HAL
open science

Etude des effets de pression de radiation et des limites quantiques du couplage optomécanique

P. Verlot

To cite this version:

P. Verlot. Etude des effets de pression de radiation et des limites quantiques du couplage optomécanique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT : . tel-00551033

HAL Id: tel-00551033

https://theses.hal.science/tel-00551033v1

Submitted on 1 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Pierre Verlot

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

Etude des effets de pression de radiation et des limites quantiques du couplage optomécanique

Soutenue le 24/09/2010 devant le jury composé de :

M.	Tristan BRIANT	Membre invité
M.	Oualid CHAIBI	Examinateur
M.	Antoine HEIDMANN	Directeur de thèse
M.	Tobias KIPPENBERG	Rapporteur
Mme	Agnès MAITRE	Présidente
M.	Jean-François ROCH	Rapporteur

Table des matières

Remerciements **1**

Introduction **3**

1 Le couplage optomécanique **7**
1.1 Description générale 7
1.1.1 Mesures optiques de déplacements 7
1.1.2 Augmenter la sensibilité avec une cavité Fabry-Pérot 8
1.1.3 Caractériser des effets fondamentaux avec un miroir mobile . 10
1.2 Mesure de déplacements au niveau quantique 14
1.2.1 Nature quantique de la lumière 14
Description semi-classique 14
1.2.2 Evolution du champ dans une cavité sans perte 17
États stationnaires du champ 19
Évolution des quadratures dans la cavité 19
1.2.3 Bruit sur la mesure et action en retour : la limite quantique standard 21
Bruit sur la mesure 21
Action en retour de la mesure 21
Limite quantique standard 23
1.2.4 Mise en évidence du bruit de pression de radiation 25
Observation indirecte des effets de pression de radiation 26
Dispositif de double injection 26
1.3 Atteindre le régime quantique de la pression de radiation 28
1.3.1 Bruit thermique d'un miroir mobile 28
1.3.2 Les conditions pour observer le régime quantique 29
1.4 Mesure quantique non destructive de la lumière 30
1.4.1 Propriétés d'une mesure quantique non-destructive 31
1.4.2 Démonstrations expérimentales de mesure QND en optique quantique 31
Effet Kerr croisé 32
Caractérisation d'une mesure QND réelle 33
Quantum State Preparation (QSP) 34
Répéteur quantique 35
1.4.3 Mesure QND avec une cavité à miroir mobile 37

Corrélations optomécaniques 38
1.5 Présentation générale de l'expérience 41
1.5.1 La cavité à miroir mobile 41
Pertes dans la cavité 41
Bande passante de la cavité 42
Réalisation expérimentale 43
Caractérisation optique de la cavité 44
Intervalle spectral libre 45
Bande passante et finesse 46
Coefficient de réflexion à résonance 46
1.5.2 La source laser 46
La cavité en anneau 48
Autres éléments de la source laser 49
Adaptation spatiale 49
Filtrage spatial 49
Stabilisation en intensité 50
Dispositif de double injection 52
1.5.3 La détection homodyne 52
Principe de fonctionnement de la détection homodyne 52
Détection homodyne réelle 54
1.5.4 Fonctionnement de l'expérience et résultats antérieurs 55
Procédure d'alignement de la cavité 55
Préalignement 55
Identification d'une résonance fondamentale . . . 56
Optimisation de l'adaptation spatiale 57
Détermination de la finesse 59
Détermination des pertes de la cavité 59
Optimisation et calibration de la détection 60
Recouvrement spatial 60
Calibration de la détection 61
Calibration des spectres de bruit 62
Sensibilité de la mesure et observation du bruit thermique 63
Résultats antérieurs 65
Caractérisation mécanique complète du résonateur 66
Mouvement Brownien du miroir dans l'espace des phases 67
Refroidissement d'un miroir par friction froide . 70

2 Mise au point d'un dispositif permettant d'observer les effets quantiques de la pression de radiation. 73
2.1 Première tentative de cryogénie 73
2.1.1 Présentation du cryostat TBT 74
Description générale du cryostat 74

Procédure de descente en température 75
Régulation de température 75
Asservissement à température ambiante 77
Asservissement à 80 K 78
Asservissement à 4 K 80
2.1.2 Fonctionnement cryogénique de l'expérience 80
Nouveau système de maintien des miroirs 81
Bruit thermique à basse température 82
Problème des vibrations 83
Conclusions de cette première tentative 84
2.2 L'asservissement de la fréquence du laser 84
2.2.1 Problème posé par l'utilisation d'une détection synchrone . . 85
2.2.2 Détection Pound-Drever-Hall 88
Le signal d'erreur 88
Mise en place de la détection Pound-Drever-Hall . . . 91
Asservissement de la fréquence du laser 92
Calibrations optique et mécanique avec le signal Pound-Drever-Hall 93
2.3 Cavité de très grande finesse avec un miroir plan-convexe 94
2.3.1 Modes acoustiques Gaussiens d'un miroir plan-convexe . . . 95
2.3.2 Miroir plan-convexe de très grande réflectivité 98
Recouvrement spatial 99
Montage de la cavité 100
Résultats expérimentaux 102
Caractérisation optique 103
Caractérisation mécanique 104
Conclusions et remarques 107
2.4 Double injection accordable 109
2.4.1 Biréfringence d'une cavité de très grande finesse 110
2.4.2 Mise en place d'une double injection accordable 111
Principe 111
Montage expérimental 112
Isolation optique 113
Asservissements d'intensité 114

3 Effets de la pression de radiation et corrélations optomécaniques 117
3.1 Réponse mécanique à la pression de radiation 117
3.1.1 Réponse multimode d'un miroir 118
3.1.2 Calcul de la susceptibilité effective 119
3.1.3 Réponse mécanique en fonction de la fréquence 120
Réponse à la résonance mécanique 120
Réponse à basse fréquence 121
Réponse à haute fréquence : anti-résonance 122
3.1.4 Interprétation modale de la réponse à la pression de radiation 124

3.2 Réponse expérimentale d'un miroir mobile à une force de pression de radiation classique . . . 125
3.2.1 Description du dispositif expérimental . . . 125
Parasites électriques . . . 126
Isolation optique . . . 127
Principe de l'acquisition de la réponse mécanique . . . 129
3.2.2 Mode fondamental Gaussien du plan-convexe . . . 129
3.2.3 Suppression de l'action en retour dans une cavité à miroirs cylindriques . . . 130
Annulation de l'action en retour dans une cavité à deux miroirs mobiles . . . 131
Amélioration de la sensibilité de la mesure d'une force 132
Démonstration expérimentale avec une cavité à miroirs cylindriques . . . 132
3.3 Corrélations optomécaniques au niveau classique . . . 135
3.3.1 Construction du bruit classique d'intensité . . . 135
Espace des phases d'un bruit Gaussien filtré . . . 136
Quadratures d'un bruit blanc stationnaire . . . 137
Synthèse . . . 138
Réalisation expérimentale . . . 139
Générateur Tektronix AFG3102 . . . 139
Réalisation des quadratures . . . 140
Modulation à $\Omega/2$ . . . 141
3.3.2 Corrélations optomécaniques hors résonance mécanique . . . 144
Dispositif expérimental . . . 144
Protocole expérimental . . . 145
Calibration des déplacements du miroir . . . 146
Résultats expérimentaux . . . 148
Coefficient de corrélation . . . 149
Evolution en fonction de la puissance de bruit . . . 150
3.3.3 Corrélations optomécaniques à résonance mécanique . . . 152
Fonction de corrélation optomécanique . . . 153
Simulation de la réponse du miroir . . . 157

4 Vers l'observation des corrélations optomécaniques au niveau quantique 159
4.1 Corrélations optomécanique en régime thermique . . . 160
4.1.1 Suppression du bruit thermique par moyennage . . . 160
Démonstration expérimentale . . . 162
4.1.2 Démontrer les corrélations quantiques en régime thermique . 165
Signature du bruit quantique . . . 168
4.1.3 Démonstration expérimentale avec un bruit classique . . . 169
4.2 Limites expérimentales à l'observation des corrélations quantiques . 173
Contamination de l'intensité du faisceau réfléchi par le mouvement du résonateur . . . 173

Effet de la contamination sur les corrélations optomécaniques 175
Conditions à résonance mécanique 177
Conditions hors résonance mécanique 178
4.3 Mise en évidence expérimentale de la contamination 179
4.3.1 Propriétés du bruit d'intensité du faisceau incident 179
Bruit d'intensité du laser Ti-Sa pompé par le Verdi V18 180
Bruit d'intensité avec la double injection 182
4.3.2 Mise en évidence et caractérisation quantitative de la contamination 183

5 Effets de la pression de radiation dans une cavité désaccordée 187
5.1 Présentation théorique 187
5.1.1 Diffusion Brillouin induite par pression de radiation 187
5.1.2 Couplage optomécanique en cavité désaccordée 188
Contribution dissipative 190
Contribution conservative 191
Evolution quantitative des effets de l'action en retour dynamique 193
5.2 Refroidissement avec la cavité plan-convexe 194
5.3 Augmentation de la sensibilité dans une cavité désaccordée 197
5.3.1 Sensibilité à basse fréquence dans une cavité désaccordée . . 197
5.3.2 Sensibilité dans une cavité désaccordée (cas général) 202
5.3.3 Démonstration expérimentale de l'amplification optique . . . 205
Précautions liées à la détection homodyne 206
Paramètres accessibles expérimentalement 209
Amplification et amélioration de la sensibilité à désaccords négatifs 209
Amplification à désaccords positifs 214
Conclusion 215

Conclusion 217

Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé au laboratoire Kastler Brossel durant la période 2006-2010. Je remercie Paul Indelicato, directeur du laboratoire de m'y avoir accueilli.

Je remercie Agnès Maître et Oualid Chaibi d'avoir accepté de faire partie du Jury et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et je suis très reconnaissant à Tobias Kippenberg et Jean-François Roch d'avoir accepté la charge de rapporteur malgré leurs nombreuses occupations.

Antoine Heidmann m'a accueilli dans son équipe "Mesure et Bruits fondamentaux" et m'a encadré pendant ces quatre années, durant lesquelles il m'a appris presque tout ce que je sais aujourd'hui. Ainsi, malgré ses innombrables responsabilités, il n'a ménagé ni son temps, ni son énergie afin de me faire profiter de son savoir immense, avec la générosité, la patience la rigueur et l'humilité qui le caractérisent, et qui resteront pour moi une source d'inspiration. Merci pour tout Antoine, je sais bien que tu aurais préféré un simple et sobre "merci" (voire rien du tout d'ailleurs), mais je pense que 3 lignes de remerciements sont loin d'être excessives ne serait-ce qu'au regard du budget considérable en stylos rouges que tu m'as exclusivement consacré...

Je tiens également à remercier Tristan Briant, sans qui ce travail n'aurait pas été possible : ses très grandes qualités humaines, ses nombreux et précieux conseils aussi bien au plan théorique qu'au plan expérimental, son aide sur la manip (qui s'est souvent prolongée largement au-delà des horaires raisonnables), sa simplicité et surtout son pragmatisme implacable (oui, une pince multi-prises est compatible avec un miroir plan-convexe de très grande finesse ! !) en ont fait un co-directeur de thèse incroyable, auquel je n'exprimerai jamais assez ma gratitude pour tout ce qu'il m'a appris.

Je voudrais aussi remercier Pierre-François Cohadon pour ses précieux conseils, sa générosité, sa gentillesse et son humour, ainsi que pour l'aide cruciale qu'il a apporté durant la rédaction et la publication des articles. Pierre-François est également un formidable catalyseur de stress, et je voudrais le remercier du fond du cœur pour l'aide et le temps qu'il m'a consacré dans la préparation de ma soutenance.

J'aimerais également remercier tous les thésards/postdocs avec lesquels j'ai partagé la salle de manip durant ces quatre années : Olivier Arcizet, que je remercie chaleureusement pour ses précieux conseils, Thomas Caniard, qui m'a transmis les clefs de la manip et n'a pas ménagé sa patience pour m'en expliquer le fonctionnement, Chiara Molinelli qui a pris la suite d'Olivier et à qui je souhaite le meilleur pour sa rédaction, Michael Bahriz qui est maintenant maître de conférences à

Montpellier, Thomas Antoni que je remercie uniquement pour pouvoir un jour profiter de ses relations dans le monde de la politique, et Aurélien "rouleau compresseur" Kuhn que j'aimerais remercier pour son dynamisme et pour l'émulation qu'il apporte à l'équipe, à travers la création d'une toute nouvelle expérience et sa volonté de créer des ponts entre celles qui existent déjà. Enfin, je remercie mon "successeur" sur la manip, je veux bien sûr parler du fameux hédoniste anarcho-communiste bobo du Veme Alexandros Tavernarakis (dit "Poulos"). Merci pour ta carbonara, ton Martini, et les conversations politico-philosophiques à trois sous qui étaient prétexte à se retrouver derrière une bonne table.

J'adresse également un grand merci à Monique Bonnamy, Laetitia Morel et Geneviève Leonis, qui forment l'équipe du secrétariat. Je les remercie pour leur efficacité, leur disponibilité et leur bonne humeur. Un grand merci à Monique pour l'énergie qu'elle emploie au suivi administratif des thésards du labo, et pour son extrême gentillesse.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des services techniques du laboratoire, qui ont joué un rôle essentiel dans l'évolution de la manip durant ces quatre années. Merci à Jean-Pierre Okpisz et Brigitte Delamour du service d'électronique pour leur aide et leurs conseils, merci à Pascal Travers, Jean-Michel Isac, Alain Vogt, Saysavanh Souramasing et Gaël Coupin du service de mécanique pour leur disponibilité, leur professionnalisme et leur bonne humeur. Je n'oublie pas Corinne Poisson et Serge Begon du service informatique, merci en particulier à Serge pour son aide précieuse lors des (nombreux) pépins informatique que j'ai rencontré. Merci enfin à Florence Thibout, responsable de l'atelier verrerie, et à Annick Métais, en particulier pour leur précieuse participation à l'organisation du pot.

Je tiens également à remercier l'équipe du Laboratoire des Matériaux avancés de Lyon qui a réalisé les traitements de grande réflectivité des miroirs.

Je souhaite également remercier chaleureusement toutes les personnes qui se sont intéressées de plus ou moins près à mon travail et qui m'ont accompagné pendant ces 4 années. Je remercie en particulier mes parents pour leur aide et pour leur participation au pot, et toutes celles et ceux (ils se reconnaîtrons) dont le soutien et la présence m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Introduction

Trois missions indissociables incombent au physicien : il doit définir le système qu'il étudie, décrire les phénomènes qui s'y produisent, et modéliser ces derniers quantitativement. A chaque étape se pose la question cruciale de la mesure. Il est en effet essentiel que le physicien caractérise son système en s'assurant que l'effet physique auquel il s'intéresse va être visible, c'est-à-dire mesurable. L'aspect quantitatif d'une mesure est également très important, puisque c'est lui qui va permettre de valider un modèle théorique, voire de l'améliorer. La mise en place d'une expérience doit donc naturellement être conditionnée à la possibilité d'observer l'effet auquel elle est consacrée. Il est par conséquent important de connaître les limites de la mesure que l'on cherche à faire, et en particulier celles imposées par la mécanique quantique.
Un appareil de mesure peut se définir de manière très générale comme un dispositif, une "sonde", couplé au système étudié. Ce couplage permet de transférer les propriétés de l'observable que l'on cherche à mesurer sur une observable de l'appareil de mesure, qui est ensuite "lue" de manière classique. La nature quantique du processus de mesure conduit à prendre en compte l'existence de deux bruits qui vont limiter la sensibilité : le premier, appelé "bruit de mesure", correspond à l'incertitude quantique sur l'observable de la sonde qui est finalement lue par l'appareil de mesure. Le second bruit est un bruit quantique conjugué au précédent, et découle des postulats de la mécanique quantique [1] : du fait du couplage avec la sonde, le processus de mesure s'accompagne nécessairement d'une perturbation du système mesuré, appelée "action en retour", qui peut être vue comme une conséquence directe de l'inégalité de Heisenberg. Ces deux bruits étant conjugués, leur somme admet en général un minimum nécessairement non nul, correspondant à une limite quantique de sensibilité sur la mesure.
Si ces limites quantiques sont longtemps restées un concept théorique considéré comme inaccessible aux expériences, elles sont aujourd'hui en passe de devenir la principale limite à l'observation directe d'un phénomène aussi fondamental et important que les ondes gravitationnelles, prédites par la théorie de la relativité générale d'Einstein, et qui n'ont à ce jour été démontrées que de manière indirecte [2, 3]. Les ondes gravitationnelles sont provoquées par des événements astrophysiques tels que la coalescence de systèmes binaires constitués d'étoiles ou de trous noirs qui, s'ils avaient lieu à une distance de l'ordre de 20 Mpc de la Terre (soit environ soixante millions d'années-lumière), sont supposés entraîner une déformation de la métrique espace-temps dont l'amplitude relative est de l'ordre de 10^{-22}. Ainsi, un objet de taille kilométrique verrait sa longueur changer en apparence de 10^{-19} m, soit un milliardième de la taille d'un atome ! Pour pouvoir mettre en évidence les effets des ondes gravitationnelles, plusieurs interféromètres géants ont été développés depuis le début des années 1990 [4–8] : l'interférométrie permet en effet de réaliser des mesures de variations de longueur avec une sensibilité inégalée, pouvant atteindre $10^{-21}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ [9, 10].

Cependant, comme toute mesure, l'interférométrie est limitée au niveau quantique [11] : on mesure en fait la différence de phase entre les deux faisceaux issus des deux bras de l'interféromètre, et on se trouve confronté à un bruit de mesure, lié au bruit quantique de phase des faisceaux dans les deux bras. Par ailleurs, le bruit quantique d'intensité de ces faisceaux va induire des fluctuations de la pression de radiation qui s'exerce sur les miroirs de l'interféromètre, se traduisant par la mise en mouvement des miroirs et par une perturbation de la grandeur que l'on cherche à mesurer. Lorsque le faisceau incident est dans un état cohérent, la limite de sensibilité qui découle de ces deux bruits quantiques est appelée la *limite quantique standard* [12], et il est prévu que ce soient ces bruits qui constituent la limite essentielle à l'observation des ondes gravitationnelles dans les interféromètres de seconde génération. Cette limite a été largement étudiée sur le plan théorique, et de nombreux travaux ont montré qu'il était possible de la dépasser, notamment en utilisant des états comprimés du champ lumineux [13, 14].
Cependant, la limite quantique standard n'a encore jamais été mise en évidence expérimentalement, et la réalisation d'un dispositif interférométrique capable de la détecter s'avère intéressante non seulement pour l'étude des processus fondamentaux de la mesure et des limites qui y sont associées, mais aussi pour chercher à la combattre dans l'optique d'améliorer les futures antennes gravitationnelles. Il faut pour cela construire un dispositif capable d'observer de très petits déplacements d'un miroir mobile, de façon à ce que l'action en retour associée aux fluctuations quantiques de la pression de radiation devienne comparable au bruit quantique de mesure. Nous avons développé un tel dispositif, basé sur une cavité Fabry-Perot de très grande finesse dont un miroir est mobile [15–18] : la lumière va ainsi réaliser de nombreux aller-retours dans la cavité et sonder un grand nombre de fois la position du miroir.
Notons que si ce dispositif permet d'étudier les limites de sensibilité dans les mesures interférométriques, il constitue également un système modèle pour la mise en évidence du couplage optomécanique entre la lumière et le miroir mobile. De nombreuses conséquences du couplage optomécanique ont en effet été proposées, et pour certaines mises en évidence grâce à une cavité à miroir mobile. On peut citer par exemple la compression des fluctuations quantiques du champ [19–21], l'intrication entre deux faisceaux lumineux [22], ou encore le refroidissement actif [23] ou passif [24–27] du miroir mobile. Le travail présenté dans ce mémoire aborde un certain nombre d'aspects de ce couplage optomécanique, avec en filigrane les objectifs de mettre en évidence expérimentalement la limite quantique standard, et de mettre en place des stratégies destinées à dépasser cette limite.

Le premier chapitre est consacré à une présentation générale du couplage optomécanique dans une cavité Fabry-Perot dont un miroir est mobile. Nous présentons les différents bruits intervenant dans la mesure interférométrique de la position du miroir mobile, et nous décrivons en particulier une méthode, basée sur l'injection de deux faisceaux, permettant de mettre en évidence de manière directe l'action en retour, c'est-à-dire le bruit de pression de radiation. Nous décrivons également les principaux éléments de notre dispositif, le fonctionnement général de notre expérience, ainsi que les résultats antérieurs au travail présenté dans ce manuscrit qu'elle a permis d'obtenir.

Dans le second chapitre, nous présentons les améliorations que nous avons apportées au dispositif expérimental dans le but d'améliorer la réponse du miroir mobile à la pression de radiation par rapport au bruit thermique du miroir. Nous avons tout d'abord placé la cavité dans un cryostat de façon à réduire le bruit thermique du miroir. Les vibrations induites par le cryostat nous ont alors amené

à modifier l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité. Nous avons ensuite cherché à améliorer les propriétés mécaniques du miroir mobile en développant un nouveau résonateur plan-convexe de très grande reflectivité. Nous présentons les résultats expérimentaux que nous avons obtenus et qui démontrent que l'utilisation d'un tel résonateur a permis une amélioration significative des propriétés mécaniques, mais également optiques de notre cavité à miroir mobile. Nous terminons ce chapitre en présentant les ajustements de notre dispositif qui se sont imposés en raison de l'utilisation de cavités de très grande finesse, liés plus particulièrement à la biréfringence des miroirs qui devient alors critique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des effets de pression de radiation que nous avons menée grâce à ces améliorations, et en particulier à la mise en évidence des corrélations optomécaniques entre la lumière et le miroir. Après une étude théorique de la réponse mécanique réelle d'un miroir ayant de nombreux modes de vibration, nous présentons plusieurs effets en réponse à une force de pression de radiation classique. Nous étudions tout d'abord la réponse spectrale d'un miroir multimode à la pression de radiation, ce qui nous permet de démontrer un effet d'annulation de l'action en retour, qui est capable d'améliorer la sensibilité d'une mesure de déplacement ou de force. Nous présentons ensuite une étude des corrélations induites par couplage optomécanique entre l'intensité d'un faisceau signal et la phase d'un faisceau sonde, selon un schéma proche de celui utilisé en optique quantique pour réaliser une mesure quantique non destructive. Le bruit thermique restant dominant par rapport au bruit quantique de pression de radiation, nous avons eu recours à un bruit classique du faisceau signal afin de simuler son bruit quantique, à un niveau toutefois très supérieur.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons aux conditions expérimentales qu'il est nécessaire de réunir pour mettre en évidence les corrélations optomécaniques au niveau quantique. Nous montrons tout d'abord qu'il est possible d'observer des corrélations induites par un bruit de pression de radiation plus petit que le bruit thermique, en utilisant une technique de moyennage que nous illustrons expérimentalement. Nous abordons ensuite les contraintes expérimentales sur la stabilité de la fréquence du laser par rapport à la résonance de la cavité, qui s'imposent du fait d'une contamination de l'intensité du faisceau signal par les déplacements du miroir lorsque la cavité est légèrement désaccordée et présente des pertes. Comme nous le montrons à la fois théoriquement et expérimentalement, cette contamination conduit à des contraintes importantes sur l'asservissement du laser.

Nous terminons ce manuscrit par une étude des effets de pression de radiation dans une cavité désaccordée. Le couplage optomécanique modifie la dynamique du miroir mobile, avec une contribution dissipative qui peut conduire à un refroidissement effectif du miroir, et une contribution conservative qui induit un effet de ressort optique supplémentaire sur le miroir. Nous illustrons l'effet de la première contribution en présentant une démonstration de refroidissement de notre résonateur plan-convexe. Nous décrivons enfin un effet nouveau d'amplification optomécanique, induit par la contribution conservative de l'action en retour dynamique, et qui permet dans certaines conditions d'améliorer la sensibilité de la mesure au-delà de la limite quantique standard.

Chapitre 1

Le couplage optomécanique

Le couplage optomécanique désigne l'ensemble des interactions entre un champ lumineux et le mouvement d'un miroir sur lequel le faisceau se réfléchit : du mouvement du miroir résulte un changement de la phase de la lumière réfléchie, alors que le miroir se déplace sous l'effet de la pression de radiation du champ lumineux. Le premier effet peut être utiliser pour mesurer les déplacements du miroir mobile, via la détection de la phase du faisceau réfléchi. Le deuxième effet correspond à l'action en retour de la mesure : la lumière perturbe les déplacements d'un miroir que l'on cherche à mesurer. La combinaison de ces deux phénomènes conduit à l'existence d'une limite quantique pour la sensibilité de la mesure, mais est également responsable d'un certain nombre d'effets quantiques. Nous présentons dans ce premier chapitre une description simple des mesures optiques de déplacements, d'abord dans le cas classique, puis au niveau quantique. Nous verrons ensuite comment il est possible d'observer expérimentalement les effets quantiques de la pression de radiation, et en particulier comment utiliser le couplage optomécanique pour réaliser des mesures quantiques non destructives. Enfin, nous décrivons le fonctionnement général de notre expérience.

1.1 Description générale

1.1.1 Mesures optiques de déplacements

La lumière intrigue et passionne depuis toujours. Pendant longtemps, elle a fasciné les hommes qui l'observaient, dans le ciel ou sur la Terre, sans en comprendre véritablement ni le comportement, ni la nature. On devra attendre le début du XIe siècle pour que soit introduit le concept de propagation de la lumière, ainsi que l'ébauche des lois la régissant, par des physiciens comme Alhazen ou Roger Bacon ; l'optique géométrique était alors née. Il faudra cependant patienter encore près de 7 siècles pour voir émerger les premières discussions concernant la nature de la lumière, corpusculaire selon Newton (1675), ondulatoire selon Pardies ou Huygens (1677). C'est cette dernière interprétation qui sera la plus fructueuse et la plus développée au cours des siècles suivants, conduisant à un essor expérimental exceptionnel, qui permettra la mise en évidence et la compréhension de l'ensemble des phénomènes liés à l'optique classique, tels la diffraction ou les interférences

lumineuses.
A partir de la deuxième moitié du XIX^{e}s, un certain nombre de dispositifs expérimentaux a ainsi démontré l'efficacité de l'interférométrie pour mesurer des distances avec une grande sensibilité. Pour illustrer le potentiel de cette méthode, nous allons nous intéresser à la mesure de déplacements longitudinaux, qui correspond au type de mesure que notre expérience nous permet de réaliser. Nous considérons donc un système constitué d'un miroir mobile éclairé par un faisceau laser continu sous incidence normale.

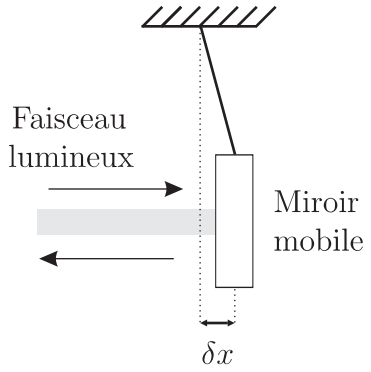

FIGURE 1.1: Principe d'une mesure optique d'un petit déplacement et du couplage optomécanique entre un faisceau lumineux et un miroir mobile : la phase du faisceau réfléchi est affectée par le déplacement du miroir.

Si le miroir se déplace, le trajet optique du faisceau est modifié. La mesure de la phase du faisceau réfléchi nous permet alors d'accéder au déplacement du miroir. Pour un déplacement δx du miroir, la variation $\delta\varphi$ de la phase du faisceau réfléchi s'écrit :

$$\delta\varphi = 4\pi\frac{\delta x}{\lambda} \tag{1.1}$$

où λ est la longueur d'onde du faisceau lumineux. L'interférométrie permet justement de détecter la phase du faisceau réfléchi, en la comparant à la phase de référence issue du faisceau dans l'autre bras de l'interféromètre. On atteint expérimentalement une sensibilité pour la mesure des déplacements du miroir correspondant à une très petite fraction de la longueur d'onde.

1.1.2 Augmenter la sensibilité avec une cavité Fabry-Pérot

Il est possible d'augmenter la sensibilité de la mesure interferométrique en plaçant en regard du miroir mobile un second miroir, formant ainsi une cavité Fabry-Pérot. Un tel dispositif permet de multiplier les allers-retours de la lumière entre les deux miroirs, ce qui revient à sonder la position du miroir mobile un grand nombre de fois. On amplifie ainsi l'effet du déplacement du miroir mobile sur la phase du faisceau réfléchi. Pour démontrer cet effet, nous abordons dans la suite le cas simple d'une cavité à une seule entrée-sortie, c'est-à-dire formée d'un miroir d'entrée partiellement transmettant supposé immobile, et d'un miroir de fond totalement réfléchissant et mobile, la cavité ne présentant de plus aucune

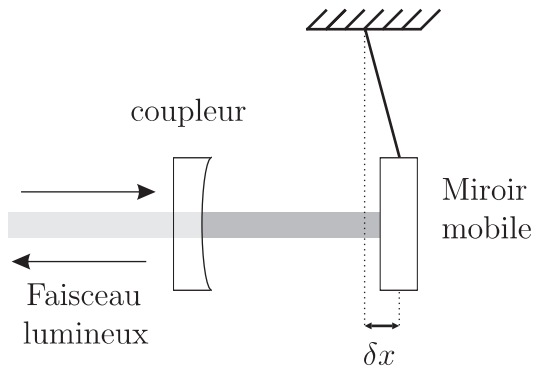

FIGURE 1.2: Cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie. Le miroir arrière est mobile et totalement réfléchissant. Le coupleur d'entrée est fixe.

perte. Nous ne considérons pas ici les effets mécaniques de la pression de radiation du champ lumineux sur le miroir mobile ; nous reviendrons sur ces aspects dans les sections suivantes.

La cavité ne présentant pas de pertes, elle réfléchit complètement la lumière incidente, et l'intensité moyenne est conservée :

$$I^{out} = I^{in} \tag{1.2}$$

où I^{in} désigne le flux de photon moyen incident et I^{out} celui réfléchi par la cavité. Par contre, les réflexions successives du champ à l'intérieur de la cavité interfèrent entre elles, et induisent des résonances lorsque la longueur de la cavité est un multiple demi-entier de la longueur d'onde. Autour d'une telle résonance, l'intensité intracavité décrit un pic d'Airy (cf figure 1.3), c'est à dire qu'elle présente un profil lorentzien, dont la largeur et la hauteur dépendent uniquement des propriétés optiques des miroirs de la cavité. On les exprime commodément en fonction de la finesse $\mathcal{F}$, définie comme le rapport entre l'intervalle spectral libre, c'est-à-dire la distance $\lambda/2$ qui sépare deux résonances successives, et la largeur du pic d'Airy. La largeur de la résonance vaut ainsi par définition $\lambda/2\mathcal{F}$, alors que l'on démontre aisément que l'intensité intracavité moyenne à résonance admet l'expression suivante :

$$I = \frac{2}{\pi}\mathcal{F}I^{in}. \tag{1.3}$$

L'intensité intracavité est amplifiée par la finesse de la cavité qui peut être interprétée comme le nombre d'allers-retours que la lumière effectue entre les deux miroirs.

La phase du faisceau réfléchi dépend fortement du désaccord entre la cavité et le faisceau laser, puisqu'elle varie de 2π d'un côté à l'autre du pic d'Airy, avec une pente maximale à résonance proportionnelle à la finesse (voir figure 1.3). Plus quantitativement, on peut montrer [28] que la variation de phase du faisceau réfléchi s'écrit

$$\delta\varphi^{out} = 8\mathcal{F}\frac{\delta x}{\lambda} \tag{1.4}$$

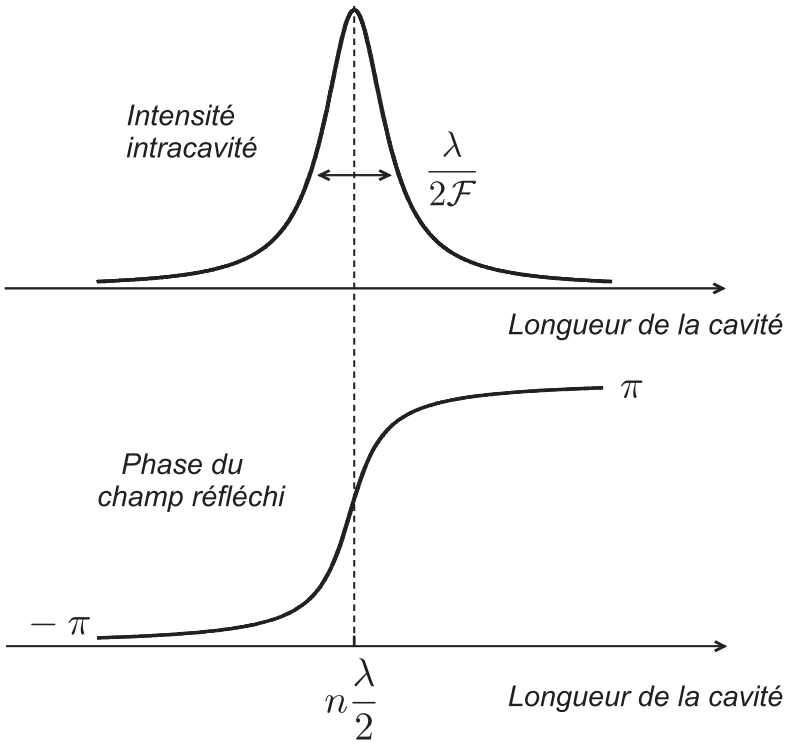

FIGURE 1.3: Courbe du haut : pic d'Airy décrit par l'intensité intracavité lorsque la longueur de la cavité est balayée au voisinage d'une résonance. Courbe du bas : déphasage du faisceau réfléchi par la cavité.

lorsqu'un petit déplacement δx du miroir se produit autour de la position correspondant à la résonance optique de la cavité. La mesure de la phase est donc extrêmement sensible aux déplacements du miroir : comparée à l'expression obtenue pour un interféromètre simple (équation 1.1), elle est amplifiée par la finesse de la cavité qui peut atteindre expérimentalement des valeurs supérieures à 10^5. Comme nous le verrons dans la suite, l'utilisation de cette méthode de détection porte la sensibilité de la mesure interférométrique aux alentours de 10^{-20} m.

1.1.3 Caractériser des effets fondamentaux avec un miroir mobile

Nous avons vu dans les sections (1.1.1) et (1.1.2) que l'interférométrie permet d'accéder à la mesure de déplacements incroyablement petits. Il est donc naturel d'y avoir recours pour étudier de nombreux effets induisant de très faibles déplacements, dans des domaines s'étendant de la physique microscopique à l'astrophysique.

Il est ainsi possible d'accéder à la mesure de forces inférieures à l'atto-newton ($10^{-18}N$), comme l'ont par exemple démontré des chercheurs de IBM à San Jose [29], qui sont parvenus à détecter le renversement du spin d'un électron unique (voir figure 1.4). Ils ont pour cela utilisé une technique appelée "microscopie de force à résonance magnétique", qui consiste à détecter la force magnétique s'exerçant entre une pointe ferromagnétique et un échantillon de spins. Ici, la

pointe ferromagnétique est fixée au dos d'un micro-levier mobile dont la face avant est réflechissante. L'échantillon de spin utilisé est un morceau de silice vitreuse, préalablement traitée de sorte qu'il contient une faible concentration de spins électroniques (entre 10^{-13} et 10^{-14} cm^{-3}). Un champ magnétique statique est par ailleurs ajouté afin que la pointe ferromagnétique soit résonnante avec le spin électronique. Une excitation mécanique sinusoïdale est alors appliquée au micro-levier (fréquence de 5.5 kHz, amplitude d'une dizaine de nm), de façon à le faire osciller au dessus de la surface de l'échantillon. Lorsque la pointe ferromagnétique se retrouve suffisamment proche d'un spin, celui-ci va subir des retournements qui vont alors causer un petit décalage de la fréquence d'oscillation du micro-levier, en raison de la force magnétique que le spin exerce sur le micro-aimant. Son mouvement est mesuré optiquement, grâce au faisceau lumineux amené par une fibre et qui se réfléchit sur le levier. Il s'agit en fait d'une mesure interférométrique entre le faisceau directement réfléchi par le bout de la fibre et celui qui s'est propagé jusqu'au micro-levier. Avec une sensibilité de l'ordre de l'Ångström, le groupe d'IBM a ainsi pu détecter les modifications du mouvement induites par le retournement d'un seul spin, et cette méthode de détection ouvre des perspectives vers de nombreuses applications, parmi lesquelles on peut citer l'imagerie tridimensionnelle de macro-molécules.

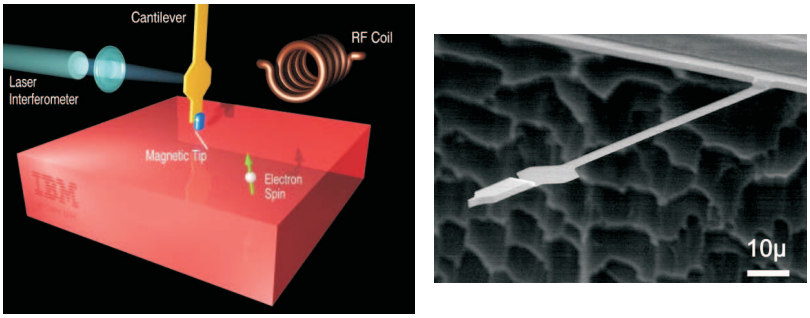

FIGURE 1.4: A gauche : Principe de la détection d'un spin électronique unique réaliseé par D. Rugar et son équipe. A droite : photographie du micro-levier utilisé.

Les mesures optiques se sont également avérées être un outil déterminant dans la démonstration expérimentale de l'existence de l'effet Casimir. Ce phénomène, prédit en 1948 par le physicien néerlandais Hendrik Casimir, prévoit que dans le vide, deux miroirs métalliques qui se font face sont soumis à une force attractive, inversement proportionnelle à la puissance quatrième de la distance qui les sépare. Ses effets ne sont donc significatifs qu'à très courtes distances. L'origine de cette force réside dans les propriétés quantiques du vide : en effet, comme nous allons le voir dans la section (1.2.1), le champ électromagnétique présente des fluctuations inhérentes à sa nature quantique, et ce quelle que soit sa valeur moyenne. Un mode du champ électromagnétique de valeur moyenne nulle aura donc une dispersion non nulle, ce qui a pour conséquence que le vide exerce une force de pression de radiation sur toute surface réfléchissante. De plus, nous avons vu dans la section (1.1.2) qu'une cavité n'amplifie que les modes satisfaisant la condition de résonance imposée par sa longueur. La densité de modes à l'intérieur de la cavité est donc discrète, au contraire de celle des modes se propageant en dehors. Il en ressort qu'en général, la force de pression de radiation du "vide extérieur" est supérieure à celle du "vide intérieur", d'où une résultante attractive.

Les premières démonstrations expérimentales de l'effet Casimir n'ont vu le jour qu'à la fin des années 1990 [30–32], grâce notamment au développement de la microscopie à force atomique (AFM), qui est basée sur la détection ultra-sensible des déplacements d'un micro-levier au voisinage d'une surface. Umar Mohideen et son équipe sont ainsi parvenus à effectuer une mesure très précise de la force de Casimir entre un plan et une micro-sphère [32](voir figure 1.5). Ils ont pour cela attaché une micro-sphère au bout d'un microlevier qu'ils rapprochent d'un plan à des distances variant de quelques dizaines à quelques centaines de nanomètres. A l'équilibre, la sphère est donc soumise d'une part à la force de Casimir, et d'autre part à la force de rappel élastique du microlevier : la connaissance des paramètres mécaniques de ce dernier, conjuguée à la mesure de la déviation de la sphère induite par la présence du plan leur a ainsi permis de mesurer la force de Casimir avec un accord meilleur que 2% par rapport aux prédictions théoriques.

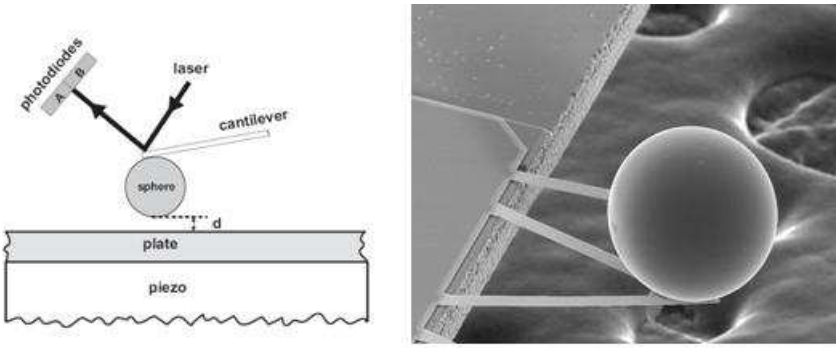

FIGURE 1.5: A gauche : principe du dispositif expérimental utilisé par U. Mohideen et son équipe. A droite : photographie de la micro-sphère placée au bout du micro-levier.

Les scientifiques envisagent également d'utiliser les mesures optiques pour mettre en évidence de manière directe les ondes gravitationnelles. Ces ondes, prédites par la théorie de la gravitation générale d'Einstein, sont émises lors d'événements stellaires comme la coalescence de systèmes d'étoiles binaires. Elles provoquent une déformation de la métrique espace-temps, qui se traduit sur Terre par des variations relatives de longueur de l'ordre de $\delta L/L \simeq 10^{-22}$. Pour observer ces ondes, plusieurs interféromètres géants de type Michelson ont été construits, chacun des bras étant constitué d'une cavité Fabry-Pérot afin d'exacerber les effets des ondes sur la phase détectée en sortie de l'interféromètre. De plus, les deux bras de l'interféromètre sont de taille identique, de sorte que le bruit de fréquence du laser se soustrait à sa sortie. L'onde gravitationnelle, en revanche, est de nature quadrupolaire, et ses effets sur la différence de phase mesurée en sortie de l'interféromètre s'ajoutent. A l'heure actuelle, la sensibilité typique de ces interféromètres permet la mesure de déplacements de l'ordre du dixième d'attomètre !

Dans les expériences que nous venons de présenter, le miroir mobile (micro-levier ou miroir suspendu) est utilisé comme transducteur, c'est à dire qu'il convertit l'effet physique que l'on cherche à observer en un déplacement. Mais depuis quelques années, le développement des techniques de gravures microscopiques et nanoscopiques ont conduit un certain nombre de scientifiques à faire du miroir mobile

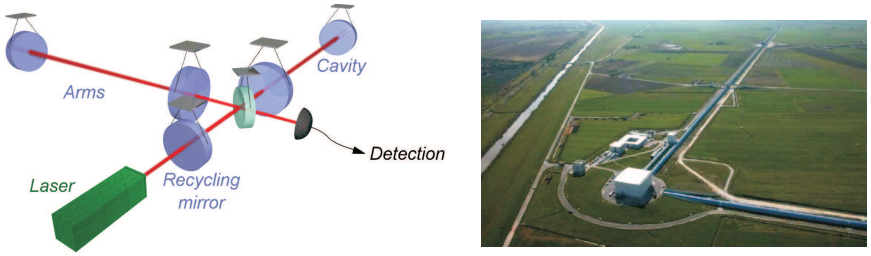

FIGURE 1.6: A gauche : Schéma de principe d'un détecteur d'ondes gravitationnelles. A droite : photographie de l'interféromètre franco-italien Virgo.

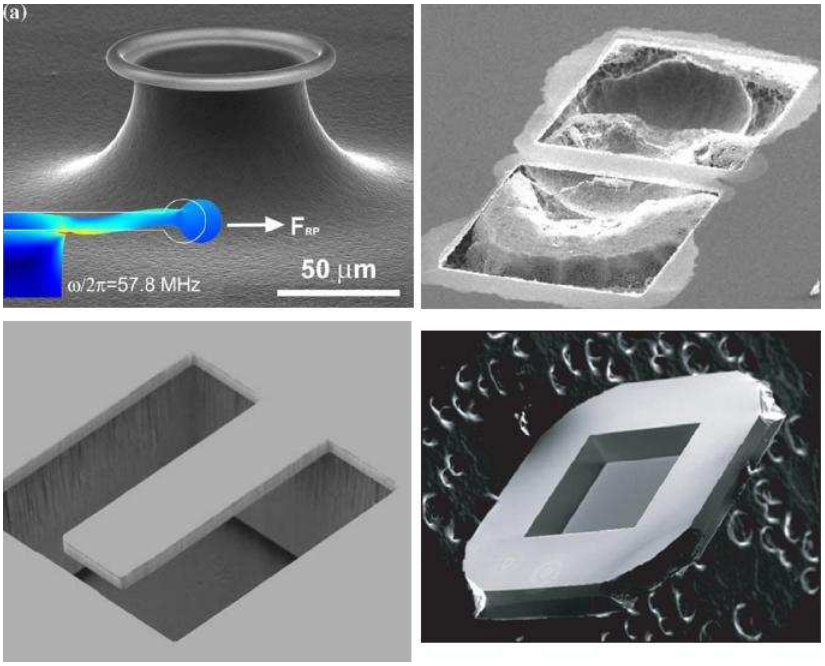

FIGURE 1.7: En haut : à gauche, photographie du micro-tore utilisé par T.J. Kippenberg et son équipe [26, 33]. A droite, photographie du résonateur mis au point par l'équipe de M. Aspelmeyer [25]. En bas : à gauche, photographie de l'un des résonateurs utilisé par notre équipe [24, 34]. A droite, photographie de la membrane utilisée par l'équipe de J.G.E. Harris [27].

leur système d'étude. Les expériences se sont ainsi multipliées depuis une dizaine d'années avec pour objectif de porter un résonateur mécanique dans son état fondamental [24–27]. Le défi expérimental que l'ensemble de ces expériences se propose de relever est de refroidir suffisamment le résonateur de sorte que son mouvement ne soit plus régi que par ses fluctuations quantiques de point zéro. Pour y parvenir, l'idée est de placer le résonateur dans une cavité Fabry-Pérot afin de pouvoir mesurer très précisément ses fluctuations thermiques de position ($\delta x_{th} \simeq 10^{-18} m$), et de rétroagir sur lui de manière active à l'aide par exemple de la force de pression de radiation d'un faisceau externe [23] ou d'une pointe électrostatique [34], ou bien de manière passive en tirant profit des effets de pression de radiation à l'intérieur d'une cavité désaccordée [24–27]. Les expériences les plus récentes ont ainsi permis d'abaisser le nombre de phonons thermiques d'un oscillateur mécanique à moins de 100 [33, 35] (contre 10^5 à température ambiante) !

1.2 Mesure de déplacements au niveau quantique

Nous revenons dans cette section sur la sensibilité des mesures optiques de déplacement, et en particulier sur les limites induites par la nature quantique de la lumière. Si l'on en croit l'équation 1.4, on pourrait penser que l'on peut améliorer indéfiniment la sensibilité d'une mesure interférométrique, en augmentant suffisamment la finesse de la cavité, c'est-à-dire en améliorant la qualité optique des miroirs. Il n'en est pourtant pas ainsi, en raison notamment du bruit de pression de radiation qu'exerce le faisceau lumineux sur les miroirs de la cavité, responsable d'une action en retour de la mesure sur la position des miroirs. Après avoir décrit la nature quantique de la lumière (section 1.2.1) et établi les équations de base du champ dans la cavité (section 1.2.2), nous abordons ces concepts dans les sections 1.2.3 et 1.2.4.

1.2.1 Nature quantique de la lumière

La théorie de l'électrodynamique quantique nous permet de modéliser le champ électromagnétique comme une somme de modes équivalents à des oscillateurs harmoniques indépendants. Du fait de la présence de la cavité qui séléctionne les modes du champ, nous nous intéressons dans ce qui suit à un champ monochromatique pouvant être décrit par un seul mode, de pulsation ω_0, de polarisation et de direction de propagation données. On associe alors à ce champ des opérateurs création $\widehat{a}^\dagger$ et annihilation $\widehat{a}$ du mode, analogues à ceux que l'on utilise pour décrire un oscillateur harmonique matériel. Ces opérateurs ne commutent pas et vérifient :

$$[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1. \tag{1.5}$$

On définit également les opérateurs $\widehat{a}_1$ et $\widehat{a}_2$, appelés opérateurs quadratures du champ, définis par :

$$\widehat{a}_1 = \widehat{a} + \widehat{a}^\dagger \quad , \quad \widehat{a}_2 = i(\widehat{a}^\dagger - \widehat{a}). \tag{1.6}$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique matériel, ces opérateurs correspondent à la position $\widehat{x}$ et l'impulsion $\widehat{p}$ (à des facteurs de normalisation près). De même que les opérateurs création et annihilation, les opérateurs quadratures ne commutent pas entre eux. Les dispersions de ces observables dans un état quelconque du champ vérifient alors une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta\widehat{a}_1 \Delta\widehat{a}_2 \geq 1, \tag{1.7}$$

traduisant l'existence de fluctuations quantiques. Pour décrire ces fluctuations, nous allons recourir à la description semi-classique [36–38], qui s'avère très bien adaptée aux dispositifs optomécaniques.

Description semi-classique

La représentation semi-classique consiste à associer aux opérateurs $\widehat{a}$ et $\widehat{a}^\dagger$ des variables pseudo-aléatoires α et α^* dont la statistique est décrite par une distribution de quasi-probabilité de Wigner $\mathcal{W}$ de telle manière que la valeur moyenne de tout produit $f(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger)$ d'opérateurs champ rangés dans l'ordre symétrique coïncide

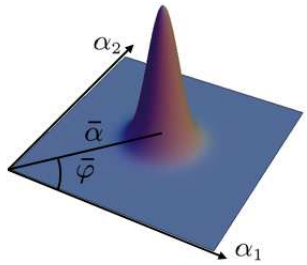

FIGURE 1.8: Représentation de la fonction de Wigner pour un état cohérent.

avec la valeur quantique :

$$< f(\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger) >= \int d\alpha d\alpha^* \mathcal{W}(\alpha, \alpha^*) f(\alpha, \alpha^*) \tag{1.8}$$

La variable aléatoire α caractérise alors le champ quantique et on peut l'écrire comme la somme de la valeur moyenne classique du champ $\bar{\alpha}$ et de ses fluctuations $\delta\alpha$ régies par la loi de probabilité semi-classique $\mathcal{W}$ caractérisant les fluctuations quantiques :

$$\alpha = \overline{\alpha} + \delta\alpha \tag{1.9}$$

Pour un état cohérent, qui décrit assez bien l'état du champ produit par un laser, la distribution de Wigner est positive, si bien que l'on peut l'assimiler à une véritable loi de probabilité. Les variables α et α^* représentent alors l'ensemble des réalisations possibles du champ. La figure 1.8 montre la fonction de Wigner pour un état cohérent. Le plan horizontal représente l'espace des phases dont chacun des axes définit une des quadratures α_1 et α_2 qui sont les variables semi-classiques associées aux opérateurs a_1 et a_2. La distribution est une gaussienne, centrée sur la valeur moyenne classique $\overline{\alpha}$ du champ et de largeur unité dans toutes les directions de l'espace : en particulier, les dispersions vérifient $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = 1$, ce qui signifie qu'un état cohérent est un état minimal pour l'inégalité d'Heisenberg (éq. 1.7).

Il est également possible de définir une quadrature quelconque du champ :

$$\alpha_\theta = e^{-i\theta}\alpha + e^{i\theta}\alpha^*. \tag{1.10}$$

Cette définition revient à changer le système d'axes définissant l'espace des phases, en les tournant d'un angle θ. Pour obtenir la dispersion de ces quadratures, il suffit de projeter la distribution de Wigner sur l'axe d'angle θ. Dans le cas d'un état cohérent, on conserve $\Delta\alpha_\theta = 1$ quel que soit l'angle θ.

Deux quadratures vont plus particulièrement nous intéresser dans ce qui va suivre, il s'agit des quadratures d'intensité et de phase. Pour une réalisation donnée α du champ, représentée par un point de l'espace des phases, la distance à l'origine et l'angle avec l'axe α_1 correspondent à l'amplitude et à la phase du champ :

$$\alpha = \sqrt{N}e^{i\varphi}, \tag{1.11}$$

où $N = |\alpha|^2$ est le nombre de photons du mode et φ la phase du champ. En linéarisant cette expression autour de la valeur moyenne du champ $\overline{\alpha} = \sqrt{\overline{N}}e^{i\overline{\varphi}}$,

on obtient les fluctuations d'intensité δN et de phase $\delta\varphi$ du champ :

$$\delta N = |\alpha|\delta\alpha_{\overline{\varphi}} \tag{1.12}$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{2|\alpha|}\delta\alpha_{\overline{\varphi}+\pi/2}. \tag{1.13}$$

Les fluctuations d'intensité sont donc portées par la quadrature d'amplitude $\alpha_{\overline{\varphi}}$, parallèle à la direction du champ moyen, alors que les fluctuations de phase sont associées à la quadrature de phase $\alpha_{\overline{\varphi}+\pi/2}$ perpendiculaire au champ moyen. Comme $\Delta\alpha_\theta = 1$ pour une quadrature quelconque d'un état cohérent, on peut utiliser l'équation (1.12) pour déterminer la variance de l'intensité d'un tel état. On obtient :

$$\Delta N^2 = \overline{N}. \tag{1.14}$$

Elle est égale au nombre moyen de photons dans le mode, ce qui est caractéristique de la distribution Poissonnienne d'un état cohérent. Les fluctuations relatives d'intensité s'écrivent :

$$\Delta N/\overline{N} = \frac{1}{\sqrt{\overline{N}}}, \tag{1.15}$$

et décroissent quand l'intensité augmente, avec une dépendance en $1/\sqrt{\overline{N}}$. Ceci constitue une propriété importante du bruit d'intensité d'un état cohérent, puisque nous verrons par la suite que l'utilisation directe de ce critère permet de conclure quant à la nature quantique ou non de la lumière que nous utilisons expérimentalement. En ce qui concerne les fluctuations de phase, on obtient une variance :

$$\Delta\varphi^2 = \frac{1}{4\overline{N}}, \tag{1.16}$$

inversement proportionnelle au nombre moyen de photons. On pouvait prévoir ce résultat qualitativement en remarquant que la dispersion de phase $\Delta\varphi$ correspond à l'angle sous lequel la distribution du champ est vue depuis l'origine (voir figure 1.8). La largeur de la dispersion valant 1 quelles que soient la direction et l'amplitude du champ, $\Delta\varphi$ diminue donc lorsque l'intensité augmente.

Enfin, les quantités N et φ sont des variables quantiques qui ne commutent pas, et doivent donc vérifier une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta N\Delta\varphi \geq \frac{1}{2}. \tag{1.17}$$

Un état cohérent est donc un état minimal de l'inégalité d'Heisenberg : les fluctuations d'intensité et de phase correspondent au minimum accessible avec des états classiques du champ, et définissent le bruit quantique standard. Ce bruit fondamental de la lumière cohérente conduit à l'existence d'une limite dans la mesure de déplacements, comme nous allons voir dans la section suivante.

Avant cela, nous allons achever la description semi-classique du champ lumineux. En effet, nous nous sommes limités jusque-là à une description statique des champs et à un modèle de quantification dans une boîte de dimensions finies. La méthode semi-classique présente cependant l'avantage de très bien se généraliser au cas d'un champ se propageant dans un système physique réel. Cette généralisation consiste à faire tendre les dimensions de la boîte de quantification vers l'infini, et à remplacer le nombre de photons N du champ par son flux de photons (nombre de photons se propageant par seconde) que l'on notera I. Les résultats présentés

dans cette section peuvent alors être transposés afin de caractériser complètement les fluctuations du champ à toute fréquence. Nous devons pour cela introduire un certains nombre de définitions et notations pour décrire les fluctuations d'un champ se propageant et qui évolue dans le temps. Toute quantité $A(t)$ variant dans le temps peut s'écrire comme la somme de sa valeur moyenne $\overline{A}$ et de ses fluctuations $\delta A(t)$ à l'instant t :

$$A(t) = \overline{A} + \delta A(t). \tag{1.18}$$

La variable aléatoire A est alors caractérisée par ses fluctuations $\delta A[\Omega]$ à la pulsation Ω, définies par la transformée de Fourier :

$$\delta A[\Omega] = \int \delta A(t) e^{i\Omega t} dt, \tag{1.19}$$

et par son spectre de bruit $S_A[\Omega]$ en régime stationnaire, défini comme :

$$\langle \delta A[\Omega] \delta A[\Omega'] \rangle = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') S_A[\Omega], \tag{1.20}$$

où $\langle ... \rangle$ représente la moyenne statistique sur la distribution de Wigner. En particulier, si l'on considère un champ cohérent, la combinaison des équations (1.20) et (1.14) permet de montrer que les fluctuations d'intensité $\delta I[\Omega]$ à la pulsation Ω sont indépendantes de la fréquence et proportionnelles à la racine carrée du flux moyen de photons $\overline{I}$. Le spectre de ces fluctuations s'écrit :

$$S_I[\Omega] = \overline{I}. \tag{1.21}$$

De même, en combinant les équations (1.20) et (1.16), on détermine le spectre des fluctuations de phase :

$$S_\varphi[\Omega] = \frac{1}{\overline{I}}. \tag{1.22}$$

1.2.2 Evolution du champ dans une cavité sans perte

Le champ entrant dans la cavité à miroir mobile étant issu d'un laser, il est le siège de fluctuations quantiques caractérisées par les spectres de bruit (1.21) et (1.22). La méthode semi-classique permet alors de déterminer les champs sortant de la cavité, en utilisant les équations classiques d'évolution du système. Nous allons ainsi expliciter les fluctuations du champ réfléchi par la cavité afin d'établir les conséquences de la nature quantique du champ sur la sensibilité de la mesure. Nous continuons de supposer que le miroir mobile est totalement réfléchissant, que le coupleur d'entrée a une très grande réflectivité $r = 1 - \gamma$, avec $\gamma \ll 1$, et que les pertes sont négligeables. On note t la transmission en amplitude du miroir d'entrée. Enfin, la cavité est caractérisée par sa longueur L_0 lorsque le miroir est immobile.

La cavité étant supposée sans perte, l'énergie du champ est conservée de part et d'autre du miroir d'entrée. Ceci permet d'établir que les amplitudes des champs incidents et réfléchis sont reliées par les relations linéaires et unitaires suivantes :

$$\alpha(t) = t\alpha^{in}(t) + r\alpha'(t), \tag{1.23}$$

$$\alpha^{out}(t) = t\alpha'(t) - r\alpha^{in}(t), \tag{1.24}$$

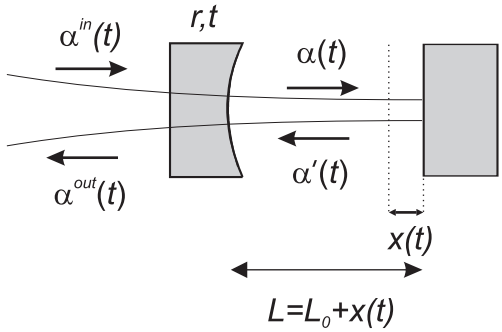

FIGURE 1.9: Description des champs incident, réfléchi, et intracavité.

L'unitarité de ces relations impose que la transmission t du coupleur soit égale à $\sqrt{2\gamma}$. Le champ intracavité α à un instant donné t est ainsi la somme de la partie du champ incident α^{in} transmis par la cavité et du champ intracavité α' ayant déjà effectué un aller-retour entre les miroirs. Le champ sortant est égal au champ intracavité transmis par le coupleur, superposé au champ incident directement réfléchi par le coupleur. La propagation du champ dans la cavité permet alors de relier les champs α et α' par l'équation :

$$\alpha'(t) = \alpha(t-\tau)e^{i\Psi(t)}, \tag{1.25}$$

où τ est le temps mis par la lumière pour effectuer un aller-retour dans la cavité, et où $\Psi(t)$ est le déphasage accumulé par le champ intracavité lors d'un aller-retour, relié à la longueur instantanée de la cavité par :

$$\Psi(t) \equiv 2kL(t) \quad [2\pi], \tag{1.26}$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde du champ. Il est commode de décomposer la longueur $L(t)$ de la cavité en un terme statique L_0 égal à la distance entre les miroirs lorsque le miroir mobile est dans sa position de repos, et un terme dynamique $x(t)$ qui correspond au mouvement du miroir autour de sa position d'équilibre :

$$L(t) = L_0 + x(t). \tag{1.27}$$

Pour une cavité proche de résonance ($\psi(t) \ll 1$) et constituée de miroirs à grande réflectivité ($\gamma \ll 1$), l'amplitude du champ varie peu sur un aller-retour. On peut alors linéariser l'équation (1.25), et l'on retrouve les expressions usuelles d'évolution du champ dans une cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie [28], avec un terme supplémentaire de déphasage $\Psi(t)$ dû au déplacement $x(t)$ du miroir mobile :

$$\tau\frac{d}{dt}\alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)]\alpha(t) + \sqrt{2\gamma}\alpha^{in}(t), \tag{1.28}$$

$$\alpha^{out}(t) = \sqrt{2\gamma}\alpha(t) - \alpha^{in}(t), \tag{1.29}$$

$$\Psi(t) = \Psi_0 + 2kx(t), \tag{1.30}$$

où l'on a noté $\Psi_0 \equiv 2kL_0 \quad [2\pi]$ le déphasage induit par la cavité lorsque le miroir mobile est à l'équilibre.
Le temps de propagation τ dépend à priori de la distance instantanée qui sépare

les miroirs, donc du déplacement $x(t)$ du miroir mobile. Cependant, dans nos conditions expérimentales où les déplacements du miroir sont faibles devant L_0, on peut négliger ces effets de retard et écrire :

$$\tau = 2L_0/c. \tag{1.31}$$

Nous présentons la résolution de ce système d'équations dans les deux paragraphes suivants. Comme nous l'avons fait dans la section précédente, nous écrivons le champ $\alpha(t)$ comme la somme de sa valeur moyenne $\overline{\alpha}$ et de ses fluctuations $\delta\alpha(t)$, que nous traitons séparément.

États stationnaires du champ

Les états stationnaires des champs intracavité et réfléchi s'obtiennent en remplaçant toutes les grandeurs dépendantes du temps par leurs valeurs moyennes dans les équations (1.28), (1.29) et (1.30), ce qui revient à prendre $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ dans l'équation (1.28) :

$$\overline{\alpha} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{in}, \tag{1.32}$$

$$\overline{\alpha}^{out} = \frac{\gamma + i\overline{\Psi}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{in}. \tag{1.33}$$

On retrouve bien sur ces expressions que dans le cas d'une cavité sans perte, l'intensité réfléchie moyenne $I^{out} = |\overline{\alpha}^{out}|^2$ est égale à l'intensité incidente, la cavité induisant simplement un déphasage entre le champ incident et le champ réfléchi. De plus, si la lumière est résonnante avec la cavité, c'est à dire si $\overline{\Psi} = 0$, tous les champs sont en phase, et on retrouve le résultat d'amplification de l'intensité intracavité à résonance évoqué dans la section 1.1.2, la comparaison des expressions (1.32) et (1.3) permettant de relier γ et la finesse $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{\gamma} \tag{1.34}$$

Évolution des quadratures dans la cavité

Nous décrivons les fluctuations des champs dans l'espace de Fourier, en regardant les conséquences d'un déplacement $\delta x[\Omega]$ sur les quadratures de phase et d'intensité du champ sortant de la cavité. Par ailleurs, la sensibilité étant maximale lorsque la cavité se trouve à résonance avec la lumière incidente, nous nous limitons pour l'instant au cas $\overline{\Psi} = 0$. Dans ces conditions, les champs moyens sont tous en phase, et nous les prendrons réels par convention pour alléger la présentation.

Les équations pour les fluctuations des champs intracavité et réfléchi sont obtenues en linéarisant les équations (1.28) et (1.29) des champs $\alpha(t)$ et $\alpha^{out}(t)$ autour des valeurs moyennes. Dans le cas où la lumière est résonnante avec la cavité, ces équations s'écrivent dans l'espace de Fourier :

$$(\gamma - i\Omega\tau)\delta\alpha[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\,\delta\alpha^{in}[\Omega] + 2ik\overline{\alpha}\,\delta x[\Omega], \tag{1.35}$$

$$\delta\alpha^{out}[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\,\delta\alpha[\Omega] - \delta\alpha^{in}[\Omega]. \tag{1.36}$$

Les champs moyens étant réels, les quadratures notées p et q d'intensité et de phase du champ α s'identifient aux quadratures réelle et imaginaire α_1 et α_2 [équations (1.6), (1.12) et (1.13)] :

$$p[\Omega] = \alpha[\Omega] + \alpha^*[\Omega], \tag{1.37}$$
$$q[\Omega] = i\left(\alpha^*[\Omega] - \alpha[\Omega]\right), \tag{1.38}$$

où la transformée de Fourrier $\alpha^*[\Omega]$ de $\alpha^*(t)$ est égale à $(\alpha[-\Omega])^*$. On peut alors calculer toutes les fluctuations d'intensité et de phase des faisceaux intracavité et réfléchi à partir des équations (1.35) et (1.36) :

$$\delta p[\Omega] = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau}\delta p^{in}[\Omega], \tag{1.39}$$
$$\delta q[\Omega] = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q^{in}[\Omega] + \frac{4}{\gamma - i\Omega\tau}k\overline{\alpha}\delta x[\Omega], \tag{1.40}$$
$$\delta p^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta p^{in}[\Omega], \tag{1.41}$$
$$\delta q^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q^{in}[\Omega] + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau}k\overline{\alpha}\delta x[\Omega]. \tag{1.42}$$

Les équations (1.39) à (1.42) montrent que toutes les quantités relatives aux fluctuations intracavité sont divisées par un terme en $\gamma - i\Omega\tau$ qui correspond à un filtrage de la cavité. Ce phénomène est assez intuitif : les fluctuations du champ intracavité, qu'elles proviennent de la nature quantique du champ ou bien du mouvement du miroir mobile, sont moyennées sur le temps pendant lequel la lumière est stockée dans la cavité, qui se comporte ainsi comme un filtre passe-bas. On définit alors la bande passante Ω_{cav} de la cavité par :

$$\Omega_{cav} = \gamma/\tau. \tag{1.43}$$

Ainsi, les fluctuations de phase et d'intensité du faisceau incident dont la fréquence est grande devant Ω_{cav} sont essentiellement réfléchies par la cavité et ne se retrouvent pas dans le champ intracavité. De même les fluctuations de position du miroir pour des fréquences très supérieures à Ω_{cav} n'agissent pas sur la phase du faisceau réfléchi. Si ce filtrage apparaît à première vue comme une limitation pour la mesure des déplacements du miroir, il correspond également à une amplification des effets pour des fréquences inférieures à la bande passante de la cavité par un facteur $1/\gamma$ de l'ordre de la finesse $\mathcal{F}$ de la cavité.

On remarque également qu'à résonance, les fluctuations d'amplitude du champ dans la cavité et du champ sortant sont totalement découplées des fluctuations de phase et de position du miroir mobile. Cela peut s'interpréter par le fait que le point de fonctionnement de la cavité est au sommet du pic d'Airy où la pente en fonction du déphasage est nulle. L'intensité ne varie donc pas au premier ordre dans le développement linéaire des fluctuations. Ceci constitue une propriété très importante sur laquelle nous reviendrons plus loin, puisqu'elle peut permettre de réaliser une mesure quantique non destructive de la lumière.

1.2.3 Bruit sur la mesure et action en retour : la limite quantique standard

Nous discutons dans cette section des conséquences de la nature quantique de la lumière sur la mesure. Nous nous appuyons pour cela sur les résultats établis dans la section précédente, en négligeant toutefois les effets de filtrage liés à la cavité ($\Omega \ll \Omega_{cav}$), afin de simplifier la présentation.

Bruit sur la mesure

Nous avons vu dans la section 1.1.2 que la phase du faisceau réfléchi par une cavité Fabry-Pérot de grande finesse était extrêmement sensible aux déplacements du miroir mobile, ce qui rend son utilisation particulièrement intéressante si l'on veut accéder à une mesure très précise de la position du miroir. Cependant, la lumière cohérente utilisée pour réaliser ce type de mesure présente elle-même des fluctuations, comme nous l'avons vu dans la section 1.2.1. On peut donc prévoir que tout déplacement du miroir qui induira une variation de la phase du faisceau réfléchi plus petite que ses fluctuations quantiques sera indétectable. Plus précisément, l'équation (1.42) montre qu'à fréquence faible devant Ω_{cav}, les fluctuations de phase du faisceau incident se retrouvent intégralement dans le faisceau réfléchi. La prise en compte du bruit quantique de phase du faisceau de mesure revient donc à modifier l'équation (1.4) de la manière suivante [éqs. (1.13) et (1.42)] :

$$\delta\varphi^{out}[\Omega] = \frac{1}{2|\overline{\alpha}^{out}|}\delta q^{out}[\Omega] = \delta\varphi^{in}[\Omega] + 8\mathcal{F}\frac{\delta x[\Omega]}{\lambda}, \tag{1.44}$$

où $\delta\varphi^{in}[\Omega]$ désigne les fluctuations quantiques de phase du faisceau incident. Le plus petit déplacement δx_{shot} accessible à la mesure s'obtient en égalisant l'effet du signal δx et le bruit $\delta\varphi^{in}$ (dont le spectre est donné par l'équation 1.22) :

$$\delta x_{shot} \simeq \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{\overline{I}^{in}}}. \tag{1.45}$$

Dans notre expérience, nous utilisons typiquement un faisceau de longueur d'onde $\lambda = 800$ nm et de puissance $P^{in} = 1,5$ mW correspondant à une intensité (exprimée en photons par seconde) $I^{in} = P^{in}/(h\nu) \simeq 6 \times 10^{15}$ s^{-1}, où h est la constante de Planck et ν la fréquence du faisceau laser. La finesse de la cavité est typiquement de l'ordre de 300 000. Pour ces paramètres, on trouve que le plus petit déplacement mesurable correspond à une amplitude spectrale $\delta x_{shot} \simeq 2 \times 10^{-21}$ $m/\sqrt{Hz}$.

L'expression (1.45) suggère de plus que la mesure est d'autant plus sensible que le faisceau utilisé pour la mesure est intense. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que ceci n'est pas exact, en raison des effets induits par la pression de radiation sur le miroir mobile, que nous avons négligé jusque-là.

Action en retour de la mesure

En mécanique quantique, le processus de mesure perturbe toujours le système sur lequel on l'effectue : c'est ce que l'on appelle l'action en retour de la mesure. Dans le cas de la mesure interférométrique de la position d'un miroir mobile, qui nous intéresse plus particulièrement dans ce manuscrit, c'est la nature quantique de la

lumière, notre instrument de mesure, qui est responsable de ce phénomène d'action en retour. En effet, comme nous venons de le voir dans la section 1.2.1, la lumière qui pénètre dans la cavité présente des fluctuations quantiques d'intensité. D'autre part, la conservation de l'impulsion du système {lumière+miroir} implique l'existence d'une force de pression de radiation, proportionnelle à l'intensité intracavité, exercée par la lumière sur le miroir mobile. Les fluctuations quantiques d'intensité du champ lumineux vont donc entraîner des fluctuations de cette force de pression de radiation, sous l'effet de laquelle le miroir mobile va se mettre en mouvement : la mesure vient donc ainsi perturber la position du miroir.

Pour pouvoir étudier quantitativement cet effet, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire [39], qui nous permet d'exprimer le mouvement du miroir mobile en fonction de la résultante des forces qui lui sont appliquées. En passant dans l'espace de Fourier, les composantes spectrales du déplacement $x[\Omega]$ et de la résultante des forces $F[\Omega]$ sont en effet reliées par :

$$x[\Omega] = \chi[\Omega]F[\Omega], \tag{1.46}$$

où la susceptibilité $\chi[\Omega]$ décrit la réponse mécanique du miroir. Nous verrons dans la suite que le miroir peut être considéré comme une assemblée d'oscillateurs harmoniques, chacun étant associé à un mode de vibration du miroir. Nous nous limitons dans un premier temps à un mouvement pouvant être décrit par un seul mode propre, par exemple un déplacement global du miroir dû à une suspension de type pendulaire, ou encore une déformation de surface du miroir produite par un seul mode de vibration du substrat. Dans ces conditions la susceptibilité du miroir prend la forme d'une lorentzienne :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_0^2 - \Omega^2 - i\Omega\Omega_0/Q)}, \tag{1.47}$$

où le mode propre du mouvement du miroir est caractérisé par une pulsation propre Ω_0, une masse M et un facteur de qualité mécanique Q. Nous verrons que dans le cas des miroirs mobiles plan-convexe que nous utilisons, ces paramètres valent typiquement $\Omega_0/2\pi = 1$ MHz, $M = 100$ mg et $Q = 10^6$.

Pour achever la caractérisation quantitative de l'action en retour, nous devons encore donner l'expression de la force de pression de radiation qu'exerce la lumière sur le miroir. Pour cela, il suffit d'effectuer un simple bilan d'impulsion sur le système {lumière+miroir}, comme nous l'avons suggéré plus haut. Un photon se réfléchissant sur le miroir perd une impulsion $2\hbar k$, impulsion gagnée par le miroir mobile, en vertu de la conservation de l'impulsion du système total. Ceci étant valable pour tous les photons réfléchis par le miroir, on en déduit l'expression de la force instantanée de pression de radiation :

$$F_{rad}(t) = 2\hbar k I(t), \tag{1.48}$$

où $I(t)$ est l'intensité lumineuse exprimée en flux de photons.
En écrivant l'équation (1.46) à fréquence nulle, on obtient l'expression du déplacement moyen du miroir dû à la force de pression de radiation moyenne :

$$\overline{x}_{rad} = \chi[0]\overline{F}_{rad} = \frac{2\hbar k\overline{I}}{M_0\Omega_0^2}. \tag{1.49}$$

où l'on a noté $\overline{I}$ l'intensité intracavité moyenne. Notons que dans cette expression, $\chi[0]$ désigne la réponse basse fréquence du miroir mobile, qui est en général différente de la valeur à fréquence nulle de la susceptibilité donnée par l'équation (1.47). En effet, comme nous venons de le signaler, le miroir mobile peut être considéré comme une assemblée d'oscillateurs harmoniques, et sa réponse basse fréquence résulte donc de la contribution de toutes ses résonances. La masse M_0 introduite dans l'équation (1.49) est donc en réalité une masse effective prenant en compte le caractère multi-modal du miroir mobile, cette masse étant en général faible devant celle de chaque mode pris individuellement -typiquement un millième de la masse d'un mode quelconque du résonateur-.
Pour une cavité de finesse 300 000 et une puissance incidente $P^{in} = 1.5$ mW, les équations (1.3) et (1.48) permettent de déterminer que la valeur moyenne de la force de pression de radiation exercée sur le miroir mobile est de l'ordre de $\overline{F}_{rad} \simeq 2 \times 10^{-6}$ N. Dans le cas du résonateur plan-convexe ayant les paramètres mécaniques décrits plus haut, dont on prendra la masse effective à fréquence nulle égale à $M_0 \simeq 0.1$ mg, l'équation (1.49) permet d'estimer l'effet de recul statique induit par cette force, $\overline{x}_{rad} \simeq 5 \times 10^{-13}$ m. Si cet effet de recul semble très petit, il n'est toutefois pas négligeable devant la largeur $\lambda/2\mathcal{F} \simeq 1,3 \times 10^{-12}$ m de la résonance de la cavité.

Cette partie basse fréquence de la force ne contribue pas à l'action en retour, qui trouve son origine dans la nature fluctuante de l'intensité de la lumière. L'équation (1.46), écrite à fréquence non nulle, nous permet donc d'exprimer l'amplitude des déplacements dus à l'action en retour :

$$\delta x_{rad}[\Omega] = \chi[\Omega]\delta F_{rad}[\Omega] = 2\hbar k\chi[\Omega]\delta I[\Omega]. \tag{1.50}$$

En utilisant l'expression (1.39) donnant le bruit d'intensité $\delta I = \overline{\alpha}\delta p$ du champ intracavité, on en déduit le bruit de position du miroir lié au bruit quantique d'intensité pour $\Omega \ll \Omega_{cav}$:

$$\delta x_{rad}[\Omega] = \frac{8\hbar\mathcal{F}\sqrt{\overline{I}^{in}}}{\lambda}\chi[\Omega]\delta p^{in}. \tag{1.51}$$

Cette expression permet de calculer l'amplitude spectrale du bruit de position dû aux fluctuations quantiques d'intensité du faisceau intracavité, en utilisant les paramètres du miroir mobile précédemment définis. Pour un faisceau incident cohérent ($S_I^{in} = 1$), on obtient une courbe Lorentzienne, représentée sur la figure 1.10. On constate en particulier qu'à la fréquence de résonance du miroir mobile, l'amplitude des déplacements provoqués par l'action en retour est de l'ordre de 10^{-17} $m/\sqrt{Hz}$, soit un facteur 10 000 au dessus du bruit de phase δx_{shot}, ce qui montre qu'il est indispensable de prendre en compte les effets de pression de radiation pour établir la limite de sensibilité relative à un tel résonateur.

De plus, l'équation (1.51) montre que contrairement au bruit quantique de phase, le bruit quantique de pression de radiation est d'autant plus grand que l'intensité du faisceau de mesure l'est aussi. Ceci explique qu'on ne puisse pas améliorer indéfiniment la sensibilité de la mesure, soumise à une limite appelée Limite Quantique Standard, que nous présentons dans le paragraphe suivant.

Limite quantique standard

Si l'on tient compte de l'ensemble des bruits quantiques auxquels est soumise la

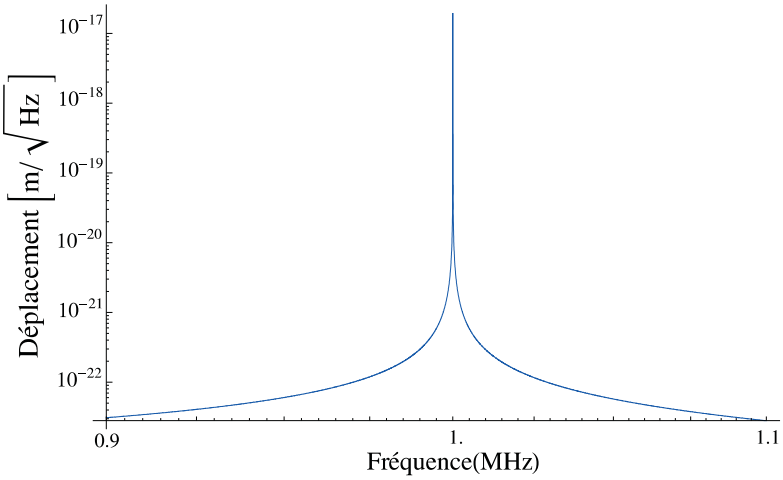

FIGURE 1.10: Amplitude spectrale du bruit de position attendu dû aux fluctuations quantiques d'intensité du faisceau incident. On a considéré un mode du miroir caractérisé par une fréquence propre de 1 MHz, une masse de 100 mg et un facteur de qualité $Q = 10^6$ avec un faisceau incident cohérent de puissance $1,5$ mW.

mesure, les fluctuations de phase du faisceau réfléchi par la cavité s'écrivent, pour une cavité à résonance ($\overline{\psi} = 0$) et à basse fréquence :

$$\delta\varphi^{out}[\Omega] = \delta\varphi^{in}[\Omega] + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}(\delta x[\Omega] + \delta x_{rad}[\Omega]), \tag{1.52}$$

où δx est la variation de longueur de la cavité que l'on cherche à mesurer, qui exclue les déplacements induits par la pression de radiation.

Cette expression nous permet de déterminer le plus petit déplacement mesurable, en utilisant les relations (1.22) et (1.51), caractérisé par le spectre de bruit équivalent suivant :

$$S_x^{min}[\Omega] = \frac{\lambda^2}{256\mathcal{F}^2\overline{I}^{in}} + \frac{64\hbar^2\mathcal{F}^2\overline{I}^{in}}{\lambda^2}|\chi[\Omega]|^2 \tag{1.53}$$

Le premier terme correspond au bruit de phase déjà calculé (équation (1.45)), le second terme aux effets de pression de radiation, proportionnels à la réponse $|\chi|^2$ du miroir. A une fréquence donnée Ω, la sensibilité (cf figure 1.11) de la mesure présente un minimum en fonction de l'intensité moyenne incidente, résultant du meilleur compromis entre ces deux bruits quantiques. Ce minimum définit ce que l'on appelle la *limite quantique standard* (LQS) [1] [12, 40]. On calcule aisément la

1. Notons cependant que la LQS ne peut être considérée comme une véritable limite fondamentale, son calcul reposant sur un certain nombre d'hypothèses telle que l'utilisation d'états cohérents du champs dont les fluctuations de phase et d'intensité sont décorrélées. Il est possible de battre cette limite en utilisant des états comprimés du champ, ou encore en désaccordant la cavité. Il existe toutefois une limite quantique ultime, liée aux processus de dissipation, qui est beaucoup plus petite que la limite quantique standard, puisqu'elle consiste à remplacer dans l'équation (1.55) le module de la susceptibilité par sa partie imaginaire [14].

valeur de $\overline{I}^{in}$ pour laquelle ce minimum est réalisé, et l'on obtient :

$$\overline{I}^{in}_{LQS}[\Omega] = \frac{\lambda^2}{128\hbar|\chi[\Omega]|\mathcal{F}^2}. \tag{1.54}$$

La sensibilité de la mesure correspondante se calcule alors à partir de l'équation (1.53), et l'on trouve un déplacement minimal observable :

$$\delta x_{LQS}[\Omega] = \sqrt{S_x^{min}[\Omega]} = \sqrt{\hbar|\chi[\Omega]|}. \tag{1.55}$$

Cette équation montre que la limite quantique standard dépend uniquement des paramètres mécaniques du miroir mobile. On voit plus particulièrement sur cette expression que la sensibilité est repoussée d'autant plus bas que la susceptibilité mécanique du miroir est faible. En revanche si l'on souhaite exacerber la réponse du miroir aux effets quantiques de la pression de radiation afin d'observer la LQS expérimentalement, on choisira un miroir doté de la meilleure réponse mécanique possible. Nous allons déterminer dans la section suivante les conditions plus précises pour mettre en évidence les effets quantiques de la pression de radiation.

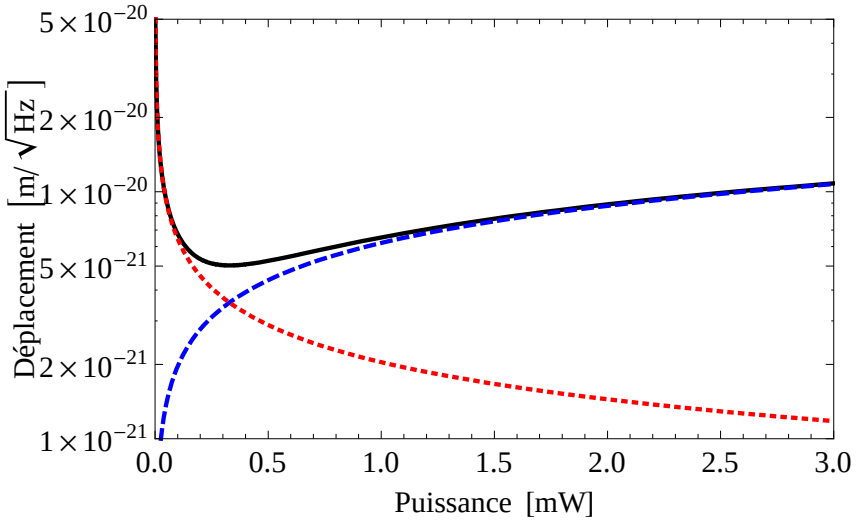

FIGURE 1.11: Sensibilité de la mesure du déplacement en fonction de la puissance moyenne incidente. Courbe en tirets : limite de sensibilité due au bruit quantique de pression de radiation. Courbe en pointillés : limite de sensibilité due au bruit de phase du faisceau incident. Courbe en trait plein : sensibilité totale résultante. Les courbes sont calculées à basse fréquence où $\chi[0] = 1/M_0\Omega_0^2$ avec $M_0 = 0,1\ mg$ et $\Omega_0/2\pi = 1\ MHz$. La limite quantique standard est atteinte pour $\overline{P}^{in} = 0,25$ mW.

1.2.4 Mise en évidence du bruit de pression de radiation

L'idée la plus simple pour mettre en évidence le bruit δx_{rad} de pression de radiation consiste à mesurer le bruit de phase $\delta\varphi^{out}$ du faisceau réfléchi, dans des conditions où le bruit δx_{rad} est dominant devant tous les autres bruits (éq. 1.52).

Pour s'assurer que l'on observe bien le bruit de pression de radiation, il faut toutefois s'assurer que le bruit de phase observé reflète bien les fluctuations de la force de pression de radiation, c'est-à-dire en fin de compte les fluctuations d'intensité du faisceau lumineux. Or, nous avons vu dans la section 1.2.1 que l'intensité et la phase de la lumière sont deux observables qui ne commutent pas. La mécanique quantique prévoit qu'il est impossible de mesurer simultanément deux telles grandeurs. On comprend donc qu'il n'est pas possible de démontrer directement les effets de pression de radiation du faisceau de mesure sur le mouvement du miroir, puisque cela nécessite d'établir des corrélations entre la phase et l'intensité de la lumière.

Observation indirecte des effets de pression de radiation

Il existe cependant un moyen indirect d'observer les effets quantiques de la pression de radiation, en s'intéressant aux fluctuations du champ réfléchi par la cavité. En effet, le couplage optomécanique induit une compression du champ réfléchi par la cavité, c'est à dire que certaines de ses quadratures vont présenter une dispersion inférieure à l'unité. Cet effet se visualise aisément sur la représentation dans l'espace des phases des fonctions de Wigner des champs incident et réfléchi (cf figure 1.12). Pour comprendre ce phénomène, il faut revenir à l'expression des fluctuations du champ réfléchi donnée par les équations (1.41) et (1.42), écrites pour une fréquence $\Omega \ll \Omega_{cav}$:

$$\delta p^{out}[\Omega] = \delta p^{in}[\Omega] \quad , \quad \delta q^{out}[\Omega] = \delta q^{in}[\Omega] + \frac{128\mathcal{F}^2\overline{I}^{in}}{\lambda^2}\hbar\chi[\Omega]\delta p^{in}[\Omega] \tag{1.56}$$

La première de ces deux équations, qui exprime la conservation du flux de photons, impose que les fluctuations d'amplitude à basse fréquence restent inchangées selon la direction du champ moyen. En revanche, la deuxième équation montre que le bruit de phase est augmenté, ce qui correspond à l'ouverture de l'angle sous lequel la distribution de Wigner est vue depuis l'origine de l'espace des phase (à droite sur la figure 1.12). La distribution du bruit quantique à la sortie de la cavité est donc elliptique, c'est à dire que l'état du champ réfléchi par la cavité est comprimé. Signalons par ailleurs l'analogie entre la compression du champ réfléchi obtenue par les effets optomécaniques dus au miroir mobile et celle obtenue avec un milieu Kerr placé dans la cavité [41] : l'indice optique d'un milieu Kerr dépend linéairement de l'intensité du champ qui le traverse, si bien que les fluctuations d'intensité de ce champ modifient le chemin optique qu'il doit parcourir pour traverser le milieu. Dans les deux cas, la dynamique des fluctuations du champ est donc la même. Nous reviendrons plus en détails sur cette analogie dans la suite de ce chapitre.

Dispositif de double injection

La méthode d'observation du bruit de pression de radiation que nous venons de présenter reste cependant indirecte : elle traduit une conséquence du couplage avec le miroir mobile sur les fluctuations quantiques du champ, mais elle ne constitue pas une mesure directe de l'action en retour dans la mesure. Pour surmonter cette difficulté, une idée simple consiste à envoyer un deuxième faisceau dans la cavité, d'intensité grande devant celle du faisceau de mesure (cf figure 1.13). Le mouvement du miroir est dans ce cas gouverné essentiellement par la pression de radiation que le faisceau intense exerce sur lui. Il est alors possible de mesurer

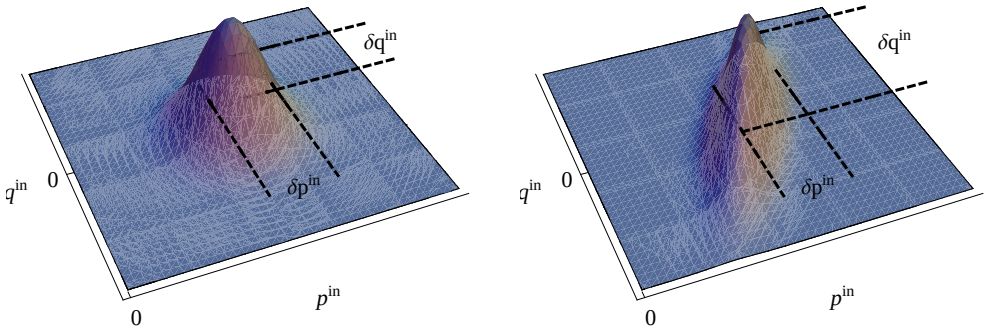

FIGURE 1.12: Représentation, dans l'espace des phases du champ, du bruit quantique à l'entrée (à gauche) et à la sortie (à droite) de la cavité. La distribution de probabilité du champ réfléchi est elliptique, signature d'un effet de compression.

simultanément les fluctuations de phase du faisceau de mesure et les fluctuations d'intensité du faisceau intense réfléchi, afin d'établir des corrélations entre elles.

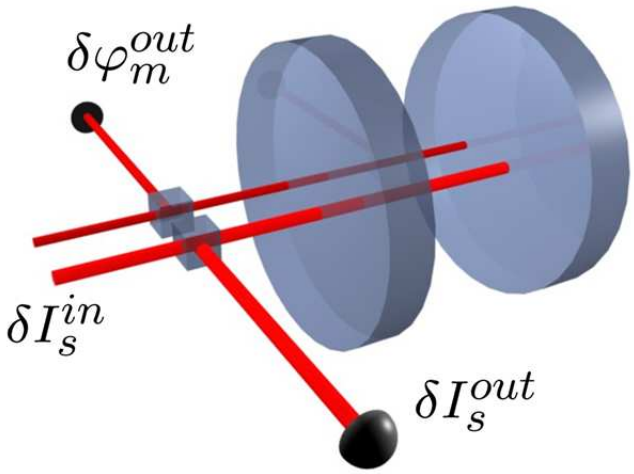

FIGURE 1.13: Principe du dispositif de double injection : 2 faisceaux sont envoyés dans la cavité à miroir mobile. Le premier, peu intense, est utilisé pour mesurer les déplacements du miroir. Le second, beaucoup plus intense que le premier, entraîne la mise en mouvement du miroir via ses fluctuations d'intensité. La comparaison des signaux résultant de la mesure de la phase $\delta\varphi_m^{out}$ du faisceau faible d'une part et de l'intensité δI_s^{out} du faisceau intense d'autre part permet de caractériser l'action en retour au niveau quantique.

Plus précisément, les deux faisceaux étant à résonance avec la cavité, on trouve à partir des équations précédentes que les fluctuations d'intensité du faisceau intense réfléchi reproduisent ses fluctuations incidentes, responsables des déplacements du

miroir mobile visibles sur la phase du faisceau de mesure réfléchi :

$$\delta I_s^{out} = \delta I_s^{in} \tag{1.57}$$

$$\delta\varphi_m^{out} = \delta\varphi_m^{in} + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}\delta x_{rad} \tag{1.58}$$

$$\delta x_{rad} = \frac{8\hbar\mathcal{F}}{\lambda}\chi\delta I_s^{in}. \tag{1.59}$$

Les effets quantiques de l'action en retour se traduisent ainsi par des corrélations entre l'intensité δI_s^{out} du faisceau signal et la phase $\delta\varphi_m^{out}$ du faisceau de mesure. Comme nous le verrons en détail dans la section 1.4, la phase du faisceau de mesure permet en fait de réaliser une mesure quantique non destructive de l'intensité du faisceau intense.

1.3 Atteindre le régime quantique de la pression de radiation

Dans ce qui précède, nous avons supposé que la mesure de la position du miroir mobile n'était limitée que par la nature fondamentalement quantique de la lumière. Or, un certain nombre d'autres bruits, d'origine classique, limitent également cette mesure. Parmi eux, on peut citer des bruits techniques, comme le bruit de fréquence du laser et les vibrations basses fréquences du miroir, mais il faut également évoquer un bruit plus fondamental, le bruit thermique, qui résulte du couplage du miroir avec un environnement extérieur à la température T. Si un certain nombre de méthodes peuvent être mises en oeuvre pour s'affranchir des bruits techniques comme nous allons le voir dans ce mémoire, il n'existe guère d'autre moyen que de diminuer significativement la température de l'environnement pour minimiser la contribution du bruit thermique, ce qui nécessite des moyens cryogéniques. Nous donnons dans cette section une description générale du bruit thermique, avant de voir dans quelle mesure il limite l'observation du bruit quantique de pression de radiation.

1.3.1 Bruit thermique d'un miroir mobile

On suppose le miroir placé dans un thermostat à la température T. Il est donc soumis à des fluctuations thermiques de position d'une part, et à des processus de dissipation d'autre part. La dissipation est à l'origine d'un phénomène d'amortissement de l'oscillateur, décrit par la partie imaginaire de la susceptibilité (terme $-i\Omega\Omega_0/Q$ dans le dénominateur de l'expression (1.47) de la susceptibilité). Mais le couplage thermique est également source de fluctuations de position pouvant être décrites par une force de Langevin F_T de valeur moyenne nulle. Le théorème fluctuations-dissipation [39] permet de relier la partie imaginaire de la susceptibilité mécanique au spectre de la force de Langevin F_T :

$$S_T[\Omega] = -\frac{2k_BT}{\Omega}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\chi[\Omega]}\right), \tag{1.60}$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann et où le spectre de la force de Langevin est défini comme la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation (définition équivalente à celle utilisée pour les champs, éq. (1.20)) :

$$S_T[\Omega] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle F_T(t) F_T(t+\tau)\rangle e^{-i\Omega\tau}, \tag{1.61}$$

la moyenne statistique $\langle ... \rangle$ portant sur l'ensemble décrivant le bain thermique. Pour un miroir mobile dont le mouvement peut être décrit à partir d'un seul mode de vibration (éq. (1.47)), on obtient alors le spectre du bruit thermique de position à partir des relations (1.46), (1.47) et (1.60) :

$$S_x^T[\Omega] = 2k_B T M \frac{\Omega_0}{Q} |\chi[\Omega]|^2. \tag{1.62}$$

Le bruit thermique présente donc la même dépendance en fréquence que le bruit de pression de radiation, puisqu'ils sont tous deux proportionnels à $|\chi[\Omega]|^2$ (éqs. (1.62) et (1.51)). De plus, dans les conditions optiques et mécaniques définies plus haut, le rapport de ces bruits à température ambiante $T = 300$ K vaut $S_x^{rad}/S_x^T \simeq 10^{-3}$: le bruit thermique couvre complètement les effets de pression de radiation à température ambiante, et constitue ainsi la principale limite pour notre mesure.

1.3.2 Les conditions pour observer le régime quantique

La présence du bruit thermique va donc entraîner un certain nombre de contraintes sur notre système, si l'on veut pouvoir l'utiliser afin de mettre en évidence le bruit de pression de radiation. Pour déterminer quelles sont ces conditions, nous allons nous intéresser à l'expression du rapport S_x^{rad}/S_x^T, déduite des équations (1.51) et (1.62) :

$$\frac{S_x^{rad}}{S_x^T} \simeq 32 \frac{\hbar^2 \mathcal{F}^2 \overline{I}^{in}}{\lambda^2} \frac{Q}{k_B T M \Omega_0}. \tag{1.63}$$

Cette équation regroupe les paramètres clés du problème : du point de vue optique, le premier facteur de l'équation 1.63 montre qu'il faut maximiser l'amplitude des fluctuations de pression de radiation exercée sur le miroir mobile, c'est-à-dire qu'il faut optimiser l'intensité présente dans la cavité (le produit $\mathcal{F}I^{in}$) ainsi que l'impulsion des photons (quotient $\frac{\hbar^2}{\lambda^2}$). Il faudra donc chercher à obtenir des cavités de très grande finesse à la longueur d'onde de travail, tolérant un haut flux de photons. Nous verrons qu'à cet égard, les miroirs que nous utilisons se situent à la pointe de l'état de l'art, puisque nous avons obtenu des cavités de finesses supérieures à 300000 à 800 nm, capable de supporter une intensité intracavité de l'ordre de $\mathcal{F}I^{in} \simeq 3 \cdot 10^5 \times 1$ mW $= 300$ W.
Du point de vue mécanique, illustré par le deuxième facteur de l'équation (1.63), il faut minimiser les effets de dissipation, c'est à dire réduire le plus possible l'amortissement Ω_0/Q du résonateur, sa masse, et bien entendu la température du système.

Ce dernier point est le plus délicat, car s'il est relativement simple d'abaisser la température à $4K$, à l'aide d'un cryostat à hélium liquide par exemple, il est en revanche beaucoup plus difficile de descendre plus bas, des moyens extrêmement lourds devant alors être mis en oeuvre (cryostat à dilution...). Les conditions mécaniques requises ne sont pas simples à obtenir pour autant. En effet, leur amélioration est souvent associée à la dégradation des propriétés optiques du miroir mobile. Ceci vient du fait que pour diminuer la masse, il faut en général réduire les dimensions du résonateur [24, 25, 27], ce qui rend son traitement réfléchissant beaucoup plus difficile à réaliser en raison notamment de l'état de surface médiocre des miroirs de taille micrométrique.

Ces considérations nous permettent de comprendre que la détermination d'une configuration permettant l'observation des effets de la pression de radiation ne pourra résulter que d'un compromis entre les paramètres optiques et les paramètres mécaniques du système. Nous verrons plus loin dans ce mémoire que l'étude du régime quantique du couplage optomécanique nécessite également de minimiser les pertes que la lumière subit dans la cavité. C'est pourquoi nous avons choisi de privilégier les paramètres optiques du système, au détriment de la masse du résonateur (typiquement 100 mg comme nous l'avons précédemment évoqué). Dans le cas du miroir plan-convexe que nous avons utilisé pour établir la plupart des résultats présentés dans ce manuscrit, on trouve que $S_x^{rad}/S_x^T \simeq 6 \cdot 10^{-2}$ à 4 K, ce qui semble à première vue insuffisant puisque les effets thermiques contribuent encore majoritairement au mouvement du miroir mobile. Nous verrons toutefois qu'il est possible d'extraire les corrélations quantiques, même si elles sont a priori masquées par le bruit thermique. Par ailleurs, les ordres de grandeur calculés ici sont basés sur une description du résonateur limitée à un seul mode de vibration. Dans le cas d'un résonateur présentant de nombreux modes mécaniques, la force de Langevin associée au bruit thermique et la force de pression de radiation n'ont plus nécessairement des effets strictement analogues sur le mouvement du miroir, en raison de la nature cohérente de la force de pression de radiation. On peut ainsi espérer atteindre un rapport $S_x^{\mathrm{rad}}/S_x^{\mathrm{T}}$ plus favorable.

1.4 Mesure quantique non destructive de la lumière

L'étude de la mesure interférométrique des déplacements du miroir que nous avons présentée dans la section 1.2 nous a permis d'illustrer la nature destructive de la mesure, qui résulte du processus d'action en retour : une mesure précise s'accompagne nécessairement d'une perturbation qui peut limiter la sensibilité de la mesure. En perturbant la grandeur mesurée, l'action en retour conduit par ailleurs à ce que deux mesures successives ne donnent pas forcément le même résultat. Pour répondre à ces problèmes plusieurs physiciens [42–45] ont introduit dans les années 1970 le concept de mesure quantique non-destructive (QND), qui désigne une stratégie de mesure qui permet de s'affranchir des effets indésirables de l'action en retour. Nous expliquons dans cette section en quoi consiste une telle mesure et quelles sont les conditions à réunir pour pouvoir la réaliser, puis nous examinerons certaines des pistes expérimentales ayant été suivies au cours des deux dernières décennies afin de la mettre en oeuvre dans le domaine de l'optique quantique. Nous profiterons de l'étude de ces exemples pour définir les paramètres quantitatifs qui

rendent compte de l'efficacité d'une mesure QND réelle. Enfin, nous verrons comment il est possible de mettre le couplage optomécanique à profit pour pouvoir effectuer une mesure quantique non-destructive de la lumière.

1.4.1 Propriétés d'une mesure quantique non-destructive

Pour que la mesure d'une observable puisse être qualifiée de non destructive, il faut qu'elle satisfasse deux critères :

Premier critère : la mesure doit être efficace, c'est-à-dire que le signal qui en est issu doit contenir le maximum d'informations sur l'observable mesurée. Il doit donc y avoir de fortes corrélations quantiques entre cette observable et l'appareil de mesure, ces corrélations caractérisant l'efficacité de la mesure.
Second critère : l'action en retour provoquée par la mesure ne doit pas affecter l'observable à laquelle on s'intéresse. Notons d'emblée que ceci n'est pas a priori incompatible avec les principes de la mécanique quantique, tant que l'intégralité des bruits de la mesure est bien reportée sur des grandeurs découplées de celle que l'on cherche à préserver.

Cela signifie d'une part que le couplage entre le système et l'appareil de mesure est tel que le bruit n'est pas reporté sur l'observable mesurée, mais aussi que celle-ci n'est pas contaminée lors de l'évolution ultérieure du système. En d'autres termes, l'évolution libre du système ne couple pas la grandeur mesurée à une autre grandeur présentant des fluctuations induites par la mesure [46]. Toutes les observables ne se prêtent donc pas à la mesure quantique non-destructive. On définit alors les variables QND comme celles qu'il est possible de mesurer de manière non-destructive, les plus évidentes d'entre-elles étant les constantes du mouvement.

Bien que les mesures QND soient apparues dans un contexte scientifique lié aux barres de Weber, qui sont des oscillateurs mécaniques dédiés à la mise en évidence des ondes gravitationnelles, les difficultés techniques associées à ce type de système ont rapidement conduit les chercheurs à se tourner vers d'autres domaines de la physique pour tenter de mettre en oeuvre le concept de mesure QND. L'optique quantique est ainsi apparue comme particulièrement bien adaptée à la réalisation expérimentale de ce type de mesures, comme nous allons le voir dans la section suivante.

1.4.2 Démonstrations expérimentales de mesure QND en optique quantique

Pour réaliser un dispositif de mesure quantique non-destructive, il faut avant toute chose disposer d'un système régi par ses fluctuations quantiques. La deuxième condition préalable, tout aussi importante que la première, est de pouvoir mesurer ces fluctuations, avec une précision suffisante. Ainsi, au milieu des années 1980, l'optique quantique, qui disposait alors de sources et de détecteurs fonctionnant au niveau quantique, est naturellement devenue l'un des domaines les plus propices à l'étude des questions fondamentales relatives à la mécanique quantique, et en particulier à celle des mesures QND. L'idée générale qui s'est alors répandue

consistait à réaliser la mesure quantique non destructive de l'intensité d'un faisceau signal, en le couplant au moyen d'une interaction conservative à un second faisceau, mesuré de manière destructive. Le transfert des fluctuations du premier faisceau sur le deuxième permet dans ces conditions d'accéder à l'intensité du faisceau signal, sans la perturber. Le couplage est en pratique réalisé à l'aide de milieux non-linéaires [47, 48] : les propriétés optiques de tels milieux sont modifiées par la lumière qui les traverse. Les changements induits par le faisceau signal sur le milieu sont alors lus par le faisceau de mesure.

Effet Kerr croisé

Un grand nombre d'expériences se sont ainsi appuyées sur l'utilisation de "l'effet Kerr croisé" (voir fig. 1.14). Un milieu Kerr est un milieu non linéaire dont l'indice dépend linéairement de l'intensité de la lumière qui le traverse. L'effet Kerr croisé correspond à une situation pour laquelle l'indice de propagation d'un faisceau est modifié par l'intensité de l'autre. Dans le cas idéal, le passage des deux faisceaux dans le milieu Kerr se traduit donc par une modification croisée de leur phase, leur intensité étant conservée au cours de la propagation. Leurs quadratures (définies par les équations (1.37) et (1.38)) obéissent donc aux relations d'entrée-sortie suivantes :

$$\delta p_m^{out} = \delta p_m^{in}, \tag{1.64}$$
$$\delta q_m^{out} = \delta q_m^{in} + g\delta p_s^{in}, \tag{1.65}$$
$$\delta p_s^{out} = \delta p_s^{in}, \tag{1.66}$$
$$\delta q_s^{out} = \delta q_s^{in} + g\delta p_m^{in}, \tag{1.67}$$

où les indices "m" et "s" désignent respectivement les variables relatives au faisceau de mesure et au faisceau signal, les exposants "in" et "out" désignent les champs entrants et sortants du cristal, et où g est le gain non-linéaire croisé, qui dépend des propriétés du milieu Kerr, de l'intensité moyenne des deux faisceaux, de leurs longueurs d'ondes, et de la longueur du cristal.

Les équations (1.64–1.67) regroupent l'ensemble des phénomènes physiques intervenant dans une mesure quantique non destructive idéale. L'équation (1.65) traduit le report de l'observable mesurée -l'intensité du faisceau signal- sur une autre -la phase du faisceau de mesure- vouée à une lecture destructive. L'équation (1.66) illustre le caractère non destructif de la mesure, puisque le passage du faisceau signal dans le cristal ne modifie pas ses fluctuations d'intensité. Enfin, l'équation (1.67) correspond à l'action en retour de la mesure, inévitable, mais entièrement concentrée sur la phase du faisceau signal, à laquelle on ne s'intéresse pas. L'équation (1.65) nous rappelle en outre que même dans le cas idéal, la mesure est contaminée par le bruit de l'appareil utilisé pour la réaliser. Ici, il s'agit du bruit quantique de phase du faisceau sonde qui peut rendre la mesure totalement inefficace s'il prévaut par rapport à l'effet Kerr.
En pratique, le milieu à effet Kerr peut être une simple fibre optique [49, 50], ou bien un système résonnant, comme par exemple une vapeur atomique [51] ou encore des atomes froids [52]. Dans tous les cas, l'implémentation d'une mesure quantique non destructive est soumise à un certain nombre d'artefacts expérimentaux (absorption, non-linéarités parasites, émission spontanée...) qui vont limiter son efficacité.

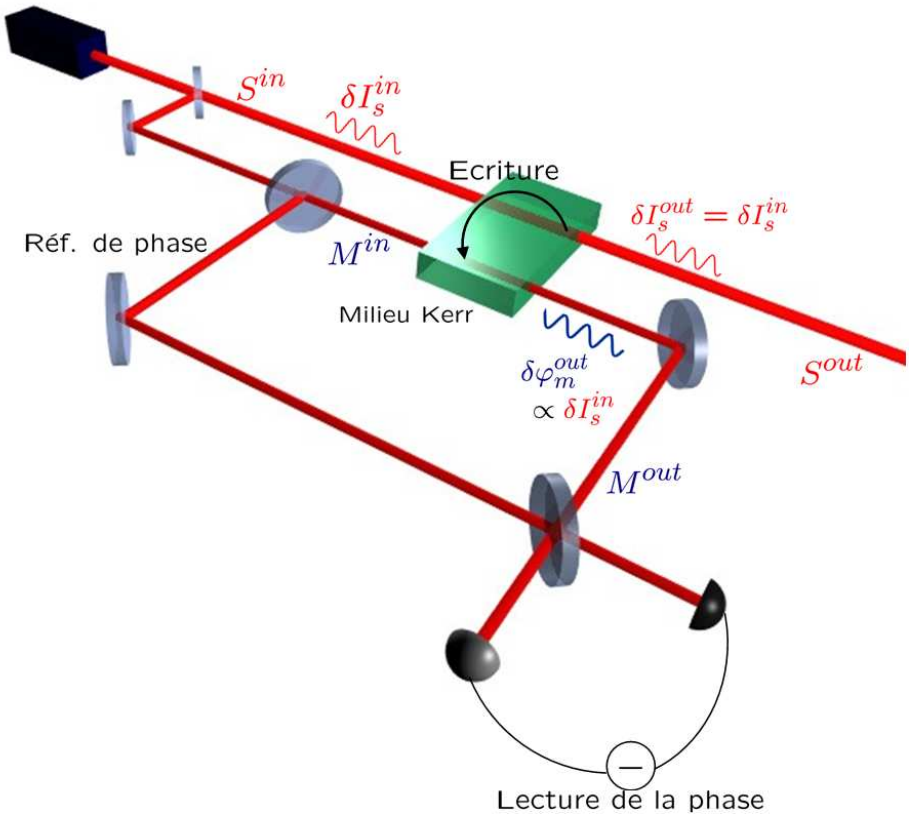

FIGURE 1.14: Principe de la mesure quantique non destructive par effet Kerr croisé. S^{in} et M^{in} désignent respectivement le faisceau signal et le faisceau de mesure. Ces deux faisceaux sont injectés dans un milieu Kerr, qui permet de transcrire les fluctuations d'intensité du premier sur la phase du second (étape d'écriture). L'homodynage du faisceau de mesure avec un faisceau de référence permet d'accéder à la lecture de la phase du faisceau de mesure.

Caractérisation d'une mesure QND réelle

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'une mesure quantique non destructive réelle est limitée par des bruits aussi bien d'ordres fondamentaux (terme δq_m^{in} dans l'équation (1.65)) que d'ordres expérimentaux. Ceci explique la nécessité de qualifier quantitativement l'efficacité de la mesure, afin d'illustrer la pertinence de la stratégie mise en place vis-à-vis des critères idéaux énoncés dans la section 1.4.1. Pour le premier critère (efficacité de la mesure), on définit ainsi les corrélations entre le signal incident δp_s^{in} et l'observable mesurée δq_m^{out} :

$$\mathcal{C}_{s-m} = \frac{< \delta p_s^{in} \delta q_m^{out} >}{\Delta p_s^{in} \Delta q_m^{out}}, \tag{1.68}$$

où $< ... >$ désigne la moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles du champ, et où Δp_s^{in} et Δq_m^{out} désignent respectivement la variance des fluctuations d'intensité du faisceau signal incident et la variance des fluctuations de phase du faisceau de

mesure transmis. Cette fonction est normalisée à 1, $|\mathcal{C}_{s-m}|$ étant égal à 0 lorsque les fluctuations sont décorrélées, et égal à 1 lorsqu'elles sont parfaitement corrélées. Le premier critère stipule que ces corrélations doivent être fortes ($\mathcal{C}_{s-m} \to 1$) en régime quantique, c'est-à-dire pour un faisceau incident au bruit quantique standard ($\Delta p_s^{in} = 1$).
Dans le cas d'un effet Kerr croisé, les expressions (1.65) et (1.66) permettent d'expliciter ces corrélations en fonction du gain du milieu Kerr et des dispersions des faisceaux incidents :

$$\mathcal{C}_{s-m} = \frac{g\Delta p_s^{in}}{\sqrt{(\Delta q_m^{in})^2 + g^2(\Delta p_s^{in})^2}} = \frac{g}{\sqrt{1+g^2}}, \tag{1.69}$$

dans la situation optimale où le faisceau de mesure est aussi au bruit quantique standard ($\Delta q_m^{in} = 1$). L'efficacité de la mesure est donc d'autant plus grande que le gain non-linéaire g est grand, comme on pouvait s'y attendre à partir de l'équation (1.65) : un grand gain rend négligeable le bruit δq_m^{in} devant le résultat de la mesure.
Le second critère QND exprime le fait que le signal n'est pas dégradé par la mesure. Il se traduit par des corrélations entrée-sortie proche de 1, où les corrélations sont définies par :

$$\mathcal{C}_{in-out} = \frac{< \delta p_s^{in} \delta p_s^{out} >}{\Delta p_s^{in} \Delta p_s^{out}}. \tag{1.70}$$

Dans le cas d'un effet Kerr croisé idéal, on trouve à partir de l'équation (1.66) $\mathcal{C}_{in-out} = 1$, mais ces corrélations sont en général dégradées par les pertes dans le milieu non-linéaire. En les assimilant à des pertes globales η, on peut écrire :

$$\delta p_s^{out} \quad = \quad \sqrt{1-\eta^2}\delta p_s^{in} + \eta \delta p_v, \tag{1.71}$$

où δp_v représente les fluctuations du vide entrant dans le milieu Kerr. En présence de pertes, les corrélations deviennent donc :

$$\mathcal{C}_{in-out} = \sqrt{1-\eta^2}. \tag{1.72}$$

Les deux fonctions de corrélation (1.68) et (1.70) suffisent à définir une mesure QND. Elles sont toutefois inexploitables expérimentalement car elles nécessitent de mesurer les corrélations entre des champs entrants et sortants, ce qui ne peut être fait au niveau quantique. Deux nouveaux critères ont alors été définis, qui ne portent que sur les champs sortant :

Quantum State Preparation (QSP)
Le critère le plus simple consiste à étudier les corrélations entre l'intensité signal et la phase de mesure des champs sortants :

$$\mathcal{C}'_{in-out} = \frac{< \delta p_s^{out} \delta q_m^{out} >}{\Delta p_s^{out} \Delta q_m^{out}}. \tag{1.73}$$

Dans le cas d'un effet Kerr croisé de gain g avec des pertes η, ces corrélations s'écrivent

$$\mathcal{C}'_{in-out} = \frac{\sqrt{1-\eta^2}g}{\sqrt{1+g^2}}, \tag{1.74}$$

et combinent en fait les deux critères précédents (équations (1.69) et (1.72)). Plutôt que de calculer ces corrélations, il est commode de déterminer la variance conditionnelle de l'observable mesurée, définie par :

$$(\Delta p_{s|m})^2 = (\Delta p_s^{out})^2(1 - |\mathcal{C}'_{s-m}|^2). \tag{1.75}$$

Cette quantité traduit l'incertitude résiduelle persistant sur l'intensité du faisceau signal, après la mesure de la phase du faisceau sonde. Pour qu'une mesure puisse être considérée comme QND, il faut qu'elle permette d'acquérir de l'information sur l'état quantique du faisceau signal, c'est-à-dire que l'incertitude résiduelle doit être plus petite que le bruit de photon standard :

$$(\Delta p_{s|m})^2 < 1. \tag{1.76}$$

La variance est nulle si les corrélations $\mathcal{C}'_{s-m}$ sont parfaites, puisqu'on connait parfaitement le signal en sortie à partir de la mesure de la sonde. On a alors préparé un état quantique parfaitement défini du signal (*Quantum State Preparation*).
Dans le cas de l'effet Kerr croisé, on trouve à partir de l'équation (1.74) :

$$(\Delta p_{s|m})^2 = \frac{1 + \eta^2 g^2}{1 + g^2}. \tag{1.77}$$

On retrouve sur cette expression que le critère (1.76) ne permet pas de distinguer l'efficacité du couplage (grand gain g) de sa qualité (faibles pertes η), qu'il faut pouvoir évaluer indépendamment.

Répéteur quantique

Le critère précédent assure que la mesure reproduit le signal sortant, mais il ne garantit pas que le signal en sortie ressemble à celui à l'entrée. Si on effectue deux mesures successives (avec deux appareils différents), les deux résultats obtenus peuvent ne pas se ressembler alors qu'ils sont identiques pour deux mesures QND idéales successives (condition de répétition au niveau quantique). Comme il n'est pas possible de mesurer expérimentalement les corrélations entrée-sortie, ni envisageable pour des raisons de coût de construire deux appareils distincts pour effectuer deux mesures successives, on utilise en fait des modulations classiques du signal pour vérifier cette condition de répétition. On définit pour cela les coefficients de transferts du rapport signal à bruit pour le signal et pour la sonde :

$$T_s = \frac{\mathrm{SNR}_s^{out}}{\mathrm{SNR}_s^{in}}, T_m = \frac{\mathrm{SNR}_m^{out}}{\mathrm{SNR}_s^{in}}, \tag{1.78}$$

où $\mathrm{SNR}_{s/m}^{in/out}$ représente le rapport signal à bruit pour le signal (s) ou pour la sonde (m), mesuré à l'entrée (in) ou à la sortie (out) de l'appareil. Dans le cas d'une mesure QND idéale, les rapports signal à bruit sont préservés et $T_s = T_m = 1$. Par contre, on peut montrer qu'une mesure classique vérifie toujours $T_s + T_m \leq 1$. Le cas limite $T_s + T_m = 1$ correspond par exemple à une mesure classique réalisée à l'aide d'une lame séparatrice comme celle de la figure 1.15. On prélève avec la lame une partie du faisceau incident pour réaliser la mesure. Si on cherche à améliorer le transfert T_m vers la mesure en augmentant la réflexion r, on hérite en contrepartie d'une dégradation du transfert T_s du signal, puisque le coefficient de transmission t diminue. Ceci peut se démontrer en regardant comment la lame agit sur une

modulation d'intensité classique δp^{class} :

$$\delta p_s^{out} = t(\delta p^{in} + \delta p^{class}) + r\delta p_v, \quad (1.79)$$
$$\delta p_m^{out} = -r(\delta p^{in} + \delta p^{class}) + t\delta p_v, \quad (1.80)$$

où δp_v désigne toujours les fluctuations du vide entrant par le port non-utilisé de la lame séparatrice. Ces deux équations permettent d'établir le spectre des fluctuations des deux faisceaux en sortie de la lame, en se souvenant que $\Delta p^{in} = \Delta p_v = 1$ et $r^2 + t^2 = 1$:

$$S_s^{out} = 1 + t^2(\Delta p^{class})^2, \quad (1.81)$$
$$S_m^{out} = 1 + r^2(\Delta p^{class})^2, \quad (1.82)$$

Ici, on s'intéresse à la mesure du signal classique δp^{class}, initialement limitée par les fluctuations quantiques d'intensité du faisceau incident δp^{in}, ce qui correspond à un rapport signal à bruit incident $\mathrm{SNR}_s^{in} = (\Delta p^{class})^2/(\Delta p^{in})^2 = (\Delta p^{class})^2$. On en déduit les coefficients de transferts pour chacun des faisceau :

$$T_s = \frac{\mathrm{SNR}_s^{out}}{\mathrm{SNR}_s^{in}} = t^2, \quad (1.83)$$
$$T_m = \frac{\mathrm{SNR}_m^{out}}{\mathrm{SNR}_s^{in}} = r^2, \quad (1.84)$$

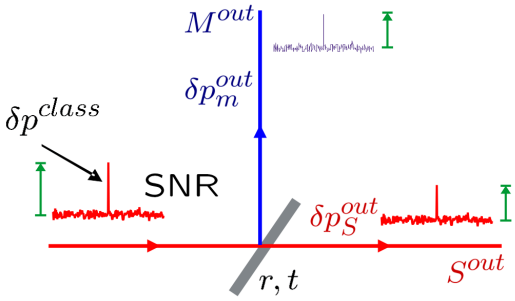

FIGURE 1.15: Transfert du rapport signal à bruit pour la sonde de mesure et le signal dans le cas classique.

On voit donc que dans le cas de la lame séparatrice, la somme $T_m + T_s$ des coefficients de transfert est égale à 1. Une mesure QND devra préserver les rapports signaux à bruits du signal et de la sonde mieux que ne le fait une mesure classique, c'est-à-dire qu'elle devra satisfaire à la condition (dite de *Répéteur Quantique*) :

$$T_s + T_m > 1. \quad (1.85)$$

Finalement, on dira qu'une mesure est QND si elle vérifie à la fois les critères de préparation d'état quantique et de répéteur quantique définis respectivement par les équations (1.76) et (1.85) [53]. Le report de ces critères dans le plan $\{T_s + T_m, \Delta p_{s|m}\}$ permet alors de conclure quant à la nature de la mesure. La figure 1.16 représente ce plan, dans lequel ont été transcrit les paramètres relatifs à différentes stratégies de mesure basées sur l'effet Kerr. Cette figure permet d'illustrer la difficulté de réaliser une mesure quantique non-destructive. En effet, une mesure QND idéale doit permettre de déterminer parfaitement l'état quantique de l'intensité du

faisceau signal ($\Delta p_{s|m} = 0$), sans le détériorer et sans ajouter de bruit sur la mesure ($T_s + T_m = 2$). Or, la méthode la plus concluante (triangle rouge), mise au point en 1997 dans le groupe de Philippe Grangier, et basée sur l'utilisation d'atomes de Rubidium froids [52], ne leur a pas permis d'extraire plus de la moitié de l'information sur l'état quantique de l'intensité du faisceau signal ($\Delta p_{s|m} = 0.45$). Soulignons toutefois que ceci constitue un résultat remarquable, les conditions de leur expérience approchant celles d'une mesure QND idéale ($T_s = 0,9$), limitée essentiellement par le bruit de la sonde ($T_m = 0,65$) en raison d'un gain de couplage insuffisamment élevé.

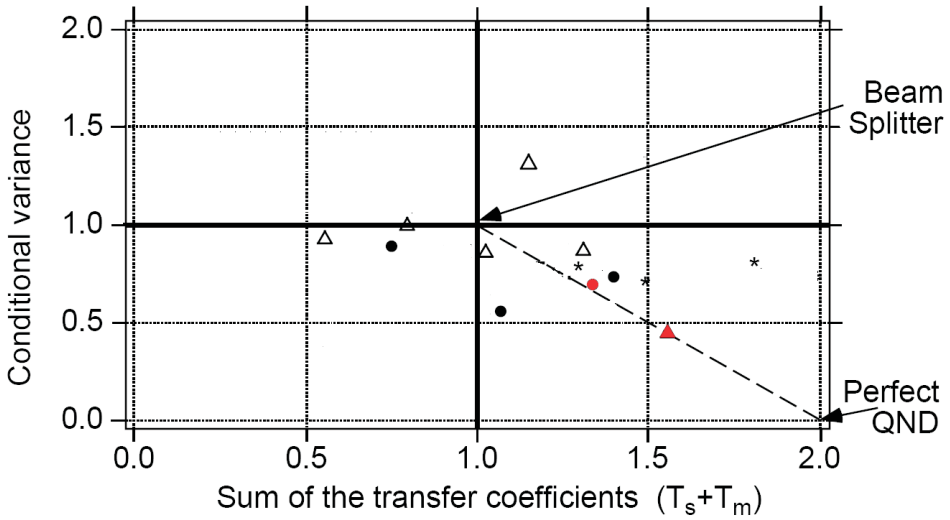

FIGURE 1.16: Le plan $\{T_s + T_m, \Delta p_{s|m}\}$, dans lequel on été reportés les critères de différentes stratégies de mesures. Le cadran supérieur gauche ($T_s + T_m \leq 1$, $\Delta p_{s|m} \geq 1$) correspond au domaine de la mesure classique. Le cadran inférieur gauche ($T_s + T_m \leq 1$, $\Delta p_{s|m} < 1$) correspond à un ensemble de stratégies ne vérifiant que le critère QSP. Le cadran supérieur droit ($T_s + T_m > 1$, $\Delta p_{s|m} \geq 1$) illustre une méthode capable de correctement préserver le signal, sans pour autant en extraire de l'information au niveau quantique (amplification sans bruit par exemple). Enfin, le dernier cadran ($T_s + T_m > 1$, $\Delta p_{s|m} < 1$) est le seul dans lequel figurent les méthodes de mesure qui méritent la dénomination QND. La ligne en pointillés représente le comportement prévu dans le cas d'un milieu Kerr idéal sans perte ($\Delta p_{s|m} = \frac{1}{1+g^2}$, $T_s + T_m = 1 + \frac{g^2}{1+g^2}$).

1.4.3 Mesure QND avec une cavité à miroir mobile

Nous avons déjà évoqué dans la section 1.2.4 la possibilité d'utiliser le couplage optomécanique pour réaliser une mesure quantique non-destructive de l'intensité de la lumière. Nous proposons dans cette section une étude quantitative des corrélations optomécaniques, accompagnée d'applications numériques s'appuyant sur des paramètres réalistes, qui permettront de comprendre pourquoi une cavité à miroir mobile est un candidat sérieux et élégant à la réalisation expérimentale de mesures

QND. Nous nous référons dans la suite au dispositif de double injection présenté sur la figure 1.13, la cavité étant dotée de propriétés identiques à celles de la section 1.2.2.

Corrélations optomécaniques

On considère une cavité à miroir mobile, éclairée par un premier faisceau, intense, dont on cherche à mesurer l'intensité au niveau quantique, ainsi que par un deuxième faisceau, beaucoup plus faible, dédié à la mesure des déplacements provoqués par les fluctuations quantiques de pression de radiation du premier faisceau. Si l'on suppose que la sonde se trouve à résonance avec la cavité, les relations d'entrée-sortie pour ses quadratures s'écrivent sur le modèle des équations (1.41) et (1.42) :

$$\delta p_m^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta p_m^{in}[\Omega], \tag{1.86}$$

$$\delta q_m^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q_m^{in}[\Omega] + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau}k\overline{\alpha}_m\delta x[\Omega], \tag{1.87}$$

où $\overline{\alpha}_m$ désigne le champ intracavité moyen du faisceau sonde. Les déplacements du miroir mobile $\delta x[\Omega]$ s'écrivent ici comme la somme des contributions des fluctuations de la pression de radiation du faisceau signal et du faisceau sonde, ainsi que du bruit thermique. A partir des équations (1.46) et (1.50), on peut donc écrire :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega]\{2\hbar k(\overline{\alpha}_s\delta p_s[\Omega] + \overline{\alpha}_m\delta p_m[\Omega]) + F_T[\Omega]\}, \tag{1.88}$$

où F_T est la force de Langevin dont le spectre est donné par l'équation (1.60). Si l'on suppose de plus que le faisceau signal est lui aussi résonnant avec la cavité, il obéit aux mêmes équations (1.86) et (1.87), en remplaçant l'indice m par s, et on a en particulier :

$$\delta p_s^{out}[\Omega] = \frac{\gamma + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta p_s^{in}[\Omega], \tag{1.89}$$

$$\tag{1.90}$$

Cette équation montre que l'intensité signal n'est pas perturbée par la mesure, à une phase globale près qui ne change pas les spectres. La condition de non dégradation du signal est donc satisfaite de façon parfaite dans le cas idéal où on a négligé les pertes liées au couplage avec la cavité.

Pour caractériser l'efficacité de la mesure, nous utilisons l'équation (1.39) appliquée à chacun des faisceaux, ce qui permet de déterminer les fluctuations d'amplitude δp_s et δp_m des champs intracavité. Les déplacements du miroir s'écrivent alors :

$$\overline{\alpha}_m\delta x[\Omega] = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega\tau}\widehat{\chi}[\Omega]\{\sqrt{\overline{x}_{rad}^s\overline{x}_{rad}^m}\delta p_s^{in}[\Omega] + \overline{x}_{rad}^m\delta p_m^{in}[\Omega]\} + \overline{\alpha}_m\chi[\Omega]F_T[\Omega], \tag{1.91}$$

où $\widehat{\chi}[\Omega] = \chi[\Omega]/\chi[0]$ est la susceptibilité normalisée à un à fréquence nulle, et où $\overline{x}_{rad}^s$ et $\overline{x}_{rad}^m$ désignent les déplacements dus à la pression de radiation moyenne du

faisceau signal et du faisceau de mesure (effet de recul du miroir) :

$$\overline{x}^s_{rad} = 2\hbar k|\overline{\alpha}_s|^2\chi[0] \quad , \quad \overline{x}^m_{rad} = 2\hbar k|\overline{\alpha}_m|^2\chi[0]. \tag{1.92}$$

Les équations (1.87) et (1.91) montrent donc que la phase du faisceau de mesure est bien sensible aux fluctuations d'intensité δp_s^{in} du faisceau signal, mais qu'elle est également contaminée par l'action du faisceau de mesure (deuxième terme dans l'éq.(1.91)) et par les effets thermiques. On définit alors, d'une manière analogue à l'expression (1.68), le spectre $\mathcal{C}_{s-m}[\Omega]$ des corrélations signal-sonde à la fréquence Ω :

$$2\pi\delta(\Omega+\Omega')\times\mathcal{C}_{s-m}[\Omega] = \frac{<\delta p_s^{in}[\Omega]\delta q_m^{out}[\Omega']>}{\sqrt{S^{in}_{p,s}[\Omega]S^{out}_{q,m}[\Omega]}}, \tag{1.93}$$

où $S^{in}_{p,s}$ et $S^{out}_{q,m}$ sont les spectres de bruit respectifs des variables δp_s^{in} et δq_m^{out}, définis selon l'équation (1.20). En supposant que les faisceaux incidents se trouvent dans des états cohérents, toutes les sources de bruits des équations (1.87) et (1.91) sont indépendantes, de spectre unité pour les bruits d'intensités, et S_T pour le bruit thermique. $|\mathcal{C}_{s-m}|^2$ est donc égal à la contribution des fluctuations δp_s^{in} rapportée aux fluctuations totales δq_m^{out} de la sonde :

$$|\mathcal{C}_{s-m}|^2 = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}+\mathcal{N}}, \tag{1.94}$$

où le signal $\mathcal{S}$ et le bruit $\mathcal{N}$ sont donnés par :

$$\mathcal{S} = 256\frac{\gamma^4}{(\gamma^2+\Omega^2\tau^2)^2}|\widehat{\chi}[\Omega]|^2\mathcal{F}^2\frac{\overline{x}^s_{rad}\overline{x}^m_{rad}}{\lambda^2}, \tag{1.95}$$

$$\mathcal{N} = 1+256\frac{\gamma^4}{(\gamma^2+\Omega^2\tau^2)^2}|\widehat{\chi}[\Omega]|^2\mathcal{F}^2\frac{\overline{x}^m_{rad}{}^2}{\lambda^2}+64\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\Omega^2\tau^2}\mathrm{Im}(\widehat{\chi}[\Omega])\mathcal{F}\frac{\overline{x}^m_{rad}}{\lambda}\frac{k_BT}{\hbar\Omega}, \tag{1.96}$$

Ces expressions font apparaître le rapport des reculs $\overline{x}^{s/m}_{rad}$ du miroir sous l'effet des deux faisceaux, par la largeur $\lambda/2\mathcal{F}$ de la résonance de la cavité. Le signal est ainsi proportionnel au produit des intensités moyennes intracavité des deux faisceaux (terme en $\overline{x}^s_{rad}\overline{x}^m_{rad}$), alors que le bruit ne dépend pas de l'intensité du faisceau signal. Cela signifie que des corrélations arbitrairement élevées peuvent être atteintes, pourvu que l'intensité du faisceau signal soit suffisamment grande.
La figure 1.17 représente les corrélations en fonction de la fréquence. Comme dans la section 1.2.3, nous avons considéré le cas d'une cavité de finesse $\mathcal{F} = 3\cdot 10^5$ ($\gamma = 10^{-5}$, $\lambda/2\mathcal{F} \simeq 1,3\cdot 10^{-12}$ m), dont on assimile le miroir de fond à un oscillateur harmonique de fréquence de résonance $\Omega_0/2\pi = 10^6$ Hz et de facteur de qualité $Q = 10^6$. On suppose que la bande passante $\Omega_{cav} = \gamma/\tau$ est deux fois plus grande que Ω_0, et que la cavité est placée à la température $T = 4$ K. Pour des intensités moyennes $\overline{I}^{in}_s \simeq 2$ mW pour le faisceau signal, et $\overline{I}^{in}_m \simeq 20$ μW pour le faisceau sonde (cf éq. (1.49)), on obtient des reculs statiques $\overline{x}^s_{rad} = 7\times 10^{-13}$ m et $\overline{x}^m_{rad} = 7\times 10^{-15}$ m.
Les corrélations signal-sonde suivent la dépendance en fréquence de la réponse mécanique du résonateur (terme $\widehat{\chi}[\Omega]$ dans (1.95) et (1.96)). Elles sont maximales à la fréquence de résonance Ω_0, où elles atteignent des valeurs très proches de 1. La variance conditionnelle $\Delta p_{s|m}$ prend alors des valeurs très faibles, de sorte que

la mesure répond positivement au premier critère d'une mesure QND (préparation d'état quantique). A basses comme à hautes fréquences, les corrélations sont essentiellement limitées par le bruit de phase du faisceau de mesure (le terme 1 de l'équation (1.96)). Notons enfin que la courbe obtenue correspond à un compromis sur l'intensité du faisceau sonde. Si celle-ci est trop faible, la sensibilité de la mesure sera médiocre, et ne pourra donc pas permettre d'observer les déplacements du miroir provoqués par les fluctuations de la pression de radiation du faisceau signal. A l'inverse, si l'intensité du faisceau sonde est très élevée, ses effets de pression de radiation vont perturber la position du miroir, et donc détruire les corrélations signal-sonde.

Pour parfaire la caractérisation de la mesure QND, il reste à déterminer si elle

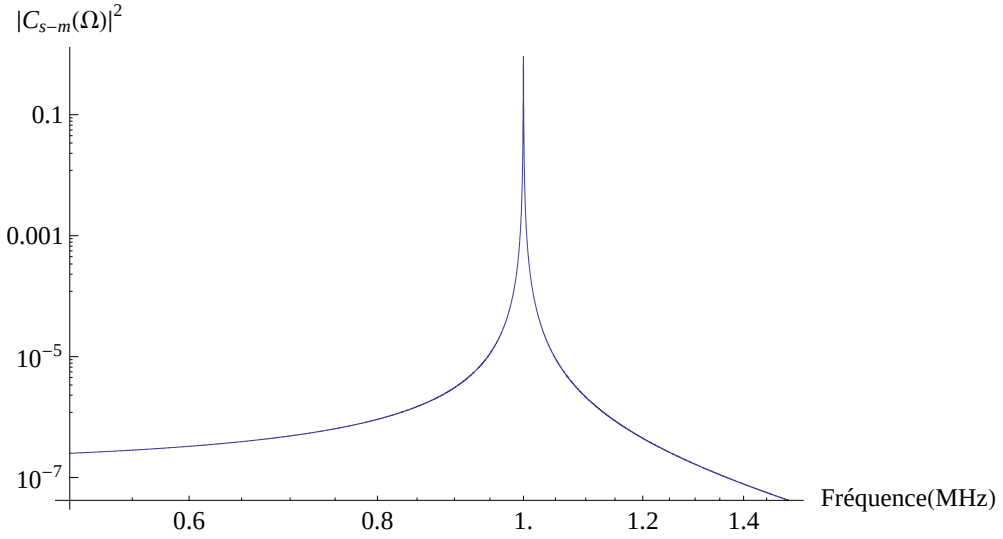

FIGURE 1.17: Corrélations quantiques entre le signal (intensité incidente du faisceau signal) et la sonde (quadrature de phase du faisceau sonde réfléchi), en fonction de la fréquence. La cavité est résonnante avec les deux faisceaux, et le mouvement du miroir est décrite par une seule résonance à une fréquence de 1 MHz.

vérifie le critère de répéteur quantique. Les équations (1.87), (1.89) et (1.91) permettent de déterminer les coefficients de transfert T_s et T_m du signal et de la sonde :

$$T_s \quad = \quad 1 \quad , \quad T_m = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}+\mathcal{N}} = |\mathcal{C}_{s-m}|^2. \tag{1.97}$$

On voit donc qu'autour de la résonance mécanique, la condition de répéteur quantique sera également vérifiée, puisque les larges corrélations alors atteintes impliquent $T_s + T_m \simeq 2$.

Le dispositif de double injection permet bien dans ces conditions d'effectuer une mesure quantique non-destructive de l'intensité d'un faisceau signal.

1.5 Présentation générale de l'expérience

Nous donnons dans cette section une description générale de notre expérience, dédiée à l'étude des limites fondamentales dans la mesure des déplacements d'un miroir mobile. Ce dispositif repose sur trois éléments principaux, que nous présentons successivement. Le premier élément est la cavité à miroir mobile, qui doit nous permettre d'amplifier suffisamment les phénomènes quantiques intervenant dans le processus de mesure pour qu'ils puissent être observables (cf section 1.3.2). Le deuxième élément est la source laser, qui fournit à la fois le faisceau de mesure et le faisceau signal, et qui doit pouvoir s'adapter aux contraintes imposées par la cavité. Enfin, le troisième élément est la détection homodyne, à l'aide de laquelle on mesure la phase du faisceau de mesure réfléchi, et qui doit fonctionner au niveau quantique, c'est à dire qu'elle doit permettre d'observer les fluctuations quantiques du champ avec un rapport signal à bruit le meilleur possible. Nous terminerons en présentant un certain nombre de résultats qui avaient été obtenus avec ce dispositif, et qui sont un préalable important à l'ensemble du travail exposé dans ce manuscrit.

1.5.1 La cavité à miroir mobile

La cavité est l'élément central de notre expérience. Comme nous l'avons évoqué dans la section 1.1.2, c'est elle qui permet d'exacerber le couplage optomécanique entre la lumière et le miroir mobile, nous donnant ainsi accès à la mesure de déplacements d'autant plus faibles que la qualité optique des miroirs qui la constitue est meilleure, ce qui suppose l'utilisation d'un coupleur d'entrée de très faible transmission. Cependant, d'autres paramètres affectent la sensibilité de la mesure. Nous allons ainsi voir que les pertes dans la cavité, que nous avons jusque-là négligées, s'avèrent être un facteur particulièrement critique si elles ne sont pas petites devant la transmission du coupleur d'entrée, ce qui est difficile à obtenir lorsque celle-ci est très faible. Nous avons également déjà remarqué dans la section 1.2.2 que la cavité se comporte comme un filtre passe bas, et limite donc l'observation des déplacements du miroir mobile à des fréquences supérieures à sa fréquence de coupure. Nous verrons que ce phénomène de filtrage implique des contraintes sur la longueur de la cavité, ce qui nécessite l'élaboration de systèmes de maintien et de procédures de montage appropriés. Enfin, nous présenterons certaines des solutions qui ont été retenues jusqu'à présent, ce qui nous permettra de comparer leurs performances avec celles de la nouvelle cavité, que nous décrirons dans le chapitre suivant.

Pertes dans la cavité

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la seule contribution à l'amortissement γ du champ dans la cavité provenait de la transmission du coupleur d'entrée (cf section 1.2.2). Cette transmission n'est en général pas la seule source d'amortissement pour la cavité, et une partie des pertes subies par le champ intracavité sont produites par l'absorption et la diffusion au niveau des traitements des miroirs. Si l'on ne s'intéresse qu'au champ réfléchi par la cavité, l'ensemble de ces pertes peut être modélisé par une transmission non nulle du miroir arrière. Dans ce cas il faut prendre en compte le champ du vide qui pénètre dans la cavité par

ce miroir de façon à conserver l'unitarité des transformations des champs [37], et les équations d'entrée-sortie du champ (1.28) et (1.29) deviennent :

$$\tau\frac{d}{dt}\alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)]\alpha(t) + \sqrt{T}\alpha^{in}(t) + \sqrt{P}\alpha^{vide}(t), \tag{1.98}$$

$$\alpha^{out}(t) = \sqrt{T}\alpha(t) - \alpha^{in}(t), \tag{1.99}$$

où T désigne la transmission en intensité du coupleur d'entrée, P les pertes dans la cavité, et où l'amortissement γ est relié aux pertes globales du champ dans la cavité par $2\gamma = P + T$, la finesse valant par suite $\mathcal{F} = 2\pi/(P+T)$. Les pertes introduisent un nouveau terme de bruit α^{vide} dû au couplage avec les fluctuations du vide, sur lequel nous reviendrons, puisqu'il est responsable de la dégradation des corrélations induites par pression de radiation entre l'intensité du faisceau et la position du miroir mobile. Les valeurs des champs moyens réfléchi et intracavité sont modifiées par rapport au cas sans perte donné par les équations (1.32) et (1.33). Les champs moyens s'écrivent désormais :

$$\overline{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{in} \quad , \quad \overline{\alpha}^{out} = \frac{\gamma - P + i\overline{\Psi}}{\gamma - i\overline{\Psi}}\overline{\alpha}^{in}. \tag{1.100}$$

Le champ intracavité est réduit à résonance d'un facteur $\sqrt{T/2\gamma} = \sqrt{T/(T+P)}$ par rapport au cas sans perte, ce qui se traduit par une perte de sensibilité puisque celle-ci est directement reliée à la puissance intracavité. D'autre part, l'intensité réfléchie est maintenant inférieure à l'intensité incidente. Plus précisément, l'expression du champ réfléchi montre que lorsque l'on balaye le déphasage au voisinage d'une résonance, l'intensité réfléchie décrit un pic d'Airy en absorption. Ceci s'explique intuitivement en remarquant qu'au voisinage de la résonance, l'intensité intracavité est non nulle, et qu'une fraction de la puissance lumineuse est donc perdue. La profondeur de ce pic est donnée par le coefficient de réflexion à résonance $\mathcal{R}_0$:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\overline{I}^{out}_{\overline{\Psi}=0}}{\overline{I}^{out}_{\overline{\Psi}=\pm\infty}} = \left[\frac{T-P}{T+P}\right]^2. \tag{1.101}$$

Cette expression montre que lorsque les pertes deviennent comparables à la transmission du coupleur d'entrée, le coefficient de réflexion à résonance prend des valeurs très faibles, réduisant d'autant la sensibilité de la mesure des déplacements. Ceci démontre l'importance de rendre les pertes les plus faibles possible relativement à la transmission du miroir d'entrée. C'est pourquoi le choix de ce coefficient résultera d'un compromis entre l'obtention d'une grande finesse, et la réduction de l'amplitude relative des pertes.
On distingue essentiellement deux catégories de pertes : les pertes par diffusion, qui sont causées par les irrégularités de la surface sur laquelle le front d'onde est réfléchi, et les pertes par absorption, qui sont liées à la qualité du traitement réfléchissant constituant le miroir. Actuellement, il est possible de réaliser des miroirs dont le traitement multidiélectrique engendre des pertes par diffusion et par absorption inférieures au *ppm*. En prenant une transmission de 20 *ppm*, on bénéficiera alors à la fois d'une finesse élevée ($\mathcal{F} \simeq 300\ 000$), et d'effets liés aux pertes négligeables.

Bande passante de la cavité

Nous avons vu que l'observation des déplacements du miroir mobile au niveau

quantique nécessite que la mesure ne soit limitée que par le bruit de photon standard de la lumière utilisée pour l'effectuer. Or, nous verrons qu'expérimentalement, les bruits techniques du laser sont prépondérants à basses fréquences (typiquement jusqu'à quelques centaines de kilohertz). Il est donc préférable de procéder à la mesure de la position du miroir à des fréquences suffisamment élevées (typiquement le megahertz), de sorte que ces bruits techniques soient négligeables devant le bruit de photon. La bande passante de la cavité Ω_{cav} se révèle alors être un paramètre important : elle doit être supérieure à la fréquence d'observation du mouvement du miroir, sans quoi la sensibilité de notre mesure s'en trouvera dégradée. Les expressions (1.43) et (1.31) montrent que la bande passante est inversement proportionnelle à la finesse et à la longueur de la cavité :

$$\Omega_{cav} = \frac{\gamma}{\tau} = \frac{\pi c}{2\mathcal{F} L_0} \tag{1.102}$$

La recherche d'une grande finesse nécessitera donc la mise au point de cavité très courtes, si l'on veut conserver une bande passante suffisamment élevée. Pour une finesse de 300 000 et une bande passante supérieure au megahertz, cette dernière équation montre que la longueur de la cavité ne devra pas excéder le quart de millimètre !
Signalons par ailleurs que l'utilisation d'une cavité courte permet de réduire la sensibilité de la mesure au bruit de fréquence du laser. En effet, la phase du faisceau réfléchi dépend du déphasage $\psi = 4\pi L_0/\lambda$ accumulé par la lumière lors d'un aller-retour dans la cavité (équation (1.30)). Les variations de ce déphasage résultent donc aussi bien des déplacements δx du miroir que des fluctuations de la fréquence $\nu = c/\lambda$ du laser, qui entachent notre mesure :

$$\delta\psi = \frac{4\pi}{c}(L_0\delta\nu + \nu\delta x) \tag{1.103}$$

Cette équation montre que la sensibilité au bruit de fréquence est proportionnelle à la longueur de la cavité, que l'on cherchera donc à réduire le plus possible.

Réalisation expérimentale

Les cavités que nous utilisons dans notre équipe sont formées de miroirs fabriqués à partir de substrats REO ou GSI en silice fondue, un matériau qui présente de très bonnes propriétés mécaniques avec des facteurs de qualité intrinsèques de l'ordre de 10^7, et dont les techniques de polissage et de dépôt des traitements sont aujourd'hui parmi les mieux maîtrisées.
Les miroirs sont super-polis, leurs défauts de surface n'excédant pas $0,4$ Å RMS, ce qui correspond à ce qui se fait de mieux commercialement en terme de super-poli. Les pertes par diffusion engendrées par les défauts résiduels sont en principe inférieures à 10 *ppm*. Les traitements multidiélectriques ont été réalisés par le Laboratoire des Matériaux Avancés (LMA) qui est spécialisé dans la fabrication de miroirs de très haute réfléctivité. Leur savoir-faire se situe actuellement à la pointe de la technologie, comme en témoignent les spécifications atteintes avec les miroirs qu'ils ont réalisé pour l'interféromètre VIRGO (absorption$<$ 1 *ppm*, diffusion$<$ 5 *ppm*).

Le principe des cavités utilisées par notre équipe depuis plusieurs années consiste en un miroir d'entrée de géométrie cylindrique, dont la face réfléchissante admet une courbure concave de 1 m de rayon, et d'un miroir mobile plan, doté d'une

transmission très faible devant celle du coupleur d'entrée, et présentant au choix une géométrie cylindrique ou plan-convexe. Les deux miroirs sont montés en vis-à-vis dans un support rigide, dont la conception constitue une étape décisive de notre expérience : il faut en effet assurer un excellent maintien des miroirs afin d'atténuer la transmission des vibrations provenant de l'environnement extérieur, tout en minimisant l'effet de la fixation des miroirs sur leurs modes de vibration internes et ainsi obtenir des miroirs se rapprochant au maximum de la situation de résonateurs libres. Le système mécanique doit en outre permettre d'assurer le parallélisme des deux miroirs, ce qui nécessite une fabrication de précision, ainsi que des procédures de montage appropriées. Nous présentons sur la figure 1.18 le principe d'un ancien montage ayant été mis au point dans notre équipe pour des cavités composées de 2 miroirs cylindriques de $25,4\ mm$ de diamètre et de 6 mm d'épaisseur. Chaque miroir est monté séparément dans une bague en cuivre, les deux bagues étant ensuite plaquées l'une contre l'autre. Le montage de chaque miroir dans sa bague est une étape très délicate, puisque c'est elle qui détermine leur parallélisme. Cette opération est réalisée à l'aide d'une pièce de montage cylindrique dans laquelle un épaulement de $0,1\ mm$ a été pratiqué, de manière à fixer la longueur de la cavité à $0,2\ mm$. Tout défaut de parallélisme se traduit par un décentrage de l'axe optique de la cavité par rapport au centre des miroirs, ce qui limite la mesure de déplacements si le faisceau laser s'écarte ded l'extension spatiale du mode de vibration. Le système de montage présenté ici permet d'obtenir un décentrage le l'ordre du millimètre [54], ce qui est satisfaisant pour un miroir mobile cylindrique dont les modes de vibrations présentent une extension spatiale typique de l'ordre du diamètre du miroir. Ce montage s'est cependant révélé insuffisant pour la suite de nos expériences, et nous avons été amenés à utiliser d'autres principes de fixation que nous décrivons dans les chapitres suivants.

Caractérisation optique de la cavité

La prise en compte des pertes (équations (1.98) et (1.99)), ainsi qu'un calcul similaire à celui effectué pour obtenir les équations (1.39) à (1.42) permet de déterminer l'expression des fluctuations de la phase du faisceau réfléchi par une cavité à résonance ($\overline{\psi} = 0$) :

$$\delta q^{out}[\Omega] = \frac{\gamma - P + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q^{in}[\Omega] + \frac{\sqrt{TP}}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q^{vide}[\Omega] + \frac{4\sqrt{2\gamma - P}}{\gamma - i\Omega\tau}k\overline{\alpha}\delta x[\Omega]. \quad (1.104)$$

La mesure des déplacements du miroir mobile δx à partir de δq^{out} nécessite donc la connaissance de trois paramètres : le temps de stockage des photons dans la cavité τ, le taux d'amortissement optique γ et les pertes P, ou de manière équivalente la longueur L_0 (équation (1.31)) la finesse $\mathcal{F}$ (équation (1.34)), et le coefficient de réflexion à résonance $\mathcal{R}_0$ (équation (1.101)). Si la procédure de montage mécanique et les spécifications de fabrication des miroirs nous fournissent une idée approximative de la valeur de ces différents paramètres, il n'en demeure pas moins indispensable d'en avoir une évaluation précise et indépendante. Nous présentons ici la méthode que nous suivons pour mesurer chacun de ces 3 paramètres. Nous reviendrons sur la mise en oeuvre expérimentale de la mesure de ces paramètres dans la section 1.5.4.

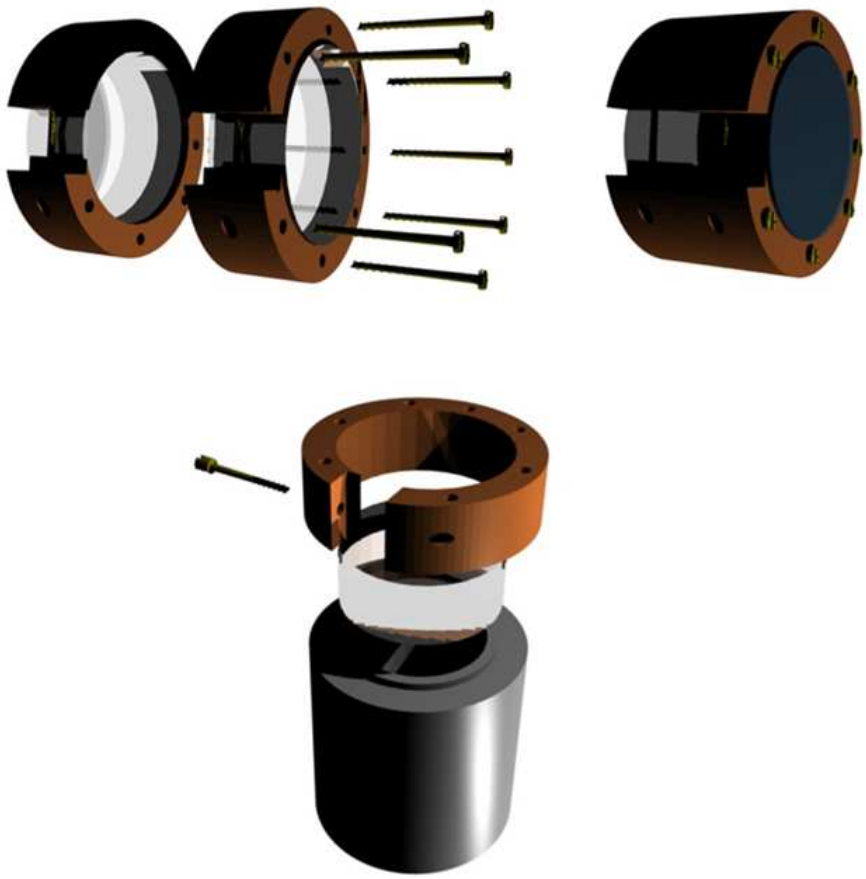

FIGURE 1.18: En haut : ancien montage de la cavité à miroirs cylindriques dans deux bagues en cuivre. En bas : Procédure de montage d'un miroir dans sa bague à l'aide d'un support cylindrique.

Intervalle spectral libre

Une cavité optique plan-concave possède des modes de résonance optiques longitudinaux auxquels sont associés une série de modes transverses [28]. L'intervalle spectral libre, qui caractérise l'écart en fréquence entre deux résonances longitudinales, est donné par :

$$\nu_{ISL} = \frac{c}{2L_0}. \tag{1.105}$$

A titre indicatif, cet intervalle vaut 600 GHz pour une cavité de longueur $0,25$ mm. L'équation (1.105) montre alors que la mesure de l'intervalle spectral libre permet de remonter directement à la longueur de la cavité. Signalons qu'il est également possible d'utiliser les résonances correspondant aux modes transverses de la cavité pour déterminer sa longueur. L'intervalle spectral séparant ces modes transverses dépend non seulement de la longueur de la cavité, mais aussi du rayon de courbure R du miroir d'entrée. Dans l'approximation d'un rayon de courbure grand devant la longueur de la cavité, cet intervalle peut s'écrire :

$$\nu_{tr} = \frac{\nu_{ISL}}{\pi}\sqrt{\frac{L_0}{R}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{RL_0}} \tag{1.106}$$

La valeur de cet intervalle est typiquement de l'ordre de 3 GHz pour une cavité de longueur $0,25\ mm$, ce qui le rend beaucoup plus facilement mesurable que l'intervalle spectral libre, au détriment bien sûr d'une moindre précision. Nous verrons qu'en pratique, on utilisera la mesure de l'intervalle transverse pour obtenir une estimation grossière de l'intervalle spectral libre et ainsi faciliter sa détermination précise par sauts de fréquence du laser.

Bande passante et finesse

La finesse $\mathcal{F}$ est par définition le rapport entre l'intervalle spectral libre ν_{ISL} et la largeur du pic d'Airy $2\nu_{BP}$ (où $\nu_{BP} = \Omega_{cav}/2\pi$ est la bande passante de la cavité), comme le montre également l'équation (1.102) :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{1}{2\nu_{BP}} \times \frac{c}{2L_0} = \frac{\nu_{ISL}}{2\nu_{BP}}. \tag{1.107}$$

La mesure conjointe de l'intervalle spectral libre et de la bande passante de la cavité apparaît ainsi comme une méthode bien adaptée à la détermination de la finesse.

Coefficient de réflexion à résonance

La mesure de la finesse permet d'accéder au taux d'amortissement optique total γ, c'est à dire à la somme des pertes totales $T + P$:

$$T + P = \frac{2\pi}{\mathcal{F}} \tag{1.108}$$

Par ailleurs, l'équation (1.101) montre que le coefficient de réflexion à résonance permet d'établir une relation supplémentaire reliant T et P :

$$|T - P| = \frac{2\pi}{\mathcal{F}}\sqrt{R_0} \tag{1.109}$$

On voit que cette méthode ne permet pas de distinguer les pertes de la transmission. On peut toutefois utiliser les valeurs nominales de T et P données par le fabricant des miroirs afin de les comparer aux deux couples de solutions fournis par le système formé des deux précédentes équations, et ainsi déterminer la valeur la plus vraisemblable des pertes. Ajoutons de plus que les spécifications du fabriquant concernant la transmission sont en général assez bien respectées, ce qui justifie l'utilisation de cette méthode de détermination des pertes.

1.5.2 La source laser

Les caractéristiques essentielles de la cavité que nous venons de présenter dans la section 1.5.1 permettent de définir un certain nombre de contraintes que la source laser doit satisfaire. Tout d'abord, la cavité ne disposant d'aucun élément piézoélectrique pouvant faire varier sa longueur, il est indispensable de disposer d'une source accordable sur une plage de plusieurs térahertz (soit quelques intervalles spectraux libres pour une cavité de quelques dixièmes de millimètres de long) si l'on veut pouvoir amener la lumière laser à résonance avec la cavité. Il n'est toutefois pas nécessaire que ce balayage soit continu, la procédure d'alignement

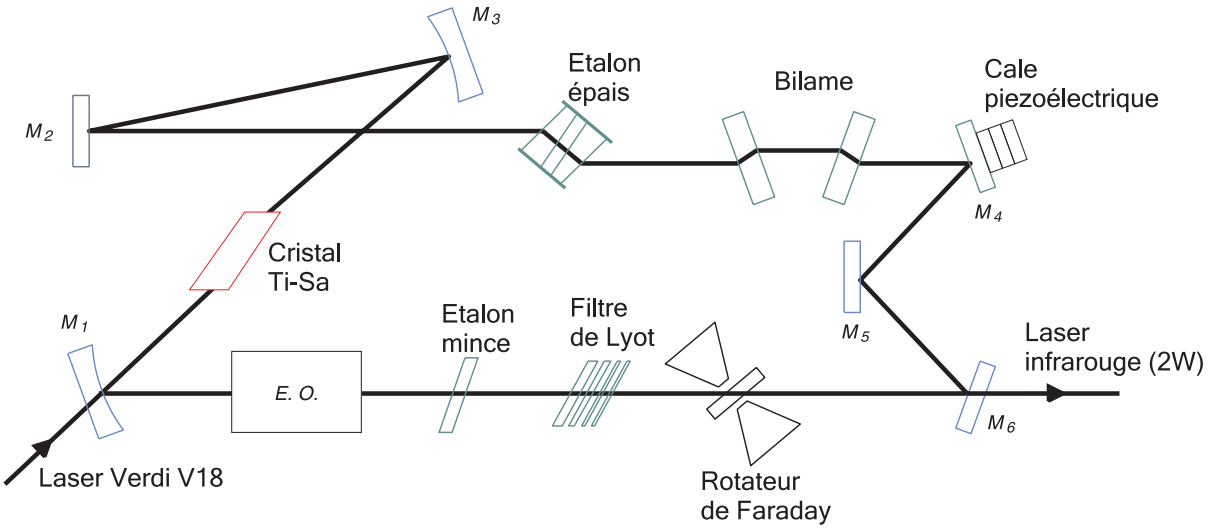

FIGURE 1.19: Schéma de principe du laser titane-saphir.

du laser sur la cavité nécessitant seulement de pouvoir faire varier continûment la fréquence du laser sur une plage correspondant à quelques modes transverses, soit typiquement une dizaine de gigahertz. Un balayage par sauts discrets sur des plages plus importantes suffira alors amplement.
En plus de ce balayage, on demande de pouvoir effectuer des variations de fréquence du laser plus rapides et de plus faible amplitude (une dizaine de megahertz), afin d'avoir la possibilité de visualiser l'ensemble du pic d'Airy pour déterminer la bande passante de la cavité, ou bien pour aligner le faisceau laser sur la cavité.
Pour procéder à la mesure des déplacements du miroir mobile, le laser doit rester constamment à résonance avec la cavité, qui présente de petites variations de longueur dues à des dérives thermiques ou à des vibrations mécaniques et acoustiques. Ces perturbations, dont le spectre s'étend sur quelques dizaines de kilohertz à partir des basses fréquences, nécessitent de pouvoir être compensées grâce à la mise en place d'un asservissement de la fréquence du laser sur la résonance optique de la cavité. La cavité laser devra donc contenir des éléments optiques capables de réagir suffisamment rapidement au signal d'erreur délivré par l'asservissement. D'autre part, lorsque le laser est asservi, ses fluctuations de fréquence devront rester petites devant la bande passante de la cavité. L'intensité doit elle aussi être contrôlée à basse fréquence de manière à ce que la sensibilité de la mesure soit bien définie. Enfin, l'observation du régime quantique de la pression de radiation nécessite que les fluctuations de phase et d'intensité du faisceau laser soient réduites aux fluctuations quantiques sur la plage d'analyse du mouvement du miroir.

En résumé, les caractéristiques essentielles requises pour la source laser sont une accordabilité sur une large plage, une très bonne stabilité en fréquence et en intensité, et enfin des bruits techniques négligeables aux fréquences d'analyse de la position du miroir. Cet ensemble de contraintes a conduit à utiliser un laser Titane-saphir, un système particulièrement stable, et conçu pour être facilement balayé sur de larges plages de fréquences. De plus, sa longueur d'onde d'oscillation se situe autour de 810 nm, pour laquelle des miroirs à très faibles pertes sont disponibles pour réaliser des cavités de très grande finesse.

La cavité en anneau

Le faisceau laser que nous utilisons dans notre expérience est produit par un laser titane-saphir en anneau, construit suivant le modèle développé au laboratoire par François Biraben [55]. Son schéma de principe est représenté sur la figure 1.19. Le cristal de titane-saphir est pompé par un laser Verdi délivrant une puissance de 18 W, remplaçant depuis 2006 le laser à Argon (délivrant de 10 à 15 W) précédemment utilisé. Le miroirs M_1 à M_5 sont totalement réfléchissants autour de 810 nm, alors que le coupleur de sortie M_6 présente une transmission de 6%.
Comme la cavité en anneau autorise a priori l'oscillation de modes contrapropageant, un rotateur de Faraday est utilisé pour ne conserver qu'un seul sens de propagation : il produit une rotation de la polarisation indépendante du sens de parcours de la lumière, et qui n'est compensée par celle produite du fait des réflexions sur les miroirs non coplanaires M_4 M_5 M_6 que pour un seul sens de propagation dans la cavité laser.
La courbe d'émission par fluorescence du cristal titane-saphir étant très large devant l'écart entre modes longitudinaux de la cavité (de l'ordre de 200 MHz), le fonctionnement du laser est par défaut multimode. On utilise alors 3 éléments sélectifs pour rendre ce fonctionnement monomode : le filtre de Lyot, l'étalon mince, et l'étalon épais. Le filtre de Lyot est constitué de 4 lames biréfringentes parallèles à incidence de Brewster, sélectionnant une plage de fréquence de quelques centaines de gigahertz. L'étalon mince est une simple lame de silice non traitée, qui constitue une cavité Fabry-Perot d'intervalle spectral libre 150 GHz. On peut régler l'inclinaison de cette lame grâce à un moteur, de manière à en modifier l'épaisseur optique, et ainsi déplacer ses fréquences de résonance. Enfin, l'étalon épais est une cavité Fabry-Perot constituée de deux prismes dont les faces en regards ont un coefficient de réflexion de 30%. Cette cavité possède un intervalle spectral libre de 19 GHz. L'un des deux prismes est monté sur une cale piézoélectrique, ce qui permet de déplacer le peigne de modes, et de l'asservir grâce à une détection synchrone de manière à assurer le fonctionnement monomode du laser.
Le bilame, constitué de deux lames symétriques inclinables grâce un moteur, permet de faire varier la fréquence du laser continûment sur une plage de plusieurs dizaines de gigahertz. En traversant cet élément, le faisceau n'est pas dévié, mais la longueur du trajet optique est modifiée en inclinant les lames. On peut aussi faire varier la fréquence du laser sur quelques gigahertz grâce à une cale piézoélectrique placée sur le miroir M_4. Enfin, un électro-optique interne permet également de modifier la longueur optique de la cavité laser, mais avec des temps de réponse considérablement plus faibles que le bilame. Cet électro-optique est monté en modulateur de phase, son axe étant orienté selon la direction de la polarisation du faisceau.
On obtient au final une source laser monomode, capable de délivrer un faisceau de polarisation rectiligne d'une puissance de l'ordre de 2 W, et dont on peut choisir précisément la longueur d'onde entre 790 nm et 850 nm. Le balayage sur de larges plages de fréquences peut s'effectuer par saut de mode de l'étalon mince (150 GHz) en jouant sur l'orientation du filtre de Lyot, ou bien par saut de mode de l'étalon épais (19 GHz) en jouant sur l'inclinaison de l'étalon mince. L'ajustement de la fréquence peut ensuite être réalisé en utilisant un balayage continu grâce au bilame ou à la cale piézoélectrique. Pour contrôler la longueur d'onde du laser en permanence, on prélève une fraction du faisceau (typiquement quelques dizaines de milliwatts) que l'on envoie dans un lambdamètre par l'intermédiaire d'une fibre optique lambdamètre commercial BRISTOL 821.

Autres éléments de la source laser

Adaptation spatiale

Les cavités à miroir mobile que nous utilisons présentent toutes une géométrie plan-concave, de sorte que la stabilité optique du système est assurée. Dans l'approximation paraxiale, une telle cavité présente des modes propres de résonance dont les profils d'intensité sont Gaussiens. Ces modes se répartissent en résonances longitudinales (modes TEM_{00}), auxquelles sont associées une série de modes transverses (modes TEM_{pq}). L'adaptation spatiale entre le faisceau incident et la cavité consiste à rendre le profil du faisceau incident identique à celui du mode fondamental TEM_{00} de la cavité. Si tel n'est pas le cas, la contribution des modes transverses dans la décomposition du faisceau sur la base des modes propres de la cavité est non nulle. Ces modes ayant des fréquences de résonance différentes de celle du fondamental, ils sont simplement réfléchis par la cavité. Une partie de la lumière incidente n'est donc pas couplée à la cavité, ce qui a pour effet de dégrader la sensibilité de la mesure. Plus quantitativement, on décompose le champ incident $\mathcal{E}^{in}$ sur le mode fondamental de profil spatial $v_0(\mathbf{r})$ et de fréquence ω_0, et sur les autres modes :

$$\mathcal{E}^{in}(\mathbf{r},t) = \alpha_0(t)v_0(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{E}'(\mathbf{r},t), \tag{1.110}$$

où α_0 est l'amplitude du mode fondamental, $\mathcal{E}'$ correspond à la contribution de l'ensemble des modes transverses, orthogonaux à $v_0(\mathbf{r})$ et $v_0(\mathbf{r})$ est le profil spatial du mode TEM_{00} de la cavité :

$$v_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}}e^{-|\mathbf{r}|^2/\mathbf{w_0^2}}, \tag{1.111}$$

où w_0 est le col optique (waist) du mode.
L'adaptation spatiale η_{cav} est alors définie comme le rapport entre l'intensité $|\alpha_0|^2$ réellement couplée à la cavité et l'intensité totale incidente :

$$\eta_{cav} = |\alpha_0|^2/\overline{I}^{in}. \tag{1.112}$$

L'adaptation spatiale permet donc de quantifier l'intensité lumineuse qui contribue au couplage optomécanique $\eta_{cav}\overline{I}^{in}$. Tout défaut d'adaptation spatiale ($\eta_{cav} < 1$) se répercutera sur la sensibilité de la mesure. En pratique, l'optimisation de l'adaptation spatiale consistera donc à ajuster le recouvrement entre le faisceau laser incident et le mode fondamental de la cavité, en jouant sur les différents éléments du son système d'injection (lentilles, miroirs...). Il est par ailleurs nécessaire de disposer d'une source laser dont le profil est parfaitement Gaussien et adapté à $v_0(\mathbf{r})$, sans quoi il existera un défaut de recouvrement irréductible entre le faisceau injecté et le mode fondamental de la cavité. Or, le faisceau issu du laser présente un astigmatisme important, qu'il est donc nécessaire de corriger.

Filtrage spatial

On utilise pour cela une cavité de filtrage spatial (appelée cavité FPF), que le faisceau laser traverse afin d'obtenir un profil d'intensité Gaussien TEM_{00}. La cavité FPF est une cavité Fabry-Perot non dégénérée, plan-concave, de 12 *cm* de long, et dont les deux miroirs présentent une réfléctivité de 95%. Le miroir d'entrée, plan, est monté sur une cale piézoélectrique, pour pouvoir contrôler la longueur de la

cavité. Afin de ne transmettre que le mode fondamental TEM_{00} de la cavité FPF, ce mode est maintenu à résonance avec le laser grâce à une détection synchrone : la longueur de la cavité est modulée à $4,5\ kHz$ en appliquant modulation sur la cale piézoélectrique. La phase de la modulation d'intensité du faisceau réfléchi qui en résulte varie de π lorsque le point de fonctionnement de la cavité se déplace d'un côté à un autre du pic d'Airy. Cette modulation d'intensité est détectée à l'aide d'une photodiode (Ph1 sur la figure 1.20). Le signal qui en est issu est multiplié avec la modulation de référence, filtré de manière à n'en conserver que la partie basse fréquence, amplifié, puis envoyé sur la cale piézoélectrique. Ainsi, seul le mode fondamental de la cavité est transmis, présentant une géométrie Gaussienne de grande qualité, comme cela a été vérifié par une analyse du profil en sortie de la cavité avec un analyseur de mode.
Comme la cavité FPF est utilisée comme référence pour déterminer la bande passante des cavités à miroir mobile que nous avons construites, nous avons de nouveau mesuré ses caractéristiques au cours de la thèse. On a tout d'abord l'intervalle spectral libre de cette cavité à l'aide du lambdamètre. La cavité étant très longue, on s'attend à ce que la valeur de cet intervalle soit relativement petite, et on mesure donc l'écart séparant un grand nombre d'intervalles spectraux libres de manière à obtenir une précision suffisante. Pour dix d'entre eux, l'écart mesuré en longueur d'onde est de $2,8.10^{-1}\ \mathring{A}$, d'où un intervalle $\lambda_{ISL} = 1,15\ GHz$, compatible avec la longueur de la cavité. Cette mesure permet de déduire la valeur de l'intervalle entre modes transverses ν_{tr} à partir du rayon de courbure $R = 1$ m du miroir concave (éq.(1.106)) : on trouve $\nu_{tr} = 140\ MHz$. La dernière étape consiste à balayer lentement la fréquence du laser en utilisant le bilame de manière à traverser une résonance fondamentale et la première résonance transverse, l'intensité transmise par la cavité étant acquise grâce à un oscilloscope digital. La mesure précédente de ν_{tr} permet de calibrer ce balayage, et ainsi de déterminer la largeur à mi-hauteur du pic d'Airy du mode fondamental, qui est égale au double de la bande passante de la cavité. On trouve de cette manière une banded passante égale à $5,6\ MHz$. On peut ainsi calculer la finesse de cette cavité à partir de l'équation (1.107), et on obtient $\mathcal{F} = 100$, valeur légèrement supérieure à celle attendue d'après les caractéristiques des miroirs ($\mathcal{F} \simeq 60$). Notons enfin que la valeur obtenue est identique à celle mesurée il y a plusieurs années [56] par une méthode différente, en appliquant une modulation dont on fait varier la fréquence sur le modulateur électro-optique, et en détectant la modulation d'intensité qui en résulte à la sortie de la cavité avec une photodiode rapide.

Stabilisation en intensité

Le faisceau laser présente d'importantes variations d'intensité à basses fréquences, qui peuvent s'avérer très handicapantes : en premier lieu, elles peuvent affecter la sensibilité de la mesure, dont nous avons vu qu'elle dépend de l'intensité moyenne du faisceau incident. Elles peuvent également perturber la réponse du système de détection de la phase du champ réfléchi par la cavité à miroir mobile (voir section suivante). En particulier, cela rend plus délicate la calibration précise des variations de phase observées en terme de déplacements du miroir mobile. Enfin, les variations d'intensité du faisceau peuvent modifier le recul du miroir mobile induit par pression de radiation, et ainsi altérer le fonctionnement de l'asservissement à résonance de la cavité.
Pour compenser les variations d'intensité, nous utilisons un modulateur électro-optique suivi d'un cube séparateur de polarisation, placé avant la cavité de filtrage (voir figure 1.20). L'application d'une tension sur le modulateur a pour effet de

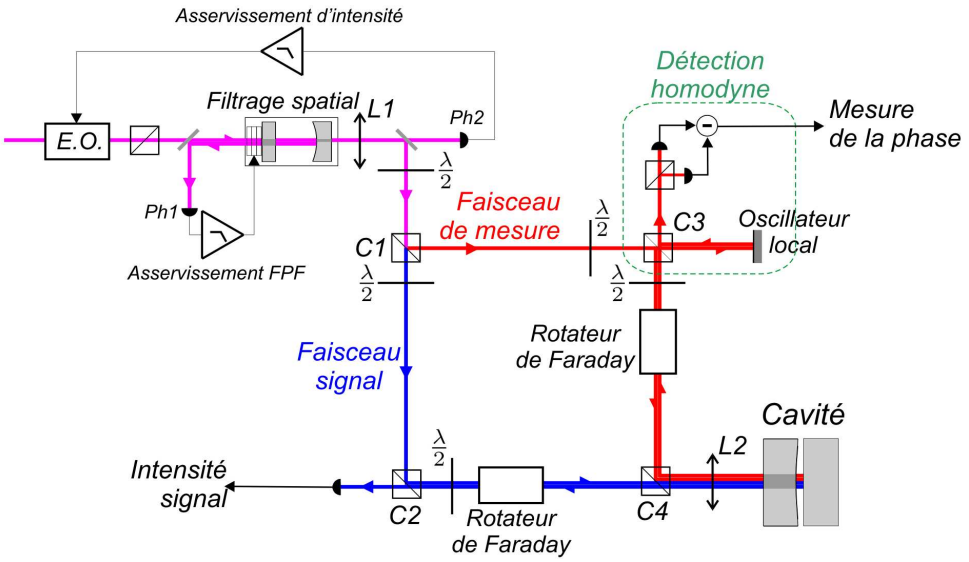

FIGURE 1.20: Filtrage du faisceau laser, asservissement d'intensité et dispositif de double injection.

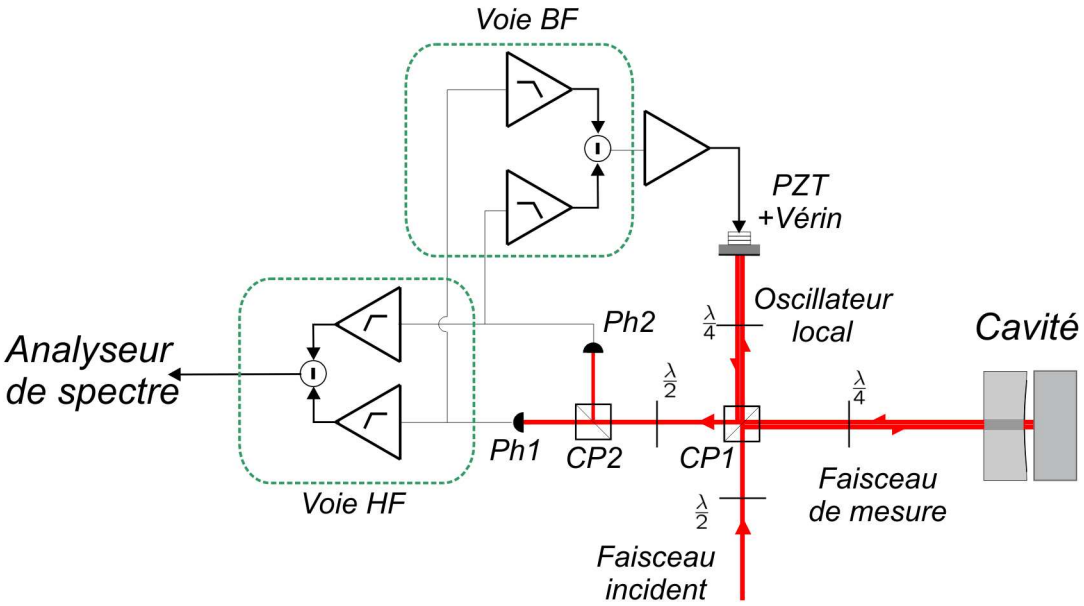

FIGURE 1.21: Montage de la détection homodyne du faisceau réfléchi par la cavité.

changer la polarisation de la lumière qui le traverse, ce qui se traduit par une modification de l'intensité après le cube. Le modulateur est orienté de manière à placer ses lignes neutres à 45° par rapport à la polarisation du champ incident. L'intensité du faisceau est mesurée en sortie de la cavité de filtrage à l'aide d'une photodiode (Ph2 sur la figure 1.20), et comparée à une tension de référence variable qui permet de fixer le point de fonctionnement de l'asservissement. Le signal d'erreur obtenu est appliqué sur le modulateur, ce qui permet de compenser les fluctuations d'intensité du laser mais également celles qui pourraient résulter d'éventuelles variations

du désaccord de la cavité FPF. Cet asservissement réduit les fluctuations relatives d'intensité, initialement de quelques pourcents, à une valeur inférieure à $0,2\%$.

Dispositif de double injection
Une fois filtré spatialement et stabilisé en intensité, le faisceau est séparé en deux polarisations orthogonales qui sont envoyées dans la cavité, suivant le principe de double injection évoqué dans la section 1.2.4. Son schéma d'implémentation est représenté sur la figure 1.20 : une lame $\lambda/2$ placée en sortie de la cavité de filtrage permet d'ajuster la puissance dans chacune des voies transmises par le cube séparateur de polarisations $C1$. Une partie du faisceau de mesure est prélevée grâce à une lame $\lambda/2$ suivie du cube $C3$ de manière à former l'oscillateur local de la détection homodyne, dont nous détaillerons le fonctionnement dans le paragraphe suivant. Le faisceau signal traverse une lame $\lambda/2$ qui permet de rendre sa polarisation horizontale, et se propage jusqu'au cube $C2$, sur lequel il est simplement réfléchi. Les deux faisceaux traversent ensuite chacun un ensemble isolateur constitué d'une lame $\lambda/2$ dont les axes sont tournés à $22,5^\circ$ et d'un rotateur de Faraday, qui opère lui aussi une rotation de 45° de la polarisation des faisceaux, mais dans un sens qui ne dépend pas du sens de propagation de la lumière. Ces deux ensembles permettent d'isoler la propagation des deux faisceaux : dans le cas du faisceau signal par exemple, la rotation de la polarisation induite par la lame $\lambda/2$ est compensée par l'isolateur à l'aller, le faisceau étant donc simplement transmis par le cube $C4$. Il est ensuite réfléchi par la cavité, transmis au retour par ce même cube $C4$, et retraverse l'isolateur, qui cette fois produit une rotation de 90° de la polarisation du faisceau signal, finalement transmise par le cube $C2$, derrière lequel se trouve une photodiode rapide qui permet de mesurer son intensité. De manière analogue, le faisceau de mesure se propage jusqu'à la cavité, puis est renvoyé vers la partie détection afin de mesurer sa phase. Notons enfin qu'il est important que les trajets des deux faisceaux soient de longueurs strictement égales, de sorte qu'ils présentent des profils spatiaux identiques au niveau de la cavité, leur adaptation spatiale étant alors conjointement optimisée à l'aide de la lentille $L2$ montée sur des platines de translations micrométriques.

1.5.3 La détection homodyne

Pour compléter la description générale de notre dispositif expérimental, il nous reste à présenter le système de détection de la phase du faisceau de mesure réfléchi par la cavité. Le montage que nous utilisons est basé sur une technique d'homodynage entre le faisceau de mesure et un faisceau définissant une référence de phase, appelé oscillateur local [57], issu de la même source laser que le faisceau de mesure. Les interférences résultant du mélange de ces deux faisceaux permettent de remonter aux fluctuations de phase du faisceau de mesure, c'est-à-dire au mouvement du miroir mobile.

Principe de fonctionnement de la détection homodyne
Le schéma de la détection que nous utilisons est représenté sur la figure 1.21. Le faisceau incident, polarisé linéairement, est séparé en deux parties d'intensités réglables grâce au cube séparateur de polarisations CP1 précédé d'une lame demi-onde ($\lambda/2$), de manière à créer l'oscillateur local et le faisceau de mesure. Chaque

faisceau traverse alors deux fois une lame quart d'onde ($\lambda/4$) tournée à 45°, une fois à l'aller et une fois au retour. Grâce à ce double passage, les deux faisceaux voient leurs polarisations tournées de 90°, et leurs trajets se recombinent donc sur le quatrième port du cube CP1. Les deux faisceaux ne peuvent cependant pas interférer à ce stade, leurs polarisations étant orthogonales. Pour les mélanger, on place sur leur trajet commun une lame $\lambda/2$ dont les axes sont tournés à $22,5°$. Les polarisations de chaque faisceau sont ainsi tournées de 45° lors de leur passage au travers de cette lame. Le cube CP2 placé ensuite se comporte alors pour chaque faisceau incident comme une lame semi-réfléchissante en les séparant en deux parties d'égales intensités. Les deux moitiés de faisceaux transmises dans chacune des voies de sortie du cube ayant même polarisation, elles peuvent maintenant interférer. En notant α^{out} le champ de mesure réfléchi par la cavité, et $\alpha^{OL}e^{i\varphi}$ le champ de l'oscillateur local, où les amplitudes moyennes $\overline{\alpha}_{OL}$ et $\overline{\alpha}^{out}$ sont choisies par convention réelles et où φ désigne le déphasage entre les deux champs moyen, l'amplitude des champs $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ détectés par les photodiodes Ph1 et Ph2 en sortie du cube s'écrivent :

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha^{out} + \alpha_{OL}e^{i\varphi}\right], \tag{1.113}$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha^{out} - \alpha_{OL}e^{i\varphi}\right]. \tag{1.114}$$

Les deux photocourants produits par Ph1 et Ph2 sont ensuite préamplifiés puis soustraits. D'après les équations (1.113) et (1.114), le signal I_- qui résulte de cette soustraction s'écrit :

$$I_-(t) = 2Re\left(\alpha^{out}(t){\alpha_{OL}}^*(t)e^{-i\varphi}\right). \tag{1.115}$$

Les fluctuations de la différence I_- s'obtiennent en linéarisant l'équation (1.115) autour de la valeur moyenne des champs :

$$\begin{aligned}\delta I_-(t) &= \overline{\alpha}_{OL}[\delta\alpha^{out}(t)e^{-i\varphi} + \delta\alpha^{out*}(t)e^{i\varphi}] \\ &\quad +\overline{\alpha}^{out}[\delta\alpha_{OL}(t)e^{i\varphi} + \delta{\alpha_{OL}}^*(t)e^{-i\varphi}].\end{aligned} \tag{1.116}$$

Les fluctuations de I_- sont donc la somme des fluctuations de la quadrature α^{out}_{φ} du champ réfléchi par la cavité et de la quadrature $\alpha_{OL,-\varphi}$ de l'oscillateur local, pondérées respectivement par les champs moyens $\overline{\alpha}_{OL}$ et $\overline{\alpha}^{out}$ [équation (1.10)]. En prenant l'intensité de l'oscillateur local très grande devant celle du faisceau de mesure, le deuxième terme de l'équation précédente peut être négligé : la différence des photocourants retranscrit les fluctuations du champ de mesure, et son spectre de bruit $S_-[\Omega]$, mesuré à l'aide d'un analyseur de spectre, est proportionnel au spectre $S^{out}_{\varphi}[\Omega]$ de bruit de la quadrature d'angle φ du champ α^{out} :

$$S_-[\Omega] = \overline{I}_{OL}\, S^{out}_{\varphi}[\Omega]. \tag{1.117}$$

La composante continue de I_- est quant à elle utilisée pour choisir la quadrature φ mesurée. Elle est en effet directement reliée au déphasage relatif moyen entre les champs :

$$\overline{I}_- = 2\sqrt{\overline{I}^{out}\overline{I}_{OL}}\cos\varphi. \tag{1.118}$$

En pratique, cette partie basse fréquence de la différence des photocourants sert comme signal d'erreur afin de contrôler la longueur du bras de l'oscillateur local, en pilotant une cale piézoélectrique et un vérin sur lesquels est monté le miroir de l'oscillateur local.

Détection homodyne réelle

Les calculs précédents supposent un dispositif de détection idéal, mais la prise en compte d'un certain nombre d'imperfections est nécessaire si l'on veut modéliser correctement le montage, et ainsi évaluer précisément la sensibilité de la mesure. Le rendement quantique des photodiodes, et plus généralement les pertes induites par les éléments optiques utilisés pour mélanger les deux faisceaux, ont pour effet d'atténuer le champ réfléchi, et de le coupler aux fluctuations du vide. La mesure du spectre des fluctuations de la phase du faisceau réfléchi S_φ^{out} est donc contaminée par les fluctuations quantiques du vide :

$$S_-[\Omega] = \overline{I}_{OL}\left(\eta_{ph} S_\varphi^{out}[\Omega] + 1 - \eta_{ph}\right), \tag{1.119}$$

où η_{ph} est le rendement en intensité du système de détection, et où $1-\eta_{ph}$ représente les pertes. Les pertes subies par la lumière lors de la détection affectent donc directement le rapport signal à bruit : dans le cas d'une détection parfaite, le bruit de phase du faisceau de mesure retranscrit la position du miroir mobile, avec une incertitude égale au bruit de photon standard. Pour une rendement η_{ph} strictement inférieur à 1, le bruit de mesure reste égal au bruit de photon standard, mais la contribution des déplacements du miroir est réduite d'un facteur $\sqrt{\eta_{ph}}$ en amplitude.

De même, un recouvrement spatial imparfait entre l'oscillateur local et le faisceau sonde peut dégrader la mesure. En effet, seule la partie intervenant dans le recouvrement des deux faisceaux produit des interférences, le reste de la lumière détectée ne contribuant pas au signal, ce qui provoque une diminution du contraste des interférences, donnée par l'amplitude de $\overline{I}_-$:

$$\overline{I}_- = 2\sqrt{\eta_{OL}\overline{I}^{out}\overline{I}_{OL}}\cos\varphi. \tag{1.120}$$

L'effet d'un défaut d'adaptation spatiale ($\eta_{OL} < 1$) équivaut alors à celui des pertes : le signal est réduit d'un facteur $\sqrt{\eta_{OL}}$ par rapport au bruit de photon standard, ce qui détériore la sensibilité du même facteur.

Une dernière caractéristique expérimentale importante pouvant affecter la détection est l'équilibrage des deux voies de la détection : tout déséquilibre s'accompagne en effet d'une contamination de la mesure par le bruit d'intensité total arrivant sur les photodiodes, c'est-à-dire la somme des intensités de l'oscillateur local et du faisceau réfléchi par la cavité. L'équilibrage de notre dispositif, qui dépend aussi bien des composants optiques que de la partie électronique de la détection, est meilleur que 1%, ce qui permet de négliger l'effet de déséquilibre sur la plage de fréquence qui nous intéresse.

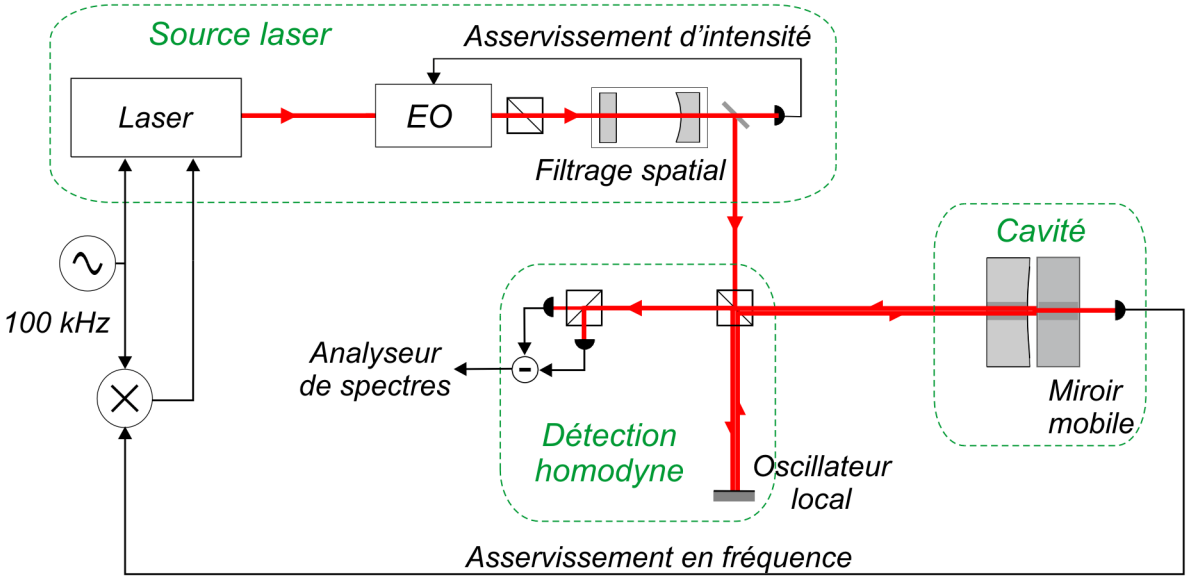

FIGURE 1.22: Schéma de base de l'expérience. La lumière délivrée par le laser titane-saphir est filtrée et stabilisée en intensité, puis partagée en deux parties, l'oscillateur local d'une part et le faisceau de mesure d'autre part. Une détection synchrone, semblable à celle utilisée pour asservir la cavité FPF, permet de maintenir le faisceau de mesure à résonance optique avec la cavité à miroir mobile.

1.5.4 Fonctionnement de l'expérience et résultats antérieurs

Nous présentons maintenant le fonctionnement de notre expérience, dont le schéma de base, antérieur à la mise en place de la double injection, est représenté sur la figure 1.22. Ceci nous permettra de détailler, à partir de l'exemple d'une cavité à miroirs cylindriques, le protocole que nous suivons pour mesurer les caractéristiques optiques et mécaniques de la cavité à miroir mobile. Nous terminerons cette section par la présentation d'un certain nombre de résultats obtenus avant le commencement de mon travail de thèse.

Procédure d'alignement de la cavité

L'alignement de la cavité est une étape relativement délicate : la cavité étant très courte, son intervalle spectral libre est de l'ordre de plusieurs centaines de gigahertz comme nous l'avons vu dans la section 1.5.1, ce qui rend la recherche d'une résonance fondamentale (large typiquement de quelques mégahertz) particulièrement difficile. Nous présentons ici le nouveau protocole d'alignement que nous avons mis au point, et au cours duquel les caractéristiques optiques de la cavité sont déterminées. Cette méthode, grâce notamment à l'utilisation d'une caméra et d'une étape de préalignement, a permis de faire passer la durée de la procédure d'une demi-journée à quelques dizaines de minutes, ce qui est significatif lors des phases de tests de différentes cavités.

Préalignement

Si la procédure de montage de la cavité que nous avons présentée dans la section

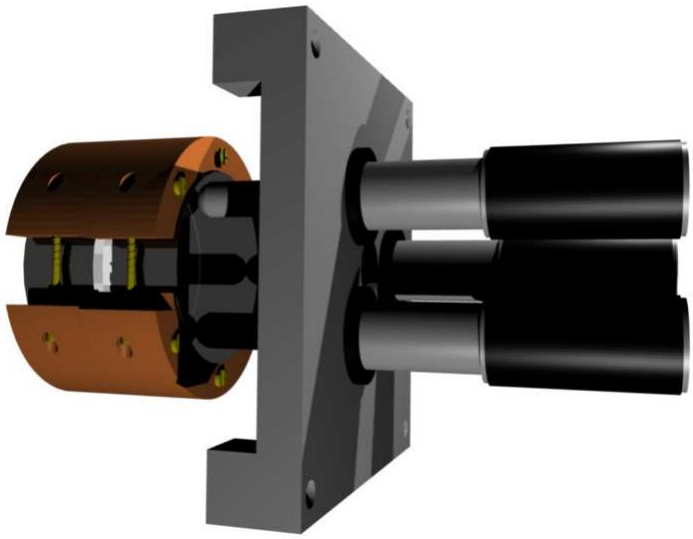

FIGURE 1.23: Montage utilisé pour ajuster le parallélisme des miroirs.

1.5.1 est relativement efficace, il est tout de même nécessaire de vérifier qu'elle permet d'obtenir un parallélisme suffisant des miroirs. La cavité est pour cela montée sur un banc de test aménagé à cet effet à partir d'une fraction du faisceau prélevée à la sortie du laser titane-saphir. Le miroir de fond possédant une transmission non parfaitement nulle, il est possible d'observer les modes transverses de la cavité en plaçant une caméra infrarouge derrière le miroir et en ajustant sa mise au point pour faire l'image du miroir. Notons qu'il n'est pas nécessaire de faire varier la fréquence du laser pour observer ces modes : la cavité étant montée à l'air libre, les fluctuations thermiques ainsi que les fluctuations d'indice de l'air produisent des variations de sa longueur optique qui suffisent à faire défiler rapidement et continûment les résonances transverses. Ces modes admettent un centre de symétrie commun, qui se trouve sur l'axe optique de la cavité : le repérage du centre des modes permet donc d'en déduire directement la qualité du parallélisme des deux miroirs. Le préalignement consiste alors à ajuster la position du centre de symétrie des modes transverses de manière à ce qu'il coïncide avec le centre du miroir de fond, en modifiant l'orientation du miroir d'entrée selon trois degrés de liberté à l'aide d'un système de trois vis micrométriques (représenté sur la figure 1.23) placées à 120° les unes des autres. Ces vis poussent indépendamment sur le miroir d'entrée, le faisant glisser à l'intérieur de sa bague de fixation. Ceci permet d'ajuster finement son orientation, mais a aussi pour conséquence de réduire la longueur de la cavité.

Identification d'une résonance fondamentale

La cavité est ensuite placée dans une enceinte à vide munie d'un asservissement de température afin de stabiliser autant que possible sa longueur optique. On utilise toujours, dans un premier temps, une caméra infrarouge pour observer les modes transmis par la cavité. Comme nous l'avons indiqué dans la section 1.5.1, ces modes se répartissent en série de peignes indicés par n, correspondant à un mode longitudinal n, 0, 0 accompagné de modes d'indices p et q non nuls, $p + q$ étant le nombre de plans nodaux du mode, proportionnel à son extension spatiale.

Les fréquences de ces modes sont données par la relation :

$$\nu_{npq} = n\nu_{ISL} + (p + q + 1)\nu_{tr} \tag{1.121}$$

Cette expression permet de comprendre qu'à mesure que l'on se rapproche d'une résonance fondamentale au sein du n-ième peigne en diminuant la fréquence du laser, l'extension spatiale des modes décroît. La méthode que nous suivons pour localiser un mode fondamental consiste alors à balayer la fréquence du laser afin de repérer une résonance transverse modérément étendue (typiquement quelques mm). On optimise l'intensité de ce mode en ajustant l'orientation du faisceau incident à l'aide de deux miroirs montés en "baïonnette" juste devant la cavité. On diminue alors la fréquence du laser en actionnant ses éléments mobiles (généralement le Lyot et l'étalon mince en début de procédure pour effectuer des grands sauts de fréquence), afin de trouver un mode d'ordre inférieur, dont on optimise l'intensité de la même manière. On itère l'opération jusqu'à l'obtention d'un mode suffisamment compact et intense. La visualisation avec la caméra infrarouge se révèle alors insuffisante à ce stade si l'on veut pouvoir poursuivre efficacement le protocole d'alignement : la caméra est en effet très sensible, et sature sous l'effet de l'intensité des modes transverses, qui sont maintenant très focalisés. On remplace donc la caméra par le capteur CCD d'une webcam dont on a enlevé l'objectif. Bien que moins sensible, ce capteur présente l'avantage de pouvoir identifier le mode observé. On diminue alors la fréquence du laser, en optimisant successivement chaque mode transverse rencontré, jusqu'à l'obtention d'un mode fondamental Gaussien TEM_{00}. La figure 1.24 montre le mode fondamental et les premiers modes transverses de la cavité à miroirs cylindriques tels que nous les observons avec ce capteur CCD.
Enfin, on mesure la longueur d'onde correspondant à cette résonance grâce au lambdamètre, ce qui permettra de la retrouver rapidement d'un jour à l'autre, l'enceinte à vide et l'asservissement de température assurant une très bonne stabilité de la longueur de la cavité. Signalons enfin que l'on profite de cette opération pour déterminer l'intervalle transverse ν_{tr}, de l'ordre $0,07$ $\mathring{A}$, en relevant la fréquence des résonances transverses successives grâce au lambdamètre.

Optimisation de l'adaptation spatiale

Une fois la résonance optique repérée, il reste à optimiser l'adaptation spatiale, qui doit être maximale si l'on veut pouvoir bénéficier d'une grande sensibilité comme nous l'avons vu dans la section 1.5.2. Il s'agit d'injecter la cavité avec un faisceau possédant les mêmes propriétés géométriques que le mode TEM_{00} de la cavité : le faisceau doit donc être parfaitement aligné sur la cavité, mais il doit également présenter un profil identique à celui du mode fondamental, qui est Gaussien et caractérisé par son col w_0 relié à la longueur L de la cavité et au rayon de courbure R du coupleur d'entrée par l'expression :

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{L(R-L)} \tag{1.122}$$

Dans les conditions typiques de notre expérience, c'est-à-dire $L = 0,25\ mm$, $R = 1$ m, et $\lambda = 810\ nm$, la valeur de ce col est voisine de $65\ \mu m$. Nous avons donc conçu le système d'injection du faisceau laser pour obtenir un tel col au niveau du miroir mobile de la cavité. Le dispositif se termine par une lentille de focalisation montée sur une platine de translation, qui permet d'ajuster la position du col sur une plage de quelques centimètres. Pour pouvoir procéder au réglage de l'adaptation

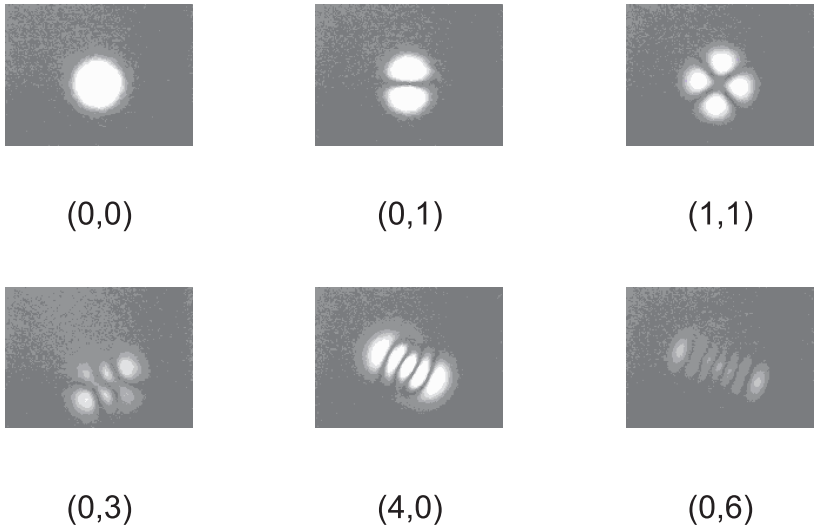

FIGURE 1.24: Mode fondamental et premiers modes transverses d'une cavité à miroirs cylindriques. Le doublet situé en dessous de chaque image indique les ordres (p, q) du mode concerné.

spatiale, on se place à la fréquence de résonance optique déterminée lors de l'étape précédente, et on active une modulation de fréquence du laser d'une amplitude de quelques dizaines de mégahertz, en appliquant une tension sinusoïdale à 100 Hz sur la cale piézoélectrique du miroir M_4 du laser. Notons que pour que la cavité de filtrage reste à résonance avec le faisceau incident, cette même modulation est envoyée avec un gain et une phase adéquats sur la cale piézoélectrique du FPF. On détecte l'intensité transmise par la cavité à miroir mobile, qui décrit un pic d'Airy de largeur égale à deux fois la bande passante, à l'aide d'une photodiode dont la sortie est reliée à un oscilloscope numérique.
On cherche dans un premier temps à maximiser la hauteur du pic, en jouant sur l'orientation des miroirs de la baïonnette d'injection. Cette opération terminée, on note l'amplitude du pic I_0, puis on augmente la fréquence du laser d'une quantité ν_{tr} en utilisant le bilame, de façon à se placer autour de la première résonance transverse : si l'optimisation de la résonance fondamentale a été correctement réalisée, l'intensité de ce mode doit être quasiment nulle, sa valeur I_1 étant reliée essentiellement au décentrage du faisceau par rapport à l'axe optique de la cavité. On augmente de nouveau la fréquence de manière à se placer au voisinage de la seconde résonance transverse. L'amplitude de cette résonance est d'autant plus grande que le col du faisceau est mal adapté à celui imposé par la cavité. On cherchera donc à faire diminuer l'amplitude de ce pic, en jouant sur la position de la dernière lentille de focalisation, c'est à dire en déplaçant le col du faisceau jusqu'à ce qu'il se trouve dans le plan du miroir mobile. Le réglage est alors terminé, et on relève la hauteur du pic résiduel I_2. On poursuit le balayage sur une dizaine de ν_{tr}, et on mesure les hauteurs I_k des résonances rencontrées. En général, lorsque la cavité est correctement alignée, la contribution des modes dont la fréquence est éloignée de plus de $10\nu_{tr}$ de celle du fondamental est complètement négligeable. La base des modes transverses étant orthogonale, on peut calculer l'adaptation

spatiale à partir des n mesures précédemment effectuées (équation (1.112)) :

$$\eta_{cav} = \frac{|\alpha_0|^2}{\overline{I}^{in}} = \frac{I_0}{\sum_{k\in\mathbb{N}} I_k} \simeq \frac{I_0}{\sum_{k\in[0,n]} I_k} \tag{1.123}$$

On trouve ainsi un accord η_{cav} entre le faisceau et la cavité proche de 98%.

Détermination de la finesse

Le pic d'Airy enregistré lors de l'étape précédente (figure 1.25) permet de déterminer la bande passante de la cavité. On mesure pour cela sa largeur, que l'on compare à celle du pic d'intensité transmis par la cavité FPF dans les mêmes conditions de modulation, et dont on connaît la bande passante, égale à $5,6$ MHz (voir section 1.5.2). Pour la cavité cylindrique utilisée jusqu'ici comme exemple, on trouve une bande passante $\nu_{BP} = 1,35\ MHz$.

Pour déterminer la finesse, il reste à mesurer l'intervalle spectrale libre. Pour cela, on utilise dans un premier temps sa valeur approchée que l'on peut déduire de la mesure de ν_{tr} (équation (1.106)). A partir de cette valeur, on change la fréquence du laser (généralement à l'aide du Lyot) de manière à se placer à la fréquence présumée de la résonance longitudinale suivante. On affine enfin la recherche à l'aide du bilame jusqu'à l'obtention de cette seconde résonance. L'écart en longueur d'onde que nous avons mesuré est $\Delta\lambda = 13,4\ \mathring{A}$ pour une longueur d'onde moyenne de 810 nm. On en déduit la valeur de l'intervalle spectral libre :

$$\nu_{ISL} = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = 613\ GHz. \tag{1.124}$$

Cette dernière mesure permet de connaître la longueur de la cavité,

$$L_0 = \frac{c}{2\nu_{ISL}} = 0,24\ mm, \tag{1.125}$$

ainsi que la finesse de la cavité (éq.(1.107)) :

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{ISL}}{2\nu_{BP}} = 230\,000. \tag{1.126}$$

On en déduit par la même occasion les pertes totales de la cavité (équation (1.108)) $T + P = 27\ ppm$.

Détermination des pertes de la cavité

On détermine les pertes à partir de la mesure du coefficient de réflexion à résonance, comme nous l'avons expliqué dans la section 1.5.1. L'expression (1.101) que nous en avons donnée doit cependant être modifiée, et tenir compte de l'adaptation spatiale : en effet, si celle-ci est imparfaite, seule la partie du champ incident couplée à la cavité est sensible aux pertes, le reste de la lumière étant simplement réfléchi,

$$\mathcal{R}_0 = \eta_{cav}\left[\frac{T-P}{T+P}\right]^2 + 1 - \eta_{cav}. \tag{1.127}$$

Le coefficient de réflexion à résonance est donné par le rapport des intensités réfléchies à résonance et hors résonance. Pour réaliser ces mesures, on utilise les

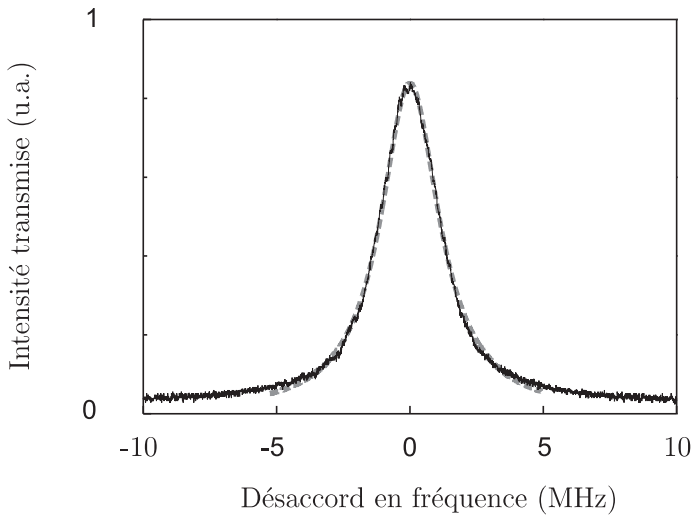

FIGURE 1.25: Pic d'Airy en transmission de la cavité. On déduit de l'ajustement lorentzien (courbe en tirets) la valeur de la bande passante $\nu_{BP} = 1,35$ MHz et la finesse $\mathcal{F} = 230\,000$.

photodiodes de la détection homodyne. L'oscillateur local est coupé, et les deux sorties continues des photodiodes sont envoyées sur un amplificateur sommateur, de manière à obtenir un signal proportionnel à l'intensité du champ réfléchi par la cavité. En comparant les signaux collectés à résonance et hors résonance, on obtient un coefficient de réflexion à résonance $\mathcal{R}_0 = 11$ % pour la cavité à miroirs cylindriques. En utilisant les valeurs précédemment mesurées des pertes et de l'adaptation spatiale, l'équation (1.127) permet d'établir que les pertes P et la transmission T valent respectivement 9 *ppm* et 18 *ppm*. Comme on pouvait s'y attendre, la transmission mesurée est en très bon accord avec les spécifications du fabricant indiquant 20 *ppm*, alors que les pertes son légèrement supérieures au *ppm* attendu d'après la très faible rugosité de la surface du substrat.

Optimisation et calibration de la détection

Une fois l'optimisation et la caractérisation de la cavité à miroir mobile réalisées, la mesure ultra-sensible de déplacements requiert d'optimiser et de calibrer le dispositif de détection homodyne.

Recouvrement spatial

En dehors des aspects concernant l'équilibrage des deux voies de détection et la réduction des pertes optiques dont nous avons déjà parlé dans la section 1.5.3, il est important de maximiser le recouvrement spatial η_{OL} entre le faisceau de mesure réfléchi par la cavité et l'oscillateur local. On optimise pour cela le contraste des interférences à basses fréquences observées sur le signal $\overline{I}_-$, qui est une fonction croissante du recouvrement d'après l'équation (1.120). L'opération consiste à appliquer une rampe de fréquence sur le vérin du miroir de l'oscillateur local, et de faire ainsi défiler les franges d'interférence, que l'on visualise sur un oscilloscope. On règle alors l'orientation et la position du support de ce miroir, afin de maximiser l'amplitude des interférences. Lorsque l'on a terminé le réglage, on relève l'amplitude crête-à-crête $\overline{I}_-^{c.c.}$ des interférences, puis on mesure les intensités $\overline{I}^{out}$

et $\overline{I}_{OL}$, obtenues en masquant successivement l'oscillateur local et le faisceau de mesure, et en additionnant la sortie des deux photodiodes à chaque fois. On sait alors d'après l'équation (1.120) que le recouvrement η_{OL} est donné par :

$$\eta_{OL} = \frac{\overline{I}_{-}^{c.c.}}{16\overline{I}^{out}\overline{I}_{OL}} \tag{1.128}$$

Nous sommes ainsi parvenus à atteindre un recouvrement de 94% avec la cavité à miroirs cylindriques.

Calibration de la détection

La calibration de la détection permet de convertir la tension qu'elle fournit en déplacement équivalent du miroir. Nous présentons rapidement la technique anciennement utilisée, qui consiste à appliquer une modulation de fréquence $\delta\nu_m$ connue au laser, et à faire correspondre son amplitude (en Hz) à celle du signal mesuré en volts sur la détection homodyne. On sait en effet qu'une variation de la fréquence du laser est équivalente à une variation δx de longueur à fréquence optique ν constante (équation (1.103)) :

$$\frac{\delta x}{L_0} = \frac{\delta\nu_m}{\nu}. \tag{1.129}$$

Cette relation permet de transformer la modulation de fréquence en modulation équivalente de longueur, et ainsi de convertir les variations de tension délivrées par la détection homodyne en déplacements du miroir.

En pratique, la première étape de la calibration consiste à étalonner la modulation de fréquence $\delta\nu_m$, créée en appliquant une tension sinusoïdale sur le modulateur électro-optique interne du laser. On la compare pour cela à la bande passante ν_{BP}^{FPF} de la cavité de filtrage (FPF) : lorsque celle-ci se trouve hors de résonance, la modulation de fréquence provoque une modulation de l'intensité qui lui est proportionnelle, avec une pente maximale à mi-transmission, c'est-à-dire pour un désaccord $\overline{\psi} = \pm\gamma$ (voir figure 1.26). Pour une amplitude de modulation petite devant la bande passante de la cavité FPF ($\delta\nu_m \ll \nu_{BP}^{FPF}$), et à basses fréquences, c'est-à-dire pour une fréquence de modulation $\Omega_m \ll \nu_{BP}^{FPF}$, on peut montrer facilement [56] que la profondeur de la modulation d'intensité $\delta I[\Omega_m]/\overline{I}$ est égale à :

$$\frac{\delta I[\Omega_m]}{\overline{I}} = \frac{\delta\nu_m[\Omega_m]}{\nu_{BP}^{FPF}} \tag{1.130}$$

Expérimentalement, on s'assure tout d'abord que le modulateur électro-optique ne produit aucune modulation d'intensité en mesurant l'intensité transmise par la cavité FPF lorsque celle-ci ce trouve à résonance, puis on déplace son point de fonctionnement en ajoutant un offset au signal d'erreur pilotant l'asservissement de la cavité. On mesure ensuite la modulation d'intensité transmise $\delta I[\Omega_m]$, ainsi que l'intensité moyenne transmise $\overline{I}$, ce qui nous donne finalement l'amplitude de la modulation de fréquence correspondante $\delta\nu_m[\Omega_m]$.

L'étalonnage de la modulation de référence ayant été réalisé, on peut maintenant passer à la seconde phase de la calibration, qui consiste à convertir le signal collecté à la sortie de la détection homodyne en mètres. Pour cela, on mesure l'effet de la modulation de fréquence $\delta\nu_m[\Omega_m]$ sur la détection homodyne. L'amplitude $V_m[\Omega_m]$ (en Volt) du signal détecté à la fréquence Ω_m permet alors directement de convertir

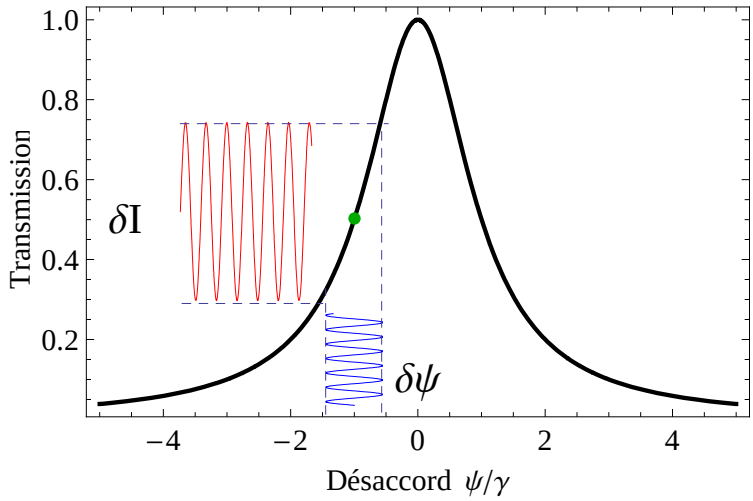

FIGURE 1.26: Principe de l'étalonnage de la modulation de référence : les variations $\delta\psi$ du désaccord provoquées par la modulation de fréquence se traduisent par une modulation δI de l'intensité qui est maximale lorsque le point de fonctionnement de la cavité (en vert) est à mi-transmission. La mesure de cette modulation permet donc de remonter à l'amplitude de la modulation de fréquence.

un signal quelconque $V_{DH}[\Omega_m]$ collecté à la sortie de la détection homodyne en variation de fréquence équivalente $\delta\nu[\Omega_m]$, puis, via la correspondance donnée par la relation (1.129), en déplacement équivalent $\delta x[\Omega_m]$:

$$\delta x[\Omega_m] = L\frac{\delta\nu_m[\Omega_m]}{\nu}\frac{V_{DH}[\Omega_m]}{V_m[\Omega_m]}. \tag{1.131}$$

Calibration des spectres de bruit

La calibration précédente, valable à la pulsation Ω_m, doit être étendue sur une plage plus large en fréquence si l'on veut exprimer les spectres de bruit de phase observés en terme de déplacements équivalents du miroir mobile. Comme nous avons vérifié que le dispositif de détection présente une bande passante de plusieurs dizaines de megahertz, la seule dépendance en fréquence est due au filtrage par la cavité à miroir mobile. L'équation (1.42) permet en effet de relier le spectre S_φ^{out} de la phase du faisceau réfléchi au spectre S_x des déplacements du miroir (généralisation de l'équation (1.44)) :

$$S_\varphi^{out}[\Omega] = S_\varphi^{in}[\Omega] + 64\mathcal{F}^2\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_{cav})^2}\frac{S_x[\Omega]}{\lambda^2}. \tag{1.132}$$

La calibration (1.131) doit donc être corrigée par une dépendance en fréquence de la forme $\sqrt{1+(\Omega/\Omega_{cav})^2}$.

Par ailleurs, la calibration d'une modulation diffère de celle d'un bruit, car ce dernier est défini comme une amplitude spectrale exprimée en $m/\sqrt{Hz}$ (équation (1.20)). Expérimentalement, on utilise un analyseur de spectres pour acquérir le bruit de position du miroir : l'analyseur mesure la puissance $P_{DH}[\Omega]$ du signal délivré par la détection homodyne, intégrée sur une certaine bande ν_{RBW} de

fréquence, correspondant à la largeur spectrale d'analyse (*Resolution bandwidth*). Cette puissance est donc reliée à la tension $V_{DH}[\Omega]$ (qui s'exprime donc en $V/\sqrt{Hz}$ dans le cas d'un bruit) par la relation :

$$P_{DH}[\Omega] = \frac{V_{DH}[\Omega]^2 \nu_{\mathrm{RBW}}}{R} \tag{1.133}$$

où $R = 50\ \Omega$ est l'impédance d'entrée de l'appareil. L'analyseur de spectres compare ensuite cette puissance à une puissance de référence $P_{ref} = 1\ mW$, et affiche le résultat $P_{dB}[\Omega]$ en échelle logarithmique :

$$P_{dB}[\Omega] = 10 \log \left[\frac{P_{DH}[\Omega]}{P_{ref}} \right] = 10 \log[20(V_{DH})^2[\Omega] \times \nu_{\mathrm{RBW}}] \tag{1.134}$$

La conversion du signal fourni par l'analyseur de spectre en amplitude spectrale de bruit équivalente consistera donc à inverser la relation précédente :

$$V_{DH}[\Omega] = \frac{10^{P_{dB}/20}}{\sqrt{20\nu_{\mathrm{RBW}}}}, \tag{1.135}$$

puis à appliquer la calibration précédemment établie.

Sensibilité de la mesure et observation du bruit thermique

On peut dès lors procéder à la mesure des déplacements du miroir. Les intensités de l'oscillateur local et du faisceau de mesure égales respectivement à 10 mW et 50 μW. On commence par déterminer la sensibilité de mesure atteinte expérimentalement avec la cavité à miroirs cylindriques. Pour cela, on mesure le bruit de phase que l'on aurait en absence de tout mouvement du miroir (terme S_φ^{in} dans l'expression (1.132)), bruit que l'on calibre en terme de déplacement équivalent. Comme on ne peut pas éliminer l'agitation thermique du miroir, on mesure ce bruit en plaçant la cavité hors-résonance : la phase réfléchie devient alors insensible aux déplacements du miroir et reproduit simplement le bruit de phase du faisceau incident. Le spectre obtenu est converti en amplitude spectrale des déplacements équivalents grâce à la méthode de calibration précédemment exposée. Le résultat est présenté sur la figure 1.27 (courbe du bas), sur laquelle nous avons également reporté la sensibilité attendue $\delta x_{shot}[\Omega]$ (courbe en pointillés), calculée à partir de l'équation (1.132) en tenant compte de l'ensemble des imperfections optiques de notre système (généralisation de l'équation (1.45)) :

$$\delta x_{shot}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\overline{I}^{in}}} \frac{1}{\sqrt{\eta_{cav}\eta_{OL}\eta_{ph}}} \sqrt{\frac{T+P}{T}} \sqrt{1 + (\Omega/\Omega_{cav})^2}, \tag{1.136}$$

avec $\eta_{cav} = 98\%$, $\eta_{OL} = 94\%$, $\eta_{ph} = 91\%$, $T = 18\ ppm$, $P = 9\ ppm$, et $\Omega_{cav} = 1,35\ MHz$. Pour ces paramètres, la sensibilité attendue à basses fréquences $\delta x_{shot}[\Omega \ll \Omega_{cav}] = 2,7 \times 10^{-20}\ m/\sqrt{Hz}$, son niveau remontant à plus haute fréquence en raison du filtrage de la cavité. On note un très bon accord entre la valeur théorique et le résultat expérimental, qui témoigne d'une bonne modélisation de notre expérience.

L'observation du mouvement du miroir mobile est une opération plus délicate car elle nécessite de mesurer les fluctuations de phase du faisceau réfléchi tout en maintenant la cavité parfaitement à résonance. Pour cela, on verrouille la fréquence du

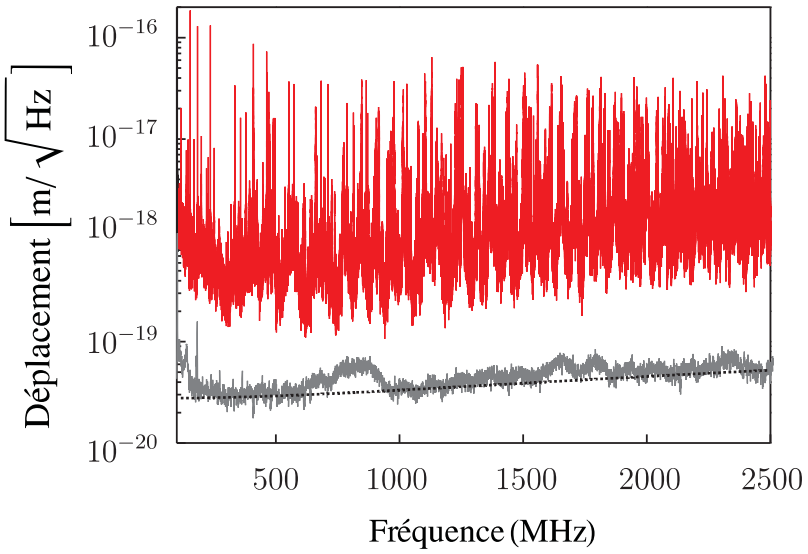

FIGURE 1.27: Spectre de bruit thermique de position (courbe du haut) entre 100 kHz et 2,5 MHz. La courbe du bas correspond à la limite de sensibilité expérimentale due au bruit de phase du faisceau alors que la courbe en pointillés est la limite théorique de sensibilité.

laser en utilisant un asservissement, initialement basé sur une détection synchrone (voir figure 1.22). Nous aurons l'occasion de revenir en détails sur l'importance de cet asservissement et sur les difficultés qui y sont associées dans le chapitre suivant. Une fois le laser verrouillé sur la résonance, l'acquisition peut commencer. Elle doit se dérouler dans un calme absolu, le fonctionnement de l'asservissement étant à la merci du moindre parasite acoustique.
Le spectre après calibration est présenté sur la figure 1.27 (courbe en haut) : il apparaît sous la forme d'une série de pics associés aux résonances acoustiques du miroir [2]. A température ambiante et avec ce type de cavité, les effets de la pression de radiation sont négligeables, et la contribution essentielle aux déplacements mesurés est due au bruit thermique. Le mouvement peut être décrit comme la somme d'oscillateurs harmoniques indépendants, correspondant aux différents modes de vibration du miroir et caractérisés par une masse effective M_n, par une fréquence Ω_n, et par un facteur de qualité Q_n. La réponse thermique globale δx_T s'écrit comme la somme des réponses de chaque mode à des forces de Langevin indépendantes $F_{T,n}[\Omega]$:

$$\delta x_T[\Omega] = \sum_n \frac{\chi_n[\Omega] F_{T,n}[\Omega]}{M_n[\Omega_n^2 - \Omega^2 + i\Gamma_n\Omega]}, \tag{1.137}$$

où χ_n est la susceptibilité du mode n, définie par une équation similaire à (1.47). En appliquant le théorème fluctuation-dissipation (équation (1.62)) à chacune des forces, on détermine le spectre de bruit thermique du miroir :

$$S_x[\Omega \simeq \Omega_n] = 2k_B T \sum_n M_n \Gamma_n \left|\chi_n[\Omega]\right|^2. \tag{1.138}$$

2. En réalité, les deux miroirs étant identiques, le spectre s'organise en doublets de résonances, chaque résonance d'un doublet étant associée à un des deux miroirs.

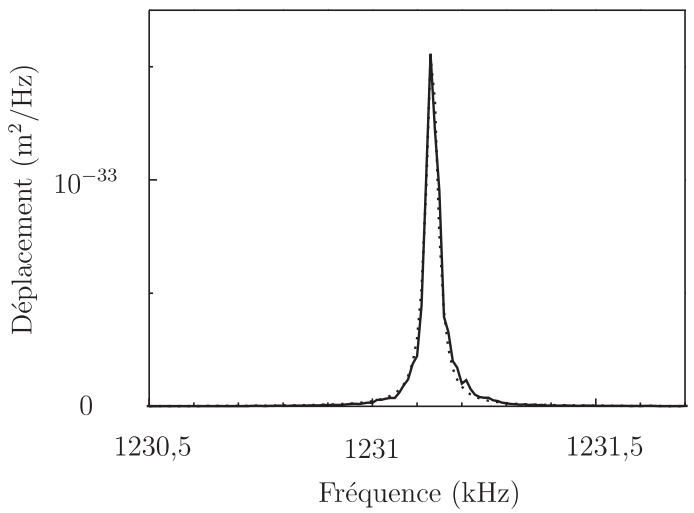

FIGURE 1.28: Spectre de bruit thermique de position autour d'une résonance mécanique du miroir. La courbe en pointillés représente l'ajustement du spectre par une Lorentzienne.

Cette expression rend parfaitement compte de la structure globale en "série de pics" du spectre du mouvement du miroir observé sur la figure 1.27, mais elle montre également qu'au voisinage de la n-ième résonance du miroir, sa dynamique peut être assimilée à celle d'un oscillateur harmonique unique caractérisé par la susceptibilité χ_n. Les autres termes dans la somme de l'équation (1.137) peuvent effectivement être considérés comme constants au voisinage de Ω_n : ils correspondent à un bruit blanc de niveau proportionnel à la température. La dynamique du miroir est alors décrite par le comportement lorentzien du mode n, et la forme du spectre de bruit thermique permet de déterminer les différents paramètres mécaniques Ω_n, Γ_n, et M_n.
Expérimentalement, on acquiert le spectre de bruit thermique au voisinage d'une résonance mécanique du miroir en restreignant la plage de mesure de l'analyseur de spectre, ce qui permet d'augmenter sa résolution spectrale. En effet, il faut que la résolution spectrale soit inférieure à la largeur $\Gamma_n/2\pi$ de la résonance, c'est-à-dire à quelques dizaines de hertz dans le cas des miroirs cylindriques, si l'on veut pouvoir la résoudre correctement. On présente sur la figure 1.28 le spectre d'une résonance mécanique se situant autour de 1230 kHz. Le spectre est acquis avec un ν_{RBW} de 3 Hz, et moyenné sur 80 acquisitions successives. Il est ensuite calibré selon la méthode présentée dans le paragraphe précédent. En ajustant la courbe obtenue à l'aide d'une Lorentzienne superposée à un fond thermique suivant le modèle donné par l'équation (1.138) (courbe en pointillés), on détermine la fréquence de résonance $\Omega_n/2\pi = 1231,133\ kHz$, et sa largeur $\Gamma_n/2\pi = 32\ Hz$, ce qui correspond à un facteur de qualité $Q_n = \Omega_n/\Gamma_n = 38\,500$. Enfin, à partir de l'amplitude du spectre calculée d'après l'ajustement, on détermine la masse effective de ce mode, $M_n = 430\ mg$.

Résultats antérieurs
Les performances de notre expérience présentées ci-dessus constituent par elles-mêmes un résultat important, faisant de notre système l'un des plus sensibles au

monde. Au cours des dernières années, notre dispositif a également permis de mener une étude exhaustive du bruit thermique des miroirs et des effets de pression de radiation. Nous terminons ce premier chapitre en présentant rapidement quelques résultats obtenus avant la mise en place de la double injection.

Caractérisation mécanique complète du résonateur

Dans le paragraphe précédent, nous avons indiqué que les résonances observées sur le spectre de bruit thermique correspondaient à des modes de vibration du miroir mobile, qui se comportent comme des oscillateurs harmoniques amortis. Des outils de résolution numériques performants ont été mis au point, notamment dans le cadre du projet de détection d'ondes gravitationnelles VIRGO [58, 59], afin de prévoir les profils spatiaux, les masses effectives et les fréquences de résonance des modes acoustiques pour des miroirs cylindriques. Ainsi, à l'appui du programme CYPRES développé par François Bondu, la caractérisation mécanique théorique de notre résonateur a pu être établie : ses modes propres sont paramétrés à l'aide de trois indices, l'ordre circonférentiel n, la parité ξ, et le numéro d'ordre m. L'ordre circonférentiel est lié à la symétrie angulaire du mode. En particulier, un indice $n = 0$ indique une symétrie de révolution du profil du mode. Les modes ne possédant pas cette symétrie présenteront un déplacement nul au centre, et seront donc indétectables avec un faisceau de mesure parfaitement centré. Le paramètre ξ prend les valeurs 0 ou 1, et indique si les faces planes du résonateur vibrent en phase (mode pair $\xi = 0$) ou en opposition de phase (mode impaire, $\xi = 1$). Enfin, le paramètre m est lié à la structure radiale du mode.

Notre expérience a permis d'établir une excellente correspondance entre ces modes théoriques et les résonances observées expérimentalement, en comparant leurs fréquences, leurs masses effectives, et surtout leurs profils spatiaux, qui ont été reconstitués selon la méthode schématisée sur la figure 1.29 [60]. Son principe consiste à exciter le miroir mobile successivement en différents points de sa surface, à la fréquence Ω_n du mode que l'on décide d'étudier. Le déplacement résultant, proportionnel à l'amplitude du mode au point considéré, est détecté grâce au faisceau de mesure. En pratique, l'excitation est produite à l'aide d'un faisceau laser auxiliaire envoyé par l'arrière du résonateur, et modulé en intensité de manière monochromatique au moyen d'un modulateur acousto-optique. La force de pression de radiation qu'exerce ce faisceau sur le miroir est donc elle-aussi modulée, engendrant sa mise en mouvement à la fréquence Ω_n. Notons que la puissance du faisceau auxiliaire et la profondeur de la modulation d'intensité sont choisis de manière à ce que l'amplitude du déplacement provoqué par la pression de radiation soit supérieure de plusieurs ordres de grandeur à celle due au bruit thermique. On échantillonne la réponse du mode en chaque point de la surface du miroir, en déplaçant le point d'impact du faisceau auxiliaire grâce à une lentille montée sur des translations motorisées et pilotées par ordinateur. La figure 1.30 montre les profils obtenus expérimentalement, qui sont en excellent accord avec ceux calculés avec le programme de simulation CYPRES.

Ajoutons enfin que l'on peut utiliser ce dispositif pour déterminer les propriétés mécaniques des modes indépendamment du bruit thermique. On module pour cela l'intensité du faisceau auxiliaire à une fréquence Ω_m balayée autour de la résonance mécanique Ω_n. Le déplacement résultant à la fréquence Ω_m s'écrit :

$$\delta x[\Omega_m \simeq \Omega_n] = \chi[\Omega_m \simeq \Omega_n] F_{rad}[\Omega_m] \simeq \chi_n[\Omega_m] F_{rad}[\Omega]. \tag{1.139}$$

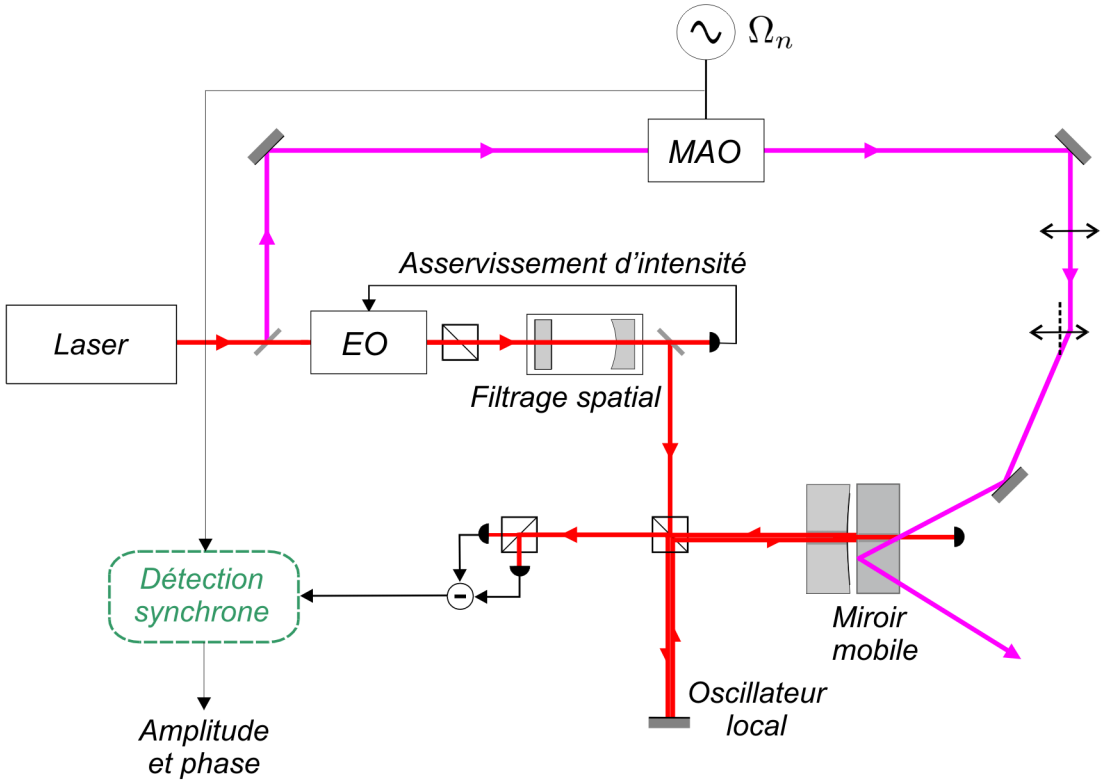

FIGURE 1.29: Dispositif de mesure du profil spatiale des modes mécaniques. Le faisceau arrière d'excitation passe à travers une lentille mobile. Le décentrage de la lentille, commandé par ordinateur, permet de dévier le faisceau vers n'importe quel point de la surface du miroir. Le signal issu de la détection homodyne est envoyé vers une détection synchrone avec la modulation, de façon à extraire l'amplitude et la phase de la réponse du miroir.

En notant η la profondeur de la modulation, et P la puissance du faisceau auxiliaire, le spectre de déplacement $S_x[\Omega_m]$ s'écrit :

$$S_x[\Omega_m] = \frac{4\eta^2 P^2}{c^2} |\chi_n[\Omega_m]|^2, \tag{1.140}$$

ce qui permet de reconstituer la réponse mécanique caractérisée par χ_n, en faisant varier la fréquence de modulation autour de la fréquence de résonance Ω_n.

Mouvement Brownien du miroir dans l'espace des phases

Les résultats précédents ont permis de caractériser la réponse mécanique et le bruit thermique en fonction de la fréquence. Notre expérience a également permis d'étudier la dépendance temporelle du bruit thermique, et en particulier de montrer qu'il correspond à un mouvement Brownien dans l'espace des phases [61]. Les quadratures de la position $\delta x_n(t)$ d'un mode mécanique n donné sont définies comme les composantes lentement variables selon les fonctions sinus et cosinus oscillant à la fréquence de résonance Ω_n du mode :

$$\delta x_n(t) = X_1(t)\cos[\Omega_n t] + X_2(t)\sin[\Omega_n t]. \tag{1.141}$$

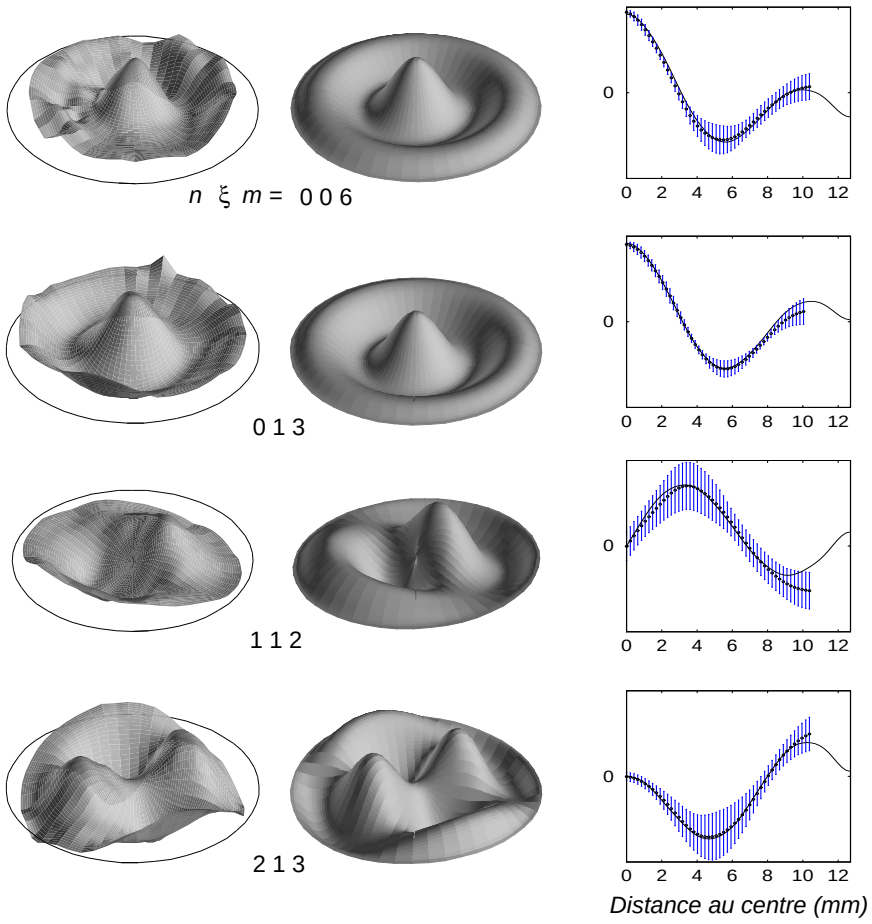

FIGURE 1.30: Profils de quatre modes d'un miroir cylindrique de diamètre 25,4 mm et d'épaisseur 6,35 mm. La colonne de gauche présente les profils obtenus expérimentalement. La colonne du milieu montre les profils théoriques calculés par CYPRES. La comparaison des fonctions radiales théorique et expérimentale est présentée dans la colonne de droite.

Les quadratures sont extraites suivant la méthode schématisée sur la figure 1.31 : on isole tout d'abord la contribution du n-ième mode $\delta x_n(t)$, en appliquant un filtre passe-bande centré en Ω_n au signal $\delta x(t)$ délivré par la détection homodyne. La sortie du filtre est ensuite divisée en deux parties : la première est multipliée à un signal sinusoïdal qui définit la référence de phase de l'espace des quadratures, et la deuxième est multipliée à un signal sinusoïdal en quadrature par rapport au premier. Chacune des voies est finalement filtrée à basse fréquence, afin d'éliminer les composantes oscillant à $2\Omega_n$ après les opérations de multiplication. Les signaux ainsi obtenus sont calibrés suivant la méthode présentée plus haut dans cette section. La figure 1.32 représente les résultats obtenus pour le mode fondamental d'un miroir mobile de géométrie plan-convexe de diamètre 12 mm, dont les caractéristiques mécaniques déduites du spectre de bruit thermique sont les suivantes : $\Omega_0 = 1858\ kHz$, $M_0 = 230\ mg$, et $\Gamma_0/2\pi = 57\ Hz$. La figure de gauche représente l'évolution temporelle dans le plan correspondant aux deux quadratures

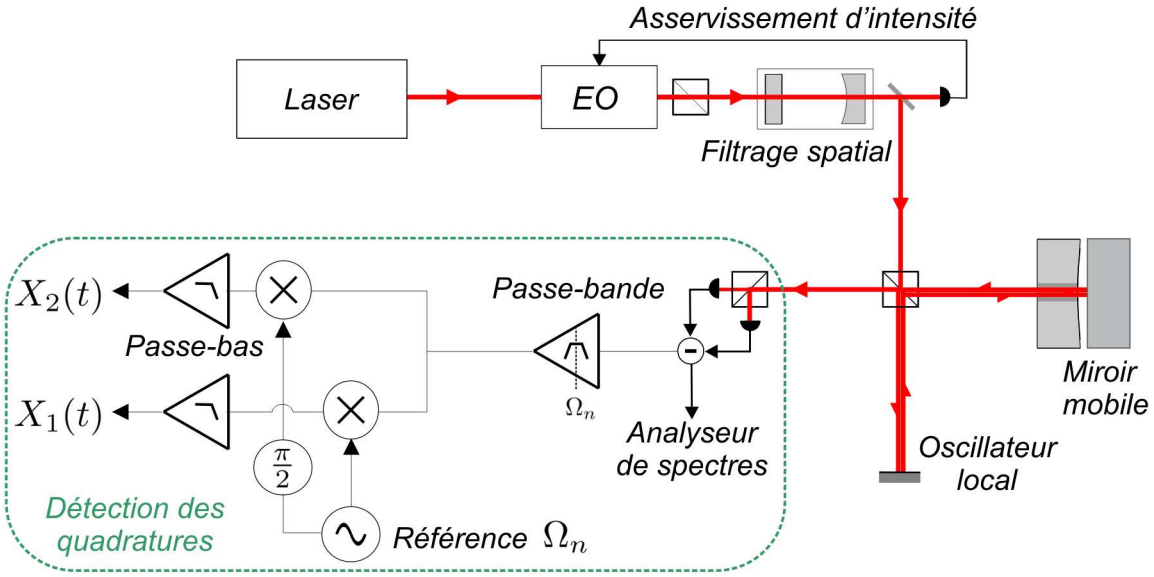

FIGURE 1.31: Principe d'extraction des quadratures du mouvement du miroir.

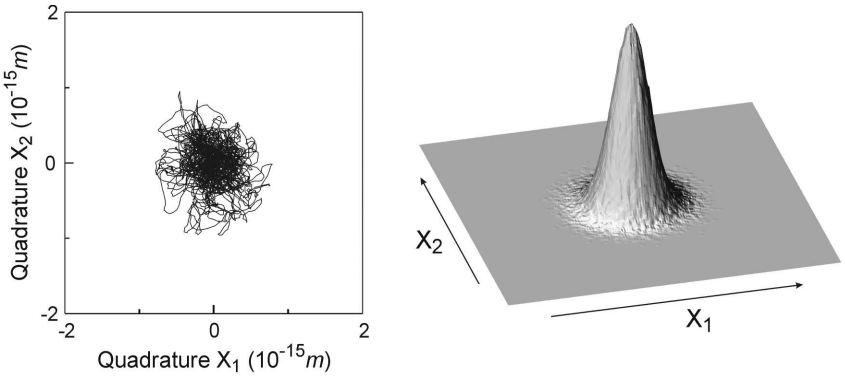

FIGURE 1.32: Courbe de gauche : trajectoire du mouvement Brownien du miroir dans l'espace des phases. Courbe de droite : histogramme du mouvement.

X_1 et X_2 : la trajectoire dans l'espace des phases correspond à une marche au hasard autour de l'origine, comme on s'y attend pour le mouvement Brownien d'un oscillateur harmonique. La figure de droite représente la distribution dans l'espace des phases, obtenue à partir de l'histogramme de la trajectoire sur un temps long. Elle correspond à une distribution Gaussienne symétrique, avec des dispersions égales pour les deux quadratures :

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = 36,6 \times 10^{-17} m. \tag{1.142}$$

Cette valeur est en parfait accord avec celle déduite directement de l'aire du spectre de bruit thermique, et correspond également au théorème d'équipartition de l'énergie :

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \sqrt{\frac{k_B T}{M_0 \Omega_0^2}} = 36,3 \times 10^{-17}\ m \tag{1.143}$$

ce qui démontre que les deux méthodes d'acquisition et de calibration du mouvement du miroir sont bien équivalentes.

Refroidissement d'un miroir par friction froide

Grâce à la grande sensibilité de notre expérience, l'équipe a été la première à démontrer un refroidissement actif du miroir, à l'aide d'un processus de friction froide [23]. Le principe consiste à appliquer une force visqueuse sur le miroir sans bruit ajouté, de façon à augmenter la dissipation du miroir sans augmenter les fluctuations de la force de Langevin auquel il est soumis. D'après le théorème fluctuations-dissipation [62], cela a pour effet de réduire la température du miroir. Plus précisément, on applique une force $F_{fb}[\Omega]$ proportionnelle à la vitesse, obtenue en dérivant temporellement le signal fourni par la mesure de déplacements. On réalise de cette manière une boucle de contre-réaction sur le miroir mobile, et son mouvement est donné par :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega](F_T[\Omega] + F_{fb}[\Omega]) \tag{1.144}$$

On considère pour simplifier une seule résonance mécanique du miroir, la susceptibilité mécanique étant donnée par l'équation (1.47). La force visqueuse s'écrit :

$$F_{fb}[\Omega] = i\Omega M\Gamma g\delta x[\Omega], \tag{1.145}$$

où $\Gamma = \Omega_0/Q$ est l'amortissement du mode mécanique et g est un paramètre de gain sans dimension. Lorsque cette force s'applique, le déplacement du miroir devient :

$$\delta x[\Omega] = \frac{1}{1/\chi[\Omega] - i\Omega M\Gamma g} F_T[\Omega]. \tag{1.146}$$

Cette expression montre qu'en présence de la contre-réaction, le comportement du miroir est celui d'un oscillateur de susceptibilité effective χ_{fb} soumis à la même force de Langevin F_T qu'en l'absence de contre-réaction, avec :

$$\chi_{fb}[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_0^2 - \Omega^2 - i(1+g)\Gamma\Omega)} \tag{1.147}$$

La contre-réaction induit donc une modification de l'amortissement du miroir, sans changer la force de Langevin qui caractérise le bruit thermique. Lorsque $g > 0$, la contre-réaction entraîne un élargissement de la résonance de l'oscillateur d'un facteur $(1+g)$. Le spectre de bruit de déplacement $S_x[\Omega]$ est toujours Lorentzien, mais il est élargi et sa hauteur est diminuée d'un facteur $(1+g)^2$. L'aire du spectre est donc réduite d'un facteur $(1+g)$, ce qui correspond à une diminution de la variance des déplacements du même facteur. Le théorème d'équipartition de l'énergie (1.143) montre que cette réduction de la variance s'interprète comme un refroidissement du miroir, la valeur de sa température T_{fb} en présence de la contre-réaction s'écrivant :

$$T_{fb} = \frac{T}{1+g}. \tag{1.148}$$

Notre expérience a permis de mettre en évidence un tel refroidissement du miroir par *friction froide*, grâce à la mise en place du dispositif de contre-réaction représenté sur la figure 1.33. Son principe consiste à appliquer au miroir la pression de radiation du faisceau auxiliaire envoyé par l'arrière, dont l'intensité est contrôlée

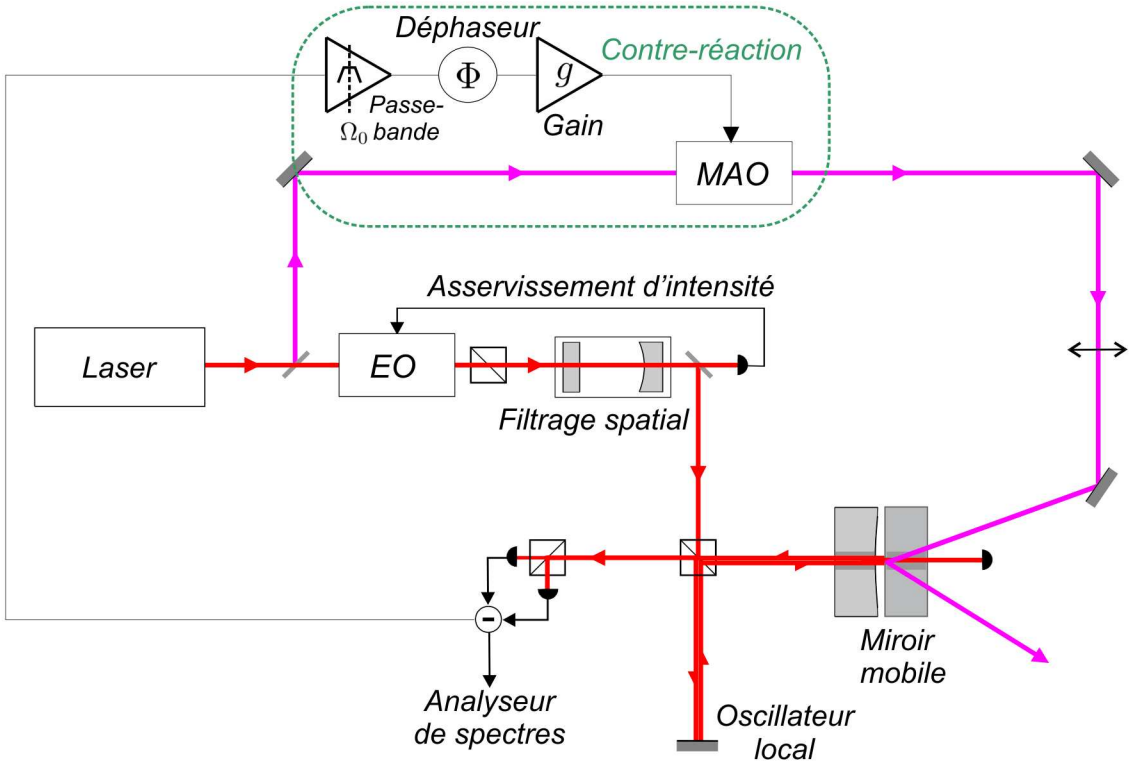

FIGURE 1.33: Principe du dispositif de refroidissement par friction froide.

par un modulateur acousto-optique piloté par la boucle de contre-réaction. Le signal issu de la détection homodyne est envoyé dans un filtre passe-bande à Ω_0 de façon à ne prendre en compte que les déplacements du mode auquel on s'intéresse. Comme le signal est alors limité à une faible plage de fréquence autour de Ω_0, plutôt que de réaliser un véritable dérivateur pour appliquer une force visqueuse, on utilise un déphaseur pour régler la phase de la contre-réaction de manière à la mettre en quadrature avec les déplacements du miroir.Un étage à gain variable permet ensuite d'ajuster le gain global de la boucle.
Les résultats obtenus avec le miroir plan-convexe utilisé dans l'expérience de détection du mouvement Brownien sont présentés sur la figure 1.34. Les facteurs de réduction du bruit thermique atteints pour des larges gains sont supérieurs à 20, l'efficacité du refroidissement étant limitée essentiellement par le fond thermique : en effet, lorsque l'amortissement effectif du miroir devient important et que la hauteur de la résonance diminue fortement, il n'est plus possible de négliger la contribution du fond mécanique, qui peut être vu comme une incertitude sur la mesure des déplacements du mode étudié. La contre-réaction engendre donc un état qui ne correspond plus à un équilibre thermodynamique, et il n'est plus possible de définir une température.

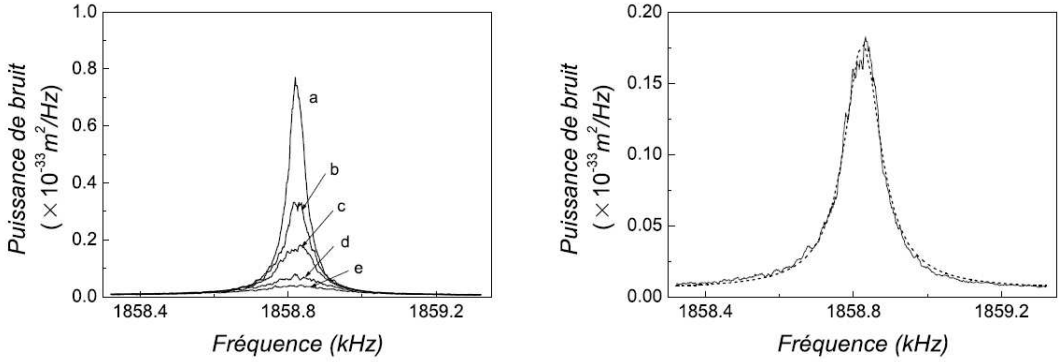

FIGURE 1.34: Courbes de gauche : bruit thermique autour de la résonance du mode fondamental Gaussien ; la courbe **a** est obtenue lorsque le miroir est libre ($g = 0$), les courbes **b** à **e** sont obtenues pour des gains croissants de la boucle de contre-réaction. Courbes de droite : ajustement Lorentzien de la courbe **c**.

Chapitre 2

Mise au point d'un dispositif permettant d'observer les effets quantiques de la pression de radiation.

La description générale du couplage optomécanique que nous avons présentée dans le premier chapitre a permis de mettre en évidence que les principales limites à l'observation de l'action en retour étaient la réduction du bruit thermique et l'optimisation mécanique du miroir mobile. Nous avons donc entrepris de perfectionner notre dispositif, afin de diminuer la contribution du bruit thermique, et d' augmenter conjointement la réponse du miroir mobile à la pression de radiation. Nous présentons dans ce chapitre les différents aspects de cette phase d'amélioration de notre expérience. Nous aborderons tout d'abord la mise en place d'un premier cryostat, et ses conséquences sur notre dispositif, en particulier la nécessité d'améliorer d'améliorer l'asservissement en fréquence du laser. Nous présenterons ensuite le nouveau résonateur plan-convexe, et nous terminerons par les ajustements expérimentaux que l'utilisation de ce nouveau miroir a nécessité.

2.1 Première tentative de cryogénie

La première étape de l'amélioration de notre dispositif à consisté en la mise en place d'un cryostat, avec la perspective d'un fonctionnement cryogénique de notre expérience. La problématique du choix du cryostat est importante : on désire tout d'abord avoir des accès optiques, qui peuvent affecter la thermalisation de l'échantillon qui se trouve à l'intérieur, et compliquent donc la conception. Notre expérience étant très sensible aux vibrations, il est en outre indispensable que le cryostat ne propage ni n'amplifie les perturbations mécaniques de l'environnement jusqu'à l'échantillon, et il ne faut évidemment pas qu'il en crée lui-même (via l'ébullition du fluide caloporteur qui permet la thermalisation de l'échantillon par exemple). L'équipe avait ainsi fait construire il y a quelques années un cryostat spécialement prévu pour satisfaire à ces contraintes, en collaboration avec la firme TBT. Nous commencerons par présenter le concept de ce cryostat ainsi que son fonctionnement à basse température. Nous décrirons ensuite les premiers

résultats obtenus à basse température, ce qui nous permettra de conclure quant aux modifications qu'ils imposent sur notre dispositif.

2.1.1 Présentation du cryostat TBT

Description générale du cryostat
Le cryostat se compose essentiellement de deux zones comme le montre la figure 2.1, une partie supérieure dédiée à la réfrigération, et une partie inférieure prévue pour accueillir un échantillon accessible optiquement. La partie supérieure est constituée de deux réservoirs indépendants, concentriques, et de forme cylindrique annulaire. Le récipient interne est un réservoir d'hélium 4, accessible de l'extérieur par l'intermédiaire de trois tubes qui débouchent sur la face supérieure du cryostat. Le premier tube, muni d'une double entrée, est dédié d'une part au remplissage, et est connecté d'autre part au centre de récupération d'hélium du laboratoire. Le second tube est un accès qui permet de contrôler le niveau d'hélium dans le réservoir. Le dernier de ces trois tubes permet de manoeuvrer une tige qui se termine par une vis pointeau afin de régler le débit dans un capillaire de faible diamètre, qui est enroulé autour de la zone froide puis débouche dans le canal central. En connectant ce canal à une pompe et en dévissant la vis pointeau, on peut ainsi faire circuler plus ou moins d'hélium dans le capillaire et régler la température de la zone froide, constituée d'un logement cylindrique autour duquel est également enroulée une résistance chauffante qui permet la mise en place d'une régulation de température.

Le réservoir externe est une garde d'azote, qui communique également avec l'extérieur par l'intermédiaire de trois tubes, le premier servant à le remplir, le second faisant office d'évacuation en cas de débordement, et le troisième permettant l'insertion d'une jauge de niveau. Les deux réservoirs sont séparés par une plaque en cuivre sur toute la hauteur du cryostat. Cette plaque, dont la température est proche de 77 K, est un écran thermique qui permet d'améliorer l'isolation de la zone froide.
Une enceinte porte-cavité est prévue pour accueillir la cavité FPM. Elle consiste en une chambre étanche, connectée à l'extérieur par l'intermédiaire d'une vanne d'accès située sur la paroi latérale externe du cryostat. On peut ainsi établir un vide poussé, ou injecter de l'hélium afin d'améliorer le refroidissement des miroirs. Ce porte-cavité est fixé de manière rigide à la fenêtre d'entrée du cryostat grâce à un tube en epoxy. Ainsi, malgré les déformations que subissent les différents éléments internes du cryostat durant la descente en température, le porte-cavité reste dans l'axe des fenêtres en permanence. L'enceinte est placée à l'intérieur du logement cylindrique de la zone froide, mais sans être mécaniquement solidaire de celui-ci. Le contact thermique entre la zone froide et le porte-cavité est assuré par l'intermédiaire de tresses en cuivre souples, qui permettent de l'isoler des vibrations générées par la circulation d'hélium dans le capillaire. Enfin, une vanne latérale permet de faire le vide dans l'ensemble du cryostat.
On dénombre six fenêtres d'accès sur l'axe optique du faisceau : deux diamétralement opposées sur l'enceinte extérieure du cryostat, deux situées sur l'écran thermique, et deux de part et d'autre de l'enceinte porte-cavité. Un accès a par ailleurs été pratiqué dans la zone froide, mais il ne nécessite pas de fenêtre supplémentaire. Tous ces passages ont des diamètres inférieurs au centimètre, afin de minimiser les pertes thermiques, l'accès optique à la cavité étant de ce fait relativement délicat, compte tenu du large diamètre du cryostat (environ 30 cm), qui restreint fortement la latitude de réglage.

Enfin, le cryostat est muni de deux sondes de température, la première se trouvant au niveau de la zone froide et la seconde étant plaquée contre la cavité à l'intérieur de l'enceinte étanche.

Procédure de descente en température

Le volume et la complexité de notre appareil rend la procédure de refroidissement relativement longue et délicate. Nous avons donc mis au point un protocole spécifique de descente en température, destiné à minimiser les risques d'échec du processus, ainsi qu'à optimiser la durée du refroidissement et la quantité d'hélium utilisée. La première étape consiste à réaliser un vide poussé à l'aide d'une pompe turbo dans l'ensemble du cryostat, chose indispensable si l'on veut éviter tout risque de condensation. Cette étape nécessite une douzaine d'heures, et le vide obtenu est de l'ordre de quelques millièmes de millibars. On effectue ensuite une purge du capillaire avec de l'hélium gazeux, afin d'éviter qu'il ne se bouche suite à la condensation des impuretés qu'il pourrait contenir. L'opération terminée, on referme la vis pointeau et on remplit la garde d'azote. On relie ensuite le bidon d'azote au canal central par l'intermédiaire d'un tube plongeant jusqu'à son fond, et on pompe sur sa sortie afin de faire circuler l'azote à l'intérieur. La zone froide étant directement en contact avec le canal central, cette étape permet d'accélérer significativement la descente en température, et représente également une économie appréciable d'hélium. Après moins d'une heure, la température atteinte est de l'ordre de la centaine de Kelvin. On interrompt alors la circulation d'azote dans le canal central, que l'on pompe afin d'obtenir un bon vide. On commence alors à procéder au remplissage du réservoir d'hélium, puis, tout en continuant de pomper le canal central, on ouvre la vis pointeau, afin de démarrer la circulation d'hélium dans le capillaire. L'équilibre thermique atteint au terme de cette étape se situe autour de $4\ K$. L'ultime étape du refroidissement consiste à refermer presque totalement la vis pointeau, de manière à réaliser une détente de Joules-Kelvin, ce qui permet d'atteindre une température minimale assez bien reproductible de $3,47\ K$ au niveau de la zone froide, et de $4,5\,\mathrm{K}$ au niveau du porte-cavité.

Régulation de température

Nous avons déjà évoqué dans le chapitre précédent la nécessité de travailler dans un environnement bien régulé en température, de manière à éliminer les dérives thermiques qui se traduisent par des variations de longueur de la cavité, lesquelles perturbent le fonctionnement de l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité. Nous avons donc mis en place un asservissement (figure 2.3) conçu pour fonctionner sur une large gamme de températures : nous avions en effet prévu de caractériser le comportement mécanique du miroir mobile en fonction de la température, et notamment la façon dont ce paramètre affecte le fond thermique. Du fait de l'importante masse thermique de l'ensemble à stabiliser, les constantes de temps de la boucle de contre-réaction sont très grandes (de l'ordre de 25 minutes), ce qui est très difficilement compatible avec un asservissement de type analogique. C'est pourquoi nous avons eu recours à un contrôle numérique, dont l'organigramme est représenté sur la figure 2.4. Le principe de l'asservissement consiste à comparer la température de la cavité, mesurée à l'aide du capteur qui lui est accolé, à une température de consigne, via un amplificateur différentiel, qui fournit le signal d'erreur. Ce signal est envoyé vers un ordinateur grâce à une carte de conversion analogique-digital. Il est ensuite traité grâce à un programme écrit

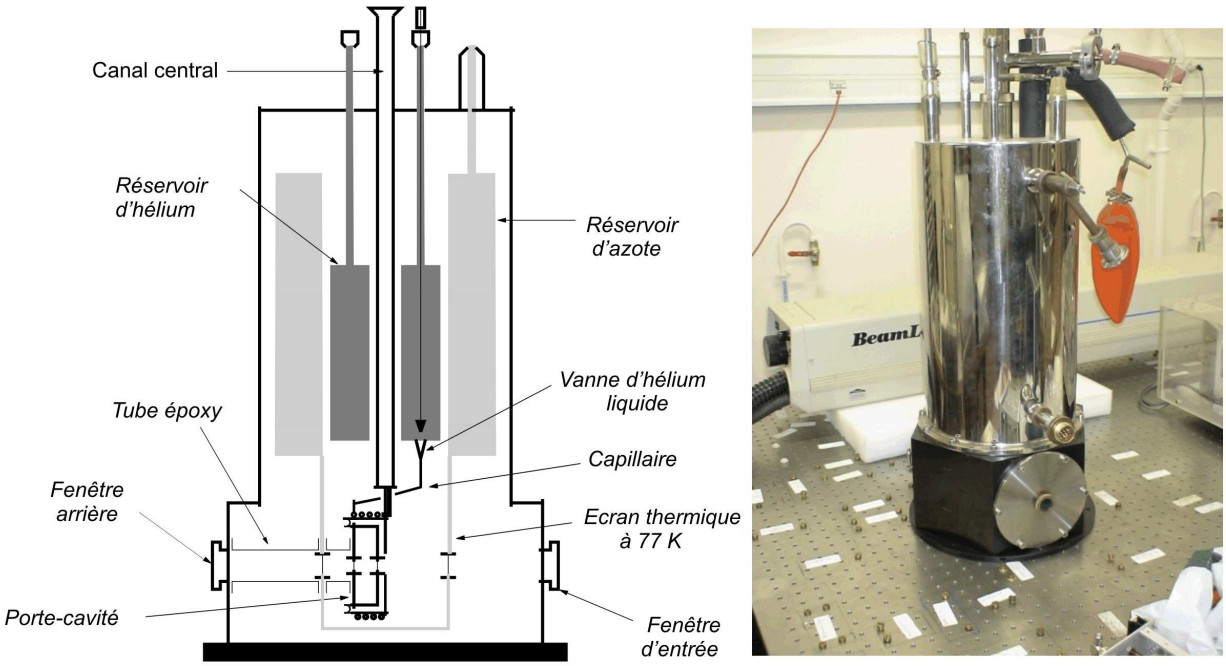

FIGURE 2.1: Schéma et photographie du cryostat.

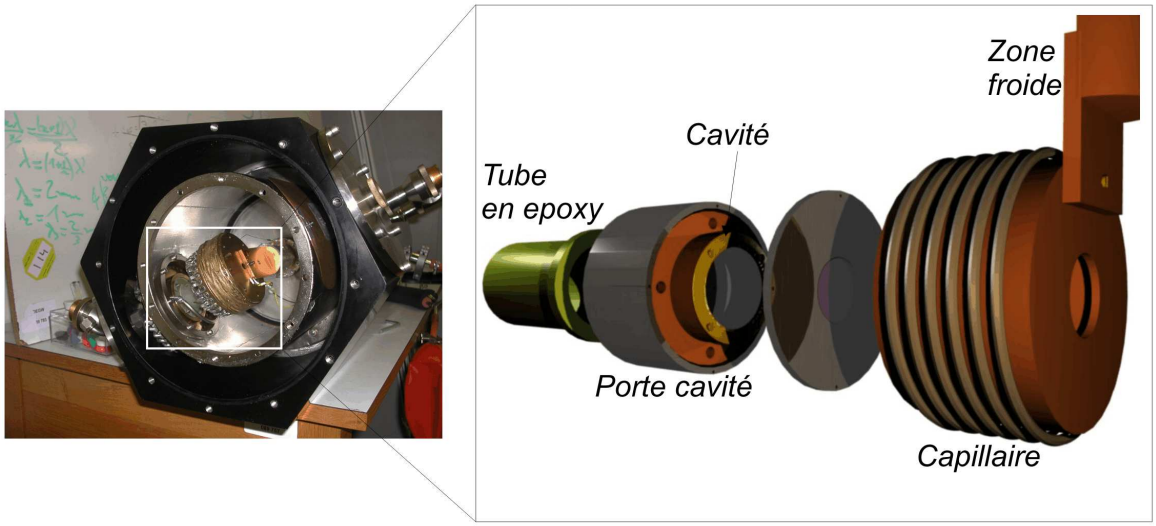

FIGURE 2.2: A gauche : photographie de l'intérieur du cryostat. A droite : schéma de l'intérieur du cryostat.

dans un langage de type Basic, qui pilote un étage de puissance relié à la résistance chauffante du cryostat, toujours via la carte de conversion.

La partie analogique du montage (amplificateur différentiel, étage de puissance) est issue d'un ancien asservissement analogique qui n'avait pas donné satisfaction, mais dont nous avons récupéré les éléments de base pour les interfacer avec l'ordinateur. La boucle de contre-réaction numérique fonctionne selon le modèle d'un PID (Proportionnel, Intégrateur, Différentiel) comme le montre la figure 2.4. Le signal correcteur issu du contrôle PID est par principe la combinaison linéaire

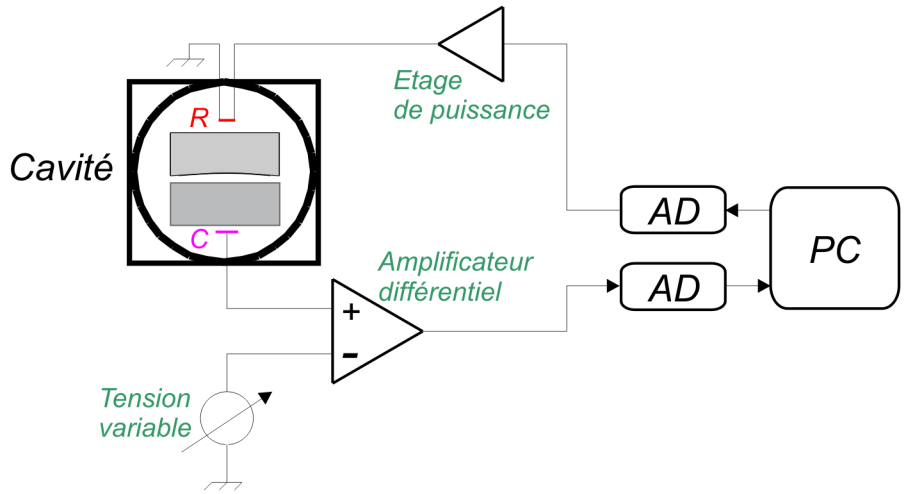

FIGURE 2.3: Principe de l'asservissement de température du cryostat. La température de la cavité, mesurée grâce au capteur C est comparée à une référence à l'aide d'un amplificateur différentiel. Le signal d'erreur est ensuite envoyé vers un ordinateur via un convertisseur analogique-digital (AD), afin de calculer la correction à appliquer. Le signal résultant, après conversion analogique, est envoyé vers un étage de puissance qui pilote la résistance chauffante R du cryostat.

du signal d'erreur, de sa dérivée, et de son intégrale, chacun des coefficients de la combinaison linéaire définissant les gains de l'asservissement. Le gain proportionnel permet de compenser les fluctuations évoluant sur des temps comparables aux constantes intrinsèques du système libre. Le gain différentiel sert à corriger les perturbations se produisant à plus hautes fréquences. Enfin, le gain intégrateur est utilisé pour contrôler les dérives lentes.
Le programme fonctionne en boucle, avec un temps de cycle d'une seconde. A chaque cycle, il récupère le signal fourni par l'étage différentiel, calcule les parties intégrateur et différentiel à partir des valeurs précédentes, puis détermine le signal PID avec des gains ajustables. Il active enfin la résistance chauffante pendant un temps proportionnel à ce signal. L'optimisation des différents gains de l'asservissement diffère selon la consigne que l'on impose, notamment en raison du changement des propriétés mécaniques (capacités calorifiques, coefficients de dilatation, etc...) et de la réponse du capteur thermique en fonction de la température. Nous présentons maintenant les résultats que nous avons obtenus à température ambiante, à $T = 80\ K$, et enfin à $T = 4\,\mathrm{K}$.

Asservissement à température ambiante

Nous avons tout d'abord cherché à optimiser le fonctionnement de l'asservissement à température ambiante. La température du laboratoire fluctue de plusieurs dixièmes de degrés à l'échelle de l'heure comme le montre la figure 2.5. Compte tenu des coefficients de dilatation de la silice et du cuivre (respectivement $5 \times 10^{-6} K^{-1}$ et $17 \times 10^{-6} K^{-1}$), cela correspond à une variation de distance entre les miroirs de plusieurs nanomètres pour une cavité d'un millimètre de long, c'est-à-dire de plusieurs intervalles spectraux libres. La figure 2.6 montre la phase d'accrochage de l'asservissement après que le système ait été chauffé afin de porter sa température

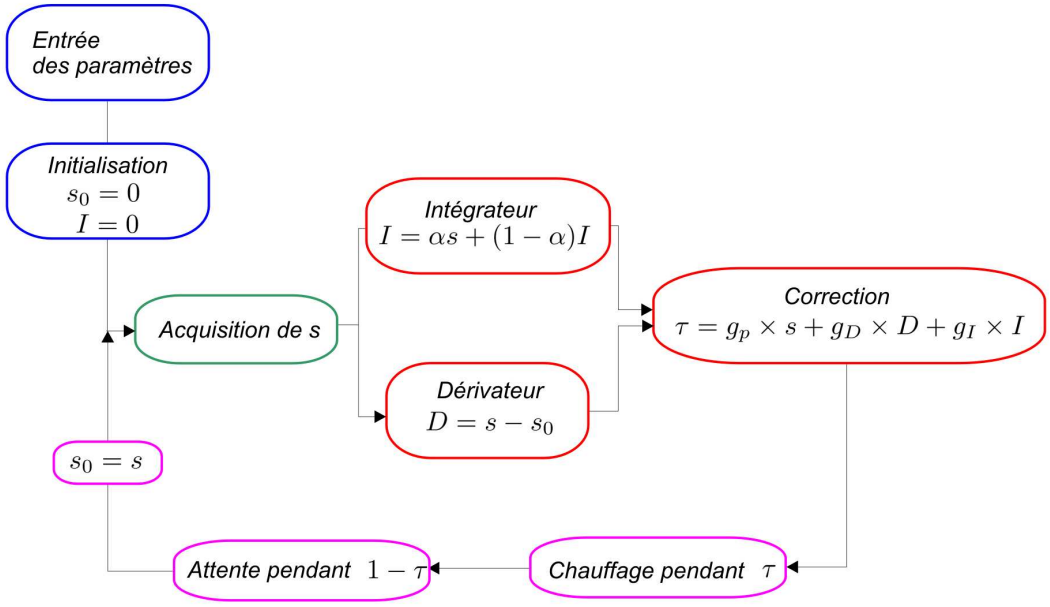

FIGURE 2.4: Organigramme du contrôle numérique. Chaque cycle débute par l'acquisition du signal d'erreur. Le programme calcule ensuite la correction PID, qui consiste en un échelon de tension de durée τ, qui active la résistance pendant cette même durée.

au voisinage du point de consigne, ainsi que son fonctionnement sur une plus longue durée. Pour une température de consigne T_c proche de la température T_{ext} de l'environnement ($T_c - T_{ext} \simeq 3\ K$), on voit que les fluctuations thermiques résiduelles du système sont ramenées en quelques minutes de quelques centièmes de K au mK, ce qui témoigne d'une rapidité et d'une précision satisfaisantes de notre dispositif. Le test de longue durée dont le résultat est présenté sur les courbes du bas de la figure 2.6 montre que les fluctuations de la température en régime asservi augmentent après environ 4 heures de fonctionnement, ce qui correspond au passage du jour à la nuit, durant laquelle la température extérieure diminue de manière significative (de $10^{\circ}C$ à $6^{\circ}C$ en l'occurrence). On remarque d'ailleurs que la puissance de chauffage, représentée sur la courbe de droite, augmente nettement. On peut attribuer l'augmentation de l'incertitude sur la température à un manque de gain proportionnel, le contrôle ayant été optimisé alors que la température extérieure était plus proche de la consigne. Ces fluctuations restent néanmoins de l'ordre de quelques mK, et de plus sans dérive appréciable, ce qui montre que la partie intégrateur de notre asservissement est efficace.

Asservissement à 80 K

Nous présentons maintenant les essais réalisés à $T = 80\ K$. Pour se placer à cette température, nous avons poursuivi l'étape de pré-refroidissement à l'azote jusqu'à sa température de liquéfaction, puis nous avons continué d'alimenter régulièrement le canal central en azote liquide pendant toute la durée du test, afin qu'il reste rempli en permanence. La température moyenne atteinte au terme de cette opération, légèrement inférieure à 80 K, diffère des 77 K spécifiés dans les tables de référence, cet écart étant probablement dû aux impuretés contenues dans l'azote que nous utilisons. Le test que nous présentons sur la figure 2.7 a été réalisé pour une

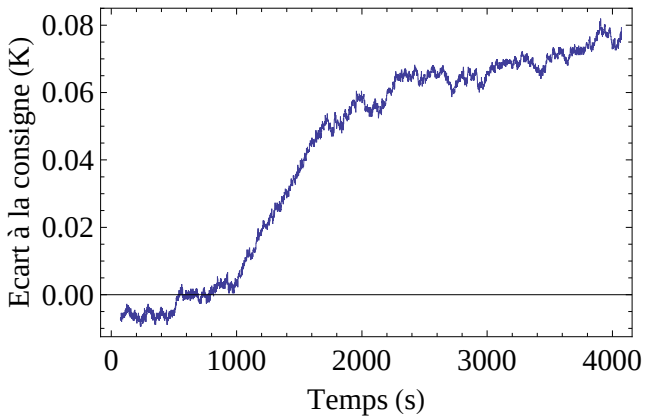

FIGURE 2.5: Dérive typique de la température du cryostat en l'absence de régulation thermique.

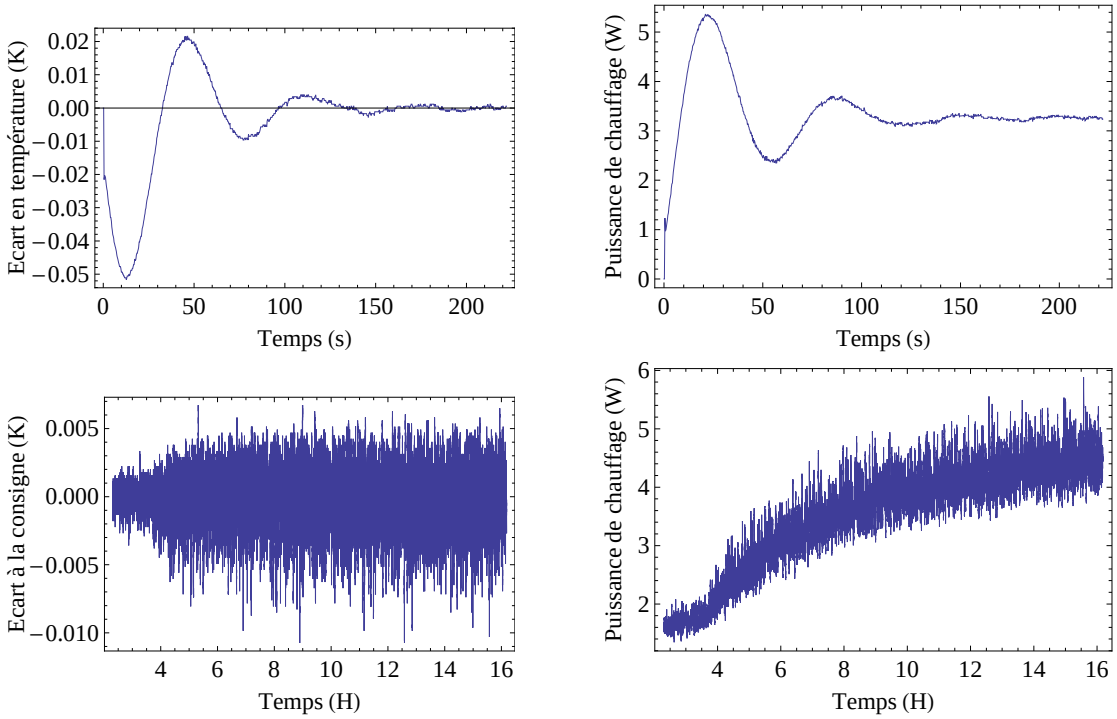

FIGURE 2.6: Comportement de l'asservissement à température ambiante. En haut : phase d'accrochage de l'asservissement. En bas : comportement de l'asservissement sur une longue période. Les courbes de gauche représentent le signal d'erreur, celles de droite la puissance de chauffage déduite des temps de chauffage τ sur chaque cycle du programme.

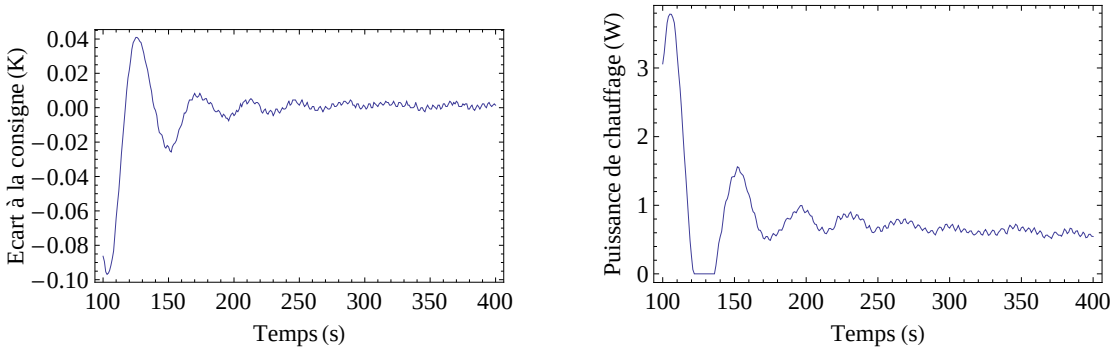

FIGURE 2.7: Comportement de l'asservissement à $T = 80,6\ K$. La courbe de gauche montre le signal d'erreur, celle de droite la puissance de chauffage résultant de l'asservissement.

température de consigne fixée à $T = 80,6\ K$, après une nouvelle optimisation des différents gains de la contre-réaction. Ces courbes montrent que l'asservissement se comporte bien, avec des fluctuations résiduelles de l'ordre de 2 mK atteintes après quelques minutes de fonctionnement.

Asservissement à 4 K

Nous terminons par la présentation des tests de notre asservissement au voisinage de $T = 4\ K$. Remarquons tout d'abord que la problématique des constantes de temps ne se pose plus autour de cette température, les processus de thermalisation étant beaucoup plus rapides : on note en particulier que la descente des derniers 40 K ne prend que deux ou trois minutes, alors que le reste du refroidissement à l'hélium nécessite plus d'une heure, ce qui correspond à une diminution du temps de thermalisation de près de deux ordres de grandeur. De plus, nous avons pu constater que la température est extrêmement stable une fois la zone froide thermalisée aux alentours de la température minimale de $3,47\ K$. Aussi, les tests que nous avons réalisés et que nous présentons sur la figure 2.8 pour une consigne $T_c = 5,25\ K$ sont uniquement à caractère indicatif. On constate sur ces courbes qu'un écart de l'ordre du Kelvin est compensé en quelques minutes pour laisser la place à des fluctuations de 5 mK d'amplitude en moyenne, ce qui démontre que notre asservissement est également bien adapté à ce type de conditions.

2.1.2 Fonctionnement cryogénique de l'expérience

La réalisation d'une mesure ultrasensible de déplacements en conditions cryogéniques impose des contraintes sévères sur le cryostat et sur la stabilité de l'expérience. Nous présentons dans cette section les tentatives que nous avons menées avec le cryostat TBT, tentatives qui nous ont finalement conduit à abandonner ce cryostat au profit d'un autre modèle.

L'une des premières contraintes à laquelle nous avons eu à faire face concerne l'alignement de la cavité, du fait de l'accès optique à la cavité qui se limite aux dimensions des ouvertures pratiquées dans le porte cavité comme on peut s'en rendre compte sur les figures 2.1 et 2.2. Comme les différents éléments du cryostat subissent des déformations lors de la descente en température, qui se traduisent

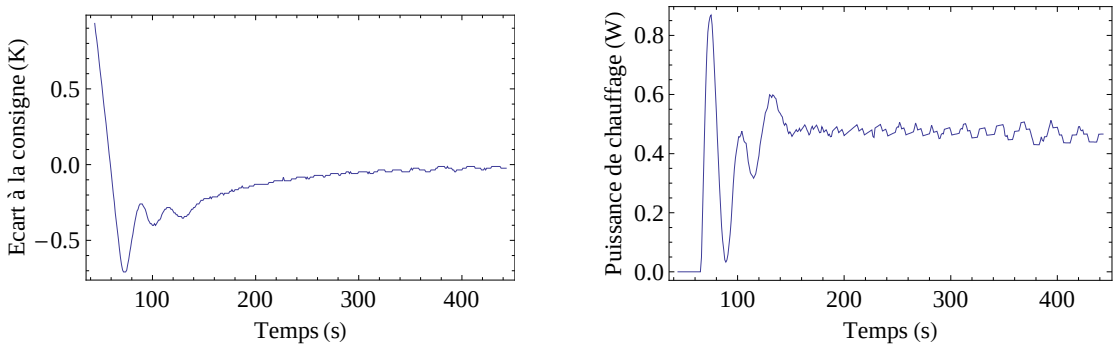

FIGURE 2.8: Comportement de l'asservissement à $T = 5,25\ K$. Les marches d'escalier qui apparaissent sur le signal d'erreur (courbe de droite) correspondent à la discrétisation de la carte analogique-digitale.

par des décalages relatifs des différents accès optiques, le cryostat a été conçu pour que ces ouvertures soient alignées à basse température. Cela est bien le cas en pratique en dessous d'une température voisine de 90 K, mais cela rend le pré-réglage de l'alignement de la cavité très difficile à réaliser à température ambiante.
D'autre part, les premiers tests cryogéniques que nous avons menés avec la cavité à miroirs cylindriques présentée dans le chapitre précédent ont révélé un certain nombre de défauts du système de montage avec des bagues serrant les miroirs : au cours de la descente en température, les inhomogénéités de serrae ont conduit les miroirs à perdre leur parallélisme, à vibrer de manière importante, ou même à se briser. Il nous a été ainsi extrêmement difficile de visualiser les modes optiques de cette cavité à basse température.

Nouveau système de maintien des miroirs

Nous sommes tout de même parvenus à observer une résonance fondamentale de la cavité, mais les vibrations, que nous attribuons essentiellement à la vaporisation de l'hélium, étaient transmises aux miroirs de telle sorte qu'il ne nous a pas été possible d'asservir la cavité convenablement. Nous avons donc remplacé le système de maintien à bagues par un nouveau montage, conçu pour minimiser les contraintes exercées sur les miroirs, et dont le schéma est présenté sur la figure 2.9. Son principe consiste à empiler les miroirs dans un tube cylindrique en cuivre. La longueur de la cavité est fixée à l'aide d'une entretoise en chrysocale placée entre les deux miroirs, et l'ensemble est refermé à l'aide d'un anneau usiné dans ce même matériau. La chrysocale est un alliage cuivreux, possédant une certaine élasticité, qui peut être usinée sous forme de plaque d'épaisseur constante. L'utilisation de ce matériau convient donc parfaitement à la fabrication de l'entretoise, dont nous fixons l'épaisseur entre 100 μm et 400 μm, et qui permet d'assurer un parallélisme de la cavité satisfaisant. Par ailleurs, les contraintes induites par ce système de fixation sur les miroirs sont minimales et réparties de manière homogène sur la circonférence des miroirs qui est seule en contact avec le support. Enfin, l'élasticité de l'anneau extérieur permet de réduire les contraintes supplémentaires intervenant au cours de la descente en température. Ajoutons qu'un trou a été percé dans la partie latérale du tube et qu'une fente est pratiquée dans l'espaceur pour éviter que les particules d'air restent piégées entre les deux miroirs lorsque l'on pompe le porte-cavité.

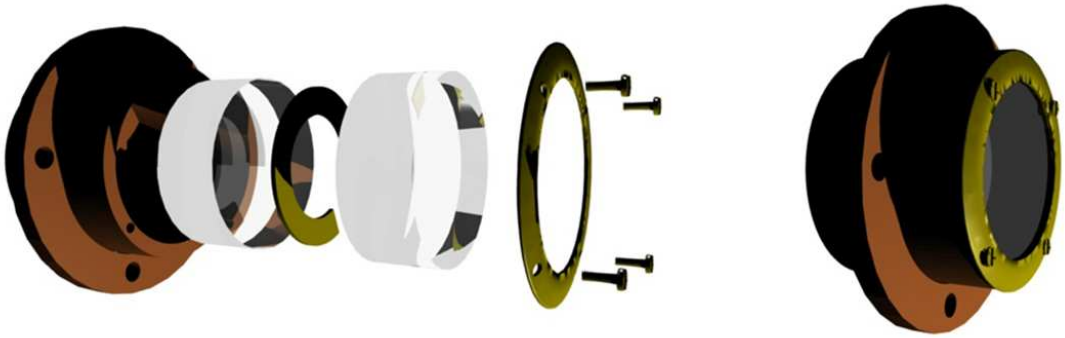

FIGURE 2.9: Schéma du nouveau système de montage de la cavité à miroirs cylindriques.

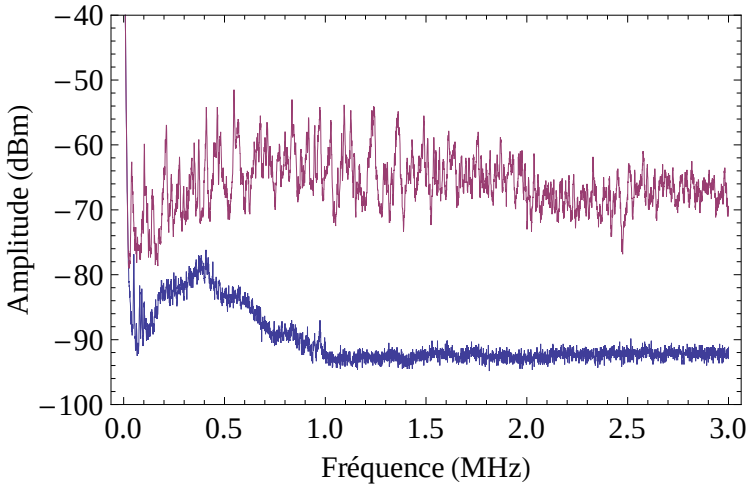

FIGURE 2.10: Bruit de position (courbe du haut) et limite de sensibilité due au bruit de phase (courbe du bas). Les spectres sont les données brutes issues de l'analyseur de spectre.

Bruit thermique à basse température

Nous avons tout d'abord testé ce nouveau montage aux alentours de $T = 80\ K$, et les premiers résultats se sont montrés très encourageants : nous avons pu ainsi procéder à l'alignement de la cavité dans de bonnes conditions, les vibrations subies par les miroirs étant nettement réduites comme nous nous y attendions. Nous avons également pu asservir la cavité et mesurer les fluctuations de position du miroir, dont nous présentons un spectre sur la figure 2.10. Cette acquisition a été réalisée avec un faisceau incident de puissance $P^{in} = 155\ \mu W$, limitée essentiellement par des effets de bistabilité thermique devenant importants à forte puissance. Si le niveau de bruit du fond thermique présente une amplitude en accord avec ce que l'on peut attendre (une trentaine de dB au dessus de la limite de sensibilité due au bruit de phase), il est en revanche difficile d'interpréter la dynamique des résonances qui s'en détachent : en effet, si l'on compare ce spectre avec celui que nous avons présenté sur la figure 1.27, on constate une disparition de la plupart des résonances acoustiques, les quelques pics restants ayant une amplitude assez faible, alors que la température a été réduite d'à peine un facteur 4. Comme le montre la figure 2.11, le même effet est observé sur le spectre des

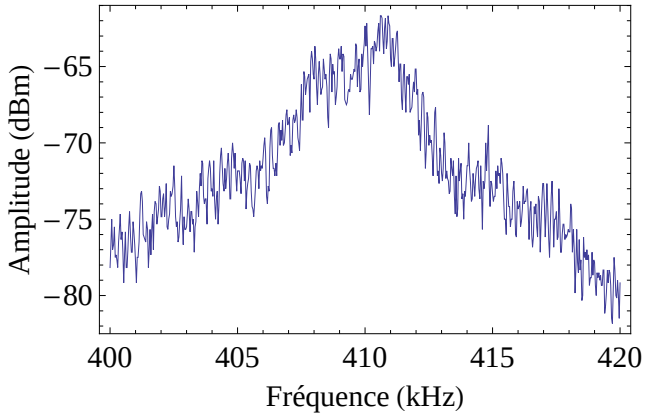

FIGURE 2.11: Bruit thermique au voisinage d'une résonances du miroir cylindrique à $T = 80.6$ K. Le spectre correspond aux données brutes issues de l'analyseur de spectre, non calibrées. A température ambiante, le mode se situant au voisinage de 410 kHz admet un facteur de qualité de l'ordre de 4000 (c'est-à-dire une largeur de 100 Hz) pour une masse de 13 g.

déplacements mesurés au voisinage de l'une des résonances bien caractérisées à température ambiante. On constate que le spectre, très large comparativement à celui observé à température ambiante, ne présente pas l'allure Lorentzienne attendue. Cet élargissement n'est pas compatible avec les modifications du facteur de qualité mécanique attendues à basse température, et apparaît lié à des problèmes de vibration à l'intérieur du cryostat. Signalons que nous avons mené le même type d'expériences à la température de 4 K, pour laquelle nous avons pu aligner et asservir la cavité avec succès, les résultats obtenus s'étant révélés très similaires à ceux que nous venons d'exposer.

Problème des vibrations

Ces différentes expériences nous ont conduit à formuler l'hypothèse que l'observation des déplacements du miroir était contaminée par des vibrations résiduelles que le cryostat communique à la cavité, et qui perturbent le fonctionnement de l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance optique. Pour le vérifier, nous avons procédé à des mesures de déplacements du miroir mobile à température ambiante, la cavité se trouvant à l'intérieur du cryostat. L'alignement de la cavité dans ces conditions est difficile à obtenir, les fenêtres d'accès optique n'étant pas alignées à température ambiante.

Ces tests se sont déroulés en deux étapes : nous avons tout d'abord déconnecté le porte-cavité du doigt froid afin de déterminer si des vibrations se propageaient à travers le tube en époxy qui relie la cavité à la fenêtre d'entrée du cryostat. Le résultat s'est révélé négatif, les spectres de bruit obtenus présentant des profils identiques à ceux que nous avions observé avec des montages mécaniques stables, comme en témoigne celui que nous présentons sur la figure 2.12 (courbe de gauche). Nous avons ensuite reconnecté les tresses reliant le porte-cavité au doigt froid, pour déterminer si des vibrations pouvant se propager dans le canal central étaient transmises à la cavité. Ce système de connection par tresses a spécialement été conçu pour amortir les vibrations provenant du doigt froid, mais nous avons pu constater qu'il ne remplit pas du tout son rôle : les spectres de bruit présentaient en effet des déformations importantes et bandes latérales situées à 100 Hz de part et

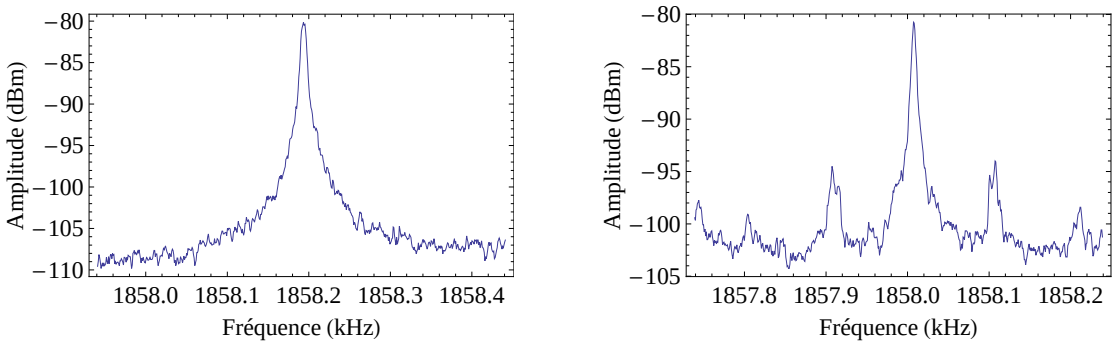

FIGURE 2.12: Bruit thermique au voisinage du mode fondamental d'un miroir de type plan-convexe de 12 mm de diamètre et de $1,5$ mm d'épaisseur au centre. Le spectre de gauche a été acquis alors que la cavité était déconnectée du doigt froid, la courbe de droite a été obtenue après reconnection des tresses.

d'autre des résonances (cf. figure 2.12, courbe de droite), témoignant d'une vibration parasite de la cavité. Ces expériences ont été réalisés à température ambiante, avec un environnement relativement calme excepté le bruit à 50 ou 100 Hz visible sur ce spectre. Il est clair qu'à bass température, la circulation d'hélium induit des vibrations bien plus importantes du cryostat, rendant la cavité beaucoup plus instable et élargissant les spectres observés.

Conclusions de cette première tentative
Nous avons retenu de cet ensemble d'expériences deux conclusions importantes. La première est évidemment que ce cryostat ne permet pas de mener convenablement des expériences à basse température, une stabilité mécanique suffisante de l'échantillon n'étant assurée que s'il n'est pas solidaire du doigt froid, qui permet précisément d'assurer la thermalisation du porte-cavité aux alentours de 4 K.
La seconde conclusion concerne l'asservissement de fréquence du laser sur la cavité de mesure : celui-ci s'est montré incapable de suivre les vibrations basses fréquences causées par le bruit acoustique ambiant ou la circulation d'hélium. Afin de pouvoir fonctionner en régime cryogénique de manière permanente, il nous est apparu nécessaire d'améliorer l'asservissement du laser sur la cavité.

2.2 L'asservissement de la fréquence du laser

Comme nous l'avons brièvement évoqué dans la section 1.5, l'asservissement de la fréquence du laser était initialement basé sur la technique de détection synchrone. Cette méthode présente deux inconvénients majeurs : d'abord, son domaine d'efficacité est limité à une plage de fréquence de l'ordre de la bande passante de la cavité, c'est-à-dire que le signal d'erreur s'annule lorsque l'écart du laser par rapport à la résonance de la cavité devient supérieur à sa bande passante, rendant inopérant l'asservissement. Le second problème est lié spécifiquement à notre système : en effet, notre cavité de mesure est précédée par la cavité de filtrage, et nous allons voir que la génération du signal d'erreur de la détection synchrone

dépend des écarts à résonance de ces deux cavités, ce qui est évidemment inacceptable.

Nous présenterons donc tout d'abord un calcul simple montrant comment écarts à résonance de ces deux cavités se contaminent mutuellement, ce qui nous permettra de motiver notre choix de mettre en place un contrôle de la fréquence du laser basé sur la technique de Pound-Drever-Hall. Nous expliquerons ensuite le principe de cette méthode, ainsi que la manière dont nous l'avons implémentée expérimentalement sur notre dispositif. Nous terminerons cette section en présentant le nouveau protocole de calibration des déplacements du miroir que cette méthode permet de mettre en place.

2.2.1 Problème posé par l'utilisation d'une détection synchrone

Comme pour tout asservissement, le principe de fonctionnement de la détection synchrone consiste à produire un signal d'erreur qui s'annule lorsque le laser est à résonance avec la cavité, en changeant de signe de part et d'autre de la résonance. Ce signal est obtenu par dérivation du pic d'Airy, en utilisant une modulation puis démodulation à haute fréquence. En pratique, on crée une modulation du désaccord entre la cavité et la fréquence du laser, qui est convertie hors résonance en modulation d'intensité du faisceau réfléchi, dont l'amplitude est proportionnelle au désaccord et dont la phase varie de π d'un bord à l'autre du pic d'Airy. Plus précisément, en notant $\delta\nu(t)$ le désaccord de la fréquence du laser par rapport à la résonance de la cavité que l'on cherche à contrôler, on ajoute une modulation d'amplitude $\delta\nu_{\text{ref}}$ évoluant à la fréquence Ω_{ref}, grande devant les fréquences d'évolution du désaccord $\delta\nu$. Comme le montre la figure 2.13, on obtient une modulation d'intensité du faisceau réfléchi à la fréquence Ω_{ref}, dont l'amplitude reproduit le désaccord $\delta\nu(t)$: selon que l'on se trouve en-deçà ou au-delà de la fréquence du mode fondamental de la cavité, cette modulation d'intensité se retrouve respectivement en phase ou en opposition de phase par rapport à la modulation de référence, et son enveloppe varie proportionnellement au désaccord $\delta\nu(t)$ si celui-ci reste petit devant la bande passante de la cavité. En démodulant l'intensité transmise à la fréquence Ω_{ref}, on obtient un signal basse fréquence proportionnel au désaccord $\delta\nu(t)$, qui permet bien de contre-réagir sur la fréquence du laser afin de la maintenir à résonance avec la cavité.
Un tel asservissement n'agit qu'à des fréquences inférieures à Ω_{ref}, qui peut être également vue comme la fréquence d'échantillonnage de la détection, définissant une coupure au-delà de laquelle l'asservissement devient inefficace. Nous avions choisi de fixer cette coupure à 100 kHz, afin de disposer d'un asservissement rapide, capable de compenser les vibrations des miroirs et le bruit classique du laser qui interviennent de manière significative jusqu'à cette fréquence. La cavité étant rigide, la modulation $\delta\nu_{\text{ref}}$ de l'écart à résonance est créée en modulant la fréquence du laser grâce à son modulateur électro-optique interne, dont la bande passante dépasse la dizaine de megahertz. Ceci ne poserait aucun problème, si la cavité de filtrage FPF ne s'interposait pas entre le laser et la cavité FPM : les fluctuations d'intensité δI à la fréquence Ω_{ref} résultant des écarts en fréquence $\delta\nu_{\text{FPF}}$ de la cavité FPF autour de sa résonance vont en effet contaminer celles causées par le désaccord entre le laser et la cavité FPM, c'est-à-dire le signal d'erreur recherché

δI_{FPM} (voir figure 2.14) :

$$\delta I_{\mathrm{FPF}} = \alpha(\delta\nu - \delta\nu_{\mathrm{FPF}}), \tag{2.1}$$
$$\delta I_{\mathrm{FPM}} = \beta(\delta\nu - b_{\mathrm{FPM}}) + \delta I_{\mathrm{FPF}}. \tag{2.2}$$

où b_{FPM} désigne le bruit auquel la cavité de mesure est soumise, et α et β sont des coefficients de transfert dont le rapport dépend essentiellement des rapports entre les bandes passantes des deux cavités : si $\alpha \gg \beta$, c'est-à-dire si la bande passante du FPM est grande devant celle du FPF, l'intensité transmise par la cavité FPM sera beaucoup moins sensible à l'écart à résonance sur la cavité FPM qu'à celui sur la cavité FPF, dont les fluctuations constitueront alors la contribution essentielle au signal d'erreur. Si à l'inverse $\alpha \ll \beta$, la contamination des fluctuations du FPF sur le FPM sera négligeable, et le signal d'erreur rendra compte uniquement des fluctuations du FPM comme on le désire. Par ailleurs, le laser est soumis à une contre-réaction globale :

$$\delta\nu = b_{\mathrm{Laser}} - g\delta I_{\mathrm{FPM}}, \tag{2.3}$$

alors que la cavité FPF est asservie grâce à un asservissement local qui contrôle sa longueur (voir figure 2.14)

$$\delta\nu_{\mathrm{FPF}} = b_{\mathrm{FPF}} + h(\delta\nu - \delta\nu_{\mathrm{FPF}}). \tag{2.4}$$

où g et h représentent les gains des deux asservissements, et où b_{Laser} et b_{FPF} sont les bruits auxquels le laser et la cavité FPF sont respectivement soumis. Les quatre équations (2.1-2.4) forment un système linéaire à quatre inconnues ($\delta\nu$,

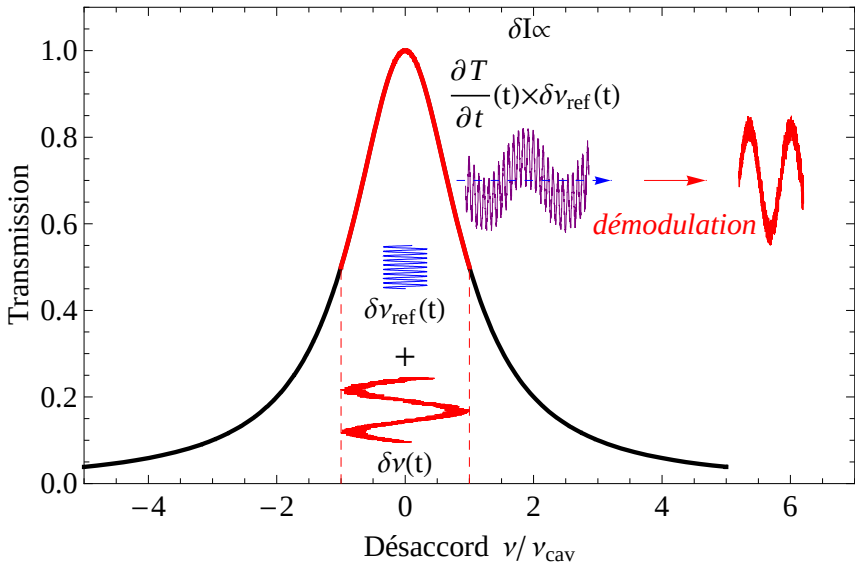

FIGURE 2.13: Principe de la détection synchrone. Une modulation de référence $\delta\nu_{\mathrm{ref}}$ est appliquée à la fréquence du laser, et vient s'ajouter aux fluctuations $\delta\nu(t)$ du désaccord par rapport à la résonance de la cavité. Il en résulte une modulation de l'intensité du faisceau transmis ou réfléchi à la fréquence Ω_{ref} de la modulation $\delta\nu_{\mathrm{ref}}$, dont l'enveloppe varie proportionnellement à l'amplitude du désaccord. En démodulant cette modulation d'intensité, on dispose bien d'un signal d'erreur proportionnel aux fluctuations $\delta\nu(t)$ que l'on cherche à corriger.

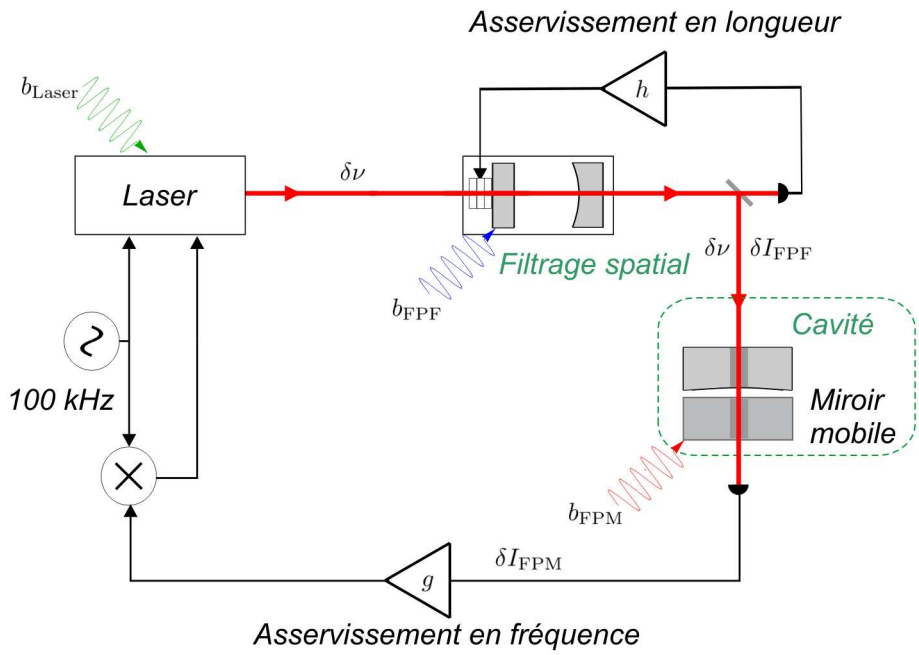

FIGURE 2.14: Les différents bruits en jeu dans nos asservissements. Le fréquence du laser présente un bruit b_{Laser}, conduisant à des fluctuations totales $\delta\nu$ qui tiennent compte de l'effet de l'asservissement. Ces fluctuations induisent un écart à résonance $\delta\nu_{\text{FPF}}$ de la cavité FPF, en tenant compte également du bruit b_{FPF} de celle-ci, et se traduisent à sa sortie par un bruit d'intensité δI_{FPF}. Ces variations d'intensité traversent la cavité FPM, et s'ajoutent aux fluctuations d'intensité causées la cavité FPM, soumise à un bruit b_{FPM}.

$\delta\nu_{\text{FPF}}$, δI_{FPF} et δI_{FPM}), qu'il est facile de résoudre. On peut ainsi exprimer les fluctuations du FPM autour de la résonance :

$$\delta\nu - b_{\text{FPM}} = \frac{1+h}{(1+\beta g)(1+h)+\alpha g}\left[b_{\text{Laser}} + \frac{\alpha g}{1+h} b_{\text{FPF}} - \left(1 - \frac{\alpha g}{1+h}\right) b_{\text{FPM}}\right]. \tag{2.5}$$

Cette expression montre que les fluctuations résiduelles du désaccord au niveau de la cavité FPM sont la combinaison des bruits affectant le laser, la cavité de filtrage, et la cavité de mesure elle-même. En considérant la limite d'un couplage $\alpha \ll \beta$, la contribution du bruit b_{FPF} s'annule, et les fluctuations du FPM s'écrivent :

$$\delta\nu - b_{\text{FPM}} = \frac{1}{1+\beta g}(b_{\text{Laser}} - b_{\text{FPM}}). \tag{2.6}$$

En faisant tendre g vers l'infini, on voit qu'en présence de deux cavités découplées, cette méthode de détection synchrone a le potentiel de parfaitement maintenir le laser et la cavité FPM à résonance.
En revanche, si le paramètre de couplage n'est pas négligeable (ce qui est le cas dans notre expérience, où les bandes passantes du FPF et du FPM sont comparables), la limite $g \mapsto \infty$ conduit à un bruit résiduel non nul, faisant intervenir les bruits auxquels sont soumises les deux cavités :

$$\delta\nu - b_{\text{FPM}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta(1+h)}(b_{\text{FPF}} + b_{\text{FPM}}). \tag{2.7}$$

La cavité de filtrage est asservie à basse fréquence (sa détection synchrone fonctionne à $4,5\ kHz$), pour lesquelles $h \mapsto \infty$, et l'équation (2.7) montre que dans ces conditions, l'asservissement du FPM permet au laser de suivre les fluctuations auxquelles la cavité de mesure est contrainte. Ceci était une nouvelle fois prévisible : lorsque la cavité de filtrage est parfaitement asservie à résonance avec le laser, son point de fonctionnement se situe en permanence à son maximum de transmission, et le bruit d'intensité δI_{FPF} qu'elle transmet est donc nul. En revanche, à plus haute fréquence, l'asservissement du FPF devient inactif ($h \mapsto 0$), et il subsiste un bruit résiduel irréductible :

$$(\delta\nu - b_{\mathrm{FPM}})_{HF} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(b_{\mathrm{FPF}} + b_{\mathrm{FPM}}). \tag{2.8}$$

La situation à haute fréquence est alors pire en présence d'un asservissement que si l'on avait laissé le système libre, le bruit de la cavité FPM n'étant pas compensé par la contre-réaction, qui introduit de surcroît un bruit supplémentaire b_{FPF} lié à la cavité de filtrage.
La mise en place d'un asservissement rapide (c'est-à-dire agissant à des fréquences supérieures à celle de la référence de la détection synchrone du FPF, i.e. $4,5$ kHz) nécessite donc de créer un signal d'erreur pour l'asservissement du FPM complètement indépendant de celui du FPF : nous avons alors pensé à la mise en place d'une détection Pound-Drever-Hall en aval de la cavité de filtrage, dont nous allons voir qu'elle satisfait ce critère, en plus de présenter de nombreux autres avantages.

2.2.2 Détection Pound-Drever-Hall

La technique initiée par Pound, Drever et Hall [63] repose sur l'idée de comparer le déphasage subi par le champ dans la cavité avec celui d'une référence qui n'y pénètre pas. Cette référence est fournie par des bandes latérales créées de part et d'autre du faisceau laser grâce à une modulation de phase du laser à une fréquence déterminée, grande devant la bande passante de la cavité (cf. figure 2.15). Lorsque la fréquence du laser est proche d'une résonance, la porteuse, qui entre dans la cavité, est sensible aux écarts de fréquence par rapport à la résonance que l'on cherche à contrôler, et subit donc un déphasage qui leur est proportionnel, alors que les bandes latérales sont simplement réfléchies par la cavité. La mesure de l'intensité du faisceau réfléchi permet donc d'accéder au battement entre la porteuse et les bandes latérales, dont l'enveloppe fournit le signal d'erreur. Pour extraire cette enveloppe, il suffit de démoduler l'intensité du faisceau réfléchi par la cavité à la fréquence de modulation des bandes latérales, et de filtrer le signal obtenu à basse fréquence.

Le signal d'erreur
Plus précisément, le champ incident, une fois modulé en phase, s'écrit :

$$\alpha^{\mathrm{in}}(t) = \alpha_0(t)e^{i\beta\cos\Omega_{\mathrm{BL}}t} \tag{2.9}$$

où $\alpha_0(t)$ est l'amplitude du champ en l'absence de modulation, β est la profondeur de la modulation de phase et Ω_{BL} sa pulsation. En décomposant l'exponentielle

oscillante sur les fonctions de Bessel $J_i(\beta)$ [1], on obtient au premier ordre en β (c'est-à-dire pour une profondeur de modulation faible devant 2π) :

$$\alpha^{\text{in}}(t) = \alpha_0(t)(J_0 + iJ_1 e^{i\Omega_{\text{BL}}t} - iJ_{-1}e^{-i\Omega_{\text{BL}}t}), \tag{2.10}$$

où l'on a noté $J_i \equiv J_i(\beta)$. L'expression (2.10) fait donc bien apparaître le champ incident comme la somme d'une porteuse oscillant à la fréquence du laser (terme $J_0\alpha_0(t)$) et de deux bandes latérales décalées de $\pm\Omega_{\text{BL}}$.
Nous allons déterminer le signal d'erreur dans le cas simple où la porteuse est désaccordée par rapport) la cavité d'un déphasage Ψ supposé constant ou quasi-statique et petit par rapport à la bande passante de la cavité ($\Psi \leq \gamma$). Les équations (1.28) et (1.29) d'entrée-sortie du champ dans la cavité permettent alors d'écrire le coefficient $r_\Psi[\Omega]$ de la composante à la fréquence Ω du champ, lorsque la porteuse est déphasée de Ψ :

$$r_\Psi[\Omega] = \frac{\gamma + i\Psi + i\Omega\tau}{\gamma - i\Psi - i\Omega\tau}. \tag{2.11}$$

En appliquant cette réponse statique à chacun des termes de l'équation (2.10), c'est-à-dire pour les bandes latérales ($\Omega = \pm\Omega_{\text{BL}}$) et pour la porteuse elle-même ($\Omega = 0$), on obtient l'expression du champ réfléchi par la cavité :

$$\alpha^{\text{out}}(t) = \alpha_0(t)(r_\Psi[0]J_0 + iJ_1 r_\Psi[-\Omega_{\text{BL}}]e^{i\Omega_{\text{BL}}t} - iJ_{-1}r_\Psi[\Omega_{\text{BL}}]e^{-i\Omega_{\text{BL}}t}). \tag{2.12}$$

La photodiode placée en réflexion mesure l'intensité $I^{out}(t) = |\alpha^{out}(t)|^2$, qui contient des termes statiques, des termes à la fréquence Ω_{BL}, et enfin des termes oscillant

1. On utilise ici le développement $e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\theta} J_n(z)$, où J_n désigne la n-ième fonction de Bessel de première espèce, $J_n(z) = (\frac{z}{2})^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(n+p)!} z^{2p}$

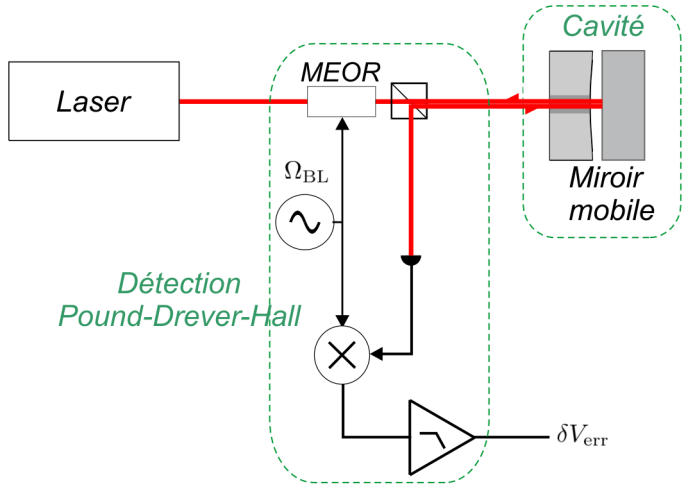

FIGURE 2.15: Schéma de la détection Pound-Drever-Hall. Un modulateur électro-optique (MEOR) crée une modulation de phase du faisceau incident à la fréquence Ω_{BL}. Le signal est obtenu par démodulation puis filtrage passe-bas de la modulation d'intensité du faisceau réfléchi.

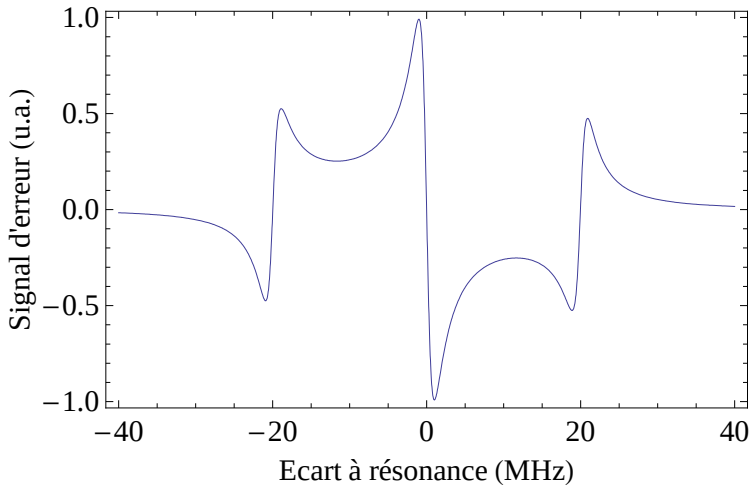

FIGURE 2.16: Signal de Pound-Drever-Hall tracé dans le cas d'une cavité sans perte, de bande passante 1 MHz, et pour des bandes latérales à 20 MHz.

à $2\Omega_{\mathrm{BL}}$. Comme le signal est démodulé à la pulsation Ω_{BL} puis filtré à basse-fréquence, on ne s'intéresse ici qu'aux termes évoluant autour de la pulsation Ω_{BL} :

$$I^{\mathrm{out}}|_{\Omega_{\mathrm{BL}}} = -2J_0J_1\overline{I}^{\mathrm{in}}\left(\mathrm{Im}\{r_\Psi^\star[0](r_\Psi[\Omega_{\mathrm{BL}}]+r_\Psi[-\Omega_{\mathrm{BL}}])\}\cos(\Omega_{\mathrm{BL}}t)\right. \tag{2.13}$$

$$\left.\mathrm{Re}\{r_\Psi^\star[0](r_\Psi[\Omega_{\mathrm{BL}}]-r_\Psi[-\Omega_{\mathrm{BL}}])\}\sin(\Omega_{\mathrm{BL}}t)\right). \tag{2.14}$$

La démodulation, qui consiste à multiplier le signal précédent par une tension sinusoïdale de référence oscillant à la fréquence Ω_{BL}, permet d'extraire l'amplitude du premier terme, celle du second ou toute combinaison des deux, selon la phase de la référence. Or, la dérivée de l'amplitude du second terme par rapport au désaccord Ψ étant nulle au voisinage de $\Psi = 0$, cette partie du signal n'étant donc pas exploitable pour réaliser un asservissement. Il faut donc démoduler avec une référence ayant la même phase que le premier terme, le signal d'erreur s'écrivant alors :

$$V_{err}[\Psi] = \langle I^{\mathrm{out}}(t)\cos(\Omega_{\mathrm{BL}}t)\rangle \tag{2.15}$$

$$= -J_0J_1\overline{I}^{\mathrm{in}}\mathrm{Im}\{r_\Psi^\star[0](r_\Psi[\Omega_{\mathrm{BL}}]+r_\Psi[-\Omega_{\mathrm{BL}}])\}. \tag{2.16}$$

Lorsque la fréquence des bandes latérales est grande devant la bande passante $\Omega_{\mathrm{cav}} = \gamma/\tau$ de la cavité, on peut simplifier l'expression (2.16) au voisinage de la résonance ($\Psi \leq \gamma$), et on obtient :

$$V_{\mathrm{err}}[\Psi] \simeq -J_0J_1\overline{I}^{\mathrm{in}}\frac{\gamma\Psi}{\gamma^2+\Psi^2}. \tag{2.17}$$

Cette expression montre que le signal d'erreur varie très rapidement et change de signe au voisinage d'un désaccord nul : il devrait donc permettre d'asservir efficacement la fréquence du laser sur la cavité de mesure. Nous présentons sur la figure 2.16 l'allure générale d'erreur, pour une cavité sans perte de bande passante $\Omega_{\mathrm{cav}}/2\pi = 1\ MHz$ et pour des bandes latérales à $\Omega_{\mathrm{BL}}/2\pi = 20\ MHz$. Cette figure met en évidence une autre propriété intéressante du signal d'erreur obtenu : ce dernier reste positif sur tout l'intervalle des désaccords compris entre $-\Omega_{\mathrm{BL}}$ et la

résonance, alors qu'il est négatif sur l'intervalle symétrique. L'asservissement sera donc capable de localiser la résonance de la cavité pourvu que la fréquence du laser s'en rapproche de $\pm\Omega_{\mathrm{BL}}$, ce qui montre que la plage d'accrochage de cette technique est considérablement plus grande que celle d'une détection synchrone, qui permet uniquement de compenser des écarts à résonance de l'ordre de la bande passante de la cavité. Ainsi, on peut prévoir que cet asservissement sera plus robuste que la détection synchrone précédemment utilisée, et qu'il permettra de faire face à des conditions expérimentales plus exigeantes.

Ajoutons enfin une dernière remarque importante : le traitement que nous venons de faire à basse fréquence s'étend en réalité (à des effets de bande passante près) à toutes les fréquences qui sont inférieures à celles des bandes latérales : une telle détection ouvre donc non seulement la possibilité de mettre en place un asservissement très rapide de la fréquence du laser sur la longueur de la cavité, mais elle permet en plus de mesurer les mouvements de nos miroirs, ce qui peut être mis à profit pour réaliser de la friction froide par exemple [34], ou bien plus simplement, et nous y reviendrons dans la suite de cette section, de calibrer les déplacements du miroir mobile.

Mise en place de la détection Pound-Drever-Hall

Il est en général difficile de faire coexister une détection Pound-Drever-Hall et une détection homodyne : la raison en est que les bandes latérales, dont l'amplitude est en général très grande devant celle du bruit quantique de phase du faisceau de mesure, peuvent facilement saturer l'électronique de la détection homodyne. Toutefois, ce problème ne se pose pas avec notre système : nous disposons en effet de deux faisceaux très bien isolés optiquement, et nous avons donc logiquement décidé d'installer la détection Pound-Drever-Hall sur le faisceau signal, en insérant

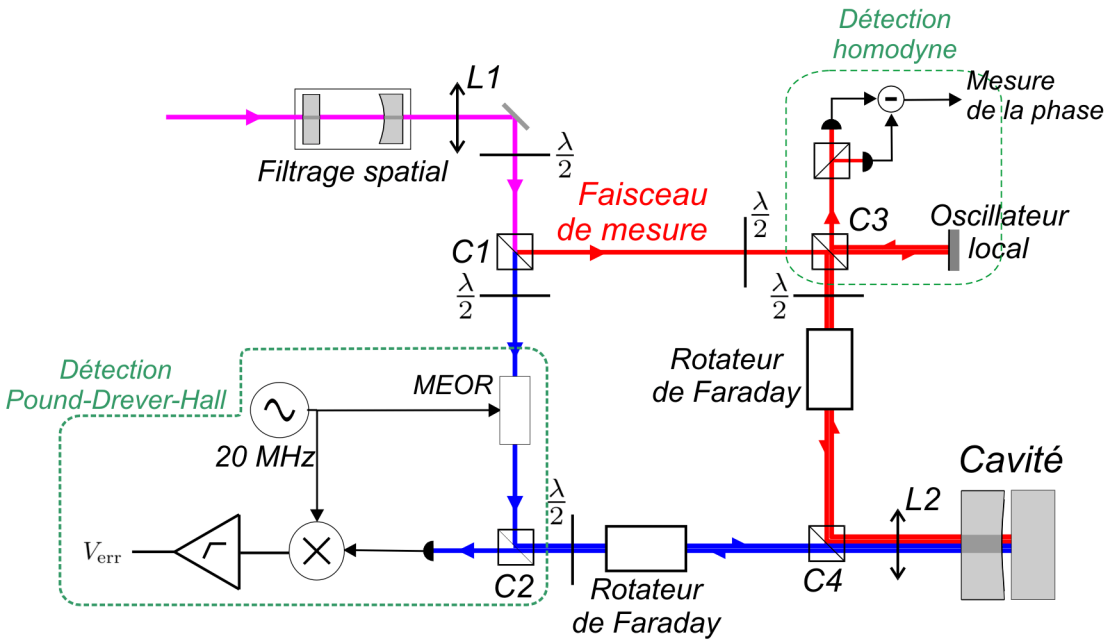

FIGURE 2.17: Schéma de l'implémentation de la détection Pound-Drever-Hall sur notre dispositif.

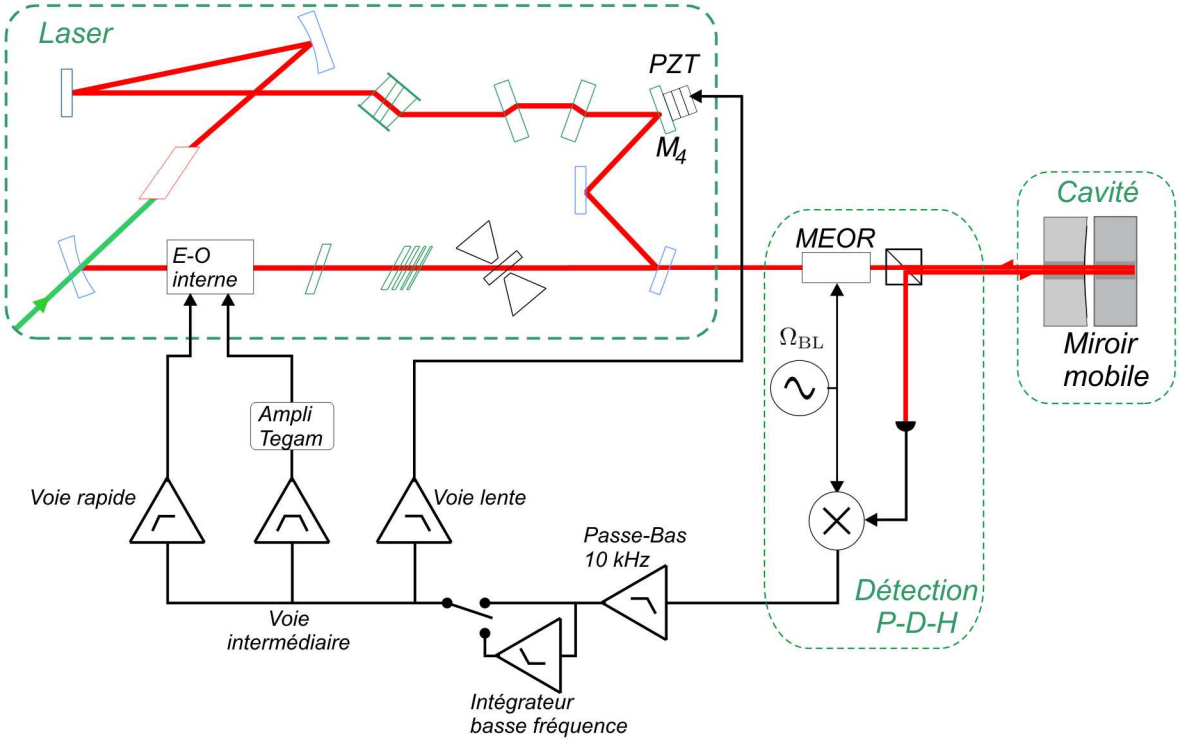

FIGURE 2.18: Principe de l'asservissement de fréquence du laser sur la résonance de la cavité de mesure.

sur son trajet un modulateur électro-optique de phase résonnant (voir figure 2.17). Ce modulateur est placé au niveau du waist créé par la lentille $L1$ entre les cubes $C1$ et $C2$, de manière à limiter son impact sur l'adaptation spatiale du faisceau signal avec la cavité. Nous avons choisi d'utiliser un modulateur de phase résonnant à 20 MHz (modulateur 4851 de la marque NEWFOCUS), une fréquence essentiellement limitée par la bande passante de la photodiode rapide utilisée en réflexion. Le fonctionnement du modulateur est prévu pour être optimal lorsque la polarisation incidente est verticale, et nous l'avons donc précédé d'une lame $\lambda/2$ dont les axes sont à 45°, afin d'appliquer une rotation de 90° à la polarisation du faisceau signal, initialement horizontale. Nous utilisons un générateur à deux voies AFG3102 de la marque TEKTRONIX, dont l'une des sorties alimente le modulateur électro-optique résonnant, la seconde, synchronisée sur la première, étant utilisée comme référence pour la démodulation. Ce type de générateur offre la possibilité de régler la phase relative entre ses deux voies, et permet donc très commodément d'ajuster la phase de la référence afin qu'elle soit identique à celle du signal mesuré par la photodiode, ce qu'il est indispensable de faire si l'on veut disposer d'un bon signal d'erreur comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent. La référence et le signal sont ensuite envoyés sur un mixeur électronique de la marque MINICIRCUITS, dont la sortie est filtrée à 5 MHz de manière à ne conserver que l'enveloppe de la composante à 20 MHz du signal.

Asservissement de la fréquence du laser

Le signal Pound-Drever-Hall est ensuite utilisé pour verrouiller la fréquence du laser sur une résonance fondamentale de la cavité. L'asservissement se compose

de trois voies, qui permettent de contrôler différents éléments internes du laser sur des plages de fréquences complémentaires. La voie lente, active jusqu'à une centaine de hertz, pilote la cale piézoélectrique du miroir $M4$ (cf. figure 2.18). Elle permet de corriger les vibrations ou les fluctuations du laser de fortes amplitudes (allant jusqu'à plusieurs dizaines de megahertz). Les voies intermédiaires et rapides agissent quant à elles sur le modulateur électro-optique interne du laser. La voie intermédiaire est active sur une plage allant de la centaine de hertz à quelques kilohertz. Elle pilote un amplificateur commercial large bande et faible bruit TEGAM2340 dont la sortie est envoyée sur l'électro-optique interne. Enfin, la voie rapide, directement connectée à cet électro-optique, permet d'agir à plus haute fréquence. L'asservissement dispose également d'un filtre passe-bas à 10 kHz permettant d'avoir une pente globale de 10 dB/ décade à haute fréquence, assurant ainsi un fonctionnement stable de l'ensemble. Enfin, un étage intégrateur à basse fréquence peut être mis en service une fois le laser asservi sur la cavité à miroir mobile, de façon à augmenter encore le gain à basse fréquence et éliminer les dérives lentes.

Le fonctionnement correct de l'asservissement nécessite un réglage relativement précis des trois voies, de manière à maximiser leur gain tout en évitant l'entrée en oscillation de l'une quelconque des voies : la stabilité de chaque voie est assurée grâce au gain de la voie de fréquence plus élevée. Dans ces conditions, l'asservissement a démontré des performances tout à fait satisfaisantes, sur lesquelles nous reviendrons plus quantitativement lorsque nous aborderons les conditions de l'observation des corrélations quantiques dans le cinquième chapitre de ce manuscrit.

Calibrations optique et mécanique avec le signal Pound-Drever-Hall

La méthode de Pound-Drever-Hall ne possède pas seulement la particularité d'être très bien adaptée à la réalisation d'un asservissement : la très forte pente du signal d'erreur au voisinage de la résonance de la cavité en fait une technique de détection extrêmement sensible des déplacements du miroir [34], et d'ailleurs aujourd'hui largement utilisée en raison de la simplicité de sa mise en oeuvre. Elle présente en outre l'avantage de pouvoir être calibrée très commodément : les bandes latérales, dont la fréquence est parfaitement connue, permettent en effet d'étalonner les désaccords du laser par rapport à la résonance. La détermination de la bande passante de la cavité devient donc immédiate, puisqu'elle se déduit directement de la comparaison entre la position des bandes latérales et la largeur du pic d'Airy sur le profil d'intensité transmis par la cavité en présence d'une modulation de la fréquence du laser (voir figure 2.19).

Pour calibrer les désaccords produits à plus haute fréquence par le mouvement du miroir mobile, il faut a priori tenir compte du filtrage de la cavité. On peut ainsi montrer que les fluctuations du signal d'erreur δV_{err} autour de la résonance s'écrivent comme le produit des fluctuations du désaccord $\delta\Psi$ par la pente statique du signal d'erreur, corrigée par le filtrage imposé par la cavité à haute fréquence [64] :

$$\delta V_{\text{err}}[\Omega] = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2/\Omega_{\text{cav}}^2}} \frac{dV_{\text{err}}}{d\Psi}\Big|_{\Psi=0} \delta\Psi[\Omega]. \tag{2.18}$$

La bande passante de la cavité ayant été mesurée grâce à la méthode que l'on vient de présenter, il ne reste plus qu'à déterminer la pente statique à résonance du signal d'erreur. On applique pour cela une modulation à 100 Hz sur le miroir M_4 du laser, de manière à visualiser sur un oscilloscope le signal délivré par le

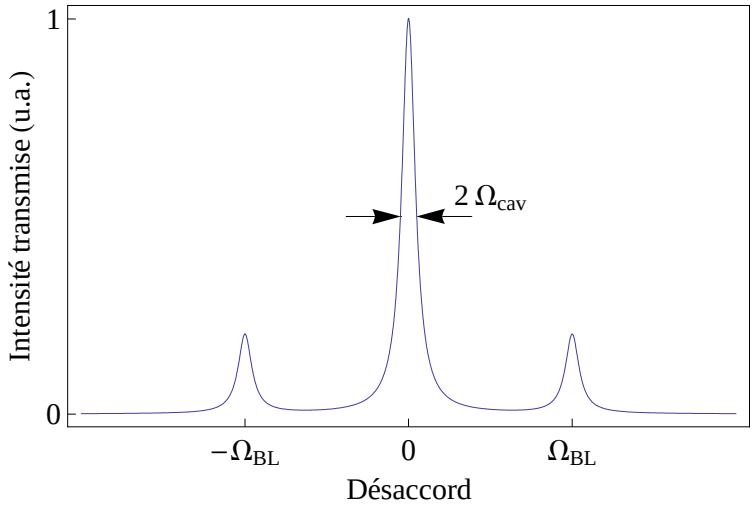

FIGURE 2.19: Mesure de la bande passante par comparaison avec les bandes latérales. Une modulation de fréquence est appliquée à 100 Hz sur la cale du laser au voisinage d'une résonance fondamentale de la cavité, de manière à visualiser le pic d'Airy et ses bandes latérales, dont les emplacements à $\pm\Omega_{\mathrm{BL}}$ permettent d'étalonner le balayage en fréquence.

mixeur de la détection Pound-Drever-Hall. On obtient un profil semblable en tous points à celui présenté sur la figure 2.16, l'échelle temporelle de l'oscilloscope étant convertie en fréquence en utilisant les passages par zéro du signal d'erreur, qui se produisent lorsque les bandes latérales résonnent avec la cavité, c'est-à-dire pour $\Omega = \pm\Omega_{\mathrm{BL}}$. Après avoir déterminé la pente à résonance du signal (en V/Hz), on asservit le laser à résonance, et on envoie la sortie du mixeur sur un analyseur de spectres afin d'acquérir les fluctuations à haute fréquence du signal d'erreur. L'impédance d'entrée de l'analyseur de spectre étant égale à 50 Ohms, il faut veiller à ce que celle de l'oscilloscope soit également fixée à 50 Ohms durant l'acquisition de la partie continue du signal d'erreur, de manière à ce que les gains électroniques soient les mêmes pour les deux mesures. Tout déplacement δx du miroir mobile produisant un désaccord $\delta\psi = 4\pi\delta x/\lambda$ de la cavité, l'équation (2.18) permet de déteriner l'amplitude du déplacement δx à partir de la tension δV_{err} mesurée par l'analyseur de spectres. Remarquons que cette méthode de calibration ne nécessite nullement l'utilisation d'une modulation de fréquence de référence : un simple spectre de bruit thermique, mesuré et calibré comme nous venons de le décrire, pourra donc permettre d'étalonner la détection homodyne, en comparant le signal qu'elle délivre avec celui de la détection Pound-Drever.

2.3 Cavité de très grande finesse avec un miroir plan-convexe

Nous avons comparé dans la section 1.3.2, les amplitudes relatives du bruit thermique et du bruit de pression de radiation, ce qui nous a permis de définir les conditions pour observer l'action en retour (équation 1.63). Il est nécessaire d'optimiser la finesse optique de la cavité, tout en perfectionnant les caractéristiques

mécaniques du miroir mobile, telles que le facteur de qualité et la masse du mode mécanique. Il est en général très difficile d'allier ces exigences, la diminution de la masse du résonateur nécessitant une réduction de ses dimensions, qui entraîne en général une diminution des facteurs de qualité mécaniques [65], et qui rend les processus de polissage et de traitement optique plus délicats. Ainsi, les valeurs typiquement atteintes dans le cas des résonateurs micromécaniques (MEMS) sont des masses comprises entre quelques centaines de nanogrammes et quelques centaines de microgrammes, pour des facteurs de qualité de l'ordre de 10^3 à 10^4, et des finesses inférieures à quelques 10^4 [24, 25, 35]. Il est donc nécessaire de choisir le meilleur compromis entre ces différents paramètres, afin d'optimiser le rapport donné par l'équation (1.63). Les performances optiques de notre dispositif, présentées dans la section 1.5 ($\mathcal{F} = 230\,000$, $\delta x_{shot}[\Omega] \simeq 10^{-20}\ m/\sqrt{Hz}$), se situent à la pointe de l'état de l'art, et sont de ce fait difficiles à améliorer. En revanche, les propriétés mécaniques des miroirs cylindriques sont assez médiocres : leurs modes de vibration mécanique s'étendent en effet sur l'ensemble de leur surface comme le montre la figure 1.30, ce qui implique une masse élevée, de l'ordre du gramme. Cela conduit également à une mauvaise isolation mécanique vis-à-vis de l'environnement extérieur, et à des facteurs de qualité mécanique peu élevés, de l'ordre de quelques 10^4 dans les meilleurs des cas, qui sont bien éloignés des facteurs intrinsèques de la silice, qui avoisinent les 10^8. Notre équipe a donc naturellement pris le parti d'améliorer ces caractéristiques, c'est-à-dire de conserver un miroir mobile de grand diamètre, afin de pouvoir continuer de bénéficier de cavités de très grandes finesses, tout en cherchant à en améliorer la géométrie.

L'idée à l'origine du choix du nouveau résonateur a consisté à rechercher une structure pour laquelle les modes acoustiques sont confinés au centre du substrat, ce qui présente l'avantage double de faibles masses, et d'une bonne isolation mécanique, donc de bons facteurs de qualité mécanique. La géométrie plan-convexe s'est alors imposée car elle est utilisée pour réaliser des résonateurs mécaniques de grands facteurs de qualité. Il s'agit d'une configuration pour laquelle le résonateur possède une face plane sur laquelle est déposée le traitement réfléchissant, et une face arrière sphérique convexe. Pour ce type de résonateur, il existe des solutions analytiques les modes propres de vibration, dont les fréquences et les profils sont analogues à ceux des modes électromagnétiques résonnants dans une cavité Fabry-Perot : ces modes ont la particularité de ne pas dépendre du diamètre du résonateur, et d'être confinés au centre, ce qui est exactement ce que nous recherchons.

2.3.1 Modes acoustiques Gaussiens d'un miroir plan-convexe

Il faut plus précisément se placer dans le cadre de l'approximation paraxiale pour pouvoir calculer ces solutions dont les expressions sont similaires aux modes Gaussiens optiques. Cette approximation n'est valide que si la composante longitudinale k_z du vecteur d'onde du mode selon l'axe (Oz) perpendiculaire à la face plane du résonateur (voir figure 2.20) est très grande devant la composante transverse $k_\perp$. Cette approximation impose en particulier que l'épaisseur h_0 au centre du miroir reste petite devant le rayon de courbure R de la face arrière [66].
On dénombre alors deux familles de solutions. La première est formée de modes de cisaillement qui sont caractérisés par des déformations du résonateur dans le plan transverse. La seconde catégorie regroupe les modes de compression, qui induisent des déplacements longitudinaux. Seuls ces derniers provoquent une déformation de la surface selon l'axe (Oz), et sont susceptibles d'être couplés au faisceau lumineux.

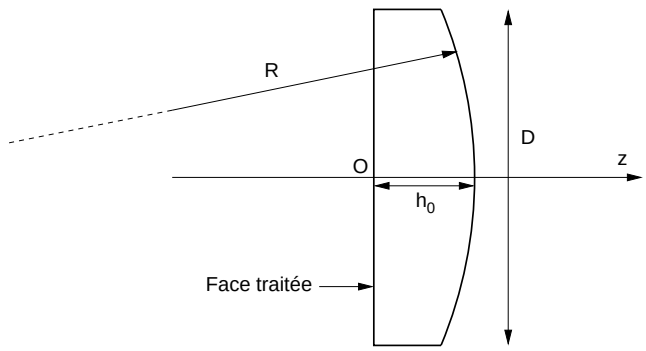

FIGURE 2.20: Schéma d'un miroir plan-convexe.

Nous ne considérons donc dans la suite que la famille des modes de compression. Ces modes sont classés selon trois indices n, p, et l, et présentent chacun un profil Gaussien [66–68] similaire au profil d'intensité du champ dans une cavité Fabry-Perot [69]. L'amplitude du déplacement selon l'axe Oz en un point du résonateur repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'écrit :

$$u_{npl}(r,\theta,z) = e^{-(r/w_n)^2} \left(\sqrt{2}\frac{r}{w_n}\right)^l L_p^l\left(2\frac{r^2}{w_n^2}\right) \cos\left(n\frac{\pi z}{h(r)}\right) \cos(l\theta), \tag{2.19}$$

où L_p^l est un polynôme de Laguerre, $h(r)$ désigne l'épaisseur du résonateur à une distance r de l'axe (Oz), et où w_n est le waist acoustique, défini par :

$$w_n^2 = \frac{2h_0}{n\pi}\sqrt{Rh_0} = \frac{w_1^2}{n}. \tag{2.20}$$

On voit sur l'équation (2.19) que n désigne le nombre de ventres du mode selon l'axe (Oz), p représente le nombre de zéros de la fonction radiale, et l est relié à la symétrie angulaire du mode. Les modes se répartissent en séries d'harmoniques indicées par n, constituées chacune d'un mode longitudinal $n\,0\,0$ fondamental accompagné de modes d'indices transverses p et l non nuls. Les fréquences de résonances de ces modes sont données par la relation :

$$\Omega_{npl}^2 = \Omega_M^2 \left[n^2 + (2p+l+1)\frac{2n}{\pi}\sqrt{\frac{h_0}{R}}\right], \tag{2.21}$$

où Ω_M est l'intervalle spectral libre,

$$\Omega_M = \pi c_l / h_0, \tag{2.22}$$

c_l étant la célérité des ondes longitudinales dans le substrat. L'expression explicite de la fonction radiale u_{npl} des modes permet en outre de calculer leurs masses de manière exacte [66], qui s'expriment comme le produit du volume du mode par la masse volumique ρ du matériau constituant le substrat :

$$M_{npl} = \rho \int d^3\mathbf{r} |u_{npl}(\mathbf{r})|^2 = \frac{\pi}{4}\rho h_0 w_n^2. \tag{2.23}$$

Cette équation permet de dégager la première condition que les dimensions de notre miroir plan-convexe doit satisfaire : si l'on veut disposer de mode de faible masse, on cherchera à minimiser à la fois l'épaisseur h_0 du résonateur et son waist acoustique, c'est-à-dire le rayon de courbure R de sa face arrière (cf. équation (2.20)).
Ce critère est toutefois concurrencé par une seconde condition, qui concerne le confinement des modes, dont dépend le facteur de qualité mécanique. On peut caractériser ce confinement par le rapport ϵ entre l'extension spatiale w_1 du mode fondamental et le diamètre D du résonateur. Ce diamètre est au plus égal à $\sqrt{8h_0R}$, cette valeur étant atteinte lorsque le résonateur est une calotte sphérique d'épaisseur $h(D/2)$ nulle au bord (voir figure 2.20).On obtient ainsi :

$$\epsilon^2 = \frac{w_1^2}{D^2} = \frac{\sqrt{h_0/R}}{4\pi(1-h_0/2R)} \geq \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{h_0}{R}}. \tag{2.24}$$

Une bonne isolation mécanique de ces modes nécessitera donc de minimiser ce rapport, ce qui revient à choisir une épaisseur h_0 la plus faible possible vis-à-vis du rayon de courbure de la face arrière.
Une dernière condition concerne la fréquence du mode fondamental Ω_M : pour optimiser la sensibilité de la mesure aux déplacements du miroir, il est préférable que cette fréquence se situe à l'intérieur de la bande passante de la cavité, qui est typiquement de l'ordre du megahertz pour une finesse de 300 000 et une longueur de 500 μm. La vitesse du son dans la silice fondue étant de 5970 m/s, cela signifie, d'après l'équation (2.22), qu'il faudra fixer l'épaisseur h_0 au centre du résonateur aux alentours de 3 mm. L'équation (2.24) montre que pour obtenir un mode confiné à quelques pourcents de la surface totale du résonateur, la face arrière devra présenter une courbure supérieure à 10 cm, ce qui correspond à un diamètre de l'ordre de 50 mm pour le miroir. Compte tenu de la masse volumique de la silice fondue ($\rho_{Silice} = 2200\ kg/m^3$), l'équation (2.23) montre que l'on s'attend avec ce type de paramètres à des modes de masses inférieures à la centaine de mg.

Pour des raisons pratiques, nous n'utilisons pas une calotte sphérique mais une géométrie plan-convexe dont l'épaisseur au bord est de l'ordre du millimètre. Nous avons finalement opté pour un miroir plan-convexe de diamètre 34 mm, d'épaisseur au centre $2,5\ mm$, et dont la face arrière a une courbure de 150 mm (figure 2.21).
Une étude préliminaire, réalisée avec un miroir plan-convexe ayant des couches diélectrique de qualité moyenne, a été menée à l'aide d'un dispositif d'excitation arrière similaire à celui que l'on a présenté dans la section 1.5.4 [54]. Ceci a permis de vérifier que ce résonateur se comportait mécaniquement comme on pouvait s'y attendre. Le profil des deux premiers modes Gaussiens fondamentaux 1 0 0 et 2 0 0 situés à $\Omega_{100} = 1164\,\text{kHz}$ et $\Omega_{200} = 2290\,\text{kHz}$ ont ainsi été reconstitués (figure 2.22), donnant des waists $w_1 = 3,5\,\text{mm}$ et $w_2 = 2,4\,\text{mm}$, plus petits que les valeurs prédites par l'équation (2.20), soit $5,9\,\text{mm}$ et $4,1\,\text{mm}$.
Le confinement obtenu se traduit par des facteurs de qualité très supérieurs à ceux des modes du miroir cylindrique, puisque la mesure de leurs taux de relaxation a montré que $\Gamma_{100} = 2\pi \times 2,64\,\text{Hz}$ et $\Gamma_{200} = 2\pi \times 3,26\,\text{Hz}$, ce qui correspond à des facteurs de qualité $Q_{100} = 350\,000$ et $Q_{200} = 650\,000$, soit un ordre de grandeur au dessus des valeurs typiquement obtenues avec le résonateur cylindrique. L'impact du confinement sur la masse de ces modes a également pu être vérifié, puisque la réponse à une force de pression de radiation arrière a permis d'établir $M_1 = 40\,\text{mg}$

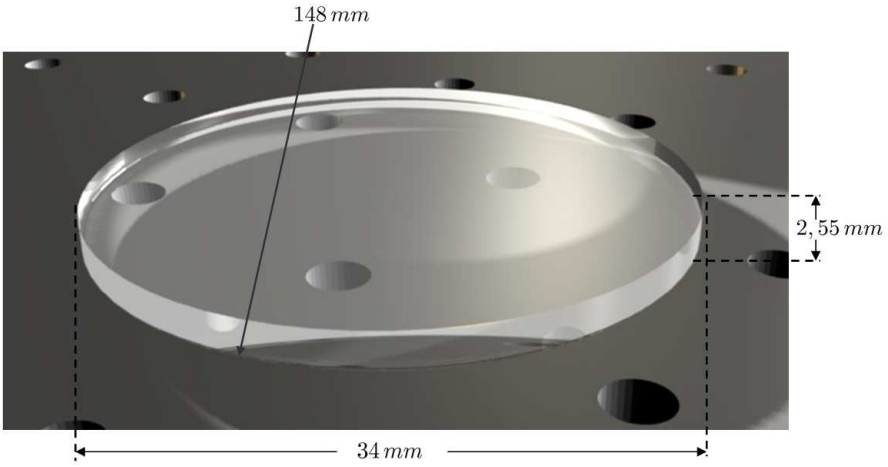

FIGURE 2.21: Le miroir plan-convexe.

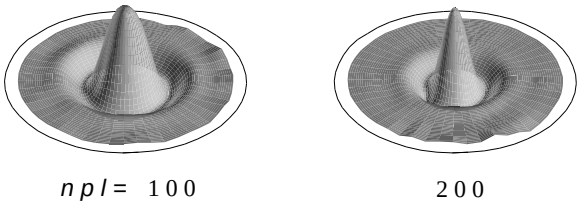

FIGURE 2.22: Profils expérimentaux des deux premiers modes fondamentaux Gaussiens. Le cercle extérieur correspond au bord du substrat, sur un diamètre de 34 mm.

et $M_2 = 50$ mg, soit un facteur 10 en dessous des masses habituellement observées avec le miroir cylindrique.

2.3.2 Miroir plan-convexe de très grande réflectivité

L'utilisation d'un résonateur plan-convexe de grand diamètre présente l'intérêt de pouvoir bénéficier des mêmes techniques de traitement diélectrique que celles ayant permis l'obtention de miroirs cylindriques de très grande réflectivité. Nous avons donc sollicité une nouvelle fois le savoir-faire du Laboratoire des Matériaux Avancés, afin qu'ils prennent en charge le traitement de substrats dont nous avons confié la réalisation et le polissage aux entreprises REO et GSI. Du fait de la qualité du super-poli obtenu, le LMA a pu déposer suffisamment de couches diélectriques pour atteindre une transmission résiduelle théorique de 1 ppm tout en garantissant des pertes de l'ordre du ppm, de la même manière que dans le cas des miroirs cylindriques. La réalisation d'une cavité de très grande finesse avec le miroir plan-convexe pose des problèmes identiques à ceux posés par la cavité à miroirs cylindriques : si l'on veut garantir une bande passante suffisante, et ainsi préserver la sensibilité de la mesure aux fréquences des modes Gaussiens du résonateur, il

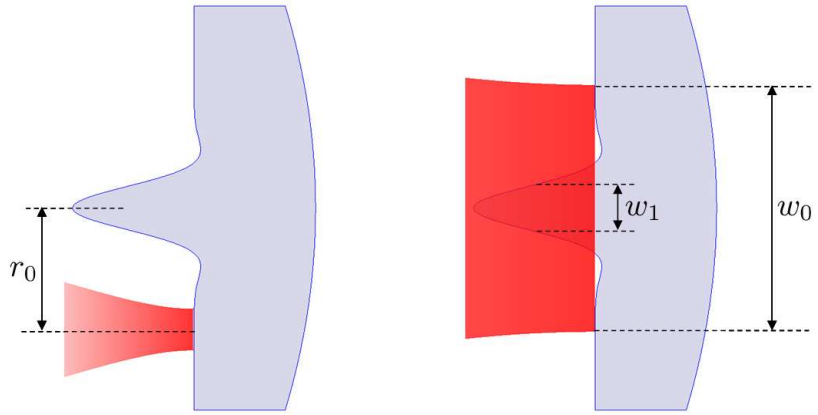

FIGURE 2.23: Problème du recouvrement spatial. Lorsque l'axe optique de la cavité est décentré par rapport au miroir plan-convexe (à gauche), le faisceau de mesure recouvre une partie du miroir qui ne se déplace que faiblement, la masse effective du mode observé apparaissant alors supérieure à celle attendue. Lorsque l'axe optique est bien centré sur le plan-convexe, mais que le col du faisceau incident est large par rapport à celui du mode mécanique considéré (à droite), une grande partie de la région sondée ne se déplace quasiment pas. L'amplitude du mouvement détecté, qui résulte de la moyenne du profil spatial pondérée par la distribution d'intensité du faisceau sonde, est donc inférieure à celle des déplacements au centre du miroir, et la masse mesurée paraît une nouvelle fois supérieure à la masse réelle du mode.

faut élaborer un montage compact, avec une distance entre les miroirs de l'ordre de quelques centaines de microns.

Recouvrement spatial

Une difficulté supplémentaire se pose toutefois avec le résonateur plan-convexe, qui tient au confinement de ses modes au centre du miroir. Alors que ce problème était de moindre importance avec les miroirs cylindriques, un décentrage du faisceau de mesure de quelques millimètres par rapport à l'axe du plan-convexe conduirait à la limite à l'impossibilité de visualiser ses modes de vibration Gaussiens, dont les amplitudes décroissent exponentiellement lorsque l'on s'éloigne du centre (voir figure 2.23). Plus précisément, on peut montrer [66] qu'un décentrage $\mathbf{r_0}$ se traduit sur le mode npl observé par une masse effective M_{npl}^{eff} apparaissant plus grande que sa masse réelle, et qui croît inversement proportionnellement au recouvrement spatial entre le profil du mode optique et celui du mode mécanique :

$$M_{npl}^{\text{eff}} = \frac{M_{npl}}{|\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\mathbf{r} u_{npl}(\mathbf{r}) v_0^2(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})|^2}, \tag{2.25}$$

où v_0 est l'amplitude Gaussienne du mode optique fondamental :

$$v_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} e^{-|\mathbf{r}|^2/w_0^2}, \tag{2.26}$$

Ainsi, comme l'illustre la figure 2.23, la qualité du centrage ne saurait seule garantir l'optimisation du couplage optomécanique : il faudra également chercher à maximiser l'intégrale de recouvrement entre le mode optique et le mode mécanique afin de pouvoir effectivement bénéficier des masses relativement faibles que le résonateur plan-convexe nous offre. En utilisant l'expression (2.19), on peut déterminer la valeur du recouvrement spatial entre un mode à symétrie de révolution ($l = 0$) et la sonde de mesure au niveau de la surface du miroir ($z = 0$) lorsque l'axe optique de la cavité coïncide avec celui du miroir plan-convexe ($\mathbf{r_0} = \mathbf{0}$)[66] :

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\mathbf{r} u_{np0}(\mathbf{r}) v_0^2(\mathbf{r}) = \frac{2w_n^2}{2w_n^2 + w_0^2} \left(\frac{2w_n^2 - w_0^2}{2w_n^2 + w_0^2} \right)^p . \tag{2.27}$$

Cette expression montre que si le col w_0 est petit devant w_1, le recouvrement spatial sera proche de l'unité pour des ordres n et p pas trop élevés, les masses effectives s'identifiant alors directement aux masses réelles pour ces modes. Les valeurs de paramètres expérimentaux tels que la courbure du coupleur d'entrée et le col du faisceau incident ont donc été choisies de manière à satisfaire à cette condition.
Dans ce cas, le recouvrement apparaissant dans l'équation (2.25) prend une forme très simple : le profil v_0 étant très piqué par rapport aux distributions spatiales des modes considérés, on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^2\mathbf{r} u_{np0}(\mathbf{r}) v_0^2(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \simeq u_{np0}(\mathbf{r_0}). \tag{2.28}$$

On retrouve bien le résultat que nous avions précédemment énoncé qualitativement : lorsque le waist optique est très petit devant le waist mécanique, les masses effectives des modes d'ordres peu élevés croissent exponentiellement avec l'éloignement au centre du faisceau incident, en suivant le profil spatial du mode considéré au point d'impact de la sonde sur la surface du résonateur.

Montage de la cavité

Nous avons mis au point un système de montage permettant de former une cavité compacte avec un miroir d'entrée cylindrique sphérique de courbure $1\,m$ et de diamètre $25,4\,mm$, et un miroir de fond plan-convexe. Le col du faisceau au niveau de la face plane du plan-convexe est alors de l'ordre de quelques dizaines de microns pour une cavité de quelques centaines de micromètres de long, ce qui permet a priori l'optimisation du recouvrement spatial comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent. Le principe du montage est similaire à celui de la cavité à miroirs cylindriques que nous avons présenté dans la section 2.1.2 : les deux miroirs sont empilés dans un tube refermé à l'aide d'une lame chrysocale (figure 2.24). Nous présentons ici la dernière version de ce montage, qui a subi de nombreux remaniements en vue de son optimisation. Une bague d'adaptation permet d'adapter le diamètre du miroir cylindrique à celui du plan-convexe (figure 2.25). Etant donnée l'importance de l'alignement du mode optique au centre du miroir de fond, nous avons intégré au support un dispositif de centrage. Trois logements situés à 120° les uns des autres sont pratiqués dans la bague d'adaptation du miroir d'entrée, dans lesquels sont insérées trois billes métalliques. Ces logements sont prolongés par trois trous filetés de faible diamètre et de pas très court, qui accueillent trois vis afin de pousser sur les billes et ainsi de régler l'espace entre les deux miroirs. La lame chrysocale permettant de refermer l'ensemble est également

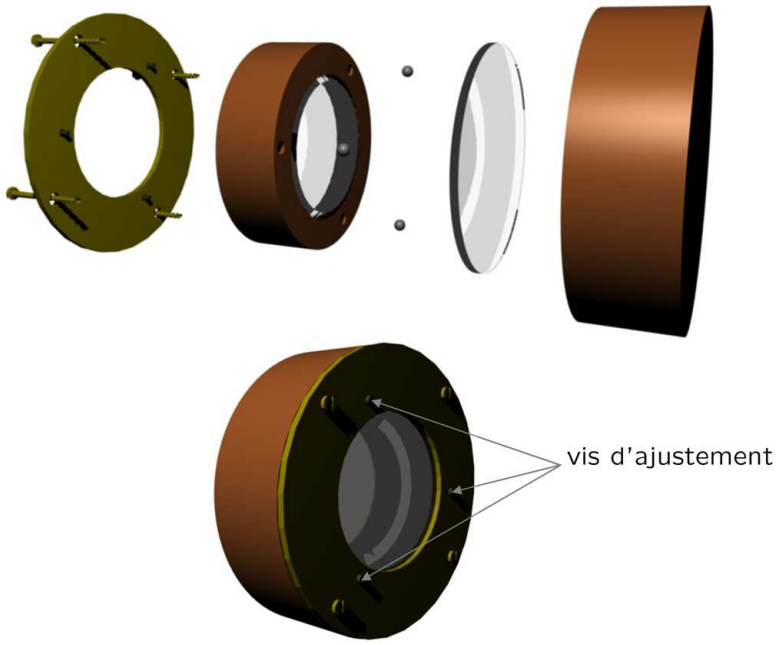

FIGURE 2.24: Schema de la cavité plan-convexe.

percée de trois trous afin que les vis puissent être manœuvrées lorsque l'ensemble est monté (cf. figures 2.24 et 2.25).

Nous avons porté une attention particulière à la conception de la bague d'adaptation du coupleur d'entrée. En effet, nous avons précédemment évoqué le problème d'un montage à bague serrée, qui ne garantit pas un maintien très stable et induit de fortes contraintes inhomogènes sur le miroir. Ces contraintes accentuent les problèmes de birefringence et peuvent même conduire à l'endommagement du miroir lors d'une descente à basse température. Après de multiples tentatives d'optimisation, nous avons donc mis au point une bague dans laquelle le miroir est plaqué, et non serré. Nous avons pour cela tiré parti du léger biseau présent entre la surface et la tranche du miroir cylindrique (voir figure 2.25). Un chanfrein est pratiqué dans le diamètre intérieur de la bague, la matière étant ensuite dégagée excepté autour de trois plots de $2\,mm$ de largeur situés à 120° les uns des autres. Ainsi, lorsque le miroir est inséré dans sa bague, sa surface est plaquée au contact de ces trois plots, ce qui assure un parfait contact mécanique. L'épaisseur de la bague étant inférieure à celle du miroir, celui-ci dépasse suffisamment de sorte que la lame de chrysocale externe exerce une contrainte uniforme sur lui, assurant ainsi son maintien dans la bague.
L'assemblage de la cavité se déroule de la manière suivante : on dépose tout d'abord le coupleur d'entrée face vers le haut sur une pièce de montage cylindrique en dural percée au centre, façon à éviter d'abîmer le traitement anti-reflet sur sa face arrière. On place ensuite la bague d'adaptation (dans laquelle les billes métalliques ont été préalablement placées), autour du miroir. On dépose alors sur l'ensemble le miroir plan-convexe, face réfléchissante vers le bas, puis on recouvre le tout à l'aide du tube en cuivre. L'empilement (pièce en dural comprise) est basculé à 180°, afin de pouvoir le refermer à l'aide de la lame en chrysocale. L'ensemble de ces opérations doit être réalisé avec le plus grand soin sous un flux laminaire de classe 1 afin d'éviter toute contamination du traitement des miroirs. Les miroirs sont ainsi

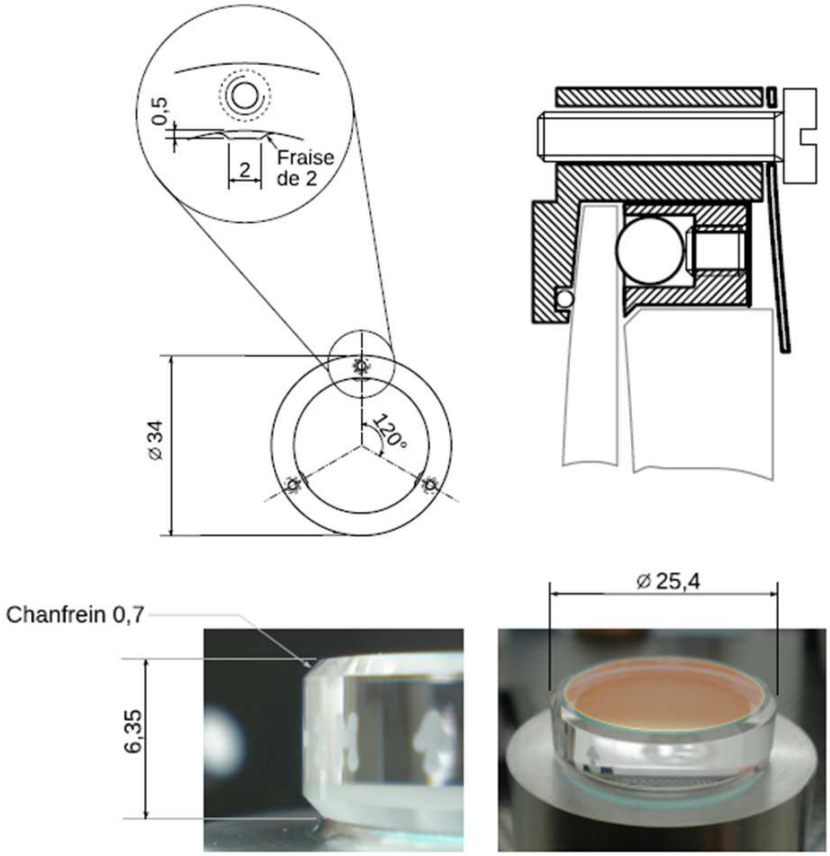

FIGURE 2.25: Schema de la bague d'adaptation du coupleur d'entrée.

manipulés avec des outils nettoyés sous flux, et l'opérateur doit impérativement se munir d'un équipement spécial (gants, charlotte-clip, masque) destiné à supprimer les sources de pollutions extérieures.
Une fois la cavité assemblée, on procède au centrage du faisceau laser sur l'axe du plan-convexe suivant un protocole similaire à celui que nous avons décrit dans le premier chapitre, en jouant à la fois sur les trois vis situées en façade de la bague du miroir d'entrée et sur l'alignement du faisceau incident à l'aide des deux miroirs de la baïonnette placée en amont de la cavité.

Résultats expérimentaux

Nous présentons à présent les caractérisations optiques et mécaniques de nos miroirs plan-convexe de très haute réflectivité. Nous avons caractérisé différents échantillons : le premier montage de cavité de très grande finesse a en effet donné d'excellents résultats du point de vue optique, et nous avons dans un premier temps jugé opportun de ne pas multiplier les manipulations de cette cavité à l'air libre. Nous avons donc décidé de réaliser l'optimisation mécanique avec un autre jeu de miroirs (montage des miroirs, alignement du mode optique au centre du plan-convexe, etc...), la grande qualité optique de cette première cavité pouvant avantageusement être mise à profit pour réaliser les premières expériences de corrélations optomécaniques, que nous aborderons dans le troisième chapitre de ce mémoire. Ce paragraphe est également l'occasion pour nous d'illustrer les procédures de caractérisation optomécaniques que nous avons décrites dans la

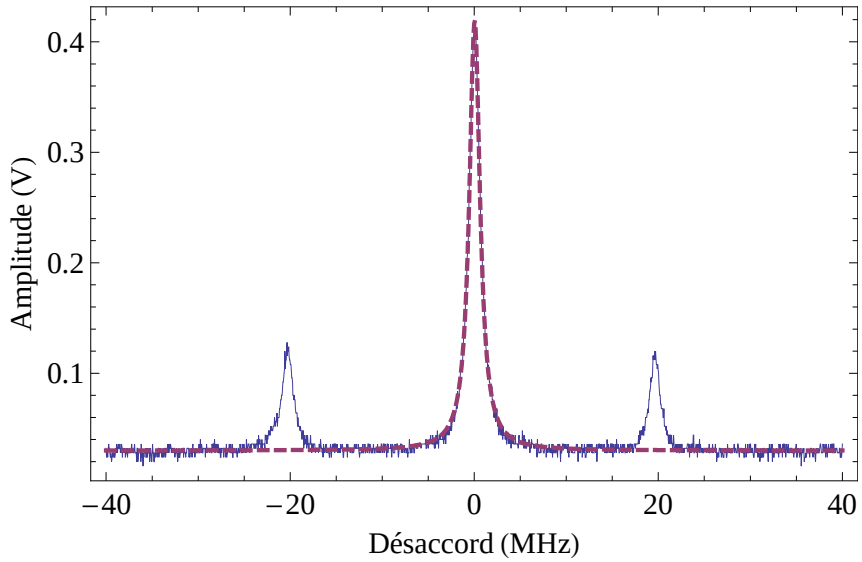

FIGURE 2.26: Intensité transmise par la cavité au voisinage d'une de ses résonances fondamentales, obtenue par un balayage de la fréquence du laser à $100\,Hz$. La calibration de l'axe horizontal est réalisée à l'aide des bandes latérales situées à ± 20 MHz de la porteuse, et l'ajustement Lorentzien (en pointillés) indique une bande passante $\nu_{BP} = 700\,kHz$.

section 2.2.2 consacrée à la présentation de notre détection de type Pound-Drever-Hall.

Caractérisation optique

La qualité optique de nos résonateurs plan-convexe s'est avérée excellente. La première cavité que nous avons formée était constituée d'un coupleur d'entrée (référence LMA 30 22/12), et d'un miroir de fond déposé sur un substrat plan-convexe super-poli par REO (référence LMA 0 7125/2). Pour cette cavité, nous avons mesuré un intervalle spectral libre $\nu_{ISL} = 454\,GHz$, ce qui correspond à une longueur $L = 330\,\mu m$. La mesure du profil de l'intensité transmise par la cavité en présence d'une modulation de la fréquence du laser nous a par ailleurs permis de déterminer sa bande passante $\nu_{BP} = 700\,kHz$ (voir figure 2.26). On déduit de ces deux mesures la valeur de la finesse $\mathcal{F} = \nu_{ISL}/2\nu_{BP} \simeq 330\,000$, soit la plus haute finesse que nous ayons jamais obtenue. Cette valeur témoigne de la grande maîtrise du LMA en matière de dépôt de traitements diélectriques, puisqu'elle est même supérieure à la valeur de 310 000 attendue pour un miroir sans perte de transmission $20\,ppm$, mais elle démontre également que le protocole de montage que nous appliquons est convenable, les miroirs étant incontestablement préservés après que l'assemblage ait eu lieu.

Nous avons également mesuré le coefficient de réflexion à résonance, afin de pouvoir accéder à une estimation des pertes dans la cavité. Nous avons pour cela conservé la modulation de fréquence du laser, et nous avons visualisé le profil d'intensité en réflexion, qui décrit un pic en absorption en présence de pertes (équation 1.127). Nous avons effectué cette mesure sur le faisceau sonde qui présente une adaptation spatiale avec la cavité meilleure que celle du faisceau intense (90% contre 80%). On obtient un coefficient de réflexion à résonance $\mathcal{R}_0 = 42\%$, ce qui nous permet

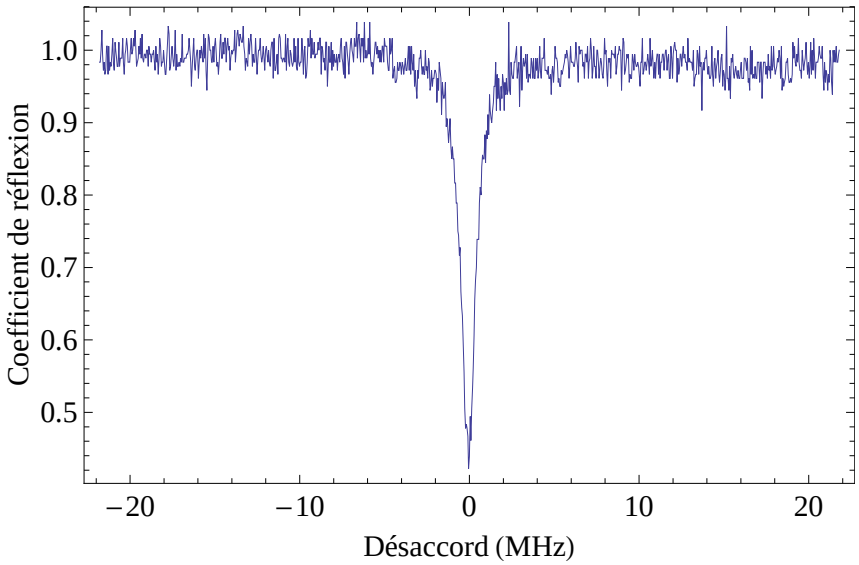

FIGURE 2.27: Coefficient de réflexion en présence d'un balayage de la fréquence du laser à $100\,Hz$ au voisinage d'une de ses résonances fondamentales. Cette mesure a été effectuée sur le faisceau sonde, en acquérant sur un oscilloscope numérique la partie continue de la somme des photocourants des deux photodiodes de la détection homodyne. On obtient $R_0 = 42\%$.

de déduire la valeur des pertes en utilisant l'équation (1.127), sachant que $T+P = 2\pi/\mathcal{F} = 19\,ppm$. On trouve $T = 15\,ppm$ et $P = 4\,ppm$, en bon accord avec les valeurs attendues[2].

Caractérisation mécanique

Nous présentons maintenant les propriétés mécaniques d'un autre miroir plan-convexe, que nous avons mis en place après optimisation du système de montage, telle qu'elle est décrite au début de cette section. Les miroirs que nous avons utilisé ont les références LMA 30 21/13 et 0 7125/3 pour le coupleur d'entrée et le miroir de fond respectivement, le substrat du plan-convexe étant une nouvelle fois super-poli par REO.

Comme nous l'avons expliqué dans le premier chapitre, la détermination des paramètres mécaniques repose sur la mesure du bruit thermique, qui fournit à la fois les fréquences de résonances, les facteurs de qualité et les masses effectives des modes. La première étape consiste à calibrer le signal d'erreur Pound-Drever, et en particulier d'en déterminer la pente statique à résonance. Pour cela, on applique de nouveau une modulation à $100\,Hz$ sur la grosse cale du laser afin de balayer sa fréquence autour d'une résonance fondamentale de la cavité. On acquiert la composante continue du signal Pound-Drever à l'aide d'un oscilloscope numérique dont on veillera à fixer l'impédance d'entrée à $50\,\Omega$ (cf. figure 2.28). L'axe horizontal de la trace obtenue est calibrée à l'aide des bandes latérales, ou de manière équivalente en repérant les annulations du signal d'erreur à droite et à gauche de

2. Le LMA garantit des miroirs avec des pertes inférieures au PPM : les pertes du miroir d'entrée s'ajoutent donc à celles du miroir de fond, auxquelles nous devons également ajouter la transmission non-nulle du miroir, de l'ordre de $1\,ppm$, qui s'assimilent à des pertes pour le champ.

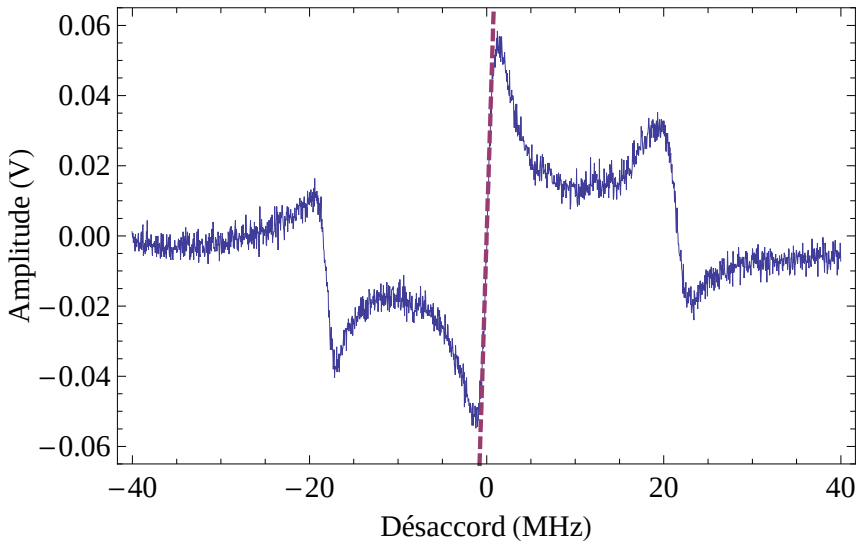

FIGURE 2.28: Signal Pound-Drever au voisinage de la résonance optique, obtenue à l'aide d'une modulation à $100\,Hz$de la fréquence du laser. La calibration de l'axe horizontal à l'aide des bandes latérales situées à $\pm 20\,\mathrm{MHz}$ de la résonance permet de déterminer la pente à l'origine du signal d'erreur (courbe en pointillés) : on obtient $dV/d\nu = 7,9 \times 10^{-2}\,V/MHz$.

la résonance, qui ont lieu aux fréquences $\pm\Omega_{\mathrm{BL}}$. On peut alors déterminer la pente statique du signal, en réalisant un ajustement linéaire au voisinage de l'origine. On obtient ici une pente $dV/d\nu = 7,9 \times 10^{-2}\,V/MHz$.

Pour calibrer les déplacements à hautes fréquences, nous avons vu qu'il est nécessaire de déterminer la pente dynamique du signal, directement reliée à la bande passante de la cavité (équation (2.18)). Pour cette cavité, nous avons mesuré une bande passante de $1,4\,MHz$, ce qui nous permet d'établir la conversion des fluctuations de tension en sortie de la détection Pound-Drever en fluctuations de fréquence (équation (2.18)) :

$$\delta\nu[\Omega] = \sqrt{1 + \Omega^2/(2\pi \times 1,4 \times 10^6)^2} \times \frac{1}{7,9 \times 10^{-2}\,V/MHz}\delta V_{\mathrm{err}}[\Omega] \tag{2.29}$$

Pour exprimer enfin ces fluctuations de fréquences en déplacements équivalents, il est nécessaire de connaître la longueur de la cavité, que nous avons évaluée à $L = 500\,\mu m$ d'après la mesure de son intervalle spectral libre. En utilisant la relation $\delta x/L = \delta\nu/\nu$, on obtient la relation permettant de convertir le signal Pound-Drever en déplacements équivalents :

$$\delta x[\Omega] = \frac{5 \times 10^{-4}\,m}{375\,THz} \times \sqrt{1 + \Omega^2/(2\pi \times 1,4 \times 10^6)^2} \times \frac{1}{7,9 \times 10^{-2}\,V/MHz}\delta V_{\mathrm{err}}[\Omega]. \tag{2.30}$$

On asservit alors la cavité à résonance, et on procède à l'acquisition du signal Pound-Drever à haute fréquence à l'aide d'un analyseur de spectre. On s'intéresse ici à l'observation du mode Gaussien fondamental 1 0 0 du résonateur plan-convexe, et on commence donc par le rechercher autour de la fréquence prédite d'après ses dimensions géométriques, c'est-à-dire à $1,2\,MHz$. Une fois la résonance localisée, on ajuste la résolution et la largeur spectrale de l'analyseur, afin de visualiser le

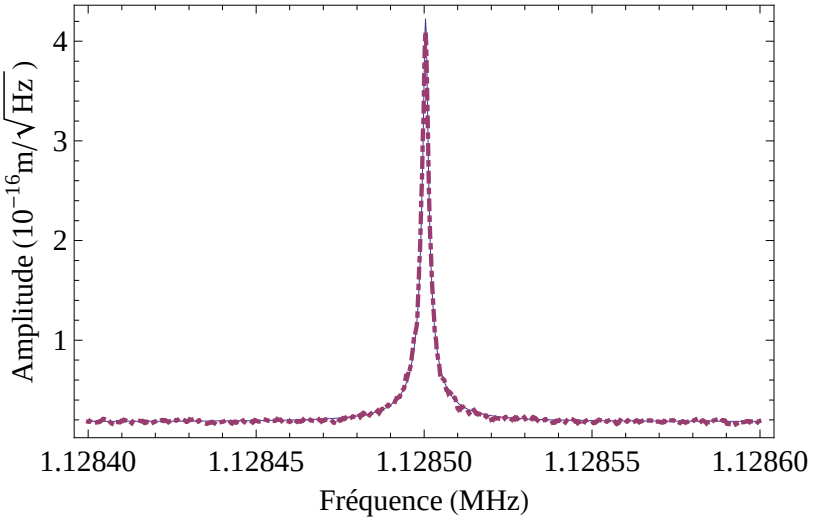

FIGURE 2.29: Amplitude du bruit thermique autour de la fréquence du mode fondamental du résonateur plan-convexe. Un ajustement Lorentzien (en pointillés) permet de déterminer les paramètres mécaniques associés à ce mode. On obtient une fréquence $\Omega_1/2\pi = 1128,50042\,kHz$, une masse effective $M_1 = 72\,mg$, et un facteur de qualité mécanique $Q_1 = 762\,000$.

mode avec une définition suffisante, compatible avec des temps d'acquisition raisonnables. Nous disposons d'un analyseur de spectre AGILENT MXA, dont la résolution spectrale descend jusqu'à $0,1\,Hz$, ce qui permet caractériser des résonances dont le facteur de qualité est de l'ordre de 10^7 à $1\,MHz$, de l'ordre de grandeur des facteurs de qualité intrinsèques de la silice. L'utilisation de cet appareil est donc bien appropriée à notre mesure. Pour cette acquisition, nous avons fixé la résolution de l'analyseur (RBW) à $1\,Hz$, et la largeur d'analyse (SPAN) à $200\,Hz$, puis nous avons moyenné 100 traces successives, ce qui correspond à une durée de mesure d'environ 5 minutes. La puissance mesurée par l'analyseur de spectre est convertie en $V/\sqrt{\text{Hz}}$ comme nous l'avons expliqué dans la section 1.5.4 (équation (1.135)), puis en déplacements équivalents à l'aide de la formule (2.30). Le résultat obtenu est présenté sur la figure 2.29.

Pour déterminer les paramètres mécaniques de ce mode, il ne reste plus qu'à appliquer au spectre obtenu un ajustement Lorentzien de la forme (cf. équation (1.62)) :

$$S_{\text{x}}^{\text{T}}[\Omega] = S_{\text{fond}}^{\text{T}} + 2k_BT \times \frac{\Omega_1/Q_1}{M_1[(\Omega_1^2-\Omega^2)^2+(\Omega_1/Q_1)^2\Omega^2]}, \tag{2.31}$$

où $S_{\text{fond}}^{\text{T}}$ est la contribution du fond mécanique des autres modes au spectre de bruit thermique, $T = 300\,K$ la température ambiante, Ω_1 la fréquence du mode, M_1 sa masse effective, et Q_1 son facteur de qualité mécanique. On obtient finalement $\Omega_1/2\pi = 1128,50042\,kHz$, $M_1 = 72\,mg$, et enfin $Q_1 = 762\,000$, soit la valeur la plus haute que nous ayons observée pour ce mode.

On notera que bien que la masse effective soit inférieure à ce que prévoit la théorie ($M_1 = 153\,mg$ d'après l'équation (2.23)), sa valeur est supérieure à celle qui avait été mesurée lors des essais préliminaires que nous avons présentés dans la section 2.3.1 ($M_1 = 40\,mg$), en dépit d'un plus grand facteur de qualité, qui suggère une meilleure isolation mécanique, et donc un meilleur confinement spatial, donc une masse plus petite a priori. Nous pensons que cela résulte d'un léger décentrage

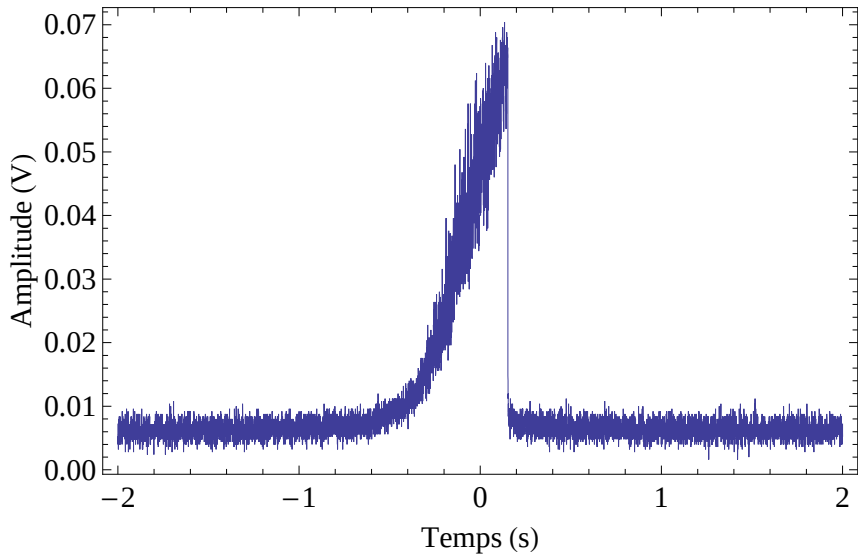

FIGURE 2.30: Mise en évidence du comportement bistable de la cavité à miroirs cylindriques de grande finesse à $T = 4\,K$, avec une puissance incidente $P^{\text{in}} = 200\,\mu W$. On observe l'intensité transmise par la cavité en présence d'un balayage très lent de la fréquence du laser réalisé à l'aide du bilame interne au laser.

du mode de la cavité par rapport au centre du miroir plan-convexe, qui serait survenu quelques temps après l'alignement de la cavité, à la suite duquel nous avions initialement mesuré une masse $M = 20\,mg$. D'après l'équation (2.23), cette dernière valeur signifie que le waist du mode fondamental est de l'ordre de $2\,mm$. Un décalage de cet ordre conduirait alors à une augmentation de la masse effective d'un facteur 10. Nous n'avons cependant pas jugé nécessaire d'aligner de nouveau le faisceau incident : ce décentrage s'est en effet accompagné d'une augmentation sensible de la finesse de la cavité, qui est passée de 60 000 à 110 000, ce que nous attribuons à une amélioration locale de la qualité des traitements diélectriques. Ce que nous avons perdu sur la masse, nous l'avons donc regagné sur la finesse, le rapport $S_x^{\text{rad}}/S_x^{\text{T}}$ étant proportionnel à $\mathcal{F}^2$.

Conclusions et remarques

Nos miroirs plan-convexe de très grande réflectivité nous ont donc permis d'obtenir des modes de très grand facteur de qualité mécanique et de masse relativement faible, dans des cavités de très grande finesse. Remarquons toutefois que l'observation des déplacements induits par la pression de radiation repose également sur un autre paramètre important, qui est la puissance incidente tolérée par la cavité lorsque celle-ci se trouve à résonance avec le laser, ou de manière équivalente la puissance intracavité supportée par les miroirs. Les pertes des miroirs par absorption peuvent en effet entraîner une augmentation de la température locale des miroirs proportionnelle à l'intensité du champ intracavité. Ce couplage par effet thermique se traduit par un comportement bistable de la cavité conduisant à une déformation du profil de ses résonances optiques (figure 2.30), qui perturbent en général l'asservissement de fréquence du laser. Concernant les deux cavités plan-convexe que nous avons présenté dans cette section, la première admet une puissance incidente de 1 mW avant que n'apparaisse des effets significatifs de bistabilité thermique, alors que la seconde cavité admet une puissance supérieure à

Cavité	Ω_0 (MHz)	Q	M_{eff} (mg)	$\mathcal{F}$	$P^{\text{in}}_{\text{max}}$ (mW)
Newport-Newport	1,2	38 500	430	25 900	$1\,mW$
Cavité MAC	1,8	120 000	230	37 000	$0,3\,mW$
Cylindriques MAC	1,2	38 500	430	230 000	$1\,mW$
PC 30 22/12 − 0 7125/2	1,1	500 000	500	330 000	$1\,mW$
PC 30 21/13 − 0 7125/3	1,1	762 000	72	110 000	$16\,mW$

TABLE 2.1: Caractéristiques optomécaniques de différentes cavités développées dans l'équipe. La liste des cavités est établie dans l'ordre chronologique. La cavité $Newport - Newport$ est constituée de deux miroirs commerciaux NEWPORT *Super Mirror High Finesse* de diamètre 1 pouce et d'épaisseur $6,35\,mm$. La cavité MAC est formée d'un miroir d'entrée cylindrique NEWPORT *Super Mirror High Finesse*, et d'un miroir de fond plan-convexe traité par le LMA, de diamètre $12\,mm$ et d'épaisseur au centre $1,5\,mm$, dont la face convexe présente une courbure de $180\,mm$. La cavité $Cylindriques\,MAC$ est celle que nous avons présentée dans le premier chapitre de ce manuscript. Enfin, les deux dernières cavités sont celles que nous avons présentées dans cette section. Les paramètres mécaniques que nous avons retenus pour chaque cavité correspondent au mode qui présent le meilleur rapport Q/M_{eff}.

$16\,mW$, soit l'intégralité de la puissance disponible au moment du test.
Pour mesurer le bénéfice de l'utilisation de ces miroirs plan-convexe de très haute réflectivité, il est intéressant de quantifier leurs performances en terme du rapport $S_{\text{x}}^{\text{rad}}/S_{\text{x}}^{\text{T}}$ entre pression de radiation et bruit thermique, dont nous avions déjà discuté l'intérêt dans la section 1.3 pour la mise en évidence des effets quantiques de pression de radiation. Nous pouvons alors comparer notre nouvelle cavité à celles qui avaient été réalisées par le passé, et qui avaient elles aussi fait l'objet d'optimisations optiques et mécaniques poussées. Nous avons repertorié les caractéristiques optomécaniques de ces différentes cavités dans le tableau 2.1. Les paramètres mécaniques que nous avons retenus sont ceux des modes qui présentent le meilleur rapport Q/M_{eff}. Nous avons enfin reporté sur la figure 2.31 l'évolution au cours du temps de la valeur du rapport $S_x^{\text{rad}}/S_x^{\text{T}}$, calculée à partir de son expression simplifiée (1.63), qui ne tient compte ni des pertes, ni des effets de filtrage. Ce graphique donne une assez bonne idée des performances de ces différentes configurations en termes de réponse à la pression de radiation : on peut apprécier en particulier l'amélioration considérable apportée par l'utilisation des nouveaux plan-convexe, qui correspond à une augmentation de plus de deux ordres de grandeurs des effets de pression de radiation par rapport au bruit thermique.

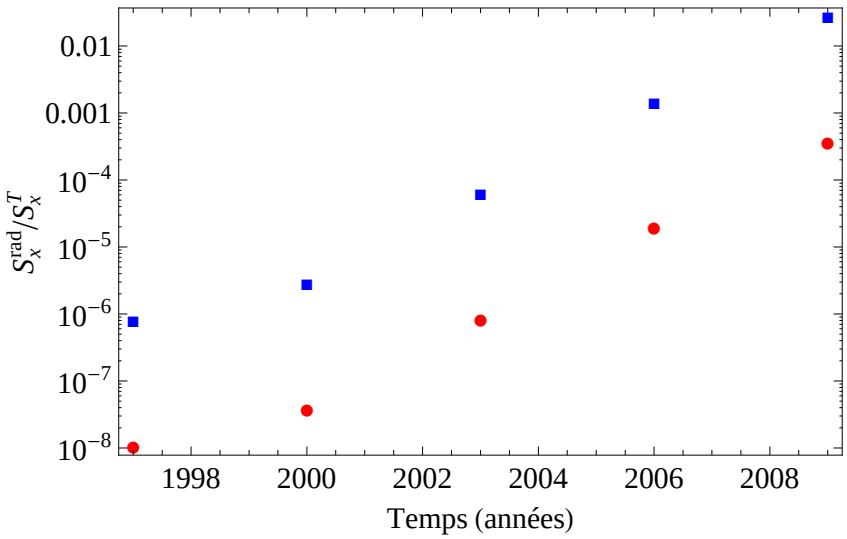

FIGURE 2.31: Evolution du rapport $S_x^{\mathrm{rad}}/S_x^{\mathrm{T}}$ à la fréquence de résonance mécanique, au cours du temps. Le rapport donné par l'équation (1.63) a été évalué pour différentes cavités mises au point depuis le commencement des travaux de l'équipe. Pour chaque cavité, le rapport est évalué à température ambiante (série de points) et à $T = 4\,K$ (série de carrés).

2.4 Double injection accordable

Dès la mise en place des premières cavités de très grande finesse, nous avons constaté l'apparition d'un phénomène très contraignant : ces cavités étaient presque toutes biréfringentes, ce qui veut dire qu'il était impossible d'amener simultanément les deux faisceaux à résonance avec la cavité, du fait de leur polarisation orthogonale. Nous avons donc dans un premier temps testé différentes combinaisons possibles à partir de la dizaine de coupleurs d'entrée et de la dizaine de miroirs de fond dont nous disposions, afin de déterminer la moins biréfringente d'entre elles, les miroirs ne donnant pas satisfaction étant systématiquement écartés, même s'ils étaient par ailleurs dotés d'excellentes propriétés optiques. Nous sommes ainsi parvenus à assembler une cavité de finesse 230 000 (dite *Cylindriques MAC*), qui ne présentait apparemment pas de biréfringence. Nous étions cependant conscients d'avoir bénéficié certaine chance, et nous avons donc décidé de régler le problème de la biréfringence, afin de pouvoir utiliser l'intégralité des échantillons se trouvant à notre disposition, ce qui permettrait de procéder à une réelle optimisation du choix des miroirs.
Dans cette section, nous commencerons par présenter et illustrer simplement la biréfringence des miroirs, puis nous décrirons le fonctionnement du système de double injection accordable que nous avons mis au point. Nous terminerons par la présentation des nouveaux asservissements d'intensité, dont le principe tire parti de la mise en place de la double injection accordable.

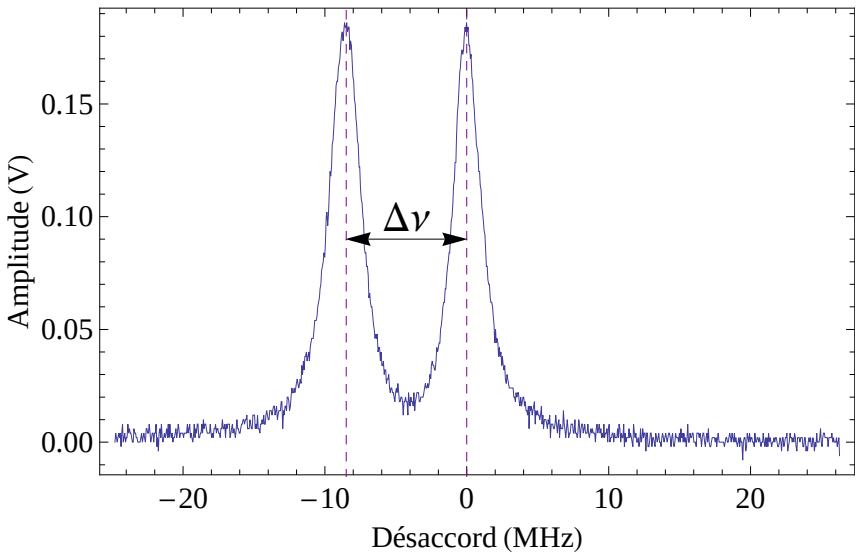

FIGURE 2.32: Intensité transmise par la cavité PC 30 22/12 − 0 7125/2 en présence d'un balayage de la fréquence autour de la résonance optique. Deux pics apparaissent, ce qui est caractéristique d'un comportement biréfringent. Ici, les deux pics sont séparés de $8,5\,MHz$ en fréquence.

2.4.1 Biréfringence d'une cavité de très grande finesse

Lorsque nous avons commencé à aligner les premières cavités de très grande finesse, nous avons assisté au dédoublement presque systématique du pic d'Airy (voir figure 2.32). Ce phénomène est dû à la biréfringence dans les couches diélectriques des miroirs de la cavité. On peut rendre compte simplement de cet effet en considérant les couches diélectriques comme un milieu uniaxe que la lumière doit traverser à l'intérieur de la cavité. Ce milieu possède deux axes de polarisations rectilignes orthogonales $\mathbf{e}_\parallel$ et $\mathbf{e}_\perp$ pour lesquelles le champ ne parcourt pas les mêmes chemins optiques :

$$L_\perp = (1 + \Delta n) \times L_\parallel, \tag{2.32}$$

où Δn est par définition la biréfringence du milieu, c'est-à-dire la différence d'indice entre les deux axes propres du milieu. Les intervalles spectraux libres associés à chaque polarisation s'écrivent respectivement :

$$\nu_{\mathrm{ISL}}^{\parallel} = \frac{c}{2L_\parallel}, \tag{2.33}$$

$$\nu_{\mathrm{ISL}}^{\perp} = \frac{c}{2L_\perp}. \tag{2.34}$$

En supposant que $\Delta n \ll 1$, on obtient l'écart $\Delta\nu$ en fréquence entre les résonances associées à chaque polarisation :

$$\Delta\nu = \Delta n \times \frac{c}{2L_\parallel}, \tag{2.35}$$

où c est la vitesse de la lumière. La biréfringence se manifeste donc bien par un écart entre les fréquences de résonance des polarisations associées aux axes propres de la cavité. Cet écart est inversement proportionnel à la longueur de la cavité (nous

assimilons $L_{\|}$ à la longueur physique L de la cavité). On peut remarquer que la sensibilité de notre système à une valeur donnée de la biréfringence Δn dépend de la bande passante de la cavité, c'est-à-dire, lorsque l'on fixe la longueur, de la finesse : ainsi, une biréfringence $\Delta n = 3 \times 10^{-6}$, correspondant à un écart de fréquence $\Delta\nu \simeq 1\,MHz$ pour une cavité de longueur $L = 500\,\mu m$ d'après l'équation (2.35), ne sera pas résolue avec une cavité de finesse 30 000, dont la bande passante vaut environ $10\,MHz$. En revanche, pour une finesse dix fois plus élevée, la bande passante est réduite à $1\,MHz$, et les résonances associées aux deux polarisations seront nettement séparées. Ceci explique pourquoi ce problème de biréfringence était moins critique lorsque nous utilisions des cavités de finesse inférieures.
Pour vérifier que nous nous trouvons bien en présence de biréfringence, nous avons placé une lame demi-onde juste devant la cavité, afin d'aligner la polarisation incidente sur l'un ou l'autre des ses axes propres : en jouant sur l'orientation des axes de la lame, nous avons effectivement pu constater la disparition de l'un, puis de l'autre pic d'Airy, ce qui montre que la cavité se comporte bien comme un milieu uniaxe. Nous avons ensuite fait varier la longueur de la cavité, et nous avons pu confirmer qualitativement la dépendance de l'écart en fréquence en $1/L$.
Notons que l'on pourrait être tenté d'augmenter la longueur de la cavité, afin de diminuer cet écart de fréquence. Ceci s'avérerait en réalité inutile : la bande passante varie elle aussi inversement proportionnellement à la longueur de la cavité, donc le rapport $\Delta\nu/\nu_{\mathrm{BP}}$ ne dépend pas de la longueur, mais uniquement de Δn et de la finesse $\mathcal{F}$,

$$\Delta\nu/\nu_{\mathrm{BP}} = 2\mathcal{F}\Delta n. \tag{2.36}$$

Nous n'avons pas clairement identifié l'origine de la biréfringence dans les couches diélectriques de nos miroirs. Nous avons simplement pu constater qu'elle était proportionnelle à l'intensité des contraintes exercées sur les miroirs, ce que nous avons observé en serrant plus ou moins vigoureusement les bagues des miroirs par exemple. En revanche, nous ne sommes jamais parvenus à faire disparaître la biréfringence, en dépit de la mise au point de supports destinés à minimiser à la fois l'intensité et les inhomogénéités des contraintes subies par les miroirs. Nous pensons que la biréfringence est aussi une conséquence de légères anisotropies dans les couches diélectriques, inhérentes aux processus utilisés pour les déposer.

2.4.2 Mise en place d'une double injection accordable

Principe
Ayant conclu à l'impossibilité de supprimer la biréfringence de nos cavités, nous avons décidé de la contourner en accordant indépendamment sur la cavité les deux faisceaux incidents de polarisation orthogonale. Pour cela, l'idée la plus simple consiste à mettre en place un contrôle indépendant de la fréquence du faisceau de mesure, en insérant sur son trajet un modulateur acousto-optique. Un tel composant permet de modifier la fréquence du faisceau qui le traverse. Plus précisément, ce type de modulateur est constitué d'un cristal relié à un transducteur piézoélectrique permettant d'instaurer une onde acoustique dans le plan transverse de la lumière. Lors de son passage dans le cristal, le champ électromagnétique va échanger de l'impulsion avec ce champ acoustique : les photons sont défléchis avec un angle et un décalage en fréquence proportionnels au nombre de phonons gagnés ou cédés. La fréquence de l'onde acoustique utilisée dans la plupart des acousto-optiques commerciaux se situe aux alentours de $100\,MHz$, car il est

nécessaire que la longueur d'onde acoustique soit petite devant le diamètre du faisceau lumineux.
Or, les décalages de fréquence provoqués par la biréfringence sont de l'ordre de quelques megahertz, donc beaucoup plus faibles que ceux que l'on peut réaliser avec le modulateur. Pour résoudre cette difficulté, nous avons utilisé non pas un seul mais deux modulateurs identiques, chacun d'eux étant inséré sur le trajet d'un faisceau : l'idée est de fixer la fréquence acoustique Ω_{RF} du premier modulateur, celui du faisceau signal, et de pouvoir faire varier précisément celle du second de $\Delta\nu$ autour de Ω_{RF}. Ainsi, les premiers ordres diffractés par ces modulateurs seront respectivement décalés de Ω_{RF} et de $\Omega_{\mathrm{RF}} + \Delta\nu$, c'est-à-dire de $\Delta\nu$ l'un par rapport à l'autre, ce qui est exactement ce que nous recherchons.

Montage expérimental

La figure 2.33 schématise la manière dont nous avons finalement intégré ces deux modulateurs à notre dispositif. Ils sont placés en amont de la cavité de filtrage au cas où ils seraient responsables d'une dégradation de la qualité géométrique des faisceaux. Le laser est donc séparé une première fois en deux polarisations orthogonales d'intensités réglables à l'aide d'une lame $\lambda/2$ et d'un cube, afin d'alimenter le lambdamètre d'une part, et la double injection d'autre part. La partie du faisceau dédiée à la double injection traverse ensuite une seconde lame $\lambda/2$, puis est séparée en deux faisceaux distincts, le faisceau signal et le faisceau de mesure, à l'aide d'un second cube.
Ces deux faisceaux sont ensuite envoyés dans des modulateurs acousto-optique de la marque AA conçus pour une onde acoustique de fréquence $200\,\mathrm{MHz} \pm 20\,\mathrm{MHz}$, que nous utilisons en double passage. Chaque faisceau traverse préalablement une lentille, afin d'être focalisé à l'intérieur du cristal de l'acousto-optique, dont le diamètre d'ouverture est de $1\,\mathrm{mm}^2$. On sélectionne alors l'ordre 1 de chacun des modulateurs en plaçant un diaphragme en sortie. Un miroir placé à incidence normale derrière les diaphragmes permet de réinjecter les deux faisceaux ainsi obtenus dans leur modulateur respectif, dont on sélectionne les ordres 1 au retour, qui se propagent colinéairement aux deux faisceaux incidents d'après le principe du retour inverse de la lumière. L'intérêt de ce double passage est d'éliminer les variations de pointé que l'on a sur le faisceau en simple passage, lorsque la fréquence de l'onde acoustique change. En plaçant le miroir de renvoi au niveau du col du faisceau laser, cela présente un deuxième avantage puisque le faisceau au retour sur le cube CP a exactement les mêmes caractéristiques spatiales que le faisceau incident. Cela nous a permis de mettre en place le dispositif de double injection accordable en minimisant les modifications sur le reste du montage : nous avons mis le cube CP à la place d'un miroir de renvoi qui se situait à cet endroit.
Une lame quart d'onde tournée à 45° est placée sur le trajet de chaque faisceau, de sorte qu'à leur retour, leurs polarisations subissant une rotation de 90°, qui permet de les envoyer vers la cavité de filtrage après leur recombinaison sur le cube CP. L'ensemble de ces éléments se substituent donc à un simple miroir de renvoi, tout en permettant de faire varier les fréquences et les amplitudes de chaque faisceau indépendamment grâce aux pilotes des deux acousto-optiques.
Le modulateur $MAO\,1$ du faisceau signal est alimenté par un pilote AA MODA200 2W qui délivre un champ radiofréquence à 200 MHz. Ce pilote comporte une entrée $0 - 5\,V$, permettant de choisir la puissance envoyée sur le modulateur, entre 0 et 2 W, et ainsi de choisir la puissance lumineuse diffractée dans l'ordre 1. Le modulateur $MAO\,2$ du faisceau de mesure est piloté par un VCO (*Voltage Controlled Oscillator*) AA DRFA10Y possédant deux accès de contrôle. Le premier, similaire

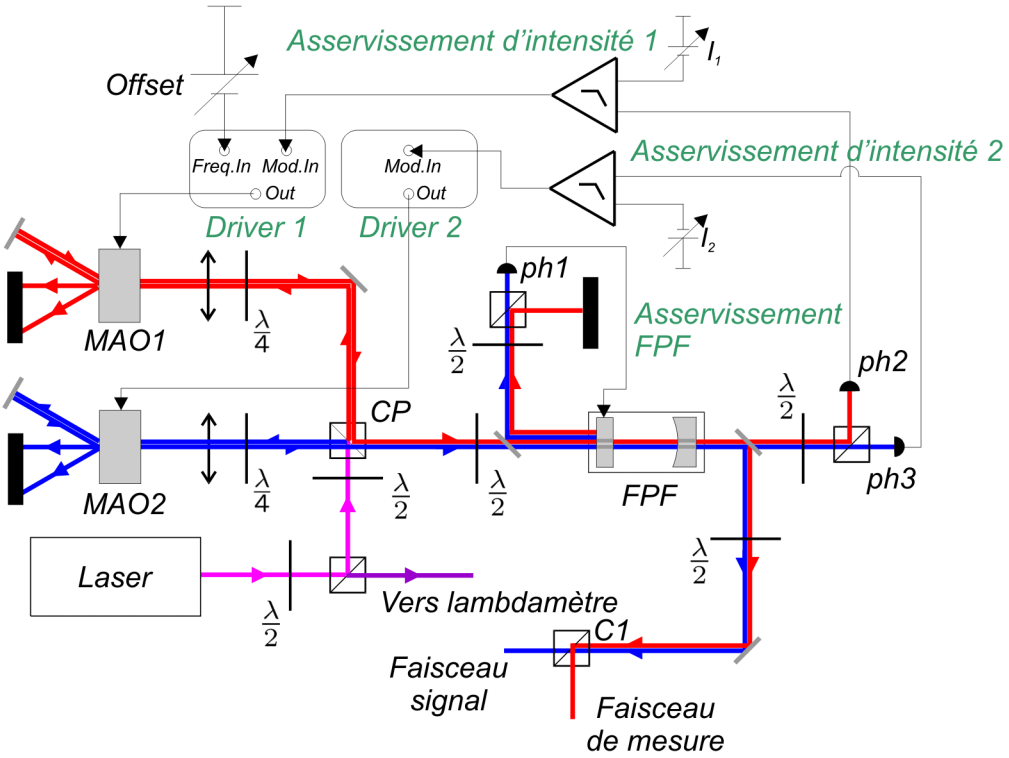

FIGURE 2.33: Schéma de la double injection accordable.

à l'unique entrée du MODA200 2W, est une entrée (0-5 V) permettant de régler la puissance du signal RF envoyé sur le modulateur. Le second est une entrée $0-10$ V qui permet de faire varier la fréquence de la source RF entre 195 MHz et 350 MHz. A la différence du MODA200 2W, ce pilote n'amplifie pas lui-même le signal RF qu'il délivre, et doit donc être associé à un amplificateur de puissance externe. La sortie du VCO est donc envoyée sur un amplificateur AA© AMPA-B-33 capable de délivrer jusqu'à 2 W.
Ce dispositif permet donc de décaler la fréquence des deux faisceaux sur une plage limitée par les caractéristiques du VCO et par la bande passante de l'acousto-optique. Comme le double passage a pour effet de doubler la fréquence de décalage, nous arrivons en pratique à obtenir des écarts en fréquence entre les deux faisceaux de ± 10 MHz, ce qui correspond parfaitement aux écarts typiquement provoqués par la biréfringence.

Isolation optique

Deux faisceaux de polarisations croisées et de fréquences décalées sont ainsi envoyés vers la cavité de filtrage. Un premier problème se pose alors : nous avons en effet remarqué que cette cavité présente elle aussi une très légère biréfringence, de sorte que si les polarisations qui y sont injectées ne suivent pas ses axes propres, elles se retrouveront mélangées à sa sortie. Pour corriger ce problème, nous avons placé une lame demi-onde juste devant la cavité FPF, orientée de façon à aligner la direction des deux polarisations sur ses axes propres. Une lame $\lambda/2$ est également placée à la sortie du FPF afin de rétablir l'orientation initiale de chacune des polarisations. Pour régler l'orientation de ces deux lames, on cesse d'alimenter un des deux acousto-optique, par exemple le $MAO2$, et on applique une rampe sur

la cale piézoélectrique de la cavité FPF, afin que la lumière la traverse sans qu'il soit nécessaire de l'asservir. On minimise ensuite l'intensité transmise dans la voie signal après le cube $C1$ se trouvant en aval de la cavité FPF (cf. figures 1.20 et 2.33), en faisant tourner les axes des deux $\lambda/2$ dans des sens opposés. On peut affiner le réglage en visualisant à l'aide d'une photodiode placée dans l'une des deux voies le battement résiduel entre les deux faisceaux à la fréquence d'écart $\Delta\nu$, après avoir réalimenté l'acousto-optique de façon à ce que les deux faisceaux traversent la cavité FPF.
Le second problème lié à la mise en place de ce système concerne l'asservissement de la cavité FPF, que l'on ne peut verrouiller que sur un seul des deux faisceaux. Pour cela, on sélectionne l'une des deux polarisations en réflexion à l'aide d'une lame $\lambda/2$ suivie d'un cube séparateur placés juste devant la photodiode qui sert à l'asservissement de la cavité ($ph1$ sur la figure 2.33). Nous avons choisi d'asservir la cavité FPF sur le faisceau signal, puisque c'est qui sert à asservir la cavité de mesure.
Remarquons alors que le faisceau de mesure ne se trouve plus à résonance avec le FPF, ce qui rend son bruit d'intensité sensible aux fluctuations de longueur résiduelles de cette cavité. De plus, les fluctuations d'intensité présentes sur les deux faisceaux en sortie du FPF n'étant de ce fait plus corrélées, il devient indispensable de mettre en place deux asservissements d'intensité distincts pour chacun d'entre eux.

Asservissements d'intensité
Notre dispositif se prête bien à la mise en place de deux tels asservissements puisque les deux pilotes des acousto-optiques disposent d'une entrée permettant de contrôler l'amplitude de leurs ordres de diffraction. On peut donc les utiliser comme système de rétroaction afin de stabiliser les intensités des faisceaux en amont de la cavité de filtrage.
On prélève pour cela une partie de chaque faisceau à l'aide d'une lame séparatrice placée juste après la cavité FPF. On sépare ensuite les deux faisceaux grâce à un cube séparateur précédé d'une lame $\lambda/2$ qui permet de rectifier la direction des deux polarisations (qui à cet endroit sont alignées selon les axes propres du FPF). Il est important de réaliser cette opération avec grand soin, afin d'éviter de réinjecter le bruit d'un faisceau sur l'autre. Les intensités de chaque faisceau sont ensuite détectées à l'aide de deux photodiodes ($ph2$ et $ph3$ sur la figure 2.33), suivies d'étages amplificateurs. Ces signaux sont envoyés sur des asservissements commerciaux NEW FOCUS NFLB1005, qui agissent comme des amplificateurs proportionnels, avec un étage intégrateur dont la fréquence de coupure est réglable. Ces asservissements comportent également un offset ajustable en façade, qui va nous permettre de fixer le point de consigne en intensité. Les signaux délivrés par ces boîtes sont sommés à une tension de référence fixée à $5\,V$ qui alimente les modulateurs à leur maximum de transmission lorsque les boucles d'asservissement sont ouvertes, avant d'être envoyés sur l'entrée modulation des pilotes des acousto-optiques. Les boucles de contre-réaction ainsi constituées présentent des performances tout à fait comparables à celle qui se basait précédemment sur l'utilisation du modulateur électro-optique, c'est-à-dire que les fluctuations d'intensité relatives des faisceaux sont ramenées à quelques dixièmes de pourcent.

On notera que si ce système de double injection se comporte très bien, il n'est tout de même pas très satisfaisant de n'utiliser qu'une seule cavité de filtrage pour deux faisceaux se trouvant à des fréquences différentes. En effet, lorsque la

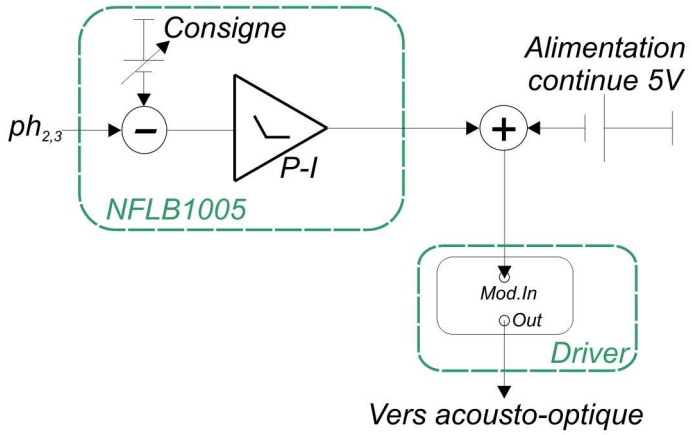

FIGURE 2.34: Principe des asservissements d'intensité avec les acousto-optiques.

biréfringence de la cavité FPM nécessite de désaccorder les deux polarisations de plus d'une dizaine de megahertz, le faisceau de mesure se retrouve complètement en dehors de la bande passante du FPF, qui ne transmet alors qu'une très petite fraction de sa puissance incidente. Or, la voie de mesure requiert une puissance assez conséquente, puisqu'elle doit permettre de fournir à la fois l'oscillateur local et le faisceau de mesure, ce qui correspond à un total de l'ordre de $20\,mW$. Nous avons choisi cette solution car elle nous a permis de réaliser une double injection accordable qui compense de manière efficace des biréfringences de quelques megahertz, et cela sans avoir à modifier tout le montage optique. Toutefois, une nouvelle cavité de filtrage de plus grande finesse est aujourd'hui en cours de construction, pour filtrer le bruit classique d'intensité du faisceau signal. Le montage aura donc à l'avenir deux cavités de filtrage indépendantes.

Chapitre 3

Effets de la pression de radiation et corrélations optomécaniques

Dans ce chapitre, nous abordons différents aspects des effets de la pression de radiation sur un miroir mobile. Afin de compléter la présentation faite dans le chapitre 1 où le miroir mobile était décrit comme un simple oscillateur harmonique, nous commencerons par décrire les conséquences du caractère multimode du résonateur mécanique. Nous verrons en particulier comment le comportement réel d'un miroir mobile peut être mis à profit pour optimiser l'amplitude du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ entre pression de radiation et bruit thermique, ou bien encore pour améliorer la sensibilité de la mesure au-delà de la limite quantique standard. Nous présentons ensuite les résultats expérimentaux que nous avons obtenus avec notre dispositif en étudiant la réponse du miroir à une force de pression de radiation classique. Nous avons ainsi démontré un effet d'annulation de l'action en retour, qui permet d'améliorer en principe la sensibilité d'une mesure de déplacement ou de force, et nous avons mis en évidence des corrélations intensité-phase sur la lumière induites par la réponse du miroir à la pression de radiation.

3.1 Réponse mécanique à la pression de radiation

Dans la section 1.2.4, nous avons vu que le bruit thermique et le bruit de pression de radiation avaient des effets tout à fait similaires sur la dynamique d'un oscillateur harmonique amorti auquel ils s'appliquaient, et qu'ils ne se différenciaient à cet égard que par leurs densités d'énergie spectrale relatives. En réalité, le caractère fondamentalement multimodal de nos miroirs fait apparaître une différence essentielle entre ces deux forces, tenant au fait que les mêmes fluctuations de pression de radiation s'appliquent à tous les modes de vibration, alors que les bruits thermiques de ces modes sont indépendants les uns des autres. Nous allons alors voir que ceci conduit à une dépendance spectrale particulière de la réponse du miroir à la pression de radiation.

3.1.1 Réponse multimode d'un miroir

Les deux premier chapitres de ce manuscrit ont été l'occasion de revenir à plusieurs reprises sur l'origine et la mise en évidence expérimentale du caractère multimode de nos résonateurs, dont nous avons vu que leur réponse mécanique pouvait être décrite par des susceptibilités χ_n associées à des oscillateurs harmoniques amortis :

$$\chi_n[\Omega] = \frac{1}{M_n[\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Omega_n^2\phi_n[\Omega]]}, \tag{3.1}$$

où M_n est la masse du n-ième mode, et où $\phi_n[\Omega] = \Omega/(\Omega_n Q_n)$ est l'angle de perte du mode.

La présence de multiples résonances n'est pas la seule conséquence du caractère multimode du résonateur. Le couplage avec la lumière va également dépendre de l'adaptation spatiale entre le faisceau lumineux et le mode de vibration. Ainsi un faisceau qui se réfléchit sur un nœud du mode de vibration n'exerce pas de pression de radiation sur celui-ci, et n'est pas non plus sensible au mouvement de ce mode. On peut montrer [66] que le déplacement $x(t)$ vu par la lumière correspond aux déplacements réels $u(\mathbf{r}, t)$ du miroir moyennés sur le profil du faisceau lumineux :

$$x(t) = \langle u(\mathbf{r}, t), v_0^2(\mathbf{r}, t)\rangle, \tag{3.2}$$

où la moyenne porte sur toute la surface du miroir :

$$\langle f, g\rangle = \int \mathrm{d}^2\mathbf{r} f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}), \tag{3.3}$$

et où v_0 est le profil spatial du faisceau laser (équation (1.111)). Sous les effets conjugués de l'agitation thermique et de la pression de radiation du faisceau laser, le mouvement du miroir obéit à une équation tout à fait similaire à l'expression monomode utilisée dans le chapitre 1 (éqs. (1.46),(1.48) et (1.60)) :

$$x[\Omega] = \chi_{\text{eff}}[\Omega]\left(F_{\text{rad}}[\Omega] + F_{\text{T}}[\Omega]\right). \tag{3.4}$$

Dans cette expression, la susceptibilité effective χ_{eff} est la somme de toutes les susceptibilités χ_n des modes de vibration, pondérés par le recouvrement spatial avec la lumière :

$$\chi_{\text{eff}}[\Omega] = \sum_n \langle u_n, v_0^2\rangle^2 \chi_n[\Omega], \tag{3.5}$$

où $u_n(\mathbf{r}, t)$ est le profil spatial du mode n à la surface du miroir. La force de pression de radiation F_{rad} est une force globale qui admet la même expression que dans le cas monomode (éq. 1.48) :

$$F_{\text{rad}}[\Omega] = 2\hbar k I[\Omega], \tag{3.6}$$

où I est le flux de photon par seconde du faisceau laser, tandis que la force de Langevin F_{T} est la somme des forces individuelles $F_{\text{T,n}}$ de chaque mode, pondérées par le recouvrement spatial :

$$F_{\text{T}}[\Omega] = \sum_n \langle u_n, v_0^2\rangle \frac{\chi_n[\Omega]}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]} F_{\text{T,n}}[\Omega]. \tag{3.7}$$

Ces deux équations montrent la différence profonde entre pression de radiation et agitation thermique : la pression de radiation est une force globale dont les fluctuations agissent de façon cohérente sur tous les modes de vibration, tandis que les forces de Langevin individuelles $F_{\mathrm{T,n}}$ sont indépendantes et décorrélées entre elles. Ceci explique la différence de dépendance spectrale entre pression de radiation et bruit thermique que nous allons observer dans la suite.

Quand le miroir est à l'équilibre thermodynamique à la température T, on peut montrer [61] que la force de Langevin F_{T} obéit au théorème fluctuations-dissipation et son spectre est toujours donné par l'équation (1.60). Comme dans le cas monomode (section 1.3), on peut alors dériver l'expression générale du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$:

$$\frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}}{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}} = 32\frac{\hbar^2\mathcal{F}^2\overline{I}^{\mathrm{in}}}{\lambda^2 k_B T} \times \frac{-\Omega}{\mathrm{Im}\left(1/\chi_{\mathrm{eff}}[\Omega]\right)}. \tag{3.8}$$

Pour un résonateur monomode, χ_{eff} ne présente qu'une résonance Lorentzienne χ_n et le dernier terme dans l'équation (3.8) s'écrit simplement $1/(M_n\Omega_n\phi_n)$. On retrouve ainsi les résultats de la section 1.3, avec un rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ indépendant de la fréquence (éq. 1.63). Par contre, dans le cas général d'un résonateur multimode, le dernier terme dans l'équation (3.8) n'a pas de raison d'être indépendant de la fréquence, et l'optimisation du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ va dépendre de la fréquence et de l'expression précise de la susceptibilité effective χ_{eff}.

3.1.2 Calcul de la susceptibilité effective

Dans cette section, nous cherchons à déterminer qualitativement le comportement spectral de la réponse du miroir à la pression de radiation autour de l'une de ses résonance mécanique. Nous décomposons donc naturellement la susceptibilité effective donnée par l'équation (3.5) en deux termes, le premier lié à la résonance n autour de laquelle on se place, et le second lié à la contribution de tous les autres modes :

$$\chi_{\mathrm{eff}}[\Omega] = \chi_n[\Omega]\langle u_n, v_0^2\rangle^2 + \sum_{k\neq n}\chi_k[\Omega]\langle u_k, v_0^2\rangle^2. \tag{3.9}$$

La détermination de la somme apparaissant dans cette équation est un problème complexe, qui n'admet pas de solution analytique exacte dans le cas d'un résonateur plan-convexe, et cela pour deux raisons : la première est que sa résolution nécessite a priori une parfaite connaissance des modes propres de vibration du résonateur. Or nous savons que les modes Gaussiens ne sont pas la seule famille de solution de l'équation élastique pour un miroir plan-convexe, qui admet aussi des modes de vibrations semblables à ceux d'un miroir cylindrique [54], dont il n'existe pas d'expression analytique générale. La seconde raison est que même en se limitant aux solutions Gaussiennes, il faut recourir à des méthodes numériques pour pouvoir déterminer la somme, dont la convergence est extrêmement lente.
Il existe cependant une approche alternative, basée sur la détermination de la réponse statique globale du miroir à une force extérieure [70, 71]. Avant de pouvoir la mettre en oeuvre, il est toutefois nécessaire de faire quelques hypothèses. Nous allons tout d'abord considérer que l'ordre n du mode auquel on s'intéresse est peu élevé, ce qui permet de limiter la somme qui apparaît dans l'équation 3.9 aux modes d'ordre supérieur : les modes résonnants en-deçà de la fréquence Ω_n sont peu nombreux et individuellement négligeables devant ceux qui résonnent aux

fréquences supérieures à Ω_n puisqu'ils décroissent chacun en $1/\Omega^2$, ce qui permet d'écrire pour une pulsation $\Omega \simeq \Omega_n$:

$$\sum_{k\neq n} \chi_k[\Omega]\langle u_k, v_0^2\rangle^2 \simeq \sum_{k>n} \chi_k[\Omega]\langle u_k, v_0^2\rangle^2. \tag{3.10}$$

On suppose de plus que les modes du miroir ont tous un grand facteur de qualité mécanique, ce qui signifie en particulier que leurs résonances peuvent être considérées comme isolées les unes des autres. Pour une pulsation $\Omega \simeq \Omega_n$, on peut alors assimiler les termes de la somme restante à leur valeur à fréquence nulle :

$$\sum_{k\neq n} \chi_k[\Omega \simeq \Omega_n]\langle u_k, v_0^2\rangle^2 \simeq \sum_{k>n} \chi_k[\Omega \simeq 0]\langle u_k, v_0^2\rangle^2. \tag{3.11}$$

Enfin, l'ordre n étant peu élevé, l'erreur faite en additionnant le terme général de la somme précédente depuis $k = 0$ reste faible, et l'on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq n} \chi_k[\Omega \simeq \Omega_n]\langle u_k, v_0^2\rangle^2 &\simeq \sum_{k} \chi_k[\Omega \simeq 0]\langle u_k, v_0^2\rangle^2 \\ &\simeq \chi_{\text{eff}}[\Omega = 0].\end{aligned} \tag{3.12}$$

Au voisinage d'une résonance d'ordre n peu élevé, la susceptibilité s'écrit donc comme la somme d'une Lorentzienne centrée en Ω_n qui s'identifie à la susceptibilité effective $\chi_n^{\text{eff}} = \chi_n\langle u_n, v_0^2\rangle^2$ du n-ième mode, et de la réponse statique $\chi_{\text{eff}}[\Omega = 0]$ du miroir, qui peut être vue comme la réponse du fond mécanique.

En supposant que l'on travaille avec un faisceau dont le col optique w_0 est petit devant les dimensions caractéristiques du miroir, on peut estimer cette réponse statique à l'aide d'une approche globale [70–72], qui consiste à considérer que la taille du miroir est infinie et à calculer l'énergie correspondant à la déformation statique sous l'effet d'une force extérieure statique. A partir de cette méthode, on obtient :

$$\chi_{\text{eff}}[\Omega = 0] = \frac{1-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}(1-i\phi_0)Ew_0}, \tag{3.13}$$

où E est le module de Young du matériau constituant le substrat, σ son coefficient de Poisson, ϕ_0 l'angle de pertes, et w_0 le col optique du faisceau. Remarquons que contrairement à la réponse individuelle d'un mode, celle du fond ne dépend pas de la position du faisceau sur la surface du miroir, ce qui se conçoit tant que le point d'impact du faisceau incident reste loin des bords.

3.1.3 Réponse mécanique en fonction de la fréquence

Nous allons successivement examiner le comportement de la réponse mécanique donnée par la susceptibilité effective χ_{eff}, autour d'une résonance puis à basse et haute fréquences.

Réponse à la résonance mécanique

On peut commencer par s'interroger sur l'influence du fond à la fréquence de résonance $\Omega_n/2\pi$. On définit pour cela le rapport $\mathcal{R}_n^{\text{F}}$ de la contribution du n-ième

mode à sa fréquence de résonance et de celle du fond mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n^{\mathrm{F}} &= \left|\frac{\chi_n^{\mathrm{eff}}[\Omega_n]}{\chi_{\mathrm{eff}}[\Omega=0]}\right|^2 \\ &\simeq \frac{2\pi E^2 w_0^2}{(1-\sigma^2)^2 (M_n^{\mathrm{eff}})^2 \Omega_n^4 \phi_n^2},\end{aligned} \tag{3.14}$$

où on a supposé $\phi_0 \ll 1$ et $M_n^{\mathrm{eff}} = M_n/\langle u_n, v_0^2\rangle^2$ est la masse effective du n-ième mode, compte tenu de l'adaptation spatiale entre la lumière et le mode. Dans le cas du mode fondamental Gaussien de notre miroir plan-convexe, si l'on suppose que le faisceau incident est parfaitement centré, et que son col est petit devant l'extension spatiale du mode (ce qui implique $M_1^{\mathrm{eff}} \simeq M_1$), tous les paramètres de l'équation précédente sont connus. Sachant que $E = 7.3\times10^{10}$ Pa et $\sigma = 0.17$ pour la silice fondue, et en prenant $w_0 = 65\,\mu m$ et $\phi_1 = 10^{-6}$, on obtient $\mathcal{R}_1^{\mathrm{F}} \simeq 4\times10^6$. Cette valeur est a priori une borne inférieure de $\mathcal{R}_n^{\mathrm{F}}$ pour les modes Gaussiens, puisque comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, leur confinement (donc leur masse et leur facteur de qualité) s'améliore avec leur ordre : on retiendra donc qu'au voisinage d'une fréquence correspondant à une résonance Gaussienne, le fond mécanique est négligeable et la réponse du miroir plan-convexe peut être assimilée à celle d'un oscillateur harmonique unique.

Nous allons voir que ceci n'est plus vrai dès lors que l'on sort de la résonance : la contribution globale du miroir prend le pas sur celle d'un mode mécanique à basse fréquence, c'est-à-dire à des fréquences inférieures à celle de la résonance, alors qu'au-delà de cette fréquence, les déplacements du mode interfèrent de manière destructive avec ceux dus au fond mécanique. Nous traitons ces deux cas séparément dans les deux paragraphes suivant, en nous plaçant autour de la fréquence Ω_1 du mode fondamental.

Réponse à basse fréquence

Le cas des basses fréquences est le plus simple à traiter. En effet, le bruit de pression de radiation à basse fréquence s'écrit d'après l'équation (3.4) :

$$S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega\simeq0] \simeq |\chi_{\mathrm{eff}}[\Omega\simeq0]|^2 S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{rad}}[\Omega\simeq0] \tag{3.15}$$

On peut comparer la puissance des déplacements du fond $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega\simeq0]$ à celle d'un mode individuel à basse fréquence $S_{\mathrm{x,n}}^{\mathrm{rad}}[\Omega\simeq0]$. En supposant toujours que le faisceau incident est parfaitement centré et que son col est faible devant l'extension spatiale du mode fondamental, on trouve $S_{\mathrm{x,1}}^{\mathrm{rad}}[\Omega\simeq0]/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega\simeq0] \simeq 4\times10^{-6}$: en d'autre termes, les déplacements que l'on observe hors résonance mécanique peuvent être complètement attribués au mouvement du fond mécanique du miroir mobile.

Il est intéressant de comparer cette réponse à la pression de radiation au bruit thermique à basse fréquence. Le rapport est donné par l'équation (3.8), où la susceptibilité χ_{eff} à basse fréquence est donnée par (3.13) :

$$\frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega\simeq0]}{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}[\Omega\simeq0]} = \frac{32\hbar^2\mathcal{F}^2\overline{I}^{\mathrm{in}}}{\lambda^2 k_B T} \times \frac{(1-\sigma^2)\Omega}{\sqrt{2\pi}Ew_0\phi_0}. \tag{3.16}$$

On peut rapprocher ce rapport de celui que l'on obtient à la résonance mécanique Ω_1, où la susceptibilité χ_{eff} est essentiellement déterminée par la partie à résonance

χ_1^{eff} comme nous venons de le voir (éq.3.14) :

$$\frac{S_{\text{x}}^{\text{rad}}[\Omega_1]}{S_{\text{x}}^{\text{T}}[\Omega_1]} = \frac{32\hbar^2\mathcal{F}^2\overline{T}^{\text{in}}}{\lambda^2 k_B T} \times \frac{1}{M_1\Omega_1\phi_1}. \tag{3.17}$$

Une application numérique montre alors un résultat assez surprenant : en considérant le cas idéal ($M_1 = 153\,mg$, $\Omega_1 \simeq 1.1\,\text{MHz}$ et $\phi_0 = \phi_1$), on trouve un rapport 500 fois plus grand à basse fréquence qu'à résonance. En d'autres termes, en se plaçant hors résonance mécanique, on peut augmenter de manière très significative le rapport signal-à-bruit $S_{\text{x}}^{\text{rad}}/S_{\text{x}}^{\text{T}}$, de presque 30 dB. Cette remarque est extrêmement intéressante en vue de mettre en évidence les corrélations optomécaniques, puisqu'il semble préférable de les observer hors résonance. Remarquons qu'il faut toutefois tempérer ces considérations, qui supposent que l'angle de perte associé au fond mécanique est égal à celui du mode fondamental, ce qui n'est certainement pas exact étant donné la nature des modes contribuant au mouvement d'ensemble. Un grand nombre d'entre eux s'étendent sur toute la surface du miroir, et sont donc sujets à des processus de dissipation supplémentaires (lié au système de fixation des miroirs par exemple) comparativement aux modes Gaussiens dont le confinement permet d'obtenir des pertes très faibles.

De manière générale, on peut définir une masse effective M_0 du fond mécanique de telle manière que la réponse $\chi_{\text{eff}}[\Omega \simeq 0]$ à basse fréquence soit équivalente à celle d'un simple oscillateur harmonique de masse M_0 et de fréquence de résonance égale à celle du mode fondamental Ω_1 :

$$\chi_{\text{eff}}[\Omega \simeq 0] = \frac{1}{M_0\Omega_1^2(1 - i\phi_0)}. \tag{3.18}$$

Cette définition permet de comparer simplement la susceptibilité à basse fréquence avec celle du mode fondamental, caractérisée par une équation similaire avec la masse M_1 et l'angle de perte ϕ_1 (cf éq. 3.1). Ainsi la comparaison entre les rapports $S_{\text{x}}^{\text{rad}}/S_{\text{x}}^{\text{T}}$ à basse fréquence et à résonance s'écrit :

$$\frac{(S_{\text{x}}^{\text{rad}}/S_{\text{x}}^{\text{T}})[\Omega \simeq 0]}{(S_{\text{x}}^{\text{rad}}/S_{\text{x}}^{\text{T}})[\Omega_1]} = \frac{M_1\phi_1}{M_0\phi_0} \tag{3.19}$$

Dans le cas du miroir plan-convexe, la masse effective M_0 est 500 fois plus faible que la masse M_1 du mode fondamental, atteignant ainsi des valeurs inférieures au milligramme. Comme nous l'avions noté dans le chapitre 1 (équation 1.49), cela est dû au fait que le fond mécanique résulte de la sommation d'un grand nombre d'oscillateurs mécaniques. Ainsi, il peut être intéressant d'observer les effets de pression de radiation en dehors des résonances mécaniques, à condition que le rapport ϕ_1/ϕ_0 des angles de perte ne réduise pas trop le gain apporté par le rapport M_1/M_0. C'est ce que nous ferons dans la section 3.3 pour les corrélations optomécaniques.

Réponse à haute fréquence : anti-résonance

Le comportement à haute fréquence est radicalement différent. En effet, les déplacements engendrés par la force de pression de radiation résultent toujours de la superposition du mode individuel et du mouvement d'ensemble, mais ces deux contributions sont opposées en phase à haute fréquence. On s'attend donc à ce qu'il se

produise entre elles une interférence destructive. Plus précisément, le spectre des déplacements induits par pression de radiation s'écrit :

$$S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega] \simeq \left|\chi_1^{\mathrm{eff}}[\Omega] + \chi_{\mathrm{eff}}[\Omega \simeq 0]\right|^2 S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{rad}}[\Omega]. \tag{3.20}$$

En supposant toujours que $\phi_0 \ll 1$, et en utilisant la masse effective M_0 du fond mécanique définie par l'équation (3.18), l'équation (3.20) s'écrit :

$$S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega] \simeq \left|\frac{1}{M_1\Omega_1^2} \times \frac{(1+M_0/M_1)\Omega_1^2 - \Omega^2 + i\Omega_1^2\phi_1}{\Omega_1^2 - \Omega^2 + i\Omega_1^2\phi_1}\right|^2 S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{rad}}[\Omega] \tag{3.21}$$

La réponse du miroir apparaît donc comme le produit de la susceptibilité associée au fond mécanique par le quotient de deux Lorentziennes de mêmes largeurs $\Omega_1\phi_1$: la première, centrée à la fréquence Ω_1, correspond à la résonance du mode fondamental, alors que la seconde, centrée à la fréquence $\sqrt{1+M_0/M_1}\Omega_1$ correspond à une anti-résonance, résultant de l'interférence destructive entre le mode fondamental et le fond mécanique. Pour un miroir plan-convexe, nous avons vu que le rapport M_0/M_1 est de l'ordre de 1/500. L'écart $\delta\Omega$ entre la résonance et l'anti-résonance peut alors se développer au premier ordre :

$$\delta\Omega = \frac{M_0}{2M_1} \times \Omega_1. \tag{3.22}$$

La résonance et l'anti-résonance sont ainsi espacées d'un intervalle de fréquence inversement proportionnel à l'amplitude du fond mécanique. On peut ainsi estimer le bruit de pression de radiation à la fréquence $\Omega_1 + \delta\Omega$ de l'anti-résonance, en supposant que $\delta\Omega \gg \phi_1\Omega_1$ (l'anti-résonance est en dehors du pic de la résonance fondamentale) :

$$S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega_1 + \delta\Omega] \simeq \left|\frac{\phi_1}{2M_0\delta\Omega\Omega_1}\right|^2 S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{rad}}[\Omega_1 + \delta\Omega]. \tag{3.23}$$

Cette expression est à comparer à celle du bruit de l'oscillateur χ_1^{eff} seul à la fréquence $\Omega_1 + \delta\Omega$:

$$S_{\mathrm{x},1}^{\mathrm{rad}}[\Omega_1 + \delta\Omega] \simeq \left|\frac{1}{2M_1\delta\Omega\Omega_1}\right|^2 S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{rad}}[\Omega_1 + \delta\Omega], \tag{3.24}$$

le rapport des expressions (3.23) et (3.24) s'écrivant ainsi :

$$\frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega_1 + \delta\Omega]}{S_{\mathrm{x},1}^{\mathrm{rad}}[\Omega_1 + \delta\Omega]} \simeq \left|\phi_1 \frac{M_1}{M_0}\right|^2 \tag{3.25}$$

Une application numérique montre alors que pour un angle de perte $\phi_1 = 10^{-6}$, l'expression précédente est de l'ordre de 2.5×10^{-7} : à l'anti-résonance, le miroir plan-convexe est en principe quatre millions de fois moins sensible à la pression de radiation que ne le serait un résonateur purement harmonique possédant les mêmes propriétés mécaniques que son mode fondamental Gaussien. Cela signifie concrètement que la mesure devient essentiellement limitée par le bruit de photon à cette fréquence, sa sensibilité pouvant être significativement accrue. Nous développerons plus avant ce point dans la section 3.2.3.

3.1.4 Interprétation modale de la réponse à la pression de radiation

L'approche que nous avons suivie afin de décrire qualitativement le comportement du miroir en réponse à la pression de radiation relie les propriétés de la réponse en dehors de résonance à la masse effective M_0 du fond mécanique. Ainsi, le rapport entre pression de radiation et bruit thermique, ou le phénomène d'anti-résonance peuvent s'exprimer en fonction de M_0, et plus précisément du rapport M_0/M_1 (éqs. (3.19), (3.22) et (3.25)). Ces résultats n'expliquent pas pourquoi la prise en compte du caractère multimode du résonateur, c'est-à-dire d'une collection d'oscillateurs harmoniques, conduit à des effets intéressants à des fréquences en dehors des résonances mécaniques. Pour comprendre ces effets, on peut considérer le cas simple d'un système décrit comme la superposition de seulement deux oscillateurs harmoniques indépendants χ_1 et χ_2 identiques. La réponse d'un tel système à une force de pression de radiation $F_{\mathrm{rad}}[\Omega]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega] &= |\chi_1[\Omega] + \chi_2[\Omega]|^2 S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{rad}}[\Omega] \\ &= 4|\chi[\Omega]|^2 S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{rad}}[\Omega], \end{aligned} \tag{3.26}$$

où $\chi = \chi_1 = \chi_2$. A contrario, les deux oscillateurs étant supposés indépendants, ils sont soumis à deux forces de Langevin thermiques indépendantes, si bien que le spectre de bruit thermique $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ s'écrit comme la somme des spectres de bruit thermique de chaque oscillateur, puisque leurs bruits thermiques sont décorrélés :

$$S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}[\Omega] = |\chi_1[\Omega]|^2 S_{\mathrm{T},1}[\Omega] + |\chi_2[\Omega]|^2 S_{\mathrm{T},2}[\Omega]. \tag{3.27}$$

Les deux oscillateurs étant identiques, les densité spectrales $S_{\mathrm{T},1}$ et $S_{\mathrm{T},2}$ sont égales, et on obtient grâce au théorème fluctuations-dissipation :

$$S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}[\Omega] = 2|\chi[\Omega]|^2 S_{\mathrm{T}}[\Omega], \tag{3.28}$$

où $S_{\mathrm{T}}[\Omega]$ est la densité spectrale de la force thermique de Langevin, pour un seul oscillateur. On voit donc d'après les équations (3.27) et (3.28) que le rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ est deux fois meilleur pour le système constitué des deux oscillateurs que pour chaque oscillateur considéré indépendamment : l'ensemble des deux oscillateurs est équivalent à un oscillateur de mêmes raideur et facteur de qualité, mais de masse moitié, donc sujet à une dissipation seulement deux fois plus grande, alors que la puissance des déplacements induits par la pression de radiation est multipliée par quatre.
Ce raisonnement se généralise évidemment à basse fréquence pour une collection infinie d'oscillateurs harmoniques, puisque leurs réponses sont toutes en phase. On trouve ainsi que le rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ augmente en proportion inverse du rapport des masses M_0/M_1, où M_0 est la masse effective de la collection d'oscillateurs et M_1 la masse d'un seul mode.

3.2 Réponse expérimentale d'un miroir mobile à une force de pression de radiation classique

Nous abordons maintenant la caractérisation expérimentale de la réponse en fréquence d'un miroir mobile à une force de pression de radiation classique. Nous commencerons par décrire le dispositif expérimental, puis nous aborderons la vérification expérimentale des deux conséquences importantes découlant de l'étude que nous venons de mener. Nous présenterons tout d'abord la réponse du mode fondamental de notre résonateur plan-convexe de grand diamètre, et nous verrons qu'elle présente bien toutes les caractéristiques que nous avons prédites dans la section précédente, en insistant plus spécifiquement sur le volet concernant l'optimisation du rapport $S_x^{\mathrm{rad}}/S_x^{\mathrm{T}}$. Nous terminerons par la présentation de l'expérience menée avec une cavité à miroirs cylindriques, qui a permis de mettre en évidence l'annulation de l'action en retour dû à l'effet d'anti-résonance, ainsi que l'augmentation de sensibilité qui y est associée.

3.2.1 Description du dispositif expérimental

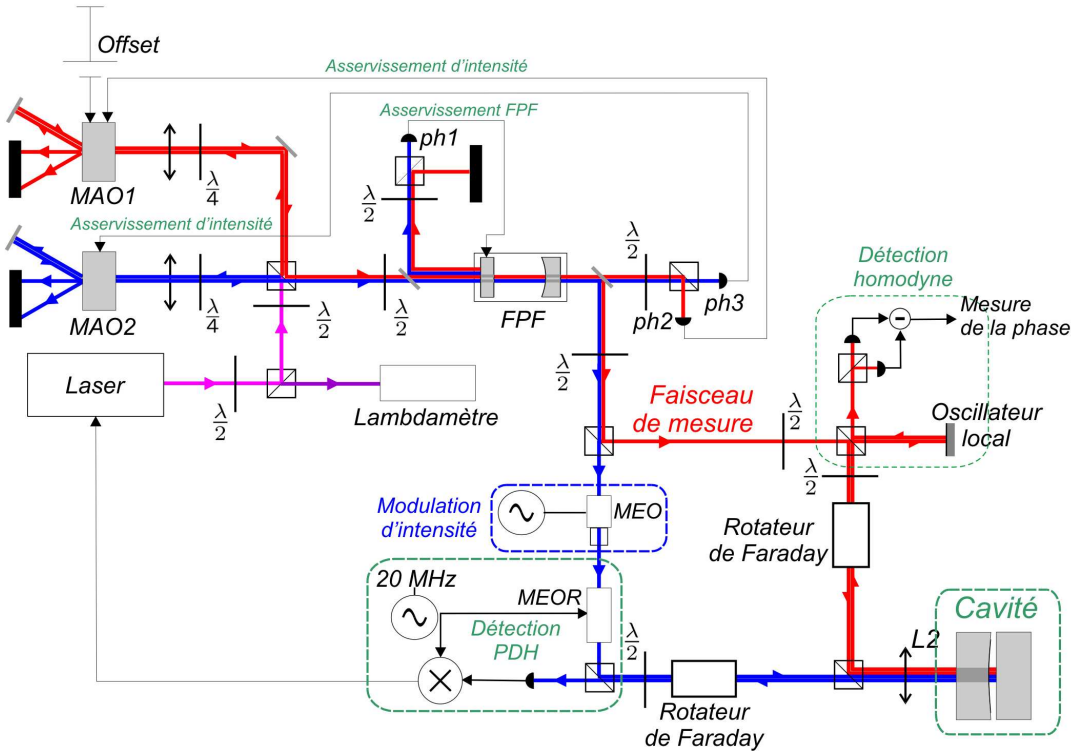

FIGURE 3.1: Schéma du montage expérimental.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté l'expérience de caractérisation spatiale des modes de la cavité à miroirs cylindriques, basée sur l'utilisation d'une force de pression de radiation appliquée sur la face arrière du miroir mobile. Dans cette expérience, la fréquence de l'excitation était égale à la fréquence de résonance du mode considéré, et on ne s'intéressait qu'à l'amplitude des déplacements du miroir en fonction du point d'application de la force. Nous aurions pu employer le

même dispositif pour étudier l'évolution de la réponse du miroir en fonction de la fréquence de la force. Nous avons toutefois préféré utiliser le dispositif de double-injection car celui-ci présente plusieurs avantages. Tout d'abord, même pour un faisceau incident de 1 mW seulement, la puissance intracavité est de plusieurs centaines de Watt, rendant les effets de pression de radiation bien plus intenses qu'avec un faisceau extérieur. Par ailleurs, la mise en évidence des effets décrits dans la section précédente nécessite une bonne adaptation spatiale entre le faisceau excitateur et celui qui fient sonder la réponse du miroir : en particulier les effets liés au fond mécanique nécessitent que les deux faisceaux se recouvrent à mieux que le col optique [56], ce qui est automatiquement réalisé dans la cavité mais plus difficile à obtenir à l'extérieur.

L'idée consiste donc à appliquer au faisceau signal une modulation d'intensité classique, et de mesurer les déplacements induits par pression de radiation à l'aide du faisceau de mesure. Cette expérience est ainsi identique à celle que nous désirons mener afin de mettre en évidence l'action en retour au niveau quantique, excepté le fait qu'elle est réalisée ici avec une modulation classique. Elle constitue donc une occasion idéale de caractériser la double injection, et apparaît comme une étape cruciale pour la mise en oeuvre des corrélations optomécaniques au niveau quantique, comme nous l'avons vu dans la section 1.4.
Le dispositif que nous avons utilisé, schématisé sur la figure 3.1, combine l'ensemble des améliorations que nous avons apportées à notre dispositif, et que nous avons décrites dans le chapitre précédent. Pour pouvoir moduler l'intensité du faisceau signal, nous avons inséré un modulateur électro-optique non-résonnant (modèle LM 202 de chez GSÄNGER, sur le trajet du faisceau intense, entre le cube séparant les deux voies et le modulateur électro-optique résonnant de la détection de Pound-Drever (cf figure 3.1). Les lignes neutres de ce modulateur, dont le fonctionnement est similaire à celui que nous utilisions auparavant pour asservir l'intensité du faisceau en sortie du FPF (voir section 1.5.2), sont orientées à 45° par rapport à la direction de la polarisation du faisceau intense. Un cube séparateur de polarisation est placé à la sortie de l'électro-optique et réalise l'atténuation du faisceau en sélectionnant la polarisation sortante verticale. Ceci permet également d'attaquer convenablement le modulateur résonnant.

Parasites électriques

Le modulateur électro-optique non-résonnant que nous utilisons est alimenté en haute tension, ce qui ne permet pas d'adapter son entrée sur 50 Ohm : un rayonnement parasite est par conséquent inévitable, et peut produire des signaux parasites au niveau de l'électronique très sensible de la détection homodyne. Pour observer ces parasites, il suffit d'appliquer une modulation sur le modulateur, et d'acquérir à l'analyseur de spectre le signal délivré par la détection homodyne à la fréquence de cette modulation, un cache ayant été préalablement placé devant les photodiodes. Nous avons ainsi constaté la présence d'un signal dont la puissance en sortie des photodiodes peut atteindre −50 dBm, de l'ordre de la puissance générée par les déplacements du miroir mobile. Pour minimiser la contribution de ces parasites électromagnétiques, nous avons disposé un blindage en aluminum autour des connexions électriques du modulateur, ce qui a permis de réduire d'un facteur 10 000 la puissance des parasites au niveau de la détection.
Ce niveau reste cependant comparable à celui du bruit de photon usuellement observé. Pour parfaire l'isolation, nous avons profité de la réponse non-linéaire de l'ensemble formé par l'électro-optique et son cube de sortie, qui est sinusoïdale et

qui présente donc des maxima et des minima en fonction de la tension de biais que l'on applique sur le modulateur. Au voisinage de ces points particuliers, l'intensité transmise par la cavité est proportionnelle au carré de la modulation de tension incidente, c'est-à-dire qu'elle est la somme d'une valeur moyenne et d'un terme oscillant à la fréquence double de celle de la modulation de tension (figure 3.2). Pour moduler l'intensité du faisceau intense à une fréquence Ω, on applique donc au modulateur une tension de biais correspondant au minimum de transmission de l'électro-optique, à laquelle on ajoute une modulation à la fréquence $\Omega/2$. Les parasites électriques, à la féquence $\Omega/2$, sont alors complètement découplés de la modulation à la fréquence Ω.

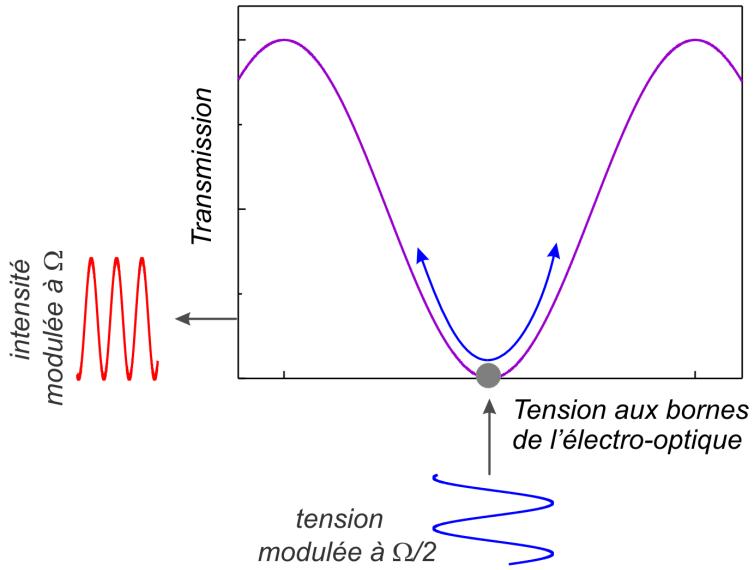

FIGURE 3.2: Pour s'affranchir des perturbations électriques qui résultent du rayonnement électromagnétique du modulateur, on lui applique une modulation de tension à la fréquence $\Omega/2$ au voisinage de son minimum de transmission. Il en résulte une modulation de la transmission de l'électro-optique à la fréquence double Ω, ce qui permet de dissocier les parasites du signal.

Isolation optique

Une fois les parasites électriques éliminés, il faut encore s'assurer d'une parfaite isolation optique des deux faisceaux. Rappelons que nous désirons en effet sonder les déplacements du miroir qui résultent d'une modulation d'intensité du faisceau signal incident. Si une partie de ce faisceau passe dans la voie sonde, l'observation du mouvement du miroir se retrouverait contaminé par une modulation d'intensité à la fréquence d'observation des déplacements, rendant la mesure inexploitable. Afin d'optimiser l'isolation optique, la première étape consiste donc à balayer la fréquence du laser alors que seul le faisceau signal est envoyé dans la cavité, de manière à visualiser le profil d'intensité en transmission de la cavité au voisinage d'une résonance optique. A l'aide des deux lames $\lambda/2$ et $\lambda/4$, placées avant la cavité (voir la section 2.4.1), on aligne la polarisation du faisceau intense sur l'un des axes propres de la cavité, qui dépendent de la birefringence de cette dernière. On s'assure ainsi que la polarisation du faisceau réfléchi coïncide avec celle du faisceau incident et est donc renvoyé dans la voie du faisceau signal.

Pour réaliser un réglage fin de la polarisation, on asservit ensuite la cavité sur le faisceau signal, auquel on applique une modulation d'intensité à une fréquence Ω donnée, suivant la méthode exposée dans le paragraphe précédent. Le faisceau sonde étant toujours supprimé, on regarde la somme des photocourants délivrés par les photodiodes de la détection homodyne à la fréquence Ω, afin de contrôler le niveau de contamination résiduelle du faisceau signal dans la voie sonde. On optimise ainsi le réglage des orientations des lames $\lambda/2$ et $\lambda/4$, afin de minimiser la modulation résiduelle. L'opération terminée, on obtient une réjection de l'ordre de $-35\ dB$.

On peut finalement s'assurer que l'on mesure bien un déplacement uniquement provoqué par la pression de radiation lorsque l'on module l'intensité du faisceau signal. On mesure pour cela la puissance délivrée par la détection homodyne en présence d'une modulation d'intensité du faisceau signal d'amplitude fixée, pour différentes intensités du faisceau sonde. Si le signal mesuré résulte bien d'un déplacement du miroir, sa puissance doit être proportionnelle à l'intensité de la sonde comme le montre les équations (1.42) et (1.117). En revanche, si un parasite optique recouvre la modulation de phase résultant des déplacements du miroir, on s'attend à ce que la puissance détectée ne dépende pas de l'intensité du faisceau sonde. La figure 3.3 montre l'évolution en fonction de l'intensité du faisceau sonde de la puissance du signal de détection homodyne, à la fréquence $\Omega/2\pi = 1\,MHz$ de la modulation d'intensité (obtenue en appliquant une modulation de tension à $500\,kHz$ sur le modulateur électro-optique non résonnant). Le niveau de cette modulation est fixé de sorte que la puissance du signal détecté soit très supérieure à celle du bruit thermique (environ $50\,dB$ au-dessus). On constate que cette évolution est bien linéaire dans la plage d'intensité sur laquelle nous travaillons habituellement, entre $50\ \mu W$ et $500\ \mu W$, ce qui démontre que le signal de la détection homodyne correspond bien à un déplacement induit par les fluctuations d'intensité du faisceau intense.

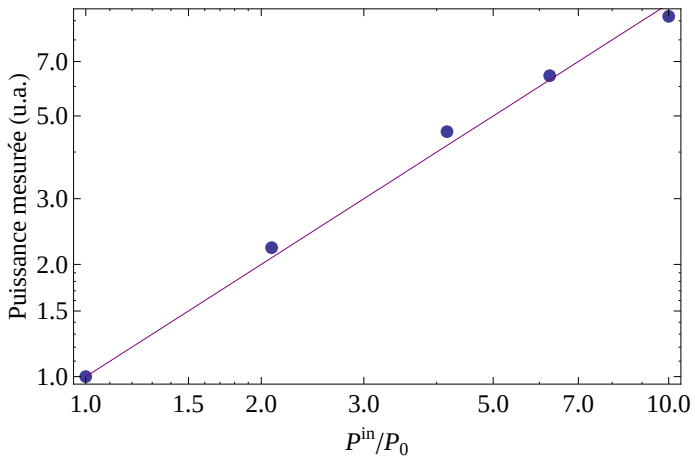

FIGURE 3.3: Puissance du signal délivré par la détection homodyne à $\Omega/2\pi = 1\,MHz$ en fonction de l'intensité du faisceau sonde. L'axe horizontal est normalisé à la valeur la plus basse utilisée $P_0 = 48\ \mu W$, et l'axe vertical est normalisé à la valeur de la puissance du signal mesurée pour $P = P_0$. Les points mesurés expérimentalement s'alignent sur la première bissectrice, ce qui démontre bien que le signal détecté n'est pas contaminé par un parasite optique du faisceau signal.

Principe de l'acquisition de la réponse mécanique
L'acquisition de la réponse spectrale d'un mode mécanique à la pression de radiation est gérée par ordinateur grâce à une interface développée dans l'équipe, qui permet de piloter par protocole GPIB un générateur HP et un analyseur de spectres HP 8560 E, servant respectivement à générer le signal excitateur et à acquérir la réponse sur la détection homodyne. La sortie du générateur est sommée à une tension de biais continue (permettant de se placer au minimum de transmission de l'électro-optique non résonnant), puis envoyée sur un amplificateur haute tension Tegam 2340 alimentant le modulateur électro-optique.
Certains paramètres doivent être définis manuellement sur les deux appareils avant de démarrer l'acquisition : on choisit le niveau de modulation sur le générateur, et on place l'analyseur de spectre en mode "0 span", qui correspond à une plage d'analyse de largeur nulle. Le programme d'acquisition permet d'initialiser différents paramètres comme la fréquence centrale, la largeur de la plage d'observation, le pas et la vitesse du balayage. Si l'on décide de se placer au voisinage d'une résonance mécanique n du miroir, on choisira un pas faible devant sa largeur $\Gamma_n/2\pi$, et un temps de balayage grand devant son temps de relaxation $2\pi/\Gamma_n$.
L'acquisition proprement dite est organisée en cycles dont la durée est déterminée par la vitesse de balayage. Chaque cycle permet d'acquérir la réponse du miroir à une fréquence donnée de la plage d'analyse, puis le programme incrémente d'un pas la fréquence aussi bien sur le générateur que sur l'analyseur de spectre, avant de passer au cycle suivant.
Ce programme fonctionne donc comme un analyseur de réseau, mais avec une plus grande souplesse dans l'ajustement de certains paramètres. La résolution spectrale de la mesure n'est ainsi limitée que par la définition du générateur utilisé (ici le centième de Hz), le nombre de points est pratiquement infini, et l'on bénéficie de la résolution verticale extrêmement précise d'un analyseur de spectre pour la mesure. L'unique écueil dont souffre cette démarche résulte des temps d'accès aux différents appareils, qui impliquent des durées d'acquisition pouvant facilement atteindre l'heure pour une mesure s'effectuant sur quelques kilohertz de large avec nos miroirs. On peut toutefois noter qu'un analyseur de réseau, bien que considérablement plus rapide, n'est pas prévu pour exciter un système à $\Omega/2$ et sonder la réponse correspondante à la fréquence Ω.

3.2.2 Mode fondamental Gaussien du plan-convexe

Nous présentons maintenant la réponse expérimentale du mode mécanique fondamental du miroir plan-convexe de grand diamètre, que nous avons obtenue suivant la méthode que nous venons d'exposer. L'acquisition s'est déroulée sur une plage de 200 Hz divisée en 400 points, chacun d'entre-eux étant moyenné pendant environ 3 s, la durée totale de la mesure approchant ainsi la demi-heure. La courbe de la figure 3.4 montre le résultat correspondant, normalisé à la valeur de la réponse atteinte à la résonance mécanique. La courbe (b) montre le bruit thermique également normalisé par sa valeur à résonance, acquis en l'absence de modulation.
On retrouve sur cette figure toutes les propriétés établies dans la section 3.1 : au voisinage de la résonance, la réponse du miroir peut bien être assimilée à celle d'un oscillateur harmonique isolé. A haute fréquence, on note la présence d'une anti-résonance, qui révèle une interférence destructive entre le mode mécanique fondamental et le fond mécanique lié à l'ensemble des autres modes du résonateur. Enfin, on constate que le fond mécanique répond beaucoup mieux à la pression de radiation qu'au bruit thermique à basse fréquence. Plus quantitativement, l'écart entre

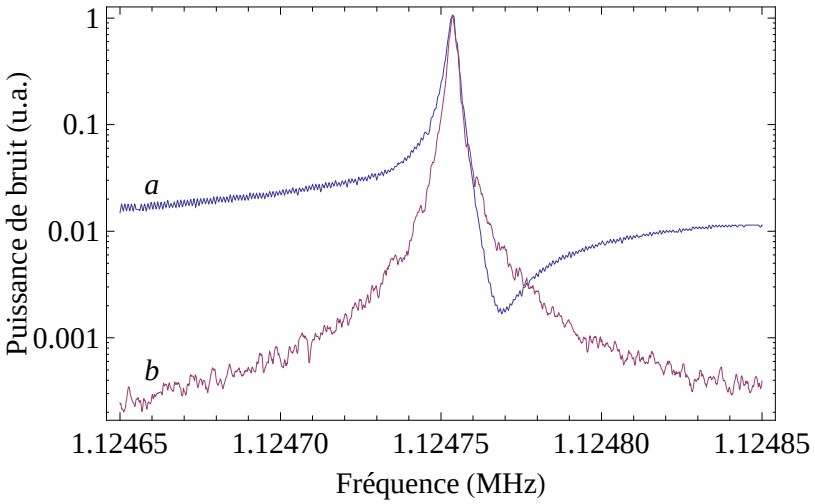

FIGURE 3.4: Réponse du fondamental du miroir plan-convexe à une force de pression de radiation et bruit thermique. La réponse à la pression de radiation (courbe a) a été acquise suivant la méthode décrite dans la section précédente. Le bruit thermique (courbe b) est représenté afin de mieux saisir les différences qui le distinguent du bruit de pression de radiation, et que nous avons évoquées dans la section 3.1.3.

les courbes (a) et (b) en dehors de la résonance mécanique montre que le rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ est 100 fois plus grand à basse fréquence qu'à la résonance mécanique :

$$\frac{S_x^{\mathrm{rad}}[\Omega < \Omega_1]}{S_x^{\mathrm{T}}[\Omega < \Omega_1]} \simeq 100 \frac{S_x^{\mathrm{rad}}[\Omega_1]}{S_x^{\mathrm{T}}[\Omega_1]}. \tag{3.29}$$

On peut comparer ce résultat au facteur 500 espéré théoriquement à partir du rapport des masses M_1/M_0 (équation 3.19). La différence est certainement liée au fait que les angles de pertes ϕ_0 et ϕ_1 du fond mécanique et du mode fondamental ne sont pas égaux. Participent effectivement au fond mécanique des modes qui, bien que beaucoup plus lourds, s'étendent sur toute la surface du miroir et présentent de ce fait des facteurs de qualité relativement médiocres comme nous l'avons vu dans la section 1.5.4. Leur contribution, associée à celle des modes du coupleur d'entrée que nous avons jusqu'alors négligée, participe donc à l'augmentation du fond thermique. On retiendra toutefois que l'on bénéficie d'une augmentation substantielle du rapport $S_x^{\mathrm{rad}}/S_x^{\mathrm{T}}$ lorsque l'on se place en dehors de la résonance mécanique, c'est-à-dire aussi bien à basse férquence qu'à haute fréquence au-delà de l'antirésonance. Cela signifie en particulier que l'on s'attend à ce que les corrélations optomécaniques soient 100 fois plus fortes hors résonance qu'à résonance.

3.2.3 Suppression de l'action en retour dans une cavité à miroirs cylindriques

Nous avons mis en évidence dans la section précédente un effet d'anti-résonance entre le mode fondamental et le fond mécanique, qui se traduit par une réduction de la réponse à la pression de radiation à une fréquence légèrement supérieure à la

résonance mécanique. Cet effet peut être mis à profit pour réduire l'action en retour dans une mesure et ainsi améliorer la sensibilité au-delà de la limite quantique standard. Nous présentons dans cette section ces possibilités, en utilisant la cavité à miroirs cylindriques où les deux miroirs sont presque identiques. Nous montrons en particulier que l'effet d'anti-résonance qui se produit entre deux résonances similaires des deux miroirs permet d'améliorer la sensibilité dans les mesures de déplacement ou de force.

Annulation de l'action en retour dans une cavité à deux miroirs mobiles

L'idée consiste donc à former une cavité composée de deux miroirs mobiles. Nous nous intéressons à la mesuire d'une variation $\delta L_{\rm sig}$ de la longueur de la cavité, qui peut correspondre à une variation réelle de la longueur due par exemple à une force appliquée sur l'un des miroirs, ou à une variation apparente de longueur (onde gravitationnelle dans un détecteur interférométrique, modulation de fréquence du laser...). La mesure est entachée par le bruit quantique de phase $\delta\varphi^{\rm in}$ du faisceau incident, ainsi que par les fluctuations de position $\delta X_{\rm e}$ et $\delta X_{\rm f}$ du miroir d'entrée et du miroir de fond provoquées par l'action en retour[1]. Si l'on néglige le filtrage par la cavité ($\Omega \ll \Omega_{\rm cav}$), les fluctuations de phase à une fréquence Ω du champ réfléchi par la cavité lorsque celle-ci se trouve à résonance optique s'écrivent, d'après l'équation (1.52) :

$$\delta\varphi^{\rm out}[\Omega] = \delta\varphi^{\rm in}[\Omega] + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}[\delta X_{\rm f}[\Omega] - \delta X_{\rm e}[\Omega] + \delta L_{\rm sig}[\Omega]]. \tag{3.30}$$

En notant $\chi_{\rm e}$ et $\chi_{\rm f}$ les susceptibilités mécaniques associées au miroir d'entrée et au miroir de fond, les fluctuations de longueur $\delta X_{\rm f} - \delta X_{\rm e}$ provoquées par l'action en retour s'écrivent, dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire :

$$\delta X_{\rm f}[\Omega] - \delta X_{\rm e}[\Omega] = (\chi_{\rm e}[\Omega] + \chi_{\rm f}[\Omega])F_{\rm rad}[\Omega], \tag{3.31}$$

où $F_{\rm rad}$ est la force de pression de radiation exercée par le champ intracavité sur les miroirs, le changement de signe dans le membre de droite de l'équation précédente provenant de la direction opposée de cette force sur les deux miroirs. Un calcul strictement identique à celui que nous avons présenté dans la section 1.2.3 permet d'obtenir la limite de sensibilité $\delta L_{\rm min}$ à la fréquence Ω :

$$\delta L_{\rm min}[\Omega] = \sqrt{\hbar|\chi_{\rm e}[\Omega] + \chi_{\rm f}[\Omega]|}. \tag{3.32}$$

Comparé à la limite quantique standard en présence d'un seul miroir (équation 1.55), nous avons donc remplacé la susceptibilité du miroir par la la somme $\chi_e + \chi_f$. Lorsque les deux résonateurs peuvent être décrits comme des oscillateurs harmoniques dont les fréquences de résonance $\Omega_{\rm e}$ et Ω_f sont différentes, des arguments analogues à ceux que nous avons présentés dans la section 3.1 montrent qu'il se produit une anti-résonance dans la bande de fréquence $[\Omega_{\rm e}, \Omega_{\rm f}]$, correspondant à une interférence destructive entre les actions en retour sur les deux miroirs. A la fréquence $\Omega_{\rm AR}$ de l'anti-résonance, les parties réelles des deux susceptibilités se compensent exactement, et l'équation (3.32) se réduit à :

$$\delta L_{\rm min}[\Omega_{\rm AR}] = \sqrt{\hbar|{\rm Im}\{\chi_{\rm e}[\Omega_{\rm AR}] + \chi_{\rm f}[\Omega_{\rm AR}]\}|}. \tag{3.33}$$

1. On néglige ici le bruit thermique.

A cette fréquence, la sensibilité atteint la limite quantique ultime [14], et se trouve donc très significativement améliorée, les parties imaginaires des susceptibilités étant en général très faibles devant leurs parties réelles.
Cette possibilité de battre la limite quantique standard par annulation de l'action en retour à la fréquence de l'anti-résonance a d'abord été étudiée dans le contexte de la détection des ondes gravitationnelles [73]. Il s'agissait de caractériser et d'optimiser le fonctionnement d'une antenne à double sphères [74], qui consiste en deux sphères imbriquées l'une dans l'autre, séparées par un faible espace dont on peut venir sonder les variations de longueur par interférométrie. Les modes fondamentaux de ces deux sphères admettant des fréquences de résonance différentes, on bénéficie d'une annulation de l'action en retour qui permet en principe d'améliorer la sensibilité du détecteur.

Amélioration de la sensibilité de la mesure d'une force

L'annulation de l'action en retour est aussi utile pour la mesure d'une petite force. Le principe de la mesure d'une force consiste à utiliser une transducteur mécanique, par exemple le miroir de fond d'une cavité Fabry-Perot, pour transformer la force F_{sig} à mesurer en un déplacement δX_{sig} donné par :

$$\delta X_{\text{sig}} = \chi_f[\Omega] F_{\text{sig}}[\Omega], \tag{3.34}$$

où χ_f est la susceptibilité mécanique du transducteur. La mesure la plus précise du déplacement δX_{sig} conduit à une limite quantique standard pour la mesure de force (voir équation (1.55)) [75] :

$$\delta F_{\text{SQL}}[\Omega] = \sqrt{\frac{\hbar}{|\chi_{\text{f}}[\Omega]|}}. \tag{3.35}$$

L'idée pour profiter de l'annulation de l'action en retour consiste à utiliser un miroir d'entrée de cavité Fabry-Perot également mobile, mais qui n'est pas soumis à la force à mesurer. Ainsi le signal δX_{sig} à mesurer reste inchangé (équation 3.34), tandis que les effets de pression de radiation sont maintenant proportionnels à la somme $\chi_{\text{e}} + \chi_{\text{f}}$ des susceptibilités, et non plus à la susceptibilité χ_{f} seule. On peut alors profiter de l'annulation de l'action en retour à l'intérieur de la cavité, et ainsi bénéficier d'une sensibilité à la force associée au plus petit déplacement observable (3.32) :

$$\delta F_{\min}[\Omega] = \frac{\sqrt{\hbar|\chi_{\text{f}}[\Omega] + \chi_{\text{e}}[\Omega]|}}{|\chi_{\text{f}}[\Omega]|}, \tag{3.36}$$

qui n'est plus limitée par δF_{SQL} au voisinage de l'anti-résonance Ω_{AR}.

Démonstration expérimentale avec une cavité à miroirs cylindriques

Notre cavité de très grande finesse à miroirs cylindriques se prête idéalement à une vérification expérimentale des effets que nous venons de décrire. En effet, les deux miroirs étant quasiment identiques, leurs résonances mécaniques sont très semblables, et le spectre de la cavité s'organise donc en doublets de résonances. Au voisinage d'un tel doublet, on peut ainsi négliger la contribution du fond mécanique, et considérer la cavité comme un ensemble de deux oscillateurs harmoniques, qui correspond bien au modèle théorique présenté dans les deux paragraphes précédents.

Nous avons donc commencé par sélectionner un doublet de résonance (voir figure 3.5). Nous nous sommes assurés en particulier que chacune de ces résonances appartenait bien à un seul des deux miroirs. Nous avons pour cela utilisé le dispositif que nous avons présenté dans le cadre de la caractérisation spatiale des modes mécaniques d'un miroir cylindrique dans la section 1.5.4 : on excite sélectivement le miroir avant ou bien le miroir arrière, aux fréquences voisines de celles du doublet, à l'aide d'une modulation d'intensité appliquée à un faisceau externe. On observe alors laquelle des deux résonances répond à l'excitation, ce qui permet de l'associer au miroir sur lequel la force de pression de radiation externe s'exerce.
Nous avons cherché à mettre en évidence l'annulation de l'action en retour entre

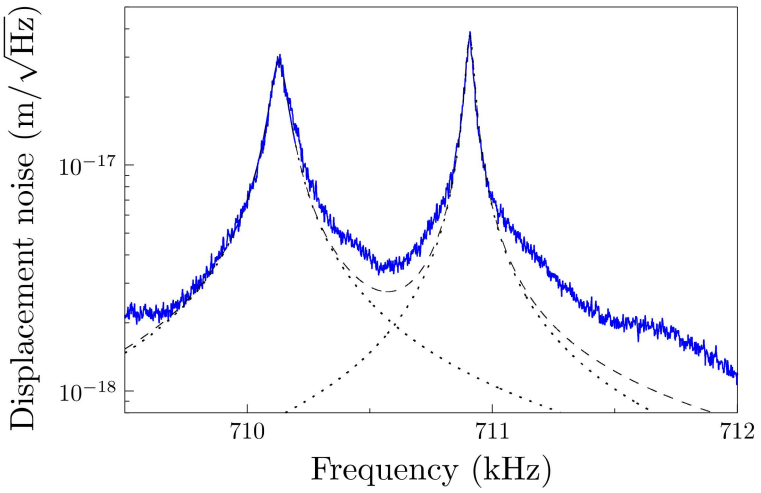

FIGURE 3.5: Bruit thermique au voisinage d'un doublet de résonance de la cavité à miroirs cylindriques. Les propriétés de chacune des résonances sont les suivantes : $\Omega_e/2\pi = 710,1$ kHz, $M_e = 0,64$ g et $Q_e = 10\ 500$ pour le miroir d'entrée, et $\Omega_f/2\pi = 710,9$ kHz, $M_f = 0,84$ g et $Q_f = 21\ 500$ pour le miroir de fond. Les courbes en pointillés sont les ajustements Lorentziens associés à chaque mode, et la courbe en tirets est la somme de ces deux ajustements.

ces deux résonances, mais aussi l'amélioration de sensibilité qui y est associée, en réponse à une variation apparente de la longueur de la cavité, ou bien à une force faible [9]. Nos mesures de déplacement étant limitées essentiellement par le bruit thermique, nous avons recours à un bruit d'intensité classique, simulant le bruit quantique à un niveau très supérieur à celui du bruit thermique : un bruit blanc Gaussien est pour cela appliqué au modulateur électro-optique non résonnant placé sur le trajet du faisceau signal. Pour éviter la saturation de l'électro-optique, ce bruit blanc est en fait filtré sur une plage de 600 Hz de large autour de de la fréquence d'analyse de l'analyseur de spectres utilisé pour mesurer les déplacements. Cette plage étant grande devant la résolution spectrale de l'analyseur de spectre (10 Hz), cela permet de considérer les fluctuations d'intensité incidentes comme un bruit blanc.
En plus de ce bruit d'intensité, nous appliquons un signal avec une amplitude très faible. Le but de l'expérience est de démontrer que ce signal, complètement recouvert par le bruit classique de pression de radiation au voisinage immédiat des deux résonances mécaniques, devient détectable à la fréquence de l'anti-résonance, ce qui atteste de l'augmentation de la sensibilité de la mesure.
Nous avons utilisé deux types de signaux : nous avons tout d'abord appliqué

une modulation de fréquence au laser, par l'intermédiaire du modulateur électro-optique interne de la cavité laser. Comme nous l'avons déjà signalé, une telle modulation de fréquence est équivalente à une modulation de la longueur de la cavité, pouvant s'apparenter à l'effet d'une onde gravitationnelle. Le protocole de mesure est identique à celui de l'expérience présentée dans la section précédente, à l'exception de la modulation de fréquence, que nous activons à différents moment de l'acquisition, afin de produire un signal à des fréquences prédéterminées.
Le résultat de l'acquisition est présenté sur la figure 3.6. La courbe (a) montre

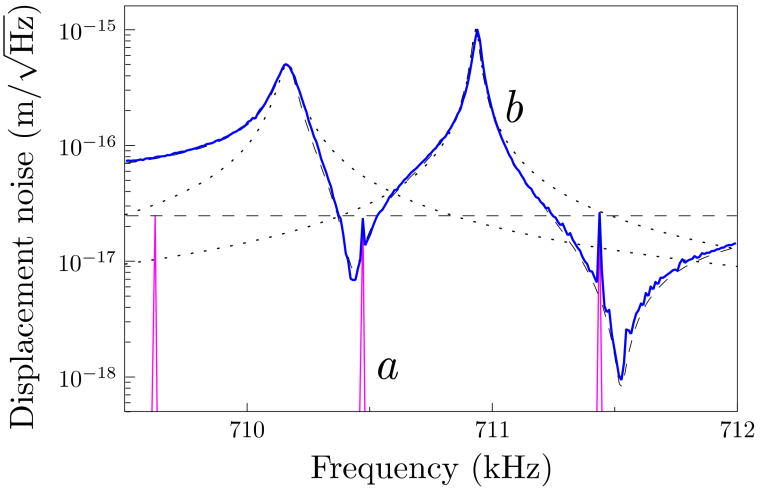

FIGURE 3.6: Amélioration de la mesure d'une variation de longueur de la cavité. La courbe a, correspondant à trois modulations de la longueur optique de la cavité à des fréquences différentes, est indétectable, sauf dans les zones des anti-résonances. La courbe b est obtenue en présence du bruit de pression de radiation induit par le faisceau intense. Les courbes en pointillés correspondent aux Lorentziennes décrivant les résonances individuelles.

le signal, qui est constitué de 3 modulations de la longueur optique de la cavité, situées à des fréquences de part et d'autre du doublet de résonances mécaniques. La courbe (b) montre le résultat de la mesure obtenu à partir de la phase du faisceau réfléchi. Cette courbe présente essentiellement les mouvements des miroirs en réponse au bruit de pression de radiation du faisceau intense, sur lesquels est superposé le signal. On constate la présence de deux anti-résonances. La première résulte de l'interférence destructive entre les modes associés à chacun des miroirs, tandis que la seconde, similaire à celle que nous avons observée avec le miroir plan-convexe, provient de l'interférence des deux résonances avec le fond mécanique. Le signal est indétectable, excepté au voisinage des fréquences des anti-résonances où les effets de pression de radiation deviennent très petits, ce qui constitue bien la preuve expérimentale que la sensibilité est augmentée aux fréquences voisines des anti-résonances (jusqu'à un facteur 200 pour l'anti-résonance de droite).
La seconde partie de l'expérience consiste à remplacer la modulation de fréquence par une force de pression de radiation exercée par un faisceau laser externe sur l'un des deux miroirs. Le résultat de l'acquisition est présenté sur la figure 3.7 : on constate une nouvelle fois que le signal est invisible, sauf au voisinage des fréquences des anti-résonances.

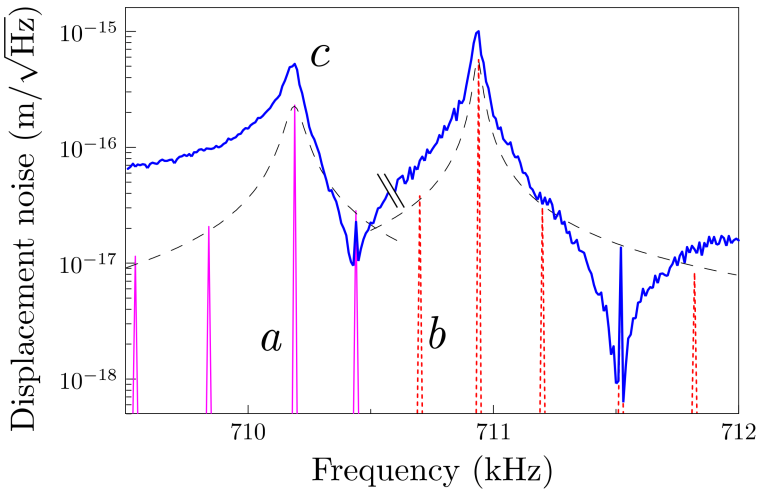

FIGURE 3.7: Amélioration de la mesure d'une force faible. Les courbes a et b correspondent à des modulations d'intensité appliquées à différentes fréquences respectivement sur le miroir avant et sur le miroir arrière. L'effet de ces modulations sur le mouvement des miroirs est indétectable, excepté dans les zones des anti-résonances. La courbe c est obtenue en présence du bruit de pression de radiation induit par le faisceau intense. Les courbes en pointillés correspondent aux réponses individuelles de chaque miroir à la pression de radiation externe, en absence du bruit de pression de radiation classique interne.

3.3 Corrélations optomécaniques au niveau classique

Nous abordons maintenant la mise en évidence des corrélations optomécaniques entre deux faisceaux, induites par les effets de pression de radiation sur le mouvement du miroir. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 1, ces corrélations sont à la base du bruit de pression de radiation et du mécanisme permettant de réaliser une mesure QND. Nous présentons ici les corrélations optomécaniques obtenues à l'aide d'un bruit d'intensité classique de façon à rendre les effets de pression de radiation supérieurs au bruit thermique. la situation inverse d'un bruit d'intensité très faible est abordée dans le chapitre 4.

Nous commençons par réaliser une meilleure modélisation d'un bruit Gaussien filtré que celle que nous avions utilisée dans la section précédente pour simuler le bruit quantique d'intensité. Nous présentons ensuite les résultats obtenus en dehors de la résonance mécanique, puis autour de la fréquence de résonance mécanique.

3.3.1 Construction du bruit classique d'intensité

Nous avons vu au début du premier chapitre (section 1.2.1) que le bruit quantique d'intensité est un bruit blanc Gaussien. Si l'on veut que notre bruit classique d'intensité soit le parfait reflet du bruit quantique (tout en ayant une amplitude beaucoup plus grande), il faut a priori le doter des mêmes propriétés statistiques. Toutefois, la force de pression de radiation étant limitée par la puissance incidente

disponible, il n'est pas possible de réaliser un bruit large bande tout en disposant d'une densité spectrale suffisante pour dépasser celle du bruit thermique. Nous avons donc cherché à construire un bruit similaire à celui que nous avons présenté dans la section 3.2.3, c'est-à-dire limité à une plage de quelques centaines de Hz : ainsi, on pourra considérer ce bruit comme blanc tant que l'on se limitera à l'analyse de la réponse du miroir à la force de pression de radiation sur une bande spectrale inférieure à cette largeur.

Espace des phases d'un bruit Gaussien filtré

Cette restriction du domaine de nos mesures à une largeur spectrale faible devant la fréquence à laquelle nous effectuons nos observations (typiquement la fréquence de résonance du fondamental Gaussien, i.e. 1 MHz) nous suggère de définir le signal par ses quadratures. En effet, si un bruit blanc est caractérisé par une fonction temporelle aléatoire Gaussienne $s(t)$ ayant un temps de mémoire infiniment court et des composantes spectrales à toute fréquence, un bruit filtré sur une bande spectrale $\Delta\Omega$ faible devant sa fréquence centrale $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$ se résume essentiellement à une porteuse oscillant à la fréquence $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$, dont l'enveloppe fluctue sur un temps caractéristique long devant la période de la porteuse. Plus précisément, si l'on note $H[\Omega]$ la fonction de transfert du filtre, le bruit filtré s'écrit :

$$\tilde{s}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega t} H[\Omega] s[\Omega], \tag{3.37}$$

où $s[\Omega]$ désigne la transformée de Fourier du bruit blanc $s(t)$. Il est alors naturel de centrer la somme précédente autour de la pulsation Ω_{ref}, ce qui revient à se placer dans le référentiel tournant, et permet de s'affranchir de l'oscillation de la porteuse :

$$\tilde{s}(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} H[\Omega_{\text{ref}} + \omega] s[\Omega_{\text{ref}} + \omega] \right) e^{i\Omega_{\text{ref}} t}. \tag{3.38}$$

On peut donc effectivement constater sur cette expression que le bruit apparaît comme le produit d'un terme oscillant à la pulsation Ω_{ref} et d'un terme d'amplitude lentement variable, l'argument de l'intégrale ne prenant de valeurs significatives que pour des pulsations ω faibles devant Ω_{ref} par hypothèse. Lorsque le signal est réel ($\tilde{s}(t) = (\tilde{s}(t))^*$), il est plus commode de l'exprimer selon les fonctions sinus et cosinus. En sommant l'équation (3.38) à son expression conjuguée, on trouve facilement :

$$\tilde{s}(t) = \tilde{S}_1(t) \cos[\Omega_{\text{ref}} t] + \tilde{S}_2(t) \sin[\Omega_{\text{ref}} t], \tag{3.39}$$

où $\tilde{S}_1$ et $\tilde{S}_2$ sont les *quadratures* du bruit filtré, données par :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \left(H[\Omega_{\text{ref}} + \omega] s[\Omega_{\text{ref}} + \omega] + H[-\Omega_{\text{ref}} + \omega] s[-\Omega_{\text{ref}} + \omega] \right) \\ \tilde{S}_2(t) &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \left(H[\Omega_{\text{ref}} + \omega] s[\Omega_{\text{ref}} + \omega] - H[-\Omega_{\text{ref}} + \omega] s[-\Omega_{\text{ref}} + \omega] \right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Remarquons que lorsqu'on applique ces formules à un signal $s[\Omega]$ dont l'extension spectrale est inférieure à celle du filtre, on peut assimiler la valeur de celui-ci à

l'unité dans les équations précédentes : l'expression des composantes de Fourier de $\tilde{S}_1$ et $\tilde{S}_2$ coïncide alors avec la définition usuelle des quadratures, telle qu'elle existe par exemple pour un mode du champ électromagnétique [76, 77]. Le report des deux quadratures dans un plan définit alors ce que l'on appelle *l'espace des phases* du signal, qui est une représentation particulièrement bien adaptée à la visualisation des corrélations optomécaniques, comme nous allons le voir plus loin.

Quadratures d'un bruit blanc stationnaire

En théorie du signal, on caractérise les propriétés statistiques d'un bruit Gaussien à l'aide de sa fonction d'autocorrélation $C_{s-s}(t,t')$, qui est donnée par [2] :

$$C_{s-s}(t,t') = \langle s(t)s(t')\rangle, \tag{3.41}$$

où $\langle ...\rangle$ désigne la moyenne sur l'ensemble des réalisations du signal. Par définition, un bruit blanc stationnaire est un signal dont la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$C_{s-s}(t,t') = S_s\delta(t-t'), \tag{3.42}$$

où S_s est la densité spectrale du bruit, uniforme par définition. Cette condition signifie qu'il n'existe aucune corrélation entre deux réalisations du signal à des instants t et t' distincts, ce qui correspond bien à un temps de mémoire nul. Le spectre $S_s[\Omega]$ est relié à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation définie par :

$$C_{s-s}[\Omega,\Omega'] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' e^{i(\Omega t+\Omega' t')}\langle s(t)s(t')\rangle, \tag{3.43}$$

$$C_{s-s}[\Omega,\Omega'] = 2\pi\delta(\Omega+\Omega')S_s. \tag{3.44}$$

Par comparaison avec la définition (1.20) du spectre $S_s[\Omega]$ d'un bruit stationnaire, un bruit blanc se définit ainsi comme un signal aléatoire dont les composantes spectrales de fréquences distinctes sont décorrélées, et dont la densité spectrale est constante.

Pour comparer deux signaux aléatoires $x(t)$ et $y(t)$, on définit de même leur fonction de corrélation $C_{x-y}(t,t')$, qui est une généralisation de la fonction d'autocorrélation :

$$C_{x-y}(t,t') = \langle x(t)y(t')\rangle. \tag{3.45}$$

Deux signaux aléatoires sont alors indépendants si leur fonction de corrélation est nulle à tout instant t,t', ou de manière équivalente si leur fonction de corrélation spectrale $C_{x-y}[\Omega,\Omega']$ (définie comme la transformée de Fourier de C_{x-y}) est nulle pour tout Ω,Ω'.

Ces définitions et remarques étant faites, on peut s'interroger sur les propriétés statistiques et l'éventuelle interdépendance des quadratures d'un bruit blanc stationnaire filtré $\tilde{s}(t)$. On peut commencer par déterminer la fonction de corrélation spectrale $\langle\tilde{S}_1[\omega]\tilde{S}_2[\omega']\rangle$ à partir de la transformée de Fourier des équations (3.40).

2. Sauf mention explicite du contraire, on suppose que les bruits sont de valeurs moyennes nulles.

En utilisant l'équation (3.44) vérifiée par le bruit blanc s, et en supposant que le filtre H est symétrique par rapport à $\Omega_{\rm ref}$ ($|H[\Omega_{\rm ref}-\omega]|^2 = |H[\Omega_{\rm ref}+\omega]|^2$), et que sa bande passante $\Delta\Omega$ est faible devant la fréquence $\Omega_{\rm ref}$, on montre que $\langle \tilde{S}_1[\omega]\tilde{S}_2[\omega']\rangle = 0$, $\forall \omega, \omega'$. Les quadratures d'un bruit blanc stationnaire filtré sur une plage petite devant la fréquence centrale du filtre sont donc indépendantes.
Pour déterminer les fonctions d'autocorrélation des quadratures $\tilde{S}_1$ et $\tilde{S}_2$, il est commode d'exprimer celles-ci en fonction des quadratures S_1 et S_2 du signal dans le référentiel tournant à la pulsation $\Omega_{\rm ref}$, qui sont données par des expressions similaires aux équations (3.40) :

$$\begin{aligned}
S_1[\omega] &= \frac{1}{2}(s[\Omega_{\rm ref}+\omega] + s[-\Omega_{\rm ref}+\omega]),\\
S_2[\omega] &= \frac{i}{2}(s[\Omega_{\rm ref}+\omega] - s[-\Omega_{\rm ref}+\omega]),\\
\tilde{S}_1[\omega] &= H_1[\omega]S_1[\omega] + iH_2[\omega]S_2[\omega],\\
\tilde{S}_2[\omega] &= H_1[\omega]S_2[\omega] - iH_2[\omega]S_1[\omega],
\end{aligned} \tag{3.46}$$

où H_1 et H_2 sont des filtres centrés à basse fréquence, donnés par :

$$\begin{aligned}
H_1[\omega] &= \frac{1}{2}(H[-\Omega_{\rm ref}+\omega] + H[\Omega_{\rm ref}+\omega]),\\
H_2[\omega] &= \frac{1}{2}(H[-\Omega_{\rm ref}+\omega] - H[\Omega_{\rm ref}+\omega]).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Il est facile de vérifier, à partir de leurs fonctions d'autocorrélation respectives et de leur fonction de corrélation que pour des fréquences $\omega \ll \Omega_{\rm ref}$, les quadratures S_1 et S_2 du signal s peuvent être considérées comme des bruits blancs stationnaires indépendants, de même densité spectrale S_s. Les quadratures du signal mesuré apparaissent alors dans l'équation (3.46) comme la combinaison filtrée de ces deux bruits blancs, c'est-à-dire qu'elles correspondent chacune à un bruit blanc stationnaire filtré. Plus précisément, les propriétés des quadratures du signal s permettent de démontrer aisément que les fonctions d'autocorrélation associées à $\tilde{S}_1$ et $\tilde{S}_2$ sont identiques, et égales à :

$$\langle \tilde{S}_1[\omega]\tilde{S}_1[\omega']\rangle = \langle \tilde{S}_2[\omega]\tilde{S}_2[\omega']\rangle = S_s\delta(\omega+\omega')\left(|H_1[\omega]|^2 + |H_2[\omega]|^2\right). \tag{3.48}$$

On retiendra donc que les quadratures d'un bruit blanc filtré sur une faible bande (c'est-à-dire sur une largeur spectrale faible devant la fréquence centrale du filtre) sont des bruits blancs filtrés à basse fréquence, et de mêmes fonctions d'autocorrélation.

Remarquons que ces propriétés sont similaires à celles qui apparaissent dans l'étude du mouvement Brownien du miroir (cf chapitre 1) : dans ce cas, le signal s correspond à la force thermique de Langevin F_T, le filtre H à la susceptibilité χ, et les quadratures $\tilde{S}_1$ et $\tilde{S}_2$ aux quadratures X_1 et X_2 du mouvement du miroir. On démontre ainsi [54], que les quadratures sont bien des variables aléatoires et indépendantes, de mêmes fonctions d'autocorrélation.

Synthèse

En résumé, les quadratures d'un bruit blanc filtré à une fréquence $\Omega_{\rm ref}$ sur une bande spectrale faible devant $\Omega_{\rm ref}$ sont des bruits blancs filtrés à basse fréquence,

indépendants et de mêmes caractéristiques spectrales : on peut donc obtenir un bruit d'intensité classique $\delta I(t)$ similaire au bruit quantique d'intensité filtré en modulant un cosinus et un sinus oscillants à la pulsation Ω_{ref} par deux enveloppes aléatoires $V_1(t)$ et $V_2(t)$ issues de deux bruits blancs Gaussiens indépendants filtrés à basse fréquence par la même fonction de transfert (équation 3.48). On applique alors la somme de ces deux signaux sur un modulateur d'intensité se trouvant sur le trajet du faisceau. Comme pour les quadratures du mouvement du miroir à résonance mécanique (voir chapitre 1), on s'attend à ce que les quadratures I_1 et I_2 du signal ainsi généré réalisent une marchent aléatoire dans l'espace des phases, ce qui constitue un critère graphique très commode permettant de valider le mode de construction du bruit, ainsi que d'identifier visuellement la "signature" de ce dernier.

Réalisation expérimentale

C'est donc cette méthode que nous avons choisi de suivre afin d'obtenir notre bruit d'intensité classique. Notons qu'elle est différente de celle utilisée pour la démonstration expérimentale de l'annulation de l'action en retour (section 3.2.3) et que cette dernière ne satisfaisait pas exactement les exigences décrites dans le paragraphe précédent : nous avions en effet appliqué un bruit blanc filtré fourni par un générateur HF Stanford Research à l'entrée de modulation de fréquence d'un générateur HF Hewlett Packard. Le signal délivré par la sortie $v(t)$ de ce dernier était donc de la forme :

$$\begin{aligned} v(t) &= A\cos[\Omega_{\text{ref}}t + \Phi(t)] \\ &= A\cos[\Phi(t)]\cos[\Omega_{\text{ref}}t] - A\sin[\Phi(t)]\sin[\Omega_{\text{ref}}t], \end{aligned} \tag{3.49}$$

où $\Phi(t)$ est le bruit de phase équivalent au bruit de fréquence délivré par le générateur Stanford Research. Il apparaît alors clairement que les quadratures de ce signal ne sont pas indépendantes, puisqu'elles décrivent un cercle dans l'espace des phases, et non une marche aléatoire comme nous le souhaitons.

De prime abord, on pourrait penser que la méthode de construction du bruit que nous avons choisie n'est pas la plus simple : l'équation (3.37) suggère en effet que la technique la plus directe eut consisté à filtrer un seul bruit blanc autour d'une fréquence Ω_{ref} que l'on choisit, et de l'appliquer au faisceau intense grâce au modulateur électro-optique. Il faut toutefois disposer d'un filtre passe bande étroit, dont la fréquence centrale est précisément balayable par ordinateur. Nous avons préféré tirer parti du matériel dont nous disposions pour créer deux quadratures indépendantes, même si cela demande plus d'effors puisqu'il faut créer non pas un mais deux bruits filtrés, que l'on doit de surcroît mixer à deux références sinusoïdales de même fréquence et se trouvant parfaitement en quadrature de phase l'une par rapport à l'autre, faute de quoi la trajectoire du bruit d'intensité dans l'espace des phases ne sera pas une marche aléatoire.

Générateur Tektronix AFG3102

Comme nous venons de le souligner, la difficulté expérimentale essentielle posée par la construction d'un bruit blanc filtré à partir de ses quadratures est précisément le fait que les deux enveloppes I_1 et I_2 générées doivent correspondre aux quadratures du bruit $\delta I(t)$, c'est-à-dire qu'elles doivent moduler deux porteuses oscillant exactement à la même fréquence Ω_{ref}, et se trouvant rigoureusement en quadrature de phase. Pour se faire, nous avons utilisé un générateur Tektronix AFG3102

(voir chapitre 2), qui est un générateur à deux voies offrant la possibilité de synchroniser celles-ci sur la même référence temporelle, et de choisir précisément leur phase relative. De plus, ce type de générateur dispose d'une option de modulation arbitraire, qui permet de moduler indépendamment chacune des voies avec des fonctions définies par l'utilisateur. Les fonctionnalités de cet appareil sont donc particulièrement bien adaptées à nos besoins, et permettent de définir le protocole expérimental que nous suivrons pour générer le bruit classique d'intensité : celui-ci consistera à charger les quadratures V_1 et V_2 dans les mémoires respectives des deux voies, dont les fréquences sont verrouillées sur la même référence de temps, et dont la phase relative est choisie égale à $\pi/2$. Les deux sorties du générateur, configurées en modulation arbitraire (ce qui permet d'activer les enveloppes V_1 et V_2), seront ensuite sommées, et le résultat de la sommation sera envoyé sur le modulateur électro-optique non-résonnant.
En réalité, une limitation technique importante nous a obligé à procéder de manière légèrement différente : en effet, le générateur accepte une modulation d'amplitude comprise uniquement entre 0 et 100%, ce qui signifie que les enveloppes $V_1(t)$ et $V_2(t)$ ne peuvent pas prendre de valeur négative. La marche au hasard dans l'espace des phases est donc limitée au quadrant supérieur droit $V_1, V_2 \geq 0$. Pour contourner ce problème, nous avons décidé de décentrer positivement les signaux V_1, et V_2, c'est-à-dire que nous leur attribuons des valeurs moyennes non nulles positives, grandes devant leurs variances. Ces valeurs moyennes sont chargées dans la mémoire arbitraire d'un second générateur TEKTRONIX AFG3102, dont les sorties respectives sont retranchées à celles du premier (voir figure 3.8). Cette opération, qui ne modifie pas les propriétés statistiques des signaux initiaux, permet de générer des quadratures $V_1(t) - \langle V_1 \rangle$ et $V_2(t) - \langle V_2 \rangle$ de valeurs moyennes nulles, correspondant à une trajectoire explorant les 4 quadrants de l'espace des phases, ce qui est bien ce que nous cherchons.

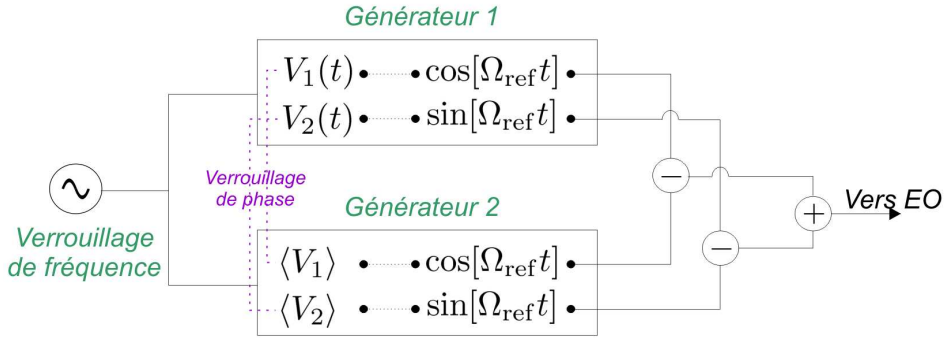

FIGURE 3.8: Montage à deux générateurs permettant de créer un bruit d'intensité explorant les 4 quadrants de l'espace des phases.

Lorsque la réponse de l'électro-optique est linéaire, la modulation d'intensité engendrée est proportionnelle au signal $v(t) = (V_1(t) - \langle V_1 \rangle)\cos[\Omega_{\mathrm{ref}} t] + (V_2(t) - \langle V_2 \rangle)\sin[\Omega_{\mathrm{ref}} t]$ issu du générateur, et présente donc bien les caractéristiques voulues.

Réalisation des quadratures

Il nous reste à déterminer comment créer les quadratures V_1 et V_2. Plusieurs méthodes sont possibles a priori : on pourrait par exemple échantillonner deux

séquences successives de bruit thermique filtré à basse fréquence (bruit électronique d'une résistance, ou même bruit thermique de position du miroir). Deux telles séquences rempliraient tous les critères énoncés plus haut, c'est-à-dire qu'elles constitueraient bien deux bruits blancs Gaussiens indépendants filtrés à basse fréquence. Nous avons toutefois préféré programmer les deux quadratures nous-mêmes : après avoir obtenu deux bruits blancs indépendants à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires, nous leur appliquons un même filtre, dont les paramètres sont totalement libres. L'intérêt de cette méthode est qu'elle est relativement simple à mettre au point, qu'elle permet de tester un grand nombre d'échantillons de bruits, et surtout qu'elle laisse une totale liberté sur le choix du filtre.
Nous avons choisi de programmer les quadratures à l'aide du langage LabView, qui s'avère particulièrement bien adapté au dialogue entre le générateurTektronix AFG3102 et un ordinateur. Le programme se déroule de la manière suivante : on commence par générer un vecteur V_{rng} de nombre aléatoires, dont la dimension est définie par l'utilisateur, et dont les composantes suivent une loi de distribution Gaussienne. LabView© ne disposant que d'un générateur de nombres aléatoires uniformément distribués, on procède pour cela suivant la méthode de Box-Muller [78], qui consiste à partir de deux vecteurs U_1 et U_2 de nombres aléatoires uniformément distribués sur $]0,1]$, auxquels on applique la transformation suivante :

$$(U_1, U_2) \mapsto \langle V \rangle + \sigma\sqrt{-\ln[U_1]}\cos[2\pi U_2]. \tag{3.50}$$

Les composantes du vecteur V_{rng} issu de cette transformation suivent alors une distribution Gaussienne de valeur moyenne $\langle V \rangle$ et de variance σ, comme nous le désirons. La seconde partie du programme est dédiée au filtrage du bruit blanc Gaussien ainsi généré. Nous avons choisi un filtrage de type Lorentzien, similaire à l'effet de la réponse du miroir à résonance mécanique sur la force thermique de Langevin : l'opération que l'on doit faire subir au vecteur V_{rng} est donc une convolution entre ses composantes et la réponse impulsionnelle du filtre, qui est une simple exponentielle décroissante $n \mapsto \exp[n \ln a]$ ($a \in]0,1]$), dont l'amortissement $\ln a$ définit la mémoire du signal transmis par le filtre. Cette opération de convolution revient à définir les composantes $V[n]$ du vecteur quadrature, où n représente un pas temporel, selon l'équation récursive suivante :

$$V[n+1] \quad = \quad aV[n] + (1-a)V_{\mathrm{rng}}[n+1]. \tag{3.51}$$

On présente sur la figure 3.9 le vecteur quadrature typiquement obtenu au terme de l'exécution du programme : on constate qu'il s'agit bien d'une marche aléatoire monodimensionnelle, distribuée suivant une loi normale comme nous le désirons.

L'opération de filtrage terminée, le programme amorce un dialogue avec le générateur, permettant de charger la quadrature dans sa mémoire arbitraire. Notons qu'à ce stade, nous n'avons défini aucune échelle de temps et que le signal généré n'a pas de dimension. Ces paramètres physiques sont définis une fois le chargement terminé grâce à deux réglages disponibles en façade du générateur. Le premier est la vitesse d'échantillonnage du signal arbitraire, qui définit la base de temps de la quadrature, donc la largeur de son spectre. Le second réglage est la profondeur de la modulation arbitraire.

Modulation à $\Omega/2$

Pour nous prémunir d'éventuels parasites électromagnétiques, nous continuons d'utiliser la technique de modulation à la fréquence moitié que nous avons présentée

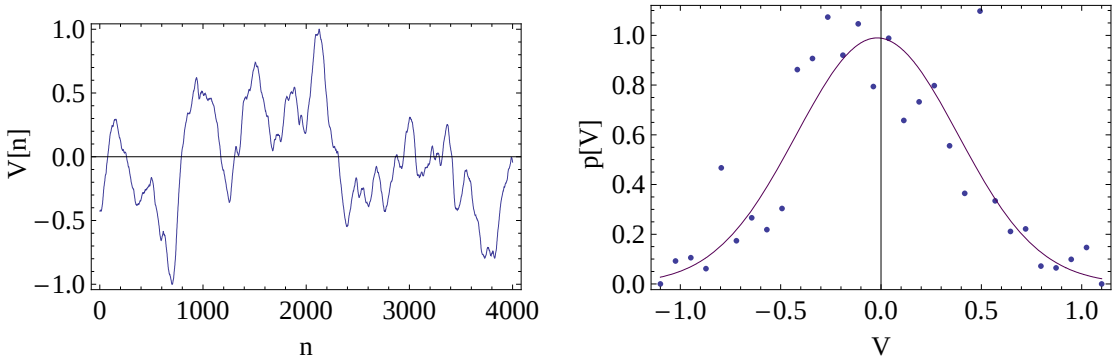

FIGURE 3.9: Exemple de quadrature obtenue après exécution du programme (à gauche), et son histogramme (à droite). La ligne continue sur la figure de droite correspond à un ajustement Gaussien $V \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\frac{(V-\langle V\rangle)^2}{2\sigma^2}]$, où la moyenne et la variance du signal ont été déterminés à partir de la figure de gauche. La médiocrité de la statistique obtenue incombe au nombre de points relativement faible, que nous avons fixé à 4000 et qui correspond à la limite imposée par le générateur.

dans la section 3.2.1, et qui consiste à alimenter le modulateur électro-optique à son minimum de transmission, avec un signal oscillant à la fréquence moitié $\Omega_{\text{ref}}/2$ de la fréquence à laquelle on souhaite réellement moduler l'intensité du faisceau. Dans ces conditions, la modulation d'intensité résultant du passage du faisceau dans le modulateur électro-optique non-résonnant est proportionnelle au carré de la modulation fournie par le générateur. En ne conservant que les termes contribuant à la fréquence double $2(\Omega_{\text{ref}}/2)$, cette modulation s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta I(t) &= \frac{V_1^2(t) - V_2^2(t)}{2} \cos[\Omega_{\text{ref}} t] + V_1(t) V_2(t) \sin[\Omega_{\text{ref}} t] \\ &= I_1(t) \cos[\Omega_{\text{ref}} t] + I_2(t) \sin[\Omega_{\text{ref}} t], \end{aligned} \tag{3.52}$$

où l'on a supposé que la modulation $v(t)$ fournie par le générateur s'écrivait $v(t) = V_1(t)\cos[\frac{\Omega_{\text{ref}}}{2}t] + V_2(t)\sin[\frac{\Omega_{\text{ref}}}{2}t]$. A partir des fonctions de corrélations $\langle I_k(t) I_k(t')\rangle$, il est facile de démontrer que si V_1 et V_2 sont des bruits blancs stationnaires filtrés à basse fréquence, I_1 et I_2 le sont également. En revanche, la nature de la distribution des quadratures du bruit d'intensité et leur indépendance ne sont pas conservées par cette opération.
Pour s'en convaincre, on peut commencer par écrire la loi de probabilité pour le couple de variables Gaussiennes indépendantes (V_1, V_2) :

$$\begin{aligned} P_{(V_1,V_2)}(v_1, v_2) &= P_{V_1}(v_1) \times P_{V_2}(v_2) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp[-\frac{v_1^2 + v_2^2}{2\sigma^2}]. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Il est commode d'exprimer cette loi de probabilité dans un système de coordonnées polaires (R, Θ), la symétrie par rotation étant fortement suggérée par l'argument de l'exponentielle dans l'équation précédente. Les coordonnées polaires sont liées

aux coordonnées cartésiennes par la transformation :

$$\begin{aligned} V_1 &= R\cos[\Theta] \\ V_2 &= R\sin[\Theta]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

La loi de probabilité $P_{(R,\Theta)}$ pour les coordonnées polaires est alors liée à la loi cartésienne selon l'équation suivante :

$$P_{(R,\Theta)}(r,\theta) = J(r,\theta) \times P_{(V_1,V_2)}(r\cos[\theta], r\sin[\theta]), \tag{3.55}$$

où $J(R,\Theta)$ est le Jacobien associé à la transformation donnée par l'équation (3.54) :

$$\begin{aligned} J(R,\Theta) &= \frac{\partial V_1 \partial V_2}{\partial R \partial \Theta} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial R}\frac{\partial V_2}{\partial \Theta} - \frac{\partial V_2}{\partial R}\frac{\partial V_1}{\partial \Theta} \\ &= R. \end{aligned} \tag{3.56}$$

En remplaçant l'équation précédente dans l'équation (3.55), on obtient la loi de probabilité des quadratures V_1 et V_2 en coordonnées polaires :

$$P_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp[-\frac{r^2}{2\sigma^2}], \tag{3.57}$$

qui est caractéristique d'une distribution Gaussienne dans l'espace des phases, centrée à l'origine et de dispersion σ.
Pour déterminer la loi de probabilité pour les quadratures I_1 et I_2, qui s'expriment en fonction de V_1 et V_2 d'après l'équation (3.52), nous allons appliquer la même méthode de changement de variable que celle que nous venons de présenter. On commencera tout d'abord par remarquer que les coordonnées polaires (R',Θ') associées à I_1 et I_2 s'expriment simplement en fonction des coordonnées polaires (R,Θ) associées à V_1 et V_2 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2) = \frac{R^2}{2}\cos[2\Theta] = R'\cos[\Theta'] \\ I_2 &= V_1 V_2 = \frac{R^2}{2}\sin[2\Theta] = R'\sin[\Theta']. \end{aligned} \tag{3.58}$$

La loi de probabilité $P_{(R',\Theta')}$ se déduit donc de $P_{(R,\Theta)}$ par le changement de variable $(R' = R^2/2,\ \Theta' = 2\Theta)$, dont le Jacobien $J(R',\Theta')$ vaut :

$$\begin{aligned} J(R',\Theta') &= \frac{\partial R \partial \Theta}{\partial R' \partial \Theta'} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2R'}}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} P_{(R',\Theta')}(r,\theta) &= J(r,\theta) P_{(R,\Theta)}\left(\sqrt{2r}, \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma^2}\exp[-\frac{r}{\sigma^2}]. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Cette distribution n'est plus Gaussienne, mais correspond à une variation radiale exponentiellement décroissante. Cela implique en particulier une accumulation des réalisations des quadratures du bruit d'intensité au centre de l'espace des phases. Par ailleurs, les deux quadratures ne sont plus indépendantes, comme on peut le voir en écrivant la distribution des quadratures en coordonnées cartésiennes, à l'aide du changement de variable ($I_1 = R' \cos[\Theta'], I_2 = R' \sin[\Theta']$) :

$$P_{(I_1,I_2)}(i_1, i_2) = \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{i_1^2 + i_2^2}} \exp[-\frac{\sqrt{i_1^2 + i_2^2}}{\sigma^2}]. \tag{3.61}$$

Il apparaît sur cette équation que la distribution des quadratures du bruit d'intensité n'est pas factorisable, ce qui rend les deux variables aléatoires I_1 et I_2 interdépendantes, même s'il est facile de montrer par des arguments de parité que les corrélations à l'ordre 2 $\langle I_1(t) I_2(t') \rangle$ restent nulles.

La technique de modulation à la fréquence moitié nous fait donc perdre certaines des propriétés importantes dont nous voulions initialement doter les quadratures du bruit d'intensité classique. Pour que ce dernier soit en tous points similaire au bruit quantique, il aurait fallu générer deux quadratures V_1 et V_2 corrélées, distribuées selon une loi bien particulière dont l'image par la transformation $(V_1, V_2) \mapsto ((V_1^2 - V_2^2)/2, V_1 V_2)$ soit une loi Gaussienne. Expérimentalement, cela nécessite de pouvoir synchroniser entre elles les enveloppes chargées sur le générateur, ce que le modèle AFG3102 ne permet pas de faire[3]. Nous nous sommes donc finalement contentés d'un bruit d'intensité non-Gaussien, distribué selon la loi (3.61), dont la "complexité" proche de celle du bruit quantique légitime toutefois l'utilisation.

3.3.2 Corrélations optomécaniques hors résonance mécanique

Nous présentons maintenant la mise en évidence expérimentale des corrélations optomécaniques obtenues avec la cavité décrite dans la section 3.2 (référence des miroirs 3022/12 et 07125/2). Nous nous plaçons hors résonance mécanique, ce qui permet d'obtenir des résultats plus simples à interpréter du fait de l'absence de dynamique du miroir. Les corrélations induites à la résonance mécanique sont étudiées dans la section suivante.

Dispositif expérimental

Nous cherchons à établir les corrélations optomécaniques entre les fluctuations d'intensité du faisceau intense réfléchi $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$ par la cavité et les fluctuations de phase $\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}$ du faisceau de mesure. Pour une cavité sans perte, on a $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}} = \delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}$, et cela revient bien à mesurer les corrélations entre le bruit d'intensité incident et la position du miroir. Cette approche est en fait la méthode la plus propre pour observer les corrélations optomécaniques au niveau quantique, et s'assurer que les déplacements du miroir sont bien dus aux fluctuations d'intensité du faisceau incident : si on injectait un seul faisceau dans la cavité, on ne pourrait pas mesurer au niveau quantique à la fois sa phase et son intensité. On serait donc amené à placer une lame séparatrice sur le trajet du faisceau réfléchi, de façon

3. Le générateur amorce la lecture du tableau définissant la modulation arbitraire à partir d'un point aléatoire du tableau.

à pouvoir réaliser ces deux mesures simultanément sur deux parties du faisceau. Mais une telle lame modifie les statistiques quantiques des faisceaux, réduisant les corrélations optomécaniques intensité-phase observables.
Le dispositif expérimental que nous utilisons est identique à celui qui est présenté sur la figure 3.1. Le modulateur électro-optique non résonnant se situant sur le trajet du faisceau intense est alimenté à son minimum de transmission par un amplificateur Tegam 2340 qui préamplifie le bruit arbitraire fourni par le dispositif représenté sur la figure 3.8. La sortie de la détection homodyne et la sortie HF de la photodiode de la détection Pound-Drever, qui permettent de mesurer respectivement la phase du faisceau de mesure réfléchi et les fluctuations d'intensité du faisceau intense réfléchi par la cavité, sont reliées à deux analyseurs de spectres Agilent MXA 9020 A identiques, tous deux configurés en mode I/Q, ce qui permet d'extraire les quadratures associées à chaque signal. Le fonctionnement du mode I/Q de ces analyseurs de spectres est similaire à celui du dispositif de démodulation des quadratures schématisé sur la figure 1.31 : il nécessite de définir essentiellement deux paramètres, une fréquence centrale $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$, et un intervalle spectral $\Delta\Omega/2\pi$. Le signal appliqué à l'entrée de l'analyseur de spectre est alors filtré autour de la fréquence $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$ sur la largeur spectrale $\Delta\Omega/2\pi$; il est ensuite mélangé à une référence générée par l'analyseur à la fréquence $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$, puis enfin filtré à basse fréquence afin d'éliminer les termes oscillants à $2\Omega_{\text{ref}}/2\pi$. Il est également possible de choisir un paramètre de temps de balayage, auquel est relié la durée de l'échantillonnage.
Il est indispensable que les démodulations de l'intensité du faisceau intense et de la phase du faisceau sonde satisfassent deux contraintes importantes : tout d'abord, elle doivent être réalisées de manière synchrone : en effet, nous avons vu que lorsque le bruit d'intensité $\delta I_{\text{s}}^{\text{in}}$ est blanc et stationnaire, sa fonction d'autocorrélation $\langle \delta I_{\text{s}}^{\text{in}}(t)\delta I_{\text{s}}^{\text{in}}(t')\rangle$ correspond à une fonction $\delta(t-t')$. Les fluctuations de phase $\delta\varphi_{\text{m}}^{\text{out}}$ du faisceau de mesure étant proportionnelles aux fluctuations d'intensité, la fonction de corrélation $\langle \delta I_{\text{s}}^{\text{in}}(t)\delta\varphi_{\text{m}}^{\text{out}}(t')\rangle$ ne prend de valeurs non-nulles que pour $t = t'$: un décalage non maîtrisé de l'origine des temps des deux signaux conduirait alors à un brouillage des corrélations à délai nul. Pour s'assurer que les démodulations sont bien synchrones, les acquisitions des deux analyseurs sont déclenchées sur une source externe fournie par l'un des deux générateurs AFG3102. La seconde contrainte importante est que les deux démodulations doivent extraire les quadratures dans les mêmes référentiels tournants à la fréquence $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$ autour de laquelle le bruit d'intensité est appliqué au faisceau intense, faute de quoi les démodulations se traduiront par des rotations supplémentaires dans l'espace des phases. Cela signifie que les fréquences de démodulation définies sur les deux analyseurs doivent être rigoureusement les mêmes, et égales à celle qui est définie par les deux générateurs. Pour cela, on synchronise les bases de temps des quatre appareils (les deux analyseurs de spectres et les deux générateurs de bruit) sur le même VCO, prélevé sur la sortie adéquate de l'un des deux analyseurs (voir figure 3.10). Nous avons pu vérifier à l'aide de signaux arbitraires simples envoyés directement sur l'analyseur de spectre à partir des deux générateurs que cette méthode de synchronisation permettait bien de déclencher simultanément la démodulation des quadratures de deux signaux distincts dans des référentiels tournants à la même pulsation.

Protocole expérimental

La réalisation de l'expérience commence par l'exécution du programme qui permet de générer le bruit d'intensité. On définit ensuite sur le générateur la fréquence de

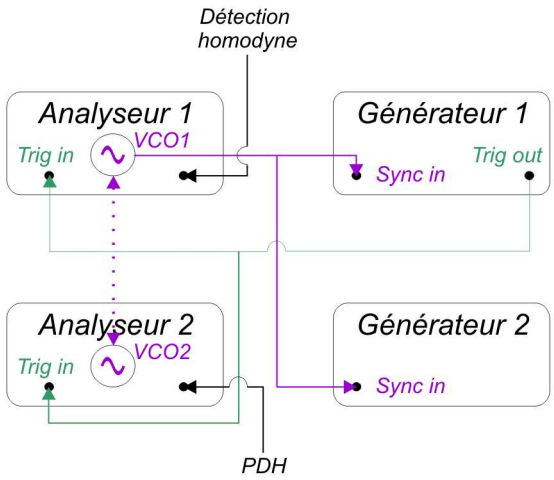

FIGURE 3.10: Principe de la synchronisation des générateurs de bruit et des analyseurs de spectres.

la porteuse $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$ ainsi que la vitesse de balayage des tableaux arbitraires correspondant aux quadratures, ce qui fixe la largeur spectrale du bruit d'intensité. On active ensuite la modulation, et on mesure cette largeur à l'aide de l'analyseur de spectre connecté à la sortie de la photodiode de l'asservissement Pound-Drever. Cela permet de définir la largeur commune des filtres des modes I/Q des analyseurs, centrés à la fréquence $\Omega_{\text{ref}}/2\pi$. En pratique, on les choisira de l'ordre de la largeur du bruit d'intensité : définir une largeur plus grande impliquerait l'intégration du mouvement du miroir sur une bande spectrale qui n'est pas excitée par le bruit de pression de radiation, ce qui reviendrait à dégrader le rapport $\delta x_{\text{rad}}/\delta x_{\text{T}}$. Par ailleurs le bruit d'intensité ne pourrait plus être considéré comme blanc sur la plage d'analyse.
Une fois ces réglages effectués, on asservit la fréquence du laser sur la résonance optique de la cavité. On détecte à l'aide des deux analyseurs de spectres les deux couples de quadratures, que l'on enregistre sous la forme de fichiers de points prêts à être traités par ordinateur. On obtient ainsi l'évolution temporelle des quadratures du bruit d'intensité du faisceau signal, et des fluctuations de phase résultantes du faisceau de mesure, à partir desquelles on peut tracer la trajectoire des grandeurs correspondantes dans l'espace des phases, ou calculer les fonctions de corrélation.

Calibration des déplacements du miroir

Nous avons cherché à calibrer les trajectoires dans l'espace des phases, du moins pour les résultats fournis par la phase du faisceau de mesure, en terme de déplacements des miroirs. Pour cela, nous utilisons une méthode qui repose sur la comparaison entre la variance du signal (exprimée en Volt) et celle du bruit thermique (exprimée en mètres). On peut vérifier en utilisant les équations (3.43) et (3.39) que la dispersion Δv d'un signal $v(t)$ stationnaire quelconque, définie comme la racine carrée de sa fonction d'autocorrélation à délai nul, est liée à son spectre S_v par la relation :

$$\Delta v^2 = \langle v^2(t=0)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega S_v[\Omega]. \tag{3.62}$$

Il s'agit d'un résultat bien connu, qui stipule que la variance d'une variable aléatoire stationnaire est égale à l'aire de son spectre.
Lorsque la cavité se trouve à résonance optique, et en l'absence d'intensité sur le faisceau signal, la tension $v_{\mathrm{DH}}(t)$ fournie par la détection homodyne est proportionnelle au bruit thermique δx_{T} [4], et sa démodulation en I/Q avec l'analyseur de spectres équivaut à l'application d'un certain filtre H. La variance du signal issu de la mesure s'écrit donc sous la forme :

$$\Delta v_{\mathrm{DH}}^2 = G^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega |H[\Omega]|^2 S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}[\Omega], \tag{3.63}$$

où G est le gain global de l'ensemble {Détection+Analyseur}, que l'on cherche à déterminer, et où H est normalisé à 1 à sa fréquence centrale. En supposant que l'on effectue la démodulation sur une plage de fréquence ν_{span} autour de Ω_{ref} éloignée de toute résonance mécanique, on peut considérer le bruit thermique comme un bruit blanc stationnaire, de densité spectrale $\overline{S}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ constante, et le gain G s'écrit d'après l'équation (3.63) :

$$G^2 = \frac{\Delta v_{\mathrm{DH}}^2}{\overline{S}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega |H[\Omega]|^2}. \tag{3.64}$$

La connaissance de la densité spectrale $\overline{S}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$, de la fonction d'appareil H, et la mesure de la dispersion Δv_{DH} permettent donc de calibrer l'espace des phases de la détection homodyne. Il reste à préciser comment on détermine expérimentalement Δv_{DH}. Lorsque le signal est ergodique [5], ce qui est vrai dès lors que la durée T de sa mesure est grande devant l'inverse de la largeur spectrale du filtre H, la moyenne $\langle ... \rangle$ sur l'ensemble des réalisations de la variable s'identifie à la moyenne temporelle du signal sur sa plage d'acquisition :

$$\Delta v_{\mathrm{DH}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \, v_{\mathrm{DH}}^2(t). \tag{3.65}$$

En décomposant le signal v_{DH} dans son espace des phases (équation (3.39)), et après élimination des termes oscillants rapidement, on obtient l'expression de la variance en fonction des quadratures :

$$\begin{aligned} \Delta v_{\mathrm{DH}}^2 &\simeq \frac{1}{2T} \int_0^T \mathrm{d}t \, V_1^2(t) + \frac{1}{2T} \int_0^T \mathrm{d}t \, V_2^2(t) \\ &\simeq \frac{1}{2} [\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2]. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Le carré de la variance du signal mesuré est donc égal à la demi somme des carrés des variances de ses quadratures, qui s'identifient aux variances temporelles des deux tableaux que l'analyseur de spectres renvoie.
On peut alors exprimer les quadratures V_1 et V_2 d'un signal quelconque mesuré

4. On néglige le bruit de photon
5. Nous avons fait cette hypothèse depuis le début de ce manuscrit sans le signaler explicitement, puisque les différents spectres que nous y avons présenté ont été obtenus par moyennage temporel.

par la détection homodyne en termes de déplacements X_1 et X_2 :

$$X_{1,2}(t) \quad = \quad \sqrt{\frac{\overline{S}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega |H[\Omega]|^2}{\frac{1}{2}[\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2]}} V_{1,2}(t). \tag{3.67}$$

Nous n'avons pas cherché à établir une calibration précise des résultats que nous présentons dans le paragraphe suivant, mais juste une calibration indicative. Nous avons ainsi considéré la fonction d'appareil H comme une simple fonction porte, égale à 1 sur $[\Omega_{\mathrm{ref}}/2\pi - \nu_{\mathrm{span}}/2, \Omega_{\mathrm{ref}}/2\pi + \nu_{\mathrm{span}}/2]$ et nulle partout ailleurs. La calibration que nous avons finalement appliquée aux données provenant de l'analyseur de spectres est donc la suivante :

$$X_{1,2}(t) \quad = \quad \sqrt{\frac{\overline{S}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \nu_{\mathrm{span}}}{\frac{1}{2}[(\Delta V_1)^2 + (\Delta V_2)^2]}} V_{1,2}(t). \tag{3.68}$$

Pour les courbes que nous présentons dans la suite, nous avons pris la valeur de la densité spectrale du bruit thermique $\overline{S}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} = 10^{-36}$ m^2/Hz, ce qui correspond à la valeur obtenue à partir du spectre de bruit thermique.

Résultats expérimentaux

Les résultats que nous présentons ici ont été obtenus en appliquant le bruit d'intensité à la fréquence $\Omega_{\mathrm{ref}}/2\pi = 1123$ kHz, soit 1 kilohertz en-deçà de la résonance mécanique correspondant au mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe. Nous avons choisi la vitesse de balayage du signal arbitraire égale à 200 ms, ce qui correspond à une largeur spectrale d'environ 400 Hz pour le bruit d'intensité. Les modes I/Q des deux analyseurs de spectres sont ainsi centrés à la fréquence Ω_{ref}, et la largeur de leur filtre d'analyse est prise égale à $\nu_{\mathrm{span}} = 400$ Hz. Les puissances du faisceau signal et du faisceau de mesure sont choisies égales respectivement à 150 μW et 500 μW. Remarquons que le faisceau signal a une puissance moyenne plus faible que celle du faisceau de mesure. Cela n'empêche pas le miroir de n'être sensible qu'aux effets de pression de radiation du faisceau signal, puisque celui-ci est soumis à un bruit classique d'intensité. Si l'on cherchait à mettre en évidence les corrélations au niveau quantique, il faudrait utiliser un faisceau signal plus intense, ce qui ne pose pas de problème en pratique vu la tenue au flux de nos cavités.

La figure 3.11 représente l'espace des phases du bruit d'intensité (à gauche) et celui du bruit de position du miroir (à droite), déduit de la mesure de la phase du faisceau de mesure réfléchi, calibré comme expliqué dans le paragraphe précédent. Pour ces courbes, le rapport signal à bruit $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$, déterminé grâce à la comparaison du spectre des déplacements en présence et en l'absence du bruit d'intensité, vaut environ 6000. On note que la trajectoire du bruit d'intensité correspond bien visuellement à une marche pseudo-aléatoire, explorant les 4 quadrants de l'espace des phases comme nous le voulons. Les corrélations optomécaniques apparaissent de manière évidente sur cette figure, puisque les trajectoires des deux bruits dans leur espace des phases respectif sont presque identiques, à une rotation globale près. Cette rotation résulte du fait que l'espace des phases de chacun des bruits est défini à une phase près, qui dépend de la chaîne de détection ainsi que de la dynamique du miroir mobile a priori. Comme nous appliquons ici le bruit d'intensité à basse fréquence, nous savons que la réponse mécanique du miroir doit être

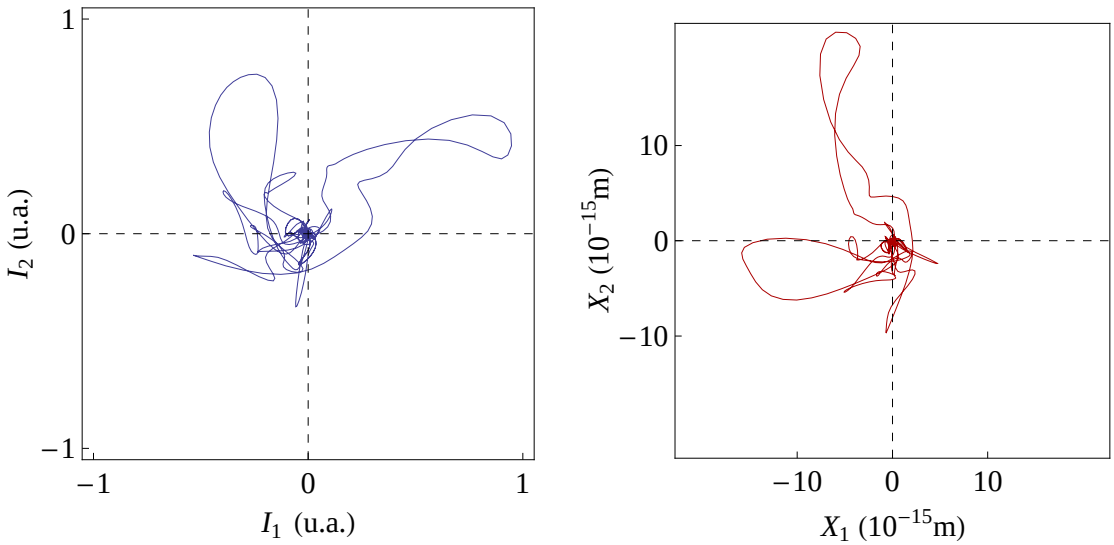

FIGURE 3.11: Trajectoires du bruit d'intensité (à gauche) et du bruit de position du miroir (à droite).

en phase avec l'excitation, si bien que nous pouvons attribuer ce déphasage à la chaîne de détection.

Coefficient de corrélation

Afin de pouvoir quantifier les corrélations optomécaniques, nous utilisons la fonction de corrélation entre l'intensité δI_s du faisceau signal et la phase du faisceau de mesure, proportionnelle aux déplacements δx du miroir dès lors que le bruit quantique de phase du faisceau de mesure est négligeable. Pour des bruits stationnaires blancs et Gaussiens, on peut se contenter de la fonction de corrélation à délai nul puisque le temps de mémoire infiniment court détruit les corrélations à délai non nul. Cette fonction de corrélation, normalisée à 1 pour des corrélations parfaites, a déjà été introduite au chapitre 1 (équation 1.68). D'après l'hypothèse ergodique, elle peut s'écrire comme des moyennes temporelles sur le temps T de mesure :

$$\mathcal{C}_{\delta I-\delta x} = \frac{\langle \delta I(t)\delta x(t)\rangle}{\Delta I(t)\Delta x(t)} = \frac{\int_0^T \mathrm{d}t\, \delta I(t)\delta x(t)}{\left(\int_0^T \mathrm{d}t\, \delta I^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \mathrm{d}t\, \delta x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.69}$$

Pour des bruits filtrés autour d'une fréquence Ω_ref, on peut relier cette fonction de corrélation aux quadratures I_1, I_2, X_1 et X_2 des deux variables, en prenant garde toutefois à une éventuelle rotation globale. Le plus simple consiste à représenter les deux bruits par deux grandeurs complexes $I = I_1 + iI_2$ et $X = X_1 + iX_2$, qui représentent les trajectoires dans l'espace des phases. En ne gardant que les termes lentement variables par rapport à Ω_ref, on définit la fonction de corrélation à partir de la décomposition des grandeurs en fonction de leurs quadratures (équation

similaire à (3.39)) par :

$$\mathcal{C}_{\delta I-\delta x} = \frac{\langle X(t)I^*(t)\rangle}{\sqrt{|X|^2|I|^2}} = \frac{\int_0^T \mathrm{d}t X(t)I^\star(t)}{\left(\int_0^T \mathrm{d}t|X(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^T \mathrm{d}t|I(t)|^2\right)^{1/2}}. \tag{3.70}$$

Ce coefficient est en général complexe :

$$\mathcal{C}_{\delta I-\delta x} = |\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}|\, e^{i\theta}, \tag{3.71}$$

avec une amplitude $|\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}|$ qui caractérise le niveau des corrélations. En particulier elle est égale à 1 pour des corrélations parfaites. L'angle θ définit la rotation qu'il faut appliquer à l'une des trajectoires pour que les deux trajectoires dans l'espace des phases soient les plus semblables.
Remarquons enfin que cette expression du coefficient de corrélation est identique à celle que nous avons calculée dans la section 1.4 : en écrivant les déplacements $X(t)$ comme la somme d'une contribution proportionnelle au signal $I(t)$ et du bruit thermique δx_{T}, on démontre à partir de l'équation (3.70) une relation similaire à (1.94) :

$$|\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}|^2 = \frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}}{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}} + S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}}. \tag{3.72}$$

Dans le cas des signaux présentés sur la figure 3.11, le calcul du coefficient complexe $\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}$ permet de déterminer $\theta = -74,6^\circ$, et $|\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}|^2 = 0.98$, ce qui correspond à des corrélations presque parfaites. En appliquant la rotation d'angle θ à la trajectoire (X_1, X_2), on s'assure que l'angle calculé correspond bien au déphasage entre les espaces des phases (voir figure 3.12).

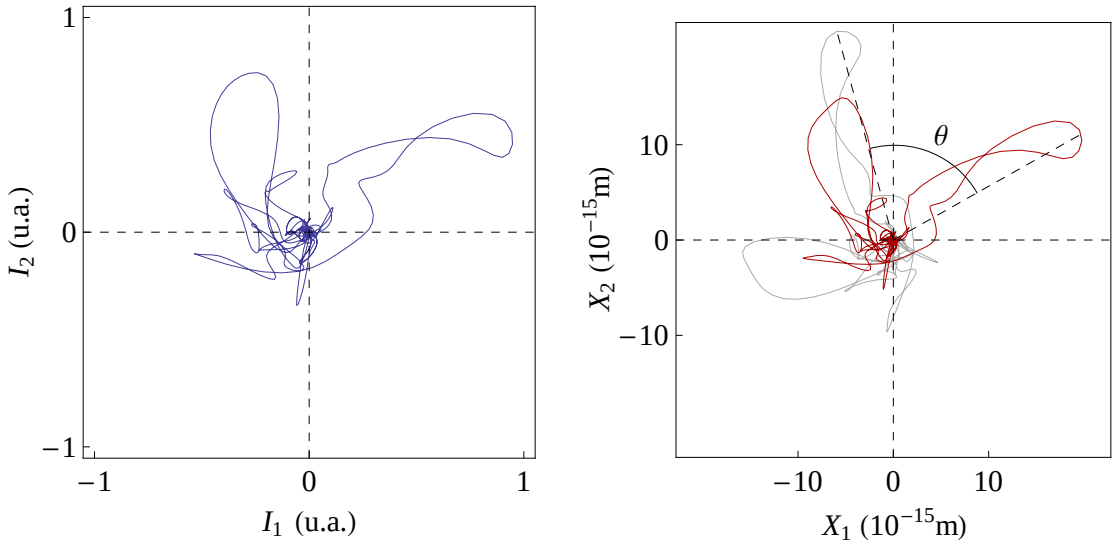

FIGURE 3.12: Trajectoires du bruit d'intensité (à gauche) et du bruit de position du miroir (à droite) corrigé du déphasage $\theta = -74,6^\circ$ causé par la chaîne de détection.

Evolution en fonction de la puissance de bruit

Nous nous sommes intéressés à la manière dont varient les corrélations en fonction

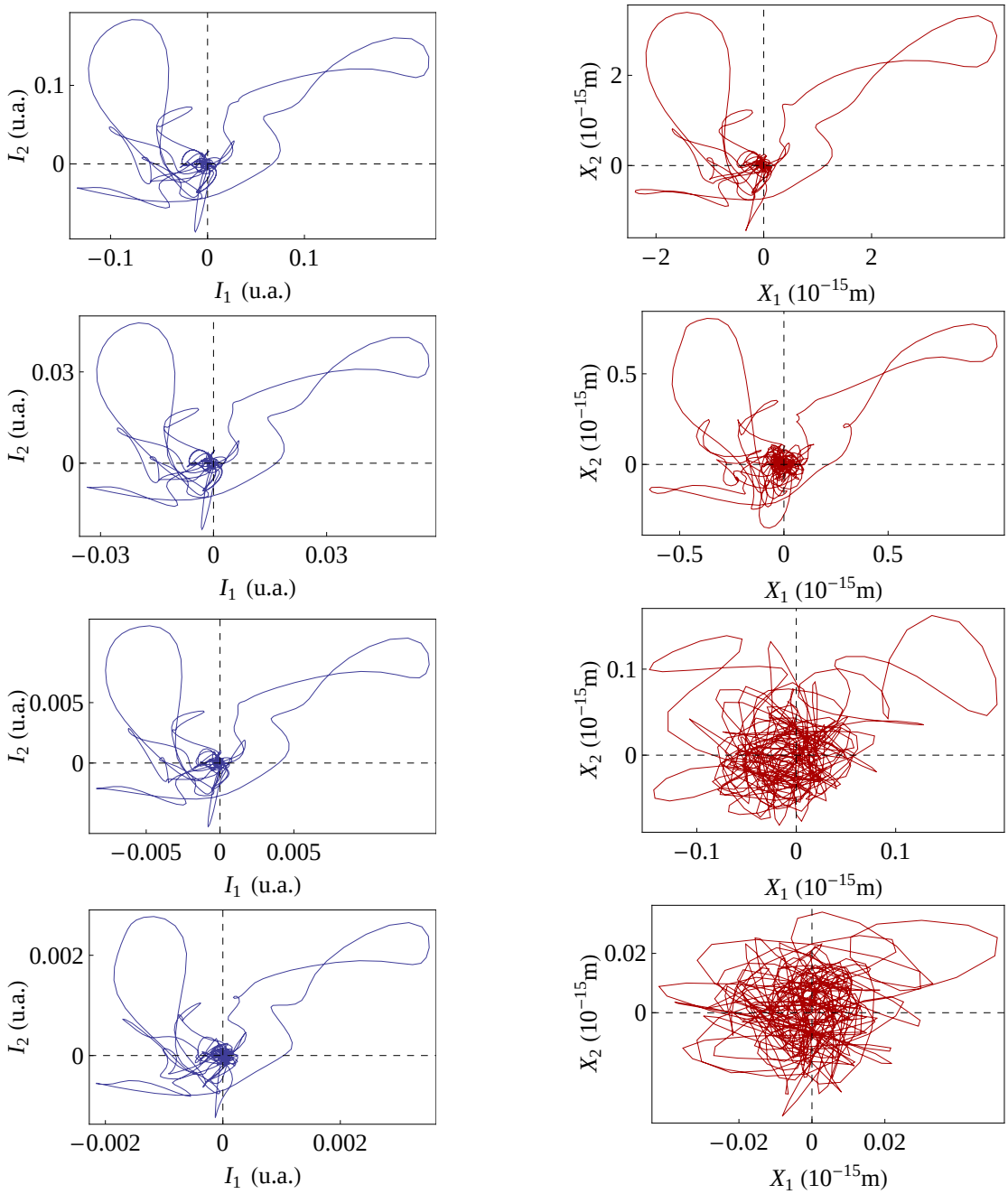

FIGURE 3.13: Trajectoires du bruit d'intensité (à gauche) et du bruit de position qui en résulte (à droite). Les trajectoires de la position sont corrigées de la rotation d'angle θ, déterminé individuellement pour chaque courbe à partir du coefficient de corrélation $\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}$. Le rapport signal à bruit $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ est à chaque fois déterminé à partir de la variance du bruit d'intensité comparée à celle du bruit thermique. De haut en bas, on a $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} = 400$, 25, 1.5, et $0,1$.

du rapport signal à bruit, qui s'identifie dans notre expérience au rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ puisque l'essentiel de la contamination du bruit de phase du faisceau de mesure est lié au bruit thermique du miroir. Pour cela, nous avons effectué un certain nombre d'acquisitions, qui ne diffèrent les unes des autres que par l'amplitude du bruit d'intensité appliqué au faisceau intense. Les résultats obtenus sont présentés

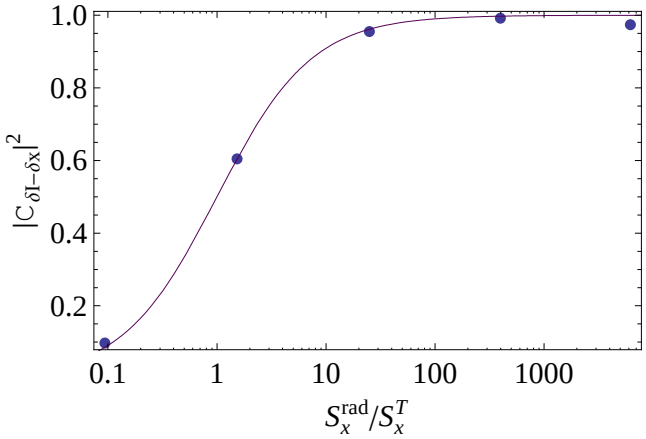

FIGURE 3.14: Evolution des corrélations $|\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}|^2$ en fonction du rapport signal à bruit $S_{\rm x}^{\rm rad}/S_{\rm x}^{\rm T}$. La ligne continue correspond à l'ajustement par la formule $(1+S_{\rm x}^{\rm T}/S_{\rm x}^{\rm rad})^{-1}$ (éq. (3.72)).

sur la figure 3.13. On constate clairement qu'à mesure que l'on baisse la puissance de modulation, la signature du bruit d'intensité devient de moins en moins évidente dans l'espace des phases du bruit de position : les fluctuations d'intensité s'impriment toujours sur la position du miroir, mais subissent une dégradation induite par le bruit thermique, que l'on peut estimer d'après ces trajectoires à l'échelle de $10^{-17}\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, en accord avec le niveau du bruit thermique mesuré expérimentalement.
De manière plus quantitative, la figure 3.14 présente l'évolution des corrélations $|\mathcal{C}_{\delta x-\delta I}|^2$ en fonction du rapport signal à bruit déterminé à partir de la variance du bruit d'intensité. On note l'excellent accord entre les points expérimentaux et leur ajustement par la formule (3.72), ce qui démontre que les corrélations que nous mesurons correspondent bien à la proportion du mouvement du miroir induite par la force de pression de radiation.

3.3.3 Corrélations optomécaniques à résonance mécanique

Nous avons également cherché à observer les corrélations induites par la pression de radiation lorsque le bruit d'intensité est appliqué autour de la résonance mécanique du mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe, même si cette situation est a priori moins favorable que lorsque l'on se place hors résonance. Le protocole d'acquisition est strictement identique à celui que nous avons présenté dans le paragraphe précédent.
La figure 3.15 présente les trajectoires du bruit d'intensité et du bruit de position du miroir typiquement obtenues. Pour cette acquisition, la puissance de modulation, déduite de la variance du signal, est deux fois plus faible que celle utilisée lors de la mesure du premier couple de courbes présentées sur la figure 3.11, et correspond à un rapport $S_{\rm x}^{\rm rad}/S_{\rm x}^{\rm T}\simeq 3000$ hors résonance mécanique. D'après ce que nous avons vu dans la section 3.2.1, on s'attend à ce que le rapport signal à bruit chute de 20 dB par rapport à ce que l'on observe hors résonance, c'est-à-dire que l'on devrait conserver une puissance de déplacement induite par pression de

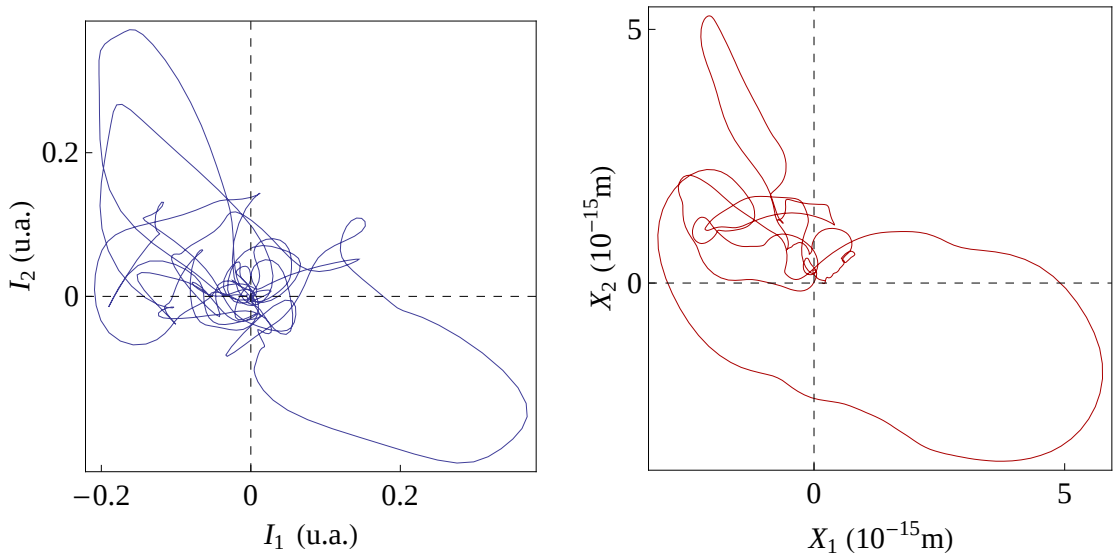

FIGURE 3.15: Trajectoires du bruit d'intensité (à gauche) et du bruit de position du miroir (à droite) obtenue alors que le bruit d'intensité est appliqué autour de la fréquence de résonance du fondamental Gaussien du plan-convexe ($\Omega_{\text{ref}} = \Omega_1$). La vitesse de balayage du bruit est fixée à 1 seconde, ce qui correspond à un bruit d'une centaine de Hz de large, bien plus large que la résonance mécanique de quelques Hz seulement.

radiation environ trente fois plus grande (35 dB − 20 dB) que celle induite par le bruit thermique, ce qui correspond à des corrélations optomécaniques proches de l'unité d'après l'équation (3.72). Cependant, on constate sur la figure 3.15 que si il existe bien une ressemblance globale entre la trajectoire du bruit d'intensité et celle du bruit de position, un grand nombre de "détails" du signal n'apparaissent pas sur les déplacements du miroir, ce qui suggère que les corrélations sont relativement médiocres. Cela est confirmé lorsque l'on évalue le coefficient de corrélation à l'aide de l'équation (3.70), d'après laquelle on trouve $|\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}|^2 = 0.40$, une valeur qui correspondrait à un rapport signal à bruit de l'ordre de 0.7 seulement d'après l'équation (3.72).
La différence fondamentale qui distingue les mesures à résonance mécanique de celles que nous avions réalisées hors résonance est par définition la réponse du miroir, qui se comporte comme un filtre passe-bas [54] à l'égard des quadratures du bruit d'intensité, ce qui explique la disparition des "détails" du signal dans l'espace des phases du mouvement du miroir, comme nous l'avons remarqué sur la figure 3.15. La figure 3.16 représente l'évolution temporelle des quadratures deux à deux pour les bruits d'intensité et de position : elle permet de mettre en évidence ce filtrage puisque le bruit de position ne reproduit que les composantes basse fréquence du bruit d'intensité.

Fonction de corrélation optomécanique

Pour s'assurer que les résultats expérimentaux que nous avons obtenus à résonance mécanique correspondent bien à ce qui est attendu théoriquement, nous allons calculer la fonction de corrélation optomécanique $C_{\delta I-\delta x}(t,t')$ prise à deux temps t et t' quelconques (équation (3.45)). En régime stationnaire, on peut s'intéresser de manière équivalente à la fonction de corrélation normalisée $\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}(\tau)$ qui ne

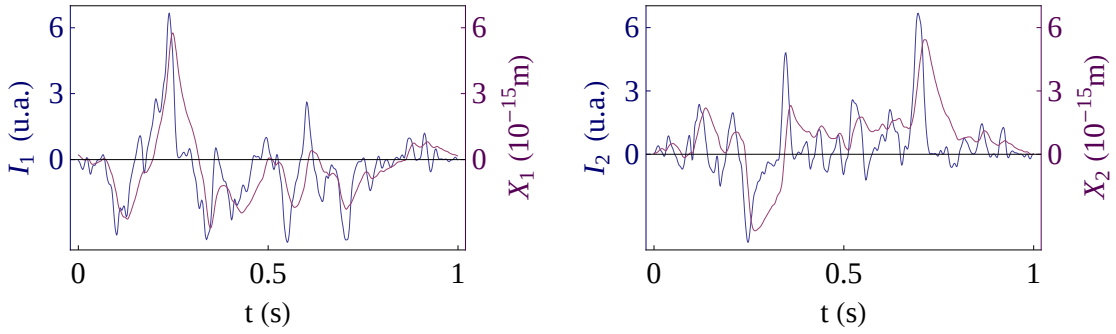

FIGURE 3.16: Evolution temporelle des quadratures X_1 et I_1 (à gauche) et X_2 et I_2 (à droite) correspondant aux trajectoires présentées sur la figure 3.15 : les quadratures de position (en rouge) sont filtrées par rapport à celles de l'intensité (en bleu).

dépend que du délai $\tau = t' - t$ entre les mesures de $\delta I(t)$ et $\delta x(t')$. De la même manière que l'expression (3.70) obtenue à délai nul, cette fonction s'écrit à partir des quadratures sous la forme :

$$\mathcal{C}_{\delta I - \delta x}(\tau) = \frac{\langle X(t+\tau) I^*(t) \rangle}{\sqrt{|X|^2 |I|^2}}. \tag{3.73}$$

Du fait de la moyenne temporelle $\langle ... \rangle$, le numérateur est nul pour les déplacements du miroir correspondant au bruit thermique et seuls comptent les déplacements induits par la pression de radiation. Compte tenu de la définition des quadratures (éqs (3.46), avec Ω_{ref} égal à la fréquence de résonance mécanique Ω_1), la composante spectrale du déplacement $X[\omega] = X_1[\omega] + iX_2[\omega]$ s'écrit :

$$X[\omega] = 2\hbar k \tilde{\chi}[\omega] I[\omega], \tag{3.74}$$

où la susceptibilité réduite $\tilde{\chi}$ est donnée par :

$$\tilde{\chi}[\omega] = \chi[\Omega_1 + \omega] \simeq -\frac{1}{2M\Omega_1} \left(\frac{1}{\omega + i\Gamma_1/2} \right), \tag{3.75}$$

dès lors que $\omega \ll \Omega_1$ ($\Gamma_1 = \Omega_1/Q_1$ est l'amortissement du mode mécanique). Par transformée de Fourier inverse de l'équation (3.74), l'évolution temporelle $X(t)$ de la trajectoire du miroir dans l'espace des phases s'exprime comme un produit de convolution,

$$X(t) = 2\hbar k \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau' \tilde{\chi}(\tau') I(t - \tau'), \tag{3.76}$$

où $\tilde{\chi}(\tau') = (1/2M\Omega_1) e^{-\Gamma_1 t/2}$ fait apparaître un temps de mémoire de l'évolution du miroir inversement proportionnel à son amortisement. Le numérateur dans l'expression (3.73) de la fonction de corrélation s'écrit alors :

$$\langle X(t+\tau) I^*(\tau) \rangle = 2\hbar k \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau' \tilde{\chi}(\tau') \langle I(t + \tau - \tau') I^*(t) \rangle. \tag{3.77}$$

La fonction de corrélation optomécanique apparaît donc comme le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle basse fréquence $\tilde{\chi}$ du miroir et la fonction d'autocorrélation du bruit d'intensité.
Dans le cas d'un bruit blanc parfait, la fonction d'autocorrélation de l'intensité se réduit à une fonction δ (éq. 3.42), et la fonction de corrélation $\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}(\tau)$ est simplement proportionnelle à $\tilde{\chi}(\tau)\Theta(\tau)$, où $\Theta(t)$ est la fonction de Heaviside, nulle pour $\tau < 0$ et égale à 1 pour $\tau \geq 0$. On trouve ainsi des corrélations nulles à des temps τ négatifs, et des corrélations non nulles et décroissant exponentiellement avec une constante de temps $2/\Gamma_1$ pour des temps τ positifs. Ce résultat était attendu, puisque le mouvement du miroir ne peut dépendre que des fluctuations d'intensité dans le passé, que la dynamique du miroir filtre avec un temps de mémoire $2/\Gamma_1$.
Dans notre expérience, le bruit d'intensité n'est pas tout à fait blanc puisqu'il est filtré par une fonction de transfert H_I de forme Lorentzienne similaire à $\tilde{\chi}$, dont on notera la largeur Γ_I et que l'on normalise à l'unité à fréquence nulle :

$$\begin{aligned} I[\omega] &= H_I[\omega]B[\omega], \\ H_I[\omega] &= \frac{\Gamma_I/2}{\omega + i\Gamma_I/2}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

où $B[\omega]$ est le bruit blanc d'intensité avant filtrage.

A l'aide de cette équation et de l'expression de $\tilde{\chi}$ (équation (3.75)), on peut calculer la fonction de corrélation optomécanique d'après l'équation (3.77), et on trouve :

$$\langle X(t+\tau)I^*(t)\rangle \propto -2\Gamma_1(e^{-\Gamma_1\tau/2} - e^{-\Gamma_I\tau/2})\Theta(\tau) - (\Gamma_I - \Gamma_1)e^{-\Gamma_I|\tau|/2}, \tag{3.79}$$

Nous avons reporté sur la figure 3.17 la fonction de corrélation optomécanique calculée à partir des données expérimentales de la figure 3.15, ainsi que son ajustement par l'expression (3.79). Le temps de cohérence mécanique $2\pi/\Gamma_1 = 190$ ms est déduit de la mesure du spectre de bruit thermique, et le temps de mémoire du bruit d'intensité $2\pi/\Gamma_I = 30$ ms résulte de l'optimisation de l'ajustement [6].
On constate effectivement sur cette figure que le filtrage du bruit d'intensité est à l'origine de la disparition de la discontinuité de la fonction de corrélation à $\tau = 0$: celle-ci croît exponentiellement, sur une durée caractéristique égale au temps de mémoire du bruit d'intensité. La fonction de corrélation décroît ensuite à délais plus important, toujours exponentiellement mais sur une durée égale cette fois au temps de mémoire du résonateur. En particulier, la fonction de corrélation admet un maximum à délai positif non nul, ce qui montre que la valeur de la fonction de corrélation à délai nul ne convient pas à la description des corrélations dans le cas où le bruit d'intensité admet un temps de mémoire non nul. On notera le très bon accord entre les données expérimentales et l'ajustement théorique, qui démontre à la fois que le système est bien modélisé et que la mesure a été correctement réalisée. On notera cependant un léger désaccord aux délais négatifs, qui

6. Le tableau arbitraire du générateur de bruit étant balayé cinq fois moins vite que dans le cas des résultats obtenus hors résonance mécanique présentés dans la section précédente, on s'attend à avoir un bruit d'intensité cinq fois moins large, c'est-à-dire $\Gamma_I/2\pi \simeq 80$ Hz. Toutefois, l'utilisation de la technique de modulation à $\Omega/2$ a pour effet de réduire la largeur du bruit d'intensité finalement appliqué au faisceau intense, et la valeur $\Gamma_I/2\pi = 30$ Hz semble alors tout à fait convenable.

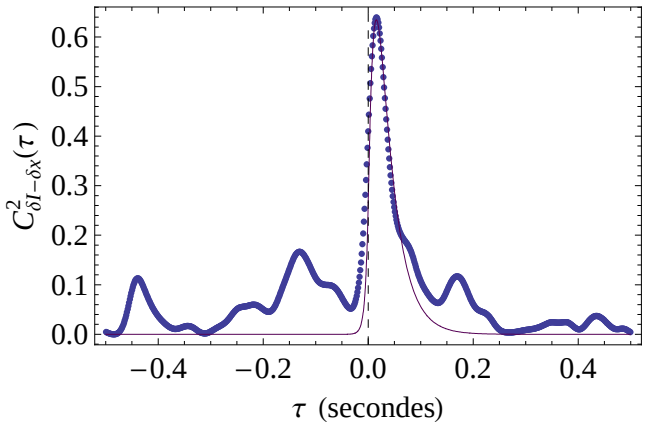

FIGURE 3.17: Fonction de corrélation optomécanique correspondant aux données des figures 3.15 et 3.16, normalisées au produit des variances des deux variables (éq. (3.73)). Les points correspondent aux données expérimentales, et la ligne continue à l'ajustement par l'expression (3.79). Le coefficient d'amortissement mécanique $\Gamma_{\mathrm{M}}/2\pi = 5.3$ Hz est déduit de la mesure du spectre de bruit thermique, tandis que Γ_I et l'amplitude de l'ajustement sont des paramètres libres. L'optimisation de cet ajustement permet de déterminer que $\Gamma_I/2\pi = 30\,\mathrm{Hz}$.

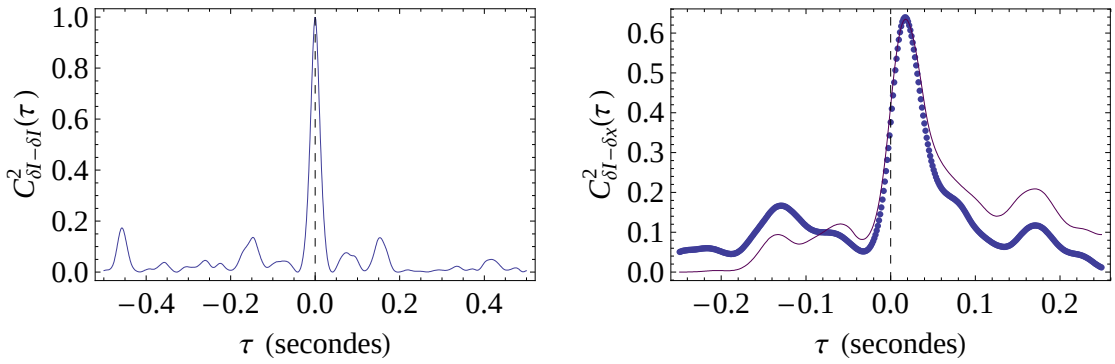

FIGURE 3.18: Fonction d'autocorrélation du bruit d'intensité (à gauche) et fonction de corrélation optomécanique (à droite). La ligne continue sur la figure de droite correspond à un ajustement par la formule (3.77), où la fonction d'autocorrélation du bruit d'intensité est celle obtenue expérimentalement (figure de gauche).

peut être attribué à la nature non-Lorentzienne du spectre du bruit d'intensité[7]. On peut vérifier cette hypothèse à l'aide de l'expression (3.77) qui exprime la fonction de corrélation optomécanique $\mathcal{C}_{\delta I-\delta x}$ comme la convolution de la réponse mécanique avec la fonction d'autocorrélation $\mathcal{C}_{\delta I-\delta I}$ de l'intensité. La figure 3.18 montre le résultat obtenu à partir de la fonction d'autocorrélation expérimentale du bruit d'intensité et la réponse impulsionnelle $\tilde{\chi}$ du miroir déterminée à partir

7. Le bruit d'intensité chargé dans le générateur arbitraire est en réalité obtenu à partir d'un signal aléatoire auquel deux filtres Lorentzien successifs sont appliqués [79] et l'utilisation de la technique de modulation à $\Omega/2$ ajoute à la complexité du profil spectral du bruit d'intensité finalement obtenu.

du bruit thermique. On note une nouvelle fois le bon accord entre les données expérimentales et l'ajustement, l'écart entre les deux courbes pouvant cette fois être attribué au faible nombre de points sur lesquels la convolution est effectuée.

Simulation de la réponse du miroir

On peut se convaincre que la mesure des déplacements du miroir que nous avons effectuée à résonance mécanique correspond bien à ce que l'on peut attendre, en simulant la réponse $X(t)$ du miroir à partir de la convolution de la susceptibilité $\tilde{\chi}(t)$ avec le bruit d'intensité mesuré expérimentalement (éq. 3.76). Le résultat d'une telle simulation est présenté en fonction du temps et dans l'espace des phases sur les figures 3.19 et 3.20 : afin de faciliter la comparaison des signaux, nous les avons préalablement remis en phase, c'est-à-dire que nous avons corrigé les données expérimentales d'un angle θ, déterminé d'après l'argument de la fonction de corrélation optomécanique. On peut voir sur ces figures que les évolutions temporelles du bruit d'intensité filtré par $\tilde{\chi}$ et celles des déplacements du miroir sont quasiment identiques, ce qui démontre manifestement que la mesure se comporte comme on peut l'attendre. On note toutefois certaines différences entre les deux si-

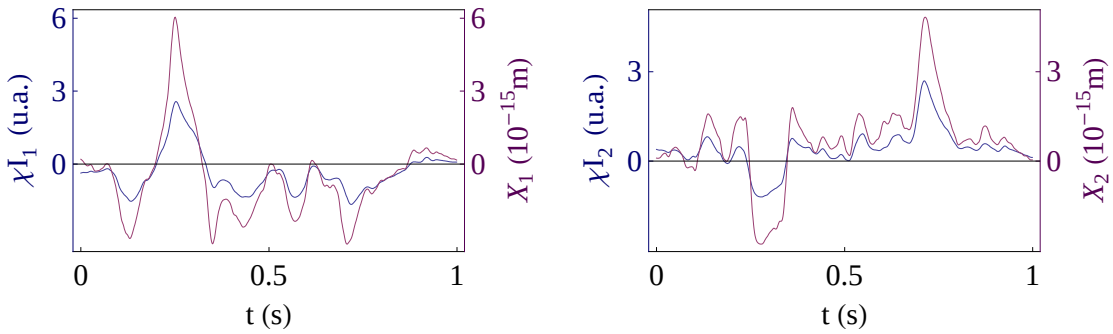

FIGURE 3.19: Simulation de la réponse du miroir mobile au bruit de pression de radiation (courbes en bleu) comparée aux déplacements mesurés expérimentalement (courbes en rouge). La susceptibilité du miroir est donnée par l'expression (3.75), où le coeffivient d'amortissement mécanique est déduit d'une mesure de bruit thermique. Les échelles verticales des simulations de $\tilde{\chi}I_1$ et $\tilde{\chi}I_2$ son arbitraires.

gnaux, qui apparaissent clairement lorsque l'on compare les deux trajectoires dans l'espace des phases. Ces différences sont certainement liées au bruit thermique qui vient s'ajouter au mouvement réel du miroir. On peut calculer le coefficient de corrélation $\mathcal{C}_{\chi\delta I-\delta x}$ à délai nul comme nous l'avions fait hors résonance (équation (3.70)), mais cette fois-ci entre les trajectoires simulées et expérimentales du bruit de position. On trouve $|\mathcal{C}_{\chi\delta I-\delta x}|^2 = 0.97$, une valeur correspondant à un rapport signal à bruit $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \simeq 30$ d'après l'équation (3.72), soit exactement le rapport de 15 dB que l'on attend d'après les considérations que nous avons exposées au début de cette section.

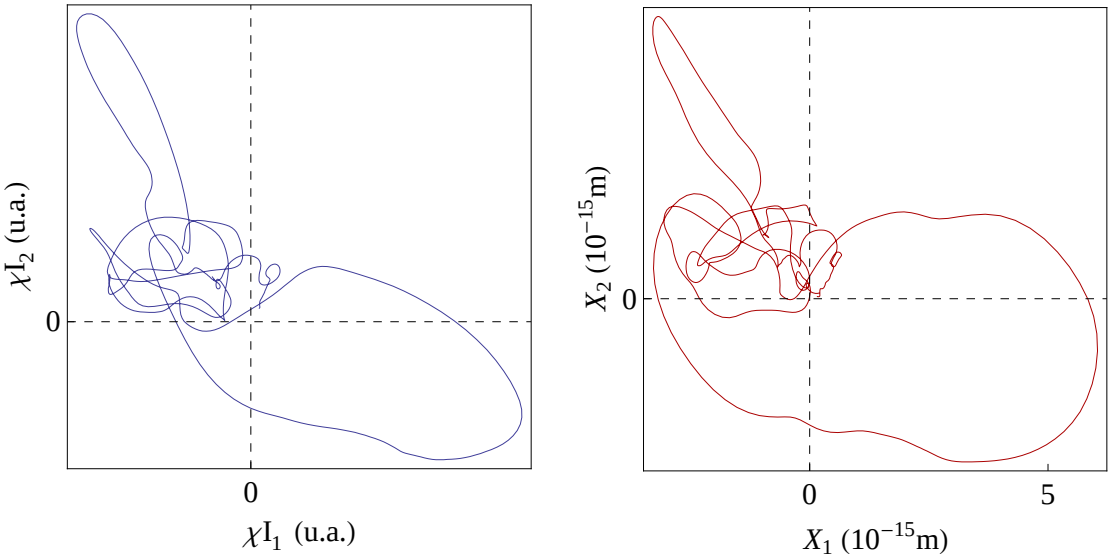

FIGURE 3.20: Réponse simulée du miroir au bruit de pression de radiation (à gauche) et réponse obtenue expérimentalement (à droite) dans l'espace des phases.

Chapitre 4

Vers l'observation des corrélations optomécaniques au niveau quantique

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser en détail aux aspects expérimentaux liés à l'observation des corrélations optomécaniques au niveau quantique avec notre dispositif. En dépit de nos efforts pour améliorer la réponse mécanique du miroir à la pression de radiation (voir figure 2.31), il semble que notre système ne nous permette pas de mettre directement en évidence l'action en retour au niveau quantique comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent pour un bruit classique, car les effets quantiques demeurent faibles devant ceux du bruit thermique même pour nos meilleures cavités. Cela ne signifie pas pour autant que les fluctuations quantiques de la pression de radiation n'entraînent aucun déplacement du miroir mobile, mais seulement que leur contribution est petite devant celle du bruit thermique.

Nous présentons dans ce chapitre une technique de moyennage qui permet d'extraire de la phase du faisceau réfléchi l'information sur un bruit d'intensité dont l'effet est négligeable par rapport au bruit thermique. Nous allons voir ensuite que le coefficient de corrélation optomécanique (1.93), que nous avons défini dans la perspective de caractériser la qualité du transfert des fluctuations de l'intensité du faisceau incident sur le mouvement du miroir, apparaît également comme un moyen de démontrer l'existence de l'action en retour au niveau quantique. Nous présentons alors une expérience menée avec un bruit classique très faible afin d'illustrer la détermination expérimentale de ce coefficient de corrélation dans le cas $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \ll 1$.

Nous examinons enfin comment les imperfections expérimentales limitent a priori l'amplitude des corrélations optomécaniques mesurables par cette technique. Nous terminerons ce chapitre par l'illustration expérimentale de l'impact des pertes optiques sur notre dispositif, pour lequel nous définirons la limite de sensibilité aux effets de pression de radiation dans l'état actuel de notre expérience.

4.1 Corrélations optomécanique en régime thermique

Dans cette section, nous présentons une technique de moyennage de la phase du faisceau de mesure permettant de mettre en évidence des déplacements du miroir mobile provoqués par une force de pression de radiation connue, dont la puissance est faible devant celle du bruit thermique. Nous verrons ensuite dans quelle mesure cette technique se prolonge à un bruit de pression de radiation quelconque, et notamment comment la détermination du coefficient de corrélation optomécanique peut permettre de démontrer l'existence de l'action en retour au niveau quantique. Nous terminerons la section en illustrant expérimentalement la mesure du coefficient de corrélation dans un régime dominé par le bruit thermique.

4.1.1 Suppression du bruit thermique par moyennage

Contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre précédent, nous nous intéressons désormais à un régime pour lequel les fluctuations de position du miroir mobile sont essentiellement gouvernées par le bruit thermique, tout en tenant compte de la contribution du bruit de pression de radiation. Si l'on néglige les effets de bande passante de la cavité, les fluctuations de la phase du faisceau de mesure peuvent donc s'écrire :

$$\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(t) \simeq \delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}}(t) + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}(\delta x_{\mathrm{T}}(t) + \delta x_{\mathrm{rad}}(t)), \tag{4.1}$$

où $\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}}$ est le bruit de phase du faisceau de mesure, et où $\delta x_{\mathrm{rad}}(t)$ est le déplacement résultant du bruit d'intensité $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t)$ du faisceau signal incident, dont l'expression en régime stationnaire et pour une cavité sans perte est donnée par (éq. (1.51)) :

$$\delta x_{\mathrm{rad}}(t) = \frac{8\hbar\mathcal{F}}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\chi(t-\tau)\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(\tau), \tag{4.2}$$

$\chi(t)$ étant la réponse impulsionnelle du miroir mobile. On supposera dans la suite que $\chi(t)$ est une impulsion de Dirac, c'est-à-dire que le miroir répond instantanément à une force extérieure quelconque, ce qui est bien le cas lorsque l'on s'intéresse aux déplacements hors résonance mécanique (voir section 3.3). Dans ces conditions, et en prenant des notations similaires à celles introduites dans la section 3.1.3 pour le fond mécanique à basse fréquence, les fluctuations de position induites par pression de radiation s'écrivent :

$$\delta x_{\mathrm{rad}}(t) \simeq \frac{8\hbar\mathcal{F}}{\lambda M_0\Omega_1^2}\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t). \tag{4.3}$$

Dans cette section, nous allons considérer le cas où les fluctuations d'intensité $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}$ se résument à un bruit classique arbitraire $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{arb}}$ que l'on produit sur une durée τ_{arb} à l'aide de nos générateurs comme indiqué dans le chapitre 3, mais que l'on peut répéter à volonté, identique à lui-même. Lorsque $\delta x_{\mathrm{rad}} \ll \delta x_{\mathrm{T}}$, l'acquisition de la phase du faisceau de mesure sur une seule réalisation du signal arbitraire ne permet pas de remonter aux fluctuations d'intensité du faisceau incident, son effet sur les déplacements du miroir étant complètement masqué par le bruit thermique.

Pour pouvoir extraire la contribution des déplacements du miroir dus aux effets de pression de radiation, une idée simple consiste à répéter plusieurs fois le signal arbitraire, et à acquérir à chaque fois la réalisation $\delta\varphi^{\mathrm{out}}_{\mathrm{m,j}}(t)$ de la phase du faisceau de mesure correspondante. Le signal $s_n(t)$ obtenu en réalisant un moyennage de n différentes réalisations s'écrit alors :

$$s_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta\varphi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{m},j}(t) + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}(\delta x_{\mathrm{T},j}(t) + \delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad},j}(t))\right). \tag{4.4}$$

Par hypothèse, les réalisations du bruit d'intensité sont identiques d'une acquisition à une autre, et les déplacements induits par pression de radiation le sont donc aussi (équation (4.3)) :

$$\forall j \in \{1, n\},\ \delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad},j}(t) = \delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad}}(t) = \frac{8\hbar\mathcal{F}}{\lambda M_0 \Omega_1^2}\delta I^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{s}}(t). \tag{4.5}$$

D'après l'équation (4.4), le signal moyenné s'écrit donc comme la somme d'un terme de bruit b_n et du signal que l'on cherche à mettre en évidence :

$$s_n(t) = b_n(t) + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}\delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad}}(t), \tag{4.6}$$

$$b_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta\varphi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{m},j}(t) + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}\delta x_{\mathrm{T},j}(t)\right). \tag{4.7}$$

Le bruit thermique et le bruit de phase du faisceau incident étant des bruits blancs de valeurs moyennes nulles, et leurs réalisations étant décorrélées les unes des autres[1], celles-ci vont se moyenner à zéro : le terme de bruit b_n tend ainsi uniformément vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Il devient donc négligeable devant le bruit de pression de radiation, ce qui montre que le signal moyenné $s_{\mathrm{n}}(t)$ permet bien en principe de mettre en évidence les déplacements $\delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad}}$.
Plus précisément, on peut s'interroger sur le nombre de réalisation qu'il faut acquérir afin d'obtenir une précision suffisante sur la mesure de $\delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad}}$. La précision p de la mesure est définie par le rapport entre l'amplitude des variations du bruit b_n et celle des variations du signal arbitraire :

$$p = \frac{\lambda}{8\mathcal{F}}\frac{\Delta b_n}{\Delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad}}}, \tag{4.8}$$

où $(\Delta b_n)^2$ et $(\Delta x^{\mathrm{arb}}_{\mathrm{rad}})^2$ désignent respectivement la variance du bruit b_n et celle des déplacements induits par pression de radiation. A un instant t, b_n apparaît comme la moyenne de n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, et sa variance s'écrit donc :

$$(\Delta b_n)^2 = \frac{1}{n}\Delta\left(\varphi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{m},1} + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}\delta x_{\mathrm{T},1}\right)^2 \tag{4.9}$$

$$= \frac{1}{n}\left[(\Delta\varphi^{\mathrm{in}}_{\mathrm{m}})^2 + \frac{64\mathcal{F}^2}{\lambda^2}(\Delta x_{\mathrm{T}})^2\right], \tag{4.10}$$

1. Cela est vrai car on a supposé que le temps de cohérence mécanique est nul. Si l'on considère les déplacements du miroir à la résonance mécanique, deux réalisations du bruit thermique ne peuvent être considérées comme indépendantes que si leur mesure est séparée de plus que le temps de relaxation mécanique.

où $(\Delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}})^2$ et $(\Delta x_{\mathrm{T}})^2$ désignent respectivement la variance du bruit de phase incident et celle du bruit thermique. Si l'on suppose que la mesure est essentiellement limitée par le bruit thermique, ce qui revient à négliger $(\Delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}})^2$ par rapport au terme proportionnel à $(\Delta x_{\mathrm{T}})^2$ dans l'équation (4.10), la précision p de la mesure s'écrit :

$$p = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Delta x_{\mathrm{T}}}{\Delta x_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{arb}}}. \tag{4.11}$$

La précision avec laquelle les déplacements $\delta x_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{arb}}$ sont extraits croît donc comme $1/\sqrt{n}$, où n est le nombre de réalisations acquises afin d'établir la moyenne, ce qui est un résultat standard de statistique. On peut exprimer l'équation (4.11) plus commodément en fonction des densités spectrales du bruit thermique et du signal arbitraire, à l'aide de l'équation (3.62) qui relie la variance d'une variable à son spectre. En supposant que le spectre du bruit d'intensité est plat en fréquence, on obtient :

$$p = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}}{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}}}. \tag{4.12}$$

L'obtention d'une précision p donnée sur $\delta x_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{arb}}$ nécessite donc d'acquérir d'autant plus de réalisations de la phase du faisceau de mesure que le rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ est faible, ce qui est un résultat tout à fait intuitif. A titre d'exemple, si l'on veut mettre en évidence à 10% près des déplacements induits par pression de radiation dont la puissance est 100 fois plus faible que le bruit thermique, il faudra acquérir $n = 100 \times 1/0.1^2 = 10\,000$ réalisations du mouvement du miroir soumis au même bruit de pression de radiation.

Démonstration expérimentale

Nous présentons maintenant une illustration expérimentale de cette technique de moyennage. Le dispositif que nous avons utilisé est rigoureusement identique à celui que nous avons décrit dans les sections 3.3.2 et 3.3.3, la particularité de l'expérience étant que nous l'avons menée en abaissant le niveau de la modulation arbitraire de telle sorte que son effet sur les déplacements du miroir soit noyé dans le bruit thermique : le rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ est maintenant réduit à 0.03 alors qu'il était de 6000 par exemple sur la figure 3.11. Les mesures sont réalisées comme nous l'avions fait dans le chapitre 3, avec les deux analyseurs de spectres reliés respectivement à la détection homodyne et à la photodiode de la détection Pound-Drever. Les analyseurs fonctionnent en mode I/Q afin de pouvoir démoduler les quadratures du bruit d'intensité du faisceau signal et du bruit de phase du faisceau de mesure, centrés à une fréquence $\Omega_{\mathrm{ref}}/2\pi = 1123\,\mathrm{kHz}$ (c'est-à-dire environ 1 kHz en deçà de la fréquence de résonance du fondamental Gaussien du miroir plan-convexe), avec une largeur d'analyse $\nu_{\mathrm{span}} = 500\,\mathrm{Hz}$.

Le signal arbitraire est appliqué en boucle sur le modulateur électro-optique non résonnant, avec une périodicité $\tau_{\mathrm{arb}} = 200\,\mathrm{ms}$. On acquiert ainsi simultanément un certain nombre de réalisations de la phase du faisceau de mesure et du bruit d'intensité arbitraire, que l'on enregistre sur les analyseurs de spectres. Nous avons représenté sur la figure 4.1 les résultats correspondant à plusieurs acquisitions de durée $\tau_{\mathrm{arb}} = 200\,\mathrm{ms}$, pour le signal (en haut à gauche) et pour la phase du faisceau réfléchi dans leur espace des phases respectifs. Cette figure montre clairement qu'une telle mesure ne permet pas de relier les déplacements du miroir, essentiellement gouvernés par le bruit thermique, au bruit d'intensité.

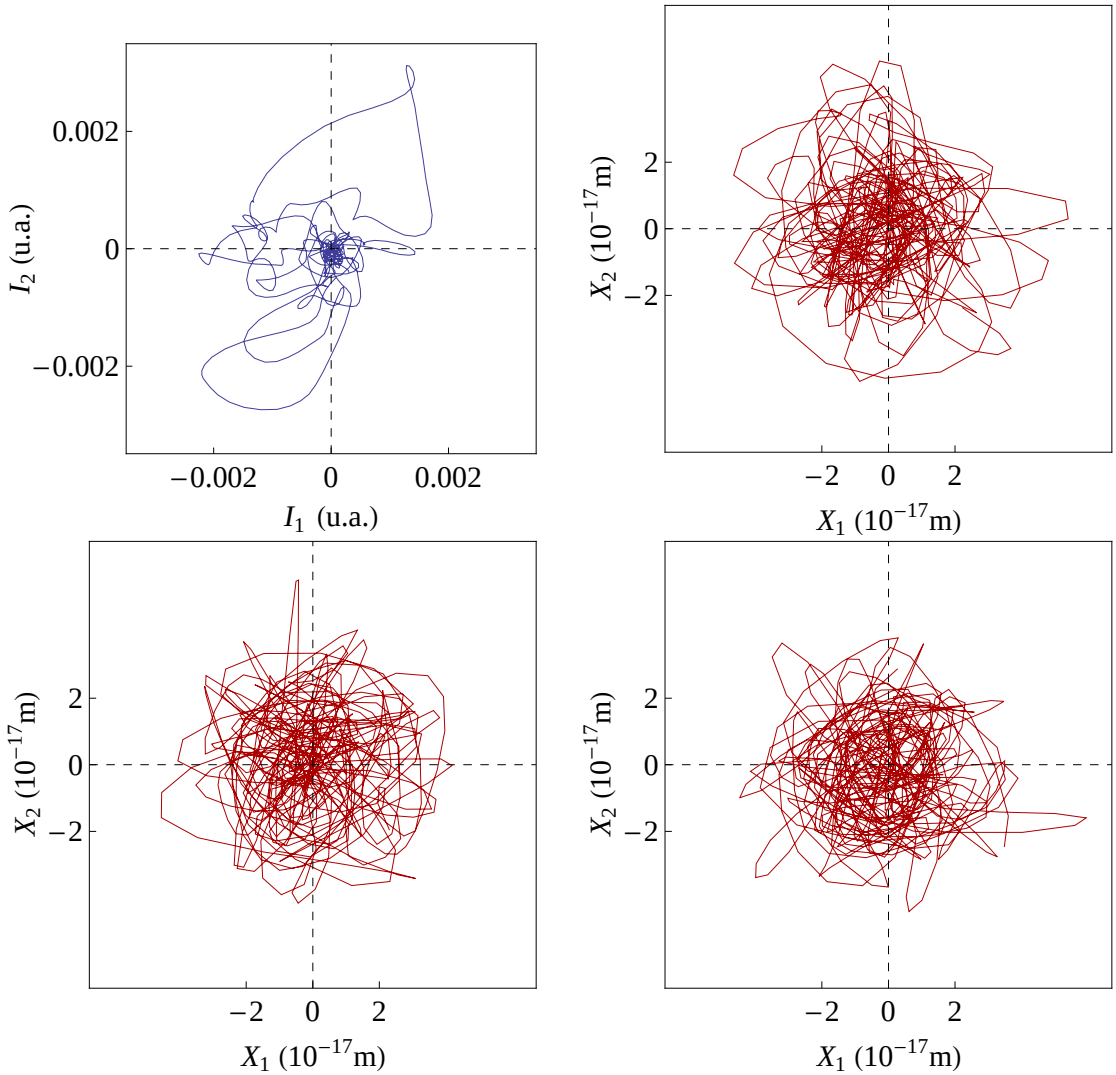

FIGURE 4.1: Trajectoires du signal (en haut à gauche) et des déplacements du miroir, pour trois acquisitions différentes dans leur espace des phases. La calibration des déplacements du miroir est effectuée à partir du bruit thermique (équation (3.64)).

La figure 4.2 à gauche correspond à la trajectoire des déplacements du miroir obtenue après le moyennage de 500 réalisations de la phase du faisceau de mesure (à gauche). On constate que cette trajectoire s'étend sur un domaine de l'espace des phases beaucoup plus restreint que celui associé à une seule acquisition, ce qui traduit le fait que les réalisations du bruit thermique sont décorrélées les unes des autres, leur moyenne tendant donc bien vers zéro. Nous présentons en insert sur la figure 4.2 un agrandissement de la trajectoire moyennée des déplacements du miroir, qui est à rapprocher de la trajectoire du bruit d'intensité (figure 4.1 à gauche) : les similitudes entre les deux graphiques sont évidentes, et démontrent que le miroir se déplace bien sous l'effet des fluctuations de pression de radiation du faisceau signal. Remarquons que la comparaison de la trajectoire moyennée avec l'une des trajectoires non moyennée de la figure 4.1 permet d'accéder au rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$, en supposant que l'essentiel de la trajectoire non moyennée correspond

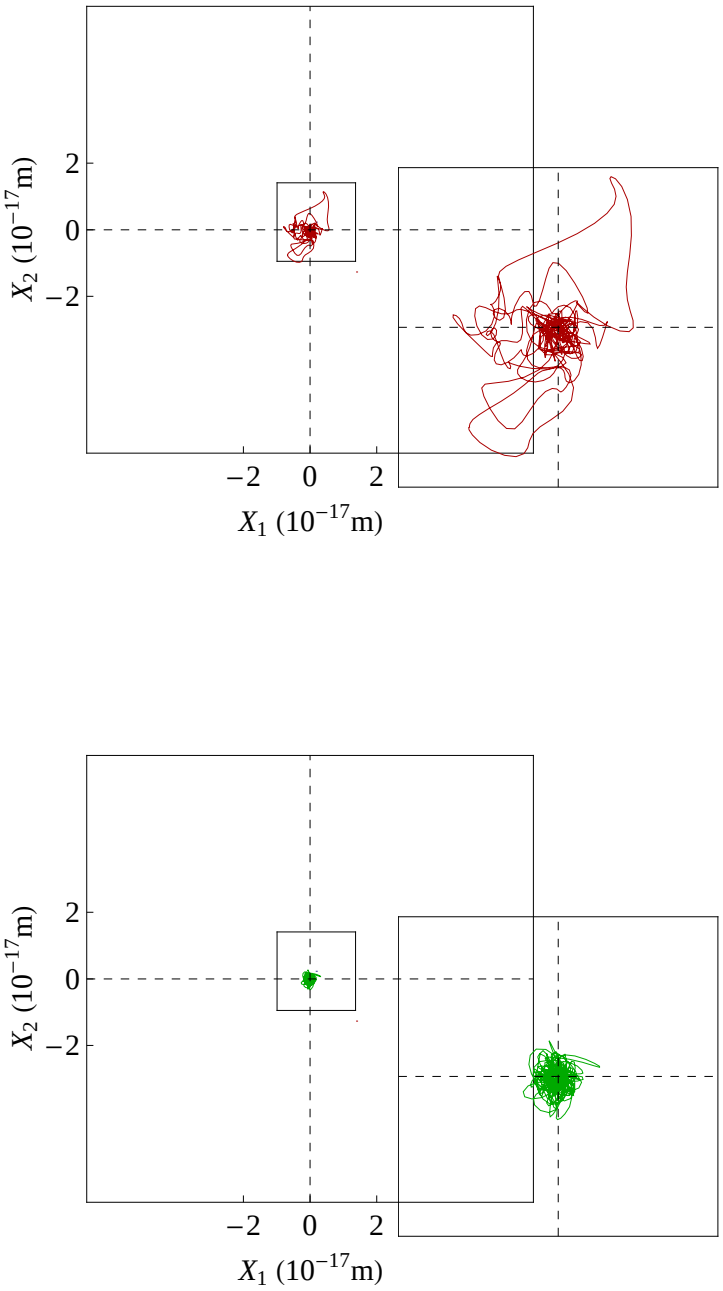

FIGURE 4.2: Trajectoire de la position résultant du moyennage de 500 réalisations de la phase du faisceau de mesure (à gauche), et fluctuations conditionnelles sur la mesure de la position moyennée (à droite).

au bruit thermique. A partir des variances respectives de ces trajectoires, on obtient $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \simeq 2.9 \times 10^{-2}$. L'incertitude qui persiste sur l'extraction du bruit de

pression de radiation après l'opération de moyennage s'identifie à la variance des fluctuations conditionnelles de la position moyennée $\delta\overline{X}_{\mathrm{s,m}}$, définies par :

$$\delta\overline{X}_{\mathrm{s,m}} = \overline{X} - \frac{\langle \overline{X} I \rangle}{\langle |I|^2 \rangle} I, \tag{4.13}$$

où $\overline{X}$ et I désignent les trajectoires complexes de la position moyennée et du bruit arbitraire d'intensité, et où la moyenne porte sur la durée τ_{arb} du signal arbitraire. La figure 4.2 à droite représente les fluctuations conditionnelles $\delta\overline{X}_{\mathrm{s,m}}$ (à droite), à partir de laquelle on obtient l'incertitude $\Delta\overline{X}_{\mathrm{s,m}} \simeq 1.2\times10^{-18}$ m. Cette incertitude correspond à la dispersion Δb_n du bruit résiduel dans le signal $s_n(t)$ qui n'est pas dû à la pression de radiation (voir équations (4.6), (4.7), et (4.10)). Remarquons que la connaissance de cette incertitude permet d'affiner l'estimation du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$: étant donnée l'indépendance du bruit b_n et des déplacements $\delta x_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{arb}}$ engendrés par le signal, on peut écrire $(\Delta x_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{arb}})^2 = \Delta\overline{X}^2 - \Delta\overline{X}_{\mathrm{s,m}}^2$, ce qui conduit à $\Delta x_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{arb}} \simeq 3.4 \times 10^{-18}$ m et $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \simeq 2.4 \times 10^{-2}$.

En comparant l'incertitude résiduelle $\Delta\overline{X}_{\mathrm{s,m}}$ aux déplacements $\Delta x_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{arb}}$ induits par pression de radiation, on trouve une précision de la mesure $p \simeq 35\%$, ce qui est qualitativement en bon accord avec les 29% attendus d'après l'équation (4.11) compte tenu du nombre de moyennes $n = 500$ et du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \simeq 2.4\times10^{-2}$. L'écart entre valeurs théorique et expérimentale peut s'expliquer par le nombre insuffisant de points (les deux trajectoires de la figure 4.2 en comptent 726).

4.1.2 Démontrer les corrélations quantiques en régime thermique

Cette technique de moyennage ne peut pas être directement étendue à la mise en évidence des corrélations optomécaniques quantiques : en effet, le bruit quantique d'intensité est un bruit blanc non reproductible, et il n'est pas possible de lui imposer une trajectoire donnée dans l'espace des phases. Un moyennage sur des acquisitions différentes conduit donc à un bruit nul et à une trajectoire limitée au point à l'origine de l'espace des phases, aussi bien pour le bruit d'intensité que pour le mouvement du miroir. Cependant, si le miroir se déplace bien sous l'effet des fluctuations quantiques de pression de radiation, la projection de son mouvement selon les fluctuations quantiques d'intensité du faisceau signal doit être non nulle. Pour mettre en évidence ces corrélations, il faut moyenner sur une certaine durée le produit $\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(t)\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(t)$, c'est-à-dire la fonction de corrélation optomécanique à délai nul $C_{\mathrm{s-m}}(\tau = 0) = \langle \delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(t)\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(t)\rangle$. Comme dans le cas du moyennage des trajectoires présenté dans la section précédente, les corrélations instantanées $\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(t)\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(t)$ contiennent un terme quantique proportionnel à $\delta x_{\mathrm{rad}}(t)\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t)$, noyé dans un terme proportionnel au bruit thermique δx_{T}. En moyennant sur un temps suffisamment long, seul subsiste le terme quantique puisque le bruit thermique est décorrélé des fluctuations d'intensité incidente et la fonction de corrélation $\langle \delta x_{\mathrm{T}}(t)\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t)\rangle$ finit par tendre vers 0.
Nous allons déterminer la durée de moyennage nécessaire pour atteindre une précision p donnée dans la mesure de $C_{\mathrm{s-m}}$. Comme nous nous intéressons à une mesure hors résonance mécanique, tous les bruits se comportent comme des bruits blancs et la seule échelle de temps est liée au filtre des analyseurs de spectre. On définit alors les bruits filtrés $\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$ pour l'intensité du faisceau signal réfléchi et $\delta\tilde{\varphi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}$

pour la phase du faisceau sonde. Ils sont tous les deux filtrés par les analyseurs de spectre, s'écrivant ainsi :

$$\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau H(t-\tau)\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(\tau), \tag{4.14}$$

$$\delta\tilde{\varphi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau H(t-\tau)\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(\tau), \tag{4.15}$$

où H est la fonction de réponse impulsionnelle de l'analyseur, supposée identique pour les deux mesures. La fonction de corrélation moyennée sur un temps T s'écrit alors :

$$C_{\mathrm{s-m}}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \delta\tilde{\varphi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(t)\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(t). \tag{4.16}$$

Hors résonance mécanique, les fluctuations de phase du faisceau de mesure s'écrivent comme la somme d'un terme proportionnel aux fluctuations d'intensité du faisceau incident et d'un bruit blanc $\beta(t)$ indépendant des fluctuations d'intensité du faisceau signal :

$$\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}(t) = \left[\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}}(t) + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}\delta x_{\mathrm{T}}(t)\right] + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}\delta x_{\mathrm{rad}}(t) = \beta(t) + \frac{64\hbar\mathcal{F}^2}{\lambda^2 M_0\Omega_1^2}\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t), \tag{4.17}$$

On suppose de plus la cavité sans perte, ce qui permet d'écrire $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(t) = \delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t)$. La fonction de corrélation moyennée devient alors :

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{s-m}}(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \left(\frac{64\hbar\mathcal{F}^2}{\lambda^2 M_0\Omega_1^2}(\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t))^2 + \tilde{\beta}(t)\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}(t)\right) \\ &= C_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{rad}}}(T) + C_{\delta\tilde{I}-\tilde{\beta}}(T). \end{aligned} \tag{4.18}$$

La fonction de corrélation moyennée apparaît donc comme la somme d'un terme non nul $C_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{rad}}}(T)$ contribuant aux corrélations optomécaniques, proportionnel à $(\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}})^2$, et d'un terme $C_{\delta\tilde{I}-\tilde{\beta}}(T)$ dont la moyenne est nulle et faisant intervenir le bruit β, somme du bruit thermique du miroir et du bruit de phase incident.
Pour calculer les intégrales temporelles, on suppose que le filtre des analyseurs correspond à une Lorentzienne de largeur Γ_{span}, ce qui permet d'écrire :

$$H(t) = \theta(t)\frac{\Gamma_{\mathrm{span}}}{2}e^{-\Gamma_{\mathrm{span}}t/2}, \tag{4.19}$$

où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside. L'espérance de la fonction de corrélation moyennée est alors simplement proportionnelle à la variance des fluctuations d'intensité incidente $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}$ limitées par la largeur Γ_{span} du filtre d'acquisition. On obtient alors :

$$\mathbb{E}\left[C_{\mathrm{s-m}}(T)\right] = \frac{16\hbar\mathcal{F}^2}{\lambda^2 M_0\Omega_1^2}\Gamma_{\mathrm{span}}S_{I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}}, \tag{4.20}$$

où $S_{I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}}$ désigne la densité spectrale du bruit d'intensité incident. Pour pouvoir extraire les corrélations induites par la pression de radiation, il faut que la dispersion du terme $C_{\delta\tilde{I}-\tilde{\beta}}(T)$ soit inférieure à l'espérance de $C_{\mathrm{s-m}}(T)$, cette condition

définissant la durée de moyennage requise. D'après l'équation (4.18), cette dispersion s'écrit :

$$(\Delta C_{\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}-\tilde{\beta}}(T))^2 = \langle C^2_{\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}-\tilde{\beta}}(T)\rangle = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T {\rm d}t{\rm d}t'\langle\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}(t)\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}(t')\tilde{\beta}(t)\tilde{\beta}(t')\rangle. \tag{4.21}$$

Les variables $\delta I_{\rm s}^{\rm in}$ et β étant statistiquement indépendantes, cette équation s'écrit [2] :

$$\langle C^2_{\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}-\tilde{\beta}}(T)\rangle = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T {\rm d}t{\rm d}t\langle\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}(t)\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}(t')\rangle\langle\tilde{\beta}(t)\tilde{\beta}(t')\rangle. \tag{4.22}$$

Compte tenu de l'expression (4.19) de H, les intégrales temporelles donnent :

$$\langle\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}(t)\delta\tilde{I}_{\rm s}^{\rm in}(t')\rangle = S_{I_{\rm s}^{\rm in}}H(|t'-t|)/2 \tag{4.23}$$

$$\langle\tilde{\beta}(t)\tilde{\beta}(t')\rangle = S_\beta H(|t-t'|)/2, \tag{4.24}$$

où S_β désigne la densité spectrale du bruit β. La variance sur la fonction de corrélation s'écrit finalement :

$$(\Delta C_{\delta\tilde{I}-\tilde{\beta}}(T))^2 = \frac{S_{I_{\rm s}^{\rm in}}S_\beta}{4T^2}\int_0^T\int_0^T {\rm d}\tau{\rm d}\tau' H^2(|t'-t|). \tag{4.25}$$

La précision p de la mesure est alors donnée par le rapport entre la valeur de la dispersion de $C_{\delta\tilde{I}-\tilde{\beta}}(T)$ (équation (4.25)) et de l'espérance de la fonction de corrélation optomécanique (équation (4.20)) :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\Delta C_{\delta\tilde{I}-\tilde{\beta}}(T)}{\mathbb{E}\left[C_{\rm s-m}(T)\right]} \\ &= \frac{\lambda^2 M_0\Omega_1^2}{64\hbar\mathcal{F}^2}\times\sqrt{\frac{S_\beta}{S_{I_{\rm s}^{\rm in}}}}\times\frac{1}{\Gamma_{\rm span}T}\times\left(\int_0^T\int_0^T {\rm d}\tau{\rm d}\tau' H^2(|t'-t|)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Lorsque le bruit thermique est dominant, le bruit $\beta(t)$ s'identifie au bruit thermique et on obtient une expression qui est à rapprocher de l'équation (4.11) :

$$p = \sqrt{\frac{S_{\rm x}^{\rm T}}{S_{\rm x}^{\rm rad}}}\times\frac{2}{\Gamma_{\rm span}T}\times\left(\int_0^T\int_0^T {\rm d}t{\rm d}t' H^2(|t'-t|)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.27}$$

D'après l'expression (4.19) de H, on obtient finalement :

$$p = \sqrt{\frac{S_{\rm x}^{\rm T}}{S_{\rm x}^{\rm rad}}}\frac{\sqrt{2}\left(\Gamma_{\rm span}T + e^{-\Gamma_{\rm span}T} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma_{\rm span}T}. \tag{4.28}$$

Lorsque la durée T de l'acquisition est supérieure au temps de mémoire $\tau_{\rm span} = 2/\Gamma_{\rm span}$ du filtre des appareils de mesures, cette équation se simplifie :

$$p \simeq \sqrt{\frac{S_{\rm x}^{\rm T}}{S_{\rm x}^{\rm rad}}}\times\sqrt{\frac{\tau_{\rm span}}{T}}. \tag{4.29}$$

2. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème de König-Huygens.

L'obtention d'une précision p sur la mesure des corrélations optomécaniques en régime thermique requiert alors un temps de moyennage T_{av} donné par :

$$\tau_{\mathrm{av}} = \frac{\tau_{\mathrm{span}}}{p^2} \times \frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}}{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}}. \tag{4.30}$$

Ainsi, en maximisant la largeur spectrale Γ_{span} de l'acquisition, on réduira d'autant le temps nécessaire à la mesure des corrélations optomécaniques. A titre d'exemple, en choisissant $\Gamma_{\mathrm{span}}/2\pi = 500\,\mathrm{Hz}$, le temps de moyennage requis afin d'obtenir à 10% près la valeur des corrélations optomécaniques induites par un bruit de pression de radiation cent fois plus faible que le bruit thermique est de l'ordre de 6 s, ce qui rend l'expérience particulièrement simple à réaliser en principe.
Notons que si l'on cherche à détecter les corrélations optomécaniques à la fréquence d'une résonance mécanique, la fonction de corrélation optomécanique à délai nul n'a de sens que si la largeur Γ_{span} est égale au plus à Γ, où Γ est la largeur de la résonance (voir chapitre 3). On obtient dans ces conditions une équation similaire à (4.30), où Γ_{span} est remplacé par Γ. Ainsi, en prenant $\Gamma/2\pi = 1Hz$, on peut prévoir que l'obtention d'une précision de 10% sur des corrélations optomécaniques induites à résonance mécanique par un bruit de pression de radiation 100 fois plus faible que le bruit thermique requerra une durée de moyennage $T_{\mathrm{av}} \simeq 1\,\mathrm{h}$. Ceci est un argument supplémentaire plaidant en faveur d'une démonstration des corrélations optomécaniques quantiques en régime thermique en dehors des résonances mécaniques, où l'utilisation d'une largeur spectrale d'analyse presque arbitrairement grande permet de réduire significativement la durée de l'expérience.

Signature du bruit quantique

L'obtention d'une bonne précision sur la mesure de la fonction de corrélation optomécanique est une condition importante pour pouvoir démontrer l'existence de l'action en retour en régime thermique, mais elle n'est toutefois pas suffisante. En effet, il est indispensable de démontrer que les corrélations mesurées résultent de manière certaine des effets quantiques de la pression de radiation. On peut pour cela penser à procéder indirectement, en calibrant précisément tous les paramètres optomécaniques, et en comparant le niveau des corrélations mesuré expérimentalement avec le niveau attendu théoriquement. Une telle démarche est possible a priori avec notre dispositif, pour lequel nous avons eu l'occasion de démontrer à plusieurs reprises que nous en modélisons bien les imperfections, mais elle n'est toutefois pas complètement satisfaisante, puisqu'indirecte.
On peut alors remarquer que le bruit quantique de pression de radiation se distingue singulièrement de tout autre bruit classique : nous avons vu en effet que la densité spectrale du bruit quantique d'intensité du champ incident varie proportionnellement à son intensité moyenne (équation 1.21), alors qu'il est facile de montrer que la densité spectrale d'un bruit classique d'intensité varie comme le carré de l'intensité moyenne. La fonction de corrélation optomécanique étant proportionnelle à la densité spectrale de bruit $S_{\mathrm{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}}$ (équation 4.20), il est ainsi possible de vérifier que le niveau des corrélations évolue linéairement avec la puissance incidente du champ signal. Ceci permettrait de montrer que les corrélations observées traduisent bien l'existence de l'action en retour au niveau quantique.
Ces remarques mettent en lumière la nécessité de pouvoir faire varier la puissance incidente du faisceau signal sur plusieurs ordres de grandeur, tout en étant capable de mesurer les corrélations. Nous aborderons dans la section suivante les facteurs qui fixent une borne inférieure au niveau des corrélations accessibles avec notre

dispositif. Toutefois, nous pouvons d'ores et déjà signaler qu'avec notre système, pour lequel nous pouvons raisonnablement espérer un rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \simeq 10^{-2}$ hors résonance mécanique pour une puissance incidente de 2 mW, il est tout à fait envisageable de réduire la puissance incidente sur deux ordres de grandeurs, les corrélations correspondantes pouvant être extraites en des temps d'acquisition n'excédant pas l'heure (équation 4.30).

4.1.3 Démonstration expérimentale avec un bruit classique

Nous terminons cette partie par une démonstration expérimentale de la démarche présentée dans la section précédente, en utilisant un bruit d'intensité classique de faible amplitude : nous étudions les propriétés statistiques de la fonction de corrélation optomécanique moyennée sur plusieurs acquisitions, lorsque le système est soumis au bruit d'intensité arbitraire présenté sur la figure 4.1.
Le réseau de courbes de la figure 4.3 correspond à l'évolution des fonctions de corrélation optomécaniques $\mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(T)$, normalisées à 1 en divisant l'équation (4.16) par le produit $\Delta\tilde{\varphi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}\Delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$. Chaque courbe est associée à une acquisition différente de la phase du faisceau de mesure, mais elles sont toutes réalisées dans des conditions expérimentales identiques (même bruit d'intensité appliqué en cycles de 200 ms, le temps total de l'acquisition étant de 2.8 s). Il apparaît sur cette figure

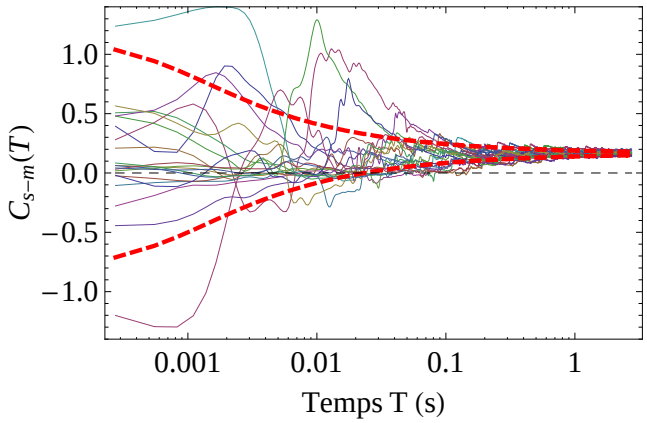

FIGURE 4.3: Evolution en fonction du temps de la fonction de corrélation optomécanique. Les 20 courbes du réseau représenté sont construites à partir d'autant d'acquisitions indépendantes de la phase du faisceau de mesure, longues chacune de 2.8 s, par moyennage du produit $\delta\tilde{\varphi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$ (équation (4.16)), normalisé au produit des dispersions $\Delta\tilde{\varphi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}\Delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$.

que le réseau constitué par les diverses réalisations de la fonction de corrélation optomécanique forme un fuseau qui converge vers une valeur asymptotique non nulle $\mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(t \to \infty) \simeq 0.16$, en bon accord avec la valeur du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} = 2.4\times10^{-2}$ que nous avons déterminée dans la section 4.1.1.
Les deux courbes en pointillés représentent l'incertitude sur la mesure de la fonction de corrélation normalisée (déterminée d'après l'équation (4.28), avec $\Gamma_{\mathrm{span}}/2\pi = 500\,\mathrm{Hz}$), qui d'après l'équation (4.29) évolue asymptotiquement comme $\pm\sqrt{2/\Gamma_{\mathrm{span}}T}$

autour de la valeur limite $\mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(+\infty)$. On note sur la figure 4.3 une certaine dissymétrie vers les valeurs positives des courbes expérimentales par rapport au fuseau défini par l'incertitude attendue. Pour comprendre cet effet, on peut décomposer la fonction de corrélation en deux termes $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{rad}}}(t)$ et $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}}(t)$ correspondant respectivement à la contribution de la pression de radiation et du bruit (voir équation (4.18)). Ces quantités ne sont pas accessibles expérimentalement, puisqu'on ne peut pas extraire de la mesure de la phase $\delta\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}$ du faisceau réfléchi la partie δx_{rad} liée à la pression de radiation et celle liée au bruit thermique δx_{T}. Par contre, on s'attend à ce que le mouvement δx_{rad} soit proportionnel au bruit d'intensité $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}$, ce qui signifie que le terme $\mathcal{C}_{\delta I-\delta x_{\mathrm{rad}}}$ est proportionnel à la fonction d'autocorrélation du bruit d'intensité :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{rad}}}(T) &= \mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(T\to\infty)\times\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{I}}(T)\\ &= \mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(T\to\infty)\times\frac{1}{T(\Delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}})^2}\int_0^T \mathrm{d}t(\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}(t))^2. \qquad (4.31)\end{aligned}$$

Le coefficient de proportionnalité $\mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(T\to\infty)$ se déduit des valeurs atteintes en T infini, sachant que $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}}=0$ puisque les variables $\delta I_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}$ et δx_{T} sont décorrélées. D'après l'équation (4.18), cette dernière fonction de corrélation s'écrit finalement :

$$\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}}(T)=\mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(T)-\mathcal{C}_{\delta I-\delta x_{\mathrm{rad}}}(T). \qquad (4.32)$$

Les résultats obtenus expérimentalement sont présentés sur les figures 4.4 et 4.5. Par construction, le réseau de courbes $(\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{rad}}})$ converge vers la valeur asymptotique de la fonction de corrélation optomécanique $\mathcal{C}_{\mathrm{s-m}}(T\to\infty)$. On remarquera que la convergence apparaît comme pseudo-périodique : l'ensemble des courbes formant le fuseau se coupent sur la ligne en pointillés chaque fois que le temps atteint un multiple de 200 ms, correspondant à la période du bruit d'intensité arbitraire.

On notera également que ce réseau de courbes présente une dissymétrie assez marquée vers les valeurs positives. Cela provient du fait que la distribution de $(\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}})^2$ (en bas sur la figure 4.4) est elle-même dissymétrique, les événements d'amplitude s'élevant à plusieurs fois la variance du bruit ayant une probabilité significative de se produire [3]. C'est cette dissymétrie qui explique celle du réseau des courbes présentées sur la figure 4.3. En effet, l'autre terme $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}}(t)$ est proportionnel au produit $\delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}$, et on s'attend à ce qu'il soit distribué symétriquement par rapport à zéro, puisque c'est le cas du bruit thermique δx_{T}.

La figure 4.5 montre que les courbes correspondantes, calculées à partir de l'équation (4.32), sont bien distribuées symétriquement autour de zéro, et que la convergence du fuseau qu'elles forment semble en outre compatible avec celle attendue théoriquement (courbes rouges, tracées d'après l'équation (4.28)).

La figure 4.6 représente l'évolution de la dispersion sur $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}}(t)$ en fonction du temps (courbe bleue), obtenue à partir du réseau de courbes de la figure 4.5. Cette dispersion est à comparer à celle prévue par l'équation (4.28), en pourpre sur la figure 4.6. On constate que si la dispersion obtenue expérimentalement

3. Dans le cas d'un bruit de pression de radiation Gaussien, la dissymétrie de $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{rad}}}$ attendue est beaucoup moins prononcée, la distribution Gaussienne ayant une portée beaucoup plus limitée que celle de notre bruit arbitraire. Cette portée peut être quantifiée à l'aide du kurtosis de la distribution [80], c'est-à-dire son moment centré d'ordre 4 : pour une distribution Gaussienne, celui-ci est égal à 3, tandis qu'il vaut 5.2 dans le cas du bruit dont la distribution est présentée sur la figure 4.4, dont la queue est donc plus lourde que celle d'une simple Gaussienne.

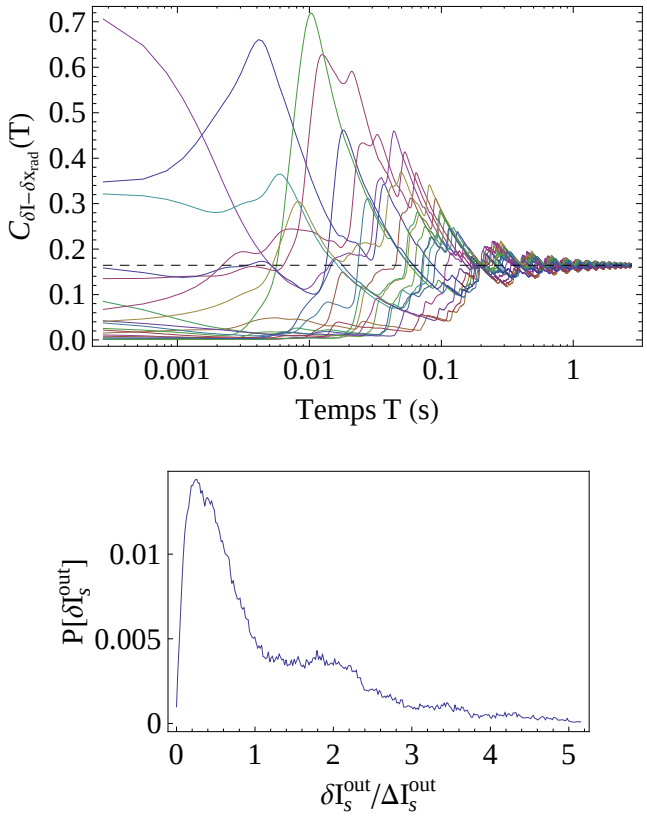

FIGURE 4.4: En haut : évolution en fonction du temps de la contribution $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\rm rad}}$ des effets de pression de radiation à la fonction de corrélation optomécanique (équation (4.31)). En bas : distribution de la variance instantanée du bruit d'intensité arbitraire.

décroît bien asymptotiquement comme $1/\sqrt{T}$, elle demeure supérieure à celle qui est théoriquement attendue. Ceci peut s'expliquer par le fait que le filtre de l'analyseur de spectre n'est pas de type Lorentzien, mais de type Gaussien, donc plus sélectif en fréquence. La courbe marron correspond à la dispersion calculée à partir de l'équation (4.28), mais où l'on a ajusté la largeur du filtre, égale à $\Gamma_{\rm span}/2\pi = 320\,\mathrm{Hz}$, ce qui est en bon accord avec l'hypothèse d'une plus grande sélectivité spectrale de la part d'un filtre Gaussien.

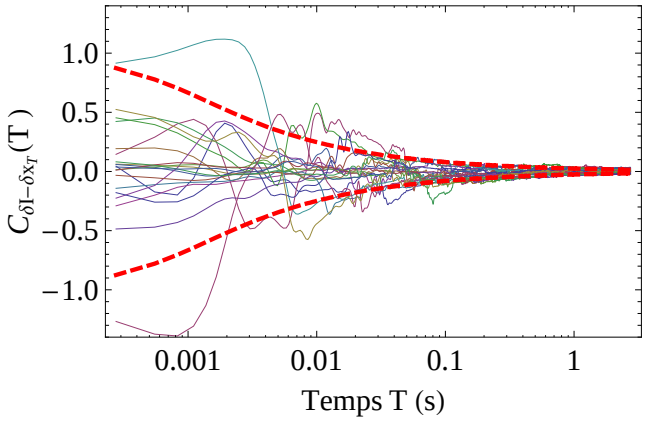

FIGURE 4.5: Evolution en fonction du temps T de la contribution $\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}}$, calculée à partir de l'équation (4.32) du bruit thermique à la fonction de corrélation optomécanique. Les deux courbes rouges correspondent à la dispersion théorique sur la mesure des corrélations, calculée à partir de l'équation (4.28) normalisée au produit des dispersions $\Delta\tilde{\varphi}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}\Delta\tilde{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$.

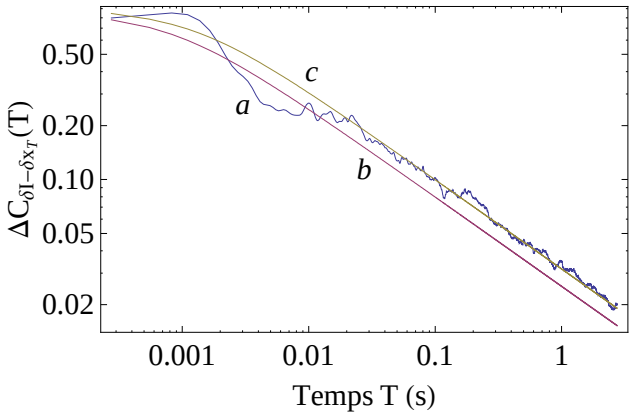

FIGURE 4.6: Evolution de la dispersion du bruit sur les corrélations optomécaniques $\Delta\mathcal{C}_{\delta\tilde{I}-\delta\tilde{x}_{\mathrm{T}}}(T)$. La courbe bleue ($a$) correspond à la dispersion déterminée expérimentalement à partir du réseau de courbes de la figure 4.5. La courbe pourpre (b) correspond à la dispersion théorique (équation (4.28)), où l'on a pris la largeur du filtre $\Gamma_{\mathrm{span}}/2\pi = 500\,\mathrm{Hz}$. La courbe marron ($c$) correspond à la dispersion toujours donnée par l'équation (4.28), mais où l'on a ajusté le paramètre Γ_{span}, égal à $2\pi \times 320\,\mathrm{Hz}$.

4.2 Limites expérimentales à l'observation des corrélations quantiques

Les résultats présentés dans la section précédente pourraient laisser croire que l'unique obstacle à l'observation des corrélations optomécaniques quantiques est le temps de moyennage requis afin d'obtenir une précision suffisante sur la mesure, inversement proportionnel à $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ (éq. (4.30)). De plus, comme nous envisageons de procéder hors résonance mécanique, cette condition n'apparaît même plus comme une limite sur la durée de l'expérience, puisqu'il est possible d'accroître presqu'arbitrairement la largeur spectrale d'analyse Γ_{span}, et donc de diminuer la durée d'acquisition nécessaire. Nous allons voir dans cette section qu'il existe en réalité des limites expérimentales à l'observation des effets quantiques de la pression de radiation, qui découlent des imperfections de l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance optique de la cavité à miroir mobile lorsque celle-ci présente des pertes optiques non négligeables.

Contamination de l'intensité du faisceau réfléchi par le mouvement du résonateur

Nous avons vu dans les chapitres 1 et 2 que lorsque les pertes optiques P de la cavité ne sont pas négligeables devant la transmission T du miroir d'entrée d'une cavité Fabry-Perot, l'intensité réfléchie par celle-ci dépend du désaccord entre la lumière incidente et la résonance de la cavité, décrivant plus précisément un pic d'Airy en absorption (équation (1.100)). Si la fréquence du laser est parfaitement verrouillée sur la résonance de la cavité ($\overline{\Psi} = 0$), ces pertes se traduisent par une baisse du niveau des corrélations optomécaniques, d'une part à cause de la diminution d'un facteur $T/(T+P)$ de l'intensité moyenne du champ intracavité, et d'autre part du fait de la décorrélation partielle subie par les fluctuations du champ intracavité (terme α^{vide} dans l'équation 1.98). En revanche, si l'on s'écarte légèrement de la résonance ($\overline{\Psi} \neq 0$), l'intensité du champ réfléchi par la cavité devient sensible aux déplacements du miroir mobile puisque le point de fonctionnement se situe alors sur le flanc du pic d'Airy, là où une variation de longueur de la cavité se traduit par un changement de l'intensité réfléchie (voir figure 4.7). La quadrature d'intensité $\delta p_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$ du faisceau signal réfléchi et la quadrature de phase $\delta q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}$ du faisceau de mesure réfléchi sont alors toutes les deux sensibles aux déplacements du miroir, et notamment à son bruit thermique, induisant des corrélations classiques qui limitent les corrélations optomécaniques accessibles à l'expérience.

Or, l'asservissement du laser sur la résonance de la cavité n'est pas idéal, c'est-à-dire qu'il subsiste toujours de légers décalages de la fréquence du laser par rapport à la résonance. Nous nous proposons ici de modéliser l'effet de ces décalages, en calculant les fluctuations d'intensité du faisceau signal réfléchi et les fluctuations de phase du faisceau de mesure réfléchi dans une cavité désaccordée en présence de pertes optiques. Nous supposerons dans la suite que le désaccord $\overline{\Psi}$ reste petit devant l'amortissement γ de la cavité.

En présence des pertes, les équations d'entrée-sortie du champ signal sont données par les relations (1.98) et (1.99). L'état stationnaire, donné par l'équation (1.100), montre qu'en présence d'un désaccord $\overline{\Psi}$, les champs moyens incident $\overline{\alpha}^{\mathrm{in}}$ et réfléchi $\overline{\alpha}^{\mathrm{out}}$ sont déphasés respectivement des angles θ^{in} et θ^{out} par rapport au champ

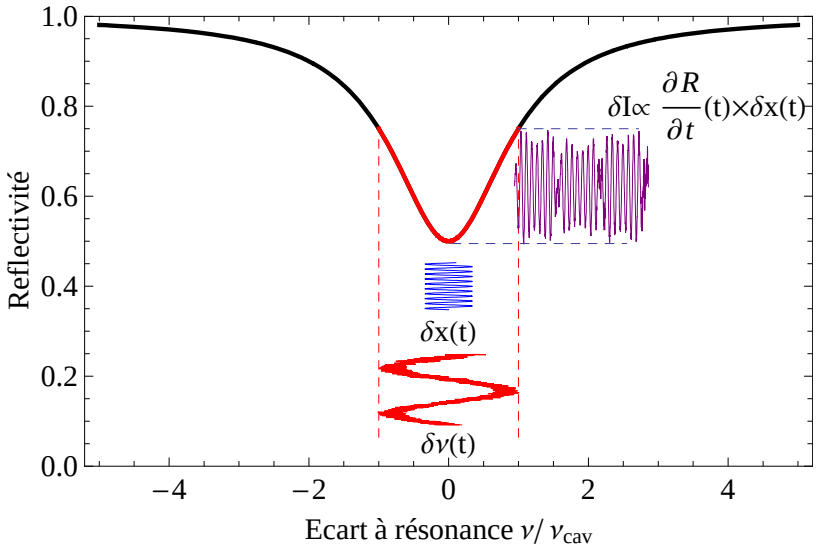

FIGURE 4.7: Principe de la contamination de la quadrature d'intensité du faisceau signal par les déplacements du miroir mobile en présence de pertes. Lorsque la fréquence du faisceau signal présente un léger désaccord $\delta\nu(t)$ par rapport à la résonance de la cavité à miroir mobile (dû par exemple aux fluctuations basse fréquence de la longueur d'onde du laser), son intensité réfléchie devient sensible aux déplacements du miroir, avec une pente égale à la dérivée du pic d'Airy en absorption.

intracavité $\overline{\alpha}$, avec :

$$e^{-i\theta^{\text{in}}} = \frac{\gamma - i\overline{\Psi}}{\sqrt{\gamma^2 + \overline{\Psi}^2}}, \tag{4.33}$$

$$e^{-i\theta^{\text{out}}} = \frac{\gamma - P + i\overline{\Psi}}{\sqrt{(\gamma - P)^2 + \overline{\Psi}^2}}. \tag{4.34}$$

Ces déphasages doivent être pris en compte pour calculer les fluctuations $\delta p_{\text{s}}^{\text{out}}$ de la quadrature d'intensité du champ signal réfléchi. D'après les équations (1.10) et (1.12), celles-ci s'écrivent :

$$\delta p_{\text{s}}^{\text{out}}[\Omega] = e^{i\theta^{\text{out}}}\delta\alpha_{\text{s}}^{\text{out}}[\Omega] + e^{-i\theta^{\text{out}}}\delta\alpha_{\text{s}}^{\text{out}^*}[\Omega]. \tag{4.35}$$

De la même manière, on a pour le champ incident $\delta\alpha_{\text{s}}^{\text{in}}$ et le vide $\delta\alpha_{\text{s}}^{\text{v}}$ associé aux pertes :

$$\delta\alpha_{\text{s}}^{\text{in}}[\Omega] = \frac{1}{2}e^{-i\theta^{\text{in}}}(\delta p_{\text{s}}^{\text{in}}[\Omega] + i\delta q_{\text{s}}^{\text{in}}[\Omega]), \tag{4.36}$$

$$\delta\alpha_{\text{s}}^{v}[\Omega] = \frac{1}{2}(\delta p_{\text{s}}^{v}[\Omega] + i\delta q_{\text{s}}^{v}[\Omega]), \tag{4.37}$$

A partir des équations (1.98), (1.99), et (4.34) à (4.37), on peut déterminer l'expression des fluctuations d'intensité du faisceau signal réfléchi. On trouve après un

calcul fastidieux mais ne présentant pas de difficulté :

$$\begin{aligned}\Delta \times \delta p_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}[\Omega] \;=\; & T\Big\{\Big[\gamma - i\Omega\tau - \frac{\Delta}{T}\Big]\cos\theta - \overline{\Psi}\sin\theta\Big\}\delta p_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}[\Omega] \\ & -T\Big\{\Big[\gamma - i\Omega\tau - \frac{\Delta}{T}\Big]\sin\theta + \overline{\Psi}\cos\theta\Big\}\delta q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}[\Omega] \\ & +\sqrt{TP}\{(\gamma - i\Omega\tau)\cos\theta^{\mathrm{out}} - \overline{\Psi}\sin\theta^{\mathrm{out}}\}\delta p_{\mathrm{s}}^{v}[\Omega] \\ & -\sqrt{TP}\{(\gamma - i\Omega\tau)\sin\theta^{\mathrm{out}} + \overline{\Psi}\cos\theta^{\mathrm{out}}\}\delta q_{\mathrm{s}}^{v}[\Omega] \\ & -4k\overline{\alpha}_{\mathrm{s}}\sqrt{T}\{(\gamma - i\Omega\tau)\sin\theta^{\mathrm{out}} + \overline{\Psi}\cos\theta^{\mathrm{out}}\}\delta x[\Omega], \end{aligned} \tag{4.38}$$

où $\Delta = (\gamma - i\Omega\tau)^2 + \overline{\Psi}^2$ et $\theta = \theta^{\mathrm{out}} - \theta^{\mathrm{in}}$. Trois effets physiques différents se dégagent de cette équation. Le premier est le filtrage subi par le champ à l'intérieur de la cavité, décrit par tous les termes en $\gamma - i\Omega\tau$. Le second effet, responsable de la présence des troisième et quatrième termes dans l'équation (4.38), est dû à l'existence des pertes optiques, qui décorrèlent le champ réfléchi du champ incident. Ainsi, les fluctuations d'intensité du champ réfléchi ne reflètent plus exactement celles de la pression de radiation intracavité, réduisant les corrélations optomécaniques observables. Le troisième effet repose sur la présence d'un désaccord $\overline{\Psi} \neq 0$, qui induit l'apparition du dernier terme de l'équation (4.38), que l'on notera par la suite $\delta p_{\mathrm{s,x}}^{\mathrm{out}}$, et qui correspond à la contamination de la quadrature d'intensité par les déplacements du miroir mobile. En utilisant les expressions de $\cos\theta^{\mathrm{out}}$ et $\sin\theta^{\mathrm{out}}$ données par l'équation (4.34), on montre facilement qu'il s'exprime sous la forme suivante :

$$\delta p_{\mathrm{s,x}}^{\mathrm{out}}[\Omega] \;=\; -4k\overline{\alpha}_{\mathrm{s}}\frac{\sqrt{T}\,\overline{\Psi}(-P + i\Omega\tau)}{\Delta\sqrt{(\gamma - P)^2 + \overline{\Psi}^2}}\delta x[\Omega]. \tag{4.39}$$

Dans la limite d'un désaccord $\overline{\Psi}$ faible devant γ, et à basse fréquence ($\Omega \ll \Omega_{\mathrm{cav}}$), l'équation (4.39) se développe de la manière suivante :

$$\delta p_{\mathrm{s,x}}^{\mathrm{out}}[\Omega] \simeq 2k\frac{1}{\sqrt{\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}}}\frac{\mathrm{d}\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}\overline{\Psi}}\delta x[\Omega]. \tag{4.40}$$

On retrouve ainsi le résultat que nous avions annoncé qualitativement : la contamination de la quadrature d'intensité par les déplacements du miroir est proportionnelle à la pente du pic d'Airy en réflexion. En particulier, la contamination est bien nulle lorsque $\overline{\Psi} = 0$, ou lorsque $P = 0$.

Effet de la contamination sur les corrélations optomécaniques

Pour déterminer les fluctuations de phase $\delta q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}$ du faisceau de mesure réfléchi par la cavité, nous rappelons que nous faisons l'hypothèse d'un désaccord $\overline{\Psi} \ll \gamma$, ce qui nous permet de considérer que la sensibilité de la mesure n'est que très faiblement affectée par le désaccord. Cela revient à identifier les fluctuations $\delta q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}$ à leur développement à l'ordre le plus bas en $\overline{\Psi}$, donné par l'équation (1.104) :

$$\delta q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}[\Omega] = \frac{\gamma - P + i\Omega\tau}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}}[\Omega] + \frac{\sqrt{TP}}{\gamma - i\Omega\tau}\delta q_{\mathrm{m}}^{v}[\Omega] + \frac{4\sqrt{T}}{\gamma - i\Omega\tau}k\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}\delta x[\Omega]. \tag{4.41}$$

Le déplacement δx du miroir est la somme du bruit thermique δx_{T} et du bruit de pression de radiation $\delta x_{\mathrm{rad}}[\Omega] = \chi[\Omega]F_{\mathrm{rad}}[\Omega]$. En considérant que seul le faisceau signal, beaucoup plus intense par hypothèse que le faisceau de mesure, contribue à la force de pression de radiation, celle-ci est donnée par :

$$F_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{in}}[\Omega] = 2\hbar k\overline{\alpha}_{\mathrm{s}}\delta p_{\mathrm{s}}[\Omega], \tag{4.42}$$

où δp_{s}, qui désigne les fluctuations de la quadrature d'intensité du champ signal intracavité, est donné par :

$$\begin{aligned}\delta p_{\mathrm{s}}[\Omega] &= \sqrt{T}\Big\{(\gamma - i\Omega\tau)\cos\theta^{\mathrm{in}} + \overline{\Psi}\sin\theta^{\mathrm{in}}\Big\}\delta p_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}[\Omega] \\ &+ \sqrt{T}\Big\{(\gamma - i\Omega\tau)\sin\theta^{\mathrm{in}} - \overline{\Psi}\cos\theta^{\mathrm{in}}\Big\}\delta q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}[\Omega] \\ &+ \sqrt{P}(\gamma - i\Omega\tau)\delta p_{\mathrm{s}}^{v}[\Omega] - \overline{\Psi}\sqrt{P}\delta q_{\mathrm{s}}^{v}[\Omega].\end{aligned} \tag{4.43}$$

En remarquant que toutes les fluctuations incidentes ($\delta p_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}$, $\delta q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}$, $\delta p_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}}$, $\delta q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{in}}$, $\delta p_{\mathrm{s}}^{v}$, $\delta q_{\mathrm{s}}^{v}$, $\delta p_{\mathrm{m}}^{v}$ et $\delta q_{\mathrm{m}}^{v}$) sont indépendantes les unes des autres, on peut écrire le spectre de la fonction de corrélation optomécanique $2\pi\delta(\Omega + \Omega')C_{\mathrm{s-m}}[\Omega] = \langle\delta p_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}[\Omega]\delta q_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}[\Omega']\rangle$ de la manière suivante :

$$C_{\mathrm{s-m}}[\Omega] = C_{\mathrm{opto}}[\Omega] + C_{\mathrm{x-x}}[\Omega], \tag{4.44}$$

où C_{opto} est une contribution liée uniquement aux déplacements du miroir induits par les fluctuations quantiques du champ signal intracavité (celle que l'on cherche à mettre en évidence), et où $C_{\mathrm{x-x}}$ est un terme résultant de la contamination par le mouvement du miroir :

$$2\pi\delta(\Omega + \Omega')C_{\mathrm{opto}}[\Omega] = \frac{4\sqrt{T}}{\gamma - i\Omega\tau}k\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}\langle(\delta p_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}[\Omega] - \delta p_{\mathrm{s,x}}^{\mathrm{out}}[\Omega]) \times \delta x_{\mathrm{rad}}[\Omega']\rangle, \tag{4.45}$$

$$2\pi\delta(\Omega + \Omega')C_{\mathrm{x-x}}[\Omega] = \frac{4\sqrt{T}}{\gamma - i\Omega\tau}k\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}\langle\delta p_{\mathrm{s,x}}^{\mathrm{out}}[\Omega]\delta x[\Omega']\rangle, \tag{4.46}$$

L'expression générale de la partie C_{opto} étant extrêmement lourde, nous allons traiter le cas basse fréquence ($\Omega \ll \Omega_{\mathrm{cav}}$) pour une cavité présentant des pertes optiques P faibles devant les pertes totales γ, qui modélise bien les conditions expérimentales dans lesquelles nous nous trouvons. De plus, nous nous limitons dans la suite aux développements des expressions au premier ordre en $\overline{\Psi}/\gamma$. Dans ces conditions, les équations (4.38), et (4.40) à (4.46) permettent d'établir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{opto}}[\Omega] &= \frac{8\hbar k^2 T\overline{\alpha}_{\mathrm{s}}\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}}{\gamma^2}\chi^*[\Omega]S_{\mathrm{p,s}}^{\mathrm{in}}[\Omega] \\ C_{\mathrm{x-x}}[\Omega] &= \frac{8k^2\sqrt{T}\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}}{\gamma\sqrt{\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}}}\frac{\mathrm{d}\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}\overline{\Psi}}S_{\mathrm{x}}[\Omega],\end{aligned} \tag{4.47}$$

Le terme C_{opto} est donc indépendant de $\overline{\Psi}$ au premier ordre, et s'identifie à la valeur de la fonction de corrélation optomécanique en l'absence de tout désaccord ($\overline{\Psi} = 0$), mais compte tenu des pertes ($T \neq 2\gamma$). Le terme $C_{\mathrm{x-x}}$ est linéaire en $\overline{\Psi}$, car proportionnel à la pente du pic d'Airy en réflexion. Le rapport des deux

termes $C_{\mathrm{x-x}}[\Omega]$ et $C_{\mathrm{opto}}[\Omega]$ permet de définir la condition que le désaccord $\overline{\Psi}$ doit satisfaire si l'on veut pouvoir procéder correctement à la mesure des corrélations optomécaniques. En utilisant la relation entre $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}$ et $S_{\mathrm{p,s}}^{\mathrm{in}}$ déduite de l'équation (4.42) et en prenant un faisceau signal incident au bruit de photon ($S_{\mathrm{p,s}}^{\mathrm{in}} = 1$), on trouve :

$$\left|\frac{C_{\mathrm{x-x}}[\Omega]}{C_{\mathrm{opto}}[\Omega]}\right|^2 = \frac{16\pi^2}{\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}\overline{\Psi}}\right)^2 \times \left(\frac{S_{\mathrm{x}}[\Omega]}{\lambda^2}\right) \times \left(\frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega]}{S_{\mathrm{x}}[\Omega]}\right)^{-1}. \tag{4.48}$$

L'équation (4.48) montre que l'effet relatif de la contamination sur les corrélations optomécaniques dépend essentiellement de trois paramètres : tout d'abord, il est proportionnel à la pente du pic d'Airy en absorption, qui définit la sensibilité de la quadrature d'intensité aux déplacements du miroir. Il est également proportionnel à l'amplitude de ces déplacements (second terme de l'équation (4.48)). Enfin, l'effet de la contamination est inversement proportionnel au niveau des corrélations optomécaniques, défini par le rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}$.

En pratique, il n'est donc possible de mesurer les corrélations optomécaniques que si le rapport défini par l'équation (4.48) est "suffisamment" petit, c'est-à-dire s'il est inférieur à la précision p espérée sur la mesure. Cela implique une condition sur le désaccord $\overline{\Psi}$, qui ne devra pas excéder une certaine valeur limite $\overline{\Psi}_p$, s'écrivant d'après l'équation (4.48) et l'expression de la pente du pic d'Airy déduite de (1.100) :

$$\frac{\overline{\Psi}_p}{\gamma} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}_0}}{8\mathcal{F}\sqrt{\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{in}}}} \times \frac{\gamma^2}{TP} \times \left(\frac{S_{\mathrm{x}}[\Omega]}{\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}[\Omega]}{S_{\mathrm{x}}[\Omega]}\right)^{\frac{1}{2}} \times p, \tag{4.49}$$

où $\mathcal{R}_0$ est le coefficient de réflexion à résonance de la cavité, donné par l'équation (1.101).

Conditions à résonance mécanique

Lorsqu'on se trouve en régime thermique, c'est-à-dire lorsque $S_{\mathrm{x}}[\Omega] \simeq S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}[\Omega]$, les équations (1.62), et (1.63) permettent de mettre $\overline{\Psi}_p$ sous la forme suivante au voisinage d'une résonance mécanique Ω_0 :

$$\frac{\overline{\Psi}_p^{\mathrm{therm}}}{\gamma} \simeq \frac{\sqrt{\mathcal{R}_0}\gamma^2}{2TP}\sqrt{\frac{T}{T+P}\frac{\hbar\Omega_0}{k_B T_{\mathrm{m}}}} \times p, \tag{4.50}$$

où T_{m} désigne la température du miroir. Cette équation montre que la condition que doit vérifier l'accord à résonance du faisceau signal ne dépend que des propriétés optiques de la cavité, mise à part la fréquence Ω_0 à laquelle on mesure les déplacements du miroir. Cela peut se comprendre de la façon suivante : si l'on change les propriétés mécaniques du résonateur afin qu'il réponde mieux à la pression de radiation, on augmente également son bruit thermique, c'est-à-dire que l'on augmente le niveau de la contamination sur la quadrature d'intensité. De même, si l'on accroît la puissance du faisceau signal afin d'améliorer le rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ (en restant dans le régime $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}} \ll S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$), on augmente du même coup la sensibilité de la quadrature d'intensité aux fluctuations de position du miroir mobile, proportionnelle à la pente du pic d'Airy en réflexion. Dans les deux cas, l'équation (4.50)

montre que l'effet de la contamination reste le même, et la condition sur l'accord à résonance du faisceau signal ne change pas.

On peut donner un ordre de grandeur de la contamination pour la cavité 30 22/12−0 7125/2 ($\mathcal{F} = 330\,000$, $P \simeq 0.4\gamma$, $T \simeq 1.6\gamma$, $\mathcal{R}_0 \simeq 0.5$) et pour un miroir mobile ayant son mode fondamental Gaussien à la fréquence $\Omega_0/2\pi \simeq 1\,\mathrm{MHz}$. On trouve d'après l'équation (4.50) que l'extraction des corrélations optomécaniques avec une précision $p = 10\%$ nécessite de maintenir le faisceau signal sur la résonance de la cavité à $\overline{\Psi}_\mathrm{p}/\gamma \simeq 10^{-8}$ près. Pour une bande passante de la cavité $\Omega_\mathrm{cav}/2\pi \simeq 1\,\mathrm{MHz}$, cela signifie qu'il faut maintenir le laser à résonance avec la cavité à mieux que 10 mHz, ce qui n'est que très difficilement envisageable expérimentalement.

Lorsque le système se trouve en régime quantique ($S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}/S_\mathrm{x}^\mathrm{T} \geq 1$), on peut considérer que $S_\mathrm{x} \simeq S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}$. Dans ce cas, la condition (4.49) sur l'écart à résonance ne dépend plus que du bruit de pression de radiation :

$$\frac{\overline{\Psi}_p^\mathrm{quant}}{\gamma} \simeq \frac{\sqrt{\mathcal{R}_0}}{8\mathcal{F}\sqrt{\overline{I}_\mathrm{s}^\mathrm{in}}}\frac{\gamma^2}{TP}\left(\frac{S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}[\Omega]}{\lambda^2}\right)^{-1/2} \times p. \tag{4.51}$$

En comparant $\overline{\Psi}_\mathrm{p}^\mathrm{quant}$ et $\overline{\Psi}_\mathrm{p}^\mathrm{therm}$ (obtenu en remplaçant S_x par S_x^T dans (4.49)), on trouve immédiatement :

$$\overline{\Psi}_\mathrm{p}^\mathrm{quant} = \frac{S_\mathrm{x}^\mathrm{T}[\Omega]}{S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}[\Omega]} \times \overline{\Psi}_\mathrm{p}^\mathrm{therm}. \tag{4.52}$$

Cette équation montre que la condition sur l'accord à résonance du faisceau signal devient en régime quantique de plus en plus stricte à mesure que le rapport $S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}/S_\mathrm{x}^\mathrm{T}$ augmente : à température fixée, l'amélioration de la réponse du résonateur à la pression de radiation au-delà du bruit thermique implique une augmentation de l'amplitude totale des déplacements du miroir, et donc du niveau de la contamination de l'intensité du faisceau signal réfléchi. Remarquons que cela ne signifie pas qu'il est impossible de mettre en évidence les effets de l'action en retour lorsque l'on se trouve en régime quantique, puisque dans ces conditions, une simple mesure du spectre des déplacements du miroir suffit à les démontrer. En revanche, une mesure propre des corrélations entre l'intensité incidente et le mouvement du miroir ne semble pas réalisable.

Conditions hors résonance mécanique

L'équation (4.49) montre que si l'on veut assouplir la condition nécessaire à la mise en évidence des corrélations quantiques, il faut, du point de vue du résonateur mécanique, minimiser le mouvement global S_x du miroir, tout en maximisant le rapport $S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}/S_\mathrm{x}^\mathrm{T}$ entre les effets de pression de radiation et le bruit thermique. Or, nous avons vu dans le chapitre 3 que l'utilisation de la réponse du fond mécanique permet précisément de réunir ces deux conditions. En utilisant les équations (1.60), (3.8) et l'expression de la susceptibilité basse fréquence donnée par l'équation (3.13), on trouve qu'en régime thermique ($S_\mathrm{x}^\mathrm{rad} \ll S_\mathrm{x}^\mathrm{T}$), $\overline{\Psi}_p^\mathrm{therm}$ se met sous la forme :

$$\frac{\overline{\Psi}_p^\mathrm{therm}}{\gamma} \simeq \frac{\sqrt{\mathcal{R}_0}\gamma^2}{2TP}\sqrt{\frac{T}{T+P}} \times \frac{\hbar\Omega}{k_B T_\mathrm{m}} \times \frac{1}{\phi_0} \times p, \tag{4.53}$$

où Ω est la fréquence à laquelle on mesure les corrélations et Φ_0 est l'angle de perte associé au fond supposé petit devant 1. L'équation (4.51) montre ainsi qu'en se plaçant hors résonance mécanique, on gagne un facteur $1/\phi_0$ sur la contamination, par rapport à la situation à résonance mécanique (équation (4.50)). Cela provient du fait que le mouvement thermique (et donc le mouvement global S_x en régime thermique) est beaucoup plus faible hors résonance mécanique, tout en gardant un rapport $S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}/S_\mathrm{x}^\mathrm{T}$ équivalent ou même meilleur.
Si l'on suppose que les pertes associées au fond sont les mêmes que celle des modes Gaussiens du miroir plan-convexe ($\phi_0 \simeq \phi_1 \simeq 10^{-6}$), l'observation des corrélations optomécaniques nécessite d'asservir le faisceau signal sur la résonance optique de la cavité à mieux que $\overline{\Psi}_\mathrm{p}/\gamma \simeq 10^{-2}$ près, ce qui correspond, pour une cavité de bande passante $\Omega_\mathrm{cav}/2\pi = 1\,\mathrm{MHz}$, à une tolérance de 10 kHz sur l'accord à résonance, ce qui est parfaitement envisageable avec notre dispositif.

En régime quantique, on montre aisément que le comportement de la contamination évolue de manière analogue au cas traité dans le paragraphe précédent (équation (4.51)). Pour un angle de pertes $\phi_0 = 10^{-6}$, il ne semble ainsi pas déraisonnable d'envisager de mettre en évidence des corrélations optomécaniques pour un rapport $S_\mathrm{x}^\mathrm{rad}/S_\mathrm{x}^\mathrm{T} \simeq 10^2$, puisque cela nécessiterait d'asservir la fréquence du faisceau signal sur la résonance de la cavité à mieux que $\overline{\Psi}_\mathrm{p}^\mathrm{quant}/\gamma \simeq 10^{-4}$, soit environ 100 Hz dans le cas d'une cavité de bande passante 1 MHz. Il semble ainsi possible de réaliser une mesure quantique non destructive avec un système optomécanique, et ce même avec un rapport signal à bruit très élevé.

4.3 Mise en évidence expérimentale de la contamination

Dans cette section, nous démontrons expérimentalement la contamination de la quadrature d'intensité du faisceau réfléchi par les déplacements du miroir. Nous débuterons la section par la caractérisation du bruit d'intensité du faisceau incident. Nous expliquerons en particulier comment utiliser le dispositif de double injection pour avoir un faisceau au bruit quantique. Nous montrerons ensuite que la quadrature d'intensité du faisceau réfléchi présente un excès de bruit lorsque le faisceau est à résonance avec la cavité à miroir mobile. Nous établirons qu'il s'agit bien de la contamination décrite dans la section précédente, en nous intéressant notamment à la façon dont il dépend du désaccord entre le laser et la résonance de la cavité. Nous présenterons enfin une technique permettant d'évaluer précisément le niveau de contamination dans notre système, ainsi que les performances que nous sommes parvenus à atteindre suite à un certain nombre d'améliorations.

4.3.1 Propriétés du bruit d'intensité du faisceau incident

Notre dispositif a été conçu à l'origine pour fournir un faisceau incident dont les fluctuations d'intensité sont de nature quantique [21] pour des puissances de l'ordre du mW, et à la fréquence d'observation du mouvement du miroir mobile, c'est-à-dire 1 MHz. Or, notre expérience a subi de nombreuses modifications depuis les premières caractérisations de l'état de la lumière incidente, sans que nous n'ayons mesuré leur conséquence sur le bruit d'intensité du faisceau. Deux d'entre-elles sont

susceptible d'affecter ce bruit d'intensité : il s'agit du changement de la pompe du laser Titane-saphir, et de la mise en place de la double injection.

Bruit d'intensité du laser Ti-Sa pompé par le Verdi V18
Nous avons tout d'abord cherché à déterminer les conséquences du changement de laser de pompe sur le bruit d'intensité du laser. Pour éviter de passer dans le système de double injection accordable tout en mesurant le bruit d'intensité à l'aide de la détection homodyne située après la cavité FPF (voir le schéma d'ensemble de la figure (2.33)), nous avons retourné de 90° le cube CP sur son support. De cette manière le faisceau issu du laser est directement envoyé dans la cavité FPF, sans passer par les modulateurs acousto-optiques. Pour caractériser le bruit d'intensité, nous utilisons la détection homodyne comme une simple détection équilibrée, c'est-à-dire un ensemble constitué d'une lame semi-réfléchissante et de deux photodiodes de mêmes gains optique et électronique. Lorsque l'on envoie un faisceau lumineux présentant un bruit d'amplitude $\delta\alpha^{\mathrm{in}}(t)$ sur une lame semi-réfléchissante, les fluctuations des champs transmis α_{t} et réfléchi α_{r} par cette lame s'écrivent respectivement :

$$\delta\alpha_{\mathrm{t}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\delta\alpha^{\mathrm{in}}(t) - \delta\alpha^{\mathrm{v}}(t)], \tag{4.54}$$

$$\delta\alpha_{\mathrm{r}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\delta\alpha^{\mathrm{in}}(t) + \delta\alpha^{\mathrm{v}}(t)], \tag{4.55}$$

où $\delta\alpha^{\mathrm{v}}$ désigne les fluctuations du vide entrant par le port inutilisé de la lame. Les valeurs moyennes $\overline{\alpha}_{\mathrm{t}}$ et $\overline{\alpha}_{\mathrm{r}}$ des champs transmis et réfléchi étant égales à $\overline{\alpha}^{\mathrm{in}}/\sqrt{2}$, on déduit des équations (4.54) et (4.55) les expressions des fluctuations d'intensité transmises δI_{t} et réfléchies δI_{r} :

$$\delta I_{\mathrm{t}}(t) = \frac{1}{2}[\delta I^{\mathrm{in}}(t) - \sqrt{\overline{I}^{\mathrm{in}}}\delta\alpha^{\mathrm{v}}(t)], \tag{4.56}$$

$$\delta I_{\mathrm{r}}(t) = \frac{1}{2}[\delta I^{\mathrm{in}}(t) + \sqrt{\overline{I}^{\mathrm{in}}}\delta\alpha^{\mathrm{v}}(t)]. \tag{4.57}$$

Ces deux dernières équations montrent que la somme $\delta I_+ = \delta I_{\mathrm{t}} + \delta I_{\mathrm{r}}$ des intensités transmise et réfléchie est égale aux fluctuations d'intensité du faisceau incident, tandis que la différence δI_- est égale aux fluctuations $\delta\alpha^{\mathrm{v}}$ du vide, amplifiées par le champ incident. En particulier, les spectres S_{I}^+ et S_{I}^- s'écrivent :

$$S_{\mathrm{I}}^+[\Omega] = S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{in}}[\Omega], \tag{4.58}$$

$$S_{\mathrm{I}}^-[\Omega] = \overline{I}^{\mathrm{in}}. \tag{4.59}$$

La somme des deux intensités reproduit donc l'intensité incidente, tandis que la différence donne le bruit de photon standard pour un faisceau de même intensité moyenne (équation (1.21)). Tout écart entre S_{I}^+ et S_{I}^- traduit donc le fait que le faisceau incident n'est pas au bruit quantique standard.

Pour mesurer S_{I}^+ et S_{I}^-, on règle la détection homodyne de la façon suivante. On tourne la lame demi-onde se situant juste avant le cube $CP1$ (voir figure 1.21), de façon à envoyer l'intégralité du faisceau transmis par la cavité FPF dans l'oscillateur local. Le faisceau est réfléchi au retour par ce même cube $CP1$, avant d'être séparé en deux parties d'égales intensités sur le cube $CP2$. On procède

ensuite à la comparaison des spectres S_{I}^{+} et S_{I}^{-} pour différentes valeurs de la puissance incidente $\overline{I}^{\mathrm{in}}$, en additionnant ou en soustrayant les deux photocourants issus des photodiodes $Ph1$ et $Ph2$. Les résultats de la mesure de S_{I}^{+} et S_{I}^{-} sont présentés sur la figure 4.8 : les courbes de gauche, qui représentent les résultats mesurés directement par l'analyseur de spectre, montrent en particulier que le bruit électronique (courbe (e)) est assez proche des signaux que l'on cherche à mesurer pour qu'il soit nécessaire de le retrancher des mesures effectuées (courbes de droites sur la figure 4.8).

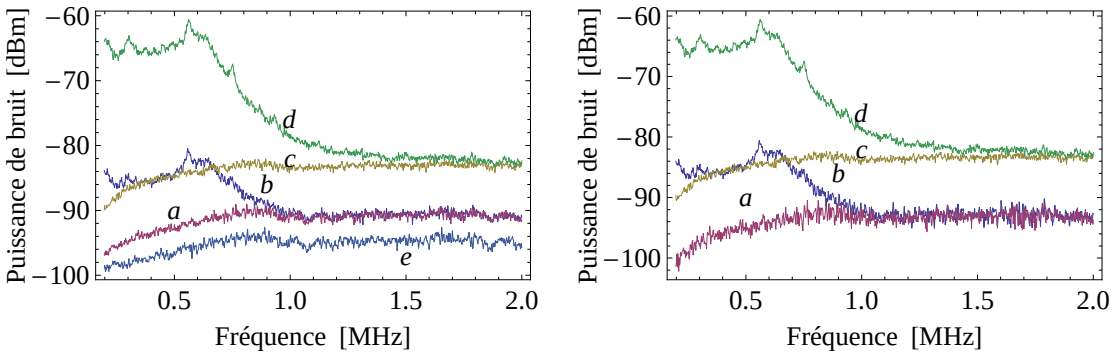

FIGURE 4.8: Caractérisation du bruit d'intensité du faisceau incident. Les courbes de gauche correspondent aux mesures brutes, et les courbes de droites sont corrigées du bruit électronique de la détection (courbe (e) sur la figure de gauche). Sur chaque figure, les courbes (a) et (c) correspondent au spectre de la différence des photocourants des photodiodes $ph1$ et $ph2$ (voir figure 1.21), et les courbes (b) et (d) correspondent à la somme des photocourants, pour des puissances incidentes de 1 mW et 10 mW respectivement.

Les courbes (a) et (c) de la figure de droite correspondent aux spectres S_{I}^{-} corrigés du bruit électronique, acquis pour des intensités incidentes égales à 1 mW et 10 mW respectivement. On constate un écart de 10 dB entre les deux courbes, comme on s'y attend pour le bruit de photon standard (équation (4.59)). Les courbes (b) et (d) de la figure de droite correspondent quant à elles aux spectres S_{I}^{+} de la somme des photocourants de la détection homodyne, respectivement pour 1 mW et 10 mW incidents. On note un large excès de bruit à basse fréquence dans les deux cas, les deux courbes étant par ailleurs séparées de 20 dB, comme on s'y attend pour un bruit classique, dont la puissance varie comme le carré de l'intensité incidente. A plus haute fréquence, le bruit d'intensité rejoint le niveau du bruit quantique, si bien que pour une puissance incidente de 1 mW, le faisceau laser se trouve au bruit quantique standard à 1 MHz, comme nous le souhaitons. Lorsque la puissance incidente est de 10 mW, on voit qu'un excès de bruit significatif persiste au-delà de 1 MHz, le faisceau ne se trouvant pas au bruit quantique avant 2 MHz. Une nouvelle cavité de filtrage est actuellement en cours de développement pour corriger ce problème, car, comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 2, nous envisageons d'envoyer vers la cavité à miroir mobile une puissance incidente de l'ordre de 20 mW.
Ces résultats sont plutôt meilleurs que ceux obtenus auparavant, lorsque le laser Titane-Saphir était pompé par un laser à Argon. Pour une puissance de 500 μW, le faisceau présentait un bruit classique jusqu'à une fréquence de l'ordre de 1.5 MHz, avec un excès de bruit de l'ordre de 30 dB au dessus du bruit quantique standard.

Bruit d'intensité avec la double injection

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'impact des modulateurs acousto-optiques de la double injection sur le bruit d'intensité du faisceau. Nous avons pour cela rétabli l'orientation initiale du cube CP (figure 2.33) permettant d'alimenter chacune des voies de la double injection, et nous avons procédé de la manière décrite dans le paragraphe précédent afin de caractériser le bruit d'intensité du faisceau transmis par la cavité FPF. Nous avons étudié indépendamment l'impact des modulateurs, qui sont alimentés par des générateurs radio-fréquence différents (voir chapitre 2). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure (4.9). Les courbes

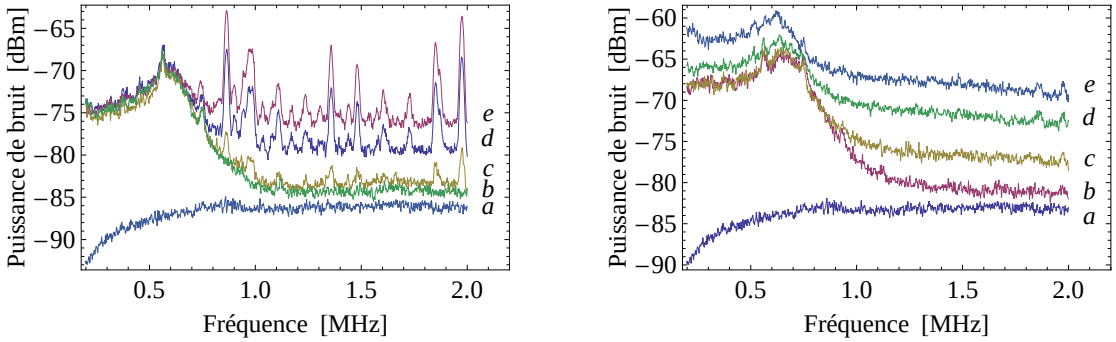

FIGURE 4.9: Effet des modulateurs acousto-optiques sur le bruit d'intensité du faisceau incident, à gauche pour le modulateur alimenté par le pilote accordable en fréquence, et à droite pour celui alimenté par le pilote non accordable. La puissance lumineuse envoyée sur la détection équilibrée est égale à 5 mW dans le cas de la figure de gauche, et à 10 mW dans le cas de la figure de droite. Sur chaque figure, la courbe (a) correspond au bruit de photon du faisceau incident, et les courbes (b) à (e) correspondent à différents points de fonctionnement, définis par des tensions appliquées à l'entrée amplitude des pilotes de 5 V, 4 V, 3.5 V, et 2.5 V respectivement pour la figure de gauche, et de 4.5 V, 3.5 V, 2.5 V, et 1.5 V respectivement pour la figure de droite.

de gauche correspondent au bruit d'intensité du faisceau traversant le modulateur acousto-optique alimenté par un pilote AA DRFA10Y accordable en fréquence, et les courbes de droite correspondent au bruit d'intensité du faisceau traversant le modulateur acousto-optique alimenté par un pilote non accordable MODA200. Dans chaque cas, nous avons fait varier la tension appliquée sur l'entrée amplitude $0 - 5$ V du pilote, et nous avons acquis le bruit d'intensité correspondant en conservant une puissance transmise par la cavité FPF constante (5 mW dans le cas des courbes de gauche, et 10 mW dans le cas des courbes de droite).

Il ressort de cette étude qu'à mesure que l'on s'éloigne du maximum de transmission du modulateur obtenu pour une tension de 5 V, l'excès de bruit subi par le faisceau est de plus en plus grand. Cela pose un problème important : nous avons vu que par construction, les asservissements d'intensité nécessitent de se placer à un point de fonctionnement inférieur au maximum de transmission des acousto-optiques. Ils ne sont donc pas utilisables dès lors que l'on cherche à obtenir un faisceau incident se trouvant au bruit quantique standard. La comparaison de ces courbes avec celles présentées sur la figure 4.8 montre également que même en fonctionnant au maximum de transmission, les deux modulateurs induisent un excès de bruit par rapport au bruit de photon standard. On note cependant que cet excès de bruit reste modeste (de l'ordre de 2 dB dans les deux cas), et qu'il

disparaît à 1 MHz dès lors que la puissance du faisceau est inférieure ou égale à 2 mW. A faible transmission, le pilote accordable produit de nombreux pics de bruit qui n'apparaissent pas avec le pilote non accordable (courbes (d) et (e) sur la figure 4.9). Notons que la mise en place d'une nouvelle cavité de filtrage avec une fréquence de coupure beaucoup plus basse devrait également éliminer ces problèmes et rendre les asservissements d'intensité de nouveau utilisables.

4.3.2 Mise en évidence et caractérisation quantitative de la contamination

Nous présentons maintenant la mise en évidence expérimentale de la contamination de la quadrature d'intensité par le mouvement du miroir. Nous avons assez rapidement constaté l'existence d'un excès de bruit sur la quadrature d'intensité du faisceau signal réfléchi, dont le profil spectral était très semblable à celui du bruit thermique tel que nous l'observions sur la phase du faisceau de mesure réfléchi.
Nous avons déterminé comment varie la contamination en fonction du désaccord. Pour cette expérience, nous n'avons conservé que le faisceau signal, dont nous mesurons les fluctuations d'intensité grâce à la photodiode de la détection Pound-Drever. Nous avons préalablement vérifié que cette photodiode fonctionne au niveau quantique (son seuil se situant aux alentours de 100 μW), et nous avons calibré le signal qu'elle délivre lorsqu'elle est éclairée par un faisceau de 1 mW (ligne en pointillés sur la figure 4.10). Nous avons ensuite asservi la fréquence du laser à différents désaccord avec la cavité, en acquérant à chaque fois à l'aide de l'analyseur de spectre le bruit d'intensité du faisceau signal réfléchi. Pour pouvoir faire varier le désaccord entre la fréquence du laser et la résonance optique de la cavité, nous appliquons un offset variable au signal d'erreur délivré par la détection Pound-Drever, la mesure de ce décalage nous permettant de déterminer le point de fonctionnement correspondant sur le pic d'Airy [64]. Les résultats que nous avons obtenus sont présentés sur la figure 4.10. Les courbes (a) à (f) correspondent aux spectres de bruit d'intensité acquis pour des désaccords négatifs décroissants, de 0 à $-\gamma/10$ environ avec une puissance incidente constante égale à 1 mW. Nous avons également réalisé des acquisitions à désaccord positif, mais la présence de l'instabilité paramétrique [24] les rend difficilement exploitables.

Cette figure montre qu'à mesure que l'on s'éloigne de la résonance optique, l'amplitude de la contamination devient de plus en plus importante, ce qui est bien le résultat attendu : en effet, la pente du pic d'Airy en réflexion est croissante sur le domaine de variation du désaccord que nous avons choisi, et l'équation (4.40) montre que l'on s'attend à ce que l'amplitude de la contamination soit proportionnelle à cette pente. Nous avons cherché à déterminer comment varie la contamination en fonction du désaccord. La figure 4.11 présente l'évolution en fonction du désaccord de la puissance $S^{\mathrm{out}}_{\mathrm{p_s,x}}$ de l'excès de bruit $\delta p^{\mathrm{out}}_{\mathrm{s,x}}$ (équation 4.40) à la fréquence de résonance mécanique Ω_1 du mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe. Cette puissance se déduit de la mesure de l'excès de bruit d'intensité $S^{\mathrm{out}}_{\mathrm{I_s,x}}$ à la fréquence Ω_1 par la relation :

$$S^{\mathrm{out}}_{\mathrm{p_s,x}}[\overline{\Psi},\Omega_{\mathrm{M}}] = \frac{1}{\overline{I}^{\mathrm{out}}_{\mathrm{s}}[\overline{\Psi}]} S^{\mathrm{s,out}}_{\mathrm{I,x}}[\overline{\Psi},\Omega_{\mathrm{M}}]. \tag{4.60}$$

Le niveau du bruit quantique d'intensité pour un faisceau de 1 mW (courbe en pointillés sur la figure 4.10) nous permet de calibrer l'excès de bruit d'intensité

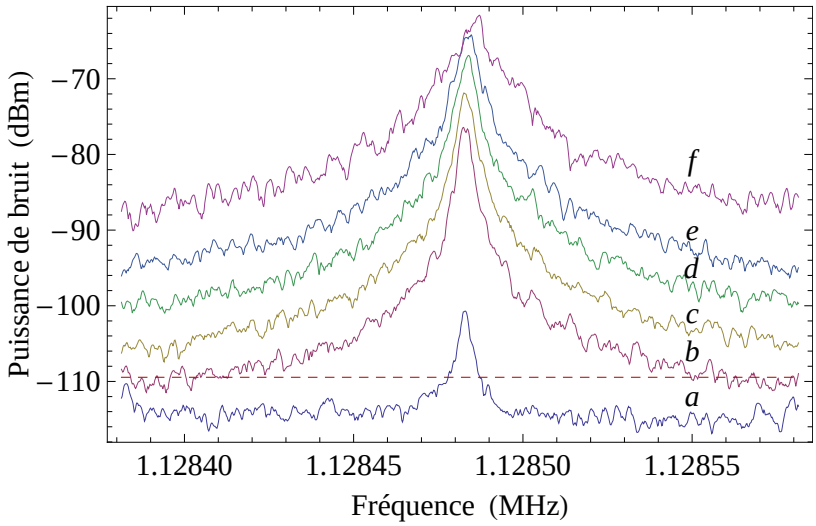

FIGURE 4.10: Bruit d'intensité du faisceau signal réfléchi par la cavité au voisinage de la fréquence de résonance du mode mécanique fondamental du miroir plan-convexe. Les courbes (a) à (f) correspondent respectivement aux désaccords -0.0009γ, -0.0082γ, -0.0128γ, -0.021γ, -0.042γ, et -0.097γ. La ligne en pointillés représente le niveau du bruit quantique standard d'un faisceau de 1 mW.

$S_{\mathrm{I_{s,x}}^{\mathrm{out}}}$ à la fréquence Ω_1, et la puissance lumineuse réfléchie $\overline{I}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{out}}$ est déduite de la mesure du désaccord $\overline{\Psi}$. Les points ainsi obtenus (en grisé sur la figure 4.11) sont à comparer avec le niveau de contamination attendu théoriquement d'après l'équation (4.40) (avec $S_{\mathrm{x}} \simeq S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$), auquel correspond la courbe en traits continus. Les paramètres que nous avons utilisés pour tracer cette courbe sont tous issus des calibrations optique et mécanique de la cavité de références 30 21/13 et 0 7125/3 dont nous nous sommes servis pour mener cette expérience, et que nous avons intégralement refaites à cette occasion. En effet, plusieurs mois ont séparé la calibration réalisée dans le chapitre 2 de l'expérience présentée ici. Optiquement, on a obtenu une bande passante de la cavité $\Omega_{\mathrm{cav}}/2\pi = 0.9\,\mathrm{MHz}$, ce qui correspond à une finesse $\mathcal{F} = 167\,000$ compte tenu de la longueur de la cavité ($L = 500\,\mu\mathrm{m}$), avec plus précisément une transmission $T = 9.8\,\mathrm{ppm}$, et des pertes $P = 27.8\,\mathrm{ppm}$. La valeur de la finesse est donc supérieure à celle que nous avions déterminée lors de la précédente calibration, probablement en raison d'une position différente du faisceau sur les miroirs. La calibration mécanique accrédite cette hypothèse, puisqu'on a obtenu une masse effective du mode $M = 170\,\mathrm{mg}$, supérieure aux 72 mg précédemment trouvés, cette variation ne pouvant être attribuée qu'à un désalignement du faisceau sur le mode mécanique.

On peut voir sur la figure 4.11 que les points expérimentaux s'écartent de plus en plus de la prédiction théorique à mesure que le désaccord augmente. Ceci est lié à la présence d'effets dynamiques de la pression de radiation [24], qui sont significatifs avec notre système même pour de très faibles désaccords et pour une puissance incidente de 1 mW (voir chapitre 5). Ces effets entraînent un refroidissement effectif du mode mécanique, qui se traduit par une réduction de l'amplitude des déplacements du miroir, et par un élargissement de la résonance mécanique, comme on peut le voir sur la figure 4.11. Les points bleus sur la figure 4.11 correspondent à l'excès de bruit sur la quadrature d'intensité corrigé de cet effet de

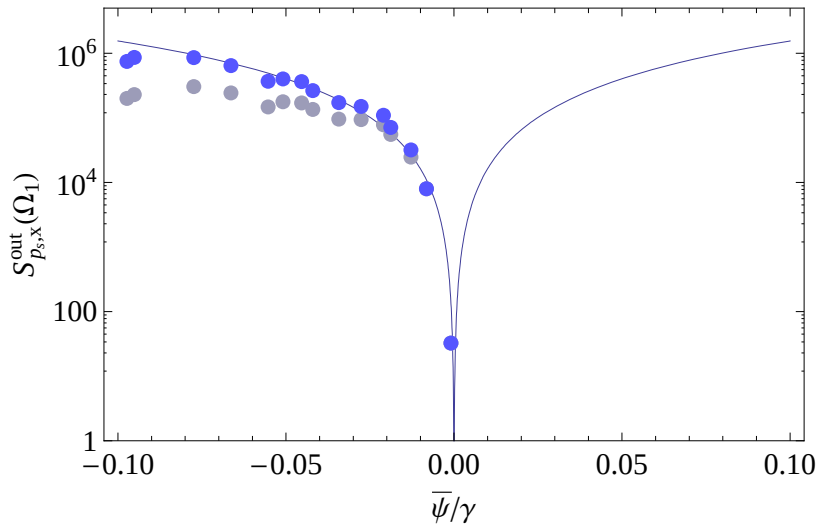

FIGURE 4.11: Evolution en fonction du désaccord de l'excès de bruit sur la quadrature d'intensité $S^{\rm out}_{\rm ps,x}$ à la fréquence de résonance mécanique du mode fondamental Gaussien du miroir plan-convexe. Les points grisés correspondent aux résultats obtenus à partir de la mesure de la contamination du bruit d'intensité (figure 4.10). Les points bleus sont corrigés de l'effet de refroidissement induit par la pression de radiation dans la cavité désaccordée (voir chapitre 5). La courbe en traits continus correspond à l'évolution attendue théoriquement d'après l'équation 4.40, où la puissance des déplacements du miroir $S_{\rm x}[\Omega_{\rm M}] = S^{\rm T}_{\rm x}[\Omega_{\rm M}] = 1.3 \times 10^{-32}\,{\rm m}^2/{\rm Hz}$ est déduite de la calibration mécanique.

refroidissement que nous avons déterminé d'après l'élargissement du bruit thermique observé sur les spectres de bruit d'intensité de la figure 4.11. On voit que ces points s'alignent de manière très satisfaisante sur la courbe théorique, ce qui démontre à la fois que l'excès de bruit provient bien de la contamination telle que nous l'avons modélisée dans la section précédente, et que nous avons correctement calibré notre système.

Chapitre 5

Effets de la pression de radiation dans une cavité désaccordée

Nous terminons ce manuscrit par l'étude des effets de la pression de radiation dans une cavité désaccordée. Nous débutons ce chapitre par la présentation théorique des conséquences sur la dynamique du miroir mobile d'un désaccord entre le faisceau et la résonance de la cavité, puis nous verrons comment notre dispositif de double injection permet de réaliser un refroidissement du miroir. Nous achevons ce chapitre par l'étude d'un effet nouveau qui consiste à améliorer la sensibilité d'une mesure interférométrique au-delà de la limite quantique standard, en tirant profit d'une amplification optomécanique du signal. Nous présentons la démonstration expérimentale d'une amplification de presque 10 dB d'un signal correspondant à une variation apparente de longueur de la cavité. Dans tout ce chapitre, les calculs théoriques sont basés sur une description monomode du résonateur, décrit par la susceptibilité donnée par l'équation (1.47).

5.1 Présentation théorique

5.1.1 Diffusion Brillouin induite par pression de radiation

L'interaction par pression de radiation entre le champ intracavité et le mouvement du miroir peut en partie s'interpréter comme un processus de diffusion inélastique de type Brillouin [81] : en effet, le miroir peut céder des phonons à la fréquence Ω_m du mouvement (processus anti-Stokes) ou bien en absorber (processus Stokes), en transférant au champ lumineux l'énergie $\pm\hbar\Omega_\mathrm{m}$ correspondante (voir figure 5.1). Ainsi, une partie du champ incident sur le miroir, à la fréquence ω_0, subit après réflexion un décalage en fréquence de $\pm\Omega_\mathrm{m}$, créant deux bandes latérales à $\omega_0 \pm \Omega_\mathrm{m}$. Comme tous ces champs évoluent dans la cavité, il faut tenir compte de leur éventuelle amplification ou atténuation par celle-ci. Lorsque la porteuse est à résonance avec la cavité, les probabilités de diffusion Stokes et anti-Stokes, proportionnelles à l'intensité des composantes du champ à $\omega_0 \pm \Omega_\mathrm{m}$ dans la cavité, sont égales (voir figure 5.2) : les deux processus se compensent mutuellement, et la dynamique du miroir n'est pas affectée. En revanche, on peut favoriser l'un des

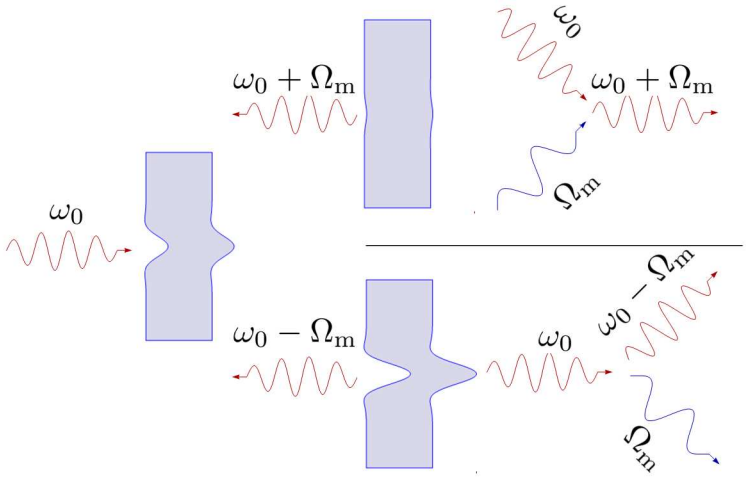

Figure 5.1: Diffusion inélastique de la lumière sur le miroir mobile. Deux processus sont possibles : le processus anti-Stokes (en haut), qui correspond à l'absorption d'un phonon par le champ lumineux (de fréquence ω_0), et le processus Stokes (en bas) qui correspond au processus inverse où un phonon est créé.

deux processus en désaccordant la cavité (voir figure 5.2 en bas) : si l'on désaccorde la porteuse vers les basses fréquences, on amène la composante du champ à $\omega_0+\Omega_m$ sur la résonance de la cavité, ce qui correspond à une prédominance du processus anti-Stokes, responsable d'une réduction du nombre de phonons. Inversement, un désaccord de la porteuse vers les hautes fréquences revient à favoriser la composante du champ de fréquence $\omega_0 - \Omega_m$, correspondant au processus anti-Stokes, responsable d'une augmentation du nombre de phonons.

Lorsque les déplacements du miroir sont d'origine thermique, le nombre moyen de phonon est proportionnel à la température : une diminution de ce nombre (resp. une augmentation) revient donc à refroidir (resp. chauffer) le miroir. Un grand nombre d'équipes scientifiques spécialisées dans l'étude du couplage optomécanique a ainsi adopté cette technique, avec pour objectif ultime de porter un résonateur macroscopique dans son état fondamental, et d'observer ses fluctuations quantiques de point zéro [24, 25, 27, 33, 35, 82].

5.1.2 Couplage optomécanique en cavité désaccordée

Ce couplage entre les fluctuations de position du miroir et l'énergie du champ intracavité est également connu sous le nom d'action en retour dynamique [83]. Cette dénomination traduit l'idée que les fluctuations de longueur d'une cavité désaccordée produisent des fluctuations de l'intensité du champ intracavité, qui se couplent en retour aux variations de longueur via la pression de radiation qu'exerce le faisceau sur le miroir mobile. Dans le cas d'une cavité sans perte, avec un miroir de fond de susceptibilité mécanique χ, l'évolution du champ en présence d'un désaccord moyen $\overline{\Psi} \neq 0$ s'écrit, en prenant la transformée de Fourier de l'équation (1.28) :

$$(\gamma - i\overline{\Psi} - i\Omega\tau)\alpha[\Omega] = \sqrt{2\gamma}\,\alpha^{\text{in}}[\Omega] + 2ik|\overline{\alpha}|\delta x[\Omega], \tag{5.1}$$

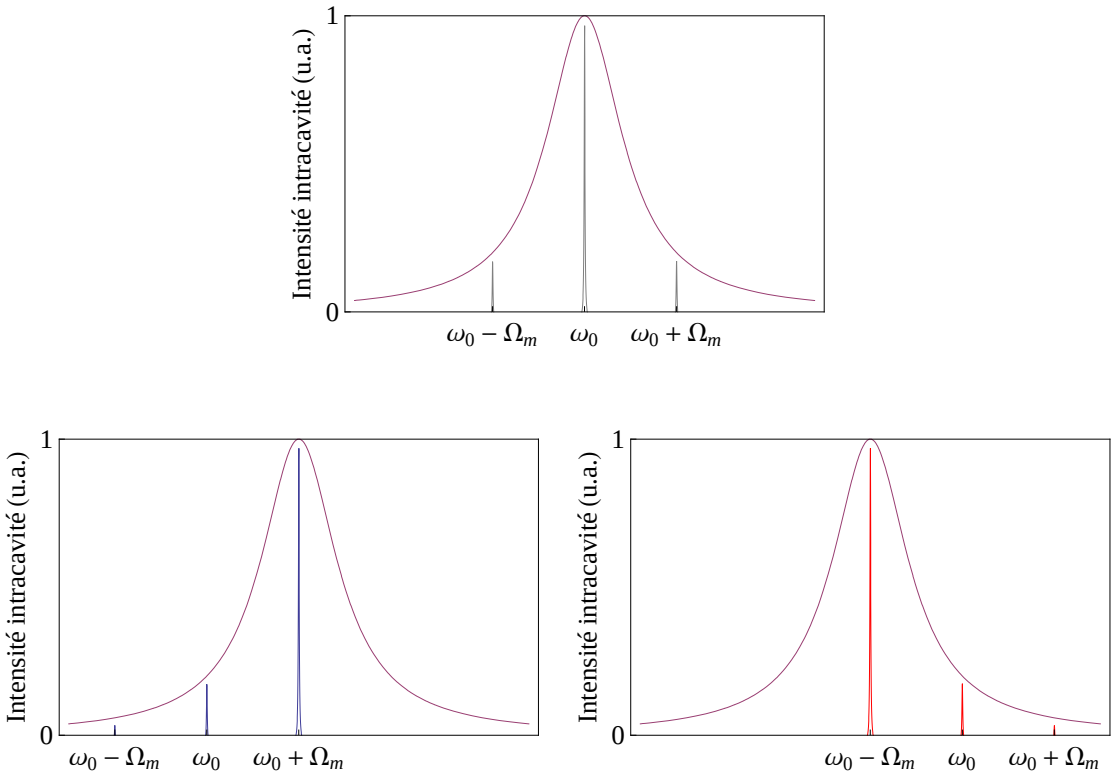

FIGURE 5.2: Lorsque la porteuse du champ intracavité est à résonance avec la cavité (en haut), les processus Stokes et anti-Stokes sont équiprobables, et la dynamique du miroir n'est pas affectée par la diffusion. En revanche, lorsque l'on désaccorde la cavité, on peut favoriser l'un des processus : si l'on désaccorde vers les basses fréquences, on privilégie le processus anti-Stokes, alors que dans le cas contraire, on favorise le processus Stokes.

où δx désigne le déplacement du miroir mobile. La force de pression de radiation $F_{\text{rad}}[\Omega] = 2\hbar k \delta I[\Omega]$ s'exerçant sur le miroir mobile s'écrit alors comme la somme de deux contributions, l'une proportionnelle aux fluctuations du champ incident, et l'autre au déplacement du miroir :

$$F_{\text{rad}}^{(\text{in})}[\Omega] = 2\hbar k|\overline{\alpha}|\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma^2+\overline{\Psi}^2}}\left(\frac{\gamma^2+\overline{\Psi}^2-i\gamma\Omega\tau}{\Delta}p^{\text{in}}[\Omega]-\frac{i\overline{\Psi}\Omega\tau}{\Delta}q^{\text{in}}[\Omega]\right), \quad (5.2)$$

$$F_{\text{rad}}^{\text{x}}[\Omega] = -8\hbar k^2\overline{I}\frac{\overline{\Psi}}{\Delta}\delta x[\Omega], \quad (5.3)$$

où le dénominateur Δ et les fluctuations d'amplitude p^{in} et de phase q^{in} sont définies comme dans le chapitre précédent (voir après l'équation (4.38), et la définition (4.36) des quadratures en fonction de l'angle θ^{in} du champ moyen).

La première force $F_{\text{rad}}^{(\text{in})}$ correspond à la pression de radiation induite par les fluctuations quantiques du champ incident, c'est-à-dire à l'action en retour de la mesure. La seconde force est proportionnelle au déplacement δx, et son effet est donc similaire à celui d'une contre-réaction qui, à l'instar de la force F_{fb} introduite dans la section 1.5.4 lors de la présentation de l'expérience de refroidissement par friction

froide, est responsable d'un changement de la dynamique du miroir mobile.
On peut exprimer cette force en fonction de la position des bandes latérales sur le pic d'Airy représentant la résonance de la cavité comme sur la figure 5.2. Pour cela, on définit la fonction $\mathcal{A}(\overline{\Psi})$ décrivant le pic d'Airy par la relation entre intensités incidente et intracavité :

$$\overline{I} = \mathcal{A}(\overline{\Psi})\overline{I}^{\text{in}}, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{A}(\Psi) = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \Psi^2}. \tag{5.5}$$

La force $F^{\text{x}}_{\text{rad}}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F^{(\text{x})}_{\text{rad}}[\Omega] = 2\hbar k^2 \overline{I} \Bigg\{ & \left(\frac{1}{\mathcal{A}(\overline{\Psi} + \Omega\tau)} \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}\psi}\Big|_{\psi=\Psi+\Omega\tau} + \frac{1}{\mathcal{A}(\overline{\Psi} - \Omega\tau)} \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}\psi}\Big|_{\psi=\Psi-\Omega\tau} \right) \\ & + i\left(\mathcal{A}(\overline{\Psi} + \Omega\tau) - \mathcal{A}(\overline{\Psi} - \Omega\tau)\right) \Bigg\} \delta x[\Omega] \end{aligned} \tag{5.6}$$

On remarque immédiatement que cette force apparaît comme la contribution de deux bandes latérales, situées à $\pm\Omega$ de part et d'autres de la porteuse ω_0 : le déplacement $\delta x[\Omega]$ du résonateur à la fréquence Ω crée des bandes latérales du champ intracavité, sur lesquelles les fluctuations de position sont retranscrites. Ces bandes latérales engendrent chacune une force réelle, conservative (les deux termes de la première parenthèse dans l'équation (5.6)), et une force imaginaire, dissipative (les deux termes de la seconde parenthèse dans cette même équation).

Contribution dissipative

L'effet de la force dissipative est tout à fait identique à celui de la force F_{fb}, c'est-à-dire qu'elle induit une modification de l'amortissement effectif du résonateur, associée à son chauffage ou à son refroidissement lorsque son évolution est régie par le bruit thermique. Si l'on suppose que le résonateur dispose d'un très grand facteur de qualité ($\Gamma_{\text{m}} \ll \Omega_{\text{m}}$), son amortissement effectif Γ_{eff} s'écrit :

$$\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma_{\text{m}} + 2\hbar k^2 M \Omega_{\text{m}} \overline{I} \left(\mathcal{A}(\overline{\Psi} + \Omega_{\text{M}}\tau) - \mathcal{A}(\overline{\Psi} - \Omega_{\text{M}}\tau)\right). \tag{5.7}$$

L'analogie avec l'approche en terme de processus Stokes et anti-Stokes présentée dans le paragraphe précédent est alors parfaite : l'effet de la partie dissipative de l'action en retour dynamique résulte de la compétition entre un processus d'amortissement causé par la bande latérale de fréquence $\omega_0 + \Omega_{\text{m}}$ (raie anti-Stokes), et d'un processus d'amplification engendré par la bande latérale de fréquence $\omega_0 - \Omega_{\text{m}}$ (raie Stokes). Le pic d'Airy étant symétrique, ces deux processus se compensent lorsque le champ incident est à résonance avec la cavité ($\overline{\Psi} = 0$), et il est nécessaire de la désaccorder pour favoriser l'un des deux.
On remarque de plus que si la bande passante de la cavité $\Omega_{\text{cav}} = \gamma/\tau$ est grande devant la fréquence de résonance mécanique Ω_{m}, la parenthèse dans l'équation (5.7) s'annule au premier ordre en $\Omega_{\text{m}}\tau$. Ceci peut également se comprendre à partir de la figure 5.2 : lorsque la séparation des bandes latérales est petite devant la bande passante de la cavité, leurs amplitudes sont presque égales, et ce quel que soit la valeur du désaccord moyen, et leur dissymétrie est insuffisante pour favoriser l'un des deux processus. Si l'on veut disposer d'importants effets dissipatifs de l'action en retour dynamique, il est donc nécessaire que la fréquence de résonance mécanique soit au moins de l'ordre de la bande passante de la cavité ($\Omega_{\text{m}} \geq \Omega_{\text{cav}}$),

ce qui garantit un déséquilibre des deux processus d'environ 80% lorsque la porteuse est amenée à mi-pente sur le pic d'Airy. Notons un dernier point important : l'expression (5.7) montre que, le déséquilibre entre les deux bandes latérales est maximal lorsque l'une des bandes latérales est résonnante avec la cavité tandis que l'autre est complètement hors résonance. Ceci nécessite que la bande passante de la cavité soit petite devant la fréquence de résonance mécanique Ω_{m} (condition des bandes latérales résolues $\Omega_{\mathrm{m}} \gg \Omega_{\mathrm{cav}}$ [81, 84]) comme cela peut se comprendre sur la figure 5.2. Dans ces conditions, le désaccord $\overline{\Psi}$ de la porteuse par rapport à la résonance de la cavité est également très grand. Cela réduit l'intensité intracavité $\overline{I}$ et l'efficacité des processus (proportionnels à $\overline{I}$ d'après l'équation (5.7)), à moins de compenser la perte de puissance intracavité en augmentant la puissance incidente, afin de maintenir un nombre suffisant de photons dans la cavité. Notons [81, 84] que ces conditions (bandes latérales résolues et grande puissance incidente) sont celles permettant de refroidir le résonateur jusqu'à son état quantique fondamental lorsque la bande latérale anti-Stokes est résonnante ($\overline{\Psi} \simeq -\Omega_{\mathrm{m}}\tau$).
Lorsque le désaccord $\overline{\Psi}$ est positif, le processus Stokes conduit à une diminution de l'amortissement du miroir mobile, qui peut engendrer un comportement instable, correspondant à un régime d'oscillation auto-entretenue du résonateur. Le seuil de cette instabilité est franchi lorsque l'amortissement effectif du miroir s'annule, ce qui correspond à un mouvement monochromatique à la fréquence Ω_{M} dont l'amplitude diverge. Des effets non linéaires viennent en pratique réguler ce mouvement [64] : lorsque le seuil d'instabilité est atteint, l'amplitude du déplacement devient comparable à la largeur du pic d'Airy $\lambda/2\mathcal{F}$. La puissance moyenne du champ intracavité, et donc les effets dynamiques de pression de radiation, diminuent alors notablement.

Contribution conservative

En plus de cette force dissipative, le résonateur est soumis à une force conservative, dont l'origine se comprend aisément lorsque l'on considère le cas à basse fréquence ($\Omega_{\mathrm{m}} \ll \Omega_{\mathrm{cav}}$). En effet, lorsque les déplacements du miroir sont lents devant le temps de stockage de la cavité, on peut considérer que le couplage optomécanique est instantané. Toute variation de longueur se traduit par une modification quasi-immédiate du champ dans la cavité, et les fluctuations d'intensité du champ intracavité sont donc directement proportionnelles aux déplacements du miroir qui les induisent lorsque la cavité est désaccordée (voir figure 5.3) :

$$\delta\overline{I}(t) = \frac{\mathrm{d}\overline{I}}{\mathrm{d}L}\delta x(t). \tag{5.8}$$

La force de pression de radiation $F^{\mathrm{x}}_{\mathrm{rad}}(t) = 2\hbar k\delta\overline{I}(t)$ résultant de ces fluctuations agit donc comme une force de rappel supplémentaire, appelée force pondéromotrice [85] ou ressort optique [86], se traduisant par une modification de la raideur du miroir mobile, ou de manière équivalente de sa fréquence de résonance. En écrivant que $\mathrm{d}\psi = 2k\mathrm{d}L$ (équation (1.30)), on trouve que la force s'écrit :

$$F^{\mathrm{x}}_{\mathrm{rad}}(t) = 4\hbar k^2 \frac{\mathrm{d}\overline{I}}{\mathrm{d}\psi}\Big|_{\psi=\overline{\Psi}}\delta x(t), \tag{5.9}$$

qui est exactement la limite de l'équation (5.6) lorsque $\Omega_{\mathrm{m}} \ll \Omega_{\mathrm{cav}}$.
L'équation (5.6) montre que dans le cas plus général où l'on ne peut négliger les effets de la dynamique de la cavité par rapport à ceux du mouvement du miroir, la

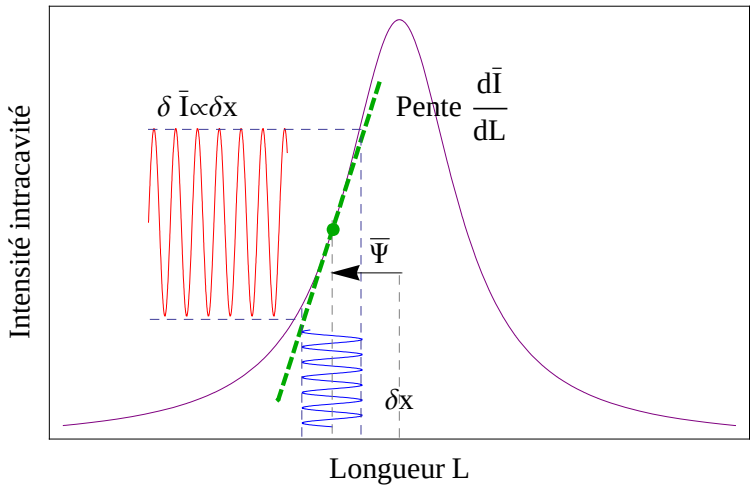

Figure 5.3: Ressort optique à basse fréquence. Dans une cavité désaccordée ($\overline{\Psi} \neq 0$), les fluctuations de position du miroir δx engendrent des fluctuations d'intensité qui leurs sont proportionnelles, avec un coefficient de proportionnalité égal à la pente du pic d'Airy évaluée au point de fonctionnement. Les fluctuations δx étant supposées lentes devant le temps de stockage de la cavité, le champ répond instantanément (sans déphasage) aux déplacements du miroir : la force de pression de radiation induite agit donc comme une force de rappel, qui modifie la raideur du miroir mobile.

force pondéromotrice $F^{\mathrm{x}}_{\mathrm{rad}}[\Omega \simeq \Omega_{\mathrm{m}}]$ qui agit sur le miroir à des fréquences proches de la résonance mécanique Ω_{m} s'écrit comme la somme de deux contributions correspondant aux deux bandes latérales déphasées de $\overline{\Psi} \pm \Omega_{\mathrm{m}}\tau$ par rapport à la résonance. Chacune de ces bandes latérales est responsable d'un effet de ressort optique similaire à celui que nous avons présenté à basse fréquence (voir figure 5.4) : elles provoquent une force de rappel, proportionnelle à la pente du pic d'Airy. Lorsque la raideur du ressort optique est petite devant celle du résonateur ($4\hbar k^2\overline{I} \ll M\Omega_{\mathrm{m}}^2$), ce qui est le cas en pratique, la fréquence de résonance effective du résonateur est décalée d'une quantité proportionnelle au ressort optique :

$$\Omega_{\mathrm{eff}} \;=\; \Omega_{\mathrm{m}}\left\{1 - \frac{\hbar k^2\overline{I}}{M\Omega_{\mathrm{m}}^2}\left(\frac{1}{\mathcal{A}(\overline{\Psi}+\Omega_{\mathrm{m}}\tau)}\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}\psi}\Big|_{\psi=\overline{\Psi}+\Omega_{\mathrm{m}}\tau} + \frac{1}{\mathcal{A}(\overline{\Psi}-\Omega_{\mathrm{m}}\tau)}\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}\psi}\Big|_{\psi=\overline{\Psi}-\Omega_{\mathrm{m}}\tau}\right)\right\}. \tag{5.10}$$

A basse fréquence ($\Omega_{\mathrm{m}} \ll \Omega_{\mathrm{cav}}$), la parenthèse de l'équation (5.10) est simplement proportionnelle à $\mathrm{d}\overline{I}/\mathrm{d}\psi$, et la fréquence de résonance du miroir diminue (resp. augmente) lorsque le désaccord est négatif (resp. positif). Ceci est une conséquence directe de l'équation (5.9) qui montre que pour un désaccord positif, la pente $\mathrm{d}\overline{I}/\mathrm{d}\psi$ est négative et la force $F^{\mathrm{x}}_{\mathrm{rad}}$ agit comme une force de rappel qui s'oppose au mouvement, augmentant la raideur du résonateur. Si par contre on se trouve dans le régime des bandes latérales résolues ($\Omega_{\mathrm{m}} \geq \Omega_{\mathrm{cav}}$), l'interprétation est moins évidente, les contributions des deux bandes latérales pouvant être de signes opposés et se compenser en partie (voir figure 5.4).

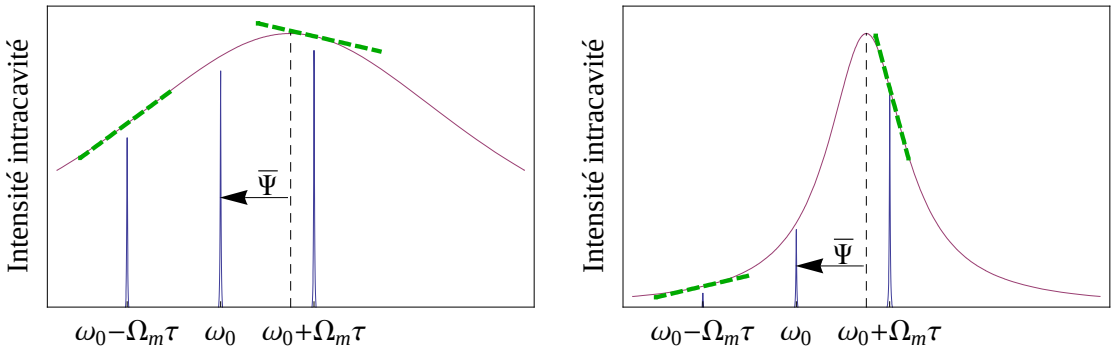

FIGURE 5.4: Ressort optique en fonction du déphasage $\overline{\Psi}$ et de la bande passante de la cavité. L'effet subi par le miroir est la somme des contributions $\dot{\mathcal{A}}/\mathcal{A}$ estimées aux deux bandes latérales $\psi = \overline{\Psi} \pm \Omega_{\mathrm{m}}\tau$, où $\mathcal{A}(\psi)$ est la fonction d'Airy représentée par la courbe en trait plein rouge. A basse fréquence ($\Omega_{\mathrm{m}} < \Omega_{\mathrm{cav}}$, figure de gauche) le signe dépend essentiellement du signe de $\overline{\Psi}$, tandis qu'on peut obtenir des changements de signe à haute fréquence ($\Omega_{\mathrm{m}} > \Omega_{\mathrm{cav}}$, figure de droite) du fait que les deux contributions peuvent être de signes opposés et se compenser.

Evolution quantitative des effets de l'action en retour dynamique

Nous avons reporté sur la figure 5.5 les évolutions en fonction du désaccord $\overline{\Psi}$

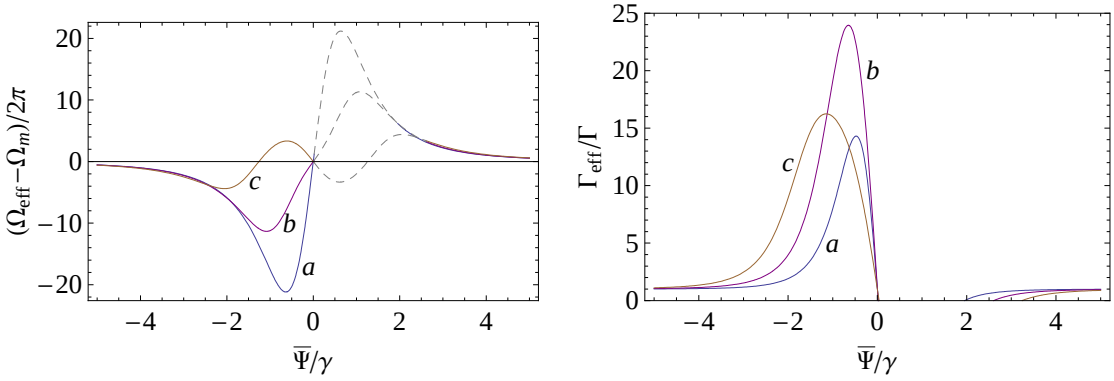

FIGURE 5.5: Evolution du décalage en fréquence $(\Omega_{\mathrm{eff}} - \Omega_{\mathrm{m}})/2\pi$ (à gauche) et de la largeur effective rapportée à la largeur naturelle $\Gamma_{\mathrm{eff}}/\Gamma$ (à droite) en fonction du désaccord, $\overline{\Psi}/\gamma$ pour une cavité de finesse $\mathcal{F} = 110\,000$, une puissance incidente $P^{\mathrm{in}} = 3,5$ mW, et un miroir mobile plan-convexe de fréquence $\Omega_{\mathrm{m}}/2\pi = 1,1285$ MHz, de facteur de qualité $Q = \Omega_{\mathrm{m}}/\Gamma = 760\,000$, et de masse $M = 72$ mg. Les différentes courbes correspondent à différentes bandes passantes $\Omega_{\mathrm{cav}} = 4$ MHz (courbe a), $1,4$ MHz (b), et $0,7$ MHz (c). Les parties en tirets sur les courbes de gauche correspondent aux zones d'instabilité dynamique.

du décalage entre la fréquence de résonance effective $\Omega_{\mathrm{eff}}/2\pi$ et la fréquence de résonance initiale $\Omega_{\mathrm{m}}/2\pi$ (à gauche), ainsi que l'évolution de l'amortissement effectif Γ_{eff} rapporté à l'amortissement initial Γ (à droite), pour différentes valeurs de la bande passante Ω_{cav}. Les paramètres de la cavité que nous avons utilisée

par ailleurs pour ces courbes sont ceux de notre dernière cavité plan-convexe PC 3021/13-07125/3, et la puissance incidente est supposée fixée égale à $3,5$ mW. Cette figure montre en particulier que l'amortissement (donc aussi le refroidissement lorsque le mouvement du miroir est thermique) atteint un maximum pour une valeur de $\overline{\Psi}/\gamma$ négative, valeur d'autant plus grande que Ω_{cav} est petit. Cela correspond à la situation décrite par la figure 5.2 où le processus anti-Stokes est favorisé en plaçant la bande latérale à $\overline{\Psi} + \Omega_{\mathrm{m}}\tau$ à résonance, c'est-à-dire pour $\overline{\Psi}/\gamma \simeq -\Omega_{\mathrm{m}}\tau/\gamma \simeq -\Omega_{\mathrm{m}}/\Omega_{\mathrm{cav}}$. On remarquera que la réduction de la bande passante Ω_{cav} s'accompagne tout d'abord d'une augmentation de l'amortissement (passage de la courbe a à b sur la figure 5.5 de droite) qui s'explique par le fait qu'on augmente le déséquilibre entre processus Stokes et anti-Stokes en s'approchant du régime des bandes latérales résolues. Mais l'efficacité de l'action en retour s'estompe à plus faible bande passante (passage de la courbe b à la courbe c), du fait que le désaccord $\overline{\Psi}$ devient important et l'intensité intracavité $\overline{I}$ s'effondre pour une puissance incidente P^{in}.
On constate enfin sur la figure 5.5 que le ressort optique, positif pour les désaccords $\overline{\Psi} < 0$ lorsque la bande passante de la cavité est supérieure à $\Omega_{\mathrm{m}}/2\pi$, devient négatif à faible désaccord dans le régime des bandes latérales résolues (courbe c), comme cela pouvait se prévoir d'après la discussion qui accompagne la figure 5.4.

5.2 Refroidissement avec la cavité plan-convexe

Notre dispositif de double injection accordable schématisé sur la figure 3.1 offre un moyen original d'observer les effets que nous venons de décrire, et ce de deux manières. La plus immédiate consiste à désaccorder le faisceau sonde par rapport au faisceau intense en appliquant un offset sur le pilote accordable de la voie sonde. Le faisceau intense n'est alors utilisé que pour asservir la cavité, et sa puissance est choisie très faible devant celle du faisceau sonde. On peut alors choisir extrêmement précisément le désaccord $\overline{\Psi}$ de la porteuse du faisceau sonde par rapport à la résonance de la cavité (dans la plage d'accordabilité de la double injection). Ceci s'avère particulièrement intéressant si l'on veut procéder en régime des bandes latérales résolues, pour lequel l'optimisation du refroidissement nécessite de désaccorder la porteuse de plus que la largeur du pic d'Airy, ce qui s'avère techniquement difficile lorsqu'on utilise un seul faisceau[64].
On peut également désaccorder le faisceau intense, en appliquant un offset au signal d'erreur Pound-Drever, et compenser ce désaccord grâce au pilote accordable du faisceau sonde, de manière à le maintenir sur la résonance de la cavité. Les rôles des deux faisceaux sont ainsi inversés par rapport à la situation précédente. Notons que si cette méthode ne permet que relativement difficilement de désaccorder le faisceau intense de plus de la largeur du pic d'Airy, elle donne en revanche accès à une mesure des déplacements du miroir refroidi beaucoup plus convaincante, puisqu'elle est réalisée avec un faisceau indépendant du faisceau responsable du refroidissement. La sensibilité de la mesure est également bien meilleure, puisque le faisceau sonde reste à résonance, quel que soit le désaccord appliqué au faisceau intense pour optimiser le refroidissement .
Dans les deux cas, l'utilisation de deux faisceaux permet de disposer de l'avantage remarquable de ne pas être limité en sensibilité, la mesure des déplacements du miroir mobile pouvant être réalisée grâce au faisceau qui est constamment maintenu sur la résonance de la cavité : cela signifie en particulier qu'il n'est pas nécessaire

de calibrer les déplacements mesurés après chaque changement de paramètre (puissance ou désaccord du faisceau désaccordé), puisque la sensibilité ne dépend que de la puissance incidente du faisceau utilisé pour la mesure.

Nous présentons ici une démonstration de refroidissement de notre miroir plan-convexe 07125/2, formant une cavité de finesse $\mathcal{F} = 61\,000$ avec un coupleur Newport Super Mirror High Finesse. Cette expérience ayant été réalisée avant les modifications destinées à rendre la double injection accordable, nous avons simplement tiré parti de la biréfringence de la cavité, qui fixe la valeur absolue du désaccord entre les deux faisceaux. Pour cette cavité, il apparaît que le décalage $\delta\nu$ lié à la biréfringence et donné par l'équation (2.35) est négatif, c'est-à-dire que les résonances longitudinales associées au faisceau intense (de polarisation $\mathbf{e}_{\parallel}$) sont à plus basse fréquence que celles qui sont associées au faisceau sonde (de polarisation $\mathbf{e}_{\perp}$). Nous avons donc temporairement rétabli l'asservissement de fréquence par détection synchrone de manière à asservir la cavité sur le faisceau sonde, que nous utilisons pour effectuer la mesure des déplacements du miroir. Les effets dynamiques de pression de radiation sur le miroir plan-convexe sont ainsi exercés par le faisceau intense, qui présente un désaccord négatif par rapport à la résonance optique : le processus anti-Stokes est alors privilégié ce qui conduit à un amortissement du mouvement du miroir, c'est-à-dire à son refroidissement. Etant donné la longueur de la cavité $L = 0.7\,\mathrm{mm}$, déterminée à partir de la mesure de sont intervalle spectral libre, la bande passante vaut $\Omega_{\mathrm{cav}}/2\pi = 1.75\,\mathrm{MHz}$. Selon l'estimation de la biréfringence déduite de l'observation du doublet de la résonance optique, le désaccord du faisceau intense obtenu lorsque le faisceau sonde est à résonance est de l'ordre de $\overline{\Psi} \simeq -\gamma/3$.
L'expérience consiste tout d'abord à asservir la fréquence du laser sur une résonance longitudinale de la cavité. On acquiert grâce à l'analyseur de spectre le bruit thermique de position du miroir plan-convexe au voisinage de la fréquence de résonance de son mode fondamental Gaussien. On applique ensuite le faisceau intense, dont on fait croître la puissance par paliers. A chaque palier, on acquiert le bruit de position du miroir. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.6.

Les courbes obtenues pour des puissances croissantes du faisceau intense (courbes b à e) montrent un effet très clair de refroidissement du miroir, avec une réduction du bruit par rapport au bruit thermique (courbe a), un élargissement des spectres liés à l'augmentation de l'amortissement, et un léger décalage en fréquence associé au ressort optique. Lorsque le désaccord est fixé, les équations (5.10) et (5.7) montrent que l'on s'attend à ce que ce décalage en fréquence et la variation de l'amortissement effectifs soient proportionnels à la puissance incidente. Ces deux grandeurs ont été reportées sur la figure 5.7, qui montre que les tendances prédites sont suivies avec un bon accord. On notera toutefois une moindre précision sur l'effet de ressort, que l'on peut attribuer à la dérive lente de la fréquence de résonance (typiquement 1 Hz par minute) provoquée par des variations de température. Ces effets sont en outre très probablement exacerbés lorsque la puissance intracavité devient importante, les effets thermiques de l'absorption pouvant provoquer un décalage plus important de la fréquence de résonance du miroir comme cela semble être le cas pour la mesure à $P^{\mathrm{in}} = 15$ mW.
La figure 5.7 montre que nous sommes parvenus à multiplier l'amortissement du miroir par un facteur 15, ce qui correspond à une diminution de la température du même facteur. Nous n'avons pas cherché à optimiser ce résultat, et cela pour deux raisons : la première est que notre système de double injection peut nous permettre de mettre en oeuvre une technique de refroidissement par friction froide similaire à celle que nous avons présentée dans le premier chapitre, en refermant la

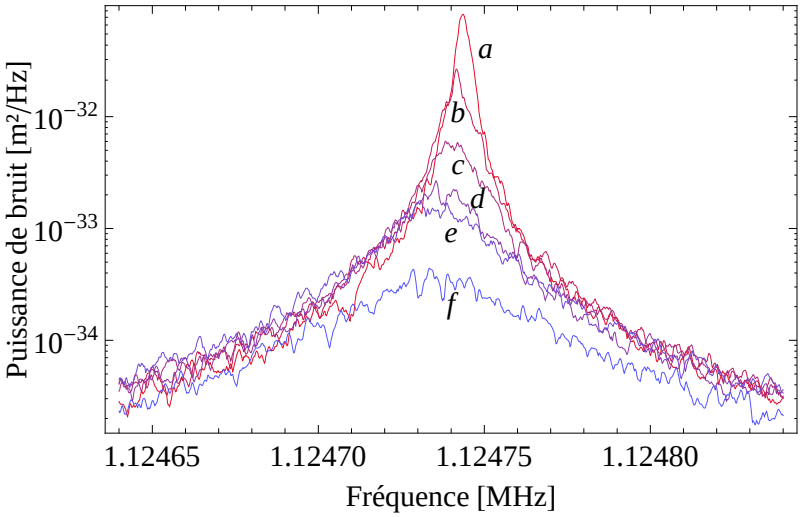

FIGURE 5.6: Refroidissement du miroir plan-convexe obtenu par action en retour dynamique pour un désaccord négatif fixé de la cavité. Chaque spectre est moyenné 50 fois, ce qui correspond à une durée totale d'acquisition d'environ 10 minutes. La courbe a, obtenue sans faisceau intense, représente le bruit thermique et permet de déterminer les propriétés mécaniques du miroir : $M = 58$ mg, $\Omega_{\mathrm{M}} = 1124,7435$ kHz, et $Q = 318\,000$. Les courbes b à f sont obtenues pour des puissances incidentes croissantes du faisceau intense, de 2 à 15 mW.

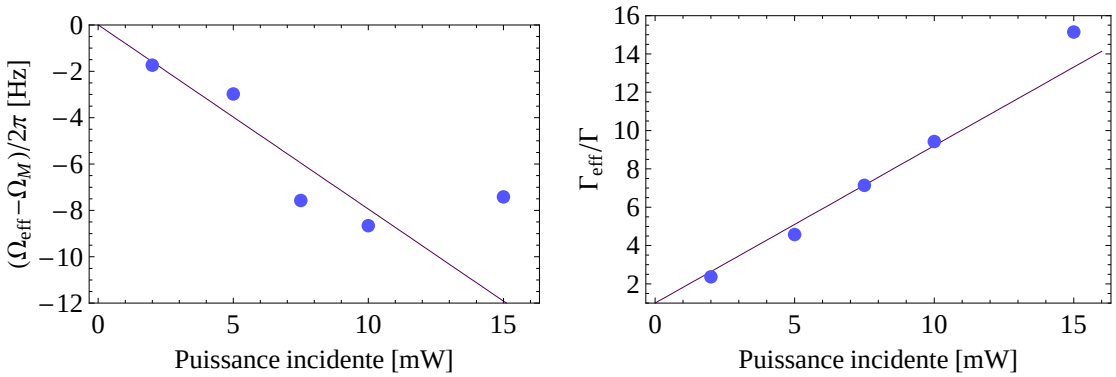

FIGURE 5.7: Evolution du décalage en fréquence $(\Omega_{\mathrm{eff}} - \Omega_{\mathrm{m}})/2\pi$ (à gauche) et de la largeur effective rapportée à la largeur naturelle $\Gamma_{\mathrm{eff}}/\Gamma$ (à droite) en fonction de la puissance incidente, pour un décalage $\overline{\Psi}$ négatif fixé. Les points représentent les résultats expérimentaux, et les droites représentent les résultats attendus à partir des équations (5.10) et (5.7), le seul paramètre ajustable étant la valeur du désaccord, ajusté à $\overline{\Psi} = -0,34\gamma$ et qualitativement en bon accord avec l'observation expérimentale du doublet de résonance causé par la biréfringence.

boucle d'asservissement sur le modulateur électro-optique non résonnant du faisceau sonde. La puissance optique disponible pour refroidir le miroir, amplifiée par la cavité à résonance optique, est alors de plusieurs centaines de Watts, et elle est surtout entièrement dédiée au refroidissement, ce qui n'est pas le cas avec l'action

en retour dynamique.
La seconde raison est liée au fait que le miroir plan-convexe n'a pas été optimisé pour permettre d'atteindre des facteurs de refroidissements importants. En particulier, la présence de nombreux modes de vibration internes implique une réponse hors des résonances mécaniques et un fond thermique important. Or, avec le refroidissement par action en retour dynamique comme avec le refroidissment par friction froide, le niveau de fond thermique est une limite à la température que l'on peut atteindre. Avec le miroir plan-convexe, nous avons vu que les déplacements associés au fond thermique sont environ 100 fois plus faibles en amplitude que les déplacements du miroir à résonance, ce qui fixe le facteur de réduction de bruit [54] $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$ aux alentours de la centaine. Autrement dit, nous n'avons aucune chance de refroidir notre résonateur plan-convexe en-deçà d'une température effective de quelques Kelvin en partant de la température ambiante, ce qui est très loin des performances atteintes par exemple par l'équipe de Jack Harris [27], qui a démontré le passage de 300 K à quelques mK par refroidissement passif avec un résonateur constitué d'une membrane insérée dans une cavité optique.

5.3 Augmentation de la sensibilité dans une cavité désaccordée

Dans les deux sections précédentes, nous avons traité l'action en retour dynamique du point de vue de ses effets sur la réponse du miroir. Nous abordons maintenant une autre conséquence importante des effets de la pression de radiation en cavité désaccordée, qui concerne la sensibilité de la mesure. Nous allons voir que l'action en retour dynamique peut amplifier une variation de longueur de la cavité en mettant en mouvement le miroir, ce qui permet d'améliorer la sensibilité d'une mesure de longueur au-delà de la limite quantique standard. Nous commençons par établir l'expression de cette sensibilité dans le cas basses fréquences $\Omega_{\text{m}} \ll \Omega_{\text{cav}}$, puis nous traiterons le cas général. Nous présenterons enfin la première démonstration expérimentale de cet effet d'amplification, réalisée avec notre dispositif.

5.3.1 Sensibilité à basse fréquence dans une cavité désaccordée

Comme nous l'avons déjà vu dans le premier chapitre, le calcul de la sensibilité revient à déterminer le plus petit signal accessible à la mesure, compte tenu des bruits fondamentaux que sont le bruit quantique de mesure et l'action en retour quantique. Nous nous intéressons ici à une mesure de longueur, c'est-à-dire à une variation δL_{sig} de la longueur de la cavité (indépendante du mouvement du miroir), due par exemple au passage d'une onde gravitationnelle dans un interféromètre, ou à une variation de longueur apparente iniduite par une modulation de fréquence du laser incident sur nos cavités. Les variations de longueur totale auxquelles est sensible la phase du faisceau réfléchi est donc la somme du signal et des déplacements δx du miroir :

$$\delta L = \delta L_{\text{sig}} + \delta x. \tag{5.11}$$

Lorsque la cavité est désaccordée, le miroir est donc soumis à une force de pression de radiation $F_{\text{rad}}^{\text{sig}}$ supplémentaire par rapport à celles que nous avons décrites dans

la section précédente ($F_{\rm rad}^{\rm (in)}$ et $F_{\rm rad}^{\rm (x)}$, équations (5.2) et (5.3)) :

$$F_{\rm rad}^{\rm (sig)}[\Omega] \quad = \quad -8\hbar k^2 \overline{I} \frac{\overline{\Psi}}{\Delta} \delta L_{\rm sig}[\Omega], \tag{5.12}$$

La force $F_{\rm rad}^{\rm x}$ (équation (5.3)) est responsable du changement de la réponse effective du miroir, que nous avons déjà discuté dans la section précédente. En sa présence, la réponse du miroir à une force F quelconque s'écrit :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{\rm eff}[\Omega] F[\Omega], \tag{5.13}$$

où $\chi_{\rm eff}$ est la susceptibilité effective donnée par :

$$\chi_{\rm eff}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] + 8\hbar k^2 \overline{I} \frac{\overline{\Psi}}{\Delta}. \tag{5.14}$$

Si l'on suppose que le mouvement du miroir est uniquement gouverné par les forces de pression de radiation, les seules forces à prendre en compte en plus de $F_{\rm rad}^{\rm (x)}$ sont la force $F_{\rm rad}^{\rm (sig)}$ proportionnelle au signal $\delta L_{\rm sig}$ que l'on cherche à mesurer, et la force $F_{\rm rad}^{\rm (in)}$ qui résulte des fluctuations quantiques d'intensité du champ intracavité. Les déplacements du miroir s'écrivent donc d'après l'équation (5.13) :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{\rm eff}(F_{\rm rad}^{\rm in}[\Omega] + F_{\rm rad}^{\rm sig}[\Omega]), \tag{5.15}$$

Les fluctuations $\delta\alpha^{\rm out}$ de l'amplitude du champ réfléchi par la cavité s'obtiennent par ailleurs à partir des équations (1.36) et (5.1). On en déduit la valeur des fluctuations de phase $\delta q^{\rm out}$ du champ réfléchi, en tenant compte de l'angle $\theta^{\rm out}$ de rotation du champ réfléchi par la cavité désaccordée (équation (4.34)). A basse fréquence ($\Omega \ll \Omega_{\rm cav}$), on obtient ainsi une équation similaire à l'équation (1.42) :

$$\delta q^{\rm out}[\Omega] = \delta q^{\rm in}[\Omega] + 2\xi \left(\delta x[\Omega] + \delta L_{\rm sig}[\Omega]\right), \tag{5.16}$$

où ξ est un paramètre optomécanique qui dépend uniquement des caractéristiques optiques de la cavité :

$$\xi = \frac{4k\gamma|\overline{\alpha}^{\rm in}|}{\gamma^2 + \overline{\Psi}^2}. \tag{5.17}$$

En remplaçant δx par son expression (5.15), les fluctuations de la quadrature de phase du champ réfléchi s'écrivent finalement :

$$\delta q^{\rm out}[\Omega] = \delta q^{\rm in}[\Omega] + 2\xi\chi_{\rm eff}[\Omega] F_{\rm rad}^{\rm (in)}[\Omega] + 2\xi(\chi_{\rm eff}[\Omega] F_{\rm rad}^{\rm (sig)} + \delta L_{\rm sig}[\Omega]). \tag{5.18}$$

Les deux premiers termes dans cette équation correspondent aux bruits fondamentaux dans la mesure, respectivement le bruit quantique de mesure et l'action en retour quantique, identiques à ceux qui interviennent dans une mesure à résonance optique avec un oscillateur de susceptibilité $\chi_{\rm eff}$. Le troisième terme correspond à la contribution du signal, qui apparaît comme l'interférence entre le signal lui-même et le déplacement du miroir (dont la susceptibilité est désormais équivalente à $\chi_{\rm eff}$) que le signal induit via l'action en retour dynamique. En d'autres termes, lorsque la cavité est désaccordée, le signal $\delta L_{\rm sig}$ donne naissance à une force $F_{\rm rad}^{\rm (sig)}$ qui va faire entrer en mouvement le miroir. La variation de longueur totale de la cavité, mesurable sur la phase du faisceau réfléchi, va donc reproduire le signal

$\delta L_{\rm sig}$, mais avec un facteur d'amplification si le mouvement du miroir est en phase, ou d'atténuation s'il est en opposition de phase.
En remplaçant la force $F_{\rm rad}^{(\rm sig)}$ par son expression (équation (5.12)), la contribution $\delta q^{(\rm sig)}$ du signal aux fluctuations de phase du faisceau réfléchi et son spectre $S_q^{\rm sig}$ s'écrivent :

$$\delta q^{(\rm sig)}[\Omega] = 2\xi\left(1 - 8\hbar k^2 \overline{I}\frac{\overline{\Psi}}{\Delta}\chi_{\rm eff}[\Omega]\right)\delta L_{\rm sig}[\Omega] = 2\xi\frac{\chi_{\rm eff}[\Omega]}{\chi[\Omega]}\delta x_{\rm sig}[\Omega], \quad (5.19)$$

$$S_q^{\rm sig}[\Omega] = 4\xi^2\left|\frac{\chi_{\rm eff}[\Omega]}{\chi[\Omega]}\right|^2 S_{\rm L}^{\rm sig}[\Omega], \quad (5.20)$$

où $S_{\rm L}^{\rm sig}$ désigne le spectre du signal $\delta L_{\rm sig}$. L'action en retour dynamique a donc

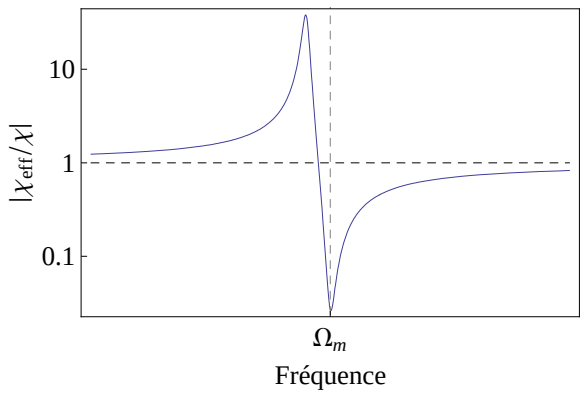

FIGURE 5.8: Evolution du facteur d'amplification optomécanique (dans le cas basse fréquence $\Omega_{\rm m} \ll \Omega_{\rm cav}$) au voisinage de la résonance mécanique $\Omega_{\rm m}$.

pour conséquence d'amplifier le signal par un facteur $|\chi_{\rm eff}/\chi|$. Ce facteur apparaît comme le quotient de deux Lorentziennes décalées l'une par rapport à l'autre (voir figure 5.8) : le rapport est maximum à la fréquence $\Omega_{\rm eff}$ où $\chi_{\rm eff}$ est maximale, et minimum à la fréquence $\Omega_{\rm m}$ où χ^{-1} est minimale. Si l'on veut favoriser l'amplification du signal, il faut se placer à la fréquence de résonance effective, tandis qu'à la fréquence de résonance mécanique initiale, le signal est atténué. Il semble évident que le maximum d'effet est attendu à la fréquence de résonance effective, puisqu'à cause de l'action en retour (force $F_{\rm rad}^{(\rm x)}$), la dynamique du miroir est modifiée et devient équivalente à celle d'un oscillateur de réponse $\chi_{\rm eff}$. Ainsi, c 'est à la fréquence de résonance effective que le miroir est le plus mis en mouvement en réponse à la force $F_{\rm rad}^{(\rm sig)}$ liée au signal. Par contre, il peut paraître surprenant que l'atténuation maximale soit atteinte au voisinage de la fréquence $\Omega_{\rm m}$. Pour le comprendre, on peut se reporter à l'interprétation de l'action en retour dynamique en terme de contre-réaction : à basses fréquences, la force $F_{\rm rad}^{(\rm x)}$ est formellement identique à une contre-réaction proportionnelle $F_{\rm fb} = -gM\Omega_{\rm m}^2\delta L$, où g est un paramètre réel. En présence de cette force, les fluctuations de longueur δx de la cavité s'écrivent :

$$\delta L[\Omega] = \chi[\Omega]F_{\rm fb}[\Omega] + \delta L_{\rm sig}[\Omega] = \frac{1}{1 + gM\Omega_{\rm m}^2\chi[\Omega]}\delta x_{\rm sig}[\Omega]. \quad (5.21)$$

L'efficacité de la contre-réaction est maximale lorsque son gain $gM\Omega_{\rm m}^2\chi[\Omega]$ l'est aussi, c'est-à-dire à la pulsation $\Omega_{\rm m}$. C'est donc à cette fréquence que les variations de longueur de la cavité, quelle qu'en soit l'origine, sont le mieux compensées. Comme le montrent les deux premiers termes de l'équation (5.18), les bruit quantiques sont identiques à ceux d'une mesure à résonance optique, à condition de remplacer la susceptibilité effective $\chi_{\rm eff}$. Sans tenir compte de l'amplification du signal, on s'attend donc à être limité par les bruits quantiques à une sensibilité supérieure à la limité quantique standard $\delta x_{\rm LQS}[\Omega]\sqrt{\hbar|\chi_{\rm eff}[\Omega]|}$ (voir équation (1.55)). Mais l'amplification optomécanique du signal va nous permettre d'améliorer le rapport signal à bruit et de battre la limite quantique standard. Le spectre $S_q^{\rm out}$ de la quadrature de phase du champ réfléchi s'écrit, d'après l'équation (5.16) :

$$S_q^{\rm out}[\Omega] = 1 + 4\hbar^2\xi^4|\chi_{\rm eff}[\Omega]|^2 + 4\xi^2\left|\frac{\chi_{\rm eff}[\Omega]}{\chi[\Omega]}\right|^2 S_{\rm L}^{\rm sig}[\Omega]. \tag{5.22}$$

La somme des deux premiers termes de cette équation correspondent aux bruits fondamentaux sur la mesure, et peut être exprimée différemment à l'aide du paramètre sans dimension $\zeta[\Omega] = 2\hbar\xi^2|\chi_{\rm eff}[\Omega]|$:

$$\frac{S_q^{\rm out}[\Omega]}{4\xi^2} = |\hbar\chi_{\rm eff}[\Omega]|\frac{\zeta^{-1}[\Omega]+\zeta[\Omega]}{2} + \left|\frac{\chi_{\rm eff}[\Omega]}{\chi[\Omega]}\right|^2 S_{\rm L}^{\rm sig}[\Omega]. \tag{5.23}$$

Les bruits quantiques apparaissent comme deux bruits conjugués, dont les effets relatifs ne dépendent que du paramètre ζ, qui est en réalité le rapport entre la réponse du miroir à la pression de radiation $\delta x_{\rm rad} = \hbar\xi|\chi_{\rm eff}|$ et le shot noise $\delta x_{\rm shot} = 1/2\xi$. Un paramètre $\zeta \gg 1$ signifie donc que l'on se trouve dans un régime où c'est le bruit quantique de pression de radiation qui contribue essentiellement à l'incertitude de mesure, alors qu'à l'inverse, un paramètre $\zeta^{-1} \gg 1$ signifiera que c'est le bruit de photon qui limite principalement la mesure. On retrouve enfin que la somme des bruits quantiques est minimale lorsqu'ils sont égaux ($\zeta = 1$), ce qui, en l'absence d'amplification, définit la limite quantique standard de sensibilité (équation (1.55)).
Ces bruits sont donc ceux attendus pour un résonateur de susceptibilité $\chi_{\rm eff}$. Par contre l'amplification du signal se traduit par un facteur multiplicatif $|\chi_{\rm eff}/\chi|$ dans le dernier terme de l'équation (5.23). La sensibilité de la mesure $S_{\rm L,sig}^{\rm min}$ s'obtient en égalisant la contribution totale du signal $|\chi_{\rm eff}/\chi|^2 S_{\rm x}^{\rm sig}$ et celle des bruits quantiques :

$$S_{\rm L,sig}^{\rm min}[\Omega] = \left|\frac{\chi[\Omega]}{\chi_{\rm eff}[\Omega]}\right|^2 \times \frac{\zeta^{-1}[\Omega]+\zeta[\Omega]}{2} \times |\hbar\chi_{\rm eff}[\Omega]|. \tag{5.24}$$

Cette expression permet de comprendre qu'en présence d'amplification ($|\chi_{\rm eff}/\chi| > 1$), et pour un paramètre optomécanique proche de $\zeta[\Omega] \simeq 1$, la limite de sensibilité devient inférieure à la limite quantique standard : cette limite est battue pour un facteur égal au carré du facteur d'amplification $|\chi_{\rm eff}/\chi|$. On peut également observer que dans ces conditions ($\zeta \simeq 1$, $|\chi_{\rm eff}/\chi| > 1$), la limite quantique standard $|\hbar\chi|$ pour un résonateur de susceptibilité χ est également battue : l'équation (5.24) peut en effet s'écrire :

$$S_{\rm L,sig}^{\rm min}[\Omega] = \left|\frac{\chi[\Omega]}{\chi_{\rm eff}[\Omega]}\right| \times \frac{\zeta^{-1}[\Omega]+\zeta[\Omega]}{2} \times |\hbar\chi[\Omega_{\rm eff}]|. \tag{5.25}$$

Le troisième terme dans cette équation s'identifie à la limite quantique standard

pour un oscillateur de susceptibilité χ (équation (1.55)) : la sensibilité est donc également améliorée au-delà de cette limite, d'un facteur $|\chi_{\text{eff}}/\chi|$ cette fois.
Pour pouvoir se représenter de manière plus exhaustive les effets de l'action en retour dynamique sur la sensibilité de la mesure, et notamment pou examiner comment les conditions $\zeta \simeq 1$ et χ_{eff}/χ peuvent être satisfaites en fonction des différents paramètres optomécaniques du système, nous avons représenté sur la figure 5.9 la sensibilité $S^{\text{min}}_{\text{L,sig}}[\Omega_{\text{eff}}]$, en fonction de la puissance incidente et du désaccord. La sensibilité est déterminée à la fréquence Ω_{eff}, où elle est a priori maximale, et elle est comparée respectivement à la limite quantique standard $|\hbar\chi_{\text{eff}}[\Omega_{\text{eff}}]|$ pour un résonateur de susceptibilité χ_{eff} (à gauche) et à la limite quantique standard $|\hbar\chi[\Omega_{\text{eff}}]|$ pour un résonateur de susceptibilité χ (à droite). Toute valeur inférieure à 1 signifie que la limite quantique standard correspondante est battue.

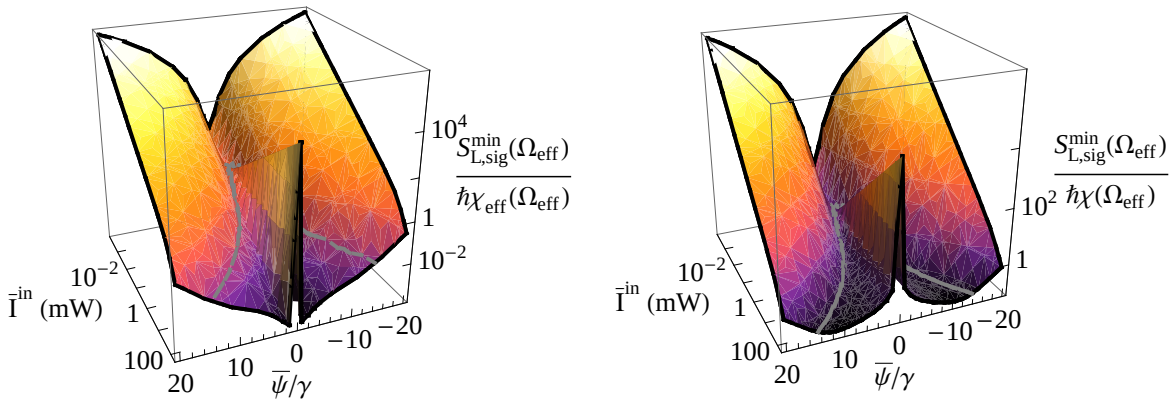

FIGURE 5.9: Evolution en fonction de la puissance incidente $\overline{I}^{\text{in}}$ et du désaccord $\overline{\Psi}/\gamma$ de la sensibilité $S^{\text{min}}_{\text{L,sig}}$ évaluée à la fréquence Ω_{eff}, rapportée respectivement à la valeur de la limite quantique standard pour un résonateur de susceptibilité χ_{eff} (à gauche) et χ (à droite) (ligne de niveau à 1). Les lignes grises représentent la valeur de la sensibilité correspondant au paramètre optomécanique $\zeta[\Omega_{\text{eff}}] = 1$, qui minimise le bruit quantique. Les paramètres de la cavité à miroir mobile sont ceux de la cavité PC 3021/13-07125/3.

Intéressons nous tout d'abord au graphique de gauche. A basse puissance ($\zeta \ll 1$), l'action en retour dynamique est très faible, si bien que la sensibilité de la mesure est essentiellement limitée par le bruit de photon, qui varie inversement proportionnellement à l'intensité intracavité. Pour une puissance incidente fixée, la section de la sensibilité lorsqu'on fait varier le désaccord est donc simplement une Lorentzienne inversée correspondant au pic d'Airy de la cavité. A désaccord nul, on voit que le bruit équivalent $S^{\text{min}}_{\text{L,sig}}$ décroît lorsque la puissance $\overline{I}^{\text{in}}$ augmente, puis atteint un minimum avant de croître de nouveau. Ce comportement est exactement le même que celui que nous avons décrit dans le premier chapitre, le minimum correspondant à la limite quantique standard atteinte pour $\zeta = 1$. Enfin, à grande

puissance incidente et dans la limite de désaccords modérés, le miroir se trouve dans un régime essentiellement régi par les effets de pression de radiation ($\zeta \gg 1$). Le facteur d'amplification s'écrit, dans ces conditions (équation (5.14)) :

$$\left|\frac{\chi_{\text{eff}}[\Omega_{\text{eff}}]}{\chi[\Omega_{\text{eff}}]}\right| \simeq 8\hbar k^2 \overline{I}\frac{\overline{\Psi}}{\Delta}|\chi_{\text{eff}}[\Omega_{\text{eff}}]|. \tag{5.26}$$

Compte tenu de l'expression de ζ, la sensibilité s'écrit :

$$S_{\text{L,sig}}^{\text{min}}[\Omega_{\text{eff}}] \simeq \left|\frac{\xi\Delta}{8k^2\overline{I}\overline{\Psi}}\right|^2 \simeq \left|\frac{\xi}{4k^2\frac{\mathrm{d}\overline{I}}{\mathrm{d}\psi}}\right|^2, \tag{5.27}$$

où $\frac{\mathrm{d}\overline{I}}{\mathrm{d}\psi}$ est la pente du pic d'Airy (voir équations (5.4) et (5.5)) D'après cette équation, lorsque le désaccord est fixé, la sensibilité s'améliore comme $1/\overline{I}^{\text{in}}$ à mesure que l'on augmente la puissance incidente. Ceci traduit le fait que le phénomène d'amplification optomécanique est classique, et croît donc comme l'intensité incidente, alors que le bruit de position, d'origine quantique, est proportionnel à la racine de l'intensité incidente. D'autre part, lorsque la puissance incidente est fixée (et grande devant celle permettant de réaliser la LQS), on constate que la sensibilité augmente, atteint un maximum en $\overline{\Psi} \simeq \pm\gamma/2$ correspondant à la pente maximale du pic d'Airy, puis décroît lentement à mesure que l'on augmente le désaccord.

Dans le graphique de droite de la figure 5.9, la sensibilité est normalisée à la limite quantique standard $|\hbar\chi|$ du résonateur libre évaluée à la fréquence Ω_{eff}. Comparé au graphique de gauche, la courbe est multipliée par le facteur d'amplification $|\chi_{\text{eff}}/\chi|$ (voir équations (5.24) et (5.25)), ce qui a pour effet de remonter la nappe de ce même facteur. Si les tendances générales de cette courbe sont les mêmes que celles du graphique de gauche, on peut voir en revanche que les maxima de sensibilité situés au voisinage de $\overline{\Psi} = \pm\gamma/2$ à haute puissance ne correspondent pas à une amélioration optimale de la sensibilité relativement à la limite quantique standard $|\hbar\chi|$. A forte puissance incidente, la sensibilité optimale est atteinte pour une valeur de $|\Psi|$ plus grande que $\gamma/2$, et sur une plage plus large que dans le cas du graphique de gauche. On note que même si les valeurs atteintes sont moins bonnes que sur le graphique de gauche, la sensibilité est meilleure que la limite quantique standard $\hbar\chi$ sur une large plage de paramètres.

5.3.2 Sensibilité dans une cavité désaccordée (cas général)

La prise en compte des effets de bande passante finie de la cavité complique l'analyse des effets de l'action en retour dynamique sur la sensibilité de la mesure. Outre le filtrage qui affecte la sensibilité de la mesure et l'amortissement du résonateur (voir section précédente), le temps de stockage non nul des photons dans la cavité induit, via la pression de radiation, une modification du spectre des fluctuations quantiques du champ lumineux, qui peut être substantielle [20] et rentrer en compétition avec l'effet d'amplification que nous venons de décrire. Le calcul de la sensibilité se mène exactement de la même manière que celui que nous avons

présenté dans le paragraphe précédent, aux expressions des trois forces de pression de radiation près, qui sont données dans le cas général par les équations (5.2) et (5.6). Au terme du calcul, on obtient l'expression suivante des fluctuations de phase du champ réfléchi par la cavité :

$$\begin{aligned} S_q^{\text{out}}[\Omega] &= \frac{4\xi^2}{|u[\Omega]|^2}\left\{|\hbar\chi_{\text{eff}}[\Omega]|\left(\frac{\zeta^{-1}[\Omega]+\zeta[\Omega]}{2}+|v[\Omega]|^2\frac{\zeta[\Omega]}{2}+\text{Im}\left[v^*[\Omega]\frac{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}{\chi[\Omega]}\right]\right)\right. \\ &\quad \left.+\left|\frac{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}{\chi[\Omega]}\right|^2 S_{\text{x}}^{\text{sig}}[\Omega]\right\}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

où u, v et ζ sont donnés par :

$$u[\Omega] = \frac{\Delta}{\gamma^2+\overline{\Psi}^2-i\gamma\Omega\tau}, \tag{5.29}$$

$$v[\Omega] = \frac{\Omega}{\Omega_{\text{cav}}}\frac{\gamma\overline{\Psi}}{\Delta}u[\Omega], \tag{5.30}$$

$$\zeta[\Omega] = 2\hbar\xi^2\frac{|\chi_{\text{eff}}[\Omega]|}{|u[\Omega]|^2}. \tag{5.31}$$

La deuxième ligne de l'équation (5.28) montre que l'amplification est formellement identique à celle que nous avons décrite dans le cas basse fréquence. Le terme u correspond au filtrage de la cavité, qui affecte la sensibilité (dénominateur du premier facteur de l'équation (5.28)) ainsi que l'amplitude des fluctuations quantiques du champ intracavité (dénominateur de l'équation (5.31)). Le terme v, qui apparaît dans les deuxième et troisième termes de la première ligne de l'équation (5.28), est lié à un effet de compression des fluctuations quantiques du champ intracavité, conduit à la production d'un état comprimé pour le champ réfléchi par la cavité [20]. Ce terme est nul à basse fréquence ($\Omega \ll \Omega_{\text{cav}}$) en raison de la conservation du flux de photon aux temps longs [41], et également à désaccord nul, les fluctuations d'intensité étant dans ce cas découplées des fluctuations de phase. Afin de pouvoir percevoir comment les effets de bande passante finie influent sur la sensibilité de la mesure, nous avons représenté sur la figure 5.10 l'évolution en fonction de la puissance incidente et du désaccord de $S_{\text{L,sig}}^{\text{min}}[\Omega_{\text{eff}}]$, qui est donnée par :

$$S_{\text{L,sig}}^{\text{min}}[\Omega] = \left|\frac{\chi[\Omega]}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}\right|^2 \times \left(\frac{\zeta^{-1}[\Omega]+\zeta[\Omega]}{2}+|v[\Omega]|^2\frac{\zeta[\Omega]}{2}+\text{Im}\left[v^*[\Omega]\frac{\chi_{\text{eff}}[\Omega]}{|\chi_{\text{eff}}[\Omega]|}\right]\right) \times |\hbar\chi_{\text{eff}}[\Omega]|. \tag{5.32}$$

On note immédiatement l'apparition d'une zone où la sensibilité n'est pas définie, à grande puissance incidente, et à désaccord positif. Cette zone correspond au domaine d'instabilité dynamique, que nous avons évoquée dans la section précédente. On remarque que pour les paramètres qui sont ceux de notre cavité PC 3021/13-07125/3, cette instabilité se manifeste à partir de désaccords extrêmement faibles dès lors que la puissance incidente est supérieure à celle qui est associée au paramètre optomécanique $\zeta[\Omega_{\text{m}}] = 1$. Ceci est lié à la valeur très faible de l'amortissement Γ du mode fondamental Gaussien de notre miroir plan-convexe, qui favorise l'annulation de l'amortissement effectif Γ_{eff} alors que les effets dissipatifs de l'action en retour dynamique sont encore relativement modestes. A grande puissance incidente, on note également la disparition du maximum de sensibilité

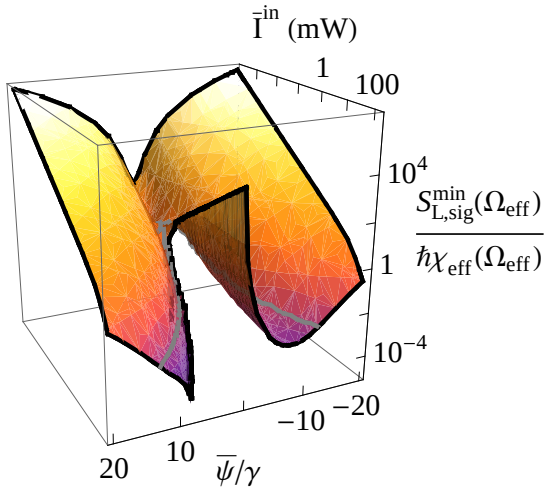

Figure 5.10: Evolution en fonction de la puissance incidente et du désaccord de la sensibilité $S^{\rm min}_{\rm L,sig}$ évaluée à la fréquence $\Omega_{\rm eff}$, rapportée à la valeur de la limite quantique standard pour un résonateur de susceptibilité $\chi_{\rm eff}$. La ligne grise représente la valeur de la sensibilité correspondant au paramètre optomécanique $\zeta = 1$. Les paramètres optiques et mécaniques de la cavité à miroir mobile correspondent à ceux de la cavité PC 3021/13-07125/3.

au désaccord $\overline{\Psi} \simeq -\gamma/2$. La prise en compte des effets de bande passante finie se traduit donc par une dégradation de la sensibilité dans la zone des désaccords $\overline{\Psi}$ négatifs, visible en comparant les figures 5.10 et 5.9. D'après l'équation (5.32), ceci peut être dû à deux causes : une modification de l'effet d'amplification (premier terme $|\chi/\chi_{\rm eff}|$ dans (5.32)), notamment du fait que la susceptibilité effective $\chi_{\rm eff}$ est changée, ou une modification du bruit quantique dans la mesure (parenthèse dans (5.32)). Dans le cas basse fréquence ($\Omega, \Omega_{\rm eff} \ll \Omega_{\rm cav}$), nous avons vu dans la section 5.1 que l'action en retour dynamique se traduit essentiellement par un ressort optique qui déplace la résonance sans changer sa largeur. Ainsi la valeur $\chi_{\rm eff}[\Omega_{\rm eff}]$ de la susceptibilité à la fréquence de résonance effective reste simplement égale à la valeur $\chi[\Omega_{\rm m}]$ de la susceptibilité du résonateur libre à la fréquence de résonance $\Omega_{\rm m}$, et cela quels que soient les paramètres $\overline{I}^{\rm in}$ et $\overline{\Psi}/\gamma$. La prise en compte des effets de bande passante finie modifie cette situation puisque le résonateur subit une force dissipative, qui diminue la valeur de $\chi_{\rm eff}[\Omega_{\rm eff}]$ pour les désaccords $\overline{\Psi}$ négatifs. L'amortissement optique du miroir réduit donc le facteur d'amplification optomécanique $\chi_{\rm eff}/\chi$, en accord avec ce qui est observé sur la figure 5.10.
Pour déterminer comment le bruit quantique dans la mesure contribue à la modification de la sensibilité observée sur la figure 5.10, il est nécessaire d'estimer la contribution des effets de compression des fluctuations du champ indépendamment

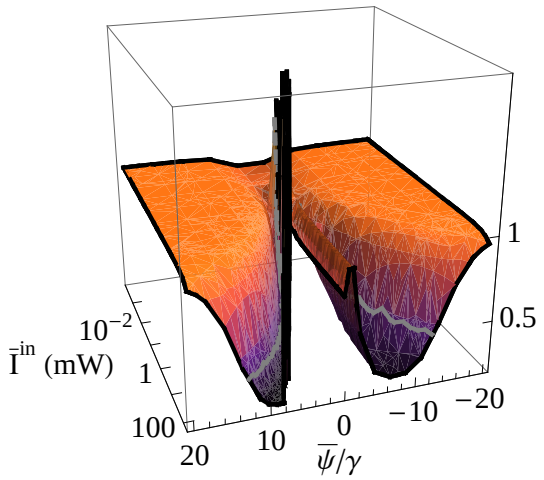

FIGURE 5.11: Evolution en fonction de la puissance incidente $\overline{I}^{\text{in}}$ et du désaccord $\overline{\Psi}/\gamma$ du rapport entre les bruits quantiques calculés respectivement avec et sans effets de bande passante finie, pour $\Omega_{\text{cav}} = 1.3 \times \Omega_{\text{m}}$

de celle de l'amplification optomécanique. La figure 5.11 représente le rapport des bruits quantiques en présence des effets de bande passante finie pour une valeur $\Omega_{\text{cav}} = 1.3 \times \Omega_{\text{m}}$ (parenthèse de l'équation (5.32)) et des bruits quantiques en l'absence de ces effets (deux derniers termes de l'équation (5.24)). Pour une large plage des paramètres, la prise en compte de la bande passante finie a pour conséquence de réduire le bruit quantique de la mesure (le rapport est inférieur à 1) et donc d'améliorer la sensibilité. Toutefois, l'effet reste en général petit par rapport à l'amplification optomécanique du signal. Par exemple, les effets de compression peuvent entraîner une baisse substantielle du bruit quantique, d'environ un facteur 4 pour un désaccord voisin de $\overline{\Psi} = -8\gamma$ et pour une puissance incidente de 100 mW. Mais pour ces paramètres la sensibilité est améliorée d'un facteur 100, ce qui montre que la contribution de l'amplification optomécanique est environ six fois supérieure à celle de la compression du bruit quantique.
Enfin, dans les conditions de notre expérience décrite dans la section suivante, le désaccord est négatif et au plus de l'ordre de quelques γ. La figure 5.11 montre alors que le bruit quantique est très peu modifié par les effets de bande passante finie, et toute amélioration de la sensibilité pourra être attribuée à l'amplification optomécanique du signal.

5.3.3 Démonstration expérimentale de l'amplification optique

Nous présentons maintenant la démonstration expérimentale de cette amplification induite par pression de radiation [87]. Le principe de l'expérience consiste à

détecter l'effet du couplage optomécanique sur un signal correspondant à une variation de longueur de la cavité, produite ici par une modulation de fréquence du laser, tout en maintenant le champ incident à un désaccord $\overline{\Psi}$ donné par rapport à la résonance optique. Le schéma du dispositif est représenté sur la figure 5.12. On utilise le faisceau sonde à la fois pour mesurer les déplacements de la cavité et comme faisceau principal dans la cavité, responsable des effets de pressioin de radiation, le faisceau intense étant beaucoup plus faible et utilisé pour définir la résonance optique de la cavité comme expliqué dans la section 5.2. Pour désaccorder le faisceau sonde, on modifie la fréquence de la porteuse radio-fréquence alimentant le modulateur acousto-optique de la voie sonde en appliquant une tension continue sur l'entrée prévue à cet effet. Le signal est une variation de longueur apparente produite par une modulation de la fréquence du laser (voir équation (1.129)). On utilise pour cela un analyseur de réseau, qui délivre une modulation de tension dont la fréquence glisse sur une plage que l'on choisit, et que l'on envoie sur le modulateur électro-optique du laser. L'analyseur de réseau permet également de détecter la réponse du système à la fréquence de la modulation qu'il émet : il fonctionne donc exactement comme le programme d'acquisition que nous avons utilisé lors de la mise en évidence de l'annulation de la pression de radiation dans une cavité à miroirs cylindriques (section 3.2.3). Cet appareil est cependant beaucoup plus rapide, et nous l'avons donc naturellement préféré à la méthode d'acquisition informatique.

Précautions liées à la détection homodyne

La modulation $\delta\nu_{\text{sig}}(t)$ de fréquence du laser induit une variation apparente de longueur de la cavité qui s'écrit d'après l'équation (1.129) :

$$\delta L_{\text{sig}}(t) = L\frac{\delta\nu_{\text{sig}}(t)}{\nu_0}, \tag{5.33}$$

où ν_0 est la fréquence optique du laser et L la longueur de la cavité. Cette variation de longueur se traduit par une modulation de la quadrature de phase δq^{out} du chap réfléchi, qui est finalement observée par la détection homodyne comme un déphasage par rapport à l'oscillateur local :

$$\delta\varphi_{\text{sig}} \simeq 8\mathcal{F}\frac{\delta L_{\text{sig}}}{\lambda} = 8\mathcal{F}\frac{L}{\lambda}\frac{\delta\nu_{\text{sig}}}{\nu_0}. \tag{5.34}$$

Comme nous utilisons une détection homodyne, on est sensible non pas aux seules fluctuations de phase du faisceau réfléchi, mais à toute différence de phase entre le faisceau sonde et l'oscillateur local [56], comme cela apparaît sur l'équation (1.116). Ceci nous pose un problème expérimental puisque nous appliquons la modulation de fréquence $\delta\nu_{\text{sig}}(t)$ sur la totalité de la lumière émise par le laser, c'est-à-dire en particulier sur les deux bras de la détection homodyne. Comme pour toute mesure interférométrique, la détection homodyne va être sensible à la modulation de fréquence du laser si les deux bras ne sont pas rigoureusement de même longueur. En notant L_{OL} la longueur du bras de l'oscillateur local, et L_{out} celle du bras du faisceau de mesure, la détection homodyne va être le siège d'un signal parasite qui s'écrit :

$$\delta\varphi_{\text{OL}} = 4\pi\frac{L_{\text{out}} - L_{\text{OL}}}{\lambda}\frac{\delta\nu_{\text{sig}}}{\nu_0}. \tag{5.35}$$

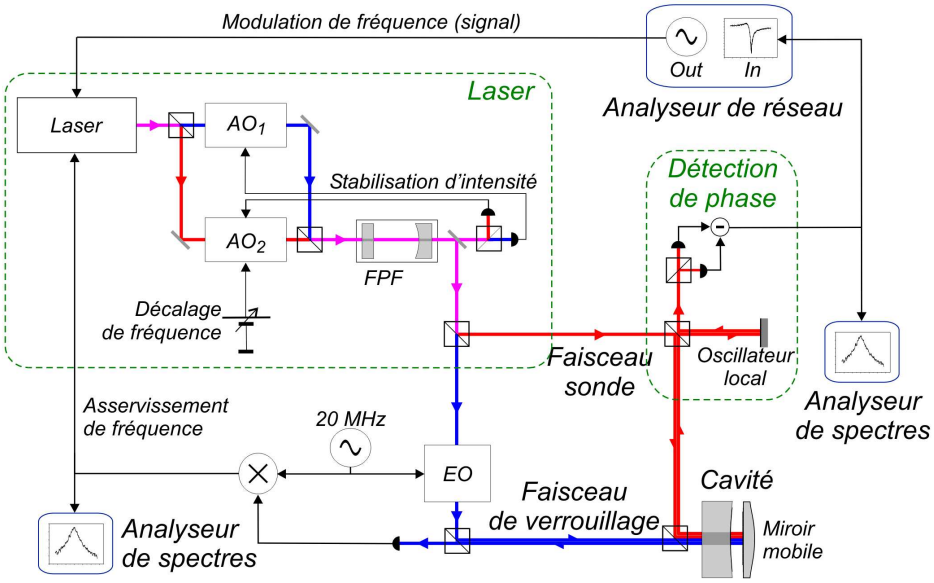

FIGURE 5.12: Schéma du dispositif expérimental utilisé pour la mise en évidence de l'amplification d'un signal induite par action en retour dynamique.

Le signal et les effets d'amplification optomécanique ne seront visibles que si $\delta\varphi_{\rm OL} \ll \delta\varphi_{\rm sig}$, c'est-à-dire d'après les équations (5.34) et (5.35), $L_{\rm out} - L_{\rm OL} \ll \mathcal{F}L$, où $\mathcal{F}L$ représente la longueur effective de la cavité compte tenu des allers-retours de la lumière. Nos cavités admettant des finesses très élevées, le chemin $\mathcal{F}L \simeq 10^5 \times 1\,\mathrm{mm} = 100\,\mathrm{m}$ est très supérieur à la dissymétrie des bras $L_{\rm out} - L_{\rm OL}$, typiquement de l'ordre de 1 m. En effet, nous n'avions pas modifié la longueur du bras de l'oscillateur local lors de la mise en place du dispositif de double injection qui avait fortement allongé $L_{\rm out}$. Le signal parasite $\delta\varphi_{\rm OL}$ ne représentant environ que 1% du signal utile $\delta\varphi_{\rm sig}$, on peut considérer que les fluctuations de phase mesurées sur la détection homodyne résultent presque intégralement des fluctuations de phase du faisceau réfléchi par la cavité, amplifiées par la cavité. Par contre, lorsque la cavité est désaccordée, l'effet du signal $\delta L_{\rm sig}$ sur la phase du faisceau réfléchi est atténué par un facteur $\gamma^2/(\gamma^2 + \overline{\Psi}^2)$ (voir équations (5.16) et (5.17)) et $\delta\varphi_{\rm sig}$ devient :

$$\delta\varphi_{\rm sig} \simeq 8\mathcal{F}\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \overline{\Psi}^2}\frac{L}{\lambda}\frac{\delta\nu_{\rm sig}}{\nu_0}. \tag{5.36}$$

Cette expression permet de comprendre que pour les grands désaccords, le parasite $\delta\varphi_{\rm LO}$ peut supplanter la contribution du signal : avec nos paramètres expérimentaux, c'est-à-dire $(L_{\rm out} - L_{\rm OL})/\mathcal{F}L \simeq 10^{-2}$, l'effet du signal disparaîtra dans le parasite résultant de cette interférence pour un désaccord de l'ordre de $\overline{\Psi} \simeq 10\gamma$. La situation est encore plus délicate en présence des effets dynamiques de pression de radiation, puisque nous avons vu qu'ils induisent une amplification du signal, mais également une atténuation au voisinage de la résonance mécanique $\Omega_{\rm m}$ (voir figure). Plus précisément, leur prise en compte revient à modifier le déphasage

observé en réponse au signal :

$$\delta\varphi_{\rm sig} \simeq 8\mathcal{F}\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\overline{\Psi}^2}\left|\frac{\chi_{\rm eff}}{\chi}\right|\frac{L}{\lambda}\frac{\delta\nu_{\rm sig}}{\nu_0}, \tag{5.37}$$

où le facteur d'amplification $|\chi_{\rm eff}/\chi|$ est pris à la fréquence $\Omega_{\rm mod}$ de modulation de la fréquence $\delta\nu_{\rm sig}$ du laser. Aux fréquences où le signal est atténué, la présence du parasite devient critique puisque, compte tenu du très grand facteur de qualité mécanique de notre miroir plan convexe, on atteint facilement une profondeur d'atténuation de 20 dB avec notre système. Cela démontre l'importance de réaliser un équilibre suffisant des bras de la détection homodyne si l'on veut pouvoir observer les effets dynamiques de la pression de radiation sur un tel signal.

Nous avons donc décidé d'allonger le bras de l'oscillateur local, afin de ramener le déséquilibre initial d'environ 1 m à une valeur beaucoup plus faible. Pour cela, nous avons d'abord mesuré ce déséquilibre au mètre à ruban, afin de pouvoir placer (à quelques centimètres près) le miroir de l'oscillateur local au voisinage de l'emplacement adéquat. Avant d'opérer ce changement, on a appliqué une modulation de fréquence sur le laser à une fréquence $\Omega_{\rm mod}/2\pi$ via le modulateur électro-optique interne du laser, et on a mesuré le pic de modulation correspondant sur la détection homodyne lorsque le laser se trouve à résonance optique avec la cavité, puis hors résonance. On sauvegarde ces deux traces, qui ont servi de référence pour le réglage. D'après ce que nous venons d'expliquer, le rapport des hauteurs de ces deux pics est égal à $(\mathcal{F}L)^2/(L_{\rm out}-L_{\rm OL})^2$ (équations (5.35) et (5.37)) dans la limite où $\mathcal{F}L \gg L_{\rm out}-L_{\rm OL}$. Connaissant la finesse de la cavité et sa longueur, cette mesure permet de s'assurer que le pic de modulation observé hors résonance correspond bien au parasite $\delta\varphi_{\rm OL}$ attendu suite à l'interférence déséquilibrée entre le faisceau sonde et l'oscillateur local. Expérimentalement, on mesure une différence d'environ 15 dB entre ces deux pics. La longueur de la cavité étant de $0,5$ mm, sa finesse $\mathcal{F} = 110\,000$ et le déséquilibre mesuré au mètre à ruban étant de $1,3$ m, l'écart attendu est d'environ 30 dB. En réalité, il est important d'incorporer les pertes et le filtrage de la cavité dans le calcul que nous venons de présenter. Leur prise en compte revient à modifier l'équation (5.37) (prise à $\overline{\Psi}=0$ et donc sans amplification optique) de la manière suivante :

$$\delta\varphi_{\rm sig}\Big|_{\overline{\Psi}=0} \simeq \mathcal{F}\sqrt{\frac{1}{1+\Omega_{\rm mod}^2/\Omega_{\rm cav}^2}}\sqrt{\frac{T}{T+P}}\frac{L}{\lambda}\frac{\delta\nu_{\rm sig}}{\nu_0}, \tag{5.38}$$

où T et P sont respectivement la transmission du miroir d'entrée et les pertes optiques totales de la cavité. Pour cette cavité, nous avons mesuré $T/(T+P) = 0.17$. Le rapport $\delta\varphi_{\rm sig}/\delta\varphi_{\rm OL}$ attendu, compte tenu des pertes et de la bande passante, vaut alors 17 dB, ce qui est compatible avec ce que nous avons mesuré.
On procède ensuite au déplacement du miroir de l'oscillateur local. Pour ne pas perdre l'adaptation spatiale entre l'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la cavité, ce miroir doit se situer au niveau d'un col optique, et il est nécessaire d'intercaler une lentille sur le chemin du faisceau. Pour vérifier que le miroir se trouve bien sur un waist, on peut par exemple observer à l'aide d'une caméra infrarouge les tâches de diffusion à l'aller et au retour sur un élément optique se situant sur le trajet du faisceau, et contrôler qu'elles ont la même taille. On ajuste la position de la lentille jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite, puis on optimise les réglages de la détection décrits dans le premier chapitre ; on s'assure en particulier que le gain de la détection est bien le même que lors de la mesure précédente : on vérifie

pour cela que lorsque l'on se trouve à résonance, le pic de modulation détecté à l'analyseur de spectres est confondu avec celui obtenu précédemment. On cherche alors à optimiser la position de renvoi de l'oscillateur loval de façon à minimiser le pic de modulation hors résonance optique (qui correspond à l'observation de $\delta\varphi_{\mathrm{OL}}$). Si l'on veut réellement améliorer le réglage, il faut translater le miroir de l'oscillateur local selon son axe puis reprendre l'intégralité du protocole d'optimisation de la détection, avant de mesure $\delta\varphi_{\mathrm{OL}}$. Par approches successives, nous sommes ainsi arrivés à un équilibrage satisfaisant avec un rapport $\delta\varphi_{\mathrm{sig}}/\delta\varphi_{\mathrm{OL}}$ de 35 dB, ce qui correspond à un déséquilibre sur $L_{\mathrm{out}} - L_{\mathrm{OL}}$ de l'ordre du centimètre.

Paramètres accessibles expérimentalement

La zone des paramètres de désaccord et de puissance incidente accessible avec notre expérience est limitée par un certain nombre de facteurs. Le premier d'entre-eux est le seuil de saturation de chaque photodiode de la détection homodyne, qui se situe aux alentours de 15 mW. Nous avons donc choisi de fixer la puissance totale de l'oscillateur local à 25 mW, ce qui limite la puissance du faisceau sonde puisque le bon fonctionnement de la détection homodyne n'est assuré que lorsque la puissance de la sonde est petite devant celle de l'oscillateur local. Nous avons constaté que le comportement de la détection reste satisfaisant pour une puissance incidente de la sonde égale à 5 mW, ce qui définit donc la limite supérieure de puissance que l'on pourra envoyer vers la cavité. La seconde limitation imposée par notre système, et qui concerne le choix du désaccord, provient de la bande passante de la cavité FPF. La cavité étant asservie sur le faisceau intense qui sert également pour l'asservissement sur la cavité à miroir mobile FPM, tout décalage en fréquence du faisceau sonde (pour produire le déphasage $\overline{\Psi}$ par rapport à la cavité FPM) se traduit également par un désaccord du faisceau sonde par rapport à à la cavité FPF de filtrage. Comme on a besoin d'une puissance relativement importante à la sortie de la cavité FPF (30 mW correspondant aux 25 mW d'oscillateur local et aux 5 mW du faisceau sonde), et que l'on est limité en puissance notamment par le modulateur acousto-optique en double passage, on ne peut pas augmenter indéfiniment $\overline{\Psi}$. Etant donné le rapport des bandes passantes $\Omega_{\mathrm{cav}}^{\mathrm{FPF}}/\Omega_{\mathrm{cav}}^{\mathrm{FPM}} = 5.6\,\mathrm{MHz}/1.4\,\mathrm{MHz} \simeq 4$, nous nous sommes limités à $\overline{\Psi} \leq 4\gamma$.

Amplification et amélioration de la sensibilité à désaccords négatifs

Ces limitations expérimentales des paramètres étant connues, la figure 5.10 permet de comprendre qu'avec notre dispositif, on ne pourra observer un effet d'amplification associé à une amélioration de la sensibilité de la mesure que pour dans le cas désaccords négatifs, que nous avons donc naturellement privilégiés lors de notre étude. Le protocole de mesure est le suivant : on fixe tout d'abord la puissance du faisceau sonde à une valeur de 4 mW, et celle du faisceau intense à une puissance beaucoup plus faible (200 μW). On choisit un désaccord du faisceau sonde par rapport à la résonance de la cavité de la façon suivante : on mesure pour cela l'intensité du faisceau transmis par la cavité à l'aide d'une photodiode, juste devant laquelle on a placé un polariseur permettant de ne sélectionner que la polarisation du faisceau sonde. L'intensité transmise par le polariseur est alors directement reliée à la valeur absolue du désaccord, son signe étant connu puisque le mouvement du miroir part en instabilité paramétrique aux désaccords positifs. Le pic d'Airy acquis en modulant la grosse cale du laser à 100 Hz permet alors de remonter quantitativement au désaccord $\overline{\Psi}/\gamma$ correspondant à l'intensité transmise mesurée.

On mesure ensuite le bruit thermique grâce à la détection homodyne, cette étape permettant de déterminer expérimentalement la susceptibilité effective χ_{eff} du miroir. Puis on acquiert la réponse du système désaccordé à la modulation de fréquence $\delta\nu_{\text{sig}}$ grâce à l'analyseur de réseau. Nous avons défini le niveau de cette modulation de sorte qu'elle se situe 25 dB au-dessus de la puissance du bruit thermique à la fréquence Ω_{m}, celui-ci étant dès lors négligeable. Cette phase de l'expérience dure une dizaine de minutes, puisque nous moyennons plusieurs séquences de balayages de l'analyseur. La dernière étape consiste à arrêter la modulation et couper le faisceau sonde, afin d'acquérir le bruit thermique du miroir grâce à la détection Pound-Drever. Cette étape est importante, puisqu'elle permet de réaliser un pointé de la fréquence de résonance mécanique Ω_{m} du miroir, qui dérive typiquement de $0,1$ Hz par minute en raison des fluctuations de température du miroir aux temps longs.
Les résultats obtenus expérimentalement pour différents désaccords négatifs sont présentés sur les figures 5.13 et 5.14. La figure 5.13 montre le bruit thermique mesuré sur la détection homodyne. On peut voir sur ce graphique que le ressort optique diminue à mesure que l'on s'éloigne de résonance, ce que nous attendons puisque les acquisitions ont été réalisées pour $|\overline{\Psi}| > \gamma$, c'est-à-dire à gauche du maximum de la courbe (b) du graphique de gauche de la figure 5.5. De même, on observe que l'amortissement effectif diminue lorsqu'on augmente le désaccord vers les valeurs négatives, ce qui se justifie par le même argument d'après la courbe (b) du graphique de droite de la figure 5.5.On note un fort effet de refroidissement (associé à un amortissement important) sur la courbe (d) de la figure 5.13 obtenu pour $\overline{\Psi}/\gamma \simeq -2$, comme cela était attendu par le rapport $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma \simeq 5$ atteint sur la figure 5.5.
La figure 5.14 représente les facteurs d'amplification : pour chaque désaccord, la courbe correspondante est obtenue en divisant le signal issu de l'analyseur de réseau par la valeur de la réponse à la modulation loin de la résonance mécanique (i.e. en l'absence d'amplification). Cette valeur de référence est également acquise grâce à l'analyseur de réseau en moyennant la réponse fournie sur une plage de largeur 100 Hz dont le centre est décalé de 1 kHz par rapport à la fréquence de résonance mécanique intrinsèque $\Omega_{\text{m}}/2\pi$. Les courbes montrent qu'en présence d'un désaccord $\overline{\Psi}$ du champ incident, on observe bien que le signal subit une amplification à la fréquence $\Omega_{\text{eff}}/2\pi$ et une atténuation à la fréquence $\Omega_{\text{m}}/2\pi$. On peut voir que l'amplification croît à mesure que le désaccord augmente vers les valeurs négatives, atteint un maximum se situant aux alentours de $\overline{\Psi} = -3\gamma$, puis se met à décroître. Cela traduit le fait qu'en présence d'effets dissipatifs de l'action en retour dynamique, la valeur de l'amplification n'est pas simplement proportionnelle à la raideur du ressort optique, se trouve réduite par l'amortissement du résonateur. Ainsi, le maximum d'amplification intervient alors que les effets de l'action en retour dynamique sont relativement modestes, et la valeur appréciable du facteur d'amplification atteinte, supérieure à 6, résulte de la très faible largeur intrinsèque de la résonance mécanique. Ceci implique une décroissance très rapide en fonction de la fréquence de la susceptibilité mécanique χ de part et d'autre de Ω_{m}, et un ressort optique même faible (de quelques fois la largeur Γ) suffit donc à engendrer un phénomène d'amplification conséquent.
Nous avons également vérifié un très bon accord quantitatif entre l'expression du facteur d'amplification $|\chi_{\text{eff}}/\chi|^2$ prédite par notre modèle théorique et le résultat obtenu expérimentalement, ce qui est illustré sur la figure 5.15 dans le cas $\overline{\Psi}/\gamma = -2,97$ correspondant au meilleur facteur d'amplification que nous avons observé. Cette courbe est obtenue sans paramètre ajustable, les paramètres des susceptibilités initiales χ et effective χ_{eff} étant déterminés à partir de l'observation des

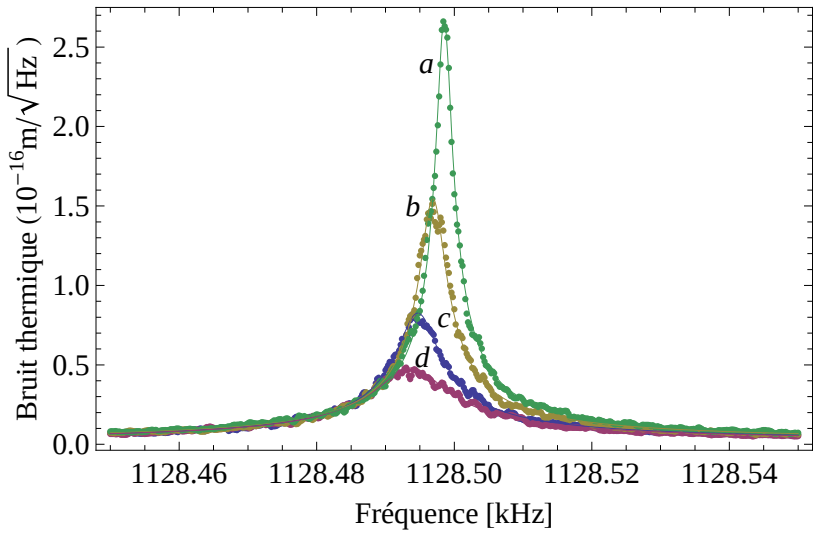

FIGURE 5.13: Spectres de bruit thermique mesurés avec la détection homodyne, pour différents désaccords du faisceau sonde par rapport à la résonance de la cavité, pour une puissance constante de 4 mW incidente sur la cavité. Les courbes (a) à (d) ont été acquises pour des désaccords valant respectivement $\overline{\Psi}/\gamma = -3.64$, -2.97, -2.03, et -1.87. Les points représentent les données expérimentales, et les lignes continues correspondent aux ajustements Lorentziens, qui permettent d'accéder aux paramètres des susceptibilités effectives χ_{eff} associées à l'action en retour dynamique pour chaque désaccord.

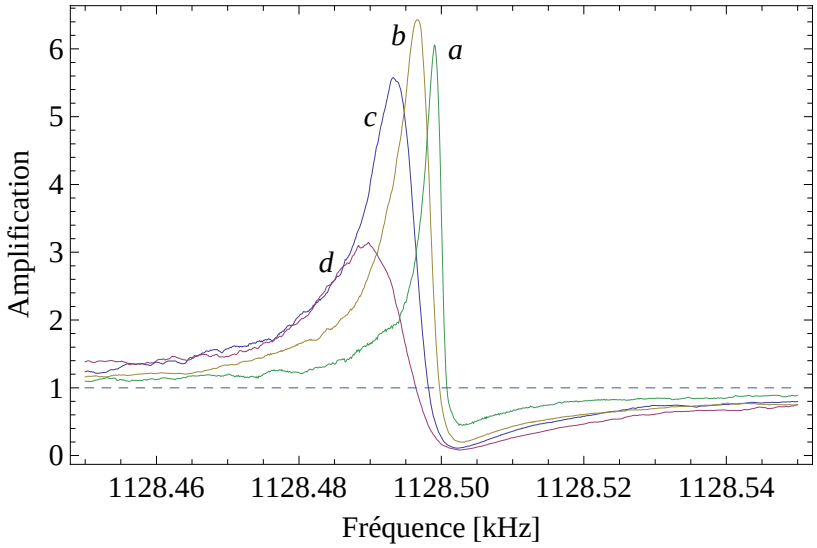

FIGURE 5.14: Facteur d'amplification optomécanique mesuré par l'analyseur de réseau pour différents désaccords du faisceau sonde par rapport à la résonance de la cavité. Les courbes (a) à (d) ont été acquises pour des désaccords valant respectivement $\overline{\Psi}/\gamma = -3,64$, $-2,97$, $-2,03$, et $-1,87$.

spectres de bruit thermique. On peut juste remarquer que l'atténuation à la fréquence Ω_{m} n'est pas aussi profonde que ce qui est attendu. Nous attribuons cet écart au parasite $\delta\varphi_{\text{OL}}$ résiduel provenant du déséquilibre entre les bras de

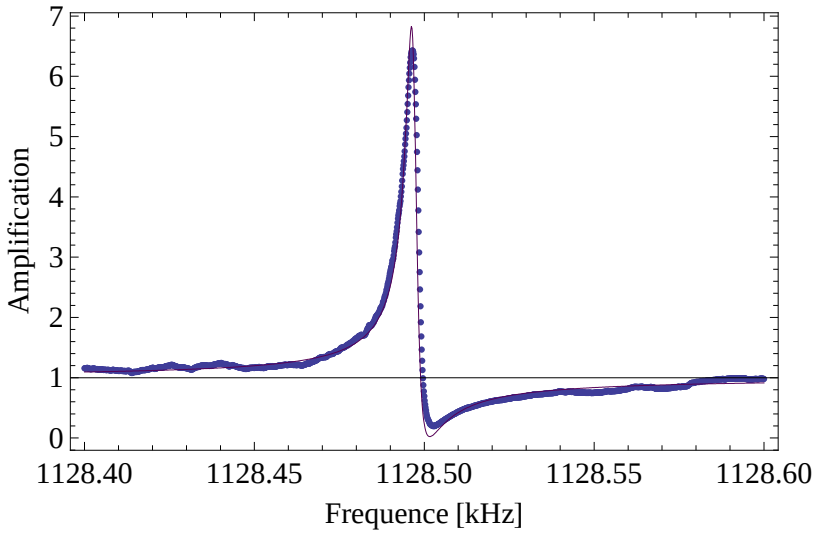

FIGURE 5.15: Ajustement du facteur d'amplification par l'expression $|\chi_{\text{eff}}/\chi|^2$ prévue par la théorie dans le cas $\overline{\Psi}/\gamma = -2,97$. Les points correspondent aux mesures, et la ligne continue correspond à l'ajustement. La susceptibilité intrinsèque est déduite du bruit thermique acquis à résonance optique ($\Omega_{\text{M}}/2\pi = 1128.501$ kHz, $\Gamma/2\pi = 1,48$ Hz), tandis que la susceptibilité effective est déduite de l'ajustement du bruit thermique présenté sur la courbe (b) de la figure 5.13 ($\Omega_{\text{eff}}/2\pi = 1128.497$ kHz, $\Gamma_{\text{eff}}/2\pi = 3,77$ Hz).

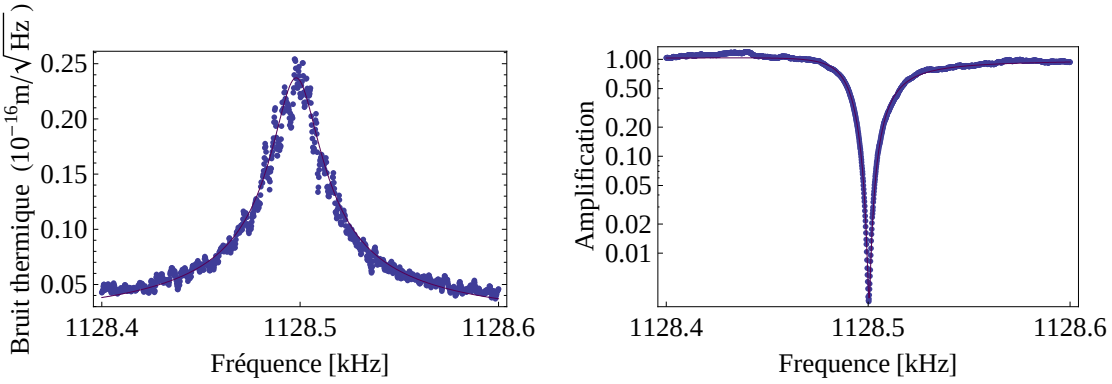

FIGURE 5.16: Bruit thermique (à gauche) et facteur d'amplification $|\chi_{\text{eff}}/\chi|^2$ en échelle logarithmique (à droite), observés pour $\overline{\Psi}/\gamma = -0,94$. L'ajustement du bruit thermique (ligne continue) permet de déterminer $\Omega_{\text{eff}}/2\pi = 1128.498$ kHz et $\Gamma_{\text{eff}}/2\pi = 24,8$ Hz.

la détection homodyne, dont la contribution relative est croissante à mesure que le désaccord augmente : nous avons vu à travers les équations (5.35) et (5.37) que la contamination relative $\delta\varphi_{\text{OL}}/\delta\varphi_{\text{sig}}$ évolue comme $1 + \overline{\Psi}^2/\gamma^2$. Ainsi, la figure 5.16 représente le bruit thermique (à gauche) et le facteur d'amplification en échelle logarithmique (à droite) pour un désaccord plus faible $\overline{\Psi}/\gamma = -0,94$. On constate que la dépendance en fréquence du facteur d'amplification mesuré expérimentalement est en excellent accord avec celle du rapport χ_{eff}/χ (ligne continue sur le graphique de droite), toujours déduit des bruits thermiques mesurés à

résonance et hors résonance.

Nous avons enfin cherché à déterminer quelle serait l'amélioration de sensibilité associée à l'amplification que nous avons observée dans les conditions de notre expérience, si nous étions capables de réaliser une mesure uniquement limitée par les bruits quantiques, c'est-à-dire sans tenir compte du bruit thermique qui reste pour nous la principale limite de sensibilité. Nous avons pour cela estimé le bruit équivalent à l'entrée $S^{\min}_{\mathrm{L,sig}}$ (équation (5.32)) dans le cas du désaccord $\overline{\Psi}/\gamma = -2,97$ correspondant au meilleur facteur d'amplification que nous avons obtenu. Tous les paramètres de cette équation ont été déterminés expérimentalement, et nous n'avons pas manqué de tenir compte des pertes et de l'adaptation spatiale (qui valent respectivement 47 ppm et 87%), qui influent sur l'intensité du champ intracavité. La figure 5.17 présente les résultats obtenus à partir de la formule

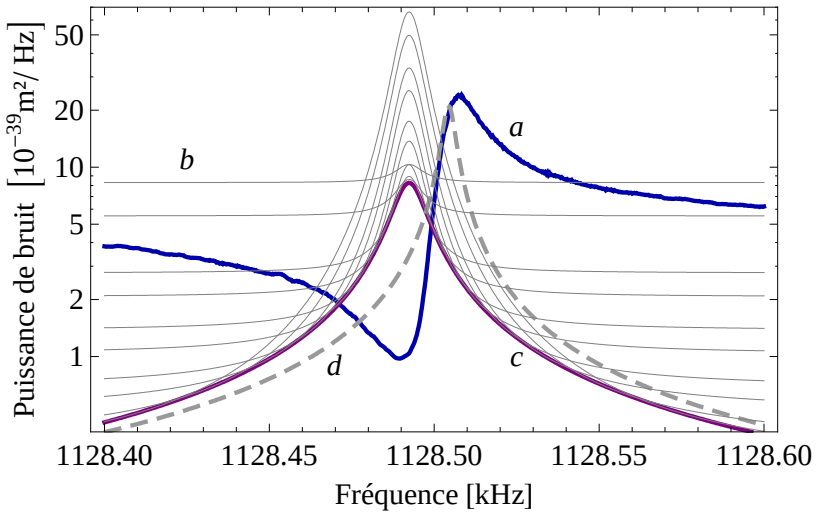

FIGURE 5.17: Sensibilité attendue exprimée en terme du spectre de bruit équivalent $S^{\min}_{\mathrm{L,sig}}$ (équation (5.35)). La courbe (a) est déduite de l'amplification obtenue expérimentalement pour un désaccord $\overline{\Psi}/\gamma = -2,97$. Les courbes ($b$) correspondent au cas d'une cavité résonnante dotée d'un miroir mobile de susceptibilité χ_{eff}, pour des puissances incidentes croissantes. Les courbes (c) et (d) sont les limites quantiques standard pour des résonateurs de susceptibilité χ_{eff} et χ respectivement.

(5.32) (courbe (a)). Ils sont comparés au réseau de courbes (b) qui représentent le bruit quantique usuel obtenu avec une cavité résonnante ($\overline{\Psi} = 0$) mais avec un résonateur de susceptibilité χ_{eff}. Ce réseau est obtenu pour différentes puissances incidentes, une grande puissance ($\zeta \gg 1$) conduisant à un bruit de pression de radiation plus élevé (pic central à la fréquence de résonance de χ_{eff}), mais à une réduction du bruit de la mesure (bruit résiduel sur les ailes). Le bruit associé à ce réseau de courbes est toujours au-dessus de la courbe (c), qui représente la limite quantique standard $\hbar\chi_{\mathrm{eff}}$ pour un résonateur de susceptibilité χ_{eff}. De même, la courbe (d) représente la limite quantique standard $|\hbar\chi|$ du résonateur libre, cette fois-ci centrée à la fréquence de résonance Ω_{m}. La courbe (a), obtenue avec l'amplification optique montre clairement que la sensibilité est meilleure que la limite quantique standard, aussi bien pour le résonateur libre caractérisé par χ, que pour celui décrit par la réponse effective χ_{eff}. La sensibilité est optimale à une fréquence

proche de Ω_{eff}, lorsque le compromis entre l'amplification et les bruits quantiques est le meilleur, et on observe une amélioration de plus de 9 dB par rapport à la limite quantique standard d'un résonateur de susceptibilité χ_{eff}. La limite quantique standard pour un résonateur de susceptibilité χ est également battue de plus de 5 dB à cette fréquence. Ceci s'explique par le fait que le paramètre ζ (précédemment introduit pour évaluer les contributions relatives du bruit quantique de phase et du bruit quantique d'intensité) est proche de l'unité au voisinage de cette fréquence. Dans ces conditions, nous avons vu que l'amplification était directement liée à une amélioration de la sensibilité au delà des deux limites quantiques standards (associées à χ et à χ_{eff}, voir la ligne grisée sur les graphiques de la figure 5.9).

Amplification à désaccords positifs

Nous avons signalé dans le paragraphe précédent qu'en raison de l'instabilité engendrée par les effets dissipatifs de l'action en retour dynamique, il était difficile d'observer un effet d'amplification avec notre dispositif. Nous avons toutefois observé ce phénomène d'amplification pour des désaccords positifs très faibles (figure 5.18). Pour notre cavité PC 3021/13-07125/3, une puissance incidente $P^{\text{in}} = 4$ mW implique l'apparition de l'instabilité pour un désaccord $\overline{\Psi}/\gamma \simeq 0,02$. Nous avons donc abaissé la puissance incidente à 1 mW, de manière à tenter d'observer l'évolution de l'amplification en fonction du désaccord. Le seuil de l'instabilité demeurant cependant très faible ($\overline{\Psi}/\gamma \simeq 0,1$), nous n'avons pas mesuré précisément les désaccords correspondant aux amplifications observées, et nous nous limiterons donc à une interprétation qualitative des résultats obtenus. La figure 5.18 représente deux des courbes que nous avons acquises, la première (courbe (a)) pour un désaccord quasi-nul, et la seconde pour un désaccord proche de celui pour lequel l'instabilité apparaît. On remarque que ces deux courbes sont des résonances

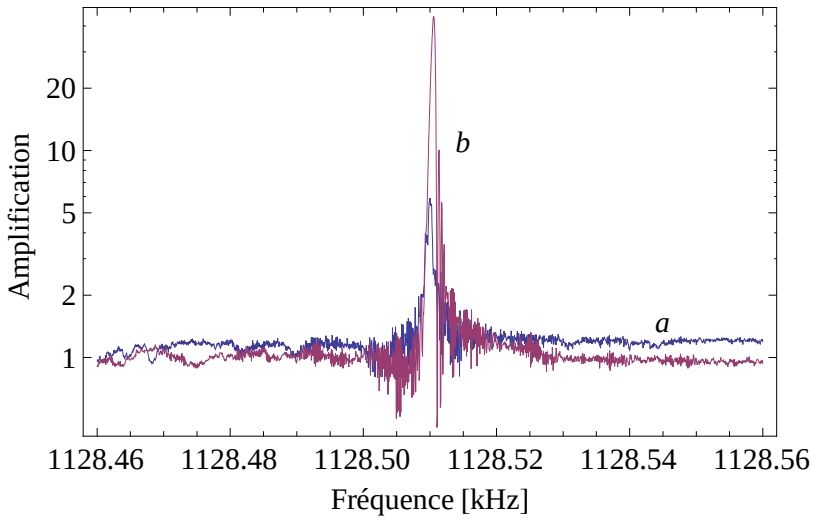

Figure 5.18: Amplification dans le cas de désaccords positifs, que nous n'avons pas mesuré quantitativement ($\overline{\Psi}_{\text{a}} < \overline{\Psi}_{\text{b}}$).

centrées à la même fréquence, qui n'est autre que la fréquence de résonance intrinsèque du miroir $\Omega_{\text{m}}/2\pi$: à d'aussi faibles désaccords, le ressort optique engendre un décalage de la fréquence de résonance mécanique de moins de $0,16$ Hz, soit à peine plus que 10% de la largeur $\Gamma_{\text{m}}/2\pi$. Les deux susceptibilités χ_{eff} et

χ ont donc des fréquences de résonance presque égales, et l'on s'attend à ce que leur rapport χ_{eff}/χ forme une résonance centrée à cette fréquence. La hauteur de la résonance est proportionnelle au rapport $\Gamma/\Gamma_{\text{eff}}$ entre les amortissements intrinsèque et effectif, c'est-à-dire qu'elle augmente avec le désaccord jusqu'à ce que l'instabilité soit atteinte.

Conclusion

Pour conclure ce chapitre, nous avons vu que désaccorder la cavité modifie de manière très efficace la dynamique du résonateur, par un effet de ressort optique qui décale la fréquence de résonance, mais aussi par une action dissipative qui modifie l'amortissement du résonateur. Ces effets ont des applications intéressantes, comme la possibilité de refroidir le résonateur, avec l'objectif d'atteindre son état fondamental, ou encore l'amplification optomécanique que nous venons de présenter, et qu'il est envisagé d'utiliser pour améliorer la sensibilité des antennes gravitationnelles de seconde génération au-delà de la limite quantique standard [86, 88, 89].
La modification de la dynamique du résonateur peut aussi avoir des conséquences néfastes. Par exemple, on utilise souvent une modulation de fréquence du faisceau laser incident pour calibrer les mesures de déplacement réalisées par la cavité à miroir mobile (voir la section 1.5.4). Si l'on n'y prend garde et que la modulation de fréquence subit un effet d'amplification optomécanique, cela peut fausser de manière importante la calibration. Il faut donc s'assurer que la fréquence de la modulation est éloignée de toute résonance mécanique, et de préférence effectuer la calibration lorsque la cavité est à résonance.
Ces effets sont aussi responsables d'une modification du bruit thermique, qui peut rendre délicate l'extraction des caractéristiques mécaniques du résonateur. L'observation de l'amplification à désaccord positif a été l'occasion de montrer que pour les puissances incidentes usuelles ($P^{\text{in}} \simeq 1$ mW), les effets dissipatifs de l'action en retour peuvent être très importants, et cela même pour des désaccords très faibles. Si l'asservissement de la fréquence du laser à résonance optique est trop approximatif (du fait d'un mouvement résiduel à basse fréquence sur la résonance, ou bien d'un offset électronique ou optique décalant le point de fonctionnement), il est possible que le miroir subisse des effets dissipatifs de l'action en retour dynamique sans que l'on ne s'en aperçoive lors de la mesure du bruit thermique, dont on déduira une susceptibilité erronée. L'observation de la réponse du système à une modulation de fréquence, plate si l'on est parfaitement asservi à résonance, apparaît alors comme un moyen très efficace pour déterminer si l'on est en présence d'effets significatifs de l'action en retour dynamique. Nous contrôlons ainsi systématiquement que nos mesures de bruit thermique à résonance font bien intervenir la susceptibilité intrinsèque du miroir mobile, ce qui nous a permis en particulier d'éviter une erreur de 10% sur la valeur du facteur de qualité intrinsèque de notre miroir plan-convexe 07125/3, que nous avions initialement évaluée à $Q = 835\,000$ lors d'une première mesure.

Conclusion

Les travaux que nous avons présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans le cadre de l'étude des limites fondamentales de sensibilité des mesures optiques. Le système autour duquel nous avons développé nos recherches consiste en une cavité Fabry-Perot dotée d'un miroir mobile, dont on cherche à mesurer le plus précisément possible les fluctuations de longueur, par une méthode interférométrique. Nous avons vu que l'on peut rendre un tel système très sensible aux déplacements du miroir, ce qui en fait un dispositif privilégié pour l'étude des propriétés fondamentales du couplage optomécanique. Si l'un des enjeux actuels de l'optomécanique quantique est de mettre à profit les effets de pression de radiation pour refroidir un résonateur mécanique jusqu'à son état quantique fondamental, nous nous sommes plutôt intéressés à un autre aspect tout aussi essentiel du couplage optomécanique, à savoir son action sur la lumière. L'action en retour induite par la pression de radiation conduit en effet à l'existence de limites quantiques qui apparaissent comme une conséquence directe des principes fondamentaux de la mesure en mécanique quantique. Ce sont aussi des limites très concrètes, qui vont apparaître par exemple dans les antennes gravitationnelles de seconde génération. Par ailleurs, la pression de radiation modifie aussi les propriétés statistiques de la lumière et permet de réaliser avec des résonateurs mécaniques des expériences d'optique quantique telles que la génération d'états non classiques de la lumière ou des mesures quantiques non destructives.
Le point clé pour atteindre ce régime quantique du couplage optomécanique consiste à être capable de voir les déplacements du résonateur induits par les fluctuations quantiques de la pression de radiation. Nous avons présenté dans ce mémoire une expérience capable d'atteindre ce régime quantique, et nous avons décrit plusieurs conséquences de la pression de radiation : mise en évidence des corrélations optomécaniques entre deux faisceaux lumineux, induites par leur couplage avec le miroir mobile ; annulation de l'action en retour dans les mesures de longueur ou de force ; refroidissement laser du miroir mobile dans une cavité désaccordée ; amplification d'un signal par la mise en mouvement du miroir et amélioration de la sensibilité de la mesure par l'effet de l'action en retour dynamique.

Le cœur de notre dispositif est une cavité Fabry-Perot dont le miroir arrière est déposé sur un résonateur en silice de quelques centimètres de diamètre. Grâce au savoir-faire du LMA en matière de traitements diélectriques, nous avons obtenu des cavités dont la finesse dépasse 300 000. La source laser est basée sur un laser Titane-Saphir, accordable sur une très large plage de longueur d'onde, qui délivre une lumière très stable en fréquence et en intensité. Le système de détection homodyne fonctionne au niveau quantique et permet de mesurer la quadrature de phase du faisceau de mesure réfléchi avec une très grande sensibilité. La sensibilité de notre montage atteint la valeur remarquable de $2.7 \times 10^{-20}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, ce qui nous

a permis de caractériser en détail les modes de vibration des miroirs de la cavité, et d'étudier leur mouvement Brownien.

Nous avons présenté l'ensemble des améliorations que nous avons apportées à notre système, afin de favoriser le bruit quantique de pression de radiation par rapport au bruit thermique. Nous avons tout d'abord cherché à réduire la température du résonateur, en plaçant la cavité dans un cryostat fonctionnant à 4 K et développé par la firme TBT. Les multiples tentatives que nous avons effectuées avec ce cryostat ont démontré qu'il ne présentait pas une stabilité mécanique suffisante et nous avons cherché à le remplacer par un modèle plus performant. Nous avons par ailleurs amélioré l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité, qui ne permettait pas d'opérer convenablement en régime cryogénique, nécessairement plus turbulent que le fonctionnement à température ambiante. Nous avons notamment mis en place un asservissement de type Pound-Drever-Hall, plus rapide et doté d'une plage d'accrochage beaucoup plus large.
Pour améliorer la réponse de notre résonateur au bruit de pression de radiation, nous avons utilisé des résonateurs de géométrie plan-convexe, dont les dimensions sont telles que ses modes de vibration sont confinés sur une faible surface en son centre. Cela a permis d'obtenir des masses beaucoup plus faibles que dans le cas des miroirs cylindriques, et une bien meilleure isolation mécanique, donc des facteurs de qualité beaucoup plus grands. Nous avons porté une attention particulière à la mise au point du support de la cavité à miroir mobile, que nous avons conçu de manière à ce qu'il permette un alignement très précis de l'axe de la cavité au centre du miroir plan-convexe, tout en conservant une très grande stabilité mécanique. Nous sommes parvenus à assembler des cavités avec lesquelles nous avons obtenu des masses allant jusqu'à 20 mg, et des facteurs de qualité mécanique atteignant presque 800 000 pour le mode fondamental Gaussien du résonateur plan-convexe, ce qui correspond à une amélioration du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ entre les effets de pression de radiation et le bruit thermique de plus de deux ordres de grandeurs, comparativement aux résultats qui avaient été obtenus avec les miroirs cylindriques.
Notre choix de conserver un miroir de grand diamètre nous a permis de réaliser ces améliorations mécaniques de paire avec une amélioration de la finesse de la cavité, celle-ci ayant atteint la valeur de 330 000. Nous avons compensé le phénomène de biréfringence qui en résulte en modifiant notre dispositif de double injection afin d'accorder indépendamment à résonance optique les deux polarisations croisées envoyées dans la cavité.

Nous avons mené une étude détaillée des effets optomécaniques de la pression de radiation sur la lumière, aussi bien théorique qu'expérimentale. La particularité de notre approche est la prise en compte de la nature multimode du résonateur, ce qui a des conséquences sur les effets de l'action en retour ainsi que sur la sensibilité de la mesure.
Dans le chapitre 3, nous avons établi une expression générale du rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$,qui dans le cas de notre miroir plan-convexe, nous a conduit à la conclusion qu'il est préférable de travailler à une fréquence loin de toute résonance mécanique plutôt qu'à résonance mécanique. Expérimentalement, la comparaison du spectre de bruit thermique et la réponse à une force de pression de radiation produite par un faisceau modulé en intensité montre un rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ 100 fois meilleur à basse fréquence qu'à résonance mécanique. Nous avons également observé un effet d'anti-résonance à une fréquence légèrement supérieure à la résonance mécanique, pour laquelle le miroir devient quasiment insensible à la pression de radiation. Cet effet permet d'améliorer de manière très significative la mesure d'une variation de

longueur ou d'une force, puisqu'à la fréquence de l'anti-résonance, le bruit de pression de radiation qui limite la mesure au niveau quantique est fortement atténué.
Nous avons présenté une étude détaillée des corrélations optomécaniques induites par pression de radiation entre l'intensité d'un premier faisceau, constituant le signal, et la phase d'un second faisceau, la sonde, qui assure la mesure des déplacements du miroir. Le schéma expérimental utilisé ressemble à ceux utilisés pour réaliser des mesures quantiques non destructives de l'intensité d'un faisceau à l'aide d'un milieu non-linéaire placé dans une cavité, mais ici le transfert de l'information est réalisé par le mouvement du miroir. Le bruit thermique étant grand devant les déplacements provoqués par le bruit quantique de pression de radiation en dépit des améliorations que nous avons apportées à notre dispositif, nous avons mené notre étude à l'aide d'un bruit de pression de radiation classique, possédant des propriétés proches de celles du bruit quantique mais avec un niveau plus élevé. Les résultats obtenus hors-résonance mécanique montrent de très fortes corrélations entre les trajectoires temporelles de l'intensité du faisceau signal et de la phase du faisceau sonde dans leurs espaces des phases respectifs. Les résultats obtenus lorsque le bruit est appliqué autour d'une résonance mécanique montrent également de très fortes corrélations lorsque l'on tient compte de l'effet de filtrage par la réponse du miroir, qui se comporte comme un oscillateur harmonique avec une résonance très étroite. L'étude de la fonction de corrélation à deux temps permet en particulier de bien décrire la dynamique du miroir et celle du bruit d'intensité incident.

Nous avons consacré le chapitre 4 à l'étude des conditions expérimentales limitant l'observation des corrélations quantiques lorsque l'on se trouve dans un régime où le bruit thermique domine les effets quantiques de pression de radiation ($S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}} > S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$), comme c'est le cas dans notre système. Nous avons mis au point une technique de moyennage permettant de mettre en évidence les déplacements induits par le bruit de pression de radiation en l'extrayant du bruit thermique. Nous avons démontré cette technique en utilisant un faible bruit classique d'intensité et montré comment la trajectoire correspondante pouvait être retrouvée dans l'espace des phases en moyennant les fluctuations liées au bruit thermique. Nous avons ensuite expliqué comment il est possible d'étendre cette technique de moyennage au cas du bruit quantique de pression de radiation, en nous intéressant tout particulièrement à la durée de moyennage nécessaire pour pouvoir extraire les corrélations avec une précision suffisante.
Ceci nous a conduit à la conclusion qu'il fallait privilégier une démonstration des corrélations optomécaniques quantiques hors résonance mécanique en raison de la possibilité de diminuer la durée de l'expérience en choisissant une bande spectrale d'acquisition maximale : avec les paramètres de notre expérience, le temps de moyennage passe de quelques heures à résonance mécanique, à un temps de moins de 10 secondes pour une expérience menée hors résonance mécanique sur une bande spectrale de quelques centaines de Hertz.
De plus, l'existence de pertes optiques dans la cavité estt à l'origine d'une contamination du bruit d'intensité du faisceau signal réfléchi par le bruit thermique du miroir. Cette contamination, dont l'amplitude dépend de la précision de l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité, se traduit par des corrélations de nature thermique entre les faisceaux sonde et signal, qui peuvent complètement masquer les corrélations quantiques. Dans les conditions de notre expérience où le bruit est dominé par les fluctuations thermiques, une démonstration des corrélations optomécaniques à la fréquence de résonance mécanique nécessiterait d'asservir la fréquence du laser sur la résonance optique à mieux que

10 mHz, ce qui n'est pas envisageable. En revanche, si l'on procède hors de la résonance mécanique, nous avons estimé que pour un angle de pertes de 10^{-6}, il faut être asservi à mieux que 100 Hz, ce qui paraît cette fois raisonnable. Nous avons enfin présenté la mise en évidence et la caractérisation expérimentale de cet effet de contamination avec notre système, qui confirme les résultats théoriques

Nous avons consacré la dernière partie de ce manuscrit à une étude du couplage optomécanique dans une cavité désaccordée (chapitre 5). Nous avons tout d'abord présenté une description théorique des effets de pression de radiation dans une cavité désaccordée, également appelés "action en retour dynamique". Ils se décomposent en deux contributions, l'une conservative, responsable d'un effet de ressort optique du miroir, et une contribution dissipative qui se traduit par un amortissement supplémentaire et par la possibilité de refroidir le miroir. Nous avons présenté une démonstration d'un tel refroidissement à l'aide de notre dispositif. Par rapport aux expériences de ce type déjà réalisées avec des micro-résonateurs ou des miroirs de grande taille comme ceux de l'interféromètre américain Ligo, la particularité de notre démarche est qu'elle est basée sur l'utilisation de deux faisceaux, le premier permettant d'asservir la fréquence du laser, et le second servant au refroidissement. Cette méthode offre une plus grande flexibilité dans le choix du désaccord, simplement en modifiant l'écart en fréquence entre les deux faisceaux.
Nous avons terminé ce chapitre en montrant que l'effet de ressort optique peut être utilisé pour mettre en mouvement le miroir en réponse à une variation de longueur de la cavité. Ainsi, lors d'une mesure de variation de longueur, le miroir peut accompagner le signal que l'on cherche à mesurer, rendant la mesure plus sensible. Nous avons mis en évidence expérimentalement cet effet d'amplification optomécanique en montrant que le miroir se déplace par ressort optique en réponse à une modulation de fréquence du laser, qui produit une modulation de la longueur optique de la cavité. Nous avons obtenu un facteur d'amplification supérieur à 6, montrant ainsi que le déplacement du miroir induit par les effets de pression de radiation est plus grand que la variation de longueur qui en est la source. Nous avons réalisé un calcul complet de cet effet, aussi bien à basse fréquence qu'à plus haute fréquence où d'autres effets dynamiques du couplage optomécanique modifient les bruits quantiques. Ces calculs montrent que l'amplification optomécanique du signal s'accompagne d'une amélioration de la sensibilité de la mesure au-delà de la limite quantique standard, par un facteur d'environ 5 dB dans les conditions de notre expérience.
Les prochaines étapes de l'expérience consisteront très certainement à mettre en évidence les corrélations optomécaniques au niveau quantique, grâce à la technique de moyennage mise au point au cours de cette thèse, ce qui constituerait la première démonstration directe du bruit de pression de radiation dans les mesures interférométriques. Pour arriver à ce résultat, il est nécessaire d'améliorer l'asservissement du laser à résonance sur la cavité, et une technique qui semble particulièrement prometteuse consiste à utiliser la contamination elle-même de l'intensité du faisceau intense par le mouvement du miroir pour contrôler l'asservissement. Une autre amélioration envisagée consiste à rendre plus importants les effets de pression de radiation en augmentant la puissance du faisceau signal, nos cavité de grande finesse supportant sans problème des puissances incidentes supérieures à 20 mW. Cela nécessite toutefois de revoir la cavité FPF de filtrage pour qu'elle élimine le bruit classique pour des puissances laser aussi plus importantes.

Les autres effets de pression de radiation que nous avons mis en évidence (annulation de l'action en retour, refroidissement laser, amplification optomécanique) montrent que l'on est aujourd'hui prêt à disposer de systèmes optomécaniques fonctionnant en régime quantique, avec des implications pour les mesures ultra sensibles telles que les capteurs de très petites forces ou les antennes gravitationnelles. Battre la limite quantique standard dans ces dispositifs devrait devenir bientôt un enjeu important. Une étape essentielle consiste à "voir" les effets quantiques de la pression de radiation sans être gêné par le bruit thermique. Plusieurs approches peuvent être envisagées pour arriver à un rapport $S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{rad}}/S_{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}$ plus favorable, comme l'amélioration du comportement optomécanique du miroir mobile, ou le fonctionnement en régime cryogénique tout en respectant les contraintes sévères de stabilité optique de la cavité.

Bibliographie

[1] VB Braginsky and F. Khalili. Ya 1992 Quantum Measurement.

[2] RA H
"ulse and JH Taylor. DISCOVERY OF A PULSAR IX A BINARY SYSTEM. *The Astrophysical Journal*, 195 :L51–L53, 1975.

[3] JH Taylor and JM Weisberg. A new test of general relativity-Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, 253 :908–920, 1982.

[4] C. Bradaschia, R. Del Fabbro, A. Di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici, A. Passuello, et al. The VIRGO Project : A wide band antenna for gravitational wave detection* 1. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 289(3) :518–525, 1990.

[5] B. Abbott, R. Abbott, R. Adhikari, A. Ageev, B. Allen, R. Amin, SB Anderson, WG Anderson, M. Araya, H. Armandula, et al. Detector description and performance for the first coincidence observations between LIGO and GEO. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 517(1-3) :154–179, 2004.

[6] B. Willke et al. GEO600 : status and plans. *Classical and Quantum Gravity*, 24 :S389, 2007.

[7] R. Takahashi, K. Arai, D. Tatsumi, M. Fukushima, T. Yamazaki, MK Fujimoto, K. Agatsuma, Y. Arase, N. Nakagawa, A. Takamori, et al. Operational status of TAMA300 with the seismic attenuation system (SAS). *Classical and quantum gravity*, 25 :114036, 2008.

[8] DG Blair, P. Barriga, AF Brooks, P. Charlton, D. Coward, JC Dumas, Y. Fan, D. Galloway, S. Gras, DJ Hosken, et al. The Science benefits and preliminary design of the southern hemisphere gravitational wave detector AIGO. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 122, page 012001. IOP Publishing, 2008.

[9] T. Caniard, P. Verlot, T. Briant, P.F. Cohadon, and A. Heidmann. Observation of back-action noise cancellation in interferometric and weak force measurements. *Physical Review Letters*, 99(11) :110801, 2007.

[10] P. Verlot, A. Tavernarakis, T. Briant, P.F. Cohadon, and A. Heidmann. Scheme to probe optomechanical correlations between two optical beams down to the quantum level. *Physical review letters*, 102(10) :103601, 2009.

[11] C.M. Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, 23(8) :1693–1708, 1981.

[12] C.M Caves. Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 45 :75, 1980.

[13] M. Xiao, L.A. Wu, and H.J. Kimble. Precision measurement beyond the shot-noise limit. *Physical review letters*, 59(3) :278–281, 1987.

[14] M.T. Jaekel and S. Reynaud. Quantum limits in interferometric measurements. *Europhys. Lett*, 13(4) :301–306, 1990.

[15] N. Mio and K. Tsubono. Vibration transducer using an ultrashort Fabry-Perot cavity. *Applied Optics*, 34(1) :186–189, 1995.

[16] M. Bernardini, S. Braccini, C. Bradaschia, G. Cella, E. Cuoco, E. D'Ambrosio, V. Dattilo, R. De Salvo, A. di Virgilio, F. Fidecaro, et al. Plane parallel mirrors Fabry-Perot cavity to improve Virgo superattenuators. *Physics Letters A*, 243(4) :187–194, 1998.

[17] I. Tittonen, G. Breitenbach, T. Kalkbrenner, T. M
"uller, R. Conradt, S. Schiller, E. Steinsland, N. Blanc, and NF De Rooij. Interferometric measurements of the position of a macroscopic body : Towards observation of quantum limits. *Physical Review A*, 59(2) :1038–1044, 1999.

[18] Y. Hadjar, P.F. Cohadon, CG Aminoff, M. Pinard, and A. Heidmann. High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion. *EPL (Europhysics Letters)*, 47 :545, 1999.

[19] A. Heidmann and S. Reynaud. Photon noise reduction by reflection from a movable mirror. *Physical Review A*, 50(5) :4237–4243, 1994.

[20] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidmann, E. Giacobino, and S. Reynaud. Quantum-noise reduction using a cavity with a movable mirror. *Physical Review A*, 49(2) :1337–1343, 1994.

[21] Y. Hadjar. Etude du couplage optomécanique dans une cavité de grande finesse ; observation du mouvement Brownien d'un miroir. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, 1998.

[22] A. Heidmann, Y. Hadjar, and M. Pinard. Quantum nondemolition measurement by optomechanical coupling. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 64 (2) :173–180, 1997.

[23] PF Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard. Cooling of a mirror by radiation pressure. *Arxiv preprint quant-ph/9903094*, 1999.

[24] O. Arcizet, P.F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, and A. Heidmann. Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror. *Nature*, 444 :71–74, 2006.

[25] S. Gigan, HR Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, JB Hertzberg, KC Schwab, D. Bäuerle, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger. Self-cooling of a micromirror by radiation pressure. *Nature*, 444 :67–70, 2006.

[26] A. Schliesser, R. Riviere, G. Anetsberger, O. Arcizet, and TJ Kippenberg. Resolved-sideband cooling of a micromechanical oscillator. *Nature Physics*, 4 (5) :415–419, 2008.

[27] JD Thompson, BM Zwickl, AM Jayich, F. Marquardt, SM Girvin, and JGE Harris. Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane. *Nature*, 452(7183) :72–75, 2008.

[28] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre. Introduction aux lasers et à l'optique quantique. 1997.

[29] D. Rugar, R. Budakian, H.J. Mamin, and B.W. Chui. Single spin detection by magnetic resonance force microscopy. *Nature*, 430(7) :329–332, July 2004.

[30] S.K. Lamoreaux. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 mm range. *Physical Review Letters*, 78(1) :5–8, 1997.

[31] H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleiman, D.J. Bishop, and F. Capasso. Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force. *Science*, 291(3) :1941–1944, 2001.

[32] U. Mohideen and A. Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μm. *Physicl Review Letters*, 430(10) :4549–4552, October 1998.

[33] A. Schliesser, O. Arcizet, R. Rivière, and TJ Kippenberg. Resolved-sideband cooling and measurement of a micromechanical oscillator close to the quantum limit. *Arxiv preprint arXiv :0901.1456*, 2009.

[34] O. Arcizet, P.F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, A. Heidmann, J.M. Mackowski, C. Michel, L. Pinard, O. Francais, and L. Rousseau. High-sensitivity optical monitoring of a micromechanical resonator with a quantum-limited optomechanical sensor. *Physical review letters*, 97(13) :133601, 2006.

[35] S. Gröblacher, J.B. Hertzberg, M.R. Vanner, G.D. Cole, S. Gigan, KC Schwab, and M. Aspelmeyer. Demonstration of an ultracold micro-optomechanical oscillator in a cryogenic cavity. *Nature Physics*, 2009.

[36] S. Reynaud and A. Heidmann. A semiclassical linear input-output transformation for quantum fluctuations. *Opt. Comm.*, 71 :209, 1989.

[37] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre. A semiclassical linear input-output transformation for quantum fluctuations. *Progress in Optics*, 1992.

[38] C. Fabre and S. Reynaud. Fundamental Systems in Quantum Optics. *1990 Les Houches Lectures*, 1992.

[39] L.D. Landau and Lifshitz. Cours de physique théorique :physique statistique. 1967.

[40] M.T. Jaekel and S. Reynaud. A semiclassical linear input-output transformation for quantum fluctuations. *Europhys. Lett.*, 13 :301, 1990.

[41] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, and A. Heidmann. Photon noise reduction by passive optical bistable systems. *Physical Review A*, 40(3) :1440–1446, 1989.

[42] V.B. Braginsky and Y.I. Vorontsov. Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique. *Usp. Fiz. Nauk*, 114 :41–53, 1974.

[43] V.B. Braginsky, Y.I. Vorontsov, and F.Y. Khalili. Quantum singularities of a ponderomotive meter of electromagnetic energy. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 73 : 1340–1343, 1977.

[44] K.S. Thorne, R.W.P. Drever, C.M. Caves, M. Zimmermann, and V.D. Sandberg. Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 40 :667–671, 1978.

[45] W.G. Unruh. Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators. *Phys. Rev. B*, 19 :2888–2896, 1979.

[46] C.M. Caves, K.S. Thorne, R.W.P. Drever, V.D. Sandberg, and M. Zimmermann. On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principles. *Rev. Mod. Phys.*, 52 :341–392, 1980.

[47] G.J. Milburn and D.F. Walls. Quantum nondemolition measurements via quadratic coupling. *Phys. Rev. A*, 28 :2065–2070, 1983.

[48] N. Imoto, H.A. Haus, and Y. Yamamoto. Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect. *Phys. Rev. A*, 32 : 2287–2292, 1985.

[49] M.D. Levenson, R.M. Shelby, M. Reid, and D.F. Walls. Quantum nondemolition detection of optical quadrature amplitudes. *Phys. Rev. Lett.*, 57 : 2473–2476, 1986.

[50] H.A. Bachor, M.D. Levenson, D.F. Walls, S.H. Perlmutter, and R.M. Shelby. Quantum nondemolition measurements in an optical-fiber ring resonator. *Phys. Rev. A*, 38 :180–190, 1988.

[51] J-F. Roch, G. Roger, P. Grangier, J.M. Courty, and S. Reynaud. Quantum non-demolition measurements in optics : a review and some recent experimental results. *Applied Phys. B*, 55 :291–297, 1992.

[52] J.-F. Roch and al. Quantum nondemolition measurements using cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :634–637, 1997.

[53] J.-P. Poizat, J.-F. Roch, and P. Grangier. Characterization of quantum nondemolition measurements in optics. *Ann. Phys. Fr.*, 19 :265–294, 1994.

[54] T. Briant. Caractérisation du couplage optomécanique entre la lumière et un miroir : bruit thermique et effets quantiques. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, 2003.

[55] F. Biraben and P. Labastie. Balayage d'un laser à colorant continu monomode sur 150 GHz. *Opt. Comm.*, 41 :49, 1982.

[56] T. Caniard. Couplage optomécanique, action en retour et limites quantiques dans les mesures ultrasensibles. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, 2007.

[57] U. Leonhardt and H. Paul. Measuring the quantum state of light. *Prog. Quant. Elect.*, 19 :89, 1995.

[58] F. Bondu and J-.Y. Vinet. Mirror thermal noise in interferometric gravitationnal wave detectors. *Phys. Lett. A*, 198 :74, 1995.

[59] F. Bondu. Etude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d'onde gravitationnelle VIRGO. *Thèse de l'Université Paris Sud*, 1996.

[60] T. Briant, P.F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard. Optomechanical characterization of acoustic modes in a mirror. *Physical Review A*, 68(3) : 33823, 2003.

[61] T. Briant, PF Cohadon, M. Pinard, and A. Heidmann. Optical phase-space reconstruction of mirror motion at the attometer level. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 22(1) :131–140, 2003.

[62] L.D. Landau and M.E. Lifshitz. Cours de physique théorique : "Théorie de l'élasticité". *2ème édition (Mir, 1990).*

[63] RWP Drever, JL Hall, FV Kowalski, J. Hough, GM Ford, AJ Munley, and H. Ward. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 31(2) :97–105, 1983.

[64] O. Arcizet. Mesure optique ultrasensible et refroidissement par pression de radiation d'un micro-résonateur mécanique. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, 2006.

[65] P. Mohanty, DA Harrington, KL Ekinci, YT Yang, MJ Murphy, and ML Roukes. Intrinsic dissipation in high-frequency micromechanical resonators. *Physical Review B*, 66(8) :85416, 2002.

[66] M. Pinard, Y. Hadjar, and A. Heidmann. Effective mass in quantum effects of radiation pressure. *The European Physical Journal D*, 7(1) :107–116, 1999.

[67] CJ Wilson. Vibration modes of AT-cut convex quartz resonators. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 7 :2449–2454, 1974.

[68] J. Detaint, H. Carru, J. Schwartzel, B. Capelle, A. Zarka, and B. CNET. Linear model of the contoured resonators. In *Frequency Control Symposium, 1988., Proceedings of the 42nd Annual*, pages 19–28, 1988.

[69] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5(10) : 1550–1567, 1966.

[70] F. Bondu, P. Hello, and J.Y. Vinet. Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas. *Physics Letters A*, 246(3-4) :227–236, 1998.

[71] Y. Levin. Internal thermal noise in the LIGO test masses : A direct approach. *Physical Review D*, 57(2) :659–663, 1998.

[72] VB Braginsky, ML Gorodetsky, and SP Vyatchanin. Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A*, 264(1) :1–10, 1999.

[73] T. Briant, M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann, A. Lobo, and M. Pinard. Thermal and back-action noises in dual-sphere gravitational-wave detectors. *Physical Review D*, 67(10) :102005, 2003.

[74] M. Cerdonio, L. Conti, JA Lobo, A. Ortolan, L. Taffarello, and JP Zendri. Wideband dual sphere detector of gravitational waves. *Physical Review Letters*, 87(3) :31101, 2001.

[75] R. Fermani, S. Mancini, and P. Tombesi. Quantum limited force measurement in a cavityless optomechanical system. *Physical Review A*, 70(4) :45801, 2004.

[76] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre. Quantum fluctuations in optical systems. *Progress in optics*, 30 :1–85, 1992.

[77] C. Fabre and S. Reynaud. Fundamental Systems in Quantum Optics. In *Les Houches session*, volume 53.

[78] GEP Box and M.E. Muller. A note on the generation of random normal deviates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 29(2) :610–611, 1958.

[79] A. Tavernarakis. Optomechanical phase-intensity correlations : towards the quantum regime. *Rapport de stage du DEA PEAM*, 2008.

[80] J. Miles and M. Shevlin. *Applying regression & correlation : a guide for students and researchers*. Sage Publications Ltd, 2001.

[81] I. Wilson-Rae, N. Nooshi, W. Zwerger, and TJ Kippenberg. Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction. *Physical Review Letters*, 99(9) :93901, 2007.

[82] I. Favero and K. Karrai. Cavity cooling of a nanomechanical resonator by light scattering. *New Journal of Physics*, 10 :095006, 2008.

[83] VB Braginsky and SP Vyatchanin. Low quantum noise tranquilizer for Fabry–Perot interferometer. *Physics Letters A*, 293(5-6) :228–234, 2002.

[84] F. Marquardt, J.P. Chen, AA Clerk, and SM Girvin. Quantum theory of cavity-assisted sideband cooling of mechanical motion. *Physical Review Letters*, 99(9) :93902, 2007.

[85] VB Braginsky, AB Manukin, and M.Y. Tikhonov. Investigation of dissipative Ponderomotive effects of electromagnetic radiation. *Sov. Phys. JETP-USSR*, 31 :829–830, 1970.

[86] A. Buonanno and Y. Chen. Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs. *Physical Review D*, 65(4) :42001, 2002.

[87] P. Verlot, A. Tavernarakis, T. Briant, PF Cohadon, and A. Heidmann. Backaction Amplification and Quantum Limits in Optomechanical Measurements. *Physical Review Letters*, 104(13) :133602, 2010.

[88] A. Buonanno and Y. Chen. Quantum noise in second generation, signal-recycled laser interferometric gravitational-wave detectors. *Physical Review D*, 64(4) :042006, 2001.

[89] O. Arcizet, T. Briant, A. Heidmann, and M. Pinard. Beating quantum limits in an optomechanical sensor by cavity detuning. *Physical Review A*, 73(3) : 33819, 2006.