}$, une suite d'ordres. Les échelles choisies ne mènent pas toujours à des bases, et les suites utilisent de manière préférentielle les nombres cinq, dix, vingt, soixante. Le système de numération écrit chiffré que nous utilisons de nos jours, décrit p. 74-75, s'appuie, lui, bien évidemment sur des principes de base dix.

Quelle deuxième partie de l'interprétant rencontre-t-on ?

Une fois cette première partie de l'interprétant fixée (et analysable avec une échelle de numération issue de la théorie des langages $\sum a_i d_i$), on retrouve alors les trois types de mise en signes dégagés auparavant : l'utilisation des coefficients seuls, des ordres seuls ainsi que des ordres et des coefficients. Le résumé p. 781 à 792 en donne la diversité, attendu que celui déjà donné par Guitel (1975) indiquait une typologie semblable.

La typologie d'Ifrah

Numérations écrites de type 1 : numération additive (hiéroglyphique égyptienne, sumérienne, grecque, romaine)

Ifrah, p. 759, définit ce type de numération comme « *La règle selon laquelle la valeur d'une représentation numérique s'obtient en faisant la somme des valeurs de tous les chiffres qui y sont contenus* ». C'est la juxtaposition des symboles qui indique qu'il faut les additionner. A chaque signe différent est associée une valeur. Il faut donc connaître la valeur de chaque signe puis additionner ces valeurs pour déterminer le cardinal désigné par l'écriture. Dans beaucoup de systèmes additifs, les signes employés sont liés à des groupements ou sous groupements (cinq, dix, soixante). Il fait écho au système de mise en signes consistant à n'utiliser que la suite des ordres, dont il s'agit de répéter l'écriture pour en indiquer les nombres. Ce système d'écriture permet d'écrire les nombres sans ambiguïté, mais il nécessite un nombre infini de signes si on veut écrire tous les nombres. Il permet facilement de faire des additions, des soustractions et des multiplications (bien que cela puisse être assez long) et plus difficilement les divisions. Il transcrit les « nombres concrets » dans la mesure où il traduit les groupements faits directement sur les quantités (par exemple à un groupement de cent unités correspond un signe C, à deux groupements de cent unités correspond CC).

Numérations écrites de type 2 : numérations hybrides (araméens, singhalais, mariote, éthiopien, chinois).

Elles combinent des principes additifs et multiplicatifs. En général uniquement additif pour les petits nombres. La position des signes peut indiquer s'il s'agit de multiplier ou d'additionner : par exemple si II désigne deux et C cent, IIC désigne deux cents et CII désigne cent deux (voir Numa Bocage, 1997, p. 23). Il s'agit donc d'utiliser les coefficients et les ordres dans la décomposition selon une échelle de numération. Remarquons que l'écriture IIC force à voir II comme une entité entière signifiante en elle-même (qui désigne deux) et non

comme un signe composé d'autres signes : dans CII on peut voir cent plus un plus un, dans IIC on est obligé de considérer II comme désignant deux. C'est dans cette mesure que certains groupements de signes acquièrent eux-mêmes une valeur de chiffre : souvent au moins ceux désignant les neuf premiers nombres entiers strictement positifs.

Ces systèmes de type 2 peuvent se percevoir comme une évolution du système d'écriture de type 1 : l'exemple de l'évolution de la numération écrite à Babylonne (dès le 2^{ème} millénaire avant JC) est significatif (voir aussi Bideaud, Lehalle, Vilette, 2003, p. 25). Dans cet exemple on y voit en outre l'utilisation d'un même signe (à la taille près) pour indiquer les unités et les soixantaines (l'ordre au dessus de l'unité puisque la base principale est sexagésimale). Ceci a facilité l'évolution de ce système vers un système de type 3 (numération écrite de position) en suggérant qu'un « même » signe pouvait indiquer des nombres différents. Le passage à la position nécessite cependant d'autres conceptions (voir la description du type 3 ci-après). Les systèmes d'écriture de type 2 permettent facilement de faire des additions, des soustractions et des multiplications (bien que cela puisse être assez long) et plus difficilement les divisions.

Numérations écrites de type 3 : numérations de position (babylonien, chinois, maya, la numération écrite chiffrée utilisée actuellement dans la plus grande partie du monde).

Notre numération écrite chiffrée est de ce type 3. Ces numérations se fondent sur des principes liés à des bases et bases annexes⁹², mais pas nécessairement à une seule base ni nécessairement la base dix uniquement (cependant la base dix est la plus fréquente, soit en base principale, soit en base annexe). Elles nécessitent d'établir une fois pour toutes un ordre dans les groupements : par exemple un, soixante, trois mille six cents, etc. Cette fois-ci, les signes utilisés sont en nombre limité (ce sont les chiffres du système) : c'est leur position dans l'écriture qui va indiquer à quel type de groupement ils se réfèrent. Ces numérations n'utilisent donc que les coefficients de l'échelle de numération à laquelle ils se réfèrent. Différents types de disposition et de sens de lecture ont été employés : en colonne de haut en bas, en ligne de gauche à droite ou de droite à gauche⁹³. Le symbole zéro n'a pas été la seule façon d'indiquer l'absence d'un ordre : écartement significatif entre les chiffres, compréhension du nombre désigné grâce au contexte (Bideaud, Lehalle, Vilette, 2003, p. 25 et Guitel, 1975). Le type 3 est le seul système qui permette d'écrire tous les nombres entiers à l'aide d'un nombre limité de chiffres. Pour certains systèmes de numération de position (savant chinois, savant maya), certains chiffres gardent dans leur graphie une mémoire du nombre qu'ils désignent (III pour trois), ce qui n'est pas le cas pour d'autres systèmes (indien, arabe, les chiffres usuels), Charbonnier (2004, p.19).

Nous constatons que beaucoup de possibilités ont été utilisées, et en particulier, pour différentes échelles des mêmes choix de mise en signes ont été utilisés.

c. Quelles sont les filiations et évolutions repérées ?

Peut-on parler de filiation ?

Ifrah définit les systèmes de numération parlée en prenant pour archétype un système de base dix, calqué sur celui du système d'écriture chiffrée que nous utilisons actuellement, mais il indique qu'« *il s'agit d'un principe purement théorique, que les peuples n'ont pas tous scrupuleusement suivi à la lettre au cours de l'histoire, chacun l'ayant adapté à ses propres traditions orales et aux règles de sa propre langue* », p. 76.

⁹² Ceci n'est pas surprenant, si on se réfère à l'analyse que nous avons faite de notre système d'écriture chiffrée de position.

⁹³ Voir aussi Charbonnier p. 12, 13 et 20 mais aussi Guitel (1975).

Nous questionnons ce parti pris méthodologique qui pourrait laisser penser que les systèmes de numération (ou plus exactement les hommes qui les ont façonnés) sont des tentatives de se rapprocher de la base (dix).

Il est vrai que certaines analogies sont à signaler entre les systèmes écrits et oraux⁹⁴, et les quelques exemples ébauchés ci-avant les attestent : importance des nombres cinq, dix, vingt, (voire soixante), utilisation des mêmes ordres/appuis multiplicatifs et des mêmes coefficients/appuyants multiplicatifs ou des deux pour la mise en signes. Mais certaines différences sont à noter : irrégularités et plus grande variété dans les représentations orales, utilisation de « mêmes » systèmes écrits pour des langues différentes. En outre les systèmes écrits et oraux employés simultanément n'ont pas nécessairement la même première partie de l'interprétant : en atteste par exemple la numération parlée et écrite latine (viginti septem / XXVII ; undeviginti / XVIII (ou XIX)). De plus, quand entre les systèmes oraux et écrits d'une civilisation la première partie de l'interprétant est la même, la deuxième n'est pas nécessairement de même type. Ainsi, en Chine les écritures sont des « signes-mots » qui traduisent exactement ce qui est dit, la mise en signes est alors de type positionnel. Mais dans certaines langues actuelles qui sont analysables en tant que numération arithmétique multiplicative, le nom des ordres est prononcé alors que l'écriture chiffrée utilisée concomitamment adopte un système positionnel donc dans lequel n'apparaît pas le nom de ces derniers. En conséquence, différents types de numération orale et numération écrite ont coexisté et coexistent encore dans une même civilisation, sans qu'on puisse affirmer que l'un dérive de l'autre. Le cas de l'Inde est cependant particulier. Il atteste d'une certaine proximité entre les systèmes écrits et oraux, sans que l'on puisse toutefois trouver une généalogie claire, au vu des nombreuses numérations parlées et écrites qui s'y sont succédé et côtoyé⁹⁵.

Ceci questionne alors les deux systèmes que nous étudions : la seule possibilité théorique pour des principes mathématiques communs restant l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée.

Des numérations comme outils pour résoudre des problèmes

Nous retenons que les liens peuvent s'éclairer par des arguments linguistiques, ce que nous avons en partie fait dans les chapitres précédents. Mais ici nos lectures nous ont amené à considérer l'influence des problèmes que rencontrent les hommes et que permettent de résoudre les numérations.

Ainsi, les désignations écrites se sont développées sous trois « besoins mathématiques » principaux :

- pour traduire l'oral,
- indépendamment de l'oral pour noter la cardinalité à partir de signes écrits symbolisant les nombres⁹⁶,
- pour faire évoluer une écriture antérieure.

⁹⁴ A noter que pour les systèmes les plus anciens, bien souvent il ne reste que les écritures, ce qui ne permet pas toujours facilement de savoir quelles ont été les numérations parlées utilisées.

⁹⁵ Ifrah décrit de manière détaillée les différentes langues et chiffres utilisés en Inde ainsi que leur diffusion. Le tableau « généalogique » p. 861 sur les chiffres et le dictionnaire sanskrit relatif aux symboles numériques indiens, p. 12 à 198 (!) du tome 2, donne un aperçu de la complexité.

Ifrah indique p. 922 que les nombres ont été d'abord écrits en toutes lettres (la poésie y ayant une influence importante), puis des symboles (des chiffres) ont été utilisés. Ainsi en ce qui concerne les liens (voire un passage) entre une numération orale non positionnelle (les appuis/ordre sont prononcés) et une numération orale positionnelle (seuls des coefficients sont prononcés, dans un certain ordre), nous remarquons que parfois sont prononcés les appuis et d'autres fois ils ne le sont pas. Dans ce dernier cas nous avons noté que l'usage en est fait tout d'abord par des spécialistes. En outre, p. 924, Ifrah indique l'existence d'une forme intermédiaire dans laquelle les noms des différents chiffres sont bien énumérés sans les appuis/ordres auxquels ils se réfèrent, mais un même chiffre porte des noms différents selon sa place dans l'ordre d'énumération.

⁹⁶ Voir aussi à ce sujet Bideaud, Lehalle, Vilette, (2003), p. 27 en particulier.

Ces trois nécessités « mathématiques » sont étroitement mêlées, nous allons essayer de décrire ces liens.

Les désignations parlées des nombres reflètent (en abstrayant) et développent (en manipulant des abstractions) certains aspects du nombre, il en est de même des désignations liées à un système de numération écrite. Revenons à ce qui les distingue fondamentalement.

Des outils pour communiquer et se souvenir

L'écriture des nombres, dans sa fonction de trace mémorielle ou/et de communication de la quantité, peut être uniquement le reflet de l'oral et il n'y a pas nécessité d'écrire des chiffres à l'aide d'un système de numération ne reflétant pas l'oral, Charbonnier (2004) p. 12, 13 et 20, Guitel (1975). Autrement dit, en considérant cet emploi, il n'y a pas d'intérêt d'inventer un système d'écriture des nombres autre que celui reflétant les mots de la langue parlée. Pourquoi alors certains systèmes d'écriture symbolique ont-ils précédé les systèmes d'écriture langagiers ? La raison essentielle nous semble que les concepts sous-jacents peuvent être plus facilement symbolisés que d'autres, via les possibilités graphiques des signes utilisés dans les numérations écrites⁹⁷. En effet les premiers écrits sont des signes (traits, encoches ou autres) en nombre égal à la collection dont ils veulent signifier le cardinal. Les premières numérations écrites sont ainsi possibles grâce à la propriété de conservation spatiale et temporelle de la quantité (une collection reste équipotente à une autre quelles que soient les dispositions spatiales des éléments et indépendamment de l'instant considéré). Les premières numérations écrites utilisent donc en acte l'aspect cardinal du nombre C'est pourquoi, cette possibilité de représenter les quantités avec des signes écrits a été exploitée historiquement très tôt, avant l'utilisation des premiers systèmes d'écriture des mots de la langue parlée⁹⁸. Ainsi ce sont ces systèmes d'écriture qui ont pu assurer un rôle spécifique dans la communication (dans l'espace) et dans la trace mémorielle (dans le temps).

Les outils mathématiques que les numérations permettent de développer pour résoudre des problèmes.

En outre chacun des deux types de systèmes, écrit et oral, est utilisé dans des emplois différents (problèmes différents, fonctions différentes par rapport à la communication et à la mémorisation) qui peuvent avoir une efficacité comparable (par exemple estimer le cardinal de certaines collections ni trop grandes ni trop petites) ou différente (diviser des « grands » nombres). Ils développent ainsi une exploration du concept de nombre différente, non seulement du fait de leur processus de fonctionnement interne (leur interprétant), mais aussi via les outils qu'ils permettent d'exploiter, par exemple le calcul mental pour l'un et le calcul posé pour l'autre. Les problèmes qui engagent les nombres ont été historiquement un moteur de l'évolution des systèmes de numération. Ils ont motivé la création, l'adoption puis

⁹⁷ La graphie (par exemple I I I I) est initialement plus proche d'une représentation de la quantité par une collection équipotente, ce qui est lié à la nature cardinale du nombre (toute collection équipotente désigne le même nombre) et ce qui permet aussi d'accéder à une certaine abstraction par la décontextualisation. Ainsi par exemple, quatre encoches I I I I, permettent non seulement de coder une quantité, mais en plus de la décoder (par association terme à terme). Ainsi peut-on vérifier (collection présente), communiquer à distance et garder en mémoire. Ces signes désignant les nombres acquièrent peu à peu le statut de chiffre quand ils s'éloignent de la représentation de la quantité plus ou moins figurée (type 1) pour indiquer une organisation de celle-ci (type 3) : il ne s'agit plus uniquement de « schématiser » les quantités par des symboles figuratifs. De ce point de vue, un représentant de la numération devient un chiffre quand il accède simultanément au double statut de signe désignant une quantité et de signe désignant un groupement (de par son emplacement dans l'écriture).

⁹⁸ On peut aussi considérer d'un autre point de vue que ces signes ont été les premiers mots traduits de la langue parlée. Ici nous voulons insister sur le fait que cette « traduction » primitive n'est pas hasardeuse. Elle ne provient pas uniquement des besoins des hommes à communiquer sur les quantités, mais aussi de la nature des concepts sous-jacents qui se prêtent à une écriture symbolique.

l'évolution de tel ou tel système du fait de leur efficacité dans les résolutions. Chacune des désignations écrite et orale permet de résoudre des problèmes différents qui permettent d'explorer différemment le domaine des nombres.

Nous avons classé ces problèmes selon ce que les désignations permettent d'apporter comme connaissances mathématiques sur le nombre. Ce classement a pour but de donner un aperçu de la diversité des problèmes et du rôle que peuvent jouer les systèmes de numération dans les mathématiques :

- problèmes de 1^{er} espèce : écrire et dire les nombres entiers pour transmettre une information sur une quantité (discrète), une mesure exacte ou un ordre de mesure de la quantité,
- problèmes de 2^{ème} espèce : écrire et dire les nombres entiers pour permettre d'élaborer des techniques opératoires sur les entiers,
- problèmes de 3^{ème} espèce : écrire et dire les nombres non entiers pour permettre l'extension des systèmes de numération à d'autres nombres que les entiers (fractions, racines, décimaux).
- problèmes de 4^{ème} espèce : écrire et dire les nombres pour permettre une exploration des structures des ensembles de nombres.

Dans cette dernière espèce, il s'agit de faire des investigations sur les nombres en explorant les propriétés des systèmes de numération, utilisant entre autres les facilités opératoires qu'ils génèrent et l'organisation qu'ils sous-tendent (les structures de corps, de groupe, d'anneau, mais aussi les liens entre les nombres, les catégories de nombres - parité, multiple de, nombres premiers)⁹⁹.

Nous distinguons deux grands types d'investigation du champ numérique : d'une part un champ « externe » aux nombres dans la mesure où ceux-ci (et les calculs afférents) constituent un outil pour résoudre des problèmes qui ne relèvent pas de questions qu'on se pose primitivement sur les nombres, et d'autre part un champ « interne » aux nombres, cette fois-ci on se pose directement des questions sur les nombres. Dans les investigations « externes » se situent tous les problèmes mettant en jeu des quantités ou grandeurs manipulables ou figurées. Dans les investigations « internes » se posent par exemple pour les entiers les questions de la théorie des nombres. Ces deux types ne forment pas des catégories disjointes, souvent les problèmes de l'un nourrissent ceux de l'autre.

La place de la numération en unités

Les lectures que nous avons faites nous donnent à penser que la numération « en unités » peut être un moyen de résoudre certains problèmes spécifiques dus à la mesure des grandeurs, mais d'après notre analyse, elle ne peut pas être considérée *a priori* comme la source des numérations. Nous allons reprendre cette question en ce qui concerne particulièrement les numérations en jeu dans ce travail.

1.2 Etude de la genèse du système de numération chiffrée de position et parlée en français

Nous ne reprenons pas les remarques précédentes qui sont valables pour l'ensemble des numérations, et donc pour les deux que nous étudions en particulier. Nous allons indiquer brièvement quelques particularités.

⁹⁹ En outre, il est possible de faire la différence entre d'un côté les catégories et structures qui sont indépendantes d'une désignation, mais dont cette dernière facilite l'accès (nombres premiers, corps, groupe, anneau, rationnels), et d'un autre côté celles issues du système de représentation (par exemple les nombres décimaux, les multiples de 10).

a. Quelles sont les filiations et évolutions repérées ?

Notre numération parlée est issue directement de la numération parlée latine et a donc des origines indo-européennes¹⁰⁰, ce qui explique que bon nombre de numérations parlées en occident puissent être interprétées comme nous l'avons fait dans le chapitre 3. Le système de numération écrite chiffrée vient pour sa part d'Inde. Ifrah donne une description précise des différentes langues (en particulier le sanskrit) et écritures qui peuvent être reliées à sa genèse. Nous avons déjà indiqué des éléments d'ordre général qui ont participé à son apparition. Rappelons simplement ici qu'il est, à l'origine, adapté à la transcription des mots de certaines numérations parlées mais que son caractère écrit permet aussi de s'en distinguer pour résoudre des problèmes spécifiques. Lorsque les premiers occidentaux commencent à l'utiliser, vers l'an mil¹⁰¹, à la suite des arabes, il ne peut pas être considéré comme étant une traduction écrite des mots de la numération alors parlée. Le système de numération écrite chiffrée aurait pu cependant être adopté rapidement, tout au moins par les lettrés, mais de fait il n'en a pas été ainsi. Nous allons donner brièvement deux éclaircissements à ce phénomène. Ils sont issus des lectures déjà citées et nous les traduisons dans les termes propres à notre travail.

Notre système de numération écrite chiffrée, en tant que système d'écriture de type 3 permet de disposer de techniques particulières pour résoudre des problèmes mettant en particulier en jeu les quatre opérations. Cependant, son fonctionnement est loin de celui d'une numération « agie », en référence à des objets manipulables ou/et des gestes, comme c'est le cas des systèmes de type 1 et dans une moindre mesure de type 2. Ainsi, son efficacité pour faire les opérations comporte une certaine contrepartie : le « coût » de la plus grande complexité du code. Qui plus est, il ne révèle son efficacité que pour des opérations assez complexes et pour des nombres relativement grands¹⁰² : la numération parlée en France, la numération en unités, les abaques ou des systèmes écrits de type 1 (et même 2) sont plus adaptés pour résoudre des problèmes additifs (mettant en jeu des additions ou des soustractions) voire multiplicatifs (mettant en jeu la multiplication). Par ailleurs une grande partie de problèmes « quotidiens » est concernée par ce champ numérique et ces opérations. Ceci peut fournir une première argumentation au fait que, même après son introduction en occident, l'usage du système chiffré décimal de position fut lent à s'imposer comme outil de calcul à la plupart de la population, même chez les scientifiques¹⁰³. Il eut aussi du mal à s'imposer comme « simple » système de notation écrit des nombres désignés dans la langue maternelle, la numération latine la concurrençant longtemps. Si l'interprétation de la numération parlée en France était de l'ordre d'une numération arithmétique multiplicative, est-ce que les « difficultés » auraient été les mêmes ?

b. Le rôle de la mesure, celui des problèmes à résoudre

Ici, nous ne revenons pas sur ce qui a été dit précédemment sur le rôle des problèmes, du champ numérique, et les possibilités de développement mathématique que permettent les différentes numérations. Signalons cependant que pour des additions, des soustractions et des

¹⁰⁰ Certains auteurs, dont Guitel (1975, p. 100), pour expliquer certaines particularités de la numération parlée en France, comme quatre-vingts, émettent l'hypothèse d'un croisement avec une ou des numérations celtes utilisant des groupements de vingt, la numération étant à l'origine fondée sur des groupements de dix. Ceci va dans le sens de notre analyse linguistique du chapitre 3.

¹⁰¹ Gerbert d'Aurillac (938-1003) est souvent cité comme précurseur en la matière.

¹⁰² C'est-à-dire grands relativement au nombre de groupements à utiliser, ce qui dépend du système adopté.

¹⁰³ D'autres facteurs, politiques et religieux en particulier, entrent aussi en jeu, comme par exemple la lutte de l'abacisme contre l'algorithme relatée par Ifrah p. 344-367.

multiplications (voire certaines divisions) et pour un certain champ numérique, la numération parlée en France est performante¹⁰⁴.

Revenons sur la numération en unités en abordant les problèmes consistant à mesurer des grandeurs. En fait nous avons une multitude de numérations utilisant un système d'unités. Nous avons donc des numérations en unités¹⁰⁵.

Nous constatons que beaucoup de systèmes pour mesurer les grandeurs sont utilisés avant que le système métrique ne se soit imposé (en France, ce ne fut qu'en 1789 et ceci nécessita une loi ; il fallut encore un siècle pour qu'il soit d'usage courant). Ils se côtoient et peuvent, tout en étant différents, concerner des mêmes grandeurs¹⁰⁶ à une même époque et parfois même dans des mêmes lieux géographiques (ou tout au moins voisins). Le nom de leurs unités peut être le même (par exemple le pied) sans qu'elles soient égales. Elles font donc référence non seulement à des unités « étalons » différentes mais aussi à des échelles de numération différentes. Il y a donc une grande diversité de numérations en unités, et elles ont (co)existé en utilisant des échelles différentes alors même qu'une unique numération parlée était disponible. En outre, elles permettent de partager une unité, quand celle-ci est sécable comme c'est le cas pour des grandeurs continues, autrement qu'en utilisant des fractions. Il suffit d'introduire une unité plus petite comme sous multiple. Ainsi, nous voyons que les problèmes relatifs à la mesure des grandeurs ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux relatifs aux nombres. Le lien entre numération(s) en unité(s) et numération (que ce soit parlée ou chiffrée) est complexe, et ne peut être réduit à un problème de généalogie et encore moins de filiation au niveau historique. Nous notons cependant que le système métrique se fonde sur une numération de base dix et que les écritures chiffrées facilitent alors les calculs. Mais ce système a dû être imposé en France récemment en comparaison des systèmes de numérations en usage, ensuite il a diffusé dans le monde entier comme outil de communication¹⁰⁷.

1.3 Bilan

La mise en perspective dans l'ensemble des numérations met en évidence certains « passages¹⁰⁸ » épistémologiques propres à chaque numération et certains éléments de non-congruence.

Des exemples permettent notamment de mettre en exergue et d'affiner l'analyse de ces « passages » épistémologiques déjà apparus dans l'étude des chapitres précédents : le passage des principes mathématiques à la mise en signes dans une langue ou une écriture, le choix des nombres qui structurent plus finement les mathématiques sous-jacentes. L'étude de la genèse des deux numérations permet d'éclairer la complexité de leurs liens.

D'un côté, la numération écrite chiffrée semble apparaître en Inde à la fois du fait de sa proximité avec certaines numérations parlées comme le sanskrit (mais qui influence qui ?), d'un système d'écriture ancien (une évolution d'un type 2 vers un type 3 ?) et de sa performance pour résoudre certains problèmes (en particulier certains calculs). D'un autre, la

¹⁰⁴ Nous pensons en particulier au calcul mental. En ce qui concerne le calcul réfléchi, c'est-à-dire un calcul mental assisté par des notes écrites concernant certaines étapes, des écritures chiffrées peuvent être employées pour traduire à l'écrit les désignations parlées,

¹⁰⁵ Sauf contexte spécifique, la numération en unité fera pour nous référence à celle utilisant les mots unité, dizaine, centaine, millier, million, etc.

¹⁰⁶ Pour une analyse des grandeurs et mesures utilisée pour construire les nombres (en particulier les irrationnels), voir Rouche (1992). Pour une étude de l'utilisation dans le domaine scolaire voir Chambris (2008).

¹⁰⁷ Signalons que les pays anglo-saxons n'utilisent pas nécessairement le système métrique dans la vie courante, et parfois même c'est le cas aussi dans des articles scientifiques.

¹⁰⁸ Comme nous ne nous mettons pas encore dans une perspective d'apprentissage, nous n'utilisons pas le terme « obstacle », mais certains de ces passages sont susceptibles d'être analysés en termes d'obstacles épistémologiques.

numération parlée en France a des origines indo-européennes via le latin. Les nombres dix, vingt, trente, ..., cent, y sont présents dès le début. Les nombreuses variations des langues indo-européennes attestent de la marque des influences culturelles en particulier dans l'évolution des représentations. La perte de trace du dix initialement en jeu dans le nom des nombres « onze » et « douze » dans beaucoup de langues indo-européennes (en français cela va même, dans une moindre mesure, jusqu'à seize) renforce la pertinence d'une interprétation strictement ordinale pour les « petits » nombres.

D'autres influences sont à noter, influences qui interviennent dans les numérations écrites et chiffrées avec des poids différents. Ainsi, ceux qui utilisent les numérations le font dans des domaines différents, ce qui engage à résoudre des problèmes d'espèces différentes et donc à utiliser (et faire évoluer) les numérations dans des interprétations différentes : en particulier l'aspect écrit favorise l'exploration de certaines propriétés des nombres. Par ailleurs, les rencontres avec d'autres systèmes sont aussi à même de modifier les systèmes de numération initialement utilisés. Par exemple, les différents systèmes écrits corrélés initialement à la langue sanskrite ont pu permettre l'émergence du système décimal de position. La numération parlée vigésimale celte a pu influencer la numération décimale latine dans la formation de la numération parlée en France.

Ainsi, les systèmes écrits ne sont pas nécessairement congruents aux systèmes parlés au même moment dans le même pays, et nous avons signalé en quoi le système positionnel des écritures chiffrées n'était pas à l'origine celui utilisé pour traduire par écrit les mots de la numération parlée dans le territoire qui est devenu la France.

En ce qui concerne le rôle joué par les numérations en unités, nous notons qu'elles se réfèrent à des principes liés à des changements d'unités. Or ceux-ci n'ont pas de nécessité à être régulièrement obtenus par multiplication par un même nombre (cela dépend en général d'un contexte particulier, comme la monnaie ou un type de grandeur), alors que dans les numérations parlées cette régularité est presque toujours observée et que la numération écrite chiffrée est de base dix. En outre, selon les éléments que nous avons recueillis, l'interprétation de la numération en unités est arithmétique multiplicative, alors que, tout au moins pour les nombres inférieurs à cent, la numération parlée est plus facilement interprétable comme numération ordinale (avec repérants) ou arithmétique additive. Néanmoins, via le système métrique, certains liens sont possibles, à la fois avec la numération parlée en France (par son caractère oral et le choix des nombres d'appui, ceci concerne la deuxième partie de l'interprétant) et le système positionnel des écritures chiffrées (du fait des principes de base dix, ce qui concerne la première partie de l'interprétant).

2. Conclusion de la première partie de la thèse

2.1 Synthèse

a. Les interprétations

Rappelons que le mot interprétation pour une numération fait référence à une analyse telle qu'elle a été entreprise dans le cadre de cette thèse, c'est donc une interprétation faite par le chercheur. Le terme « interprétant » est un emprunt à la sémiotique de Peirce, emprunt dont nous avons signalé les limites. Nous relevons ici quelques aspects dans la perspective d'une étude de l'apprentissage du nombre en classe de CP.

Quels choix ?

Pour présenter les résultats, nous allons donner les différents choix en ce qui concerne les interprétations, en indiquant en quelques mots des arguments sur leur pertinence qui renvoient au travail fait dans cette première partie de la thèse.

L'interprétation de référence est celle dégagée dans le chapitre 2 pour le système d'écriture chiffrée que nous étudions. Son qualificatif « de référence » renvoie au fait que selon la méthode d'analyse que nous avons employée, convoquant la théorie des langages, il n'y a qu'une seule possibilité au niveau de la première partie de son interprétant : une décomposition dite polynomiale renvoyant à des principes de base dix. Ce qualificatif évoque aussi tous les éléments que nous avons dégagés.

Nous avons mis l'accent, en particulier grâce aux procédés concrets de mise en signes du cardinal d'une collection, sur le fait que la numération écrite de position est intrinsèquement liée au fait de coder une organisation. L'organisation est dans ce sens « première », c'est-à-dire qu'elle constitue une première étape nécessaire, elle n'est pas une conséquence des procédés comme c'est le cas pour les numérations parlées. Dans cette étape un premier choix a été fait, c'est le choix de dix pour base. La deuxième étape consiste alors à effectuer un premier choix pour le code : n'utiliser que les coefficients du développement « polynomial » (ce qui le différencie des numérations de type 1 et 2 dans la terminologie d'Ifrac). La troisième étape permet d'achever le processus de codage par le choix d'une « présentation » de ces coefficients : choix de la graphie pour les chiffres (0, 1, ..., 9), indication de la correspondance chiffre/ordre (chiffres écrits sur une même ligne horizontale dont la lecture de droite à gauche est à coupler à une énumération croissante des ordres).

Finalement, nous avons indiqué dans la partie historique un éventail des problèmes et des explorations mathématiques que permettaient d'aborder notre système d'écriture chiffrée. Ceci est dû non seulement à son aspect écrit (communiquer dans le temps et l'espace, considérer les écritures chiffrées comme des « objets » visibles) mais aussi aux caractéristiques de son interprétations (de référence).

L'interprétation arithmétique multiplicative a été utilisée pour analyser la numération parlée en France et pour des numérations en unités.

La première partie de son interprétant peut être liée à une échelle de numération. Pour les numérations en « unités », il n'y a pas lieu d'utiliser une échelle régulière, et ce n'est en effet pas forcément le cas (l'exception notable étant le système métrique). Pour la numération parlée en France, on constate que les appuis multiplicatifs utilisés comportent des régularités qui engagent à une première partie de l'interprétant selon des principes de base. Ces principes sont, au niveau des petits nombres, ceux de la base dix, et de base mille pour les nombres supérieurs à mille. Le fait de retrouver des principes de base a été éclairé par des arguments linguistiques, ce qui d'une certaine manière peut contribuer à expliquer pourquoi les numérations en unités ne sont pas nécessairement interprétables à l'aide du principe de base (alors que c'est en général possible pour les numérations parlées, comme l'indique Ifrac). En outre, nous avons indiqué en quoi l'interprétation multiplicative est plus pertinente pour les nombres supérieurs à mille. Ainsi, dans le cas où la base mille est retenue, pour les nombres inférieurs à mille c'est l'interprétation ordinale qui est cohérente (le premier appui multiplicatif étant mille). Dans le cas où on retient une base dix pour les nombres inférieurs à mille, du fait de la constitution de representamens, les procédés concrets de mise en signes requéraient des étapes et des règles plus nombreuses que pour les autres interprétations. C'est un des arguments qui rend moins pertinente l'interprétation arithmétique multiplicative pour les nombres inférieurs à cent. A noter finalement que les systèmes écrits qui sont les plus

proches d'une interprétation arithmétique multiplicative sont ceux de type 2, ceux qui utilisent les ordres et les coefficients, ce qui fait écho au fait de prononcer les appuis multiplicatifs.

L'interprétation arithmétique additive a été utilisée pour analyser la numération parlée en France. Elle se fonde sur le fait de décomposer un nombre entier quelconque en une somme d'un nombre constitutif de la numération (leur suite est la suite des appuis additifs) et de la différence avec ce dernier. Les appuis additifs, dix, vingt, trente, etc. sont structurés selon une suite arithmétique de dix, puis cent. Pour éclairer cette structure, nous avons développé des arguments linguistiques dans lesquels interviennent des principes d'économie de mots (principe de maximalité). Ce principe est envisageable au-delà de mille, mais l'analyse des représentations montre que cette interprétation est plus pertinente pour les nombres inférieurs à mille (et encore plus pour ceux inférieurs à cent), ce que renforcent l'étude des procédés concrets de mise en signes. A noter que ces procédés nécessitent une étape de moins que ceux de l'interprétation multiplicative. Par ailleurs, les systèmes écrits qui sont les plus proches d'une interprétation arithmétique multiplicative sont certains systèmes de type 1, non pas ceux qui utilisent (uniquement) les ordres, mais des groupements dix, vingt, trente, etc.

Le modèle utilisant les couples (G_i, n_i) nous permet de retrouver une certaine proximité avec l'interprétation multiplicative, mais il existe aussi un certain écart, « trente » tant vu comme « vingt plus dix » et non comme « trois fois dix ». En outre ce modèle convient bien aussi aux numérations en unités en considérant la maximalité forte pour le choix des G_i . Quand les n_i ne sont pas tous identiques, il permet en particulier de rendre compte des numérations en unités « non régulières »¹⁰⁹. Ceci met en perspective la numération en unité plus régulière qui sert à dénombrer des quantités discrètes utilisant les termes dizaine, centaine, etc.¹¹⁰.

L'interprétation ordinale a été utilisée pour analyser la numération parlée en France.

Elle comporte une version sans repérant intrinsèquement liée à l'utilisation d'une comptine, c'est-à-dire une suite immuable d'items sans lien entre eux (aspect ordinal), le dernier item prononcé dans une énumération annonce le cardinal. Les premières numérations utilisées par les Hommes sont des numérations ordinales sans repérant, par exemple constituées d'un repérage sur le corps.

Pour les premiers nombres, cet aspect ordinal sans repérant est une nécessité. Ce n'est qu'ensuite qu'une numération peut éventuellement se constituer en système (sémiotique). Cependant, pour la numération parlée en France, l'interprétation ordinale sans repérant est pertinente non seulement pour les nombres jusqu'à dix mais aussi jusqu'à seize (du fait de la non reconnaissance du repérant dix sans une analyse morphologique fine)¹¹¹.

Dans l'interprétation ordinale avec repérant que nous avons faite de la numération parlée en France, la suite des repérants peut être analysée comme provenant de la suite des neuf premiers nombres énoncés entre deux repérants. L'analyse syntaxique, la signification du mot « et », l'existence de numérations utilisant sans conteste pour certains nombres un principe d'antériorité réflexive (le latin par exemple), l'interprétation ordinale « stricte » pour au moins les premiers nombres, montre que cette interprétation est (la plus) pertinente pour les nombres inférieurs à cent. En outre, le procédé de mise en signes ne comporte qu'une seule étape.

¹⁰⁹ Nous pensons par exemple à la monnaie utilisée à l'époque de Pascal, douze deniers dans un sol, vingt sols dans une livre, ou encore au système de mesure des longueurs, six pieds dans une toise.

¹¹⁰ Nous retrouvons comme dans la numération parlée en France la particularité du passage à dix mille puisqu'un terme spécifique n'existe pas pour désigner l'unité « dix mille »

¹¹¹ C'est le cas pour les nombres au moins jusqu'à onze ou douze dans beaucoup de numérations d'origine indo-européenne

Tous les procédés concrets de mise en signes mettent en avant l'utilisation de compteurs pour dénombrer des unités ou/et des ordres supérieurs (l'interprétation additive n'utilise pas de compteurs à proprement parler pour obtenir le nom des appuis additifs, mais leur nom est prononcé au fur et à mesure en additionnant dix). En outre, les étapes nécessaires obligent à une structuration au fur et à mesure de la collection. Une organisation en est éventuellement le résultat, mais elle n'en est pas le but.

b. Bilan : de la non-congruence

Dans la numération parlée, tout se passe comme si deux principes coexistaient : l'ordinal pour les nombres inférieurs à cent (i.e. avant de passer à un deuxième type de groupement/appui/repérant), le cardinal pour les nombres supérieurs à seize. Une zone mixte, de seize à cent, permet alors à une interprétation arithmétique additive d'être plus pertinente qu'une interprétation arithmétique multiplicative (l'ordinal avec repérant le restant aussi), de fait puisqu'il n'y a qu'un seul type de groupement en jeu. Ainsi nous pouvons faire l'hypothèse que la structure pour les nombres inférieurs à mille (et plus encore cent) a permis d'une certaine manière d'initier des groupements réguliers, qui, entre autres pour des contraintes linguistiques que nous avons indiquées, a permis de structurer la numération en base mille. D'autres choix sont possibles, preuve en est l'existence des numérations « régulières » de certains pays asiatiques. Pour des grands nombres (supérieurs à mille), il nous semble cependant que la constitution des numérations se fonde plus sur une application de principes que sur des manipulations concrètes d'éléments de collections (par exemple calcul sur des grandes quantités par manipulation de signes ou d'objets représentant des groupements de dix, cent, mille).

D'un point de vue historique, nous avons mis en évidence des points communs entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée. Le français et le sanskrit sont des langues indo-européennes. Or cette dernière a donné une numération parlée « traduite » à l'écrit par un système d'écriture qui a évolué vers un système chiffré positionnel, système dont est issu celui que nous avons adopté. Nos deux numérations permettent en outre de résoudre des problèmes relatifs aux nombres¹¹².

Cependant les contraintes dues à la forme orale et à la forme écrite les différencient, et ceci très tôt dans l'histoire, ce qui forge des outils nécessairement différents. Ainsi, pour résoudre les problèmes, les « solutions » écrites n'ont pas été les mêmes que les solutions orales. Les deux systèmes ont donc pu évoluer indépendamment car ne résolvant pas les mêmes problèmes et n'étant pas employés par les mêmes personnes¹¹³. La question relative au fait de dire les écritures ou d'écrire les mots se pose pourtant, mais pas de la même façon suivant les époques et les utilisateurs. Ainsi, les numérations ne sont pas nécessairement congruentes. Autrement dit, les numérations parlées (en particulier celle parlée en France) n'ont pas évolué sous la seule influence de dire les écritures. Réciproquement les systèmes d'écriture des nombres (en particulier celui de position utilisé actuellement en France) n'ont pas évolué sous la seule influence d'écrire les désignations orales. Ceci permet de comprendre sous un autre angle les différences relevées.

Ainsi, l'écriture chiffrée n'est pas la version écrite de la désignation parlée en France, mais elle peut être utilisée ainsi, comme c'est le cas dans quasiment tous les pays actuellement, et ceci quel que soit le système de numération parlée. La base dix sous-jacente possède des caractéristiques qui permettent des passages vers la numération parlée en France qui, elle, utilise des appuis dix, cent, mille. Cependant notre numération parlée diffère du système positionnel d'écritures chiffrées en particulier pour les nombres inférieurs à cent : par son

¹¹² Le premier chapitre « *L'ethnologie et la psychologie des nombres : pour une explication des origines* » de l'ouvrage d'Ibrah nous semble en faire la démonstration.

¹¹³ En théorie anthropologique nous pourrions dire qu'ils n'ont pas la même niche écologique.

aspect ordinal, par sa syntaxe qui permet difficilement de retrouver la base dix, et aussi par les procédés de mise en signes. Ainsi dans notre numération parlée les appuis sont prononcés (avec une certaine congruence avec une numération écrite de type 1 ou 2 d'Ifrah mais pas de type 3) et l'organisation n'y tient pas le même rôle. Cette organisation y reste un besoin pratique pour la mise en signes concrète (l'organisation peut « disparaître » au fur et à mesure du procédé, l'utilisation d'un compteur est omniprésente), tandis qu'elle est une étape constitutive du procédé pour la numération écrite chiffrée.

2. 2 Les questions

Nombre de questions se posent encore. Cependant nous avons d'une part éclairé les liens possibles entre les mathématiques et les numérations et d'autre part précisé la non-congruence.

Cette partie a permis d'élargir le champ des interprétations possibles des nombres. Ceci est susceptible ainsi d'élargir le champ des interprétations possibles de ce que font les élèves et aussi le champ des situations à leur proposer. Ce sont ces aspects que nous allons traiter dans la suite de la thèse. Sachant la non-congruence au niveau de l'épistémologie des contenus, quelle en est la conséquence pour l'apprentissage ? Pour l'enseignement ?

Cependant les questions relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de la numération ne sont pas neuves. Beaucoup de propositions ont été faites, aussi bien du côté des chercheurs que du côté des auteurs de manuels, les deux étant susceptibles d'être liés. Ces propositions sont un premier niveau prenant en compte les différentes interprétations pour la classe et nous allons l'étudier dans la deuxième partie de la thèse.

Mais, si nous avons choisi d'étudier les signes de la numération comme un langage, c'est aussi parce que ce langage est utilisé en classe pour communiquer. Ainsi les signes, oraux et écrits, peuvent faire référence à différentes interprétations. Certaines de ces interprétations véhiculent un savoir nouveau au CP. Pour la numération écrite chiffrée, les éléments mathématiques ont été dégagés dans l'interprétation de référence. Or, les « mêmes » signes peuvent convoquer des interprétations différentes. En particulier c'est le cas de l'écriture chiffrée qui, tant qu'elle est conçue comme une version écrite des désignations parlées, ce qui est le cas pour les élèves arrivant au CP, est susceptible de faire référence à des principes mathématiques non-congruents à ceux de l'interprétation de référence. C'est aussi le cas des désignations parlées susceptibles d'être reliées à des interprétations différentes. Au-delà des propositions étudiées dans la deuxième partie de la thèse, nous entreprenons une étude de l'emploi de ces différents signes en classe, c'est l'objet de la troisième partie de la thèse.

Les procédés concrets de mise en signes que nous avons indiqués, soulignent qu'un « même » procédé peut se justifier mathématiquement relativement à plusieurs interprétations : cela montre que le côté des élèves est à la fois dans la deuxième partie et dans la troisième partie.

Prendre en compte l'étude de la première partie suppose tout d'abord de faire le lien avec le sujet : passer de l'interprétation sémiotique à l'interprétation de celui qui utilise les numérations. C'est l'objet du chapitre 4, le premier de la deuxième partie de la thèse.

DEUXIEME PARTIE

Apprentissage et enseignement de la numération au CP

Une analyse de l'existant

CHAPITRE IV p. 115
Cadre théorique, problématique, méthodologie

CHAPITRE V p. 153
Des itinéraires proposés dans les recherches antérieures

CHAPITRE VI p. 179
Des itinéraires proposés dans les manuels scolaires

<p>CHAPITRE IV</p> <p>Cadre théorique, problématique, méthodologie</p>
--

Introduction	116
1. Des éléments de la théorie des champs conceptuels à adapter au contexte de la thèse	116
1.1 Les points essentiels retenus	117
1.2 Précisions sur le lien interprétation/sujet.....	120
2 Cadre théorique.....	121
2.1 La comparaison du cardinal de deux collections de points	121
a. Description	121
b. Des situations aux problèmes, des schèmes aux connaissances-en-acte.....	123
2.2 Vers une modélisation de l'apprentissage de la numération chiffrée de position	124
a. Cadre théorique	125
b. Discussion : les possibles de l'analyse	128
c. Modélisation du processus de conceptualisation.....	130
d. Vers les cheminements cognitifs.....	131
3 Les stratégies dans les problèmes : analyse en fonction des cheminements cognitifs. 132	132
3.1 Définitions	132
3.2 Les stratégies de « base »	134
a. Obtention d'un signifiant du cardinal d'une collection (signifiant/signifié(s))	134
b. Obtention du cardinal d'une collection à partir d'un signifiant (signifiant/signifié(s))	137
c. Passage entre deux signifiants (signifiant/signifiant)	138
3.3 Les cheminements cognitifs	140
a. Coder/décoder.....	140
b. Comparer le cardinal de collections	142
4. Conclusion.....	143
4.1 Des outils théoriques pour aborder de nouvelles questions	143
a. Le cadre théorique	143
b. Des outils et des réponses partielles	144
4.2 Les questions soulevées, celle retenues.....	146
4.3 Vers une problématique en termes d'enseignement.....	146
a. La notion d'itinéraire cognitif d'enseignement	146
b. La problématique d'enseignement au CP.....	147
c. Plan d'étude	152

Introduction

Le but de la thèse est de mieux comprendre le rôle que peut jouer la non-congruence dans les apprentissages et l'enseignement afin de nous donner les moyens de réaliser le projet annoncé, revisiter les manuels et les recherches puis comprendre les déroulements en classe.

Pour ce faire, dans une première partie nous avons analysé les mathématiques en jeu dans les numérations. Nous avons dégagé puis comparé des interprétations : une seule pour la numération écrite chiffrée de position, trois différentes pour la numération parlée en France (voire quatre en distinguant l'interprétation ordinale avec ou sans repérant). Nous avons étudié le rôle spécifique des collections d'objets et tiré des conséquences sur les liens avec le nombre dans son aspect cardinal et ordinal. Un des résultats est que les interprétations ne sont pas distinguables pour un observateur, que ce soit un chercheur ou un enseignant, qui regarde agir un sujet (un élève) qui met en signes concrètement le cardinal d'une collection d'objets manipulables ou figurés. Mais nous n'avons pas tenu compte des paramètres liés spécifiquement à l'apprentissage.

Il s'agit dans ce quatrième chapitre, le premier de la 2^{ème} partie, de comprendre quels sont les raisonnements, les propriétés utilisées, les cheminements de la pensée qui font écho aux interprétations dégagées. Nous nous situons dans des perspectives d'apprentissage et nous allons considérer un sujet cognitif générique. Plus précisément ici nous voulons nous donner les moyens de comprendre le rôle de la non-congruence, notion précisée dans la partie précédente au niveau des signes, cette fois-ci dans l'apprentissage et dans l'enseignement. Le but est de permettre de poser des questions, de choisir lesquelles nous allons étudier et comment les étudier.

Ce chapitre débute par une présentation des éléments théoriques de la théorie des champs conceptuels que nous retenons, théorie qui va servir de cadre général de référence. Dans un deuxième paragraphe nous contextualisons ces éléments dans le cadre de notre étude et y apportons quelques précisions. La notion de cheminement cognitif est alors développée en ce qui concerne les problèmes que sont susceptibles de rencontrer les élèves dans leur apprentissage de la numération écrite chiffrée de position. Ceci nous permet de définir la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement¹¹⁴ qui précise nos questions dans une problématique d'enseignement au CP. Nous terminons ce chapitre par l'indication du plan de l'étude que nous suivons par la suite.

1. Des éléments de la théorie des champs conceptuels à adapter au contexte de la thèse

Pour constituer notre cadre théorique, nous allons nous baser sur des éléments de la théorie des champs conceptuels (TCC), car ils permettent de répondre aux besoins exprimés. En effet,

¹¹⁴ Robert & Rogalski (2002) utilisent le mot « itinéraire cognitif » dans un sens différent, puisque c'est ce sont les activités proposées aux élèves qui ont été recomposées par une analyse didactique, analyse dans laquelle l'activité initiée par une tâche est vecteur et témoin des apprentissages. Au niveau conceptuel, pour les élèves, nous avons préféré le terme de « cheminement » pour ne pas introduire de confusion. Il traduit au niveau cognitif la complexité des « façons » de résoudre un problème. C'est au niveau de l'enseignement que nous avons utilisé le terme d'itinéraire, c'est-à-dire ni au niveau des élèves ni au niveau des enseignants. Il nous semble ainsi qu'il ne peut être confondu avec l'emploi qu'en font Robert & Rogalski. Ce terme d'itinéraire, accolé à celui de cognitif, nous semble approprié car il suggère de suivre un enchaînement *a priori* pour articuler les différentes interprétations. Parmi tous les possibles, c'est un choix qui prend en compte à la fois la non-congruence telle qu'elle a été analysée dans la première partie et les cheminements cognitifs des élèves pour résoudre un problème. Le chapitre va permettre de définir avec plus de précision ces notions.

d'après Vergnaud (1991), la TCC est une théorie pragmatique de la cognition dans le sens où elle a été élaborée dans des perspectives d'apprentissage en considérant d'une manière essentielle le contenu. Elle est adaptée à l'étude des apprentissages mathématiques, du fait que son auteur l'a mise en œuvre en particulier pour des concepts mathématiques, exemples emblématiques.

La TCC permet de considérer les problèmes en fonction des mathématiques sous-jacentes : une lecture « verticale » de cette classification permet de considérer l'ensemble des problèmes liés aux nombres entiers (classes de problèmes), une lecture « horizontale » permet de voir les liens avec les concepts connexes (extension du champ conceptuel). Dans cette organisation, nous pouvons alors voir le rôle spécifique des deux « pôles » qui ont été mis en relief dans les deux premiers chapitres, la numération parlée et la numération écrite de position, et ainsi mieux comprendre comment peut intervenir dans les apprentissages le problème de non-congruence précisé au niveau des mathématiques dans la première partie. A travers les notions de signifiant, signifié et (résolution de) problèmes, entrant simultanément en compte dans la conceptualisation, nous pouvons étudier dans un même cadre l'ensemble des propositions et réflexions sur l'apprentissage et l'enseignement.

Ceci nous donne en outre la possibilité, selon les choix que nous ferons sur les questions à traiter et la façon de les aborder, d'analyser les travaux anciens et les déroulements en classe. Précisons qu'en ce qui concerne ces déroulements en classe, la théorie des champs conceptuels se fonde sur le concept de schème (qui peut être inféré d'observations) des sujets/élèves et permet donc de tenir compte de l'historicité « réelle » des concepts des enfants de CP, en particulier de l'aspect développemental. Cependant à elle seule, elle ne peut suffire à prendre en compte tous les facteurs qui influent sur les déroulements en classe, et en particulier les moyens didactiques de mise en œuvre des situations à proposer aux élèves. C'est pourquoi nous serons amené à compléter ultérieurement le cadre théorique.

Par ailleurs, nous devons préciser dans cette introduction que le sujet cognitif générique que nous considérons *in fine* est celui qui arrive en classe de cours préparatoire avec un certain nombre de connaissances que nous aurons à identifier. Nous visons des apprentissages au sein d'une institution, celle de l'éducation nationale de nos jours. En outre, le cadre théorique doit mettre spécifiquement en relief la non-congruence des numérations dans le processus de conceptualisation. C'est sous ces angles que nous utilisons la TCC, ce qui nécessitera des apports complémentaires et l'élaboration d'outils théoriques propres à cette recherche.

Dans ce premier paragraphe, nous indiquons tout d'abord les points essentiels que nous retenons de la TCC afin de préciser en quoi elle permet de prendre en compte le problème décrit précédemment tout en respectant notre approche.

1.1 Les points essentiels retenus

Vergnaud (1991), indique qu'un concept se construit à travers l'exploration de propriétés, elles-mêmes mises en œuvre dans la résolution de problèmes en situation¹¹⁵ : « Une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques, conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations »¹¹⁶. Certains problèmes et certains signifiants sont

¹¹⁵ Le mot situation est à prendre ici dans un sens général, celui des psychologues, et non pas dans le sens que donne Brousseau. Ce point sera précisé dans la suite du paragraphe et dans les paragraphes suivants.

¹¹⁶ C'est nous qui soulignons ces passages extraits de Vergnaud (1991).

propres au concept visé. Un concept est donc constitué d'un triplet : la référence (les situations donnant du sens au concept), le signifié (l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes mis en œuvre dans les situations de la référence) et les signifiants (ensemble des formes d'expression, langagières ou non, utilisées dans les situations¹¹⁷). Revenons sur les termes de schème, situation et signifiant.

Vergnaud (1991), indique qu'un schème est l'organisation invariante de la conduite d'un sujet générique pour une classe de situations donnée. Cette organisation peut être algorithmique ou non, implicite ou non. Un schème est composé de règles d'actions et d'anticipations (il entraîne une suite d'actions ayant un but), mais aussi d'invariants opératoires (connaissances-en-acte) et d'inférences (« raisonnements »). Un schème est une totalité dynamique, structurée et fonctionnelle dont la finalité première est la seule efficacité, Vergnaud & Récopé (2000), Pastré (1997). L'opérationnalité d'un schème repose sur des conceptualisations implicites. Les connaissances-en-acte sont le cœur des schèmes dans le sens où elles se réfèrent directement aux contenus notionnels. C'est pourquoi nous allons les décrire plus précisément et nous nous appuyons en particulier sur l'article de Pichat (2001): « [...] *en tant qu'invariant opératoire, les connaissances-en-acte désignent des catégories de pensée tenues pour pertinentes et fonctionnelles (concepts en acte) et des propositions pragmatiques tenues pour vraies dont dérivent des possibilités d'action (théorèmes-en-acte)* ». Nous retenons de cet article que les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte sont tous les deux guidés par la finalité de l'action, mais qu'ils opèrent à deux niveaux différents. Le niveau le plus « global » est celui des concepts-en-acte. Ils permettent au sujet de trier et traiter les informations venant du réel en fonction de ses représentations¹¹⁸ (aspect épistémologique), et en fonction de l'efficacité de son action pour atteindre des buts (aspect opératoire). Le niveau le plus « local » est celui des théorèmes-en-acte. Ils sous-tendent l'activité représentative en termes de propriétés, de relations et de conditions (nous y voyons le lien avec les contenus notionnels) mais cette fois-ci appliquée à des objets (instanciation) afin d'assurer l'efficacité de l'action (Vergnaud, 1996). Instanciation et efficacité permettent alors aux théorèmes-en-acte d'offrir au sujet des règles d'action possibles. Les théorèmes-en-acte ont donc pour le sujet une visée pragmatique (savoir ce qui « marche ») et non épistémique (savoir pourquoi cela « marche »). Théorèmes-en-acte et concepts-en-acte fonctionnent de manière dialectique : les concepts-en-acte sont de type fonctions propositionnelles avec un ou plusieurs arguments alors que les théorèmes-en-acte sont des propositions instanciées de ces fonctions propositionnelles (Vergnaud, 1991).

Expliquons la façon dont nous comprenons dans notre travail les connaissances-en-acte. Face au texte « Soient $f(x)=2x+3$ et $g(x)=5x-2$, déterminer x tel que $f(x)=g(x)$ », les concepts-en-acte du sujet l'amènent à considérer qu'il devra résoudre une équation du premier degré (« résoudre » est relatif à l'aspect opératoire et « équation du premier degré » à l'aspect épistémologique). Quand il va s'agir de passer à la résolution de l'équation proprement dite, il va falloir tenir compte de la forme de l'équation (instanciation) afin d'assurer l'efficacité de son action. Il peut utiliser par exemple le théorème-en-acte « je passe $5x$ dans le membre de gauche en changeant son signe ». La question pour le sujet n'est pas alors de se demander pourquoi « c'est effectivement efficace » (il n'y a pas de visée épistémique) mais de savoir que « ça marche » (visée pragmatique).

Dans la théorie des champs conceptuels, un concept se construit à travers la résolution de problèmes proposés dans des situations, ces problèmes lui sont spécifiques et sont identifiables grâce aux schèmes qui sont à l'œuvre. Revenons sur ce terme de situation en citant Vergnaud (1991) :

¹¹⁷ Ce qui comprend entre autres les désignations orales et écrites des nombres.

¹¹⁸ L'insertion de ces informations dans les représentations est l'aspect structural des connaissances-en-acte.

« Le concept de situation a été beaucoup renouvelé par Guy Brousseau, qui lui a donné non seulement une portée didactique qu'il n'avait pas en psychologie, mais aussi une signification dans laquelle la dimension affective et dramatique intervient autant que la dimension cognitive. La mise en scène des concepts et des procédures mathématiques est un art qui s'alimente aussi bien à la psychologie sociale qu'à l'épistémologie et à la psychologie des mathématiques. Nous ne prendrons pas le concept de « situation » avec toute cette signification ici ; nous nous limiterons au sens que lui donne habituellement le psychologue : les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés. »

Ceci indique précisément la notion de situation qui intervient dans la TCC. Mais elle ne peut être comprise indépendamment de la notion de champ conceptuel. Le champ conceptuel est l'ensemble des situations impliquant les schèmes propres à un concept mais aussi l'ensemble des autres concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations et donc des concepts et théorèmes connexes. Par exemple, pour comprendre la tâche à faire dans un problème d'écriture du cardinal d'une collection d'objets, il faut aussi mobiliser des concepts sur le nombre, comme la cardinalité. Les problèmes relatifs à un champ conceptuel s'obtiennent à l'aide de relations de base avec des données et des inconnues. En tenant compte de l'épistémologie des savoirs en jeu et de leur immersion dans un ensemble d'informations plus ou moins pertinentes, nous retirons de l'exemple de Vergnaud (1991, p. 154) que les problèmes se complexifient alors selon trois grands facteurs : la structure du problème (combinaison des relations de base), les variables didactiques (en particulier les valeurs numériques), les variables relatives au domaine d'expérience. Pour compléter la description de la notion de champ conceptuel, citons encore Vergnaud (1991), l'extrait qui suit est la suite directe de l'extrait précédent :

« Et nous retiendrons deux idées principales :

- celle de variété : il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles ;*
- celle d'histoire : les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures que l'on veut leur enseigner. »*

Ainsi, avec les notions de variété et d'historicité, deux axes se profilent pour explorer le champ conceptuel. Un premier axe prend en compte les problèmes selon leur complexité « notionnelle », c'est-à-dire privilégiant l'épistémologie des contenus et les relations avec les autres concepts. Un deuxième axe prend en compte les connaissances du sujet, leur histoire.

Enfin, la conceptualisation s'opère grâce à des résolutions de problèmes situés mettant en œuvre des schèmes constitutifs du concept, et cette résolution s'accompagne de l'emploi de signifiants eux aussi spécifiques. C'est ce troisième pôle du concept que nous allons préciser dans le cadre de notre travail. Quelle est la fonction de ces signifiants ? Voilà ce qu'en dit Vergnaud (1991) :

« Dans la théorie des champs conceptuels, cette fonction est triple :

- aide à la désignation et donc à l'identification des invariants : objets, propriétés, relations, théorèmes*
- aide au raisonnement et à l'inférence ;*
- aide à l'anticipation des effets et des buts, à la planification, et au contrôle de l'action. ».*

Nous comprenons que si la conceptualisation comprend l'utilisation efficace des relations et propriétés en tant qu'outils pour résoudre ces problèmes, elle comprend aussi leur

transformation en objet de pensée. Les signifiants sont des moyens de transformer des concepts outils en concepts objets. Dans cette transformation d'outil en objet, la théorie des champs conceptuels rejoint explicitement la dialectique outil/objet que Douady (1987) utilise dans le champ de la didactique. Ainsi pour nous, les formes d'expression, écrites, orales ou gestuelles, symboliques, figuratives ou autres sont considérées comme des signifiants dans la mesure où elles permettent cette objectivation, le fait de pouvoir communiquer avec les autres mais aussi avec soi-même sur le concept : elles participent à la représentation et aident à la pensée. Les signifiants permettent d'évoquer des schèmes et des situations relatifs à un concept sans préciser le contexte, l'instanciation. Ils permettent de considérer le concept comme un objet de pensée et donc d'explorer certaines de ses composantes. Cette abstraction permet un processus de contextualisation/décontextualisation/recontextualisation du concept.

Un certain nombre de points précédents donnent des indications sur le processus d'apprentissage tel qu'il est envisagé dans la théorie des champs conceptuels. Ajoutons que d'une manière pragmatique, Vergnaud (à la suite de Piaget) envisage à partir des connaissances anciennes des apprenants deux leviers principaux pour jouer concrètement sur ce processus d'apprentissage. Le premier est celui de transfert, généralisation, décontextualisation qui consiste à étendre le champ d'application des schèmes. A l'inverse, le deuxième, celui de restriction et accommodation, consiste à montrer les limites d'application opérationnelle des schèmes. Le sens qu'un sujet donne alors à un concept est « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour traiter des situations auxquelles il lui arrive d'être confronté* » et qui concernent le champ conceptuel, c'est aussi « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour opérer sur les symboles, numériques, algébriques, graphiques et langagiers* », Vergnaud (1991). Ainsi, c'est grâce à l'utilisation effective de ces deux leviers que nous dirons que le concept prend du sens pour l'apprenant et nous retenons ces éléments pour la suite de notre travail.

1.2 Précisions sur le lien interprétation/sujet

Rappelons que le mot interprétation fait référence à l'analyse des numérations que nous avons faite dans la première partie de la thèse.

Les concepts généraux de la TCC présentés comme nous l'avons fait peuvent laisser penser que la relation signifiant/signifié est établie et identifiable par le chercheur grâce à une analyse du système sémiotique. Elle serait traduite au niveau du sujet dans l'emploi d'invariants opératoires canoniques qui sont garants de la réussite des problèmes du champ conceptuel auquel se réfère le signifiant utilisé. Or, il n'en est rien. En effet des raisonnements corrects, faisant intervenir des théorèmes-en-acte pertinents, peuvent être utilisés chez un sujet de manière durable en lien avec des écritures ou symbolisations fausses, sans que ce sujet ne parvienne à une utilisation correcte de ces dernières. Ainsi, un sujet peut utiliser des signifiants avec des connaissances-en-acte correctes et ceci de manière durable et efficace sans nécessairement utiliser les propriétés que le chercheur a identifiées dans les signifiants utilisés. Pour nous, cela induit que les situations que rencontre le sujet n'assurent pas que telle ou telle interprétation que nous avons dégagée soit en jeu dans la relation signifié/signifiant que convoque alors le sujet (soit-il « générique »). Cependant, nous faisons l'hypothèse que la fréquentation d'une certaine variété de problèmes décrite précédemment afin de mettre en œuvre les deux leviers d'apprentissage permet à l'enseignement de proposer des situations qui vont favoriser une interprétation du sujet faisant écho aux interprétations dégagées dans la première partie de la thèse. Cette hypothèse n'est pas questionnée en elle-même dans la thèse, mais la construction de notre cadre théorique va nous mener à l'aborder, en particulier grâce aux relations problèmes/stratégies/théorèmes-en-acte. En outre, si cette hypothèse est importante pour notre recherche, elle l'est aussi pour élaborer des outils pour l'enseignement.

Par ailleurs, l'étude sémiotique des systèmes de numération que nous avons faite y prend une place particulière.

Pour garder en mémoire ces remarques importantes (ce décalage potentiel), nous écrirons « signifié(s) » à la place de « signifié ».¹¹⁹

2. Cadre théorique

Nous reprenons en les contextualisant les éléments théoriques dégagés précédemment.

Les questions que nous nous posons concernent les problèmes qui vont permettre à un élève de construire ses connaissances, de conceptualiser. Quels sont les enjeux d'apprentissage en ce qui concerne la numération de position ? Quelles sont les mathématiques à l'œuvre dans la résolution de tel ou tel problème ? Quel rôle est joué par les connaissances anciennes sur le nombre et notamment la numération parlée ? Pour répondre à ces questions nous devons préciser certains éléments de la théorie des champs conceptuels relevés précédemment pour les contextualiser dans le cadre de la thèse.

2.1 La comparaison du cardinal de deux collections de points

Pour motiver nos choix, en particulier pour comprendre le travail qui doit être accompli dans l'analyse de l'apprentissage de la numération de position, nous allons partir d'un exemple, celui de la comparaison du cardinal de deux collections de points. Il est tiré de Fénichel & Pfaff (2004, 2005).

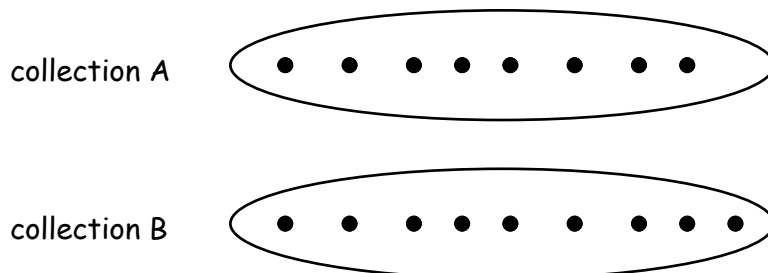
a. Description

« Comparer dans chaque cas les deux collections »

Item 1



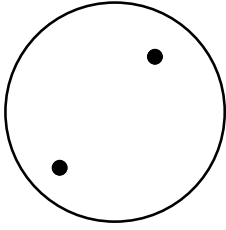
Item 2



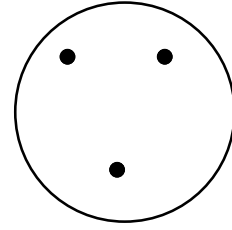
¹¹⁹ Nous tenons à remercier Gérard Vergnaud pour nous avoir éclairé sur ces questions.

Item 3

collection A

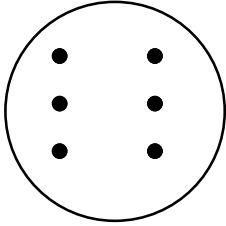


collection B

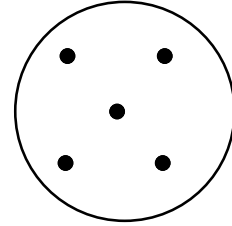


Item 4

collection A

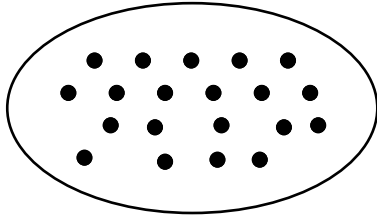


collection B

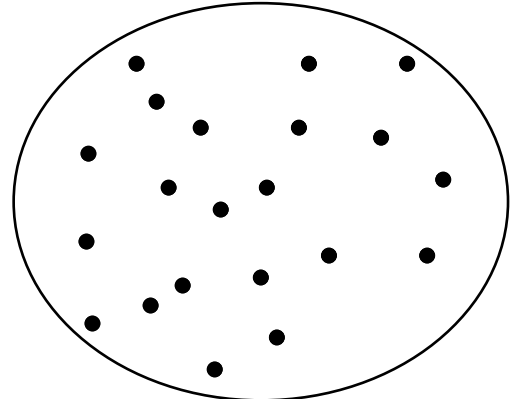


Item 5

collection A

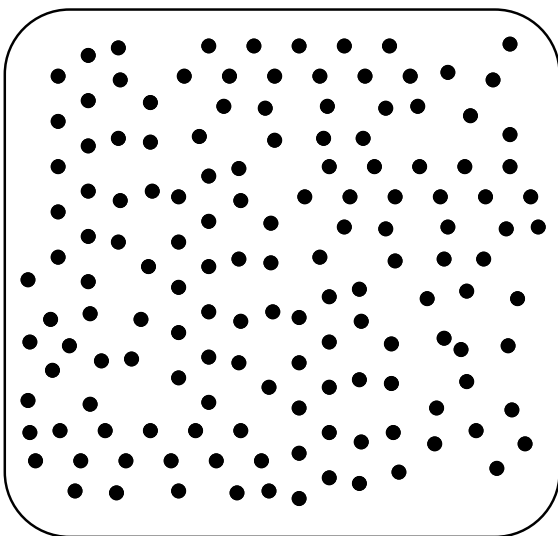


collection B

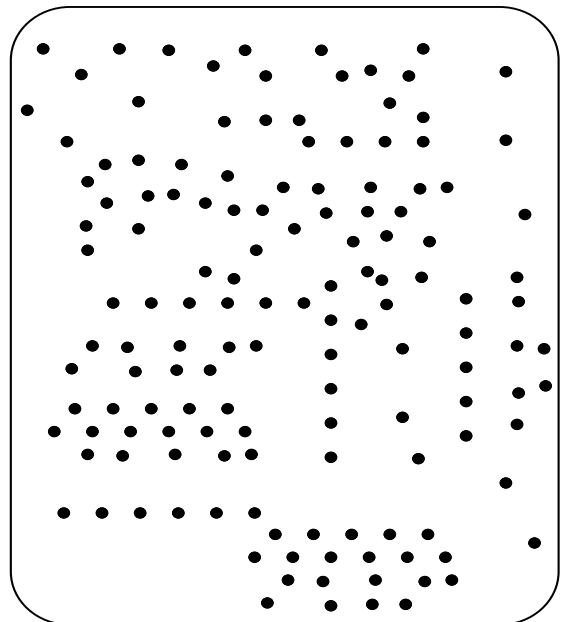


Item 6

collection A



collection B



Chaque item de ce problème peut être proposé aux élèves de CP. Dans notre analyse, nous retiendrons la consigne « comparer les deux collections selon leur quantité ». Nous allons indiquer uniquement quatre stratégies¹²⁰ de comparaison : ce ne sont pas les seules, mais elles vont nous permettre d'éclairer le modèle de conceptualisation du nombre exposé ensuite¹²¹. Elles ont été choisies pour illustrer notre propos. En particulier les deux dernières ont été choisies pour montrer certains liens entre les signifiants en jeux dans la numération parlée et ceux de la numération écrite chiffrée. Une analyse plus complète est entreprise dans le paragraphe 3.3 de ce chapitre.

Stratégie 1 : comparaison globale visuelle.

Stratégie 2 : comparaison élément par élément (ici point par point).

Stratégie 3 : obtention d'une désignation orale du cardinal de chaque collection (1ère méthode) puis mise en mémoire puis comparaison de ces désignations. Cette première méthode consiste à obtenir les désignations orales par le comptage des objets de chacune des deux collections : énumération des éléments de la collection couplée à la récitation de la comptine numérique en français, le dernier nombre énoncé désigne le cardinal. Par suite, pour se souvenir de chacune des deux désignations orales, celles-ci sont notées par une écriture chiffrée. Finalement, la comparaison des deux désignations orales (notées ici à l'aide d'une écriture chiffrée) se fait à l'aide de la récitation de la comptine numérique : la désignation prononcée en premier indique un nombre inférieur au nombre dont la désignation est prononcée en deuxième (ou n'est pas encore prononcée).

Stratégie 4 : obtention d'une désignation orale du cardinal de chaque collection (2ème méthode) puis comparaison de ces désignations. Cette deuxième méthode d'obtention des désignations orales des cardinaux consiste à passer par la désignation écrite chiffrée. Il s'agit de faire des groupements de dix, puis éventuellement des groupements de dix et de traduire l'organisation obtenue par une écriture chiffrée : l'organisation permet de passer à l'écriture chiffrée suivant un certain algorithme que nous ne décrirons pas ici. Par la suite chaque écriture chiffrée est traduite en sa désignation parlée en France¹²². Finalement la comparaison des désignations orales se fait par la même méthode que pour la stratégie précédente. Notons ici que la mise en mémoire a été effectuée aussi grâce à l'écriture chiffrée mais, cette fois-ci, obtenue en codant l'organisation de la collection.

La question que nous allons tout d'abord aborder est le lien entre problème, stratégie, connaissances-en-acte et théorèmes (ou propriétés mathématiques). Précisons-la à travers ces exemples. Il s'agit de faire une étude *a priori* des théorèmes-en-acte à la lecture des stratégies inférées de l'analyse du problème : quelles en sont les limites ?

b. Des situations aux problèmes, des schèmes aux connaissances-en-acte.

Un schème peut-il être inféré de l'utilisation d'une stratégie ? Un exemple peut nous persuader que non : la stratégie 1 peut être adoptée pour l'item 6 pour des raisons non mathématiques, par exemple du fait de ne pas disposer d'assez de temps ou de ne pas être sûr d'une autre stratégie. Bien qu'utilisant une stratégie non efficace, le sujet peut donc savoir que

¹²⁰ Le mot stratégie est utilisé comme en théorie des situations didactiques, TSD, voir par exemple Brousseau (1998), dans une analyse *a priori*, le mot procédure l'est pour des stratégies observées. Nous faisons cette distinction dès maintenant car nous aurons à utiliser la théorie des situations didactiques ultérieurement. La TSD est « compatible » avec la TCC, voir par exemple Flückiger (2004) mais aussi Vergnaud (1991). Il n'est pas nécessaire dans la thèse d'entrer dans une discussion théorique pointue sur leur articulation précise. Nous notons que les mêmes mots utilisés ne renvoient pas au même cadre. Vergnaud par exemple utilise le mot procédure pour décrire comment procède un élève pour résoudre un problème, sans aller jusqu'à l'analyser en termes d'invariants opératoires.

¹²¹ Ce type de problème et de stratégie est analysé de manière plus détaillée ultérieurement.

¹²² Cette suite proposée n'est évidemment pas obligatoire, mais elle sert notre propos.

sa stratégie est peu sûre et comprendre les enjeux du problème. Ainsi, se pose la question d'appréhender un schème en fonction d'éléments cognitifs propres aux enjeux mathématiques. En effet, nous nous intéressons moins à comprendre la démarche générale de tel ou tel sujet dans telle ou telle situation (au sens de Vergnaud), que de décrire les liens entre les actions et la notion en jeu : notre sujet est donc un sujet cognitif générique aux prises avec des problèmes d'essence mathématique. Dans notre recherche, il nous importe de savoir si le sujet utilise des signifiants (ou non), lesquels, pour quel usage et quels sont les liens avec les mathématiques. Notre intention est par exemple de comparer les deux utilisations différentes de l'écriture chiffrée : l'une mettant en jeu des propriétés mathématiques liées avec l'interprétation de référence de la numération chiffrée de position, au contraire de l'autre. Or, du point de vue psychologique, l'activité du sujet en situation de résolution de problème est fonction de sa définition de la situation. Nous n'allons donc pas considérer ici les situations au sens de Vergnaud. Plutôt que celui de situation, nous utiliserons la notion de problème au sens où Brousseau (1998, chapitre 2, p.113) l'entend, c'est-à-dire dans une dialectique avec les obstacles épistémologiques¹²³. Le problème de comparaison que nous avons évoqué en est un exemple. Nous notons cependant que l'utilisation du terme de problème au lieu de situation est réducteur dans la théorie des champs conceptuels puisqu'il évoque plus un contexte purement mathématique que psychologique et donc fait référence à moins de variables qu'un psychologue ne le fait. Cependant ce point de vue se justifie du fait que nous voulons tout d'abord définir le concept à partir de considérations de contenu mathématique sans prendre en compte, tout au moins dans un premier temps, les conceptions spécifiques de tel ou tel apprenant¹²⁴ et plus généralement les variables concernant le sujet. Ce choix est clairement rendu possible par la théorie des champs conceptuels en considérant les éléments centraux du schème que sont les connaissances-en-acte dans la définition d'un concept, définition qui ne fait pas entrer en jeu des facteurs spécifiques à un sujet¹²⁵, autres que des considérations générales cognitives, à la différence du processus « général » de conceptualisation. En conséquence, en nous centrant sur les connaissances-en-acte contenues dans des schèmes relatifs à des problèmes spécifiques, nous pouvons substituer à la notion de situation de Vergnaud celle de problème au sens de Brousseau.

2.2 Vers une modélisation de l'apprentissage de la numération chiffrée de position

En tenant compte des éléments théoriques précédents, nous voulons nous donner les moyens d'analyser le processus de conceptualisation qui concerne les écritures chiffrées. Nous précisons d'une part la place que doit y prendre la variété des problèmes (classes de problèmes et champ conceptuel) ainsi que l'historicité de la conceptualisation chez un sujet et d'autre part, la mise en œuvre des deux leviers d'apprentissage concernant les schèmes : généralisation et restriction. Dans le cadre de notre recherche, nous retenons trois éléments non indépendants du processus d'apprentissage : la variété des problèmes, l'agencement temporel de ces problèmes et la dialectique concept-outil/concept-objet. Indiquons que ces éléments et les sous éléments qu'ils comportent ont pour fonction de fournir des critères pour

¹²³ Ceci rendra par ailleurs plus claire l'usage du concept de situation dans la troisième partie de la thèse, dans laquelle le mot situation ne signifie pas problème, mais est employé dans une approche proprement didactique au sens de la théorie des situations didactiques.

¹²⁴ Pour des explications complémentaires, voir par exemple le cours de Grenier (2007), de master 2 « Éléments d'épistémologie et de didactique » à l'université de Grenoble, qui cite notamment Artigue, Vergnaud et Balacheff.

¹²⁵ Rappelons ce qu'en dit Vergnaud (1991) : « *La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations* ».

l'analyse de ce processus. Cependant, comme dans toute tentative de découpage du réel, dans la pratique il est parfois difficile de les isoler. A chaque fois que nous nous y référerons, nous considérerons l'ensemble des relations qu'ils entretiennent entre eux, même si nous ne soulignons pas toujours l'influence de l'un sur l'autre. Nous nous plaçons du côté de celui qui veut saisir la complexité du processus d'apprentissage pour un sujet cognitif générique : nous cherchons des paramètres sur lesquels jouer dans la conceptualisation en vue de l'apprentissage et de l'enseignement.

Pour la présentation de ces éléments, nous allons nous appuyer sur la relation entre les quatre stratégies relevées dans l'exemple ci-avant (parmi une multitude non donnée ici) et les théorèmes-en-acte et concepts-en-acte. Nous reviendrons finalement sur cette relation.

a. Cadre théorique

Les exemples donnés ici font référence aux stratégies des problèmes de comparaison de cardinaux de collections du paragraphe précédent 2.1.

La variété des problèmes et la disponibilité des connaissances

Le premier élément est relatif aux problèmes mathématiques qui interviennent dans un concept. La teneur de la conceptualisation d'un sujet à propos de tel ou tel concept est analysable d'une part à l'aide de quatre critères sur la variété des problèmes et d'autre part en estimant la pertinence des connaissances-en-acte mises en œuvre. En ce qui concerne la variété des problèmes, les quatre critères retenus sont : l'implication d'autres concepts dans les connaissances-en-acte mobilisées, la complexité des problèmes, leur « habillage » et les autres variables didactiques comme les nombres en jeu.

Dans les exemples que nous avons donnés, les concepts-en-acte du sujet l'amènent à considérer qu'il devra résoudre un problème de comparaison de quantités d'objets visibles : ceci suppose donc des connaissances sur le nombre entier, un certain degré de conceptualisation. Nous y voyons à ce stade l'implication d'autres concepts dans les connaissances-en-acte mobilisées, implication qui peut se percevoir quand on considère les deux premières stratégies. En effet, l'analyse de ces stratégies est susceptible de mener à la mise en évidence de théorèmes(-en-acte) relatifs au nombre entier naturel qui n'ont pas été dégagés dans l'interprétation des numérations¹²⁶ : par exemple le fait que la relation d'équipotence entre deux ensembles (avoir le même cardinal) ne dépend pas de la bijection réalisée. Nous faisons ici référence au champ conceptuel, c'est-à-dire à l'ensemble des problèmes impliquant le concept ainsi que l'ensemble des concepts et connaissances-en-acte qui entrent en jeu. En effet, si les problèmes s'organisent en classes, de sorte qu'une classe de problèmes se détermine grâce à un ensemble de connaissances-en-acte qui lui sont propres, ces classes peuvent faire appel à des connaissances-en-acte présentes dans plusieurs concepts en même temps. Un concept est donc lié à d'autres concepts. Une autre illustration consiste en l'implication des problèmes arithmétiques dans la conceptualisation du nombre : de ce fait, **le concept central utile à notre étude n'est pas tant celui de numération que celui de nombre**. Les désignations orales et chiffrées étant alors des systèmes de signifiants et les problèmes arithmétiques un type de problème à considérer.

Le fait de « comprendre » la tâche à réaliser à l'aide de concepts-en-acte se traduit par l'ouverture d'un champ de possibles en ce qui concerne la résolution. Quand il va s'agir de passer à cette résolution (instanciation), il va falloir tenir compte de la présentation des collections, ce sont alors les théorèmes-en-acte qui vont intervenir. Avec l'analyse de cette instanciation nous allons préciser les autres critères retenus pour le premier élément concernant la variété des problèmes.

¹²⁶ Nous aurons à revenir sur les difficultés théoriques et pratiques que génèrent les liens entre stratégies/théorèmes-en-acte/propriétés mathématiques.

Nous pouvons distinguer dans les différentes stratégies présentées le nombre et l'organisation des théorèmes-en-acte potentiellement en jeu. Nous voyons que ce nombre ne peut être déterminé intrinsèquement. Il est lié en particulier au nombre d'étapes dans la procédure effectivement utilisée. Cependant le problème offre un nombre limité de stratégies envisageables (nous n'en avons donné ici que quatre) et nous pouvons étudier l'ensemble de ces stratégies selon les nombres d'étapes qui sont en jeu. C'est ce que nous nommerons la complexité du problème. Remarquons ici qu'une même étape apparaît dans les stratégies 3 et 4, elle concerne le codage du cardinal d'une collection par un signifiant. Elle ne peut être redécoupée sans choisir un signifiant et mettre en jeu certaines de ses propriétés. En ce sens nous pouvons décomposer toutes les stratégies en étapes élémentaires qui sont susceptibles d'être reliées à des théorèmes-en-acte. Ceci nous donne en outre un outil pour relier les signifiants (quand ils interviennent) et les théorèmes potentiellement en-acte. Ce que nous nommons complexité d'un problème concerne donc ici de manière restrictive la potentielle existence d'un nombre plus ou moins grand d'étapes nécessaires à sa résolution mettant en jeu en particulier des théorèmes(-en-acte).

Nous utilisons le terme d'habillage pour indiquer les paramètres qui ne concernent pas le problème mathématique en lui-même (tâches, étapes, théorèmes, définitions, propriétés) mais qui permettent de le contextualiser : données supplémentaires et inscription dans un domaine d'expérience réel ou évoqué. En ce qui concerne notre exemple, l'habillage y est assez réduit : il n'y a pas de données inutiles, pas de référence à des termes qui peuvent induire une compréhension erronée de la tâche. En fait les termes « comparer » et « quantité » employés ensemble donnent du sens pour un sujet dès que certains concepts-en-acte sur le nombre ont été construits auparavant. Il n'y a pas de référence explicite à un domaine d'expérience, ou plus exactement le domaine d'expérience consiste en la comparaison de collections composées d'éléments figurés. Signalons par ailleurs que la non référence à une situation vécue ou déjà rencontrée (par exemple par le biais d'une histoire ou l'évocation d'une situation quotidienne dans laquelle les élèves ont été acteurs) n'est pas synonyme de plus grande facilité pour l'élève. C'est un point dont nous devons tenir compte dans la thèse quand il va s'agir d'analyser des déroulements en classe. Il ne concerne cependant pas directement les mathématiques que nous extrayons des connaissances-en-acte. Un élément est cependant à noter dans notre exemple, c'est le fait que les collections ne sont pas manipulables, ce qui nous mène aux variables didactiques.

La notion de variable didactique est empruntée à la théorie des situations, nous la reprenons dans le cadre de la TCC. Notons que l'habillage et la complexité peuvent être considérées comme des variables didactiques, mais il nous a semblé utile de les distinguer par rapport aux notions de la TCC que nous avons utilisées. Nous allons relier la notion de variable didactique à celle de théorème-en-acte. Nous pouvons considérer le problème de notre exemple comme un problème de comparaison, selon leur nombre de points, de deux ensembles de points disposés de façon X et de cardinaux respectifs y et z. Les variables didactiques sont alors de deux ordres : la présentation matérielle des collections et le nombre d'éléments en jeu. Elles ne peuvent être considérées de manière indépendante. En effet, par exemple dans l'item 2, le nombre de points est important, mais leur disposition permet tout de même de rendre la stratégie 2 efficace. Par ailleurs les stratégies 1 et 2, en se restreignant aux associations visuelles, sont inefficaces en ce qui concerne l'item 6. Cette notion d'efficacité est donc fortement liée à ces variables didactiques. Nous retenons que jouer sur les variables didactiques permet de réduire ou d'augmenter le champ des possibles, c'est à dire la disponibilité de stratégies efficaces et par là même l'opérationnalité de tel ou tel théorème-en-acte. En résumé, les variables didactiques sont les éléments du problème sur lesquels jouer.

Elles ne changent pas l'éventail des stratégies, donc des théorèmes-en-acte, susceptibles d'être utilisés indépendamment de la nature des variables, mais elles peuvent entraîner une non efficacité ou une performance moindre de certains de ces théorèmes-en-acte et donc de la stratégie (la notion d'efficacité est abordée un peu plus loin dans ce paragraphe).

La pertinence des théorèmes-en-acte mis en œuvre est évaluée quant à elle en considérant leur réussite (réponse mathématiquement exacte) ainsi que leur efficacité (en termes de temps et de fiabilité).

Ainsi, nous regardons, outre la variété des problèmes, le fait pour le sujet de disposer d'un panel de stratégies adéquates selon les critères du problème (y compris des critères liés à la rapidité de résolution), de choisir une d'entre elles puis de l'appliquer avec succès. Rappelons que le sens qu'un sujet donne à un concept est « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour traiter des situations auxquelles il lui arrive d'être confronté* » Vergnaud (1991). Cette potentialité visée par l'apprentissage est à rapprocher des trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert (2007) : technique, mobilisable et disponible. Nous reprenons ces notions pour les intégrer dans notre cadre théorique car elles nous paraissent préciser un point de la théorie des champs conceptuels.

Le niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances est celui concernant le fonctionnement non erroné d'une procédure ou d'une connaissance indiquée explicitement et dans un certain nombre de contextes précis : par exemple être capable de compter les présents d'une classe à l'aide de la comptine numérique quand l'enseignant le demande.

Le niveau mobilisable concerne l'emploi non erroné et pertinent des procédures et connaissances dans un contexte usuel, facilement reconnaissable par l'élève (du domaine d'expérience auquel il est habitué) dans lequel il s'est déjà exercé, mais qui laisse une certaine marge de décision sur la méthode à utiliser, par exemple être capable de commander les plateaux repas nécessaires à une sortie de la classe.

Le niveau disponible concerne l'utilisation de procédures et connaissances dans un contexte où celles-ci ne sont pas convoquées *a priori*, par exemple lors d'une version du « jeu du déménageur »¹²⁷.

L'emploi des connaissances aux deux derniers niveaux peut requérir des étapes alors que ce n'est pas le cas au premier. C'est pourquoi les problèmes concernant le premier niveau comportent des tâches dites simples et isolées. Rendre les stratégies et connaissances à un niveau de mise en fonctionnement disponible est alors un enjeu de l'apprentissage.

L'agencement temporel des problèmes

Le deuxième élément retenu sur le processus d'apprentissage concerne l'agencement temporel des classes de problèmes. « *Les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations*

¹²⁷ Le jeu du déménageur est un jeu couramment employé en primaire. Il existe différentes variantes selon les emplacements des équipes, le nombre des objets et les trajets. La variante à laquelle nous faisons référence consiste à installer des équipes d'élèves de même effectif sur une ligne (ce sont les endroits où se trouve chaque équipe, les « repères », qui sont alignés) et à demander de rapporter la quantité d'objets qui se trouve à l'endroit qui leur a été spécifié (le « repère » de leur équipe) à un autre endroit. La distance à parcourir étant visiblement la même pour chaque équipe (des segments de droite parallèles et de même longueur). Chaque élève d'une équipe peut prendre un seul objet par voyage, il peut faire plusieurs voyages et les élèves peuvent se déplacer simultanément. La gagnante est l'équipe qui a fini en premier. On fait plusieurs parties en changeant les points de départ, toutes les équipes testent finalement toutes les positions de départ possibles. Pour une des positions, le nombre d'objets à transférer est nettement moins important, ce que les participants ne savent pas. C'est donc toujours l'équipe qui se trouve à cet endroit qui gagne, indépendamment de sa composition. Cette constatation est posée comme un problème : pourquoi se fait-il que c'est toujours l'équipe qui se trouve à cet endroit qui gagne ? Le contexte sportif, le nombre d'objets en jeu et le fait de ne pas envisager que l'enseignant ait oublié un paramètre pour rendre le jeu équitable, n'engage pas à compter *a priori* le nombre d'objets par équipe.

susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner », Vergnaud (1991). Pour l'apprentissage d'un concept, nous retenons donc l'importance de l'historicité des problèmes auxquels sont confrontés les apprenants et en particulier des premiers qui engagent la conceptualisation.

Concept-outil/concept-objet

Le troisième et dernier élément retenu est celui de concept-outil, concept-objet. La conceptualisation s'opère en résolvant des problèmes. Ainsi l'apprentissage consiste tout d'abord (en référence à l'historicité) à utiliser des connaissances-en-acte pour résoudre des problèmes : c'est l'aspect outil qui est mis ainsi en avant dans le concept. Cependant, en tant qu'aide à la pensée, des signifiants vont être utilisés, qui ensuite peuvent être objet d'étude. C'est l'aspect objet du concept. Nous convenons, comme le fait Vergnaud (1991), de l'utilité de la dialectique outil/objet définie par Douady (1987) dans le processus d'apprentissage. Plus spécifiquement, nous y retenons le jeu des signifiants et du signifié. En effet, le sens qu'un sujet donne à un concept c'est aussi « *l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour opérer sur les symboles, numériques, algébriques, graphiques et langagiers* », Vergnaud (1991). La conceptualisation est « repérable » à travers les procédures utilisées, mais pour chaque procédure un ou plusieurs signifiants peuvent être convoqués, permettant de passer du concept-outil au concept-objet. De plus un problème peut être résolu par plusieurs stratégies (au sens de la TSD). Ceci laisse donc différents choix possibles à celui qui résout le problème. Un exemple est donné à travers les quatre stratégies indiquées auparavant. Nous voyons que les signifiants y sont employés de différentes manières dans un même problème, mais ils le sont aussi selon les problèmes rencontrés : ils tissent des liens entre eux et organisent des liens avec le signifié(s). Nous ajoutons que les signifiants et d'une manière générale le langage permettent à un élève d'employer un théorème-en-acte ou un théorème (ou propriété ou relation ou définition), mais il y a aussi souvent un implicite « quasi-total » dans cet emploi. C'est parce qu'il a signifié (ou plus exactement qu'il s'est signifié) l'utilisation recontextualisée de tel ou tel théorème (ou propriété ou relation ou définition) mathématique qu'il n'emploiera plus ce dernier uniquement « en-acte ». Plus précisément, cet emploi « en-acte » est accompagné d'une objectivisation du concept. C'est entre autres par le biais de cette objectivation que les connaissances deviennent mobilisables puis disponibles.

b. Discussion : les possibles de l'analyse

Les exemples de stratégies nous permettent de mettre en évidence le rôle de l'emploi de signifiants dans la conceptualisation du nombre entier, l'élément central de notre approche. En reprenant les deux niveaux des connaissances-en-acte, les concepts et les théorèmes, nous reconsidérons le lien stratégie /mathématiques dans le jeu signifiant/signifié(s).

Théorèmes-en-acte, signifiant et signifié(s).

Des stratégies avec ou sans l'utilisation d'une numération

Tout d'abord, nous remarquons que dans les stratégies 1 et 2 les désignations des numérations n'interviennent pas, bien que le concept de nombre soit en jeu¹²⁸. De ce fait nous dirons que certaines stratégies permettent de résoudre un problème en ne considérant « que » le signifié(s) « nombre » et en particulier sans faire intervenir de numération.

¹²⁸ Nous ne considérons pas qu'une collection quand elle est l'objet du problème, par exemple quand il s'agit d'obtenir une désignation de son cardinal, est un signifiant du nombre. Par contre une collection « témoin », avec laquelle une autre peut être mise en bijection afin d'obtenir son cardinal, est un signifiant : c'est le cas des constellations du dé.

Par contre, les désignations orales et écrites interviennent dans les stratégies 3 et 4. Dans la stratégie 3, la désignation orale est reliée à un comptage¹²⁹, tandis que dans la 4, la dénomination orale est obtenue par la traduction « directe » d'une écriture chiffrée. Notre analyse permet d'y inférer l'emploi de théorèmes-en-acte : l'indication du cardinal de la collection par le dernier mot énoncé pour la stratégie 3, la bijection entre les écritures chiffrées et les désignations parlées pour la stratégie 4. Ceci permet de relier dans ces cas ces derniers et les stratégies. L'efficacité de ces stratégies n'est cependant pas fondée sur les mêmes théorèmes-en-acte. Réciproquement, la désignation écrite chiffrée est obtenue dans la stratégie 4 par le codage de l'organisation des éléments d'une collection en paquets (de dix), alors que dans la stratégie 3 elle est obtenue par la traduction « directe » de la désignation orale. Nous voyons donc des théorèmes-en-acte qui concernent un lien « direct » de deux signifiants¹³⁰ et d'autres mettant en jeu le concept de nombre dans son lien avec des collections : ceci se traduit dans les stratégies employées.

Les écritures chiffrées reliées au signifié(s) « nombre » via la numération parlée ... ou non

Par ailleurs, nous voyons que nous pouvons utiliser l'une ou l'autre désignation dans des fonctions différentes. Ainsi dans la stratégie 3, la désignation écrite ne sert qu'à mémoriser la désignation orale. En effet, elle ne prend pas en compte les spécificités du système de numération que constituent les écritures chiffrées, la trace écrite « 145 » y est équivalente à la trace écrite « cent-quarante-cinq ». Dans la stratégie 4 par contre l'écriture chiffrée a été utilisée pour obtenir une désignation et les propriétés utilisées sont analysables en termes de théorèmes-en-acte liés à l'organisation des éléments d'une collection.

Concepts-en-acte, signifiants et signifié(s)

La question se pose de relier les concepts-en-acte et les signifiants enjeux d'apprentissage, ce que nous abordons en considérant la « circulation » des théorèmes-en-acte dans les stratégies. En effet certains théorèmes-en-acte peuvent être utilisés en lien avec plusieurs signifiants : l'organisation d'une collection en deux groupes, l'un constitué de quarante éléments et l'autre de trois, est à relier avec la désignation parlée « quarante-trois » ou bien avec l'écriture "40+3". Mais d'autres semblent liés plus particulièrement à un signifiant : le comptage des éléments d'une collection permet d'obtenir la désignation parlée usuelle grâce au dernier mot prononcé. Le problème est de savoir en quoi les théorèmes-en-acte sont constitutifs de telle ou telle désignation, ou plus exactement d'estimer la pertinence, l'efficacité des théorèmes-en-acte mettant en jeu les désignations suivant les problèmes. Ces dernières remarques peuvent illustrer le processus d'apprentissage qui consiste à rendre les connaissances disponibles, c'est-à-dire à rendre les concepts-outils efficaces. Il s'agit de disposer d'un panel de stratégies en relation avec un panel de problèmes, mais aussi de permettre de faire le choix le plus approprié mathématiquement. Ceci ne peut se faire que si un certain nombre de théorèmes-en-acte ont été mis en relation avec les signifiants. Ainsi par exemple s'il s'agit de relier une collection de points à une désignation écrite chiffrée, selon les paramètres du problème, le choix doit pouvoir se faire parmi l'organisation par paquets, le comptage de un en un, n en n, le calcul, etc. D'autre part il s'agit de disposer de théorèmes-en-acte qui permettent de poursuivre l'apprentissage au-delà des premières situations rencontrées : par exemple pour

¹²⁹ Ce comptage peut se faire par énumération un à un (couplé à la comptine un, deux, trois, etc.) ou encore par paquets de dix (couplé à la comptine dix, vingt, trente, etc.). Nous reviendrons plus précisément dans la thèse sur cette notion de comptage.

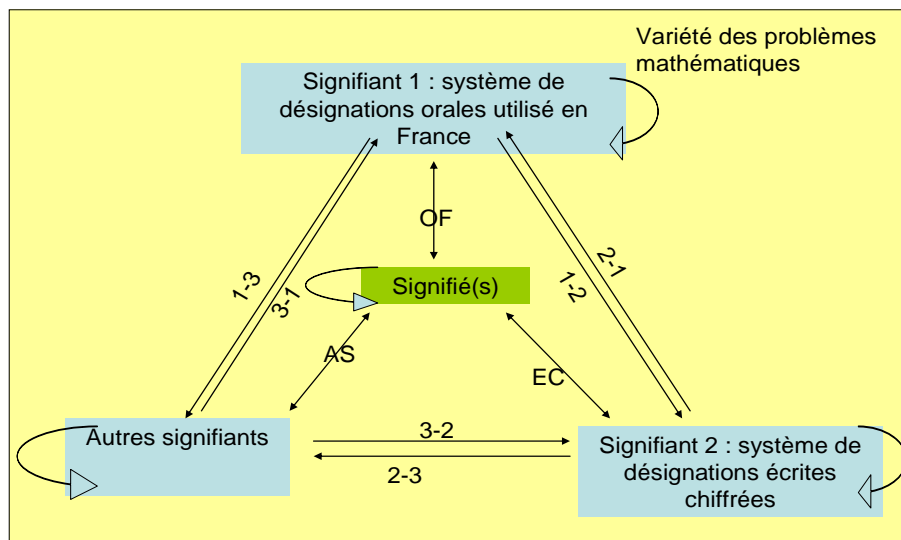
¹³⁰ Le lien écriture chiffrée « 145 » et désignation orale « cent-quarante-cinq » n'est pas forcément le fait d'une mémorisation par cœur. Par exemple, il peut s'obtenir par décryptage de l'écriture chiffrée, chiffre à chiffre : le troisième chiffre à gauche « 1 » réfère au mot « cent », le suivant « 4 » au mot « quarante », le dernier « 5 » à « cinq ». Un certain nombre de théorèmes-en-acte sont donc en jeu. Mais ils ne se réfèrent pas directement au signifié(s) « nombre » dans la mesure où ils peuvent être opérationnels sans mettre en jeu des quantités ou mesures, même évoquées. C'est pourquoi nous employons ici le mot « directement ».

effectuer le calcul posé $45+78$, un certain nombre de théorèmes-en-acte reliés à l'apprentissage initial de l'écriture chiffrée sont plus efficaces que d'autres.

Nous avons mis en évidence le lien théorique entre stratégies et théorèmes en acte, mais aussi les difficultés à l'établir. Cependant, nous avons aussi mis en relief la possibilité d'une classification des stratégies qui tient compte d'une part des liens entretenus entre les deux systèmes de numération et le signifié(s) « nombre »¹³¹ et d'autre part de la diversité des stratégies possibles. Nous allons faire de cette possibilité un outil pour élaborer une problématique sur l'enseignement et l'apprentissage de la numération écrite chiffrée de position

c. Modélisation du processus de conceptualisation

Nous avons justifié le fait de modéliser le processus de conceptualisation du nombre entier et non de la numération écrite chiffrée. En considérant tous les éléments indiqués auparavant, nous le modélisons par le schéma suivant, afin en particulier de mettre en avant le rôle joué par les couples signifiants/signifié(s).



Ce schéma est de par nature simplificateur. Il a été élaboré pour servir notre objectif : il met l'accent sur le jeu des signifiants avec le signifié(s) et permet de poser le problème de non-congruence à un certain niveau de généralité. Il ne peut pas être compris indépendamment des éléments théoriques qui ont été développés précédemment. Ainsi, le signifié(s) « nombre » est, pour un sujet, à envisager selon la relation avec un système de signifiant. En outre, ce schéma permet d'indiquer que cette relation signifiant/signifié(s), se complexifie lorsqu'entrent en jeu plusieurs signifiants. Finalement le cadre jaune « variété des problèmes mathématiques » rappelle que les relations sont à envisager selon cette variété, dans le but de rendre disponibles les connaissances.

Dans ce schéma, seuls trois signifiants sont indiqués. Une pluralité est à envisager, mais ce modèle simplifié va nous permettre de mettre en relief un certain nombre d'éléments relatifs à la spécificité des relations entre les numérations étudiées. Par exemple, dans l'application que nous en ferons, l'autre signifiant peut consister en une monstration de doigts, des écritures additives comme $10+10+5$ ou $20+5$, une représentation graphique, des constellations du dé,

¹³¹ Un tel critère est employé par Fénichel & Pfaff (2004, 2005).

des écritures telles que nous les avons rencontrées dans la première partie de la thèse, un matériel de numération consistant en des objets matériels manipulables désignant un, dix, cent, etc., une numération en unités, voire une numération dans une autre langue, ou encore un matériel relevant de numérations agies – abaqués, bouliers etc. Chaque autre signifiant peut se constituer ou non en système sémiotique, et a ses propres caractéristiques et nous aurons à en tenir compte par la suite. Une étude détaillée de chacun, telle que nous l’avons faite pour les numérations dans la première partie de la thèse, n’est pas nécessaire dans ce chapitre. La conceptualisation s’opère grâce à la résolution de problèmes spécifiques au nombre entier, et comme nous l’avons indiqué à la fin du paragraphe précédent, nous mettons en évidence trois critères pour leur analyse. Nous envisageons des stratégies qui ne font pas intervenir de signifiants dans le sens où elles mettent en jeu des théorèmes-en-acte « internes » au signifié(s), comme cela a été relaté dans les stratégies 1 et 2 : ceci est indiqué par la flèche courbe qui va du signifié(s) au signifiant(s). En ce qui concerne les stratégies qui font intervenir des liens entre signifiant(s) et signifié(s), elles sont indiquées par les flèches doubles OF (pour Oral France), EC (pour Ecriture Chiffrée) et AS (pour Autre Signifiant). Enfin celles qui relient deux signifiants sont indiquées par les flèches¹³² marquées ici i-j, i différent de j, et par les flèches courbes sur chaque signifiant.

d. Vers les cheminements cognitifs

Cette analyse se fait à partir des théorèmes-en-acte que les stratégies peuvent potentiellement engager dans la résolution de problèmes. Nous avons déjà indiqué en quoi cette potentialité dépendait de multiples facteurs liés à la variété des problèmes (en particulier les variables didactiques) et au niveau de connaissances de celui qui les résout. Aucun problème n’est donc classifiable d’emblée par les stratégies qui sont *a priori* en jeu. Cependant nous avons indiqué que le sujet considéré est un sujet cognitif générique aux prises avec des problèmes d’essence mathématique. D’autre part, puisqu’il s’agit d’élèves de CP, sortant de maternelle et donc ayant suivi un même programme scolaire, nous pouvons envisager de pouvoir « délimiter » un niveau de connaissances et de développement. Ainsi, en relevant un certain nombre de facteurs liés à la variété des problèmes et à la notion elle-même nous pouvons déterminer quelles sont les stratégies (et donc les théorèmes-en-acte) les plus efficaces. En conséquence une analyse *a priori* des problèmes peut être envisagée selon notre modélisation¹³³.

Cependant, un problème peut être résolu par exemple par une stratégie reliant (directement) le signifiant i au signifié(s) et nous dirons que le signifié(s) est le nombre entier vu par le signifiant i. Il est néanmoins possible que ce « chemin » ne soit pas direct. Les exemples donnés précédemment l’attestent. Ainsi, un problème peut mettre en jeu les écritures chiffrées, mais ces dernières peuvent être reliées aux désignations de la numération parlée en France, avant que n’intervienne le signifié(s) et ainsi ce problème devient un problème mettant aussi en jeu le lien entre la numération parlée et le signifié(s). Nous dénommons tous ces « chemins », des cheminements cognitifs.

¹³² Deux flèches sont indiquées pour mettre en relief le fait que le lien peut se faire dans les deux sens, comme nous l’avons vu dans les stratégies précédentes.

¹³³ Ceci renvoie aux questions du paragraphe 1.2. Cependant, au moment où un sujet résout un problème, par exemple en la classe, pour identifier *a priori* les stratégies et théorèmes-en-acte probables, cette analyse doit être complétée car un nombre d’éléments plus important est à prendre en compte. C’est ce qui est fait dans le chapitre 8, grâce en particulier à l’utilisation de théories didactiques comme la TSD et la notion de situation.

3. Les stratégies dans les problèmes : analyse en fonction des cheminements cognitifs

Nous proposons ici d'analyser les problèmes susceptibles d'être rencontrés au début de l'apprentissage de la numération écrite chiffrée.

Nous commençons par indiquer des stratégies de « base », c'est-à-dire mettant en jeu des relations de type un signifiant/signifié(s), un signifiant/un signifiant, signifié(s)/signifié(s). Ensuite nous indiquons comment d'autres stratégies peuvent être obtenues à partir de ces dernières : ce sont les cheminements cognitifs « complexes ».

Auparavant nous avons besoin de préciser les définitions de quelques mots et expressions dans le cadre de ce travail.

3.1 Définitions

Ces définitions ont été en particulier élaborées en considérant la première partie de la thèse dans laquelle l'organisation de la collection joue un rôle différent selon les interprétations¹³⁴.

Dénombrer

Dans sa thèse El Bouazzaoui (1987), citée par Conne (1989), distingue deux raisons d'utiliser un signifiant du cardinal d'une collection : la mesure d'une quantité et la production d'une collection. Nous traduisons cette affirmation dans le cadre de notre thèse en distinguant le codage et le décodage et en indiquant ce que nous entendons par dénombrement.

Le dénombrement est un processus dont le but est de relier une désignation du cardinal d'une collection avec la collection elle-même : il s'agit soit de désigner le cardinal d'une collection (coder), soit de constituer une collection (d'objets) dont le cardinal est donné par un signifiant (décoder). Le dénombrement s'effectue par quelque moyen que ce soit et met en jeu un signifiant, quel qu'il soit (en particulier il peut être contextualisé).

Compter

Compter est pour nous une stratégie de dénombrement. Elle consiste à utiliser un compteur, en particulier la comptine numérique des désignations parlées en France (que nous nommons plus simplement la comptine numérique quand il n'y a pas d'ambiguïté possible). Il s'agit d'associer dans l'énumération des objets de la collection les items du compteur. Le dernier item utilisé est un signifiant du cardinal de la collection. En ce qui concerne l'emploi de la comptine numérique, il est possible de compter par paquets, en énumérant par exemple deux, quatre, six ou encore dix, vingt, trente, etc. Lorsque les paquets sont importants, il n'est pas possible de les constituer par subitizing (au-delà de quatre). Un nouveau dénombrement est alors nécessaire pour constituer ces paquets.

Un certain type de comptage consiste à considérer des paquets de même cardinal et de ne pas transcrire le cardinal de la collection dénombrée au fur et à mesure dans la désignation parlée en France : dire par exemple un paquet de deux, deux paquets de deux, etc., au lieu de deux, quatre, six, ou bien encore, une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, etc., au lieu de dix, vingt, trente. C'est donc un « comptage en unités » car il utilise une unité de mesure.

Notons aussi qu'il existe des stratégies de surcomptage¹³⁵, c'est-à-dire de comptage à partir d'un nombre donné. En outre, tous les dénombrements ne sont pas obtenus par des stratégies de comptage, c'est-ce que nous indiquons par la suite.

¹³⁴ Conne (1989) a proposé des définitions différentes de celles que nous allons adopter de dénombrer, compter, calculer. La définition qu'il indique pour le verbe dénombrer est proche de celle que nous avons prise pour compter. Dénombrer est pour nous plus général. Nous avons pris ces autres options du fait de l'importance dans notre travail du lien entre une collection et un signifiant de son cardinal. Par ailleurs, nous considérons principalement des calculs dans lesquels la quantité que peuvent désigner les nombres soit au moins évoquée.

Organiser/configurer pour désigner

Distinguer cette stratégie est propre à la thèse.

Il s'agit d'organiser la collection (en groupes) pour ensuite coder la configuration obtenue, code qui sert alors à désigner le cardinal de la collection globale. Nous utilisons aussi ici le terme configuration pour désigner une structure obtenue en suivant des règles et dont est considéré le résultat final. Ce type de stratégie est celui en jeu pour réaliser un procédé de mise en signes décrit dans la première partie de la thèse pour l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. Il ne s'agit pas de désigner au fur et à mesure les cardinaux de sous-collections comme dans un comptage. En effet dans un comptage la collection est scindée en deux, les objets déjà considérés (comptés), les autres qui ne le sont pas. Organiser/configurer pour désigner, nécessite de distinguer les éléments qui sont organisés (en groupes) des autres, mais leur cardinal n'est pas signifié au fur et à mesure du processus. En outre, dans un comptage en unités en particulier, les paquets constitués au fur et à mesure vont rejoindre les éléments de la collection déjà considérés, l'organisation n'étant alors pas nécessairement conservée¹³⁶ : ce n'est pas le cas pour une stratégie de dénombrement « organiser/configurer pour désigner ».

Cette stratégie peut donc mener à différents signifiants, écrits comme ceux indiqués dans la première partie de la thèse (par exemple 3X 4I, ou XXX IIII, ou 34, ou plus généralement des écritures de type 1, 2, ou 3 selon la terminologie d'Ifrah) ou oraux (par exemple « trois groupes (de dix) et deux objets seuls » ou « trente-quatre »). Mais la stratégie se déroule en deux étapes distinctes : la première consiste à organiser/configurer, la deuxième à désigner cette organisation.

Calculer

Bien que des calculs décontextualisés ou ne mettant pas en jeu de collections soient envisageables, nous allons considérer principalement les calculs qui sont des stratégies de dénombrement. Pour les calculs, les propriétés des numérations ne sont pas exploitées de la même façon que pour les autres stratégies ci-avant, et les problèmes associés sont de l'ordre de la structure additive ou multiplicative (en tout cas arithmétique), le plus souvent mettant en jeu l'obtention du cardinal de la réunion de deux collections.

Le calcul peut être effectué mentalement ou posé (par écrit). Le plus souvent nous allons envisager des calculs mentaux qui s'effectuent sans traces écrites et à l'aide de la numération parlée en France¹³⁷. Le terme de calcul posé (par écrit) désigne dans notre travail, essentiellement le calcul à l'aide des écritures chiffrées. Un calcul posé peut être effectué mentalement, c'est-à-dire sans traces écrites quand les mêmes algorithmes que ceux en jeu dans le calcul posé par écrit sont utilisés : dans ce cas nous ne le considérons pas comme du calcul mental. C'est le cas par exemple quand pour effectuer dix-sept plus vingt-quatre est sollicitée une image mentale des écritures chiffrées $17 + 24$ (posé en colonne) et est utilisé un algorithme portant sur les chiffres

Il est difficile de distinguer certains comptages en unités, de type, dix, vingt, trente, ou même deux, quatre, six, d'un calcul. Si le dénombrement s'appuie sur une mémorisation de la suite

¹³⁵ Ou encore de « sous-comptage ».

¹³⁶ Voir la première partie de la thèse, chapitre 3 paragraphe 4, pour des exemples dans les différents procédés de mise en signes d'une collection.

¹³⁷ Cependant, le calcul mental ne s'y restreint pas. On peut se représenter des groupements mentalement : c'est seulement pour communiquer le résultat ou la méthode qu'il est nécessaire de parler. Il est alors difficile de savoir ce qui est sollicité. Par exemple pour dix-sept plus vingt-quatre, on peut directement dire que sept et quatre font un de plus que sept et trois et conclure quatre dizaines et une unité soit quarante-et-un : ce n'est pas uniquement de la numération parlée et ce n'est pas non plus du calcul posé (on ne visualise pas les colonnes de chiffres) mais c'est un calcul effectué mentalement.

des désignations sans nécessairement faire référence à un problème « concret » (de type arithmétique), comme cela peut être le cas pour mémoriser la suite des désignations parlées en France, il s'agit d'un comptage en unité et non d'un calcul mental. Cette distinction est cependant difficile à observer chez un sujet, particulièrement chez un élève de primaire.

A noter que la stratégie de dénombrement « organiser pour désigner », met en jeu une partition de la collection, mais il s'agit de dénommer cette partition et non de l'utiliser pour faire un calcul.

Désignation des groupements

La désignation du cardinal d'une collection qui résulte d'un comptage préalable et qui rend compte de ce comptage en indiquant les unités et le nombre d'unités, peut mener à une désignation de type « trois dizaines et deux (unités) » dans une forme décontextualisée ou encore « trois plaques (de dix) et deux boutons seuls », dans une forme contextualisée. Nous la nommons « désignation des groupements », elle est ici issue d'un comptage en unités, mais un tel type de désignation n'est pas nécessairement issu d'un comptage. En effet, elle peut intervenir en particulier à l'issue d'une stratégie organisation/configuration de la collection, qui utilise elle aussi des groupements, par exemple « trois groupes (de dix) et deux objets seuls ». Nous considérons ici principalement cette désignation sous une forme orale ou une transcription mot à mot de l'oral « trois groupes de dix » ou « 3 groupes de dix », puisque « 3 » et « trois » sont deux transcriptions écrites du son « trois » compris dans une interprétation ordinale. Cependant, une autre version écrite a déjà été signalée, c'est celle du type « 3X 4I ».

3.2 Les stratégies de « base »

Elles font écho aux flèches dans la modélisation qui a été proposée auparavant.

a. Obtention d'un signifiant du cardinal d'une collection (signifiant/signifié(s))

Il va s'agir de désigner le cardinal d'une collection d'objets manipulables ou figurés.

Stratégie OF (pour désignation Orale parlée en France)

Il s'agit de stratégies de comptage, d'organisation ou de calcul dont le but est d'obtenir la désignation parlée en France et sans utiliser d'autres « ressources » que celles en jeu dans une interprétation de la numération parlée en France (en particulier pas d'autres signifiants). Des problèmes d'énumération peuvent intervenir¹³⁸, surtout dans le cas d'une collection figurée. Suivant les cas (collection manipulable ou figurée sur une feuille), les objets peuvent être énumérés visuellement ou avec le doigt ou encore cochés à l'aide d'une marque ou en les séparant des autres par exemple en les extrayant d'une boîte.

Exemples :

1. Les objets sont pointés un par un et y sont associés les mots de la comptine numérique. Le dernier mot énoncé constitue le message.

2. Les objets sont pointés p par p¹³⁹ (cochés p par p par exemple en les entourant¹⁴⁰) et des désignations de la numération parlée en France¹⁴¹ y sont associées successivement. Afin d'obtenir le dernier mot énoncé comme réponse correcte, une méthode non erronée oblige à changer de stratégie ou non suivant le reste de la division euclidienne du nombre n de carrés

¹³⁸ Voir Briand (1999).

¹³⁹ Par exemple deux par deux ou dix par dix.

¹⁴⁰ Ceci peut alors demander une « sous-stratégie » pour dénombrer chaque paquet. Par exemple pour p=10, on peut faire un comptage de p en p (par exemple de 2 en 2 jusqu'à 10) ou s'aider de la comptine numérique ou encore utiliser un calcul mental. A noter que le subitizing peut permettre d'estimer des quantités jusqu'à 4.

¹⁴¹ Pour p=2, un début de stratégie non erronée est de dire « deux, quatre, six, etc. » et pour p= 10, « dix, vingt, trente, etc. ».

par p. Par exemple pour $p=2$ et $n=37$, on peut compter de deux en deux jusqu'à trente six et ensuite utiliser la comptine numérique à partir de trente six et dire trente sept. Autre exemple pour $p=10$ et $n=23$, on peut compter de dix en dix jusqu'à vingt et soit utiliser un comptage un à un à l'aide de la comptine numérique, soit une stratégie type calcul mental (vingt plus trois est égal à vingt-trois).

3. Les objets sont pointés par groupes non nécessairement toujours de même taille (cochés par exemple en les entourant) et des désignations successives du cardinal des objets comptabilisés sont associées (via un calcul mental ou bien à l'aide des doigts ou encore par surcomptage). Le dernier mot prononcé désigne le cardinal de la collection.

4. La collection est organisée en groupes de dix (par comptage un à un par exemple ou grâce à une des stratégies précédentes) et en objets non groupés afin d'obtenir une désignation parlée en France en s'appuyant sur les repérants/appuis additifs dix, vingt, trente, etc.

Stratégie EC (pour Ecriture Chiffrée)

Ces stratégies mènent à l'obtention de l'écriture chiffrée sans passer par la désignation parlée en France correspondante. Une des stratégies non erronée a déjà été indiquée dans le chapitre 2 dans les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection. Elle consiste à faire le maximum de groupes de dix objets et ensuite à accoler dans le bon ordre le chiffre désignant ce nombre de groupes avec le chiffre désignant le nombre d'objets restants¹⁴². Le cas des nombres à un chiffre est à distinguer de ceux à deux chiffres, les deux numérations parlées en France et chiffrée étant pour ces nombres dans un rapport oral/écrit avec une interprétation commune de numération ordinale.

Stratégie OG (O pour oral et G pour Groupement)

Il s'agit de stratégies menant à l'obtention d'un signifiant oral, ou transcription mot à mot de l'oral, de type « désignation des groupements ». Dans l'exemple que nous allons donner, les groupements en jeu sont de cardinal dix, mais ils sont théoriquement quelconques. Ainsi, pour une collection figurée ou manipulable, il s'agit de faire des groupements (par dix) et de dénombrer des paquets et des carrés : le fait d'effectuer ce dénombrement après avoir organisé la collection est un indicateur (non suffisant) pour distinguer une stratégie « organiser/configurer pour désigner » et « compter en unités »¹⁴³. Les stratégies pour ce dénombrement de groupements peuvent mettre en jeu un comptage un à un, voire une évaluation par subitizing lorsque les cardinaux en question ne dépassent pas quatre. Cependant dans le cas où le maximum de groupements n'a pas été effectué, le nombre d'objets isolés peut être important et nécessiter ainsi pour son dénombrement par exemple une stratégie de type OF précédente.

Ainsi, trois paramètres sont à envisager pour les cardinaux en jeu : la maximalité des groupements, le type de groupement (et le fait qu'ils soient de même cardinal), la nature de la collection (manipulable, figurée). Deux stratégies sont possibles, « organiser pour désigner » et « compter en unités », avec en plus une stratégie pour dénombrer les groupements et les objets non groupés.

¹⁴² A noter la particularité pour des collections dans lesquelles il ne reste pas d'objets isolés. Remarquons aussi que le fait de considérer des collections de cardinal inférieur à 99 ne permet pas de distinguer la stratégie qui consiste à d'abord chercher tous les groupements de l'ordre le plus petit (dizaine) pour en faire ensuite des plus grands, d'une stratégie cherchant d'abord à obtenir les groupements du plus grand ordre possible. Ceci a été signalé dans le chapitre 2 en comparant l'algorithme Glouton et la division euclidienne.

¹⁴³ Voir les définitions données auparavant.

Stratégie GraC (Gra pour Graphique, C pour collection)

Nous donnons ici en exemple des stratégies menant à deux types de productions graphiques¹⁴⁴ qui rendent compte de l'organisation de la collection ou du résultat d'un comptage en unités. Elles peuvent être plus ou moins contextualisées et plus ou moins figuratives. Le premier (production graphique de type 1) consiste en une production graphique grâce à laquelle l'ensemble des groupements et des objets seuls (des carrés) est représenté exhaustivement, avec plus ou moins de précision dans le détail (par exemple le nombre de carrés représentés sur une plaque de dix). Dans une forme symbolique, il peut s'agir de signes de type XXX IIIIII pour trente-sept, et dans une forme figurative des dessins de groupements et d'objets non groupés. Le deuxième (production graphique de type 2) est une production graphique comportant deux types de signe : l'un désignant un groupement de dix, l'autre un objet seul. Ils sont ici aussi plus ou moins figuratifs. Chaque signe est associé à un nombre : soit le nombre est indiqué par une écriture chiffrée, soit il est indiqué par l'écriture littérale de la désignation parlée en France. Dans une forme symbolique, il peut s'agir de désignations de type 3X 7I pour trente-sept. A la différence de la production graphique de type 1, il y a obligation de dénombrer le nombre de groupements.

Voici en exemple deux stratégies, toutes les deux concernant des groupements de dix. Les deux utilisent la matérialisation des groupements (par dix pour une stratégie non erronée) préalablement sur la collection (par exemple en entourant dix objets ou en les rassemblant). Ensuite, la première stratégie, valable pour les deux productions graphiques, consiste à représenter ces groupements sur une feuille (de manière plus ou moins schématisée comme nous l'avons indiqué) en utilisant un dénombrement des groupements et des objets isolés pour obtenir une des deux productions graphiques. La deuxième, valable uniquement pour une production graphique de type 1, consiste à dessiner les groupements en utilisant une correspondance terme à terme : un dénombrement n'est pas nécessaire.

A noter qu'une désignation orale des groupements peut d'une certaine manière être considérée comme la traduction « mot à mot » d'une production graphique de type 2 : dire ce qui est « écrit ». En ce qui concerne une production graphique de type 1, une désignation orale des groupements peut être considérée comme étant une description : décrire oralement ce qui est vu.

Autres stratégies menant à d'autres signifiants AS

Ces stratégies conduisent à un autre type de signifiant que ceux évoqués précédemment. Le signifiant peut par exemple être constitué de gestes ou de dessins, schémas, figures non encore citées ou bien encore de productions mixtes dessin/désignation orale. Nous n'indiquons pas ces stratégies du fait de cette grande diversité. A noter cependant que les désignations écrites chiffrées et parlées en France peuvent intervenir. Le cas de signifiants de type $10+10+10+7$ en est un exemple. Une telle décomposition peut être reliée à une écriture chiffrée (le 3, signifie qu'on écrit trois 10 ; on y ajoute 7) ou à la désignation parlée (dans « trente-sept », on peut compter « dix, vingt, trente », donc il y a trois « dix » qui s'écrivent « 10 »), soit encore d'une désignation OG (trois paquets de dix et sept boutons seuls). Suivant le contexte, elle peut être considérée de manière différente, par exemple comme une forme de production graphique hybride, de type 1 pour les dizaines, le signe « + » n'étant pas nécessairement interprété comme un signe opératoire.

¹⁴⁴ Nous nous référons aux trois systèmes que nous avons décrits pour la transcription de la décomposition polynomiale : le premier (système de numération de position) n'utilise que les coefficients, le deuxième (indication de l'ensemble des types de groupement) n'utilise que les ordres, le troisième (système « mixte ») utilise les deux simultanément.

b. Obtention du cardinal d'une collection à partir d'un signifiant (signifiant/signifié(s))

Ces stratégies sont des processus réciproques des stratégies précédentes. Nous nous y référons pour des précisions.

Stratégie OF° (pour désignation Orale parlée en France)

Il s'agit de stratégies de comptage, d'organisation ou de calcul dont le but est de constituer une collection à partir de la désignation parlée en France de son cardinal et sans utiliser d'autres signifiants. Des problèmes d'énumération peuvent intervenir, surtout dans le cas de constitution de collections à partir d'une collection figurée. Suivant les cas (collection manipulable ou figurée sur une feuille), les objets peuvent être énumérés visuellement ou avec le doigt ou encore cochés à l'aide d'une marque ou en les séparant des autres par exemple en les extrayant d'une boîte.

Exemples :

1. Les objets sont énumérés un par un et y sont associés les mots de la comptine numérique. Le processus s'arrête au moment du dernier mot prononcé.
2. Les objets sont pointés p par p¹⁴⁵ et y sont associés successivement des désignations de la numération parlée en France.
3. Les objets sont énumérés par groupes non nécessairement toujours de même taille et y sont associées des désignations successives du cardinal des objets comptabilisés (via un calcul ou un comptage). Le processus s'arrête quand le mot prononcé désigne le cardinal voulu.
4. La collection est organisée au fur à mesure en groupes de dix (obtenus par comptage un à un par exemple) et en objets non groupés : la stratégie s'appuie sur la régularité des repérants/appuis de la numération parlée en France.

Stratégie EC° (pour Ecriture Chiffrée)

Ces stratégies concernent l'élaboration d'une collection dont le cardinal est désigné par son écriture chiffrée sans utiliser d'autres désignations, en particulier la désignation parlée en France correspondante. Une des stratégies non erronées indiquée dans les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection du chapitre 2, consiste à constituer le nombre de groupes de dix indiqués par le chiffre adéquat de l'écriture chiffrée (voir les stratégies déjà signalées pour constituer une collection de dix objets) et à faire la même chose pour le chiffre des unités. Le cas des nombres à un chiffre est à distinguer de ceux à deux chiffres, les deux numérations, écrite et chiffrée, étant pour ces nombres dans un « simple » rapport oral/écrit avec une interprétation commune de numération ordinale.

Stratégie OG° (pour O pour oral et G pour Groupement)

Il s'agit de stratégies menant à l'obtention d'une collection à partir d'un signifiant oral de son cardinal de type « désignation des groupements ». Les groupements que nous allons considérer sont principalement de cardinal dix, mais ils sont théoriquement quelconques. Ces stratégies sont alors proches des précédentes, mais cependant elles ne nécessitent pas de décodage de l'écriture chiffrée (identification d'un chiffre à un ordre, et donc importance l'ordre). Pour passer directement d'un tel signifiant à la collection, il s'agit de faire le nombre de groupements (de dix) indiqués, par exemple en les entourant ou en les séparant du reste des objets. Les stratégies pour réaliser le bon nombre de groupements ont déjà été évoquées. Les mêmes trois paramètres signalés précédemment sont ici aussi en jeu : la maximalité des groupements, le type de groupement (et le fait qu'ils soient de même cardinaux), la nature de la collection (manipulable, figurée). Deux stratégies sont possibles, « organiser pour

¹⁴⁵ Par exemples deux par deux ou dix par dix.

désigner » et « compter en unités », avec en plus une stratégie pour dénombrer les groupements et les objets non groupés.

Stratégie GraC° (Gra pour Graphique, C pour collection)

Il s'agit de stratégies menant à l'obtention d'une collection à partir d'un signifiant de type production graphique de type 1 ou 2.

Dans le cas de l'utilisation d'une désignation OG, nécessitant un dénombrement des groupements à partir d'une production graphique de type 1 ou une traduction orale de l'écrit à partir d'une production graphique de type 2, nous retrouvons les stratégies précédentes OG°. Sinon, pour une production graphique de type 1, il est possible de constituer au fur et à mesure les groupements de dix, leur nombre pouvant être obtenu par une association terme à terme entre les groupements constitués et ceux figurés (idem pour les unités) : il n'y a pas alors nécessité d'un dénombrement des groupements et des objets seuls.

Autres stratégies menant à d'autres signifiants AS°

Comme précédemment, nous n'allons pas indiquer de stratégies spécifiques, le signifiant en jeu pouvant prendre une multitude de formes, par exemple des gestes ou des dessins, schémas, etc.

c. Passage entre deux signifiants (signifiant/signifiant)

L'étude de la première partie de la thèse a mis en exergue des différences et des ressemblances entre l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée et celles possibles pour la numération parlée en France. Nous nous y appuyons pour donner des exemples qui reposent sur les possibilités ouvertes et les limites à leur généralisation, pour tous les nombres.

Stratégie de type EC vers OF

Ces stratégies visent à traduire l'écriture chiffrée en sa désignation parlée en France¹⁴⁶.

Exemples (37 vers trente-sept) :

1. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre de manière automatisée (appel à la mémoire à long terme).
2. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre grâce à un appui sur les sonorités des désignations orales des chiffres : 3 se dit « trois » et fait penser à « trente », et 7 se dit « sept ». Cette stratégie est moins adaptée pour un nombre comme « vingt-trois » puisque le son « vingt » n'est pas proche du son « deux ».
3. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre grâce à un appui sur la récitation de la comptine des dizaines : 3 (traduit par « trois ») mots de la comptine des dizaines sont récités « dix, vingt, trente » (possible appui sur les doigts), et 7 se dit « sept ».
4. L'écriture chiffrée est traduite par le mot désignant le nombre grâce à un appui sur la suite des écritures chiffrées des nombres (file numérique) : à partir de l'écriture chiffrée d'un nombre dont est connue la désignation parlée en France (cela peut être 1 mais aussi un autre comme 10) est récitée la comptine numérique orale en suivant la file numérique (une désignation par écriture chiffrée), le mot prononcé pour chaque écriture chiffrée est sa désignation parlée usuelle.

Stratégie de type OF vers EC

Ces stratégies visent à traduire la désignation parlée en France en sa désignation écrite chiffrée, sans autre signifiant en jeu.¹⁴⁷

¹⁴⁶ Ces dernières s'appuient sur une connaissance du lien entre l'écriture chiffrée et la désignation orale usuelle des nombres de 1 à 9.

Exemples (trente-sept vers 37):

1. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée de manière automatisée.
2. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée grâce à un appui sur les sonorités : « trente » fait penser à trois qui s'écrit « 3 » et dans « trente-sept » est entendu « sept » qui s'écrit « 7 »¹⁴⁸.
3. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée grâce à un appui sur la récitation de la comptine des dizaines : dans « dix, vingt, trente » on utilise trois mots pour dénombrer (il est possible d'utiliser les doigts), « trois » s'écrit « 3 », et dans « trente-sept » est entendu sept qui s'écrit « 7 ».
4. Le mot désignant le nombre est traduit en écriture chiffrée grâce à un appui sur la suite des écritures chiffrées (file numérique mémorisée, reconstituée ou à disposition) : par exemple la comptine numérique est récitée en écrivant (ou repérant quand la file numérique chiffrée est déjà présente) au fur et à mesure les nombres énoncés, le dernier nombre énoncé est relié ainsi à son écriture chiffrée.

Stratégie de type OF vers OG ou GraC

Ces stratégies visent à traduire la désignation parlée usuelle d'un nombre en Français en sa désignation de type OG ou GraC.

Nous allons donner ici des stratégies non erronées. Un certain nombre d'erreurs peut survenir notamment dans l'inversion des chiffres ou des mots. Plus de détails sur les stratégies possibles ont été donnés dans la première partie de la thèse avec les procédés de mise en signes du cardinal d'une collection.

A partir de la désignation parlée en France (par exemple « trente-sept »), les groupements de dix peuvent être retrouvés en énumérant oralement les dizaines (dix, vingt, trente) qui peuvent être dessinées au fur ou à mesure (menant à une production graphique de type 1) ou bien encore dénombrées en comptant les mots avec ou non l'aide des doigts (menant à une production graphique de type 2 ou à une désignation orale OG). En ce qui concerne l'obtention du nombre d'objets non groupés, il est donné par le dernier mot prononcé à l'oral (sept pour trente-sept). Les objets peuvent être alors tous dessinés, ce qui demande une stratégie spécifique¹⁴⁹ : il s'agit de dessiner une collection d'objets dont le cardinal est donné par une désignation parlée en France. Nous avons déjà abordé ce problème auparavant.

Stratégie de type EC vers OG ou GraC

Ces stratégies visent à traduire l'écrite chiffrée en sa désignation de type OG ou GraC.

Dans le cas des nombres inférieurs à dix (10), l'étude faite dans la première partie de la thèse montre la proximité de la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France : seul un rapport écrit/oral les distingue véritablement. C'est pourquoi nous considérons pour ces nombres les stratégies relatives aux désignations parlées dont il a été fait mention précédemment. Une autre possibilité, valable pour toutes les écritures chiffrées, est d'utiliser une file numérique qui est constituée des écritures chiffrées des nombres (dans l'ordre croissant). Il suffit de faire correspondre un objet (groupe de dix ou unité) à chaque écriture, jusqu'à l'écriture chiffrée désirée.

¹⁴⁷ Elles s'appuient sur une connaissance du lien entre l'écriture chiffrée et la désignation orale usuelle des nombres de 1 à 9.

¹⁴⁸ Une stratégie erronée consiste à traduire en écriture chiffrée « trente-sept » par 307 en accolant la traduction chiffrée de trente et celle de sept. Ce type de stratégie dépend du nombre en jeu : les possibilités ne sont pas les mêmes pour le lien entre trente-sept et 37 que pour celui entre trente et 30 (le zéro ne s'entend pas) ou vingt-trois et 23 (le deux ne s'entend pas).

¹⁴⁹ Dans le cas où le cardinal de la collection est uniquement un nombre de dizaines entières (c'est le cas pour trente), cette dernière stratégie peut échouer, mais pas nécessairement si on garde en mémoire le codage spécifique des dizaines.

Deux possibilités sont alors envisageables pour passer de l'écriture chiffrée à une désignation OG ou GraC. Soit la collection est d'abord constituée (mentalement ou physiquement) d'unités et ensuite des groupements sont à opérer, ce qui met en jeu ici un lien signifiant/signifié(s). Soit, dans le cas d'un nombre écrit avec deux chiffres, les groupements sont lus grâce aux chiffres : par exemple dans 37, 3 (trois) groupes de dix et 7 (sept).

Stratégie de type OG ou GraC vers OF

Ces stratégies visent à traduire la désignation d'un nombre de type OG ou GraC en sa désignation parlée en Français.

Il s'agit d'inverser le processus déjà indiqué pour la stratégie OF vers OG ou GraC. Par exemple, à partir des groupements de dix d'une production graphique de type 1, (tel que trois groupements de dix et sept boutons isolés), la désignation parlée en France peut être retrouvée en comptant oralement les groupements (dix, vingt, trente) puis les boutons isolés. Pour une production graphique de type 2 ou une désignation orale OG, il s'agit de considérer chaque type d'objets (groupements et unités) de manière différente. Pour les groupements, leur nombre signalé par une écriture chiffrée « 3 » ou une désignation « trois », peut être traduit par trente en utilisant la sonorité. Le nombre d'unités n'ayant pas besoin de traduction (sept par exemple), il suffit d'accoler les deux mots obtenus dans le bon ordre pour avoir la désignation parlée en France « trente-sept ». Outre la spécificité de certains nombres (onze à seize, quatre-vingts à cent), un premier problème survient lorsque la désignation de type OG ou GraC n'utilise pas des groupements de dix, auquel cas un calcul est envisageable pour effectuer le passage. Un deuxième problème vient du fait que les groupements ne sont pas nécessairement maximaux (par exemple « deux paquets de dix et dix-sept »), auquel cas un ou des échanges de dix contre un sont nécessaires (c'est-à-dire qu'il est à envisager un ou des groupements supplémentaires de dix boutons).

Stratégie de type OG ou GC vers EC

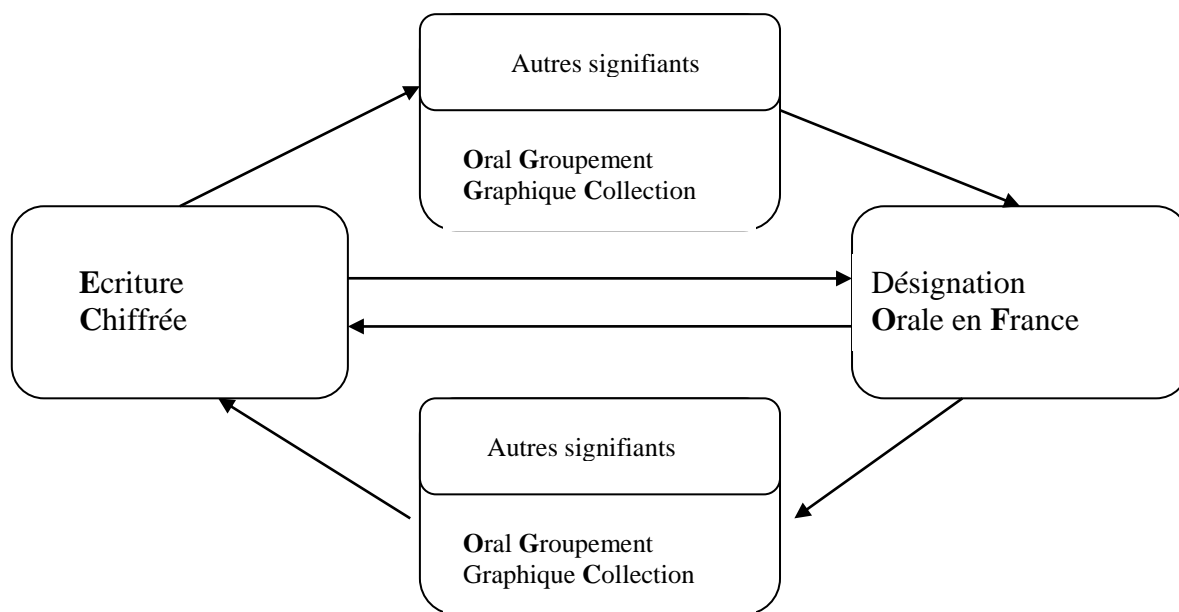
Ces stratégies visent à traduire la désignation d'un nombre de type OG ou GraC en sa désignation écrite chiffrée.

Il s'agit cette fois-ci d'inverser le processus déjà indiqué pour le passage inverse de EC vers OG ou GraC. Par exemple, à partir des groupements de dix d'une production graphique de type 1, (tel que la représentation exhaustive de trois groupements de dix et sept boutons isolés), la désignation écrite chiffrée peut être retrouvées en comptant oralement les groupements – 1 (un), 2 (deux), 3 (trois) – ou en utilisant une file numérique des écritures chiffrées, puis de même pour les boutons isolés. Le problème principal se pose ici aussi lorsque la désignation de type OG ou GraC n'utilise pas des groupements de dix, ou encore quand les groupements ne sont pas maximaux.

3.3 Les cheminements cognitifs

a. Coder/décoder

Nous allons utiliser un schéma indiquant les différentes stratégies d'élaboration d'une collection à partir d'un signifiant de son cardinal ou les différentes stratégies de désignation du cardinal d'une collection : nous obtenons une description des cheminements cognitifs. Ce schéma est à donc considérer à l'aune de notre cadre théorique.



Voici le principe de fonctionnement de ce schéma pour « coder » et « décoder » :

Obtention d'un signifiant du cardinal d'une collection (coder) utilisant le passage entre deux signifiants

Ces stratégies commencent toutes par une stratégie de base précédente OF, EC, OG, GraC et se poursuivent par une des stratégies déjà mentionnée : EC vers OF, OF vers EC, OF vers OG ou GraC, EC vers OG ou GraC, OG ou GraC vers OF, OG ou GraC vers EC. Ainsi, une stratégie pour obtenir la désignation écrite chiffrée du cardinal d'une collection d'objets peut débiter par une stratégie de type OF, suivie d'un lien signifiant/signifiant de type OF vers EC.

Obtention d'une collection à partir d'un signifiant de son cardinal (décoder) utilisant le passage entre deux signifiants

Elles commencent par une des stratégies déjà mentionnée, EC vers OF, OF vers EC, OF vers OG ou GraC, EC vers OG ou GraC, OG ou GC vers OF, OG ou GraC vers EC et se poursuivent par une stratégie de base précédente OF°, EC°, OG°, GraC°. Par exemple, une stratégie pour élaborer une collection d'objets à partir d'une désignation parlée en France peut débiter par une stratégie de lien signifiant/signifiant de type OF vers EC, puis se poursuivre par une stratégie de type EC°.

Il existe par ailleurs des stratégies faisant intervenir d'autres signifiants que ceux évoqués ici. Par exemple une stratégie de type OF vers EC peut utiliser la médiation/relais d'un matériel manipulable, qui de par sa contextualisation (par exemple les plaques de dix) ne constitue pas nécessairement un système sémiotique de signifiants (utilisé pour résoudre une certaine variété de problèmes mettant en jeu le nombre). Elle peut aussi utiliser une médiation/relais d'un matériel de numération manipulable qui se constitue en un système sémiotique.

Rappelons que toutes les possibilités ne sont pas nécessairement disponibles chez un sujet et leur efficacité dépend de plusieurs paramètres. Par exemple, une stratégie EC vers OG ou

GraC peut nécessiter un relais via les désignations parlées en France (OF), dans le cas où la relation de « base » évoquée ci-avant n'est pas une connaissance disponible.

b. Comparer le cardinal de collections

Sans l'utilisation de signifiant qui désignent les nombres

Nous envisageons des collections manipulables ou figurées (des objets étant indiqués exhaustivement par des dessins).

La première stratégie que nous considérons est l'association terme à terme. Il est possible de rendre visible les liens (en déplaçant les objets, en les reliant par un trait ou un autre connecteur) ou ce lien peut rester virtuel : il est alors fait mentalement. Les termes de l'association peuvent être des objets seuls ou des groupements d'objets (ce qui nécessite d'associer des groupements de mêmes cardinaux).

L'autre stratégie principale est l'estimation globale visuelle. Sa réussite dépend de plusieurs facteurs, sur lesquels le sujet peut jouer selon en particulier que les collections soient figurées ou manipulables : nombre d'objets en jeu (pour chaque collection ainsi que comparativement entre les deux collections), disposition de chacun des éléments des collections à l'intérieur d'une même collection et entre les collections (en ligne, en constellations du dé culturellement reconnues, visibles simultanément pour les deux collections, etc.), densité, etc. Cette estimation peut permettre en particulier de former des groupements et ainsi être utilisée pour l'association terme à terme.

A l'aide de deux signifiants qui désignent les nombres

Nous allons présenter ici les stratégies « internes » à chaque type de signifiant, c'est-à-dire sans médiation par un autre signifiant qui désigne les nombres ni utilisation d'une collection figurée ou manipulable. Elles font intervenir certains principes et propriétés dégagés dans la première partie de la thèse qui permettent par exemple de pouvoir comparer deux nombres à deux chiffres uniquement en comparant leurs chiffres. Pour l'écriture chiffrée et les désignations parlées en France, ces stratégies dépendent donc de l'interprétation des systèmes de numération. Pour les nombres inférieurs à 10/dix, c'est l'interprétation strictement ordinale que nous privilégions.

Nous allons donner ces stratégies via l'exemple des nombres trente-et-un/31 et quarante-deux/42 que nous considérons comme génériques. Nous ne revenons pas sur les spécificités de certaines désignations propres à la numération parlée en France (onze à seize, soixante-dix à quatre-vingt-dix-neuf), largement abordées dans la première partie de la thèse.

Désignation parlée en France/Désignation parlée en France

Aspect ordinal sans repérant : trente et un se dit avant quarante-deux

Utilisation des repérants : trente se dit avant quarante, donc trente-et-un est avant quarante-deux

Utilisation des appuis additifs : trente c'est dix de moins que quarante (ou quarante c'est dix de plus que trente), donc trente-et-un c'est moins que quarante-deux

Utilisation des appuis multiplicatifs : trente c'est trois (dizaines) et quarante c'est quatre (dizaines), donc trente c'est une dizaine de moins que quarante, on en déduit que trente-et-un c'est moins que quarante-deux.

Ecriture chiffrée/Ecriture chiffrée

31 est inférieur à 42, car le premier chiffre de 31 désigne un nombre inférieur à celui désigné par le premier chiffre de 42.

« Désignation des groupements »/« désignation des groupements »

Nous envisageons des stratégies qui consistent à comparer les désignations des cardinaux du nombre de groupements, pour chaque type de groupement en jeu. Une stratégie comparable à la précédente est envisageable, en considérant les différents groupements (de même cardinal) selon un certain ordre : par exemple comparer le nombre de groupements de dix puis dans le cas où ils sont identiques, le nombre d'objets non groupés. Cependant, si les groupements utilisés ne sont pas constitués de manière maximale (par exemple deux groupes de dix et quinze unités) ou n'utilisent pas les mêmes groupements (par exemple, trois groupes de cinq pour l'un et deux groupes de dix et cinq pour l'autre), plusieurs désignations de même type sont possibles, et la stratégie précédente échoue.

Deux signifiants de type différent

Nous envisageons des stratégies se ramenant à comparer deux signifiants de même type. Il suffit ainsi d'utiliser préalablement une stratégie signalée auparavant permettant de traduire un signifiant d'un certain type en un autre. Par exemple dans le cas de la comparaison de deux nombres, l'un étant désigné par une écriture chiffrée (31) et l'autre par sa désignation parlée en France (quarante-deux). Il est possible d'utiliser une stratégie OF vers EC pour traduire l'écriture chiffrée en la désignation parlée en France, « 31 » en « trente-et-un », puis d'utiliser par exemple le fait que trente-et-un se dit avant quarante-deux.

A l'aide du signifiant du cardinal d'une seule collection

Il est possible soit de se ramener à la comparaison de deux signifiants, soit de se ramener à la comparaison de deux collections figurées ou manipulables : ces deux cas ont été traités auparavant.

4. Conclusion

4.1 Des outils théoriques pour aborder de nouvelles questions

a. Le cadre théorique

La variété des problèmes résolus dans les multiples dimensions signalées ci-avant et les connaissances-en-acte employées dans cette variété de problèmes rendent compte du degré de conceptualisation. Le processus d'apprentissage consiste alors à étendre la pertinence et l'efficacité des connaissances-en-acte¹⁵⁰ sur une plus grande variété de problèmes (constitutifs du concept). Agir sur ce processus (côté enseignement) nécessite de prendre en compte à la fois les connaissances anciennes d'un sujet et les classes de problèmes propres à un concept. Mais d'autres facteurs interviennent dans l'apprentissage. En effet, c'est le type de stratégie employée qui porte la trace, à travers les connaissances-en-acte, des connaissances mathématiques travaillées et utilisées. Or, dans ces stratégies employées les signifiants apparaissent en lien avec certaines connaissances-en-acte. Ils permettent ainsi de passer du concept-outil au concept-objet. Plus exactement, c'est leur emploi systématique en relation avec les mêmes connaissances-en-acte dans certains problèmes qui permet de faire ce lien : un signifiant évoque un panel de possibilités (connaissances-en-acte) pour résoudre un éventail de problèmes et réciproquement un éventail de problèmes évoquera un certain nombre de signifiants utiles à leur résolution. Qui plus est, certains théorèmes-en-acte sont utilisés en lien avec plusieurs signifiants différents (simultanément ou indépendamment). Ce sont les propriétés mathématiques en jeu dans ces relations signifiants/signifié(s) constituant le concept-outil qui peuvent alors être ensuite objet d'étude. Cependant dans les premiers apprentissages l'étude de l'objet est plus problématique puisque ces relations sont encore peu

¹⁵⁰ C'est-à-dire augmenter le niveau de mise en fonctionnement des connaissances dans la terminologie de Robert (2007). Nous disposons pour ce faire des deux leviers : restriction et généralisation des schèmes.

stabilisées : le concept est encore en cours d'objectivation. C'est donc surtout un concept-outil non encore étudié en tant que concept-objet qui va intervenir dans les premiers temps de la conceptualisation et donc de l'apprentissage. Dans ce processus les signifiants jouent un rôle important. Ainsi, si un enjeu d'apprentissage est souvent exprimé en termes de signifiant en évoquant un concept-objet (par exemple la numération décimale de position), il nous faut dans notre cadre théorique le traduire en termes d'exploration d'une variété de problèmes, de connaissances-en-acte et d'étendue de leur opérationnalité pour un élève, ainsi que de connexions avec d'autres signifiants du même signifié(s) et finalement de connexions avec d'autres concepts. Ceci tout en tenant compte du niveau de conceptualisation déjà atteint par les élèves.

b. Des outils et des réponses partielles

Des outils

Les critères pour classer des stratégies que nous avons dégagés tiennent compte d'une part des liens entretenus entre les deux systèmes de numération et le signifié(s) « nombre » et d'autre part la diversité des stratégies possibles. Nous en avons dégagé un outil pour notre étude : la notion de cheminement cognitif au niveau du sujet qui résout un problème sur le nombre. En outre, nous avons utilisé les cheminements cognitifs pour analyser à l'aide de notre cadre théorique les problèmes susceptibles d'être rencontrés par les élèves en ce qui concerne leur premiers pas dans la conceptualisation du nombre faisant intervenir la numération écrite chiffrée.

Les interprétations au niveau du sujet

Notre cadre théorique permet d'apporter des éléments de réponse sur le type de questions posées à la fin de la première partie, en premier lieu de voir quelle est la différence au niveau du sujet entre les différentes interprétations. En effet, notamment à travers l'analyse des problèmes sur le nombre, nous avons mis en résonance stratégies et interprétations. Leur lien est complexe car il est difficile de relier directement théorèmes ou concepts-en acte et stratégies puis stratégies et problème. C'est plutôt un réseau que nous avons mis en évidence, et un réseau qui comporte sa propre structure. Ainsi, pour un problème donné, l'efficacité et la pertinence des stratégies reposent sur les potentialités des systèmes de numération quand des désignations du nombre sont en jeu. Au niveau du sujet de la TCC, notre analyse peut se comprendre comme une précision des liens entre d'une part les théorèmes, propriétés et relations des systèmes de numérations et d'autre part les possibilités d'extension et de restriction des schèmes utilisés. Ceci nous amène à considérer que les paramètres de la situation (au sens de Vergnaud) sont des éléments importants à prendre en compte pour appréhender les interprétations au niveau du sujet.

Un premier résultat

De manière globale, notre cadre théorique permet de distinguer chez un sujet l'usage d'interprétations arithmétiques (additives et multiplicatives) d'interprétations ordinales (strictement ou avec repérants). C'est lorsque les signifiants sont employés dans des problèmes des structures arithmétiques (additive ou multiplicative) que nous dirons que l'interprétation convoquée est de type arithmétique. Concrètement, cela peut permettre d'avoir un paramètre pour distinguer l'interprétation arithmétique additive de l'interprétation ordinale avec repérant chez un sujet. Si par exemple le cardinal est obtenu par réunion de deux collections, une de cardinal trente et une de cardinal dix, trente et quarante sont utilisés comme des appuis additifs. Si à partir de trente, la comptine numérique est utilisée pour considérer un par un les éléments restants jusqu'à en obtenir quarante, trente et quarante sont

utilisés comme repérants. Nous avons indiqué cependant dans les définitions des termes « calculer » et « compter » en quoi la distinction était difficile parfois à saisir.

Des difficultés méthodologiques

Lorsque le concept outil devient un concept objet, les potentialités de chaque interprétation deviennent plus facilement analysables. Un exemple en est les procédés concrets de mise en signes que nous avons dégagés dans la première partie de la thèse. Cependant, dans les théorèmes-en-acte utilisés par le sujet, en particulier de par leur visée pragmatique (la finalité est que « ça marche » mais pas de savoir « pourquoi ça marche »), telle ou telle interprétation n'est pas identifiable en tant que telle : elle s'inscrit dans un réseau de connaissances (relatives à un champ conceptuel).

Particulièrement au début des apprentissages, les concepts sont pour le sujet/élève le plus souvent des outils, ce qui met en exergue des connaissances-en-acte et non des connaissances objectivées. Demander à un élève ce qu'il a fait et comment il a fait pour résoudre un problème, surtout pour un enfant de primaire, n'est donc pas un moyen efficace (à lui seul) ni fiable pour accéder à la propriété mathématique en jeu. Notre cadre théorique nous a fourni un outil qui relie le sujet et les connaissances qu'il utilise, ce sont les théorèmes-en-acte. Comment connaître les théorèmes-en-acte utilisé par tel élève ? L'étude que nous avons menée sur les stratégies dans les problèmes relatifs aux cardinaux de collection peut nous servir à délimiter un champ des possibles. Revenons sur celle-ci.

Nous avons relié certains (ensembles de) théorèmes-en-acte à des propriétés issues des interprétations dégagées dans la première partie de la thèse. Mais se pose la question de relier les stratégies envisageables et les théorèmes-en-acte. Utiliser la stratégie 1 dans les items 1, 3, 4 permet de réussir. Mais cette réussite n'assure pas une conception exacte de la cardinalité, ni une identification précise des connaissances utilisées. Les travaux de Piaget, mêmes rediscutés¹⁵¹, mettent en évidence la complexité des mécanismes en jeu. Il est difficile d'y associer des théorèmes-en-acte *a priori*. Notons que toutefois, utiliser cette stratégie 1 (en la pensant efficace) dans le problème de l'item 5, et plus encore dans l'item 6 permet d'inférer une conception erronée de la cardinalité. Nous retenons cependant certains points qui permettent de faire une analyse des stratégies pour en inférer des théorèmes-en-acte :

- des recherches anciennes sur les connaissances (potentiellement) en jeu peuvent être utilisées,
- des stratégies erronées sont plus facilement interprétables que des stratégies menant au bon résultat, ainsi, il est plus facile d'associer des théorèmes-en-acte à certaines stratégies,
- une démarche globale doit être aussi entreprise pour chaque problème, c'est-à-dire qu'un découpage trop fin du problème général ne permet pas d'envisager un certain nombre de facteurs à prendre en compte : une stratégie peut être choisie par exemple de par son lien avec la suivante ou de par son lien avec la finalité du problème, ce qui permet d'inférer une plus grande variété de théorèmes-en-acte,
- les théorèmes-en-acte sont contextualisés,
- l'influence des connaissances anciennes est déterminante et une certaine évaluation de celles-ci est nécessaire *a minima*.

Ainsi n'est-il pas aisé pour l'observateur d'inférer un usage de telle ou telle interprétations de la numération dans les procédures observées, du fait en particulier que des mêmes procédures apparentes peuvent relever de différentes interprétations. Cependant la prise en compte des facteurs indiqués précédemment peut permettre une analyse.

Ceci a une conséquence d'ordre méthodologique. L'analyse des problèmes est nécessaire pour une étude du côté des élèves dans notre cadre théorique, mais nécessite des compléments

¹⁵¹ Voir par exemple Bideaud, Lehalle & Vilette (2004) pour une synthèse.

d'information accessibles par d'autres moyens pour appréhender les facteurs propres à une classe.

4.2 Les questions soulevées, celle retenues

Nous relevons des questions sur l'apprentissage et sur l'enseignement.

Nous avons relevé des difficultés à classer les problèmes à proposer aux élèves à des fins d'apprentissage, ce qui ressort d'une première question : quels problèmes à proposer aux élèves ? Ce premier niveau nécessite une étude plus approfondie que celle que nous avons faite afin de relier les théorèmes-en-acte, les stratégies, et les interprétations.

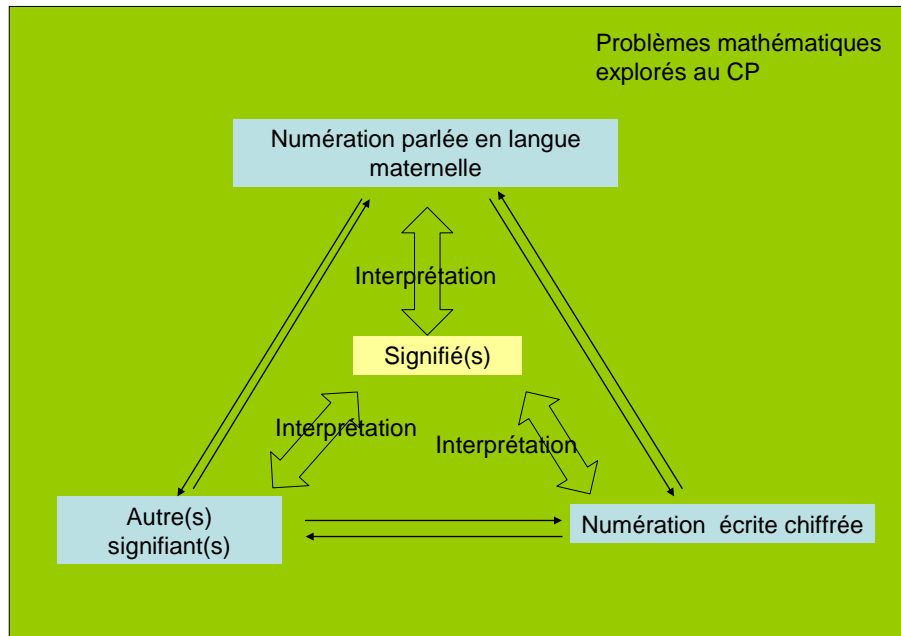
Nous avons mis en évidence des différences entre les différentes interprétations des numérations, la question se pose alors : quelles sont les possibilités d'articulation des interprétations dans l'enseignement institutionnel ? Ce deuxième niveau nécessite cette fois-ci une étude de la « circulation » des interprétations à une échelle plus globale que celle d'un problème.

Les deux questions sont liées. Ainsi, pour organiser l'apprentissage dans une classe, une progression à l'échelle des notions à articuler est nécessaire, mais la proposition de problèmes adéquats l'est aussi. Nous avons indiqué précédemment la complexité du travail concernant la classification des problèmes. Cependant, nous avons fait un premier pas qui permet de circonscrire les liens entre les interprétations et les problèmes via les stratégies envisageables pour résoudre ces derniers. Il est alors envisageable de répondre à la première question grâce à des tests en classe. Par contre nous n'avons donné pour l'instant aucune réponse sur l'articulation des interprétations dans l'enseignement que l'on peut proposer. Or ces réponses sont indispensables pour suivre l'objectif de la thèse, la compréhension des déroulements en classe, susceptible de mener à de nouvelles pistes pour l'enseignement (qui seraient encore à étudier). C'est pourquoi, nous allons développer des outils pour apporter des éléments de réponse à cette dernière question.

4.3 Vers une problématique en termes d'enseignement

a. La notion d'itinéraire cognitif d'enseignement

En considérant notre cadre théorique sur l'apprentissage, nous allons transposer au niveau de l'enseignement la notion de cheminement cognitif et les différentes interprétations. Ici nous faisons l'hypothèse qu'en jouant sur un certain nombre de paramètres et en tenant compte des connaissances anciennes des élèves, il est possible de leur proposer des problèmes qui favorisent l'utilisation de tel ou tel cheminement cognitif. Ces problèmes permettant en particulier de mettre en jeu tel ou tel aspect d'une interprétation.



Comme les interprétations interviennent dans les problèmes selon que ces derniers favorisent tel ou tel cheminement cognitif potentiellement emprunté par les élèves, ceci justifie une schématisation formellement proche de celle des cheminements cognitifs. Cependant, elle n'a pas la même finalité. Elle permet en effet de rendre compte des choix possibles d'enseignement par rapport à l'étude faite sur les interprétations que ce soit au niveau des mathématiques que du sujet. Nous avons dégagé des non-congruences, mais aussi des liens, la question est alors d'organiser les apprentissages des éléments mathématiques en jeu dans les interprétations (via les problèmes à poser aux élèves). Ainsi la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement renvoie, au niveau de l'enseignement, à la façon d'organiser et de transformer les liens en jeu dans les cheminements cognitifs.

Les interprétations sont élaborées au fur et à mesure d'un itinéraire d'enseignement et donc tous les aspects n'y sont pas objet d'enseignement en même temps. L'itinéraire cognitif d'enseignement permet de pointer en particulier le moment du processus durant lequel l'interprétation de la numération écrite chiffrée se constitue, se démarquant de l'interprétation ordinale (avec et sans repérant) de la numération parlée en langue maternelle. Dans ce jeu se pose la question du rôle joué par les interprétations « arithmétiques ». C'est ce que nous développons par la suite.

b. La problématique d'enseignement au CP

Nous reprenons les remarques données dans le chapitre initial de la thèse concernant sa présentation.

Les programmes de 2008 de l'école maternelle permettent d'inférer les interprétations en jeu avant le CP. Les extraits donnés ci-après sont exhaustifs en ce qui concerne le champ numérique.

« **Approcher les quantités et les nombres :**

L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets. Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons,

appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots-nombres, aide à la prise de conscience. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.

Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun. À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe « égal ») et les techniques.

La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées). Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée ; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres. [...]

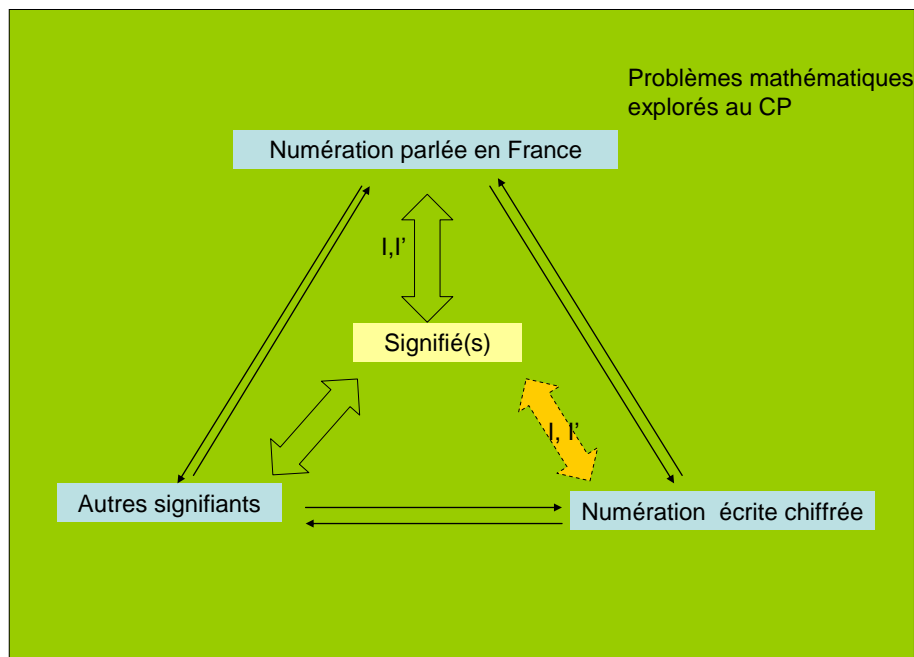
À la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de :

- situer des événements les uns par rapport aux autres ;
- comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ;
- mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ;
- dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ;
- associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée ;
- comprendre et utiliser à bon escient le vocabulaire du repérage et des relations dans le temps et dans l'espace. ».

Nous relevons que le champ numérique abordé est celui des nombres inférieurs à trente et que les problèmes que les élèves doivent résoudre le sont par des stratégies concernant principalement l'utilisation de la comptine numérique, sa mémorisation étant un objet d'enseignement prescrit. Par ailleurs les problèmes de la structure additive sont abordés dans un champ numérique restreint, les symboles « + », « = » ne sont pas introduits *a priori* et la variété indiquée n'est pas détaillée. Ces éléments nous permettent d'inférer qu'à l'école maternelle la numération parlée est avant tout utilisée dans une interprétation ordinale (éventuellement avec repérants). En outre les écritures chiffrées nous semblent clairement employées comme la forme écrite de ces désignations orales, même si des remarques sur leur structuration formelle peuvent intervenir, par exemple à l'occasion de la présentation de calendriers.

Nous obtenons alors le schéma suivant :

Situation initiale au CP



I indique une interprétation strictement ordinale

I' indique une interprétation ordinale avec repérant

La double flèche reliant la numération écrite chiffrée au signifié(s) est en pointillés pour mettre en avant que l'interprétation vient essentiellement de celle de la numération parlée : typiquement « 23 » est la forme écrite de « vingt-trois » qui est employée dans une interprétation essentiellement ordinale.

Au CP, les programmes 2008 stipulent :

L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement. La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1. La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations. Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable. De premiers automatismes s'installent. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.

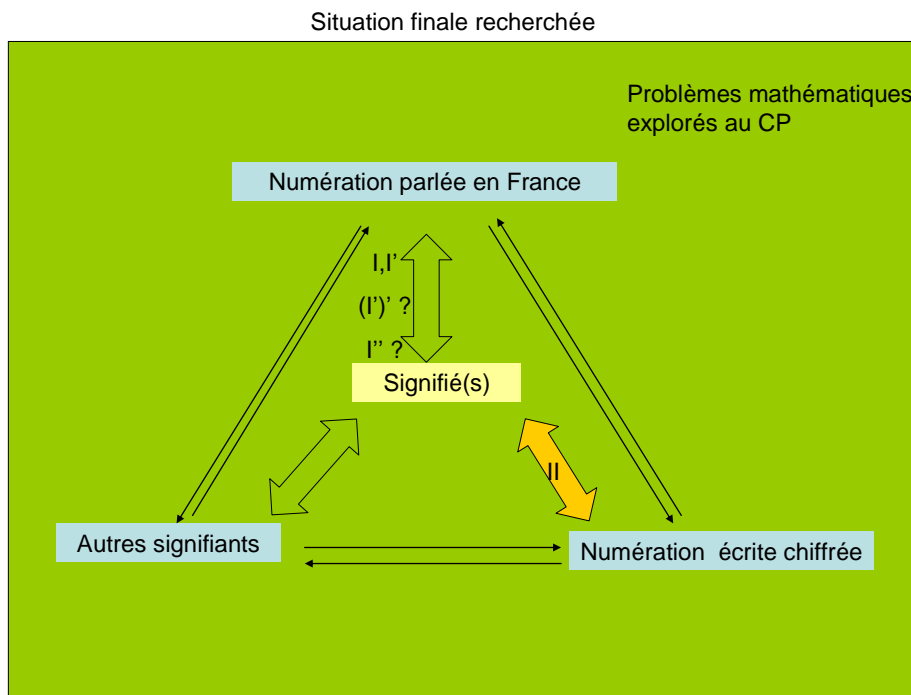
1 - Nombres et calcul

Les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent. Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100. L'entraînement quotidien au calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés.

Les tableaux suivants donnent des repères aux équipes pédagogiques pour organiser la progressivité des apprentissages. Seules des connaissances et compétences nouvelles sont mentionnées dans chaque colonne. Pour chaque niveau, les connaissances et compétences acquises dans la classe antérieure sont à consolider. La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.

	<i>Cours préparatoire</i>	<i>Cours élémentaire première année</i>
<i>Nombres et calcul</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100. - Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 (“table d’addition”). - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Écrire une suite de nombres dans l’ordre croissant ou décroissant. - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20 - Connaître la table de multiplication par 2. - Calculer mentalement des sommes et des différences. - Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l’addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). - Résoudre des problèmes simples à une opération. 	<ul style="list-style-type: none"> - Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000. - Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer. - Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc. - Connaître les doubles et moitiés de nombres d’usage courant. - Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d’opérations. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l’addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000). - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l’utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l’addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d’un problème de partage ou de groupements. - Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

La distinction entre les deux numérations ne nous semble pas toujours claire. Néanmoins, à travers son utilisation pour dénombrer et pour faire des calculs posés, nous inférons qu’il s’agit d’introduire des éléments de l’interprétation de référence que nous avons dégagée dans le premier chapitre afin de rendre mobilisable et efficace l’emploi de la numération chiffrée de référence dans les problèmes cités. Ainsi, nous allons considérer que l’interprétation de référence de la première partie de la thèse est aussi de référence pour l’enseignement au CP, bien que tous ses aspects ne soient pas nécessairement en jeu dès le CP. Nous avons ainsi les schémas suivant :



I indique une interprétation strictement ordinale

I' indique une interprétation ordinale avec repérant

II indique l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée.

(I)' indique une interprétation arithmétique additive. Nous avons mis un point d'interrogation car elle nous apparaît moins explicitement en jeu dans les programmes, bien que les problèmes arithmétiques nous semblent requérir une telle interprétation.

I'' indique une interprétation arithmétique multiplicative. Nous pouvons faire les mêmes remarques que précédemment, avec en outre le fait que les problèmes de la structure multiplicative interviennent moins en CP.

Par ailleurs le point d'interrogation sur ces deux interprétations signale que nous nous posons la question de leur rôle dans l'itinéraire d'enseignement. En effet, nous avons indiqué dans la première partie de la thèse une proximité toute particulière entre l'interprétation de référence et l'interprétation arithmétique multiplicative : peut-elle être exploitée ?

En résumé, la construction d'une nouvelle interprétation (de référence) pour la numération écrite chiffrée nécessite d'utiliser des connaissances anciennes sur le nombre. Celles-ci sont liées de manière prédominante à la numération parlée. Or d'une part les interprétations potentielles de la numération parlée sont non congruentes avec celle visée dans la numération écrite chiffrée et d'autre part l'interprétation initiale de cette dernière (c'est-à-dire l'interprétation à la fin de la maternelle) est liée à l'interprétation ordinale de la numération parlée (dans un rapport écrit/oral). Il faut donc passer de la situation initiale à la situation finale. Les itinéraires cognitifs d'enseignement au CP doivent proposer des solutions. Ces solutions ne sont pas élémentaires car les interprétations sont élaborées au fur et à mesure d'un itinéraire d'enseignement. Toutes les propriétés mathématiques, tous les liens entre les différentes interprétations des numérations n'y sont pas objet d'enseignement en même temps. Certains éléments peuvent ne pas apparaître de manière explicite, comme par exemple la maximalité des groupements. Des choix sont donc à faire parmi tous les possibles.

Les questions que nous nous posons sont alors les suivantes :

Quels sont les itinéraires qui peuvent être proposés ?

Quels en sont les avantages, les écueils ?

Quels en sont les marges de manœuvre ?
Y a-t-il des alternatives envisageables ?

c. Plan d'étude

La problématique peut se formuler en termes d'identification puis de moyens de parcours effectif en classe d'itinéraires cognitifs d'enseignements afin de fournir des éléments pour comprendre les déroulements en classe, voire estimer des avantages et des inconvénients, tant pour les élèves (cursus) que pour l'enseignant (conditions d'exercice).

Nous allons faire une étude de l'existant pour appréhender les possibles et les « écueils » de ces itinéraires. Il nous semble difficile d'analyser directement les déroulements en classe sans comprendre les itinéraires cognitifs d'enseignement proposés. Nous devons pouvoir comprendre à quel niveau ils interviennent en classe et ainsi poser les questions de manière précise. En outre, l'étude des itinéraires (déjà) envisagés pour la classe permet de décrire l'existant, mais éventuellement aussi ce qui pourrait être proposé et qui ne l'est pas.

Ainsi, nous menons une étude à différents niveaux qui s'emboîtent : les écrits des recherches et des manuels (suite de la deuxième partie de la thèse) puis les déroulements en classe (troisième partie). Chacun de ces niveaux va permettre d'affiner au fur et à mesure les questions qui se posent et nous conduire à faire des choix dans celles qui vont être traitées.

La thèse ouvre des perspectives de recherche concernant la classe, par exemple des propositions de scénarios (cf. le dernier chapitre). Par ce biais il est envisageable d'étudier les problèmes qui peuvent être posés aux élèves. C'est donc *in fine* aussi un moyen de pouvoir donner des éléments de réponse à certaines questions que nous nous étions posées dans ce chapitre à propos de ces problèmes.

CHAPITRE V Des itinéraires proposés dans les recherches antérieures
--

Introduction	154
1. La recherche de Fuson	155
1.1 Description	155
1.2 Analyse.....	158
2. Les autres recherches : différentes approches.....	160
2.1 La variété des problèmes à aborder	160
2.2 La disponibilité des stratégies	162
2.3 La relation entre écriture chiffrée et désignation parlée en langue maternelle	163
2.4 Variétés des signifiants intervenant dans la numération	165
2.5 Les connaissances préalables à l'introduction de l'écriture dans son aspect positionnel	167
3. Différents choix d'itinéraires pour surmonter le problème de non-congruence	168
3.1 Un 1er type d'itinéraire : évolution de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle	170
3.2 Un 2 ^{ème} type d'itinéraire : le recours à une numération orale annexe.	171
3.3 Un 3 ^{ème} type d'itinéraire : un lien différé avec la numération parlée en langue maternelle	174
4. Conclusions sur les recherches consultées	175
4.1 Synthèse	175
4.2 Questions soulevées	177

Introduction

L'étude mathématique et linguistique de la première partie de la thèse a permis de préciser au niveau des signes la non-congruence entre les deux numérations. Pour comprendre son rôle dans l'enseignement, nous allons étudier dans ce chapitre la manière dont elle est prise en compte dans les recherches sur l'enseignement. Rappelons le problème dégagé dans le chapitre précédent. La construction d'une nouvelle interprétation (de référence) pour la numération écrite chiffrée nécessite d'utiliser des connaissances anciennes sur le nombre. Celles-ci sont liées de manière prédominante à la numération parlée. Nous avons mis en évidence que les interprétations potentielles de la numération parlée sont non congruentes avec celle de la numération écrite chiffrée de référence. En outre l'interprétation initiale de la numération écrite chiffrée (c'est-à-dire l'interprétation à la fin de la maternelle) est liée à l'interprétation ordinale de la numération parlée dans un « simple » rapport écrit/oral : les écritures chiffrées sont la forme écrite des désignations orales.

Notre objectif est de dégager des itinéraires cognitifs d'enseignement dans les travaux concernant l'enseignement/apprentissage du nombre entier chez les enfants, en référence à la définition d'itinéraire cognitif d'enseignement dégagée dans le chapitre précédent¹⁵².

Nous allons aussi considérer les recherches concernant la numération parlée en anglais. Au niveau de l'analyse entreprise, les différences que nous avons repérées dans la première partie de la thèse entre les interprétations de la numération en langue anglaise et française n'entrent pas en ligne de compte. De ce fait, nous utilisons le terme de numération parlée en langue maternelle pour parler de manière générique de la numération parlée de type indo-européen (anglais, français, allemand, espagnol, italien, etc.). Ce terme souligne en outre le fait que l'élève accède initialement au nombre via cette numération.

Pour relater les résultats des recherches concernant les premiers pas dans la numération nous avons été confronté à l'utilisation d'un vocabulaire différent selon les auteurs, le même mot ne signifiant pas toujours la même chose : représentation, concept, conception, champ conceptuel, structures mentales, structures conceptuelles¹⁵³, etc. Chacun fait référence à une approche spécifique dont la description précise n'est pas nécessaire pour notre étude. En effet, ce chapitre aborde les recherches sous l'angle des itinéraires cognitifs d'enseignement. Ainsi, nous ne traitons pas des théories de l'apprentissage en elles-mêmes bien qu'elles puissent contribuer à leur établissement. En outre, les chercheurs y font référence de manière explicite ou non, et nous nous limitons ici à signaler le fait qu'il n'y a pas de consensus sur une théorie en particulier. L'opposition relatée par Verschaffel, Greer & De Corte (2006) entre Schragger & Siegler d'un côté et Baroody & Tiilikainen (2003) d'un autre indique bien l'étendue des points de vue adoptés. Les premiers ne prennent pas en compte dans la conceptualisation les facteurs socioculturels, ce que font les seconds. Par ailleurs deux grandes tendances se dégagent pour décrire le processus d'apprentissage : de manière schématique, il s'agit de privilégier un mouvement des savoir-faire vers les savoirs (« *skills-first* ») ou bien des savoirs vers les savoir-faire (« *concepts-first* »), Verschaffel & al. (2006). La plupart des chercheurs s'accordent sur le fait que les deux doivent intervenir de manière non indépendante, mais la question de savoir précisément quand tel ou tel savoir ou tel ou tel savoir-faire doit être abordé est encore largement une question ouverte. Verschaffel & al. (2006) indiquent quant à eux l'importance du contexte socioculturel et celui des « instructions » (« *sociocultural and instructional contexts* ») dans le développement d'un concept.

¹⁵² Rappelons qu'ils sont la transcription en termes d'enseignement du problème précité, en référence à la modélisation de l'apprentissage de la numération écrite chiffrée traduite en particulier grâce au concept de cheminement cognitif potentiel au niveau d'un sujet (élève).

¹⁵³ Ainsi que leur correspondant en langue anglaise.

Par ailleurs, conformément à ce qui a été développé dans le chapitre précédent, nous utilisons ici le terme interprétation pour indiquer une des interprétations définies dans la première partie de la thèse. Rappelons que nous avons dégagé une unique interprétation (donc de référence) pour la numération écrite chiffrée et trois pour la numération parlée en langue maternelle¹⁵⁴ (indo-européenne). En outre, les éléments de l'interprétation de référence sont envisagés au fur et à mesure d'un itinéraire d'enseignement et donc tous ses aspects n'y sont pas objet d'enseignement en même temps. L'itinéraire cognitif d'enseignement se centre sur le moment du processus durant lequel l'interprétation de la numération écrite chiffrée se constitue, se démarquant de l'interprétation (ordinaire avec repérant) de la numération parlée en langue maternelle.

D'un point de vue méthodologique, dans ce chapitre, nous allons partir des recherches de Fuson comme base de discussion. Ces recherches sont en effet celles citées principalement dans la synthèse qu'ont faite Verschaffel & al. (2006) sur la numération. Elles s'appuient sur des expérimentations nombreuses et variées avec des élèves en collaboration avec plusieurs équipes de recherche et sur un temps long. En outre, elles fournissent non seulement des modèles des conceptions des élèves sur les écritures chiffrées, mais elles proposent encore des indications pour l'enseignement, que nous pouvons interpréter en termes d'itinéraires cognitifs d'enseignement. Nous étudions ensuite les résultats obtenus par d'autres recherches, qu'ils soient complémentaires ou menant à d'autres conclusions. Nous terminons par une présentation synthétique des propositions des chercheurs reprises dans le cadre de notre propre recherche.

1. La recherche de Fuson

1.1 Description

Nous allons principalement nous référer à la recherche de Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter & Fennema (1997) qui synthétise le travail fait par quatre groupes de chercheurs, à celle de Fuson & Li (2009) qui précise une certaine approche de l'enseignement de la numération écrite chiffrée et enfin à celle de Fuson & Briars (1990) qui rend compte de deux expériences sur l'introduction de l'écriture chiffrée.

L'article de 1997 est issu d'une analyse des travaux des élèves¹⁵⁵ dans quatre projets d'enseignement différents menés par quatre équipes différentes auprès d'enfants de classe primaire parlant l'anglais : trois aux Etats-Unis et un en Afrique du Sud. Cet article dégage des modèles de conception des élèves sur la numération écrite chiffrée. Les recherches se basent sur l'hypothèse (admise) que la conceptualisation se voit (et s'opère) à travers les méthodes de résolution employées dans un panel de problèmes rencontrés dans la classe et hors de la classe. La théorie de l'apprentissage explicitement employée est que les « objets¹⁵⁶ » (d'apprentissage) ne vont pas imprégner les apprenants d'une manière univoque, mais qu'ils vont prendre place dans la structure mentale propre à chacun, ses propres « structures conceptuelles » (*conceptual structures*) : il faut donc tenir compte de ces dernières. L'enseignement consiste alors à favoriser l'emploi et l'émergence de différentes «

¹⁵⁴ Voir quatre si on distingue une numération strictement ordinaire d'une numération ordinaire avec repérant.

¹⁵⁵ Les problèmes posés aux élèves ne sont pas détaillés dans les articles que nous avons consultés. L'âge des élèves n'est pas non plus précisé dans l'article de 1997. Le projet mené par l'équipe de Fuson prend appui plus spécifiquement sur les difficultés des élèves pour effectuer des additions ou/et des soustractions à partir des écritures chiffrées de nombres à au moins deux chiffres, donc après l'introduction de l'écriture chiffrée proprement dite.

¹⁵⁶ Le terme « objet » est utilisé par Fuson. Nous l'avons interprété comme « objet » de l'apprentissage, en particulier les mathématiques sous-jacentes en relation avec des savoir-faire, mais aussi mettant en jeu des signifiants divers.

structures conceptuelles » appropriées à différents problèmes, grâce à des interactions sociales et le maniement de différents « objets », en tenant compte des structures cognitives déjà existantes de chaque enfant. Quatre types de paramètres influant sur le développement des conceptions des élèves sont mis en avant : le langage utilisé par les élèves et les enseignants, le matériel physique utilisé, les problèmes à résoudre, et l'organisation des activités en classe. En outre est relevé le fait que le processus de conceptualisation se déroule sur un temps long pour les élèves parlant un langage européen. Ceci est en écho avec la modélisation de l'apprentissage que nous avons développée dans le chapitre précédent, ce qui renforce en ce sens la pertinence de son adoption dans le cadre de la thèse. Mais comme nous l'avons signalé, notre but n'est pas de chercher à mettre à jour les théories des chercheurs. Fuson rappelle que des différences sont à noter avec des élèves parlant certaines langues asiatiques. Le système de numération parlée joue ainsi un rôle important dans ce processus et les régularités pour la désignation parlée des grands nombres (s'écrivant au moins avec trois chiffres) le facilitent. Nous allons commenter les résultats synthétisés dans le tableau p. 138 de l'article Fuson & al. (1997), tableau que nous avons reproduit.

Six modèles de « conceptions » sont relevés (sous forme de triades) : cinq « correctes » et une erronée. Chaque modèle de conception est décrit par une triade mettant en jeu trois « pôles » : la désignation parlée en langue maternelle, la désignation écrite chiffrée et une organisation d'une collection. Ces pôles sont reliés par six doubles flèches qui indiquent que les relations se font dans chacun des deux sens et entre chacun des pôles : par exemple, partir d'une écriture chiffrée pour donner la désignation parlée et réciproquement. Le type de relation est propre à chaque triade et ces triades sont illustrées par les schémas de la figure 1. C'est la donnée simultanée des trois doubles flèches qui permet de décrire un modèle de conception. Fuson relève trois grandes catégories de conceptions à travers les erreurs relevées chez les élèves (catégories que l'on trouvera en filigrane dans toutes les recherches) : une conception de l'écriture chiffrée comme une marque globale du nombre (*Unitary single digit* et *Unitary Multidigit*), une deuxième comme juxtaposition de plusieurs chiffres indépendants (*Concatened single digit*), et une dernière comme système de plusieurs chiffres dont la position est signifiante (*Decade and One, Sequence Tens and Ones, Separate Tens and Ones*). Dans cette dernière catégorie différentes conceptions sont modélisées suivant le sens qui est donné au chiffre selon sa position. Une relation est systématiquement mise en avant : celle entre l'écriture chiffrée et la désignation parlée. Deux paramètres sont alors la plupart du temps aussi utilisés pour décrire les conceptions : la place de désignations annexes de type « deux dizaines et trois unités » qui remplace la désignation parlée usuelle dans la dernière triade *Separate Tens and Ones* (voir aussi Fuson & Li, 2009), ainsi que celle de l'organisation d'une collection d'objets. En outre dès l'article de 1990, Fuson et Briars indiquent l'intérêt pour l'apprentissage de la numération chiffrée de l'emploi d'un matériel de numération « *base-ten blocks* » constitué de jetons (unités), de barres (dizaines), de plaques (centaines) et de cubes (milliers).

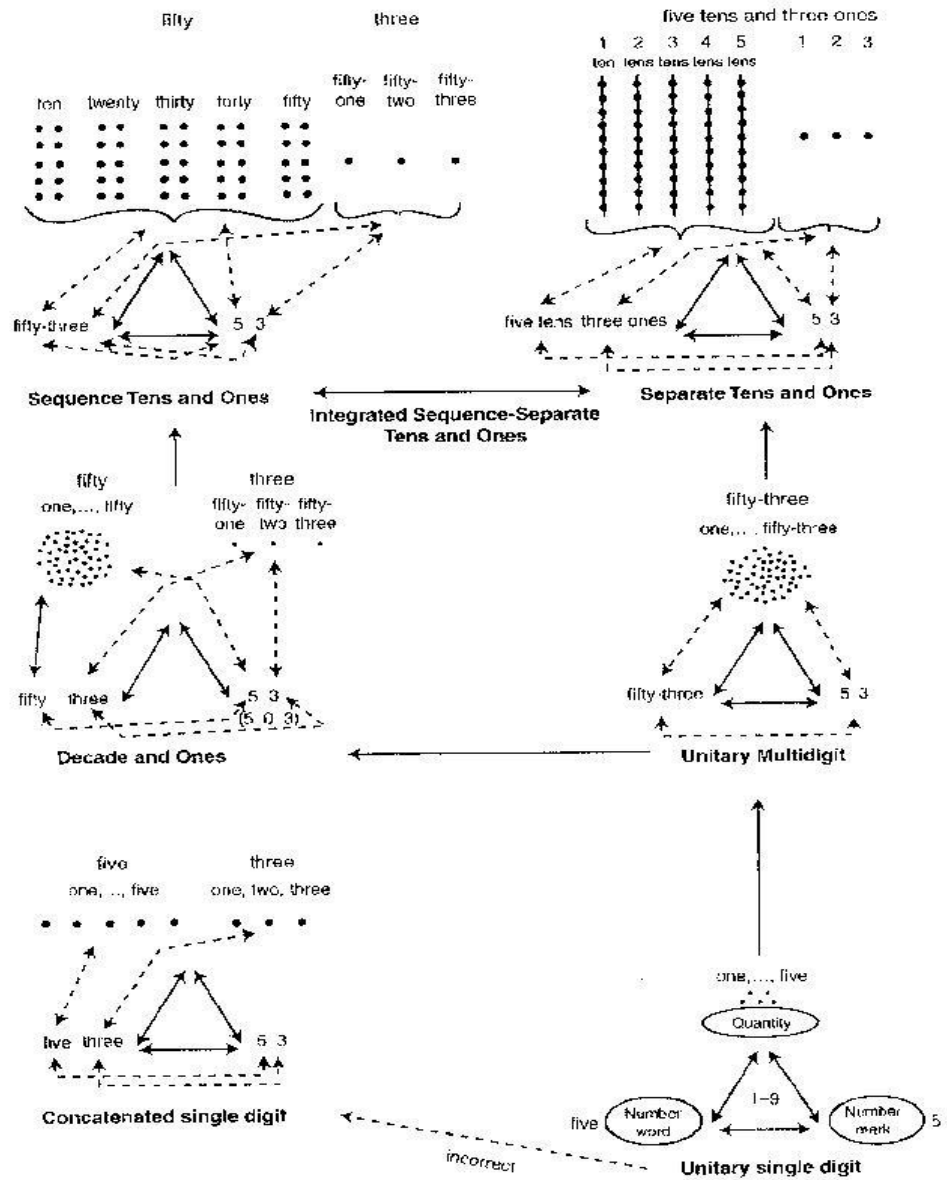


Figure 1. A developmental sequence of children's two-digit conceptual structures: The UDSSI Trial Model

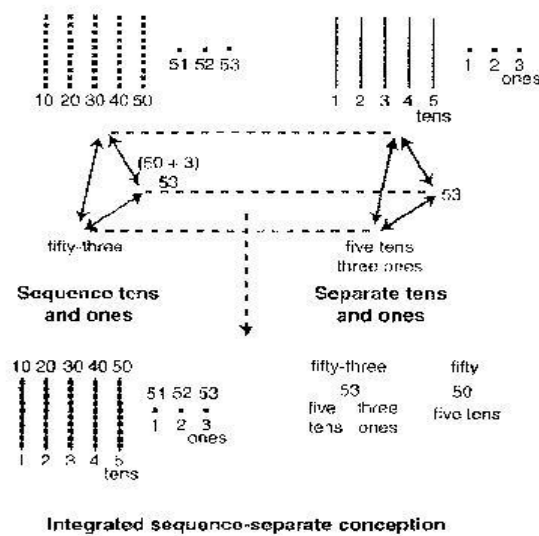


Figure 1—continued. A developmental sequence of children's two-digit conceptual structures

Bien qu'elle constate que des conceptions différentes (relatives à des triades différentes) soient mobilisées par un même élève dans un même problème, ou bien que réciproquement un même élève utilise une même conception dans différents problèmes¹⁵⁷, Fuson fait de ces triades un modèle successif pour l'enseignement, chaque triade étant une étape dans une modélisation de la conceptualisation. Les flèches qui relient les différentes conceptions indiquent ce modèle de développement (précisé dans la deuxième partie de la figure 1, « *figure 1-continued* ») à partir duquel Fuson donne des indications pour l'enseignement. Les deux dernières triades en haut de la figure 1, et même plus spécifiquement la dernière, *Separate Tens and Ones*, constituent alors l'enjeu de l'apprentissage de la numération chiffrée. L'enseignement prend ainsi appui sur les conceptions anciennes (les triades) qui doivent avoir été construites auparavant selon l'ordre indiqué par les flèches de la figure. En outre, chacune des six flèches relatives à chaque triade doit avoir été établie à des moments différents selon un ordre spécifique. Finalement, chaque conception est abordée à des moments différents selon les nombres en jeu.

Fuson note que la grandeur des nombres en jeu influe durablement sur l'utilisation de telle ou telle conception, mais aussi que, même tardivement, une conception erronée peut être convoquée alors même qu'une conception exacte est disponible. L'exemple emblématique donné est celui de l'algorithme des additions de nombres écrits avec des chiffres présenté verticalement, dans lequel les nombres restent traités longtemps chiffre à chiffre chez certains enfants, sans lien entre eux (non compréhension de ce qu'en France nous appelons la retenue) : la *concatenated single digit conception* est ainsi qualifiée de « *constantly seductive digits conception* ».

1.2 Analyse

Nous reconsidérons les recherches de Fuson à l'aune de notre cadre théorique : quel itinéraire cognitif d'enseignement est-il proposé ? Naturellement, les auteurs n'en proposent pas un explicitement, puisque la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement est propre à notre recherche. Cependant, ils font des propositions pour l'enseignement, propositions que nous allons pouvoir analyser grâce à cette notion. C'est elle qui va nous donner la possibilité d'avoir une vue d'ensemble des recherches de Fuson, puis ensuite des autres recherches. Dans les analyses que nous entreprenons, nous extrayons donc les éléments qui nous permettent de caractériser leur proposition(s) en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement.

Les écritures chiffrées sont associées dès le début à la numération parlée en langue maternelle via une collection (non organisée). Il va s'agir alors de faire évoluer l'interprétation initiale de la numération parlée, que nous identifions comme strictement ordinale et sans repérant (*unitary single digit*), vers une interprétation additive puis multiplicative¹⁵⁸ (*Separate Tens and Ones*). C'est ce que nous inférons de la succession de l'évolution des triades. Ainsi, les liens successivement entretenus entre l'organisation de la collection et la numération parlée en langue maternelle permettent de faire évoluer l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Par ailleurs, nous devons identifier les « pôles » dans notre cadre théorique. Les désignations orales et écrites chiffrées sont des signifiants qui s'organisent au fur et à mesure en système sémiotique, tandis que la collection consiste un terrain d'investigation particulier pour poser des problèmes liés à la conceptualisation du nombre. Le matériel de numération « *base-ten blocks* » est aussi un terrain d'investigation. Cependant, dans le cas où ce matériel est utilisé

¹⁵⁷ Nous y voyons une ressemblance avec la notion de connaissances mobilisables.

¹⁵⁸ Rappelons que nous avons indiqué dans le chapitre précédent en quoi il était difficile de distinguer l'interprétation ordinale avec repérants et celle additive avec appuis dans notre numération en français. Le problème est identique pour la numération parlée en anglais.

fréquemment dans des problèmes numériques, il acquiert un statut de signifiant. A la différence des deux signifiants précités, il est susceptible d'avoir une « durée de vie » limitée dans le sens où son enseignement n'est généralement pas prescrit dans l'institution scolaire ni culturellement utilisé. Le matériel de numération est donc un moyen d'enseignement et d'apprentissage (optionnel) et n'est pas objet d'apprentissage (mais outil pour l'enseignement). Ce signifiant « matériel », peut cependant suivant la place qui lui est accordé se constituer en système de representamens, et ainsi être relié au nombre par un interprétant spécifique qu'il est possible de décrire par comparaison avec les interprétants évoqués pour les systèmes de numération. Il peut être du ressort d'une numération « agie » décrite dans la première partie de la thèse et plus précisément ici d'une numération liée au codage/décodage de l'organisation spécifique d'une collection. Ainsi ces signifiants, peuvent se constituer en système sémiotique dont la première partie de l'interprétant est la même que celui de l'écriture chiffrée (lié à la décomposition dite polynomiale). Cependant la notion de chiffre n'y est pas abordée, que ce soit leur nombre, leur graphie, leur disposition (ligne, colonne, sens de lecture) ou la nécessité du zéro. En outre, ce système de signifiants étant matériel, il offre certaines possibilités liées à la manipulation des objets (par exemple effectuer des additions et des soustractions en échangeant, classant, organisant les representamens matériels). Néanmoins, il ne peut remplir les fonctions de l'écrit concernant la mémoire et la communication. En outre, il peut ne pas constituer un système de numération dans le cas où il n'est pas utilisé dans le but de désigner un nombre. Son rôle joué dans la constitution des triades (il n'est pas présent dans la description des triades) nous permet d'inférer que le matériel de numération « *base-ten blocks* » n'est pas considéré en tant que système de numération. Mais Fuson & Li (2009) indiquent l'utilisation d'un tel système de numération, calqué sur une numération « régulière » dont il a été question dans la première partie de la thèse, c'est à dire une numération dont l'interprétation est arithmétique multiplicative (les appuis multiplicatifs étant dix, cent, mille, dix-mille, etc.). Nous y lisons en effet p. 801: « [...] *tens and ones words that where expanded forms of East Asian words [...] : 12 was said as twelve and as one ten two ones (the East Asian form is just one ten two)*. ». Par contre, les autres signifiants du nombre ne vont pas se constituer en système de numération. Fuson & Briars (1990) indiquent par exemple « *four big cubes, two flats, five long, seven little cubes* » relativement au matériel « *base-ten blocks* ». Il s'agit là de décrire une collection organisée en groupements de dix, cent, mille. Ce type de signifiant fait partie des « désignations des groupements », terminologie qui souligne cette fonction bien qu'ils puissent potentiellement constituer un système de numération avec un interprétant spécifique à un système sémiotique. Par exemple, ces désignations du type « trois paquets de dix et deux » peuvent être des « désignations des groupements » avant éventuellement de devenir un système de numération « en unités ». Notons que la terminologie décontextualisée « trois dizaines et deux unités » fait cependant plus référence à un tel système de numération¹⁵⁹.

Nous retenons ainsi que, de par son interprétant, chaque « autre signifiant » peut jouer un rôle dans un itinéraire cognitif d'enseignement. Dans les recherches de Fuson, il s'agit de faire évoluer conjointement le système de signifiant « numération parlée » et le système de signifiant « numération écrite chiffrée », d'une interprétation ordinale vers une multiplicative. Chacun de ces « autres signifiants » en favorise certains aspects, comme l'organisation d'une collection en groupes (de dix), mais ne les prend pas tous en charge. Nous avons signalé en outre que dans l'article de 2009, un de ces autres signifiants est, selon notre analyse, clairement constitué en système de numération.

¹⁵⁹ Notons que *ten* en anglais signifie à la fois dizaine et dix.

2. Les autres recherches : différentes approches

D'une manière générale, nous retrouvons dans toutes les recherches les trois grandes catégories de conception dégagées par Fuson : l'écriture chiffrée comme une marque globale du nombre (non distinction des chiffres), comme juxtaposition de plusieurs chiffres indépendants ou comme système de plusieurs chiffres dont la position est signifiante. Ainsi, ce qui différencie notablement les autres recherches de celles de Fuson c'est, d'une part la place accordée à l'organisation de la collection et plus généralement aux autres signifiants (les « pôles »), et d'autre part, de manière non indépendante, le modèle de développement de la conceptualisation qui est proposé, c'est-à-dire l'évolution des interprétations de la numération écrite chiffrée et de la numération parlée ainsi que de leurs liens. Comme pour l'étude précédente consacrée aux recherches de Fuson nous allons interpréter les « pôles » rencontrés comme des signifiants (système de numération ou non) ou comme des domaines d'exploration de problèmes et nous allons indiquer quelle est leur fonction dans l'itinéraire proposé. Nous allons aussi indiquer quels sont les interprétants que nous pouvons leur associer. Cependant, ces signifiants ne sont pas en général des objets d'enseignement institutionnellement identifiés et ils sont abordés en relation avec d'autres signifiants dans une variété de problèmes non spécifiée. La détermination des cheminements cognitifs potentiels dans un enseignement effectif mettant en jeu ces signifiants demande des informations que nous ne pouvons pas obtenir. Nous allons ainsi nous limiter à un niveau d'analyse nous permettant d'envisager un champ des possibles au niveau des itinéraires cognitifs d'enseignement.

2.1 La variété des problèmes à aborder

La recherche de Fuson se base avant tout sur une analyse des réponses d'élèves confrontés à des exercices et des questions. Cette méthodologie de recherche est un des points de convergence de la quasi totalité des recherches que nous avons consultées, même si des auteurs comme DeBlois (1995, 1996) partent tout d'abord de considérations théoriques sur l'apprentissage (d'essence piagétienne en ce qui la concerne) qui permettent d'analyser le travail des élèves. Ainsi, les mots procédures ou encore stratégies sont employés. De plus, ce sont surtout les erreurs des élèves qui sont analysées, elles sont prises comme trace des « mathématiques à l'œuvre¹⁶⁰ ». Les problèmes abordés sont principalement relatifs à l'obtention d'une désignation parlée ou chiffrée du cardinal d'une collection (ou inversement, relatifs à la production d'une collection de cardinal donné par une désignation parlée ou chiffrée) ou encore à la comparaison de nombres, soit signifiés à travers les cardinaux de collections, présentes (manipulables ou non) ou figurées, soit indiqués par une désignation parlée ou écrite chiffrée. Cependant, beaucoup d'auteurs citent non seulement des problèmes de dénombrement, mais aussi des problèmes mettant en œuvre des transformations de cardinaux par ajout/retrait ainsi que des problèmes mettant en jeu deux voire trois cardinaux. C'est le cas pour Fuson en particulier mais aussi dans la synthèse sur les recherches de Verschaffel & al. (2006), qui mettent en avant des problèmes d'addition et de soustraction de nombres représentés par leur écriture chiffrée. Un consensus nous semble être atteint sur le fait d'aborder une certaine variété de problèmes sur un long terme, ce qui fait écho à notre

¹⁶⁰ Nous utilisons cette expression sans plus de précision en ce qui concerne les recherches étudiées. Dans celles-ci, les enjeux mathématiques sont généralement inférés à la fois de l'observation des procédures des élèves et de notions mathématiques sur la numération non toujours complètement explicitées. En effet, le plus souvent, le format des articles de publication ne permet pas d'exposer complètement les notions mathématiques en jeu dans les numérations, d'autant que celles-ci peuvent être considérées comme connues des lecteurs. Dans le premier chapitre de la thèse, nous avons montré leur complexité.

cadre théorique. Cependant cette variété n'est pas toujours questionnée en elle-même, et l'ordre ainsi que la temporalité de la nature des problèmes à aborder sont différents selon les auteurs. Pour autant nous pouvons interpréter certaines recherches, Fuson (1990), DeBlois (1996) comme des propositions de proposer « rapidement » des problèmes de techniques opératoires mettant en jeu des nombres à plusieurs chiffres, les problèmes menant à des additions et des soustractions ayant été traités auparavant avec la numération parlée. Verschaffel & al. (2006) indiquent que selon Buys (2001) chaque type de stratégie dans ces problèmes élémentaires renvoie à une conception différente du nombre.

Les différences entre les stratégies pour les opérations (en particulier addition et soustraction) peuvent être reliées aux interprétations que nous avons dégagées. Citons par exemple les trois types de stratégies (de calcul mental) pour des additions de nombres de vingt à cent relatées par Torbeyns, Vanderveken, Verschaffel & Ghesquière (2006). Les « *split stratégies* » qui s'appuient sur une séparation des nombres avec appui sur la dizaine inférieure ($49 + 25 = ?$; $40 + 20 = 60$; $9 + 5 = 14$; $60 + 14 = 74$), les « *jump strategies* » qui s'appuient sur un sur- ou sous-comptage de dizaines (« *counting up and down tens* ») suivi d'un autre en unités ($49 + 25 = ?$; $49 + 20 = 69$; $69 + 5 = 74$) et enfin les « *varying strategies* » qui mettent en jeu des propriétés arithmétiques soit par des procédures de compensation ($49 + 25 = ?$; $50 + 25 - 1 = 75 - 1 = 74$) soit par des « *short-jump* » ou stratégies d'addition par complémentarité ($71 - 69 = ?$; $69 + 2 = 71$; donc la réponse est 2). Par rapport à notre travail de la première partie de la thèse, nous pouvons traduire les conclusions données dans Verschaffel & al. (2006) par le fait que les « *jumps strategies* » sont proches d'une vision ordinale (« *Jump strategies in which the numbers are seen primarily as objects in the counting row and for which the operations are movement along the counting row* »), les « *splits strategies* » font intervenir quant à elles la structure décimale de la numération, référence à dix comme repérant ou appui additif (« *Split strategies in which the numbers are seen primarily as objects with a decimal structure and in which operations are performed by splitting and processing the numbers on the basis of this structure* »), et enfin les « *varying strategies* » utilisent des propriétés arithmétiques (« *Varying strategies based on arithmetic properties in which the numbers are seen as objects that can be structured in all sorts of ways and in which operations take place by exploiting a suitable structure and using the appropriate arithmetic properties* »). Nous pouvons donc voir dans ces stratégies un prolongement des propriétés mathématiques dégagées dans l'interprétation des numérations. Nous pouvons ajouter des stratégies dans lesquelles les nombres sont perçus via leur écriture chiffrée (par exemple une addition posée résolue mentalement) et qui peuvent donc faire appel aux propriétés mathématiques qui leur sont propres. Elles sont décrites dans les nombreux travaux consistant à analyser les stratégies des élèves dans les opérations posées mettant en jeu des écritures chiffrées¹⁶¹. Signalons cependant que les chercheurs ne sont pas tous unanimes sur la place que doivent occuper les problèmes arithmétiques dans la conceptualisation du nombre. Par exemple Verschaffel & al. (2006) rapportent que Shrader & Siegler (1998) donnent un modèle dans lequel des performances arithmétiques peuvent être atteintes rapidement, ce que discutent Baroody & Tiilikainen (2003).

D'autres problèmes sont rapportés par les chercheurs, ce sont ceux qui ont trait à la position, l'ordre, le rang indiqué par un nombre – trois pour le troisième ou le numéro trois – ou encore l'écart, la distance entre deux nombres entiers, sans pour autant faire référence nécessairement à un cardinal. Treffers (2001) propose ainsi de définir deux conceptions du nombre, « *structuring and representation of number* ». La première, « *structuring* », se réfère aux maniements des relations arithmétiques entre les nombres, la deuxième, « *positioning* », à

¹⁶¹ Un nombre important d'entre elles est classifié dans Verschaffel & al. (2006). Voir aussi Conne (1984) pour une classification selon les relations en jeu dans les stratégies de 12 problèmes arithmétiques de la structure additive donnés par Vergnaud & Durand en 1976.

l'habileté à placer les nombres entiers sur une droite « vide » possédant une origine et un point final¹⁶², c'est-à-dire à évaluer leur distance. Toutes ces notions font écho aux définitions du nombre que nous avons données ainsi qu'aux interprétations des numérations, sans être issues du même axe de recherche. DeBlois (1996) indique en outre que le nombre est une façon de « mesurer¹⁶³, d'ordonner ou de transformer », cependant beaucoup de chercheurs mettent plus en avant les aspects cardinaux des nombres (relativement à la mesure d'une collection d'objets) que des aspects ordinaux. Si, en ce qui concerne la numération chiffrée de position, cela semble cohérent avec notre étude mathématique, il n'en reste pas moins que la place de l'aspect ordinal reste une question ouverte et plus généralement la place du concept de nombre entier naturel par rapport aux numérations.

Nous retenons que les procédures observées chez les élèves dans les problèmes (arithmétiques en particulier) mettent en jeu potentiellement telle ou telle interprétation, mais qu'il n'y a pas de consensus sur l'ordre et leur fonction dans les itinéraires d'enseignement. Cependant dans le calcul mental, ce sont les deux interprétations, ordinale avec repérant et arithmétique additive, qui sont relevées.

2.2 La disponibilité des stratégies

En accord avec les recherches de Fuson & al. (1997), nous observons un certain consensus sur le fait que la pluralité des conceptions présentes chez un même élève au même moment varie suivant les connaissances des élèves, la nature des problèmes et les variables didactiques, ce qui est signalé dès 1980 par Comiti, Bessot & Pariselle (1980). Nous considérons ce résultat comme une marque de la variabilité de la disponibilité des stratégies selon ces critères. En outre, Verschaffel & al. (2006, p. 561) soulignent que les problèmes arithmétiques élémentaires (additionner trois et quatre par exemple) donnent lieu à des procédures différentes mais partagées par tous les sujets : la différence entre élèves en difficulté et les autres se faisant moins sur les types de procédures utilisées que sur la maîtrise qu'ils en ont progressivement. En ce qui concerne la disponibilité des stratégies mettant en jeu la numération parlée ou/et celle écrite, Delaplace & Weil-Barais (2008) indiquent que le recours à l'écriture chiffrée comme trace mémorielle des désignations des cardinaux n'est pas une pratique fréquente pour les élèves de primaire. Ces derniers préfèrent le plus souvent recompter le nombre des éléments d'une collection plutôt que d'utiliser une écriture chiffrée disponible. Par ailleurs, face à un même problème, il existe différentes stratégies, mettant en jeu soit la numération parlée, soit la numération écrite chiffrée, ou les deux simultanément. La maîtrise qu'en ont les élèves progressivement¹⁶⁴ met donc « en concurrence » l'emploi de telle ou telle numération et donc les interprétations qui sont liées.

¹⁶² Nous traduisons l'extrait « *being able to place whole numbers on a empty number line with a fixed start and end point. [...] Positioning enables students to gain a general idea of the size of numbers to be placed* », Treffers (2001).

¹⁶³ Ce qui comprend des problèmes de dénombrement, de comparaison et d'estimation. Pour ces derniers voir Verschaffel & al. (2006, p. 577).

¹⁶⁴ Les auteurs indiquent en effet une progression unanimement observée. Par exemple pour trois plus quatre, la stratégie initiale est l'établissement de la collection par comptage de trois puis quatre objets, puis un comptage de l'ensemble à partir de un, ensuite il s'agit de stratégies de sur-comptage (collection présente, puis mentalement), et ensuite de stratégies arithmétiques de type « trois plus trois plus un », jusqu'à la mémorisation (mise en mémoire à long terme issue de la progression précédente).

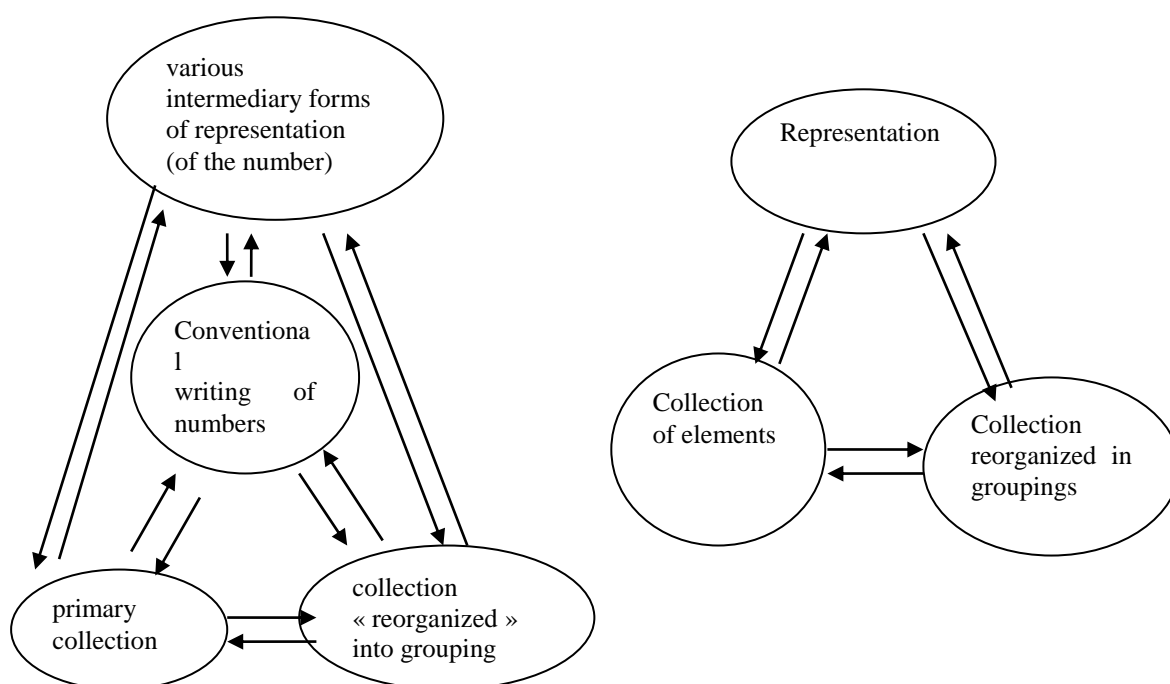
2.3 La relation entre écriture chiffrée et désignation parlée en langue maternelle

Lorsqu'il est fait référence de manière explicite à une écriture chiffrée, dans une procédure ou dans un énoncé, il semble que les chercheurs y associent, comme Fuson & al. (1997), le plus souvent sa désignation parlée. La désignation chiffrée est donc envisagée principalement dans son rapport avec la désignation parlée, et le plus souvent nous semble-t-il dans un rapport de subordination. Les triades des « *conceptual structures* » de Fuson en sont un exemple emblématique, puisque la numération parlée en langue maternelle et celle écrite chiffrée en sont deux « pôles » indissociables. Dans ce cas, nous ne pouvons pas voir l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée apparaître en tant que tel puisque cette dernière est associée à une interprétation de la numération parlée. C'est en ce sens que nous parlons de subordination. Cette association systématique entre les deux numérations est repérable dans les autres recherches, mais peut être traitée différemment. Par exemple DeBlois indique que la conceptualisation de la numération de position chiffrée se fait à travers la coordination de la notation de position et de la valeur de position (et ce en accord avec Fuson). Or « *la valeur positionnelle réfère à des ensembles qui peuvent être comparés, alors que la notation positionnelle réfère à une organisation spatiale des chiffres (juxtaposition des chiffres) et temporelle (récitation de la comptine des nombres¹⁶⁵)* », DeBlois (1996). Ainsi à travers la notation positionnelle, la comptine des nombres même au-delà de dix (qui se réfère à une interprétation ordinale) est associée à la conceptualisation des écritures chiffrées. Mais, la valeur positionnelle semble elle aussi liée à la numération parlée, puisque dès le premier palier décrit par DeBlois (1996), celui de la composante intuitive du concept préliminaire¹⁶⁶, la valeur attribuée au chiffre est reliée à celle attribuée à travers une désignation orale : « *l'enfant attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux mots : dizaine, centaine, mille, million* », DeBlois (1996). En outre la subordination de la numération écrite chiffrée à la numération parlée reste le plus souvent implicite, et d'autres facteurs peuvent entrer en ligne de compte. Par exemple dans le traitement des relations entre les trois « pôles » des triades de Fuson, nous remarquons que les relations entre la numération parlée et les collections d'objets qui ne font pas intervenir la désignation écrite sont systématiquement évoquées, par contre les relations entre numérations parlées et numération écrite chiffrée sont considérées soit avec ou soit sans les collections. Plus précisément, certains auteurs regardent le lien collection/numération parlée sans jamais évoquer les écritures chiffrées des nombres. C'est à dire qu'ils étudient des cheminements cognitifs utilisant des liens numération parlée/signifié(s), sans convocation de la numération écrite chiffrée. C'est le cas de Ricco, Menotti, Boyer, Larère, Numa Bocage & Allenbach (2008) dans leur analyse des compétences liées au comptage pour des élèves de CP (y compris en fin d'année alors que la numération écrite chiffrée est introduite dans son aspect positionnel). D'autres chercheurs envisagent les liens entre les désignations parlées et les désignations écrites chiffrées sans référence à des collections principalement lorsqu'ils abordent la lecture des écritures chiffrées, ce que nous interprétons comme un travail sur les liens signifiant/signifié. Cela peut être soit dans un problème les traitant spécifiquement, par exemple « écrire avec des chiffres « douze » », soit dans un problème dans lequel ces liens peuvent intervenir dans la stratégie de résolution, par exemple la consigne donnée par écrit « calculer $12 + 9$ » qui est traduite par « calculer douze plus neuf ». Cependant, dans Fuson & al. (1997) l'indication que

¹⁶⁵ C'est nous qui soulignons. Cette récitation va bien au-delà de dix, ce qui n'est mathématiquement pas nécessaire dans la numération écrite chiffrée selon notre analyse.

¹⁶⁶ DeBlois analyse la conceptualisation de la numération écrite chiffrée à l'aune d'éléments théoriques d'essence piagétienne, précisés par Bergeron et Herscovics. Cette approche est détaillée dans DeBlois (1996).

chaque triade doit être objet d'enseignement en considérant chacune des flèches doubles séparément permet d'envisager des problèmes mettant en jeu uniquement une organisation de collection et l'écriture chiffrée indépendamment de la désignation parlée. C'est ce que nous avons envisagé dans l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Nous faisons référence au lien « direct » signifiant (écriture chiffrée) / signifié(s) dans les cheminements cognitifs, c'est-à-dire sans passer par d'autres signifiants. Cette possibilité est exploitée par exemple par Bassis (2003) puis Chevalier (2008), avec un codage de l'organisation des collections utilisant des groupements successifs de cardinaux quatre (base quatre)¹⁶⁷. Notons que celle-ci n'est pas non plus exclue dans le modèle de DeBlois (1996), ni dans la recherche de Bednarz et Janvier (1982, 1988) qui schématisent leur conception de la numération comme suit :



Le premier schéma est issu de la recherche publiée en 1982, recherche qui a été suivie d'une expérimentation en classe durant 3 ans qui a donné lieu à une publication en 1988. C'est de cette dernière dont est extrait le deuxième schéma. Les flèches indiquent que la numération est conçue comme un réseau de connaissances (« *network of skills* ») entre trois états (« *states* ») : « *the primary collection itself* », « *the collection re-organized into groupings* », « *the representation of number associated with this collection, by conventional symbolic writing, or by other modes of representation* ». L'accent est mis sur le passage entre une collection non organisée à son organisation, valable pour toute numération. La place de la numération parlée n'est donc pas ici particulièrement mise en avant, ce sont les relations entre l'ensemble des « représentations » (pour nous des signifiants) qui sont discutées à travers cette schématisation, en particulier leur place par rapport à la numération écrite chiffrée¹⁶⁸. A remarquer alors que cette perspective permet aux auteurs de tenir compte de différentes écritures pouvant coder l'organisation d'une collection (par exemple de type 3X, 2I pour 32), qui peuvent donc constituer une autre désignation, tout comme des « *pictural disguised*

¹⁶⁷ C'est une possibilité qui a été utilisée dans la réforme de l'enseignement en France dans les années 70, dite des maths modernes (voir par exemple Fischer & Bocerean (2004) ou Conne (2001) pour une analyse), dans laquelle les numérations en base k étaient un moyen, si ce n'est un objet, d'apprentissage.

¹⁶⁸ Cette optique nous semble développée de manière plus générale dans de nombreux travaux de Duval, par exemple celui de 2006.

representation » consistant en des dessins figurant les organisations obtenues avec du matériel. Ceci nous amène à envisager d'autres signifiants que ceux envisagés dans les triades de Fuson.

2.4 Variétés des signifiants intervenant dans la numération

Mis à part nos deux systèmes de numération, nous avons déjà relevé d'autres éléments à prendre en compte dans le processus de conceptualisation.

Il s'agit tout d'abord du troisième « pôle » des triades de Fuson, l'organisation de collections. Nous avons indiqué qu'il s'agissait alors plutôt d'un cadre permettant de poser des problèmes mettant en jeu le nombre, cadre qui est privilégié du fait de la nature des notions en jeu : les mises en signes concrètes du cardinal d'une collection de la première partie de la thèse. D'ailleurs, toutes les recherches y font référence : *a minima* dans les problèmes qui ont servi dans les expérimentations et les observations et *a maxima* dans leurs conclusions sur la conceptualisation ou l'apprentissage. Bednarz et Janvier (1982, 1988) permettent de préciser son rôle potentiel. Elles mettent l'accent sur le passage d'une collection non organisée à son organisation. Certaines connaissances propres à la numération chiffrée de position sont mises en lien avec des collections à organiser :

- faire des groupes
- les défaire
- passer à un groupement supérieur, c'est-à-dire faire des groupements de groupements
- échanger un groupement d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur et inversement
- coder, c'est-à-dire passer d'une collection réorganisée en groupements à une représentation du nombre
- décoder
- découvrir les lois régissant les groupements successifs.

Ces connaissances en jeu dans la numération écrite chiffrée sont symbolisées par les flèches de leurs schémas. Nous y voyons la traduction en termes de connaissances de la première partie de l'interprétant de l'interprétation de référence que nous avons définie dans la première partie de la thèse. La deuxième partie de l'interprétant n'étant pas indiquée ici.

Par ailleurs, nous avons noté dans d'autres recherches l'emploi de systèmes de désignation orale annexes qui vont se constituer en systèmes de numération : une numération en unités, « trois dizaines et quatre unités » et une numération de type asiatique consistant soit à énumérer les chiffres, « trois, quatre », soit à dire « trois dix quatre (un) ». Ce dernier cas a été développé principalement dès les années 90 par Brissiaud en France et par Fuson aux États-Unis, son achèvement le plus récent étant développé dans Fuson & Li (2009). Il est utilisé par ces chercheurs comme un quatrième « pôle » ajouté à la triade (voire un cinquième si on considère simultanément la numération « en unités ») et est perçu comme un moyen d'apprentissage pour les élèves de langues européennes, du fait d'une plus grande proximité avec la numération écrite chiffrée¹⁶⁹. L'interprétation qui peut lui être théoriquement associée est en effet celle d'une numération arithmétique multiplicative, celle décrite dans la première partie de la thèse pour la numération parlée en Français. Elle est donc plus proche de l'interprétation de la numération écrite chiffrée. La justification « empirique » d'une telle

¹⁶⁹ C'est ce que nous avons aussi développé dans la première partie de la thèse en nuancé ce « constat ». Nous avons en effet indiqué la « proximité » entre une interprétation multiplicative et l'interprétation de référence au niveau de la première partie de l'interprétant. Cette proximité étant à relativisée dans la mesure où, dans les procédés de mise en signes concrets d'une collection, nous avons indiqué que l'organisation et le comptage n'y jouaient pas le même rôle. Ceci a été traduit en particulier par la stratégie « organiser/configurer pour désigner », introduite chapitre 4, §3.1. La deuxième partie de l'interprétant est par ailleurs sensiblement différente.

hypothèse vient d'analyses comparatives entre élèves asiatiques dont la numération parlée est (traduite en français) de type « cinq/trois » ou « cinq dix trois » pour cinquante-trois¹⁷⁰. En ce qui concerne plus spécifiquement la numération « en unités », des chercheurs comme Chambris (2008) la considèrent comme un levier important pour l'apprentissage, en la reliant en outre au système métrique : c'est donc l'idée de système de mesure qui prévaut ici, avec une logique qui lui est propre¹⁷¹. Elle est par exemple toujours corrélée à un dénombrement d'une collection. De ce fait, son statut de système de numération est différent de celui des numérations orales déjà considérées, puisque les désignations ne sont employées que dans ce contexte. Nous avons déjà indiqué que théoriquement son interprétation est proche de l'interprétation multiplicative de la numération parlée.

Du fait des interprétations que l'on peut leur associer et dans la mesure où elles sont employées systématiquement dans une certaine variété de problèmes (décontextualisation, utilisation pour désigner le nombre), nous interprétons ces signifiants comme des systèmes de numération. Ils ont en commun avec la numération parlée leur spécificité orale. Ces deux types de systèmes annexes de désignations orales, « à l'asiatique » et « en unités », peuvent être considérés comme pouvant être des aides à l'apprentissage et non comme une nécessité dans la conceptualisation. Aucune étude n'a été faite, à notre connaissance, sur les liens qu'ils entretiennent avec l'ensemble des autres « signifiants ». Nous avons relevé dans les recherches consultées l'existence d'au moins trois autres types de signifiants.

Le premier concerne toutes les désignations qui peuvent coder l'organisation d'une collection (certaines sont indiquées dans la première partie de la thèse), sans être nécessairement utilisées comme des systèmes de numération et que nous nommons de manière générique comme « désignation des groupements ». Un certain nombre est envisagé par Bednarz et Janvier : par exemple de type 3X, 2I ou XXX, II pour 32 ou des « *pictural disguised representation* ». Leur « interprétation » (rappelons qu'ils ne sont pas nécessairement constitués en système sémiotique de numération) est de l'ordre d'une de celles dégagées dans la première partie de la thèse, sachant en outre qu'ils peuvent aussi servir à coder des collections non nécessairement organisées selon des principes de base (dix ou autre) ou de mesure. Un signifiant du type « trois paquets et deux » peut être rangé dans cette catégorie même lorsqu'il ne fait pas l'objet d'un travail amenant à le considérer comme un système de numération.

Le second est constitué des doigts de la main et est développé par exemple par Brissiaud (1991). Son « interprétation » peut avoir des points communs avec une numération ordinale, éventuellement avec repérant (cinq ou dix) ou arithmétique additive (suivant la façon dont il est utilisé).

Le troisième est constitué par la « droite numérique » des écritures chiffrées des nombres écrits sur une ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant. La ligne peut ne pas comporter tous les nombres, ce qui est indiqué par des espaces libres. En se basant sur Verschaffel & al. (2006), Chambris (2008) a fait une synthèse des recherches de l'« *empty number line* », dont nous avons parlé en ce qui concerne la distinction entre les aspects « *structuring* » et « *positioning* » du nombre de Treffers (2001). Cette « *droite numérique vide* » semble « *davantage étudiée comme un instrument de calcul, pour éviter le recours aux algorithmes et favoriser l'invention de procédures, et plus généralement comme une représentation de l'ensemble des entiers naturels que comme un outil pour représenter une situation, une représentation linéaire de l'espace, par exemple* », Chambris (2008). En ce qui concerne le rôle dans la conceptualisation, nous pouvons lire dans Verschaffel & al. (2006) : « *Bien que plusieurs didacticiens des mathématiques travaillant dans ce domaine de l'arithmétique des nombres à plusieurs chiffres donnent à cette interprétation sur la droite une place de plus en*

¹⁷⁰ Voir par exemple Fischer (1990).

¹⁷¹ Voir la première partie de la thèse.

plus importante dans les curricula, manuels scolaires et guides pédagogiques (expérimentaux), il n'y a apparemment pas d'étude qui établisse de façon décisive que le développement de cet aspect accroisse les connaissances conceptuelles des élèves (et ses relations aux autres aspects du développement des nombres à plusieurs chiffres) d'une façon large et systématique. »¹⁷². La question reste cependant posée sur le rôle que peut jouer cette droite numérique dans la conceptualisation des écritures chiffrées, sachant qu'elle peut permettre aussi de relier la désignation écrite chiffrée d'un nombre à sa désignation parlée grâce à une récitation de la comptine numérique couplée à une lecture des écritures chiffrées. Nous nous arrêtons ici pour les « autres signifiants » envisageables, car il peut en exister de nombreux, par exemple les abaques envisagés par DeBlois (1995) ou Ma (1999), p.7 cité par Verschaffel & al. (2006), les égalités numériques de type $10+10+10+5$ étudiées par Conne (1989), ou encore les bouliers étudiés par Poisard (2005). Nous voyons qu'ils peuvent être oraux, dessinés, écrits à l'aide de symboles ou encore « agis »¹⁷³.

2.5 Les connaissances préalables à l'introduction de l'écriture dans son aspect positionnel

A travers la notion de champ conceptuel, notre cadre théorique amène à considérer les numérations en relation avec le concept de nombre. A travers la notion d'historicité, ce sont les connaissances nécessaires à l'apprentissage de l'écriture chiffrée qui sont questionnées. De plus, dans l'étude des procédés concrets de mise en signes (en écriture chiffrée) du cardinal d'une collection il apparaît qu'il va s'agir non seulement de constituer des groupements de dix, mais encore d'en désigner le nombre (par un chiffre). Ces considérations théoriques font écho avec les travaux de Bednarz et Janvier qui précisent certaines connaissances en jeu dans la numération écrite chiffrée dans la liste que nous avons traduite ci-avant.

Comme nous l'avons signalé, l'ensemble des chercheurs semble unanime sur le fait que des difficultés importantes chez les élèves résultent du fait que certains aspects de la conception du nombre à un chiffre font obstacle à celle du nombre à plusieurs chiffres. Ceci est noté en particulier par Fuson et DeBlois puis repris par Verschaffel & al. (2006) quand sont synthétisées les recherches à ce sujet : « *Illustrations of lack of conceptual understanding are elementary school children's inability to identify the tens, hundreds, etc. digit in a multidigit number, to relate ungrouped and grouped objects to the different digits in a multidigit number, and to demonstrate or explain 10-for-1 trading with concrete representations. [...]. According to Fuson (1992, p. 263), many errors children in the United States make on numeration indicate that they interpret and treat multidigit numbers "as single-digit number placed adjacent to each other, rather than using multidigit meaning for the digits in different positions"* ». Verschaffel & al. citent en outre Anghileri (1999) qui fait les mêmes remarques pour les élèves du Royaume-Uni. Ceci met en évidence des problèmes relatifs aux groupements, moins dans leur constitution (habileté de comptage) que dans leur prise en compte comme objet unitaire que l'on peut aussi dénombrer afin d'obtenir une désignation du nombre (en tant que cardinal d'une collection)¹⁷⁴. Pour autant, plusieurs articles indiquent que les habiletés de comptage pour constituer une collection ne sont pas complètement acquises au moment de l'introduction de l'écriture chiffrée. Ainsi, Bideaud, Le Halle & Vilette (2004) décrivent les connaissances relatives à la notion de collection et Briand (1999) analyse plus précisément des connaissances sur l'énumération. Les auteurs indiquent que ces connaissances sont travaillées et acquises lorsque les élèves sont capables de résoudre un certain nombre de problèmes sur les collections manipulables puis non manipulables (figurées

¹⁷² Traduction de Chambris (2008).

¹⁷³ Des bouliers, des quipus, des abaques, etc.

¹⁷⁴ Voir aussi, Aigoïn & Debourg (2004) pour un avis de praticiens.

par exemple à l'aide de croix dessinées sur une feuille) et décrivent les variables qui jouent sur la réussite des élèves¹⁷⁵. DeBlois (1996) retient par ailleurs l'idée de concepts préliminaires « où les objets sont traités dans un contexte dominé par le temps et l'espace (il colle, il sépare, il place avant ou après ...) » et indique que dépasser ce palier est une étape obligatoire. Pour résoudre ces problèmes, les recherches s'accordent donc sur le besoin de ces connaissances antérieures pour aborder la numération écrite chiffrée et elles sont unanimes sur la nécessité de conceptualiser le nombre à travers une certaine maîtrise de la comptine numérique des désignations parlées en langue maternelle.

La première triade de Fuson, Unitary single digit, sous-tend cependant d'aller plus loin que des habiletés de comptage uniquement dans des problèmes de dénombrement ou de comparaison de cardinaux, mais de l'élargir à une structure arithmétique plus riche, comportant des problèmes pouvant être résolus par des additions et des soustractions de nombres à un chiffre¹⁷⁶. DeBlois (1996) donne quant à elle une autre perspective en indiquant à propos de l'observation des procédures d'élèves âgés de huit ans et plus « Une reconnaissance des relations d'équivalence et de conservation des unités de mesure de quantité ont semblé précéder la nécessité d'introduire l'opération d'addition ». Ainsi la question plus générale de la nécessité d'aborder tel ou tel problème sur le nombre avant l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel reste ouverte.

Une autre question, non indépendante de la dernière, concerne le champ numérique à aborder avant l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel. La comptine numérique est disponible comme compteur pour les procédés concrets de mise en écriture chiffrée du cardinal d'une collection. Selon notre analyse, ce compteur n'est nécessaire que pour constituer des groupes de cardinaux inférieurs à dix. Nous interprétons les différentes analyses des conditions d'opérationnalité de la comptine numérique (au moins jusqu'à dix et le plus souvent jusqu'à seize) faites dans de nombreuses recherches comme faisant écho à l'interprétation strictement ordinale de la numération parlée, c'est-à-dire sans repérant. L'interprétation ordinale au-delà de dix, visible par exemple dans la deuxième triade de Fuson, Unitary multidigit, n'est pas congruente avec l'interprétation que nous avons dégagée de la numération écrite chiffrée. En résumé, les travaux consultés considèrent qu'une exploration du nombre à travers la comptine numérique doit précéder l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel, mais ils n'abordent cependant pas explicitement le champ numérique à aborder en lien avec la non-congruence telle que nous l'avons précisée. Nous allons étudier comment cette non-congruence initiale est pour autant prise en compte par les chercheurs dans l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel.

3. Différents choix d'itinéraires pour surmonter le problème de non-congruence

Des approches différentes amènent à considérer la numération écrite chiffrée au niveau cognitif mettant en avant plusieurs signifiants :

- 1) numération écrite chiffrée (par exemple 53),
- 2) numération parlée dans la langue maternelle (cinquante-trois en français),

¹⁷⁵ Pour un résumé des travaux sur les premiers pas dans la conceptualisation du nombre, voir par exemple Numa Bocage (1997). Pour une approche des problèmes soulevés par le « pré-numérique » en primaire de la maternelle au CM2, voir Margolinas & Rivière (2008) ou Margolinas, Canivenc, Wozniak, De Redon & Rivière (2007).

¹⁷⁶ Kosyvas (2010) met par exemple l'accent sur l'importance des décompositions et recompositions du nombre dans sa conceptualisation. Celles-ci sont basées sur l'implication $a=b+c$ entraîne $a=(b-x)+(c-x)$ qui peut être travaillée dès la maternelle.

- 3) collections d'objets (organisées –de différentes façons–, ou non)¹⁷⁷,
- 4) numération en unités (cinq dizaines et trois unités),
- 5) numérations annexes orales (de type asiatique comme cinq-trois ou cinq-dix-trois),
- 6) désignation des groupements, orale ou écrite (par exemple, XXXXX III ou 5X, 3I ou « 3 paquets de dix » et 2 ou encore des productions graphiques diverses),
- 7) droite numérique (vide ou « pleine »),
- 8) doigts de la main,
- 9) Représentations diverses (dessins, schémas)
- 10) Autres ... (abaques, bouliers, écritures en lignes par exemple de type 10+10+10+4 associées à un comptage).

Ils peuvent donc être oraux, dessinés, écrits à l'aide de symboles, « agis¹⁷⁸ ». Chaque recherche met le focus sur les uns ou les autres :

- pour Delaplace & Weil-Barais (2008), des problèmes spécifiques liés à la mise en signes dans un contexte oral par rapport à un contexte écrit (aspect mémoriel en particulier),
- pour Fuson & al. (1997) la triade numération parlée-numération écrite chiffrée-organisation d'une collection, mettant entre autres l'accent sur des aspects linguistiques, avec la possibilité de l'utilisation d'une numération annexe, Fuson et Li (2009), Brissiaud (2001)
- pour Bednarz et Janvier (1982, 1988), les trois « états », collection non organisée-collection organisée-représentation du nombre (incluant des systèmes de numération écrits annexes),
- pour Chambris (2008) le jeu entre numération en unités/ numération écrite/ collection à mesurer,
- pour Treffers (2001), l'importance de la droite numérique vide pour travailler la dualité ordinal/cardinal,
- pour Brissiaud (1991), le rôle joué par les représentations des doigts de la main,
- pour Chevalier (2008) et Bassis (2003), le rôle joué par des bases annexes autres que dix,
- pour Poisard (2005), le rôle joué par des bouliers,
- pour Conne (1989), le rôle des écritures additives de type 10+10+10+5.

Beaucoup de ces chercheurs font intervenir en outre des manipulations matérielles de groupements qui peuvent être reliées à un contexte matériel précis (comme des boîtes de crayons), ou/et décontextualisées comme le matériel de numération « base-ten blocks », ou/et dessinées ou schématisées sur feuille. Les travaux étudiés indiquent une association nécessaire entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée mais cette association y est envisagée de différentes manières. Cependant nous notons un constat de départ unanime sur les nombreuses confusions faites par les élèves entre numération parlée et numération écrite chiffrée. L'exemple le plus cité est la correspondance de type « cinquante-trois/ 503 » noté dans la triade Decade and Ones de Fuson. La non-congruence y est donc reconnue. La question est alors de savoir comment ce constat est pris en compte dans la façon d'introduire les éléments propres à l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Nous allons analyser les propositions dans les recherches en termes d'itinéraires cognitifs d'enseignement.

Les schémas que nous allons donner sont propres à notre cadre théorique et ne peuvent être compris sans s'y référer (chapitre 4). Ils nous servent à catégoriser les itinéraires cognitifs d'enseignement inférés des recherches. En particulier, un certain ordre est à considérer dans l'établissement des liens, cet ordre n'étant pas toujours explicite dans les recherches consultées et ces liens n'étant eux-mêmes que partiellement établis.

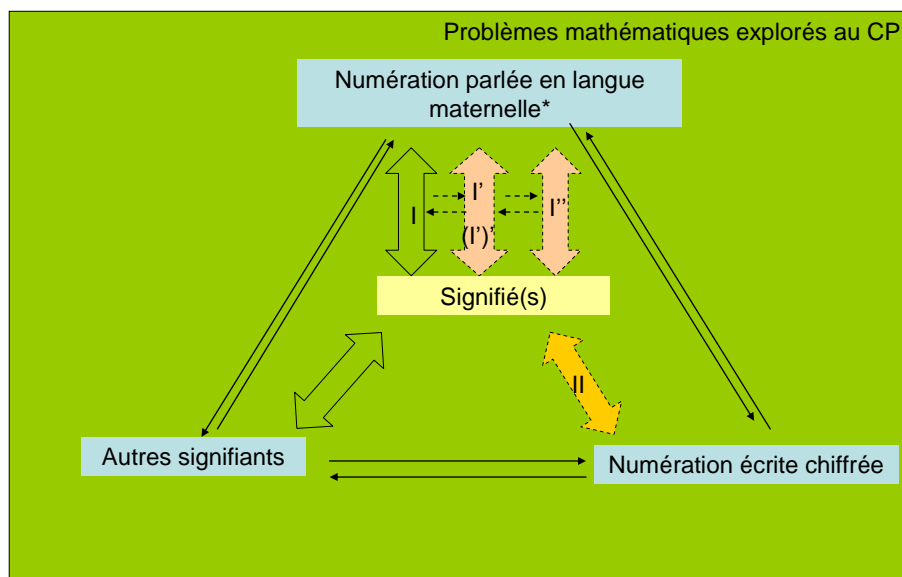
¹⁷⁷ Nous avons indiqué dans le chapitre 4 en quoi des collections peuvent être considérées ou non comme des signifiants du nombre.

¹⁷⁸ Des bouliers, des quipus, des abaques, etc.

3.1 Un 1^{er} type d'itinéraire : évolution de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle

Dans la recherche de Fuson de 1997 sont exposées outre celle de Fuson elle-même, trois autres façons d'introduire l'écriture chiffrée mettant en jeu trois « pôles » dont il a déjà été question : numération parlée, désignation des groupements et collections (organisées). Elles ont en commun le fait de proposer des « *word problems* » que nous interprétons comme liés successivement à l'interprétation strictement ordinale (comptage de un en un) puis à l'interprétation arithmétique additive¹⁷⁹ (comptage de dix en dix) et enfin à l'interprétation arithmétique multiplicative (comptage des dizaines). Le schéma principal est donc le suivant :

Itinéraire cognitif 1 : évolution de l'interprétation de la numération parlée



L'évolution de l'interprétation de la numération parlée en France est repérable dans les flèches : I pour la strictement ordinale, I' pour l'ordinale avec repérants, (I)' pour l'arithmétique additive, I'' pour l'arithmétique multiplicative. L'interprétation de référence en jeu dans la double flèche II, celle de la numération écrite chiffrée, est alors élaborée grâce à l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée I'' grâce au rapport oral/écrit qu'entretienne les deux numérations. Nous avons indiqué dans la première partie de la thèse, puis dans le chapitre 4, qu'il est susceptible d'y avoir un écart entre I'' et II. Cet écart n'est cependant pas explicitement notifié dans les recherches que nous avons consultées. Nous avons mis (I)' en italique car certains chercheurs, comme Collet (2004), indiquent qu'elle n'est pas nécessaire à l'itinéraire. Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement. L'astérisque accolé à « numération maternelle » indique que cet itinéraire est valable pour les langues anglo-saxonnes ou latines, et de manière générale pour toutes celles qui peuvent s'analyser comme numération avec repérants ou/et appuis additifs, comme nous l'avons fait dans la première partie de la thèse pour la numération parlée en France.

Différentes possibilités sont à noter quant au moment où les écritures chiffrées vont être associées à la numération parlée en langue maternelle pour faire évoluer leur interprétation. Ainsi, chacun des programmes de la recherche de Fuson se distingue selon ce moment

¹⁷⁹ Là encore, il est difficile de savoir s'il ne s'agit pas plutôt d'y lire l'interprétation ordinale avec repérants.

d'introduction de l'écriture chiffrée. Le CGI (pour *Cognitively Guided Instruction*) de Carpenter, Fennema et Franke propose d'utiliser les écritures chiffrées dès l'interprétation strictement ordinale¹⁸⁰ (I), le PCMP (pour *Problem Centered Mathematics Project*) de Huma, Murray et Olivier propose une introduction au moment de l'interprétation arithmétique additive (I'), et enfin le CBI (pour *Conceptually Based Instruction Project*) de Hiebert et Wearne propose une introduction au moment de l'interprétation arithmétique multiplicative (I''). Ceci est lié aux différences que nous avons relevées entre ces trois itinéraires en ce qui concerne les relations avec les autres « pôles ».

Pour le CGI, les « *word problems* » sont centraux : il s'agit avant tout de donner des réponses aux problèmes numériques grâce à la numération parlée. Les écritures chiffrées sont toujours considérées dans leur fonction de traduction des mots de la numération parlée (interprétation ordinale) : il s'agit alors d'expliquer comment écrire les noms des nombres en augmentant progressivement le champ numérique exploré. Les organisations de collections et un signifiant de type « désignation des groupements » sont utilisés comme moyen de réaliser cet apprentissage, via en particulier la manipulation d'un matériel de numération de type « *base-ten blocks* » : c'est un moyen d'évoluer vers une interprétation de la numération parlée de type arithmétique multiplicatif.

Pour le PCMP, les écritures chiffrées sont prioritairement vues comme une traduction écrite du cardinal d'une collection obtenue par un comptage de dix en dix (dix, vingt, trente, si nous le traduisons en français), considéré comme plus efficace qu'un comptage un en un¹⁸¹. Chaque dizaine est traduite en écriture chiffrée dix=10, vingt=20, etc., ainsi que chaque unité restante. La superposition des deux, à l'aide du matériel Montessori, permet de traduire la désignation orale en la désignation écrite chiffrée : par exemple la désignation orale « cinquante-trois » est matérialisée par deux cartons Montessori sur lesquels sont inscrits (en chiffres) 50 et 3 que l'on superpose pour obtenir 53 (le 0 étant caché par le 3). Dans ce projet le matériel de numération de type « *base-ten blocks* » n'est pas utilisé et les signifiants de type « désignation des groupements » sont évités, tout au moins au début des apprentissages.

Enfin, pour le CBI, la numération parlée est reliée à des signifiants de type « désignation des groupements », « *5 groups of ten and 3 units* », via une organisation de la collection qui doit apparaître comme facilitant le comptage¹⁸². C'est à ce moment que la structure (chiffres et position de chiffres) de l'écriture chiffrée associée déjà introduite (ici 53) est questionnée.

3.2 Un 2^{ème} type d'itinéraire : le recours à une numération orale annexe

Celui-ci concerne l'utilisation d'une numération annexe.

Fuson ne porte pas son attention principale sur le lien entre « *unitay multidigit* » et « *separate Tens and Ones* », c'est-à-dire ce que nous interprétons comme une évolution d'une interprétation (strictement) ordinale à une ordinale avec repérants ou/et arithmétique additive. Elle analyse en effet plus particulièrement le passage entre les deux dernières triades (voir la figure1-continued). Le fait que dans celles-ci, le troisième « pôle », concernant une numération orale ne soit plus la numération parlée en langue anglaise mais ce que nous

¹⁸⁰ Le modèle de développement en triades montre que c'est aussi le cas pour Fuson. Cependant dans des développements plus récents, elle indique en outre l'utilisation d'une numération annexe. Nous développons cet autre itinéraire ci-après.

¹⁸¹ C'est pourquoi nous pouvons l'interpréter comme proche d'une conception ordinale avec repérants, mais, comme nous l'avons signalé pour toutes les recherches, des éléments plus précis nous manquent pour réellement trancher par rapport à une interprétation arithmétique additive.

¹⁸² Le fait de ne pas employer le mot dizaine (ten), d'y associer rapidement l'écriture chiffrée et de ne pas indiquer l'aspect « mesure », nous amène à penser que les désignations de type « *5 groups of ten and 3 units* » sont interprétables comme étant du type « désignation des groupements » et non des signifiants constitués en système de numération.

interprétons comme une numération « en unités », va étayer l'idée de recourir à l'emploi d'une autre numération orale pour l'apprentissage. C'est ce qui est développé par Fuson et Li (2009), plus particulièrement en mettant l'accent sur des « ten-bases stratégies » qui permettent de s'appuyer sur dix dans des stratégies de « *word problems*¹⁸³ » arithmétiques mettant en jeu des nombres à un chiffre. Elle estime donc souhaitable une interprétation arithmétique additive de la numération écrite chiffrée (ou est-ce une numération ordinale avec repérants ?) qui doit évoluer vers une numération arithmétique multiplicative en établissant des liens entre une numération parlée usuelle et une numération en unités (« *multiunits* »). Ainsi cinq « pôles » sont en jeu jouant des rôles différents et introduits à des moments différents et elle propose un modèle successif de liens entre ceux-ci.

DeBlois (1995) quant à elle observe chez un élève scolarisé âgé de huit ans et sept mois des difficultés relatives à la conception de groupement comme objet unitaire (donc « comptable ») ainsi qu'à la conception d'une autre désignation que la désignation orale comme pouvant désigner le cardinal d'une collection (une désignation écrite chiffrée ou une désignation « en unités »). Après une étude de la conceptualisation de la numération de position à partir d'élèves de huit à onze ans, DeBlois (1996) met alors en exergue l'importance d'une numération en unités. Nous avons déjà indiqué que Chambris (2008) relève aussi l'importance du lien « numération en unités » et écriture chiffrée, liées à des manipulations.

Ces recherches permettent d'envisager un autre processus concernant l'apprentissage de la numération chiffrée de position pour les élèves dont la langue maternelle utilise une numération comme celle parlée en France, c'est-à-dire dont les représentations ne permettent pas aisément une interprétation multiplicative. Au lieu de faire évoluer l'interprétation de la numération chiffrée via l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle (connaissance ancienne), il va s'agir d'utiliser une numération orale annexe dont l'interprétation va être plus proche de celle de la numération écrite visée (c'est-à-dire de référence). Dans les recherches consultées, nous avons repéré deux numérations orales qui peuvent jouer ce rôle. Elles permettent toutes les deux facilement une interprétation arithmétique multiplicative (au moins pour le chercheur). La première est une numération en unités fondées sur des groupements de dix qui constituent au fur et à mesure les unités de mesure. Les désignations sont de type « trois centaines, sept dizaines, neuf unités ». De par son emploi et un certain degré de décontextualisation elle peut se constituer en système sémiotique pour être ainsi considérée comme une numération annexe. La deuxième est une numération dont la forme est calquée sur certaines numérations asiatiques, comme la chinoise, et qui consiste à prononcer les appuis et les appuyants multiplicatifs, « trois cents sept dix neuf »¹⁸⁴. Les deux sont formellement proches, et leur proximité est soulignée par Fuson & Li (2009) quand elles comparent l'usage de la première par rapport à la seconde dans leur proposition pour l'enseignement : « *When explaining their method, children used the quantity words that named the multiunits (three hundreds seven tens nine ones) that were like Chinese number words (except for the plurals and the word ones at the end), and they also became able to use English number words.* ». Cependant, la première est issue de la mesure des grandeurs, elle est donc utilisée en particulier pour indiquer des grandeurs dans des activités de mesurage de quantité discrètes, ce qui favorise une interprétation arithmétique additive et multiplicative, l'aspect cardinal est prédominant. Pour la deuxième, elle est susceptible d'être employée dans une plus grande variété de problèmes, comme c'est le cas de

¹⁸³ Les *word problems* sont ceux qui mettent en jeu les désignations parlées usuelles des nombres. Il peut s'agir de *word problems* arithmétiques. Verschaffel & al. (2006) en donne un exemple : « *Pete has 9 apples. He has 3 apples more than Connie. How many apples does Connie have ?* ». Ces derniers sont répertoriés par plusieurs chercheurs en 14 catégories, voir par exemple Vergnaud (1981, 1991).

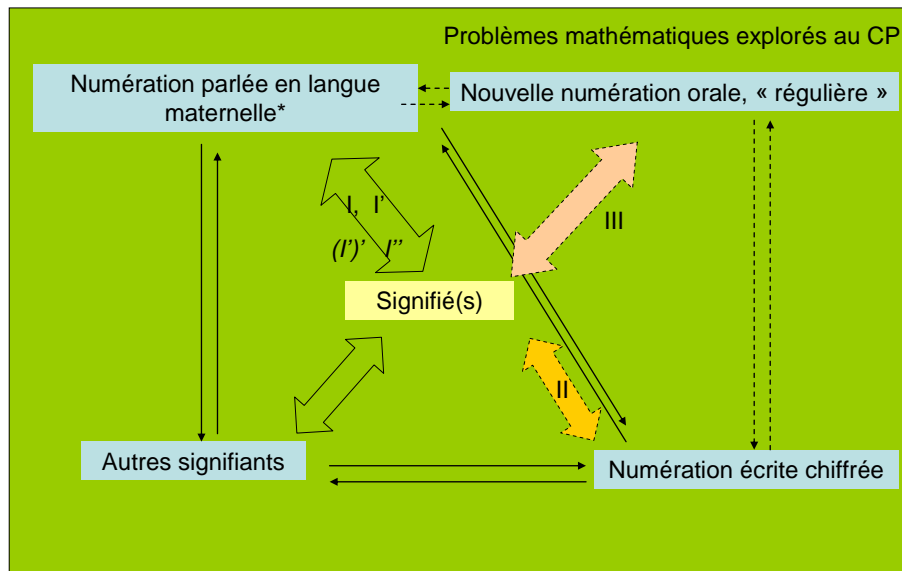
¹⁸⁴ Voir « trois sept neuf ».

la numération parlée en langue maternelle, en particulier tous les problèmes mettant en jeu le nombre, y compris ceux faisant intervenir un aspect ordinal¹⁸⁵.

Nous qualifions cette numération relais de « régulière ».

Nous obtenons le schéma suivant :

Itinéraire 2 : utilisation d'une numération orale annexé



Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement. L'interprétation de la numération parlée en langue maternelle est repérable dans les flèches avec les mêmes codes que précédemment. Le fait de mettre aussi I' en italique et de ne pas lui attribuer une double flèche spécifique, comme dans le schéma du premier itinéraire cognitif, indique que l'évolution vers cette interprétation n'est pas une obligation dans l'itinéraire, contrairement au précédent. Nous n'avons relevé dans les recherches consultées que des numérations orales ayant une interprétation arithmétique multiplicative, ce qui n'est pas surprenant si on considère sa proximité avec l'interprétation de référence que nous avons signalée dans la première partie de la thèse. Nous préférons indiquer cette interprétation arithmétique multiplicative par III, un autre signe que I'', car elle susceptible d'avoir des différences avec celle de la numération parlée en langue maternelle. Cette nouvelle numération est mise en relation avec les deux autres numérations. Le lien avec la numération écrite chiffrée contribue à interpréter cette dernière via son interprétation de référence (II). Le lien avec la numération parlée maternelle peut contribuer à interpréter cette dernière via une interprétation arithmétique multiplicative I'. Le fait de mettre ici I' en italique et de ne pas lui attribuer une double flèche spécifique, comme dans le schéma du premier itinéraire cognitif, indique que l'évolution vers cette interprétation n'est pas *a priori* une obligation dans l'itinéraire, contrairement au précédent. Cependant, lorsqu'une telle interprétation est en jeu dans la numération parlée en langue maternelle, le lien ancien écrit/oral entretenu entre cette dernière et la numération écrite chiffrée peut constituer une aide. En ce sens l'interprétation I' peut participer à l'itinéraire cognitif. Néanmoins, les recherches consultées ne permettent pas de préciser l'ordre dans lequel ces différents liens sont établis. Nous notons cependant que l'écriture chiffrée peut être reliée à l'une ou l'autre numération orale à différents moments.

¹⁸⁵ Ainsi, une comptine numérique peut être récitée, favorisant son emploi dans une interprétation ordinale.

Ainsi, Fuson envisage une association entre la numération écrite chiffrée et parlée en langue maternelle dès le début de l'itinéraire. Son modèle comprend une évolution de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle de l'ordinal vers une interprétation arithmétique additive, ce qui a pour résultat de faire évoluer conjointement celui de la numération écrite chiffrée : c'est seulement ensuite qu'est utilisée la numération orale annexe. Collet (2004) revient sur ce choix à partir d'une étude sur 120 élèves de Belgique de 1ère et deuxième année d'école élémentaire (6-8 ans) : la maîtrise complète de la triade « *Decades and Ones* » ne semble pas nécessaire pour atteindre les deux dernières. Autrement dit, il ne lui semble pas nécessaire d'utiliser une interprétation additive de la numération écrite chiffrée, et donc son association avec une numération orale annexe peut se faire plus tôt que dans l'itinéraire proposé par Fuson : cette fois-ci l'évolution de I vers I' n'est pas utilisée pour déclencher l'évolution de l'interprétation de la numération écrite chiffrée.

Soulignons, que des chercheurs comme DeBlois et Chambris indiquent l'utilisation d'une numération orale annexe en unités comme une aide à l'apprentissage des élèves. Leurs travaux concernent essentiellement des élèves de plus de sept ans qui ont donc théoriquement (c'est-à-dire d'après les programmes scolaires) déjà fait évoluer leur interprétation de la numération écrite chiffrée vers une interprétation de référence. Elles ne se prononcent donc pas sur une utilisation précoce d'une numération en unités dans les apprentissages, comme nous l'avons indiquée dans ce deuxième itinéraire.

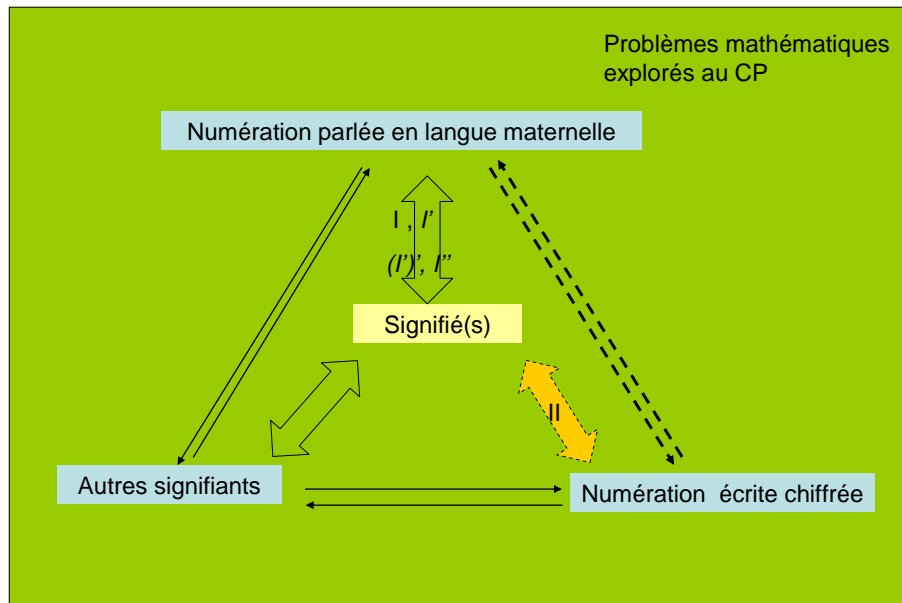
3.3 Un 3^{ème} type d'itinéraire : un lien différé avec la numération parlée en langue maternelle

Les possibilités indiquées précédemment sont-elles les seules ? Doit-on partir de « *word problems* » ou/et d'un comptage d'une collection pour introduire l'écriture chiffrée ? Certaines recherches permettent de penser que ce n'est pas obligatoire. Ainsi, si l'utilisation de la comptine numérique semble considérée comme nécessaire pour la conceptualisation du nombre, dès 1980, Comiti, Bessot & Pariselle signalent qu'elle n'est cependant pas toujours un outil maîtrisé par les élèves même en fin de CE1 (enfants de 7-8 ans), mais surtout pas toujours nécessaire. Par exemple des stratégies mettant en œuvre des bijections entre objets de deux collections peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes (ce qui se réfère à la définition du nombre privilégiant les classes d'équivalence), sans passer par la comptine numérique mais en convoquant des connaissances relatives à l'énumération, Briand (1999). Par ailleurs, Verschaffel & al. (p. 562, 2006) rapportent que des équipes de chercheurs japonais montrent l'efficacité des stratégies d'addition de sommes de petits nombres se basant (culturellement) sur des groupes de cinq, à l'aide en particulier d'abaques, et donc pas sur la numération parlée. Des problèmes relatifs aux nombres peuvent donc être résolus sans avoir nécessairement recours à la numération parlée. En ce qui concerne l'introduction de l'interprétation de l'écriture chiffrée, nous avons déjà signalé que Bednarz et Janvier (1982, 1988) mettent l'accent sur le lien entre l'organisation de la collection et l'écriture chiffrée pour construire les connaissances qu'elles ont listées (voir ci-avant), sans faire référence explicitement à un comptage. Les habiletés de comptage sont néanmoins sous-entendues, tout au moins jusqu'à dix. Nous voyons dans ces recherches des possibilités (théoriques) de travailler précocement le lien signifiant (écriture chiffrée) / signifié(s) mettant en jeu l'interprétation (toujours celle de référence) de l'écriture chiffrée¹⁸⁶. Ainsi les itinéraires cognitifs que nous avons déjà décrits ne sont pas les seuls envisageables. Nous avons indiqué que dans des publications récentes Bassis (2003) et Chevalier (2008) exploitent cette

¹⁸⁶ Il s'agit de coder une organisation et non pas une organisation issue d'un comptage. Cf. les définitions données dans le chapitre 4, en particulier « organiser/configurer pour désigner ».

possibilité de ne pas utiliser la numération parlée usuelle en France au moment de cette introduction.

Itinéraire 3 : un lien différé avec la numération parlée



Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement. L'interprétation de la numération parlée en France est repérable dans la double flèche : I pour strictement ordinaire, I' pour ordinaire avec repérant, (I)' pour arithmétique additive, I'' pour arithmétique multiplicative. Le fait de mettre I, I', (I)' et I'' au même niveau, indique que l'évolution éventuelle de l'interprétation de la numération parlée en langue maternelle n'est pas prise en compte dans l'itinéraire (tout au moins au début), contrairement au précédent. La spécificité de cet itinéraire est en effet que l'interprétation en jeu dans la flèche II, celle de référence de la numération écrite chiffrée, est introduite initialement sans ces dernières. I', (I)' et I'' sont mis en italique pour montrer qu'ils ne sont pas nécessaires au début de l'itinéraire : seul un comptage un en un est utilisé pour élaborer des groupements de dix. Le lien « direct » entre les deux numérations est mis en pointillé pour indiquer qu'il est différé et que d'une certaine manière un lien nouveau est construit, puisque il est possible de voir l'écriture chiffrée autrement que comme la version écrite des désignations orales. La numération parlée pourrait jouer un rôle similaire aux autres signifiants. Cependant les liens faits antérieurement entre les écritures chiffrées et la numération parlée en langue maternelle en tant que numération ordinaire (avec repérant ou non) dans un champ numérique au-delà de dix, ne permettent d'envisager la numération parlée comme un relais, comme ce peut être le cas pour d'autres signifiants. En effet, les signifiants « relais » ne doivent pas être interprétés *a priori* de manière ordinaire.

4. Conclusions sur les recherches consultées

4.1 Synthèse

Les propriétés mathématiques dégagées dans notre analyse du premier chapitre apparaissent de manière différente dans les recherches consultées selon les méthodologies et éléments théoriques utilisés. Par exemple certaines sont traduites sous forme de savoir-faire : faire des groupes, les défaire, passer à un groupement supérieur, échanger un groupement d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur et inversement, coder, décoder, découvrir les lois

régissant les groupements successifs, cf. Bednarz et Janvier (1982, 1988). D'autres sont lisibles à travers des relations entre des « pôles », comme les triades reliant les deux numérations et une organisation de la collection de Fuson & al. (1997). En conséquence, il nous est difficile de distinguer l'interprétation ordinale avec repérant de l'interprétation arithmétique additive, par exemple dans les triades « Décade and Ones » et « Sequence Tens and Ones », voire « Unitary Multidigit » de Fuson & al. (1997). Pour surmonter cette difficulté, nous aurions pu considérer les problèmes en jeu. Par exemple, des problèmes de calcul mental liés à des problèmes de la structure additive¹⁸⁷ permettent d'inférer que les auteurs considèrent une interprétation arithmétique additive. Mais, dans les projets d'enseignement consultés, le détail de ces problèmes et de leur programmation n'est pas assez précis pour que nous puissions conclure sur les interprétations considérées. Cependant, nous pouvons relativement facilement distinguer l'interprétation (arithmétique ?) multiplicative. Cette différence de traitement constitue un résultat. Nous émettons l'hypothèse que dans les recherches consultées les auteurs ne distinguent pas – tout au moins clairement – dans les aspects de la numération parlée une interprétation arithmétique additive d'une interprétation ordinale avec repérant.

Nous avons distingué des itinéraires cognitifs d'enseignement selon le rôle joué par la numération parlée dans l'introduction de l'interprétation de la numération écrite chiffrée. En conséquence, les « autres signifiants » jouent un rôle différent selon leur fonction dans les itinéraires, tandis que d'autres éléments, comme l'organisation des collections, constituent un terrain privilégié pour poser des problèmes. En outre suivant l'interprétation qui lui est propre, chacun de ces « autres signifiants » permet (potentiellement) de travailler plus tel ou tel aspect de l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Nous avons ainsi dégagé trois itinéraires.

1^{er} itinéraire :

Le nombre reste étroitement lié à la numération parlée en langue maternelle et le rôle de l'écriture chiffrée reste avant tout celui d'indiquer par écrit les noms des nombres de cette numération. Les « autres signifiants » aident à accompagner l'évolution simultanée des interprétations des deux numérations : d'une numération ordinale vers une arithmétique multiplicative, en passant par une arithmétique additive ou/et ordinale avec repérant.

2^{ème} itinéraire :

Un nouveau système de numération est utilisé, qui n'est plus seulement un « simple » signifiant, et va être objet d'enseignement¹⁸⁸. Il va servir de relais entre les deux systèmes de numération (celui parlé en langue maternelle et celui chiffré). Les « autres signifiants » vont aider à construire l'interprétation de ce nouveau système, puis ensuite à faire les liens avec d'une part la numération écrite chiffrée (sans numération parlée maternelle) et d'autre part la numération parlée maternelle.

Deux choix différents ont été repérés : une numération parlée « régulière » « à l'asiatique » et un système de numération en unités. Dans les deux cas ils se rapportent à une numération orale dont l'interprétation en tant que numération (arithmétique ?) multiplicative joue le rôle d'un intermédiaire entre celle de la numération parlée (ordinale avec repérant ou/et arithmétique additive) et celle de la numération écrite chiffrée.

¹⁸⁷ Vergnaud (1991).

¹⁸⁸ Cela peut être temporaire par exemple dans le cas d'une numération parlée à l'asiatique, mais il se peut aussi que son étude se prolonge, par exemple dans le cas d'une numération en unités.

3^{ème} itinéraire :

Le travail initial consiste à établir l'interprétation de l'écriture chiffrée sans recours à d'autres systèmes de numération. Les « autres signifiants » aident à la réalisation de ce processus. La numération parlée en langue naturelle est ensuite reliée à l'écriture chiffrée.

Selon les itinéraires, le problème de conserver et d'utiliser les acquis sur la conceptualisation du nombre en relation avec la numération parlée, issus de la maternelle et/ou travaillés au début du CP, est abordé différemment.

Dans le premier itinéraire, le problème est résolu de fait car les deux numérations gardent leur relation initiale de version orale/écrite des « mêmes » signes et c'est leur interprétation commune qui évolue simultanément. Dans le 2^{ème} itinéraire, ce sont les aspects oraux et systémiques de la nouvelle numération qui constituent un moyen de garder les acquis sur la conceptualisation du nombre et de faire le lien avec la numération orale. En effet, le caractère oral permet de favoriser l'établissement de la numération annexe en tant que signifiant du nombre en l'utilisant dans les mêmes problèmes que la numération parlée en langue maternelle et dans des fonctions propres à l'oral. En outre l'écriture chiffrée garde par rapport à ces deux numérations le même statut de traduction écrite des signifiants oraux. Ainsi les connaissances relatives au nombre sont aussi (potentiellement) mobilisables via le nouveau système de signifiant. Dans le 3^{ème} itinéraire, les acquis sur la conceptualisation du nombre peuvent se faire d'une part en se restreignant à un champ numérique inférieur à dix quand la numération parlée en langue maternelle est convoquée, et d'autre part grâce à des problèmes (re)connus par les élèves comme des problèmes numériques quand la numération parlée en langue maternelle n'est pas convoquée (par exemple des comparaisons de cardinaux de collections par bijection). Les liens ultérieurs entre les deux numérations permettent de transposer sur la numération écrite chiffrée les connaissances sur le nombre acquises via la numération parlée en langue maternelle. Réciproquement, il est alors possible de faire évoluer l'interprétation de la numération parlée vers une numération arithmétique multiplicative grâce à ce lien.

Dans ces trois itinéraires, différents aspects de l'interprétation de la numération écrite chiffrée sont en jeu dès son introduction, d'autres sont travaillés ultérieurement. Les différents itinéraires permettent ainsi de multiples options sur le processus de conceptualisation, en y favorisant initialement certains aspects de l'interprétation et/ou en y abordant d'autres à différents moments (notamment via le recours à d'autres signifiants).

4.2 Questions soulevées

De manière globale, les différents itinéraires font jouer un rôle différent aux différentes interprétations de la numération parlée. Toutes les recherches ne peuvent être analysées comme relevant du même type d'itinéraire et certaines posent même la question de la place à accorder à l'interprétation arithmétique additive de la numération parlée, celle-ci ne semblant pas nécessaire aux élèves pour construire certains aspects de l'interprétation de la numération écrite chiffrée, (Collet, 2004). En outre, les recherches consultées n'apportent pas de réponses explicites sur l'influence des itinéraires sur la disponibilité des connaissances selon les problèmes, par exemple en ce qui concerne les problèmes de calcul mental par rapport à des problèmes de calcul posé. Ainsi, Fuson note que la « *concatenated single digit conception* » est qualifiée de « *constantly seductive digits conception* », de sorte que l'interprétation ordinale reste encore engagée dans des additions posées avec des écritures chiffrées. Réciproquement, certains élèves envisagent des calculs mentaux uniquement en visualisant mentalement une addition posée avec les écritures chiffrées. Par ailleurs Delaplace & Weil-Barais (2008) notent que le recours à l'écriture chiffrée comme mémoire reste encore

relativement peu répandu chez les élèves de primaire, ceux-ci préférant recompter plutôt que de noter leur résultat. La question de l'influence des itinéraires proposés sur la disponibilité des connaissances des élèves reste donc ouverte, mais beaucoup d'autres paramètres sont susceptibles d'intervenir en classe, ce qui complique cette évaluation.

Le manque de précision sur l'utilisation exacte des « autres signifiants » (un, plusieurs, quels aspects développent-ils exactement, quand ?) et sur la simultanéité ou non de l'emploi des numérations (par exemple dans chacune des triades de Fuson, quel est l'ordre des liens indiqués par les doubles flèches ?) pose le problème des éléments des interprétations à introduire au fur et à mesure. En effet, si tous les aspects de l'interprétation de la numération écrite chiffrée semblent ne pas pouvoir intervenir en même temps dans le processus d'apprentissage, quels sont ceux à privilégier pendant son introduction puis *a posteriori* ? L'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel pose en outre des questions sur les connaissances antérieures nécessaires. S'il est reconnu que certaines compétences sur les habiletés de comptage sont nécessaires, les recherches donnent des réponses plus contrastées sur l'étendue des connaissances sur le nombre dont l'apprenant a besoin : quel niveau de conceptualisation ? Quelle est la place de l'« ordinal », du « cardinal », des problèmes arithmétiques, du calcul mental ? Quel champ numérique aborder, à quel moment ? La question est en effet difficile du fait qu'il a été démontré que ces connaissances s'acquièrent sur un long terme et y compris grâce aux écritures chiffrées. Les élèves ont acquis des connaissances sur les nombres prioritairement via la numération parlée dans leur langue maternelle. Se pose alors le problème de définir et d'organiser les liens entre les différents signifiants dégagés : avec quels (variété de) problèmes ? Quelles étapes ? Quelle mise en œuvre en classe ?

Nous avons ici apporté des éléments de réponse au niveau des itinéraires cognitifs d'enseignement proposés dans les recherches. Mais quel que soit l'itinéraire, il existe des marges de manœuvre. Nous en avons déjà vu des exemples dans la recherche de Fuson pour le premier itinéraire. D'une manière plus précise nous nous posons des questions sur les progressions possibles en classe, et en particulier sur la façon dont sont articulées les différentes interprétations dans un itinéraire. Il nous semble que tout n'est pas envisageable en classe.

Nous allons apporter un éclairage sur ce problème en nous tournant vers les manuels scolaires qui vont nous permettre de considérer les itinéraires avec plus de précision. Ici nous ne cherchons pas à évaluer les itinéraires proposés, mais à obtenir des informations sur leur diversité, et donc à identifier certains facteurs de faisabilité des itinéraires. Ces informations nous sont utiles pour le projet de la thèse consistant à comprendre les déroulements en classes « ordinaires », en particulier susceptibles d'utiliser un manuel scolaire. D'une certaine manière la question est de comprendre comment une certaine marge de manœuvre indiquée par l'analyse des recherches en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement est investie dans les manuels.

<p>CHAPITRE VI</p> <p>Des itinéraires proposés dans les manuels</p>

1. Présentation de l'étude.....	180
1.1 Place dans la thèse et apports théoriques complémentaires	180
a. Les questions	180
b. Compléments théoriques	180
1.2 Précisions méthodologiques et choix des manuels	181
a. les indicateurs	181
b. Les temps de l'étude.....	182
c. Le choix des manuels	184
2. Le manuel « Cap Maths ».....	185
2.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques	185
2.2 Prescriptions relevées	186
a. Recommandations générales des auteurs en direction des enseignants	186
b. Prescriptions en ce qui concerne la numération	186
2.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « Cap Maths »	190
2.4 L'itinéraire cognitif proposé par « Cap Maths »	194
a. Les étapes de l'itinéraire.....	194
b. Discussion	198
3. Le manuel « J'apprends les maths avec Tchou ».....	199
3.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques	199
3.2 Prescriptions relevées	201
a. Recommandations générales des auteurs en direction des enseignants	201
b. Prescriptions en ce qui concerne la numération	201
3.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « J'apprends les Maths ».....	213
3.4 L'itinéraire cognitif proposé par « J'apprends les maths avec Tchou».....	217
a. Les étapes de l'itinéraire.....	218
b. Discussion	221
4. Conclusion et perspectives pour la troisième partie	224
4.1 Bilan	224
4.2 Vers de nouvelles questions.....	227

1. Présentation de l'étude

1.1 Place dans la thèse et apports théoriques complémentaires

a. Les questions

En précisant les itinéraires cognitifs d'enseignement dégagés dans l'étude des recherches antérieures, l'analyse des manuels scolaires a pour but d'indiquer une certaine variété des possibilités à l'intérieur de chaque itinéraire. Ces possibilités sont théoriquement nombreuses, selon en particulier la place accordée à certaines connaissances (consolidation de la conceptualisation du nombre, abord plus ou moins précoce de problèmes arithmétiques à l'aide de la numération parlée ou/et écrite etc.). Cependant les auteurs des manuels sont aussi contraints par des paramètres institutionnels (programmes, horaires, etc.) et influencés par leurs conceptions sur l'apprentissage et le cas échéant leur expérience professionnelle dans l'enseignement. De ce fait, cette étude peut nous permettre de délimiter aussi un premier champ des possibles et contraintes pour la classe. Notons cependant que son but n'est pas de mettre à jour les conceptions sous-jacentes des auteurs.

Les questions que nous nous posons sont relatives à l'articulation précise des différentes interprétations dans un itinéraire cognitif.

Y a-t-il des différences selon le champ numérique ?

Comment la relation initiale écrit/orale entre les deux numérations est-elle utilisée? Comment évolue-t-elle ?

Quelles sont les spécificités propres à l'écriture chiffrée, en référence à l'interprétation de référence, qui sont finalement en jeu ?

b. Compléments théoriques

Il nous faut saisir au niveau des propositions des manuels les aspects des systèmes de numération qui apparaissent au fur et à mesure de l'année, afin d'en inférer les interprétations en jeu. Il ne s'agit pas ici d'étudier les cheminements cognitifs « réels » des élèves, qui de surcroît ne peuvent être appréhendés de manière précise et complète sans une étude des déroulements en classe. Le lien entre les propositions des manuels et la classe doit être cependant précisé. Les notions de tâches et activités issues de la psychologie du travail permettent de le faire. Dans la 3^{ème} partie de la thèse, la méthodologie d'analyse des déroulements en classe est issue de la double approche de Robert & Rogalski (2002). Elle croise psychologie ergonomique et didactique. Pour des raisons de cohérence nous allons retenir ici des éléments théoriques de la psychologie du travail qui sont aussi utilisés dans la double approche. Nous nous référons ainsi principalement à Rogalski (2003) et Leplat (2006). Leplat (2006) définit tâche et activité dans un triplet sujet-tâche-activité : « *On peut lire le triplet de la manière suivante. L'activité dépend du sujet et de la tâche, celle-ci étant définie comme un objectif à atteindre dans des conditions déterminées (techniques, organisationnelles, sociales, etc.). La tâche répond à la question : qu'est-ce qui est à faire ?, l'activité à la question : qu'est-ce qui est fait effectivement ? Analyser l'activité, c'est analyser ce triplet qui forme un système, chaque terme étant en double relation (dans les deux sens) avec chaque autre. Ainsi l'activité dépend de la tâche (prescrite), mais elle peut aussi la modifier (pour en faire la tâche redéfinie). L'activité dépend du sujet, mais elle peut aussi le modifier au sens où elle peut changer, par exemple, les compétences nécessaires à son exécution. Enfin le sujet et la tâche constituent un couplage dans lequel ces termes se codéterminent. La tâche fait appel à certaines caractéristiques du sujet qui changent quand l'activité évolue* ». Nous retenons ces définitions. Pour nous il s'agira de prendre en compte le lien entre les déroulements en classe (lieu de l'activité des élèves et de l'enseignant) et la tâche prescrite. Dans son article de 2003, Rogalski précise qu'une telle définition de la tâche

« ne préjuge ni du niveau auquel la tâche est décrite, ni de l'espace de liberté du sujet ». La tâche prescrite est un niveau de tâche qui consiste en « les buts et les conditions explicités dans les textes prescriptifs ». Cependant le sujet, pour nous l'enseignant, peut redéfinir la tâche : « La tâche redéfinie est celle que le sujet -pour nous ici : l'enseignant- se représente comme étant la sienne. [...] La tâche redéfinie est celle que l'on peut faire expliciter à l'enseignant au cours d'entretiens [...] sa caractéristique est d'être explicable, tout comme la tâche prescrite est explicitée », Rogalski (2003). Les enseignants interprètent donc nécessairement la tâche prescrite et c'est ce que nous aurons à considérer au moment de l'étude en classe, bien que cela ne va pas constituer notre sujet d'étude. En outre, du côté de celui qui effectue la tâche, l'enseignant, la tâche effective, celle qui a effectivement engendré l'activité, peut être encore différente de la tâche redéfinie : « La tâche effective ne peut que s'inférer de l'activité de l'enseignant. » et à partir d'une analyse réflexive de l'enseignant, « La tâche effective se révèle souvent dans la différence avec la tâche redéfinie par l'exclamation (de frustration) « mais c'est pas ça que je voulais faire ... » », Rogalski (2003). Nous retenons alors qu'il existe un lien entre la tâche prescrite par un manuel et les déroulements en classe, ceci justifie l'étude des manuels par rapport au projet de la thèse.

1.2 Précisions méthodologiques et choix des manuels

Pour étudier la tâche prescrite par les manuels, il nous faut considérer les différentes informations disponibles. Cependant entre la tâche prescrite « explicitée dans les textes » et celle attendue (par les auteurs) existe un écart, la tâche attendue étant « l'esprit de la tâche » alors que la tâche prescrite en est la lettre, Rogalski (2003). Ce sont les intentions des auteurs que nous voulons interpréter en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement et non pas ce qu'elles deviennent au niveau de l'enseignant (tâche redéfinie ou effective). C'est donc au niveau de la tâche attendue (par les auteurs des manuels) que se situe notre travail. Ainsi, nous allons tenir compte de la différence entre la tâche prescrite et la tâche attendue lorsque les textes ne sont pas suffisamment clairs pour permettre de reconstituer un itinéraire cognitif d'enseignement. Cette différence met en relief le fait que parfois une certaine subjectivité (que nous voulons éclairer par des choix explicites) est nécessaire pour organiser et prendre les indicateurs nécessaires. Ce sont donc dans les données explicites des manuels que nous devons chercher des informations pour en déduire la tâche attendue (l'esprit de la tâche prescrite) afin de l'interpréter en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement. Cependant pour l'enseignant, il y a deux prescriptions envisageables : les manuels scolaires et les programmes officiels. Pour être reconnus par l'éducation nationale en France, les manuels doivent suivre les instructions officiels, mais il existe des marges de manœuvres, exploitées de différentes manières par les manuels. Pour distinguer alors les prescriptions venant des programmes et celles des manuels, nous allons utiliser le terme d'itinéraire cognitif proposé (par un manuel). Cependant, pour des raisons de lisibilité, dans le processus d'analyse conduisant à l'établir, nous employons fréquemment les termes de « tâche ou travail prescrit » ou de « prescriptions ». Ces termes renvoient en effet plus facilement au fait d'identifier le manuel comme source des prescriptions (dans lesquelles nous inférons la tâche attendue), ce que font moins par exemple les termes « propositions », « tâche proposée », « attente » ou « tâche attendue ». Dans la méthodologie adoptée, nous allons expliciter le travail qui nous permet de reconstituer les attentes à travers les prescriptions, en précisant en particulier les indicateurs retenus.

a. les indicateurs

Il s'agit de recueillir les informations nous permettant de déterminer les connaissances qui sont potentiellement rendues disponibles aux élèves dans la résolution des problèmes. En référence à la définition d'itinéraire cognitif d'enseignement, à notre analyse de la non-

congruence et à la définition de la tâche attendue, nous devons repérer au fur et à mesure de l'avancée dans l'année, le champ numérique considéré, les propriétés de chaque numération travaillées, l'articulation entre les deux numérations et la place des autres signifiants utilisés. Nous notons, en particulier lors de leur introduction, les propriétés qui concernent les deux systèmes et celles qui n'en concernent qu'un seul des deux. Nous devons repérer une évolution globale ponctuée par des moments clés afin d'en inférer des étapes dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé. Nous considérons avant tout les prescriptions explicites en direction des enseignants qui sont écrites dans les différents textes dont ils disposent : les objectifs annoncés, la démarche générale préconisée, les productions et stratégies attendues chez les élèves. Le grain d'analyse n'est donc pas très fin. Ainsi, les énoncés des exercices ne sont considérés que dans la mesure où les prescriptions explicites ne nous fournissent pas des indicateurs suffisants pour notre analyse. Nous irons alors y chercher les informations qui nous manquent, par exemple en ce qui concerne le champ numérique abordé au fur et à mesure de l'année.

b. Les temps de l'étude

Notre analyse se déroule en trois temps : recueil des informations (indicateurs), analyse en termes de cheminements cognitifs « favorisés » chez les élèves puis en termes d'étapes dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé.

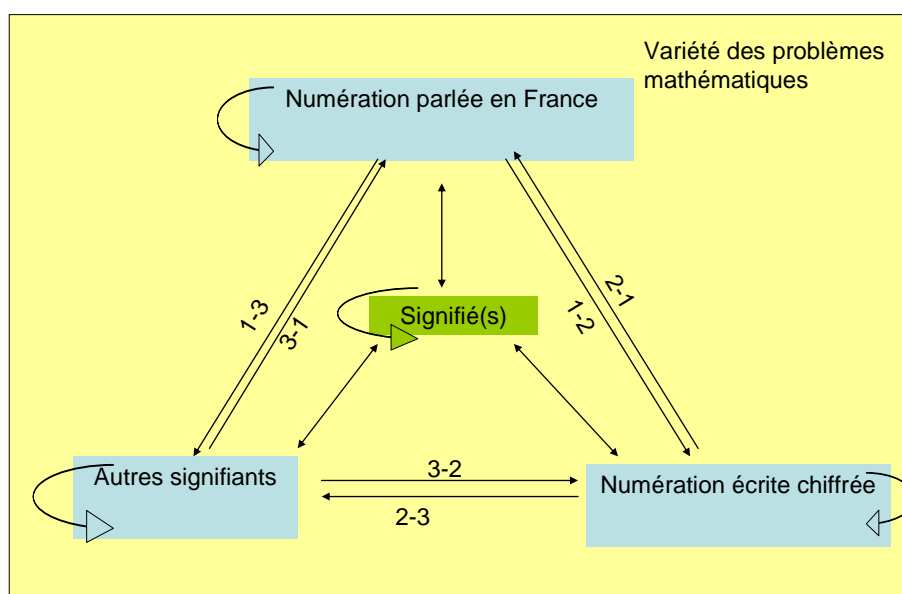
Pour le premier temps, ce sont dans les écrits explicites des auteurs des manuels sur les prescriptions afférentes à l'enseignement et à l'apprentissage de la numération écrite chiffrée que nous devons chercher nos informations. Les écrits relevés sont de deux ordres : des remarques générales explicites sur la numération et des indications sur le déroulement des séances. La tâche attendue est repérable dans les écrits donnant des orientations générales explicites tels que « *Ces trois unités de travail sont centrées sur la mise en évidence des régularités de la suite écrite des nombres* »¹⁸⁹. Elle est aussi à chercher dans des indications sur ce qui est à mettre en avant dans une séance « *L'écriture d'un nombre comme 36 peut être directement interprétée comme exprimant le nombre d'objets d'une collection qui peut être organisée en 3 groupements de 10 objets et 6 objets isolés* »¹⁹⁰, sur celles concernant des stratégies envisageables « *comptage de un en un ou comptage de dix en dix puis de un en un en utilisant les groupes de dix* »¹⁹¹ ou encore sur le champ numérique abordé.

C'est ainsi que nous dégageons dans un deuxième temps des informations qui permettent d'être analysées en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves afin d'en inférer dans un troisième temps les étapes de l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel. Précisons ce que nous entendons par cheminements cognitifs favorisés. Dans le chapitre 4 nous avons défini les cheminements cognitifs et les avons schématisés ainsi :

¹⁸⁹ Cet exemple et les suivants sont extraits du livre du maître de « Cap Maths », Hatier 2005.

¹⁹⁰ Ce texte peut être disponible uniquement à l'enseignant et ainsi prendre une forme plus décontextualisée comme « *utiliser les groupements par dix pour réaliser une quantité* », mais il peut être aussi disponible directement aux élèves via un fichier, sous forme d'un texte ou d'un schéma ou dessin.

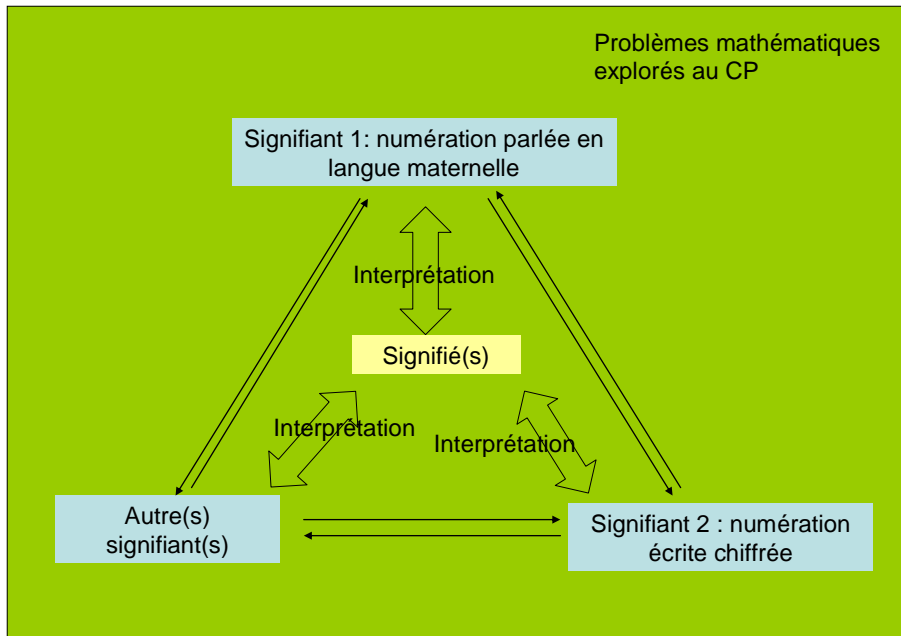
¹⁹¹ Rappelons cependant que nous ne considérons que des éléments qui permettent d'indiquer la tâche attendue par les auteurs. Une analyse *a priori* des stratégies envisageables dans les problèmes proposés est insuffisante en elle-même pour comprendre l'activité réelle en classe et ne ferait que donner une indication sur l'adéquation entre les prescriptions et les conditions de réalisation d'un itinéraire, ce qui n'est pas ce qui est recherché ici.



Cette schématisation ne peut être envisagée indépendamment du cadre théorique à partir duquel elle a été élaborée. Rappelons en particulier que d'autres cheminements cognitifs que ceux qui vont être notifiés par la suite dans ce chapitre (ceux qui sont prescrits) peuvent être empruntés par les élèves. Certains peuvent être aussi attendus par les auteurs du manuel ou encore les enseignants, mais d'autres aussi sont envisageables. Dans un problème à résoudre, la diversité de cheminement que peut emprunter potentiellement un élève dépend de nombreux paramètres comme par exemple la disponibilité de ses connaissances¹⁹². Dans ce chapitre, nous ne retenons que ceux qui apparaissent dans le cadre de la progression sur la numération prescrite par les auteurs du manuel, c'est à quoi renvoie le terme « favorisé ». L'encadré global jaune et la locution « variété des problèmes mathématiques » rappellent ce contexte général d'enseignement et d'apprentissage, ils indiquent en particulier que ces cheminements se font dans un contexte de disponibilité des connaissances selon une variété de problèmes. Ainsi, si par exemple les liens signifiants/signifié(s) ne sont pas toujours notifiés dans nos schémas (car non mis en avant dans la logique de la progression prescrite), ils peuvent être mis en jeu par les enseignants ou les élèves dans le déroulement des séances. Ils peuvent l'être soit de manière explicite soit de manière implicite, par exemple via un contexte familier ou du fait que certains signifiants (comme ceux de la numération parlée) évoquent le nombre. Ces possibilités sont étudiées dans la troisième partie de la thèse.

Le troisième temps de l'analyse permet d'identifier l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel. Rappelons que nous avons schématisé les itinéraires cognitifs d'enseignement ainsi (à comprendre dans le sens dynamique notifié dans les chapitres 4 et 5) :

¹⁹² Ici nous faisons référence à la notion de niveau de mise en fonctionnement des connaissances développé par Robert que nous avons déjà évoquée dans le chapitre 4, mais d'autres facteurs interviennent aussi. Rappelons en outre que nous avons exposé dans ce même chapitre 4 en quoi les cheminements « réels » des élèves étaient plus complexes que veulent bien faire apparaître les schématisations que nous utilisons. Ces schématisations sont cependant utiles à notre étude.



Ces itinéraires font écho aux cheminements précédents, mais cette fois-ci au niveau des interprétations qui sont en jeu dans l'enseignement proposé (ici par les manuels), interprétations qui font elles-mêmes écho à celles dégagées dans la première partie de la thèse¹⁹³. La schématisation permet de mettre en relief certains éléments retenus dans la problématique du chapitre 4, en particulier le jeu des signifiants dans l'évolution des interprétations. A noter que dans le schéma précédent, aucun itinéraire n'est spécifié¹⁹⁴.

c. Le choix des manuels

Afin de donner un aperçu de l'éventail des itinéraires proposés, nous avons consulté un panel important de manuels et avons opéré une sélection afin d'illustrer les variations dans les différents types d'itinéraires dégagés précédemment. Cependant, nous n'avons pas rencontré de manuel proposant réellement un itinéraire du troisième type. C'est pourquoi nous allons étudier deux manuels. Notre choix a été aussi contraint par la quantité des informations utiles à nos objectifs que nous pouvons recueillir : certains auteurs de manuels ne détaillant pas leurs prescriptions, il nous était très difficile d'en retirer les informations souhaitées.

Nous avons en outre choisi des manuels disponibles aux enseignants à la rentrée scolaire 2009.

- « Cap Maths », édition Hatier (2005), de Charnay, Dussuc et Madier, est issu d'une collaboration entre chercheur de l'INRP, formateur IUFM et professeur des écoles. Un certain nombre d'activités proposées sont proches de celles de la collection Ermel chez Hatier. Il prescrit un itinéraire cognitif de premier type, c'est-à-dire faisant évoluer concomitamment l'interprétation de la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée, c'est-à-dire d'une numération ordinale vers une

¹⁹³ Les interprétations des numérations au niveau des manuels vont être des reconstitutions que nous allons entreprendre dans la cadre de cette thèse. Par ailleurs, elles ne comprennent pas, au moins initialement, l'ensemble des éléments des interprétations « théoriques » que nous avons dégagées dans la première partie de la thèse.

¹⁹⁴ Voir dans le chapitre 5 les schémas relatifs aux trois types d'itinéraire cognitif d'enseignement dégagés.

interprétation de référence de la numération écrite chiffrée (via une interprétation multiplicative).

- « J'apprends les maths avec Tchou », aux éditions Retz (2009), de Brissiaud, Clerc & Ouzoulias, est issu d'une collaboration entre chercheur en psychologie, formateur IUFM et professeur des écoles. Il prescrit un itinéraire cognitif de deuxième type, faisant intervenir une numération orale annexe « régulière » interprétable en tant que numération arithmétique multiplicative, pour amener la numération écrite chiffrée à cette même interprétation.

Les deux manuels se composent de deux ouvrages. Le premier est un recueil d'exercices destination des élèves. Nous le nommons le plus souvent « fichier élève ». Le deuxième, à destination de l'enseignant, fournit des indications pour mener les séances (utilisation du fichier élève, objectifs d'apprentissage, indications sur le déroulement). Nous le nommons guide ou manuel de l'enseignant ou du maître. Par ailleurs, un matériel pédagogique est fourni. Ainsi quand nous employons le mot manuel, il se réfère à l'ensemble de ces documents.

2. Le manuel « Cap Maths »

Comme annoncé dans la méthodologie adoptée, après avoir précisé quelques points méthodologiques spécifiques à l'étude de ce manuel (§ 2.1), nous rendons compte des prescriptions à l'aide des indicateurs définis précédemment (§ 2.2) puis les interprétons en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves (§ 2.3) puis en termes d'étapes concernant l'évolution des interprétations, définissant ainsi l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel (§ 2.4). Afin de faciliter la lecture, les séances clés sont détaillées en annexe et nous n'en donnons ici qu'un résumé.

2.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques

Le manuel étudié est la version 2005 de « Cap Maths » aux éditions Hatier.

Il comporte un fichier de 144 pages à destination de l'élève, un guide de 319 pages à destination de l'enseignant et du matériel divers, détachable à la fin du fichier élève ou photocopiable à partir d'un fichier annexe dont dispose l'enseignant.

La programmation des séances est divisée en cinq périodes scolaires. Chaque période comprend trois unités, chaque unité comprend sept séances d'apprentissage (environ une par jour) plus une séance de bilan/évaluation. Un descriptif de chaque séance est donné dans le livre du maître avec des recommandations sur le déroulement, les productions attendues des élèves et les notions importantes à mettre en relief. La plupart du temps, à cette description de chaque séance correspond une page sur le fichier élève. Celle-ci est support à une partie de la séance et les élèves peuvent directement y réaliser les exercices. Certaines consignes sont indiquées sur le fichier (mais doivent être aussi stipulées par l'enseignant), d'autres viennent uniquement de l'enseignant (par exemple pour le calcul mental). Dans le domaine numérique, une séance type comporte tout d'abord des exercices de réinvestissement de notions déjà étudiées, le plus souvent dictés par l'enseignant (calcul mental, problèmes arithmétiques, dictée de nombre, exploration de la suite écrite chiffrée, entraînement à la mémorisation de la comptine numérique, etc.). Un support pour les réponses apparaît dans un encadré en rose ou bleu sur le fichier élève, cependant certains exercices, comme ceux concernant la récitation de la comptine numérique, n'y apparaissent pas. Une séance d'apprentissage sur une notion nouvelle est ensuite prescrite, séance qui, le plus souvent, ne nécessite pas l'emploi du fichier élève. Cependant dans le cas où elle concerne aussi ce fichier, elle est signalée dans un encadré orange. Finalement un « entraînement » se référant à la séance d'apprentissage qui vient de se dérouler est proposé. Il est indiqué par un encadré bleu sur le fichier élève.

Nous avons donc trois sources d'informations : le texte introductif du manuel de l'enseignant, le descriptif de chaque séance dans ce même manuel et le fichier élève. Cependant dans ce dernier, aucuns textes explicitent les intentions des auteurs telle une synthèse ou un résumé en direction des élèves. En conséquence, dans un premier temps, à partir des écrits de la présentation du guide du maître (p. V à XXXI), nous allons relever les prescriptions qui concernent l'enseignement de la numération chiffrée au fur et à mesure de l'avancée dans l'année. Plus précisément, il s'agit du champ numérique, des propriétés de chaque numération, des articulations entre les deux numérations et des séances clés marquant des étapes. L'analyse de ces prescriptions est ensuite affinée grâce aux indications données sur le déroulement de chaque séance. La conformité avec les prescriptions précédentes est étudiée en considérant les objectifs de séance déclarés, le champ numérique abordé et les synthèses en direction des élèves qui sont prescrites. En ce qui concerne les problèmes proposés, nous vérifions que leur énoncé n'est pas en contradiction avec ce que nous avons relevé précédemment.

2.2 Prescriptions relevées

a. Recommandations générales des auteurs en direction des enseignants

Ces recommandations ont été relevées dans la présentation du livre du maître et concernent la « démarche pédagogique ».

Les auteurs prescrivent un découpage en trois phases pour chaque objectif d'enseignement : apprentissage (d'une nouvelle notion), synthèse et entraînement.

L'apprentissage se fait à l'aide de situations-problèmes. Derrière cette notion est mis en avant le fait de proposer des problèmes à résoudre collectivement, sous forme orale et requérant du matériel manipulable. En outre, les textes officiels cités permettent aux auteurs de souligner l'intérêt de faire apparaître aux élèves les notions nouvelles comme efficaces pour résoudre des problèmes. Les synthèses ont quant à elles pour but d'identifier les connaissances à retenir et comportent donc une part d'institutionnalisation alors que les phases d'entraînement ont pour objectif de mettre en œuvre les connaissances nouvellement introduites à travers la résolution d'exercices.

b. Prescriptions en ce qui concerne la numération

Dans le texte introductif dans la présentation du guide du maître, il est indiqué que dans chacune des cinq périodes un champ numérique spécifique est abordé et des directives différentes concernant l'enseignement de la numération sont prescrites. Ces prescriptions donnent donc des indications globales sur les orientations de l'enseignement de la numération préconisées par le manuel. Pour chaque période, nous les mettons en parallèle avec les précisions apportées dans le déroulement des séances proposées au fur et à mesure. Afin de faciliter la lecture, certains éléments sont détaillés en annexe et nous n'en donnons ici qu'un résumé.

Période 1 : unités 1 à 3, champ numérique 1 (un) à 19 (dix-neuf)

Les auteurs indiquent leur volonté de stabiliser tout d'abord les connaissances de la maternelle sur le nombre, sans étudier les nombres un par un. Nous pouvons lire p.VII du guide du maître :

« Sans formalisation prématurée, le travail proposé concerne notamment :

- la maîtrise de la suite des nombres jusqu'à 16 : notamment la comptine orale ;
- l'utilisation des nombres pour exprimer des quantités et en garder la mémoire ;

- la maîtrise de différents moyens de dénombrement : reconnaissance immédiate de petites quantités ou de quantités organisées (dé, doigts ...), comptage un par un ;
- la maîtrise de l'écriture des chiffres ».

Ceci est travaillé dans la période 1, pour les nombres de un à dix-neuf. Cinq points sont mis en avant, p. XIII et XIV dans la présentation du livre du maître :

« **Faire prendre conscience de l'utilité des nombres.** Au cours de cette première étape, les problèmes proposés conduisent les élèves à prendre conscience des différentes utilisations des nombres pour exprimer et mémoriser des quantités ou pour les comparer, sans avoir à les reproduire. »

« **Assurer une bonne maîtrise de la suite orale des nombres jusqu'à 19 (comptine numérique).** « Le plus souvent à l'école maternelle les nombres sont « dits » précise le programme pour l'école maternelle. Consolider la maîtrise de la suite orale, en particulier dans la zone délicate entre dix et vingt, constitue donc un objectif important, [...]. »

« **Consolider différentes stratégies de dénombrement.** Pour exprimer une quantité à l'aide d'un nombre, plusieurs moyens sont développés : reconnaissance immédiate pour les très petites quantités (jusqu'à quatre), quelle que soit la disposition des objets ; reconnaissance immédiate pour des collections organisées (constellation du dé, doigts) ; comptage un par un [...]. ».

« **Reconnaître les écritures chiffrées des nombres.** La reconnaissance des écritures chiffrées (au moins pour les nombres jusqu'à 9) est déjà assurée pour certains élèves alors qu'elle reste délicate pour d'autres. Une aide et un entraînement sont donc nécessaires. L'utilisation de la file numérique (matérialisation de la suite écrite) permet de faire le lien entre désignation orale et écriture chiffrée des nombres, l'élève pointant successivement chaque nombre de la file (1, 2, 3 ...) en même temps qu'il énonce la suite orale (un, deux, trois ...). ».

« **Varié les modes de représentation des nombres.** Il est tentant de recourir à un matériel privilégié pour représenter les nombres, en particulier les petits nombres. Mais ce n'est pas sans risque, celui notamment d'enfermer la pensée de l'enfant dans une référence permanente à ce matériel et de bloquer ainsi le nécessaire processus d'abstraction. C'est ce qui nous a conduit à envisager une pluralité de représentations, en favorisant aussi souvent que possible les mises en relations : doigts, constellations, objets divers et, plus tard ; monnaie ... en lien avec la comptine orale et la file numérique. ».

Période 2 : unités de 4 à 6, champ numérique de 1 à 39

Il s'agit de repérer tout d'abord les régularités de la suite des écritures chiffrées : « Le fait que le chiffre « de gauche » (non encore reconnu comme celui des dizaines) ne change que lorsque celui « de droite » (non encore reconnu comme celui des unités) passe de 9 à 0. », p. XIV du livre du maître. Ce repérage est relié à l'ordre dans la file numérique des écritures chiffrées, ensuite cet ordre permet de comparer deux nombres désignés par leur écriture chiffrée : « une bonne maîtrise de cette suite offre un premier moyen de comparaison des nombres », p. XIV du manuel de l'enseignant. Ensuite est prescrite la mémorisation de la comptine numérique en insistant sur les mots vingt et trente qui sont mis en parallèle avec les régularités de l'écriture chiffrée : « Souligner la double régularité des nombres de 20 à 39 : celle des écritures chiffrées (valable également pour les nombres plus petits), celles de leur désignation orale : il suffit de se souvenir des mots vingt et trente (ce qui n'est pas vrai pour les nombres plus petits que vingt) » p. 71 du manuel du maître. Comme pour le champ numérique précédent, il s'agit de lire les écritures chiffrées (prescription écrite p. XIV du manuel de l'enseignant), mais aussi d'écrire les désignations orales dans des dictées de nombres (voir par exemple la séance 5 de l'unité 4). Enfin sont prescrites des habiletés de comptage sur des collections jusqu'à 39 objets, basées sur l'utilisation des doigts (des deux mains) en parallèle de l'emploi des mots dix, vingt, trente. « Les premiers groupements sont

réalisés à cette occasion, ce qui prépare la prise de conscience du rôle joué par le nombre dix et le principe de groupements par dix caractéristique de notre système numérique », p. XIV du livre du maître. Un extrait du rapport de synthèse de Barouillet et Camos du ministère de la recherche (2002) qui est donné p. XIV du manuel de l'enseignant argumente la nécessité de ce travail de groupements en lien avec la numération parlée : « *La faible transparence de la base dix dans les langues occidentales influe négativement sur l'apprentissage de la numération écrite* ».

Finalement un travail d'association signifiant/signifiant entre les écritures littérales des nombres de un à vingt et leur désignation orale est prescrit : le nombre qui se dit « deux » s'écrit « d e u x » avec les lettres de l'alphabet¹⁹⁵.

Période 3 : unités de 7 à 9, champ numérique de 1 (un) à 59 (cinquante-neuf)¹⁹⁶.

Dans un premier temps est prescrit un travail identique à celui de la période précédente dans le champ numérique des nombres jusqu'à 59 (cinquante-neuf) : le repérage de la régularité d'apparition des chiffres dans la file numérique des écritures chiffrées « *Le fait que le chiffre « de gauche » (non encore reconnu comme celui des dizaines) ne change que lorsque celui « de droite » (non encore reconnu comme celui des unités) passe de 9 à 0.* » est repris en parallèle de l'appui sur les mots vingt, trente (son proche de trois), quarante (son proche de quatre), cinquante (son proche de cinq) dans la comptine numérique orale.

Ensuite, dans la présentation du manuel du maître, cette période 3 est indiquée comme étant celle dans laquelle une écriture chiffrée connue (donc de 1 à 59) telle que 35 a son premier chiffre 3 qui va être relié à un comptage en 3 groupements de dix unités et son deuxième chiffre 5 à 5 unités isolées : l'écriture 35 quant à elle « *évoque le nombre total d'unités* », p. XV du manuel du maître. L'introduction se fait dans le cadre des cardinaux de collections discrètes et il est indiqué (à l'enseignant) qu'ultérieurement l'unité de mesure peut être celle d'autres grandeurs, mais ceci n'est pas présent dans la séquence. Les quatre séances « grand Ziglotron » constituent « *un problème nécessitant d'associer désignation chiffrée et groupement par dix* », p. XV du manuel du maître. Enfin le passage de 49 à 50 (ajout d'une unité) est mis en parallèle avec l'organisation en dizaines et unités correspondante : « *[...] l'ajout de 1 unité à 4 groupements de dix unités et 9 unités, ce qui entraîne la possibilité de réaliser un nouveau groupement de dix ; cela permet de renforcer le lien entre l'organisation de la suite écrite des nombres et les principes de la numération décimale* », p. XV du livre du maître. Finalement, un parallèle est fait avec le comptage de dix en dix.

La séquence « grand Ziglotron » proposée aux élèves dans l'unité 8 via les prescriptions dans le livre du maître et le fichier élève est la séquence clé qui permet de relier l'écriture chiffrée au signifiant autre que par la désignation parlée. Les prescriptions concernant l'introduction du manuel du maître indiquent simplement que cette dernière consiste en « *un problème nécessitant d'associer désignation chiffrée et groupement par dix* », à partir duquel « *l'essentiel du travail consiste ensuite à assurer cette capacité à associer un nombre comme 47 avec la quantité qu'il évoque réalisée sous forme de 4 groupements de dix objets et 7 objets isolés* », p. XV du manuel du maître. Une limite est donnée à ce travail puisque à la suite de cet extrait est écrit que « *Ce n'est qu'au CE1 que sera envisagé le difficile travail sur les échanges, la dizaine n'étant alors pas nécessairement évoquée par un groupement mais par un objet qui « vaut dix »* ». Nous étudions alors la séquence « grand Ziglotron » pour savoir comment est prescrite l'association écriture chiffrée et « *la quantité qu'il évoque sous*

¹⁹⁵ Ce travail permet de prolonger celui associant désignation écrite/désignation parlée dans un rapport signifiant/signifiant, grâce en particulier au fait que sur le fichier élève les pages sont numérotées à l'aide simultanément de l'écriture chiffrée et de l'écriture littérale : par exemple « vingt et un . 21 ».

¹⁹⁶ Certaines écritures chiffrées au-delà de 59 sont aussi abordées, mais la comptine numérique orale ne l'est pas au delà de cinquante-neuf.

forme de groupements de dix objets et d'objets isolés ». Des détails de cette étude sont donnés en annexe. Nous rapportons ici les conclusions. Dans le contexte des séances « Ziglotron », le lien entre la désignation parlée telle que « quarante-deux » et celle du type « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est tout d'abord prescrit. La collection est présente puis ne l'est plus. Par suite, le lien entre l'écriture chiffrée telle que 42 et celle du type « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est établi grâce aux deux liens déjà établis entre d'une part l'écriture chiffrée (42) et la désignation parlée (« quarante-deux ») et d'autre part la désignation parlée (« quarante-deux ») et celle du type « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons ».

Dans la suite (unité 9) l'obtention rapide de l'écriture chiffrée du cardinal d'une (grande) collection est mise en relation avec l'organisation de la collection selon des paquets de dix. Deux stratégies sont valorisées : le dénombrement des paquets de dix et le comptage de dix en dix pour obtenir la désignation orale : « *Faire des groupements de dix objets permet d'obtenir facilement l'écriture du nombre : soit directement en s'appuyant sur la valeur des chiffres en fonction de leur position : s'il y a 6 groupements de dix objets et 3 objets isolés, le nombre d'objets s'écrit directement 63 ; soit par comptage de dix en dix, ce qui donne le nom du nombre, il faut ensuite le traduire en chiffre : si on a réalisé 6 groupements de dix objets et qu'il reste 3 objets isolés, on compte, en pointant les groupements puis les objets, dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-et-un, soixante-deux, soixante-trois.* », p. 185 du livre du maître. Par ailleurs est prescrit un lien entre les repérages initiaux des régularités de la suite chiffrée via un compteur chiffré¹⁹⁷ (qui permet d'obtenir l'écriture chiffrée de manière mécanique en faisant tourner des roues) et un dénombrement de collection un à un : un ajout de un à une collection fait tourner la roue des unités, quand arrive neuf, le passage à zéro sur les unités s'accompagne du passage à une unité de plus pour la deuxième roue, celle des dizaines.

Période 4 : unité de 10 à 12, champ numérique de un à cinquante-neuf pour les désignations orales, et de 1 à 99 pour les désignations écrites.

Dans la présentation du manuel du maître, p. XV, l'écriture chiffrée est travaillée dans des problèmes de comparaisons mettant en exergue la position des chiffres « *comprendre pourquoi pour comparer deux nombres de deux chiffres il faut d'abord s'intéresser au chiffre de gauche* ». Deux possibilités sont mises en parallèle. La plus ancienne consiste à se référer à la suite des écritures chiffrées (et non à la comptine numérique), « *37 est rencontré avant 54 lorsqu'on parcourt la suite des nombres depuis son début* », elle a été introduite avant les séances « grand Ziglotron ». Elle est basée sur un repérage des régularités dans la suite des écritures chiffrées, régularités qui sont mises en exergue grâce à un tableau et au compteur chiffré¹⁹⁸. Cette première possibilité est travaillée dans l'unité 10 (séances 4 et 6), l'unité 11 (séances 1, 2, 3). La deuxième possibilité envisagée par les auteurs est nouvelle. Elle consiste à traduire les écritures chiffrées en termes de « ... groupements de dix et ... » puis de se référer aux quantités ainsi désignées pour les comparer : « *37 objets c'est moins que 54 objets, puisque dans un cas il n'y a que 3 groupements de dix alors que dans l'autre il y en a 5* ». Son apprentissage est prescrit dans les séances 6 et 7 de l'unité 10, 2 et 4 de l'unité 11 et 5 de l'unité 12. Ces deux possibilités indiquées pour comparer deux écritures chiffrées dans la présentation du livre du maître sont l'enjeu des séances 1, 2 et 7 de l'unité 12 et indiquées dans la synthèse de cette même unité, p. 256 du guide du maître.

A noter en outre dans les séances 6 et 7 de l'unité 11, un travail sur l'association entre écriture chiffrée et décompositions additives : 67, 60+7, 10+10+10+10+10+10+7. Il est alors prescrit,

¹⁹⁷ Le compteur chiffré consiste en deux roues fonctionnant indépendamment sur les quelles sont inscrits les dix chiffres et qu'il s'agit de faire tourner pour afficher un nombre à deux chiffres.

¹⁹⁸ Le tableau présente les écritures chiffrées de sorte que les nombres ayant le même chiffre de droite sont dans une même colonne, le même chiffre de gauche dans une même rangée.

p. 233 du guide du maître, de faire le lien entre le nombre de dizaines lu dans la dernière écriture et le chiffre 6 de 60 et 67¹⁹⁹. Finalement dans le bilan de l'unité 11, est prescrit le lien entre une écriture de type 40+3 et la désignation orale « quarante-trois » : « *La décomposition du type 10+10+10+10+3 peut être facilement mise en relation avec l'écriture chiffrée 43 (il suffit de compter les 10). Celle du type 40+3 l'est également, mais, en plus, pour les nombres à partir de 20, elle rappelle comment se dit le nombre : quarante-trois.* ».

Période 5 : unités de 13 à 15, champ numérique de 1 à 99.

Dans la présentation du manuel du maître, est prescrit un réinvestissement des notions travaillées auparavant en ce qui concerne l'écriture chiffrée à travers l'addition posée : *Comme cela a été dit dans la partie « Nombres et numération », les connaissances acquises sur la valeur positionnelle des chiffres et la référence aux groupements par dix et aux unités permet aux élèves de commencer à comprendre le principe de la retenue dans l'addition posée. Insistons cependant sur le fait que cet apprentissage sera repris en CE1* », p. XXII du livre du maître.

Dans les séances effectivement proposées dans l'unité 13, nous relevons le même type de prescription que pour la période précédente dans le champ numérique des nombres de 60 à 79 : comptine orale de soixante à soixante-dix-neuf avec appui sur soixante (« mot-clé ») et association de différentes expressions (soixante-quinze, 60+15, 10+10+10+10+10+10+5, 75²⁰⁰). Il est mis en avant la difficulté particulière pour les nombres de soixante à soixante-dix-neuf de passer de la désignation parlée à l'écriture. Le « mot clé » soixante n'indique pas toujours une écriture chiffrée commençant par 6 : « *Il convient d'insister sur le fait que les nombres de 60 à 79 se disent avec le même mot clé (soixante), en utilisant ensuite tous les nombres de « un » à « dix-neuf » et que, donc, lorsqu'on entend soixante, on ne sait pas encore s'il faut écrire d'abord un « 6 » ou un « 7 » : c'est la suite qui permet de le dire* », p. 264 du livre du maître (voir aussi la synthèse de l'unité 13 p. 277 du livre du maître). Les mêmes remarques sont à faire en ce qui concerne l'unité 14 qui traite des nombres de 80 à 99. En particulier, nous relevons dans la synthèse p. 298 du livre du maître : « *Pour lire et écrire les nombres de 80 à 99, il n'y a qu'un seul mot clé (quatre-vingt) : il faut bien regarder si c'est 8 ou 9 (ou écouter ce qui suit quatre-vingt).* ». Dans cette unité est abordée de surcroît la technique de l'addition posée en colonne avec retenue des nombres désignés par leur écriture chiffrée, via des expressions du type « *3 groupes de 10 boutons affichés, 4 boutons isolés affichés* », p. 289 du livre du maître. C'est aussi l'occasion de (re)considérer le rôle du zéro quand la somme des unités donne une dizaine entière. Voici la synthèse écrite p. 299 du livre du maître : « *Pour calculer une addition, on peut utiliser le calcul réfléchi ou bien poser l'opération en colonnes. Dans ce dernier cas, il faut commencer par les unités. S'il y en a plus de dix au total, il faut fabriquer une dizaine supplémentaire (c'est la retenue). L'explication peut être appuyée sur du matériel de numération.* ».

2.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « Cap Maths »

Nous allons ici analyser les indicateurs relevés dans les prescriptions en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves par la progression proposée par le manuel. Le terme « favorisé » renvoie au fait que le manuel engage les élèves à faire les liens symbolisés par les flèches dans les schémas qui vont suivre, chaque élève pouvant ainsi les utiliser dans tel ou tel exercice : ceci a été explicité dans la méthodologie générale d'analyse des manuels, paragraphe 1.2 de ce chapitre et détaillé dans le chapitre 4.

¹⁹⁹ Rappelons qu'ici *a priori* les élèves ne connaissent pas (encore) la désignation parlée de 67.

²⁰⁰ La décomposition 60+15 est mise en relation avec la désignation orale soixante-quinze.

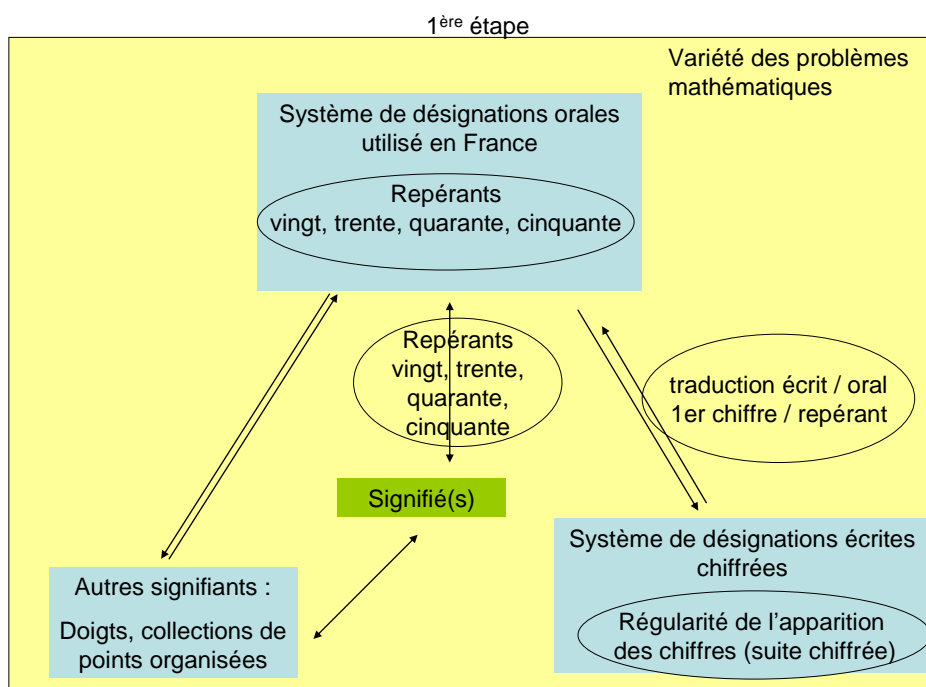
Grâce aux indicateurs, nous identifions trois étapes : tout d'abord des liens sont établis entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France pour les nombres inférieurs à 59 (cinquante-neuf), ensuite, dans le même champ numérique que précédemment, la désignation parlée du cardinal d'une collection est reliée à une désignation orale annexe de type « désignation des groupements » (« ... paquet(s) de dix boutons et ... boutons » contextualisé dans la séquence « grand Ziglotron ») et finalement le lien entre l'écriture chiffrée et la « désignation des groupements » est justifié via la désignation orale.

Nous allons préciser ces étapes en termes de cheminements cognitifs (pour les élèves) favorisés par le manuel.

De nombreux exercices sont prescrits afin de renforcer les différents liens, en particulier après les trois étapes. Ils sont pris en compte en considérant un contexte général de problèmes posés aux élèves. Ce contexte est signalé dans les schémas par le cadre jaune intitulé « variété des problèmes mathématiques ».

1^{ère} étape :

Des liens sont établis entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France pour les nombres inférieurs à 59 (cinquante-neuf). Lorsque les désignations chiffrées sont en jeu, les cheminements favorisés font intervenir systématiquement la numération parlée en France, utilisée avec des repérants vingt, trente, quarante, cinquante. Les nombres vingt, trente, quarante nous semblent en effet moins sollicités ici en tant qu'appuis additifs. En effet, au niveau des prescriptions du manuel, les problèmes posés en début d'année concernent majoritairement le dénombrement et sollicitent la mémorisation de la comptine orale (ou les repères sur la succession des chiffres que nous avons indiqués dans le paragraphe précédent) sans que la structure additive ne soit en jeu pour des collections importantes. Un comptage de dix en dix est initié, mais sans lien avec des problèmes arithmétiques, et de plus le code $10+10$ n'est pas encore utilisé.



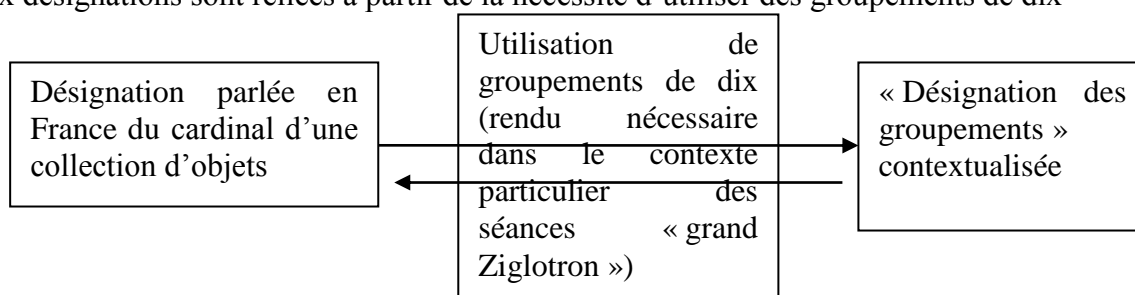
Les éléments mis en relief dans les prescriptions sont indiqués dans les ovales.

2^{ème} étape

Dans cette deuxième étape, dans le même champ numérique que précédemment (1 à 59), la désignation parlée du cardinal d'une collection est reliée à une désignation orale annexe « ... paquets de dix boutons et ... boutons » qui permet d'indiquer le cardinal d'une collection. Sa forme écrite traduit exactement sa forme orale (l'oral « trois paquets de dix boutons et sept » / l'écrit « 3 paquets de dix boutons et 7 »). Ce passage se fait essentiellement dans la séquence clé « grand Ziglotron » et se déroule en deux temps.

1^{er} temps

Les deux désignations sont reliées à partir de la nécessité d'utiliser des groupements de dix²⁰¹

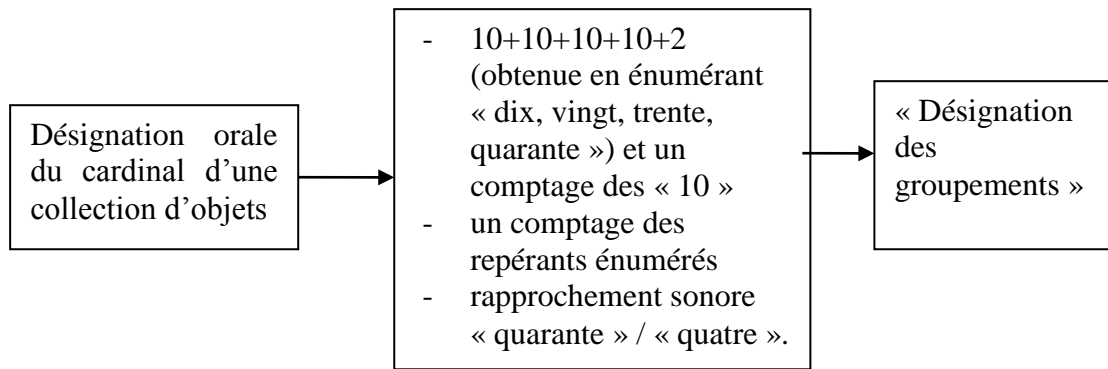


2^{ème} temps

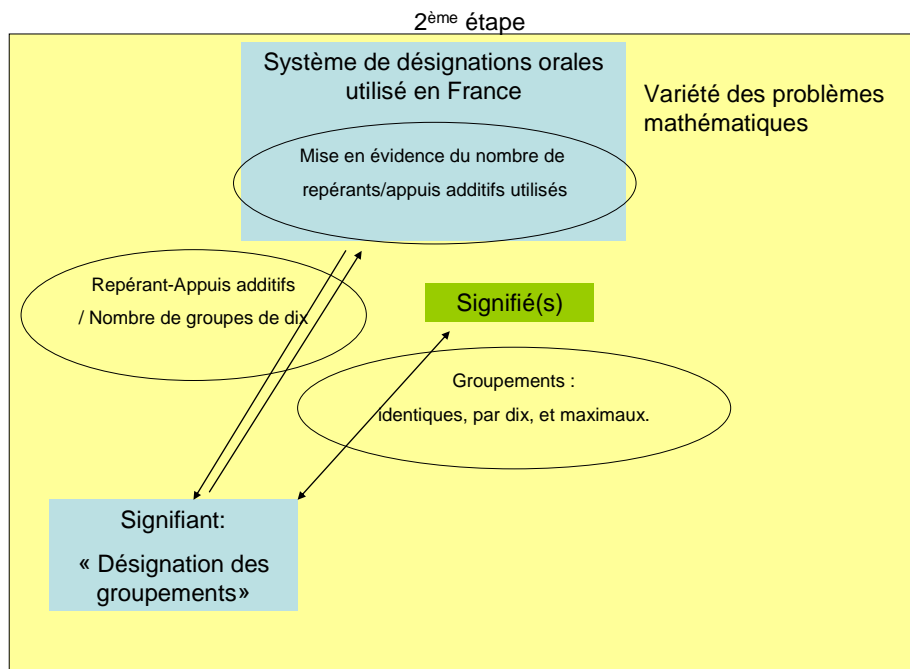
Les deux désignations sont reliées indépendamment de la présence de la collection (lien signifiant-signifié). Nous avons indiqué que la façon de réaliser ce lien n'était pas explicitement précisée. Afin de retrouver les attentes des auteurs, nous allons reconsidérer la place des prescriptions de la séquence « grand Ziglotron » dans l'ensemble des séances du manuel, en particulier par rapport aux stratégies attendues auparavant. Tout d'abord, il est attendu que l'obtention du signifié du type « ... paquets de dix boutons et ... boutons » via la désignation orale se fasse à l'aide de la récitation « dix, vingt, trente » qui accompagne un comptage de dix en dix. En effet la mise en commun prescrite dans la séance 3, unité 8, indique la stratégie suivante pour passer de l'écriture chiffrée 42 au signifié du type « ... paquets de dix boutons et ... boutons » : « décomposition du type : $10/10/10/10/2$ ou $10+10+10+10+2=42$, avec comptage de dix en dix pour vérifier ». Or si une telle décomposition (orale) a été précédemment en jeu dans l'année, elle ne concerne pas l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel : ici « 10 » doit donc être compris comme la transcription écrite du « dix » de la numération parlée et non dans son aspect écriture chiffrée de position. En outre cette mise en commun se situe dans une phase orale et elle a pour but d'indiquer à l'enseignant les stratégies possibles des élèves. Nous l'interprétons alors comme témoignant de l'attente d'une stratégie engageant les désignations parlées : décomposition du type dix/dix / dix / dix /deux ou dix + dix + dix + dix + dix + deux = quarante-deux, avec comptage de dix en dix pour vérifier, dix, vingt, trente, quarante. Ainsi, en considérant les séances passées, nous inférons que pour passer, par exemple, de dix, vingt, trente, quarante, à « quatre paquets de dix boutons deux boutons », sans utiliser le comptage de groupements sur une collection figurée ou manipulable, trois stratégies sont attendues²⁰² : soit une décomposition dix/ dix / dix / dix obtenue en énumérant « dix, vingt, trente, quarante » (traduite éventuellement par l'écriture additive $10+10+10+10$) suivie d'un comptage des « dix/10 », soit un comptage à l'aide des doigts du nombre de mots d'appuis énumérés (dix, vingt, trente, quarante) ou soit encore un rapprochement sonore entre « quarante » et « quatre ». On obtient donc :

²⁰¹ Dans Cap Maths, la maximalité n'est pas questionnée en elle-même, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences de contraintes matérielles.

²⁰² Une quatrième, utilisant directement l'écriture chiffrée est l'apprentissage visé.



En l'interprétant dans notre cadre théorique, nous obtenons le schéma suivant au niveau des cheminements cognitifs favorisés chez les élèves par le manuel :

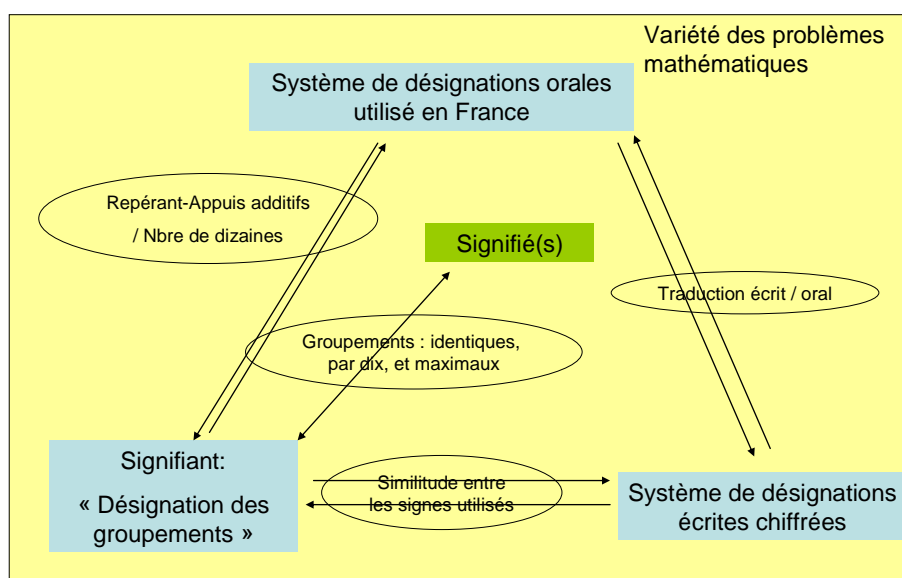


Nous n'avons pas indiqué ici le lien entre le système de désignation parlée en France et le signifié(s), car le processus qui permet de faire évoluer l'interprétation de la numération parlée vers une interprétation arithmétique multiplicative ne prend pas en compte initialement de manière explicite ce lien. Cependant, dans la séquence clé « grand Ziglotron », il nous semble probable que le cardinal de la collection initiale (figurée par des carrés) soit indiqué par les élèves (ou/et) l'enseignant par une désignation parlée en France.

3^{ème} étape

Le lien entre l'écriture chiffrée et la « désignation des groupements » est justifié via la désignation parlée en France qui a été reliée séparément à chacune d'entre elles. L'identification des nombres en jeu dans la désignation des groupements et des chiffres de l'écriture chiffrée, par exemple « 3 paquets de dix et 7 » / 37, apparaît comme un moyen de ne pas passer par la désignation parlée « trente-sept » pour résoudre le problème.

3^{ème} étape



Par la suite, certaines similitudes vont être questionnées (le zéro en particulier et l'ordre des chiffres) et le champ numérique étendu. Le signifiant contextualisé « désignation des groupements » peut progressivement disparaître du fait de l'emploi des mots « dizaine » (objet comptable) et « unité » et de leurs liens en jeu en particulier dans l'algorithme de l'addition posée en colonne : dix unités pour une dizaine, une dizaine pour dix unités. La encore, même si ce n'est pas indiqué par le manuel, dans la séquence clé « grand Ziglotron », il nous semble probable que le cardinal de la collection initiale (figurée par des carrés) soit indiqué par les élèves (ou/et) l'enseignant par une désignation parlée en France.

2.4 L'itinéraire cognitif proposé par « Cap Maths »

L'itinéraire proposé par ce manuel est bien un exemple d'itinéraire cognitif du premier type. Nous allons le préciser à l'aide des schémas issus du cadre théorique, schémas qui doivent se comprendre à l'aune de ce cadre. Les remarques à ce sujet ont été indiquées dans la méthodologie générale d'analyse des manuels, paragraphe 1.2 de ce chapitre et détaillées dans le chapitre 4. Nous allons ensuite le discuter.

Voici les codes que nous utilisons :

I interprétation ordinale stricte

I° interprétation ordinale avec repérant cinq

I' interprétation ordinale avec repérants dix, vingt, trente, etc.

(I')' interprétation arithmétique additive avec appuis dix, vingt, trente, etc.

I'' interprétation arithmétique multiplicative

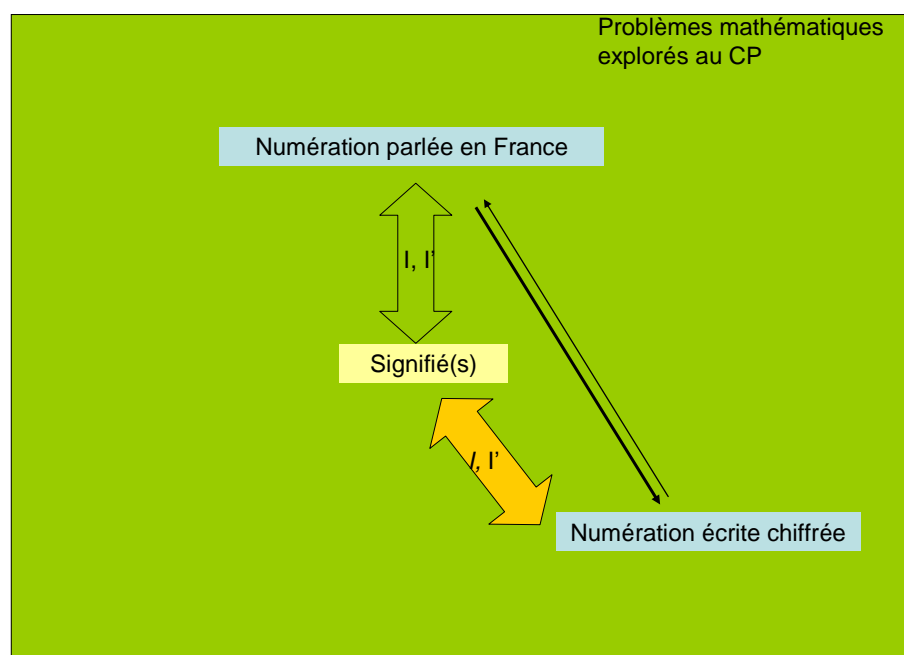
a. Les étapes de l'itinéraire

Dans une première étape, la numération orale est interprétée en tant que numération ordinale avec repérants et, à sa suite, la numération écrite chiffrée aussi. En effet, dans le champ numérique des nombres de 1 à 59 (un à cinquante-neuf), chaque désignation chiffrée est la traduction écrite d'une désignation parlée²⁰³. En outre, l'organisation des signes de chacune

²⁰³ Sur le fichier élève les pages sont numérotées à l'aide simultanément de l'écriture chiffrée et de l'écriture littérale : par exemple « vingt et un . 21 ».

des deux numérations est mise en parallèle. En ce qui concerne les désignations parlées, la comptine comporte des « mots clés », vingt, trente, quarante, cinquante, qui sont suivis des mots un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. En ce qui concerne les écritures chiffrées, la file numérique correspond à la comptine orale, et dans cette file l'organisation se fait comme suit : tout d'abord la suite des neuf premiers chiffres puis cette suite est reprise (en y insérant le 0) avec un 1 devant, formant ainsi les nombres de 10 à 19, puis un 2 est mis à la place du 1, puis un 3, puis un 4, puis un 5. L'apparition du 2 en tête d'un nombre écrit à deux chiffres est mise en parallèle avec l'apparition du mot vingt dans la comptine orale, celle du 3 avec celle du mot trente, celle du 4 avec celle du mot quarante, celle du 5 avec celle du mot cinquante. Plus précisément un nombre comme cinquante est écrit 50, le zéro étant une marque nécessaire alors pour faire la différence avec 5, et non un chiffre désignant un nombre (le nombre désigné par zéro n'a d'ailleurs pas été introduit). La suite chiffrée est ainsi vue comme une manière de traduire la comptine orale qui reprend donc essentiellement sa structure. Pour les nombre supérieurs à 20 (vingt) une interprétation de type ordinale avec repérants (vingt, trente, quarante, cinquante) est en jeu, pour ceux inférieurs à 20 c'est une interprétation strictement ordinale (le repérant dix n'est pas mis en avant).

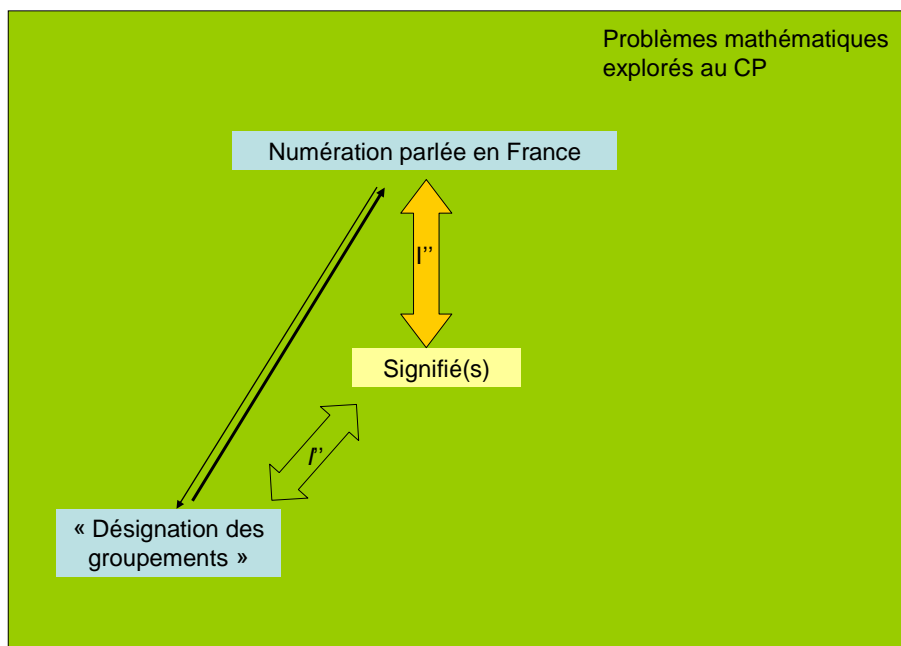
En résumé, les écritures chiffrées sont d'abord vues comme une traduction écrite des désignations orales. Cette association engage à les interpréter de manière ordinale avec repérants à partir de 20 (puisque c'est le cas des désignations orales), ce qui est renforcé par le fait de mettre en parallèle les régularités de la suite numérique des écritures chiffrées et la comptine orale. Nous obtenons le schéma suivant :



Rappelons que I' fait référence à une interprétation ordinale avec repérants (pour les nombres supérieurs à 20/vingt) et I strictement ordinale (pour les nombres inférieurs à 20/vingt). Pour la numération écrite chiffrée, l'interprétation I strictement ordinale a été mise en italique car elle nous semble moins sollicitée du fait de l'exploration des régularités de la suite chiffrée, y compris pour les nombres inférieurs à 20. La double flèche colorée indique que c'est elle qui a été élaborée (ou/et renforcée) à la fin de cette première étape.

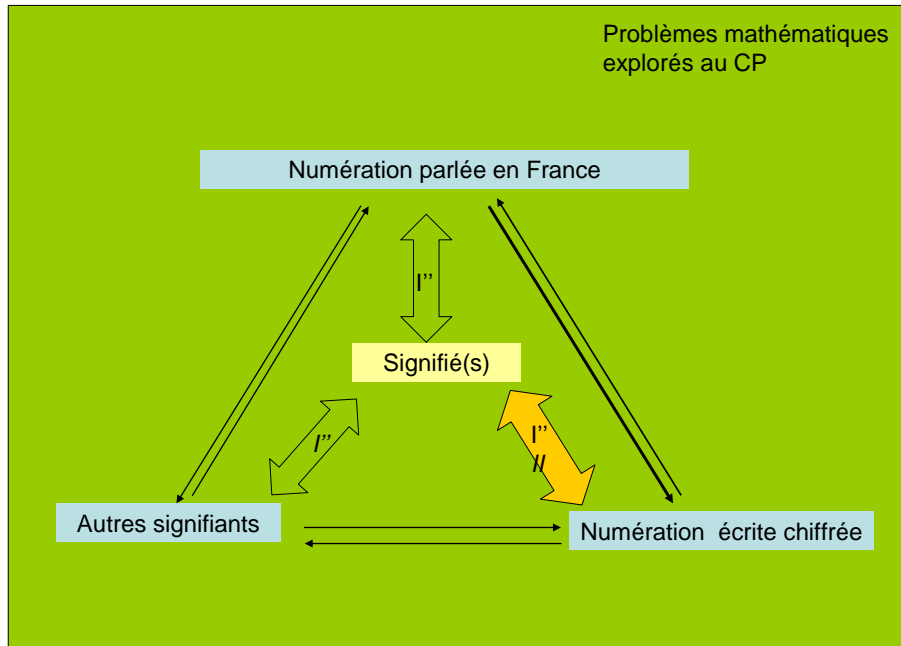
Dans une deuxième étape, toujours pour les nombres inférieurs à cinquante-neuf, un travail spécifique est prescrit entre les désignations parlées en France et des signifiants que nous identifions comme de type « désignation des groupements ». Nous l'analysons comme

permettant à la numération parlée en France de passer d'une interprétation ordinale avec repérants à une interprétation arithmétique multiplicative (dans un contexte particulier). Nous obtenons ainsi le schéma suivant :

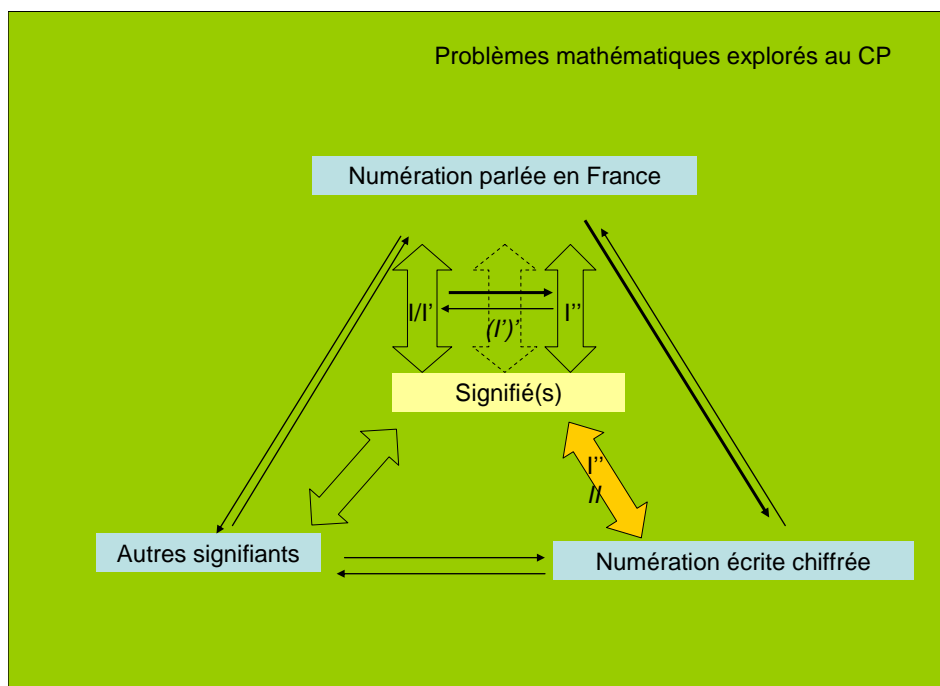


I'' fait référence à une interprétation arithmétique multiplicative de la numération. La double flèche colorée indique toujours que c'est elle qui est visée à la fin de cette deuxième étape. Dans ce schéma, pour l'interprétation des désignations des groupements, nous avons mis en italique I' car ces signifiants ne se constituent pas en système de numération. En outre leur contextualisation dans le cadre de la séquence « grand Ziglotron » entraîne une utilisation restreinte. Les mots « dizaine » et « unité » sont introduits ultérieurement.

Dans la troisième étape, les désignations parlées des nombres servent à justifier le lien entre la « désignation des groupements » et l'écriture chiffrée dans le cadre de la désignation du cardinal d'une même collection. Ceci est utilisé pour interpréter le système de numération chiffré en tant que numération arithmétique multiplicative, ceci spécifiquement pour les nombres inférieurs à 59. Pour les autres nombres, il est prescrit de reporter à l'année suivante l'enseignement principal des liens entre les deux numérations. Le manuel stipule en effet à propos de ceux-ci : « *L'enseignant lit les nombres de deux chiffres chaque fois qu'ils sont rencontrés, les élèves y étant bien entendu invités, s'ils le peuvent. Quelques activités plus spécifiques sont consacrées à cet apprentissage, mais il faut être conscient du fait que ces désignations orales ne peuvent être entièrement justifiées auprès des élèves. Il convient cependant d'attirer leur attention sur le fait que, lorsqu'on entend par exemple quarante, on peut écrire immédiatement un 4 ... alors que lorsqu'on entend soixante (ou quatre-vingt), on doit attendre pour savoir s'il faut écrire 6 ou 7 (ou 8 ou 9) ...* », p. XVI du guide de l'enseignant. Nous avons ainsi le schéma suivant, principalement pour les nombres inférieurs à 59 :



Dans ce schéma, nous avons aussi laissé les « autres signifiants » pour souligner leur rôle « relai » qui va être utilisé durablement, en particulier pour l'interprétation des nombres supérieurs à 59 dans la numération écrite chiffrée. La double flèche colorée indique encore que c'est elle qui a été élaborée à la fin de cette troisième étape. Les flèches en trait épais mettent en exergue le rôle essentiel de la numération parlée en France dans ce passage. Après la séquence clé « grand Ziglotron » et à la fin de celle-ci, un certain nombre de particularités du fonctionnement du système de numération chiffrée est spécifié : le rôle du zéro, l'ordre des chiffres, puis, dans les opérations, les échanges une dizaine pour dix unités, dix unités pour une dizaine. Ceci va dans le sens de l'interprétation de référence II du système de numération chiffrée. Nous obtenons le schéma de synthèse suivant :



Tous les aspects de l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée « II » ne sont pas pour autant prescrits. Ils ne vont intervenir que d'une manière complémentaire à une interprétation arithmétique multiplicative. C'est pourquoi nous l'indiquons en italique à côté de « I' » relatif à une numération arithmétique multiplicative. Nous avons en outre laissé ici aussi les « autres signifiants » pour souligner leur rôle « relai » durable²⁰⁴, sachant que dans cet itinéraire cognitif d'enseignement, c'est l'évolution de l'interprétation de la numération parlée en France qui a été le premier élément moteur de celle de la numération écrite chiffrée, essentiellement pour les nombres inférieurs à 59. De plus, nous avons aussi signalé par la double flèche (*I'*) l'existence de l'interprétation arithmétique additive. Celle-ci n'est pas explicitement en jeu dans l'itinéraire prescrit, mais elle est susceptible d'intervenir dans les emplois de la numération parlée en France, notamment dans les stratégies de calcul mental, c'est pourquoi cette double flèche est en pointillés.

Les flèches en trait épais mettent en relief le rôle de la numération parlée en France dans l'itinéraire proposé par le manuel (de type 1).

b. Discussion

Une utilisation ultérieure des écritures chiffrée qui peut inverser le rôle de des deux numérations dans l'itinéraire

La situation à la quelle mène cet itinéraire est plus complexe que ne laisse apparaître cette dernière schématisation synthétique. Ainsi, il est important de signaler que par la suite ce sont les écritures chiffrées qui sont susceptibles de « porter » le plus souvent une interprétation arithmétique multiplicative « I' » et/ou une interprétation de référence « II ». Par exemple, pour résoudre un problème d'addition posée en colonne avec des écritures chiffrées, c'est cette dernière interprétation qui est prescrite. Cependant du fait des liens établis entre les deux numérations, ces écritures chiffrées sont susceptibles d'être lues à l'aide de la numération parlée en France et par conséquent celle-ci est interprétée dans ce contexte précis comme numération arithmétique multiplicative « I' » voire de référence « II ». D'une certaine manière le rôle entre les deux numérations est renversé par rapport à leur position initiale prescrite par la progression proposée par le manuel. Mais, il est aussi possible que la numération écrite chiffrée soit interprétée en tant que numération arithmétique avec appuis additifs « (I)' », par exemple dans des problèmes de calcul mental donnés via l'écriture chiffrée ou encore dans les additions posées « en chiffre » effectuées lors de certaines stratégies de calcul mental.

Une interprétation des écritures chiffrée à moduler selon les nombres en jeu

Il en est aussi de même pour la possible interprétation ordinale I de la numération écrite chiffrée en ce qui concerne principalement les nombres inférieurs à 20, en particulier du fait que cette interprétation a précédé l'interprétation I'. Ce dernier point n'est pas repris dans le schéma de synthèse précédent afin de mettre en exergue l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel, ayant pour but de faire évoluer l'interprétation de la numération écrite chiffrée.

L'écart entre l'interprétation arithmétique multiplicative et celle de référence

Par ailleurs, dans cet itinéraire, des choix ont été faits sur les aspects de l'interprétation de l'écriture chiffrée enjeu d'apprentissage et sur les moments dans lesquels ils vont intervenir. Ainsi, toutes les interprétations se construisent au fur et à mesure et sont (au moins initialement) partielles dans le sens où les prescriptions ne font pas référence à toutes les propriétés indiquées dans la première partie de la thèse. Certaines de ces propriétés sont travaillées ultérieurement à l'introduction de telle ou telle interprétation, certaines ne sont pas

²⁰⁴ Et essentiel pour les nombres supérieurs à 59.

évoquées dans le manuel de CP « Cap maths », l'étude de certaines autres est renvoyée aux années futures. Ainsi, si la position des chiffres et le rôle du zéro²⁰⁵ sont abordés, il n'est pas prescrit explicitement de revenir sur la maximalité des groupements de dix dans l'organisation d'une collection, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences de contraintes matérielles dans la séquence clé. Ils ne sont pas re-questionnés après cette séquence, mais sont légitimés de fait, puisqu'ils ont permis une interprétation *a posteriori* pertinente (car fonctionnelle) de l'écriture chiffrée. L'objectivation par les élèves de cette légitimation n'est cependant pas prescrite par le manuel. En outre, la notion de base qui est propre à un type d'échelle de numération (ce qui se traduit sur une collection par un choix d'organisation utilisant les mêmes type de groupements et par un procédé spécifique de passage aux groupements d'ordre supérieur), le choix de dix pour base, la graphie des chiffres et enfin les différents choix possibles pour coder l'organisation d'une collection (par exemple XXXII ou 3X 2I, au lieu de 32), ne sont pas non plus prescrits.

3. Le manuel « J'apprends les maths avec Tchou »

Comme pour le manuel précédent, après avoir précisé certains points méthodologiques (§ 3.1) nous décrivons les prescriptions du manuel (§ 3.2) à l'aide des indicateurs dégagés précédemment puis les analysons en termes de cheminements cognitifs favorisés (chez les élèves) par le manuel (§ 3.3) afin de dégager des étapes dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel (§ 3.4). Pour faciliter la lecture, les séances clés sont détaillées en annexe.

3.1 Présentation générale et spécificités méthodologiques

Le manuel étudié est la version 2008 de « J'apprends les maths avec Tchou » aux éditions Hatier. Une autre version de « J'apprends les maths » existe, c'est « J'apprends les maths avec Picbille ». Dans cette dernière il n'est pas fait le choix de passer explicitement par une numération annexe « régulière », contrairement à la version du manuel « avec Tchou ». C'est cette dernière qui emprunte donc un itinéraire cognitif de type 2. C'est pourquoi nous n'étudions pas la version « avec Picbille ».

Un fichier de 159 pages est à la disposition de chaque élève, un guide du maître de 208 pages est à destination de l'enseignant et du matériel divers est fourni, détachable à la fin du fichier élève ou photocopiable à partir du guide du maître (support à des activités complémentaires). Par ailleurs du matériel est proposé à l'achat (par exemple une version collective des « boîtes de Tchou ») et certains supports (complémentaires) sont disponibles en ligne sur un site dédié au manuel. Nous allons choisir de ne pas considérer toutes ces options, du fait que les indications relevées dans le livre du maître et le fichier élève vont nous permettre de faire l'analyse visée.

La programmation des séances est divisée en cinq périodes qui se succèdent.

- La 1^{ère} période est signalée par des marges rouges sur le fichier élève, elle comporte 30 pages numérotées de 8 à 37, la séance p. 37 étant une séance bilan. Au total il y a 15 séances doubles, c'est-à-dire concernant une double page.

²⁰⁵ Essentiellement par le fait que ni la permutation des deux chiffres ni l'absence du zéro ne désignent le nombre initial (les différentes écritures chiffrées étant connues des élèves via la file numérique et mises en parallèle avec la comptine numérique, ce qui a permis de les différencier auparavant).

- La 2^{ème} période est signalée par des marges jaunes sur le fichier élève, elle comporte 36 doubles pages numérotées de 38 à 73, la séance p. 73 étant une séance bilan. Au total il y a 18 séances doubles.
- La 3^{ème} période est signalée par des marges vertes sur le fichier élève, elle comporte 26 pages numérotées de 74 à 99, la séance p. 99 étant une séance bilan. Au total il y a 11 séances doubles et une quadruple (pages numérotées de 80 à 83).
- La 4^{ème} période est signalée par des pages bleues sur le fichier élève, elle comporte 24 pages numérotées de 100 à 123, la séance p. 123 étant une séance bilan. Au total il y a 12 séances doubles.
- La 5^{ème} période est signalée par des marges violettes sur le fichier élève, elle comporte 28 pages numérotées de 124 à 152, la séance numérotée 152 étant une séance bilan. Au total il y a 14 séances doubles.

D'après le livre du maître, p. 47 il est prévu une séance par jour en moyenne. Un descriptif de chaque séance est donné dans le livre du maître avec des recommandations sur le déroulement, les productions attendues des élèves et les notions importantes à mettre en relief. En général ces prescriptions concernent deux séances sur une même double page. Ainsi, la plupart du temps, à cette description de chaque double séance, correspond une double page sur le fichier élève qui est support à une partie de la séance et sur laquelle les exercices proposés sont directement réalisables par les élèves. Les consignes en direction des élèves sont souvent indiquées sur le fichier (mais elles doivent aussi être stipulées par l'enseignant), d'autres viennent uniquement du livre du maître mais peuvent avoir un lien avec le fichier.

Nous pouvons prendre des informations dans le texte de présentation et dans le descriptif de chaque séance du livre du maître ainsi que dans le fichier élève. Cependant dans ce dernier, les textes reprennent les intentions des auteurs données dans le livre du maître. Seules les consignes sont reprises dans une formulation en direction des élèves, comme par exemple « *Calcule en imaginant les nombres comme Perrine ou comme Tchou* », p.125. La large présentation de 43 pages du livre du maître, p. 5 à 47, contient non seulement les prescriptions des auteurs sur les choix faits, en particulier sur la progression proposée sur la numération, mais en outre des explications sur ceux-ci, en particulier en référence à des articles de chercheurs, que les auteurs qualifient du terme générique de « *pédagogues* ». Ensuite, dans le descriptif de chaque séance (double), des rappels (en référence à la présentation) sont faits régulièrement sur les objectifs généraux concernant un ensemble de séances. En outre, le champ numérique y est stipulé et sont indiqués différents exercices types dont la fonction (qui est indiquée explicitement) permet de préciser la progression. De surcroît, les différentes « *représentations* » du nombre annoncées dans la présentation (que nous analyserons ultérieurement en tant que signifiants) sont indiquées au fur et à mesure.

En conséquence, d'un point de vue méthodologique, nous allons dans un premier temps relever les prescriptions sur l'enseignement de la numération chiffrée à partir des écrits de la présentation du livre du maître (p. 5 à 47) dans lesquels sont exposées les intentions des auteurs. Nous regardons au fur et à mesure de l'avancée dans l'année, le champ numérique considéré, les propriétés de chaque numération travaillées, les articulations entre les deux numérations et les séances clés marquant des étapes. Ces indicateurs sont ensuite précisés grâce aux prescriptions données sur les déroulements de chaque séance. Nous allons considérer en particulier les objectifs déclarés pour chaque séance et le champ numérique abordé précisément. En ce qui concerne les spécificités des exercices proposés, nous ne les considérons que lorsque les indicateurs relevés précédemment nous semblent insuffisants.

3.2 Prescriptions relevées

a. Recommandations générales des auteurs en direction des enseignants

Elles sont relevées dans la présentation au livre du maître et concernent la « démarche pédagogique ». Les citations qui suivent sont extraites de ces pages et indiquées en italique dans notre texte.

L'apprentissage se fait à l'aide de questions posées à l'élève : « *De façon générale, le fait qu'une connaissance apparaisse comme une « réponse à une question ou à un problème » aide à la compréhension et à l'appropriation de cette connaissance* », p. 5. Les problèmes posés suivent une progression : « *les 3 dimensions du progrès : la mentalisation des actions d'ajout, de retrait, de groupement ... ; la symbolisation de ces actions et la construction de catégories de situations ; l'acquisition de principes arithmétiques tels que la commutativité de l'addition.* », p. 5. L'un des objectifs est, dès le début de l'année, l'apprentissage du calcul mental, ce qui concerne donc aussi la numération, puisque c'est la numération parlée en France qui va être sollicitée dans le calcul mental. Il s'agit alors pour les auteurs de « dépasser » le comptage : « *Ce n'est pas à force de compter que les enfants apprennent à calculer. Certains enfants peuvent s'enfermer très longtemps dans le comptage un à un. L'apprentissage du comptage est incontournable mais il ne suffit pas. [...] Nous avons choisi un autre mode d'apprentissage où l'enfant apprend d'abord à représenter les quantités à l'aide des repères 5 et 10. Il utilise ensuite des stratégies de « calcul réfléchi » telles que « le passage de la dizaine » ($9+7=9+1+6$) et le « retour au cinq » ($8+5=5+3+5$), en réalisant d'abord les actions correspondantes avec des collections organisées (c'est le calcul sur des objets), puis en simulant mentalement ces mêmes actions.* », p. 22. Mis à part le calcul mental, la notion de groupement, principalement de 2, 5 et 10, est aussi transversale, puisqu'elle va concerner une approche de situations multiplicatives et une aide à prendre les groupes de dix comme unité de comptage : « *Ces choix permettent d'enseigner des connaissances générales sans pour autant introduire le symbolisme arithmétique de façon trop précoce.* », puis en référence aux problèmes concernant les groupes de deux, comptage des groupes et des unités restantes, nous relevons : « *Or, pour comprendre un nombre comme 40, il faut également coordonner deux dénombrements : celui des 4 groupes de dix et celui des quarante « unités simples ». La situation est en tout point similaire à la précédente, sauf que le groupe de dix a remplacé la paire. Pour comprendre 47, il faut de plus gérer l'ajout mental de 7 unités « isolées » (parce que non groupées par 10) ». Il n'est pas raisonnable de penser qu'il serait plus facile de gérer les groupes de 10 que les groupes de 2 ou 5. En revanche, il est tout à fait raisonnable de penser qu'un travail sur les groupes de 2 et 5 aide à comprendre le groupement par 10, c'est-à-dire ... la numération décimale* ».

b. Prescriptions en ce qui concerne la numération

Les p. 29 à 40 de la présentation du livre du maître sont consacrées à la progression proposée sur la numération. Les citations qui suivent sont extraites de ces pages et indiquées en italique dans notre texte.

La numération y est définie comme « *le moyen inventé par l'humanité pour pouvoir désigner verbalement, tant à l'oral qu'à l'écrit, n'importe quel nombre, aussi grand soit-il.* ». Il y est différencié une numération constituant « *une suite de mots connue par cœur (comme c'est le cas avec les lettres de l'alphabet)* » des « *numérations modernes* » qui, elles, utilisent « *deux grands principes : un principe de « changement d'unité de compte » (quand une collection est nombreuse, ça va plus vite de compter des mille ou des cents que de compter des unités simples) et un principe d'écriture que nous examinerons dans un second temps* ». Ce principe de « *changement d'unité de compte* » est précisé : « *C'est ainsi que le problème de la numération est essentiellement un problème de changement d'unités : pour former une*

collection de 32 objets, par exemple, on peut soit les compter 1 à 1, soit encore prendre le « dix » comme « grande unité » du comptage et dire « un groupe de dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix, 30 et encore deux, c'est 32 ». Aider les enfants en numération, c'est avant tout leur apprendre qu'on peut « résumer » un comptage de 1 en 1 par un **comptage des groupes de dix**. Le « changement d'unité de compte » est mis en parallèle avec la numération parlée dans d'autres langues : « Or dans certaines langues comme le coréen, le chinois ou le japonais, on a le bonheur de compter des « dix » avant de compter des « cents ». Ainsi, dans ces langues, 20 se dit « deux dix », 21 se dit « deux dix un » [...]. ». Par ailleurs, pour les auteurs du manuel, le qualificatif de numération décimale est attribué à une numération s'appuyant (conventionnellement) sur les groupes de dix, « [...] comprendre le groupement par 10, c'est-à-dire ... la numération décimale » : cela concerne alors la numération parlée en France (qualifiée de « comme nous »), la numération écrite chiffrée usuelle et une numération « régulière » « à l'asiatique », un, deux, ..., neuf, dix, dix un, dix deux, ..., dix neuf, deux dix, deux dix un, qui sont les nombres dits « comme Tchou ». Deux formes de comptages sont considérés : de dix en dix qui « utilise les mots « vingt », trente » ... », et le comptage des groupes de dix « un groupe de dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix ». Il est prescrit de les utiliser l'un et l'autre puisque « Comme le comptage de dix en dix privilégie la prise en compte des unités simples et celui des groupes de dix celui de la dizaine comme « grande unité », les deux formes de comptage s'avèrent complémentaires d'un point de vue pédagogique [...] ». Au comptage de dix en dix est associé la représentation « comme Perrine » (les dix unités sont encore visibles dans les groupes de dix points) et à celui des dizaines la représentation « comme Tchou » (avec les « grandes boîtes de Tchou » fermées, les dix unités que comporte une grande boîte ne sont plus visibles).

L'enseignement de la numération est prescrit en trois phases que nous allons décrire à l'aide de ce que les auteurs ont écrit p. 32, 33 et 34 du livre du maître.

La première phase consiste tout d'abord en l'apprentissage des mots d'une numération « régulière »²⁰⁶ qui est à percevoir comme une autre façon que « comme nous » (en référence à la numération parlée en France) de dire les nombres. Les écritures chiffrées sont mises en correspondance avec cette numération « régulière », l'association étant ici « d'ordre grapho-phonologique²⁰⁷ et non d'ordre conceptuel : il est normal qu'à ce moment de la progression les élèves ne sachent pas que « 4 dix et 2, c'est 4 fois 10 et encore 2 », ni que 42 est égal à cette même décomposition ». Cette première phase se déroule entre les séances p. 26 et 37 (fin de la première période). La deuxième phase, durant la période 2, a pour but de mettre en correspondance les nombres « comme nous » et les écritures chiffrées, l'association étant encore ici « d'ordre grapho-phonologique et non d'ordre conceptuel ». Cette association concerne les nombres commençant par dix, vingt, trente et quarante, donc supérieurs à dix-sept et strictement inférieurs à cinquante : « Les élèves apprennent d'abord à écrire les nombres dont l'oralisation « comme nous » commence par dix (dix-huit par exemple), par vingt (vingt-quatre), par trente (trente-deux), par quarante (quarante-cinq). Il s'agit d'apprendre que, quand l'oralisation d'un nombre « comme nous » commence par dix, son écriture commence par « 1 », quand elle commence par « vingt », son écriture commence par « 2 », etc. ». Le premier temps de la phase suivante commence à la séance quadruple 71-72-

²⁰⁶ C'est la numération orale « régulière » ou encore « comme Tchou » qui a été signalée ci-avant. Les nombres sont désignés de la manière suivante : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, dix et un, dix et deux, ..., dix et neuf, deux dix, deux dix et un, deux dix et deux, ..., deux dix et neuf, trois dix, trois dix et un, etc. jusqu'à neuf dix et neuf.

²⁰⁷ Ainsi « grapho-phonologique » désigne, comme son nom l'indique, des liens formels basés sur les chiffres et les sons : par exemple pour 34 et trente-quatre, le 3 (trois) peut être relié au son « tr » de trente, le 4 (quatre) étant le deuxième mot entendu de trente-quatre. D'autres exemples sont donnés ultérieurement.

73-74 qui débute la période 3, « puis de manière systématique à la page 80 folio élève, une évolution majeure se produit : l'enseignant favorise l'interprétation des nombres comme Tchou en termes de changement d'unité de compte. Les élèves qui ne l'auraient pas découvert par eux-mêmes apprennent que « 4 dix et 2 » unités, lorsqu'on s'exprime comme Tchou, peuvent être organisées en 4 groupes de dix alors que 2 unités restent isolées ». De ce fait, les auteurs indiquent que l'association entre l'écriture chiffrée et les nombres « comme Tchou » « change de nature : elle devient conceptuelle [...] ». Le deuxième temps de cette dernière phase consiste à changer la nature de l'association entre l'écriture chiffrée et les nombres « comme nous » : « grâce à l'écriture 42, qui est commune aux « nombres comme nous » et à « ceux comme Tchou », grâce au comptage « comme nous » de collections organisées en « dix » et « uns », les élèves transfèrent aux « nombres comme nous » ce qu'ils viennent de découvrir concernant les « nombres comme Tchou. [...] Précisons comment l'écriture commune favorise ce transfert. A partir de « quarante-deux », les élèves savent produire l'écriture 42, ils savent également lire cette écriture « comme Tchou » : « 4 dix et 2 ». Comme à ce moment cette façon de dire les nombres « comme Tchou » a été interprétée par l'élève (4 dix et 2, c'est 4 fois dix et encore 2), la désignation orale de départ, « quarante-deux » donne elle-même accès, via l'écriture 42, au modèle conceptuel de ce nombre : « quarante-deux, c'est 4 fois dix et encore 2 ». ». En ce qui concerne les nombres dont « les désignations orales sont irrégulières », c'est-à-dire pour les auteurs du manuel les nombres de onze à seize et de soixante-dix à quatre-vingt-dix-neuf, il est précisé : « Pour écrire ces nombres, la question qu'il faut se poser est la suivante : « C'est combien de dix et combien de uns ? ». La première partie de la question donne le chiffre des dizaines, et la seconde le chiffre des unités. Avoir répondu à cette question, c'est disposer de l'écriture chiffrée. Or dans le cadre de la progression Tchou, cette interrogation revient à se demander : « Comment se dit ce nombre comme Tchou ? ». ».

Ces prescriptions donnent donc les indications sur les orientations de l'enseignement de la numération préconisé par le manuel, indications qui sont globales, car par exemple le champ numérique spécifique n'est pas toujours détaillé. Pour chaque période, nous allons alors les mettre en parallèle avec les précisions apportées dans les déroulements des séances proposées au fur et à mesure.

Nous allons tout d'abord décrire deux éléments importants qui ponctuent la progression : les « représentations » utilisées et les exercices types dont nous donnons la fonction indiquée par les auteurs. Ensuite nous allons considérer les séances au fur et à mesure de leur apparition dans l'année.

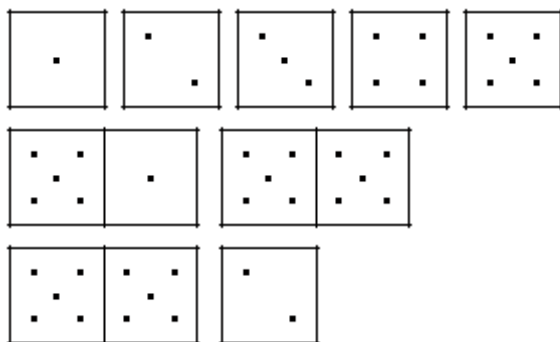
Pour les « représentations »²⁰⁸, nous indiquons entre parenthèses la page où elles sont décrites dans le livre du maître puis le numéro de la séance au cours de laquelle elles interviennent la première fois.

- Les « mots-nombres » (p. 52 ; séance p. 10), sont les noms des nombres dans la numération parlée en France, cette numération est qualifiée de numération « comme nous ». Exemples : cinq, seize, vingt-trois.
- Les écritures chiffrées. Exemples : 5, 16 et 23.
- Les configurations des doigts de la main (p. 52 ; séance p. 10), qui sont parfois accompagnées d'un dessin figurant des doigts levés sur une ou plusieurs mains. Ils sont levés successivement du pouce vers l'auriculaire pour désigner les nombres de un à cinq, et ainsi de suite pour les nombres supérieurs en utilisant une autre main. Exemples voir p. 10-11, fichier élève.

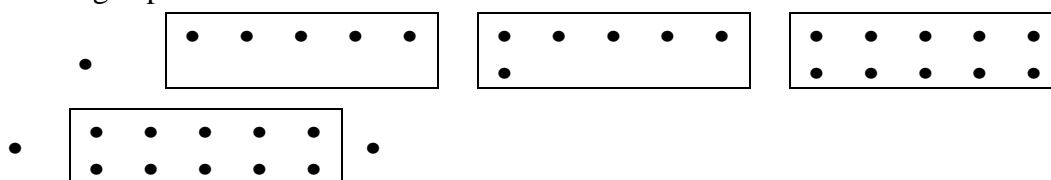
²⁰⁸ Nous utilisons le mot des auteurs. En décrivant ces désignations nous n'indiquons pas ici le rôle (potentiel) dans les itinéraires, ni les interprétations qui leur sont attachées au niveau des prescriptions. Ce sera un enjeu du deuxième temps de notre analyse.



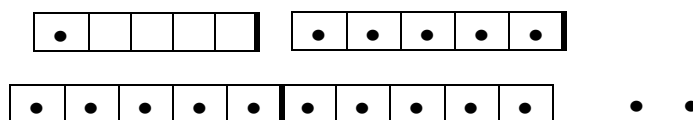
- Les « nombres comme Dédé » (p. 52 ; séance p. 10) sont des points disposés en constellation usuelle du dé, jusqu'à cinq, les constellations se juxtaposant pour les nombres au-delà. Exemples voir p. 10-11 et 45, fichier élève. Voici ce qui l'en est pour les nombres 1, 2, 3, 4, 5 sur la première ligne 6, 10 sur la deuxième puis 12.



- Les « nombres comme Perrine » (p. 52 ; séance p. 10) sont des points dont la configuration est autre que « comme Dédé » mais est « susceptible d'être reconnue sans passer par un comptage ». Pour des « grands » nombres ils sont alignés par cinq, jusqu'à une double rangée de cinq pour constituer un groupe de dix points (qui est ensuite isolé des autres points en l'encerclant d'un trait), le processus recommençant pour constituer successivement des groupes de dix points. Exemples voir p. 10-11 et 88, fichier élève. Voici ce qui l'en est pour les nombres 1, 5, 6, 10 sur la première ligne puis 12 sur la deuxième.



- Les « boîtes de Tchou » (p. 58 ; séance p. 16) apparaissent d'abord sous la forme d'une boîte de cinq emplacements alignés (avec couvercle refermable), puis d'une paire de boîtes accolées (en ligne), puis d'une succession de paires de boîtes (couvercles fermés). Exemples voir p. 16-17 et 88, fichier élève. Voici ce qui l'en est pour les nombres 1, et 5 sur la première ligne puis 12 sur la deuxième.



Une fois la boîte « fermée », ce dernier devient :



- Les sommes, du type 2+3, sont avant tout mises en relation avec des problèmes arithmétiques et donc utilisées avec le signe égal (« l'écriture $2+3 = \dots$ veut dire, dans ce cas qu'il y a déjà 2 billes dans la boîte, qu'on va y ajouter 3 autres billes », p. 60 du livre du maître), mais aussi en relation avec d'autres représentations. C'est le cas

quand il s'agit de compléter une boîte de cinq de Tchou comportant déjà deux jetons, séance p. 21, ou encore en parallèle de l'écriture chiffrée, des nombres « *comme Dédé* » et « *comme Perrine* » dans la « maison » du quatre et celle du cinq, séance p. 33, dans laquelle « *les élèves sont amenés à recenser exhaustivement les additions qui ont 4 et 5 pour résultat* », p. 74 du livre du maître.

-
- Les écritures littérales (p. 88 ; séance p. 46) apparaissent à la période 2. Exemples : cinq, seize, vingt-trois.
- La monnaie (p. 100 ; séance p. 58) est utilisée principalement comme support à des problèmes arithmétiques.
- Des expressions diverses contenant le mot « groupe(s) » (p. 116 ; séance p. 74). Exemples : « 1 groupe de dix et encore 6 » ou « 1 groupe de dix et 6 points isolés » ou « 1 groupe de dix et encore 6 uns » ; « 2 groupes de dix et encore 3 » ou « 2 groupes de dix et 3 points isolés » ou « 2 groupes de dix et encore 3 uns ».

En ce qui concerne les exercices « types », nous donnons entre parenthèses la page où ils sont décrits dans le livre du maître puis les numéros de page des séances dans lesquelles ils interviennent. Ils sont classés ici dans l'ordre où ils apparaissent dans la progression sur l'année.

- *Dessins de dés* (p. 54 ; séances pages 12, 14, 15) : lien « comme nous »/« comme Dédé » ou lien « doigts »/« comme Dédé ».
- *Furet sur les doigts* (p. 57 ; séances pages 15, 16, 18, 24, 40, 43, 44, 46, 62, 63, 66) : lien « doigts »/« comme nous » jusqu'à la séance p. 24 et ensuite lien « doigts »/« comme nous »/« comme Tchou ». Champ numérique : nombres inférieurs à 5 jusqu'à la séance p. 24, inférieurs à 10 jusqu'à la séance p. 43, puis inférieurs à 16 pour les autres.
- *File numérique* (p. 57 ; séances pages 15, 17, 19, 21, 25) : travail sur l'écriture de la suite des nombres écrits en chiffres.
- *Lecture en Furet* (p. 57 ; séances (15), (17)) : lien grapho-phonologique « comme nous »/« écriture chiffrée ».
- *Dictée de doigts* (p. 58 ; séances pages 16, 18, 22, 40) : lien « doigts »/« écriture chiffrée ». Champ numérique : nombres inférieurs à 5 jusqu'à la séance p. 22 puis nombres inférieurs à 10.
- *Cartons éclairs « comme Dédé »* (p. 59 ; séances pages 17, 48, 49, 54, 55, 58, 59, 71, 73, 76, 89, 90, 92) : le lien « comme Dédé »/« écriture chiffrée » utilise le groupement de dix représenté par un « double dé » à partir de la séance 48. Pour des nombres inférieurs à 10 jusqu'à la séance 49, inférieurs à 16 jusqu'à la séance 73, inférieurs à 20 jusqu'à la séance 92.
- *Dictée de nombres* (p. 58 ; séances pages 16, 18, 24, 77, 78, 79, 80, 98) : lien grapho-phonologique « comme nous »/« écriture chiffrée » est ajoutée une deuxième dictée à partir de la séance p. 77 utilisant « ... groupe(s) de dix et encore ... ».
- *Furet « comme nous »* (p. 68 ; séances pages 26-27, 28) : mémorisation de la comptine numérique parlée en France.
- *Furet « comme Tchou »* (p. 69 ; séances pages 26-27, 28) : mémorisation de la comptine numérique « régulière ».
- *Jeu du compteur* (p. 69 ; séances pages 26-27, 28,) : lien grapho-phonologique « comme Tchou »/« écriture chiffrée ».
- *Dictée et lecture comme Tchou* (p. 71 ; séances pages 29, 33, 36, 37) : lien grapho-phonologique « comme Tchou »/« écriture chiffrée ».
- *Dictée et lecture comme Nous* (p. 80 ; séances pages 38, 42, 43, 50, 60) : lien grapho-phonologique « comme Nous »/« écriture chiffrée ».

- *Furet de la comptine* (p. 113 ; séances pages 71, 72) : mémorisation de la correspondance « comme Nous »/« comme Tchou ». Jusqu'à 16 pour les séances 71 et 72.
- *Compteur des nombres « comme Perrine »* (p. 116 ; séances p. 73-74) : lien « écriture chiffrée »/« comme nous »/« comme Tchou » à l'aide d'organisation de collection en groupe(s) de dix (comme Perrine) et des termes « ... groupe(s) de dix et ... unités ».
- *Compteur des nombres sur les doigts* (p. 116 ; séances p. 73-74) : lien « écriture chiffrée »/ « doigts » permettant de relier un nombre dit « comme nous » comme trente-quatre à « 3 groupes de dix doigts et encore 4 doigts », « 34 doigts levés », « 30 doigts levés et encore 4 doigts ».
- *Furet de Perrine en reculant* (p. 118 ; séances pages 76, 77, 78) : correspondance « comme Nous »/« organisation des points comme Perrine »/« ...groupe(s) de dix et ... points isolés ».
- *File numérique de Tchou* (p. 122 ; séances p. 80-83, 88-89, 90-91) : correspondance « boîtes de Tchou »/« écriture chiffrée », les grandes boîtes de Tchou (deux boîtes de cinq emplacements accolées en ligne) sont mises en file pour obtenir une file numérique « vide » (les emplacements).
- *Furet de Tchou en reculant* (p. 124 ; séances pages 84, 86) : correspondance « comme Nous »/« organisation des points comme Perrine »/« ...groupe(s) de dix et ... points isolés »/« comme Tchou ».
- *Jeu de la planche comme Tchou* (p. 192 ; séances pages 84, 85, 88, 89, 90, 92, 94, 96) : correspondance « comme nous »/« écriture chiffrée »/« grandes boîtes de Tchou »/« ... groupe(s) de dix et ... uns »/« comme Tchou ».

PERIODE 1 (rouge) : séances p. 8 à 37

Toutes les « *représentations* » interviennent durant cette période. Cependant, les « boîtes de Tchou » sont principalement un support pour poser des problèmes arithmétiques (compléter une boîte par exemple) et uniquement dans le champ numérique des nombres inférieurs à cinq. C'est durant cette première période qu'est prescrite la première phase de la progression sur la numération, c'est-à-dire celle ayant pour but la correspondance « grapho-phonologique » entre la numération régulière « comme Tchou » et les écritures chiffrées. Cette phase ne débute qu'à la séance p. 26, donc dans un deuxième moment de la période. C'est pourquoi nous la découpons en deux moments.

1^{er} moment de la 1^{ère} période : les liens entre les différentes « *représentations* » et avec les collections d'objets, séances pages 8 à 24.

Il s'agit de « *constituer un système de traduction entre différentes représentations des cinq premiers nombres* », p. 52 du livre du maître, rubrique « *objectifs* ». Cet objectif est poursuivi durant ce premier moment (et même au-delà), mais ici ne commence pas encore la première phase sur la numération telle qu'elle est décrite dans la présentation du livre du maître. Les exercices « types » sont révélateurs de ces « traductions », mais il en existe aussi d'autres :

- lien représentation/collection d'objets, séance p. 13 (doigts, poissons à dessiner), mais aussi séance p. 10 (chaque signifiant peut être en cause) ou séance p. 20 (écriture chiffrée/ collection de fruits) dans un problème arithmétique,
- liens entre trois représentations simultanées, séance p. 17 : « boîtes »/« doigts »/« Comme Dédé »,
- liens non traités dans un des exercices « types » listés, séance p. 18 : « boîtes »/« écriture chiffrée » ;

Il existe aussi d'autres exercices traitant des liens déjà en jeu dans les exercices types comme dans la séance p. 19 qui aborde le lien « comme nous »/« écriture chiffrée ». A noter, séance p. 24 l'introduction du signe écrit 0 (prononcé zéro) pour désigner le fait de ne rien ajouter

dans un problème arithmétique : « On introduit aussi, à cette occasion²⁰⁹, le cas de l'ajout de 0, ce qui permet de traiter le zéro en tant que nombre, bien avant de l'interpréter dans le cadre de l'étude de la numération décimale de position », p. 66 du livre du maître.

Champs numériques :

- Écriture chiffrée/numération parlée en France : oral vers écrit pour les nombres jusqu'à **dix** (dictée de nombres), écrit vers oral pour les nombres jusqu'à **20** (lecture de nombres, séance p. 20),
- écriture chiffrée seule, observation de la logique des écritures pour les nombres jusqu'à **20**. « On explicite dès ce moment que l'écriture de ces nombres commence toujours par le chiffre « 1 », et qu'à droite on retrouve la suite « 1 », « 2 », « 3 » ... Cette régularité est seulement observée, les enfants n'ont pas encore les outils intellectuels pour la comprendre. Cet objectif sera visé à partir de la période jaune (page 44). », p. 62 du livre du maître à propos de la suite des écritures chiffrées des nombres de 11 à 19,
- numération parlée en France (« comme nous ») seule, vingt et au-delà : « L'usage de cette file offre aussi la possibilité de consolider la connaissance de la comptine numérique pour ceux qui la connaissent jusqu'à 20 et de l'étendre pour les autres », rubrique « objectifs », p. 56 du livre du maître.
- champ numérique des nombres **inférieurs à dix ou cinq** pour les autres « représentations ».

2^{ème} moment de la première période (première phase de la progression sur la numération) : l'apprentissage des mots d'une numération « régulière », séances p. 26 à 37.

« Dans la Présentation, on précise que la mise en relation de la comptine régulière, des écritures chiffrées et de la comptine traditionnelle se réalise en 3 phases. Ici commence la première phase. », p. 68 du livre du maître.

La comptine régulière « comme Tchou » est introduite en parallèle de la suite écrite chiffrée et de la comptine usuelle dans la séance p. 26-27. Dès cette séance est prescrit un travail séparé sur chacune des comptines orales (Furet « comme Tchou » et « comme nous ») et un lien entre les nombres « comme Tchou » et les écritures chiffrées (Jeu du compteur). En particulier, « On vise donc à ce que les élèves remarquent que, pour écrire tous les nombres qui commencent par « dix », on commence par écrire un « 1 », que pour écrire tous les nombres qui commencent par « deux dix », on commence par écrire un « 2 », etc.[...] tandis que pour le second chiffre, on retrouve toujours la suite 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... qui correspond à la partie de la locution qui suit « dix et », « deux dix et » ...[...]Pour le zéro, on pourra faire expliciter que, quand on le note, on n'entend rien d'autre après « dix », « deux dix », « trois dix ». », p. 69 du livre du maître. Ceci est repris durant ce premier temps de la première phase de la progression sur la numération, avec de surcroît un prolongement du travail entre les différentes « représentations » du premier moment de la première période, par exemple l'association nombres « comme Perrine » et écriture chiffrée, séance p. 29. Par ailleurs, il n'est pas prescrit de travailler la suite numérique des écritures chiffrées de manière autonome.

Champs numériques :

- Écriture chiffrée/ numération régulière « comme Tchou » : parlé vers écrit et vice-versa pour les nombres jusqu'à **au moins 41 (quatre dix et un)**, séances p. 26-27, 32, 36,
- écriture chiffrée/numération parlée en France « comme nous » : non prescrite explicitement mais de fait en jeu **pour les nombres inférieurs à dix**.

²⁰⁹ Il s'agit d'un problème arithmétique.

- écriture chiffrée seule : régularités jusqu'à **au moins 41** « *Après le nombre qui s'écrit avec un 1 et un 3, vient celui qui s'écrit avec un 1 et un 4* », p. 69 du livre du maître, séance p. 27.
- numération parlée en France (« comme nous ») seule, jusqu'à **au moins quarante et un** : « *Ce jeu vise à une bonne mémorisation de la comptine numérique traditionnelle. On peut aller jusqu'à « quarante », voire dépasser ce nombre* », à propos du jeu du « *Furet comme nous* », p. 68 du livre du maître, séance p. 26.
- Numération régulière « comme Tchou » seule, le champ numérique n'est pas toujours spécifié, il est d'au moins « deux dix et cinq » dans la séance p. 26-27, et du fait des exercices liés à la numération écrite chiffrée, il est attendu **au moins quatre dix et un**,
- champ numérique des nombres **inférieurs à dix ou cinq** pour les autres « représentations ».

PERIODE 2 (jaune) : séances p. 38 à 73

C'est durant cette période qu'est prescrite la deuxième phase de la progression sur la numération, c'est-à-dire celle ayant pour but la correspondance « grapho-phonologique » entre la numération usuelle parlée en France et les écritures chiffrées : « *Ici commence aussi la 2^{ème} phase de la progression en numération. Les élèves ont appris la comptine régulière et ont mis en relation cet algorithme verbal avec celui des écritures chiffrées. Au cours de cette séance, les élèves vont également mettre en relation l'oralisation des nombres dans la comptine traditionnelle avec les écritures chiffrées : pour écrire un nombre qui commence par « vingt », on écrit d'abord un « 2 » ; pour écrire un nombre qui commence par « trente », on écrit d'abord un « 3 », etc. Le problème des nombres entre « dix » et « seize » est spécifique du fait d'une relation grapho-phonologique plus opaque (il recevra un traitement spécifique à partir de la séquence page 44 du folio élève).* », p. 80 du livre du maître, à propos de la séance p. 38.

Cette période comporte donc une étude particulière des nombres de onze à seize. Le lien entre la numération parlée usuelle et les écritures chiffrées ne reste pas uniquement « grapho-phonologique » puisque entrent en jeu des groupements de dix, les « *grandes boîtes de Tchou* » et la numération « *comme Tchou* ». Ceci anticipe ainsi, pour ces nombres, la 3^{ème} phase de la progression sur la numération. Par ailleurs de nouvelles « *représentations* » interviennent, ainsi que la notion de groupement. C'est pourquoi nous allons indiquer un découpage tenant compte de ces ajouts.

Le lien « comme nous »/« écriture chiffrée » pour les nombres entre dix-sept (17) et cinquante-neuf (59), séances p. 38 à 60

Ce lien d'ordre « grapho-phonologique » est travaillé essentiellement à l'aide de l'exercice « *dictée et lecture comme nous* » : séances p. 38, 42, 43, 50, 60. La description de cet exercice page 80 du livre du maître précise la teneur de ce lien : « *On commence par faire lire « comme nous » tous les nombres de la file numérique à partir de 1 en observant qu'entre 11 et 16 les nombres ne commencent pas par dix (il n'y a donc pas de flèche), que les nombres signalés par une flèche jaune commencent par « vingt » et non par « deux dix », etc. Puis on fait lire « comme nous » dans l'ordre croissant des nombres entourés en gris. La dictée porte sur des nombres fléchés et donc plus grands que 16.* ».

Le lien « comme nous »/« comme Tchou »/écritures chiffrées pour les nombres de **onze (dix et un, 11) à dix-neuf (dix et neuf, 19)**, séances p. 44 à 73

Nous lisons p. 86 du livre du maître : « *L'apprentissage des nombres de onze à vingt est une étape cruciale du CP : les enfants qui n'apprennent pas les décompositions du type « douze, c'est dix et encore deux » risquent d'avoir des difficultés durables avec ces nombres et, au-delà, avec la compréhension de la numération décimale* ». Le lien entre les nombres « comme Tchou » et « comme nous » se fait via diverses « représentations » : « *doigts, groupes de 10 « comme Dédé », boîtes de Tchou, groupes de 10 « comme Perrine », billets de 10 euros, groupes de dix quelconques [...]* », p. 86 du livre du maître. En particulier dans la séance p.38, la grande boîte de Tchou comportant dix emplacements est introduite, c'est-à-dire celle composée de deux « petites » boîtes de Tchou (de cinq emplacements) à la file. Nous allons décrire plus précisément le processus qui concerne d'une part les nombres de onze à seize et d'autre part dix-sept, dix-huit et dix-neuf.

Pour les nombres de onze à seize, le processus commence par la séance clé p. 44 : « *Tchou n'est pas présent dans la séquence mais il est important de l'évoquer : s'il dit le nombre après dix, « dix et un », c'est parce que « c'est dix et encore un ». L'usage du mot encore vise à rendre plus explicite le fait que le mot « et » dans « dix et un » a une signification d'ajout. A partir de cette séance, on met en relation l'écriture chiffrée des nombres après 10 avec leur décomposition : si douze s'écrit « 12 » en chiffres, c'est parce que c'est « dix et encore deux » et parce que dans l'écriture « 10 » on a remplacé le 0 par un 2.* », p. 86 du livre du maître. Plus précisément, tout d'abord dans cette séance p. 44, un lien est fait entre « comme nous »/« comme Tchou » en utilisant les doigts **pour les nombres de onze à treize**. Puis l'écriture chiffrée de chacun des nombres de 11 à 13 est lue « *« comme nous » et est reliée aux doigts puis les élèves sont invités à observer l'écriture « 11 » sur leur fichier et à essayer de comprendre comment elle a été obtenue. Le chiffre « 1 » orange²¹⁰ est mis en relation avec le fait qu'il a fallu ajouter un doigt aux 10 précédents. On rappelle également que Tchou, lui, dirait : « dix et un ».* ». Le travail est repris pour les nombres 12 et 13. C'est ainsi que les écritures chiffrées des nombres dit « comme nous » onze, douze, treize sont explicités via les doigts, leur nom « comme Tchou » et le matériel Montessori²¹¹. La séance finit par un lien entre « doigts »/« comme Tchou »/« comme nous » pour les nombres de **onze à quinze**. Ces liens sont ensuite repris régulièrement **pour les nombre de onze à dix-neuf** jusqu'à la fin de la période, séance p. 73. A signaler l'emploi de groupements de dix « comme Dédé », c'est-à-dire deux constellations cinq du dé, qui interviennent de surcroît séances p. 52, 54, 55, 57, 58, 59. Finalement, une chanson sert à mémoriser l'association entre « comme nous » et « comme Tchou » séance p. 71.

Pour les nombres de dix-sept à dix-neuf, la même séquence est reprise. Ainsi, la séance de la p. 44 est prescrite p. 49, avec en outre le fait que « *les décompositions s'entendent* », p. 91 du livre du maître. Ensuite, c'est la séance p. 67 qui reprend le lien écriture chiffrée/« comme nous »/« comme Tchou »/« groupements de dix comme Dédé ».

Le lien « comme/nous »/« écriture chiffrée »/« écriture littérale » : séance p. 46 pour les nombres de un à cinq, séance p. 69 pour **les nombres jusqu'à dix**, séances p. 46 à 69 (séquence qui se poursuit en période 3, 4 et 5).

Les groupements, séances 52 à 70 :

Ces groupements sont tout d'abord introduits par des représentations « comme Dédé », c'est-à-dire deux constellations du dé de cinq points : « *Page 52, on introduit un nouveau mode de*

²¹⁰ Il s'agit de manier le matériel de numération Montessori, constitué d'un carton jaune sur lequel est inscrit « 10 » auquel on superpose sur le « 0 » un carton orange sur lequel est marqué un des chiffres de 1 à 9.

²¹¹ Cf. note ci-dessus.

représentation des nombres au-delà de 10 qui conduit les élèves à dessiner des collections organisées. Ce mode de représentation continue à privilégier la configuration de 5 du dé, mais il permet aussi d'utiliser le groupement de 10. En effet, le « double cinq » incite à ne plus recompter un à un les objets de la collection, mais à amorcer un éventuel comptage au dessus de 10 : « dix, onze, douze » (cette façon s'appelle un surcomptage au-dessus de 10) ou, mieux, à utiliser directement une décomposition : « quatorze, c'est dix et encore quatre ». Encore une fois, il est important d'évoquer la façon dont Tchou dit ces nombres car cela facilite l'accès aux décompositions. Les élèves progressent ainsi dans la structuration des nombres après 10 et avancent vers la compréhension de la numération de position. », p. 94 du livre du maître.

Dans les séances p. 64, 68 et 70, d'autres groupements vont être utilisés, surtout de 2, 3 et 5 : « L'enseignant s'exprime en disant tantôt 3 groupes de 2, tantôt 3 fois 2. La signification du mot « fois » est explicitée : « 4 fois 2, c'est 1 fois, 2 fois, 3 fois, 4 fois 2 », en pointant les groupes correspondants. [...]. Cette séquence prépare aussi la découverte de la numération à base 10. Dans « J'apprends les maths », en effet, l'expression « groupes de dix » est la plus souvent utilisée pour désigner les dizaines. Dans les séquences pages 96, 98 et 122 folio élèves, le groupement par 10 sera étudié en même temps que ceux par 2 et 5 et les élèves découvriront qu'il conduit à des calculs particulièrement simples : il est plus facile de calculer 5 fois 10 que 5 fois 2 ! », p. 106 du livre du maître. Ainsi les groupements vont non seulement être utilisés pour l'apprentissage de la numération décimale (en mettant en valeur le groupe de dix pour dire ou écrire un nombre via une désignation à l'aide de ces groupements) mais aussi pour amorcer conjointement un travail sur la multiplication.

Une nouvelle « représentation » : la monnaie, à partir de la séance p. 58

Elle est utilisée surtout en tant que support pour des exercices arithmétiques : « Comprendre la monnaie est un objectif à part entière et cela suffirait à justifier que les élèves soient confrontés assez tôt dans l'année à cet objet social. Mais la monnaie a aussi des caractéristiques qui en font un moyen pédagogique remarquable pour l'apprentissage du calcul. », p. 100 du livre du maître.

PERIODE 3 (verte) : séances p. 74 à 99

Le lien « comme nous »/« comme Tchou »/écritures chiffrées pour les nombres de vingt à au moins quarante, séance p. 74-75

La séance clé p. 74-75, concerne les liens autres que « grapho-phonologiques » entre les différentes désignations du nombre, écriture chiffrée, « comme nous » et « comme Tchou ». Dans cette séance se réalise la 3^{ème} phase de la progression annoncée par les auteurs du manuel pour les nombres de vingt à au moins quarante, à travers trois exercices successifs : « Compteur des nombres comme Perrine », « Compteur des nombres sur les doigts » et « Dictée de groupes de dix et de uns isolés ». Les objectifs généraux sont repris dans les prescriptions relatives aux séances en indiquant une manière pratique de les atteindre. Il s'agit de relier les désignations écrites, les désignations parlées usuelles et les désignations « comme Tchou » à de nouvelles désignations : « ... groupe de dix et ... points isolés » et « ... groupe de dix et ... encore ... » dans un contexte de désignation d'un nombre de points organisés « comme Perrine » puis d'un nombre de doigts (organisés de fait avec les mains). Ceci est inféré de la lecture des objectifs des séances p. 74-75 : « [...] pour former une collection de « 2 dix et 3 » objets, on peut compter 1 en 1 jusqu'à ce nombre, mais on peut aussi dénombrer des groupes de dix parce que « 2 dix et 3 », c'est « 2 groupes de dix et encore 3 uns ». [...] Dans un tel contexte, le fait que vingt-trois correspond à 2 groupes de dix et encore 3, par exemple, apparaît explicitement sur le dessin de la collection-témoin et cela conduit à réfléchir l'écriture, « 23 », de ce nombre : le premier chiffre dit combien il y a de groupes de dix, le second combien il y a de points « isolés ». Dans cette expression le mot « isolé »

signifie « qui n'est pas groupé par dix ». Cette troisième façon de dire 23, (2 groupes de dix et encore 3) permet aux élèves de réfléchir les deux précédentes (comme nous et comme Tchou). C'est seulement lors de cette séquence que certains élèves découvrent que « vingt », par exemple, signifie 2 groupes de dix. ». Nous allons résumer la description des trois exercices de cette séance clé p. 74-75 et leurs objectifs, les détails sont donnés en annexe.

En ce qui concerne le « *Compteur des nombres comme Perrine* » et le « *Compteur des nombres sur les doigts* », il est indiqué dans les objectifs : « *L'activité qui permet le mieux de comprendre le rôle du groupement par dix dans notre façon de penser, de dire et d'écrire les nombres est certainement celle du « compteur des nombres ». L'enseignant engendre une suite de collections-témoins de points en ajoutant successivement une nouvelle unité et les élèves doivent produire la suite des écritures et des désignations orales correspondantes.[...] Dans cette séquence, l'activité du compteur est menée successivement avec des groupes de dix de Perrine et avec des doigts.* ». Dans le « *Compteur des nombres comme Perrine* », les élèves doivent écrire le nombre de points qui est signalé par l'enseignant en termes de groupes de dix et points isolés, puis ils doivent l'exprimer « *comme Tchou* » et « *comme nous* ». Dans le « *Compteur des nombres sur les doigts* », les élèves doivent colorier sur des représentations de mains le nombre de doigts indiqué par une écriture chiffrée donnée à l'aide du matériel Montessori (ce nombre est aussi prononcé). Ils sont ensuite interrogés sur la correspondance entre les chiffres de l'écriture et leur production (association entre le nombre de groupes de dix doigts et les doigts qui restent et les chiffres). Le but étant « [...] *la coordination des différents points de vue. Trente-quatre, par exemple, c'est : 34 doigts levés ; 3 groupes de dix doigts levés et encore 4 doigts ; 30 doigts levés et encore 4 doigts.* ».

Le dernier exercice « *Dictée de groupes de dix et de « uns » isolés* » consiste à demander aux élèves de traduire par écrit une désignation de la forme « 3 groupes de dix et trois points isolés », puis de les interroger sur la façon dont ils se disent « *comme nous* » et « *comme Tchou* ».

Renforcement des liens précédents, pour les **nombre**s jusqu'à 69 (soixante-neuf), séances p.76 à 99

Ce renforcement se fait :

- en diversifiant les contextes et représentations : les grandes boîtes de Tchou (en file ou non) séance p. 80-83, les paquets de dix gâteaux, bonbons ou images, séance p. 94,
- en y associant des désignations employant le terme « *groupe de dix* » dans les exercices (y compris du type de ceux déjà vus). Par exemple séance p.76 dans l'exercice « *cartons éclairs comme Dédé* » ou séance p. 77 dans la « *dictée de nombres* ». Il peut aussi s'agir de complexifier certains exercices : « *Dans les consignes, il est précisé que ces activités s'effectuent en avançant sur la suite des nombres parce que dans les activités de haut de pages des séquences suivantes, les élèves l'effectueront en reculant* », p. 116 livre du maître à propos de la séance p. 74-75,
- en comparant les organisations de collections : non organisé/« *grandes boîtes de Tchou* », séance p. 85, « *comme Perrine* »/ « *grandes boîtes de Tchou* », séances p. 86, 87, 88. Ce qui conduit les élèves à former eux mêmes des groupements par dix pour dénombrer, séances p. 84 et 95, ou encore à les utiliser pour calculer, séance p. 96,
- et finalement en étendant le champ numérique abordé qui devient celui des nombres jusqu'à 69 (soixante-neuf) à la séance p. 88.

PERIODE 4 (bleue): séances p. 100 à 123.

Il s'agit d'un renforcement de ce qui a déjà été fait précédemment pour les **nombre**s inférieurs à 69 (soixante-neuf). Ainsi par exemple dans la séance p. 117, le lien écriture chiffrée/« *comme nous* » est ré-examiné grâce simultanément à des repères « *grapho-phonologiques* » et aux nombres « *comme Tchou* » (liés aux grandes boîtes de Tchou). A

noter qu'ici l'écriture littérale est introduite et participe à renforcer les liens : « Dès que la plupart des élèves adoptent le fonctionnement par analogie, on peut alors faire comparer les deux planches²¹² et faire dégager ce qu'elles ont en commun. [...] On les parcourt verticalement et on remarque les analogies orthographiques : **trente et trois**, **quarante et quatre**, **cinquante et cinq**, **soixante et six** : le suffixe « ante » dit que ce sont 3, 4, 5, 6 groupes de dix. », p. 157 du livre du maître.

En outre les écritures chiffrées sont sollicitées pour des calculs en ligne (17+35, séance p. 100), celles-ci devant se faire par des techniques de calcul mental : « Avant d'enseigner l'addition en colonnes de deux nombres à deux chiffres en fin d'année (pages 144-145 folios élèves), il est crucial d'enseigner le calcul mental de telles additions. En effet, à force d'entraînement, il serait possible d'amener certains élèves à savoir calculer 35+23 en colonnes alors qu'ils n'ont pas encore compris que le chiffre « 3 » de 35 n'a pas la même valeur que le chiffre « 3 » de 23. Ces élèves obtiendraient le même résultat indépendamment des quantités en jeu dans le calcul : certains n'apprendraient jamais à se représenter ces quantités. », p. 140 du livre du maître. Ces techniques sont précisées : « Le calcul mental de 32+23, lui, conduit à calculer d'abord « trente + vingt » ou « trente-deux + vingt » (il est naturel de commencer par ce qui influence le plus le résultat, c'est-à-dire les groupes de dix). », p. 140 du livre du maître. Les représentations sollicités sont précisées : « Durant cette période bleue, les élèves trouvent le résultat des additions en dessinant les représentations analogiques et organisées en groupe de 10 que sont les nombres « comme Perrine » ou les nombres « comme Tchou » et en formant les éventuels nouveaux groupes de 10 avec les points qu'ils ont dessinés. », p. 140 du livre du maître.

PERIODE 5 (violette) : séances p. 124 à 152.

Il s'agit d'un renforcement de ce qui a déjà été fait précédemment et d'une extension du champ numérique aux **nombre inférieurs à 100** (cent). Cette extension se fait en deux étapes. Tout d'abord elle concerne les nombres entre 70 et 79 dans la séance p. 126-127. Il est stipulé p. 166 du livre du maître que « pour savoir comment s'écrit un nombre qui commence par soixante », il faut d'abord s'interroger sur le nombre de groupe de dix qu'il contient : est-ce 6 ou 7 ». Pour trouver ce nombre, une méthode est indiquée : « Une façon de le découvrir consiste à mettre en relation les oralisations du type « soixante-treize » et le nombre de groupes de dix : « soixante et treize » c'est « soixante et treize », c'est-à-dire 7 groupes de dix (les 6 de soixante et le dix de treize) et 3 unités isolées », p. 166 du livre du maître. Celle-ci est reliée aux nombres « comme Tchou ».

Ensuite sont abordés les nombres entre 80 et 100 dans la séance p. 134-135, la méthode étant du même ordre que celle décrite ci-dessus puisqu'on essaye de tirer parti d'une signification de la désignation des nombres dans la numération parlée en France (quatre-vingts est reliés à 8 groupes de dix organisés en 4 groupes de 2 dix).

Ici encore l'écriture littérale participe à renforcer les liens.

Par ailleurs, les écritures chiffrées sont sollicitées pour des calculs en colonnes. Le rôle des différentes représentations est précisé : « Dans la période suivante (violette)²¹³, ils raisonnent directement sur les écritures chiffrées et n'utilisent les points que pour vérifier. », p. 140 du livre du maître.

²¹² Il s'agit de « la planche des nombres comme Tchou », p. 154 et 155 du fichier élève, sur laquelle sont représentés les nombres jusqu'à cent sous forme des grandes boîtes de Tchou associées à l'écriture chiffrée, et de « la planche des nombres écrits en lettres » sur laquelle sont représentés les nombres jusqu'à cent, l'écriture littérale étant associée à l'écriture chiffrée.

²¹³ C'est-à-dire la période 5 étudiée ici, puisque cet extrait est issu d'objectifs de séances de la période 4.

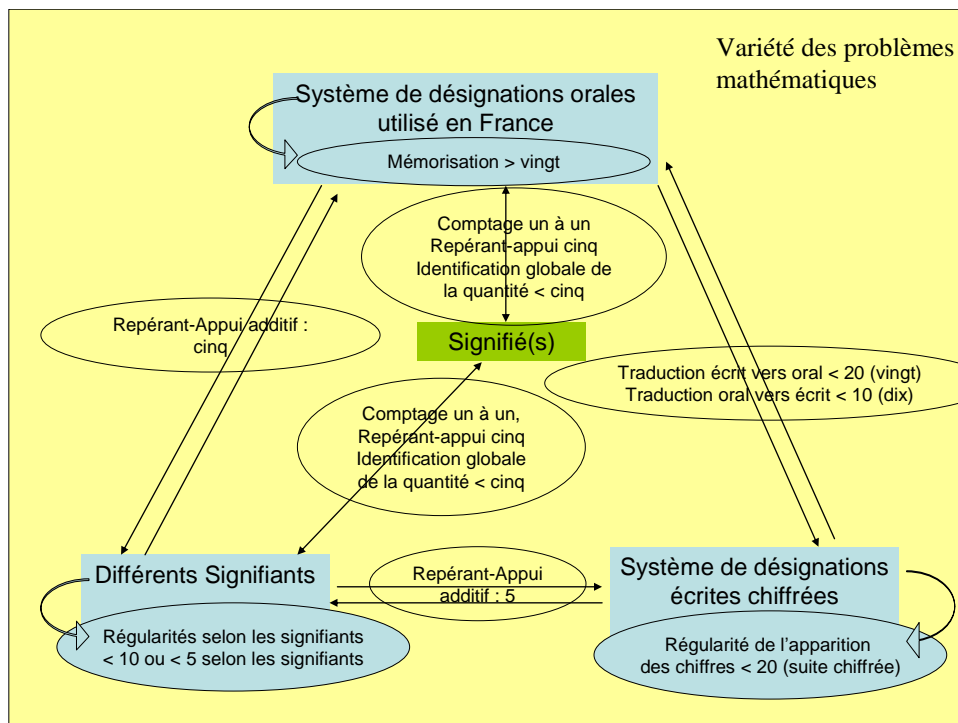
3.3 Les cheminements cognitifs favorisés par « J'apprends les Maths ».

Dans les indicateurs, nous retrouvons les trois phases annoncées par les auteurs des manuels dans la présentation : lier par des considérations « grapho-phonologiques » les nombres « comme Tchou » et l'écriture chiffrée, puis l'écriture chiffrée et les nombres « comme nous », et enfin relier les deux numérations orales via la numération écrite chiffrée. Dans cette dernière phase, le lien entre la numération parlée en France et la numération « régulière » a tout d'abord évolué pour devenir « conceptuel », ce qui entraîne ainsi de considérer par exemple « quarante-deux » comme « 4 fois dix et encore deux ». Cependant nous notons des variations sur la manière de procéder pour les nombres entre dix et vingt, les nombres entre vingt et soixante-neuf et enfin les nombres entre soixante-dix et cent. Nous allons traduire ces prescriptions en termes de cheminements cognitifs favorisés chez les élèves afin d'en tirer des informations sur l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel.

Nous allons indiquer les étapes importantes cette fois-ci d'après notre cadre théorique et non d'après ce qui est annoncé par les auteurs, sachant que de nombreux exercices sont prescrits afin de renforcer les différents liens, en particulier ici dans le domaine arithmétique. Nous ne détaillons pas le rôle spécifique de ces exercices et les englobons dans un contexte de problèmes posés aux élèves signalé dans nos schémas par le cadre jaune intitulé « variété des problèmes mathématiques ».

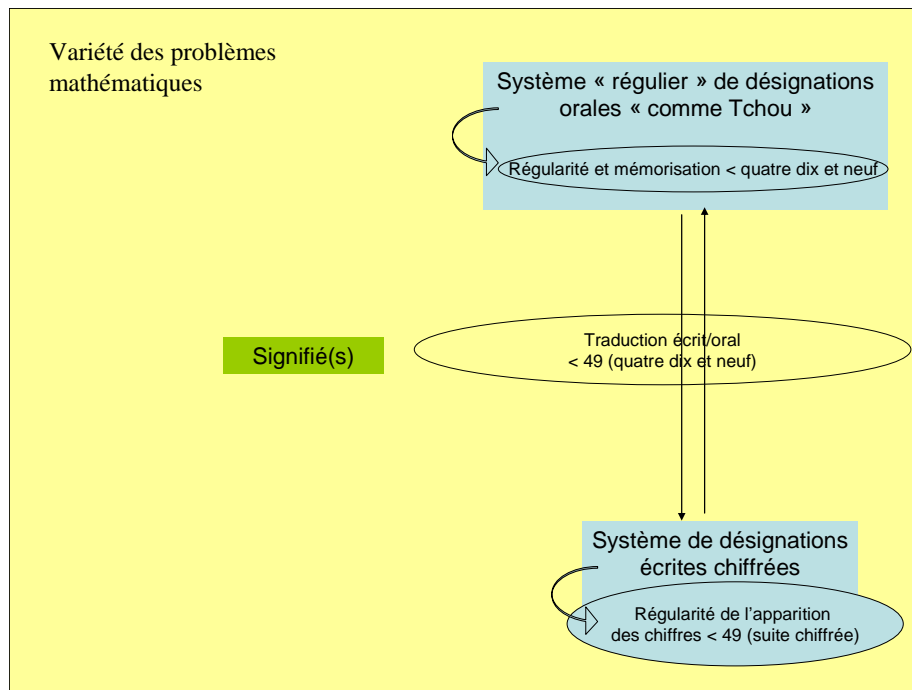
1^{ère} étape :

Dans cette première étape des liens sont établis entre la numération écrite chiffrée et celle parlée en France. Le champ numérique abordé dépend des signifiants en jeu, il est indiqué dans le schéma suivant. Les éléments mis en relief dans les prescriptions sont précisés dans les ovales.



2^{ème} étape : 1^{ère} phase de la progression prescrite.

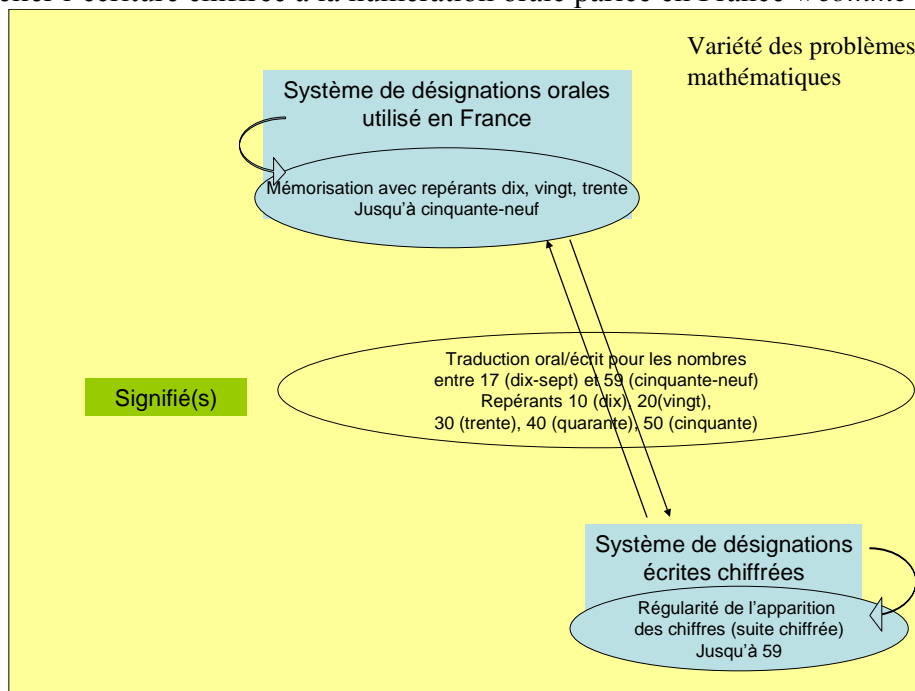
Il s'agit de relier l'écriture chiffrée à la numération orale « régulière » « comme Tchou » pour les nombres inférieurs à 49/« quatre dix et neuf ».



Les prescriptions d'un lien de type « grapho-phonologique » et non « conceptuel » se traduisent dans notre interprétation par l'absence de notification de relations signifié(s)/signifiant, le contexte numérique étant essentiellement évoqué par les signifiants. Autrement dit dans cette étape les désignations ne sont pas mises en relation explicitement avec le cardinal de collections.

3^{ème} étape : 2^{ème} phase de la progression prescrite

Il s'agit de relier l'écriture chiffrée à la numération orale parlée en France « comme nous ».

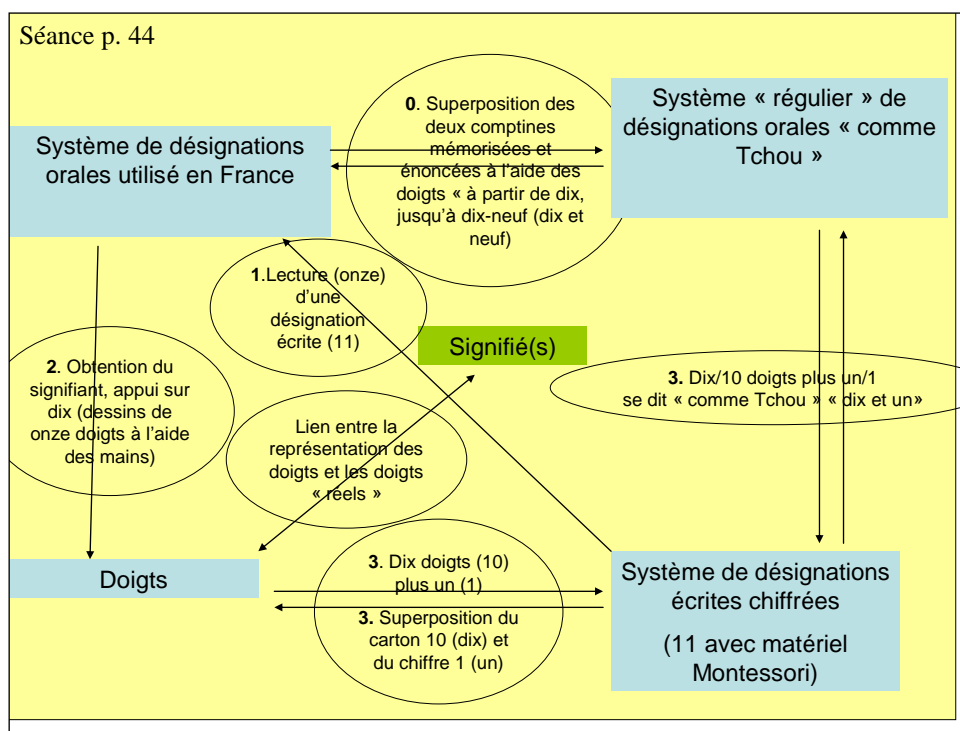


Ici encore, les prescriptions d'un lien de type « *grapho-phonologique* » et non « *conceptuel* » se traduisent dans notre interprétation par l'absence de notification de relation signifié(s)/signifiant, le contexte numérique étant évoqué par les signifiants. Autrement dit dans cette étape les désignations ne sont pas mises en relation explicitement avec le cardinal de collections.

4^{ème} étape : 3^{ème} phase de la progression prescrite, cas des nombres de 10 (dix) à 19 (dix-neuf)

Ici la numération orale « *régulière* » « *comme Tchou* » est reliée à la numération parlée en France « *comme nous* » via l'écriture chiffrée, pour les nombres de dix à dix-neuf (dix et neuf).

Nous donnons le cheminement cognitif prescrit dans la séance clé p. 44 qui montre comment est établi ce lien entre les deux numérations, tout en prenant en compte l'existence des cheminements cognitifs prescrits précédemment. Il est illustré avec le nombre 11/onze/dix et un, le processus étant le même pour les nombres de 11/onze/dix un à 16/seize/dix deux. Pour les nombres de dix-sept à vingt, la compréhension de l'écriture chiffrée est en plus étayée par le fait que la décomposition avec appui sur dix s'entend quand on prononce le nombre.

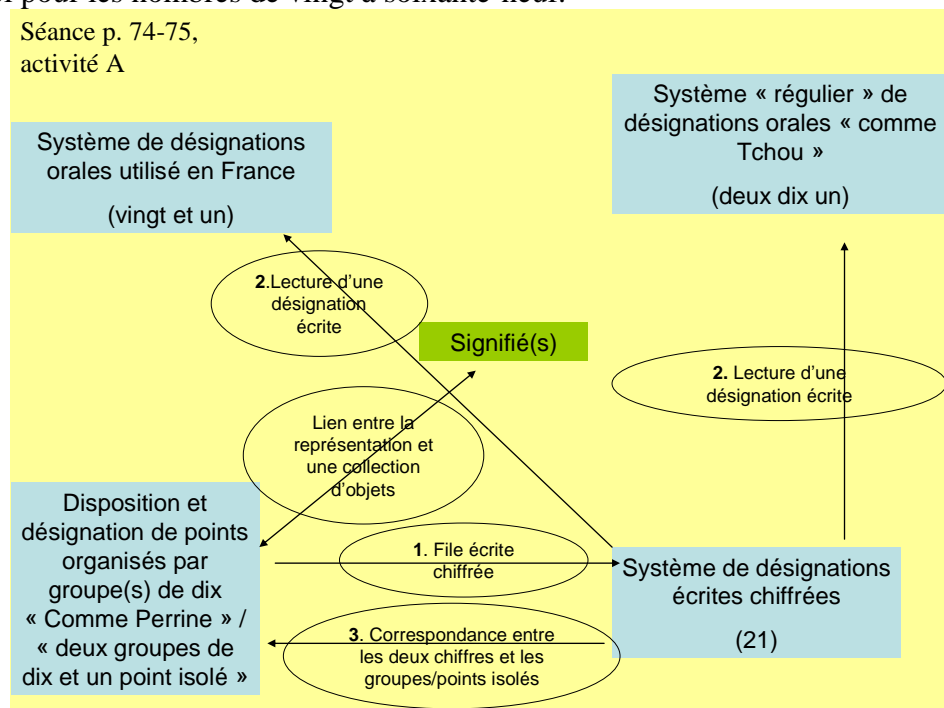


Le lien numéroté 0, se fait de manière autonome au début de la séance. La première question posée est de dessiner un nombre de doigts indiqué par une écriture chiffrée « 11 » qui est lue (les flèches numérotées 1 et 2). La deuxième est d'expliquer l'écriture chiffrée « 11 », ceci correspond aux flèches numérotées 3 dans le schéma ci-dessus. La réponse attendue est un parallèle entre les chiffres de l'écriture et le fait qu'il faut ajouter un (1) à dix doigts (10), la superposition des cartes dans le matériel Montessori (le chiffre 1 sur le 0 du carton 10) et la désignation « *comme Tchou* » « dix (10) et un (1) ». Pour les nombres de dix-sept à dix-neuf, le lien « *grapho-phonologique* » est de plus convoqué : dans dix-sept, on entend dix (10) et sept (7).

Le fait que les nouvelles relations prescrites ne soient plus seulement d'ordre « *grapho-phonologique* » se traduit par la présence d'un lien signifié(s)/signifiant, puisque dans la séance les doigts sont levés un à un²¹⁴.

5^{ème} étape : 3^{ème} phase de la progression prescrite, cas des nombres de 20 (vingt) à 69 (soixante-neuf)

Il s'agit comme dans l'étape précédente de relier la numération orale « régulière » « comme Tchou » à la numération orale parlée en France « comme nous » via l'écriture chiffrée, mais cette fois-ci pour les nombres de vingt à soixante-neuf.



La séance clé p. 74-75 est ici illustrée avec le nombre « 21 »/« vingt-et-un »/« deux dix et un »/« deux groupes de dix et un point isolé », le processus étant le même pour les nombres inférieurs à 41.

Le lien numéroté 1 indique que la désignation écrite chiffrée de la représentation « *comme Perrine* » est obtenue grâce à cette suite numérique, puisque ces désignations sont constituées au fur et à mesure à partir d'un groupe de dix en ajoutant un à un des points. Ceci justifie par ailleurs la flèche entre signifiant et signifié(s). Les flèches numérotées 2, correspondent à la deuxième question posée aux élèves. Il s'agit de nommer le nombre écrit en chiffres dans la numération parlée en France et dans la numération « régulière », ces liens « *grapho-phonologiques* » ayant été l'enjeu de la phase précédente. La dernière (flèche 3 dans le schéma ci-dessus) est d'expliquer l'écriture chiffrée, la réponse attendue est un parallèle entre les deux chiffres de l'écriture et le fait de voir les dispositions de points « *comme Perrine* » et de les dire en termes de « ... *groupe de dix et ... points isolés* » (les chiffres se retrouvent dans cette désignation).

Le travail pour les nombres jusqu'à soixante-neuf est fait dans les séances suivantes, en prenant appui sur cette séance clé p.74-75 et sur des liens « grapho-phonologiques » pour retrouver dans les nombres parlés dans la numération en France le nombre de groupes de dix et d'unités, ainsi cinquante est relié à cinq, soixante à six (on retrouve dans l'écriture littérale de soixante les lettres six).

²¹⁴ Les groupements et la monnaie sont aussi utilisés pour la période 2.

6^{ème} étape : 3^{ème} phase de la progression prescrite, cas des nombres de 70 (soixante-dix) à 99 (quatre-vingt-dix-neuf).

Il s'agit comme dans l'étape précédente de relier la numération orale « régulière » à la numération parlée en France via l'écriture chiffrée, mais cette fois-ci pour les nombres de 70 (soixante-dix) à 99 (quatre-vingt-dix-neuf).

Cette extension se fait en deux étapes, il s'agit de retrouver les groupes de dix dans le nom des nombres de la numération parlée en France. Pour les nombres entre 70 (soixante-dix) et 79 (soixante-dix-neuf) il est stipulé : « Une façon de le découvrir consiste à mettre en relation les oralisations du type « soixante-treize » et le nombre de groupes de dix : « soixante et treize » c'est « soixante et treize », c'est-à-dire 7 groupes de dix (les 6 de soixante et le dix de treize) et 3 unités isolées », p. 166 du livre du maître, ceci est relié aux nom des nombres de la numération « régulière ». Ici encore l'écriture littérale participe à renforcer les liens.

Pour les nombres entre 80 (quatre-vingts) et 100 (cent), la méthode est similaire : quatre-vingts est relié à 8 groupes de dix organisés en 4 groupes de 2 dix (séance p. 134-135).

3.4 L'itinéraire cognitif proposé par « J'apprends les maths avec Tchou »

L'itinéraire proposé par ce manuel est un exemple d'itinéraire cognitif d'enseignement du deuxième type, utilisant une numération orale annexe. Comme pour le manuel précédent, nous allons résumer le processus à l'aide des schémas issus du cadre théorique, schémas qui doivent se comprendre à l'aune de ce cadre. On peut se reporter à ce sujet à la méthodologie générale d'analyse des manuels indiquée paragraphe 1.2 de ce chapitre, ou encore au chapitre 4. Nous allons ensuite le discuter.

Voici les codes que nous utilisons :

I interprétation ordinale stricte

I° interprétation ordinale avec repérant cinq

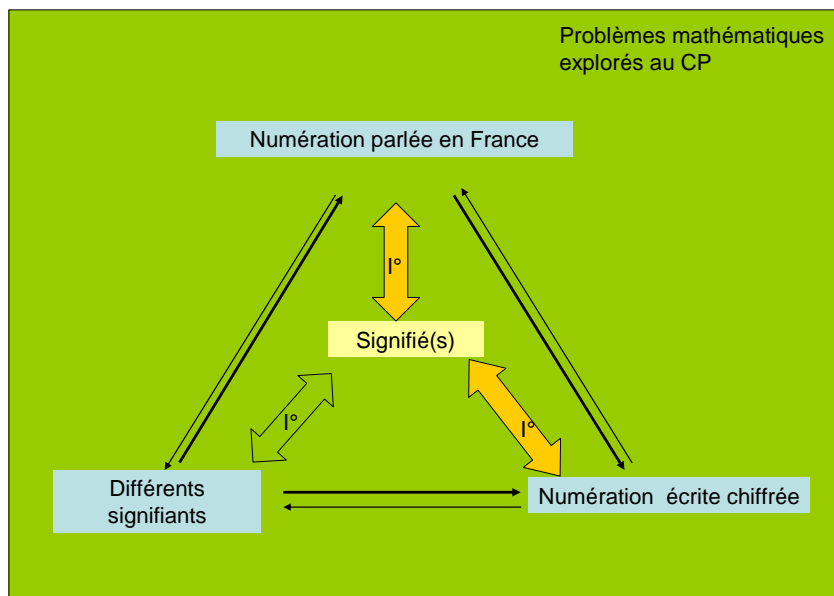
I' interprétation ordinale avec repérant dix, vingt, trente, etc.

(I')' interprétation arithmétique additive avec appuis dix, vingt, trente, etc.

I'' interprétation arithmétique multiplicative

a. Les étapes de l'itinéraire

Dans une première étape, les écritures chiffrées sont d'abord vues comme une traduction écrite des désignations orales.



L'interprétation ordinale avec repérant cinq de la numération parlée est ainsi celle des écritures chiffrées. Ceci se voit par exemple dans l'utilisation du signifiant « main », des constellations cinq du dé (et non pas six), ou encore de la « petite boîte de Tchou » composée de cinq emplacements : un prolongement s'opère avec les repérants dix et quinze du fait en particulier d'un comptage par cinq²¹⁵. Cette interprétation de la numération est repérée par la double flèche marquée I°. Nous n'avons pas utilisé le code I' car il signale plus particulièrement l'utilisation de repérants qui sont « entendus » dans les désignations orales : dix, vingt, trente, etc. Or cinq n'est pas « entendu ». Cependant cette interprétation I' est utilisée tout au long de l'année sans qu'elle soit particulièrement travaillée à un moment donné. Les repérants sont néanmoins sollicités pour certains liens « grapho-phonologiques » ou dans certains calculs mentaux (dans ces derniers, il est possible d'y voir aussi des appuis additifs comme nous l'avons déjà souligné).

Les « autres signifiants » ont pour rôle d'aider à la réalisation de cette première étape de l'itinéraire cognitif d'enseignement. Ils sont explicitement prescrits dans « J'apprends les maths avec Tchou ». Le champ numérique concerne les nombres au moins jusqu'à vingt en ce qui concerne une mémorisation de la comptine numérique parlée en France, et il dépend de manière plus spécifique des signifiants en jeu (voir dans le paragraphe précédent les cheminements cognitifs de la première étape).

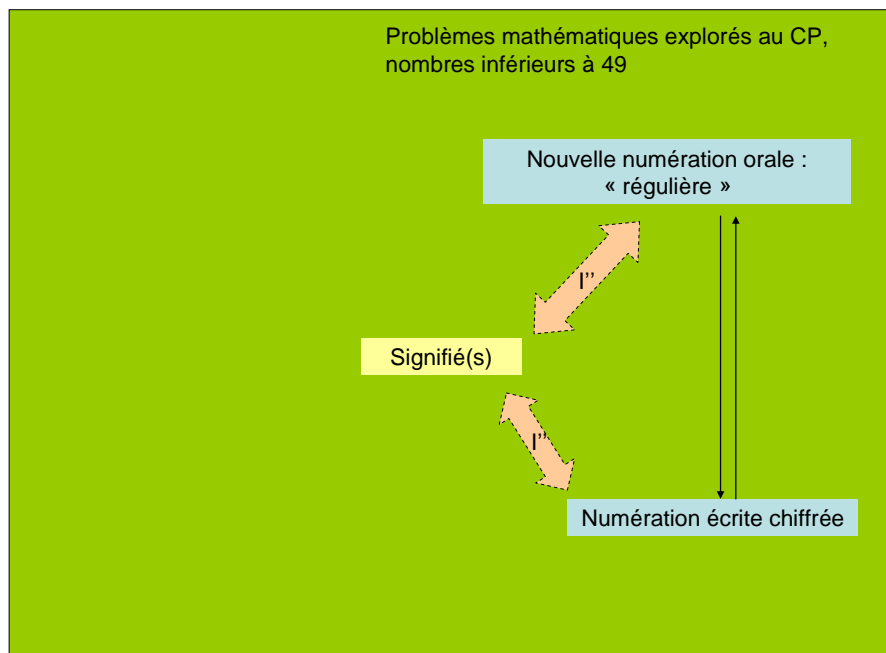
Les doubles flèches colorées soulignent les résultats visés à la fin de cette première étape, en ce qui concerne l'itinéraire cognitif. Ainsi par exemple les boîtes de Tchou sont des signifiants relais qui n'ont pas vocation à perdurer. Les flèches en trait épais témoignent plus précisément du processus indiqué dans les cheminements cognitifs.

La deuxième étape établit les liens entre l'écriture chiffrée et deux types de numération parlée. La relation avec la numération parlée « régulière » (« comme Tchou ») met en jeu une interprétation de type arithmétique multiplicative (double flèche I'') et celle avec la

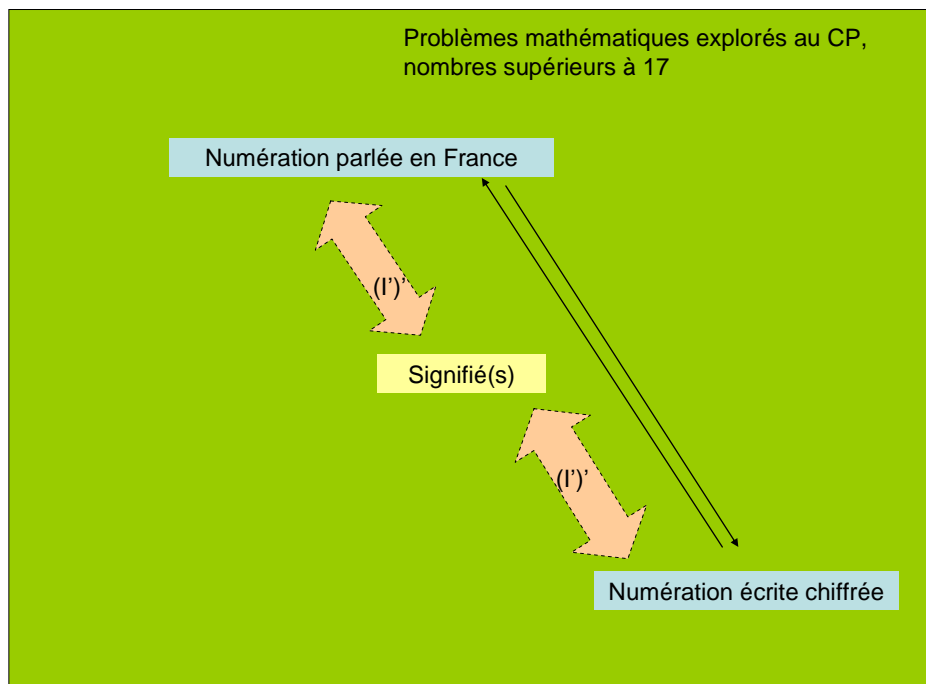
²¹⁵ En début d'année il nous semble que les problèmes arithmétiques ne sont pas suffisamment abordés pour en inférer que la numération est employée dans une interprétation arithmétique (additive).

numération parlée en France une interprétation de type arithmétique additive²¹⁶ (double flèche (I')'). Chacune est reliée à l'écriture chiffrée. Nous allons utiliser deux schémas suivant les numérations en jeu et le champ numérique concerné.

D'une part, pour les nombres inférieurs à 49 :



D'autre part, pour les nombres supérieurs à 17/dix-sept et inférieurs à 59.



Les « autres signifiants » ne sont pas spécifiés dans les schémas. Les interprétations sont basées sur les régularités des signes successifs des numérations qui sont mises en parallèle,

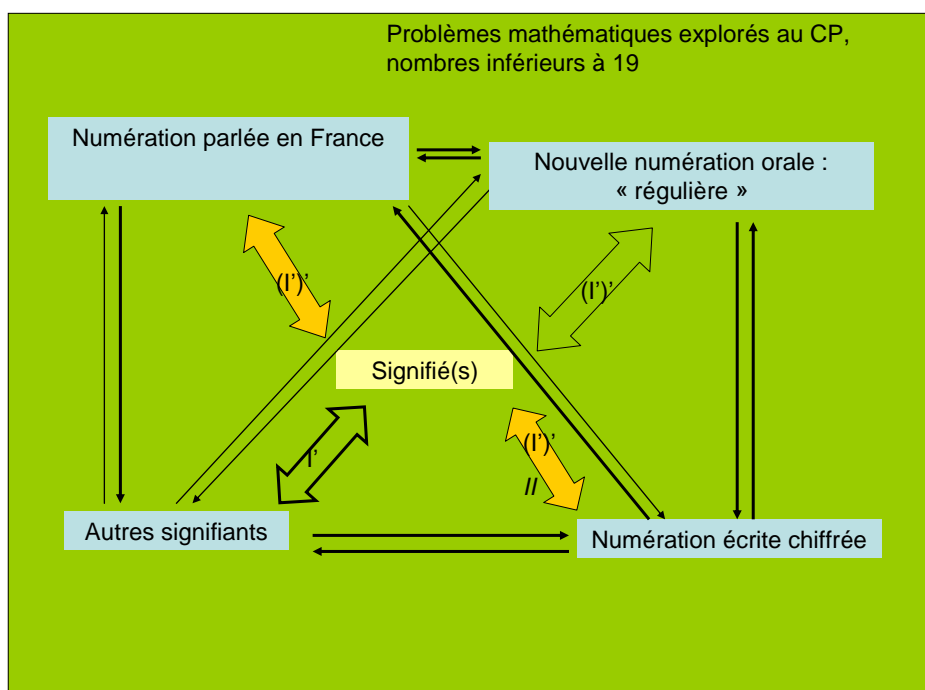
²¹⁶Nous avons choisi d'interpréter les prescriptions dans ce sens, puisqu'en particulier sont aussi prescrits en parallèle des problèmes de calcul mental qui engagent une telle interprétation arithmétique additive. En ne considérant que la relation formelle qui est prescrite, nous devrions considérer une interprétation ordinale avec repérant.

alors que le contexte numérique est essentiellement évoqué du fait de l'emploi de ces numérations. Les élèves savent cependant que les systèmes sémiotiques en jeu sont utilisés pour désigner des nombres. En outre un parallèle initial a été fait entre les trois numérations, la numération parlée en France étant une connaissance ancienne associée aux nombres. Pour indiquer que les interprétations sont avant tout formelles, nous avons mis des flèches en pointillés.

A propos de l'interprétation prescrite I'' , d'essence arithmétique multiplicative, signalons que pour les nombres inférieurs à 20, le fait de dire les nombres « dix et ... » dans la nouvelle numération régulière et non pas « un dix et ... » peut engager sur une interprétation arithmétique additive²¹⁷.

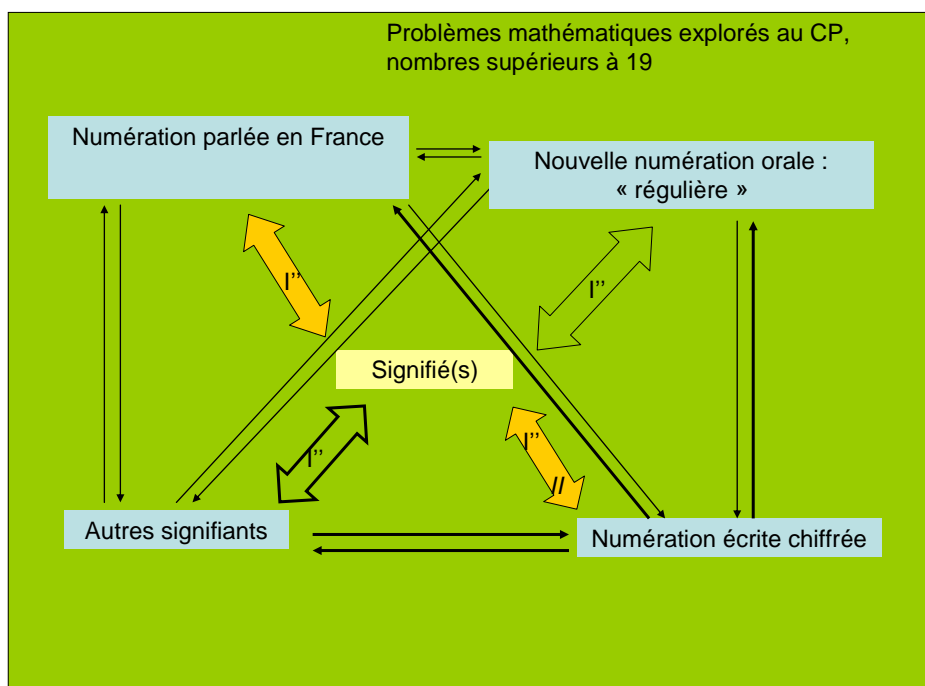
La troisième étape va mener à l'interprétation visée par le manuel en ce qui concerne la numération écrite chiffrée. Les « autres signifiants », qui ont pour rôle d'aider à la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement, vont ici être spécifiés dans les schémas, contrairement aux précédents. Il s'agit de montrer que les prescriptions insistent sur leur participation aux renforcements des interprétations ébauchées précédemment qui, elles, étaient essentiellement basées sur des parallèles entre les representamens des systèmes de numération.

Deux cas sont à distinguer : les nombres inférieurs ou égaux à 19 et ceux supérieurs ou égaux à 20. Dans les deux schémas qui suivent, les doubles flèches colorées indiquent toujours les objectifs de l'étape, les flèches en traits épais ayant pour but de traduire ce qui a été relaté sur les cheminements cognitifs dans les séquences d'introduction.



et

²¹⁷ Les liens étant avant tout formels, il n'est pas non plus exclu que l'interprétation puisse être ordinale avec repérants, mais ce n'est pas celle qui est prescrite par les auteurs du manuel.



En ce qui concerne le premier cas, l'interprétation favorisée est arithmétique additive « (I)' », du fait en particulier d'un contexte de calcul mental, mais aussi d'indications explicites dans ce sens. Dans le deuxième cas c'est l'interprétation arithmétique multiplicative qui est prescrite. Dans les deux cas, nous avons voulu mettre en relief la multitude des liens entre les différents signifiants, puisque ceux-ci sont explicitement prescrits, cependant l'élaboration initiale des relations entre les trois numérations est différente selon les cas. Elle est toujours abordée par une question concernant une explication de la numération écrite chiffrée (pourquoi écrit-on ainsi un nombre ?), mais les arguments sont sensiblement différents, ce qui se perçoit dans l'utilisation de relais différents tant dans le choix des « autres signifiants » que dans le rôle joué par les deux numérations orales. Ainsi, pour les nombres entre 11 et 19, l'explication est fournie en exploitant les liens avec les doigts (dix doigts plus ...), le matériel Montessori et les nombres dits dans la numération « *comme Tchou* ». (cf. les cheminements donnés ci-avant dans la séance p. 44). Pour les nombres supérieurs à 20, l'explication est fournie en exploitant les liens avec des signifiants constitués par des organisations de points en groupes de dix (« *comme Perrine* ») auxquelles sont associés un signifiant de type « désignation de l'organisation » comme « ... groupes de dix et ... point(s) isolé(s) » mais ici obtenu par comptage (cf. les cheminements donnés ci-avant dans la séance p. 74-75). Ultérieurement ce sont les nombres dits dans la numération régulière « *comme Tchou* » associés aux « *grandes boîtes de Tchou* » qui vont plus particulièrement être prescrits et renforcer ainsi l'interprétation. Les « *grandes boîtes de Tchou* » vont jouer un rôle de matériel de numération de type « *base-ten blocks* » évoqué dans le chapitre 5 concernant l'analyse des recherches sur la numération. Comme dans « Cap Maths », tout ce qui est proposé après les séances clés est susceptible d'aller dans les sens d'une interprétation de référence « II », en particulier le calcul posé. C'est pourquoi nous avons mis en italique celle-ci.

b. Discussion

Des interprétations communes aux numérations, mais à moduler selon le champ numérique

Pour les nombres inférieurs à 19, une interprétation arithmétique additive commune à la numération parlée en France et à l'écriture chiffrée est prescrite. Cependant, pour ces nombres

est aussi prescrit le fait de dire « **un** groupe de dix et ... », même si Tchou dit « dix et un », pouvant ainsi orienter aussi vers une interprétation arithmétique multiplicative pour la numération écrite chiffrée des nombres inférieurs à 20.

Pour les nombres supérieurs à 20, est prescrite une interprétation arithmétique multiplicative commune à la numération parlée en France et à l'écriture chiffrée (via la numération « régulière » « *comme Tchou* »). Cependant, l'interprétation additive est aussi prescrite pour la numération parlée en France, notamment dans la résolution de problèmes de calcul mental. En conséquence, pour ces nombres supérieurs à 20, dans la numération écrite chiffrée, une interprétation arithmétique additive est aussi attendue par les auteurs du manuel, en particulier pour résoudre certains problèmes. Ceci peut se voir par exemple dans les stratégies préconisées pour les additions de deux nombres, posées avec des écritures chiffrées, mais aussi dans l'emploi des nombres « *comme Perrine* » qui sont liés à un comptage de dix en dix : « dix, vingt, trente, etc.

Ainsi, les auteurs du manuel « J'apprends les maths avec Tchou » prescrivent-ils une disponibilité de différentes interprétations suivant les problèmes, ce qui est indiqué explicitement dans la présentation du livre du maître quand, par exemple dans la comparaison entre la stratégie de comptage de dix en dix (dix, vingt, trente, ...) et celle par dix (un groupe dix, deux groupes de dix, trois groupes de dix, ...).

Des éléments des interprétations introduits progressivement

Par ailleurs, comme dans le manuel « Cap Maths », des choix ont été faits sur les aspects de l'interprétation de l'écriture chiffrée enjeu d'apprentissage et sur les moments dans lesquels ils vont intervenir. Ainsi, comme précédemment, toutes les interprétations se construisent au fur et à mesure et sont (au moins initialement) partielles dans le sens où les prescriptions ne font pas référence à toutes les propriétés indiquées dans la première partie de la thèse. Certaines de ces propriétés sont travaillées ultérieurement à l'introduction de telle ou telle interprétation, certaines ne sont pas évoquées dans le manuel de CP « J'apprends les maths », l'étude de certaines autres est renvoyée aux années futures. Il nous semble que ces choix sont étroitement liés au type d'itinéraire proposé, la numération écrite chiffrée étant associée à une numération orale « régulière ».

Deux rôles pour l'écriture chiffrée dans l'itinéraire proposé.

Pour mesurer l'écart entre l'interprétation de référence de la première partie de la thèse et celle initiée par le manuel nous tenons compte de deux caractéristiques importantes de l'itinéraire cognitif proposé. Tout d'abord, il nous semble que les auteurs du manuel conçoivent la numération décimale, celle utilisant dix comme repérant ou/et appui additif/multiplicatif, en la déclinant sous la forme de trois numérations : la numération parlée en France « *comme nous* » avec ses irrégularités, la numération régulière « *comme Tchou* » et enfin la numération écrite chiffrée. Ensuite, le principe moteur est que la numération écrite chiffrée est associée de manière essentielle à la numération régulière dans un rapport que nous analysons comme privilégiant celui de la correspondance oral/écrit, comme celui qui lie, tout au moins à l'école maternelle et en début de CP, l'écriture chiffrée et la numération parlée en France. Ceci nous semble résumé par le fait, déjà rapporté, qu'il y est différencié une numération constituant « *une suite de mots connue par cœur (comme c'est le cas avec les lettres de l'alphabet)* » des « *numérations modernes* » qui, elles, utilisent « *deux grands principes : un principe de « changement d'unité de compte » (quand une collection est nombreuse, ça va plus vite de compter des mille ou des cents que de compter des unités simples) et un principe d'écriture que nous examinerons dans un second temps* ». Le « *changement d'unité de compte* » est longuement détaillé dans le livre du maître, le principe d'écriture étant évoqué par le passage de l'oral « *comme Tchou* », à l'écriture chiffrée, par exemple de « 4 dix et 2 » à « 42 », dans un contexte mettant en jeu la désignation de type « 4

groupes de dix et 2 points isolés ». Ainsi, il nous semble que le but de l'itinéraire est d'avant tout faire évoluer l'interprétation de la numération parlée en France vers une interprétation multiplicative. L'écriture chiffrée a d'abord été un moyen pour y arriver en permettant de faire le lien entre la numération « régulière » de Tchou (interprétation multiplicative) et celle « comme nous » car elle est présentée comme la version écrite des deux numérations orales. Ensuite, un retour est fait sur cette écriture chiffrée qui est questionnée cette fois-ci en tant que version écrite de numérations interprétées de manière multiplicative. Ce qui amène à donner du sens aux chiffres. Ces derniers traduisent par écrit les coefficients de l'interprétation multiplicative.

Une stratégie mise en avant : le comptage

Les problèmes de comptage constituent le contexte le plus fréquent (en particulier dans la distinction comptage de dix en dix et comptage des groupes de dix). Le qualificatif de « désignation des groupements » n'en rend pas compte, « désignation issue d'un processus de comptage » nous semble plus précis pour qualifier dans ce contexte un signifiant du type « 4 groupes de dix et 2 points isolés ». Ceci nous renvoie à la distinction entre une numération orale qui peut être associée ou non à un comptage, et un principe de comptage « en unités » qui n'est pas nécessairement associé à un système sémiotique de désignation ayant une syntaxe propre et étudiée en elle-même (lien signifiant/signifié). La numération parlée en France est un tel système sémiotique, que l'on peut analyser en termes de régularités et irrégularités (mais qui elle n'est pas forcément associée à un comptage). La numération régulière « comme Tchou » est associée avec le comptage mais uniquement dans un second temps (via en particulier des désignations issues d'un processus de comptage), puisque cette dernière a été introduite initialement d'une manière formelle, parallèlement aux deux autres numérations, parlée en France et écrite chiffrée. A contrario, les désignations du résultat d'un comptage employées par le manuel ne se constituent pas en une numération, puisqu'elles ne sont pas étudiées en elles-mêmes ni utilisées de manière systématique (il existe en outre des variations pour rendre compte verbalement du résultat d'un comptage, en particulier dues au contexte). Ainsi, même si sont présents et prescrits des problèmes arithmétiques (et en particulier des calculs mentaux), les séances qui concernent plus particulièrement l'itinéraire cognitif d'enseignement de la numération écrite chiffrée ont pour contexte le comptage ou des relations formelles. Ce contexte de comptage, même s'il est « en unités » ou « comme Tchou » pose la question de la place accordée à des éléments de l'interprétation de référence de la numération parlée en France

L'écart entre l'interprétation proposée par le manuel et celle de référence

Dans l'écart entre l'interprétation proposée par le manuel et celle de référence de la première partie de la thèse nous retrouvons des points similaires à ceux de « Cap Math », mais qui sont à moduler en tenant compte des deux caractéristiques signalées. Nous n'avons pas vu de questionnement spécifique sur la position des chiffres. Cette position est une conséquence logique d'une traduction de l'ordre d'énonciation de signifiants, provenant de la numération régulière introduite de manière conventionnelle ou bien d'expressions utilisant le terme de « groupes de dix ». Elle provient aussi d'une distinction entre les nombres désignés par des écritures chiffrées différentes, visible par exemple dans l'exploration de la file numérique chiffrée. Le signe « 0 » dit « zéro » est introduit pour indiquer le résultat de la comparaison entre deux collections de mêmes cardinaux. Il est ensuite associé au fait d'indiquer qu'il n'y a « rien qui reste » après certains comptages, puisqu'il est question d'expliquer sa présence dans les écritures chiffrées, comme 20 par exemple. Il n'est pas prescrit explicitement de revenir sur la maximalité des groupements de dix dans l'organisation d'une collection, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences du comptage basé sur dix et

légitimé par les régularités des numérations (étudiées spécifiquement dans un premier temps). Comme dans le manuel précédent, ils sont légitimés de fait, puisqu'ils ont permis une interprétation *a posteriori* pertinente (car fonctionnelle) de l'écriture chiffrée. Il n'est pas prévu dans le manuel de revenir sur ces choix²¹⁸. Il faut signaler cependant pour ce manuel une utilisation de groupes de cardinaux différents de dix pour compter (en particulier de deux et de cinq). Le fait de prendre toujours le même type de groupe dans un même comptage (et de ne pas mélanger par exemples les groupes de deux et de cinq) n'est pas questionné, mais le choix du type de groupe (deux, cinq ou dix) est mis en parallèle avec la numération : le comptage utilisant dix amène plus facilement à la désignation du cardinal²¹⁹. La notion de base qui est propre à un type d'échelle de numération (ce qui se traduit sur une collection par un choix d'organisation utilisant les mêmes types de groupements et par un procédé spécifique de passage aux groupements d'ordre supérieur) n'est pas questionnée. Finalement, la graphie des chiffres et les différents choix possibles pour coder l'organisation d'une collection (par exemple XXXII ou 3X 2I, au lieu de 32), ne sont pas non plus étudiés. Signalons finalement que la numération décimale doit être comprise grâce à la suite déjà connue des écritures chiffrées, c'est-à-dire des signes vers les principes, et non l'inverse, des principes vers les signes, le titre d'un des paragraphes de la p. 36 de la présentation du livre du maître l'atteste : « *Réfléchir la suite des écritures chiffrées pour comprendre la numération décimale* ».

4. Conclusion et perspectives pour la troisième partie

Nous ne reprenons pas tous les éléments qui ont été dégagés précédemment. Dans un premier paragraphe « bilan » (§4.1), nous mettons en relief certains points qui permettent de répondre plus particulièrement aux questions que nous nous sommes posées. Ceci permet d'en dégager d'autres en ce qui concerne les déroulements en classe (§4.2), objet de la troisième partie de la thèse.

4.1 Bilan

Nous reprenons les questions initiales de manière synthétiques.

En ce qui concerne les différentes propriétés des interprétations qui interviennent, des points communs qui ont été signalés entre les deux manuels. Nous pouvons distinguer les séances clés qui amorcent le changement d'interprétation de l'écriture chiffrée de celles qui permettent de la renforcer par la suite ou de la préparer. Certains choix sont contraints par le type d'itinéraire dans lequel s'inscrit chacun des manuels, d'autres sont propres aux auteurs, des auteurs qui doivent en outre suivre les prescriptions des programmes scolaires. Ainsi différents éléments issus d'une interprétation multiplicative interviennent alors que d'autres viennent compléter l'interprétation proposée par le manuel. Nous allons ici mettre en relief les choix opérés et les mettre en perspective avec l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée²²⁰.

²¹⁸ Ceci est peut-être une conséquence du type d'itinéraire proposé.

²¹⁹ Il n'est néanmoins pas facile de questionner la maximalité des groupes (de dix). Elle peut aller « de soi » puisqu'il n'y a pas de raison d'arrêter un comptage de dix en dix avant la fin, d'autant qu'il est perçu comme efficace car menant à la désignation parlée en France du cardinal (voir les procédés de mise en signes du chapitre 3).

²²⁰ Rappelons que le mot référence est employée car c'est l'interprétation que nous avons dégagées dans la première partie de la thèse et qui constitue ainsi un outil pour notre recherche. En particulier, elle n'est pas une référence institutionnelle. C'est d'une certaine manière un écart entre les propositions des manuels et l'interprétation de référence que nous estimons ici.

Dans les itinéraires cognitifs de type 1 et 2, l'écriture chiffrée est tout d'abord perçue comme la forme écrite des désignations orales, que ce soit la numération parlée en France ou une numération annexe. Le « moteur » des itinéraires est l'utilisation de ces numérations orales dans une interprétation multiplicative. Ainsi, ces écritures chiffrées sont des « objets » à décoder. La question est par exemple pourquoi un nombre dit « trente-six » est écrit « 36 » ? La réponse sollicite des éléments d'une interprétation multiplicative, c'est-à-dire va au-delà de liens formels de type trente/3 et six/6. Dans les séances clés, l'itinéraire spécifique proposé par chacun des deux manuels utilise une organisation de collection, mais aucun des deux ne questionne cette organisation. En conséquence ni la maximalité des groupements ni le fait de grouper par dix n'est en jeu, c'est-à-dire des propriétés relatives à la première partie de l'interprétant de l'interprétation de référence²²¹. Ceci nous semble une conséquence du type d'itinéraire dans lequel s'inscrit le manuel plus que d'un choix spécifique des auteurs à l'intérieur de ce type. En effet, dans les désignations orales sur lesquelles il s'appuie, que ce soit l'itinéraire de type 1 ou celui de type 2, il s'agit plus de retrouver des régularités (trouver une certaine rationalité dans le système qui est employé) que de comprendre pourquoi un tel code est utilisé et comment il a été élaboré. Ainsi, ces désignations ne sont pas questionnées *a priori*.

En outre, dans les manuels, la place des chiffres ainsi que le signe « 0 » ne sont pas présentés comme des choix de mise en signes, comme nous l'avons indiqué dans la description de la deuxième partie de l'interprétation de référence. Il nous semble pourtant possible de discuter de ces choix dans l'étude du passage d'une désignation des groupements à l'écriture chiffrée. Le fait de décrypter l'écriture chiffrée et non d'élaborer le code peut expliquer que cette marge de manœuvre n'ait pas été investie.

Ce sont les problèmes de dénombrement par comptage qui sont proposés aux élèves dans « Cap Maths » dans les séances clés. Ainsi, une stratégie de type « organiser/configurer pour désigner » (paragraphe 3.1 du chapitre 4) n'est pas en jeu. Elle permettrait de distinguer l'interprétation multiplicative de l'interprétation de référence. Dans « J'apprends les maths avec Tchou », les nombres « *comme Perrine* » sont des organisations qui, lorsqu'elles sont élaborées par les élèves pour obtenir une écriture chiffrée, peuvent leur permettre de convoquer cette stratégie. Il ne nous semble pas que ce choix ait été fait car ces organisations sont utilisées le plus souvent comme un signifiant du nombre *a priori*, comme les constellations du dé, et à mettre en rapport avec d'autres signifiants. En d'autres termes leur constitution n'est pas questionnée. Ils n'apparaissent pas dans un contexte problématique, au sens de Brousseau, c'est Perrine qui les utilise et les élèves doivent comprendre leur logique. Ces choix nous semblent plus le fait des auteurs et moins du type d'itinéraire.

De manière générale, après les séances clés, relativement peu de problèmes relevant de la structure multiplicative sont proposés aux élèves. Ils permettraient d'utiliser les numérations dans une interprétation arithmétiques multiplicatives. Beaucoup plus de problèmes concernent la structure additive et mettent en jeu des dénombrements. Ceci est une prescription des programmes. Dans ce sens, le mot « arithmétique » dans « interprétation arithmétique multiplicative » ne traduit pas la réalité du CP.

Signalons cependant que lorsque des additions sont posées avec les écritures chiffrées, notamment celles nécessitant des retenues, une interprétation multiplicative est susceptible d'être convoquée indépendamment des numérations orales. Certaines propriétés utilisées pour

²²¹ A noter que les propriétés concernant les groupements de groupements (toujours de même cardinal) ne sont pas non plus questionnées. Ceci est impossible pour des nombres inférieurs à cent dès que dix a été fixé comme base, ce qui semble une conséquence de l'utilisation de numérations orales dont le premier appui multiplicatif est dix.

des collections, comme celles citées par Bednarz et Janvier²²², dans la mesure où elles sont transférées aux techniques opératoires, peuvent être considérées comme du ressort d'une interprétation de référence. Il nous semble néanmoins que les désignations chiffrées gardent le plus souvent leur statut de traduction écrite de l'oral, quelle que soit l'interprétation de la numération parlée qui est convoquée. Ceci peut être vu comme une conséquence du type d'itinéraire, mais cette relation est plus ou moins à l'œuvre selon les propositions des manuels. Ceci est à nuancer en particulier selon les nombres en jeu et les « autres » signifiants convoqués.

Ainsi, en ce qui concerne le champ numérique, l'interprétation favorisée pour les écritures chiffrées des nombres inférieurs à vingt, et plus encore à seize, nous semble être l'ordinaire stricte. Ceci nous semble une conséquence du fait, entre autre, que le repérant « dix » n'est pas entendu dans la numération parlée en France pour les nombres de onze à seize. Ceci est sensible même pour « J'apprends les maths » qui utilise pourtant une numération annexe « régulière ». Ainsi, il nous semble que ce qui est développé pour ces nombres ce sont plutôt des habiletés de calculs (vers des résultats à mémoriser, comme ceux des tables d'addition), avec les appuis « dix » ou « cinq », liées en particulier aux doigts des mains. Ainsi l'écriture chiffrée est peu mobilisée dans ce travail, mis à part dans sa fonction de trace écrite de ce qui est dit ou/et à retenir. En conséquence, « 10 » est une écriture qui n'est pas ou peu questionnée. Une rupture ce fait aussi pour les écritures chiffrées des nombres au-delà de 69 qui fait écho aux irrégularités spécifiques à la numération parlée en France. Alors qu'un sens a été donné aux chiffres après les séances clés, les écritures chiffrées sont étudiées successivement dans une progression qui suit celle de l'apprentissage de leur lecture dans la numération parlée. Tout se passe comme s'il fallait savoir dire les écritures chiffrées dans la langue française pour les utiliser. *A priori*, elles peuvent pourtant être employées de manière autonome. Ce choix est à questionner, car il ne nous semble pas favoriser des aspects propres à l'interprétation de référence. Autrement dit, il installe l'écriture chiffrée comme la forme écrite des désignations parlées en France des nombres, sans en dégager les spécificités.

Finalement, nous notons aussi dans les manuels des utilisations diverses de signifiants « relais » suivant différents paramètres : le degré de familiarité et d'utilisation dans des contextes variés, leur « forme » (dessins, chiffres, oraux, « manipulables »), leur constitution ou non en système de numération, leur lien avec les collections (comptage ou désignation des groupements). Ils sont choisis pour aider l'élève à réaliser les différentes étapes de l'itinéraire. Certains sont communs aux deux manuels, comme les doigts des mains, les écritures additives et les « désignations des groupements ». Ils semblent provenir d'habitudes culturelles et institutionnelles favorisées par des potentialités anthropomorphiques. D'autres sont plus spécifiques à un manuel, comme les boîtes de Tchou ou les nombres comme Perrine et Dédé, ces derniers apparaissent comme des choix propres aux auteurs et non caractéristiques d'un itinéraire. Leur utilisation « à bon escient » semble constituer des aides pour l'enseignement dans la réalisation de l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé. Cependant, des questions se posent sur ce qu'ils adviennent en classe. Ils sont en effet tous susceptibles d'être utilisés dans une interprétation ordinaire (avec repérants) ou arithmétique additive, bien qu'ils doivent servir pour un passage à une interprétation multiplicative. Ceci fait le lien avec le paragraphe suivant.

²²² Faire des groupes, les défaire, passer à un groupement supérieur, c'est-à-dire faire des groupements de groupements, échanger un groupement d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur et inversement, coder, c'est-à-dire passer d'une collection réorganisée en groupements à une représentation du nombre, décoder, découvrir les lois régissant les groupements successifs.

4.2 Vers de nouvelles questions

Dans cette deuxième partie de la thèse, grâce à la théorie des champs conceptuels, nous avons fait le lien entre les interprétations de la première partie et un sujet qui utilise les numérations. Nous avons défini la notion de cheminement cognitif au niveau de celui qui résout un problème. Dans le chapitre 4, sont indiqués ceux qui sont particulièrement à l'œuvre dans les premiers problèmes rencontrés concernant les nombres. Regarder l'enseignement de la numération du point de vue des interprétations nous a amené à la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement qui est un reflet à ce niveau des cheminements cognitifs. Ainsi avons-nous pu construire une problématique d'enseignement en reconsidérant la « non-congruence » à partir de laquelle a été formulé notre problème initial. L'étude des recherches antérieures nous a permis de voir comment des réponses étaient apportées à cette problématique d'enseignement. Trois types d'itinéraire ont été définis dans le chapitre 5, et l'analyse de deux manuels a précisé comment ils étaient utilisés dans ce premier niveau de transposition vers la classe.

Le bilan précédent a ouvert un champ de questionnement. Le projet de la thèse est de comprendre les déroulements en classe. Ainsi, allons-nous nous intéresser aux questions qui concernent les écueils spécifiques que pose la multiplicité des interprétations possibles dans le déroulement des séances d'apprentissages dans une classe de CP.

En effet, nous avons montré que les deux manuels utilisent des séquences clés dans lesquelles les chiffres de l'écriture chiffrée sont distingués et mis en relation avec un signifiant de type « désignations des groupements ». Auparavant, pour « Cap Maths », l'écriture chiffrée est la version écrite des désignations parlées et des liens ont été faits pour permettre de « lire » ces écritures chiffrées. Par exemple le « 3 » de « 34 » est relié à « la famille des trente », c'est-à-dire à tous les nombres (à deux chiffres) commençant par « 3 », ce qui favorise une interprétation ordinale avec repérants. Dans « J'apprends les maths avec Tchou », un lien formel a été établi en outre avec les mots d'une numération « régulière ». Il reste que les mêmes signifiants sont susceptibles d'être utilisés dans une même séance *a priori* dans des interprétations différentes : des anciennes pour répondre au moins à une partie des questions posées et une nouvelle qui est enjeu d'apprentissage. En effet, dans les séances clés, « Cap Math » emploie des désignations des groupements dans un contexte de dénombrement et « J'apprends les maths avec Tchou » utilise des désignations d'une suite de collections organisées en groupements (déjà envisagées comme signifiant du nombre, les nombres « comme Perrine ») obtenues au fur et à mesure en ajoutant un. Ceci favorise les interprétations arithmétiques additives ou/et ordinales (avec repérants), alors même que l'interprétation multiplicative est visée. Au-delà de ces séquences, le fait que les mêmes signes (oraux et écrits) renvoient à des interprétations différentes pose un problème spécifique à l'enseignement de la numération, quel que soit l'itinéraire. Quand les écritures chiffrées sont dites (pour soi ou pour les autres), la désignation parlée en langue maternelle est toujours susceptible de faire référence à une interprétation ordinale. Ainsi, dans sa gestion il est possible (probable ?) que l'enseignant convoque chez les élèves des interprétations qui font potentiellement obstacle à l'apprentissage visé. Ceci est d'autant plus sensible que les signifiants « relais » que nous avons croisés dans nos analyses peuvent eux aussi être interprétés de différentes manières. La troisième partie aborde ce problème en classe. Nous allons y préciser nos questions.

TROISIEME PARTIE

Analyse de réalisations en classe

CHAPITRE VII p. 229
Compléments théoriques et méthodologiques

CHAPITRE VIII p. 254
Analyse de séances en classe

CHAPITRE IX p. 331
Perspectives de recherche :
propositions pour une ingénierie didactique

<p>CHAPITRE VII</p> <p>Compléments théoriques et méthodologiques</p>
--

Introduction	230
1. Position du problème étudié	230
1.1 Les questions	230
a. Rappels sur les résultats antérieurs	230
b. Conséquences en classe : des signes identiques pour des interprétations différentes	231
c. Les questions	234
1.2 Les apports des recherches antérieures	235
2. Cadre théorique.....	237
2.1 Le cadre général de la double approche	237
a. Eléments généraux.....	237
b. Utilisation dans la thèse.....	239
2.2 Les outils didactiques d'analyse : les éléments empruntés à la théorie des situations.	240
a. motivation du choix de la Théorie des Situations Didactiques (TSD)	240
b. Les éléments retenus	241
3. Méthodologie.....	248
3.1 Choix des observations.....	248
a. Le choix du nombre de classes et de l'utilisation d'un manuel.....	248
b. Choix du manuel	249
c. Le choix des classes et des enseignants.....	249
d. Les données	250
3.2 Méthodologie	250
a. L'analyse <i>a priori</i>	251
b. Les indicateurs dans les déroulements	251
c. L'analyse des déroulements en classe	252
d. Les réponses aux questions	253

Introduction

Dans la première partie de la thèse, nous avons dégagé les mathématiques des numérations avec la notion d'interprétation. Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressé au sujet, ce qui a permis d'établir une problématique en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement. Grâce à une analyse des recherches antérieures nous avons mis en évidence des types d'itinéraires cognitifs puis, grâce à une étude au niveau des manuels, nous avons précisé ces itinéraires pour une progression en classe. Compte tenu de l'orientation du travail, il s'agit maintenant d'apprécier le rôle que joue un ensemble de paramètres non encore étudiés dans les déroulements en classe, paramètres à mettre en relation avec les itinéraires cognitifs « effectivement » empruntés par une classe de CP.

Nous allons tout d'abord rappeler les résultats déjà obtenus pour préciser les questions que nous nous posons dans cette troisième partie (§1). Ensuite nous complétons notre cadre théorique pour permettre d'y répondre (§2). Nous terminons ce chapitre en présentant notre méthodologie (§3).

1. Position du problème étudié

1.1 Les questions

a. Rappels sur les résultats antérieurs

Les liens entre stratégies et interprétations²²³

L'écriture chiffrée est utilisée à la maternelle principalement en tant que forme écrite de la numération parlée en France, celle-ci étant perçue via une interprétation ordinale (avec repérants ou non) et éventuellement, et dans une moindre mesure, via une interprétation arithmétique additive. En CP, la numération chiffrée amorce une évolution de cette interprétation ordinale (avec repérants) vers une interprétation de référence²²⁴. En outre, la numération parlée en France est susceptible d'y être utilisée dans une interprétation (arithmétique) multiplicative quand elle est reliée aux écritures chiffrées interprétées ainsi. Quel que soit le type d'itinéraire envisagé, l'apprentissage visé est la disponibilité chez les élèves de différents cheminements cognitifs pour résoudre des problèmes. Ils mettent en jeu les trois (ou quatre) interprétations de la numération parlée en France ainsi que l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. Comme les désignations sont susceptibles de concerner les mêmes problèmes relatifs aux nombres, des relations se créent. Pour les rappeler, reprenons l'exemple donné dans le chapitre 4 concernant la comparaison de deux collections de points figurés sur une feuille, exemple qui nous a servi à discuter de la trace de telle ou telle interprétation dans les stratégies²²⁵. Une première stratégie consiste en un comptage de un en un. Elle est reliée à une interprétation ordinale, avec éventuellement l'utilisation de repérants. Dans une deuxième stratégie, il s'agit d'ajouts successifs de « dix »,

²²³ Les interprétations ont été élaborées dans la première partie de la thèse et sont en jeu dans les itinéraires cognitifs d'enseignement utilisés dans la deuxième partie.

²²⁴ C'est ainsi que nous avons analysé les textes officiels, mais nous avons indiqué que tous les aspects ne sont pas nécessairement en jeu. A minima il s'agit que les chiffres soient distingués et associés aux notions de dizaine et d'unité, en particulier pour donner du sens aux opérations posées.

²²⁵ La relation stratégie/interprétation a été discutée dans le chapitre 4. L'observateur, chercheur ou enseignant, ne peut pas relier d'une manière automatique l'utilisation de telle stratégie à telle interprétation, bien que la notion d'interprétation d'une numération ait été définie dans la première partie de notre thèse. C'est en particulier ce qui nous a amené à définir les notions de cheminement cognitif (potentiel) pour les élèves et d'itinéraire cognitif d'enseignement.

elle peut mettre en jeu une interprétation additive. Un comptage de dizaines peut engager des propriétés relatives à une interprétation multiplicative, et enfin un codage à l'aide de chiffres d'une certaine organisation des collections met en jeu des propriétés de l'interprétation de référence²²⁶.

Des utilisations différentes des interprétations selon l'itinéraire cognitif d'enseignement

Les différentes interprétations que nous avons dégagées nous ont permis d'analyser les recherches et les manuels en termes d'itinéraire cognitif d'enseignement. Pour le premier itinéraire, l'évolution de l'interprétation de l'écriture chiffrée dérive de celle de la numération parlée en France en une interprétation multiplicative. Pour le deuxième, une numération régulière, c'est-à-dire dont la forme met en évidence une interprétation multiplicative, est utilisée comme relais. Dans le troisième, l'évolution de l'interprétation de l'écriture chiffrée se fait tout d'abord sans recours à un système de numération oral²²⁷, ensuite les liens se font avec la numération parlée en France.

Le projet de la thèse

Les questions qui se posent alors sont multiples. Il pourrait s'agir de préciser encore les itinéraires cognitifs, savoir ce qu'il advient en classe pour chacun d'entre eux, ou un seul plus particulièrement. Nous pourrions nous interroger ainsi sur le décalage entre les prescriptions du manuel (prises ici comme tâche prescrite à l'enseignant) et la tâche redéfinie puis effective de l'enseignant, en considérant son activité. Nous pourrions aussi nous tourner vers les élèves en analysant les stratégies mises en place suivant les différentes étapes d'un itinéraire, ou bien encore vers les enseignants, soit en analysant la diversité des pratiques liées à l'apprentissage de la numération, soit en étudiant l'influence de ce contenu sur la pratique d'un enseignant.

Notre projet est de comprendre comment les différentes interprétations vont intervenir en classe, et d'une certaine manière, quel que soit l'itinéraire, quelle que soit la classe et quel que soit l'enseignant. Nous voulons qu'il soit possible d'en retirer des enseignements pour dégager de nouvelles pistes qu'il resterait alors à étudier. Il nous semble alors qu'un travail préparatoire doit être entrepris concernant les interprétations au niveau de la classe cette fois-ci. Ceci justifie l'orientation du paragraphe suivant.

b. Conséquences en classe : des signes identiques pour des interprétations différentes

Les mêmes désignations sont susceptibles de faire référence à des interprétations différentes à des moments différents selon les itinéraires. En particulier, l'écriture chiffrée « prend place » auprès des désignations parlées en France de différentes manières. Le problème pour l'enseignement est de convoquer en classe ces différentes interprétations à « bon escient » et au bon moment dans l'itinéraire. La difficulté que nous avons signalée est qu'un même signifiant peut renvoyer à différentes interprétations selon le « contexte » d'utilisation, mais aussi selon les connaissances des intervenants, ici l'élève (chacun d'entre eux) et l'enseignant. Ceci rend difficile le « contrôle » de l'usage des différentes interprétations, d'autant que des stratégies qui apparaissent comme identiques pour un observateur peuvent sous-tendre des interprétations différentes. Ceci dérive en particulier du fait que les élèves (et l'enseignant) utilisent la numération parlée comme un langage. Les propriétés mathématiques sous-jacentes ne sont pas explicites. Ainsi, l'écriture chiffrée garde parfois sa place ancienne par rapport à la

²²⁶ Dans la notion de cheminement cognitif, et dans les exemples donnés dans le chapitre 4, nous avons mis en relief la complexité des stratégies potentiellement utilisables, certaines ne faisant pas nécessairement appel aux numérations (comme l'association terme à terme).

²²⁷ Ce qui ne veut pas dire sans l'emploi d'autres signifiants, y compris oraux, mais ceux-ci ne se constituent pas en système sémiotique comme une numération.

numération parlée en France (un « simple » passage à l'écrit d'une désignation orale, par exemple « 23 » est synonyme de l'écriture littérale « vingt-trois ») et d'autres fois elle doit être utilisée dans son interprétation de référence (par exemple en termes de dizaine(s) et d'unité(s) pour une addition posée), tout au moins en distinguant les deux chiffres. Quand il s'agit de « parler » des nombres dans les situations d'apprentissage, les interactions verbales en classe convoquent nécessairement (*a minima* initialement) une interprétation ordinale (avec repérants ou non) ou arithmétique additive du nombre, qu'il soit dit ou écrit. Ceci amène un problème spécifique à la classe, celui de mener les séances d'apprentissage sur un « objet » (l'écriture chiffrée) qui est déjà nommé et dont le nom renvoie à une interprétation ancienne non congruente avec celle visée. Donnons quelques exemples à partir des manuels étudiés.

Exemple 1 : « Cap Maths »

Dans la séquence clé, « grand Ziglotron », la séance 2 (unité 8) contribue à ce que les élèves associent aux désignations parlées une décomposition en « *groupements de dix et en unités* ». Dans cette séance, les élèves doivent remplir un bon de commande dans lequel on demande tout d'abord l'écriture chiffrée puis une désignation de la quantité en termes de « ... *paquets de dix boutons et ... boutons* ». La stratégie des élèves prévue par le manuel consiste à obtenir une désignation parlée pour obtenir une désignation écrite chiffrée puis ensuite une désignation de la quantité en termes de « ... *paquets de dix boutons et ... boutons* ». Plusieurs problèmes se posent alors.

Premièrement, l'obtention de la désignation chiffrée est envisagée via la désignation parlée, grâce en particulier au parallèle entre les régularités de la comptine orale (vingt, trente, quarante) et celles de la suite chiffrée (cette association a été prescrite dans les séances antérieures). Ainsi, l'interprétation de l'écriture chiffrée est celle de la numération parlée en France. Cette dernière permet d'obtenir le cardinal d'une collection figurée. Les stratégies qui semblent les plus probables sont des comptages qui mettent en œuvre une interprétation ordinale (avec repérants ou non) ou/et additive, et c'est donc ainsi qu'est perçue et utilisée la numération écrite chiffrée, alors même que son interprétation doit évoluer dans cette séance.

Deuxièmement, le problème se pose de l'obtention par les élèves d'une désignation de la quantité en termes de « ... *paquets de dix boutons et ... boutons* ». Le manuel ne l'indique pas. Si les élèves tentent d'utiliser la désignation parlée en France du cardinal, ils peuvent s'appuyer sur les repérants/appuis additifs et ainsi mettre en jeu un passage d'une interprétation ordinale avec repérant ou (arithmétique) additive vers une interprétation multiplicative. Ceci va dans le sens de l'itinéraire proposé par le manuel. Mais des recherches antérieures ont montré que les élèves perçoivent difficilement qu'une quantité puisse être désignée à l'aide de deux signifiants de la numération parlée en langue maternelle (et non pas un seul), DeBlois (1995).

Troisièmement, se pose le problème des justifications accessibles aux élèves. Cette justification est susceptible de mettre en jeu des interprétations anciennes. Dans les indications sur la mise en commun à faire avec les élèves, c'est d'ailleurs ainsi que le manuel le propose. La vérification de la réponse est envisagée soit par un recomptage « *revenir aux plaques et aux boutons, et compter un par un les boutons pour savoir si on arrive bien au nombre voulu* », soit dans son lien avec la désignation parlée « *dire par exemple que, « 3 plaques ça fait 30 boutons » (en le justifiant de diverses manières) « et encore 4 boutons, ça fait bien 34²²⁸ »*, soit en utilisant les chiffres de l'écriture chiffrée « *dire que c'est juste, ça se voit, parce que dans 34, on voit le 3 et le 4 ; le 3 ce sont les plaques de dix et le 4 les boutons tout seuls* ». Seule la dernière est susceptible de mettre en jeu une interprétation de référence,

²²⁸ Le fait d'employer le mot « dire » indique que les écritures « 3 », « 30 » et « 34 » désignent les désignations orales « trois », « trente » et « trente-quatre »...

mais ce lien direct entre l'écriture chiffrée et la désignation du type « ... *paquets de dix boutons et ... boutons* »²²⁹ est constaté *a posteriori* et il est mis sur un même plan que les autres.

Comment l'enseignant va-t-il gérer toutes les interprétations pour atteindre l'objectif de la séquence ?

Exemple 2 : « J'apprends les maths avec Tchou »

La séance clé p. 74-75 a pour but que les élèves utilisent une interprétation multiplicative de la numération écrite chiffrée, puis de la numération parlée en France. Jusqu'alors, l'interprétation prescrite des désignations parlées en France est arithmétique avec appuis additifs (surtout dans un but de calcul mental) ou ordinale avec repérant (pour dénombrer) alors que les écritures chiffrées sont une transcription écrite de ces désignations orales. Dans cette séance, l'analyse de l'itinéraire montre que les écritures chiffrées doivent être interprétées de manière multiplicative (à l'aide en particulier d'une numération annexe « régulière » à l'asiatique, celle de Tchou), ce qui entraîne de pouvoir, grâce à l'association précédente écrit/oral, interpréter ainsi la numération parlée en France.

Dans une première tâche, activité A, les élèves doivent « dire » la désignation écrite chiffrée d'une collection organisée sous la forme de groupements de dix²³⁰. Celle-ci est désignée par l'enseignant sous la forme de « c'est x groupes de dix et y points isolés ». Il est difficile de savoir quelle interprétation peuvent utiliser les élèves pour résoudre ce problème, mais plus encore, la justification de la bonne réponse peut faire intervenir comme précédemment des interprétations anciennes. Ceci est renforcé par le fait que les désignations « comme Tchou » et « comme Nous » sont employées après chaque question. Dans l'activité B, qui est d'une certaine manière une tâche réciproque de la première, les mêmes remarques peuvent être faites. Remarquons que dans les prescriptions du manuel, nous pouvons voir la difficulté à distinguer toutes ces interprétations quand il s'agit de communiquer. En effet, page 117 du livre du maître, est écrit : « *Pour chacun des nombres précédents, il s'agit de comprendre que le premier chiffre de leur écriture indique le nombre de groupes de dix doigts, c'est-à-dire le nombre d'enfants qui ont levé tous leurs doigts, alors que le second chiffre indique le nombre de doigts levés par l'enfant qui ne les a que partiellement levés. L'usage du matériel (superposition du chiffre des unités sur l'écriture du nombre correspondant aux dizaines complètes) favorise la coordination des différents points de vue. Trente-quatre, par exemple, c'est : 34 doigts levés ; 3 groupes de dix doigts levés et encore 4 doigts ; 30 doigts levés et encore 4 doigts.* ». Dans l'expression « *des nombres précédents* », le mot nombre renvoie à la conception abstraite du nombre (l'objet dans la terminologie de Peirce, une définition dans le cadre des Mathématiques). Le nombre est différencié d'un de ses représentations, l'écriture chiffrée. Cependant ensuite la locution « *trente-quatre* » est plus ambiguë. Il n'est pas facile de savoir *a priori* s'il s'agit de désigner encore cet « objet » nombre, ou s'il s'agit cette fois-ci de relier expressément son signifiant de la numération parlée en France avec d'autres signifiants (contextualisés dans le cadre de doigts à lever). En outre, il est écrit « *34 doigts levés* » qui se lit usuellement « *trente-quatre* », or si dans le contexte de la leçon, les auteurs attendent de n'y voir que l'écriture chiffrée, dans le contexte du déroulement en classe l'enseignant et les élèves (du fait de leurs connaissances anciennes) peuvent dire ou penser « *trente-quatre* », ce qui peut évoquer l'interprétation première de la numération parlée. Il n'y a pas cette ambiguïté en ce qui concerne la locution « *3 groupes de dix doigts levés et encore*

²²⁹ Il s'agit bien ici de la désignation du type « ... plaques de dix et ... unités » et non d'une des désignations possibles du même type, puisque les contraintes matérielles dans cette séance 2 entraînent que cette unique formulation est pertinente pour résoudre le problème.

²³⁰ Les tâches que nous allons citer sont indiquées en termes d'activité dans le manuel. Elles sont consultables dans les annexes du chapitre 6.

4 doigts » puisque les nombres successivement en jeu sont strictement inférieurs à dix²³¹. Mais, en ce qui concerne « 30 doigts levés et encore 4 doigts », le représentant 30 fait-il référence à « trente » dans une interprétation ordinale ou (arithmétique) additive de la numération parlée en France ou bien à une interprétation de la numération écrite chiffrée de position (en distinguant les deux chiffres 3 et 0)²³² ? L'enseignant va lui aussi être amené à « parler » des nombres en classe, et donc à les « dire ». Que vont alors évoquer les différentes désignations ?

c. Les questions

En résumé, dans les différentes phases d'une séance, que ce soit pour indiquer la tâche, donner des aides ou valider les réponses, un enseignant est amené à communiquer, à interagir avec les élèves, et des signifiants des nombres vont être utilisés. Le langage employé peut convoquer chez l'élève des interprétations différentes. L'enseignant ne peut pas dire : « *ici j'utilise l'oral « vingt-trois » pour parler de l'écriture chiffrée « 23 » dans son interprétation de référence* ». « Vingt-trois » peut, à l'insu de l'enseignant, évoquer telle ou telle interprétation chez tel ou tel élève. Cela dépend des connaissances de l'élève, du « contexte » d'utilisation et ceci quel que soit l'itinéraire cognitif d'enseignement.

Nous formulons ainsi deux questions principales auxquelles nous voulons répondre dans cette troisième partie de la thèse.

Question 1 : Quel peut être le « jeu » des relations entre les cinq différentes interprétations susceptibles d'intervenir en classe au moment de l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel ?

Question 2 : Quels sont les facteurs « contextuels » qui contribuent à leur survenue ?

La première question amène des réponses descriptives, tandis que la deuxième est plus interprétative. Le but est de recueillir des informations pour comprendre les déroulements en classe du point de vue que nous avons adopté.

Nous ne voulons pas étudier en elle-même l'utilisation que font les enseignants des manuels. Nous allons en tenir compte, mais ce n'est qu'un des facteurs qui influe sur le déroulement. En effet, au-delà, nous voulons saisir quels sont les facteurs qui influent sur la survenue de plusieurs interprétations dans une même séquence d'enseignement. Nous voulons en retirer ainsi des renseignements susceptibles d'ouvrir de nouvelles pistes. L'hypothèse que nous faisons est que ces emplois multiples peuvent constituer des obstacles pour l'apprentissage.

Le moment de la première rencontre des connaissances nouvelles est celui qui amorce le processus d'évolution de la numération écrite chiffrée vers son interprétation de référence. C'est dans ce moment que sont susceptibles d'apparaître de la manière la plus évidente les difficultés d'apprentissage et d'enseignement. Ensuite il est plus difficile de comprendre ces difficultés. En effet, les connaissances acquises au fur et à mesure, et donc leur rôle, sont plus difficiles à estimer. Les écarts entre chaque classe se creusent, rendant plus complexe de faire ressortir des analyses des éléments de réponses généralisables. C'est pourquoi nous avons choisi d'étudier les interprétations à ce moment.

²³¹ Ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas un enjeu dans ces signes, puisque ces nombres vont devenir des chiffres dans 34. En outre nous avons signalé la difficulté conceptuelle des élèves à considérer qu'une telle désignation puisse indiquer le cardinal d'une collection.

²³² Signalons que cette « confusion » est fréquente en ce qui concerne 10/dix : « *L'enseignant dessine 10 points « comme Perrine » sur le tableau et rappelle aux élèves que c'est un groupe de dix* », p. 117 du livre du maître. L'écriture chiffrée 10 ne nous semble pas questionnée, alors que c'est le cas pour 20, 30, etc.

Précisons ce « moment » d'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel. L'interprétation de référence est celle que nous avons dégagée dans la première partie de la thèse dans une analyse mathématique. Ce n'est pas celle qui est forcément envisagée ou formalisée dans les recherches antérieures, dans les manuels, dans les instructions officielles ou encore par les enseignants. Ainsi nous ne pouvons pas nous y fier exclusivement pour définir ce moment de première rencontre. Un élément est cependant commun et essentiel dans l'évolution de l'interprétation des écritures chiffrées, même s'il peut revêtir des conceptions différentes d'une personne à l'autre, d'un manuel à l'autre, voire d'un programme à un autre : les chiffres doivent être distingués, et pour les nombres à deux chiffres, le premier (celui à gauche) doit renvoyer au concept de dizaine (paquets, groupements de dix) et le deuxième (celui de droite) à celui d'unité (d'objet « seul », non groupé). C'est ce savoir identifiable dans tous les manuels et dans toutes les recherches que nous considérons, et c'est la première rencontre avec ce savoir que nous étudions. Nous voulons y observer le jeu des différentes interprétations mobilisées, en particulier quand il va s'agir de nommer les écritures chiffrées.

Le sens donné dans les questions au mot « contexte » est assez général et doit être précisé. Auparavant, nous allons considérer ce que nous apportent des recherches antérieures sur les questions posées.

1.2 Les apports de recherches antérieures

Nous allons nous centrer sur les recherches qui concernent précisément les déroulements en classe de séances d'enseignement de la numération chiffrée en primaire, particulièrement au CP, du point de vue des problèmes posés par ses liens avec la numération parlée au niveau de l'enseignement. Nous n'avons trouvé que peu de travaux qui abordaient ce sujet, d'ailleurs la synthèse de Verschaffel & al. (2006) n'en mentionne aucun. Il y est pourtant indiqué l'importance du poids socioculturel dans les stratégies d'enseignement ainsi que celle des manuels scolaires. Fuson & Li (2009) signalent par ailleurs qu'elles pensent rencontrer des résistances chez les enseignants pour introduire la nouvelle façon d'aborder l'enseignement de la numération qu'elles prônent à travers le nouveau manuel « Math expression ». Ce dernier est distribué dans 49 états mais ne rencontre pas (encore) un large public. Verschaffel & al. (2006) mettent en exergue la nécessité de formations des enseignants pour prendre en compte les apports nouveaux des recherches.

Numa-Bocage, dans sa thèse (1997), relève chez les enseignants qu'elle a observés une utilisation simultanée de la numération parlée, du comptage et du groupement dans les séances d'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel. Les difficultés liées à l'utilisation des mots « chiffre » et « nombre » sont révélées dans l'analyse, ainsi que la faible attention que les enseignants portent aux liens entre écriture chiffrée et désignation orale, alors qu'ils interviennent nécessairement dans les séquences proposées. Tout se passe comme si elles étaient synonymes. La recherche montre par ailleurs une grande densité d'échanges oraux et très peu de passages à l'écrit. Les aides et les types d'échanges entre l'élève et le professeur sont catégorisés, mais ils ne sont pas analysés via la non-congruence.

Masselot, Numa-Bocage & Vinatier (2007) confrontent quant à elles trois axes d'analyse de la séance d'enseignement menée par une enseignante de CP sur la « *présentation de la dizaine* ». Cette séance a pour objectif d'une part de faire percevoir aux élèves la nécessité de développer une stratégie plus efficace que le dénombrement un à un, c'est-à-dire celle qui consiste à organiser une collection de trente-huit éléments dessinés en utilisant des groupements pour les dénombrer, et d'autre part à leur faire percevoir la pertinence de cette procédure²³³. Les élèves n'ont jamais encore été confrontés à une telle tâche consistant à

²³³ C'est ainsi qu'est décrit l'objectif de la séance par le professeur dans l'article.

grouper par eux-mêmes, même si des boîtes de dix ont été reliées à des écritures du type 10+10+10+2. Les analyses des chercheurs mettent en particulier en perspective les liens entre les échanges verbaux et le contenu de la séance, dans le but de fournir à l'enseignante qui a été observée trois lectures différentes de sa pratique. Chacune des trois auteures propose son analyse. Nous allons indiquer ce qui nous semble utile à notre travail.

L'analyse de Masselot permet de dégager les composantes médiative et cognitive parmi les cinq composantes de la théorie de la double approche didactique et ergonomique de Robert & Rogalski (2002). L'importance dans la séance du lien entre le problème posé et les stratégies dont disposent les élèves est mise en relief. Les élèves peuvent en effet résoudre le problème en utilisant la comptine numérique (aspect ordinal), ce qu'ils font effectivement, alors qu'un groupement par dix est attendu par l'enseignant. Cette stratégie est alors « soufflée » par l'enseignante au fur et à mesure de l'avancement dans la séance avec de plus en plus d'insistance, via le vocabulaire employé, la redéfinition de la tâche initiale et le matériel fourni (des boîtes avec des billes). Ce déroulement est analysé par Masselot comme répondant à la crainte que l'enseignante a de ne pas voir apparaître les groupements. La stratégie de comptage est passée alors d'un statut d'outil pour résoudre le problème à celui d'objet d'enseignement. Masselot conclut son article par le fait que les enjeux épistémologiques dans la conduite de la séance se trouvent en tension avec les exigences de deux ordres : « *pragmatique, pour réagir in situ aux aléas de la dynamique des échanges et soutenir l'avancée de la séance. La mise en place de formes d'aides appropriées pour que les élèves collaborent au développement de la séance en est une dimension importante [...]; relationnel, pour permettre à chacun de construire sa place dans les échanges verbaux* ». Nous retenons que ce sont bien des enjeux de contenus, épistémologiques, qui sont analysés comme facteurs influant sur le déroulement, mais aussi que les procédures effectivement employées par les élèves (non attendues par l'enseignante) ont déclenché différentes réactions et ainsi orienté ce déroulement.

Dans des termes différents et à l'aide du cadre théorique de la didactique professionnelle (Pastré), Numa-Bocage arrive à une conclusion similaire à celle de Masselot. Elle analyse le déroulement de la séance comme « *le passage à une posture de « médiation » chargée d'un enjeu épistémologique - chercher à faire revenir l'élève sur son action « qu'est-ce que tu faisais ? » - à une posture de tutelle visant la résolution pragmatique de la tâche « on va essayer de les ranger »* ».

Enfin, Vinatier, dans le cadre d'une analyse fonctionnelle de l'intersubjectivité, indique aussi un changement de gestion de l'intersubjectivité révélant « *un effort pour ramener le déroulement de la séance vers ce qui était prévu* ». Elle met elle-aussi en avant la préparation de la séance liée aux prescriptions du fichier.

Ainsi, si la non-congruence n'est pas spécifiée en tant que telle, c'est (du côté de l'épistémologie des contenus signalée par Masselot) le fait que les élèves disposent de la numération parlée pour résoudre le problème de dénombrement posé via un manuel scolaire qui fait obstacle à l'introduction de connaissances afférant à la numération chiffrée de position et qui donc influence le déroulement de la séance.

Ainsi cette dernière recherche met en exergue l'importance de l'exercice proposé aux élèves par rapport à ses connaissances. En outre, les échanges verbaux ne parviennent pas à dénouer la situation, si ce n'est par une indication de la stratégie par l'enseignante. Ceci ne répond pas de manière précise à nos questions, puisque d'autres facteurs sont susceptibles d'être pris en compte, mais cela permet de voir que la situation (au sens de la théorie des situations didactiques) est un paramètre essentiel à considérer. En particulier, nous en tirons l'enseignement que, pour nos observations, nous devons choisir des classes dans lesquelles les problèmes proposés aux élèves ne font pas obstacle *a priori* à la connaissance visée (ce qui

semble le cas pour la classe étudiée dans la recherche de Masselot, Numa-Bocage & Vinatier) et permettent au chercheur de considérer les différents poids des facteurs en jeu.

2. Cadre théorique

Les questions posées dans le paragraphe 1.1.c vont orienter nos choix théoriques et méthodologiques. Nous allons présenter le cadre théorique adopté et justifier son intérêt pour notre recherche (§2.1). Nous sommes alors amené à le compléter par des éléments didactiques qui permettent de répondre à nos questions (§ 2.2). La méthodologie est détaillée dans le § 3.

2.1 Le cadre général de la double approche

Pour suivre le projet de la thèse, nous devons tenir compte d'un grand nombre de paramètres, nous allons utiliser le cadre général de la double approche didactique et ergonomique de Robert & Rogalski (2002). Nous rappelons brièvement les éléments principaux sur lesquels elle s'appuie (§a) puis en quoi ils nous sont utiles dans la thèse (§b).

a. Eléments généraux

Les cinq composantes de la double approche

La double approche de Robert et Rogalski (2002) aborde les déroulements en classe du point de vue de la didactique et de la psychologie ergonomique. Elle a été élaborée initialement comme méthodologie pour étudier les pratiques des enseignants en relation avec les apprentissages (potentiels) des élèves inférés de leur activité mathématique. Le contenu est donc central, ce qui justifie une approche proprement didactique. Cinq composantes des pratiques en classe sont utilisées, les extraits qui suivent sont de Robert (2007).

- La composante médiative et la composante cognitive sont issues de l'analyse didactique.
 - « *Nous travaillons sur des séances en classe, en général sur des vidéos et leur transcription. A partir de ces données, nous faisons une analyse des activités des élèves [...]. Nous dégageons de ces analyses les deux premières composantes des pratiques que nous appelons composante cognitive et composante médiative qui correspondent au choix des enseignants sur les contenus, sur les tâches définies à partir des énoncés des exercices, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur nature et sur les déroulements. Tout ce qui est décidé a priori alimente la composante cognitive et les choix correspondants en termes de déroulement s'inscrivent dans la composante médiative.* ». (Ibid., p 275)
- Du côté du métier, trois composantes sont distinguées.
 - « *D'abord une composante personnelle qui permet de pondérer ce qu'on voit en classe et de l'intégrer dans le temps long, en faisant une place aux choix de l'enseignant liés à ce temps long. Cette composante traduit aussi les représentations du professeur, les risques qu'il consent dans l'exercice de son métier, le confort dont il a besoin : un métier s'exerce longtemps et on ne peut pas faire d'effort surhumain pendant très longtemps.* ».
 - « *Nous avons distingué la composante institutionnelle : elle intègre ce que les pratiques doivent aux programmes, aux horaires, ou même aux ressources comme les manuels, ou encore à l'existence et aux exigences de l'administration : ce sont les éléments qui peuvent être en partie inférés à partir des observations de classe.* ».

- « Nous ajoutons une composante sociale qui correspond au fait que l'enseignant n'est pas tout seul, dans sa classe : les élèves, non seulement comme collectif mais aussi comme individus appartenant à des groupes sociaux, interviennent ; l'enseignant n'est pas tout seul dans son établissement : il est soumis à des exigences, des attentes, quelquefois des contraintes dont on ne peut pas faire l'impasse pour interpréter ce qui se passe en classe. ». (Ibid, p 279 et 280).

Tâche, activité et apprentissages

L'étude des déroulements en classe se fait avec l'hypothèse qu'ils induisent des activités chez les élèves qui sont source d'apprentissages. L'activité désigne tout ce que l'on dit, pense ou fait à la suite d'une tâche à exécuter, comme répondre à une question d'un problème. Dans la double approche l'activité se perçoit dans la dialectique tâche/activité que nous avons déjà indiquée quand nous avons parlé des différents niveaux de tâche pour l'enseignant en préambule de l'introduction de l'étude des manuels. Plus précisément, Leplat (2006) considère un triplet sujet-tâche-activité « On peut lire le triplet de la manière suivante. L'activité dépend du sujet et de la tâche, celle-ci étant définie comme un objectif à atteindre dans des conditions déterminées (techniques, organisationnelles, sociales, etc.). La tâche répond à la question : qu'est-ce qui est à faire ?, l'activité à la question : qu'est-ce qui est fait effectivement ? Analyser l'activité, c'est analyser ce triplet qui forme un système, chaque terme étant en double relation (dans les deux sens) avec chaque autre. Ainsi l'activité dépend de la tâche (prescrite), mais elle peut aussi la modifier (pour en faire la tâche redéfinie). L'activité dépend du sujet, mais elle peut aussi le modifier au sens où elle peut changer, par exemple, les compétences nécessaires à son exécution. Enfin le sujet et la tâche constituent un couplage dans lequel ces termes se codéterminent. La tâche fait appel à certaines caractéristiques du sujet qui changent quand l'activité évolue ».

En ce qui concerne le lien avec les apprentissages nous retenons que « Ces activités des élèves, notamment lorsqu'elles sont mathématiques, sont elles-mêmes vecteurs d'apprentissage potentiel : c'est notre point d'accès aux apprentissages visés, même s'il existe bien d'autres déterminants de ces apprentissages. Nous faisons de plus comme si les élèves (ou suffisamment d'élèves) entraînent dans le jeu de l'apprentissage, en s'impliquant dans ce qui est proposé par l'enseignant ou l'enseignante en classe, ce qui peut exclure du champ de ces analyses certaines classes très difficiles », Robert & Rogalski, 2002.

Le rôle de l'enseignant

Beaucoup de facteurs influencent l'enseignement et l'apprentissage : les facteurs institutionnels, ceux liés au métier d'enseignant, aux connaissances des élèves, à celles du professeur, ceux relatifs à des dispositions matérielles (comme le temps) et aux tâches proposées aux élèves. Tous ces facteurs n'ont pas le même poids, pas la même généralité ni la même « inertie » : le professeur va pouvoir jouer sur certains et moins sur d'autres. S'il suffisait de proposer une liste d'exercices à faire aux élèves pour enseigner et être sûr de l'apprentissage engendré, le professeur ne serait qu'un « passeur » de consignes, un organisateur de tâches. Ce n'est pas ainsi qu'est perçu l'enseignant dans la double approche. Ce dernier y est considéré comme un médiateur œuvrant dans un système dynamique et ouvert (Rogalski, 2003). En outre l'hypothèse est que l'enseignant entretient un rapport rationnel avec ce qu'il fait dans son métier. Cette hypothèse induit une cohérence dans ses actes qui légitime ainsi la recherche de déterminants et variables relativement indépendants de facteurs plus personnels : affectifs, sociaux ou psychologiques.

b. Utilisation dans la thèse

Le lien avec les questions posées

La double approche nous permet d'apporter certaines réponses à nos deux questions.

En effet, l'approche didactique est essentielle pour répondre à la première question, et la double approche nous laisse une certaine marge de manœuvre pour les outils didactiques à employer. Nous pouvons donc choisir ceux qui nous semblent les plus adaptés.

Ce qui nous est particulièrement utile dans la deuxième approche, c'est de relier l'étude didactique précédente avec une approche ergonomique qui va permettre d'aborder la deuxième question en envisageant une pluralité de paramètres, facteurs, déterminants, variables. Les enseignants y sont considérés comme des professionnels en situation de travail. Regarder ainsi leur activité permet de comprendre différemment l'enchaînement des différentes interprétations, leurs liens qui sont indiqués dans la première question. En outre, l'hypothèse de cohérence et de stabilité de la pratique des enseignants nous permet d'inférer certaines généralités des analyses en classe. Ceci légitime ainsi que l'on puisse obtenir des éléments de réponse à partir de l'étude de cas. Or la teneur de nos questions renvoie à des études de cas en classe alors que le projet de la thèse demande des réponses génériques. Nous adhérons ainsi à l'ambition de la double approche : « *Nous cherchons à comprendre comment les individus particuliers (enseignant/e/s, élèves) peuvent investir les marges de manœuvre qui leur « restent », et qui doivent donc être reconnues par nous, par delà les contraintes. Cela nous amène à travailler aussi bien du côté générique - pour délimiter ce qui est commun - que du côté individuel, pour mettre en évidence les variables entre enseignants ou enseignantes.* », Robert & Rogalski (2002). Ainsi ce cadre théorique nous offre des possibilités méthodologiques qui servent nos objectifs. Nous abordons les questions à travers l'analyse du déroulement de séances particulières en classe.

Les premiers outils d'analyse

Revenons au lien activité/apprentissage qui sous-tend la légitimité de la double approche comme l'expose Robert (2002-2003). Ce sont des éléments théoriques de la didactique qui nous permettent de le comprendre, il y aura donc lieu d'indiquer ceux qui sont retenus. Un certain nombre de ces éléments sera commun à Robert (2002-2003), Rogalski (2003) et Roditi (2005), ils vont être complétés en fonction des questions spécifiques qui se posent ici. Ils serviront à fournir des indicateurs des déroulements en classe, mais ils seront aussi utilisés pour les analyses afin de répondre aux questions propres à cette partie de la thèse. Cependant, nous restons au stade de la description des activités potentielles des élèves, décrites à l'aide d'un philtre théorique, il ne s'agira pas d'en inférer des apprentissages certains.

Nous utilisons en particulier la notion d'incident qui a été définie par Rogalski (2003) comme un décalage entre ce qui était prévu et ce qui se réalise : « *La définition la plus générique d'incident est le fait qu'il y a décalage entre ce qui est attendu de l'action et ce qui se passe effectivement. On réserve en général le terme d'incident aux cas où on évalue que ce décalage est « négatif », et met en question l'atteinte du but visé. L'incident en ce sens générique n'est donc pas l'incident de discipline, mais celui directement lié au contenu de l'enseignement en jeu.* ». Nous utilisons aussi pour caractériser les incidents observés la typologie de Roditi (2005) et de ses modes de gestion. Six catégories sont distinguées dont nous redonnons les définitions dans les termes employés par Roditi :

- Les erreurs : une erreur dans ce contexte est définie comme étant « *toute réponse non conforme à celle qui est manifestement attendue en fonction de la tâche* ».
- Les questions ou les propositions, qui constituent « *des éléments nouveaux en cours de résolution d'un problème* », et nous ajoutons aussi au cours de la phase de synthèse ou de dévolution.

- Les réponses incomplètes ou non suffisamment argumentées.
- Les élèves interrogés qui restent silencieux.
- Ce que disent les élèves quand la réponse est hors de leur portée.
- Les élèves sont en désaccord mais personne n'a tort, ceci arrive en particulier lorsque plusieurs stratégies de résolution correctes sont exposées.

Huit modes de gestion sont identifiés « classés en fonction de l'autonomie laissée à l'élève après l'intervention du professeur » :

- Le professeur ignore l'incident.
- Le professeur répond à la place de l'élève, il exécute la tâche.
- Le professeur récupère et enrichit une question ou une réponse, en élargissant la question, en complétant une idée, en passant du particulier au général, en contextualisant ...
- Le professeur change d'intervenant en sollicitant un autre élève ou bien temporise.
- Le professeur guide l'élève, « de façon telle que, peut-être « malgré lui », l'élève produise la réponse attendue ».
- Le professeur facilite l'exécution de la tâche, « en en exécutant une partie, en indiquant la méthode à suivre, en lui rappelant un exercice analogue ». Par rapport au guidage, le professeur n'accompagne pas l'élève pas à pas, en particulier, il ne reste pas forcément à ses côtés.
- Le professeur demande un approfondissement. Cette demande permet de « relancer son travail sans aide supplémentaire ».
- Le professeur reprend de façon neutre l'expression d'un élève. Ceci peut être une manière de relancer le travail de l'élève, ou dans une phase collective, d'interpeller la classe, ce peut être aussi une façon d'indiquer un jugement sur la validité de ce qui est en jeu.

Nous utilisons aussi la notion d'épisode en tant qu'unité de découpage supérieure à celle d'un incident. Selon Roditi (2005), à la suite de Hache & Robert (1997), un épisode est « un échange d'actes pédagogiques et d'échanges entre professeurs et élèves en vue de parvenir à un but donné qui est en général la réalisation d'une tâche ». Nous allons reprendre la notion d'épisode, en tant qu'unité de découpage (plus) fine, ceci est précisé par la suite. Nous découpons la séance le plus souvent en un « lancement » (indication de la tâche des élèves par l'enseignant), une « réalisation de la tâche des élèves » (l'enseignant prépare la phase suivante, il s'assure par exemple que les élèves puissent s'engager dans la tâche), et une « mise en commun » c'est-à-dire un moment dans lequel les élèves et l'enseignant vont être amenés publiquement (classe entière) à réfléchir sur le travail qui a été fait (discussion des stratégies, des réponses, éléments d'institutionnalisation). Le scénario est alors constitué du découpage opéré dans les déroulements observés.

Cependant nous n'avons pas pour but d'étudier les pratiques des enseignants en elles-mêmes. Ainsi, nous allons proposer un dispositif d'analyse spécifique à notre recherche, ce qui requiert de préciser les éléments didactiques que nous allons utiliser.

2.2 Les outils didactiques d'analyse : des éléments empruntés à la théorie des situations

a. Motivation du choix de la Théorie des Situations Didactiques (TSD)

Pour compléter notre analyse didactique des déroulements en classe, nous avons choisi la théorie des situations didactiques (TSD). Grâce au concept de situation, elle nous permet en particulier d'envisager de relier un ensemble d'éléments qui sont sous-jacents aux questions

posées : le rôle des élèves (leurs connaissances disponibles), celui de l'enseignant (son rôle dans la séance) et celui du problème posé aux élèves (le rôle de la spécificité du contenu mathématique en jeu). De plus la TSD peut s'articuler avec les éléments théoriques déjà retenus de la théorie des champs conceptuels et de la double approche.

En ce qui concerne la « compatibilité » de la TSD et de la théorie des champs conceptuels nous pouvons citer Flückiger (2004) ou plus directement les remarques de Vergnaud (1991) lorsqu'il explicite la nature des relations entre les situations de sa théorie et les situations de la TSD. Nous pouvons aussi citer Conne (2001). Nous retenons particulièrement le fait fondamental, commun aux deux théories, que l'apprentissage (d'un concept mathématique) se fait grâce à la résolution de problèmes. Vergnaud met l'accent sur l'ensemble des problèmes à résoudre avec les classes de problèmes propres au concept. Brousseau insiste sur le processus didactique. Tant Vergnaud que Brousseau abordent la dialectique entre l'aspect outil et l'aspect objet, ce que nous avons déjà indiqué dans le chapitre 4. Ainsi, grâce à une analyse via la TSD, nous pouvons envisager de dégager des stratégies qui nous permettent d'en inférer les différentes interprétations des numérations (dans le sens dégagé dans la première partie de la thèse, sens non psychologique) dans les déroulements observés en classe. Nous avons indiqué dans le chapitre 4 en quoi ces interprétations avaient un caractère hypothétique pour l'observateur et n'étaient pas une entité isolée, notamment avec la notion de cheminement cognitif et de champ conceptuel (variété et historicité des concepts en jeu, des problèmes à résoudre). Néanmoins, nous avons aussi souligné qu'il était possible de réduire cette incertitude en considérant les paramètres de la situation. C'est ce que nous voulons entreprendre avec l'analyse didactique dans cette troisième partie de la thèse, et c'est pourquoi nous choisissons la TSD.

En ce qui concerne la « compatibilité » entre la TSD et la double approche, Robert souligne que l'approche didactique nécessite d'utiliser des « résultats » didactiques. Ceux-ci servent à analyser les tâches des élèves et des enseignants afin d'en inférer des activités. Ceci nous semble compatible avec la TSD. En effet, l'analyse de la résolution de problèmes en situation permet de comprendre les apprentissages, ce qui est une façon d'appréhender l'activité des élèves selon une théorie didactique. Qui plus est, le rôle de l'enseignant y est bien selon nous celui d'un médiateur. Là encore la TSD permet d'analyser ce rôle d'un point de vue compatible avec la double approche.

Nous allons préciser les compatibilités en indiquant les éléments de la TSD retenus. Indiquons simplement pour terminer ce paragraphe que, d'une certaine manière, nous investissons les marges de manœuvre que la double approche offre dans les choix didactiques, et ceci est possible en utilisant la TSD.

b. Les éléments retenus

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à certains éléments de la théorie des situations afin de les adapter à nos besoins spécifiques. Nous nous référons principalement à Brousseau (1996, 1998), Perrin & Hersant (2003) et Margolinas (1992).

Milieu et contrat didactique

Nous voulons comprendre d'une manière générale « qui est à l'initiative de quoi » par rapport à l'emploi de telle ou telle interprétation, de tel ou tel signifiant, dans une analyse a posteriori des déroulements en classe. Ceci nous amène à convoquer la notion de milieu et de jeu pour l'analyse *a priori* (Brousseau 1996, 1998) articulée avec la notion de contrat didactique reprise dans l'analyse *a posteriori*. Nous détaillons ce dernier point avec les outils élaborés par Perrin et Hersant (2003). Ceci nous permet de nous doter d'un instrument d'analyse des différents cas de figure concernant la place de l'élève et de l'enseignant par rapport au savoir.

Cinq statuts du savoir pour l'élève sont distingués :

- un savoir entièrement nouveau (avant une première rencontre),
- un savoir en cours d'apprentissage, nouveau après une première rencontre,
- un savoir en cours d'apprentissage, en cours d'institutionnalisation,
- un savoir en cours d'apprentissage, institutionnalisé à consolider,
- un savoir ancien qui n'est (en principe) plus enjeu d'apprentissage.

Notre recherche concerne un savoir *a priori* entièrement nouveau, cependant, nous l'avons vu, nous devons tenir compte de l'ensemble du processus, en particulier du fait que les désignations écrites chiffrées ont déjà été utilisées.

L'institutionnalisation, le contrat didactique et le milieu sont définis dans la lignée de la TSD. Précisons, et c'est cette définition que nous retiendrons, que le contrat didactique est ce qui règle les attentes réciproques des élèves et de l'enseignant à propos du savoir, c'est ce qui permet à ce dernier de réguler les rapports de l'élève avec le milieu. Le milieu caractérisant la situation didactique, les apprentissages se font grâce aux adaptations de l'élève dans les interactions milieu-élève(s), l'élève étant vu comme un système de connaissances qui agit sur le milieu éventuellement antagoniste. La distinction savoir/connaissance vient du fait que la connaissance permet de prendre des décisions, d'agir sur et dans une situation. Sa reconnaissance en tant que connaissance utile en fait un savoir. Un savoir peut être utilisé comme connaissance ou non. Ce point sera repris en développant les notions développées par Conne (1992) qui sont congruentes avec celles en jeu ici.

Trois niveaux de structuration du contrat sont alors abordés : le macrocontrat (à l'échelle d'un objectif d'enseignement voire plus), le mésocontrat (à l'échelle de la réalisation de la résolution d'un exercice ou d'un enchaînement d'exercices), le microcontrat (à l'échelle d'un épisode qui correspond à une unité de contenu mathématique comme une des questions d'un exercice, ou à une unité d'activité du professeur et des élèves²³⁴). Nous nous centrons sur les mésocontrats et microcontrats qui correspondent au niveau où se situent maintenant nos questions sur les différentes positions de l'élève et de l'enseignant par rapport au savoir.

Mésocontrats

L'évolution de l'avancée du temps didactique de la connaissance vers le savoir est modélisé pour une classe ordinaire selon la présence d'un milieu a-didactique ou non. Ainsi ce modèle proposé par Perrin-Glorian et Hersant peut être utilisé pour analyser ce qui se passe dans les classes « ordinaires ». Deux composantes, le statut du savoir et les potentialités a-didactiques de la situation, sont considérées comme se stabilisant au niveau du mésocontrat. Les types de mésocontrats didactiques se succèdent et font écho aux cinq états du statut du savoir pris dans l'ordre de leur énonciation ci-dessus : il y a donc un ordre didactique à respecter dans l'évolution du statut du savoir « le savoir en cours d'institutionnalisation » lié à un de ces contrats ne peut se dissocier des autres. Deux modalités de mésocontrats sont envisagées selon la présence ou non d'une situation a-didactique.

Dans le cas d'un milieu avec des potentialités a-didactiques, les deux mésocontrats « dévolution d'une première situation » et « institutionnalisation » sont incontournables si l'enseignant installe une situation didactique conforme à celle de la TSD. Dans le cas où on n'a pas de milieu capable de rétroactions interprétables par les élèves, les deux mésocontrats « initiation » et « reconnaissance du savoir » sont ceux qui vont nous intéresser (et ce qui se passe entre les deux) car ils concernent le premier instant pour l'élève où le savoir est utilisé comme connaissance. Voici le tableau extrait de Perrin & Hersant (2003) à propos des liens entre contrat et statut du savoir en jeu :

²³⁴ C'est donc cette définition d'épisode que nous prenons.

Statut didactique du savoir Type de situation	Savoir entièrement nouveau	Savoir en cours d'apprentissage			Savoir déjà institué
		après une 1 ^{ère} rencontre	en cours d'institutionnalisation	savoir institutionnalisé à exercer	
Absence de milieu adidactique ou non utilisation de ce milieu	$\Sigma \rightarrow K$ <i>Initiation</i>	$\Sigma, S \rightarrow K$ <i>Pseudo-dévolution</i>	$K \leftrightarrow \Sigma$ <i>Reconnaissance du savoir</i>		$\Sigma \rightarrow S$ <i>Mobilisation du savoir</i>
Existence d'un milieu adidactique permettant des rétroactions interprétables par les élèves	$S \rightarrow K$ <i>Dévolution d'une première situation</i>	$S \leftrightarrow K$ <i>Rappel</i>	$\Sigma \rightarrow S$ <i>Réinvestissement de savoirs</i>	$\Sigma \rightarrow K$ <i>Entraînement</i>	$\Sigma \rightarrow \Sigma$ <i>Restitution du savoir</i> $(S \rightarrow K)$ $\Sigma \rightarrow \Sigma$ <i>Revue de savoirs</i> $S \leftrightarrow \Sigma$ <i>Reprise</i>

Dévolution d'une première situation : dévolution au sens de Brousseau, c'est-à-dire le processus qui amène l'élève à prendre en charge la responsabilité du traitement de l'exercice.

Réinvestissement de connaissances : avant l'identification par les élèves de leur connaissance comme un savoir, les élèves peuvent faire fonctionner à nouveau la même connaissance. Pour ceux qui n'ont pas produit exactement la connaissance attendue lors de la première rencontre, le contrat est encore de l'ordre de la dévolution ou pseudodévolution (voir ci-après).

Rappel : dans une situation située après la première rencontre et avant l'institutionnalisation l'enseignant peut provoquer une évocation des procédures utilisées dans une situation déjà rencontrée pour permettre une nouvelle dévolution.

Institutionnalisation : le professeur érige les connaissances en savoir, c'est pour nous le premier moment de mise en forme du savoir.

Réinvestissement de savoir : le contrat est le même que dans le réinvestissement de connaissances mais le savoir est au moins partiellement institutionnalisé.

Reconnaissance du savoir : le professeur demande la formulation du savoir utilisé.

Entraînement : les élèves sont censés connaître le savoir et se l'approprier comme connaissance disponible.

Restitution du savoir : convocation du savoir ancien sous sa forme de savoir pour répondre à une question du professeur (au moment de l'évaluation entre autres).

Mobilisation du savoir : convocation du savoir ancien sous sa forme de savoir pour traiter une nouvelle situation (au moment de l'évaluation entre autres).

Revue de savoirs : convocation du savoir ancien dans une situation d'institutionnalisation ayant pour objet de créer des liens entre plusieurs situations ou plusieurs savoirs.

Reprise : modification du savoir ancien au moins dans sa formulation.

Initiation : transmission directe du savoir par ostension. Le savoir montré par l'enseignant à l'élève doit devenir une connaissance sans passer par une situation a-didactique. Ici a lieu la première mise en forme du savoir.

Pseudodévolution : Dans le cadre d'une situation suivant une première rencontre avec mésocontrat d'initiation, c'est l'occasion pour l'élève de produire une connaissance à partir du savoir dévoilé par l'enseignant.

Suivant les mésocontrats la responsabilité vis à vis du savoir est plutôt du côté de l'enseignant ou plutôt du côté des élèves : contrats de dévolution, rappels, réinvestissement, entraînement, reconnaissance, mobilisation plutôt du côté de l'élève ; initiation et institutionnalisation plutôt du côté de l'enseignant. Mais, selon Perrin & Hersant (2003), ce partage de responsabilité au niveau du méso-contrat ne peut se voir que dans l'analyse *a posteriori* car cela peut être géré tout autrement que ce que propose cette classification. C'est pourquoi est introduite la notion de micro-contrat. Elle est centrée sur cet aspect qui est la dimension exclusivement considérée par Brousseau (1996).

Microcontrats

A l'intérieur de ces mésocontrats didactiques existent des microcontrats qui établissent, à une échelle plus petite, la responsabilité prise par l'élève et l'enseignant par rapport au savoir objet de l'apprentissage, dans la production de la connaissance ainsi que dans l'évaluation et la validation des réponses des élèves. Perrin-Glorian et Hersant distinguent alors trois microcontrats dans lesquels le professeur garde toute la responsabilité :

- Le microcontrat d'information: l'enseignant apporte la connaissance sans se référer à des exemples et à l'utilisation du savoir.
- Le microcontrat d'ostension assumée : l'enseignant apporte la connaissance et montre comment l'utiliser, de plus il évalue les réponses des élèves.
- Le microcontrat d'ostension déguisée : l'enseignant apporte la connaissance et montre comment l'utiliser et il évalue les réponses des élèves mais de plus il dissimule cette responsabilité en utilisant une situation (maïeutique, effet Topaze).

Deux microcontrats dans lesquels la responsabilité est partagée entre le professeur et la classe, sachant que chaque élève va s'y investir plus ou moins :

- Le microcontrat d'adhésion : l'enseignant délègue une responsabilité à l'ensemble de la classe, il s'appuie sur certains élèves pour produire des connaissances et faire avancer son cours, tout en laissant la possibilité aux autres d'intervenir quand ils ne sont pas d'accord.
- Le microcontrat de production collective : l'enseignant délègue la responsabilité à l'ensemble de la classe de la production de connaissance et une part de la responsabilité dans la validation des réponses. La part d'adidacticité nécessaire est importante pour que ce contrat soit efficace.

Deux microcontrats dans lesquels la responsabilité est partagée entre le professeur et chaque élève de la classe lorsque les élèves travaillent individuellement ou en groupes :

- Le microcontrat de production individuelle : chaque élève assume une part de responsabilité effective dans la validation des réponses et dans la production des réponses. Chaque élève est concerné. La part d'adidacticité nécessaire est importante pour que ce contrat soit efficace.
- Le microcontrat de tutorat : l'enseignant intervient pour aider un élève ou un groupe d'élèves, sans entrer dans un microcontrat d'information ou d'ostension.

Ces microcontrats indiqués par Perrin et Hersant sont particulièrement utiles à notre recherche car ils nous donnent la possibilité d'évaluer la répartition des responsabilités sur le savoir. Les indicateurs à chercher devront donc permettre de caractériser les microcontrats successifs. Cependant la seule analyse en termes de contrat est insuffisante. D'autres paramètres jouent,

en particulier la pertinence de l'obstacle rencontré par rapport au savoir visé, ce qui influe aussi sur le fait que ces micro- ou méso- contrats vont pouvoir fonctionner. Autrement dit, si les exercices proposés n'amènent pas les élèves à se confronter avec le savoir visé, les microcontrats dans lesquels les élèves ont une responsabilité par rapport au savoir ne peuvent pas être installés, malgré la volonté du professeur.

Le rôle de l'enseignant : la phase de bouclage

Nous considérons l'enseignant comme un médiateur dans un milieu ouvert, Rogalski (2003). Nous avons décidé d'analyser les déroulements à l'aide de la notion de contrats, il semble nécessaire de nous donner les moyens d'appréhender la dynamique d'enchaînement de ces contrats, et particulièrement des microcontrats.

Avec les notions de méso et micro contrats didactiques nous avons un moyen de prendre en compte les différentes possibilités quant à la répartition de la responsabilité de la construction du savoir entre professeur et élève(s). Les différents enchaînements des contrats permettent alors de structurer le processus d'apprentissage selon ces éléments théoriques. Il nous reste maintenant à choisir ou élaborer d'autres éléments théoriques qui permettent de comprendre cette structure. Nous allons l'aborder en considérant la finalité de l'enseignement : le savoir. Il s'agit alors de rendre compte des différentes options possibles quand il s'agit pour le professeur de mener en classe une phase comprenant une première mise en forme d'un nouveau savoir, que nous appellerons « phase de bouclage ».

Cette phase de bouclage utilise la notion de « boucle » connaissance/savoir. La distinction entre connaissance et savoir que nous empruntons à Conne (1992), qui traite la question de manière très générale, est congruente avec celle en jeu précédemment. Cette distinction relève de l'interaction entre un sujet et une situation. Conne (1992, p. 223), distingue alors « *Le cas où le contrôle de la relation sujet/situation se trouve du côté de la situation, ce sera de l'ordre de la connaissance, du cas où ce contrôle se trouve du côté du sujet (et de la représentation), ce sera de l'ordre du savoir* ». Plus précisément, c'est un critère d'utilité qui les distingue : « *Si les processus cognitifs relèvent de l'adaptation du sujet à la situation et de l'équilibrage des structures cognitives, le savoir est de l'ordre de l'utilité des connaissances pour transformer les situations.* » (Ibid., p.223). Il poursuit: « *Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. [...] Dans bien des cas savoir, c'est savoir se mettre en situation de mobiliser ses connaissances pour agir.* » (Ibid., p. 225 et 240). L'enseignement vise alors à mettre en forme la connaissance de l'élève en savoirs prédéfinis et de manière plus précise : « *Le processus d'enseignement part des savoirs à enseigner, puis il cherche à atteindre (induire) la connaissance au moyen des transformations de situations relatives à ces savoirs, et se conclut par le retour à ces savoirs de départ !* » (Ibid., p. 242). Il y a donc à ce niveau un processus savoir/connaissance/savoir qui fait écho dans l'institution scolaire à l'articulation savoirs à enseigner/organisation didactique productrice de connaissances/savoirs enseignés. Au niveau de l'enseignement d'une notion spécifique en classe, nous le traduisons en deux boucles archétypales selon la façon dont le savoir est initialement introduit. Le savoir peut être tout d'abord exposé aux élèves, il peut apparaître sous une forme savante (par un cours magistral par exemple) ou/et une forme pragmatique, c'est-à-dire « *un savoir-faire sur la situation* », (Ibid., p. 253). Par exemple l'enseignant le fait fonctionner devant les élèves, ensuite ces derniers vont le faire fonctionner dans un ou des exercices et il s'agira de le faire reconnaître par les élèves. Dans la deuxième boucle, le savoir n'est pas exposé initialement. Un travail des élèves le précède, travail à partir duquel la connaissance utilisée devra être transformée en savoir. A ce niveau de réalisation du projet d'enseignement en classe nous

nous référons à la première possibilité par l'expression « boucle savoir/connaissance/savoir » et à la deuxième par « boucle connaissance/savoir ». Le mot boucle fait à chaque fois référence au processus savoir/connaissance/savoir dans lequel s'inscrivent les deux possibilités, même si dans la deuxième le savoir n'apparaît pas initialement de manière explicite (ni formalisé). Cette distinction est un outil pour comprendre l'activité de l'enseignant en classe car elle permet d'envisager des ressources différentes quand il va s'agir de manière concrète de « *mettre en forme la connaissance de l'élève en savoirs* », puisque dans la première, à l'inverse de la seconde, il peut faire référence au savoir tel qu'il l'a introduit initialement. Les deux boucles n'excluent pas un jeu prolongé entre connaissance et savoir, il s'agit de distinguer comment est amorcé ce jeu. Cependant savoir et connaissance sont à considérer sur des temporalités différentes : « [...] *les savoirs, eux, sont toujours à utiliser, c'est-à-dire à rapporter à de prochaines situations.* » (Ibid., p. 239). En se centrant sur des séquences en classe, nous utilisons les cinq statuts différents du savoir pour l'élève selon l'avancée didactique que mettent en exergue Perrin-Glorian et Hersant (2003, p. 239). A un moment donné, le savoir est susceptible d'être mis en forme une première fois, c'est-à-dire que l'enseignant le fait apparaître de manière décontextualisée et dépersonnalisée en utilisant en particulier des formulations qui le permettent. C'est un premier élément du processus d'institutionnalisation qui se déroule sur un temps plus long. Mais dans un exercice, à la suite de la réalisation d'une tâche, avant de le relier au savoir, il est aussi possible que les élèves accèdent à une information sur la validité de leur réponse : « *J'appelle phase de conclusion la phase au cours de laquelle l'élève accède à une information sur la validité de sa réponse. Cette information doit être pertinente du point de vue du problème et du savoir. La phase de conclusion est sous la responsabilité du maître* », Margolinas (1992, p.128). Nous nous appuyons sur cette définition et sur cet article de Margolinas pour préciser ce que nous entendons dans la thèse par phase de bouclage. Ainsi, tout d'abord, pour nous, elle sous-tend la potentialité d'une phase comprenant une mise en forme d'un savoir nouveau (avant ou après une première rencontre), alors que les élèves ont déjà utilisé ce savoir sous forme de connaissances : c'est la première mise en forme dans le cas d'une boucle connaissance/savoir. Puisqu'il s'agit d'utiliser un travail des élèves, le professeur peut s'appuyer sur celui-ci en particulier quand il leur permet d'accéder à une information sur la validité de leurs réponses et procédures. Cette phase participe à l'institutionnalisation. Tôt ou tard les élèves doivent savoir si ce qu'ils disent, la façon dont ils ont procédé et les réponses avancées sont pertinents du point de vue du problème et du savoir. Sous la responsabilité de l'enseignant, deux modalités sont à envisager (Margolinas, 1992). Cela peut être une phase d'évaluation quand l'enseignant délivre un jugement de validité sans appel sur la réponse de l'élève en utilisant publiquement²³⁵ sa relation privilégiée au savoir : le maître sait, l'élève sait que le maître sait (contrat didactique) et donc admet le jugement du maître. Cela peut être une phase de validation si l'élève lui-même décide (cela peut être grâce à des connaissances anciennes, grâce à une discussion avec ses pairs, ou encore par rétroaction du milieu) de la validité de sa réponse (toujours sous la responsabilité de l'enseignant même s'il réserve sa décision sur le moment). Ainsi, par exemple, en situation d'action, la validation de l'effet de l'action en gain-perte ou vrai-faux peut conduire à la validation de l'action et de la procédure qui a guidé l'action si le milieu est approprié. Différents microcontrats que nous avons cités utilisent ces notions d'évaluation et de validation.

²³⁵ Margolinas (1992) définit les notions de privé et public. « *J'appelle formulation publique de A envers B relativement à Z, une formulation de A au sujet de Z qui est potentiellement portée à la connaissance de B. Le mot potentiellement indique que B n'est pas tenu de s'intéresser à la formulation publique de A. [...] J'appelle formulation privée de A envers B relativement à Z, une formulation de A au sujet de Z qui n'est pas portée à la connaissance de B* ». Nous adoptons cette terminologie.

En ce qui concerne le lien avec le processus d'apprentissage, nous retiendrons qu'un abandon progressif de la validation par le milieu matériel (quand il y en a un) pour être remplacé par une validation par les connaissances et savoirs des élèves, participe au processus de décontextualisation et de dépersonnalisation. Ceci peut en particulier précéder une formulation des connaissances des élèves en phase collective. Des prises d'information peuvent être utilisées par l'enseignant pour contrôler la pertinence de la mise en forme du savoir. Quand il n'y a pas de validation par un milieu matériel, pour la validation des connaissances des élèves, il reste la possibilité au professeur de se référer à ce qu'ils disent ou montrent (il peut d'ailleurs y recourir dans tous les cas). Ainsi, même si le milieu n'est pas adidactique et est constitué par exemple par un questionnement du professeur sur des problèmes évoqués, il peut y avoir validation. Cependant, l'utilisation d'un milieu objectif donne un moyen supplémentaire d'évaluer la pertinence des connaissances mobilisées par rapport au savoir visé. En outre, le passage de la validation de l'action ou/et de la procédure à l'émergence de la nouvelle connaissance est toujours hypothétique, même dans le cas d'une situation à forte potentialité adidactique. Les élèves peuvent être confrontés au fait de considérer certaines de leurs formulations comme des conjectures et ils doivent trouver eux-mêmes les moyens de les valider, ce qui entraîne des démarches de preuve, d'argumentations. Autrement dit, une certaine adidacticité du milieu assure que les élèves peuvent se lancer dans ces démarches mais ne peut pas donner la certitude que le débat utilise les preuves intellectuelles qui mènent au savoir visé. Cette incertitude peut être gérée via une ou des phases de bilan que nous comprenons comme nécessairement collectives et à propos d'un problème donné aux élèves. Le premier rôle de ces phases de bilan est de permettre la formulation publique des méthodes et stratégies des élèves, le deuxième rôle est la diffusion de ces méthodes, le troisième est de permettre à l'enseignant de se tenir prêt à préparer et à organiser une phase dans laquelle les élèves vont accéder à une information sur la validité de leur réponse dans la mesure où la phase de bilan ne mène pas à la phase de validation attendue puis à celle d'argumentation. Il aura alors à intervenir, il pourra aussi éviter de plaquer ses propres connaissances sur les représentations des élèves. Rappelons que la nature d'une phase de validation dépend des possibilités de rétroaction du milieu et des connaissances de l'élève qui peuvent lui servir de critère de validité. Mais l'enseignant n'est jamais contraint d'organiser une phase de bilan car il peut toujours imposer une phase d'évaluation : c'est lui qui conclut. Cependant, dans ce cas, la phase liée au savoir visé qui pourrait suivre (que ce soit via un mésocontrat de reconnaissance de savoir ou d'institutionnalisation) comporte une incertitude d'autant plus grande quant à la participation des élèves qu'elle ne peut pas s'engager à partir d'un débat sur la validité des réponses et procédures des élèves.

En accord avec ce qui précède, nous allons donner ce que nous entendons dans la thèse par phase de bouclage. Elle permet de s'intéresser aux formes et contenus de savoirs dans des déroulements en classe dans le moment identifié précédemment. Cet outil théorique s'avère nécessaire pour préciser l'action didactique de l'enseignant en particulier lorsqu'il tente de voir si les élèves ont reconnu l'utilité de leur connaissance (savoir pragmatique) ou non. Dans l'appellation « phase de bouclage », « bouclage » fait référence aux boucles précitées dans le rapport entre connaissance et savoir défini par Conne (1992). Le mot « phase » renvoie au fait que cette notion peut constituer un outil pour étudier les déroulements en classe. Il souligne ainsi la parenté avec la phase de conclusion développée par Margolinas (1992).

La phase de bouclage a pour vocation de transformer la connaissance en savoir dans le processus savoir/connaissance/savoir. Elle est un moyen pour le professeur de faire cette transformation après un ou une série de problèmes que les élèves ont traités. Elle a pour but de clore le (ou la série de) problème(s), c'est le premier niveau de bouclage, celui étudié par Margolinas. Nous y ajoutons le fait que ce premier niveau a pour but d'installer un moment de mise en forme du savoir (pragmatique) en jeu susceptible d'avoir un sens pour les élèves

(c'est un deuxième niveau de bouclage). Cette mise en forme n'a pas lieu nécessairement à la fin de chaque problème traité. Elle est contenue potentiellement dans la phase de bouclage et est une étape du processus d'institutionnalisation qui tend à rendre le savoir disponible aux élèves dans ses utilisations institutionnelles. Le sens est estimé soit via un problème soumis aux élèves qui précède la mise en forme (boucle connaissance/savoir), soit via un problème qui la suit (boucle savoir/connaissance/savoir). La tâche proposée aux élèves et l'activité qu'elle entraîne, notamment l'adidacticité qu'elle génère et la pertinence par rapport au savoir visé et aux savoirs anciens, conditionnent la phase de bouclage mais n'en sont pas des composantes. Quatre moments sont identifiés :

- l'accès à la validité des procédures et des réponses des élèves (avec les deux modalités évaluation et validation)²³⁶,
- la diffusion des procédures et des réponses des élèves dans la classe,
- le débat intellectuel mettant en jeu les connaissances adéquates avec le savoir visé (dans une situation à potentialités adidactiques, il s'agit du remplacement du milieu matériel par la connaissance, susceptible d'être considérée comme un savoir),
- une mise en forme du savoir visé.

Les moments ne se succèdent pas nécessairement dans cet ordre, ni les deux niveaux de bouclage. L'appellation « moment » indique qu'il s'agit de contributions qui ne se déroulent pas forcément sur une durée d'un seul tenant. Cependant, les scénarios ne sont pas écrits à l'avance, entre autres du fait de l'incertitude inhérente aux trois premiers moments mettant en jeu les connaissances des élèves et leur interaction par rapport au milieu. Le dernier moment, celui d'une mise en forme, est particulier car c'est celui qui est visé *a priori* dans la phase de bouclage. Il contient une dimension décontextualisée et dépersonnalisée liée à la nature du savoir en jeu, il engage la responsabilité du professeur. Ceci révèle la tension interne à la phase de bouclage entre les trois premiers moments et le dernier, celle entre connaissance (des élèves) et savoir (visé). Pour contribuer à la réduction de cette tension, un sous-moment peut être envisagé, celui concernant la sélection et la hiérarchisation des réponses ou procédures.

La dynamique d'une phase de bouclage, son organisation, est en lien avec certains éléments :

- les mésocontrats et microcontrats qui indiquent la répartition du partage de la responsabilité du savoir/connaissances entre les élèves (ou un élève ou un groupe) et le professeur (observables en particulier dans les aides et étayages de l'enseignant).
- le niveau de décontextualisation du savoir.
- la participation des élèves (qui ?, combien ?)
- la nature du savoir en jeu (obstacles épistémologiques, lien avec les concepts anciens)
- le niveau de connaissance des élèves (qui détermine entre autres quelles sont les connaissances anciennes liées au savoir nouveau).

3. Méthodologie

3.1 Choix des observations

a. Le choix du nombre de classes et de l'utilisation d'un manuel

Ces deux choix ne sont pas indépendants. Une analyse comparative des classes observées permet d'estimer les facteurs spécifiques provenant de la composante personnelle d'un professeur. Cependant, cette comparaison est facilitée si les classes observées suivent un

²³⁶ C'est ce qui fait écho à ce que Margolinas appelle phase de conclusion. Les autres « moments » de la phase de bouclage, sont, nous semble-t-il, aussi envisagés dans l'article de 1992, mais ils ne sont pas présentés comme nous, puisque nous les lions à un deuxième niveau. Cette notion reste pour nous un outil théorique et elle ne comporte rien de prescriptif.

même scénario. En effet une analyse des différences entre les déroulements peut permettre de voir l'influence des éléments qui sont spécifiques à chaque classe. Or si le scénario est le même, il y a moins d'éléments qui sont spécifiques, mais il reste ce qui est du ressort de la composante personnelle de l'enseignant. Ainsi il est plus aisé d'y dégager le poids de cette composante personnelle. C'est pourquoi nous avons choisi deux classes, et deux classes qui suivent un même manuel. En outre l'utilisation d'un manuel scolaire est une pratique courante des professeurs des écoles, ce qui sert notre projet de proposition en direction des enseignants de classes « ordinaires ». Le manuel scolaire nous est aussi utile d'un point de vue méthodologique. Il nous donne en effet accès à l'ensemble des tâches données *a priori* aux élèves dans l'année scolaire, nous permettant ainsi d'inférer leurs connaissances anciennes et donc leurs stratégies probables, en particulier grâce à l'identification de l'itinéraire cognitif proposé.

b. Choix du manuel

Les manuels scolaires empruntent essentiellement deux types d'itinéraire le 1 et le 2, et plus couramment le premier (celui que propose Cap Maths). Une numération orale y sert de relais pour l'évolution de l'interprétation de la numération écrite : pour un des itinéraires c'est la numération parlée en France et pour l'autre c'est une numération « régulière ». L'interprétation convoquée pour cette numération orale est arithmétique multiplicative, les écritures chiffrées gardant leur rôle de forme écrite de la numération orale peuvent ainsi théoriquement être interprétées de la même façon²³⁷. Les désignations parlées en France étant nécessairement un savoir ancien des élèves, pour « dire » les nombres ou pour dénombrer, elles sont susceptibles d'intervenir dès le moment de première rencontre signalé, même si elles ne sont pas *a priori* convoquées dans l'itinéraire. En outre, tôt ou tard de nouveaux liens doivent se faire entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée (disponibilité des connaissances). Dans un itinéraire de type 1, la numération parlée en France est explicitement utilisée dans le moment de première rencontre : ici se nouent simultanément les liens entre ancien et nouveau. Par un effet « loupe », choisir un itinéraire de type 1 peut alors nous permettre d'observer la complexité du jeu des interprétations qui interviennent tôt ou tard dans l'enseignement et l'apprentissage de la numération écrite chiffrée. Nous pouvons ainsi obtenir des éléments de réponse à nos questions qui ont un intérêt générique, c'est-à-dire ici quel que soit l'itinéraire cognitif d'enseignement.

Le scénario doit posséder cependant certaines potentialités, en particulier la possibilité de disposer d'un milieu capable de rétroactions permettant de faire évoluer les connaissances des élèves (en référence à la théorie des situations didactiques). Ceci permet ainsi aux élèves d'emprunter une certaine diversité de cheminements cognitifs et donc de considérer un large panel de paramètres du côté des élèves. D'après l'analyse que nous en avons déjà faite dans le chapitre 6, le choix de « Cap Maths » nous semble ainsi adapté pour répondre à nos questions. La séquence « grand Ziglotron » est celle dans laquelle les chiffres de l'écriture chiffrée sont reliés pour la première fois à la notion de dizaine et d'unité. C'est donc le moment de l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel auquel font référence les questions posées et c'est donc celui qui va être choisi pour nos observations.

c. Le choix des classes et des enseignants

Comme Robert (2002-2003), ce qui nous intéresse c'est ce qui peut être appris en classe par les élèves. L'activité est source d'apprentissage (par hypothèse de la double approche), mais

²³⁷ Nous avons signalé les points communs et les différences entre une interprétation arithmétique multiplicative envisageable pour certaines numérations parlées et l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. En ce qui concerne les enjeux spécifiques au moment de la première rencontre, ces deux interprétations coïncident au niveau des connaissances en jeu dans l'apprentissage de la numération écrite chiffrée.

nous nous limitons à l'étude des déroulements en classe en liaison avec les activités des élèves et de l'enseignant pour le moment en classe qui nous intéresse, sans étudier le lien activités/apprentissages. Nous avons indiqué que cela suppose un rapport rationnel de l'enseignant avec ce qu'il fait dans son métier. C'est cette hypothèse qui légitime la recherche de déterminants et variables indépendants de facteurs plus personnels : affectifs, sociaux, psychologique. Nous n'étudions pas ces derniers facteurs, sans pour autant nier leur importance dans tel ou tel contexte. Autrement dit nous voulons considérer des déroulements dans lesquels ils sont susceptibles d'avoir un poids moindre ou, tout au moins, dans lesquels nous serons en mesure de pouvoir envisager de répondre aux questions sans les mettre au premier plan. Or ceux-ci sont susceptibles d'intervenir de manière plus importante lorsque l'enseignant est débutant ou/et dans des classes dans lesquelles le rapport au savoir des élèves nécessite une gestion spécifique, comme dans des classes « difficiles »²³⁸. C'est pourquoi nous choisissons des enseignants expérimentés, c'est-à-dire ayant plusieurs années d'exercice en CP et des classes non ZEP (Zone d'éducation prioritaire). Par ailleurs, nous devons aussi choisir des enseignants qui ne s'éloignent pas trop *a priori* du scénario proposé par le manuel. A la fois pour pouvoir faire une comparaison, mais aussi car ce scénario a certaines potentialités didactiques qui sont utiles à notre analyse. Ce choix des enseignants est fait à l'aide d'entretiens préliminaires.

d. Les données

Pour chacune des deux classes de CP observées, durant l'année scolaire 2008-2009, les séances observées sont toutes les séances « grand Ziglotron », c'est-à-dire quatre séances pour chaque classe. Elles ont été filmées intégralement. Nous ne pouvons pas nécessairement avoir accès aux interprétations des élèves en regardant leurs actions ou paroles. Nous ne pouvons pas non plus les questionner pendant la séance, alors qu'après il nous semble qu'ils ne vont pas nécessairement utiliser les mêmes stratégies. En outre, les élèves de cet âge peuvent difficilement indiquer de manière verbale ce qu'ils ont fait. Nous pouvons néanmoins inférer les stratégies des élèves via une analyse des tâches dans les séances et des productions d'élèves que nous avons filmées ou recueillies²³⁹. Un élément essentiel pour nous est la teneur des échanges entre l'enseignante et les élèves. Nous ne pouvons pas y avoir accès avant et très difficilement après la séance. Le parti pris a donc été de suivre l'enseignant avec la caméra. Les informations que nous recueillons sont donc aussi celles qu'il a pu prendre.

Un entretien est fait après les séances avec chaque professeur afin d'éclairer leur choix et de voir leurs conceptions sur le nombre et l'enseignement de la numération (relation écrit/oral, éléments du projet, perception de la non congruence).

3.2 Méthodologie

Tout d'abord nous allons analyser les séances *a priori*, du côté de l'enseignant et du côté des élèves. Ensuite nous allons relever les indicateurs dans les déroulements. Puis nous allons les analyser en les mettant en perspective avec l'analyse *a priori*. Finalement à partir de cette analyse nous allons apporter des réponses aux deux questions posées. Nous allons donc procéder en quatre temps.

²³⁸ Voir par exemple Butlen D., Dubut A, Masselot P., Ngono B., Peltier M-L. & Pézard M. (2003) ou Butlen D., Masselot P. & Pézard M. (2002).

²³⁹ Rappelons aussi que notre objectif n'est pas ici d'évaluer l'apprentissage des élèves.

a. L'analyse *a priori*

Nous faisons une analyse didactique *a priori* des tâches des élèves et de celles de l'enseignant. Cette analyse se fonde sur les prescriptions du manuel qui nous permettent d'analyser les tâches avant de voir les déroulements en classe. Nous précisons la tâche, y relevons les variables didactiques et les stratégies pour les élèves. Il s'agit de dégager les stratégies *a priori* des élèves de la tâche prescrite par le manuel. Certaines de ces stratégies sont indiquées par le manuel et d'autres non. Dans le déroulement, outre le fait que l'enseignant a pris connaissance des stratégies indiquées par le manuel, certaines autres peuvent être attendues par lui, mais d'autres encore ne le sont peut-être pas et ces dernières peuvent pourtant être utilisées par les élèves. Comme nous nous centrons sur les facteurs qui peuvent influencer sur le déroulement cognitif de la séance et de la séquence, nous devons indiquer toutes les stratégies qui sont susceptibles d'intervenir, en particulier celles qui peuvent créer un « incident » au sens de Rogalski. Pour ce faire, nous allons tout d'abord indiquer toutes celles envisageables pour ensuite prendre en compte certains facteurs qui réduisent les possibles : les connaissances des élèves disponibles ou mobilisables (inférées de l'étude du parcours suivi par le manuel avant cette séance, des aspects culturels de certaines connaissances non enseignées en CP mais disponibles pour au moins certains élèves et des résultats de recherches) ainsi que certaines conditions spécifiques à la séance (disposition d'un milieu capable de rétroactions permettant de faire évoluer les connaissances des élèves, possibilités matérielles offertes, particularités liées à une situation de communication entre élèves). Il s'agit donc de délimiter un ensemble de stratégies « probables » du point de vue de l'analyse entreprise dans cette recherche.

A partir de cette analyse, nous précisons alors l'enjeu de la séance au niveau cognitif et replaçons ce dernier dans l'itinéraire cognitif d'enseignement prescrit par le manuel. Cette analyse permet ensuite de déterminer les tâches des enseignants selon la composante cognitive et médiative, en mettant en perspective les indications du manuel et les contraintes institutionnelles et sociales : celles liées aux programmes, aux temps dévolus aux séances, aux spécificités de la classe, de l'établissement. Ceci nous amène à dégager une vue d'ensemble de la complexité (et pluralité) du déroulement potentiel des séances. Dans cette analyse *a priori*, nous ne tenons pas compte des conceptions du professeur sur la notion en jeu, sur les apprentissages ou sur l'enseignement. Nous déterminons un champ des possibles sans préjuger de l'influence de la composante personnelle de l'enseignant. Nous allons pouvoir apprécier son influence grâce aux analyses du déroulement des deux classes et des entretiens post-séance des enseignants, en inférant le projet de l'enseignant. La comparaison entre les deux classes permet finalement de mieux apprécier le rôle de cette composante personnelle dans le jeu des différentes interprétations.

b. Les indicateurs dans les déroulements

Nous faisons tout d'abord un découpage des déroulements selon le « lancement », la « réalisation de la tâche » par les élèves et la « mise en commun ». Celui-ci pourra s'analyser avec la théorie des situations via les contrats entre les élèves et l'enseignant. Ce travail est présenté en annexe pour faciliter la lecture. Ensuite, le découpage des déroulements en différents épisodes doit permettre de le mettre en rapport avec notre analyse *a priori*. Pour réaliser ce découpage, nous relevons la tâche prescrite aux élèves (par l'enseignant) et l'activité (observée) de l'enseignant et des élèves. Nous relevons les variables didactiques utilisées et la teneur des échanges entre enseignant et élève(s), tout particulièrement les incidents.

Les déroulements des séances ne seraient pas nécessairement les mêmes si les conditions de classe n'étaient pas telles qu'elles sont, par exemple si l'enseignant avait plus de temps et moins d'élèves. Cependant, puisque nous voulons prendre en compte les facteurs inhérents à une classe « ordinaire », nous allons considérer ces conditions, comme des catalyseurs, des

déclencheurs, des « loupes » qui permettent de mettre en exergue les difficultés propres à l'enseignement en classe de la numération au CP. Nous faisons cette hypothèse en accord avec la double approche, qui suppose que les pratiques des enseignants sont stables et cohérentes. Ainsi, bien qu'elles puissent être provoquées par des motifs conjoncturels (des raisons matérielles par exemple) ou liées à certaines spécificités de la classe (composante sociale par exemple), nous allons nous intéresser *a priori* à toutes les interactions qui peuvent être interprétées comme des incidents. Cependant, nous n'allons pas faire un relevé de chaque incident car notre but n'est pas de caractériser la pratique d'un enseignant comme le fait par exemple Roditi (2005). Nous allons analyser plus particulièrement certains incidents qui concernent directement la direction prise par la séance au niveau cognitif et nous les replaçons dans un contexte plus global.

Nous découpons le « lancement » en particulier selon des épisodes contenant les différentes informations sur la tâche ou les sous-tâches. Nous indiquons les éléments qui permettent de considérer si la tâche est modifiée (les aides diverses) et à l'initiative de qui. Nous sommes en particulier attentif aux stratégies et différentes formes de réponses qui interviennent, et, dans les incidents retenus, si elles sont validées et encouragées par l'enseignant, ou au contraire récusées ou ignorées.

Nous découpons la « réalisation de la tâche des élèves » selon des épisodes concernant les différentes interventions entre l'enseignant et les élèves. Comme précédemment, nous relevons les stratégies et les différentes formes de réponses en jeu. Dans les incidents retenus nous notons les éléments qui permettent de voir si elles sont validées ou évaluées, récusées ou ignorées par l'enseignant ainsi que ceux qui permettent d'en apprécier la teneur au niveau cognitif (en particulier pour identifier les propriétés relatives aux interprétations en jeu). Nous notons aussi les différentes informations prises par l'enseignant pour préparer la phase de bouclage.

Nous découpons la « mise en commun » selon des épisodes qui nous permettent de savoir sur quoi elle porte : respect des consignes, effectuation de telle ou telle sous-tâche, procédures ou résultats, validation des procédures ou des réponses, argumentations ou autre. Pour repérer ce qui est l'enjeu et le niveau d'institutionnalisation ainsi que les facteurs qui ont contribué à la forme prise par la phase de bouclage nous découpons de manière chronologique son déroulement. Pour ce faire nous relevons les enjeux des interactions en nous appuyant sur des passages significatifs de la transcription des séances, en particulier, dans des incidents, le discours de l'enseignant et celui des élèves validé/évalué par ce dernier ou au contraire ignoré ou invalidé. Nous indiquons certaines justifications de ses décisions que l'enseignant a déclarées dans les entretiens post-séance.

c. L'analyse des déroulements en classe

Nous analysons séparément chaque séance, la situation, les stratégies et la conduite de la séance par l'enseignante. Nous nous référons aux indicateurs et à l'analyse *a priori*.

Nous regardons quel a été le milieu installé. En particulier nous observons la phase de lancement pour voir quel découpage de la tâche est intervenu ou non, et quelles stratégies ont pu être indiquées ou induites (par l'enseignante, les élèves, le contexte).

Nous mettons en exergue ensuite les stratégies que nous pouvons inférer de nos observations, pendant la réalisation de la tâche, pendant la mise en commun. Nous indiquons qui en a été à l'initiative.

Finalement, nous relevons l'enchaînement des contrats et ce qui les a provoqués, en particulier les microcontrats installés.

d. Les réponses aux questions

Nous répondons aux questions une première fois à la suite de l'analyse de chacune des deux séquences. Ce sont des facteurs relatifs à la composante médiative et à la composante cognitive qui sont ici privilégiés.

Dans la conclusion, la comparaison entre les deux classes permet de répertorier les points communs, et donc ainsi de considérer les caractères spécifiques à chaque classe (en particulier les conceptions des enseignants sur le savoir et l'enseignement) puis d'obtenir des informations sur ce qui peut être considéré comme générique, en le différenciant de ce qui est spécifique. C'est ici que nous prenons plus particulièrement en compte les facteurs relatifs aux trois autres composantes de la double approche : sociale, institutionnelle et personnelle.

Cette analyse permet d'estimer le jeu des interprétations des numérations et la raison de leur survenue. Ceci concerne l'itinéraire cognitif proposé par le manuel et dans chaque classe. De manière plus générale cela concerne les difficultés de l'enseignement de la numération au CP, compte tenue de la complexité des relations entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée que nous avons décrite dans les deux premières parties de la thèse.

CHAPITRE VIII

Analyse de séances en classe

Introduction	255
1. Analyse <i>a priori</i>	256
1.1 Séance 1.....	256
a. Description des tâches	257
b. Variables permettant de définir la tâche.....	257
c. Stratégies des élèves jouant le rôle des « clients » (tâche I).....	258
d. Tâche et stratégies des élèves jouant le rôle des « marchands » (tâche Ibis).....	265
1.2 Séance 2.....	267
a. Tâches et variables	267
b. Stratégies des élèves jouant le rôle des « clients » (tâche II)	268
c. Stratégies des élèves jouant le rôle des « marchands » (tâche Ibis).....	269
1.3 Séance 3.....	269
a. Tâches et variables	269
b. Stratégies des élèves (tâches 3, 3 bis et 3 ter)	270
1.4 Séance 4.....	271
a. Tâches et variables didactiques	271
b. Stratégies des élèves (tâches 4 et 4 bis).....	272
1.5. Analyse <i>a priori</i> de la tâche de l'enseignant	272
a. Le rôle de l'enseignant par rapport à l'objectif cognitif de la séquence et de chaque séance	273
b. La première séance.....	276
2. La classe de Mme B.	281
2.1 Analyse des séances	281
a. Séance 1.....	281
b. Séance 2.....	284
c. Séance 3.....	288
d. Séance 4.....	292
2.2 Conclusion sur la séquence de Mme B	298
3. La classe de Mme H.	303
3.1 Analyse des séances	303
a. Séance 1.....	303
b. Séance 2.....	307
c. Séance 3.....	311
d. Séance 4.....	318
3.2 Conclusion sur la séquence de Mme H.	319
4. Conclusion du chapitre	322
4.1 Bilan selon les composantes cognitive et médiative	323
a. Des ressemblances.....	323
b. Des différences.....	325
4.2 Eclairage sur les autre composantes.....	326
4.3 Mise en forme de certains résultats.....	330

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la réalisation dans deux classes de la séquence « Grand Ziglotron » de « Cap Maths ». Notre méthodologie a été indiquée à la fin du chapitre précédent, voici comment elle se décline dans les paragraphes du chapitre.

Dans un premier temps nous faisons une analyse *a priori*. Dans les paragraphes 1.1 à 1.4 il s'agit des tâches proposées aux élèves dans chacune des séances, puis, dans le paragraphe 1.5, de celle de l'enseignant. Pour cette analyse *a priori*, nous nous référons au cadre théorique de la théorie des champs conceptuels et à celui de la double approche, tels que nous les avons précisés pour notre travail aux chapitres 4 et 7.

Nous découpons la tâche en sous-tâches. Ceci nous permet de faire une analyse fine des stratégies des élèves grâce en particulier au travail fait dans le chapitre 4 sur les stratégies et cheminements cognitifs. Ainsi, nous pouvons ensuite mieux comprendre les éventuels découpages de la tâche faits par l'enseignant. En les mettant en perspective par rapport à ceux théoriquement possibles, ceux attendus par le manuel et ceux que nous analysons comme les plus probables, cela nous donne une première lecture des activités potentielles des élèves et donc des écueils éventuels. Ceci nous permet alors d'analyser la tâche de l'enseignant.

Les paragraphes 2 et 3 sont respectivement consacrés à l'analyse des séances de la classe de Mme B. et de Mme H. Pour chaque séance nous rappelons la tâche et le découpage, nous analysons la situation installée en nous centrant sur le milieu, nous relevons les stratégies des élèves et de l'enseignante et finalement nous précisons le guidage de cette dernière avec en particulier les microcontrats.

La première question demande une réponse en termes de description des interprétations en jeu. Pour faciliter la lecture, nous donnons ces réponses à la fin de l'analyse de chacune des quatre séances, ceci pour chaque classe. La deuxième question aborde l'influence relative de différents paramètres sur le jeu des interprétations décrit précédemment. Elle nécessite de prendre en compte la globalité de la séquence. Pour chaque classe, nous donnons des premiers éléments de réponses à la fin de la séquence, § 2.2 et 3.2. Ici ce sont des facteurs didactiques concernant la composante médiative et la composante cognitive qui vont être privilégiés.

Dans le paragraphe 4 nous croisons les analyses pour cette fois-ci incorporer des éléments des trois autres composantes : institutionnelle, sociale et personnelle.

Les indicateurs sont donnés en annexes. Ils sont présentés sous forme de tableaux comportant deux colonnes. Ils permettent d'indiquer le découpage de chacune des séances en épisodes et sous-épisodes ainsi que de relever la nature et le traitement des incidents, tout en décrivant les stratégies utilisées. La transcription complète des séances est donnée en parallèle, ce qui permet de voir en même temps les données et le traitement qui en a été fait. Cette transcription est extraite des vidéos. Ceci nous a permis de relever non seulement tous les échanges oraux, mais aussi d'obtenir des renseignements sur le (dé)placement des intervenants, sur leurs gestes ou sur les productions écrites au tableau. Comme nous avons suivi systématiquement l'enseignante dans ses déplacements, nous avons accès aux mêmes informations qu'elles. Ainsi, quand elle s'entretient avec un élève ou un petit groupe d'élèves, nous avons pu filmer la plupart du temps les productions des élèves et leurs gestes. En outre, les deux enseignantes proposent le plus souvent dans une « mise en commun » une validation exhaustive de ce qu'on fait les élèves. Leur production est ainsi souvent rendue publique et nous avons pu y avoir accès. Ce travail de relevé de données résulte de nos choix

méthodologiques et théoriques. Il a nécessité de nombreux visionnages. Dans la présentation que nous avons adoptée, notre objectif est de rendre compte d'une pluralité d'informations et de laisser nos choix apparents. Nos analyses se réfèrent à ces tableaux de manière incontournable.

La séquence d'apprentissage comporte quatre séances qui ont toutes le même contexte. Il s'agit de faire une commande d'une certaine quantité de « boutons » figurés par des carrés sur une fiche « Ziglotron », ce dernier étant un robot d'une histoire racontée aux élèves. Cette commande permet de réparer des Ziglotrons. Voici un descriptif général des séances, elles sont détaillées au début du paragraphe concernant leur analyse *a priori* spécifique.

La séance 1 est décrite dans le guide de l'enseignant p.151. Elle requiert les fiches 34, 35 et 36 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille de format A4 sur lesquels sont figurées les collections de référence) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux élèves. La commande se fait sans restriction sur la formulation et le type de boutons disponibles (seuls ou en plaques de dix).

La séance 2 est décrite dans le guide de l'enseignant p.152 et 153. Elle requiert les fiches 38, 39, 40 et 41 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille A4 et un bon de commande pré-rempli à compléter) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux, avec une formulation imposée par écrit (bon de commande) et un nombre de boutons isolés limité à neuf par commande.

La séance 3 est décrite dans le guide de l'enseignant p.156 et 157. Elle requiert les fiches 37, 41 et 42 du matériel photocopiable fourni avec le manuel Cap Maths (des Ziglotrons dessinés sur une feuille A4 et un bon de commande à compléter) ainsi que des ciseaux et une feuille blanche par équipe de deux. C'est le même déroulement que celui de la séance 1, mais cette fois-ci un seul Ziglotron, commun à tous, est en jeu : chaque élève doit faire le bon de commande.

La séance 4 est décrite dans le guide de l'enseignant p.159 et 160. Elle requiert le fichier élève p. 70 exercices 2 et 3. Elle consiste principalement à compléter des bons de commande.

Nous commencerons par l'analyse *a priori* du scénario décrit dans le guide de l'enseignant, d'abord du point de vue des tâches proposées aux élèves puis de celui des tâches prescrites aux enseignants. Nous analyserons ensuite le déroulement dans chacune des deux classes avant de tirer quelques conclusions de la comparaison de ces déroulements.

1. Analyse *a priori*

Nous allons détailler la séance 1. Du fait de la parenté des tâches proposées successivement, l'analyse des autres séances se fera en référence à celle-ci.

1.1 Séance 1

Pour cette séance 1, nous allons découper les tâches en sous-tâches pour indiquer les stratégies *a priori*. Ce découpage en sous-tâches est un moyen de décrire ce que les élèves doivent faire pour réussir la tâche globale. Il est lié à des commodités de l'analyse : il est pratique pour décrire le déroulement. Du point de vue cognitif il faut considérer l'ensemble des différentes tâches et sous-tâches et leur articulation. Certains élèves n'ont pas la même tâche que d'autres, ils doivent avoir en tête l'ensemble au moment de la confrontation et de la discussion. Ainsi la tâche globale est censée être problématique pour les élèves alors que chacune des sous-tâches peut ne pas l'être. La tâche ne peut produire des connaissances que si on considère cet ensemble. En conséquence dans l'analyse des sous-tâches, nous essayons de tenir compte de la tâche dans son ensemble. Les sous-tâches sont donc vues comme des moments successifs d'exécution de la tâche plutôt que comme des tâches prescrites l'une

après l'autre. Tous les élèves n'ont pas la même tâche à faire. La tâche I est celle des élèves « clients », la tâche I bis celle des élèves « marchands ».

a. Description des tâches

Tâche I

Il s'agit d'obtenir une collection d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons) dont le cardinal est donné par une collection de référence consistant en des carrés sur une feuille A4 (la fiche Ziglotron). Ensuite il s'agit de vérifier que ces deux collections ont le même cardinal. Dans le guide de l'enseignant, certains éléments sont précisés. La collection de référence est constituée de carrés dessinés répartis de manière non organisée sur la feuille A4 représentant le robot Ziglotron. La collection à obtenir après la commande n'est pas visible en même temps que la collection de référence. Aucun autre matériel n'est à la disposition des acteurs. Un seul voyage est permis pour aller chercher la collection à obtenir. Cette dernière doit avoir le même cardinal que la collection représentée. Deux types de conditionnement sont disponibles pour la collection à aller chercher : des carrés de papier, tous de même format, superposables à ceux de la collection de référence ainsi que les mêmes carrés solidaires en plaques de forme rectangulaire 1x10 ou 2x5. La tâche s'effectue par groupe de deux élèves, un seul se déplaçant pour formuler la demande. Après avoir obtenu la collection, le binôme d'élèves doit effectuer une correspondance terme à terme entre les deux collections par superposition (après un éventuel découpage des carrés obtenus lorsqu'il s'agit des plaques). Notons que plusieurs lieux de vente sont prescrits, mais leur nombre n'est pas indiqué. Les critères de choix des élèves auxquels est assignée telle ou telle tâche (vendeur, client) ne sont pas spécifiés.

Tâche I bis

Il s'agit de réaliser une ou deux collections d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant oral (le message délivré par un des élèves « clients »). D'après les précisions données dans le guide de l'enseignant, cette tâche se fait en présence de l'élève qui arrive avec son message. Comme il a déjà été signalé, les interactions peuvent modifier le message initial, notamment afin que le marchand le comprenne. Ce dernier peut aussi essayer d'interpréter la commande quand celle-ci lui semble inadéquate : par exemple un message stipulant trente-sept plaques de dix peut être changé en trente-sept boutons. Notons que plusieurs lieux de vente sont prescrits, mais leur nombre n'est pas indiqué. Les critères de choix des élèves pour remplir telle ou telle tâche (vendeur, client) ne sont pas spécifiés non plus. Précisons finalement que cette tâche se répète plusieurs fois pour un « vendeur », à chaque fois qu'un élève « client » se présente. Néanmoins, elle est conditionnée par la teneur de chaque message, teneur *a priori* différente d'un message à l'autre.

b. Variables permettant de définir la tâche

Nous allons les exprimer de manière exhaustive en indiquant celles qui sont déjà fixées et celles qui ne le sont pas.

Variables fixées par la tâche déduite des prescriptions du guide de l'enseignant

- Nombre, conditionnement, forme et matériaux utilisés pour constituer la collection à aller chercher (les « boutons » réalisant la commande) : morceaux en papier blanc de forme carrée de 7mm de côté ou bien rectangles quadrillés de dix carrés de 7mm de côté agencés soit en 1x10, soit en 2x5. Le nombre disponible n'est pas explicitement indiqué mais de la tâche prescrite, de la séance 2 et des commentaires, on peut inférer

que la tâche attendue nécessite que le vendeur dispose d'un grand nombre de telle ou telle forme de conditionnement.

- Nombre, disposition, forme et matériaux utilisés pour la collection de référence qui sert à élaborer le message (les emplacements des boutons à aller chercher) : carrés blancs de 7 mm de côté dessinés dans une position prototypique sur une feuille A4 et répartis de manière non organisée et non groupées à l'intérieur du contour d'une figure représentant un robot dont le corps est vu de face (fiche Ziglotron) ; trois zones sont distinguables, l'une centrale de forme rectangulaire (environ 10x12 cm) comporte la majorité des carrés, les deux autres sont des demi-disques, d'aire deux à trois fois plus petite que le rectangle, qui comportent de 3 à 5 carrés chacun ; trois versions différentes de fiches Ziglotron sont proposées comportant respectivement au total 23, 30 et 37 carrés.
- Nombre d'essais pour obtenir la collection : un seul
- Matériel disponible : une feuille de papier vierge (indiquée dans un résumé mais dont il n'est pas fait référence ultérieurement), une paire de ciseaux.
- Emplacement du lieu où se trouve la fiche Ziglotron et du lieu où se trouve la collection à rapporter : non explicitement indiqué mais il est clairement attendu que la collection de référence ne soit pas visible de l'endroit où l'élève passe commande (chez le vendeur).
- Nombre d'élèves réalisant la tâche I (client) et répartition des rôles : deux élèves ensemble pour élaborer un message oral en direction du marchand puis pour « réparer » le Ziglotron, un seul des deux (le même), pour aller délivrer le message, vérifier éventuellement la collection délivrée et la rapporter.
- Nombre d'élèves réalisant la tâche I bis (marchand) et répartition des rôles : un seul élève par lieu de vente, en présence d'un autre élève donnant le message et éventuellement d'autres élèves attendant de délivrer leur message.
- Qualité de la personne devant demander la collection de boutons (client) : élève.
- Qualité de la personne devant donner la collection de boutons (marchand) : élève.

Variables non fixées dans le manuel

Le temps : il n'y a pas d'indication de temps, cependant l'appellation « séance », l'âge des enfants et les recommandations officielles pour le cycle 2 permettent d'en déduire que la durée globale attendue n'excède pas une heure, y compris les interventions de l'enseignant. Pour le vendeur, la durée est déterminée en partie par le nombre de clients qui vont s'adresser à lui.

Autre matériel disponible et lieu : crayon, stylo, gomme à l'endroit où se trouve la fiche Ziglotron (lieu d'élaboration du message) ou/et à l'endroit où se trouve la collection à rapporter (lieu de livraison de la collection).

Nombre d'essais pour préparer la commande : non spécifié.

Nombre de répétitions de la tâche : non fixé, mais limité par la durée de la séance et le nombre d'élèves dans la classe qui peuvent se présenter avec un message.

Le choix des élèves réalisant telle ou telle tâche ainsi que les emplacements.

c. Stratégies des élèves jouant le rôle des « clients » (tâche I)

Découpage en sous-tâches²⁴⁰ :

Entre parenthèses est indiqué si la tâche prescrite s'effectue seul ou à deux.

²⁴⁰ Certaines sous-tâches ne sont pas explicites dans le manuel mais à envisager au vu de l'ensemble de la tâche. Ainsi la sous-tâche I.4 « vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est délivré » est induite par le fait d'obtenir une égalité entre le cardinal de la collection de référence et celle demandée. Cette sous-tâche constitue une introduction d'une étape intermédiaire non explicitement demandée dans la tâche prescrite.

Sous-tâche I.1 : de l'emplacement où se trouve la collection de référence, élaborer le message à transmettre (à deux).

Sous-tâche I.2 : se souvenir du message pour l'indiquer au marchand (un seul des deux élèves de la sous-tâche I.1, mais les deux doivent s'en souvenir au moment de la vérification).

Sous-tâche I.3 : indiquer le message au « marchand » (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2)

Sous-tâche I.4 : vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2 et I.3, sous-tâche en interaction possible avec la personne jouant le rôle du vendeur qui est lui aussi un élève).

Sous-tâche I.5 : transporter la collection obtenue (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2, I.3 et I.4).

Sous-tâche I.6 : vérifier que les collections ont le même cardinal en faisant une superposition des « boutons » obtenus avec ceux figurés sur leur fiche. Cette sous-tâche est accomplie par les deux élèves de la sous-tâche I.1 (dont un seul des deux est concerné par les sous-tâches I.2 à I.5). Elle peut nécessiter l'utilisation de ciseaux et de colle.

Les stratégies

L'emploi de telle ou telle stratégie par les élèves dépend des variables didactiques indiquées auparavant mais aussi des connaissances de celui à qui est soumise la tâche et du déroulement en classe (les aides et indications supplémentaires). Dans l'analyse *a priori*, nous ne tenons pas compte de ces aides ; dans un premier temps nous ne tenons pas compte non plus des connaissances supposées des élèves et indiquons un large éventail des stratégies possibles. Les stratégies sont classées suivant la place relative des désignations parlées en français et écrites chiffrées. Dans les exemples sont indiquées principalement des stratégies non erronées. Ensuite nous relevons celles indiquées par le manuel et nous les mettons en perspective avec les stratégies probables en considérant cette fois-ci les paramètres *a priori* de la situation (en référence à la TSD) liés en particulier aux connaissances anciennes des élèves (déterminées *a priori* d'après l'itinéraire cognitif proposé par le manuel et les résultats de certaines recherches), aux contrats et au milieu. Ce sont ces stratégies probables que nous retenons dans notre travail de recherche comme celles finalement en jeu dans la situation proposée par le manuel. Nous analysons ici la situation du côté de l'élève, ce qui nous permet ensuite de l'analyser du côté de l'enseignant. Ce travail va être entrepris sous-tâche par sous-tâche, cependant nous donnons auparavant certaines indications du manuel car elles concernent l'ensemble de la tâche des élèves et nous pourrions nous y référer pour chacune des sous-tâches. Le guide de l'enseignant indique ainsi p.151 que « *Les contraintes apportées à la situation pour les séances 1 et 2 autorisent un assez grand nombre de procédures, alors que dans la séance 3 le recours à la signification de chaque chiffre de l'écriture des nombres est favorisé* ». En outre il est indiqué que « *Cette séance préparatoire ne vise pas à mettre en évidence de façon explicite la décomposition du nombre en groupements de dix et en unités* ». A noter que les stratégies indiquées concernent avant tout la sous-tâche I.1 et qu'elles sont visibles dans les rubriques intitulées « *Résolution et mise en commun* » et « *Synthèse* », et non pas dans la « *Présentation de la situation* ». Ceci est repris dans l'analyse de la tâche enseignante ultérieurement.

Sous-tâche I.1

De l'emplacement où se trouve la collection de référence, élaborer le message à transmettre (à deux).

L'éventail des stratégies a priori

Il s'agit d'exprimer le cardinal de la collection présente avec un signifiant (désignation parlée en France, désignation écrite chiffrée²⁴¹ ou autres²⁴²). Plusieurs stratégies sont envisageables selon les signifiants utilisés et la façon de les obtenir, sachant qu'est attendue à la fin une désignation orale. Voici des exemples :

Stratégie 1.1.a : stratégie OF

Est pertinente si les élèves demandent uniquement des boutons et pas de plaques.

Stratégie 1.1.b : stratégie OG

Est pertinente si les élèves demandent des plaques et des boutons, et s'ils ne se trompent pas de type de groupement, la maximalité n'est cependant pas nécessaire.

Stratégie 1.1.c : stratégie EC vers OF

Est pertinente si les élèves demandent uniquement des boutons et pas de plaques.

Stratégie 1.1.d : stratégie EC vers OG

Est pertinente si les élèves demandent des plaques et des boutons, et s'ils ne se trompent pas de type de groupement, la maximalité n'est cependant pas nécessaire.

Stratégie 1.1.e : stratégie OF vers OG

Est pertinente si les élèves demandent des plaques et des boutons, et s'ils ne se trompent pas de type de groupement, la maximalité n'est cependant pas nécessaire.

Dans le cas où ils disposent d'une feuille blanche et d'un crayon, il est possible d'utiliser en outre des productions graphiques (GraC). Comme nous l'avons indiqué dans la présentation des stratégies, d'autres possibilités sont théoriquement possibles, toutes celles amenant à une désignation des groupements ou à une désignation parlée en France : par exemple OF vers EC puis vers OG plutôt que OF vers OG directement. D'autres signifiants oraux ou « relais » sont aussi envisageables.

Les stratégies indiquées par le manuel

Pour la sous-tâche I.1, il est mentionné trois stratégies pour formuler le message : aucune information prise, un comptage un par un des boutons et enfin des groupements par dix. Il est indiqué qu'elles mènent alors à deux types de formulation, un certain nombre de boutons isolés ainsi qu'un nombre de plaques et un nombre de boutons isolés (que nous avons qualifié dans la thèse de « désignation des groupements »). En se replaçant dans l'itinéraire cognitif du manuel décrit dans la deuxième partie de la thèse, les deux premières stratégies peuvent mener à utiliser une désignation parlée en France du nombre de boutons et la troisième à la désignation des groupements (... plaques et boutons isolés), résultant d'un comptage. La stratégie consistant à analyser la désignation parlée en France pour la transformer en une désignation OG (stratégie OF vers OG) est aussi envisagée par le manuel : « *Il est possible que certains groupes aient d'abord dénombré un à un les boutons manquants sur le Ziglotron, puis demandé des plaques de dix et des boutons isolés.* ». La stratégie menant directement à une désignation des groupements par une stratégie organiser/configurer, c'est-à-dire sans comptage ni passage par une désignation parlée en France ne nous semble pas attendue.

Les stratégies probables

En reprenant l'itinéraire cognitif et l'analyse *a priori*, nous sommes amené à confirmer la probabilité que surviennent certaines stratégies envisagées par le manuel, c'est-à-dire :

- une stratégie de type OF (c'est-à-dire menant à une désignation parlée en France, sans autre signifiant)

²⁴¹ Cette possibilité est liée au fait de disposer ou non d'une feuille et d'un crayon.

²⁴² Par la suite nous nous restreindrons à quelques formes pour ces autres, en particulier les désignations de groupements (amenées par des stratégies OG).

- une stratégie de type OF, suivie d'une stratégie de type OF vers OG

Cependant, il nous semble que le seul comptage un à un n'est pas nécessairement utilisé par les élèves, en particulier, certains peuvent compter de deux en deux, voire de dix en dix. Ce dernier comptage peut alors mener à élaborer une désignation de type OG « ... plaques (de dix) et ... boutons isolés ».

La stratégie OG envisagée par le manuel de type « compter en unités », celle consistant à entourer les éléments de la collection et à compter les groupements et les boutons seuls nous semble par contre peu probable chez la majorité des élèves. Les recherches mettent en effet en avant la difficulté pour les élèves de cet âge de concevoir les groupements comme des objets (unités) comptables et de les utiliser comme signifiant du cardinal d'une collection. En outre le milieu matériel ne nous semble pas favoriser la stratégie OG. En effet d'une part il n'est pas rappelé dans le déroulement l'utilisation possible d'un crayon, d'autant que cela peut gêner la compréhension de la contrainte concernant l'oralité du message, d'autre part les élèves ne peuvent faire appel aux différents objets à commander (plaques et boutons seuls) que de manière mentale. Il leur est donc impossible de les mettre en correspondance physique (terme à terme) avec les objets de la collection figurée dont ils disposent. Par ailleurs nous n'avons pas relevé dans le manuel de tâches antérieures mettant en avant un procédé de marquage de groupements pour dénombrer (en entourant d'un trait par exemple). En ce qui concerne la stratégie OG cette fois-ci de type « organiser pour désigner » qui n'est pas envisagée par le manuel²⁴³, elle nous semble effectivement improbable, en partie pour des raisons évoquées précédemment, mais aussi parce que le contrat devant une telle tâche auquel les élèves sont habitués implique de compter.

Une autre difficulté peut surgir lorsque les élèves comprennent la sous-tâche I.1 comme une tâche de dénombrement déconnectée de son but, c'est-à-dire indépendante de l'obtention d'une collection qui se présente sous forme de deux conditionnements différents²⁴⁴, ce qui est favorisé par le milieu matériel présent au moment de cette sous-tâche. Cette compréhension peut être en outre induite par le fait que dans une séance antérieure²⁴⁵, proche dans sa forme de celle-ci, les élèves ont eu pour tâche de dénombrer, et la seule stratégie probablement alors disponible était un comptage un à un, dont la difficulté pouvait faire oublier le but de la tâche (surtout en début d'année). Ainsi, est-il probable qu'un certain nombre d'élèves ne puissent envisager de désigner le cardinal d'une collection à l'aide de deux désignations parlées (une pour les plaques, l'autre pour les boutons seuls) au lieu d'une seule comme usuellement. A noter aussi que même dans le cas de constitution de groupements de dix, rien ne peut assurer de leur maximalité.

Par ailleurs, du fait des nombres en jeu (23, 30, 37), relativement grands pour une partie des élèves, même en fin de CP, ainsi que de la forme figurée de la collection, les recherches antérieures ont montré que des erreurs propres au comptage, en particulier dans l'énumération, sont fréquentes chez les élèves de CP : ces erreurs peuvent contribuer à leur faire oublier le but de la tâche.

Signalons aussi que le fait d'être deux et de se mettre eux-mêmes d'accord sur la stratégie et le message peut être source d'interactions qui peuvent modifier la tâche. Il se peut même qu'un des deux ne s'y attèle pas (problème de dévolution).

Un autre facteur peut augmenter la probabilité que survienne une stratégie menant à un message ne mettant pas en jeu des plaques de dix. C'est le fait d'anticiper sur la phase de validation. Si les plaques doivent être découpées, pourquoi demander des plaques ? Le fait de

²⁴³ Rappelons ici encore que la différence entre « organiser pour désigner » et « compter en unités » n'est pas visible pour un observateur.

²⁴⁴ Voir plus encore si les élèves envisagent de différencier les plaques de dix sous la forme de « rectangles » 2x5 ou « bandes » 1x10.

²⁴⁵ Séquence de la première unité de l'année, l'unité 1, appelée « les Ziglotrons ».

demander des plaques et des boutons facilite ainsi la tâche du vendeur, mais pas de manière évidente celle du client (sauf éventuellement pour le transport). Il nous semble difficile pour un élève de 6 à 7 ans de se décentrer afin de considérer la tâche du vendeur et d'anticiper le transport au moment où il doit dénombrer la collection figurée.

Ajoutons pour finir une méprise sur la compréhension de la tâche qui peut influencer sur la stratégie et le type de formulation adoptés. D'après les résultats de certaines recherches antérieures que nous avons rapportés, il est difficile d'envisager pour les élèves de cet âge un groupement comme un type d'objet dénombrable. Ainsi, le terme plaque n'est pas pris nécessairement comme un objet comptable mais comme un conditionnement de livraison. Ainsi un message comme « trente-six plaques » peut vouloir signaler « trente-six boutons à donner sous forme de plaques ». Le fait de donner le bon nombre de plaques est alors du ressort du marchand, ensuite la vérification pourra se faire dans la sous-tâche I.4 et 1bis.2 pour le marchand (phases qui peuvent se faire en commun). Qui plus est, si l'élève « client » sous-entend « x boutons à donner sous forme de plaques uniquement », il peut alors renoncer par anticipation à une telle formulation pour les nombres trente-six et vingt-trois et non pour trente.

Sous-tâche I.2

Se souvenir du message à indiquer au marchand (un seul des deux élèves de la sous-tâche I.1 est concerné *a priori*, mais l'autre peut lui donner des conseils)

L'éventail des stratégies a priori

Stratégie 1.2.a :

Utiliser les doigts. Du fait que le nombre de carrés est bien supérieur à dix (vingt-trois, trente ou trente-sept), il n'est pas possible de faire une correspondance terme à terme entre la quantité de carrés et les doigts. Ceci requiert donc d'utiliser les deux mains de manière indépendante (unités, dizaines). Ainsi cette stratégie ne peut être efficace que pour les nombres 23 et 30, puisque pour 37, il y a plus de cinq unités.

Exemples :

A partir d'une désignation parlée en France, retrouver le nombre de dizaines en énumérant les dizaines (dix, vingt, trente,...) et utiliser les doigts d'une main pour retenir ce nombre. Retrouver le nombre d'unités avec le deuxième mot énoncé (aucune unité s'il n'y a pas de deuxième mot énoncé) et utiliser les doigts de l'autre main pour retenir ce nombre.

A partir d'une désignation écrite, traduire chaque chiffre en nombre de doigts (à l'aide par exemple de la comptine numérique ou d'une file numérique des écritures chiffrées).

A partir d'une production graphique de type 1, attribuer un doigt d'une main à chaque plaque dessinée et un doigt de l'autre main à chaque carré dessiné par association terme à terme (il est aussi possible de repasser par une désignation écrite chiffrée ou parlée en France).

Stratégie 1.2.b :

Mémorisation d'un message oral précédé éventuellement de la traduction du message écrit (si celui-ci a été élaboré) en un message oral. Dans ce dernier cas, voir certaines stratégies décrites pour la sous-tâche I.1.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas mentionnée dans le manuel.

Les stratégies probables

Parmi les stratégies envisagées a priori, la deuxième, la mémorisation mentale, nous semble la plus probable. En effet, nous n'avons pas trouvé de traces dans le manuel d'un entraînement spécifique et antérieur des élèves à une mémorisation à l'aide des doigts de « grands »

nombre (au-delà de vingt). Signalons par ailleurs que le rôle de l'écrit comme mémoire est en jeu dans la séquence « les Ziglotrons » de l'unité 1 de début d'année. Certains élèves peuvent s'en souvenir, mais le milieu matériel présent à ce moment ne favorise pas cette stratégie. Le fait que l'élève y ait recours ou non de manière autonome va alors être fonction du contrat installé en classe et des ressources matérielles disponibles.

Sous-tâche I.3

Indiquer le message au « marchand » (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2).

L'éventail des stratégies a priori

Stratégie 1.3.a :

Donner le message tel qu'il a été formulé initialement.

Stratégie 1.3.b :

Donner le message tel qu'il a été reformulé à l'étape précédente (sous-tâche I.2) pour s'en souvenir, par exemple montrer à l'aide des doigts.

Stratégie 1.3.c :

Reformuler le message. Les stratégies dépendent du message initial et du message reformulé. Elles ont été déjà énoncées.

Exemples :

Le message initial est oral « trente-sept », celui qui est transmis est « trente-sept plaques ». Il y a contextualisation de la formulation.

Le message écrit est oral « trente-sept », celui qui est transmis est « trois plaques et sept boutons ». Il y a contextualisation de la formulation et transformation du message (ici de type OF vers OG).

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas envisagée par le manuel.

Les stratégies probables

Les stratégies que nous avons indiquées dans l'analyse a priori nous semblent toutes probables. En particulier, le milieu ayant changé pour l'élève « client » puisqu'il peut voir ou/et manipuler la collection qu'il a commandée, il est possible que le message initial soit reformulé. Ces stratégies sont donc dépendantes du message initial et de la prise en compte du nouveau milieu par l'élève.

Sous-tâche I.4

Vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2 et 1.3, ainsi que l'élève « marchand »).

L'éventail des stratégies a priori

Cette sous-tâche permet des interactions entre la personne jouant le rôle du marchand (tâche Ibis.2) qui est un élève d'après la prescription du manuel et le « client » émetteur du message. De ce fait, il est possible que le message soit reformulé plusieurs fois voire (ré)interprété. Il peut alors prendre beaucoup de formes. Du fait des différents conditionnements des carrés disponibles, les reformulations et interprétations peuvent avoir lieu à ce sujet (« tu me dis trente-sept mais tu veux trente-sept quoi ? »). Ces reformulations peuvent être du fait de l'élève client seul, de l'élève marchand seul ou des deux. Cette sous-tâche de vérification de l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (qui n'est pas explicitement prescrite) peut se faire alors soit en considérant le message initial, soit en considérant le message effectivement transmis (sous-tâche I.3), soit encore avec le message transformé après les interactions vendeur/client. De plus la vérification peut avoir lieu en même temps que la

délivrance de la commande ou bien après celle-ci. Le « client » et le « marchand » peuvent aussi faire la tâche simultanément.

Une première stratégie est de dénombrer la collection obtenue. Ensuite il s'agit de comparer la désignation obtenue avec celle utilisée pour passer la commande. Elles commencent donc par une des stratégies ayant pour but de dénombrer une collection, et se poursuivent par des stratégies de comparaison de signifiants : il peut s'agir de comparer deux désignations de même type de signifiant (deux désignations parlées en France par exemple) ou bien relevant de deux différents (une désignation parlée en France et une désignation sous forme de plaques de dix par exemple). Chaque stratégie initiale se décline alors en plusieurs stratégies selon les signifiants utilisés et la façon de les obtenir, ce qui décuple le nombre de possibilités.

Une deuxième stratégie est de tenter de constituer une collection dont le cardinal est exprimé dans le message à partir de celle délivrée et de voir s'il y a adéquation : à la différence de la première stratégie, le processus de dénombrement s'arrête au moment où il est possible de voir s'il y a trop ou pas assez de boutons délivrés. Dans le cas où le dénombrement amène à une désignation de même type que celle employée pour le message (une désignation parlée en France par exemple), ceci évite de comparer deux signifiants de type différent.

En résumé, les stratégies envisageables commencent par une stratégie menant à la désignation du cardinal d'une collection (OF, EF, OG), ensuite une comparaison entre deux désignations de même type doit se faire (cf. le paragraphe à ce sujet dans le chapitre 4), ce qui demande éventuellement de traduire une des deux désignations (la désignation qui vient d'être obtenue ou celle ayant servi pour la commande) nécessitant une stratégie de type OF vers OG, OG vers OF (ou une variante avec l'intermédiaire d'un autre signifiant).

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas envisagée par le manuel.

Les stratégies probables

Les stratégies que nous avons indiquées dans l'analyse a priori nous semblent toutes probables et leur probabilité sera fonction de la forme du message délivré et des connaissances anciennes des élèves. Par exemple une collection délivrée sous forme de plaques de dix incite au dénombrement utilisant des groupements par dix plus qu'une collection délivrée sous forme de boutons/carrés seuls. Par ailleurs, à la différence des stratégies de la sous-tâche I.1, les dénombrements peuvent être effectués en déplaçant les objets (des carrés de papier et/ou des rectangles de papier quadrillés en dix carrés) au lieu par exemple de noter les objets déjà dénombrés en les marquant ou les entourant à l'aide d'un crayon. En outre, comme précédemment, du fait de ce changement de milieu pour l'élève « client » (milieu matériel et du fait des interactions avec l'élève « marchand »), il est possible que le message initial soit à nouveau reformulé dans cette sous-tâche.

Sous-tâche I.5

Transporter la collection obtenue (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche I.2, I.3 et I.4).

L'éventail des stratégies a priori

C'est une sous-tâche qui n'engage pas de stratégies mathématiques. Nous la signalons, car des pertes peuvent survenir. Ce qui a une incidence sur la validation. Les stratégies envisageables concernent l'utilisation d'un contenant pour le transport.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas envisagée par le manuel.

Les stratégies probables

Certains élèves peuvent prendre des initiatives pour l'utilisation d'un contenant, suivant le contrat établi en classe et les ressources matérielles connues des élèves.

Sous-tâche I.6

Vérifier que les collections sont de même cardinal en faisant une comparaison terme à terme (superposition faite par les deux élèves, ceux de la sous-tâche I.1).

L'éventail des stratégies a priori

La stratégie est indiquée par la tâche et elle peut nécessiter un découpage lorsque des plaques ont été obtenues. Signalons dans le même esprit (c'est-à-dire sans effectuer de dénombrement), une autre stratégie possible pour valider, mais qui n'est pas celle prescrite. Elle consiste à associer terme à terme les groupements obtenus et les groupements que l'on peut faire sur la fiche Ziglotron et qui ont pu y être déjà représentés.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche est accomplie par les deux élèves, ceux de la sous-tâche I.1 dont un seul des deux est concerné par les sous-tâches 1.2 à 1.5. Le manuel indique seulement que « *Les boutons vendus en plaques doivent être découpés avant d'être placés sur le Ziglotron* ». Elle peut donc nécessiter l'utilisation de ciseaux et de colle.

Les stratégies probables

La stratégie que nous avons signalée *a priori* sur cette association terme à terme est probable : l'association terme à terme entre une collection figurée et une collection manipulable est une tâche déjà connue des élèves. Les objets manipulables et ceux figurés se superposent exactement.

Les différentes manipulations (les carrés à découper sont assez petits, l'emploi des ciseaux et de la colle n'est pas aisé pour des enfants de cet âge) peuvent cependant poser des problèmes aux élèves et les amener à « oublier » le sens de cette sous-tâche dans la tâche I, c'est-à-dire vérifier que la commande délivrée convient : ils peuvent par exemple considérer que la tâche consiste à « bien » découper et à « bien » superposer. A l'opposé, même si ce n'est pas la tâche demandée, ils peuvent avoir le souci de vérifier s'ils ont obtenu le bon nombre de boutons autrement que par la stratégie prescrite. Il leur est alors possible de valider le résultat par d'autres moyens, par exemple en recomptant les deux collections et en comparant les désignations obtenues (voir les stratégies indiquées à ce sujet) ou encore en faisant une comparaison groupe à groupe. Cette dernière nous semble cependant peu probable du fait en particulier que le marquage initial des groupes (en les entourant) est lui-même peu probable. Signalons en outre que le fait de vivre une situation où les causes d'erreurs sont multiples (et pas nécessairement mathématiques) ne permet pas facilement aux élèves de cet âge d'identifier quelle a été la cause du résultat obtenu (que ce soit un échec ou une réussite). Ce sont des points que nous reprenons dans l'étude de la tâche de l'enseignant.

d. Tâche et stratégies des élèves jouant le rôle des « marchands » (tâche Ibis)

Découpage en sous-tâches

Sous-tâche Ibis.1 : réaliser une ou deux collections d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant.

Sous-tâche Ibis.2 : vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné.

Les stratégies

Les stratégies dépendent du type de message. Nous allons nous limiter ici aux messages utilisant une désignation parlée en France ou une désignation des groupements dont la forme attendue est de type « ... plaques (ou barre ou ...) (de dix) et ... (boutons) ».

Sous-tâche Ibis. 1

Réaliser une ou deux collections d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant oral.

L'éventail des stratégies a priori

Que ce soit une désignation parlée en France ou une désignation des groupements, il s'agit d'élaborer une collection à partir d'une désignation parlée en France avec éventuellement un choix d'objets à faire, des plaques de dix (2x5 ou 1x10) ou des carrés/boutons seuls. Les stratégies de base sont de type OF° et OG°, avec toutes les possibilités utilisant des passages par d'autres signifiants que nous avons déjà indiquées. Signalons qu'ici les collections sont manipulables. En outre, le « vendeur » a à sa disposition deux types d'« objets » différents, plaques de dix (sous deux formes différentes) ou bouton/carré seul, et ils ne sont pas forcément indiqués dans le message.

Les stratégies indiquées par le manuel

Aucune stratégie n'est indiquée, il est stipulé que les vendeurs « *donnent exactement ce qu'on leur demande* ».

Les stratégies probables

Toutes les stratégies que nous avons signalées sont envisageables, et leur probabilité dépend en particulier de la forme du message délivré par l'élève client. Il est prescrit de ne pas réinterpréter le message, mais les connaissances anciennes et le milieu matériel (les collections sont manipulables) comme les règles du jeu (interaction possible avec le « client ») peuvent y inciter l'élève. En outre, devant une commande de type « trente-six boutons », le fait de donner trois plaques de dix et six boutons isolés peut être compris comme n'étant pas une réinterprétation. En effet, l'élève délivre effectivement trente-six boutons, donc le bon nombre, d'autant que les boutons sont visibles sur les plaques de dix, et que le vendeur sait que ceux-ci vont être découpés par la suite dans la sous-tâche I.6 du client. Par ailleurs, devant une commande de type « trente-six plaques », il est possible que le vendeur l'interprète soit en donnant trente-six boutons isolés, soit trente-six boutons avec des plaques et des boutons. Le vendeur a pu interpréter dans ce dernier cas que « trente-six plaques » signifie trente-six boutons dans un conditionnement comportant des plaques, la tâche du vendeur étant alors de fournir la commande dans ce conditionnement : comme cela a déjà été signalé auparavant, « plaque » n'est pas pris comme un objet comptable mais comme un conditionnement de livraison.

Sous-tâche Ibis. 2

Vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné.
Cette sous-tâche a été traitée dans la sous-tâche I.4 de la tâche I.

Les stratégies indiquées par le manuel

Cette sous-tâche n'est pas indiquée par le manuel.

Les stratégies probables

Les commentaires sur cette sous-tâche sont les mêmes que ceux afférant à la sous-tâche I.4, avec les remarques faites pour la sous-tâche Ibis.2 précédente.

1.2 Séance 2

a. Tâches et variables

Tâche II

La tâche II est similaire à la tâche I. Cependant il s'agit ici d'adresser le message par écrit au marchand. Le bon de commande à compléter est le suivant :

Il faut boutons.
Notre commande :
..... paquets de dix boutons
..... boutons.

Dans le guide de l'enseignant, p.153 est écrit « *Il faut écrire sur le bon de commande le nombre de boutons nécessaires et, en dessous, le nombre de plaques et le nombre de boutons isolés que vous demandez* »

Dans la première partie du bon de commande, la première ligne, un signifiant du cardinal de la collection est donc demandé (écriture littérale de la désignation parlée en France ou écriture chiffrée). La deuxième partie est le message destiné au vendeur, c'est une transcription mot à mot d'une désignation de type « désignation des groupements » (OG). Le bon tout entier, complété à deux en présence de la fiche Ziglotron, est à donner au marchand.

En outre, deux variables didactiques changent. La première est que le « marchand » ne doit pas délivrer plus de neuf boutons isolés. La deuxième concerne le nombre de boutons sur les Ziglotrons. Il s'agit ici de 28, 34 ou 45 boutons.

Le dernier changement concerne la validation (dernière sous-tâche de la tâche II), elle est ici différée après une « mise en commun ».

Nous obtenons ainsi le découpage suivant :

Entre parenthèses est indiqué si la tâche prescrite s'effectue seul ou à deux.

Sous-tâche II.1 : de l'emplacement où se trouve la collection de référence, compléter le bon de commande à transmettre (à deux)

Sous-tâche II.2 : transporter le bon de commande (un seul des deux élèves de la sous-tâche I.1)

Sous-tâche II.3 : indiquer la commande voulue au marchand en donnant le bon de commande au « marchand » (un seul élève, le même que celui de la sous-tâche II.2)

Sous-tâche II.4 : vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné (un seul élève, le même que celui des sous-tâches II.2 et 2.3, sous-tâche en interaction possible avec la personne jouant le rôle du vendeur qui est lui aussi un élève)

Sous-tâche II.5 : transporter la collection obtenue (un seul élève, le même que celui des sous-tâches II.2, 2.3 et 2.4)

Sous-tâche II.6 (différée après la mise en commun) : vérifier que les collections ont le même cardinal en faisant une superposition des « boutons » obtenus avec ceux figurés sur leur fiche. Cette sous-tâche est accomplie par les deux élèves de la sous-tâche II.1 (dont un seul des deux est concerné par les sous-tâches 2.2 à 2.5). Elle peut nécessiter l'utilisation de ciseaux et de colle.

Tâche II bis

C'est la même tâche que la tâche Ibis. La différence est que les marchands ne doivent pas délivrer plus de neuf boutons isolés par commande. Cependant, comme ils doivent répondre à plusieurs commandes, ils disposent dans leur réserve de plus de neuf boutons isolés. En outre, ils doivent se fier à la deuxième partie du bon de commande et donc y lire les informations.

Sous-tâche II bis.1 : réaliser une ou deux collections d'objets (des carrés en papier symbolisant des boutons ou/et des plaques rectangulaires symbolisant dix boutons) dont le cardinal est donné par un signifiant écrit. Un maximum de neuf boutons isolés doivent être délivrés.

Sous-tâche II bis.2 : vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné.

b. Stratégies des élèves jouant le rôle des « clients » (tâche II)

Nous allons indiquer ce qui change par rapport à la 1^{ère} tâche.

En ce qui concerne la **sous-tâche II.1**, l'élaboration du bon de commande, les élèves rédigent deux parties, mais en fait seule la deuxième est nécessaire pour obtenir une collection de boutons qui permet de réparer le Ziglotron. Il peut alors y avoir une incompréhension du lien et du rôle des deux parties : pourquoi donner au marchand deux indications de la quantité désirée ? Ceci peut jouer sur le choix des stratégies.

Pour la première partie, les élèves doivent dénombrer la collection. La stratégie la plus probable est une utilisation de stratégie OF vers EC consistant en un comptage puis une traduction « directe » de la désignation parlée en France en son écriture chiffrée. La variable didactique consistant à ne pouvoir commander que neuf boutons doit obliger les élèves à faire une commande comportant un nombre de groupes maximaux, ce qui doit être écrit dans la deuxième partie du bon de commande. Les différentes stratégies ont été indiquées. Il nous semble que le plus probable est qu'ils utilisent une désignation parlée du cardinal de la collection qu'ils ont nécessairement dénombrée pour obtenir la première partie du bon de commande. La stratégie indiquée par le manuel consistant à faire des groupements de dix sur la fiche nous semble moins probable, bien qu'envisageable et efficace. Celle consistant à utiliser les chiffres de l'écriture chiffrée attesterait que la connaissance visée par la séquence est (déjà) mobilisable. Comme l'étude de l'itinéraire cognitif proposé par le manuel indique que cette connaissance est nouvelle, cette stratégie ne nous semble pas probable. Par ailleurs, l'analyse des recherches antérieures du chapitre 5 montre la difficulté des élèves de cet âge à exprimer une quantité à partir d'un autre signifiant que la désignation parlée en langue maternelle (et sa version écrite que consiste alors l'écriture chiffrée). Dans le contexte de la séance, nous l'avons signalé pour la sous-tâche I.1, le terme plaque n'est pas pris nécessairement comme un objet comptable mais comme un conditionnement de livraison. Ainsi un message comme « 36 paquets de dix boutons » peut vouloir signaler « trente-six boutons à donner sous forme de paquets », ce qui peut aussi être le cas d'un message de type « 30 paquets de dix boutons, 6 boutons. ». A noter que le fait de ne pouvoir commander que neuf boutons au maximum est une contrainte matérielle qui devrait amener les élèves à un unique message (pour un même nombre) comportant deux signifiants du nombre traduit par deux chiffres : le chiffre des dizaines et celui des unités. Ceci permet de mettre en évidence une interprétation arithmétique multiplicative quand cette quantité est reliée à la désignation parlée du cardinal. Cependant nous venons d'indiquer que ceci pouvait être « contourné » par les élèves dans les exemples précédents. En outre, compte tenu de la « difficulté conceptuelle » signalée, le nombre d'essais limité à un, le milieu matériel installé au moment de la formulation ne comportant pas les conditionnements, ainsi que la validation différée ne contribuent pas à favoriser la réussite des élèves.

De plus, la tâche peut être plus ou moins facilitée si les élèves ont déjà eu dans la séance précédente à traiter dans leur tâche un nombre de la même dizaine. Ils peuvent aussi retirer

des informations de la séance précédente dans les « mises en commun ». En particulier, les repérants/appuis étant les mêmes et prononcés à l'identique pour les deux séances, vingt, trente, quarante, les élèves peuvent avoir mémorisé les associations vingt/deux, trente/trois, quarante/quatre.

La **sous-tâche II.2** n'amène pas de commentaire, tandis que la **2.3** peut être accompagnée d'échanges verbaux traduisant un message écrit en un message oral (et éventuellement le transformant), comme c'est le cas pour les séances Ziglotron que les élèves ont déjà vécues. Ce « risque » est accentué par le fait que les élèves ne sont pas nécessairement de bons lecteurs et que la forme du bon de commande comporte une difficulté pour la situation de communication. En effet, le bon comporte deux parties, concernant toutes les deux une information sur la quantité de boutons. Or seule la deuxième partie, le message en lui-même, est en direction du « marchand ». La **sous-tâche II.4**, la vérification que la commande délivrée est bien celle demandée, est rendue ici plus difficile que dans la première séance car les élèves ne sont pas censés parler. Ils peuvent néanmoins s'appuyer sur ce qui est écrit sur le bon de commande qui constitue une référence objective de ce qui est commandé. Finalement la **sous-tâche II.6** se fait après une « mise en commun », dans laquelle la validation (au moins intellectuelle) a pu être faite. Son rôle dans la séance n'est alors plus le même que dans la première séance, et va dépendre de ce que les élèves ont retenu de la mise en commun. En particulier, elle peut ne constituer qu'un « simple » achèvement de la tâche, sans enjeux mathématiques.

c. Stratégies des élèves jouant le rôle des « marchands » (tâche II bis)

Pour la sous **tâche II bis 1**, délivrer la commande, les stratégies dépendent du type de message. Si nous supposons que le message joue le même rôle qu'une désignation orale des groupements, l'analyse des stratégies que nous avons indiquées dans la séance précédente, sous-tâche Ibis.1, reste valable. Cependant, ici le vendeur a deux informations sur la quantité et il est toujours possible qu'il utilise l'ensemble des données pour interpréter ce que veut le client. Il se peut même qu'il y décèle une contradiction. En outre, la forme écrite des messages fait que les élèves peuvent s'y référer à tout moment. Finalement, il est ici possible que le vendeur distingue chacune des lignes. Il y lit alors trois nombres différents qu'il a alors à interpréter par rapport à ce que désire le vendeur²⁴⁶.

La difficulté des élèves déjà signalée pour les signifiants de type « désignation des groupements » peut amener un message comme « 36 paquets de dix boutons » ou « 30 paquets de dix boutons, 6 boutons. » à être interprété par trois plaques de dix et six boutons seuls, et c'est peut-être ce qui est effectivement attendu par le client. A noter qu'aucune stratégie n'est indiquée par le manuel.

La sous-tâche Ibis. 2, vérifier l'adéquation entre ce qui est demandé et ce qui est donné n'est pas indiquée par le manuel, elle a été traitée dans la sous-tâche II.4 de la tâche II.

1.3 Séance 3

a. Tâches et variables

La **tâche III** est similaire aux tâches précédentes. Cependant il s'agit ici d'adresser le message par écrit à un marchand fictif puisque ce sera l'enseignant qui va le récupérer afin de le commenter dans une « mise en commun ». Il ne délivre pas de collection. Le bon de commande est cette fois-ci à compléter par chaque élève individuellement, avec une

²⁴⁶ Rappelons que les élèves de CP sont des lecteurs débutants et que c'est la première fois qu'ils sont confrontés à un bon de commande écrit, qui comporte de surcroît des informations non nécessaires.

possibilité de confrontation à deux une fois celui-ci écrit. Il comporte l'écriture chiffrée indiquant la quantité à commander. C'est donc le suivant :

Il faut 42 boutons.
Notre commande :
..... paquets de dix boutons
..... boutons.

L'enseignant présente la fiche Ziglotron aux élèves, mais ils n'en disposent pas pour la réalisation de la tâche.

Dans le guide de l'enseignant, p.156 est écrit « *Vous devez compléter le bon de commande pour qu'on puisse réparer le Ziglotron. Lorsque vous aurez terminé, nous comparerons vos bons de commande et vous devrez dire comment vous avez fait pour le compléter* ».

Par la suite, une **tâche III bis** est prescrite aux élèves, elle est similaire à la tâche III. Les nombres en jeu sont cette-fois ci successivement, 16, 50, 83 et 38. Les nombres sont écrits au tableau (écriture chiffrée). Leur nom est prononcé par l'enseignant au moment de la consigne « *Je veux 16 boutons. Que dois-je commander ?* ». Les réponses sont cette fois-ci données sur l'ardoise

La tâche III ter finalement donnée consiste en une tâche réciproque à la précédente. La consigne orale est « *J'ai commandé 6 paquets de dix boutons et 3 boutons. Combien cela fait-il de boutons ?* » (les nombres sont écrits au tableau). Les élèves doivent donner leur réponse sur leur ardoise (écriture chiffrée). Les autres bons de commande proposés aux élèves sont « *3 plaques de dix et 6 boutons* » et « *4 plaques de dix et 4 boutons* ».

b. Stratégies des élèves (tâches 3, 3 bis et 3 ter)

Tâche III

La différence fondamentale par rapport à l'analyse précédente est que les élèves n'ont pas à dénombrer le nombre de boutons manquants. Les différentes fonctions des deux parties du bon de commande peuvent leur apparaître plus claires. En effet, cette fois-ci, la première partie est déjà remplie et sert à les informer du nombre de boutons. Pour la deuxième partie, les stratégies ont été indiquées précédemment. Seules celles consistant à faire des groupements sur le Ziglotron semblent bloquées. Ce qui a été dit, fait, mis en relief dans la séance précédente peut influencer l'emploi de telle ou telle stratégie. Signalons en particulier que le nombre en jeu « 42 » est prononcé à nouveau à l'aide du repérant/appui quarante, seule l'appuyant/nombrant a changé. L'association quarante/quatre a pu être mémorisée.

Tâche III bis

Les stratégies ont été indiquées précédemment, nous les précisons selon chaque nombre. A noter que la plus rapide consiste à utiliser l'écriture chiffrée, c'est celle qui est à mettre en avant dans la mise en commun précédente.

Pour le nombre 16, le repérant/appui « dix » et le comptant/appuyant « six » n'est pas entendu dans sa désignation parlée « seize ». Ceci ne favorise donc pas une utilisation de ceux-ci dans cette désignation orale. Le nombre en jeu étant relativement petit, une stratégie utilisant les doigts, compter jusqu'à seize, un deux, trois, etc. Arrivé à dix, on referme les doigts et on continue. Le fait d'avoir une fois passé dix indique qu'il faut un paquet de dix, alors que le nombre de doigts qui restent levés peut être compté, un deux, ..., six, ce qui permet d'obtenir le nombre de boutons seuls. Il est aussi possible que certains élèves aient mémorisé un résultat additif avec appui sur dix, ou aient déduit le repérant « caché » « dix » du fait que seize est un avant « dix-sept ».

Pour le nombre 50, une stratégie passant par la désignation orale est simplifiée puisqu'il n'y a pas de comptant/appuyant. Seule l'association cinquante/cinq est requise. Cependant, celle-ci n'est pas encore intervenue dans les séances précédentes. A noter en outre que le fait de ne pas avoir de boutons seuls à commander peut amener à aborder la notion conceptuelle du « zéro » en tant que nombre ou/et chiffre : doit-on dire « zéro »²⁴⁷ ? C'est en particulier le cas pour ceux qui utilisent l'écriture chiffrée.

Les élèves ne connaissent pas nécessairement la désignation parlée du nombre 83. Celle-ci ne permet pas d'entendre le repérant/appui (mais on entend le comptant/appuyant « trois »). Ceci devrait contraindre les élèves soit à utiliser l'écriture chiffrée, soit à utiliser la suite des dizaines et à les compter.

Le nombre 38 est à rapprocher des nombres déjà traités dans la séance 1 (30 et 37) et la séance 2 (34), ce qui favorise l'emploi de la mémorisation de l'association trente/trois. Ici en outre un parallèle peut être fait avec le nombre précédent, 83. Les élèves qui ont perçu le lien avec l'écriture chiffrée peuvent voir l'inversion des chiffres.

Tâche III ter

C'est la première fois que cette tâche réciproque de la précédente est donnée aux élèves. Cependant il est probable que des élèves l'aient traitée, par exemple s'ils ont procédé par essais/erreurs ou pour vérifier leur réponse. Les stratégies envisageables sont de type OG vers OF, ou OG vers EC avec tous les cheminements possibles. A noter que la plus rapide consiste à faire une association des chiffres dans le bon ordre pour reconstruire l'écriture chiffrée, ce lien (dans l'autre sens) a été mis en avant dans la mise en commun précédente et éventuellement utilisé dans la tâche III bis. Nous allons relever les particularités de chaque proposition qui sont susceptibles d'influencer sur ces cheminements.

En ce qui concerne « 6 paquets de dix boutons et 3 boutons », le nombre soixante-trois n'est pas nécessairement un nombre que les élèves savent associer à l'écriture chiffrée « 63 ».

« 3 plaques de dix et 6 boutons » est à rapprocher de nombre de messages déjà traités mettant en jeu les nombres entre trente (30) et trente-huit (38).

« 4 plaques de dix et 4 boutons » est à rapprocher des messages déjà traités mettant en jeu les nombres entre quarante-deux (42) et quarante-cinq (45). En outre ici le fait que le chiffre des unités soit le même que celui des dizaines permet que certaines stratégies erronées conduisent à une réponse exacte.

1.4 Séance 4

a. Tâches et variables didactiques

Deux tâches sont à distinguer dans cette dernière séance.

La première, la tâche IV, est celle indiquée par le manuel via l'exercice 2 p. 70. Elle est identique à la tâche III, les élèves doivent compléter trois bons de commandes, sur leur fichier.

²⁴⁷ Nous avons indiqué dans le chapitre 6 ne pas avoir relevé que le manuel « Cap Math » proposait de séances spécifiques dans lequel zéro était utilisé en tant que nombre.

Il faut 36 boutons.
Notre commande :
..... paquets de dix boutons
..... boutons.

Il faut 30 boutons.
Notre commande :
..... paquets de dix boutons
..... boutons.

Il faut 82 boutons.
Notre commande :
..... paquets de dix boutons
..... boutons.

La deuxième, la tâche IV bis, est celle indiquée par le manuel via l'exercice 3 p. 70. Elle est proche de la tâche III ter, les élèves doivent compléter quatre bons de commandes, sur leur fichier.

Il faut boutons.
Notre commande :
7 paquets de dix boutons
8 boutons.

Il fautboutons.
Notre commande :
4 paquets de dix boutons
0 bouton.

Il faut boutons.
Notre commande :
1 paquet de dix boutons
5 boutons.

Il fautboutons.
Notre commande :
3 paquets de dix boutons
7 boutons.

Les élèves n'ont aucun autre matériel à leur disposition. Le contexte vécu par les élèves précédemment est ce qui permet d'indiquer ce qui est attendu.

b. Stratégies des élèves (tâches 4 et 4 bis)

Toutes les stratégies ont été indiquées auparavant. Nous avons aussi signalé l'influence des nombres en jeu. Nous notons ici que pour chaque exercice, la disposition des bons de commande peut engager un ordre de résolution, s'ils sont considérés selon l'ordre de lecture usuel. L'ordre des réponses peut avoir alors une influence sur le choix des stratégies. En outre, ce qui a été retenu des séances précédentes par les élèves peut aussi les influencer. A noter que la répétition peut favoriser l'adoption d'une stratégie « mécanique » consistant à placer les chiffres donnés au bon endroit (et dans le bon ordre).

1.5 Analyse *a priori* de la tâche de l'enseignant

Le rôle *a priori* de l'enseignant, sans contexte précis, a été décrit de manière théorique dans le chapitre précédent. Nous allons nous y appuyer pour le décrire de manière précise dans cette séquence. Nous utilisons alors à la fois l'analyse précédente concernant les tâches des élèves ainsi que les recommandations du manuel. Nous allons ainsi mettre en perspective la tâche de l'enseignant proposée via le manuel.

Dans le chapitre 7, nous avons proposé de découper chaque séance en trois « phases » : un « lancement » (l'enseignant donne une indication de la tâche aux élèves, elle se termine au

moment où les élèves vont commencer à la réaliser), une « résolution de la tâche par les élèves » (les élèves sont confrontés à la tâche, elle se termine au moment où l'enseignant décide de l'interrompre pour débiter la « phase » suivante) et la dernière est la « mise en commun » (les élèves ne traitent plus la tâche mais vont en discuter tous ensemble, en classe, sous la direction de l'enseignant). Ce découpage est en filigrane dans les prescriptions dans le guide de l'enseignant, c'est ce que nous allons préciser par la suite. Nous allons déterminer comment le processus dialectique de dévolution/institutionnalisation peut s'y réaliser, en considérant en particulier comment l'enseignant peut mener une phase de bouclage.²⁴⁸

Auparavant, il est nécessaire de fixer l'objectif d'apprentissage principal pour l'enseignant, via ce que les élèves ont à retenir de la séance. L'analyse de la tâche de l'enseignant ne peut se faire sans prendre en compte cet objectif.

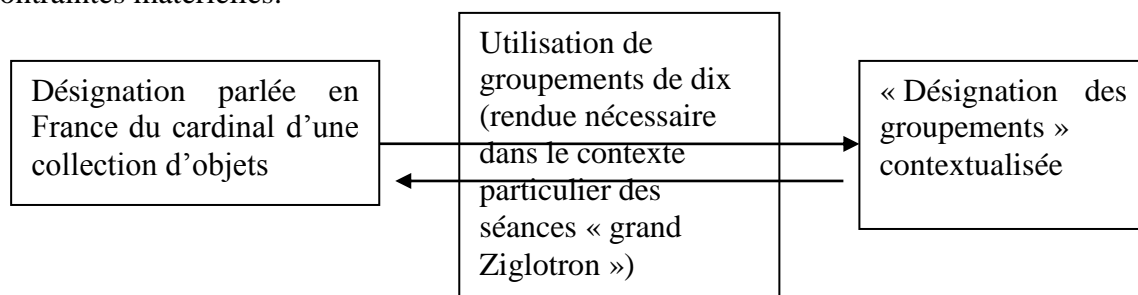
a. Le rôle de l'enseignant par rapport à l'objectif cognitif de la séquence et de chaque séance

En ce qui concerne les informations du manuel, nous allons inférer cet objectif tout particulièrement de ce qui est écrit dans la rubrique intitulée « phase de synthèse ».

Dans l'analyse du chapitre 6, nous avons mis en relief les cheminements cognitifs favorisés dans la séquence grand Ziglotron. Nous avons indiqué que cette séance constituait à elle seule une étape de l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel. Nous allons nous y appuyer en reprenant certains résultats, ce qui permet de situer la séquence dans l'itinéraire cognitif d'enseignement proposé par le manuel.

Séances 1 et 2

Deux désignations orales, celle parlée en France et celle en termes de paquets de dix et boutons (seuls), sont reliées. Nous avons indiqué ci-avant comment ceci était réalisé dans la tâche proposée aux élèves. Dans la 2^{ème} séance, le milieu est susceptible de contraindre les élèves à utiliser des groupements de dix. Dans Cap Maths, la maximalité n'est pas questionnée en elle-même, ni le fait de choisir dix comme cardinal du groupement ou même de choisir le même cardinal pour chaque groupement. Tous ces choix sont des conséquences de contraintes matérielles.



L'enseignant doit s'assurer que le lien entre les deux désignations orales est fait, c'est-à-dire que les élèves comprennent qu'elles désignent le même nombre, dans ce contexte précis.

La première séance ne contraint pas les élèves à utiliser une « désignation des groupements », elle permet de s'assurer que la tâche est comprise par les élèves, puisqu'elle n'est pas *a priori* problématique, au sens où ils peuvent utiliser des connaissances anciennes pour dénombrer les « boutons ». Compte tenu des nombres en jeu, nous avons vu dans l'analyse que pour certains élèves ceci pouvait cependant constituer une difficulté (d'énumération). Des « désignations des groupements » peuvent néanmoins survenir. L'enseignant peut les mettre en valeur de différentes façons. En particulier il peut les reprendre dans la mise en commun afin de diffuser la stratégie qui a amené ces désignations ou uniquement les valider ou

²⁴⁸ En référence à notre définition donnée dans le chapitre 7.

évaluer. Il peut s'aider en utilisant des éléments du milieu matériel ou encore mobiliser des signifiants « relais » qui sont mobilisables par les élèves. Il peut aussi comparer les avantages et les inconvénients des différentes stratégies ou/et des différentes formulations des messages. Ainsi par exemple s'il veut comparer les deux types de formulation orale, il peut faire appel au point de vue du vendeur. S'il explore les stratégies, il peut indiquer que le comptage de dix en dix permet d'obtenir l'une ou l'autre des deux désignations. L'enseignant dispose ainsi d'une certaine marge de manœuvre sur ce qui est à faire ressortir de cette séance. Ces choix lui permettent d'anticiper les difficultés qui peuvent survenir dans la séance suivante et de s'assurer de la faisabilité de l'étape de l'itinéraire cognitif qui se joue dans la séquence.

Dans la deuxième séance, le milieu installé est susceptible de rendre inefficaces les stratégies OF. L'analyse de la tâche des élèves a montré que ce n'était pas forcément le cas. Les élèves « vendeurs » peuvent interpréter les messages des élèves « clients ». L'enseignant peut donc avoir à gérer ces éventuelles « réussites » qui ne permettent pas d'interpréter les désignations parlées en France de manière multiplicative. Quoi qu'il en soit, s'il installe une phase de bouclage, et c'est ce que prescrit le manuel, les productions des élèves seront validées ou/et évaluées. A nouveau l'enseignant a le choix d'explorer ou non la stratégie qui a permis ou permet de les obtenir (celle des élèves ou une qu'il peut proposer, suivant le contrat qu'il adopte). Dans le cas où il choisit de ne pas recourir à une explicitation des stratégies, si la validation se fait à partir du signifiant produit par les élèves, ici encore, l'enseignant peut convoquer à nouveau des éléments du milieu matériel ou non, des signifiants « relais » en particulier. Le manuel n'incite pas l'enseignant à explorer les stratégies. En effet la question qu'il doit poser est, en ce qui concerne les commandes, de « vérifier leur pertinence », p. 154. Des exemples venant des élèves sont alors donnés, pour vérifier des messages formulés en termes de plaques et de boutons :

« revenir aux plaques et aux boutons, et compter un par un les boutons pour savoir si on arrive bien au nombre voulu ;

Dire par exemple, « 3 plaques ça fait 30 boutons » (en le justifiant de différentes manières) « et encore 4 boutons, ça fait bien 34 » ;

Dire que c'est juste, ça se voit, parce que dans 34, on voit le 3 et le 4 ; le 3 ce sont des plaques de dix et le 4 les boutons tout seuls »

Ces exemples ne concernent donc pas *a priori* les stratégies. En conséquence, des stratégies OF vers OG qui consistent à passer de « trente-quatre » à « quatre plaques de dix et quatre boutons seuls » ne sont pas à expliciter. Elles permettent pourtant d'interpréter une désignation parlée en France de manière multiplicative. Il reste que l'enseignant peut investir une marge de manœuvre en mettant en jeu ce passage, afin d'aller dans le sens de l'étape de l'itinéraire. Il peut demander par exemple aux élèves d'expliquer comment ils ont fait ou bien indiquer lui-même une stratégie, selon le contrat qu'il met en place²⁴⁹.

A noter que la séance 2 n'a pas pour but d'institutionnaliser le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres du message, cependant, en particulier selon la nature des débats et les propositions des élèves, l'enseignant a toujours le choix d'étudier ces liens.

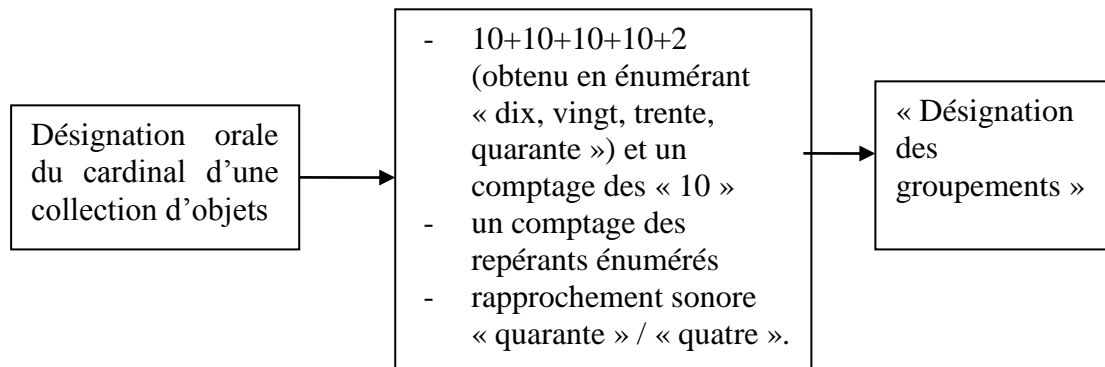
Les validations des réponses permettent *a minima* d'amorcer dès cette 2^{ème} séance un deuxième temps, signalé dans l'analyse entreprise dans le chapitre 6, celui dans lequel les deux désignations sont reliées indépendamment de la présence de la collection (lien signifiant-signifiant).

²⁴⁹ Le « choix » du contrat est plus ou moins ouvert selon ce que les élèves produisent et disent. La situation installée *a priori* permet d'envisager d'aller dans le sens de demander aux élèves leur stratégie et de les diffuser. Cependant, leur âge peut entraîner des difficultés d'expression.

Séance 3

Dans la séance 3, les deux désignations orales, parlées en France et « désignations des groupements », sont à nouveau reliées indépendamment de la présence de la collection. Ceci est cette fois-ci encouragé par un milieu matériel réduit, les élèves n'ont plus à leur disposition la collection figurée, ils doivent utiliser la désignation parlée ou/et la désignation écrite chiffrée qui leur est donnée. Notre analyse de la tâche des élèves nous a indiqué qu'il nous semblait plus probable qu'ils utilisent la désignation parlée en France que les chiffres de l'écriture chiffrée correspondante. Ceci est en accord avec ce que nous avons indiqué dans le chapitre 6.

La « mise en commun » prescrite dans la séance 3, unité 8, indique la stratégie suivante pour passer de l'écriture chiffrée 42 au signifiant du type « ... paquets de dix boutons et ... boutons » : « décomposition du type : $10/10/10/10/2$ ou $10+10+10+10+2=42$, avec comptage de dix en dix pour vérifier ». Nous avons indiqué que la proposition du manuel pouvait se schématiser ainsi :



A nouveau ces prescriptions ne nous semblent pas explicites quant au traitement des stratégies des élèves. Elles indiquent en effet que c'est l'enseignant qui fait le rapprochement entre les écritures chiffrées et les désignations parlées en France, via des signifiants « relais » de type $10/10/10/10/2$ ou $10+10+10+10+2$. Mais il nous semble qu'une certaine marge de manœuvre est laissée à l'enseignant sur ce lien. En effet, d'après notre analyse, il est probable que les élèves, ou au moins une partie d'entre eux, constatent que le cardinal de la collection est indiqué, dans le contexte de la séance, par les désignations suivantes : « 42 », « 4 paquets de dix et 2 boutons », « quarante-deux » et « quatre paquets de dix et deux boutons ». Les deux premières sont écrites et les deux dernières orales²⁵⁰. D'après notre analyse, les décompositions du type $10/10/10/10/2$ ou $10+10+10+10+2$ ne seront probablement pas utilisées par les élèves.

L'enseignant a alors la possibilité de les introduire ou non. Il devra aussi choisir ce qui va être mis en relief dans la séance.

Cependant nous devons signaler ici une question qui est propre à l'itinéraire 1 (et 2 nous semble-t-il). L'étape de l'itinéraire de type 1 que propose précisément le manuel doit conduire à utiliser les désignations parlées en France dans une interprétation multiplicative du fait qu'elles permettent d'obtenir des « désignations des groupements ». Ceci met en jeu des stratégies OF vers OG pour résoudre la tâche, mais, pour les validations, plus vraisemblablement des stratégies OG vers OF. Les écritures chiffrées sont initialement la

²⁵⁰ L'écriture « 4 paquets de dix et 2 boutons » et la forme orale « quatre paquets de dix et deux boutons » ne sont pas clairement distinguées par le manuel.

version écrite des désignations parlées en France. L'interprétation multiplicative de la numération parlée en France doit-elle ou peut-elle « expliquer » les chiffres de l'écriture chiffrée ? Autrement dit, puisqu'à « quarante-deux » correspond « quatre paquets de dix et deux boutons seuls », l'écriture chiffrée est une forme abrégée de cette dernière désignation. La position des chiffres indique alors s'il est question de paquets de dix ou de boutons seuls. Ceci ferait écho à des stratégies. Cependant est-ce qu'une telle possibilité peut être envisagée via les tâches proposées dans la séance ? En effet, les élèves connaissent déjà la correspondance OF/EC (celle-ci ayant plus ou moins été étayée par les régularités des signes successifs des deux systèmes). Elle est la plupart du temps utilisée dans la séquence et n'est pas questionnée. En outre une stratégie OF vers OG vers EC ne résout pas le problème qui est posé. Une autre solution est alors de faire apparaître les chiffres de l'écriture chiffrée comme un moyen de retrouver l'interprétation multiplicative de la numération parlée dégagée auparavant. Ceci fait écho cette fois-ci à des stratégies OF vers EC vers OG. Le problème posé peut alors être résolu par une telle stratégie. Cependant, cette fois-ci l'interprétation multiplicative peut ne pas être en jeu, puisque la stratégie peut être « mécanique ». Il peut en effet s'agir d'utiliser une connaissance ancienne, la traduction d'une désignation parlée en sa forme écrite, la désignation chiffrée correspondante, puis d'utiliser dans le bon ordre les chiffres pour obtenir la désignation des groupements correspondante. En outre, si les élèves réalisent la tâche via une stratégie OF vers OG, il peut être difficile de leur faire apparaître l'utilité de passer par EC, cependant dans ce cas ils sont susceptibles de mettre en jeu une interprétation multiplicative. Mais pour ceux qui sont en échec le passage algorithmique OF vers EC vers OG précité peut apparaître comme pertinent pour résoudre la tâche, sans mettre en jeu l'interprétation multiplicative. D'ailleurs un « simple » passage mécanique EC vers OG peut suffire dans le cas où l'écriture chiffrée est donnée, c'est ce que nous verrons dans la séance 4.

Séance 4

Dans cette dernière séance, l'enseignant est confronté aux choix signalés précédemment. Les élèves peuvent réussir les exercices de manière mécanique, sans que ce dernier puisse contrôler si le savoir visé est bien en jeu. Il a alors la possibilité d'aménager ou non un débat qui justifie la pertinence de cette stratégie. Mais la situation proposée par le manuel ne facilite pas nécessairement que ce débat aboutisse aux preuves intellectuelles qui peuvent être attendues. L'enseignant a aussi la possibilité d'apporter lui-même des justifications.

b. La première séance

Nous entreprenons une analyse *a priori* plus détaillée de la première séance. Nous ne faisons pas une telle analyse des autres séances. L'analyse de cette première séance permet néanmoins d'y préciser aussi les contraintes et marges de manœuvre telles que notre cadre théorique permet de les comprendre. Les séances suivantes ont en effet une structure proche de la première, avec un découpage *a priori* semblable. En outre les tâches données aux élèves sont voisines et elles ont été analysées auparavant.

Cependant les séances s'enchaînent et ainsi les déroulements sont susceptibles de s'éloigner sensiblement des prescriptions du manuel, rendant caduque une analyse *a priori* aussi fine, qui, elle, est susceptible de convenir pour la première séance.

Lancement de la séance 1

Nous allons chercher les informations du manuel concernant le processus de dévolution dans la phase de lancement dans le paragraphe intitulé « *présentation de la situation* » par le manuel. Il y est prescrit une contextualisation de la séance par une histoire racontée qui se réfère à une tâche similaire (les Ziglotrons, sur laquelle il n'est pas donné ici plus de

précisions²⁵¹) et des indications complémentaires pour la nouvelle tâche. Ces indications portent sur les variables didactiques et un découpage en sous-tâches. Les variables didactiques concernent le matériel utilisé par les vendeurs (plaques de dix boutons et boutons), l'indication d'un nombre de boutons plus important (« *ils ont aussi beaucoup plus de boutons* ») et le fait de limiter le nombre de voyages à un. En ce qui concerne le déroulement, certaines sous-tâches sont indiquées ou/et précisées. Pour la sous-tâche I.3, il s'agit de l'évocation de la forme possible des messages (ils sont oraux et les exemples donnés sont « *12 boutons* », « *15 plaques* », « *8 plaques et 11 boutons* ») et de l'indication de celui qui doit réaliser la sous-tâche I.3 (un seul élève). La tâche I.bis des marchands est indiquée « *ils donnent exactement ce qu'on leur demande* ». En ce qui concerne la sous-tâche I.6, est précisé le fait que « *les boutons vendus en plaques devront être découpés avant d'être placés sur le Ziglotron* » et la sous-tâche I.5 (le transport) est reliée à une aide « *il faut ramener juste ce qu'il faut de boutons, ni plus, ni moins* ». A noter que la mise en place matérielle de la classe est prescrite avant l'indication de la tâche de manière verbale par l'enseignant.

Toutes ces indications, en particulier certaines sous-tâches, constituent les informations sur les tâches I et Ibis que l'enseignant doit fournir aux élèves d'après le manuel. Certaines d'entre elles pourraient être considérées comme des aides non nécessaires à ce que les élèves s'engagent dans la tâche. Compte tenu de l'âge des élèves et de l'étude de la tâche des élèves faite auparavant, nous analysons ces prescriptions comme des indications minimales pour que les élèves (tout au moins un certain nombre) commencent à s'engager dans la tâche telle qu'elle a été décrite précédemment et pour que les difficultés qu'ils affrontent soient avant tout mathématiques. En particulier, les stratégies proprement dites ne sont pas précisées, par exemple pour l'obtention du message à transmettre. Les exemples de messages donnés ne nous semblent pas tant des limitations qu'une ouverture sur le champ des possibles. Ainsi, le fait d'utiliser dans les deux cas les désignations parlées en France, soit pour un seul type d'objet (les boutons seuls ou les plaques seules) soit pour deux types d'objets (plaques et boutons), ne fait qu'exprimer les choix qui sont rendus possibles en raison du milieu matériel, sans les élargir ni les restreindre. Ces possibilités sont d'ailleurs mises en relation avec les types d'objets dont vont disposer les vendeurs (plaques de dix ou boutons seuls), ces objets étant montrés et retirés ensuite. Pour les clients, cet élément n'est plus présent au moment de réaliser la tâche, mais, même ainsi, ceci ne les contraint pas à élaborer un type ou l'autre de message (les deux mènent à une validation potentiellement positive). En outre, nous avons signalé dans l'analyse *a priori* de la tâche des élèves que ces formulations ne mènent pas nécessairement les élèves à envisager la possibilité de considérer les groupements comme des objets dénombrables. Par exemple, des élèves peuvent comprendre qu'il s'agit de commander un nombre de boutons (qu'ils estiment nécessairement indiqué par la désignation parlée en France du cardinal de la collection) et un type de conditionnement : « *j'en veux trente-six (en) plaques* ». Le milieu présent (et présenté) dans cette première phase puis celui installé ultérieurement ainsi que les indications données aux élèves (celles du manuel) ne nous semblent pas suffisants pour détromper tous les élèves, mais suffisants pour qu'ils s'engagent dans la tâche. A noter par ailleurs qu'il n'y a pas de prescription quant aux choix des élèves pour faire telle ou telle tâche, ni sur le nombre et la disposition en classe des différents groupes « clients » et « marchands ». Ceci peut cependant jouer sur la faisabilité de la tâche dans sa phase de réalisation, pour les élèves comme pour l'enseignant. Notre analyse nous mène à considérer que ces choix font partie de la tâche de l'enseignant. Celui-ci doit en estimer les avantages et inconvénients : au niveau des messages formulés, des procédures

²⁵¹ Cette dernière poursuit le même but que la séance grand Ziglotron : elle consiste à ce que des élèves clients demandent un nombre de boutons (désignation orale parlée en France) pour réparer leur Ziglotron. Elle permet donc de donner le but des tâches I et Ibis. Seules certaines variables didactiques prennent des valeurs différentes.

utilisées, mais aussi de la faisabilité tant au niveau du déroulement « cognitif » de la séance (par exemple un vendeur qui « compte mal » change le rôle que peut jouer la validation) que de son déroulement matériel (en associant deux élèves qui ne s'entendent pas par exemple). En outre dans la phase de synthèse, le fait que les élèves n'aient pas tous été confrontés à la même tâche a une importance sur les débats éventuels, surtout pour des élèves de cet âge (aptitude à se décentrer). Le choix à faire dès cet instant est donc important (bien que non signalé par le manuel).

En résumé, la tâche proposée à l'enseignant est de donner les indications nécessaires pour que les élèves puissent s'y engager. Les indications prescrites par le manuel nous semblent suffisantes pour assurer selon notre analyse que certains élèves s'engagent dans la tâche et *a minima* formulent la commande sous forme de « x boutons » ou « x plaques et y boutons ». Il nous semble difficile de détromper ceux qui auraient mal compris la tâche. Ceci peut être fait, selon notre cadre théorique, dans les phases suivantes.

Résolution de la tâche par les élèves

D'après les éléments théoriques que nous avons retenus, durant la résolution de la tâche par les élèves, l'enseignant peut poursuivre la dévolution et, en préparant la phase de bouclage, débiter le processus d'institutionnalisation proprement dit. La tâche de l'enseignant ne peut donc être analysée indépendamment de celle qui concerne le lancement et la mise en commun qui suit. Par ailleurs, l'enseignant doit prendre en compte certaines contraintes spécifiques du fait du contrat et des conditions matérielles en classe (le temps, les rythmes différents des élèves et leur interaction), alors que les élèves ne sont pas censés être tous ensemble et tout le temps en interaction avec lui. Nous analysons le paragraphe « *Les élèves d'une même équipe doivent se mettre d'accord sur ce qu'ils vont demander au marchand. Puis un seul se déplace, ils valident ensuite en plaçant les boutons sur le Ziglotron* » comme une prescription concernant l'enseignant qui l'engage à poursuivre la dévolution en faisant respecter les « règles du jeu » indiquées dans la phase de lancement, sans aide de nature mathématique, sans changer la nature du milieu qui a été instauré à la fin de la première phase.

Nous allons analyser comment l'enseignant peut préparer la phase suivante, la conclusion, en tenant compte des prescriptions dans le paragraphe que le manuel nomme « *Résolution et mise en commun* ». Il lui est possible de prendre des informations sur la forme du message (« *La commande demandée au marchand : un certain nombre de boutons isolés ; un nombre de plaques et de boutons isolés* »), sur les procédures pour obtenir le message (« *ce qu'a fait chaque groupe avant d'aller chez le marchand* »), et enfin sur « *la réussite ou l'échec de chaque groupe* ». Précisons ces trois points.

Le manuel cite deux types de messages : « *un nombre de boutons seuls* » et « *un nombre de plaques (de dix) et de boutons isolés* ». Ces messages sont à « *observer pour prendre connaissance de ce qu'ont fait les élèves* ». La formulation « *15 plaques* », n'utilisant que des plaques, a été indiquée dans le lancement mais n'est pas reprise ici. Notre étude précédente de la tâche des élèves et du lancement nous amène à considérer que ce sont bien les deux formes de message qui sont les plus probables, avec une probabilité bien plus importante pour les boutons seuls. Cependant d'autres formulations, comme par exemple « *trente-six boutons en plaques* », pourraient trahir une compréhension erronée de la tâche telle que nous l'avons déjà signalée. Relever ce type de message contribue directement à donner à l'enseignant une information sur les connaissances des élèves à propos du savoir nouveau en jeu, c'est-à-dire envisager qu'une quantité puisse être indiquée par des groupements et des objets non groupés. Les stratégies indiquées par le manuel pour l'élaboration du message, qui sont à « *observer pour prendre connaissance de ce qu'ont fait les élèves* », sont de trois sortes : « *ils ne*

*prennent pas d'information*²⁵² [...] ; ils comptent les boutons un à un ; ils comptent les boutons par dix, puis comptent les paquets et les boutons isolés ». Les stratégies ne sont cependant pas détaillées ici. Les liens entre ces stratégies et le message nous semblent implicites dans le manuel : compter un à un mène à une formulation « un nombre de boutons seuls » ou « un nombre de plaques (de dix) et de boutons isolés », compter les boutons par dix, puis compter les paquets et les paquets isolés mène à « un nombre de plaques (de dix) et de boutons isolés ». Ces informations peuvent aussi permettre à l'enseignant de choisir les stratégies pour des aides éventuelles et pour leur validation. Ceci fait le lien avec le point suivant.

Rien n'est stipulé dans le manuel sur la sous-tâche concernée par la validation de la réussite ou l'échec des élèves, ni sur le fait qu'il s'agisse de procédures ou/et de résultats ou encore sur le type de validation. La tâche de l'enseignant va porter prioritairement sur la validation des élèves « clients », ceux ayant effectué l'activité engendrée par la tâche I. Les « vendeurs » n'ont *a priori* qu'un rôle neutre dans la séance²⁵³. Il peut s'agir de la validation de la tâche complète, c'est-à-dire celle qui a pu être validée ou invalidée par une rétroaction du milieu dans la dernière étape. Pourtant un certain nombre de facteurs, non tous mathématiques, a pu être la cause de la réussite ou de l'échec (voir l'analyse *a priori* de la tâche des élèves). Chaque sous-étape est concernée et un échec à une des sous-étapes peut engendrer l'échec global à la tâche I. Ces informations peuvent contribuer à organiser le bilan, mais l'enseignant ne pouvant connaître le déroulement de l'ensemble de la tâche pour tous les groupes, il aura à sélectionner les informations recueillies à ce sujet. D'autre part, le fait que l'élève puisse avoir une information sur l'échec ou la réussite de sa tâche, à un moment donné, fait partie du contrat didactique « minimal » en classe (cf. le cadre théorique). L'enseignant peut s'acquitter de cette tâche en s'informant sur ces différentes réussites ou échecs et même de manière plus précise sur leur cause (et donc les difficultés des élèves). Il a aussi la possibilité dès cette phase de valider certaines étapes, productions, procédures, pour certains élèves. Il peut utiliser pour ce faire en particulier les ressources du milieu disponibles à ce moment.

Terminons ce paragraphe en abordant les aides. Les aides apportées par l'enseignant aux élèves doivent permettre la réalisation « technique » de la tâche, y compris au niveau des mathématiques. Nous entendons ici les aides concernant des connaissances anciennes, principalement celles relatives aux stratégies de comptage (énumération par exemple). Certaines aides peuvent aussi concerner une connaissance que nous considérons comme nouvelle, en particulier le fait qu'un message formulé en termes de groupements (de dix) et d'objets permette d'obtenir la quantité voulue. Cependant, d'après notre analyse, la situation proposée permet à l'enseignant d'organiser une phase de bouclage qui peut lui permettre d'y revenir. L'aide apportée peut donc mener à la fois à une institutionnalisation partielle pour certains élèves et constituer un moyen de préparer la synthèse, l'enseignant pouvant alors éventuellement s'appuyer sur les échanges qu'il a eus avec ces élèves. Nous considérons les autres aides apportées comme ressortissant du contrat didactique installé dans telle ou telle classe (par exemple, les élèves attendent-ils tous de réussir et donc d'être éventuellement aidés ?). Elles peuvent aussi indiquer que l'enseignant poursuit un autre objectif que celui que nous avons signalé. Certaines contraintes matérielles, comme le temps et le nombre d'élèves, sont néanmoins susceptibles d'entraîner leur survenue, l'enseignant décidant qu'il ne pourra pas « tout faire » pendant la phase de synthèse.

²⁵² La stratégie consistant à ne pas prendre d'information n'est pas toujours facilement identifiable. Un observateur peut penser qu'un élève ne prend pas d'information, alors qu'en fait ce dernier a procédé à une estimation globale de la quantité. Ceci peut mener à n'importe quel type de formulation, la décision pouvant être prise au moment de la commande et donc influencée par le milieu présent à ce moment.

²⁵³ Nous avons cependant mis en évidence que ce n'est pas forcément le cas dans les déroulements prévisibles.

Ainsi les prescriptions sur les informations à prendre ne contribuent pas toujours explicitement directement à l'objectif cognitif que nous avons fixé. Ces informations peuvent pourtant être utilisées pour organiser une phase de bouclage. Certaines peuvent aussi être utiles pour les séances suivantes, comme par exemple le nombre et le type de procédures utilisées, les difficultés à compter, à envisager d'indiquer une quantité en termes de plaques et de boutons seuls. L'enseignant peut en prendre note sans nécessairement les utiliser dans la synthèse.

Mise en commun

Ici tous les acteurs de la classe sont concernés simultanément et le contrat a changé, le savoir est sous la responsabilité de l'enseignant. Le manuel indique que la synthèse « *fait essentiellement apparaître qu'il faut bien préparer ce qui sera demandé : en dénombrant avec précision les boutons nécessaires et, si cela a été utilisé par certaines équipes, en faisant déjà des groupements de dix boutons sur le Ziglotron* ». Mais, nous avons indiqué que faire comprendre aux élèves la nécessité de prendre ces informations n'était pas le seul enjeu d'une phase de bouclage. Ils doivent aussi envisager un groupement en tant qu'objet dénombrable et considérer que deux types d'objets peuvent servir à indiquer une quantité. Cette nouvelle connaissance mathématique concerne le fait que « x groupes de dix et y objets isolés » peut désigner une quantité d'objets. Ici, la connaissance est contextualisée. Cette connaissance est à institutionnaliser (au moins partiellement) d'après l'objectif que nous avons retenu. La forme prise par cette institutionnalisation et en particulier son degré de décontextualisation ne nous semble pas pouvoir être indiquée précisément dans la tâche de l'enseignant. Cela est dû à la variété des déroulements possibles, en particulier en fonction des connaissances anciennes des élèves ainsi que des stratégies et formulations produites. Cependant, il est possible d'utiliser le lien entre le message et la stratégie employée pour le formuler, cette stratégie indiquant qu'il s'agit bien de dénombrer une quantité. L'enseignant va être confronté à une certaine diversité de stratégies qu'il devra gérer. Cependant, ni la stratégie ni le lien stratégie/message ne sont objet d'institutionnalisation, ce ne sont que des moyens pour atteindre l'objectif²⁵⁴. D'après notre cadre théorique, il est aussi dans la tâche de l'enseignant de fournir des éléments de validation ou d'évaluation sur les travaux des élèves. Les élèves ayant pu effectuer une validation globale par eux-mêmes de la tâche I dans la sous-tâche I.6, il est possible pour l'enseignant de s'enquérir de celles-ci dans la phase de bouclage, afin de les rendre publiques (participant ainsi au processus de dépersonnalisation).

Signalons, en outre, que l'enseignant peut s'appuyer sur l'évocation de la rétroaction du milieu matériel présent pendant la tâche des élèves pour cette institutionnalisation. Cependant, ce milieu est avant tout fait des interactions entre les élèves au moment de la livraison de la quantité de boutons, et ensuite la rétroaction dans la sous-tâche I.6 ne permet pas d'inférer avec précision la cause de l'échec ou de la réussite finale. Par contre pendant la phase de synthèse, l'enseignant peut s'aider des objets qui ont été présents dans le milieu (plaques/bandes de dix boutons et boutons seuls). Ajoutons que des effets de contrat en classe peuvent influencer cette phase, en particulier, en ce qui concerne une hiérarchisation des stratégies et messages et donc un certain degré d'institutionnalisation.

En conclusion, nous analysons la tâche de l'enseignant dans la phase de synthèse comme étant d'une part de dégager le fait que certaines formes de message (utilisant deux types d'« objets ») permettent d'obtenir une quantité d'objets adéquate, et d'autre part de signaler l'utilité d'utiliser une stratégie, ce qui nécessite de les évoquer sans les hiérarchiser ni les étudier, aucune n'étant objet d'institutionnalisation *a priori*. Le premier élément n'est pas explicitement prescrit par le manuel et l'institutionnalisation peut prendre de multiples formes. Le second élément ne comprend pas d'institutionnalisation stricto sensu sur le

²⁵⁴ Nous avons en outre analysé que différentes stratégies pouvaient mener à une même formulation de message.

fonctionnement des stratégies. Ceci n'entre peut-être pas dans le contrat usuel établi en classe : ici l'enseignant valide l'emploi d'une stratégie qu'il doit par contrat permettre aux élèves de comprendre, mais il n'a pas pour tâche d'institutionnaliser son fonctionnement ni son efficacité. Cependant, une des stratégies de type OF vers OG permet de convoquer une interprétation multiplicative de la numération parlée en France. Est-ce que l'enseignant doit faire en sorte que les élèves l'utilisent ? Comment peut-il alors conduire la séance ?

2. La classe de Mme B.

Mme B. est une enseignante expérimentée, ayant depuis plusieurs années la responsabilité de classes de CP. Elle est habituée à utiliser Cap Maths et suit la progression du manuel. Les ressources qu'elle utilise viennent surtout de ce manuel ainsi que de certains stages de formation qu'elle a suivis, par exemple un stage EPS/Maths de trois semaines qui s'est déroulé l'année précédente. Les élèves sont disposés par tables de deux qui peuvent être accolées pour former des rangées. Des bancs sont disponibles, ils lui permettent de temps à autre de réunir toute la classe devant le tableau. Parmi les affiches qui ornent les murs, celle qui concerne la numération consiste en une file numérique des écritures chiffrées de 1 à 59. Elle est située en haut du tableau.

Chacune des séances se réfère directement aux annexes dans lesquelles sont donnés les indicateurs en parallèle de la transcription complète des séances. Ces séances sont découpées selon les activités observées des acteurs. Le « lancement », la « réalisation de la tâche par les élèves » et la « mise en commun » sont structurées ensuite en épisodes puis sous épisodes qui permettent de les considérer à un niveau plus fin. Des incidents et leur mode de gestion y sont en particulier relevés, ainsi que les stratégies et les signifiants utilisés. Ceci nous permet dans un deuxième temps de faire une analyse dans laquelle sont distingués le milieu et les microcontrats installés et de dégager la dynamique des stratégies employées au fur et à mesure : c'est l'analyse qui est donnée ici dans le corps de la thèse. Celle-ci se fait séance par séance et, à la fin de chacune, nous répondons à la première question, le jeu des interprétations (analyse descriptive). La deuxième question, sur les facteurs qui contribuent à la survenue des différentes interprétations, nécessite de reprendre la dynamique globale des quatre séances et la réponse à la première question. C'est pourquoi nous y répondons à la fin de l'analyse de la séquence, dans le paragraphe 2.2.

2.1 Analyse des séances

a. Séance 1

Rappel de la tâche

Une partie des élèves doit élaborer un message oral pour commander un nombre de boutons manquants représentés sur une fiche Ziglotron qu'ils ont à leur disposition et qui ne doit pas quitter leur table. Les élèves marchands sont éloignés des clients et doivent délivrer ce qu'on leur demande. Deux conditionnements sont disponibles : des plaques de dix boutons ou des boutons seuls. Les quantités en jeu sont suivant les fiches 23, 30, 37.

La situation (milieu)

La situation de la séance 1 est celle prévue par le manuel (voir l'analyse *a priori* et le lancement). Une différence est cependant à noter, c'est l'absence de prescription de stylos ou de crayons pour les clients, ce qui ne va pas favoriser l'émergence d'une stratégie consistant à constituer des groupements sur la fiche Ziglotron. Cependant l'emploi de stylos ou crayons n'est pas interdit et le contrat installé en classe permet aux élèves de les utiliser (ils le feront

d'ailleurs pour énumérer les carrés). En outre, la référence à la séance « petit Ziglotron », 1^{er} épisode du lancement, peut induire une stratégie identique à cette dernière, c'est-à-dire une stratégie OF consistant à obtenir la désignation parlée en France à partir de la désignation du cardinal de la collection par un comptage un à un (ce qui suppose des connaissances relatives à l'énumération). L'enseignant insiste pourtant sur la différence essentielle entre les deux séances : la présence de deux conditionnements, les plaques de dix et les boutons seuls. Le matériel passe de main en main, mais n'est plus présent pendant la réalisation de la première partie de la tâche des clients. Les élèves semblent cependant retenir surtout le fait qu'il y a plus de boutons à dénombrer dans cette séance que dans celle du petit Ziglotron.

La situation permet aux élèves de valider par eux-mêmes la correction de la collection obtenue par rétroaction du milieu matériel²⁵⁵. Cependant elle ne permet pas aisément d'identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves qui sont susceptibles d'interpréter le message. En outre la situation ne contraint pas les « clients » à produire un message oral comportant une demande de plaques. Elle permet par contre aux « marchands » de comparer les commandes demandant des plaques (plus simples à réaliser car comportant moins d'objets à dénombrer) à celles n'en comportant pas.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Les élèves n'ont pas recours à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande. Nous avons indiqué dans notre analyse *a priori* que cette stratégie, pourtant la plus efficace, est peu probable en considérant les connaissances anciennes des élèves²⁵⁶.

Dans la période de travail des élèves, les stratégies de résolution de la tâche 1 de la séance 1 débutent essentiellement par un comptage un à un menant à une désignation parlée en France²⁵⁷ : seuls deux groupes commandent des plaques en comptant les « dix » à partir de cette dernière (3^{ème} épisode du travail des élèves, « *trois dizaines ça fait trente* »). Les interactions avec l'enseignante ne permettent pas de savoir comment ils procèdent car ce n'est pas ce que cette dernière recherche. Les élèves exposent des stratégies de résolution pendant la mise en commun : la majorité sont des comptages, d'autres sont proches de calculs en particulier pour obtenir des dizaines. Un groupe ébauche une stratégie OG vers OF pour « trente » (épisode 2.2 de la mise en commun).

L'enseignante n'indique pas de stratégie avant la mise en commun. Dans cette dernière, l'enseignante diffuse différentes stratégies de comptage ou calcul OF. Elle reprend une stratégie OF vers OG d'un groupe pour l'expliquer aux autres élèves (épisode 2.2). Elle explicite alors un passage OG vers OF (et non OF vers OG) en utilisant les signifiants « relais » dont l'un consiste en des groupements constitués à partir d'une reproduction par des croix au tableau de la collection figurée sur les fiches (stratégie non employée par les élèves) et l'autre des couples de mains (dix doigts).

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Dans la phase de lancement, l'enseignante présente la séance et installe le milieu comme il est prescrit dans le manuel, permettant ainsi à un mésocontrat de dévolution d'une première situation de s'installer.

Durant la phase du travail des élèves, l'enseignante instaure, selon les cas, un microcontrat de tutorat ou de production individuelle : elle intervient parfois pour les aider mais sans apporter

²⁵⁵ Dans la phase de bouclage de la séance, l'enseignante diffuse les informations sur la réussite ou l'échec des élèves en leur demandant aux élèves le résultat.

²⁵⁶ Voir l'analyse *a priori* : la stratégie de groupement est non seulement plus efficace, mais en plus elle peut faciliter la mise en œuvre du passage vers une interprétation multiplicative.

²⁵⁷ Voir par exemple en annexe l'épisode 2.2 de la mise en commun de la séance 1.

de connaissances. Elle veille cependant à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées (surtout auprès des marchands, 1^{er} épisode, pour qu'ils n'interprètent pas le message délivré) et fournit des aides « techniques » afférentes principalement à l'énumération (connaissance ancienne ici mais toujours à consolider). Elle « résiste » ainsi à inciter les élèves à demander des plaques, ce qui pourrait permettre de favoriser les stratégies qui vont être nécessairement en jeu dans la séance suivante ou bien lui être utiles pour s'informer des difficultés des élèves. Les messages oraux qu'elle a relevés (de manière exhaustive) sont en effet majoritairement constitués d'une demande de boutons seuls (avec la désignation parlée en France). Elle a ainsi pu s'informer des procédures. Toutes ces informations sont utilisables par l'enseignante dans la phase de bouclage qui suit, y compris les erreurs d'énumération, erreurs qu'elle n'a pas signalées aux élèves.

La mise en commun débute par une phase de bilan. L'enseignante s'informe sur la validation faite par les élèves grâce au milieu matériel installé. Ceci permet ainsi à tous les élèves de savoir qui parmi eux a réussi ou échoué, sans pour autant que les méthodes aient été encore diffusées. Les erreurs peuvent être de sources multiples (voir l'analyse *a priori*), l'enseignante a le projet de relier ces erreurs au fait de ne pas avoir commandé des plaques de dix. Dans les épisodes 2.1 et 2.2, le contrat tout d'abord utilisé par l'enseignante est un microcontrat de production collective. Les élèves semblent imputer alors les échecs au fait d'un nombre important de carrés/boutons à dénombrer. Cette diffusion n'a pas mené à l'argumentation attendue, mais permet à l'enseignante d'organiser une phase au cours de laquelle les élèves vont accéder à l'argumentation souhaitée. En effet, dans l'épisode 2.3, du fait de son intervention et du guidage qui s'en suit, elle change d'interlocuteur ainsi que de microcontrat. Ce sont les élèves « marchands » qui vont être sollicités dans un microcontrat d'adhésion.

Dans le dernier épisode, l'enseignante met finalement en relief ce qu'il faut retenir de la séance. La connaissance ainsi mise en forme dans le contexte est annoncée comme allant être réutilisée dans une séance ultérieure. L'enseignante reprend les remarques des élèves sur la grandeur des nombres en jeu. Elle les met en parallèle avec la facilitation de la tâche pour le marchand lorsque des plaques lui sont demandées. Aucune stratégie afférente au dénombrement n'est indiquée.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dans la phase de lancement, aucune interprétation n'est favorisée par l'enseignante. Devant la tâche de dénombrement, la majorité des élèves utilisent une interprétation ordinale (avec repérants ou non) de la numération parlée en France. Ils ont cependant des difficultés dans l'énumération, difficultés qu'ils indiquent dans le lancement, qui se voient dans la réalisation de la tâche et qu'ils signalent à nouveau dans la mise en commun (en particulier ils attribuent les erreurs commises à la grandeur des nombres). Cependant deux groupes ont demandé des plaques (sans se tromper) et sont susceptibles ainsi d'avoir utilisé dans ce contexte et pour un nombre particulier (l'un trente, l'autre trente-six) des éléments d'une interprétation multiplicative de la numération parlée en France. Ceci est conforté par des interventions dans la mise en commun (« *trois dizaines ça fait trente* »).

Dans la mise en commun l'enseignante indique à l'aide des élèves différentes stratégies de comptage ou calcul menant à une désignation parlée en France du cardinal de la collection figurée : ce sont alors des interprétations ordinales (avec repérant) ou arithmétiques qui sont en jeu. Quand elle valide au tableau une réponse d'un élève de type organisation des groupements, elle utilise alors des signifiants « relais ». Il s'agit ici de groupements constitués à partir de la collection figurée sur les fiches des élèves qui a été reproduite par des croix au tableau (stratégie non employée par les élèves) ainsi que les deux mains pour indiquer une

dizaine²⁵⁸ (épisode 2.2 de la mise en commun). Cette organisation a été obtenue par l'élève au fur et à mesure de son dénombrement, *a priori* dans une interprétation multiplicative (« trois dizaines ça fait trente »)²⁵⁹. Mais en partant de cette organisation, elle n'explique pas comment elle a été obtenue, ce qui aurait pu mettre en jeu une interprétation multiplicative. En répondant à leurs questions, elle justifie que « *trois dizaines ça fait trente* » en utilisant une connaissance ancienne des élèves. C'est l'interprétation additive qui est donc finalement évoquée par l'enseignante : dix plus dix, vingt et encore dix, trente. Elle a finalement explicité une stratégie OG vers OF utilisant une organisation de la collection²⁶⁰ et non OF vers OG. A noter que l'enseignante a tout d'abord utilisé des éléments d'une interprétation multiplicative, « *trois fois tout ça* » en désignant un groupe de dix croix entouré au tableau, mais qu'elle a rapidement abandonné ce type d'explication. L'interprétation utilisée pour la numération parlée en France est donc essentiellement ordinale avec repérant ou/et additive, celles-ci n'étant pas clairement distinguées ou distinguables par les intervenants²⁶¹. L'écriture chiffrée n'intervient pas dans cette séance.

b. Séance 2

Rappel de la tâche

La tâche proposée dans la séance 2 est celle du manuel (voir analyse *a priori*). Les élèves « clients » disposent des fiches Ziglotron (28, 34 ou 45 boutons manquants). Ils doivent compléter un bon de commande composé de deux parties : une première indiquant via l'écriture chiffrée le nombre de boutons manquants, une deuxième (le message proprement dit destiné au « marchand ») consistant à écrire le nombre de paquets et de boutons voulus. Les élèves clients doivent recevoir la commande mais la validation ne se fait pas avant la mise en commun. Les élèves « marchands » doivent donner ce qu'on leur demande.

Les situations (milieu)

La situation installée dans la séance 2 est proche de celle proposée par le manuel (voir analyse *a priori*). En particulier, comme dans la séance 1, elle ne permet pas aisément d'identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves qui sont susceptibles d'interpréter le message. En outre, ici, dès le lancement, les réactions des élèves et les incidents (1^{er} épisode) indiquent certaines difficultés des élèves. Ils perçoivent difficilement l'utilité d'adresser au marchand sur un même bon de commande à la fois le nombre de boutons par une écriture chiffrée (traduction de la désignation parlée en France) et un message à son adresse. Dans l'analyse *a priori*, nous avons signalé qu'en effet la première partie du message est inutile pour faire la demande au marchand. En outre, elle incite les élèves à utiliser une stratégie OF vers OG et non à faire des groupements sur la fiche Ziglotron²⁶². Les deux parties du bon de commande (voire les trois, pour les élèves qui conçoivent les trois lignes de manière indépendantes) sont effectivement considérées comme

²⁵⁸ A noter que les deux mains ne sont pas utilisées pour scander la suite des dizaines, dix, vingt, trente. Il est indiqué que les deux mains font dix, puis l'enseignante revient sur les paquets de dix croix au tableau.

²⁵⁹ Nous ne pouvons pas être sûr de cette interprétation. Le fait de dire « trois dizaines ça fait trente » peut venir d'un commentaire *a posteriori* quand il commente l'organisation. Il a pu tout aussi bien utiliser une interprétation additive voire ordinale.

²⁶⁰ A noter que cette organisation obtenue au tableau n'est à proprement parler pas un signifiant, puisqu'il s'agit d'une reproduction de la collection elle-même.

²⁶¹ Les élèves n'ont été confrontés que depuis peu de temps à des problèmes de la structure additive. Rappelons à titre d'exemple, que l'emploi du signe « + » ou du mot « plus » par les élèves ou l'enseignante n'atteste pas que soit évoqué un concept de la structure additive.

²⁶² L'écriture chiffrée demandée peut aussi permettre une stratégie EC vers OG, mais c'est la stratégie qui n'est éventuellement à mettre en exergue que dans la séance 3.

redondantes pour la tâche. Dès le lancement, épisode 1, une stratégie de comptage est indiquée par l'enseignante pour désigner le nombre de boutons manquants à l'aide d'une écriture chiffrée. Cette stratégie de comptage (un à un) n'est cependant pas la plus efficace²⁶³. La validation matérielle est différée après une mise en commun, comme le manuel le propose.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Ici encore, les élèves n'ont pas recours à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande.

Comme dans la séance 1, les stratégies utilisées pour la première partie du message sont aussi des comptages, principalement un à un (ce qui peut expliquer les erreurs de dénombrement de la majorité des élèves). Pour la deuxième partie du message, différentes stratégies sont utilisées (voir la réalisation de la tâche des élèves et la mise en commun) : dénombrement de 25 boutons et demande de 25 paquets, dénombrement de 45 boutons et demande de quarante paquets et cinq boutons, et absence de message écrit. Nous n'avons pas repéré de réussite à la rédaction d'un message (qui pourrait indiquer une réussite dans l'emploi de la stratégie OF à la forme écrite de OG). Pour les élèves ayant complété la deuxième partie du bon de commande, nous constatons que certains s'arrêtent à l'indication du nombre de boutons manquants par une désignation parlée en France traduite par une écriture chiffrée, tandis que d'autres utilisent dans le message le repérant entendu dans cette désignation.

En ce qui concerne l'enseignante, elle indique dès le premier épisode du lancement de la séance, en ce qui concerne l'obtention du cardinal de la collection figurée, une stratégie OF consistant à compter les carrés (un à un), mais la stratégie pour traduire la désignation parlée en France en la désignation écrite chiffrée, OF vers EC, n'est pas abordée.

Les débats des phases de conclusion vont porter essentiellement sur des stratégies OF vers OG (et non l'inverse, ce qui est pourtant les stratégies susceptibles d'être en jeu pour réussir la tâche). Des signifiants « relais » sont utilisés par l'enseignante.

Les élèves utilisent systématiquement l'écriture chiffrée comme la forme écrite de la désignation parlée en France. Tous les échanges retranscrits en annexe l'attestent.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Pour le lancement, l'enseignante tente de ne pas donner d'aide aux élèves. Elle fait cependant référence à la séance précédente quant aux stratégies possibles, bien que celles-ci n'aient pas fait l'objet d'un processus d'institutionnalisation. Par ailleurs, afin d'éclaircir le rôle joué par les deux parties du bon de commande, l'enseignante, constatant l'incompréhension des élèves, finit par donner une stratégie de type OF vers EC pour remplir la première partie.

Quand les élèves sont confrontés à la tâche, l'enseignante passe les voir, ce qui lui permet d'avoir connaissance de certaines stratégies. A aucun moment elle ne s'informe sur le passage de la désignation parlée à l'écriture chiffrée. Durant le travail des élèves, elle veille toujours à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées et particulièrement auprès des marchands pour qu'ils n'interprètent pas le message délivré. L'enseignante garde un microcontrat de production individuelle quand elle s'est assurée qu'une argumentation pendant la mise en commun pourra invalider les messages à partir des productions matérielles des collections obtenues. C'est le cas du message « *Il faut 25 boutons. Ma commande : 25 paquets de dix boutons, boutons* ». Sinon, à ceux qui n'ont pas fait de message ou pas obtenu de collection, elle poursuit la dévolution en redonnant les règles afin d'assurer une certaine adidacticité à la situation. Enfin, elle change de microcontrat, passant à un microcontrat de tutorat, quand la collection obtenue est correcte mais le message est incorrect comme « *Il faut 45 boutons. Ma commande : quarante paquets de dix boutons, cinq* ».

²⁶³ Voir l'analyse *a priori* : la stratégie de groupement est non seulement plus efficace, mais en plus elle peut faciliter la mise en œuvre du passage vers une interprétation multiplicative.

boutons ». C'est ainsi qu'elle gère le fait que le milieu n'assure pas une rétroaction suffisante pour invalider ce qu'ont fait les élèves. Le contrat employé par l'enseignante permet à certains élèves de proposer une validation devant elle. Un élève²⁶⁴ propose une validation, mais qui ne mène pas à invalider sa réponse (erronée). L'enseignante gère cet incident en changeant de contrat (microcontrat d'ostension assumée). Elle donne la réponse à l'élève, en différant à la mise en commun l'information sur la validité de la réponse qu'elle lui laisse produire. Ainsi, en résumé l'enseignante tente d'instaurer comme dans la première séance un microcontrat de tutorat ou de production individuelle mais utilise aussi un microcontrat d'ostension assumée pour gérer une rétroaction insuffisante du milieu pour que les élèves valident certains types de réponse.

L'enseignante indique vouloir faire un bilan dans la mise en commun cependant, contrairement à la première séance elle ne peut pas utiliser de validation faite par les élèves durant leur travail. Beaucoup de messages sont passés rapidement en revue, favorisant plus un processus d'évaluation que de validation. L'enseignante essaie cependant de fournir une validation, grâce aux connaissances des élèves. Elle fait le pari que les débats qui auront lieu sur les productions qu'elle aura choisies permettront à chaque élève d'avoir une information sur la validité de la sienne. Cette gestion du bilan est donc en partie influencée par la situation elle-même, les potentialités adidactiques étant moindres (voir analyse *a priori*). L'enseignante choisit d'invalider certains messages pour mettre en exergue les erreurs qu'elle a remarquées. Le microcontrat d'adhésion qu'elle instaure permet aux élèves de faire ressortir un certain nombre de difficultés liées à la compréhension du message. A noter qu'en conséquence, certaines erreurs ne seront pas abordées. En particulier l'enseignante ne relève pas les erreurs de dénombrement que semblent trahir les écritures chiffrées erronées produites par les élèves²⁶⁵. Par ailleurs l'enseignante ne revient pas de manière ostensible sur deux difficultés inhérentes à la situation et que les élèves ont déjà signalées dans le lancement, difficultés qui pourraient contribuer à expliquer les erreurs des élèves. Il s'agit de l'incompréhension de la fonction du bon de commande (soit parce qu'il suffit de parler pour obtenir la collection voulue, soit parce qu'il y est indiqué (au moins) deux fois la quantité) et du fait que les élèves sont des lecteurs débutants (pour comprendre ce qui leur est demandé dans le bon, certains peuvent se restreindre à des mots qu'ils identifient plus facilement, comme « bouton », d'autres à certains indicateurs dus à la présentation de l'exercice comme les pointillés).

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dès le lancement, la stratégie OF indiquée par l'enseignante engage à utiliser la numération parlée en France dans une interprétation ordinale (pas nécessairement avec repérants). L'indication de cette stratégie peut inciter alors les élèves à réaliser la tâche de formulation du message par une stratégie OF vers OG. Si les repérants ne sont pas mis en exergue, l'interprétation ordinale ne facilite pas cette dernière. Une stratégie consistant à faire des groupements de dix sur la fiche n'est pas favorisée, bien qu'elle puisse mener à une interprétation multiplicative.

²⁶⁴ Il s'agit de l'épisode 2.6 de la réalisation de la tâche par les élèves (voir annexe n°... séance...). L'élève utilise une stratégie consistant à compter les groupements un à un à l'aide de la comptine des dizaines « dix, vingt, trente, quarante » pour obtenir la désignation parlée en France de la quantité (une stratégie OG vers OF). Il vérifie ainsi que la quantité de boutons obtenue correspond bien à celle qu'il a demandée (quarante). Cette vérification ne le détrompe pas : il a demandé « quarante » sous forme de plaques et a obtenu « quarante » sous forme de plaques. L'enseignante tente alors d'aider l'élève en essayant de lui faire distinguer un groupement de dix (obtenus en comptant des objets avec la comptine numérique usuelle, un, deux, trois, etc.) et la quantité de boutons qu'il contient (dix), mais l'élève continue à identifier un nombre de groupements avec le nombre d'objets qu'il contient.

²⁶⁵ Il est aussi possible qu'elles proviennent d'une erreur dans le passage de la désignation parlée en France à la désignation écrite chiffrée correspondante, mais ce passage ne sera jamais abordé dans la séance.

Comme dans la séance précédente, la phase de bouclage se résume essentiellement à une phase de bilan. Ce sont toutes les productions des élèves qui font l'objet de validation. Ces validations ne se font pas par le biais de la validation des stratégies qui les ont amenées, mais par le fait que les messages indiquent bien la quantité désignée par sa désignation parlée en France. Ce sont donc des stratégies OG vers OF qui sont en jeu et la numération parlée en France est utilisée par l'enseignante dans une interprétation ordinale avec repérant ou additive. Mais cette utilisation n'est pas si aisée chez les élèves quand il s'agit d'utiliser la comptine des dizaines pour obtenir le cardinal de la collection. En effet, l'enseignante utilise le signifiant « relais » consistant en une production graphique de type 1 pour traduire une désignation de groupements à valider. Un élève dénombre alors un à un les « objets » qu'il voit (quatre plus quatre, huit).

Cette difficulté est liée dans la séance à celle consistant à concevoir que nommer une plaque (ou un paquet) permet de désigner la quantité entière « dix » de boutons qu'elle contient²⁶⁶. Autrement dit, beaucoup d'élèves semblent conscients qu'une plaque contient bien dix boutons, mais dès qu'ils veulent parler de cette quantité, ils la nomment par sa désignation parlée en France, « dix », sans se rendre compte qu'une plaque (ou un paquet) désigne de facto la quantité qu'elle contient. Ceci fait écho à notre analyse *a priori* : dans « 20 paquets/plaques de dix et 8 boutons », les mots « plaques » ou « paquets » indiquent ainsi pour ces élèves un conditionnement (un élève dit « en plaques ») et non le nombre qu'il contient alors que « 20 » (qui est la forme écrite de l'oral « vingt ») garde l'information principale, le nombre de boutons²⁶⁷.

La validation des productions des élèves et la prise en compte de leurs difficultés (dans un microcontrat d'adhésion), entraîne que la phase de bilan n'a pas porté sur les stratégies pour réaliser la tâche. Dans la phase de bouclage, le passage de l'appui ou repérant à un nombre de plaques/paquets correspondant n'a pas été abordé. Ce passage peut permettre de passer d'une interprétation ordinale ou additive à une interprétation multiplicative. Ainsi, à nouveau dans cette séance, l'interprétation utilisée pour la numération parlée en France est ordinale avec repérant ou/et additive.

En ce qui concerne l'écriture chiffrée, du fait des connaissances anciennes des élèves mobilisables pour résoudre les tâches, la situation engage à la considérer comme la forme écrite de la désignation parlée en France. Distinguer et donner du sens à chaque chiffre n'est à mettre en avant que dans la séance suivante. Les discours et les actions que nous avons relevés, que ce soit de l'enseignante ou des élèves, ne font que renforcer cette position de l'écriture chiffrée par rapport aux désignations parlées en France. En particulier, à aucun moment la stratégie pour traduire la désignation parlée en France en la désignation écrite chiffrée, OF vers EC, n'est abordée, sous-entendant que la désignation écrite chiffrée est la forme écrite de la désignation parlée en France. A chaque fois que l'enseignante utilise des écritures chiffrées (pour le bon de commande, mais aussi dans ces explications comme quand elle emploie « $20+8=28$ »), c'est pour traduire au tableau ce qui est dit oralement. Qui plus est, dans le 2^{ème} épisode de la mise en commun, la file numérique des écritures chiffrées est utilisée par l'enseignante, dans une interprétation ordinale, en tant que version écrite de la comptine numérique des désignations parlées en France. La succession temporelle des mots

²⁶⁶ Voir l'épisode 2.6 de la réalisation de la tâche des élèves.

²⁶⁷ Rappelons ce qui a été indiqué dans l'analyse *a priori*. Dans leur message, les élèves doivent indiquer un type de conditionnement et un nombre de boutons, nombre qu'ils ont l'habitude de nommer par sa désignation parlée en France. Une réponse telle que « 20 paquets de dix et 8 boutons » permet alors de concilier les deux : « 20 » indiquant le nombre et « paquets de dix » le conditionnement. Le message permet de réussir la tâche puisque le marchand, qui est aussi un élève, peut comprendre ce qu'on lui demande. La variable didactique ayant pour but d'instaurer un milieu matériel qui contraint les élèves à donner un nombre d'éléments selon chaque type de conditionnement pour la réussite de leur tâche est ainsi « contournée ».

de la comptine est remplacée par la disposition spatiale linéaire et un sens de lecture des écritures chiffrées. Du côté des élèves, à signaler qu'un seul bon de commande ne contient pas des écritures chiffrées : « quarante » y est utilisé comme synonyme de « 40 », et l'emploi d'une écriture littérale n'est questionné ni par les autres élèves ni par l'enseignante.

c. Séance 3

Rappel de la tâche

Pendant la première partie de la séance, les deux tiers des élèves ont à faire un « coloriage magique » tandis qu'un tiers doit faire une commande pour réparer un Ziglotron. Ils disposent d'une fiche sur laquelle est figurée la collection de boutons manquants dont le cardinal est indiqué par l'écriture chiffrée « 42 » sur le bon de commande à compléter. Ils doivent en outre préalablement faire des groupements sur cette fiche.

La deuxième partie de la séance est dans la continuation de la première pour le tiers des élèves ayant produit un bon de commande. Un autre tiers des élèves les rejoint pour discuter de la validité du bon. Le dernier tiers élabore individuellement et seul un bon de commande, sans fiche Ziglotron. Le nombre de boutons en jeu est le même pour tous et est signifié par « 42 ».

La situation (milieu)

En ce qui concerne la première partie de la séance (la tâche donnée au premier tiers des élèves), un découpage est fait en deux sous-tâches. La première sous-tâche consiste à constituer des groupements de dix sur la fiche (collection figurée de carrés), ce que la majorité des élèves de ce tiers de classe a fait dans une séance auparavant. Des aides pour exécuter cette première sous-tâche sont (re)données sous forme d'indications techniques concernant l'énumération ou/et le calcul pour obtenir dix dans un groupement. Cette sous-tâche, d'un niveau technique, a déjà été travaillée entre les séances 2 et 3²⁶⁸. La maximalité est spécifiée par le fait que, lorsqu'il est possible de faire d'autres groupements, il faut le faire. Cette sous-tâche n'est pas reliée au futur message, elle est indiquée ici sans faire référence à la deuxième consistant à compléter le bon de commande. Ainsi il n'y a pas de rétroaction venant du milieu matériel pour la première sous-tâche. Pour la deuxième sous-tâche, la prise en compte de la première permet d'envisager des stratégies autres que celles que nous avons mises en exergue jusque là. La stratégie que nous avons analysée comme la plus efficace (faire des groupements de dix sur la collection, sans utiliser la désignation parlée en France du cardinal) est en effet mobilisable. Cependant l'indication du nombre en jeu par une écriture chiffrée en haut du bon de commande donne aussi deux autres possibilités : l'utilisation des chiffres (d'après le manuel c'est la stratégie à rendre mobilisable) ou bien le passage par une désignation orale, une des stratégies de type OF vers OG. Cette dernière doit cependant être complétée par une traduction écrite contextualisée, traduction qui est amorcée dans les phrases déjà écrites du bon de commande à compléter. A noter que plusieurs essais sont possibles. La simplification de la tâche initiale et les indications de stratégies instaurent une situation à faible potentiel adidactique. La validation n'est plus matérielle, elle est issue d'une confrontation avec un autre élève.

En ce qui concerne la deuxième partie de la séance, trois tâches différentes sont à considérer. Les élèves qui rejoignent ceux qui ont effectué la première partie doivent vérifier ce que ces

²⁶⁸ Dans ces séances supplémentaires, placées entre les séances 2 et 3 de la séquence Ziglotron, Mme B. a proposé à tous les élèves de désigner des collections à l'aide de groupements différents. Par exemple elle présente deux paquets de quatre crayons et demande combien il y a de paquets, attendant la réponse « deux » et non pas « huit » (cette dernière survient effectivement). Certains élèves, ceux jugés les plus en difficulté, vont devoir constituer des paquets de dix sur des collections figurées. Ces tâches étaient techniques et détachées d'un problème mettant en jeu le nombre ou/et une de ces désignations pour le résoudre.

derniers ont fait, ce qui induit plutôt des stratégies de type OG vers OF. Cependant dans le cas où ils ne sont pas d'accord, ils peuvent être amenés à effectuer eux-mêmes la tâche précédemment prescrite, avec un milieu matériel comparable (des traces ont pu être laissées sur la fiche Ziglotron par le premier élève), avec en sus des interactions possibles avec leur binôme. Les élèves qui ont déjà effectué la tâche peuvent argumenter et essayer de comprendre ce que dit leur binôme. Ils peuvent aussi être amenés à s'essayer à nouveau à la tâche dans les conditions que nous venons d'indiquer. Enfin le dernier tiers n'a pas à sa disposition la fiche Ziglotron, il doit ainsi réaliser la tâche dans les conditions indiquées par le manuel (voir analyse *a priori*).

Dans la phase de bouclage, ce n'est pas forcément le message élaboré initialement, mais celui rediscuté qui est susceptible d'une validation.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

L'enseignante indique dans le lancement une stratégie pour lire l'écriture chiffrée « 42 », EC vers OF (épisode 2.1 du lancement de la première tâche). Il s'agit d'associer le « 4 » à (la famille des) « quarante » et de lire « 2 » (deux).

Dans ce lancement, les élèves indiquent quelques stratégies de comptage pour constituer un paquet de dix. Les stratégies d'obtention des groupes de dix indiquées par les élèves consistent en un comptage de un en un, avec des marques pour aider dans l'énumération ou par réunion de deux groupes de cinq.

La première sous-tâche, qui consiste en fait à entourer dix carrés/boutons sur la fiche Ziglotron puis à répéter cet algorithme, n'est pas mise en relation avec la tâche finale, c'est-à-dire remplir le bon de commande. Plus encore, les élèves semblent relier cette tâche au fait de dénombrer. C'est ce qu'indique un élève dans le 2^{ème} épisode du lancement initial « *J'avais vingt-huit boutons qui s'étaient enlevés, après avec la maîtresse j'ai entouré deux plaques de dix ça fait vingt, et après huit petits boutons qui fait vingt-huit* ». C'est donc pour les élèves finalement plus une stratégie de dénombrement pour obtenir la désignation parlée en français du cardinal de la collection qu'une stratégie pour obtenir une désignation des groupements à utiliser dans le bon à remplir. Ceci va se retrouver en particulier dans l'épisode 2.3 (quatre groupements sont matérialisés, mais les deux qui restent sont aussi entourés). Le fait de devoir avant tout compter est perceptible dans l'épisode 2.2 dans lequel l'élève coche tous les carrés un par un sans faire de groupements. En outre il pense que ces groupements sont utiles pour la validation. Ceci montre que les groupements ne sont pas mis en relation avec la tâche finale, comme c'est aussi perceptible dans l'épisode 2.4 (uniquement trois groupements effectués). En fait un seul groupe a réussi, celui de l'épisode 2.4. Le fait que pour ces élèves le but est avant tout de dénombrer, indiquer le cardinal de la collection par une écriture chiffrée, traduction de la désignation parlée en France, va se voir dans tous les messages produits initialement par les élèves du premier tiers, en particulier dans les épisodes 1.2 et 1.3 de la réalisation de la 2^{ème} tâche (les messages consistent en « 42 paquets »). La plupart des élèves qui viennent pour discuter de ces messages utilisent des stratégies d'(in)validation OG (message) vers OF mettant en jeu les repérants/appuis additifs. Ils utilisent des stratégies de comptage ou de calcul (épisodes 1.3 et 1.4) ou indiquent directement que les appuis/repérants formulés dans le message ne sont pas les bons (épisode 1.1). Un élève (épisode 1.4) relie les dessins faits, la formulation du bon de commande et le nombre de boutons au total, en indiquant que les désignations en jeu ne conviennent pas, sans justifier par ailleurs : « Je lui ai dit que ça, ça fait vingt (*montrant les deux groupes de dix entourés sur le Ziglotron*), et (*montrant l'ensemble du Ziglotron*) ça fait pas trente-cinq, ça fait quarante-deux ».

Dans la mise en commun, un élève indique qu'il a compté le nombre de dix dans la décomposition « dix plus dix plus dix plus dix égale quarante ». Il est vraisemblable qu'il ait « additionné » les dix jusqu'à obtenir quarante, dix plus dix plus dix plus dix, car c'est un élève de l'épisode 1.2. Il a donc indiqué une stratégie OG vers OF et non l'inverse.

L'enseignante reprend ce que dit l'élève pour indiquer le résultat des sommes partielles : dix plus dix, vingt, plus dix, trente, plus dix quarante. Elle va utiliser l'écriture $10+10+10+10$, ce qui permet de compter les dix, alors que les élèves n'ont vraisemblablement pas eu recours à cette écriture (peut-être ont-ils pu mémoriser le nombre de fois qu'ils ont dit « dix », ou bien ont-ils fait des marques, ou utilisé leurs doigts ou encore ont-ils utilisé les groupements entourés ?). L'enseignante indique ainsi une stratégie : il s'agit de considérer la désignation parlée en France du cardinal de la collection qui est ici connue, de faire la somme au fur et à mesure des « dix » pour arriver au repérant/appui de cette désignation puis d'écrire cette somme $10+10+10+ \dots$ afin de compter ces « 10 »/dix.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

L'enseignante ne propose pas la séance telle qu'elle est indiquée par le manuel et le dispositif qui propose aux élèves des tâches différentes conduit à la production de messages corrects.

L'enseignante facilite la tâche initialement proposée par le manuel pour les élèves les plus en difficulté. Pour indiquer cette tâche à ce premier tiers de la classe, l'enseignante utilise un microcontrat d'ostension plus ou moins assumé : les élèves décrivent en effet chaque étape de la tâche à l'aide des questions de l'enseignante, ce qui amène à indiquer les stratégies à utiliser. Elle tente d'instaurer un microcontrat de production individuelle pendant cette première période de travail. Elle passe dans les rangs et se trouve informée des difficultés des élèves que nous avons signalées ci-avant. Les groupements n'ont pas nécessairement été faits de manière maximale (ce qui atteste encore que les élèves ne relient pas les groupements qu'ils constituent avec le message à faire) et les dénombrements posent problème pour ceux qui en ont fait (ce n'est pas nécessaire pour réaliser la tâche ni prescrit par l'enseignante). Pour aider les élèves, l'enseignante n'utilise pas un microcontrat de tutorat mais les interactions entre pairs, dans un deuxième temps de la séance. L'enseignante n'a pas non plus recouru à un changement de milieu matériel, comme par exemple le fait de mettre à disposition des plaques de dix aux élèves pour les associer terme à terme aux groupements.

Pendant le travail des élèves, l'enseignante s'informe des arguments qui ont permis de faire émerger un savoir (et la nature de ce savoir) et des erreurs qui peuvent persister. Elle va voir les binômes pendant la réalisation de cette deuxième tâche. L'enseignante choisit d'utiliser pour certains groupes un contrat de tutorat au lieu d'un microcontrat de production individuelle. Les échanges entre élèves concernent principalement les (in)validations des messages produits. L'enseignante essaye avant tout de relancer les échanges. Elle reprend parfois l'argumentation de l'élève qui vient discuter de la validité du message afin que l'élève qui s'est trompé puisse la comprendre (voir les épisodes de la réalisation de la 1^{ère} tâche).

Dans la phase de bouclage, ce sont les messages qui ont été rediscutés et produits par le troisième tiers qui sont l'objet d'une validation. Dans le début de la mise en commun, l'enseignante utilise un microcontrat d'adhésion pour organiser une phase de bilan. L'organisation instaurée par l'enseignante a permis de n'obtenir que des messages exacts. La diffusion des réponses ne demande pas de hiérarchisation. Comme tous les élèves ont produit la même chose, la validation d'une unique production (correcte) va permettre de les valider toutes. Les différentes procédures utilisées ne sont pas diffusées. Par le biais du microcontrat d'adhésion, l'enseignante mène le bilan principalement avec l'aide d'un seul élève. La question qu'elle formule initialement amène à la diffusion d'au moins une stratégie. L'élève est un des élèves qui a travaillé à la première tâche puis en binôme. Il a eu ainsi à sa disposition la fiche Ziglotron mais il n'y fera pas référence. L'enseignante récupère et enrichit ce qu'il dit et ne le relance pas sur sa procédure. Elle reprend ce que dit l'élève pour indiquer le résultat des sommes partielles, dix plus dix, vingt, plus dix, trente, plus dix quarante, grâce à l'écriture $10+10+10+10$, ce qui lui permet de compter les dix, L'enseignante indique ainsi la stratégie signalée ci-avant. Il nous semble alors que le contrat n'est plus celui d'adhésion, l'enseignante introduisant un signifiant, une stratégie non utilisée par les élèves. Il nous

semble que le microcontrat est alors d'ostension déguisée. En effet, l'égalité $10+10+10+10=40$ semble traduire ce que l'élève dit oralement, alors que ce n'est pas tout à fait le cas (ce que la réaction de certains élèves peut laisser penser). En outre la stratégie est indiquée de manière non ostensible et ce n'est pas celle qui est nécessairement utilisée par tous.

Dans la phase de bouclage observée, le passage des preuves provenant du milieu matériel aux preuves intellectuelles est minimisé voire a disparu. Par ailleurs, l'écriture chiffrée, comme précédemment, est toujours utilisée en tant que forme écrite de la désignation parlée en France.

L'enseignante constate en fin de séance que les élèves n'ont pas établi de lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres utilisés pour le message (objectif annoncé par le manuel). Elle ne leur indique pas le savoir visé et reste dans un contrat d'adhésion.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dès le lancement, la stratégie EC vers OF indiquée par l'enseignante engage à utiliser l'écriture chiffrée comme forme écrite de la désignation parlée en France dans une interprétation ordinale avec repérant. Ici, la « famille des quarante » est associée à 4, le mot famille se rapportant au fait que le chiffre à gauche « 4 » est le même de 40 (quarante) à 49 (quarante-neuf). Les stratégies d'obtention des groupes de dix se font par une interprétation ordinale de la numération parlée (comptage de un en un, les boutons/carrés étant cochés pour faciliter l'énumération) ou grâce au résultat arithmétique « cinq et cinq font dix ». Ce dernier est associé au problème arithmétique consistant à obtenir la désignation parlée du cardinal de la réunion de deux groupements (mains) de cinq. Comme dans la séance précédente, le premier groupe d'élèves (ceux qui doivent faire des groupements puis compléter un bon de commande) dénombrent les éléments de la collection. Ceci est pourtant inutile puisqu'ils connaissent la désignation du cardinal dès le départ. Ils utilisent le plus souvent une interprétation ordinale, parfois avec repérants quand ils s'appuient sur les groupements de dix qu'on leur a demandé de faire. Ces élèves ont des difficultés à mobiliser une désignation des groupements, même quand ils ont matérialisé ces groupements sur leur fiche Ziglotron.

Que ce soit dans la deuxième tâche (élèves en binôme) ou dans la mise en commun, que ce soit à l'initiative des élèves ou de l'enseignant, les validations des messages produits entraînent des explications de stratégies OG vers OF consistant à obtenir la désignation parlée en France du message produit (et non l'inverse). A nouveau ce sont alors des interprétations additives ou ordinales avec repérants qui sont engagées.

Cependant, ici, dans la mise en commun, l'enseignante indique une stratégie pour résoudre la tâche. Elle permet de passer d'une interprétation additive ($10+10+10+10=40$) à une interprétation multiplicative (compter le nombre de « 10 »²⁶⁹). Les « 10 » sont reliés aux paquets de dix croix qui sont au tableau. Il y a quatre paquets de dix, et quand on compte, il y a quatre « 10 » (ils sont alors entourés comme les paquets). Ceci permet de légitimer la stratégie : au lieu de constituer des paquets sur la fiche Ziglotron, il suffit de compter dix (plus dix), vingt (plus dix), trente (plus dix), quarante et d'écrire $10+10+10+10=40$ (traduction de l'oral). Cependant, il n'est pas évident que l'interprétation additive soit perçue de tous les élèves (cela peut rester une interprétation ordinale avec repérant). En effet tout d'abord le problème n'est pas présenté comme un problème de la structure additive : la question n'est pas posée en termes de problème de désignation du cardinal de la réunion de collections. Ensuite, les « preuves » avancées sont d'ordre intellectuel (un savoir ancien) et l'écriture additive est un savoir encore en cours d'apprentissage. En outre, la tâche de constitution de groupements sur la fiche Ziglotron n'a pas fait l'objet de validation, et a été utilisée visiblement par quasiment aucun élève (y compris par ceux à qui elle était prescrite).

²⁶⁹ Ceci est indiqué dans le manuel.

Finalement le problème de comptage de dix en dix relevé dans la séance précédente montre les difficultés de certains élèves à utiliser l'interprétation additive sur des objets unitaires représentant dix (un groupement entouré, un « 10 »). Cette stratégie reste implicite.

A nouveau la phase de bouclage a consisté en une phase de bilan, et bien que soient apparus dans la mise en commun des éléments d'une interprétation multiplicative, les élèves n'ont pas établi de lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres utilisés pour le message. Ceci est visible dans la réaction des élèves sollicités dans ce sens par l'enseignante à la fin de la séance.

d. Séance 4

Rappel de la tâche

Une première tâche consiste à faire des remarques sur trois bons de commande reproduits au tableau (43, 32 et 28 boutons manquants), une deuxième à compléter le message de deux bons de commande (16 et 34), les troisièmes et quatrièmes sont celles proposées via les exercices 2 et 3 p. 70 du manuel. Les élèves doivent compléter la deuxième partie de bons de commande, 36, 30, 82 boutons manquants (exercice 2) puis la première partie d'autres bons de commande, 7 paquets et 8 boutons, 4 paquets et 0 boutons, 1 paquets et 5 boutons, 3 paquets et 7 boutons (exercice 3).

La situation (milieu)

La première tâche des élèves consiste à faire des remarques sur trois bons de commande reproduits au tableau et issus de séances précédentes : « 42 boutons, 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons », « 32 boutons, 3 paquets de 10 boutons et 2 boutons » et « 28 boutons, 2 paquets de 10 boutons et 8 boutons ». Aucun milieu matériel n'est installé. Les questions sont ouvertes dans un premier temps sur l'ensemble des trois bons de commandes et se précisent au fur et à mesure des remarques des élèves (par exemple « où est-ce qu'il y a des deux dans ce bon de commande ? »). La tâche n'étant pas problématique au sens de la TSD (il n'y a pas de connaissances mathématiques précises qui permettent de résoudre un problème), les remarques des élèves peuvent être diverses : de surface (habillage), sur les chiffres, les mots, les nombres, dans un même message, entre deux ou trois messages. A remarquer que les chiffres de l'écriture chiffrée « 10 » peuvent *a priori* être aussi questionnés. Dans un deuxième temps, les questions sont restreintes à un seul bon de commande, le premier : « 42 boutons, 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons ». Un constat est fait « *On a dit que pour quarante-deux boutons il fallait quatre paquets de dix boutons et deux boutons, d'accord ?* » et la question est : « *Est-ce que quelqu'un peut expliquer pourquoi il est sûr que c'est ça sans dessiner tous les boutons, sans aller chercher les gommettes et les coller* ». Le contexte de cette question peut amener les élèves à considérer les écritures chiffrées, mais aussi les désignations parlées en France qui sont employées, ou tout autre facteur qui peut faire écho à la situation vécue par les élèves dans les séances précédentes. En ce qui concerne cette dernière, la précision « *sans dessiner tous les boutons, sans aller chercher les gommettes et les coller* » limite cette possibilité.

La deuxième tâche consiste à compléter la deuxième partie de deux bons de commande (16 et 34). Ici encore aucun milieu matériel n'est installé. Les stratégies possibles sont toutes celles de type EC vers OG, et d'une manière générale tous les cheminements cognitifs décrits dans le 4^{ème} chapitre auxquels fait référence l'analyse *a priori* de la tâche de l'exercice 2 p. 70. En effet, cette tâche est similaire à cet exercice, à la différence près qu'elle est faite sans fichier. Ainsi, elle exige une réponse sous forme d'une désignation orale des groupements et non de compléter des phrases par des chiffres pour avoir la traduction écrite de cette désignation orale. Du fait du déroulement de la séance (la première tâche précédente) et des connaissances anciennes des élèves, deux stratégies nous semblent ici davantage probables. Il s'agit de celle

passant par OF (EC vers OF vers OG)²⁷⁰, ou de celle utilisant directement les chiffres de l'écriture chiffrée qui est lue et traduite en sa désignation parlée : c'est en effet le savoir mis en évidence à la fin de la tâche précédente. Ainsi, la réussite à cet exercice, est susceptible de ne mettre en jeu les connaissances qu'à un niveau technique, voire algorithmique, qui plus est dans un contexte précis. Ceci est aussi le cas des troisième et quatrième tâches, ce que nous avons indiqué dans l'analyse *a priori* dont elles ont fait l'objet. La situation est ici modifiée du fait des tâches précédentes qui constituent une indication d'une stratégie à utiliser sur des exemples. En particulier le traitement de « 34 » donne la même réponse pour le nombre de paquets de dix boutons que ce qui est demandé sur le fichier pour « 36 » et « 30 » dans l'exercice 2.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

L'enseignante écrit « 10 » au lieu de « dix », ce choix aurait pu conduire les élèves à faire des remarques sur les chiffres qui composent « 10 » mais ce n'est pas le cas.

Pour la première tâche, les élèves n'indiquent pas de stratégie mais font des remarques qui indiquent parfois les interprétations qu'ils utilisent. Nous les signalerons au moment où nous répondrons aux questions posées. Cependant, dans l'épisode 2.1, l'enseignante réagit à une intervention d'un élève, qui n'est toujours pas celle attendue, sur un lien entre les écritures chiffrées et les désignations parlées. L'enseignante récupère et enrichit puis indique tout d'abord une stratégie EC vers OF dans laquelle le début des chiffres qui permet de savoir « *dans quelle famille on est* ». Elle rappelle simultanément une stratégie de passage OF vers EC : « *Des vingt voilà, ça s'écrit avec le chiffre deux* ».

L'enseignante donne trois « explications » du lien entre les chiffres des écritures chiffrées désignant le nombre de boutons (28, 32 puis 42) avec les chiffres utilisés pour le message à destination du marchand (3^{ème} épisode de la première tâche). La première a été évoquée et est à l'initiative des élèves : par exemple, on retrouve le « 2 » de vingt-huit (identifié à l'écriture chiffrée « 28 ») car la « *famille* » des vingt s'écrit avec le chiffre « 2 ». La deuxième est implicite et vient de la méthode employée par l'enseignante pour faire émerger la connaissance visée. La même remarque peut se faire sur les trois messages, ce qui peut constituer une preuve par induction du lien constaté. La troisième argumentation/légitimation est une initiative de l'enseignante prévue dans son projet initial (voir le 3^{ème} épisode relatif à la première tâche). Elle utilise une stratégie OG vers EC via OF. Elle utilise pour ce faire la file numérique des écritures chiffrées affichée au dessus du tableau. Cette dernière indiquant alors la succession des désignations parlées en France à travers leur forme écrite que sont les écritures chiffrées. La démarche de l'enseignante consiste à vouloir « démontrer » que la quantité de boutons désignée par « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est la même que la quantité de boutons désignée par l'écriture chiffrée « 42 ». Il est difficile de savoir ce que les élèves ont retenu de ces éléments de preuve. Cependant, en fin de séance un élève associe différemment les chiffres en jeu. Il obtient alors des nombres (désignations parlées en France) différents : juxtaposer deux « 4 » donne « quarante-quatre », et deux « 2 », vingt-deux ». Ce qui est donc retenu par cet élève c'est de pouvoir utiliser les chiffres du message pour obtenir ceux d'une écriture chiffrée (indique-t-elle le nombre de boutons manquants ?).

Dans la deuxième tâche de cette séance, surgit un problème déjà rencontré, écrire « 10 paquets » quand il est clair pour l'élève qu'il n'en veut qu'un²⁷¹, dans deux des trois productions étudiées dans la mise en commun (les bons de commande 1 et 2 des épisodes 3.1 et 3.2). Pour leur (in)validation, l'enseignante utilise comme dans les séances précédentes

²⁷⁰ A noter alors la spécificité de « 16 » dont n'est pas repérable le repérant dix de sa désignation parlée « seize ».

²⁷¹ A noter que les égalités du type 10+10+ ... suivies d'une monstration de chacun des paquets « 10 » n'ont pas nécessairement aidé l'élève. L'écriture chiffrée « 10 » est une « marque » qui indique en effet un paquet.

une stratégie OG vers OF (dont une fois via les écritures chiffrées de la file numérique recouverts de bandes de dix comme elle l'a fait précédemment dans cette séance) et non l'inverse. Elle utilise aussi l'égalité $10+6=16$ (épisode 3.2) pour traduire ce que dit un élève (« dix plus six égal seize ») qui utilise une stratégie OF vers OG avec l'appui additif « dix ». Dans l'épisode 3.3, elle indique finalement elle-même la stratégie visée : « *Quarante-deux boutons : pour quarante il faut quatre paquets de boutons et deux boutons tout seuls pour faire les quarante-deux. Ici dans ce nombre-là le premier chiffre nous dit combien il faut de paquets de dix et le deuxième chiffre combien de boutons tout seuls* ».

Les stratégies en jeu dans la phase de bouclage relative à « 34 boutons » sont proches de la précédente. Deux productions sont invalidées en utilisant une interprétation additive ou ordinale avec repérant de la numération parlée en France (l'écriture chiffrée étant à nouveau la forme écrite de cette dernière). A la fin de l'épisode consacré à « 34 », l'enseignante sollicite les élèves pour qu'ils donnent une stratégie à partir de l'écriture chiffrée qu'elle montre et qu'elle nomme « trente-quatre ». Elle indique alors le début de la stratégie que les élèves avaient donnée au moment de la justification/légitimation du lien entre les chiffres de l'écriture chiffrées et ceux de la 2^{ème} partie du message. Ainsi, ce n'est plus l'écriture chiffrée « 34 » qui est en jeu mais la désignation parlée « trente-quatre ». Les élèves participent pour formuler cette stratégie. « Trente » de « trente-quatre » est associé à trois car « la famille des trente ça commence par trois ». Le quatre de « trente-quatre » est associé sans commentaire au « 4 » dit « quatre » de « 4 boutons ».

Nous avons indiqué dans l'analyse *a priori* que la stratégie la plus efficace consistait à associer dans un ordre précis les deux chiffres des données du message pour composer l'écriture chiffrée demandée. Elle n'est pas garante de la compréhension de l'écriture chiffrée (en particulier de par son caractère automatique). En outre dans les échanges que nous avons relevés précédemment, il ne semble pas que cela soit celle qui a été utilisée par les élèves, alors que l'enseignant l'a notifiée mais sans l'institutionnaliser.

Cependant, un élève qui a résolu publiquement le premier item pour indiquer la tâche de l'exercice 3 a prononcé la désignation parlée en France, soixante-dix-huit, d'un nombre lu à partir de son écriture chiffrée, « 78 ». La justification du lien employé précédemment par l'enseignante (lire « 78 », « soixante-dix-huit », puis comme la famille des soixante-dix commence par « sept », on peut en inférer que le message commence par « sept paquets de dix ») n'est plus opérationnelle puisque « 78 » ne peut pas être traduit par certains en sa désignation parlée en France. Après l'intervention de cet élève, l'enseignante redéfinit la tâche. Cette dernière consiste alors à utiliser une stratégie EC vers OG (traduite à l'écrit) d'association mécanique des deux chiffres du message (dans un ordre qui n'est pas spécifié mais induite du sens de lecture). La consultation des fichiers post-séance montre que les réponses des élèves aux exercices sont pour la plupart correctes (les erreurs principales portant sur l'inversion de l'ordre des chiffres), ce qui contraste beaucoup avec les difficultés rencontrées par les élèves dans les séances précédentes.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

L'enseignante a le projet de formaliser la connaissance qu'elle visait dans la séance précédente (et prescrite par le manuel) c'est à dire le lien entre les chiffres de la désignation écrite du cardinal de la collection (1^{ère} partie du bon de commande) et les écritures chiffrées des nombres en jeu dans le message. Par exemple relier « 42 » et les « 4 » et « 2 » de « 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons ». Pour les y amener, l'enseignante installe dans la séance 4 du manuel un mésocontrat d'initiation puis de pseudodévolution. En effet, nous avons analysé la situation comme ayant de faibles potentialités adidactiques. Le lien est justifié, mais les élèves peuvent l'utiliser sans comprendre cette justification, de manière

automatisée, ce qui est renforcé par le fait de rester dans le même contexte et le même champ numérique. Nous allons détailler ces contrats.

Pour la première tâche, le microcontrat que l'enseignante tente d'installer tout d'abord est celui d'adhésion, laissant la possibilité aux élèves de faire ressortir par eux-mêmes la connaissance visée. Les échanges ne menant pas à la connaissance visée, l'enseignante change de microcontrat pour utiliser un microcontrat d'ostension déguisée. En effet, le guidage qu'elle met en œuvre peut donner l'illusion que ce sont les élèves qui ont eu la responsabilité de la connaissance produite : ce peut être le cas de certains (ceux qui interviennent ?), mais vraisemblablement pas de tous. L'enseignante n'a pas uniquement mis en évidence le fait de retrouver les mêmes chiffres dans chacune des deux parties du message, elle a fourni des éléments de légitimation/argumentation de l'association. Elle vise dans ses explications à faire émerger une connaissance autre que technique, automatique et contextualisée. L'argumentation est essentiellement intellectuelle et ne fait pas intervenir de milieu matériel. Ceci nous fait dire que le mésocontrat installé est d'initiation, bien que ce ne soit pas ce que recherche l'enseignante.

Dans la deuxième tâche de cette séance, l'enseignante prend des informations sur l'opérationnalité de la connaissance qui vient d'être indiquée via les réponses des élèves sur des ardoises, ce qui permet aussi aux élèves de se rendre compte s'ils savent utiliser cette connaissance²⁷². Ceci fait donc partie du processus d'institutionnalisation. Dans l'indication de la tâche pour le message concernant « 16 boutons » et « 34 boutons », l'enseignante ne fait ni intervenir les élèves, ni n'installe de milieu matériel. En outre, le contexte « Ziglotron » reste évoqué, ce qui va limiter le nombre de stratégies (voir analyse *a priori* de la séance 4). Dans le lancement, le nombre « 16 » n'est pas prononcé par l'enseignante, mais par la suite « seize » est prononcé par les élèves et l'enseignante. « 34 » l'est immédiatement par l'enseignante. La mise en commun porte essentiellement sur l'(in)validation des réponses erronées. Le bilan est initié par une diffusion des réponses des élèves l'enseignante ayant fait une sélection des différents types rencontrés : ceci permet à chacun d'avoir une information sur la validité de sa réponse. En observant l'utilisation qui est faite par l'enseignante des interventions des élèves (voir la gestion des incidents), nous en déduisons que par la suite l'enseignante, confrontée aux difficultés des élèves, utilise un microcontrat d'adhésion qui se transforme en un contrat d'ostension déguisée puis finalement assumé. Le microcontrat d'adhésion n'a en effet pas mené à la stratégie attendue par l'enseignante, celle qui a été indiquée précédemment. Nous avons indiqué cependant que pour « 16 » et « 34 », la connaissance mise en exergue à travers la stratégie indiquée n'est pas tout à fait la même. Pour « 16 », c'est celle visée, mais elle n'est pas justifiée. Pour « 34 », un élément de justification est donné dans la stratégie dans le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrées et ceux en jeu dans la deuxième partie du message (élément de justification déjà donné par ailleurs).

Pour les deux tâches suivantes, celles du fichier, l'enseignante diffère la validation et d'une manière générale ne va pas instaurer de phase de bouclage. Elle va néanmoins interagir avec quelques élèves et prendre des informations sur leur production et difficultés dans un microcontrat de production individuelle, même pour le seul élève avec lequel elle interagit (2^{ème} épisode de la 3^{ème} tâche)²⁷³ : ce dernier demande à disposer à nouveau du milieu matériel que constitue la fiche Ziglotron.

²⁷² Nous avons déjà indiqué en quoi cet exercice, même réussi par les élèves ne pouvait attester que d'une mise en fonctionnement au niveau technique et contextualisé de la connaissance. En particulier il n'est pas nécessaire pour réussir la tâche d'avoir compris l'argumentation précédente.

²⁷³ Les productions que nous avons pu voir indiquent que la grande majorité des élèves ont réussi aux deux exercices. Est-ce un signe que la procédure attendue par l'enseignante a été utilisée ?

L'indication de la tâche de l'exercice 3 p.70 se fait via la résolution complète du premier item. Celle-ci consiste à associer dans un ordre précis les deux chiffres des données du message pour composer l'écriture chiffrée demandée. L'analyse *a priori* montre que cette stratégie (la plus efficace) n'est pas garante de la compréhension de l'écriture chiffrée (en particulier de par son caractère automatique). L'enseignante lui accorde cette fonction dans un échange public avec un élève, via un microcontrat d'ostension déguisée (effet Jourdain). L'enseignante redéfinit finalement la tâche, elle consiste à utiliser la stratégie « algorithmique » de l'association des chiffres dans les deux parties du message. L'enseignante indique dans un entretien post-séance être consciente que la réussite n'atteste pas nécessairement de la compréhension de l'écriture chiffrée visée. Elle a voulu cependant conclure la séance, qui lui semblait longue, par la réussite des élèves aux exercices.

Ainsi, d'après ce qui vient d'être dit pour les dernières tâches de la séance, la connaissance à utiliser vient d'être indiquée, le contexte n'a pas changé, les potentialités adidactiques sont faibles et la connaissance peut être utilisée à un niveau technique, voire de manière algorithmique, ce qui est finalement demandé par l'enseignante. En conséquence, nous analysons le mésocontrat installé comme étant celui de pseudodévolution qui suit celui de l'initiation, alors que la succession des microcontrats indique que ce n'était pas la volonté de l'enseignante.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

La première tâche est une question ouverte sur les messages écrits, corrects et déjà validés dans les séances précédentes, reproduits au tableau. Les élèves font avant tout des remarques formelles et concernant leurs connaissances anciennes, ce qui ne les mène pas vers une interprétation multiplicative. Un élève fait une remarque sur le nombre de paquets en jeu (quatre, trois, deux) dans les trois messages affichés pour la première tâche (épisode 2.1). L'élève ne parle pas des désignations parlées, ce que fait l'enseignante quand elle reprend sa remarque. Elle indique ainsi aux élèves un élément du passage d'une interprétation additive de la numération parlée en France à une interprétation multiplicative, dans un contexte de problème arithmétique (désignation du cardinal d'une collection après un retrait de dix/un paquet de dix). Par la suite, l'enseignante récupère et enrichit ce que dit un autre élève sur le lien écriture chiffrée/désignation parlée. Elle indique tout d'abord une stratégie EC vers OF dans laquelle le début des chiffres permet de savoir « *dans quelle famille on est* ». Cette connaissance ancienne liée à la lecture de l'écriture chiffrée est déjà intervenue dans les séances précédentes. La stratégie indiquée montre que cette écriture chiffrée est reliée à une interprétation ordinale avec repérant des nombres, ce qui va se confirmer dans la suite. En effet, l'enseignante insiste sur les repérants quarante, trente et vingt qui sont mis en exergue, sans ici que le passage de l'un à l'autre ne soit évoqué (par exemple par l'ajout de dix). De plus, dans les précisions que l'enseignante donne à partir des remarques des élèves (stratégie de passage OF vers EC), l'écriture chiffrée est aussi associée à une interprétation ordinale avec repérant de la numération parlée (la « *famille* » des vingt s'écrit avec le chiffre « 2 »).

Les tâches que l'enseignante a introduites dans la séance 4, avant de proposer aux élèves celles prescrites par le manuel, lui ont permis de traiter du lien entre les écritures chiffrées, les désignations parlées en France et les désignations des groupements, sans qu'ils aient fait l'objet d'une institutionnalisation. Chronologiquement, deux liens sont tout d'abord apparus : un premier lien est celui que nous venons de souligner entre les écritures chiffrées et les désignations parlées. Même s'il est repris par l'enseignante, il est à l'initiative des élèves et une interprétation ordinale avec repérant est en jeu. Un deuxième est fait de manière « mécanique » entre les chiffres de la deuxième partie du message (une désignation des groupements) et ceux des écritures chiffrées. La même remarque peut se faire sur les trois messages, ce qui peut constituer une preuve par induction du lien constaté. Ici, aucune interprétation n'est cependant engagée *a priori* puisque le lien est formel, bien qu'établi dans

un contexte particulier. Ensuite, avant que les élèves ne l'utilisent dans les exercices du fichier, l'enseignante propose une justification de ce lien « mécanique » entre les chiffres des deux parties du bon de commande. Cette argumentation/légitimation est une initiative prévue dans son projet initial (voir le 3^{ème} épisode relatif à la première tâche). Elle utilise une stratégie OG vers EC à l'aide de la file numérique affichée au dessus du tableau. La démarche de l'enseignante consiste à vouloir « démontrer » que la quantité de boutons désignée par « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » est la même que la quantité de boutons désignée par l'écriture chiffrée « 42 ». Les paquets de dix, matérialisés par des bandes de dix carrés, sont reportés à la suite les uns des autres sur la file numérique des écritures chiffrées, jusqu'à recouvrir l'écriture « 40 » puis deux petits carrés sont ajoutés, ce qui permet ainsi de recouvrir toutes les écritures chiffrées de 1 à « 42 ». Or la file numérique a toujours été utilisée comme la succession des désignations parlées en France à travers leur forme écrite que sont les écritures chiffrées. De plus, une écriture chiffrée comme « 42 » est le plus souvent employée comme la forme écrite de « quarante-deux ». La « preuve » fournie par l'enseignante est donc vraisemblablement perçue par les élèves comme une stratégie OG vers OF qui « prouve » que « 4 paquets de dix boutons et 2 boutons » correspondent à « quarante-deux »²⁷⁴. Ceci est pourtant une donnée d'où l'enseignante est partie et qui donc ne devrait plus être l'enjeu d'une preuve, cette association ayant été validée dans les séances antérieures. Il est ainsi possible que pour les élèves les écritures chiffrées jouent un rôle de vérification ou éventuellement de preuve de la validité des messages grâce à une stratégie OG (« 4 paquets de 10 boutons et 2 boutons seuls ») vers OF (quarante-deux), via EC (la file numérique des écritures chiffrées), ces dernières étant toujours utilisées comme la forme écrite des désignations parlées en France dans une interprétation utilisant des repérants ou des appuis additifs.

Nous avons signalé qu'il est difficile de savoir ce que les élèves ont retenu de ces éléments de preuves. Cependant, à la fin de l'épisode concernant la première tâche, un élève fait des associations formelles avec les chiffres pour obtenir des nombres (comme lorsque sont obtenus des sons ou des mots différents quand sont assemblées certaines lettres et syllabes), mettant en évidence que ni l'ordre, ni la maximalité ne sont questionnés.

Dans la deuxième tâche, l'interprétation ordinale ou additive est à nouveau uniquement en jeu. Cependant à un moment il aurait été possible de rendre explicite un passage vers une interprétation multiplicative. L'enseignante demande en effet à un élève d'expliquer la troisième réponse (exacte) qui est discutée collectivement. Celui-ci indique une procédure OF²⁷⁵ (« 16 » « étant traduit seize ») vers OG qui met en jeu le passage d'une interprétation additive vers une interprétation multiplicative. L'enseignante, indique la stratégie attendue via un microcontrat d'ostension assumée et la justifie aussi à nouveau en utilisant une interprétation ordinale avec repérants.

La phase de bouclage relative à « 34 boutons » (prononcé cette fois-ci dès le lancement « trente-quatre ») est proche de la précédente. Deux productions sont invalidées en utilisant une interprétation additive ou ordinale avec repérant de la numération parlée en France (l'écriture chiffrée étant à nouveau la forme écrite de cette dernière). Via un microcontrat d'ostension plus ou moins assumé, l'enseignante donne une stratégie pour réussir la tâche à partir de l'écriture chiffrée. Elle est justifiée en revenant à la désignation parlée en France et

²⁷⁴ En outre dans sa « justification », l'enseignante indique les écritures chiffrées à l'aide des désignations parlées en France. Le fait de les nommer par la désignation parlée en France renvoie probablement les élèves aux interprétations de cette dernière. En effet, les écritures chiffrées ont toujours servi à indiquer (par écrit) les désignations parlées en France et non l'inverse. Autrement dit, pour parler de « 42 », le fait de dire quarante-deux va renvoyer à quarante-deux et non aux chiffres accolés « 4 » et « 2 ».

²⁷⁵ C'est la seule fois durant les quatre séances qu'un élève ira au bout de l'explication de sa procédure.

en utilisant alors les repérants (trente est associé à trois car « *la famille des trente ça commence par trois* »).

En résumé, les réponses des élèves dans la première tâche permettent de penser que certaines stratégies qu'ils ont employées leur ont permis d'utiliser la numération parlée en France dans une interprétation multiplicative, mais ne leur ont pas permis de faire de lien avec l'écriture chiffrée. Ceci renforce le constat établi à la fin de la séance 3. Avec la première tâche, l'enseignante amène finalement les élèves à constater le lien « mécanique » entre les chiffres des deux parties du bon de commande. Les justifications données à l'initiative des élèves ou de l'enseignante ou venant de la situation ne permettent pas de donner un statut clair à la place de l'écriture chiffrée. Ainsi, notamment dans les dernières tâches, sont-elles un moyen de vérifier la réponse ou de réussir la tâche ? Si elles restent un moyen de vérification tout va dépendre de la stratégie employée par les élèves. Soit elles mettent en jeu une interprétation multiplicative, soit non.

2.2 Conclusion sur la séquence de Mme B

Cette conclusion va nous permettre de répondre à la deuxième question. Quels sont les facteurs qui contribuent à la survenue des différentes interprétations ?

Ici, nous mettons surtout en relief les facteurs qui apparaissent dans notre analyse didactique. Les autres, ceux plus particulièrement liés aux composantes sociales, institutionnelles et personnelles, sont envisagés dans un deuxième temps, suivant ainsi la méthodologie que nous avons adoptée grâce à la double approche. Ils seront donc (re)considérés au moment de croiser les analyses des deux séquences filmées, dans le paragraphe 4.

Séances 1, 2 et 3 : vers l'interprétation multiplicative

Il est essentiel de considérer ici que les contrats mis en place par l'enseignante lui permettent de pouvoir prendre en compte l'influence de certains paramètres de la situation didactique et les difficultés des élèves. Elle a ainsi la possibilité d'utiliser le milieu installé pour conduire sa séance et éventuellement de le faire évoluer. Elle associe les élèves à la responsabilité de la production des connaissances en jeu, principalement en reprenant et enrichissant leurs remarques. Ainsi elle ajuste au fur et à mesure les enjeux de la séance. L'enseignante a non seulement une lecture globale de la séance « grand Ziglotron » mais reconsidère entre les séances ce qui s'est passé en classe, ce qui lui permet d'anticiper les difficultés qu'elle a constatées chez les élèves.

Dans la séance 1 cela l'amène à mettre en avant dans la mise en commun l'utilité de produire des messages avec des formulations utilisant des plaques pour réussir la tâche, bien que cela ne soit ni prescrit explicitement par le manuel ni une nécessité pour les élèves « clients ». Elle fait alors intervenir les élèves « marchands » qui eux peuvent en attester. Nous analysons ce choix comme résultant d'une anticipation de l'enseignante sur la séance suivante. Les élèves seront effectivement contraints à faire de telles commandes, mais elle peut estimer que le milieu ne sera pas suffisant. La réussite à l'élaboration de tels messages est en effet nécessaire pour que les élèves puissent ensuite faire le lien avec l'écriture chiffrée (séance 3). Or les contrats qu'elle met en place lui permettent de voir que les connaissances des élèves ne sont pas suffisantes pour envisager qu'ils commandent des plaques. Les craintes de l'enseignante sont en partie justifiées car, dans la deuxième séance, les nouvelles contraintes (matérielles) de la situation ne suffisent pas à ce qu'ils envisagent tous de commander des plaques. Plus précisément une bonne partie des élèves veut commander des plaques mais n'indique pas un nombre de plaques. Deux explications peuvent être données. Tout d'abord, l'organisation instaure des interactions avec le milieu qui restent insuffisantes. Non seulement il n'y a pas de

validation prévue, mais le problème d'interprétation des messages par le vendeur (déjà prégnant dans la première séance) ne permet pas de valider la commande qui aurait dû correspondre au message. En outre, comme il a été analysé précédemment, les élèves comprennent difficilement la distinction entre une quantité à demander « en plaques » et la même quantité désignée par un nombre de plaques. C'est cette distinction qui est en particulier nécessaire dans la séquence pour permettre de faire évoluer l'interprétation de la numération parlée en France. Ceci va avoir pour conséquence que l'enseignante tente de recréer dans les phases de conclusion un certain milieu afin que les élèves puissent invalider leur réponse. A noter que l'enseignante y distribue la parole du fait qu'elle peut choisir un panel des différents types de production rencontrés grâce aux microcontrats qu'elle a utilisés durant la phase de travail des élèves. Elle fournit ainsi des éléments de validation à tous (elle fait en sorte d'étudier un panel représentatif des cas qu'elle a remarqués). Elle a la possibilité d'installer un microcontrat d'adhésion ou de production collective (elle n'est pas contrainte par exemple à un microcontrat d'ostension déguisée) car ses aides durant les interactions avec les élèves n'ont pas dénaturé la tâche. Cependant, la part d'adidacticité de la situation étant insuffisante, les connaissances anciennes relatives aux tâches proposées étant difficilement mobilisables, dans les phases collectives l'enseignante installe le plus souvent un microcontrat d'adhésion plutôt que de production collective²⁷⁶. L'enseignante reprend et enrichit les remarques des élèves afin de leur permettre d'accéder dans la séance 2 à une (in)validation de leur production, c'est en particulier ce qui contribue à orienter les débats sur une étude des stratégies OG vers OF (et non l'inverse). Ceci ne met donc pas en jeu l'évolution de l'interprétation de la numération parlée en France, ce qu'aurait permis l'étude des stratégies OF vers OG (celles qui sont utilisées *a priori* par les élèves pour résoudre la tâche). Un autre paramètre va alors intervenir dans le traitement des stratégies OG vers OF. Dans une phase de bouclage, il s'agit d'exposer à tous les connaissances en jeu. Ceci contraint à utiliser des signifiants qui sont visibles et compréhensibles par tous (connectés avec des connaissances anciennes et le milieu matériel). C'est ce que fait l'enseignante au moment où elle reprend et enrichit les remarques des élèves²⁷⁷. Dans les deux séances, ces signifiants ne sont donc pas tous nécessairement prévus par l'enseignante du fait qu'elle n'a pas anticipé les difficultés des élèves. A noter que celles-ci ne sont pas envisagées par le manuel²⁷⁸. Ces signifiants surviennent donc comme une adaptation de l'enseignante dans l'action, au fur et à mesure que les élèves prennent la parole, afin de rendre publiques les explications des élèves. Ainsi, dans l'épisode 2.2 de la mise en commun de la séance 1, l'enseignante reproduit au tableau la collection en la figurant par des croix et rend visible une stratégie de dénombrement par dix qu'un élève indique oralement. Ici l'organisation a été obtenue au fur et à mesure du dénombrement fait par l'élève (sans qu'il l'ait d'ailleurs rendue visible en entourant des groupements de dix carrés/boutons). C'est une interprétation multiplicative qu'il semble mobiliser (« *trois dizaines ça fait trente* »). Or le fait de rendre publique la démarche de l'élève fait que cette organisation va être utilisée *a posteriori*. En outre, c'est pour expliquer aux élèves qu'effectivement « *ça fait trente* » que l'enseignante utilise une interprétation additive en s'appuyant sur l'organisation obtenue finalement. En ce qui concerne la mise en commun de la séance 2, durant l'épisode 1.2, l'enseignante traduit ce que dit un marchand sur la quantité « *J'ai donné quatre grandes barres. [...] Et j'ai donné quatre petits boutons* » en dessinant au tableau une production graphique de type 1. Durant le 2^{ème} épisode « *vingt plus*

²⁷⁶ Nous voulons souligner ici que la situation installée lui permet de « résister » au fait d'instaurer un microcontrat d'ostension assumée ou déguisée.

²⁷⁷ Notons que les difficultés d'expression des élèves dues à leur âge contribuent au fait que c'est l'enseignante qui prend en charge les explications collectives.

²⁷⁸ Nous verrons par la suite que certaines le seront, l'enseignante ayant pu les constater et anticiper les difficultés.

huit c'est égal à vingt-huit » est traduit par l'écriture chiffrée « $20+8=28$ » et finalement, durant l'épisode 3.2 ce sont des signifiants de type OG qui sont utilisés dans un autre contexte, cette fois-ci à l'initiative de l'enseignante. En conséquence, l'utilisation de ces signifiants, disponibles *a priori* pour les élèves pour comprendre les explications qui leur sont données, convoque une interprétation additive ou ordinale avec repérant de la numération parlée en France.

Comme l'enseignante fait appel à des connaissances anciennes pour aider les élèves à comprendre le sens d'une désignation de type OG (passage OG vers OF), l'écriture chiffrée est alors sollicitée dans les différentes interactions en tant que forme écrite de la désignation parlée en France. Ceci est cependant susceptible de ne pas faciliter l'évolution de l'interprétation de l'écriture chiffrée en jeu dans la séquence.

Le contrat d'adhésion mis en place durant la phase de bouclage de la deuxième séance permet à l'enseignante de s'apercevoir des difficultés persistantes des élèves et l'oblige à se centrer sur celles-ci. De ce fait, la connaissance mise en forme par l'enseignante concerne essentiellement la nécessité d'utiliser les repérant/appuis additifs utilisés dans la désignation parlée en France du cardinal de la collection. Ceci constitue une première étape du passage à une interprétation multiplicative avec repérant qui est en jeu pour réussir à élaborer des messages corrects. Cependant cette étape à elle seule est insuffisante pour que les élèves produisent des messages corrects. Or, ceci est nécessaire pour la troisième séance, l'enjeu étant de mettre en relation ces messages (corrects) avec l'écriture chiffrée.

La difficulté « conceptuelle » n'a pu être surmontée, pour au moins une partie des élèves. Les propositions du manuel peuvent être questionnées, à la fois dans la séquence (la nature et l'enchaînement des tâches, le milieu proposé, la progressivité sur (uniquement) quelques séances qui se succèdent immédiatement), et sur l'itinéraire lui-même (les élèves n'ont pas été « préparés » à surmonter cette difficulté). La conduite par l'enseignante peut l'être aussi, par exemple le fait de ne pas traiter les stratégies OF vers OG. Cependant le fait est que cette difficulté « conceptuelle » est soulignée dans un bon nombre de recherches antérieures. C'est un problème que la situation installée a pu mettre en évidence du fait de la nature des tâches proposées et des contrats installés par l'enseignante qui ont permis de la tenir informée de ces difficultés. Ses conceptions sur son rôle d'enseignant l'amènent à tenter de faire en sorte que les élèves en difficulté puissent réintégrer la séance, c'est pourquoi, elle propose à la fois des séances intermédiaires entre les séances 2 et 3, et un dispositif différencié dans la séance 3. C'est ici aussi qu'interviennent les ressources qu'elle utilise pour proposer cette différenciation ainsi que ses conceptions sur le savoir en jeu. Elle décide en effet de ne pas rester dans le contexte Ziglotron²⁷⁹, et de faire constituer aux élèves des groupements sur des collections figurées. Ces tâches sont néanmoins non problématiques et leur réussite n'est pas validée par un milieu matériel, par exemple par association terme à terme de groupements et de plaques de dix.

On retrouve ce même type d'étayage (centré sur les élèves jugés en difficulté) et de tâches dans la troisième séance. L'organisation choisie a aussi pour but de créer un milieu suffisant pour que chacun puisse être amené à produire des réponses que l'enseignante pourra alors valider en utilisant ce milieu. Dans un entretien post-séance, l'enseignante déclare d'ailleurs procéder ainsi pour favoriser la réussite des élèves quant à obtenir un message correct à partir de la désignation parlée en France ou l'écriture chiffrée, sans présence de la collection. Ainsi, ce dispositif est mis en place afin de faciliter la phase de bilan, de la rendre accessible à tous. Cependant, il transforme significativement la situation proposée par le manuel, ce qui est susceptible de contribuer à expliquer alors certaines évolutions dans la gestion. Ainsi, pendant le travail des élèves, l'enseignante continue à installer le plus souvent un microcontrat de

²⁷⁹ Pour Mme B, il s'agit d'un changement de contexte, alors que pour Mme H nous verrons qu'il va s'agir de décontextualiser les connaissances, au sens d'abstraire.

production individuelle quand ils travaillent seuls, malgré leurs difficultés persistantes. Elle tente néanmoins, sans que ses tentatives soient toujours couronnées de succès, de rétablir certaines insuffisances de la situation qu'elle a créée. Les élèves les plus en difficulté ne parviennent pas en effet à relier la matérialisation des groupements sur leur feuille à la formulation de la commande utilisant des paquets de dix. De manière générale, l'enseignante résiste au fait de donner aux élèves une stratégie car elle veut qu'ils utilisent par eux-mêmes une stratégie non « automatique », c'est-à-dire un lien non mécanique entre les chiffres de l'écriture chiffrée et ceux du message. Cependant, dans la situation de communication, l'enseignante installe un microcontrat de tutorat afin de s'assurer que celle-ci va aboutir à ce qu'elle vise. Elle doute du fait que les explications d'enfants de cet âge puissent permettre à leurs camarades de comprendre. Qui plus est la teneur des échanges étant non connue *a priori* de l'enseignante, le savoir en jeu échappe à sa responsabilité. Or pour mener la phase de bouclage, l'enseignante veut savoir si les arguments développés par les élèves durant la réalisation de leur tâche ont permis de faire émerger un savoir (et quel savoir). Elle veut en outre être informée des erreurs qui peuvent persister. Ceci peut expliquer qu'elle aille voir les binômes pendant la réalisation de la deuxième tâche et non voir les élèves résolvant seuls la tâche prévue par le manuel (le troisième tiers).

Enfin, l'itinéraire cognitif proposé par le manuel va influencer le déroulement de la séance suivante. Il prévoit en effet de faire évoluer la numération parlée en France vers une interprétation multiplicative, et c'est ce qui est effectivement en jeu dans cette séance 3. Cependant, dans la phase de bouclage le passage des preuves provenant du milieu matériel aux preuves intellectuelles est minimisé voire a disparu. Ceci peut être en partie dû à une adidacticité relativement faible de la situation instaurée. Par ailleurs, l'écriture chiffrée, comme précédemment, est toujours utilisée en tant que forme écrite de la désignation parlée en France. En outre, aucune stratégie OF vers OG, susceptible de convoquer une interprétation multiplicative et mettant en jeu ou non explicitement l'écriture chiffrée, ne fait l'objet de débats dans la séance, ni d'institutionnalisation (même partielle et contextualisée). Ceci peut éclairer le fait que, bien que les écritures chiffrées soient parfois apparues dans des éléments d'une interprétation multiplicative, les élèves, pourtant sollicités dans ce sens par l'enseignante à la fin de la séance, n'ont pas établi de lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les chiffres utilisés pour le message. Ce constat fait par l'enseignante va l'amener à faire un nouveau changement dans le scénario de la séance suivante.

Séance 4 : la place de l'écriture chiffrée

Le projet de l'enseignante est que les élèves relient les chiffres de l'écriture chiffrée de la première partie du bon de commande aux nombres en jeu (indiqués par des chiffres) de la deuxième partie. Mais, dans un entretien post-séance elle indique qu'elle ne vise pas une association « mécanique », elle veut que les élèves « donnent du sens ». Ceci contribue à expliquer le fait de revenir sur les bons déjà élaborés par les élèves dans les séances précédentes et le guidage de la séance. Une autre option était de proposer l'exercice 2 p.70 et ensuite de revenir sur ce lien, sachant que la stratégie qui avait été mise en avant dans la séance 3 permet de réussir cet exercice. L'enseignante a choisi l'option de garder aux exercices du manuel leur rôle de réinvestissement d'une nouvelle connaissance, c'est pourquoi elle va mettre en exergue cette connaissance auparavant.

Le fait d'écrire « 10 » au lieu de « dix » dans les bons de commande est motivé par le fait de mettre en relief cette quantité (entretien post-séance). Ce choix aurait pu conduire les élèves à faire des remarques sur les chiffres qui composent « 10 ». Mais cela n'a pas été le cas, « 10 » est vu comme une entité globale signifiant « dix » et dans laquelle les deux chiffres ne sont pas distingués. Ceci peut s'expliquer par le fait que « 10 » a été systématiquement utilisé comme une marque globale, synonyme de l'écriture littérale « dix » (voir par exemple l'égalité $10+10+10+10 = 40$ de la séance précédente ou de cette séance).

Les explications visent à faire émerger une connaissance autre que technique, automatique et contextualisée. Cependant, la situation a un faible potentiel adidactique (le milieu matériel n'est qu'évoqué, la connaissance visée n'est pas solution d'un problème). Ceci peut contribuer à expliquer la nature des explications qui interviennent, en particulier un recours à des signifiants, « relais matériels », et des arguments intellectuels qui ne sont pas dans la situation mais qui sont estimés par l'enseignante comme mobilisables par les élèves. Dans l'explication que cette dernière donne, nous pouvons aussi y voir une intervention de ces conceptions (c'est elle qui propose certains signifiants). Elle tente en effet de relier l'écriture chiffrée « directement » à une désignation de type OG, mettant en exergue des éléments d'une interprétation de référence, la désignation parlée en France étant plutôt une « preuve » de cette interprétation. Ceci peut aussi être attesté par le fait que dans le lancement de la 2^{ème} tâche, le nombre n'est pas prononcé par l'enseignante (de manière volontaire, c'est ce qu'elle indique dans un entretien post-séance), afin de favoriser la stratégie visée, utiliser les chiffres « 1 » et « 6 ». Mais par la suite « seize » est prononcé par les élèves et l'enseignante, et ce sera le cas pour tous les autres nombres en jeu. Par ailleurs, le choix de « 16 » pouvait amener les élèves à comparer deux stratégies : passer par l'appui/repérant dix ou bien utiliser les chiffres. En effet, pour « seize », l'appui/repérant n'est pas dit, et le savoir consistant à connaître la décomposition dix (plus) six est en cours d'apprentissage pour au moins une partie des élèves. La stratégie utilisant les repérants est alors plus difficile pour les élèves, celle utilisant les chiffres peut apparaître comme plus efficace. Cette possibilité n'est pas exploitée par l'enseignante. Ceci est à rapprocher du fait que beaucoup de réponses ont été erronées, et de ce fait la mise en commun a porté essentiellement sur leur (in)validation. Ainsi la tentative de l'enseignante de justifier un lien « direct » entre les écritures chiffrées et les désignations des groupements est rendue difficile, à la fois par la situation installée, les connaissances anciennes des élèves, mais aussi le fait de recourir dans les situations de communication au fait de « dire » les écritures chiffrées à l'aide des désignations parlées en France. En outre, dans l'itinéraire 1, la désignation parlée est nécessairement toujours reliée à la désignation écrite chiffrée, il semble difficile de s'abstraire de ce lien pour établir un lien « direct » entre les écritures chiffrées et les désignations des groupements.

Le problème déjà rencontré, écrire « 10 paquets » quand il est clair pour l'élève qu'il n'en veut qu'un, surgit à nouveau dans deux des trois productions étudiées dans la mise en commun de la tâche 2. C'est la nécessité de leur invalidation qui mène encore une fois l'enseignante à utiliser comme dans les séances précédentes une stratégie OG vers OF (dont une fois via les écritures chiffrées de la file numérique comme elle l'a fait précédemment dans cette séance) et non l'inverse²⁸⁰. L'interprétation ordinale ou additive est alors uniquement en jeu. Cependant à un moment il aurait été possible de rendre explicite un passage vers une interprétation multiplicative, en utilisant l'intervention d'un élève. Le fait que l'enseignante ne mette pas en évidence cette procédure peut être mis en parallèle avec le fait que ce n'est pas la stratégie visée à ce moment.

Nous avons vu que la justification du lien entre commande et écriture est remise en cause dans le cas de « 78 ». Nous pouvons inférer alors que c'est ce qui conduit l'enseignante à abandonner toutes justifications et à restreindre la stratégie à l'association mécanique des deux chiffres du message (dans un ordre qui n'est pas spécifié mais induite du sens de lecture). L'enseignante indique dans un entretien post-séance être consciente que la réussite des élèves n'atteste pas nécessairement de la compréhension de l'écriture chiffrée visée. Elle a voulu cependant conclure la séance, qui lui semblait longue, par la réussite des élèves aux

²⁸⁰ Ce qui est le cas aussi à plusieurs reprises dans la séance.

exercices (voir en particulier les derniers échanges). Ainsi deux facteurs, qui sont ici liés, peuvent éclairer le déroulement final. Un facteur temps, et un autre consistant à ce que le contrat « minimal » en classe ait été installé : l'enseignant a appris à l'élève une connaissance nouvelle et l'élève la lui montre par sa réussite. Le fait qu'une stratégie « mécanique » soit efficace permet de réaliser ce contrat dans le temps de la séquence.

3. La classe de Mme H.

Mme H est une enseignante expérimentée, ayant depuis plusieurs années la responsabilité de classe de CP. Elle est habituée à utiliser Cap Maths, mais ne s'interdit pas de recourir à d'autres ressources. Ces ressources viennent en particulier de la formation qu'elle a reçue pour être maître formateur. La classe est composée de 24 élèves. Les élèves sont disposés par tables de deux à cinq. L'enseignante estime que certains d'entre eux demandent plus d'attention (au niveau de leur comportement ou/et des difficultés d'apprentissage) : ils sont réunis devant elle sur une table de six. De nombreuses affiches ornent les murs. Nous relevons en particulier un tableau 10×10 dans lequel sont rangées les écritures chiffrées (chaque dizaine occupe une ligne, elle est donc repérable par son premier chiffre ; les nombres se terminant par le même chiffre sont disposés en colonne) et une file numérique des écritures chiffrées de 1 jusqu'à 33.

Nous procédons de la même façon que pour la classe de Mme B. Une analyse séance par séance qui conduit à chaque fois à une réponse à la première question, puis une reprise de la séquence pour la deuxième question. L'analyse se réfère ici aussi de manière essentielle aux grilles données en annexe. Un certain nombre d'indicateurs relevés se ressemblent. S'y retrouvent. L'analyse se réfère ici aussi de manière essentielle aux grilles données en annexe. Nous reprenons néanmoins entièrement l'analyse, quitte à ce que certaines formulations se soient identiques à la donnent une impression de « déjà vu » précédente. Ces ressemblances sont des résultats qui sont pris en compte dans l'analyse croisée que nous faisons dans le paragraphe 4. Nous voulons tout d'abord faire des analyses séparées que nous croiserons qu'ultérieurement.

3.1 Analyse des séances

a. Séance 1

Rappel de la tâche

Une partie des élèves doit élaborer un message oral pour commander un nombre de boutons manquants représentés sur une fiche Ziglotron qu'ils ont à leur disposition et qui ne doit pas quitter leur table. Les élèves marchands sont éloignés des clients et doivent délivrer ce qu'on leur demande. Deux conditionnements sont disponibles : plaques de dix ou boutons seuls. Les quantités en jeu ne sont pas celles indiquées par le manuels mais sont suivant les fiches 28, 30, 34, 45.

La situation (milieu)

La situation de la séance 1 est proche de celle prévue par le manuel (voir l'analyse *a priori* et le lancement). Ainsi des exemples de commandes sont donnés : « *trois boutons tout seuls* », « *quinze boutons tout seuls* », « *une barre* » et « *un paquet de dix avec des jetons tout seuls* ». Une différence est cependant à noter, c'est l'absence de prescription de stylos ou de crayons pour les clients, ce qui ne va pas favoriser l'émergence d'une stratégie consistant à constituer des groupements sur la fiche Ziglotron. La référence à la séance « petit Ziglotron » dans le 1^{er} épisode du lancement, est faite à l'aide d'une affiche A3 représentant une fiche Ziglotron. Elle

peut induire une stratégie identique à cette dernière, c'est-à-dire une stratégie OF consistant à obtenir la désignation parlée en France à partir de la désignation du cardinal de la collection par un comptage un à un (ce qui suppose des connaissances relatives à l'énumération). C'est effectivement ce que les élèves indiquent à travers le verbe « compter », l'enseignante ne les détrompe pas. Cette dernière insiste néanmoins sur la différence essentielle entre les deux séances : la présence de deux conditionnements, les plaques de dix et les boutons seuls. Ce matériel est affiché et agrandi au tableau²⁸¹ et reste visible de tous, en particulier pendant la réalisation la tâche des clients, ce qui change le milieu. En effet cet affichage peut faciliter certaines stratégies des « clients » mettant en jeu les plaques de dix : ils peuvent se tourner vers le tableau et compter les carreaux ou/et les bandes, la représentation mentale est facilitée. Cependant, signalons dès à présent que nous n'avons pas observé d'élèves ayant recours à cet affichage, c'est pourquoi nous n'en tenons peu compte ultérieurement.

Les élèves évoquent la validation des séances « petit Ziglotron » consistant à superposer les éléments de la collection obtenue et les boutons figurés par des carrés sur leur fiche. Ici encore la situation permet aux élèves de valider par eux-mêmes la correction de la collection obtenue par rétroaction du milieu matériel²⁸². Cependant elle ne permet pas aisément d'identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves qui sont susceptibles d'interpréter le message (voir analyse *a priori*). En outre la situation ne contraint pas les « clients » à produire un message oral comportant une demande de plaques. Elle permet par contre aux « marchands » de comparer les commandes incluant des plaques (plus simples à réaliser car comportant moins d'objets à dénombrer) à celles n'en comportant pas.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Les élèves n'ont pas recours à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande. Nous avons indiqué dans notre analyse *a priori* que cette stratégie, pourtant la plus efficace, était peu probable en considérant les connaissances anciennes des élèves.

Dans la période de travail des élèves, les stratégies de résolution de la tâche 1 de la séance 1 débutent essentiellement par un comptage un à un menant à une désignation parlée en France²⁸³. Elles s'arrêtent ici pour la plupart. Un élève, celui de l'épisode 1.8, tente de passer de cette désignation à une indication de la commande avec des plaques (uniquement), mais, n'y réussissant pas, il revient à une commande en termes de boutons seuls (le repérant quarante est utilisé pour commander des plaques, mais le cinq restant n'est pas disponible en plaque). Au moment de la mise en commun deux groupes indiquent avoir commandé des plaques en comptant les « dix » à partir de la désignation parlée en France (épisodes 3.1 et 3.2). Les interactions avec l'enseignante permettent de savoir qu'un élève du premier groupe a procédé en utilisant la comptine des dizaines et qu'il en compté quatre (avec ses doigts). Cependant, il s'est d'abord arrêté là en oubliant dans quarante-cinq le cinq restant. C'est après la validation matérielle qu'il s'en est aperçu et à complété sa commande (ne respectant pas les règles du jeu). Cette stratégie OF vers OG s'est donc faite en deux temps.

L'enseignante ne détaille pas de stratégie avant la mise en commun, mais elle utilise le mot « compter » (comme les élèves). Dans cette mise en commun, elle prend en note des stratégies de comptage (sous-entendu un à un) données par les élèves, puis reprend une stratégie OF vers OG d'un groupe pour l'expliquer aux autres élèves (épisode 3.1). Elle explicite alors sur

²⁸¹ Il est possible d'y dénombrer un à un les dix boutons dans une bande/plaque.

²⁸² Dans la phase de bouclage de la séance, l'enseignante diffuse les informations sur la réussite ou l'échec des élèves en demandant à certains s'ils ont réussi et en passant rapidement dans les rangs. Cependant tous n'ont pas effectué la validation matérielle, notamment ceux qui ont obtenu des plaques, par manque de temps ou de matériel (ciseaux).

²⁸³ Voir par exemple en annexe les épisodes pendant le travail des élèves.

deux exemples un passage OG (4 bandes de dix ; trois bandes de dix) vers OF (quarante ; trente), et non un passage OF vers OG, en utilisant les signifiants « relais ». Un premier consiste en des couples de mains (dix doigts) qui sont scandés en même temps que la comptine des dizaines. Dans un deuxième des doigts sont levés en même temps que sont énumérées les bandes de dix (« une bande de dix », « deux bandes de dix », etc.). La troisième stratégie de passage utilisée par l'enseignante OG vers OF consiste à compter les bandes de dix à l'aide de la comptine des dizaines. Ensuite, la désignation du nombre obtenue à l'aide des bandes de dix, par exemple quarante, est comparée à la désignation du nombre désiré, par exemple quarante-cinq. Il est mis en avant qu'une bande supplémentaire amènerait à un nombre trop élevé (cinquante dans notre exemple), en continuant la comptine de dizaines. Une fois le nombre maximum de plaques obtenu²⁸⁴, aucune stratégie pour obtenir le nombre de « boutons seuls » n'est indiquée, mais la réponse exacte est donnée²⁸⁵.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Dans la phase de lancement, l'enseignante présente la séance et installe un milieu proche de celui qui est prescrit dans le manuel, permettant ainsi à un mésocontrat de dévolution d'une première situation de pouvoir être installé. Elle a pris l'initiative d'un affichage des différents conditionnements au tableau (affichage prévu). Elle attend une stratégie de comptage, et plus encore une stratégie de comptage un à un (ce que l'enseignante a indiqué dans un entretien post-séance). Elle ne donne pas d'aide aux élèves quand certains lui demandent des précisions sur ce qu'il faut faire dans le cas où le marchand se trompe (épisode 1. 3 du lancement).

Durant la phase du travail des élèves, l'enseignante instaure un microcontrat de production individuelle (certaines de ses réactions peuvent être interprétées comme une évaluation négative, mais aucune aide n'est donnée) sauf pour un élève (épisode 1.8). Dans cet épisode 1.8 un microcontrat de tutorat est instauré. L'enseignante y relance l'activité en demandant des approfondissements ou/et des vérifications (avec un milieu matériel dont ne devrait pas disposer l'élève pour formuler la commande), mais sans apporter de connaissance. D'une manière générale, elle veille le plus souvent à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées en particulier auprès des marchands afin que ces derniers n'interprètent pas le message délivré (3^{ème} épisode du lancement). C'est pourquoi elle a désigné pour cette tâche les élèves qu'elle considère les meilleurs. Elle n'incite pas les élèves qui ne l'ont pas fait à demander des plaques/bandes/bâtons.

Un certain nombre de messages oraux qu'elle a relevé (de manière exhaustive) est constitué d'une demande de bâtons/bandes (par exemple dans les épisodes 1.3 et 1.6 de la réalisation de la tâche), bien qu'ils puissent être erronés (« quarante-cinq groupe de dix » dans l'épisode 1.3). Elle a ainsi pu en déduire certaines procédures. Toutes ces informations sont utilisables par l'enseignante dans la phase de bouclage qui suit.

La « mise en commun » comporte une courte phase de bilan (épisode 1). L'enseignante s'informe de la réussite (grâce en partie au milieu matériel qui a été installé, mais tous n'ont pas fait cette validation), ce qui permet ainsi aux élèves de connaître ceux d'entre eux qui ont réussi et ceux qui ont échoué à la tâche, sans pour autant que les stratégies aient été encore diffusées. Les erreurs peuvent être de sources multiples (voir analyse *a priori*). Dans l'épisode 2 l'enseignante les relie à un oubli de la formulation de la commande au moment de l'indiquer au vendeur (sous-tâche I.2 de l'analyse *a priori*) et à un mauvais respect des règles du jeu (interprétation du vendeur).

Le projet de l'enseignante est de diffuser une stratégie qui amène à une commande en termes de paquets de dix et de boutons seuls et de la comparer ensuite aux autres. Dans l'épisode 3.1

²⁸⁴ Cette maximalité est une conséquence de la stratégie indiquée, sans qu'elle soit explicite dans la séance.

²⁸⁵ Dans les exemples traités dans cette séance, ce nombre s'entend : cinq dans « quarante-cinq » pour l'épisode 4.1, « quatre » dans « trente-quatre » pour l'épisode 4.2

elle va pour ce faire s'appuyer sur une réponse d'un élève. Pour certains élèves ceci installe un microcontrat d'adhésions (pour ceux qui ont employé une stratégie proche de celle exposée ou/et ceux dont les connaissances anciennes sont suffisantes), mais les interventions de certains autres, et leur gestion par l'enseignante (changement d'interlocuteur et explicitation de la « bonne réponse ») indiquent qu'il s'agit pour ces derniers plus vraisemblablement d'un microcontrat d'ostension déguisée. Ensuite la stratégie mise à jour est testée sur un autre nombre (épisode 3.2). La même disparité de microcontrat est envisageable, selon les élèves, adhésion ou ostension déguisée. Dans l'épisode 3.3, l'enseignante demande aux élèves de comparer les procédures (amenant soit à commander des plaques et des boutons soit uniquement à des boutons) selon leur rapidité. Ils répondent que le plus rapide c'est de « *compter de dix en dix, ou de vingt en vingt ou de trente en trente, ou de deux en deux* ». Ainsi la diffusion de la stratégie précédente n'a pas mené à l'argumentation attendue, mais permet à l'enseignante d'organiser une phase dans laquelle les élèves vont accéder à l'argumentation souhaitée. Cette comparaison nécessite de considérer la tâche I bis, celle du « marchand », ce que fait l'enseignante en demandant elle-même aux élèves « marchands » d'indiquer la commande qu'ils trouvent la plus simple pour réaliser leur tâche. A nouveau le microcontrat que tente d'installer l'enseignante est celui d'adhésion mais, ici, le fait que la plupart des élèves n'aient pas été confrontés à cette tâche peut installer pour eux un microcontrat d'ostension plus ou moins assumé.

Dans le dernier épisode, l'enseignante met relief ce qu'il faut retenir de la séance, ce qui peut constituer un élément de mise en forme contextualisée de la connaissance en jeu. Elle insiste sur l'équivalence entre différentes formulations de la commande et met en parallèle d'un côté un comptage de dix en dix et une commande en termes de bandes et de boutons, et d'un autre la facilitation de la tâche pour le marchand lorsque des bandes lui sont demandées. Cependant aucune stratégie afférente au passage d'un comptage de dix en dix à une commande en termes de bandes de dix n'est indiquée.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Les élèves conçoivent difficilement de dire la quantité sans utiliser les désignations parlées en France : face à une collection la stratégie de dénombrement consistant à compter pour obtenir une désignation parlée en France est prégnante, quel que soit le milieu instauré. L'enseignante semble aller aussi dans ce sens. Les élèves attribuent principalement leurs échecs à des erreurs de mémorisation, en référence à la séance « petit Ziglotron » vécue auparavant. Ainsi la majorité des élèves utilisent une interprétation ordinale (avec repérants ou non) de la numération parlée en France pour résoudre leur tâche. Cependant, (au moins) deux élèves se sont distingués. Un premier a utilisé la comptine des dizaines et le repérant de la désignation parlée du nombre sans qu'il soit facile de savoir exactement comment. Mais il échoue, parce qu'il n'arrive pas à ne commander que des plaques/bandes de dix. Le deuxième utilise le repérant quarante aussi pour obtenir quatre bandes. Il compte les mots dans la comptine des dizaines dix, vingt, trente, quarante. Il utilise une stratégie OF vers OG qui met en jeu une interprétation multiplicative. A noter cependant que si le repérant est utilisé, dans un premier temps, le nombre restant (cinq) n'est pas considéré, comme si cet élève voulait, lui aussi, faire une commande n'utilisant qu'un seul conditionnement. La validation permet de le détromper et il arrive alors à une commande correcte. Ceci nous semble mettre en relief la difficulté pour les élèves de concevoir qu'une désignation de type OG comportant deux désignations parlées en France puisse indiquer un (seul) nombre. Ceci est un obstacle pour passer à une interprétation multiplicative dans ce contexte de matérialisation des dizaines par des objets (ici des bandes/plaques).

Les signifiants « relais » qui sont utilisés par l'enseignante le sont essentiellement dans la mise en commun pour expliciter devant les élèves une stratégie OG vers OF et non l'inverse. Ni les commandes obtenues ni la collection de départ ne sont représentées au tableau. Il s'agit

de compter de dix en dix pour retrouver le nombre de boutons contenus dans un certain nombre de bandes. Non seulement les élèves n’y réussissent pas tous, mais le fait d’étudier le sens OG vers OF et non l’inverse, nous permet d’inférer que le passage d’une interprétation additive ou/et ordinale avec repérant à une interprétation multiplicative est abordé *a minima*. Les élèves n’ont pas à retrouver par exemple quatre bandes dans quarante, mais à passer de quatre bandes à quarante. En outre, la prise en compte de l’appuyant/comptant pour résoudre la tâche est difficile pour les élèves. L’écriture chiffrée n’intervient pas dans cette séance.

b. Séance 2

Rappel de la tâche

La tâche proposée dans la séance 2 n’est pas celle du manuel. Les élèves « clients » disposent des fiches Ziglotron (28, 34 ou 45 boutons manquants). La tâche demandée aux élèves « clients » est d’obtenir une désignation du cardinal de la collection par une stratégie OF, notée par une écriture chiffrée, puis d’obtenir à partir de la désignation parlée en France²⁸⁶ une formulation de type OG, pour finalement passer à une formulation écrite de type GraC. Cette production graphique constitue une nouvelle forme du bon de commande destiné au « marchand », à partir de laquelle ces derniers doivent délivrer la collection demandée en respectant les conditionnements indiqués. Les élèves « clients » reçoivent cette commande mais la validation ne se fait pas avant la mise en commun, comme le prescrit le manuel.

La situation (milieu)

La situation installée dans la séance 2 n’est pas celle proposée par le manuel (voir analyse *a priori*). Les conditions matérielles sont les mêmes, mis à part la forme du message à adresser au « marchand ». Ce n’est plus un bon de commande à compléter mais une désignation de type GraC accompagnée d’une écriture chiffrée en haut de la feuille. Cette désignation chiffrée du cardinal de la collection ne lui est pas destinée.

Comme dans la séance 1, la situation installée ne permet pas aisément d’identifier la cause des erreurs des élèves, en partie du fait que ceux qui délivrent la commande sont aussi des élèves et sont donc susceptibles d’interpréter le message. Cependant, ici, en outre, l’enseignante indique dès le départ que la commande doit être faite en termes de plaques et de boutons, ce qui apparaît comme une règle du jeu. Pourtant les contraintes matérielles supplémentaires devraient y amener les élèves sans que cela soit indiqué (il ne peut être délivré plus de neuf boutons seuls). En outre, il est possible que des élèves se souviennent qu’une commande comportant des plaques de dix facilite la tâche des marchands (c’est ce qui a été établi à la fin de la séance précédente). Cet argument n’est cependant pas rappelé dans cette 2^{ème} séance.

Des exemples sont donnés par l’enseignante dans le début du deuxième épisode du lancement (en termes de bandes et de jetons), et la consigne est rappelée au moment de la réalisation de la tâche par les élèves, comme par exemple dans l’épisode 1. Ceci permet ainsi de signifier la tâche à faire.

Un comptage de un en un est sous-entendu pour une stratégie OF alors qu’aucune stratégie OF vers OG n’est indiquée (mais le lien entre les deux a été l’enjeu de la séance 1, notamment à l’aide de la suite des dizaines, dix, vingt, trente, etc.). Les stratégies OG vers GraC ne sont pas non plus évoquées.

La tâche complète est donc découpée en sous-tâches et son but final n’est pas toujours perçu par les élèves (voir par exemple l’épisode 1 de la réalisation de la tâche des élèves). En effet, il est demandé expressément de passer par une désignation parlée en France indiquée par une

²⁸⁶ Il est demandé effectivement d’utiliser la désignation parlée en France, et non l’écriture chiffrée, qui elle, en tant que traduction écrite de cette dernière est indiquée tout d’abord comme utile pour se souvenir de la quantité (2^{ème} épisode du lancement), puis ensuite pour que l’enseignante soit renseignée sur le nombre de boutons dénombrés.

écriture chiffrée, puis de traduire cette désignation orale en une désignation orale des groupements, avant de passer à une traduction par un dessin. Or cette stratégie, en particulier la stratégie de comptage (de un en un), n'est pas la plus efficace²⁸⁷ pour obtenir un message écrit. En outre l'écriture chiffrée est susceptible de convenir pour faire un message écrit (cette fonction de l'écrit est ce sur quoi insiste l'enseignante).

La validation matérielle est différée après une mise en commun, comme il est proposé par le manuel.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Ici encore, les élèves n'ont pas recouru à la constitution de groupements sur leur fiche Ziglotron pour faire la commande, mais ils ont pu le faire pour réaliser leur message dessiné, c'est ce que nous allons voir.

Comme dans la séance 1, les stratégies les plus employées par les élèves « clients » pour obtenir une désignation orale du cardinal de leur collection semblent être de type OF avec comptage un à un. Ceci se voit dans différents épisodes de la mise en commun, comme le 3.3, mais surtout dans les deux premiers épisodes du travail des élèves, dans lesquelles de surcroît des stratégies d'énumération sont diffusées par l'enseignante à partir de ce qu'ont fait spontanément certains. La stratégie de passage OF vers EC n'est jamais questionnée, elle semble être automatisée. Par la suite, il est difficile de savoir comment les élèves ont obtenu leur production graphique, qui sont en majeure partie de type 1, deux seulement étant de type 2 (voir les messages étudiés dans la phase de bouclage, épisode 3.4 pour le premier message de type 2). Cependant plusieurs incidents permettent d'inférer que la plupart ne sont vraisemblablement pas passés par une désignation de l'organisation, comme il a été indiqué dans la tâche prescrite (OF vers GraC via OG). En effet, il existe une possibilité théorique qui consiste à utiliser les dessins des bandes pour compter au fur et à mesure les carrés dessinés (soit de un en un, soit de dix en dix) pour obtenir finalement la quantité désirée : c'est une stratégie de type OF^o (réalisation d'une collection à partir de la désignation parlée en France de son cardinal)²⁸⁸. Or tous les élèves ont bien représenté des carrés sur leurs bandes, ce qui rend cette stratégie possible, certains ont même indiqué qu'ils les ont comptés un à un (message 6 de l'épisode 3.3) alors que d'autres les comptent un à un au tableau. En outre l'épisode final 4.2 montre clairement leur difficulté à utiliser une stratégie OF vers GraC via OG. Finalement, l'épisode 3.7 (trois bandes sont dessinées qui ne sont pas composées de dix carrés mais un élève dit trente) et les différents moments où ils utilisent la comptine des dizaines sans se soucier des objets (ils comptent dix indifféremment pour une bande ou un carré, dans l'épisode 1.2 par exemple) montrent qu'ils ont du mal à relier cette comptine avec un comptage du nombre de bandes de dix. Or cette comptine est un des moyens (indiqué dans la séance 1) pour passer d'un repérant/appui comme quarante au nombre de dizaines, une dizaine étant à associer à une bande. D'ailleurs des élèves semblent avoir aussi des difficultés à indiquer que trente et quatre (boutons) forment une collection de trente-quatre boutons (épisode 2.2 et 2.3). A noter qu'ils passent facilement d'une production graphique de type 1 à une désignation des groupements (ils décrivent ce qu'ils voient), alors que la lecture que demande un message de type 2 pour obtenir une désignation des groupements est moins facile (épisode 3.4).

En ce qui concerne l'enseignante, elle a indiqué que la tâche constituait à employer une stratégie OF vers GraC via OG. C'est uniquement dans la mise en commun qu'elle va

²⁸⁷ La stratégie de groupement est non seulement plus efficace dans la séance, mais en plus elle peut faciliter la mise en œuvre du passage vers une interprétation multiplicative.

²⁸⁸ Ils résolvent ainsi le « problème graphique » qui dans ce contexte (nombres inférieurs à cent et groupements de dix) consiste à donner graphiquement trois informations différentes : le type de conditionnement (bande ou bouton isolé), la quantité dans une bande, le nombre de bandes et de boutons isolés.

expliciter certaines stratégies. Elles vont constituer à valider les productions graphiques de type 1 et 2. Les productions graphiques de type 2 sont simplement lues pour obtenir une désignation de l'organisation puis sont évaluées positivement (et même valorisées) sans argumentation (par exemple par un passage à une désignation parlée en France). En ce qui concerne les productions graphiques de type 1, c'est une stratégie GraC vers OF via OG qui est utilisée par l'enseignante. La principale consiste, comme dans la séance 1, à énumérer les bandes de dix au tableau en même temps qu'est prononcée la comptine des dizaines. Des autres signifiants sont utilisés parfois, de manière simultanée ou non aux gestes de monstration des bandes de dix. Il s'agit de montrer les dix doigts des deux mains de manière répétée, ou bien de lever un à un les doigts d'une main à chaque dizaine/repérant/bande. Le plus souvent est énoncé « une bande de dix, deux bandes de dix, etc. » (voir par exemple l'épisode 1.2).

Les écritures chiffrées sont utilisées pour traduire ce qui est dit à l'oral. Par exemple le fait d'avoir dénombré vingt dans deux bandes de dix est traduit par l'écriture « 20 » sous les deux bandes dessinées au tableau (épisode 1.2 et 1.4, mais aussi 1.3 et 2.2 pour trente). Il en est de même pour le nombre de boutons restants. Ce qui donne finalement des productions graphiques de type 1 : les écritures 20/8, 30/4 et 10/1 correspondant aux mots prononcés vingt/huit, trente/quatre et dix/un, ainsi qu'à vingt-huit, trente-quatre et onze. Dans l'épisode 1.4 l'enseignante écrit « $20 + 8 = 28$ »²⁸⁹ en même temps qu'elle dit « *vingt plus huit est égal à vingt-huit* ».

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

L'enseignante tente de ne pas donner d'aide aux élèves, bien qu'une stratégie de comptage pour obtenir une désignation parlée en France du cardinal de la collection soit implicite. En outre, elle prescrit dès le début une sous-tâche (élaborer un message en termes de plaques et boutons), alors que le milieu était susceptible de contraindre les élèves à utiliser une telle formulation, le problème se posant alors au moment de la livraison de la commande. Il est possible que cette prescription fasse référence à la séance passée (il a été conclu qu'une telle forme de message était plus rapide à traiter pour le marchand), mais ce n'est pas explicite. De même la stratégie OG vers OF qui a été mise alors en évidence n'est pas rappelée. Par ailleurs, dès ce lancement (2^{ème} épisode), un élève demande comment écrire le message. Or l'enseignante n'a pas photocopié les bons de commandes. Il en résulte une modification de la tâche « dans l'action », le bon de commande consiste alors en une écriture chiffrée et un « dessin » de la collection désirée. Ainsi, du fait que la stratégie est indiquée dans la tâche à réaliser (OF vers GraC via OG), le mésocontrat que semble vouloir instaurer l'enseignante semble celui de rappel ou de pseudo-dévolution. Mais le fait d'utiliser des productions graphiques (ce qui est provoqué par une remarque des élèves), engendre la possibilité de ne pas recourir à une telle stratégie pour résoudre le problème. Ainsi, la stratégie que l'enseignante suppose en jeu (ce qui peut se voir à la fois dans la séance 1, mais aussi dans le dernier épisode de celle-ci), le passage de OF vers OG, ne l'est pas nécessairement (cf. l'analyse *a priori*).

Durant le travail des élèves, l'enseignante veille toujours à ce que les « règles du jeu » (maintien du milieu) soient respectées et particulièrement auprès des marchands pour qu'ils n'interprètent pas le message délivré. L'enseignante garde le plus souvent un microcontrat de production individuelle, n'interférant que pour une minorité dans leur travail et par des relances.

Dans la mise en commun, elle fait un bilan des réponses quant au nombre de boutons dénombrés, et ce avant le traitement de chaque fiche. Cependant, contrairement à la première séance elle ne peut pas utiliser de validation faite par les élèves durant leur travail. Ainsi, les

²⁸⁹ Dans la séance 3, l'utilisation d'un tel type d'égalité est prescrite par le manuel.

élèves accèdent à une évaluation de l'exactitude de leur dénombrement : cette évaluation de l'enseignante s'appuie sur les réponses majoritaires des élèves (qui sont effectivement exactes).

L'enseignante tente d'utiliser un microcontrat d'adhésion en s'appuyant sur certains élèves, influencée par la situation elle-même, les possibilités de rétroaction du milieu étant moindre.. Le traitement des productions des élèves constitue alors systématiquement en une vérification mettant en jeu une stratégie GraC vers OG vers OF, à l'aide des signifiants relais que nous avons indiqués auparavant. Ainsi, la stratégie OG vers OF qu'elle vise (voir la fin de la séance) n'est pas en jeu. Cependant ici, des éléments de cette stratégie sont sans doute utilisés par les élèves dans une stratégie OF° (que nous analysons comme étant à leur portée). Ainsi, il nous semble que le microcontrat ne devienne pas de l'ordre d'une ostension déguisée. Cependant certains points de l'argumentation révèlent des difficultés des élèves à utiliser la comptine des dizaines comme comptine pour dénombrer les collections dessinées (voir les épisodes 1.2 et 3.7), difficultés que l'enseignante traite en donnant la réponse exacte (elle-même ou en changeant d'intervenant).

La fin de la séance constitue une série d'exercices décontextualisés sur le passage OF vers OG. Il semble que c'est donc la connaissance que vise l'enseignante, et qui permet en effet de réussir une stratégie de type OF vers OG vers GraC (autrement dit une stratégie OF vers GraC via OG). Les réponses des élèves montrent qu'une fraction importante d'entre eux échoue. La séance étant finie (c'est l'heure de la cantine), l'enseignante n'a pas le temps matériel de traiter ces erreurs.

A noter que l'enseignante de part sa gestion n'a pas été amenée à voir apparaître chez les élèves des erreurs d'équivalence entre une désignation parlée en France et son correspondant écrit chiffré.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Dans le lancement, la stratégie OF vers OG indiquée par l'enseignante incite initialement la numération parlée en France à être utilisée dans une interprétation ordinale (non nécessairement avec repérant). Ensuite c'est la stratégie OF vers GraC via OG qui est spécifiée. Elle engage à réaliser la tâche de formulation du message tout d'abord par une stratégie OF vers OG que cette interprétation ordinale rend plus difficile, d'autant plus qu'elle ne met pas en exergue les repérants (pour les nombres de onze à seize par exemple). Ensuite, le passage OG vers GraC consiste soit en une transcription « signe à signe » de OG (pour mener à une production graphique de type 2) soit en un dessin de la collection qui est décrit (pour mener à production graphique de type 1). Ceci fait intervenir une interprétation de la numération parlée pour des nombres inférieurs à dix. Cependant, les élèves n'ont vraisemblablement pas procédé ainsi. Ils ont utilisé une stratégie OF°, consistant à dessiner le nombre de carrés qu'il faut en les regroupant par dix pour constituer une bande. En effet, ils ont retenu qu'il fallait commander des bandes, ce qui était prescrit, la maximalité ne l'étant pas, mais imposée par les conditions matérielles. Si les repérants sont alors éventuellement utilisés (ce n'est pas obligatoire et certains ne le font visiblement pas puisqu'ils comptent les carrés un par un), l'interprétation multiplicative n'est pas en jeu. Cependant, l'enseignante peut en avoir l'impression. A la fois de par sa prescription initiale, mais aussi car le comptage de dix en dix est « associé » à un nombre de bandes, ce qui est ostensible dans la mise en commun. Mais comme dans la séance 1, il s'est agi de valider les réponses des élèves, et la stratégie étudiée est de type GraC vers OF via OG. Or celle-ci ne met pas nécessairement en jeu une interprétation multiplicative (il aurait fallu étudier la stratégie inverse). En outre les signifiants relais utilisés, qui sont en lien avec les productions graphiques, font apparaître le nom des repérants (écrits ou dits), ce qui atteste l'utilisation par l'enseignante d'une interprétation

ordinaire avec repérant ou additive²⁹⁰. En effet le repérant/appui est accolé à un certain nombre de bandes (de dix) dessiné, après avoir effectué un comptage (en général de dix en dix avec la comptine des dizaines, ou bien par indication d'un ajout de dix, le repérant/appui étant toujours prononcé. Ainsi, ce sont des décompositions additives ou en termes de repérants/comptants qui sont utilisées ostensiblement. A noter que ce comptage de dix en dix n'est cependant pas compris de tous, certains continuant à annoncer la suite des dizaines pas nécessairement à bon escient. Ceci rappelle les difficultés notées dans les recherches antérieures sur l'utilisation de la comptine numérique : le dernier nombre énoncé doit indiquer le cardinal. Certains élèves ont encore besoin de vérifier par la comptine numérique que la désignation obtenue par la comptine des dizaines est le « bon » nombre. Ce qui atteste que le compteur avec les repérants n'est pas un outil de comptage encore sûr et efficace, et donc que l'interprétation avec repérants n'est pas nécessairement disponible chez tous les élèves.

Dans un dernier épisode, l'enseignante donne une nouvelle tâche, pensant ainsi faire travailler les élèves de manière plus décontextualisée sur la connaissance qui a été en jeu. C'est bien une stratégie OF vers OG qui est sollicitée, et donc le passage d'une interprétation avec appui/repérant à une interprétation multiplicative (du repérant au nombre de dix/bandes puis du comptant au nombre d'unités/boutons seuls). La plupart des élèves échouent ce qui atteste que l'interprétation multiplicative n'a pas été réellement en jeu dans la séance et que pour la majorité des élèves ce n'est pas une connaissance mobilisable (ce que nous avons indiqué dans l'analyse de l'itinéraire cognitif proposé par le manuel).

En ce qui concerne l'écriture chiffrée, du fait des connaissances anciennes des élèves mobilisables pour résoudre les tâches, la situation engage à la considérer comme la forme écrite de la désignation parlée en France. Distinguer et donner du sens à chaque chiffre n'est en jeu que dans la séance suivante. Les discours et les actions que nous avons relevés, que ce soit de l'enseignante ou des élèves, ne font que renforcer cette position de l'écriture chiffrée par rapport aux désignations parlées en France. En particulier, à aucun moment la stratégie pour traduire la désignation parlée en France en la désignation écrite chiffrée, OF vers EC, n'est abordée, sous-entendant que la désignation écrite chiffrée est la forme écrite de la désignation parlée en France. A chaque fois que l'enseignante utilise des écritures chiffrées dans ses explications, comme quand elle emploie « $20+8=28$ », c'est pour traduire au tableau ce qui est dit oralement. Du côté des élèves, on relève deux productions graphiques de type 2 (les autres étant presque exclusivement de type 1). L'écriture chiffrée y est utilisée aussi comme traduction de l'oral. C'est l'enseignante qui demande de lire ces productions (et non pas de les décrire). Grâce à cette lecture les élèves sont susceptibles de comprendre le code (oralement cela correspond à la description d'une production graphique de type 1).

c. Séance 3

Rappel des tâches

Les deux premières tâches sont conformes en partie aux prescriptions du manuel, puisqu'il s'agit d'élaborer un message en direction d'un marchand hypothétique. Le message n'est pas réellement donné au marchand, la collection n'est pas délivrée, et donc il n'y a pas de validation matérielle. Tous les élèves ont à élaborer un message à partir d'un Ziglotron commun, affiché au tableau, dont le nombre de boutons manquant est indiqué à tous oralement et par une écriture chiffrée. Cependant la résolution se fait par binôme (et non individuellement suivie d'un échange à deux), les nombres en jeu (dans les deux premières tâches) sont 28 puis 45 (au lieu de 42, suivie d'une mise en commun, puis d'un entraînement

²⁹⁰ Ce qui reste toujours hypothétique chez les élèves. Rappelons que les élèves n'ont été confrontés que depuis peu de temps à des problèmes de la structure additive.

sur des exemples comme 16, 50, 83, 38) et les messages sont des dessins au lieu de bons de commande à compléter.

Les trois tâches suivantes consistent à indiquer une commande orale (en termes de bandes et de boutons isolés) à partir d'une désignation parlée en France traduite par écrit au tableau : 33 (3^{ème} tâche), puis 21 (4^{ème} tâche), puis 43 (5^{ème} tâche).

La situation (milieu)

Dans les deux premières tâches, les élèves disposent de la désignation écrite chiffrée au tableau, traduction de la désignation parlée qui a été prononcée. La tâche est proposée à des couples d'élèves qui peuvent communiquer pour donner une réponse commune. Chaque binôme a à sa disposition une feuille blanche sur laquelle il peut réaliser sa production graphique à l'aide d'un crayon ou d'un stylo. Les élèves peuvent *a priori* faire plusieurs tentatives en rayant ou gommant. Le message est adressé à un hypothétique marchand, faisant référence ainsi à la première partie de la tâche de la séance précédente. Les élèves ne savent pas que leur production va être affichée ultérieurement et donc s'adresser à toute la classe. Le premier nombre en jeu, 28, et le temps alloué à la tâche (5'33) permettent aux élèves d'entreprendre une stratégie OF° en comptant les carrés qu'ils dessinent sur leur feuille au fur et à mesure (et en les agglomérant par bandes de dix). Il est possible d'utiliser directement l'écriture chiffrée (c'est ce qui est visé par le manuel dans la séance 4, et qui doit être mis en évidence dans cette séance). Il est aussi envisageable d'utiliser une stratégie passant par une désignation orale des groupements (OF vers GraC via OG). Pour le deuxième nombre en jeu (45), le temps alloué et sa grandeur rend moins performante une stratégie OF° avec un comptage des carrés. Cependant, ce nombre a déjà traité dans la séance 2, avec une tâche similaire.

Dans les trois dernières tâches, une stratégie OF vers OG est demandée aux élèves. Ils ne disposent d'aucun matériel et la validation se fait de manière non matérielle. Le contexte Ziglotron est évoqué en particulier par le type de formulation des messages (... bandes et ... boutons/jetons). Dans les trois nombres, trente-trois, vingt et un, quarante-trois, on entend le repérant/appui additif et le comptant/appuyant, favorisant ainsi une stratégie s'appuyant sur ceux-ci. Le premier nombre, trente-trois, ne permet pas de distinguer une éventuelle confusion entre le nombre de plaques et le nombre de boutons seuls. Le deuxième nombre, vingt et un, est dans un champ numérique que les élèves fréquentent dès la maternelle. Il peut permettre de faire référence à une connaissance automatisée (dix plus/et dix égal vingt, ou encore la comptine dix, vingt) qui permet de retrouver les deux dizaines dans vingt (il n'y a que deux mots à compter, ce qui peut se faire sans les doigts). Ce n'est pas le cas du troisième nombre proposé, quarante-trois. Les deux derniers, vingt et un et quarante-trois, sont cependant dans les mêmes dizaines que les nombres des deux premières tâches, ce qui peut favoriser des stratégies consistant à se souvenir des correspondances quarante/quatre bandes et vingt/deux bandes.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

En ce qui concerne la première tâche, les productions des élèves relevées semblent indiquer qu'ils ont utilisé une stratégie OF° en comptant les carrés qu'ils dessinent sur leur feuille au fur et à mesure (et en les agglomérant par bande de dix). En effet, certains ont dessiné des carrés/boutons non en bandes de dix mais en bandes comportant plus ou moins de carrés/boutons (épisodes 2.1, 2.2 voire 2.5). Dans le message de l'épisode 2.5 constitué de trois bandes de neuf, il est possible d'y voir la volonté de ne commander que des bandes, le nombre de neuf carrés par bande permettant en effet de se rapprocher au plus près de vingt-huit. Ceci peut être aussi le cas des messages des épisodes 2.3 (une bande de dix avec « 2 » accolé, et une bande de dix avec « 8 » accolé) et 2.9 (une bande de dix avec « 10 » accolé, et une bande de huit). La plupart des élèves ont utilisé avec succès des productions graphiques

de type 1 avec des bandes comportant effectivement dix carrés/boutons. Cependant la seule production graphique de type 2 (épisode 2.6 de la mise en commun de la première tâche) ne comportent pas dix boutons (mais neuf). Ceci indique que le dix dans les bandes y est sous-entendu, et que les élèves ont voulu indiquer le conditionnement (bande) et le nombre de bandes. C'est en effet dans la situation Ziglotron une façon de résoudre un problème spécifique de mise en signes « production graphique »²⁹¹. Ce problème n'a pas toujours été résolu, ce qui peut se voir dans les messages des épisodes 2.3 et 2.9. Il est aussi possible que le message de l'épisode 2.3 ait été obtenu via une stratégie utilisant les chiffres de l'écriture chiffrée.

Dans la 2^{ème} tâche, identique à la première, il s'agit du nombre quarante-cinq. Cette fois-ci, les stratégies OF° que l'on peut inférer dans les trois premiers messages A, B, C échouent (épisodes 1.1, 1.2, 1.3 de la mise en commun pour la 2^{ème} tâche). Les autres stratégies résolvent le problème de mise en signes « production graphique » par des productions graphiques de type 1 (message F, épisode 1.6) ou 2 (messages I, J, K) ou hybrides (G et H). Pour les trois productions graphiques de type 2, nous pouvons inférer que les élèves ont utilisé le fait que « dans quarante, il y a quatre bandes ». La stratégie employée peut être OF vers GraC via OG, donc l'utilisation d'une désignation orale des groupements, mais ceci reste hypothétique car ils peuvent aussi se souvenir de la séance précédente (ils ont eu à faire des messages pour ce même nombre). Dans ces trois messages, il est à remarquer que l'information concernant la quantité à délivrer sous forme de bandes est soit indiquée par la matérialisation des dix carrés (message I), soit non indiquée (il n'y a que le conditionnement, la bande est vide de carrés, message K), soit indiquée par quelques carrés (message J)²⁹². Les mêmes questions se posent quant aux stratégies menant aux productions hybrides. Cependant le problème « production graphique » a été résolu différemment. Le message G est de type 1, mais nous l'avons classé dans les messages hybrides dans la mesure où il utilise des écritures chiffrées (traduction écrite de la désignation parlée) pour indiquer le nombre de carrés dans une bande (« 10 » à chaque fois). En particulier cela permet de réaliser la tâche par une production graphique de type 1 plus rapidement qu'en dessinant tous les carrés. Cependant, ce message entretient une certaine ambiguïté avec le formalisme des productions graphiques de type 2. Le message G, quant à lui, est bien hybride dans la mesure où le nombre de bande est indiqué par une écriture chiffrée (la bande comporte bien dix carrés), alors que le nombre de boutons seuls est indiqué par le dessin de cinq carrés (type 1). A noter finalement que les élèves arrivent difficilement à indiquer la différence (au sens mathématique d'écart) entre deux nombres indiqués par leur désignation parlée en France (vingt-huit et trente dans l'épisode 2.5 de la mise en commun concernant la première tâche). Ceci suggère que les problèmes décontextualisés de la structure additive ne sont pas facilement résolus par les élèves.

Il est difficile de savoir qu'elles sont les stratégies des élèves pour les 3^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} tâches, puisque que nous n'avons les réponses que de quelques élèves. Ils semblent utiliser les repérants/appuis additifs, mais il est difficile de savoir comment le passage au nombre de bandes (dizaines) a été fait (est-ce une mémorisation par rapport aux exercices précédents ?). Quand il s'agit de vérifier les réponses, un certain nombre d'élève n'utilise cependant pas à bon escient la comptine des dizaines, ils la poursuivent pour des objets qui ne sont pas des bandes.

²⁹¹ Dans ce contexte (nombres inférieurs à cent et groupements de dix), une production graphique doit donner trois informations différentes : le type de conditionnement (bande ou bouton isolé), la quantité dans une bande, le nombre de bandes et de boutons isolés.

²⁹² Dans ce dernier cas, la bande comporte quatre carrés. Ce nombre quatre est-il à rapprocher du nombre de bandes, qui est de quatre aussi ? Il nous manque des informations pour conclure.

L'enseignante n'indique de stratégie ni dans les lancements ni pendant la phase de travail des élèves. Elle utilise systématiquement un passage de GraC vers OF ou bien OG vers OF et non l'inverse, à la fois dans son unique intervention dans une phase de travail des élèves pour valider la proposition d'un élève et dans les mises en commun de toutes les tâches. En ce qui concerne les deux premières tâches, comme dans la séance précédente, le traitement des productions des élèves constitue alors systématiquement en une vérification mettant en jeu une stratégie GraC vers OF via OG. Un signifiant relais « production graphique de type 1 » de format A3 est utilisé. En tant que réplique des messages des élèves, celui-ci va alors être un signifiant « production graphique de type 1 ». Il est employé conjointement avec la comptine des dizaines²⁹³ et le plus souvent pour la validation des productions graphiques de type 1 (deux premières tâches) et les désignations orale des groupements (trois dernières tâches). Le passage d'une production graphique des élèves au matériel du tableau se fait à l'aide d'une désignation des groupements consistant à la décrire : GraC (production initiale élève) vers OG (description ou lecture « signe à signe » par un élève ou/et l'enseignante) vers GraC (utilisation du matériel élaboré par l'enseignante pour transcrire la désignation orale des groupements). Les dessins de bandes qui ont été faits par les élèves vont systématiquement être interprétés comme des bandes de dix par l'enseignante et les élèves. Dans la majorité des cas il n'y a cependant pas dix carrés de dessinés (voir le paragraphe ci-avant sur la stratégie des élèves). Il ressort que la production avec laquelle va se faire la validation n'est pas toujours fidèle à la production des élèves. En résumé, de part sa gestion de la mise en commun, la stratégie OG vers OF que l'enseignante vise (voir les trois tâches de la fin de la séance) n'est pas en jeu.

A noter en outre deux passages qui mettent en jeu des stratégies de comparaison de signifiants (OF/OFF). Pour la différence entre vingt-huit et trente, elle utilise la suite orale numérique pour surcompter de vingt-huit à trente en levant un à un deux doigts (épisode 2.5 de la première mise en commun). Dans l'épisode 1.1 de la mise en commun concernant la 2^{ème} tâche, l'enseignante veut montrer que trente (obtenu par l'élève) est inférieur à quarante-cinq. Elle utilise alors la file numérique des écritures chiffrées, en faisant constater que trente c'est après quarante-cinq. Ensuite, elle « réalise » une collection de trente doigts (avec trois élèves montrant tous leurs doigts) et de quarante-cinq doigts (avec cinq élèves, quatre montrant dix doigts, un cinquième cinq doigts (une main)). Elle demande alors de constater de manière perceptive la différence²⁹⁴.

Dans les deux dernières tâches l'enseignante utilise deux autres signifiants relais. Il s'agit d'une part des égalités $10+10+10+1=21$ (l'erreur n'a pas été relevée) et $10+10+10+10+3=43$ (épisode 3.2 de la 4^{ème} tâche et 3.2 de la 5^{ème}) et d'autre part du mot dizaine. Les deux vont servir à valider les désignations orales des élèves (OG). En particulier, les égalités telles que $10+10+10+10+3=43$ sont utilisées pour traduire la désignation orale, mettant en œuvre un lien entre une désignation des groupements et un autre signifiant, l'autre signifiant étant ici ce type d'égalité²⁹⁵. Cependant la stratégie n'est pas explicitée pour $10+10+10=21$ (l'égalité obtenue est fautive, elle a été obtenue après une invalidation de $10+1=11$), tandis que pour $10+10+10+10+3=43$, l'écriture est indiquée par un élève puis validée par un comptage des dizaines (stratégie « somme $10+10+10+10+3$ » vers OG, l'égalité complète attestant de l'exactitude du lien via la correspondance entre OG et OF faite auparavant).

²⁹³ Les difficultés sur l'utilisation de la comptine des dizaines n'apparaissent pas dans les mises en commun des deux premières tâches car l'enseignante l'utilise principalement uniquement avec les bandes de dix. Ces difficultés resurgiront dans la 3^{ème} tâche.

²⁹⁴ A noter, qu'il suffit de considérer le nombre d'élèves ici et non pas nécessairement le nombre de doigts.

²⁹⁵ A noter qu'ici les égalités produites sont moins des signifiants du nombre qu'une traduction d'un calcul ou encore une forme d'écriture hybride de type 1 (en référence à Ifrah). Cette dernière fait écho aux productions hybrides déjà rencontrées dans la séance (chaque groupement étant symbolisé par « 10 » et le symbole est répété autant de fois qu'il le faut, la quantité restante étant indiquée directement).

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Nous allons tout d'abord traiter les deux premières tâches qui sont identiques, et dont la gestion l'est aussi.

Dans les lancements, l'enseignante semble installer un mésocontrat de pseudodévolution ou de réinvestissement de connaissances car le savoir en jeu a déjà été abordé la séance précédente. Cependant le milieu installé possède des rétroactions du milieu relativement faibles. En outre les phases de conclusion sont menées par l'enseignante de telle sorte que ce ne sont pas les stratégies majoritaires utilisées par les élèves qui vont y être en jeu. Ainsi les connaissances utilisées et celles enjeu de débats ne sont pas les mêmes.

Pendant le travail des élèves, l'enseignante instaure pourtant un microcontrat de production individuelle, ce qui permet de rendre possible l'installation d'un des mésocontrats que nous avons signalé. Une seule intervention se distingue, (2^{ème} épisode de la réalisation de la 2^{ème} tâche, mettant en jeu 45). Elle y reprend la réponse correcte qu'un élève a indiquée à son binôme (connaissant les élèves, elle se doute que le deuxième n'a pas compris). Dans les mises en commun, nous retrouvons des phénomènes analogues à ceux de la séance précédente dans les passages de GraC vers OF (via OG), et non l'inverse, qu'elle utilise pour valider toutes les productions des élèves. Elle a toujours le projet de faire intervenir le lien entre un nombre de bandes et le repérant/appui additif. L'enseignante tente d'installer un microcontrat d'adhésion en s'appuyant sur certains élèves, influencée par la situation elle-même, les potentialités adidactiques étant moindre. L'enseignante affiche en outre au tableau les productions des élèves. Comme toutes les productions sont passées en revues et de surcroît classées selon qu'elles sont validées (à gauche du tableau) ou invalidées (à droite), tous les élèves ont accès à une validation (ou *a minima* une évaluation) de leur réponse. C'est aussi ainsi que sont diffusées les différentes productions graphiques (les stratégies ne le sont pas). Pour les productions graphiques de type 1 des élèves (le plus souvent erronées), l'enseignante y adjoint au tableau des bandes de dix carrés et de carrés isolés (format A3). Ce matériel est utilisé pour invalider des productions graphiques de type 1, qui sont celles qui sont en général erronées et par lesquelles la mise en commun commence. Des éléments de la stratégie GraC vers OF via OG sont sans doute utilisés par les élèves dans une stratégie OF^o (analysable comme étant à leur portée), mais nous avons indiqué que cette stratégie OF^o était moins utilisée par les élèves que dans la séance précédente, surtout en ce qui concerne la 2^{ème} tâche. Ainsi, le microcontrat ne reste pas un microcontrat d'adhésion.

Dans deux passages l'enseignante ne se contente pas d'invalider la production des élèves par le fait que la désignation parlée en France associée à la production graphique est différente de celle à obtenir. Ces épisodes surviennent à chaque fois pour invalider la réponse d'un élève. Ils mettent enjeu les deux signifiants que nous avons indiqués auparavant, la suite orale numérique pour surcompter de vingt-huit à trente en levant un à un deux doigts, la file numérique des écritures chiffrées, en lui faisant constater que « trente c'est après quarante-cinq », la « réalisation » de deux collections doigts (avec des élèves) et la constatation de manière perceptive de la différence. Le microcontrat installé est de l'ordre de l'ostension assumée. Ces signifiants (connaissances anciennes) sont alors susceptibles d'être mobilisés par les élèves.

Dans les deux dernières tâches l'enseignante utilise deux autres signifiants relais. Ils vont servir à valider les désignations orales des élèves (OG). Cependant un premier, une égalité de type $10+10+10+10+3=43$ ou $10+10+10+1=21$ est à l'initiative de l'enseignante et n'est pas nécessaire dans la séance, puisque les réponses sont validées par ailleurs. Cependant nous notons qu'il est prescrit par le manuel, et que l'enseignante l'utilise pour visualiser le nombre de dizaines dans le nombre. Elle compte en effet les dizaines à partir de cette écriture. Ceci va dans le sens de son projet. Néanmoins, elle ne le fait pas apparaître comme une stratégie pour résoudre une tâche. Le microcontrat installé est donc de l'ordre de l'ostension assumée, mais

il nous semble plus encore de l'ordre de l'information car la connaissance indiquée n'apparaît pas comme utile dans la séance. En ce qui concerne le deuxième signifiant, le mot dizaine, il survient au moment où un élève a des difficultés à concevoir que l'écriture « 10 » puisse indiquer le conditionnement en bande²⁹⁶ (épisode 3.2 de la 4^{ème} tâche). C'est la réponse que donne alors l'enseignante pour aider l'élève, « 10 » sera alors nommé une dizaine pour indiquer que les boutons/carrés sont groupés (ce qui n'est pas formulé de manière ostensible dans la séance). Le microcontrat est alors d'ostension assumé.

Ces signifiants, en particulier l'égalité qui, elle, est prescrite par le manuel, sont susceptibles d'être utilisés ultérieurement. Mais la séance ne comporte pas de phase où le savoir à retenir est mis en relief ou mis en forme. Tout se passe comme si les « entraînements » que pourraient constituer les trois dernières tâches²⁹⁷ constituaient une forme d'institutionnalisation. Ils sont en effet à l'initiative de l'enseignante (non prescrits par le manuel), elle prend majoritairement à son compte la responsabilité du savoir en jeu (en particulier elle apporte des éléments qui n'ont pas nécessairement de lien direct avec la réalisation des tâches précédentes), ils sont effectués de manière collective (dépersonnalisation) et ils comportent un certain degré de décontextualisation.

A noter que comme dans la séance 2, l'enseignante, de part sa gestion, n'a pas été amenée à voir apparaître chez les élèves des erreurs d'équivalence entre une désignation parlée en France et son correspondant écrit chiffré. Le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les productions des élèves n'est pas fait.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

Nous traitons tout d'abord des deux premières tâches.

L'enseignante n'indique pas de stratégie dans leur lancement (contrairement à la séance précédente). Les élèves peuvent être influencés par cette dernière séance, mais nous avons analysé aussi en quoi le milieu installé a pu jouer ici (nombres déjà rencontrés, temps, réalisation par binôme). Ainsi un certain nombre d'élèves (environ la moitié de la classe) n'utilisent pas nécessairement dans leur production le fait que vingt boutons peuvent se constituer en deux bandes ou quarante en quatre. Pour certains, il se peut qu'ils le sachent, tout en décidant d'utiliser une production graphique de type 1 qui ne nécessite pas *a priori* de mobiliser une telle connaissance. Pour d'autres, la production produite indique clairement qu'ils n'ont pas utilisé une telle information, qui simplifie pourtant la tâche (en particulier dans la tâche 2 du fait que le nombre en jeu soit plus grand et le temps pour dessiner relativement court, l'enseignante les presse de finir). En outre le travail étant à faire en binôme, il est possible que les productions graphiques de type 2, qui peuvent attester de l'utilisation de la correspondance entre le repérant et le nombre de dizaines, n'émanent que d'un des deux élèves (ce qui est relevé par l'enseignante dans des interactions avec les élèves). Par ailleurs, rien ne nous renseigne sur la stratégie utilisée pour faire cette correspondance. Est-ce un souvenir de la séance précédente ? Ainsi, est-il difficile de savoir comment les élèves procèdent et donc quels sont ceux qui sont susceptibles d'utiliser une interprétation multiplicative. Nous constatons néanmoins qu'un certain nombre d'entre eux dessine une bande à laquelle est accolée l'écriture chiffrée du nombre de bandes voulus. A noter que ce nombre est toujours maximal, ce qui fait penser qu'ils utilisent effectivement le repérant de la désignation parlée en France²⁹⁸.

Dans la mise en commun relative à ces deux premières tâches, il s'est agi de valider les réponses des élèves. L'enseignante utilise comme dans la séance 2 une stratégie de type GraC vers OF via OG. Or celle-ci ne met pas nécessairement en jeu une interprétation

²⁹⁶ Ce qui fait écho au problème « production graphique ».

²⁹⁷ Ils ne le sont pas car le savoir en jeu n'est pas le même que dans le début de la séance.

²⁹⁸ En conséquence la maximalité n'est pas questionnée.

multiplicative (il aurait fallu étudier la stratégie inverse). En outre, comme précédemment, certains signifiants relais utilisés, qui sont en lien avec les productions graphiques, font apparaître le nom des repérants (écrits ou dits), ce qui atteste l'utilisation par l'enseignante d'une interprétation ordinale avec repérant ou additive. En effet, ici aussi le repérant/appui est accolé à un certain nombre de bandes dessinées, après avoir effectué un comptage. Ce comptage de dix en dix n'est en outre pas compris de tous les élèves. Ce phénomène est accentué par l'intervention du matériel utilisé pour reproduire les messages des élèves, un relais « production graphique de type 1 » standardisé émanant de l'enseignante. En outre le passage des productions des élèves à ce dernier se fait grâce à une désignation des groupements, utilisée comme la version orale des productions graphiques. Le lien est cependant plus complexe. En effet, tout d'abord les élèves ont pu réaliser leur message sans utiliser cette désignation (par exemple à l'aide d'une stratégie OF°). De ce fait, entre autres, la formulation orale utilisée ne traduit pas forcément ce qui est dessiné : les bandes ne sont pas forcément toutes de dix (que ce soit volontairement ou involontairement). Par ailleurs, nous avons indiqué en quoi une désignation orale des groupements entretenait un rapport différent selon le type de production graphique. Il s'agit d'une description orale des productions graphiques de type 1, et d'une lecture « signe à signe » des productions graphiques de type 2. La production graphique de type 2 utilise des chiffres pour indiquer les coefficients d'une décomposition selon une échelle de numération²⁹⁹.

Ainsi, l'enseignante ne distingue pas les différentes mises en signes. En outre, un élément de l'interprétation multiplicative de la numération parlée en France, le passage des appuis/repérants au nombre de bandes n'est pas indiqué de manière ostensible dans la séance. En effet, cette relation intervient de manière sous-jacente, principalement dans la validation. Or celle-ci consiste à indiquer par une désignation parlée en France la quantité de boutons/carrés spécifiée par le signifiant relais « production graphique de type 1 ». Nous avons déjà signalé que c'est alors l'interprétation ordinale avec repérant qui est utilisée pour le comptage de dix en dix. Il n'est donc pas mis en évidence un lien direct entre le repérant et le nombre de bandes, utilisable pour résoudre le problème posé aux élèves.

En ce qui concerne les trois dernières tâches, comme pour la fin de la séance 2, le passage à une interprétation multiplicative est *a priori* en jeu pour les résoudre. Les réponses données par les élèves montrent à nouveau qu'une partie d'entre eux échouent. La validation se fait comme précédemment à partir des mêmes signifiants relais, ce qui n'engage toujours pas une telle interprétation. Cependant, le mot dizaine est introduit, ce qui permet une certaine décontextualisation et est susceptible de faire concevoir aux élèves les groupements comme des objets comptables. L'enseignante introduit en outre des égalités de type $10+10+\dots = \dots$ ce qui permet de poursuivre sa décontextualisation. « 10 » remplace la bande de dix dans les productions graphiques de type 1, et le mot dizaine prononcé indique qu'il s'agit de considérer le groupement, c'est-à-dire le conditionnement. Cependant, cette écriture n'est pas utilisée pour résoudre le problème mais pour vérifier la réponse. Ainsi par exemple « quatre bandes de dix et trois (boutons) » s'écrit $10+10+10+10+3$ (d'où le décompte des dizaines^{1^{ère}} dizaine, 2^{ème} dizaine, etc.), ensuite intervient un « calcul » (dix, vingt, etc.), qui mène à quarante-trois, ce qui valide la réponse. Ainsi, ici aussi, les signifiants relais utilisés font travailler *a minima* une interprétation multiplicative, la stratégie OF vers OG à partir des repérants et des comptants n'étant pas étudiée. Cependant ce qui est dit et fait peut donner l'illusion que cette interprétation est bien en jeu.

²⁹⁹ Les chiffres sont susceptibles d'être utilisés pour une écriture chiffrée de position, la position étant un moyen d'indiquer les ordres (unités, dizaines, centaines, etc. pour la décomposition dite polynomiale décimale) qui sont figurés par les élèves par des bandes.

d. Séance 4

Rappel de la tâche

Les élèves résolvent les tâches proposés dans les exercices 2 et 3 p. 70 de leur fichier.

La situation (milieu)

La situation est proche de celle prescrite dans le manuel. La tâche est indiquée en donnant la solution au premier item pour chaque exercice, sans aide. Cependant les écritures chiffrées sont lues, ce qui peut inciter à une stratégie OF vers OG, plutôt que EC vers OG³⁰⁰.

Les stratégies des élèves et de l'enseignante

Pour l'exercice 3 (2^{ème} épisode du lancement), un élève donne la réponse « en tout, un sept et un huit ». Il est possible qu'il ne sache pas désigner ce nombre avec sa désignation parlée en France, il l'a donc énoncé ainsi. Nous ne pouvons pas connaître sa procédure exacte. Le seul moment dans lequel nous avons accès à une stratégie d'élève se situe dans le 2^{ème} épisode de la réalisation de la tâche, au moment de l'interaction entre un élève et l'enseignante. L'élève a recopié la solution donnée au premier item en inversant les chiffres dans les deux lignes du message. Le traitement du second item (« 30 ») est guidé par l'enseignante. Celle-ci indique une stratégie OF vers OG³⁰¹ qui consiste à énumérer les dizaines, dix, vingt, etc., en levant les doigts (un doigt levé en plus par chaque dizaine prononcée). L'élève ne réussit pas à indiquer le nombre de « paquets de dix », puisqu'il indique la quantité globale (trente), montrant ainsi que la stratégie initiée par l'enseignante n'est pas mobilisable pour lui. L'enseignante donne la bonne réponse, trois, et la justifie en revenant à une stratégie inverse OG (trois bandes de dix) vers OF (trente), via GraC (les trois bandes de dix sont accrochées au tableau). La question à nouveau posée à l'élève qui voit les bandes de dix. Il répond correctement « trois ». La réponse a été donnée auparavant par l'enseignante et la stratégie a été découpée en plusieurs étapes (simplification de la tâche). Ainsi, rien n'assure que celle-ci ait été comprise par l'élève. En outre, ce dernier n'arrive pas à donner la réponse « zéro » attendue dans la deuxième ligne.

Dans le dernier épisode de la séance, un élève répond « trois » à la question de l'enseignante « *ici j'ai besoin de quarante boutons, je vais prendre combien de bandes, euh combien de paquets de dix ? Quarante j'en veux ?* ». L'enseignante incite l'élève à utiliser une stratégie OF vers OG, sans précision, ce que l'élève ne parvient pas à faire. L'enseignante incite ensuite à une stratégie EC vers OG via EC, « quarante c'est un quatre et un zéro », et l'élève répond correctement « quatre ».

A noter que la rapidité avec laquelle les élèves ont réussi la tâche peut indiquer qu'ils ont fait l'exercice d'une manière mécanique, au moins pour le deuxième. En outre, les erreurs que les élèves ont fait sont essentiellement des inversions de chiffre dans l'exercice 3.

Le guidage de l'enseignante et les microcontrats

Le lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les nombres en jeu dans la deuxième partie du message n'a pas fait l'objet d'une institutionnalisation ni même été évoqué comme connaissance en jeu dans les séances précédentes. La stratégie qui a été le plus évoquée étant GraC vers OF via OG, et c'est vraisemblablement OF vers GraC (via OG ou non) qui a été à l'œuvre chez les élèves pour résoudre les problèmes posés. Ainsi le mésocontrat que tente d'installer initialement l'enseignante nous semble être celui d'un réinvestissement de connaissances dans le contexte évoqué « Ziglotron ». Les stratégies ne sont pas en jeu dans

³⁰⁰ Le message à compléter est ici la transcription écrite « signe à signe » de OG (on écrit ce qu'on entend). Cependant ici elle n'est que partielle, puisqu'il faut compléter des phrases, uniquement avec des chiffres.

³⁰¹ C'est une des rares fois dans les quatre séances que cette stratégie est indiquée dans ce sens, en général c'est OG vers OF pour vérifier les réponses des élèves.

les échanges, bien que la lecture des écritures chiffrées puisse engager les élèves vers des stratégies OF vers OG. Le microcontrat pourrait être de l'ordre d'une production individuelle, mais les élèves n'ont pas de rétroaction du milieu et c'est l'enseignante qui va évaluer leurs réponses. Leur part de responsabilité dans la validation est ainsi *a priori* faible, mais ils assument entièrement la production des réponses. Pour évaluer les connaissances produites et les microcontrats réellement installés, tout dépend alors des stratégies utilisées par les élèves et de leur compréhension de celles-ci. Ainsi, certains élèves peuvent utiliser avec une certaine assurance une stratégie OF vers OG, le microcontrat peut alors être de production individuelle, les élèves n'ayant pas réellement besoin de rétroactions du milieu pour valider eux-mêmes leur réponse (utilisation de connaissances intellectuelles). Mais rien n'assure que cette stratégie ait été utilisée par tous les élèves, et s'il s'agit d'une stratégie automatique. Pour les élèves qui n'ont pas compris, l'enseignante instaure un microcontrat de tutorat qui se change au fur et à mesure des échanges (et du temps qui passe) en un microcontrat d'ostension déguisée.

Réponse à la première question : le jeu des interprétations (analyse descriptive)

L'enseignante n'indique pas de stratégie. Elle écrit avec des chiffres le nom des nombres prononcés à haute voix, l'écriture chiffrée étant ainsi la traduction de la désignation parlée en France. L'inverse, c'est-à-dire la lecture de l'écriture chiffrée, se produit dans les échanges verbaux concernant le lancement de l'exercice 3 p. 70. Il est difficile d'indiquer les interprétations en jeu du côté des élèves, car celles-ci sont inférées des stratégies qu'ils utilisent et elles ne sont pas clairement identifiables. La stratégie la plus efficace dans le premier exercice, une utilisation « directe » des chiffres de l'écriture chiffrée, n'est pas nécessairement utilisée par les élèves. Ce n'est pas celle qui a été relevée dans les séances précédentes. Dans le deuxième exercice, elle est cependant susceptible d'intervenir, ce qui permet de ne pas passer par une désignation parlée en France (les élèves ne savent pas tous lire toutes les écritures chiffrées de l'exercice 3 p. 70). De ce fait l'interprétation multiplicative de la numération parlée est éventuellement en jeu dans le premier exercice, mais moins sûrement dans le deuxième. En outre, ceci n'assure pas que celle-ci soit reliée à l'écriture chiffrée. En effet, dans le premier exercice, l'écriture chiffrée est vraisemblablement perçue comme la version écrite de la désignation parlée en France, mais la stratégie OF (=EC) vers OG n'assure pas que les écritures chiffrées soient utilisées dans cette interprétation. Autrement dit, certains élèves ainsi que l'enseignante traduisent « 36 » par « trente-six », puis ils y associent « trois paquets de dix et six », qui s'écrivent « 3 paquets de dix et 6 boutons », mais les chiffres « 3 » et « 6 » ne sont pas nécessairement liés à l'écriture chiffrée « 36 ». Dans le second exercice la stratégie « algorithmique », consistant à reporter les deux chiffres dans la première ligne pour former une écriture chiffrée, est efficace. Une justification de la raison de son efficacité favorise la possible interprétation de la numération écrite chiffrée en tant que numération multiplicative. Ce n'est pas le choix de l'enseignante. Cependant il est possible que sa pertinence soit inférée de l'exercice précédent, en tant que processus « réciproque » des stratégies qui ont été utilisées. Rien n'est cependant moins sûr, car nous constatons que les principales erreurs faites par les élèves résultent d'une inversion des chiffres. La rapidité avec laquelle la tâche est faite va dans le même sens.

3.2 Conclusion sur la séquence de Mme H.

Question 2 : quels sont les facteurs qui contribuent à la survenue des différentes interprétations ?
--

Séances 1, 2 et 3 : vers l'interprétation multiplicative ?

En utilisant les résultats des analyses précédentes, nous allons dégager des éléments pour répondre à la deuxième question.

Il est essentiel de considérer ici que les contrats mis en place par l'enseignante lui permettent de pouvoir prendre en compte l'influence des paramètres de la situation et les difficultés des élèves. Cela lui donne la possibilité d'utiliser le milieu installé pour conduire sa séance et éventuellement de le faire évoluer. Cela lui permet d'associer les élèves à la responsabilité de la production des connaissances en jeu, elle le fait principalement en reprenant et enrichissant leurs remarques. Cependant, dès le départ elle a l'intention de travailler le passage entre le repérant/appui qui est entendu dans une désignation de la numération parlée en France et le nombre de dizaines, en s'appuyant sur le contexte Ziglotron. Ceci se voit particulièrement dans les mises en commun et dans le changement de tâche qui va intervenir dans la séance 2. Ainsi, l'écrit n'est pas questionné, il est la forme écrite des désignations parlées en France. Plus précisément, il a les particularités de l'écrit (outil pour se souvenir, pour communiquer), comme tout écrit (dans un rapport identique entre l'oral et l'écrit de la langue française, que les élèves apprennent au CP). Ce sont ces conceptions, qui ont été par ailleurs confirmées dans les entretiens informels après les séances qui vont expliquer la conduite de séance de cette enseignante. Ainsi elle a une lecture personnelle de la séquence Ziglotron qui lui permet de prendre quelques libertés : dans les termes de notre recherche, nous pourrions dire que son but est de faire évoluer tout d'abord l'interprétation de la numération parlée en France vers une interprétation multiplicative, la signification des chiffres des écritures chiffrées s'en suivra alors. Elle a pour projet un itinéraire précis d'enseignement de type 1, et en particulier cela va jouer sur la tâche demandée (qui est modifiée mais jugée comme équivalente) et sur la façon de mener les mises en commun. Elle va en particulier gérer le temps en ne s'attardant pas sur certaines remarques des élèves (elle gère les incidents qui ne servent pas son projet en les ignorant ou en donnant la bonne réponse, le plus souvent en changeant d'interlocuteur). Ainsi, l'enseignante laisse une grande part de responsabilité aux élèves dans la connaissance produite surtout dans les phases de réalisation de la tâche.

Dans la séance 1, la situation est suffisante pour que certains élèves produisent des messages oraux comportant des bandes et des boutons seuls. Elle peut donc s'appuyer sur ceux-ci (essentiellement un) pour diffuser une stratégie qui, a priori, lui permet de poursuivre son but. Le fait de partir des productions des élèves amène cependant la mise en commun essentiellement sur une validation de celles-ci. La question à laquelle il faut répondre est : est-ce juste ? Or ceci conduit non pas à étudier un passage OF vers OG, qui permet un apprentissage de l'interprétation multiplicative, mais un passage OG vers OF qui ne met en jeu que très faiblement cette interprétation. En effet, dans cette validation des productions, les interprétations anciennes disponibles sont suffisantes pour qu'ils comprennent *a priori* : ce sont les interprétations ordinales (avec repérant) et additives. Cependant, l'enseignante peut avoir l'impression que l'interprétation multiplicative est en jeu. A noter néanmoins que certains ont essayé d'obtenir un message en termes de plaques/bande (de dix), mais ils n'y étaient pas contraints par la situation, et en fait peu s'y sont frottés.

Le même phénomène intervient dans la séance 2. En effet, malgré le changement de tâche, la séance permet dans l'esprit de l'enseignante d'atteindre son objectif, puisqu'elle demande explicitement une stratégie OF vers GraC via OG : pour elle le passage OF vers OG est donc en jeu. En outre le changement de variable (livraison comportant au maximum neuf boutons) peut renforcer cette opinion. Qui plus est, les conceptions de l'enseignante sur la différence écrit/oral ne lui permettent pas d'être alertée sur les modifications que peut engendrer le changement de type d'écrit demandé dans la tâche. Or, nous avons indiqué que la situation installée va permettre aux élèves de résoudre la tâche par une stratégie OF°, consistant à dessiner le nombre de carrés (accolés par dix) pour obtenir le nombre adéquat grâce à un

comptage de type OF. La plupart des élèves ne vont donc pas mettre en jeu d'interprétation multiplicative. En outre cette stratégie est plus accessible aux élèves, et donc donner l'illusion à l'enseignante qu'ils n'ont pas eu de difficultés sur le passage OG vers OF. C'est pourquoi, quand elle propose en fin de séance ce qui pour elle est un réinvestissement des connaissances en jeu, et une forme d'institutionnalisation (décontextualisation), elle est surprise par la faible réussite des élèves. Ceci pourrait l'alerter par la suite, mais dans la séance 3, à nouveau des productions graphiques sont demandées, et il se reproduit des phénomènes identiques.

En ce qui concerne cette séance 3, pour les deux premières tâches, le milieu a changé, et cette fois-ci, en particulier parce que les élèves n'ont plus vraiment le temps de faire une production graphique de type 1. Il est alors possible que l'interprétation multiplicative ait été cette fois-ci en jeu dans la réalisation des deux premières tâches. La stratégie employée par les élèves n'est cependant pas nécessairement une stratégie OF vers OG consistant à dénombrer les dizaines à partir des repérants, car ils ont pu se souvenir de la correspondance quatre bandes/quarante des séances précédentes. Les différentes productions ne peuvent renseigner sur la stratégie. En outre, l'enseignante demande que le travail se fasse à deux. Ceci peut s'expliquer en partie du fait que cela lui permet de diviser par deux le nombre de productions à passer en revue (gestion du temps). Le biais étant qu'il est possible qu'un des deux élèves n'ait pas réalisé réellement la tâche, surtout qu'à cet âge les élèves ont des difficultés à travailler de manière coopérative. Ce changement de milieu est cependant difficilement repérable car il est dû à des « micro » changements. L'enseignante a l'impression, comme dans la séance précédente que l'interprétation multiplicative est en jeu, et c'est ici plus vraisemblablement le cas alors que de son point de vue rien n'a changé. Ce qui peut expliquer que presque rien ne change dans les mises en commun, qui consistent encore à valider les productions des élèves, c'est donc toujours une stratégie GraC vers OF qui est en jeu et non l'inverse. Ceci ne met pas l'interprétation multiplicative réellement en jeu et ce n'est toujours pas la stratégie employée par les élèves. Il faut tout de même indiquer qu'un nouveau signifiant fait son apparition, le matériel « production graphique de type 1 » standardisé. Il est utilisé afin de rendre visible à tous les productions des élèves, et il permet ainsi de faciliter la tâche de validation collective de l'enseignante, du fait en particulier que des connaissances anciennes peuvent être utilisées. En effet, la production graphique de type 1 est plus proche de la commande à délivrer (c'est d'ailleurs elle qui a été le plus employée par les élèves dans la séance précédente), donc susceptible d'être la plus compréhensible des élèves. Ici sont prégnantes ces commodités pratiques (présenter à tous, utiliser un matériel facilement identifiable qui permet de réinvestir des connaissances anciennes) qui permettent d'arriver au but de l'enseignante dans la mise en commun : valider les réponses des élèves. Cependant il entraîne les glissements que nous avons indiqués par ailleurs, glissements qui nous semblent encore ici difficilement perceptibles par l'enseignant. Ce signifiant peut donner l'illusion d'un travail mettant en jeu l'interprétation multiplicative, via une désignation orale des groupements que l'enseignante est amenée à utiliser du fait de pouvoir parler des productions des élèves. Ceci peut expliquer la survenue de la désignation orale des groupements qui mène presque nécessairement à la confusion entre les différentes productions graphiques, toutes assimilées à une désignation orale des groupements.

L'irruption de certains signifiants (les dessins de bandes vont systématiquement être interprétés comme des bandes de dix par l'enseignante à cause de leur traduction orale par OG), et le changement de consigne (GraC au lieu de OG) ne va pas lui permettre de se rendre compte des stratégies et difficultés des élèves (en particulier la stratégies OF° et le problème «production graphique »).

En ce qui concerne les trois dernières tâches, des phénomènes analogues se répètent par rapport à la fin de la séance 2 et au début de la séance : utilisation de signifiants pour valider des réponses, qui ne mènent pas nécessairement à étudier les stratégies utilisées par les élèves

ni à mettre réellement en jeu l'interprétation multiplicative. Les raisons de ce déroulement nous semblent les mêmes. Cependant, le mot dizaine est introduit, et ce en réponse à une question posée par un élève sur le fait que dans l'écriture « 10 », le fait de demander des bande n'est plus visible. Ainsi, l'enseignante est sollicitée par un élève sur un problème qui n'était pas apparu du fait de la gestion précédente (validation avant tout des réponses, utilisation des désignations orales des groupements qui ne permettent pas de voir le problème de mise en signes « production graphiques »). Notons alors que les contrats qu'elle met en place permettent aux élèves de poser des questions, certaines sont cependant ignorées ou la réponse est donnée sans explications³⁰². Sa réponse ici est « dizaine ». Quels sont les facteurs qui l'ont amenée ? L'utilisation de l'écriture « 10 » est produite à l'initiative de l'enseignante. Elle est prescrite dans cette séance par le manuel dans des égalités de type $10+10+10+10+2=42$. Nous pouvons alors supposer que l'enseignante suit ici les prescriptions car cela va servir son projet consistant à relier le nombre de dizaines (maximum) dans un nombre et le nombre de bandes de dix dans les tâches demandées aux élèves. En effet, cela va lui permettre de considérer les « 10 » comme des objets unitaires. Cependant, nous avons signalé que cela amène toujours à utiliser l'interprétation multiplicative *a minima*, dans le sens où, là encore, l'égalité est utilisée après que la désignation orale des groupements a été donnée. Ceci est à rapprocher du fait qu'il s'agit encore dans la mise en commun de valider les réponses, l'égalité vient donc comme un moyen de vérifier la réponse et non comme une stratégie pour réussir la tâche. Cependant ce qui est dit et fait peut donner l'illusion que cette interprétation est bien en jeu. Pour l'enseignante, comme l'écriture chiffrée est la traduction écrite de la désignation parlée en France, ce qui est cohérent avec un itinéraire d'enseignant de type 1, il est inutile de questionner en elle-même l'écriture chiffrée. C'est ainsi que nous expliquons que l'enseignante a, selon elle, fait le lien prescrit par le manuel, le lien entre les chiffres et les productions des élèves pouvant être de son point de vue abordé dans la séance suivante.

Séance 4 : la place de l'écriture chiffrée

D'après notre analyse *a priori* de la situation, rien n'assure que les élèves utilisent l'écriture chiffrée dans une interprétation multiplicative. Mais ceci est renforcé par le projet de l'enseignante et sa conception de l'écriture chiffrée. En effet, si nous utilisons les termes de la thèse, son projet consiste en ce que les élèves utilisent la numération parlée en France dans une interprétation multiplicative, c'est-à-dire qu'ils soient capables d'utiliser les repérants/appuis pour en inférer un nombre de paquets de dix. En outre l'écriture chiffrée est la traduction écrite des désignations parlées en France des nombres. Ainsi, la stratégie d'association mécanique des chiffres en jeu dans les deux parties du bon de commande est donnée finalement à la fin de la séance. Elle permet de réussir l'exercice et peut apparaître à l'enseignante comme si elle était une preuve de l'emploi de l'interprétation multiplicative et donc que son projet a été réalisé. Non seulement la stratégie « mécanique » ne peut la détromper, mais rien n'assure dans la séance telle qu'elle a été proposée par le manuel que les élèves aient utilisé des éléments de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée³⁰³.

4. Conclusion du chapitre

Nous avons choisi d'analyser l'activité de l'enseignant comme celle de la gestion d'un environnement dynamique et ouvert, (Rogalski, 2003). L'analyse tente de rendre compte de la

³⁰² Souvent en changeant d'intervenant, voir la gestion des incidents dans le découpage des déroulements donnés en annexe.

³⁰³ Nous utilisons interprétation de référence, plutôt qu'une multiplicative, mais dans cette séance les propriétés en jeu sont communes aux deux.

complexité du « réel » et notre approche est une façon d'appréhender cette complexité. Elle correspond à un découpage de la réalité qui ne peut aborder tous ses aspects. Nous allons mettre en évidence différents liens entre différents facteurs, autres que strictement didactiques, ceux que l'approche ergonomique permet de prendre en compte. Nous allons tout d'abord dresser un bilan favorisant une analyse selon les composantes cognitive et médiative, puis nous faisons appel à des facteurs qui concernent les composantes personnelle, institutionnelle et sociale. Sous l'hypothèse admise de la cohérence des pratiques observées, il s'agit de retrouver cette cohérence dans l'activité de l'enseignant que nous avons analysée.

4.1 Bilan selon les composantes cognitive et médiative

Nous allons nous référer aux analyses précédentes sans en reprendre les détails. Nous présentons de manière très synthétique un bilan pour mettre en évidence les traits qui nous sont apparus comme caractéristiques, du côté des élèves, du côté de l'enseignant et du côté du savoir, du déroulement « cognitif ».

a. Des ressemblances

Les tâches proposées engagent des activités de comptage.

Le plus souvent, même si ce n'est pas nécessaire ou demandé, lorsqu'ils sont en présence d'une collection d'objets figurés, les élèves la dénombrent et ils la dénombrent le plus souvent par un comptage un à un. Quelques-uns utilisent un comptage de dix en dix. Pour résoudre des problèmes d'énumération, ils réinvestissent parfois des techniques introduites auparavant dans les deux classes, comme un marquage des objets déjà comptés. La séance en classe leur apparaît souvent, au moins initialement, comme un entraînement au comptage. Un nombre significatif d'entre eux la considère encore comme une tâche problématique, les problèmes d'énumération étant encore prégnants. Ce constat est renforcé par le champ numérique abordé. Il est nouveau en ce qui concerne cette séquence, et c'est d'ailleurs la différence principale que les élèves perçoivent entre les séances « petit » Ziglotron du début d'année et « grand » Ziglotron.

Des différences selon des élèves, un même problème conceptuel

Peu d'élèves réussissent d'emblée à formuler un message en termes de paquets de dix et de boutons seuls. Nous avons signalé les difficultés conceptuelles en jeu. En outre, c'est presque exclusivement à partir de la désignation parlée en France qu'ils formulent le message. Ceci peut être en partie lié au fait qu'ils comptent les objets de la collection. La désignation parlée en France qu'ils obtiennent constitue ainsi une première étape de la stratégie à utiliser. En conséquence, le nombre est moins traité dans son aspect signifié(s) que dans son aspect signifiant, voire représentatif (d'une certaine manière le signe est traité sans nécessairement le relier à son sens). Les situations installées dans les séquences observées n'ont pas contraint les élèves à faire des groupements sur la collection, et ceci malgré, par exemple, les efforts de Mme B. pour aller dans ce sens.

Une gestion de la classe qui permet à l'enseignant d'être informé des connaissances des élèves ...

Ceci est en partie une conséquence d'un choix méthodologique en ce qui concerne les enseignants. Nous voulions observer des classes dans lesquelles la responsabilité du savoir pouvait être partagée. Nous pouvions ainsi analyser les différents jeux des interprétations du côté des élèves et de l'enseignant, dans une situation qui *a priori* pouvait mettre en exergue leur complexité. C'est ce que nous avons observé effectivement dans les deux classes. Ainsi en particulier les deux enseignantes sont informées de l'échec persistant de certains élèves dans certaines tâches à accomplir.

... et des micro-contrats qui se ressemblent

Ils se ressemblent en particulier selon le découpage que nous avons fait : « lancement », « réalisation de la tâche par les élèves » et « mise en commun ». Ceci n'est pas surprenant car ce découpage se base sur des dissymétries de l'activité des élèves et de l'enseignant et du partage de la responsabilité du savoir. Cependant, nous remarquons qu'à un certain niveau d'analyse ils restent semblables. En effet, jusque dans la séance 3, les enseignantes « résistent » le plus souvent à donner des aides qui faciliteraient la tâche, bien qu'elles soient informées des difficultés des élèves. Ceci perdure bien que des tâches nouvelles aient été introduites par les deux enseignantes, tâches qui ne favorisent pas nécessairement l'installation d'une situation adidactique. En outre, dans les situations de communication privée entre élèves (en binôme), les deux enseignantes veillent tout particulièrement à ce que l'élève le plus en difficulté puisse apprendre. Elles interviennent de manière plus importante, à l'image de la gestion d'une phase collective.

Aucune stratégie n'est l'objet d'institutionnalisation, ni même mise en relief de manière ostensible. D'une manière générale, il n'y a pas de mise en forme explicite du savoir. Les enseignantes s'attachent surtout à (in)valider les productions des élèves et ceci la plupart du temps via des microcontrats d'adhésion. Dans les deux classes, l'objectif « minimal » en classe est atteint finalement à la fin de la dernière séance, puisque tous les élèves arrivent à « réussir » l'exercice et que cette réussite est évaluée (positivement) par l'enseignante.

L'utilisation de signifiants « relais »

Certains signifiants relais utilisés sont directement en lien avec le contexte Ziglotron. Ceux qui sont en commun dans les deux classes sont essentiellement oraux : bande de (dix), paquets de (dix), plaque de (dix), les mots bouton/gommettes.

D'autres signifiants peuvent être employés de manière décontextualisée comme la file numérique des écritures chiffrées ou les doigts des mains. Les égalités du type $10+10+10+10+2=42$ et $20+8=28$ ou simplement une somme $10+10+10$ ou encore une juxtaposition de « 10 » sans signes opératoires « 10 »/ « 10 »/ « 10 », ont un statut particulier, puisqu'elles sont prescrites par le manuel. Les élèves ne les utilisent pas et c'est l'enseignante qui provoque leur survenue, changeant ainsi le contrat habituel. En outre, elles ont une forme qui ne rappelle pas le contexte Ziglotron, mais, à la différence des signifiants précédents, elles ne sont pas d'un emploi usuel par les élèves. Elles ont une utilité spécifique dans la séquence, une « matérialisation » du passage à une interprétation multiplicative. Cependant cette ressource n'a pas été réellement exploitée par les enseignantes, c'est ce que nous abordons dans ce qui suit.

Des « occasions perdues » pour l'interprétation multiplicative ?

Les enseignantes sont amenées la plupart du temps à valider, individuellement ou collectivement, les productions d'élèves. Les stratégies qui sont alors à l'œuvre mettent en jeu l'interprétation multiplicative *a minima*. A certain moments cependant, des élèves indiquent des bribes de stratégie qui permettraient de mettre en jeu cette interprétation. Ces occasions ne sont pas saisies par l'enseignante. De même les signifiants relais ne sont pas exploités pour indiquer de stratégie, mais pour vérifier ou (in)valider les réponses, y compris $10+10+10+10+2$ et les autres écritures chiffrées faisant apparaître des « 10 ».

Un même jeu complexe et non explicite des interprétations (1^{ère} question)

Nous ne revenons pas sur les réponses apportées à la première question. Nous soulignons cependant que dans les deux classes les interprétations employées par les élèves ou/et l'enseignante ne sont pas perçues par les acteurs nécessairement de la même façon. De plus, les interprétations n'interviennent pas toujours à bon escient par rapport aux objectifs cognitifs de la séquence. En particulier, l'interprétation ordinale (avec repérant ou non) est

prégnante. En outre, elles vont surgir de manière différente selon le moment. Nous pouvons distinguer en particulier les échanges publics dans les phases collectives, c'est-à-dire quand tous les élèves sont tenus d'être concernés simultanément. Par ailleurs, l'écriture chiffrée est toujours utilisée comme forme écrite des désignations parlées, y compris dans l'utilisation des signifiants relais et au moment où ses chiffres sont distingués. Ainsi, par exemple, la file numérique est la forme écrite de la comptine numérique, alors que « 10 », « 20 » et « 42 » sont les traductions écrites de « dix », « vingt » et « quarante-deux ».

Les enseignantes ont toutes les deux modifié la séquence du manuel, mais pas de la même façon.

b. Des différences

Les difficultés des élèves

Mme B. insère des séances intermédiaires entre les séances, et propose des tâches différenciées dans une même séance. Finalement, dans la séance 3, tous les élèves proposent des productions correctes au moment de la phase de bouclage.

Mme H. passe significativement plus du temps auprès des élèves en difficulté qu'auprès des autres, en particulier pendant la réalisation de la tâche. Ils sont en outre sollicités pendant les mises en commun, tout au moins au début de celles-ci. Elle prend l'initiative de proposer des entraînements de manière plus systématique, en général en fin de séance.

La mise en relief du savoir en jeu

Aucune mise en forme du savoir n'intervient réellement dans les deux séquences observées. Cependant certains éléments afférents au savoir en jeu sont mis en avant. Ils diffèrent suivant les classes et la manière de les faire ressortir.

Mme B. ne met ces éléments en relief qu'à la fin des quatre séances. Plusieurs indices permettent aux élèves (et au chercheur) de voir qu'il s'agit d'un savoir à retenir. Elle propose dans la séance 4 une tâche de comparaison des messages écrits qui ont été produits dans les autres séances, ce qui peut ainsi indiquer qu'il s'agit de faire un bilan. Le milieu matériel de la situation initiale est absent, ce sont donc des preuves intellectuelles qui sont attendues et c'est l'enseignante qui a prévu un matériel spécifique. La résolution de la tâche est collective, l'enseignante se trouve devant le tableau, les élèves sont à leur place usuelle et n'en bougent pas. Ainsi elle montre une intention didactique qui se traduit par un changement de contrat dans la répartition de la responsabilité de la connaissance produite. Néanmoins aucune mise en forme n'est réellement faite. Pour Mme H., l'enjeu de savoir consiste en une légitimation/démonstration du lien entre les chiffres de l'écriture chiffrée et les nombres en jeu dans une désignation des groupements. La désignation parlée en France peut apparaître comme un des moyens de légitimer ce lien. Dans la séance 4, elle tente aussi d'établir un lien « direct » en superposant des bandes de « dix » à la file des écritures chiffrées.³⁰⁴

Pour Mme H. ce sont des « savoirs-outils » qui sont signifiés aux élèves et ceci tout au long des séances et pas uniquement dans la dernière. Autrement dit le savoir consiste en la réussite à certaines tâches. Elle le fait via des séances d'entraînement en fin de séance, ce qui peut tenir lieu d'une indication de ce qu'il faut savoir utiliser. Il s'agit alors de savoir passer d'une désignation parlée en France à une désignation des groupements, de manière « intellectuelle » et ceci de manière décontextualisée. Les séances ont permis de fournir implicitement des indications aux élèves sur la stratégie à adopter, notamment l'utilisation de la comptine des

³⁰⁴ Les bandes sont disposées à la suite de l'une et de l'autre, et recouvrent la file numérique au fur et à mesure. Des carrés sont ensuite ajoutés.

dizaines et du repérant entendu. Cependant aucune stratégie n'a été institutionnalisée ni même réellement exposée puisque ce sont les stratégies de validation OF vers OG (ou/et GraC) qui ont été l'enjeu des débats collectifs. Pour Mme H, les exercices proposés dans la séance 4 sont dans la continuité de ce qui s'est passé dans les autres séances. Ils consistent toujours en des entraînements qui indiquent aux élèves la nature des tâches qu'ils doivent réussir, et donc la nature des connaissances à mobiliser. Pour Mme H., l'enjeu de savoir est la réussite d'un passage entre une désignation parlée en France et une désignation des groupements. L'écriture chiffrée étant la forme écrite de la désignation parlée en France, elle permet alors de réaliser de manière économique ce passage (cf. séance 4).

Des relais différents

Mme H utilise un matériel « standardisé » qui est déplaçable (donc ré-employable pour chaque production discutée) et peut s'afficher au tableau. Il est à la fois proche des productions graphiques de type 1 des élèves et des conditionnements dont dispose initialement le « vendeur ». Ce matériel favorise une certaine décontextualisation, mais met aussi en valeur les productions de type 1. L'enseignante ne les utilise pas pour favoriser une interprétation multiplicative de la numération parlée (les bandes sont « comptées », dix, vingt, trente ; le passage à trois bandes n'est pas particulièrement valorisé). Le mot dizaine est introduit, ce qui permet aussi une certaine décontextualisation. Ici encore cependant le passage entre « dix, vingt, trente » et trois dizaines n'est pas mis en exergue. A noter aussi l'utilisation d'un tableau 10x10 des écritures chiffrées qui n'est pas exploité pour mettre en relief le nombre de dizaines visibles en comptant le nombre de rangées.

Mme B utilise des groupements sur les collections figurées, soit au tableau, soit sur la fiche. Ils ne sont cependant pas réellement exploités en tant que stratégie pour réussir le problème. A nouveau ils permettent essentiellement de valider certains messages d'élèves.

4.2 Eclairage sur les autres composantes

Après les composantes cognitive et médiative, nous faisons appel à des éléments ayant trait aux composantes personnelle, institutionnelle et sociale. Nous allons donc tenir compte d'un certain nombre de paramètres qui étaient en germe dans nos analyses précédentes mais qui apparaissent de manière plus évidente dans une analyse croisée.

Dans les réponses à la deuxième question, nous avons identifié des facteurs liés aux connaissances anciennes des élèves, en particulier dans les utilisations respectives de la numération parlée en France et de l'écriture chiffrée. Nous avons aussi pu donner un aperçu du poids des tâches proposées et de la situation installée ainsi que des nécessaires utilisations de signifiants pour communiquer, selon les différents contrats installés, en particulier dans la phase de bouclage. Ceci était d'une certaine manière envisagé dès l'analyse didactique *a priori*, même si nous ne pouvions connaître leur poids relatif en classe. D'autres facteurs sont apparus en filigrane : le temps, la perception de l'enseignante sur les connaissances en jeu, la gestion des élèves en difficultés, etc. Nous allons les mettre en évidence en répondant à trois questions permettant une lecture complémentaire des ressemblances et différences que nous avons relevées.

Pourquoi les stratégies qui permettraient de servir l'objectif cognitif de la séance, c'est-à-dire en particulier OF vers OG ne sont explicitées dans aucune des deux classes ?

Pourquoi la dernière séance mène-t-elle dans les deux classes à une réussite globale des élèves qui est évaluée positivement par les deux enseignantes, mais interprétée différemment quant à la réussite de l'apprentissage visé ?

Comment expliquer certaines différences constatées (introduction de séances supplémentaires, tâches modifiées, signifiants relais) ?

Le rôle de l'enseignant : un même métier, des conceptions personnelles

L'explicitation d'une stratégie servirait les objectifs cognitifs de la séance et, en outre, pourrait apparaître comme pertinente aux élèves pour résoudre le problème posé. Il nous semble que la volonté des deux enseignantes de laisser une part de responsabilité aux élèves dans la production de la connaissance les engage à ne pas indiquer de stratégie si celle-ci n'est pas formulée par un élève. Mais deux autres facteurs peuvent aussi contribuer à ce constat. Les enseignantes ont le souci de permettre aux élèves en difficulté de ne pas « décrocher » pendant la séance. Or, en considérant leurs stratégies et productions, il est possible qu'elles estiment qu'ils ne sont pas prêts à comprendre l'utilité d'une stratégie explicitée, voire même à l'appliquer. Elle pourrait leur apparaître comme artificielle. D'une certaine manière l'urgence est qu'ils arrivent à un premier stade, celui de la validation : comprendre que leur proposition est erronée. Un autre argument vient du fait que la classe est un collectif. Des moments collectifs sont prescrits par l'institution et relayés par le manuel, mais ils font aussi partie des habitudes du métier³⁰⁵. Or dans ces moments, les signifiants et les débats en jeu doivent être compris de tous. Ceci oblige à des choix qui ne favorisent pas nécessairement une exploration des stratégies qui peuvent être jugées comme trop personnelles, ni des signifiants estimés hors de portée des élèves. Ceci peut contribuer ainsi à expliquer pourquoi les écritures du type 10+10+10+10+2 ne sont finalement pas réellement exploitées. Ainsi, comme les connaissances anciennes des élèves ou/et les tâches qui leur sont proposées ne les amènent pas facilement à utiliser les stratégies attendues (OF vers OG), celles-ci ne sont pas étudiées. En ce qui concerne la deuxième question, notre analyse *a priori* montre en quoi il n'est pas surprenant que les élèves réussissent tous aux exercices de la dernière séance, une stratégie « mécanique » accessible à tous les élèves étant efficace. L'enseignante indique cependant aux élèves y reconnaître que la connaissance à apprendre a été construite. Il nous semble qu'à la fin de la séquence, il est important que le contrat « minimal » entre un enseignant et un élève soit réalisé. Ceci explique ainsi certaines ressemblances, mais n'explique cependant pas tout, en particulier des différences que nous avons relevées.

L'influence des conceptions des enseignants sur le savoir (à enseigner)

Même si l'enseignant sait que l'emploi d'une stratégie OF vers OG favorise potentiellement l'apprentissage visé plus que ne le fait une stratégie OG vers OF, il nous semble que ce sont les facteurs avancés ci-avant qui pèsent de manière plus importante sur le choix des stratégies qui vont être en jeu dans les moments collectifs. Par contre, c'est surtout pour fournir des éléments de réponse à la deuxième question ci-dessus que la conception du savoir qu'a l'enseignant peut intervenir. En effet, Mme B doute que la réussite des élèves aux exercices prouve que la connaissance visée est en jeu. Elle n'est pas « sûre » que sa démonstration ait été comprise. Elle a moins délégué la responsabilité du savoir, ce qui n'est pas son habitude ni la conception qu'elle a de l'apprentissage et donc de l'enseignement. Or, pour elle, la connaissance en jeu se situe à ce niveau. Autrement dit, si les élèves savent pourquoi une stratégie « automatique » est pertinente, ils peuvent l'utiliser, et cette utilisation atteste alors

³⁰⁵ Ajoutons que dans la TSD ils sont nécessaires à l'institutionnalisation, en particulier pour la dépersonnalisation des connaissances.

qu'un sens est donné à celle-ci. Le lien chiffres de l'écriture chiffrée/chiffres de la désignation des groupements peut alors être utilisé, même de manière automatisée, puisque la démonstration de sa correction aura été faite.

Mme H. a, quant à elle, entraîné les élèves à des exercices OF vers OG, qui met *a priori* effectivement en jeu l'interprétation multiplicative visée. Or les entretiens post-séances, mais aussi notre analyse, indiquent que pour Mme H l'écriture chiffrée est avant tout la forme écrite de la désignation parlée en France. Ainsi, elle peut supposer que la réussite aux exercices de la séance 4, même en utilisant directement les chiffres, convoque chez les élèves une interprétation multiplicative. Ceci explique qu'elle estime avoir atteint l'objectif cognitif de la séquence. Par ailleurs, elle sait pouvoir compter sur « des entraînements futurs qui permettent de consolider les connaissances des élèves ». Ceci fait le lien avec la suite.

Le temps, la gestion de l'hétérogénéité, l'âge de élèves

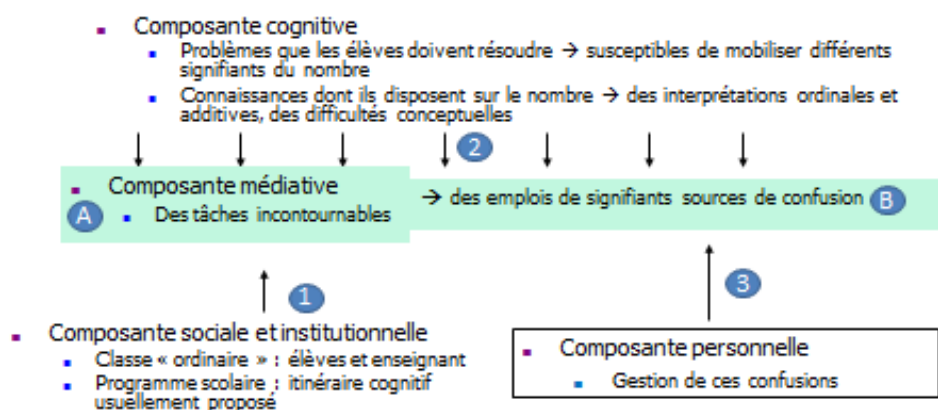
Ce sont en effet ces éléments qui, du fait de la difficulté de certains élèves à réussir les tâches, nous semblent provoquer en particulier un traitement relativement long des séances. Celles-ci sont cependant nécessairement à limiter dans le temps, du fait de recommandations et contraintes institutionnelles qui sont traduites dans la pratique du métier, mais aussi de l'âge des élèves. L'âge influe non seulement sur la durée des séances mais aussi sur les possibilités d'expression et sur les capacités de concentration. Les séances proposées ont ainsi été estimées par les enseignantes comme trop longues. Elles ont cependant tenté de préserver des contrats dans lesquels la responsabilité du savoir est partagée. Ceci peut éclairer ainsi le fait que les séances ne se terminent pas en général par une mise en relief du savoir, mais que celui-ci est plus volontiers repris en début de chaque séance. Par ailleurs, les connaissances des élèves influencent sensiblement la durée qu'il leur faut pour réaliser les tâches proposées (nous pensons aux difficultés conceptuelles). L'hétérogénéité de ces connaissances entraîne alors une disparité chez les élèves de la durée à réaliser les tâches. Ceci peut expliquer de nombreux rappels à l'ordre (malgré un climat général de travail), mais aussi certaines décisions. Celle par exemple prise par Mme B. d'introduire des séances intermédiaires et de proposer un étayage. En ce qui concerne Mme H, elle sait pouvoir compter sur « des entraînements futurs qui permettent de consolider les connaissances des élèves ». En outre elle passe significativement plus de temps auprès des élèves en difficulté.

4.3 Mise en forme de certains résultats

Différentes interprétations sont susceptibles d'être relevées pour un même signifiant, dans un même moment et pour des acteurs différents. En conclusion à ce chapitre nous proposons de comprendre certains éléments dégagés en insistant sur des moments particuliers, les phases collectives, dans lesquelles il nous ait apparu que les enseignants étaient contraints par certains paramètres de la situation (au sens large). Nous allons utiliser les composantes de la double approche avec deux schématisations sous la forme de tableau.

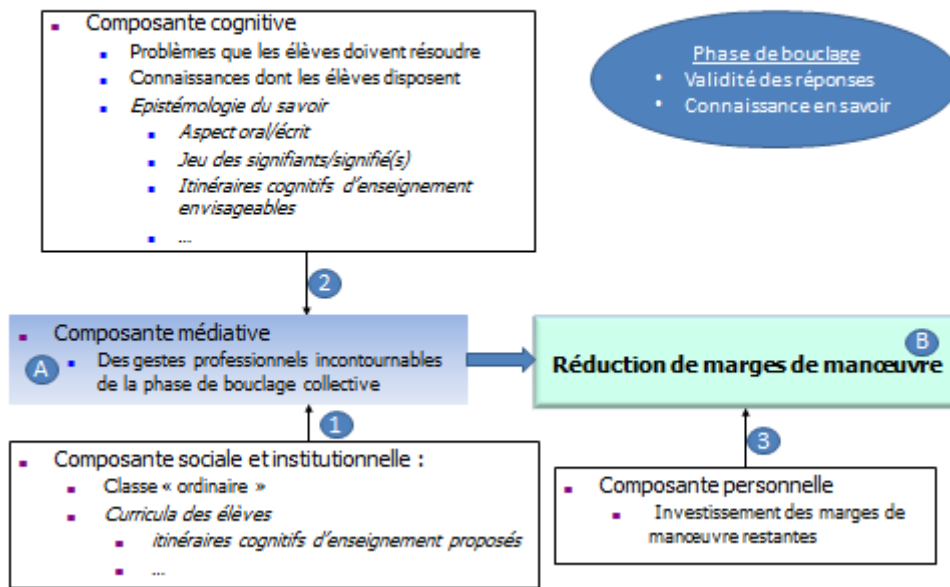
Tableau 1

Compréhension des déroulements en classe : des emplois de signifiants sources de confusions lors de tâches incontournables de l'enseignant



Ce premier tableau met le focus sur la survenue de confusions relatives à la notion enseignée. Les contraintes analysables par la composante institutionnelle (enseigner à tous les élèves d'une classe selon des prescriptions institutionnelles, sans en délaisser aucun) entraînent (flèche 1) que les enseignants doivent réaliser des tâches incontournables (repère A) de leur métier dans des moments collectifs (donner des informations sur la validité des réponses et procédures, faire le lien avec le savoir et ceci indépendamment de la manière de s'y prendre ...). Les enseignants vont devoir alors utiliser des signifiants qui sont disponibles aux élèves ou/et susceptibles d'être mobilisés dans les tâches qui leur sont proposées (composante cognitive). Ceci est alors (flèche 2) source de confusions (repère B). Le schéma met l'accent sur le fait que les enseignants (composante personnelle) doivent composer avec cette situation (flèche 3).

Tableau 2 L'effet bouclage



Ce deuxième tableau met l'accent sur la réduction de marges de manœuvre à des moments particuliers des déroulements en classe, réduction qui va alors favoriser des confusions dans le contexte de l'enseignement de la numération aux CP. Ces moments sont analysables par l'outil « phase de bouclage » que nous avons constitué dans la thèse (voir chapitre 6, paragraphe 2.2 b). Nous rappelons simplement ici que sont en jeu deux niveaux de conclusion imbriqués, et que l'aspect collectif est essentiel. Le mécanisme est le même que pour le tableau précédent. Cependant, dans celui-ci nous retenons les éléments de la composante cognitive qui sont susceptibles de jouer sur la réduction de marges de manœuvre et non sur ceux qui vont entraîner des occurrences de confusion. Nous nommons ce mécanisme l'« effet bouclage », afin de ne pas mettre l'accent sur les produits éventuels au niveau cognitif. Il est en effet envisageable que des déroulements en classe puissent être analysés comme relevant de cet effet, sans que ceux-ci ne génèrent des confusions.

Que ce soit relativement au tableau 1 ou au 2, la question se pose de la généralisation de ces résultats, de cet « effet ». Peut-on les considérer comme une forme de contrainte du métier ? Nous ne traitons pas cette question, mais il nous semble que notre analyse a montré qu'ils pourraient être rencontrés dans l'enseignement « ordinaire » pour d'autres classes de CP, d'autres niveaux que le CP, voire concerner d'autres notions à enseigner, celles comportant certaines caractéristiques communes à l'écriture chiffrée (nous pensons par exemple aux fractions).

CHAPITRE IX
Perspectives de recherche :
propositions pour une ingénierie didactique

1. Position du problème d'enseignement.....	332
2. Une proposition pour l'enseignement.....	334
2. 1 La situation	334
2.2 Présentation détaillée des étapes	338
a. Les trois premières étapes : la nécessité d'organiser, le choix de l'organisation	338
b. Les deux dernières étapes : la nécessité d'écrire, le choix de l'écriture.....	345
3. Analyse et perspectives de recherche	346
3.1 Analyse didactique de la proposition	346
a. Analyse de la séquence proposée	346
b. Les écueils, les limites.....	348
c. La position de la séquence dans une progression.....	353
3.2 Des questions pour la recherche	355
a. Bilan de l'analyse	355
b. Les questions relatives à la proposition.....	356
c. Les questions générales relatives à l'itinéraire.....	356
d. Le problème de l'évaluation de l'itinéraire et de la proposition	357

Ce neuvième et dernier chapitre de la thèse est à part, puisque son rôle n'est pas d'établir des résultats, mais de dégager des perspectives de recherches à partir de l'ensemble du travail effectué. Après avoir dressé dans un premier temps un bilan des différents apports de la thèse dans l'optique de ce chapitre (§1), nous allons exposer une proposition (§2) qui sera analysée afin d'élaborer des questions qui se posent pour de futures recherches (§3).

1. Position du problème d'enseignement

Nous allons reprendre les résultats obtenus jusqu'à présent en orientant leur présentation par rapport à l'objectif de ce dernier chapitre.

La première partie de la thèse nous a permis de distinguer les numérations en jeu en CP d'un point de vue des principes mathématiques sous-jacents, mais aussi de la mise en signes de ces principes. Nous avons dégagé une interprétation de l'écriture chiffrée que nous avons qualifiée de référence. La décomposition dite polynomiale d'un nombre est utilisée pour une mise en signes mobilisant des chiffres (representamens des coefficients) et une disposition spatiale spécifique (aspect positionnel entre autres) pour indiquer la correspondance entre un coefficient et l'ordre auquel il se réfère (la puissance de dix). En ce qui concerne la numération parlée, c'est l'interprétation arithmétique multiplicative qui est la plus proche de cette interprétation de référence, même si les deux numérations ont des origines historiques et des usages différents. En effet la partie mathématique peut y être aussi analysée comme basée sur la composition dite polynomiale. C'est alors la mise en signes qui diffère essentiellement, c'est ce qu'a permis de mettre en évidence une analyse syntaxique. Pour les nombres inférieurs à cent, ce sont en fait les autres interprétations qui sont les plus pertinentes en ce qui concerne la numération parlée en France (et donc y compris des interprétations ordinales). Par ailleurs, les procédés « concrets » de mise en signes du cardinal d'une collection peuvent être formellement proches, bien que n'étant pas motivés par les mêmes raisons. En particulier, il n'est pas possible d'associer de manière bijective un procédé à une interprétation.

Au niveau du sujet, nous avons pu cependant traduire cette différence. Il s'agit de la distinction entre la stratégie « organiser/configurer pour désigner » et un comptage utilisant des groupements de dix. La différence essentielle est que, dans la première, l'organisation est une étape pour dénombrer, la suivante consistant alors à coder l'organisation obtenue. Dans la seconde, le comptage, il n'est pas nécessaire de prendre en compte une organisation finale. La structure de la collection change au fur et à mesure du procédé de comptage. Fondamentalement, à chaque étape, deux sous-collections sont distinguées : celle des éléments déjà énumérés, celle de ceux qui ne le sont pas. Les mots prononcés permettent d'obtenir une désignation du cardinal de la collection des objets qui ont été déjà énumérés successivement, ce qui n'est pas le cas pour « organiser/configurer pour désigner ». Ceci a pour conséquence que, dans le premier cas, des questions propre à la mise en signes se posent dans la deuxième étape, alors que, dans un comptage, elles ne sont pas distinguables. Ceci peut avoir alors un intérêt pour l'enseignement, « organiser/configurer pour désigner » permettant par exemple de faire apparaître des choix spécifiques à la mise en signes menant aux écritures chiffrées.

Par ailleurs, nous avons analysé l'enseignement de la numération à l'aide de la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement. L'analyse des recherches nous a conduit à en définir trois types. Le premier et le second utilisent de manière essentielle une interprétation multiplicative d'un système de numération orale. Il s'agit d'utiliser la numération écrite chiffrée en tant que forme écrite de la numération orale. Les écritures chiffrées peuvent alors être interprétées de manière multiplicative. Les deux itinéraires se distinguent du fait que le second utilise une numération annexe relais « régulière » en outre de la numération en langue maternelle (indo-européenne). Au niveau de l'enseignement, nous avons souligné que

l'emploi de la numération parlée orale permettait d'utiliser les acquis conceptuels des élèves sur le nombre. Cependant ils ne facilitent pas le questionnement des propriétés mathématiques, comme par exemple l'utilisation de groupements, de cardinal identique et de manière maximale. Ces propriétés sont en effet utilisées « en acte » dans les numérations orales, et *a priori* ces deux itinéraires ne prévoient pas de questionner ces « choix ». Ils ne facilitent pas non plus l'étude des spécificités de la mise en signes de notre système de numération : le nombre et la graphie des chiffres, leur organisation spatiale (en particulier leur alignement dans un ordre) et le zéro. En outre, et cette question est liée à ce qui précède, la place de l'écriture chiffrée ne nous semble pas être fixée avec précision par l'itinéraire. Est-elle la forme écrite de la numération parlée, forme qu'il s'agit de décrypter en essayant de comprendre comment on passe des mots aux chiffres ? Ou bien les deux numérations sont-elles issues d'une même troisième numération, que ce soit une numération « régulière » ou « en unités » ? Nous avons montré qu'historiquement aucune des deux propositions n'est exacte.

Il est toujours possible d'aborder ces propriétés ultérieurement. De manière ostensible, ou, en accord avec notre cadre théorique issue de la théorie des champs conceptuels, grâce à l'utilisation de la numération écrite chiffrée dans des problèmes divers, permettant d'utiliser de manière pertinente des théorèmes-en-acte. Cependant nous nous posons la question de savoir s'il est possible de les aborder dès le CP, au moment où les premiers éléments de l'interprétation de référence se constituent. L'hypothèse sous-jacente est qu'une telle approche est susceptible de faciliter les apprentissages futurs des élèves.

Par ailleurs, nous avons mis en évidence un problème spécifique à l'enseignement en classe, celui des emplois multiples des interprétations dans les différentes phases d'une séance, emplois qui peuvent être sources de difficultés d'apprentissages et d'enseignement. Nous avons indiqué le rôle joué par les tâches proposées aux élèves et les ressources diverses utilisées par les enseignants.

Un autre itinéraire est-il possible ? Vers de nouvelles questions pour la recherche.

Est-ce qu'il est possible de surmonter les problèmes qui peuvent intervenir lorsqu'on « dit » le nombre, tout en gardant les acquis conceptuels des élèves sur le nombre qui ont été véhiculés entre autres par le langage que constitue la numération parlée ? Il nous semble que l'itinéraire proposé dans Cap Math nécessite une introduction de la numération parlée en France dans une interprétation arithmétique multiplicative de manière plus longue que celle envisagée par le manuel³⁰⁶ puis d'y associer ultérieurement l'écriture chiffrée. En considérant l'analyse des échanges en classe et de leur gestion par les enseignants, la difficulté reste cependant de trouver des situations dans lesquelles l'emploi des interprétations anciennes ne va pas constituer un obstacle, à la fois du côté des tâches proposées que de celui des débats qu'elles peuvent susciter dans les moments collectifs. La seule référence à « Cap Maths » ne permet certainement pas d'indiquer toutes les possibilités des deux premiers itinéraires. Nous savons qu'il existe un nombre important de ressources et situations pour la classe, étudiées et développées. Notre but est d'investiguer une nouvelle piste, car c'est elle qui est apparue comme moins explorée bien qu'elle offre *a priori* des avantages par rapport aux autres. En effet, dans les itinéraires 1 et 2, nous avons signalé que la maximalité, l'utilisation de mêmes groupements (de dix), voire l'ordre des représentations, étant « de fait » dans les numérations parlées, il est difficile de les questionner. Par ces itinéraires, il nous semble donc plus difficile d'éclairer toutes les dimensions de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée. Est-il possible dès son introduction d'aborder (aussi) ces caractéristiques ?

³⁰⁶ Les élèves ont des difficultés importantes et persistantes à considérer que des groupements puissent être utilisés dans des signifiants du nombre.

Ceci renvoie alors à la question suivante : est-il possible en classe d'introduire la numération écrite chiffrée sans l'associer à une numération parlée (quelle qu'elle soit) ? Qu'y « gagne »-t-on ? Qu'y « perd »-on ? En effet, ce choix n'est pas neutre, puisqu'*a priori* il comprend l'inconvénient de mobiliser plus difficilement les connaissances des élèves sur le nombre, celui-ci ayant été abordé à la maternelle principalement via la numération parlée (interprétation ordinale). Ces questions générales peuvent être comprises à l'aune des résultats obtenus au fur à mesure de notre recherche et qui ont été rappelés ici. Les réponses demandent un travail de longue haleine, nécessitant maintenant, nous semble-t-il, de tester des situations en classe : ceci dépasse notre travail de thèse. L'objectif de ce dernier chapitre est de « préparer » une future recherche en précisant la teneur des questions qui se posent et les outils méthodologiques pour y répondre. C'est pourquoi nous allons indiquer des éléments concrets d'une séquence qui est susceptible d'introduire les écritures chiffrées autrement que par le biais de numérations orales. Nous en proposons ensuite une première analyse *a priori* au regard de nos résultats antérieurs. En particulier, comme pour n'importe quel itinéraire proposé, nous la replaçons dans un dispositif sur un long terme susceptible de pallier les différentes difficultés précitées.

2. Une proposition pour l'enseignement

Une proposition complète et détaillée nous semble inenvisageable, trop de paramètres sont susceptibles d'entrer en ligne de compte. La séquence que nous proposons est le cœur d'une proposition d'itinéraire cognitif d'enseignement qui doit permettre de poser des questions dans des perspectives de recherche. La finalité est de proposer une alternative « réalisable » en classe pour les enseignants et susceptible de faciliter les apprentissages des élèves. La séquence a été élaborée en prenant en compte l'étude faite dans la thèse et en s'appuyant sur la TSD. Elle sera discutée dans le paragraphe 3.

La séquence est divisée en deux. Les étapes 1, 2 et 3 amènent à faire apparaître comme utile un certain type d'organisation. Les étapes 4 et 5 abordent le problème du passage au codage écrit de ces organisations.

2. 1 La situation

Pour les trois premières étapes, la séquence est fondée sur une situation que nous décrivons tout d'abord. Au cours de cette séquence les variables didactiques sont choisies de façon à faire évoluer les connaissances en jeu.

Dans les deux dernières étapes, les étapes 4 et 5, afin de rendre utile le passage à l'écrit, des situations de communication ou/et nécessitant de garder une trace mémorielle à plus ou moins long terme sont installées. Elles peuvent reprendre le contexte de la situation des trois premières étapes.

Description de la situation

Jeu :

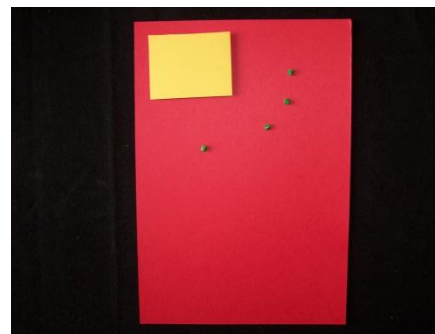
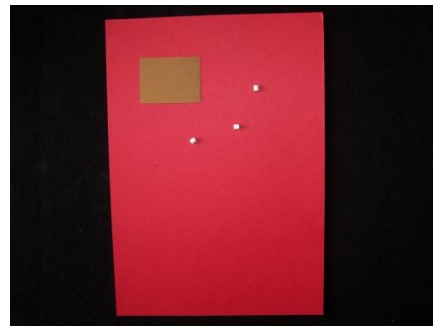
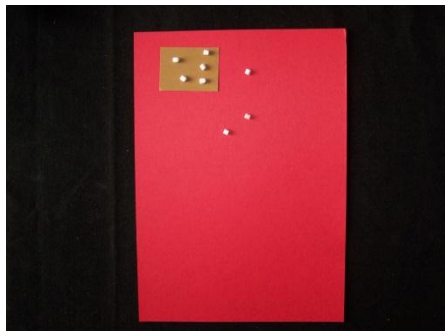
Il s'agit de comparer des collections de cardinal proche, le plus souvent au tableau.

Milieu matériel :

Des objets déplaçables constituent deux collections d'objets (par exemple des « petites » perles) occupant deux espaces distincts du tableau.



Le milieu matériel évolue au cours de la séquence. Ainsi un groupement peut être matérialisé en fixant les objets qui le constituent sur une feuille amovible. Cette feuille peut ensuite être retournée, signifiant toujours le groupement, sans que les objets soient visibles.



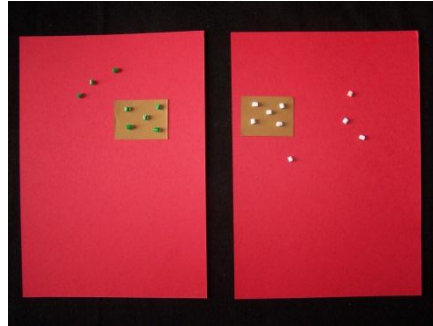
Règles et conditions du jeu :

Les deux collections ne sont pas visibles longtemps. Elles apparaissent simultanément pendant un certain temps, puis elles sont cachées. La question posée aux élèves est « Où y-en-t-il le plus ? ». La durée pendant laquelle les collections restent apparentes ne doit pas permettre de rendre efficace *a priori* (car non matériellement réalisable) une stratégie de dénombrement par comptage un à un. La tâche ne peut être donc réussie que sous certaines conditions, qui ne sont pas nécessairement initialement réunies. La règle du jeu précisée aux élèves est qu'ils doivent proposer une solution pour que tout le monde puisse avoir la bonne réponse. La seule variable qu'ils peuvent utiliser est la disposition des objets.

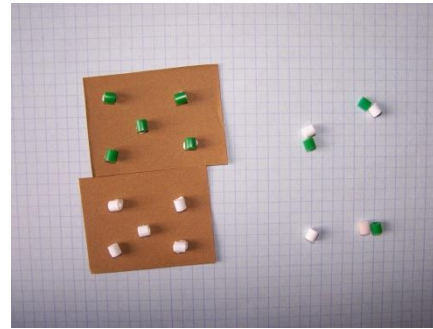
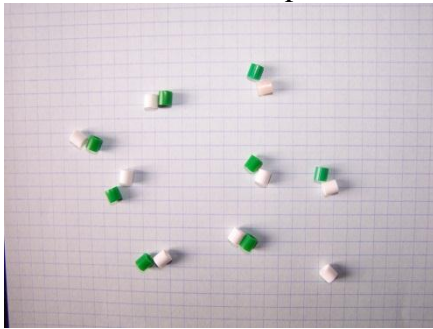
Validation :

Les éléments des deux collections sont rapprochés successivement (par exemple au centre du tableau), un objet d'une collection puis un de l'autre, afin de ne pas favoriser le comptage. Par la suite ce sont les groupements entiers qui peuvent être mis en bijection.

Par exemple partir de :



Différentes validations sont possibles :



Variables didactiques :

Le nombre des objets, la nature des groupements, le nombre de groupements.

Ce jeu est court mais peut se répéter souvent, sur une durée d'environ deux mois³⁰⁷. Il peut devenir un rituel. Il est généralement proposé simultanément à tous les élèves de la classe, mais peut aussi se décliner de manière plus individuelle. Les propositions des élèves peuvent être testées au fur et à mesure. Ces propositions peuvent avoir été produites collectivement par la classe entière ou par des groupes d'élèves qui peuvent ainsi confronter leur production. Les sous-étapes de la progression sont marquées généralement par un changement de variable opéré par l'enseignant ou à la demande des élèves (disposition des objets et nombre). Voici un tableau qui permet de présenter les différentes étapes.

³⁰⁷ Par exemple après les vacances de la Toussaint.

Les étapes	Variables	Variables de l'organisation en classe ³⁰⁸
<p>1. Faire ressortir l'utilité du groupement pour la comparaison visuelle de collections</p> <p>2. Faire ressortir l'utilité du groupement pour la comparaison visuelle de collections : un même type de groupements, la maximalité.</p> <p>3. Faire ressortir l'utilité du groupement par comparaison visuelle de collections : le groupement de dix.</p> <p>4. L'utilité d'une écriture des collections organisées (pour communiquer, se souvenir) et son choix. Propositions diverses d'écritures: discussion sur leur pertinence à résoudre des problèmes (compréhensibles par tous, non ambiguës).</p> <p>5. L'écriture chiffrée usuelle : la position des chiffres, la nécessité d'un chiffre pour marquer l'absence, le zéro.</p>	<p><u>Variables fixées</u> :</p> <p>Le nombre de collections à comparer est toujours de deux.</p> <p>Les collections doivent être visibles simultanément ce qui contraint entre autre à considérer la position des élèves par rapport aux deux collections et l'écartement entre les deux collections. Les collections sont manipulables (pour une possible réorganisation et pour la validation) mais pas au moment d'effectuer la comparaison³⁰⁹.</p> <p><u>Variables</u> sur lesquelles l'enseignant peut jouer mais pas l'élève :</p> <p>Nature des objets des deux collections à comparer et des supports utilisés : taille, forme, couleur, hétérogènes ou non, familiers ou non, figuratifs ou non.</p> <p>Durée pour effectuer la comparaison</p> <p>Cardinal des collections</p> <p><u>Variables</u> sur lesquelles les élèves peuvent jouer après un premier essai ou pour anticiper :</p> <p>Disposition spatiale : quelle organisation ? (groupements ou non).</p>	<p>Modalités : collectif, groupe ou individuel.</p> <p>Durée, fréquence et moment des séances : à fixer dans la journée, dans la semaine, dans l'année.</p> <p>Programmation de la progression dans l'année (possibilités d'insérer des séances complémentaires pour certains élèves pour tous et selon différents mésocontrats : rappel, entraînement, réinvestissement des connaissances).</p> <p>Acteurs (enseignant, élève, groupe, classe entière) selon la tâche : qui propose, qui répond, qui organise les collections ?</p> <p>Nombre d'essais pour des tâches mettant en jeu des stratégies similaires.</p> <p>Le mode de validation est l'association terme à terme, des unités puis, progressivement, des groupements (l'utilisation de désignations parlées des nombres inférieurs supérieurs à dix n'est pas nécessaire).</p> <p>Mode d'institutionnalisation : en ce qui concerne les phases de conclusion, la mise en forme du savoir n'a pas nécessairement lieu à la fin de chaque séance et peut prendre différentes formes (affichage, tableau, traces écrites sur un cahier), sur différentes durées.</p> <p>Les évaluations : les séances collectives ne permettent pas à l'enseignant d'évaluer chaque élève.</p>

³⁰⁸ Les microcontrats et mésocontrats que la situation tente de favoriser sont ceux permettant une dévolution de la situation aux élèves et permettant que l'enseignant soit informé des difficultés des élèves afin qu'il puisse adapter les séances au fur et à mesure.

³⁰⁹ A noter que la collection comportant le plus d'éléments ne doit pas toujours se trouver à la même place au tableau.

2.2 Présentation détaillée des étapes

La description que nous faisons indique les différentes étapes et sous-étapes ainsi que des éléments du rôle prescrit à l'enseignant et attendu des élèves. Nous avons choisi une description « vivante » qui permette au lecteur de se rendre compte des déroulements prévus, la finalité étant l'expérimentation. Certains éléments d'analyse sont déjà repérables.

Nous allons principalement indiquer la progression concernant les variables didactiques s'agissant du cardinal des collections que l'enseignant propose successivement ainsi que les propositions attendues des élèves. Nous détaillons aussi certaines étapes afin de nous permettre d'indiquer comment nous avons pris en compte certains résultats de la thèse, notamment concernant l'âge des élèves (rythmes, possibilités d'expression, de concentration) ou leurs difficultés à considérer les groupements et les unités comme outils de dénombrement et par suite comme signifiant du nombre. Les choix que nous avons adoptés sont motivés par des résultats obtenus précédemment dans notre travail, mais aussi par le fait que nous pensons à une expérimentation dans une classe « ordinaire », sans nécessairement un pilotage quotidien par un chercheur (qui pourrait alors faire des propositions après une analyse de ce qui s'est passé à chaque séance). Ces choix sont analysés ultérieurement, dans le paragraphe 3. Notons cependant que nous n'avons pas indiqué tous les moments d'institutionnalisation qui sont susceptibles d'être proposés. Nous en discutons aussi ultérieurement.

a. Les trois premières étapes : la nécessité d'organiser, le choix de l'organisation

Nous rappelons que la validation se fait ici toujours par une procédure terme à terme, d'abord unité par unité puis groupement par groupement. Par ailleurs, les séances sont conçues pour être courtes (quelques minutes, pour quelques comparaisons) mais fréquentes (cela peut aller jusqu'à deux fois par jour, une fois le matin et une l'après-midi). L'accent est mis sur les échecs et réussites (validation par le milieu matériel), sur les problèmes qui se posent au fur et à mesure et les moyens de les résoudre. Les débats ne portent pas en général sur l'explication des procédures.

Par ailleurs, nous indiquons les différents contrats didactiques que nous envisageons *a priori*. La proposition est élaborée pour que leur adoption en soit facilitée.

Finalement nous allons identifier trois « ruptures » A, B, C qui correspondent à des choix dans notre proposition, choix qui reflètent des points sensibles. En effet la solution donnée au problème posé par l'évolution de la situation n'apparaît pas nécessairement comme la seule ou la plus efficace. Nous discutons ces choix dans le § 3.

1^{ère} étape : Faire ressortir l'utilité du groupement pour la comparaison visuelle de collections

Le mésocontrat envisagé est celui d'une dévolution d'une première situation.

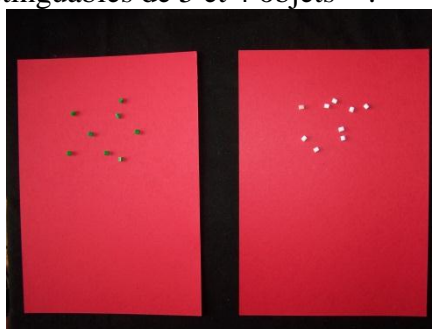
1.1 : S'approprier les règles du jeu

Il s'agit de comparer des collections non ordonnées de 3 ou 4 éléments. Dans un premier temps, les élèves peuvent répondre correctement sans dénombrer, par « subitizing ». Certaines collections ont le même nombre d'éléments, pour que « égal » soit une possibilité. En effet plus tard quand les collections vont être de cardinal proche, il faut que les élèves puissent avoir cette possibilité. Le but est ici de préparer la suite, en particulier, les élèves doivent comprendre la tâche (comparer de manière visuelle, puisqu'il n'est pas nécessaire de compter et ensuite donner sa réponse) et la validation (**règles du jeu**). Il n'y a donc pas de difficultés *a priori* car jusqu'à 4 les élèves peuvent reconnaître globalement le nombre d'éléments de la

collection (subitizing). Certains peuvent compter (directement ou à partir d'une image mentale). Dans sa gestion de séance l'enseignant ne doit pas valoriser cette procédure, elle ne doit pas apparaître comme nécessaire³¹⁰. La validation matérielle terme à terme apparaît comme un moyen « objectif » qui permet d'accéder à la validité des réponses sans avoir à fournir de preuves intellectuelles (comme le comptage).

1.2 : Faire apparaître la difficulté

Les deux collections comportent respectivement successivement 5 et 6 objets, 6 et 7 objets, 6 et 6, puis si nécessaire 5 et 5, 7 et 7. Elles sont présentées de sorte que les stratégies d'évaluation basées sur le subitizing et celle de comptage un à un soient bloquées, mais aussi celles de calcul. Ainsi il ne faut pas par exemple qu'une collection constituée de 9 objets soit présentée en deux groupes distinguables de 5 et 4 objets³¹¹.



Il est vraisemblablement nécessaire de faire plusieurs exercices pour que les élèves s'aperçoivent qu'ils ne peuvent pas être sûrs de leur réponse (ce qui peut aussi être attesté par les différentes réponses recensées dans la classe). L'enseignant fait ressortir dans son bilan que la majorité des élèves n'ont pas eu 100% de réussite. La question posée est celle de trouver un moyen d'augmenter la réussite pour tous, d'être plus sûr de sa réponse : la réponse est étudiée dès la séance future.

1.3 : faire apparaître l'organisation en constellation (5 d'un côté et 6 de l'autre) comme solution au problème, donner des nouvelles règles du jeu.

Une fois que les élèves ont perçu la difficulté à comparer sans organisation (ils n'identifient cependant pas encore nécessairement que c'est l'organisation qui va résoudre le problème), c'est le moment de proposer d'un côté une constellation du dé 5 et d'un autre une du dé 6³¹² (**Rupture A**). Ils devraient alors réussir si les constellations du dé sont suffisamment connues.

Dans la **nouvelle règle du jeu** indiquée aux élèves, il leur est possible de demander de présenter les deux collections d'une certaine manière, mais il faut alors qu'ils le disent avant à celui qui prépare le jeu (l'enseignant pour l'instant). En situation de formulation, une **autre règle du jeu** à (ré)affirmer est que le but est collectif : « *presque tout le monde doit réussir* », « *on doit trouver cela facile* ». Les élèves doivent comprendre que ce qu'ils proposent n'est pas uniquement valable pour eux, mais pour tout le monde (dépersonnalisation de la connaissance). Pour l'enseignant, ce sera aussi un moyen de gérer la part de hasard dans les réponses.

³¹⁰ Être capable de dire qu'il y a quatre, trois, deux ou un objet, n'indique pas forcément qu'un comptage a été utilisé, puisque justement le « subitizing » permet d'accéder directement à une information sur le cardinal de la collection.

³¹¹ Il peut être nécessaire pour mieux faire apparaître le problème de considérer des collections jusqu'à huit, voire neuf objets, la différence entre deux collections n'excédant pas un.

³¹² L'alternative étant de laisser les élèves proposer leur solution. A noter ici que la constellation signifie « il y en a cinq ». Autrement dit, le groupement est induit par la disposition des 5 éléments, plus tard il faudra un code pour signifier qu'on a un groupement de dix, la constellation de dix n'étant pas identifiable par « subitizing culturel ».

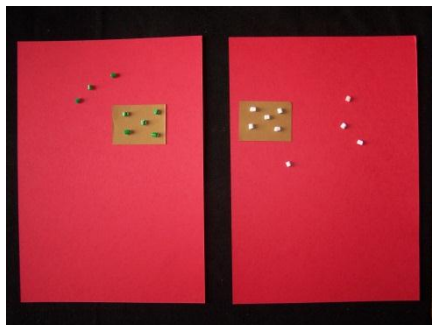
1.4 : tester l'efficacité de l'organisation en constellation du dé 5 comme solution au problème.

Par la suite nous allons adopter une convention pour indiquer les différentes propositions. Le cardinal d'un groupement visible au tableau est indiqué par un nombre **en gras**, alors que le nombre qui suit indique le nombre d'éléments non organisés qui reste. Par exemple dans la comparaison (**5**, 3) et (**5**, 2), le 5 en gras indique un groupement de cinq objets (ici c'est une constellation de 5), le 3 et le 2 indiquant que dans les deux collections il reste respectivement 3 et 2 objets sans organisation repérable *a priori*.

Les mésocontrats envisagés sont ici ceux de pseudodéveloppement ou de réinvestissement de connaissances.

Il s'agit tout d'abord de comparer des collections de 6 à 9 objets non ordonnés (avec au plus un objet d'écart). S'ils n'ont pas pensé à demander l'organisation par constellation, les élèves devraient échouer en nombre significatif. La règle du jeu peut être rappelée : veulent-ils demander quelque chose à celui qui va proposer le nouveau jeu (l'enseignant ici) ? La réponse attendue est : « faire comme le dé » (l'enseignant ne demande pas ici s'ils veulent le 5 ou le 6).

Ensuite sont proposées des comparaisons de 6 à 9 utilisant toujours un groupement de 5 en constellation du dé et 0, 1, 2, 3 ou 4 restants non organisés (Rupture A, suite). L'enseignant n'organise pas les collections si les élèves ne le demandent pas. Il faut que tous les élèves réussissent : la stratégie efficace attendue étant de ne considérer que des éléments restants à côté de la constellation³¹³. A ce moment, il est possible, de faire verbaliser les élèves sur « comment ils font », cependant le but n'est pas de favoriser le calcul. La diffusion de stratégies a pour vocation de rendre mobilisable celle attendue. Elle peut apparaître comme plus efficace et plus sûre car elle nécessite la première étape, reconnaissance du nombre d'objets non groupés par une évaluation basée sur une part de subitizing, mais ne nécessite pas la deuxième, le calcul de cinq plus... Une fois celle-ci diffusée, un certain nombre d'essais peut permettre aux élèves de vérifier que cette procédure est plus efficace que le calcul. La validation terme à terme est toujours utilisée. La stratégie précédente peut être mise en parallèle avec le fait qu'il est inutile de « défaire le cinq », il suffit de considérer les éléments qui restent. A remarquer qu'ainsi, cela suppose de considérer la constellation de cinq comme « un » (échange cinq contre un), mais sans la considérer au même niveau que chaque objet non groupé. Ici est introduite l'utilisation d'**une feuille amovible sur laquelle sont placés systématiquement les objets groupés**, ici encore en constellation, les autres restant sur le tableau à côté de cette feuille.



³¹³ Il y en a cependant deux autres. Une première consiste en un calcul (cinq plus ...). Une autre, erronée, consiste à considérer qu'une constellation est un objet, et ainsi à dénombrer la constellation de 5 et les éléments restants. Par exemple dans la comparaison **5**, 3 et **5**, 2, un élève pourrait considérer 4 objets d'un côté (la constellation et les 3 seuls) et 3 de l'autre (la constellation et les 2 seuls).

1.5 : Evaluation des connaissances des élèves par l'enseignant

La difficulté est de trouver une évaluation individuelle qui corresponde à l'activité collective qu'ils ont faite. Une évaluation sur fiche est par exemple impossible, puisque les collections ne doivent être visibles qu'un bref instant. Le but est non seulement de savoir s'ils réussissent à indiquer toujours la bonne réponse, mais aussi de voir s'ils ont compris la nécessité d'organiser. On peut leur demander par exemple de préparer l'activité pour les autres (sans forcément la soumettre ensuite aux autres) pour voir s'ils font des (ré)organisations par constellations. Il est aussi nécessaire de voir comment ils valident leur réponse en leur laissant faire la comparaison terme à terme.

Au terme de cette évaluation, il peut être nécessaire de faire une pause dans le cas où certains élèves auraient des difficultés.

2^{ème} étape : Faire ressortir l'utilité du groupement par comparaison visuelle de collections : un même type de groupement, la maximalité.

La validation se fait ici toujours à l'aide d'une association terme à terme. La validation groupement par groupement déjà amorcée précédemment est introduite petit à petit. Pendant quelques séances les deux sont utilisées simultanément.

2.1 : faire apparaître la nécessité d'avoir le même type de groupement dans les deux collections.

Est proposé (6, 3), constellation 6 et 3 non ordonnés, à comparer avec (5, 4), 5 en constellation 4 non ordonnés. Des réponses différentes devraient apparaître. La validation terme à terme permet de trancher. Les élèves devraient se rendre compte qu'il n'y a pas de chaque côté les deux mêmes constellations. La solution proposée (« Il faut donc se mettre d'accord ») est d'utiliser toujours des constellations identiques.

2.2 : se mettre d'accord sur le groupement à choisir

Des comparaisons suivantes sont proposées

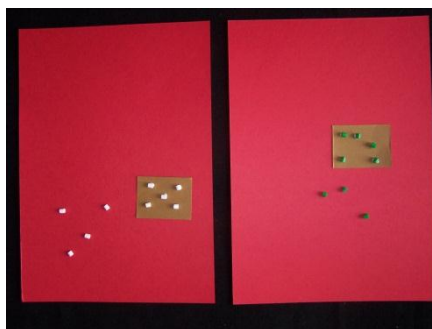
5, 2	4, 3
6, 3	5, 3
8	9

Il peut être proposé à une partie de la classe d'organiser une des collections et à une autre partie, la seconde collection. Ceci doit amener les élèves à convenir de se mettre d'accord sur le groupement à choisir. Le fait de choisir cinq (du dé) doit apparaître comme une nécessité de choisir une alternative (Rupture A, fin) : six aurait pu aussi convenir, voire un autre groupement³¹⁴.

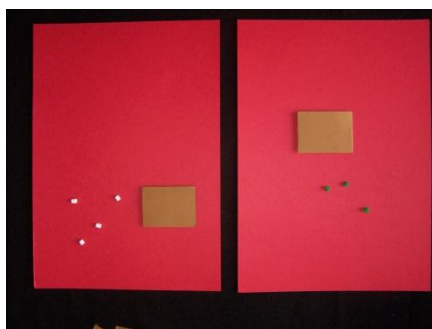
2.3 : Passage de la constellation du dé 5 au groupement par 5

Les élèves peuvent penser qu'il faut absolument une organisation utilisant des constellations pour résoudre le problème. En fait il faut uniquement savoir qu'il y a le même type de groupements utilisé dans les deux collections. C'est donc le nombre d'objets dans la constellation qui importe et non la disposition en constellation du dé. L'objectif est qu'ils ne se focalisent plus sur la forme de la constellation mais sur le nombre (5) dans la constellation. Pour ce faire, on va proposer des collections qui comportent des groupements de cinq non en constellation.

³¹⁴ En toute rigueur, le choix de six, peut amener dans certains cas à comparer cinq éléments seuls avec quatre, ce qui ne peut se faire par une stratégie de subitizing. Le choix de cinq peut donc apparaître le meilleur. Il est possible de laisser les élèves tester les deux possibilités. A remarquer cependant que lorsqu'il va être question de passer à des groupements de dix, cet argument ne sera plus celui retenu.



D'un côté les élèves s'aperçoivent que les stratégies utilisées auparavant sont performantes, d'un autre ils sont troublés par le fait de ne pas reconnaître immédiatement le 5. Il s'agit alors de convenir d'un code qui permette de ne pas avoir à vérifier à chaque fois que le groupement est bien de cinq : la solution est de tourner la feuille qui comporte 5 éléments qui a été introduite à l'étape 1.4.



Cette étape n'est possible que si les élèves ont déjà compris qu'il était inutile de défaire les groupements pour la validation (on compare terme à terme les groupements de 5 puis terme à terme les éléments qui restent).

Par la suite, un mésocontrat de réinvestissement de savoir peut s'instaurer, le nombre d'exercices pouvant varier selon la classe. Les groupements sont retournés, mais une validation terme à terme se fait systématiquement avec les groupements et les éléments restants. Une variation des modalités des exercices est envisageable : individuel, petit-groupes, demi-classe, classe entière. Il est possible de proposer à certains de préparer l'exercice pour les autres afin qu'ils fassent eux-mêmes les groupements.

2.4 : utiliser le même type de groupement dans les deux collections, la maximalité (passer à plusieurs groupements).

Le passage à des cardinaux entre 11 et 14 va entraîner la nécessité d'**un nouveau groupement**. On peut exposer d'un côté 12 de l'autre 13 objets non organisés. Certains élèves devraient être en mesure de proposer de faire un groupement de 5. En reprenant l'exercice, une partie des élèves devraient échouer, mais il est possible que ceux qui ont réussi ne voient (toujours) pas que c'était vraisemblablement dû au hasard. Il est donc possible de donner d'autres propositions, par exemple, 14, 13, pour tester qu'un seul groupement n'est pas suffisant. L'enseignant peut alors poser à nouveau la question « Comment être sûr ? ». Ce qui va être fait à partir d'une autre proposition³¹⁵. L'exercice est alors (re)proposé aux élèves avec les deux collections réorganisées. Il est attendu que les élèves proposent deux groupements. La plupart des élèves devraient alors réussir. La validation se fait toujours terme à terme, certains vont peut-être comprendre qu'il est inutile de défaire les groupements de 5, mais certains en auront encore besoin.

³¹⁵ Il est possible ici de charger les élèves de la réorganisation : la moitié de la classe s'occupe d'une des collections, l'autre de l'autre, sans qu'ils puissent communiquer.

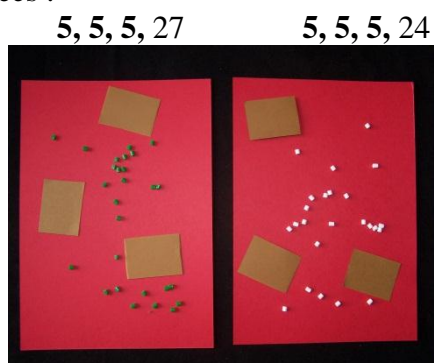
L'enseignant peut ici faire un bilan en mettant en relief la connaissance dégagée, la nécessité de faire le plus de groupements possible (maximalité), afin de l'institutionnaliser (vers le savoir).

Par la suite, un mésocontrat de réinvestissement de savoir peut s'instaurer pour des collections de 11 à 14. Il est possible de demander parfois à des élèves de préparer l'organisation pour poser le problème aux autres élèves de la classe. C'est aussi l'occasion d'installer un travail en plus petits groupes. Il est aussi possible de passer rapidement à des collections jusqu'à 24 éléments, toujours avec un écart d'un ou deux éléments. Ceci va alors nécessiter de passer à trois, puis quatre groupements. Le « double » subitizing, des groupements et des objets non groupés, pouvant rester efficace.

Les procédures des élèves peuvent être erronées en particulier pour deux types de raisons déjà évoquées : du fait de ne considérer que les éléments qui restent (non groupés) ou de considérer les groupements et les éléments qui restent comme les mêmes « objets » à compter.

3^{ème} étape : Faire ressortir l'utilité du groupement par comparaison visuelle de collections : le groupement de dix.

Deux collections sont présentées :



Il est aussi possible directement de proposer 42 et 39. La solution présentée est simplement pour rappeler que le groupement qui a été choisi est le même, et c'est le groupement par cinq. Ce groupement par cinq peut alors donner l'idée aux élèves de passer ultérieurement à un groupement par dix. Il ne leur permet cependant pas de proposer directement un autre type de groupement.

Une partie de la classe va organiser la première collection, une autre la deuxième. Le résultat attendu est :

5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4



La durée d'exposition est telle que toute procédure échoue. L'(in)validation est identique aux précédentes.

Avant la validation, et alors que les collections ne sont plus visibles la question posée aux élèves peut être : « *Comment faire pour que tout le monde réussisse ?* ».

Des élèves penseront peut-être à faire des paquets plus importants, sinon c'est l'enseignant qui propose de faire des groupements plus importants, des groupements de dix (Rupture B).

La classe peut être séparée en deux pour que les élèves proposent leur solution³¹⁶. A noter que dès ce moment, des nouvelles feuilles (par exemple d'une autre couleur ou/et d'un autre format) peuvent être introduites pour indiquer des paquets de dix. Trois cas se présentent :

1^{er} cas : les deux demi-classes font toutes les deux un maximum de paquets de 10, ce qui donne :

10, 10, 10, 10, 2 10, 10, 10, 9



Il est alors possible de valider et de formuler dans le bilan le fait que les groupements par dix résolvent le problème quand il y a beaucoup d'objets.

La maximalité peut alors être abordée en proposant ensuite par exemple **10, 10, 13** et **10, 10, 10, 2**. Cette maximalité peut être institutionnalisée.

2^{ème} cas : les deux demi-classes font toutes les deux des paquets de 10, mais pas de manière maximale. Ce qui permet de questionner la maximalité.

3^{ème} cas : les deux demi-classes font toutes les deux un maximum de paquets de 10, mais utilise aussi un groupement de cinq pour les neuf objets non groupés.

10, 10, 10, 10, 2 10, 10, 10, 5, 4



Si les élèves ne le proposent pas, l'enseignant propose de ne faire que des dix et aucun cinq. (Rupture C). Une autre éventualité est de laisser cette possibilité telle quelle. Elle peut être alors rediscutée ultérieurement dans les prochaines étapes. Nous traitons cette question dans l'analyse ultérieure.

Le savoir peut être mis en forme. Il s'agit de considérer comme une solution pertinente au problème de comparaison de deux collections la stratégie consistant à les organiser par groupements de dix, de manière maximale. Les séances suivantes peuvent être menées en installant des mésocontrats de réinvestissement et de reconnaissance de savoir ainsi que d'entraînement. Des contextes différents peuvent être sollicités, ainsi que du matériel : nous pensons en particulier au matériel usuel de base dix (celui que Fuson mentionne dans ses recherches). Les problèmes posés restent essentiellement des comparaisons de cardinal de collections manipulables puis figurées³¹⁷, afin de ne pas solliciter la numération parlée en France. Certains peuvent mener en particulier à faire des échanges dix contre un comme

³¹⁶ L'enseignant doit veiller à ce moment au fait qu'il n'y ait pas de problèmes de dénombrement jusqu'à dix.

³¹⁷ Dans ce cas peuvent se poser des problèmes d'énumération et de matérialisation des groupes constitués.

procédé pour préserver ou indiquer une organisation d'une collection (ce qui fait écho aux feuilles utilisées au tableau pour indiquer des groupements de dix).

b. Les deux dernières étapes : la nécessité d'écrire, le choix de l'écriture

Ici aussi, nous allons identifier des ruptures, D et E, qui correspondent à des choix dans notre proposition, au moment où la solution prévue dans l'itinéraire pour résoudre le problème n'apparaît pas nécessairement comme la seule ou la plus efficace. Nous discutons de ces choix dans le § 3.

4^{ème} étape : L'utilité d'un système d'écriture pour coder des collections organisées (pour communiquer, se souvenir) et son choix

Dans cette étape, beaucoup de situations sont envisageables. Nous proposons celles qui réinvestissent le contexte précédent.

Le principe général est de mettre les élèves en position de devoir coder les organisations dont l'utilité a été précédemment institutionnalisée : pour communiquer (avec une autre classe par exemple) ou pour se souvenir (préparer les collections à comparer la veille pour le lendemain, le matin pour l'après-midi, élaborer un affichage de référence). D'après les résultats de la première partie de la thèse, et des analyses en classe (les 2^{ème} et 3^{ème} séances de Mme H.), les propositions probables des élèves sont des productions graphiques de type 1 ou 2 ou bien hybrides. Dans le cas où celles-ci ne seraient pas produites, il est toujours possible que l'enseignant en propose (rupture D). Par la suite, il s'agit dans le cadre de la TSD de construire des situations qui permettent d'engager les débats sur leur pertinence à résoudre des problèmes, en outre elles doivent être compréhensibles par tous et non ambiguës. Ceci peut être envisagé à nouveau via des comparaisons comme dans la dernière étape, cette fois-ci en utilisant ces productions graphiques. Les questions qui se posent concernent d'une part le choix de productions graphiques (elles doivent être identifiables rapidement pour tous) et d'autre part le choix de celle qui est la plus à même de permettre de réussir la tâche. Une production graphique de type 2 (qui utilise donc des chiffres associés à des ordres, ces derniers étant indiqués par des signes plus ou moins figuratifs) peut ainsi apparaître comme la solution. Une fois mise en forme cette connaissance, il est possible de proposer des séances dans lesquelles sont installés des mésocontrats de réinvestissement de connaissances ou d'entraînement.

Nous ne détaillons pas cette séquence, car il s'agit essentiellement de reprendre des exemples précédents, les collections étant cette fois-ci (déjà) mises en signes au lieu d'être manipulables ou figurées.

5^{ème} étape : L'écriture chiffrée usuelle : la position des chiffres, la nécessité d'un chiffre pour marquer l'absence, le zéro

La dernière étape concerne le passage d'une production graphique de type 2 à l'écriture chiffrée. Nous proposons comme solution d'utiliser la calculatrice. La tâche proposée aux élèves consiste à indiquer sur l'écran le cardinal d'une collection d'entre 61 et 99 objets (mais dans un premier temps ni 70 ni 80). Ils disposent de cette collection (sans en connaître une désignation du cardinal) et par exemple d'un matériel de type base dix. Le but est alors d'utiliser l'écran de la calculatrice³¹⁸ pour inscrire un message permettant à un autre groupe de constituer une collection équipotente. La validation matérielle se faisant ensuite par bijection. La solution attendue est l'écriture chiffrée, c'est-à-dire la solution positionnelle. Cependant d'autres solutions peuvent être proposées par les élèves, ce qui peut amener l'enseignant à proposer lui-même cette dernière (Rupture E). Se pose immédiatement le problème d'adopter une convention sur l'ordre des chiffres : le premier qui est tapé sur la

³¹⁸ Le signe + n'ayant pas encore été introduit ou rendu non accessible sur la calculatrice.

calculatrice étant relatif aux groupements de dix, le deuxième aux objets non groupés. C'est ainsi que l'écriture chiffrée est institutionnalisée. Le même problème peut être alors repris pour des collections dont le cardinal est un nombre de dizaines entier, sans unité, afin d'introduire la nécessité du zéro, ce qui explique en particulier l'écriture « 10 » de « dix ».

3. Analyse et perspectives de recherche

Ce paragraphe a pour but de dégager des questions qui permettent d'envisager de poursuivre la recherche en testant notre proposition dans des classes.

3.1 Analyse didactique de la proposition

Nous l'analysons par rapport à notre étude précédente et plus particulièrement dans le cadre de la théorie des situations en ce qui concerne les étapes 1 à 3. Les descriptions données précédemment nous permettent d'expliquer et justifier des étapes proposées (§a) et d'en indiquer certaines limites ou écueils (§b). Nous analysons la séquence elle-même et indiquons ensuite des éléments qui permettent de la replacer dans une progression sur l'année de CP (§c).

a. Analyse de la séquence proposée

Afin de faire ressortir comment les résultats et questions de la thèse sont pris en compte, nous allons tout d'abord faire une brève analyse globale, puis ensuite plus ciblée en séparant celle des trois premières étapes et celle des deux dernières. Le but est de faire apparaître des questions qui peuvent être posées dans le cadre de recherches futures.

Cohérence de l'ensemble des étapes avec notre étude de la numération écrite chiffrée : coder des organisations.

Les organisations ne sont pas vues comme issues d'un comptage, comme ce peut être le cas quand est utilisée la numération parlée en France dans une interprétation arithmétique multiplicative, mais comme une nécessité pour réussir la tâche. La différence est que l'élève a pour but d'organiser la collection (et non de compter). La notion d'organisation à l'aide de groupements n'est pas abordée à travers les activités de comptage. Cette organisation restant nécessairement visible, ce qui n'est pas forcément le cas pour tous les comptages³¹⁹, il est plus facile alors pour l'enseignant de s'y référer. Ainsi la stratégie favorisée est « organiser/dénombrer pour désigner » indiquée dans le §3.1 du chapitre 4. Nous avons relevé dans les recherches et dans nos analyses en classe la difficulté des élèves à concevoir une « désignation des groupements » comme étant un signifiant du nombre. La stratégie favorisée est susceptible d'aider les enseignants confrontés à ce problème en classe.

L'utilité d'une organisation régulière qui utilise un même type de groupements puis celui-ci de manière maximale est abordé via la résolution de problèmes (ce sont des solutions pour résoudre les problèmes posés), ce qui s'inscrit dans le cadre de la TSD.

Ensuite la question que posent les problèmes à résoudre met en jeu le codage des organisations, leur mise en signes (et non de comprendre un code ou de le déchiffrer). Les différentes possibilités envisagées sont issues du travail de la première partie de la thèse (Chapitre 2 et conclusion) et de l'analyse en classe (Chapitre 8, analyse de la classe de Mme H.). Le dernier passage consiste à choisir parmi les possibles le système d'écriture chiffrée, mettant en relief la différence entre une production graphique de type 2 et ce système : la position des chiffres et la nécessité d'un signe pour marquer l'absence d'unités.

³¹⁹ Ceci a été mis en évidence dans les procédés de mise en signes de la première partie de la thèse.

Analyse des trois premières étapes :

- Un milieu susceptible de rétroactions.

Les tâches proposées aux élèves dans ces trois premières étapes consistent à comparer des collections figurées. Nous avons indiqué les trois variables didactiques : le nombre d'objets par collection (et la différence de nombre entre deux collections), la disposition spatiale des objets et enfin le temps d'exposition des collections. Il faut y ajouter des variables de situation : la nature des objets (plus ou moins figuratifs, hétéroclites, plus ou moins « petits », plus ou moins familiers) et l'emplacement des élèves par rapport aux collections présentées (ce qui peut jouer sur le fait qu'ils voient en premier plutôt l'une des collections que l'autre). A noter qu'en ce qui concerne la gestion, les situations proposées peuvent comprendre des résolutions individuelles ou collectives des tâches. En outre elles permettent de poser le même problème à plusieurs reprises en jouant sur des variables didactiques (après par exemple un échec dans le cas où des organisations par groupement n'ont pas été faits). Nous n'allons pas discuter de ces derniers paramètres dans notre analyse didactique mais les indiquons car ils peuvent influencer sur le déroulement en classe.

Si nous nous référons à l'ensemble des stratégies et cheminements que nous avons déjà indiqués dans le chapitre 4 pour résoudre des problèmes de comparaison, du fait en particulier de la durée d'exposition, ce sont des stratégies basées sur une part de subitizing ou « double subitizing » qui sont les plus efficaces. Ce sont donc des agencements spatiaux qui sont la clé de la réussite, et c'est cette variable que peuvent modifier les élèves. Le milieu matériel installé permet (à l'enseignante et aux élèves) de valider ou d'invalider les propositions des élèves par association terme à terme. En conséquence, les situations ont un certain potentiel a-didactique, les différents contrats annoncés sont donc potentiellement réalisables. Les solutions amènent à faire des choix qui vont être adoptés au fur et à mesure et vont donc s'intégrer aux paramètres de la situation (aux règles du jeu). Cependant, la situation n'assure pas que ces choix soient toujours perçus comme étant les seuls moyens efficaces pour résoudre la tâche. En particulier trois passages constituent ce que nous avons appelé des ruptures : ruptures de contrat dues à la situation (c'est l'enseignant qui décide), ruptures qui font écho aussi à des considérations épistémologiques (obstacles).

- Des situations qui nécessitent des groupements sans l'emploi de la numération parlée en France.

Les situations prennent en considération le problème que les enseignantes ont rencontré pour que les élèves envisagent d'indiquer des quantités autrement que par une désignation parlée en France (de type « ... paquets de dix et boutons » de la séquence Ziglotron). En effet, tout d'abord ce ne sont pas des stratégies de comptage qui sont en jeu pour résoudre le problème, puisqu'il est même impossible de les mener à leur terme. Ensuite, les désignations parlées en France ne servent pas pour la validation. Même si les élèves (voire l'enseignante) les utilisent, dans la validation proposée l'argument en jeu est la bijection « matérielle » (association objet par objet) entre les deux collections. De plus, si la solution au problème proposé consiste tout d'abord à grouper ensemble des éléments (perception spatiale), ensuite la stratégie pour résoudre la tâche est de considérer ces groupements (ainsi que les éléments restant seuls) comme des objets dénombrables (mais de deux types différents, les dizaines et les unités), ce qui est ensuite encouragé dans la validation. Petit à petit il est possible de valider par association terme à terme de groupements que l'on déplace comme un objet. Qui plus est le fait d'utiliser ensuite un matériel qui permet de faire disparaître à la vue la quantité que ces groupements contiennent participe à cette conceptualisation des groupements comme objet dénombrable. Nous avons donc pris en compte la difficulté signalée dans les recherches et que nous avons identifiée dans les séances filmées. Il s'agit de celle consistant à nommer des cardinaux ou/et dénombrer des collections par des signifiants de type « organisation des groupements ». Finalement, la durée et la progressivité de l'apprentissage consacré à

l'utilisation de groupements (sans autres enjeux) est susceptible de favoriser cette conceptualisation³²⁰.

Ainsi, du fait de la nature des stratégies efficaces à la réussite des tâches et des modes de validation, les situations proposées sont susceptibles de limiter les interactions en classe dans lesquelles interviennent les désignations parlées en France des nombres au-delà de dix ainsi que de favoriser l'utilisation des signifiants mettant en jeu des groupements. Nous notons qu'un « effet bouclage » peut intervenir, mais il ne provoquerait pas alors des confusions dans les interprétations utilisées.

Analyse des deux dernières étapes : des tâches qui n'assurent pas que les stratégies visées soient perçues par les élèves comme les plus efficaces

La nature des tâches change à partir de l'étape 4. Il s'agit cette fois-ci de mettre en jeu des codes écrits qui vont permettre soit de communiquer, soit de se souvenir. Nous avons évoqué des situations susceptibles de s'inscrire dans un contexte proche de celui des tâches des trois premières étapes. Une fois les codes proposés par les élèves (ou l'enseignante, la rupture D), il s'agit tout d'abord de comparer des signifiants entre eux. La variable temps nous semble susceptible de mener au premier objectif : choisir un code commun et suffisamment lisible. Le fait de proposer des collections importantes (au-delà de cinquante) ou comportant un nombre d'objets isolés supérieur à quatre permet de favoriser la survenue de productions graphiques de type 2, puisque les objets à considérer ne sont plus dénombrables par une évaluation basée sur une part de subitizing. La dernière étape est abordée via une contrainte matérielle (écrire un message à l'aide de l'écran de la calculatrice) qui bloque les représentations figurées des élèves (par exemple de types « barre », « carré », « rectangle » qui ont été observés dans les séances filmées). Cependant, elle ne bloque pas l'utilisation de symboles accessibles sur la calculatrice (., /, +, -, etc.), même s'ils sont moins nombreux que ceux accessibles sur un ordinateur (les lettres en particulier). Des écritures comme $6/5$ (ou $5/6$), voire $60+5$, $5+60$ sont susceptibles d'être produites. Si de surcroît aucune écriture attendue n'est produite par les élèves, 65 dans notre exemple, le professeur peut être amené à changer de contrat (rupture E), les rétroactions du milieu matériel et les connaissances anciennes des élèves n'étant pas nécessairement suffisantes pour que la connaissance visée apparaisse comme solution du problème.

b. Les écueils, les limites

L'analyse précédente a mis en exergue en quoi notre proposition prend en compte les résultats précédents de la thèse. Elle en indique aussi des limites.

Il est impossible de refaire faire aux élèves le chemin historique, car même en privilégiant un point de vue épistémologique mathématique (et donc moins les circonstances historiques) l'écriture chiffrée n'est réellement utile que pour des problèmes qui ne sont pas au programme de CP (les « grands » nombres surtout dans les problèmes de la structure multiplicative, les techniques de multiplication et de division en particulier). Ceci explique en partie certaines limites dans les choix opérés. Nous allons les indiquer plus précisément en considérant les cinq ruptures signalées. Rappelons que nous avons employé le mot rupture pour évoquer à la fois l'épistémologie des savoirs en jeu et les contrats didactiques, c'est ce que nous développons dans les lignes qui suivent.

³²⁰ Les séances sont conçues pour être courtes, afin de prendre en compte les capacités de concentration en classe d'élèves de cet âge, mais nombreuses, et leur fréquence peut être quotidienne. Le jeu peut être ritualisé.

Rupture A : dans les étapes 1.3, 1.4 et 2.2, les constellations 5 du dé sont proposées en partie à l'initiative de l'enseignant comme solution au problème de cardinaux entre six et neuf.

L'alternative dans l'étape 1.3 est de laisser les élèves faire ces propositions, par exemple en les laissant eux-mêmes manipuler les collections³²¹. Ceci n'assure cependant pas qu'une solution puisse être trouvée. En effet, il est possible que les élèves proposent des solutions qui conviennent pour les nombres en jeu (par exemple disposer les objets de chaque collection en deux lignes verticales ou encore faire deux paquets, afin de procéder à un calcul mental) mais qui devront être abandonnées plus tard. La situation proposée ne permet pas ici de bloquer ces propositions. Cependant une telle alternative a l'avantage de poser explicitement le problème de comparer les stratégies à utiliser. Elle consiste donc finalement à laisser les élèves faire des propositions, les tester, puis si la proposition attendue (groupement) ne survient pas, de la fournir. Le deuxième aspect de cette première rupture est le choix de cinq. Celui-ci est en effet adapté à la tâche proposée car des recherches antérieures ont montré que le subitizing est une stratégie efficace pour dénombrer jusqu'à quatre objets : au-delà il faut en utiliser une autre. Comme nous visons la stratégie de groupement, le fait que les connaissances sur les constellations du dé soient disponibles fournit ainsi une solution qui amorce un passage vers la notion de groupement (poursuivi tout le long de la séance). Cette solution est susceptible d'apparaître aux élèves comme la plus efficace. Toute autre proposition de groupement supérieur ne permet pas aux unités restantes (non groupées) d'être dénombrées par une évaluation basée sur une part de subitizing alors que pour un groupement inférieur (deux, trois, quatre) le champ numérique dans lequel il est efficace est plus restreint³²². Nous avons mis en avant ce choix, qui est donc discutable, pour ne pas étendre en longueur le travail sur des groupements autre que dix. En outre, les arguments utilisés dans les alternatives ne sont pas ceux qui vont intervenir pour le passage aux groupements de dix, ce qui nous amène à considérer la rupture B de l'étape 3.1.

Rupture B : le choix de l'enseignant de groupements de dix comme solution au problème posé par des collections de cardinal supérieur à vingt-quatre.

Le problème des collections importantes (au-delà de quatre groupements de cinq et quatre objets non groupés) est posé dans l'étape 3 par la comparaison de collections non organisées telles que **5, 5, 5, 27** et **5, 5, 5, 24**. En accord avec la TSD, nous avons privilégié un saut informationnel qui incite les élèves à faire des groupements, et nous n'avons pas décidé de proposer aux élèves par exemple directement **5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2** et **5, 5, 5, 5, 5, 5, 4**. Cependant, il est aussi possible de proposer directement 42 et 39 objets non organisés. Ceci laisse théoriquement la possibilité aux élèves de faire d'autres groupements que de cardinal cinq, et de revenir ainsi à des questions qui ont été déjà traitées. Il nous semble cependant que si les élèves suivent la règle du jeu, ils vont constituer des groupements de cinq, puisqu'ils se sont mis d'accord. Ainsi il n'est pas nécessaire didactiquement de proposer **5, 5, 5, 27** et **5, 5, 5, 24**.

Des stratégies basées sur des éléments de (double) subitizing ne sont plus opérantes. Une solution consiste à changer de groupements de base en utilisant un plus grand.

Le fait d'imposer ensuite dix est une nécessité épistémologique et il nous semble donc nécessaire de le faire apparaître comme un choix conventionnel.

³²¹ Ceci permet en outre de leur indiquer que c'est sur cette variable qu'ils peuvent jouer. Dans le cas d'une indication verbale, il peut être plus difficile de formuler cette nouvelle règle sans fournir la solution.

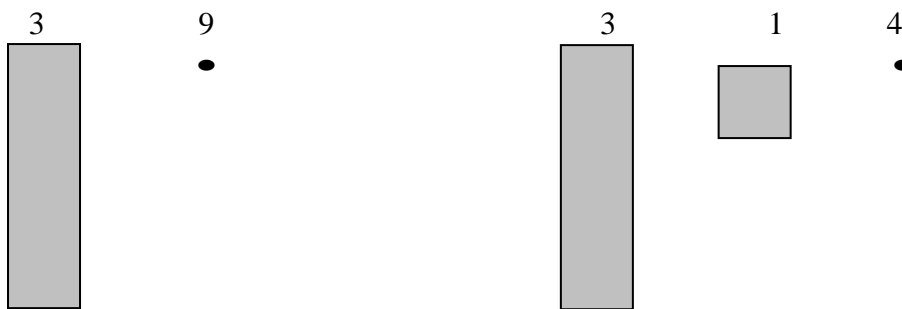
³²² Par exemple pour quatre, le seuil d'efficacité est atteint pour des collections organisées en cinq groupes de quatre, puisqu'elles ne sont plus perceptibles par subitizing. A noter que le choix d'un même type de groupement pour chaque collection est discutable. (5, 4) et (6, 3) permet par exemple un calcul mental. La deuxième étape peut s'effectuer alors selon une autre modalité. Au lieu que ce soit l'enseignant qui propose les organisations, deux groupes distincts d'élèves peuvent s'en occuper. Cela peut les amener à être obligé de se mettre d'accord sur le type de groupement à choisir. Ceci peut être placé avant l'étape 1.5.

Par contre, dans la situation qui est présentée, un autre choix que l'augmentation du cardinal du groupement peut être envisagé pour résoudre le problème des « grands » nombres. Il est possible de le résoudre par l'organisation (5, 5, 5, 5, 5), 5, 5, 5, 2 et (5, 5, 5, 5, 5), 5, 4, c'est-à-dire en utilisant un groupement de groupements. Ainsi, la solution retenue ne permet pas d'aborder une caractéristique importante du principe de base qui est sous-jacent à notre numération écrite chiffrée : le groupement de groupements, c'est-à-dire le passage à un ordre supérieur. Cependant, ce passage est actuellement peu envisageable au CP en base dix, puisque les nombres étudiés sont inférieurs à cent. Nous avons privilégié un accès plus rapide aux groupements de dix puis à l'écriture chiffrée, sachant que ce point (groupement de groupements) est susceptible d'être abordé en fin d'année ou dans la classe supérieure³²³. Le fait d'imposer dix, permet effectivement de résoudre les problèmes posés d'une manière différente que le groupement de groupements. Notons qu'*in fine*, dans le problème de comparaison proposé aux élèves, aucune de ces solutions ne peut convenir pour les grands nombres. D'un côté il va falloir multiplier le nombre de subitizing, de l'autre il va falloir non seulement à chaque fois changer de type de groupements, mais en plus les objets non groupés vont demander un dénombrement. Les deux augmentent le temps nécessaire à la réussite de la comparaison. Cependant, une autre solution est encore possible, qui peut d'une certaine manière pallier jusqu'à un certain point les inconvénients des deux premières, c'est une organisation de type (10, 10, 10, 5, 4) au lieu de (10, 10, 10, 9), ce qui nous amène à une troisième rupture, la rupture C.

Rupture C : après avoir utilisé de manière maximale les groupements de dix, imposer de ne pas grouper les éléments restants (avec un groupement de cinq).

L'étape 3 aborde le problème de comparer des collections organisées à l'aide de groupements de dix et dont les éléments non groupés ne sont plus dénombrables par une évaluation basée sur une part de subitizing. Le groupement de dix est introduit. Dans le cas où il reste plus de cinq objets non groupés, le groupement de cinq est utilisable. Nous avons proposé que l'enseignant choisisse de retenir la solution consistant à utiliser le maximum de « dix » et aucun autre groupement. La possibilité d'utiliser cinq le cas échéant pour les éléments non groupés, par exemple (10, 10, 10, 5, 4) au lieu de (10, 10, 10, 9), n'a pas été retenue. La situation mise en place ne nous semble pas propice à justifier que l'organisation (10, 10, 10, 9) soit la plus efficace. Bien au contraire, celle-ci demande un dénombrement qui nous semble plus coûteux en temps qu'un subitizing sur trois types d'« objets » différents (les groupements de dix, de cinq et les unités). A noter qu'en outre, des procédures de subitizing échouent aussi. Ceci explique la survenue de cette rupture. Des situations alternatives sont possibles. Par exemple, il peut s'agir de ne pas trancher dans l'étape 3, en mettant en relief dans les deux possibilités, (10, 10, 10, 5, 4) et (10, 10, 10, 9), les avantages et les inconvénients. Ces organisations peuvent aussi être utilisées pour poser le problème du passage à l'écrit de l'étape 4. Des productions graphiques de type 2 comportant des groupements de dix et de cinq peuvent être questionnées. Par exemple, entrent en « concurrence » d'une part une production comportant un rectangle et un point, aux cotés desquels sont écrits respectivement 3, 9 et d'autre part une production comportant un rectangle, un carré et un point, aux cotés desquels sont écrits respectivement 3, 1, 4.

³²³ En effet, dans les programmes actuels (2008), il est recommandé d'étudier en CP les nombres inférieurs à 100, mais le programme du cycle 2 (qui comprend le CP et l'année qui suit, le CE1) laisse la possibilité d'aborder les nombres supérieurs à 100 dès le CP. A noter qu'un tel passage était envisagé à l'époque des « maths modernes » puisque des bases plus petites étaient étudiées.



Cette dernière production peut être ainsi considérée comme moins efficace, car elle comporte la présence ou non d'un groupement de cinq (signifiée dans notre exemple par le 1 de 3, 1, 4). Cette information peut apparaître comme non nécessaire. Ceci nous amène à discuter des deux ruptures dans les deux dernières étapes.

Rupture D : proposer des productions graphiques ou des codes écrits pour transcrire les organisations.

La rupture D, dans la 4^{ème} étape, ne va pas nécessairement survenir. Elle vient du fait de la nature de la connaissance produite. Rien n'assure en effet que les élèves parviennent aux productions attendues (en particulier celles de type 2). Cependant si nous considérons les productions des élèves de la classe de Mme H dans la situation étudiée au chapitre précédent, la situation que nous proposons permet d'envisager leur survenue, en particulier du fait que les groupements sont utilisés pour résoudre les problèmes, de manière progressive et sans faire appel à la numération parlée en France (interprétation ordinale ou/et arithmétique additive).

Rupture E : le passage aux écritures chiffrées à partir des productions graphiques de type 2.

Du fait de l'emploi de la calculatrice, la tâche que nous avons indiquée ne peut pas être réalisée à l'aide de codes utilisant des signes figuratifs pour les ordres et incite à utiliser uniquement les chiffres. Cependant d'autres signes sont accessibles, ce qui peut mener par exemple à des solutions comme $3/7$, $(7 ; 3)$ ou $30+7$. Dans la situation dont nous avons ébauché la description, le milieu n'assure pas que la production visée soit considérée comme (la meilleure) solution, ni même qu'elle adienne. En outre, ce milieu ne permet pas de questionner le choix de l'alignement comme mode de disposition des écritures chiffrées sur une feuille. Des situations alternatives peuvent être envisagées : ne laisser d'accessible que les chiffres sur la calculatrice, voire donner à comparer différents systèmes d'écriture. Il reste que l'étude de la première partie de la thèse nous indique que le système positionnel des écritures chiffrées ne peut être considéré comme réellement le plus performant que pour résoudre des problèmes qui ne sont pas au programme de CP, tels que ceux afférents à l'écriture des grands nombres ou/et à des techniques opératoires pour la multiplication (et plus encore la division). La dernière rupture, la rupture E de la 5^{ème} étape, est associée à des obstacles épistémologiques. Ceci contraint la recherche de propositions permettant de faire apparaître l'écriture chiffrée comme la meilleure solution pour résoudre un problème afin d'aborder toutes les propriétés propres à celle-ci que nous avons dégagées dans l'interprétation de référence

D'autres écueils non tous liés directement à des considérations épistémologiques.

➤ Le cas particulier de dix

Les groupements de dix sont nécessaires. Il nous semble difficile de ne pas indiquer leur cardinal par le mot « dix ». Ultérieurement cependant le mot dizaine peut être employé pour distinguer le nombre dix du groupement comportant dix objets. La situation que nous avons proposée permet de faire apparaître ces groupements de dix comme des outils pour résoudre des problèmes, outils qui sont matérialisés, donnant ainsi du sens au mot dizaine. Il n'en reste pas moins que dans ces explication il peut arriver que l'enseignant écrive « 10 », c'est un écueil qui nous semble difficile à éviter. Par ailleurs, dans les situations proposées, les désignations parlées utilisées sont, un, deux, trois,..., neuf, mais aussi dix. Ceci peut faire apparaître ce dernier nombre au même niveau que ses prédécesseurs, alors que ce n'est pas le cas dans le système de numération des écritures chiffrées. La numération parlée en France (dans son interprétation ordinale) est utilisée *a priori* uniquement comme outil pour constituer ou vérifier des groupements de dix. Ainsi, une difficulté supplémentaire peut apparaître quand est abordée l'écriture chiffrée « 10 », plus encore que pour les écritures des nombres déjà connues des élèves. Un autre choix de compteur est théoriquement envisageable (voir le deuxième chapitre de la thèse). Celui pour lequel nous avons opté vient du fait que la comptine numérique est disponible aux élèves. Un autre compteur demande un apprentissage spécifique qui peut générer des difficultés potentielles pour la transposition didactique de la proposition auprès des enseignants.

➤ Un milieu matériel complexe à gérer

L'importance de la disposition des objets des collections présentées et de la durée d'exposition joue de manière importante sur les stratégies mobilisables et leur efficacité. Si, dès que les collections sont suffisamment importantes (y compris les groupements quand ils sont constitués), les stratégies de comptage semble pouvoir être bloquées, il est possible cependant que des stratégies de calcul puissent apparaître au lieu des évaluations basées sur le subitizing (simple ou double) envisagées. Les élèves n'ont cependant pas des habiletés de calcul développées, ce qui relativise l'émergence de cette possibilité. Il n'en reste pas moins que la durée d'exposition peut être un paramètre difficile à gérer, en particulier dans le simple et double subitizing puis dans la comparaison de productions graphiques. Le fait qu'une règle du jeu consiste à rendre collective la réussite de la tâche, peut permettre de procurer une certaine « marge d'erreur » à l'enseignante en ce qui concerne cette durée. Les conditions matérielles sont des paramètres avec lesquels il faut aussi compter (disposition des objets, forme, taille, couleur, disposition des élèves par rapport aux collections, etc.), ce qui peut rendre complexe l'installation du milieu.

➤ Le travail des élèves sans l'enseignant : un milieu qui évolue

Nous envisageons aussi des situations où les élèves sont seuls, en particulier pour la validation. Certains peuvent alors l'effectuer par comptage. La situation installée dans ces séances ou l'enseignant n'est pas là pour imposer une validation par bijection n'assure pas que la numération parlée en France ne soit pas utilisée. Ceci pose le problème de rendre disponibles (ou tout au moins mobilisables) pour les élèves le recours à des validations terme à terme, même quand ils sont seuls. Est-ce que les séances collectives de la séquence proposée sont suffisantes ?

➤ De la comparaison à une indication de la différence

La bijection utilisée dans la validation matérielle peut mener les élèves et/ou le professeur à transformer le problème de comparaison en un problème de la structure additive. En effet, la question posée peut devenir : « combien il y en a en plus ou en moins ? ».

➤ Les expressions mobilisables par les élèves, les formes prises par les mises en forme des connaissances

« Combien », « plus », « moins », « autant », « égal », « dizaine », « unité », etc. sont des mots qui sont susceptibles d'être utilisés par les élèves et/ou l'enseignant. Leur usage peut entraîner des incompréhensions à la fois dans la dévolution, dans la validation, mais aussi dans la phase de bouclage (débat intellectuel). Se pose en particulier le problème de la mise en forme des connaissances élaborées au fur et à mesure de manière verbale. Nous avons indiqué qu'une possibilité consistait en des affichages, mais, quelle que soit la solution retenue, se pose la question des signifiants utilisés.

Pour éviter ces écueils, il est possible de « préparer » le terrain, ce qui est en particulier l'objet du paragraphe suivant

c. La position de la séquence dans une progression

D'après les éléments théoriques retenus pour appréhender dans notre thèse l'enseignement, l'apprentissage et la conceptualisation, il est nécessaire de considérer les apprentissages sur un temps long et de connecter dans l'enseignement différents aspects des notions abordées (en référence à la TCC) afin de rendre *in fine* disponibles les connaissances. Notre ambition ici n'est pas d'aborder les détails d'une progression sur l'année, mais de resituer la séquence principale indiquée auparavant, en indiquant les grandes étapes que l'itinéraire cognitif d'enseignement que nous proposons impose. Nous allons proposer une ossature de la progression autour de la séquence précédente, considérée donc comme la séquence pivot, afin de faire ressortir les points incontournables inhérents à l'itinéraire, ossature qui va être le support à poser des questions pour de futures recherches dans le paragraphe 3 de ce chapitre.

1. Le renforcement de connaissances afin de les rendre mobilisables dans la séquence présentée ci-avant : le champ numérique est en particulier celui des nombres inférieurs à dix
 - Connaissances sur l'énumération.
 - Concept de collection.
 - Connaissances relatives au dénombrement à l'aide de la comptine numérique.
 - Les constellations du dé : les élèves doivent être capables de les nommer, de comparer des quantités figurées par des constellations du dé sans avoir recours à un dénombrement par comptage, tout particulièrement pour les constellations 5 et 6.
 - Utilisation de la validation par comparaison terme à terme dans différents problèmes.
 - Abord de problèmes de la structure additive
 - Approche du calcul mental
2. Construction du code (écriture chiffrée) qui désigne le cardinal d'une collection
 - C'est la séquence décrite précédemment.
3. Consolidation : coder et décoder pour résoudre des problèmes
 - Variations des problèmes à résoudre
 - Changement de contextes
4. La numération parlée en France
 - Problème de la structure additive (calcul mental)
 - Variations des problèmes à résoudre
 - Changement de contextes
5. Le lien avec la numération parlée en France
 - L'addition posée versus le calcul mental
 - Les nombres au-delà de cent.

Les éléments à insérer dans la progression :

- les désignations orales jusqu'à trente
- les désignations chiffrées jusqu'à 30 : entretien des connaissances de la maternelle, sans enseignement systématique avant la séquence concernant leur émergence comme code d'organisation de collection
- lien écriture chiffrée/désignations orales au-delà de dix,
- les désignations orales au-delà de trente,
- écrire avec des mots les désignations orales,
- les écritures chiffrées pour se repérer, divisées en deux grandes catégories :
 - les écritures gardant une trace de la structure d'ordre sur les cardinaux (inférieur à, supérieur à, égal à) :
 - l'ordre des nombres qui servent dans les mesures (durée, longueur), qui garde encore une trace des unités, l'unité ayant été fixée³²⁴,
 - l'ordre des nombres qui indiquent la succession temporelle d'événements (il a le numéro « 1 » car il est arrivé en 1^{er}), ou un rangement spatial (numéro des rues -l'indication de l'ordre n'est pas toujours fiable-, numéro des pages).
 - les écritures chiffrées qui servent à donner des renseignements : il n'y a plus ni de relation d'ordre ou d'indication de quantité (numéro de sécu, numéro de maillot de joueurs, numéro de code barre, etc.).

Avant la séquence pivot (placée en 3), du fait de l'itinéraire cognitif lui-même, il est nécessaire de rendre disponibles des connaissances techniques afin d'anticiper certaines difficultés : énumération, comptine, suite des écritures chiffrées jusqu'à 9, validation terme à terme, résolution de problèmes relatifs aux nombres mettant en jeu des groupements. Ceci va participer à la conceptualisation du nombre afin de ne pas l'aborder uniquement via la numération parlée en France. Le champ numérique est tout d'abord surtout celui des nombres inférieurs à dix et ne concerne pas les nombres au delà de trente : en particulier il est important que les apprentissages ne concernent pas la comptine numérique au-delà de trente, et que seules les écritures chiffrées des nombres inférieurs à neuf soient réellement en jeu³²⁵. L'objectif est que les problèmes abordés, en particulier les calculs mentaux dans la structure additive, participent à la conceptualisation du nombre sans que ce dernier soit perçu uniquement par les désignations parlées en France.

Après la séquence pivot, les éléments que nous mettons en avant sont à considérer moins comme des étapes qui se succèdent dans cet ordre que comme des nécessités de l'itinéraire. Cependant une étape importante est identifiée, c'est celle dans laquelle les problèmes amènent les élèves à comparer la pertinence des stratégies utilisant les écritures chiffrées et celles utilisant la numération parlée en France. Pour ce faire, les élèves doivent aussi acquérir des habiletés procédurales qui permettent de mobiliser des connaissances dont ils sont sûrs.

La progression que nous proposons ne donne que des axes et permet de présenter certains problèmes. En outre, elle peut servir de base pour en élaborer une de manière plus concrète en vue d'une expérimentation. En effet, seule une recherche basée sur une étude expérimentale en classe nous semble susceptible de répondre aux questions qui se posent à ce stade de la recherche sur le choix et l'agencement des situations à proposer aux élèves en classe.

³²⁴ Le mot « unité » est polysémique : chiffre unité dans la numération, unité de mesure (en particulier quand on compte le nombre de dizaines, la dizaine devient l'unité de mesure), élément d'un ensemble quelconque... Ainsi le mot « unité » peut désigner à la fois ce qui reste quand on a organisé une collection en centaines, dizaines, etc. (ce qui va correspondre au chiffre unité de la numération chiffrée) et chacun des éléments de la même collection.

³²⁵ Il n'est pas possible d'éviter que celles-ci soient utilisées dans la date ou autres contextes culturels.

3.2 Des questions pour la recherche

La proposition a un double statut. Elle permet de mettre en exergue plusieurs questions qui alimentent la recherche et a aussi un intérêt méthodologique car elle peut constituer un support « concret » pour une expérience en classe. Après avoir fait un bilan de la proposition (§a), nous proposons deux niveaux de questions qui sont interdépendants : des questions liées à la proposition (§b) et des questions liées à l'itinéraire (§c). Nous allons en indiquer les aspects qui nous semblent les plus représentatifs, sans prétendre épuiser le sujet. Une autre question de recherche peut être explorée, c'est celle relative à l'utilisation de l'effet bouclage (une réduction de marges de manœuvre) comme levier pour construire des situations d'apprentissage robustes. Nous ne développons pas cette possibilité.

a. Bilan de l'analyse

L'analyse précédente met en relief le fait que notre proposition s'inscrit dans l'itinéraire cognitif de type 3. Elle indique une possibilité de réalisation en classe, ce qui constitue déjà une réponse à la question de savoir si cet itinéraire est « réellement » envisageable en classe, question légitime du fait de ne pas le voir apparaître clairement dans les manuels. En outre ce choix est cohérent avec les résultats de la première partie de thèse concernant le lien entre l'écriture chiffrée et l'organisation d'une collection à travers les procédés concrets de mise en signes de son cardinal. En effet, nous avons dégagé le fait que, pour l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée, l'organisation était un but à atteindre avant de coder, alors que pour les interprétations de la numération parlée en France³²⁶, l'organisation était une conséquence des structures linguistiques au moment de considérer les procédés concrets de mise en signes. En particulier, dans ces derniers, l'organisation n'est pas obligatoirement encore visible à la fin du procédé, et, si elle l'est, les raisons sont liées à d'autres nécessités, mémorielles en particulier. Ces considérations ont été prises en compte dans la distinction des différentes stratégies de dénombrement que nous avons indiquées dans le chapitre 4, paragraphe 3. En outre ce choix est cohérent avec notre analyse en classe et celle des recherches. En favorisant les stratégies « organiser/configurer pour désigner » il permet théoriquement d'éviter de faire apparaître des expressions de type « désignation des groupements » comme issues d'un comptage. Le nombre est en jeu, mais il n'est pas associé au signifiant constitué du dernier mot obtenu après un comptage ou un calcul. Qui plus est les désignations parlées en France ne sont utiles que pour constituer des groupements. Ceci convoque donc les conceptions anciennes des élèves sur le nombre, les mettant dans un contexte numérique, tout comme le fait le problème de comparaison de cardinal de collection. Cependant, la situation proposée nous semble comporter des potentialités qui font que les interprétations anciennes peuvent moins interférer avec celle qui est visée, à l'inverse de ce qui a été analysé dans les séances filmées en classe. En effet, d'une manière générale nous avons relevé dans l'analyse des séances en classe l'emploi de différents signifiants pour des explications et aides, dans différentes phases, selon différents contrats. L'analyse que nous avons faite de la proposition indique que ceux-ci sont susceptibles de moins intervenir. Ceci est dû au type de problème posé (qui ne peut être résolu par comptage), au mode de validation proposé (qui ne demande pas de signifiant écrit ou oral du nombre, tout en mettant en jeu la cardinalité), mais aussi au fait que les écritures chiffrées n'apparaissent que tardivement dans la progression.

Finalement, différents aspects sont questionnés dans l'interprétation de référence, ce que nous avons analysé à la fin de l'analyse des manuels comme plus problématique dans les itinéraires 1 et 2. A la fois au niveau de la première partie de l'interprétant, groupements,

³²⁶ Comme vraisemblablement dans les systèmes parlés d'autres pays, y compris en Asie, ce qui est d'ailleurs un élément qui distingue une interprétation multiplicative et l'interprétation de référence.

régularités et maximalités, que de la deuxième partie, la mise en signes, discussion sur l'utilisation des ordres et les coefficients, choix de l'ordre et nécessité du zéro. Nous avons aussi mis en évidence des écueils qui vont alimenter certaines de nos questions.

b. Les questions relatives à la proposition

Si une analyse théorique permet de justifier la proposition, son expérimentation doit permettre de répondre à certaines questions. Est-ce que le milieu et les contrats envisagés permettent que les situations restent problématiques et que les solutions envisagées dans l'analyse *a priori* soient celles qui interviennent en classe ?

De manière plus précise, du côté des élèves : Quelles vont être leurs propositions ? Quels facteurs les influencent-ils ? Le problème se pose en particulier au moment des ruptures, mais aussi dès le début. Ainsi, par exemple, quatre, est-ce bien la « limite » du subitizing³²⁷ ? Qu'en est-il du « double » subitizing³²⁸ ?

Ensuite se posent des questions relatives aux temps dévolus aux « entraînements » et à leur place. Pour qui ? Selon quelles modalités, individuelles, collectives, en groupes ? Selon quelle variété des problèmes ?

En outre, dans les déroulements, quels vont être les signifiants utilisés ? Ceux dont nous avons voulu « retarder » l'utilisation, comme les désignations de la numération parlée en France, vont-ils intervenir ? A quels moments, pour quelles raisons ? Quels en sont les conséquences ? Comment vont intervenir ceux qui sont susceptibles d'être en jeu, des désignations orales des groupements (OG) puis des productions graphiques (GraC) ? Comment organiser la mise en forme des connaissances et de manière plus général le processus d'institutionnalisation ?

Les alternatives et ruptures sont à questionner : en quoi sont-elles nécessaires ? Qu'y perd-on et qu'y gagne-t-on au niveau de la situation, au niveau de l'itinéraire, au niveau des facilités de gestion ? Les deux dernières étapes génèrent des questions spécifiques, par exemple sur l'emploi de la calculatrice. Quelle nécessité, quelles alternatives étudier ?

Finalement des questions se posent sur la progression sur l'année et sa programmation en ce qui concerne la nature des liens entre la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France, leur articulation dans le temps. Des contraintes proviennent de l'itinéraire choisi, mais ceci laisse des possibilités. Quelles décontextualisations ? Quelle variété des problèmes à aborder ?

c. Les questions générales relatives à l'itinéraire

Les questions « théoriques » : certaines peuvent s'étudier au niveau de la séquence, d'autres au niveau de la progression sur l'année voire sur un temps plus long.

➤ Les questions d'essence épistémologique :

Comment aborder le passage au groupement de groupements ? Est-il nécessaire de considérer les nombres au-delà de cent au CP ? Quand ? Est-ce dès l'introduction de l'écriture chiffrée dans son aspect positionnel ?

L'interprétation de la numération écrite chiffrée que nous avons définie dans la première partie de la thèse distingue deux parties : les principes mathématiques et la mise en signes de ceux-ci. La proposition que nous avons faite articule ces deux parties de manière successive dans le temps. Est-ce la seule possibilité ? De manière générale se pose la question de l'articulation dans les apprentissages des différents aspects de l'interprétation de référence. Par exemple, le choix que nous avons fait est de construire le code et non pas de « retrouver » sa signification, de le décrypter

³²⁷ Il est possible de s'en assurer auparavant en le prévoyant dans une programmation adaptée. Une alternative envisageable dans la séquence proposée est de considérer des constellations du dé de quatre au lieu de cinq.

³²⁸ Nous n'avons pas trouvé de recherches s'y consacrant.

comme le ferait un archéologue. Les deux premières parties de la thèse légitiment ce choix, mais c'est aussi le cadre théorique de la TSD qui nous y a amené. Nous avons privilégié les situations installant un milieu matériel ayant certaines possibilités de rétroactions et ne proposant pas uniquement un problème intellectuel. Ceci amène à poser des questions de manière différente. Est-il envisageable de combiner les deux approches. ? Par exemple, une fois le code établi, le (re)questionner en le mettant en perspective avec d'autres systèmes de numération pour mettre en exergue certaines particularités du nôtre ?

- Les questions relatives à la place et au rôle des signifiants :
Quels « relais » sont envisageables, nécessaires, utiles, « nuisibles » ? (intervention d'autres signifiants, liens entre les signifiants écrits et oraux).
Est-ce qu'au niveau de l'itinéraire, l'écriture chiffrée peut servir de moteur pour rendre disponible la numération parlée en France dans une interprétation multiplicative ? Ou est-ce qu'il faut envisager cette évolution à part, puis étudier les liens entre les deux systèmes de numération ?
De manière plus générale, comment faire le lien entre la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée ? En particulier, une autre façon de percevoir notre proposition, et une autre manière de la justifier d'un point de vue didactique, est de se référer aux jeux de cadre de Douady (1987). Peut-elle être considérée comme la mise en place d'un cadre nouveau à la numération écrite chiffrée, cadre qui pourra jouer de manière dialectique avec celui qui a conduit à l'interpréter comme la forme écrite de la numération parlée en France ? Est-il possible d'envisager un jeu de cadres ?

Les questions « pratiques »

- La réalisation de l'itinéraire au quotidien et sur l'année :
Certains choix et alternatives de la proposition sont issus de compromis entre les potentialités de la situation (la répartition de la responsabilité du savoir en jeu, le milieu) et des contraintes relatives à l'itinéraire choisi, en particulier d'ordre épistémologique, afin en particulier de faciliter *a priori* la gestion des déroulements par l'enseignant. En outre l'étude faite en classe a montré le rôle joué par l'itinéraire dans les déroulements. Une question qui se pose alors pour un itinéraire cognitif de type 3 est la suivante : Quelles sont les tensions entre les nécessités de l'itinéraire, les choix didactiques et les contraintes propres à la classe ?
- L'existence et l'élaboration d'autres propositions pour réaliser cet itinéraire :
Ce point est un prolongement de la question précédente. Nous n'avons pas réussi à élaborer de situation « fondamentale » au sens de la TSD qui permettrait d'embrasser tous les propriétés relatives à l'interprétation de la numération écrite chiffrée. Existe-t-il des situations qui permettent de pallier tous les écueils inhérents au savoir en jeu, aux curricula des élèves et à l'enseignement comme gestion d'un milieu dynamique ? Existe-il en particulier des propositions qui permettent de pallier les quatre « ruptures » mises en exergue ?

d. Le problème de l'évaluation de l'itinéraire et de la proposition

Certaines questions liées à la proposition peuvent permettre de répondre à celles concernant les itinéraires de manière globale. Réciproquement des questions liées aux itinéraires sont nécessairement en jeu dans la proposition et ainsi les éléments de réponse à ces premières peuvent procurer des solutions à des problèmes concernant ces dernières. C'est d'une certaine façon ce que notre travail de thèse a contribué à faire.

Le problème se pose de « comparer » l'itinéraire 3 par rapport aux autres itinéraires. La discussion théorique que nous avons menée peut être prolongée mais aussi étayée par des expériences en classe.

Ainsi, les deux premiers itinéraires utilisent des désignations orales des cardinaux mobilisant les connaissances (anciennes) des élèves sur le nombre. Dans un itinéraire de type 3, se pose la question de pouvoir mobiliser ces connaissances alors que ne sont pas convoquées des désignations parlées au-delà de dix. Est-ce que le niveau de conceptualisation du nombre est « suffisant » pour envisager d'introduire les aspects positionnels des chiffres utilisant *a minima* la numération parlée en France ?

Si les élèves ont des connaissances sur les écritures chiffrées, ils peuvent alors les utiliser pour faire des calculs mentaux consistant à employer mentalement des algorithmes concernant des opérations posées. Dans le chapitre 5 concernant les recherches, nous avons vu que résoudre des problèmes de calcul mental à l'aide des repérants/appuis de la numération parlée en France permet de développer des connaissances mathématiques propres : à la fois sur la structuration de l'ensemble des nombres que permettent ces appuis, mais aussi de type algébrique, comme par exemple l'associativité, la commutativité et la distributivité. Le fait de rendre les connaissances relatives à l'écriture chiffrée disponibles plus tôt, peut-il être un obstacle à la disponibilité de celles qui peuvent intervenir par ailleurs dans le calcul mental via la numération parlée ?

Mais se pose aussi la question d'évaluer les apprentissages via l'itinéraire proposé.

Quelle est le niveau de mise en fonctionnement des connaissances produites ? Technique, mobilisable ou disponible ? L'évaluation ne peut qu'être relative à ce qui est visé, ce qui est « gagné » ou « perdu » par rapport à d'autres propositions, que ce soit dans le même itinéraire ou dans d'autres. Mais nous devons aussi considérer les potentialités de transposition dans un grand nombre de classes, la « robustesse » des propositions. Il ne s'agit pas d'en élaborer qui ne sont qu'efficaces dans une classe laboratoire, constituée de « bons » élèves, avec des enseignants formés spécifiquement pendant des années et pilotées par un chercheur ou un formateur.

Signalons pour finir que si notre proposition permet de poser des questions, elle limite aussi d'une certaine manière le champ de questionnement, puisqu'il provient de cette proposition particulière. D'autres interrogations peuvent ne pas nous être apparues, certaines sont susceptibles de surgir au moment d'entreprendre les recherches futures.

Conclusion de la thèse

La question initiale est celle de la compréhension de déroulements en classe de CP relativement à l'enseignement de la numération écrite chiffrée dans ses aspects positionnels. Ceci interroge la place des désignations parlées en France dans l'enseignement de la numération décimale de position. Comment en faire une aide et non un obstacle ? Nous avons choisi de partir d'une étude de la notion d'un point de vue sémiotique et mathématique, et plus précisément d'un point de vue linguistique en ce qui concerne la numération parlée, considérée comme un langage utilisé par les élèves et l'enseignant. Notre approche a consisté à utiliser successivement cette étude à différents niveaux non indépendants, des concepts aux apprentissages puis à l'enseignement. L'enseignement a été lui-même abordé à différents niveaux de transposition du savoir : les recherches, les manuels puis les déroulements en classe. Reconsidérer l'enseignement de la numération au CP par cette approche était susceptible de permettre de faire de nouvelles propositions pour l'enseignement afin de poursuivre la recherche.

Nous allons dans cette conclusion mettre en relief les questions et résultats qui se sont articulés au fur et à mesure. Nous discuterons ensuite des limites de l'approche adoptée avant d'indiquer des suites envisagées à ce travail.

De la non-congruence : deux numérations et différentes interprétations

Deux systèmes sémiotiques pour désigner les nombres interviennent au CP : la numération écrite chiffrée et la numération parlée en France. La sémiotique de Peirce nous a permis de considérer le signe comme une triade : l'Objet (le nombre), les Representamens (les signes dans leur « matérialité » constitués en système), l'Interprétant (la logique qui sous-tend le système de representamens). Nous avons utilisé une méthode d'analyse consistant à replacer les numérations dans des systèmes plus généraux pour en apprécier les particularités. Nous avons procédé en deux temps. Tout d'abord des signes vers les mathématiques, c'est-à-dire que nous avons indiqué quels principes (mathématiques) pouvaient modéliser les numérations afin qu'elles soient non ambiguës, exhaustives et non redondantes. Ceci constitue ce que nous avons appelé la première partie de l'interprétant. Ces modèles mathématiques sont cependant généraux. Ainsi sont-ils susceptibles d'engendrer d'autres numérations que celles qui nous sont données à voir. Etudier les choix spécifiques à nos deux numérations a constitué le deuxième temps de notre analyse, des mathématiques vers les signes. Nous avons la deuxième partie de l'interprétant, l'incarnation de ces principes dans la langue ou l'écriture, la mise en signes.

En ce qui concerne la numération écrite chiffrée, nous avons cherché nos modèles dans la théorie des langages. La première partie de l'interprétant est constituée des principes liés à la décomposition d'un nombre entier selon une échelle de numération régulière et plus particulièrement des principes de base k . La deuxième partie concerne le choix de dix comme base (il est aussi possible de le considérer comme faisant partie de la première partie), celui de n'utiliser que les coefficients pour la mise en signe, puis un choix graphique pour le representamen de chacun de ces coefficients et un dernier concernant leur disposition spatiale. Cette dernière doit permettre de relier les coefficients à leur ordre, ils acquièrent ainsi le statut de chiffre.

Le travail qui a concerné la numération parlée en France a été sensiblement différent du fait que les signes comportent une dimension linguistique. Les modèles mathématiques ne s'imposent pas. Nous avons recherché ceux qui avaient déjà été utilisés antérieurement. Un premier travail a été de les préciser. En utilisant une analyse syntaxique nous avons extrait trois modèles candidats. Ils ont constitué trois possibilités pour la première partie de l'interprétant : des principes arithmétiques multiplicatifs, arithmétiques additifs et ordinaux.

Nous avons utilisé des notions introduites par Cauty. Ainsi, au premier modèle est associée la notion d'appuis et appuyants multiplicatifs, au deuxième celle d'appuis et appuyants additifs, au dernier celle de repérant/comptant. Le deuxième mouvement, des mathématiques vers les signes, nous a permis de dégager la deuxième partie de l'interprétant. Le choix des appuis ou des repérants peut s'éclairer par certaines considérations linguistiques, comme une économie de mots ou des nécessités de non ambiguïté au niveau des concaténations contraignant un certain type de segmentation. Ces explications sont liées aux principes mathématiques mêmes : principe arithmétique additif et ordinal avec repérant d'un côté, principe arithmétique multiplicatif de l'autre. Elles n'ont pas permis d'obtenir des réponses complètes à toutes les questions sur les choix opérés dans la mise en signes. Deux aspects du nombre coexistent, l'aspect ordinal pour les nombres inférieurs à cent, et l'aspect cardinal.

L'étude menée est spécifique à la numération et elle utilise la sémiotique de Peirce sans en reprendre tous les aspects. Nous avons donc préféré utiliser le mot d'interprétation plutôt que celui d'interprétant. Ainsi, nous avons dégagé une seule interprétation pour la numération écrite chiffrée que nous avons qualifiée d'interprétation de référence, tandis que nous avons dégagé trois interprétations principales pour la numération parlée en France³²⁹. La pertinence de ces dernières a été discutée selon la distance entre la mise en signe constatée dans la numération parlée en France et celle du modèle. Celle-ci diffère selon le champ numérique. L'interprétation (strictement) ordinale domine pour les nombres inférieurs à seize. Entre seize et cent, une interprétation arithmétique additive ou une interprétation ordinale avec repérant est plus pertinente que ne l'est une interprétation arithmétique multiplicative. Cette dernière le devient pour les nombres supérieurs à cent, puis selon une base mille pour les nombres supérieurs à mille.

Nous avons alors comparé les deux numérations. Pour les nombres inférieurs à cent, l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée en France est la plus proche de l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. La première partie de l'interprétant est la même, elle est basée sur une échelle de numération régulière menant à la décomposition dite polynomiale (de base dix). Pour chaque numération cette première partie a été cependant dégagée par deux approches différentes : l'une mathématique via la théorie des langages, l'autre linguistique via une analyse syntaxique. Quant à la deuxième partie de l'interprétant, l'écriture chiffrée utilise uniquement les coefficients de l'échelle de numération, alors que la numération parlée utilise ordres et coefficients.

En ce qui concerne la numération parlée en France, nous avons mis en évidence que pour les nombres inférieurs à cent, l'interprétation arithmétique multiplicative était moins pertinente que les deux autres. Ce résultat, ainsi que les différences entre l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée et - d'une part l'interprétation arithmétique additive, d'autre part l'ordinale (avec repérants) - éclairent ainsi la non-congruence entre les deux numérations.

En outre, des considérations historiques nous permettent d'admettre que la numération parlée en France et la numération écrite chiffrée ont vraisemblablement quelques origines communes, mais pas d'ancêtre commun et donc *a fortiori* l'une n'est pas fille de l'autre. Toutes les deux ont à voir avec les numérations parlées de langues indo-européennes. Nous pouvons faire l'hypothèse que l'interprétation des premières numérations est avant tout ordinale puis ordinale avec repérants. Elles ont toutes les deux aussi à voir avec les premiers systèmes écrits des nombres. L'émergence de repérants basés sur « dix » ou sur des signes écrits signifiant « dix » étant vraisemblablement la conséquence de systèmes de comptage anthropomorphiques privilégiant les doigts des mains. Ce qui les distingue essentiellement c'est le caractère oral pour l'une et écrit pour l'autre, ce qui contraint les possibilités de type

³²⁹ On peut aller jusqu'à quatre si on distingue ordinale avec ou sans repérants.

de signe. Elles ont toutes les deux évolué concomitamment aux changements des sociétés humaines, et nous retenons pour notre propos qu'elles permettent de résoudre de manière différente et plus performante selon le contexte les problèmes que se sont posés les hommes³³⁰. Cependant la numération parlée en France (issue directement de la numération parlée latine) et la numération écrite chiffrée (issue de la numération écrite chiffrée indienne ou/et parlée en langue sanskrite) ne se sont côtoyées que tardivement.

Ainsi, si de manière formelle il est possible d'envisager de faire un lien entre les deux numérations via une interprétation multiplicative de la numération parlée, l'étude que nous avons menée met en évidence les différences avec l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée.

Ces différences se lisent en particulier dans les procédés de mise en signes « concrets » d'une collection. Ces procédés sont d'essence théorique, dans le sens où ce sont des algorithmes traduits en termes d'actions qui doivent s'effectuer en considérant une structure sous-jacente de la numération (une des interprétations). Nous avons alors indiqué que, non seulement il est difficile d'associer un unique algorithme à une interprétation (pour des raisons mémorielles en particulier), mais, même à ce niveau non didactique et non psychologique, des « actions » identiques peuvent être la traduction « concrète » d'interprétations différentes. La question se pose d'autant plus au niveau d'un sujet. Pour mener à bien des tâches relatives aux nombres, il emploie des systèmes de numération. Quel est alors le lien entre ces numérations (et les interprétations que nous avons dégagées) et la conceptualisation du nombre ? Ce sont ces questions qui ont été étudiées dans la deuxième partie de la thèse.

De la conceptualisation aux apprentissages et à l'enseignement

Qu'en est-il au niveau de la conceptualisation chez un sujet et plus particulièrement un élève de CP de l'école élémentaire ? La théorie des champs conceptuels nous a aidé à construire des outils méthodologiques pour aborder notre problème. Nous avons élaboré tout d'abord la notion de cheminement cognitif d'un sujet pour résoudre un problème. Ceci nous a permis de préciser ce que nous entendons par utilisation *a priori* de telle ou telle interprétation au niveau d'un sujet. Il s'agit d'un sujet générique résolvant un problème dont l'analyse didactique permet d'inférer que ses connaissances (techniques, mobilisables ou disponibles selon les cas) lui permettent de résoudre ce problème de manière efficace via une stratégie mettant en œuvre des théorèmes-en-acte dont la validité est justifiable par des propriétés de telle interprétation. Une analyse *a posteriori* est susceptible de permettre de confirmer ou d'infirmer l'analyse *a priori*.

Nous avons pu ainsi préciser les interprétations que les élèves de CP emploient *a priori*. Tout d'abord, ils fréquentent les nombres via l'utilisation de la numération parlée en langue maternelle, initialement dans une interprétation ordinale avec repérants. En effet, au CP, les élèves abordent une certaine variété de problèmes relatifs à la structure additive, mais la conceptualisation à ce sujet n'est que partielle. En conséquence, l'interprétation additive de la numération parlée ne peut être, elle aussi, que partielle. Des numérations à structure « régulière » sont susceptibles d'être introduites en classe, il est possible de penser que leur structure « régulière » (les appuis multiplicatifs étant prononcés) leur permet de résoudre les problèmes de la structure multiplicative de manière plus aisée. L'outil dont disposent les élèves a une forme plus « adaptée ». La théorie des champs conceptuels insiste sur les liens entre les signifiants, le signifié(s) et l'ensemble des problèmes qui donnent du sens au concept

³³⁰ Nous ne voulons pas dire que l'évolution constatée a été linéaire, ni que certains systèmes de numération sont supérieurs en eux-mêmes à d'autres, mais que certains sont plus à même de résoudre des problèmes. De manière réciproque les systèmes permettent d'explorer des nouveaux problèmes (en particulier dans le domaine mathématique) du fait de leur structure même.

(la référence). C'est donc en résolvant des problèmes relatifs à la structure multiplicative que les apprenants mobilisent véritablement cette interprétation arithmétique multiplicative, ce qui va dépendre du curriculum des élèves. Les difficultés d'apprentissage relevées par les chercheurs quand il s'agit de mettre en jeu les interprétations arithmétiques des numérations parlées, nous ont donc incité à considérer que l'emploi « arithmétique » au niveau des élèves de CP était à relativiser.

Par ailleurs la conceptualisation même du nombre est un processus encore loin d'être achevé en CP. En sont témoins les connaissances difficilement mobilisables en début de CP relatives à l'énumération ou encore aux groupements comme outil pour résoudre des problèmes. De ce fait, l'interprétation ordinale (avec repérants ou non) peut être considérée comme partielle. En outre, les résultats de recherches antérieures soulignent qu'une difficulté conceptuelle pour un apprenant réside dans le fait d'envisager d'utiliser deux signifiants de la numération parlée pour désigner le cardinal d'une collection : par exemple une désignation des groupements telle que « trois (dix/dizaine) et quatre (uns) » pour désigner trente-quatre éléments. Ainsi le passage à une interprétation multiplicative est problématique chez les élèves.

Nous avons mis en avant des problèmes non arithmétiques qui sont susceptibles d'être proposés très tôt dans l'année aux élèves de CP, puisqu'ils le sont dès la maternelle. Ces problèmes concernent le codage et le décodage du cardinal de collections ainsi que la comparaison de cardinaux. Nous avons décrit les cheminements cognitifs concernant la résolution de ces problèmes non arithmétiques et mettant en jeu les numérations, par exemple à partir de stratégies de base de type OF ou OF°. Ce sont eux qui apparaissent alors dans notre recherche comme susceptibles d'être supports à l'apprentissage des numérations et en particulier de l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée. Nous avons défini une stratégie particulière de dénombrement, « organiser/configurer pour désigner ». Elle permet de distinguer d'un côté les principes mathématiques et d'un autre la mise en signes. Si elle est utilisée, elle favorise l'utilisation d'une interprétation multiplicative ou de référence. Cette étude a été utilisée dans la troisième partie de la thèse.

Trois types d'itinéraires d'enseignement

Nous avons défini la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement relatif à la numération écrite chiffrée. Elle permet de tenir compte au niveau de l'enseignement à la fois des cheminements potentiels des élèves pour résoudre un problème et des interprétations des numérations. Nous avons établi une problématique en termes d'organisation de l'utilisation des interprétations des numérations pour faire évoluer celle de la numération écrite chiffrée. Celle-ci est en effet initialement considérée comme la forme écrite de la numération parlée en France, employée principalement dans une interprétation ordinale (avec repérants).

Les deux notions de cheminement et d'itinéraire, utilisées comme outil, ont permis l'analyse des recherches antérieures puis des manuels selon un nouvel angle, donnant ainsi la possibilité de comparer les points de vue qu'ils ont adoptés. Ceci nous a permis entre autres de tenir compte dans les recherches d'une multitude de signifiants. Ils ont été analysés comme prenant place auprès des deux numérations pour aider les élèves à rendre disponible l'utilisation de différentes interprétations des numérations. Nous avons dégagé trois types d'itinéraires différents selon les positions relatives des deux numérations.

Le premier consiste à faire en sorte que les élèves utilisent la numération parlée en France via une interprétation multiplicative. Cette interprétation permet alors de reconsidérer la signification des chiffres de la numération écrite chiffrée, puisque cette dernière est la forme écrite de la première.

Le deuxième type d'itinéraire consiste à introduire une numération orale « régulière », c'est-à-dire dans laquelle les appuis multiplicatifs sont prononcés (comme celles utilisées dans des

pays asiatiques). Son interprétation multiplicative est ainsi théoriquement plus aisée à convoquer. Dans les recherches que nous avons étudiées, l'écriture chiffrée reste toujours la forme écrite du nom des nombres prononcés dans cette nouvelle numération, ce qui permet comme précédemment de faire évoluer l'interprétation de la numération écrite chiffrée. En outre, ici, la numération orale régulière, mise en parallèle avec la numération parlée en France, peut permettre d'utiliser cette dernière dans une interprétation multiplicative.

Le dernier itinéraire est moins identifiable dans les articles que nous avons consultés. Il apparaît cependant comme une possibilité théorique que certains chercheurs envisagent, ou tout au moins n'interdisent pas. Il consiste à ne pas utiliser la numération parlée en France, ni un autre système de numération oral, pour aborder initialement les aspects positionnels de l'écriture chiffrée. Il s'agit de mettre en lien « directement » le code chiffré et l'organisation d'une collection afin de ne pas convoquer chez les élèves les interprétations ordinales ou arithmétiques additives. En proposant en particulier l'étude de différentes bases, l'enseignement des années 70 en France et en Suisse romande, Conne (2001), nous semble emprunter cet itinéraire. Mais celui-ci ne se restreint pas à cette unique possibilité, tout au moins en théorie, la preuve en a été apportée dans le chapitre 9 de notre travail.

Des itinéraires qui offrent des perspectives différentes

Les deux premiers itinéraires sont ceux que nous avons identifiés dans les manuels actuellement disponibles en France. Via les numérations orales, ils ont l'avantage d'utiliser les concepts relatifs aux nombres fréquentés par les élèves en début de CP. Ils nécessitent de faire évoluer l'interprétation d'une numération orale en y associant celle de la numération écrite chiffrée. Cela engage à continuer à envisager la numération écrite chiffrée comme la forme écrite de la numération parlée en France et, en outre, pour l'itinéraire de type 2, comme la forme écrite d'une numération orale annexe. En conséquence, l'interprétation initialement objet d'un nouvel apprentissage est d'essence multiplicative. Dans les deux cas, les apprentissages proposés sur un long terme sont susceptibles de rendre disponible au fur et à mesure l'interprétation de référence. Cependant, certains problèmes sont difficilement abordables, tout au moins initialement : ceux afférents aux choix mathématiques tels que les groupements, les groupements de même cardinal, le cardinal dix ; ceux afférents aux choix de mise en signes qui découlent de l'utilisation exclusive des coefficients pour coder l'organisation, tels que le nombre et la graphie des chiffres, leur disposition spatiale et le zéro. En outre, dans l'enseignement, ces écritures chiffrées peuvent-elles apparaître autres que comme issues de la numération parlée ? L'étude de la première partie de la thèse montre qu'elles ne le sont pourtant pas.

Le troisième type d'itinéraire a l'avantage de pouvoir théoriquement faire apparaître les écritures chiffrées via l'interprétation de référence et de pallier dès le début les « manques » des deux autres itinéraires. Il peut aussi permettre d'éviter les confusions entre les différentes interprétations que peuvent évoquer les noms des désignations parlées en France. Cependant, en minimisant initialement le rôle de la numération parlée en France, le risque majeur que nous avons souligné est de ne pas pouvoir disposer des concepts relatifs aux nombres que celle-ci véhicule.

Les propositions des manuels scolaires en vigueur peuvent être classées dans des itinéraires de type 1 ou 2. Pour deux d'entre eux, un de chaque itinéraire, nous avons étudié la manière dont était investie une certaine marge de manœuvre des itinéraires. Nos analyses ont contribué à établir les constats ci-dessus, mais il est apparu que les interprétations que nous avons dégagées pouvaient intervenir de manière multiple, et non nécessairement à bon escient. Ceci est sensible tout particulièrement dans les séquences clés. Elles concernent le moment de première rencontre avec une interprétation multiplicative de l'écriture chiffrée, c'est-à-dire le moment où chaque chiffre de l'écriture chiffrée est relié à son ordre (dizaine, unité).

Le jeu des interprétations dans la conduite de classe

Au-delà de l'itinéraire, le problème que nous avons identifié au niveau de la classe est de « dire » les nombres, au risque d'évoquer les interprétations anciennes dans les échanges oraux, alors qu'une nouvelle interprétation est visée. Ce problème est particulièrement sensible au moment d'enseigner les aspects positionnels de l'écriture chiffrée. Il est absolument incontournable dans les deux premiers itinéraires bien qu'il se pose de manière différente dans le deuxième si on envisage d'évoquer le nombre par le biais d'une nouvelle numération régulière. Il peut être aussi en jeu dans le troisième du fait que les situations concernent les nombres, nombres qui sont initialement perçus comme confondus avec leur désignation parlée. En outre, les écritures chiffrées et les désignations parlées des nombres sont utilisées par les élèves dans des contextes variés, différentes interprétations sont donc susceptibles d'être convoquées pour un même signe.

L'étude des déroulements en classe a fourni des informations à la fois sur les écueils que peuvent comporter les deux premiers itinéraires et sur les possibilités de réalisation du troisième. Notre étude ne met donc pas le focus sur les possibilités de ces deux premiers itinéraires ni sur les écueils du troisième. Concernant l'introduction de l'interprétation arithmétique multiplicative de la numération parlée en France, ces écueils sont en partie dus aux situations favorisant des stratégies de comptage et aux connaissances anciennes des élèves. Le nombre est assimilé à sa désignation parlée en France. La difficulté conceptuelle consistant à utiliser une désignation de l'organisation comme désignation du cardinal d'une collection reste prégnante pour au moins une partie des élèves. Ceci avait été envisagé par les recherches dont nous avons fait état. Nous avons aussi indiqué les difficultés pour les acteurs de la classe à ne pas faire systématiquement référence dans leurs échanges à l'écriture chiffrée en tant que forme écrite des désignations parlées en France. Par ailleurs, il apparaît que certains aspects de l'interprétation de référence ne sont effectivement pas abordés. Ce sont ceux que nous avons indiqués dès l'analyse de l'itinéraire.

Alors qu'un même manuel est utilisé, l'observation de deux classes montre que l'écriture chiffrée peut ne pas être présentée de la même manière aux élèves. Dans une classe, elle semble un moyen pour faciliter une interprétation multiplicative de la numération parlée, dans l'autre, elle est un moyen pour résoudre « directement » des problèmes, sans passer par la numération parlée, ce lien direct ayant été justifié par ailleurs. Nous avons analysé ce constat comme la conséquence de conceptions différentes des enseignantes relativement au savoir à enseigner. L'emploi de différents moyens selon la classe pour faire en sorte que tous les élèves puissent « réussir » est influencé par les conceptions sur l'enseignement, identiques dans leurs finalités.

Dans les phases collectives, pour les deux classes, ce sont avant tout les validations des productions des élèves qui sont en jeu et elles ne se font pas nécessairement en explicitant les stratégies que ceux-ci ont utilisées. Or, les problèmes qui ont été proposés engagent à utiliser des stratégies favorisant l'emploi d'une interprétation multiplicative, ce que font moins les différents types de validation des productions obtenues. L'analyse a montré que les tâches proposées aux élèves engageaient des stratégies qui servaient *a priori* aux objectifs de la séance, mais que les connaissances anciennes qu'ils pouvaient mobiliser permettaient difficilement à un nombre non négligeable d'entre eux de les utiliser. Les recherches antérieures que nous avons consultées nous permettent d'envisager que ce constat pourrait se généraliser à la plupart des classes. Dans le contrat entre l'enseignant et les élèves, contrat qui nous semble provenir des règles du métier d'enseignant, ce nombre est suffisamment important pour que les enseignants soient contraints d'apporter des changements significatifs au déroulement et aux tâches prévues dans la séquence proposée par le manuel. Par ailleurs, nous avons montré un décalage entre les stratégies utilisées par les élèves et celles qui étaient

potentiellement en jeu dans les validations collectives. Or, celles-ci sont susceptibles d'être support à des formes d'institutionnalisation, ce qui peut générer des difficultés d'apprentissage et d'enseignement.

Nous avons mis en forme certains de ces résultats à l'aide des composantes de la double approche. Un premier tableau met le focus sur le fait que l'enseignant doit composer avec des occurrences de confusions générées par l'utilisation des signifiants, en particulier dans les moments collectifs, quand il doit conclure la séance ou/et la séquence. Le deuxième reprend cette idée en précisant ces moments (analysables par l'outil « phase de bouclage ») et en mettant l'accent sur les éléments relevant de la composante cognitive qui favorisent une réduction de marges de manœuvre. Ceci permet en particulier de définir un « effet bouclage » qui ne génère pas nécessairement des écueils pour l'enseignement ou/et l'apprentissage. Cet effet peut donc être un levier pour élaborer des situations « robustes » en classe ordinaire. Par ailleurs, nous avons mis en évidence l'influence des ressources dont peut disposer l'enseignant dans sa classe : les tâches proposées par un manuel mais aussi les différents signifiants du nombre utilisés.

Une proposition support à de nouvelles questions pour la recherche.

Le chapitre 9 s'est nourri des résultats obtenus au fur et à mesure de l'avancée du travail : du côté du savoir à enseigner et du côté des déroulements en classe de CP. Nous avons investi certaines marges de manœuvre, celles concernant un itinéraire de type 3 favorisant des stratégies « organiser/configurer pour désigner » et limitant dans les situations de classe la survenue des interprétations non congruentes de la numération parlée en France. Dans cette conclusion, nous n'allons pas revenir sur les nombreuses questions qui se posent encore, elles ont été exposées dans le dernier chapitre. Nous voulons mettre en relief que notre proposition est un premier prolongement de notre travail, il appelle de futures recherches. Nous espérons avoir montré que notre ambition n'est ni de « réhabiliter » les « mathématiques modernes », ni de sous-estimer les apports de la numération parlée sur la conceptualisation du nombre. Elle tend à intégrer les deux points de vue. Notre proposition vise à poursuivre la recherche : comprendre ce qui « se passe » en classe, avec comme horizon de permettre de faciliter l'apprentissage et l'enseignement dans une classe de CP de nos jours, d'étudier des phénomènes d'enseignement (l'effet bouclage entre autre) et enfin de poursuivre des investigations du côté des élèves concernant leur conceptualisation du nombre, en particulier à travers l'étude de l'évolution des liens entre procédures et interprétations (au sens de la thèse).

Intérêt du travail entrepris

La démarche consistant à faire une nouvelle étude du contenu mathématique en tant que savoir savant puis savoir à enseigner et finalement savoir enseigné est nécessairement longue. D'une certaine manière, elle est aussi « coûteuse » au niveau théorique. Elle nécessite en effet de mobiliser des notions issues de cadres très différents : mathématique, sémiotique, psychologique et didactique. Ceci demande alors une articulation. Ce coût nous a semblé nécessaire du fait de la nature du problème étudié qui est au carrefour d'approches diverses qui ne sont pas consensuelles sur la manière de surmonter des difficultés persistantes, tant du côté de l'apprentissage que de l'enseignement. Ce problème concerne un savoir naturalisé et dont les signifiants véhiculent des interprétations multiples, non-univoques. Nous pensons avoir montré que notre démarche a produit des résultats.

Tout d'abord nous avons obtenus différents résultats concernant le contenu mathématique, les numérations. Nous avons pu alors reconsidérer l'apprentissage du nombre en privilégiant les relations particulières, signifiants/signifié(s). Ceci nous a permis d'obtenir une grille d'analyse pour classifier les orientations prises concernant l'enseignement au niveau des recherches et des manuels scolaires. L'ensemble de ce travail a permis d'analyser des déroulements en classe dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique :

certaines gestes professionnels, communs à tous les enseignants, du fait de certaines spécificités du savoir à enseigner, favorisaient l'émergence de confusions chez les élèves.

Un deuxième type de « résultat » vient du fait que nous avons pu élaborer une proposition en direction des enseignants dans des classes « ordinaires ». Celle-ci est légitimée par nos résultats précédents mais, en outre, elle est accompagnée de questions précises et notre recherche fournit un cadre pour les étudier. L'idée d'une telle proposition aurait certes pu germer sans cette thèse, mais les éléments qu'elle rassemble ainsi que la forme des questions qui se posent nous semblent résulter de notre travail. Il s'agit avant tout d'un « résultat » utile à la recherche dans le sens où nous avons élaboré un outil pour poursuivre l'étude.

Finalement notre démarche a produit des outils théoriques utiles pour l'analyse (organiser/configurer pour désigner, itinéraire cognitif d'enseignement, cheminements cognitifs, phase de bouclage) et a exploré des articulations théoriques.

Limites et perspectives

Il nous semble que la nature de nos résultats et certaines limites à notre travail offrent des perspectives pour de nouvelles recherches.

En premier lieu, l'ingénierie à laquelle nous avons abouti est à tester. Ce nouveau travail permettra d'indiquer en quoi notre démarche peut être productive. A la fin du chapitre 9, nous avons soulevé les questions qui pouvaient être étudiées. Nous n'y revenons pas ici. Signalons néanmoins qu'une étude plus approfondie auprès des élèves peut mener à mieux cerner les classes de problèmes du champ conceptuel concernant la numération. C'était une question qui restait en suspens dans le chapitre 4. Par ailleurs, nous avons privilégié l'interprétation de référence dégagée dans la première partie de la thèse, mais d'autres propositions sont envisageables, y compris en considérant celles déjà élaborées. Une interprétation (arithmétique) multiplicative utilisant une numération « en unités » est aussi un choix possible, c'est par exemple celui de Chambris (2008). Son étude concerne cependant prioritairement l'année de CE1, c'est-à-dire celle qui suit le CP, et qui fait donc suite à l'introduction des aspects positionnels de l'écriture chiffrée. Des questions se posent alors : est-il possible de réaliser un itinéraire de type 3 en prenant pour référence une interprétation (arithmétique) multiplicative, avec comme support une numération en unités ? Est-il possible de croiser les deux approches ?

Quelle que soit l'étude menée, il nous semble aussi qu'elle doit aborder la question de la transposition didactique en classe, en particulier via les ressources qui peuvent être proposées à l'enseignant.

Nous pouvons aussi interroger différents points de notre approche. D'autres choix, concernant les cadres théoriques sont envisageables. En outre, il nous semble que chaque partie de la thèse pourrait profiter d'approfondissements spécifiques en particulier grâce à des apports de spécialistes.

Par ailleurs nous avons été amené à définir deux notions d'essence théorique, les cheminements et les itinéraires, notions que nous avons utilisées en tant qu'outils pour analyser l'enseignement. Nous avons voulu d'une certaine manière faire un lien entre les stratégies en référence à la théorie des situations et les théorèmes-en-acte de la théorie des champs conceptuels. Cette tentative nous semble nécessiter une étude complémentaire.

Ces deux outils sont emblématiques du travail que nous avons dû entreprendre pour articuler les cadres théoriques. Nous avons dû tenir compte à la fois de ce que chaque théorie apportait de manière générale et des spécificités de notre objet de recherche. Ainsi certains choix sont susceptibles d'être généralisables, d'autres restent spécifiques. Ceci se cristallise en particulier au moment de l'analyse des déroulements en classe dans laquelle interviennent la théorie des champs conceptuels (cheminements, signifiants, signifié(s), théorèmes-en-acte), la double

approche (tâche/activité, enseignant exerçant un métier, une méthodologie en deux temps utilisant cinq composantes) et la théorie des situations (situation, milieu, contrat). Notre travail profiterait d'une étude critique plus approfondie.

Si chaque partie de notre travail peut être reprise et approfondie, le chapitre 8, celui qui concerne les déroulements en classe nous semble offrir des perspectives particulières. Nous avons le sentiment que l'analyse que nous avons faite nous a beaucoup apporté, mais la richesse des données recueillies ne nous semble pas avoir été complètement exploitée. Nous n'avons pas, par exemple, regardé en détail le décalage entre la tâche proposée par le manuel, celle que l'enseignante a redéfinie et celle effectivement réalisée. Ceci pourrait nous servir pour l'étude de la transposition didactique que nous envisageons via l'ingénierie.

Si notre approche se révèle pertinente pour étudier d'autres problèmes, ceci motiverait aussi l'étude des questions précédentes. Nous pensons que certaines notions à enseigner ont des parentés avec la numération écrite chiffrée au CP. Ce sont celles qui sont susceptibles de mettre en jeu des interprétations multiples qui doivent être différenciées selon la forme écrite et orale. C'est le cas, par exemple, des fractions ainsi que des décimaux pour les élèves de 9-10 ans du cours moyen élémentaire première année (CM1). Les signes écrits disent « autre chose » que les désignations orales, les mots de la langue française. Pourtant ce sont les mots qui vont servir dans la classe à les désigner et à désigner les nombres. Par exemple « $\frac{3}{4}$ » est dit « trois-quarts », « trois quarts », « trois sur quatre », « les trois quarts de », « trois fois un quart », etc. Que donnent-ils à « voir », à comprendre du nombre ? En outre, avant d'être objet d'un enseignement spécifique au CM1, ces mots et ces signes sont « connus » des élèves dans leurs emplois courants, mais pas nécessairement en classe.

Vouloir traiter l'enseignement d'une notion en reprenant une étude « exhaustive » du savoir savant jusqu'aux déroulements en classe comporte le biais de ne pas approfondir chaque étape, en raison de la multiplicité des disciplines connexes convoquées et du temps que nécessiterait une étude approfondie de chaque domaine théorique. Nous soupçonnions que l'étude du savoir fût plus complexe qu'elle pouvait apparaître au premier abord. Mais nous ne doutions pas de l'ampleur qu'elle allait prendre. C'est à partir de celle-ci qu'allait alors être pensée la thèse. Ceci nous a amené à opter pour un plan dont chaque partie nécessitait de nouveaux apports théoriques et dont les conclusions orientaient la suite.

Notre volonté a été de pouvoir rendre explicite nos choix, afin que notre travail soit réfutable (*falsify*) au sens de Popper. Nous espérons que cela a été le cas.

Nous pensons avoir donné des éléments de réponses aux questions initiales, celles concernant le rôle des désignations parlées en France dans l'enseignement de la numération décimale de position pour comprendre les déroulements en classe « ordinaire ». L'expérimentation en classe de l'ingénierie nous semble un prolongement indispensable à notre recherche.

Bibliographie

1. AIGOIN C. & DEBOURG V. (2004) *Du dénombrement terme à terme aux groupements réguliers : un pas nécessaire vers la compréhension de notre système de numération positionnelle !*, Grand N n°73, pp.49-65.
2. BAROODY A.J. & TIILIKAINEN S.H. (2003), cité par Verschaffel & Al. (2006) *Two perspectives on addition development*. In :A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills*, pp. 75-126.
3. BASSIS O. (2003) *Concepts clés et situations problèmes*, Hachette Education, Paris.
4. BEDNARZ N. & JANVIER B. (1982) *The understanding of numeration in primary school*, *Educational Studies in Mathematics*, 13, pp. 33-57.
5. BEDNARZ N. & JANVIER B. (1988) *A constructivist approach to numeration in primary school: results of a three year intervention with the same group of children*, *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp. 299-331.
6. BEZOUT E., REYNAUD A. A. L. (1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, par Bezout; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud. Paris : Librairie pour les sciences.
Disponible sur <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table>
7. BIDEAUD J., LEHALLE H., VILETTE B. (2004) *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*, Presses universitaires du Septentrion, Paris.
8. BRIAND J. (1999) *Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, pp. 41-75.
9. BRISSIAUD R. (2001) *Enseigner une comptine numérique « à l'asiatique » au CP : pourquoi et comment ?*, XXVIII^{ème} colloque inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres, Tours.
10. BRISSIAUD, R. (1991) *Un outil pour construire le nombre : les collections-témoins de doigts*. In BIDEAUD J., MELJAC C. & FISHER J.C. (Eds.) *Les chemins du nombre*. Lille : PUL.
11. BROUSSEAU G. (1981) *Problèmes de didactique des décimaux*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2, n° 1. pp. 37-127.

12. BROUSSEAU G. (1995) *Les mathématiques à l'école*. Bulletin APMEP n° 400
Qu'est-ce que faire des mathématiques ?
13. BROUSSEAU G. (1996) *La théorie des situations didactiques*, Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Disponible en ligne sur : http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf
14. BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble
15. BUTLEN D., MASSELOT P. & PEZARD M. (2002) *Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire : cohérence et contradictions, une première catégorisation*, Rapport de recherche, Cahier de Didirem, Irem Paris 7 Denis Diderot.
16. BUTLEN D., DUBUT A, MASSELOT P., NGONO B., PELTIER M-L. & PEZARD M. (2003) *Pratiques de PE enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire : cohérence et contradictions*, Rapport de recherche, Cahier de Didirem n°44, Irem Paris 7 Denis Diderot.
17. BUYS K. (2001), cité par VERSCHAFFEL & al. (2006) *Mental Arithmetic*, In Van den heuvel (Ed.), *Children learn Mathematics*, pp.121-145, University of Utrecht, Freudenthal Institute.
18. CAUTY (1984) *Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées*, Amérindia, n°9. Disponible sur : <http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm>
19. CAUTY (1986) *Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées*, Amérindia, n°11. Disponible sur : <http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm>
20. CAUTY, (1988) *Sémantique de la mise en signes du nombre : une vision ordinale*, Amérindia, n°13. Disponible sur : <http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm>
21. CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. 562 pages. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7). Disponible sur : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/>
22. CHARBONNIER R. (2004) *La route des chiffres*, Irem de Clermont-Ferrand.
23. CHEVALIER C. (2008) *Entrer dans le code écrit : le système de numération au cycle 2*, Actes XXXV^{ème} colloque Copirelem, Bombannes.

24. COLLET M. (2004) *Le développement du système en base dix chez les enfants de 1^{ère} et 2^{ème} année primaire*, Unpublished doctoral dissertation, Université Catholique de Louvain.
25. COMITI C., BESSOT A. & PARISELLE C. (1980) *Analyse de comportements d'élèves en cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 1.2, pp. 171-224.
26. CONNE F. (1984) *Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes arithmétiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 5/3, pp. 269-343.
27. CONNE F. (1989) *Comptage et écritures en ligne d'égalités numériques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 9/1, pp. 74-115.
28. CONNE F. (1992) *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12 n°2.3.
29. CONNE F. (2001) *Evolution de la référence à la réalité dans les manuels suisses romands au cours du XX^{ème} siècle*, Actes de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques, Corps.
30. CONNE F. (2008) *Coupes sémiotiques*, in *Le film de la Classe. Etude sémiotique et enjeux didactiques*. Jean-Pierre Sautot, éd., Limoges, Lambert-Lucas, 2008, pp. 105-142.
31. CRUMP T. (1990) *The Anthropology of Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge. Compte rendu de CAVEING M., *L'Homme* 1994, Volume 34, Numéro 130, pp. 155-158. Disponible sur :
http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/hom_0439-4216_1994_num_34_130_369742
32. DEBLOIS L. (1995) *Le développement de l'écriture des nombres chez Christine*, *Revue des sciences de l'éducation*, Volume XXI, n°2, pp. 331-351.
33. DEBLOIS L. (1996) *Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16/1, pp. 71-127.
34. DELAPLACE C. & WEIL-BARAIS A. (2008) *L'évolution des connaissances qu'ont les enfants des fonctions cognitives de l'écriture des nombres : apport de l'épreuve DENORECO*, Actes du XXXV^{ème} colloque Copirelem, Bombannes.

35. DOUADY R. (1987) *Jeux de cadres et dialectique outil/objet*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 n°2.
36. DUVAL R. (2006) *Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ?* Relime, Numéro Especial., pp. 45-81.
37. EVERAERT-DESMEDT N. (2006) *La sémiotique de Peirce*, dans Louis Hébert (dir.), Signo [en ligne], Rimouski (Québec). Disponible sur <http://www.signosemio.com>
38. FENICHEL M. & PFAFF N. (2004-2005) *Donner du sens aux Mathématiques*, 2 tomes, Bordas.
39. FISCHER J-P. (1990) *Pourquoi les élèves asiatiques surclassent-ils les américains (en maths) ?*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, n°3, pp. 103-141.
40. FISCHER J-P. & BOCEREAN C. (2004) *Impact de la réforme de 1970 sur les connaissances numériques des jeunes enfants*, Annales de didactique des sciences cognitives, vol. 9, pp. 83-100.
41. FLÜCKIGER A. (2004) *Analyse didactique et schème : une étude qui articule théorie des situations et théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 24, n°2.3, pp. 169-204.
42. FUSON & BRIARS (1990) *Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 21, pp.180-206.
43. FUSON K., WEARNE D., HIEBERT J., MURRAY H., HUMAN P., OLIVIER A., CARPENTER T., & FENNEMA E. (1997) *Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 28, n°2, pp.130-162.
44. FUSON K. & LI Y. (2009) *Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking*, ZDM Mathematics Education 41, pp. 793-808.
45. GOELZER H. (1966) *Dictionnaire Français Latin et Latin Français*, Garnier-Flammarion.
46. GRENIER D. (2007), *Cours de master 2 « Eléments d'épistémologie et de didactique »*, université de Grenoble. Disponible sur : <http://prevert.upmf->

[grenoble.fr/SpecialiteDEMS/Cours%202007/UE1/coursTCC%20Conceptions.pdf](http://www.grenoble.fr/SpecialiteDEMS/Cours%202007/UE1/coursTCC%20Conceptions.pdf)

47. GUITEL G. (1975) *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion, coll. « Nouvelle bibliothèque scientifique », Paris.
48. HACHE C. & ROBERT A. (1997) *Analyse de pratiques effectives en classe de seconde*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 17, n°3, pp. 103-150.
49. IFRAH G. (1994) *Histoire universelle des chiffres*, Paris, Robert Laffont.
50. KOSYVAS G. (2010) *Dépassement-maintient du comptage au cours de l'analyse et de la synthèse des nombres à l'école maternelle*, Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica) n° 20, G.R.I.M. Department of Mathematics, University of Palermo, Italy.
51. LEFORT J. (1984) *Numération en base trois prime*, L'ouvert n°37, Irem Strasbourg, p. 28-35. Disponible sur http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/37_Lefort.pdf
52. LEPLAT J. (2006) *Les contextes en formation*, Education permanente n°166, pp 29-48.
53. LORAUD N. (1995). *β -shift, systèmes de numération et automates*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, tome 7, n°2, p. 473-498. Disponible sur http://archive.numdam.org/ARCHIVE/JTNB/JTNB_1995__7_2/JTNB_1995__7_2_473_0/JTNB_1995__7_2_473_0.pdf.
54. MARCHOT (1897) *La numération ordinale en ancien français*, Zeitschrift für romanische Philologie, tome 21.
55. MARGOLINAS C. (1992) *Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 12, n°1, pp. 113-158.
56. MARGOLINAS C., CANIVENC B., WOZNIAC F., DE REDON M.-C. & RIVIERE O. (2007) *Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle ... au lycée*, Bulletin de l'APMEP, 471, pp. 483-496. Disponible sur : http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/conf_Margolinas.pdf
57. MARGOLINAS C. & RIVIERE O. (2008) *Les dessous du numérique*, XXXV^{ème} colloque Copirelem, Bombannes, Bordeaux.

58. MARCHOT P. (1897) *La numération ordinaire en ancien français*, Zeitschrift für romanische Philologie, tome 21, Disponible sur :
http://fr.wikisource.org/wiki/La_Num%C3%A9ration_ordinaire_en_ancien_fran%C3%A7ais
59. MASSELOT P., NUMA BOCAGE L. & VINATIER I. (2007) *Que devient la dizaine dans une séance menée par une débutante au CP ? Croisements de différentes analyses appliquées à un même protocole*, XXXIV^{ème} colloque Copirelem, Troyes.
60. NUMA-BOCAGE L. (1997) *Etude de la médiation dans l'enseignement de la numération*. Thèse de doctorat. Université René Descartes (Paris V).
61. PAROUTY V. (2005) *Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur la numération décimale de position au cycle 3*. 31^{ème} Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.
62. PEIRCE C.S (1906) *Prolégomènes à une apologie du pragmatisme*, The Monist, vol.16. Traduction française de Michel Balat. Disponible sur :
<http://www.balat.fr/>
63. PERRIN-GLORIAN M-J., HERSANT M. (2003), *Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 23, n°2, pp. 217-276.
64. PICHAT M. (2001) *Enjeux socio-cognitifs et épistémologiques d'un développement pragmatique de la conceptualisation en mathématiques*, Disponible sur www.isc.cnrs.fr/ARCo2001/VOdesVF/PICHAT1.rtf
65. POISARD C. (2005), *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*, thèse de doctorat, Université Aix-Marseille 1. Disponible sur <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/10/97/PDF/ThesePoisardC.pdf>
66. RICCO G., MENOTTI G., BOYER C., LARERE C., NUMA BOCAGE L. & ALLENBACH L. (2008) *L'hétérogénéité des rapports au domaine numérique au début et à la fin de la première année de l'école élémentaire*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 28, n°3, pp. 279-318.
67. RIGO M. (2003), *Système de numération et régularité des représentations*, Disponible sur : http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/46/77/PDF/ITEM_RIGO_TXT.pdf

68. ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) *Le système complexe et cohérent des pratiques de enseignants de mathématique : une double approche*, Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies vol 2/4, pp. 505-528.
69. ROBERT A. (2002-2003), *Des tâches prescrites aux activités potentielles des élèves- Une analyse des pratiques d'enseignement en classe sur les contenus mathématiques et des séances ordinaires*, Séminaire de didactique des disciplines technologiques, pp. 53-68.
70. ROBERT A. (2007) *Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 27, n°3. pp. 271-312.
71. RODITI E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques, entre contraintes et liberté pédagogique*, L'harmattan, Paris.
72. ROGALSKI J. (2003) *Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, n°3. pp. 343-388.
73. ROUCHE N. (1992) *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelles.
74. SEILER H. (1992) *La représentation iconique dans la numération*, Comptes-rendus des séances de l'Académie des inscriptions et belles-lettres, Volume 136, Numéro 2 , pp. 417-425. Disponible sur : http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/crai_0065-0536_1992_num_136_2_15114
75. SHRADER J. & SIEGLER R.S. (1998), cité par Verschaffel & Al. (2006), SCADS : *A model of children's strategy choices and strategy discoveries*, Psychological Sciences, 9, pp. 405-410.
76. TORBEYNS J., VANDERVEKEN L., VERSCHAFFEL L. & GHESQUIÈRE P. (2006) *Adaptive expertise in the number domain 20-100*, Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME30. Disponible sur <http://www.emis.de/proceedings/PME30/5/289.pdf>
77. TREFFERS A. (2001), cité par Verschaffel & al. (2006) *Numbers and number relationships*. In M. Van den Heuvel (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 101-120), University of Utrecht, Freudenthal Institute.

78. VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang.
79. VERGNAUD G. (1991) *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.10 n° 2/3.
80. VERGNAUD G. (1996) *La théorie des champs conceptuels*. In J. Brun (Ed). Didactique des Mathématiques. Delachaux et Niestlé. Lausanne.
81. VERGNAUD G., RECOPE M. (2000) *De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui*, Psychologie française, vol. 45, n°1, pp. 35-50
82. VERSCHAFFEL L., GREER B., DE CORTE E. (2006) *Whole number concepts and operations*, in Second Hand Book of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 557-628.
83. WALTER H. (1977) *L'aventure des langues en occident*, Robert Laffont, Paris.

Manuels scolaires

84. « Cap Maths », édition Hatier (2005), de CHARNAY R., DUSSUC M-P. & MADIÉ D.
85. « J'apprends les maths avec Tchou », éditions Retz (2009), de BRISSAUD R., CLERC P. & OUZOULIAS A.

Dictionnaires, atlas et documents officiels

84. *Atlas des Mathématiques* (1997), de REINHARDT F. et SOEDER H, Le Livre de Poche, Librairie générale française, Paris. Edition originale : *Atlas zur Mathematik* (1974), Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, Munich.
85. *Dictionnaire historique de la langue française* sous la direction d'Alain Rey (1991, 1998)
86. GOELZER H. (1966) *Dictionnaire Français Latin et Latin Français*, Garnier-Flammarion.
87. NOEL, F (1833). *Dictionnaire latin français*. Disponible sur <http://books.google.fr/books?id=CYkSAAAIAAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
88. *Rapport Prost 2001 pour la recherche en éducation*. Disponible sur : <http://acces.inrp.fr/eedd/climat/recherche/plonearticle.2007-03-14.4187775276/>
89. *Programmes de l'école maternelle 2008*. Disponible sur : <http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm>

90. Programmes du cycle 2 de l'école élémentaire 2008 (dont le CP). Disponible sur :
<http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm>

Consultés et non cités :

- ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007) *Enseigner les mathématiques au CP : éléments de réflexion*, Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007, pp. 276-306.
- BARUK S. (2003) *Comptes pour petits et grands*, Magnard, volume 1 et 2.
- BRIAND J., SALIN M.H., LOUBET M. (2004) *Apprentissages mathématiques en maternelle*, Hatier CD.
- CAVEING M. (1976). *Analyse de l'ouvrage de Geneviève Guitel, Histoire comparée des numérations écrites*. Revue d'histoire des sciences, Numéro 29-1. pp. 81-86.
- CAVEING M (1994) *Essai sur le savoir mathématiques dans la Mésopotamie et l'Égypte ancienne*, Lille.
- DJEBBAR A. (1999) *Traduction et transmission scientifiques aux VIII-Xe siècles*, L'ouvert n°95, Irem Strasbourg.
- EL BOUAZZAOU H. (1987), citée par CONNE F. (1989), *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relation entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions*, Thèse de doctorat, Irem de Bordeaux, Université Bordeaux I.
- FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre : Du comptage à la résolution de problèmes*. Paris : Delachaux et Niestlé.
- FAYOL M., BARROUILLET P. & RENAUD A. (1996) *Pourquoi l'écriture des grands nombres est-elle si difficile ?* Revue de Psychologie de l'Éducation ; 3 ; 87-107
- GUITEL G. (1966) *Classification hiérarchisée des numérations écrites*, Annales Economies, Sociétés, Civilisations, Année 1966, Volume 21, Numéro 5.
- KAMII C. & RUSSEL K. A. (2010) *The Older of Two Trees : Young Children's Development of Operational Time*. Journal for Research in Mathematics Education, 41(1), 6-13.
- LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2008). Les premiers apprentissages de l'écrit : doxa et malentendus des écrits authentiques. *Actes du colloque Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux. Disponible sur :
<http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/1apa.pdf>

- LEFORT J. (2000) *Y a-t-il un naturel après 3 ?*, L'ouvert n°102, Irem Strasbourg.
- LEMONIDIS C. (2004) *L'enseignement des premières notions arithmétiques selon l'analyse des différentes représentations des quantités*, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 9, pp. 101-115. Irem de Strasbourg.
- MA I. (1999), cité par Verschaffel & al. (2006) *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- MALABRY Y. (2010) *Médiation, conceptualisation et pratiques des enseignants*. Université de Cergy, IUFM de Versailles, Disponible sur <http://www.fse.ulaval.ca/ldeblois/pdf/Malabry.pdf>
- MARGOLINAS C. (1995) *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations*, in Margolinas eds., *Les débats de didactique des mathématiques*, pp. 89-103, La pensée Sauvage, Grenoble. Disponible sur : <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418815/fr/>
- PASTRE P. (2007) *Quelques réflexions sur l'organisation de l'activité enseignante*, Recherche et formations, n°56.
- PEPIN (2003) *Une étrange façon de compter*. Défense de la langue française, n°184, <http://www.langue-francaise.org/dlf184.PDF>
- RAJAIN C. (2007) *Un itinéraire d'enseignement*. Disponible sur http://xxi.ac-reims.fr/ien_st_dizier/maths/cycle2/EssaiNumeration.pdf
- RIGO (2004), *Automates et système de numération*, d'après une mini-conférence à Société Royale des Sciences de Liège en avril 2004 et sur un exposé réalisé à l'IUFM de Reims en juin 2003 (Integrating Technologies into Mathematics Education). Disponible sur : <http://www.discmath.ulg.ac.be/papers/srsl.pdf>
- SIEGLER R.S. (2007) *Cognitive variability*, Developmental Science 10/1, pp. 104-109
- *Sur la théorie des situations didactiques, questions, réponses ouvertures, Hommage à Guy Brousseau* (2005) Ouvrage collectif, éditeurs Marie-Hélène Salin, Pierre Clanché, Bernard Sarrazy, La Pensée sauvage éditions, Grenoble
- *Avec Vygotski suivi d'une note de Léontiev sur un séminaire de Vygotski* (1999-2002) Ouvrage collectif, 2^{ème} édition augmentée sous la direction d'Yves Clot, édition La Dispute, Paris.

C'est comme ci,
c'est comme ça,
le conte finit là !

Florence Desnouveaux
La Moufle