



HAL
open science

Représentation géométriques des groupes de tresses

Fabrice Castel

► **To cite this version:**

Fabrice Castel. Représentation géométriques des groupes de tresses. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 2009. Français. NNT: . tel-00552007

HAL Id: tel-00552007

<https://theses.hal.science/tel-00552007v1>

Submitted on 5 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Bourgogne – Dijon
UFR de Sciences et Techniques

Institut de Mathématiques de Bourgogne
UMR 5584 du CNRS

THÈSE

en vue d'obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

FABRICE CASTEL

Représentations géométriques des groupes de tresses

soutenue publiquement le 15 Octobre 2009 devant le jury composé de

MICHEL	BOILEAU	
CHRISTIAN	BONATTI	
CHRISTINE	LESCOP	
JÉRÔME	LOS	
ATHANASE	PAPADOPOULOS	
BERTOLD	WIEST	
LUIS	PARIS	Directeur de thèse

Rapporteurs : ATHANASE PAPADOPOULOS et BERTOLD WIEST

Remerciements.

Avant toute chose chose, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Luis Paris, mon directeur de thèse, pour son soutien, sa confiance, son amitié, son humour, et sa rigueur. En plus de m'avoir fait découvrir le domaine des tresses et des mapping classes groups, il m'a lancé sur une voie particulièrement féconde, qui promet de le rester encore longtemps et qui n'a cessé de m'enthousiasmer. Mais ce n'est pas tout, loin s'en faut ! Il a relu plusieurs fois cette thèse et ses multiples versions préliminaires. Je n'ose imaginer le temps qu'il y a consacré ni le nombre de pages qu'il a annotées. Ce fut douloureux pour lui et pour moi, mais je mesure à quel point je lui suis redevable de m'avoir appris une telle rigueur ! Dans un tout autre registre, il m'a pardonné bien des étourderies et a même cherché à les prévenir... Qu'aurais-je fait sans lui ?

Je tiens également à remercier particulièrement et très vivement Christine Lescop. Elle a passé deux étés à me présenter en partant de presque zéro les plus belles constructions mathématiques que l'on m'ait fait découvrir. Elle aussi m'a appris à rédiger, me corrigeant à répétition plusieurs dizaines de pages avec rigueur et bienveillance. Encore merci pour tout ce temps consacré et ces magnifiques maths partagées !

Je tiens à remercier très chaleureusement mes deux rapporteurs Athanase Papadopoulos et Bertold Wiest, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ma thèse (un dossier particulièrement épais et peu engageant a priori !), pour l'avoir fait avec attention, puis pour avoir pris le temps d'en discuter avec moi, et finalement pour m'avoir suggéré quelques corrections dont cette dernière version tient compte.

Je remercie chaleureusement Michel Boileau, Christian Bonatti, Jérôme Los, et à nouveau Christine Lescop, Athanase Papadopoulos et Bertold Wiest pour avoir accepté de constituer mon jury de thèse.

De grands mercis au personnel de l'IMB, à Sylvie Vottier et Maxence Antonczyk, toujours très disponibles, qui ont su adoucir le contact entre le matériel informatique et moi-même. D'immenses mercis à Caroline Singvorada, Béatrice Casas, Anissa Bellaassali et Gladys Sion pour leur soutien, leur prévenance, et leur indulgence à mon égard. Elles n'ont cessé de me faciliter mon travail, moi qui ait malheureusement bien souvent compliqué le leur ! Pardon et merci ! Un grand merci par avance à Véronique de Biasio, à la reprographie, qui m'a accueilli et conseillé si gentiment avant de se lancer dans l'impression de cette thèse ! Et enfin merci à Pierre Blatter et à la bibliothèque pour leur accueil amical et leur disponibilité.

Merci à toute l'équipe du GDR tresses pour son accueil, sa convivialité, les multiples invitations à exposer, les discussions toujours enrichissantes, les dîners, les parties de cartes... Merci en particulier aux organisateurs Patrick Dehornoy, Luis Paris, Christian Blanchet, Michel Boileau, Athanase Papadopoulos et Christian Bonatti.

Je souhaite également remercier très chaleureusement Michael Eisermann pour sa très grande disponibilité chaque fois que je lui ai demandé de l'aide ou des conseils, et son intérêt pour mon parcours mathématique depuis l'ENS.

Merci enfin à tous ceux qui m'ont soutenu et qui ont cru en moi, tout spécialement mes parents et Virginie ; merci à Julien et Alexander pour leurs encouragements incessants depuis dix ans, à Nikolaz et Isolde pour m'avoir offert entre autres quelques années de culture mathématique

et non mathématique, à Loïc et Marie qui eux non plus n'ont cessé de me soutenir durant mon doctorat en me répétant leur confiance, en m'hébergeant dès que nécessaire et en me proposant moult activités ludiques salvatrices. Un grand merci également à René Martel, mon ancien professeur de maths spé, pour ses conseils, ses encouragements et son amitié.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Présentation des principales notions	9
1.2	Enoncés des théorèmes	11
1.3	Plan	12
1.4	Corollaires	13
1.4.1	Injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group	13
1.4.2	Morphismes entre groupes de tresses.	14
1.4.3	Morphismes entre mapping class groups	15
1.4.4	Morphismes du mapping class group dans lui-même.	20
I	PRÉLIMINAIRES	21
2	Surfaces, courbes et sous-surfaces	21
2.1	Classes d'isotopie d'ensemble de courbes	22
2.2	Définitions	26
3	Mapping class group	31
3.1	Les différentes définitions du mapping class group et les liens entre elles	31
3.2	Les twists de Dehn	32
3.3	Les mapping classes périodiques	37
3.3.1	Les mapping classes périodiques dans les surfaces à bord	38
3.3.2	Ordre maximal des mapping classes et groupes finis en fonction de la surface.	41
3.4	Les mapping classes pseudo-Anosov	44
3.5	Théorie des difféomorphismes pseudo-Anosov.	45
3.6	Théorie de Thurston, système de réduction essentiel	49
4	Groupes de tresses	57
4.1	Le groupe de tresses vu de façon géométrique	57
4.2	Le groupe de tresses en tant que groupe d'Artin	58
4.3	Le groupe de tresses en tant que mapping class group d'un disque pointé; les twists de tresses	61
4.4	Le groupe de tresses en tant que mapping class group symétrique; un plongement de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$	63
II	MORPHISMES GÉOMÉTRIQUES DU GROUPE DE TRESSES ET COROLLAIRES	71
5	Les morphismes entre groupe de tresses et mapping class group, le théorème 1	73
5.1	Morphismes cycliques, morphismes de monodromie et transvections	73
5.2	Enoncé du théorème principal	76
5.3	Passage de $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{P}\mathcal{M}od(\Sigma))$ à $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma))$	76
5.4	Transvections de morphismes de monodromie	80

6	Corollaires du théorème 1	83
6.1	Injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group	83
6.2	Morphismes entre groupes de tresses.	87
6.3	Morphismes entre mapping class groups	92
6.4	Morphismes du mapping class group dans lui-même.	118
III DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL		123
7	Morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group d'une surface de genre nul ; courbes péripériques	125
7.1	Morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group d'une surface de genre nul	126
7.2	Courbes péripériques	126
8	Morphismes irréductibles de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ avec $n \geq 6$	131
8.1	Cardinaux de sous-groupes abéliens de $\rho(\mathcal{B}_n)$	131
8.2	Morphismes périodiques de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$, $b \geq 0$	136
8.3	Morphismes pseudo-Anosov de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$, $b \geq 0$	139
9	Propriétés des courbes de $\sigma(\mathcal{G})$; les courbes spéciales $\sigma_s(\mathcal{G})$	143
9.1	Plan du chapitre et résultats démontrés	143
9.2	Action de \mathcal{B}_n sur les simplexes de courbes	145
9.3	Particularités de l'action de \mathcal{J} sur \mathcal{G}	148
9.4	Partition de $\sigma(\mathcal{G})$: la proposition 9.4	161
9.5	Résultats de stabilité et existence des courbes spéciales	162
9.6	Ce qu'il faut retenir des courbes normales et spéciales	165
10	Les courbes spéciales ne sont pas séparantes	167
10.1	Plan du chapitre et résultats démontrés	167
10.2	Le sous-groupe \mathcal{H} de \mathcal{B}_n et son action sur le sous-ensemble \mathcal{X} de \mathcal{G}	167
10.3	Démonstration de la proposition 10.1	168
11	Description de $\sigma(\mathcal{X})$ dans Σ	175
11.1	Plan du chapitre et résultats démontrés	175
11.2	Action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} et \mathcal{H} -colorations	177
11.3	Description du plongement de $\sigma_s(\mathcal{X})$ dans Σ	179
11.4	Description de $\sigma_n(\mathcal{G})$ et de $\sigma(\mathcal{X})$ dans Σ	186
12	Expression des mapping classes de \mathcal{G}	191
12.1	Plan du chapitre et résultats démontrés	191
12.2	Le morphisme $\widehat{\rho}$ est une transvection de morphisme de monodromie	192
12.3	Le morphisme ρ est une transvection de morphisme de monodromie	199
13	Démonstration du théorème 1	203
14	Discussion sur les hypothèses du théorème 1	205
14.1	Cas où $n = 3$ et $\Sigma = \Sigma_{1,1}$	205
14.2	Cas où $n = 3$ et $\Sigma = \Sigma_{1,b}$ avec $b \geq 2$	206
14.3	Cas où $n = 4$	207
14.4	Cas où $n = 5$	209

14.5 Lorsque l'entier g est supérieur à $\frac{n}{2}$	209
---	-----

IV BIBLIOGRAPHIE	211
-------------------------	------------

15 Bibliographie	211
-------------------------	------------

1 Introduction

1.1 Présentation des principales notions

Le mapping class group

Le *mapping class group* $\mathcal{M}od(\Sigma)$ d'une surface Σ non nécessairement connexe est l'ensemble des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ préservant l'orientation : $\mathcal{M}od(\Sigma) = \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma))$. Le mapping class group est parfois appelé *groupe de difféotopies*. Si Σ n'est pas connexe, les mapping classes de $\mathcal{M}od(\Sigma)$ peuvent permuter les composantes connexes de Σ .

Donnons les principales définitions dérivées de cette dernière (cette liste sera reprise et complétée au chapitre 3, paragraphe 3.1) :

- Le *mapping class group de Σ étendu* noté $\mathcal{M}od^\diamond(\Sigma)$ est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ ne préservant éventuellement pas l'orientation de Σ ; lorsque Σ est connexe, $\mathcal{M}od(\Sigma)$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{M}od^\diamond(\Sigma)$ d'indice 2.
- Le *mapping class group de Σ préservant chaque composante connexe et chaque composante de bord*, noté $\mathcal{P}\mathcal{M}od(\Sigma)$, est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ (préservant l'orientation et) préservant globalement chaque composante de bord.
- Le *mapping class group de Σ relativement au bord*, noté $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$, est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ (préservant l'orientation et) fixant $\partial\Sigma$ point par point à tout temps, les isotopies étant elles-mêmes assujetties à fixer les bords points par points.
- Le cas échéant, on introduira dans le corps du texte d'autres définitions du mapping class group, dérivées de celles-ci.

Tout au long de cette thèse, $\Sigma_{g,b}$ désigne la surface connexe, orientable, de genre g , possédant b composantes de bord, où g et b sont tels que la surface $\Sigma_{g,b}$ soit de caractéristique d'Euler strictement négative. De plus, pour alléger les énoncés, on écrira souvent :

« Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ »

au lieu de :

« Soient g et b deux entiers positifs ou nuls tels que $2 - 2g - b \leq -1$ et soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ ».

Les résultats portant sur les mapping classes groups seront toujours donnés dans un premier temps pour $\mathcal{P}\mathcal{M}od(\Sigma)$ et dans un deuxième temps pour $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Contexte historique

L'étude des mapping class groups a débuté en 1920 avec M. Dehn [De1], [De2] et J. Nielsen [Ni1], [Ni2], [Ni3]. Bien que leurs travaux portaient sur des sujets communs, en général, leurs approches étaient différentes. M. Dehn s'intéressait au mapping class group en tant que groupe, s'attaquant par exemple aux problèmes de présentation de type fini du mapping class group. Dans cette direction, il développa puis exploita un outil fondamental : l'action du mapping class group sur l'ensemble des classes d'isotopie de courbes de la surface.

A l'opposé, J. Nielsen s'est davantage intéressé aux éléments du mapping class group pris un à un. Son principal outil a été la géométrie hyperbolique (un aspect que M. Dehn a également utilisé).

Pendant quelques temps, les idées de M. Dehn et J. Nielsen ont été oubliées. Puis dans les années soixante-dix, W. Harvey [Hv1], [Hv2] poursuivit les travaux de M. Dehn en introduisant le complexe de courbes qui n'est rien d'autre que l'ensemble des classes d'isotopie de courbes étudié par M. Dehn auquel W. Harvey ajoute une structure de complexe simplicial. Un objet

très similaire a été introduit dans un article de 1980 de A. Hatcher et W. Thurston [HaTh], qui eut alors une grande portée. Toujours vers la fin des années soixante-dix, Les idées de J. Nielsen ont été partiellement redécouvertes, étendues et exposées par W. Thurston dans une forme achevée : la théorie des difféomorphismes des surfaces [TH], [FLP]. Plus tard, sa théorie fut appliquée également à la structure des mapping class groups, dépassant le cadre des éléments pris isolément.

Au début des années 80, J. Birman, A. Lubotzky et J. McCarthy (cf. [BiLuMc]) et d'autre part N.V. Ivanov de façon indépendante (cf. [Iv]) complètent la théorie de Thurston appliquée aux mapping classes groups en définissant *le système de réduction canonique* pour tout sous-groupe abélien du mapping class group, et en particulier pour un élément quelconque du mapping class group. Ce résultat leur permit entre autres de déterminer le rang maximal des sous-groupes abéliens du mapping class group, égal à $3g - 3 + b$ si la surface est connexe, de genre g et ayant b composantes de bord.

Le groupe de tresses

L'une des façons d'avancer dans ce domaine est de chercher d'autres groupes reliés aux mapping class groups et susceptibles d'y être inclus. Considérons le *groupe de tresses à n brins* défini par sa *présentation classique* :

$$\langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \mid \begin{cases} \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ si } |i - j| \neq 1 ; \\ \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j \text{ si } |i - j| = 1 . \end{cases} \rangle$$

Les générateurs de cette présentation seront appelés *générateurs standards du groupe \mathcal{B}_n* . Par extension, si deux éléments a et b dans un groupe vérifient $aba = bab$, on dit que a et b vérifient une *relation de tresses*.

Représentations géométriques

De façon générale, on parlera de *représentations géométriques d'un groupe*, notamment du groupe de tresses, pour désigner les morphismes de ce groupe dans le mapping class group. Le but de cette thèse est de déterminer toutes les représentations géométriques de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_g, b)$, lorsque b est quelconque et n et g sont liés par la relation :

$$g \leq \frac{n}{2}.$$

Une famille de mapping classes joue un rôle particulier dans la description des représentations de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_g, b)$: les *twists de Dehn*.

Les twists de Dehn

Etant donnée a une courbe dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ non homotope à un point, soient \mathcal{V} un voisinage tubulaire compact de a dans Σ et ϕ un homéomorphisme positif allant du voisinage tubulaire compact \mathcal{V} de a dans l'anneau $\mathbb{A} = [0, 1] \times S^1$ muni de l'orientation produit. Définissons l'homéomorphisme

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} = [0, 1] \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{A} = [0, 1] \times S^1 \\ (t, e^{i\theta}) & \longmapsto & (t, e^{i(\theta+2\pi t)}) \end{array} .$$

Le *twist de Dehn le long de la courbe a* , noté T_a , est la classe d'isotopie de l'homéomorphisme valant l'identité hors du voisinage tubulaire \mathcal{V} et valant $\phi^{-1}D\phi$ sur \mathcal{V} . Puisque ϕ est unique à isotopie près, T_a est bien défini (cf. figure 1). De plus, il suffit de définir la courbe a à isotopie près pour que T_a soit bien défini. Par abus de langage, lorsque d est un bord de Σ , on parlera de *twists de Dehn le long de la courbe d* pour désigner un twist de Dehn le long d'une courbe homotope à d , incluse dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma$.

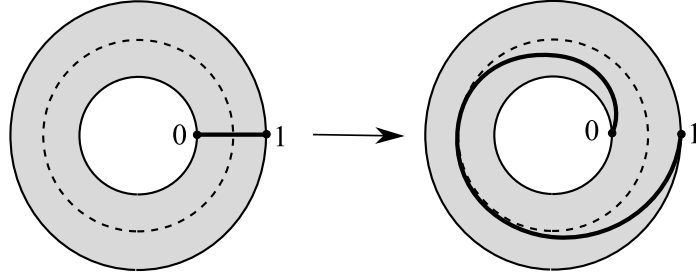


FIG. 1 – Définition du twist de Dehn (gauche).

Les twists de Dehn vérifient les propriétés suivantes bien connues (cf. par exemple [FaMa], section 2.3) :

Lemme 1.1. *Etant données a et b deux courbes non homotopes à un point et non isotopes entre elles, T_a et T_b commutent si et seulement s'il existe deux courbes disjointes a' et b' isotopes à a et b ; d'autre part T_a et T_b vérifient une relation de tresse si et seulement s'il existe deux courbes a' et b' isotopes à a et b et ayant entre elles une intersection réduite à un point. \square*

On va montrer que toutes les représentations géométriques de \mathcal{B}_n dont l'image n'est pas cyclique s'expriment à partir des *représentations de monodromie*.

1.2 Enoncés des théorèmes

Représentations cycliques de \mathcal{B}_n et représentations de monodromie de \mathcal{B}_n

Définition 1.2 (Représentation cyclique de \mathcal{B}_n).

On appelle *représentation (ou morphisme) cyclique de \mathcal{B}_n* dans un groupe quelconque G tout morphisme de \mathcal{B}_n dans G dont l'image est cyclique.

Il est facile de voir qu'une représentation de \mathcal{B}_n est cyclique si et seulement si tous les générateurs standards de \mathcal{B}_n ont la même image.

Définition 1.3 (Représentation de monodromie de \mathcal{B}_n).

On appelle *représentation (ou morphisme) de monodromie de \mathcal{B}_n* une représentation géométrique de \mathcal{B}_n (donc un morphisme dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$) qui envoie les différents générateurs standards de \mathcal{B}_n sur des twists de Dehn distincts.

En vertu du lemme 1.1, une représentation de monodromie \mathcal{B}_n est équivalente à la donnée d'une liste ordonnée de $n - 1$ courbes $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ telle que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$, a_i et a_j sont disjointes lorsque $|i - j| \neq 1$, et a_i et a_j s'intersectent en exactement un point lorsque $|i - j| = 1$.

Prenant $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ ou $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ pour définitions du mapping class group, les questions auxquelles on se propose de répondre sont les suivantes :

- Quels sont les groupes de tresses inclus dans le mapping class group d'une surface donnée ?

- Comment ces groupes de tresses sont-ils plongés ?
- Qu'en est-il des morphismes non nécessairement injectifs entre groupes de tresses et mapping class group ?

On répond partiellement à ces questions, en traitant le cas où le nombre de brins n du groupe de tresses et le genre g de la surface Σ sont liés par la relations $g \leq \frac{n}{2}$. On répond d'abord à la troisième question par les théorèmes 1 et 2 (ci-dessous), dont les énoncés font appel à la notion de *transvection*.

Définition 1.4 (Transvection d'une représentation de \mathcal{B}_n).

Soient n un entier supérieur ou égal à 3, G un groupe quelconque, ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans G , et w un élément du centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans G . La *transvection du morphisme ρ de direction w* est le morphisme $L_w(\rho)$ défini sur les générateurs standards $\{\tau_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ du groupe de tresses par :

$$L_w(\rho)(\tau_i) = \rho(\tau_i) w.$$

Théorème 1 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ avec $n \geq 6$).

Soient n un entier supérieur ou égal à 6, Σ une surface (connexe, orientable, de caractéristique strictement négative), g son genre et b son nombre de composantes de bord, tels que $b \geq 0$ et $g \leq \frac{n}{2}$. Alors tout morphisme ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est soit cyclique, soit une transvection de morphisme de monodromie. De plus de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

Ce résultat subsiste en considérant $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ plutôt que $\mathcal{PMod}(\Sigma)$:

Théorème 2 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ avec $n \geq 6$).

Soient n un entier supérieur ou égal à 6, Σ une surface (connexe, orientable, de caractéristique strictement négative), g son genre et b son nombre de composantes de bord, tels que $b \geq 0$ et $g \leq \frac{n}{2}$. Alors tout morphisme $\tilde{\rho}$ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est soit cyclique, soit une transvection de morphisme de monodromie. De plus de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

Remarque. Cette façon systématique de chercher les morphismes entre le groupe de tresses et un autre type de groupe a déjà été amorcé par E. Artin (cf. [At3]) et V. Lin (cf. [Ln2]), où le groupe image est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Artin avait étudié les morphismes de \mathcal{B}_n dans \mathfrak{S}_k avec $k \leq n$, et Lin a poursuivi l'étude pour obtenir une description complète des morphismes de \mathcal{B}_n dans \mathfrak{S}_k avec $k \leq 2n$.

1.3 Plan

Cette thèse se divise en trois parties :

Partie 1 : Chapitres 2-4.

C'est une partie de préliminaires où l'on présente les objets et les principaux outils que nous utiliserons. On y a rassemblé des résultats généraux sur les classes d'isotopie de courbes et de surfaces (chapitre 2), sur les mapping class groups (chapitre 3) et sur les groupes

de tresses (chapitre 4). De nombreux résultats présentés dans cette partie sont connus des experts, mais sont absents de la littérature ; certains sont adaptés ou complétés ; d'autres sont nouveaux. Le lecteur habitué aux mapping class groups pourra par exemple sauter ces préliminaires, et y revenir ponctuellement lorsqu'on y fera référence.

Partie 2 : Chapitres 5-6.

Ces deux chapitres présentent les corollaires du théorème principal, le théorème 1. Plus précisément, le chapitre 5 définit différents types de morphismes géométriques du groupes de tresses et établit des liens entre eux, de façon à poser le bon cadre pour le chapitre 6. Et ce sera dans ce chapitre-là que seront énoncés et prouvés les corollaires du théorème 1.

Partie 3 : Chapitres 7-13.

C'est la partie principale de cette thèse. On y démontre le théorème 1. Dans un premier temps, on ne prouve ce théorème que dans le cas où n est pair, puis on en déduit le résultat général. L'outil principal de la preuve est l'étude des systèmes de réduction canonique (cf. définitions 3.37 et 3.39) des images des générateurs standards de \mathcal{B}_n dans le mapping class group, et l'action simultanée de \mathcal{B}_n sur lui-même et sur ces systèmes de courbes.

1.4 Corollaires

Après avoir énoncé les théorèmes 1 et 2, présentons leurs corollaires. Ils sont nombreux. On a choisi de les répartir ainsi :

- l'injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans les différents mapping class groups $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$;
- les morphismes de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m avec $m \leq n + 1$;
- les morphismes entre les mapping class groups de deux surfaces éventuellement différentes ;
- les morphismes du mapping class group d'une surface dans lui-même et les automorphismes.

Les résultats que l'on va énoncer se rapprochent des théorèmes de Ivanov et McCarthy, Bell et Margalit, Dyer et Grossman. L'un des intérêts de cette thèse est de les réunir derrière un unique résultat principal dont ils sont des corollaires. Ce faisant, on fait le lien entre les endomorphismes de \mathcal{B}_n , et les endomorphismes du mapping class group. On aura à cœur d'expliquer les différences entre nos résultats et les théorèmes déjà existants. De façon générale, nos résultats concernent les morphismes sans restriction alors que les résultats déjà existants ne considèrent que les morphismes injectifs.

1.4.1 Injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group

La première question naturelle venant à la suite des énoncés des théorèmes 1 et 2 consiste à demander quels sont les morphismes injectifs parmi ceux décrits.

Définition 1.5 (La surface $\Sigma(\rho)$ incluse dans Σ).

Soit ρ une transvection de morphisme de monodromie de \mathcal{B}_n dans le mapping class group d'une surface Σ . Il existe alors une $(n - 1)$ -chaîne de courbes $(a_i, 1 \leq i \leq n - 1)$ dans Σ , un entier $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et une mapping class W de Σ fixant chaque courbe a_i de sorte que W commute avec

T_{a_i} pour tout i et que l'on ait $\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon W$ pour tout i . On note $\Sigma(\rho)$ le voisinage tubulaire de la réunion $\bigcup_{i \leq n-1} a_i$.

La surface $\Sigma(\rho)$ va nous permettre de caractériser l'injectivité des transvections de morphismes de monodromie.

Théorème 3 (Injectivité des morphismes du groupe de tresses dans le mapping class group). *Soient n un entier supérieur ou égal à 6 et Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ avec $g \leq \frac{n}{2}$. Soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ ou dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$.*

i) Cas de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Le morphisme ρ est injectif si et seulement s'il est une transvection de morphisme de monodromie telle que les courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ ne bordent pas de disque dans Σ .

ii) Cas de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. Le morphisme ρ est injectif si et seulement s'il est une transvection de morphisme de monodromie telle que les courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ ne bordent pas de disque dans Σ et au moins l'une des courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ n'est isotope à aucune courbe de bord de Σ .

1.4.2 Morphismes entre groupes de tresses.

L'un des corollaires du théorème 1 est la description des morphismes de \mathcal{B}_n dans lui-même. Les premiers à avoir énoncé un théorème allant dans ce sens ont été Dyer et Grossman en 1981. Ils ont en effet déterminé le groupe des automorphismes extérieurs du groupe de tresses. Nous redémontrons ce théorème pour $n \geq 6$.

Théorème 1.6 (Dyer & Grossman, [DyGr], 1981).

Pour tout entier n supérieur ou égal à 4, le groupe $\text{Out}(\mathcal{B}_n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

En 2000, R.Bell et D.Margalit (cf. [BeMa]) ont poussé l'étude aux morphismes injectifs du groupe de tresses \mathcal{B}_n dans lui-même et dans \mathcal{B}_{n+1} . La description de ces morphismes nécessite la définition de l'involution Inv ci-dessous. On donne à la suite l'énoncé de leur théorème.

Notation 1.7 (L'involution Inv).

Etant donné le groupe \mathcal{B}_n muni de sa présentation standard, l'automorphisme involutif qui envoie chaque générateur standard sur son inverse sera noté Inv .

Théorème 1.8 (R.Bell & D.Margalit, [BeMa], 2000).

Soient n un entier supérieur ou égal à 4, m un entier égal à n ou $n + 1$, et ρ un morphisme injectif de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m . Alors l'un des deux morphismes ρ ou $\text{Inv} \circ \rho$ est une transvection (de la restriction de \mathcal{B}_m à \mathcal{B}_n si $m = n + 1$) d'automorphisme intérieur de \mathcal{B}_m .

Leur preuve s'appuie sur une caractérisation algébrique des twists de tresses qui utilise le maximum des rangs des sous-groupes abéliens du groupe \mathcal{B}_n et de son image par le morphisme considéré. Leur preuve exige donc que les morphismes étudiés soient injectifs. Nous montrons pour notre part (cf. le théorème 4 ci-dessous) que *tous* les morphismes non cycliques de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m où $m \in \{n, n + 1\}$ sont de la forme annoncée par R.Bell et D.Margalit. Au passage, nous redémontrons le théorème suivant dû à Lin en 1982, cf. [Ln1] page 765 : si m est strictement inférieur à n , les morphismes de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m se résument aux morphismes cycliques.

L'énoncé du théorème 4 fait référence à un élément noté Δ de \mathcal{B}_n . Il est défini par $\Delta = \tau_1(\tau_2\tau_1)(\tau_3\tau_2\tau_1)\dots(\tau_{n-1}\dots\tau_2\tau_1)$ et son carré engendre le centre de \mathcal{B}_n (cf. la définition 4.6 et le théorème 4.7).

Théorème 4 (Morphismes entre groupes de tresses).

Soit n un entier supérieur ou égal à 6.

i) Tout morphisme φ de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m avec $m < n$ est cyclique.

ii) Tout morphisme φ non cyclique de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_n est une transvection d'automorphisme intérieur composée éventuellement par l'involution Inv : il existe $\gamma, v \in \mathcal{B}_n$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que pour tout entier i inférieur ou égal à $n - 1$, on ait :

$$\varphi(\tau_i) = \gamma \tau_i^\varepsilon \gamma^{-1} v.$$

De plus, v est un multiple de Δ^2 .

iii) Considérons le groupe \mathcal{B}_n comme le sous-groupe de \mathcal{B}_{n+1} engendré par les $n - 1$ premiers générateurs standards de \mathcal{B}_{n+1} . Alors, tout morphisme φ de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_{n+1} est à transvection près la restriction à \mathcal{B}_n d'un morphisme de \mathcal{B}_{n+1} dans lui-même. D'après le ii), si φ n'est pas cyclique, il existe donc $\gamma, v \in \mathcal{B}_{n+1}$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que pour tout entier i inférieur ou égal à $n - 1$, on ait :

$$\varphi(\tau_i) = \gamma \tau_i^\varepsilon \gamma^{-1} v.$$

De plus, v appartient au centralisateur de $\{\gamma \xi \gamma^{-1}, \xi \in \mathcal{B}_n\}$ dans \mathcal{B}_{n+1} .

iv) Tous les morphismes non cycliques ci-dessus sont injectifs.

1.4.3 Morphismes entre mapping class groups

Les théorèmes 1 et 2 permettent également de déduire des résultats concernant les morphismes entre mapping class groups. Le premier résultat dans ce sens est le théorème de N.V.Ivanov et J.McCarthy, datant de 1999 :

Théorème 1.9 (Ivanov & McCarthy, [IvMc], 1999).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $(g', b') \neq (2, 0)$, et telles que l'inégalité

$$|(3g - 3 + b) - (3g' - 3 + b')| \leq 1$$

ait lieu. S'il existe un morphisme injectif ρ de $\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma')$, alors Σ' est homéomorphe à Σ et ρ est un automorphisme induit par un difféomorphisme de Σ dans Σ' ne préservant pas forcément l'orientation.

Ils ont également complété ce théorème lorsque $(g', b') = (2, 0)$ et ont traité de nombreux cas lorsque $g = 1$. Ce théorème contient la *cohopfianité* de $\text{Mod}(\Sigma)$ (i.e. tout morphisme injectif de $\text{Mod}(\Sigma)$ dans lui-même est un automorphisme) et le calcul des automorphismes extérieurs de $\text{Mod}(\Sigma)$. Leur preuve est basée sur une caractérisation algébrique des twists de Dehn qui n'est possible que si les maxima des rangs des sous-groupes abéliens de $\text{Mod}(\Sigma)$ et $\text{Mod}(\Sigma')$ diffèrent au plus d'un. La preuve exige de plus que les morphismes considérés respectent ces rangs et doivent donc être injectifs.

Plutôt que d'utiliser le rang de sous-groupes abéliens plongés dans le mapping class group, nous avons utilisé de plongements de groupes de tresses dans le mapping class group. La proximité

(encore bien mystérieuse) entre les groupes de tresses et les mapping class groups explique la force de notre méthode : nous nous affranchissons de l'hypothèse d'injectivité en traitant le cas de tous les morphismes, et nous ne plaçons de borne que sur le genre, pas sur le nombre de composantes de bord. Il est intéressant de comparer les résultats d'Ivanov et McCarthy et les nôtres.

Résultats d'Ivanov et McCarthy (1999) non couverts dans cette thèse :

- Pour tout entier positif m et pour ε valant 0 ou 1, il n'existe pas de morphismes injectifs de $\mathcal{M}od(\Sigma_{g,b+3m})$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma_{g+m,b+\varepsilon})$, où $g \geq 2$ et $b \geq 0$. Il est remarquable que les hypothèses autorisent le genre de la surface à l'arrivée à être arbitrairement grand par rapport au genre de la surface de départ !
- Les éléments des mapping class group considérés peuvent permuter les composantes de bord.

Nos résultats (2009) non couverts par Ivanov et McCarthy :

- Description complète des morphismes $\mathcal{M}od(\Sigma_{g,b}, \partial\Sigma_{g,b})$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma_{g',b'}, \partial\Sigma_{g',b'})$ lorsque $g' < g$ et $g \geq 2$, et quels que soient b et b' . En particulier, tous ces morphismes sont triviaux ou cycliques.
- Description complète des morphismes de $\mathcal{M}od(\Sigma_{g,b}, \partial\Sigma_{g,b})$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma_{g',b'}, \partial\Sigma_{g',b'})$ lorsque $g' = g$ ou $g' = g + 1$, et $g \geq 2$, et quels que soient b et b' . Dans ces cas-là, il existe des morphismes non cycliques dont certains (bien déterminés) sont injectifs.
- On prouve également ces résultats dans le cas où les éléments du mapping class group préservent chaque composante de bord globalement.

Plus précisément, dans cette thèse, nous étudions les morphismes entre deux mapping class groups associés à deux surfaces Σ et Σ' de genres g et g' tels que $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$, et de nombres de bords b et b' quelconques. On décrira ainsi les ensembles suivants :

- tous les morphismes de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ (cf. théorèmes 5 et 6),
- tous les morphismes de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}Mod(\Sigma')$ (cf. théorèmes 7 et 8),
- tous les morphismes injectifs de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ (cf. théorème 9),
- tous les morphismes injectifs de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}Mod(\Sigma')$ (cf. théorème 10).

A l'instar de Ivanov et McCarthy, nous montrerons essentiellement que les morphismes non triviaux entre mapping class groups sont *induits par des plongements* (le résultat est toutefois légèrement différent lorsque le genre de la surface Σ vaut 2). Précisons ce que nous entendons par là :

Définition 1.10 (Morphisme de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ induit par un plongement, conjugaison extérieure).

Soient deux surfaces Σ et Σ' connexes (munies d'une orientation). Soit F la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' pouvant ne pas respecter les orientations de Σ et Σ' , et soit Σ'' la sous-surface de Σ' image de Σ par F . Notons \bar{F} un représentant de F ; \bar{F} est un difféomorphisme de Σ dans Σ'' . Pour toute mapping class A de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ et tout représentant \bar{A} de A dans $\text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$, le produit $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ préserve l'orientation de Σ'' et induit l'identité sur $\partial\Sigma''$ ($= \bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}(\partial\Sigma)$), donc $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ appartient à $\text{Diff}^+(\Sigma'', \partial\Sigma'')$. La classe d'isotopie de $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma'', \partial\Sigma'')$ ne dépend que de F et A . Or il existe un prolongement canonique de $\mathcal{M}od(\Sigma'', \partial\Sigma'')$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$. Notons $\text{Ad}_F(A)$ l'image de la classe d'isotopie de $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ par ce prolongement. L'application Ad_F ainsi définie

$$\text{Ad}_F : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma') \\ A & \longmapsto & \text{Ad}_F(A) \end{array}$$

est un morphisme de groupes. Un tel morphisme sera appelé *le morphisme de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ induit par le plongement F* . Insistons sur le fait que rien n'est supposé sur le plongement F : l'image par F d'une courbe de bord de Σ peut border un disque dans Σ' , ou encore les images par F de deux courbes de bord de Σ peuvent être isotopes dans Σ' . De plus, ce plongement peut ne pas respecter les orientations de Σ et Σ' .

Lorsque $\Sigma'' = \Sigma'$, on peut identifier Σ' et Σ de sorte que le plongement F devienne un élément de $\mathcal{M}od^\diamond(\Sigma)$. Le morphisme obtenu Ad_F est alors un automorphisme de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$. Dans ce cas, Ad_F sera appelé *conjugaison extérieure par F* .

Avant de passer à l'énoncé des théorèmes décrivant l'ensemble des morphismes entre les différents mapping class groups, nous posons quelques définitions. Nous justifierons au chapitre 6 celles qui nécessitent de l'être.

Définition 1.11 (Involution hyper-elliptique).

Soit Σ la surface fermée de genre 2. Soit \bar{H} la rotation d'angle π autour de l'axe δ sur la figure 34. Notons H la classe d'isotopie de \bar{H} . Cette mapping class est appelée *l'involution hyper-elliptique de $\mathcal{M}od(\Sigma)$* .

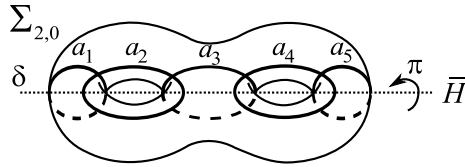


FIG. 2 – La mapping class H de $\mathcal{M}od(\Sigma_{2,0})$.

Définition 1.12 (Morphismes cycliques du mapping class group de $\Sigma_{2,b}$).

Un morphisme de $\mathcal{M}od(\Sigma_{2,b})$, où $b \geq 0$, dans un groupe quelconque est dit *cyclique* si son image est cyclique.

Définition 1.13 (Transvection d'un morphisme du mapping class group dans un groupe).

Soit Σ une surface de genre 2, soit \mathcal{M} l'un des mapping class groups $\mathcal{P}\mathcal{M}od(\Sigma)$ ou $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$, soit G un groupe. Pour tout morphisme Ψ de \mathcal{M} dans G et pour tout élément g appartenant au centralisateur de $\Psi(\mathcal{M})$ dans G tel que $g^{10} = 1_G$, on appellera *transvection de Ψ de direction g* le morphisme Ψ' qui associe à tout twist de Dehn T_a le long d'une courbe non séparante a l'image $\Psi(T_a)g$.

Cette définition est cohérente comme nous le verrons au lemme 6.10. Une transvection de direction 1_G d'un morphisme est égale à ce morphisme.

Nous pouvons passer aux énoncés des théorèmes. Nous traitons d'abord le cas des mapping class groups relativement au bord. Le théorème suivant est un théorème d'existence de morphismes non triviaux entre mapping class groups. Il est complété par un second théorème précisant la situation en cas d'existence de morphismes non triviaux.

Théorème 5 (Existence de morphismes non triviaux et non cycliques de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$.

- Lorsque $g = 2$ et seulement dans ce cas-là, il existe des morphismes cycliques non triviaux de $\mathcal{M}od(\Sigma_{2,b}, \partial\Sigma_{2,b})$ dans n'importe quel mapping class group admettant un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
- Lorsque $g \geq 2$, il existe des morphismes non cycliques de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ si et seulement si l'une des deux conditions est vérifiée : $b \neq 0$ et $g' \geq g$, ou bien $b = 0$ et Σ' est homéomorphe à Σ .

Voici le théorème principal sur les morphismes de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$. L'énoncé tient compte des restrictions d'existence des morphismes non cycliques de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ évoquées dans le théorème 5.

Théorème 6 (Morphismes de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \in \{g, g + 1\}$, et telles que $\Sigma' = \Sigma$ si $b = 0$. Tout morphisme non cyclique de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ est un morphisme induit par la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' , ou éventuellement une transvection de direction H (l'involution hyper-elliptique de $\mathcal{M}od(\Sigma_{2,0})$) d'un tel morphisme si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$. En particulier, si $b = 0$, le morphisme induit par la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' (à transvection près dans le cas mentionné ci-dessus) est une conjugaison extérieure.

Passons maintenant aux morphismes de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}Mod(\Sigma')$. Ceux-là aussi peuvent dans la plupart des cas s'exprimer simplement à partir de *morphismes induits par un plongement*. Il nous faut d'abord définir ce terme dans le cas des morphismes de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}Mod(\Sigma')$.

Définition 1.14 (Morphisme de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}Mod(\Sigma')$ induit par un plongement, conjugaison extérieure).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ telles que $g = g'$ et $b \geq b'$. Soit F la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' telle que F envoie les bords de Σ sur des bords de Σ' ou des courbes de Σ' bordant un disque ; dans cette définition, on fera référence à cette condition par le symbole $(*)$. Précisons que F peut ne pas respecter les orientations de Σ et Σ' . Soit Σ'' la sous-surface de Σ' image de Σ par F . Notons \bar{F} un représentant de F ; \bar{F} est un difféomorphisme de Σ dans Σ'' . Pour toute mapping class A de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ et tout représentant \bar{A} de A dans $\text{Diff}^+(\Sigma)$, le produit $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ préserve l'orientation de Σ'' , donc $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ appartient à $\text{Diff}^+(\Sigma'')$. Puisque $g = g'$, $b \geq b'$ et d'après $(*)$, le complémentaire de Σ'' dans Σ' est une réunion disjointe de disques. Donc d'après le lemme d'Alexander, $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ induit canoniquement à isotopie près un difféomorphisme de Σ' . Notons $\text{Ad}_F(A)$ la classe d'isotopie de ce difféomorphisme. Et puisque \bar{A} préserve les bords de Σ , $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ préserve les bords de Σ'' , or d'après $(*)$, l'ensemble des bords de Σ' est inclus dans l'ensemble des bords de Σ'' , donc les bords de Σ' sont préservés par $\text{Ad}_F(A)$. Finalement, $\text{Ad}_F(A)$ appartient à $\mathcal{P}Mod(\Sigma')$. L'application Ad_F ainsi définie

$$\text{Ad}_F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}Mod(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{P}Mod(\Sigma') \\ A & \longmapsto & \text{Ad}_F(A) \end{array}$$

est un morphisme de groupes. Un tel morphisme sera appelé *le morphisme de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}Mod(\Sigma')$ induit par le plongement F* .

Lorsque $\Sigma' = \Sigma$, d'après (*), il vient que $\Sigma'' = \Sigma'$, donc la classe d'isotopie F est inversible. Donc dans ce cas, F est un élément de $\text{Mod}^\circ(\Sigma)$. Le morphisme obtenu Ad_F est alors un automorphisme de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ que l'on appellera *conjugaison extérieure par F* .

Dans le cas des mapping class groups où les composantes de bord ne sont plus fixées point par point mais seulement préservées, l'analogie des théorèmes 5 et 6 sont les théorèmes 7 et 8.

Théorème 7 (Existence de morphismes non triviaux et non cycliques de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$.

- Lorsque $g = 2$ et seulement dans ce cas-là, il existe des morphismes cycliques non triviaux de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{2,b})$ dans n'importe quel mapping class group admettant un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
- Lorsque $g \geq 2$, il existe des morphismes non cycliques de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ si et seulement si $g' = g$ et $b' \leq b$.

Conformément à cet énoncé, l'étude des morphismes non triviaux et non cycliques de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ lorsque $g' \leq g + 1$ se réduit à l'étude des morphismes de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ lorsque $g' = g$ et $b' \leq b$. C'est l'objet du théorème 8 ci-dessous.

Théorème 8 (Morphismes de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$, $g' = g$ et $b' \leq b$. Soit Ψ un morphisme non cyclique de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$. Alors il existe un plongement F de Σ dans Σ' tel que

$$F(\text{Bord}(\Sigma)) \cap \text{Courb}(\Sigma') = \emptyset$$

et tel que Ψ soit le morphisme Ad_F induit par le plongement F , ou éventuellement la transvection par H (cf. définition 1.11) du morphisme Ad_F si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$.

Parmi tous ces morphismes entre mapping class groups relativement ou non au bord, on souhaite décrire ceux qui sont injectifs. C'est l'objet des théorèmes 9 et 10.

Théorème 9 (Injections de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$. Alors, un morphisme de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ est injectif si et seulement :

- lorsque $b \neq 0$: s'il est induit, à transvection près lorsque $g = 2$, par un plongement F de Σ dans Σ' tel que F envoie les courbes de $\text{Bord}(\Sigma)$ sur des courbes deux à deux distinctes dans Σ' éventuellement isotopes à des bords de Σ' ,
- lorsque $b = 0$: s'il n'est pas cyclique (il s'agit alors, à transvection près lorsque $g = 2$, d'une conjugaison extérieure avec $\Sigma' = \Sigma$).

Théorème 10 (Injections de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$. Alors, un morphisme de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ est injectif si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- les surfaces Σ et Σ' sont homéomorphes,
- le morphisme est une conjugaison extérieure (i.e. un automorphisme de la forme Ad_F avec $F \in \text{Mod}^\circ(\Sigma)$ cf. définition 6.5), ou éventuellement la transvection d'une conjugaison extérieure lorsque Σ' et Σ sont homéomorphes à $\Sigma_{2,0}$.

1.4.4 Morphismes du mapping class group dans lui-même.

On termine cette étude des morphismes entre mapping class groups en précisant la situation lorsqu'on a la même surface à la source et à l'arrivée. En particulier, on retrouve le théorème d'Ivanov et McCarthy stipulant que $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ est cohopfien (cf. [IvMc]) - en fait, ils ont même démontré que $\text{Mod}(\Sigma)$ était cohopfien (on dit qu'un groupe est *cohopfien* si tous les endomorphismes injectifs de ce groupe sont des automorphismes). On donne également une preuve complète de la cohopfianité de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ (cf. théorèmes 11 et 12). Il est à remarquer que dans le cas des surfaces sans bord, $\text{Mod}(\Sigma)$ possède une propriété beaucoup plus forte qu'être cohopfien, puisque tous les morphismes non triviaux (non cycliques, dans le cas de $\Sigma_{2,0}$) de $\text{Mod}(\Sigma)$ dans lui-même sont des automorphismes (cf. théorème 12). Comme précédemment, compte tenu du centre non trivial de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$, le cas de la surface $\Sigma_{2,0}$ est à part, et fait l'objet d'un théorème indépendant.

Théorème 11 (Cohopfianité de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et structure de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$, où $\Sigma \neq \Sigma_{2,0}$).

Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \geq 2$ et $b \geq 0$ tels que $(g, b) \neq (2, 0)$.

- i) Le mapping class group $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est cohopfien, c'est-à-dire que les injections sont des automorphismes. De plus, lorsque $b = 0$, ce sont tous les morphismes non triviaux de $\text{Mod}(\Sigma)$ qui sont des automorphismes.
- ii) L'application $\text{Ad} : \text{Mod}^\circ(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$ est un isomorphisme.
- iii) Le groupe d'automorphismes extérieurs $\text{Out}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$ de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Sym}(b)$, où $\text{Sym}(b)$ est le groupe symétrique sur b éléments.

Passons au cas de la surface $\Sigma_{2,0}$. Remarquons que le résultat est très différent. En effet, en raison du centre non trivial exceptionnel de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$, le morphisme $\text{Ad} : \text{Mod}^\circ(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma_{2,0}))$ n'est ni injectif, ni surjectif.

Théorème 12 (Cohopfianité de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et structure de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$, où $\Sigma = \Sigma_{2,0}$). Soit Σ la surface $\Sigma_{2,0}$. Rappelons que l'on note H l'involution hyper-elliptique de $\text{Mod}(\Sigma)$ (cf. définition 1.11). Notons également ℓ_H la transvection de direction H (cf. définition 1.13) de l'identité de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma))$. Alors :

- i) Le mapping class group $\text{Mod}(\Sigma)$ est cohopfien. On a même mieux : tous les endomorphismes non cycliques sont des automorphismes.
- ii) Le morphisme ℓ_H de $\text{Mod}(\Sigma)$ est une involution, et toute transvection de direction H d'une conjugaison extérieure coïncide avec le produit (commutatif) de cette conjugaison extérieure par ℓ_H .
- iii) Il existe une involution K de $\text{Mod}^\circ(\Sigma)$ renversant l'orientation. Le sous-groupe de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma))$ engendré par Ad_K et ℓ_H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et ne contient que des automorphismes extérieurs en dehors de l'identité.
- iv) La restriction de la flèche $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma)) \rightarrow \text{Out}(\text{Mod}(\Sigma))$ à $\langle \text{Ad}_K, \ell_H \rangle$ est un isomorphisme. En particulier, $\text{Out}(\text{Mod}(\Sigma)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- v) L'application $\text{Ad} : \text{Mod}^\circ(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma))$ participe à la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \langle H \rangle \rightarrow \text{Mod}^\circ(\Sigma) \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma)) \rightarrow \langle \overline{\ell_H} \rangle \rightarrow 1,$$

où $\overline{\ell_H}$ est l'image de ℓ_H dans le quotient de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma))$ par $\text{Ad}(\text{Mod}^\circ(\Sigma))$.

I. Préliminaires

Cette partie se compose de trois chapitres, présentant les principales notions utiles dans cette thèse : les courbes, surfaces et sous-surfaces au le chapitre 2, le mapping class group au chapitre 3 et les groupes de tresses au chapitre 4.

2 Surfaces, courbes et sous-surfaces

Commençons par la définition de *surface* qu'on utilisera tout au long de cette thèse.

Définition 2.1 (Surfaces).

Une *surface* sera pour nous une variété de dimension 2, compacte, orientable et orientée, dont chaque composante connexe est de caractéristique d'Euler strictement négative, avec ou sans composantes de bord. De plus notons :

- $\partial\Sigma$ le bord topologique de Σ , c'est-à-dire la surface Σ privée de son intérieur ;
- $\text{Comp}(\Sigma)$ l'ensemble des composantes connexes de Σ .

Notation 2.2. Tout au long de cette thèse, $\Sigma_{g,b}$ désigne la surface connexe, orientable, de genre g , possédant b composantes de bord, où g et b sont tels que la surface $\Sigma_{g,b}$ soit de caractéristique d'Euler strictement négative. De plus, pour alléger les énoncés, on écrira souvent :

« Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ »

au lieu de :

« Soient g et b deux entiers positifs ou nuls tels que $2 - 2g - b \leq -1$ et soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ ».

Ce chapitre a pour but de présenter, notamment au paragraphe 2.2, les principaux ingrédients topologiques associés aux surfaces : les courbes et les sous-surfaces. On s'intéressera davantage dans cette thèse aux classes d'isotopie de courbes et de sous-surfaces qu'aux courbes et aux sous-surfaces elles-mêmes. Les définitions qu'on adoptera au paragraphe 2.2 iront dans ce sens. Le paragraphe 2.1 nous sert de préambule : on vérifie que certains objets associés aux courbes et aux sous-surfaces ne dépendent bien que des classes d'isotopie. Les deux résultats principaux de ce paragraphe se trouvent dans les propositions 2.13 et 2.15 du paragraphe 2.2. Elles sont reformulées dans la proposition 2.3 ci-dessous, accessible au lecteur s'étant déjà familiarisé avec les définitions du paragraphe 2.2. On la donne ici en début de chapitre pour qu'elle puisse être retrouvée facilement si le lecteur en ressent le besoin.

Proposition 2.3. *Soit Σ une surface. Etant donné un ensemble de courbes \mathcal{A} , il existe un ensemble de représentants des courbes de \mathcal{A} qui sont en position minimale d'intersection. De plus, si \mathcal{A} est sans intersection triple, un tel ensemble de représentants est unique à isotopie forte près.*

2.1 Classes d'isotopie d'ensemble de courbes

Commençons par définir ce que l'on entend par *courbe* (cf. définition 2.4). Cette définition est provisoire : elle sera remplacée par la définition 2.16 à partir du paragraphe 2.2 ; c'est cette dernière définition que l'on utilisera dans toute cette thèse.

Définition 2.4 (définitions provisoires). Soit Σ une surface.

- Une *courbe* sera pour nous une 1-sous-variété lisse de Σ , compacte, connexe, qui ne borde pas de disque dans Σ .
- Deux courbes a et b sont dites *isotopes* s'il existe un chemin continu de courbes d'extrémités a et b . Lorsque a et b sont incluses dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, il est équivalent de dire qu'il existe un chemin de difféomorphismes de Σ que l'on note $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$ tel que $H_0 = \text{Id}$ et $H_1(a) = b$. Dans l'ensemble des courbes, être isotope est une relation d'équivalence.
- Le *nombre d'intersection géométrique de deux courbes a et b* est l'entier $I(a, b)$ égal au nombre minimum de points d'intersection entre a et une courbe b' transverse à a et isotope à b :

$$I(a, b) = \min\{|a \cap b'|, b' \simeq b\}.$$

- Soit \mathcal{A} un ensemble fini de courbes dans Σ . On dira que les courbes de \mathcal{A} sont *en position minimale d'intersection* si pour toutes courbes distinctes a et b dans \mathcal{A} , le nombre de points d'intersection entre a et b vérifie $|a \cap b| = I(a, b)$.

La notion de classe d'isotopie de courbes entraîne deux définitions possibles lorsqu'on tente de passer aux *classes d'isotopie d'ensembles de courbes* :

Définition 2.5 (Isotopie forte et faible entre ensembles de courbes).

Soit Σ une surface. Soient r un entier vérifiant $r \geq 1$ et $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ et $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ deux ensembles de courbes deux à deux non isotopes, que l'on note respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B} . Alors \mathcal{A} et \mathcal{B} sont dits :

- *faiblement isotopes* si, à permutation près, pour tout $i \leq r$, les courbes a_i et b_i sont isotopes. La classe d'isotopie faible de \mathcal{A} sera notée $[\mathcal{A}]$. On a ainsi $[\mathcal{A}] = \{[a_1], [a_2], \dots, [a_r]\}$.
- *fortement isotopes* s'il existe un chemin de difféomorphismes de Σ que l'on note $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$ tel que $H_0 = \text{Id}$ et tel que, à permutation près, pour tout entier i inférieur ou égal à r , on ait $H_1(a_i) = b_i$. La classe d'isotopie forte de \mathcal{A} sera notée $\llbracket \mathcal{A} \rrbracket$ ou $\llbracket a_1, a_2, \dots, a_r \rrbracket$.

Cas des simplexes.

Définition 2.6 (Définition provisoire : Simplexe de courbes).

Soit Σ une surface. Un ensemble de courbes dans Σ , deux à deux disjointes et non isotopes, sera appelé *simplexe de courbes* (en référence au complexe de courbes défini a posteriori).

Etant donné une surface Σ , un entier r supérieur ou égal à 1, et un ensemble $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ noté \mathcal{A} de r courbes tel que toute paire $\{a_i, a_j\}$ de courbes de \mathcal{A} vérifie $I(a_i, a_j) = 0$, on montre facilement par récurrence sur r que pour tout entier i inférieur ou égal à r , il existe une courbe a'_i isotope à a_i telle qu'au final, les courbes a'_1, a'_2, \dots, a'_r soient deux à deux disjointes. Autrement dit, on a le lemme suivant :

Lemme 2.7. *Soit Σ une surface. Soit \mathcal{A} un ensemble de courbes dans Σ , deux à deux non isotopes, tel que tout couple de courbes a et b incluses dans \mathcal{A} vérifie $I(a, b) = 0$. Alors la classe d'isotopie faible de \mathcal{A} contient un simplexe.*

On fera la démonstration dans un cadre plus général après avoir énoncé la proposition 2.13. On peut compléter ce lemme par un résultat d'unicité que l'on démontrera également dans le cadre plus général de la proposition 2.15 :

Lemme 2.8. *Soit Σ une surface. Soit \mathcal{A} un ensemble de courbes dans Σ , deux à deux non isotopes tel que tout couple de courbes a et b incluses dans \mathcal{A} vérifie $I(a, b) = 0$. Alors tous les simplexes contenus dans la classe d'isotopie faible de \mathcal{A} sont fortement isotopes.*

Afin de généraliser les deux lemmes précédents à des ensembles de courbes autres que des simplexes, on rappelle la notion de bigone introduite par Epstein, [E].

Bigones.

Définition 2.9 (Bigone, Epstein [E]).

Soient Σ une surface et a et b deux courbes dans Σ . Un *bigone cobordé par a et b* est un disque inclus dans Σ dont le bord est la réunion d'un arc de a noté \hat{a} et d'un arc de b noté \hat{b} (cf. figure 3).

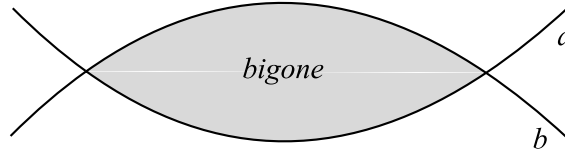


FIG. 3 – Bigone cobordé par a et b

Proposition 2.10 (Paris, Rolfsen [PaRo]). *Soient Σ une surface et a et b deux courbes dans Σ qui s'intersectent transversalement. Alors a et b sont en position minimale d'intersection si et seulement si a et b ne cobordent pas de bigone.* \square

Fixons le vocabulaire lié aux bigones.

Définition 2.11 (Côtés du bigone, rentrée et sortie du bigone).

Soit Σ une surface, a et b deux courbes dans Σ , et D un bigone cobordé par a et b . Je note \hat{a} et \hat{b} les deux arcs issus de a et b et dont la réunion constitue le bord du bigone. J'appelle *côtés du bigone* l'un et l'autre de ces deux arcs. Je dirai qu'un chemin orienté $c : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ *rentre dans le bigone D au temps t_0* si $c(t_0)$ appartient au bord de D et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$c(]t_0 - \varepsilon, t_0]) \cap D = \emptyset \quad \text{et} \quad c(]t_0, t_0 + \varepsilon[) \subset D.$$

De même, je dirai qu'un chemin orienté $c : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ *sort du bigone D au temps t_0* si $c(t_0)$ appartient au bord de D et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$c(]t_0 - \varepsilon, t_0]) \subset D \quad \text{et} \quad c(]t_0, t_0 + \varepsilon[) \cap D = \emptyset.$$

Généralisation du cas des simplexes.

Définition 2.12 (Nombre d'intersection de deux ensembles de courbes).

Soit Σ une surface. Soit \mathcal{A} , respectivement \mathcal{B} , un ensemble de courbes deux à deux non isotopes dans Σ . Le *nombre d'intersection* $I(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est par définition :

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} I(a, b).$$

Remarquons que dans cette définition, il peut exister a et a' dans \mathcal{A} tels que $I(a, a') \neq 0$ (même chose dans \mathcal{B}), mais ces intersections n'entrent pas dans le décompte de $I(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

La proposition suivante généralise le lemme 2.7.

Proposition 2.13. *Soient Σ une surface, r un entier supérieur ou égal à 1, et $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ un ensemble noté \mathcal{A} de r courbes dans Σ , deux à deux non isotopes. Alors il existe un ensemble $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ de r courbes dans Σ , deux à deux en position minimale d'intersection, telles que pour tout $i \leq r$, les courbes b_i et a_i soient isotopes.*

Démonstration. On fait une récurrence sur r . Le cas $r = 2$ est vrai par définition du nombre d'intersection. Supposons que r soit supérieur ou égal à 3 et que le résultat est établi pour $r - 1$: il existe des courbes $\{b_1, b_2, \dots, b_{r-1}\}$ en position minimale d'intersection telles que pour tout $i \leq r - 1$, les courbes a_i et b_i sont isotopes. On peut également supposer que les courbes $\{b_1, b_2, \dots, b_{r-1}\}$ et a_r s'intersectent transversalement en des points doubles. Alors, d'après la proposition 2.10, dans l'ensemble $\{b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, a_r\}$, tous les bigones sont cobordés par une courbe b_i , $i \leq r - 1$ et par a_r . Appelons D_i un tel bigone et \hat{b}_i et \hat{a}_r ses deux côtés. Montrons qu'on peut éliminer un par un tous les bigones D_i , $i \leq r - 1$, par une isotopie sur a_r sans créer ailleurs d'autres bigones. Cela prouvera la proposition.

L'inclusion établit un ordre partiel entre les bigones. Considérons un bigone minimal D_i . Aucune courbe b_k ($k \leq r - 1$, $k \neq i$) rentrant dans D_i en coupant l'arc \hat{a}_r ne peut en ressortir en recoupant l'arc \hat{b}_i car on aurait alors un bigone D_k strictement inclus dans D_i . Même chose avec le côté \hat{b}_i , car il n'existe pas de bigones cobordés par b_k et b_i . Donc toute courbe b_k rentrant dans D_i en ressort en coupant le côté opposé. Alors en poussant a_r à travers le bigone D_i , le bigone D_i disparaît (cf. figure 4). Tout au long de cette isotopie, a_r et b_k restent transverses et aucun bigone n'est créé entre a_r et b_k . Par contre, la quantité $|a_r \cap b_i|$ a diminué de deux. Répétons ce processus jusqu'à ce que pour tout $i \leq r - 1$, on ait $|a_r \cap b_i| = I(a_r, b_i)$. Ainsi le dernier bigone disparaît et la courbe b_r isotope à a_r est la courbe a_r obtenue au terme de ces opérations. \square

Il s'agit d'un résultat d'existence. On introduit la propriété d'*ensemble de courbes sans intersection triple* (cf. la définition 2.14 ci-dessous) qui est une condition suffisante (et nécessaire, mais nous ne démontrerons ni n'utiliserons cet aspect) pour obtenir un résultat d'unicité (cf. la proposition 2.15). Celui-ci est une généralisation du lemme 2.8.

Définition 2.14 (Ensemble de courbes sans intersection triple).

Soit Σ une surface. On dira que \mathcal{A} , un ensemble de courbes, est *sans intersection triple* si pour tout triplet de courbes $\{a_i, a_j, a_k\}$ dans \mathcal{A} , l'une des trois intersections $a_i \cap a_j$, $a_i \cap a_k$ ou $a_j \cap a_k$ est vide.

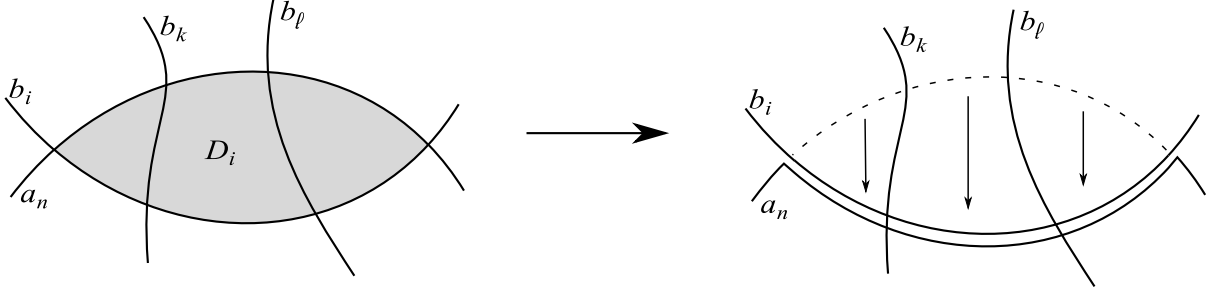


FIG. 4 – Pousser a_n à travers le bigone D_i (démonstration de la proposition 2.13).

Proposition 2.15. Soient Σ une surface, r un entier supérieur ou égal à 1, et $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ un ensemble noté \mathcal{B} de courbes deux à deux non isotopes, en position minimale d'intersection et sans intersection triple. Soit $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_r\}$ un autre ensemble noté \mathcal{B}' de courbes ayant les mêmes propriétés que \mathcal{B} et tel que pour tout $i \leq r$, les courbes b_i et b'_i soient isotopes. Alors il existe un chemin de difféomorphismes de Σ noté $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$ tel que $H_0 = \text{Id}$ et tel que pour tout $i \leq r$, on ait $H_1(b_i) = b'_i$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur r . Le cas $r = 1$ est classique. Posons $r \geq 2$ et supposons le résultat vrai pour $r - 1$: il existe une isotopie H envoyant $\{b_1, b_2, \dots, b_{r-1}\}$ sur $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_{r-1}\}$ et envoyant b_r sur une courbe x isotope à b'_r et en position minimale d'intersection avec les courbes b'_i , $i \leq r - 1$. On cherche une isotopie G qui laisse les b'_i , $i \leq r - 1$, invariants et qui amène x sur b'_r .

Si $|x \cap b'_r| = \emptyset$, alors x et b'_r cobordent un anneau. L'isotopie G consiste à faire glisser x à travers cet anneau pour l'amener sur b'_r et à prolonger G hors d'un voisinage de cet anneau par l'identité (cf. figure 5). Pour tout $i \leq r - 1$, b'_i est en position minimale d'intersection avec x et avec b'_r , donc si b'_i intersecte cet anneau en entrant par l'une des deux courbes x ou b'_r , b'_i ne peut que ressortir par l'autre. Si l'on considère maintenant deux courbes b'_i et b'_k traversant l'anneau, puisqu'elles coupent b'_r et que \mathcal{B}' est sans intersection triple, $I(b'_i, b'_k) = 0$. Comme elles sont en position minimale d'intersection, ceci implique qu'elles sont disjointes. En particulier, elles ne s'intersectent pas dans l'anneau. Les courbes b'_i pour $i \leq r - 1$ sont donc toutes isotopes deux à deux dans l'anneau et l'isotopie proposée G fixe chacune de ces courbes b'_i tandis qu'elle maintient x transverse à ces courbes b'_i .

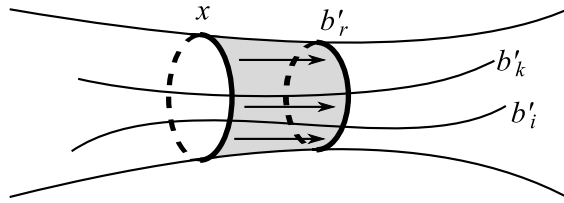


FIG. 5 – Faire glisser x à travers un anneau (démonstration de la proposition 2.15).

Si $|x \cap b'_r| \neq \emptyset$, c'est que x et b'_r bordent un bigone. Considérons un bigone minimal pour l'ordre de l'inclusion et montrons que par une isotopie, on peut déplacer x hors de ce bigone tout en préservant les autres courbes b'_i , $i \leq r - 1$. Ainsi, on sera capable de se ramener au

cas précédent et la proposition sera démontrée. Il suffit en fait de constater que comme dans le cas précédent avec l'anneau, toutes les courbes b'_i qui entrent dans le bigone ne peuvent que le traverser en ressortant par le côté opposé et sont toutes deux à deux isotopes dans le bigone. L'isotopie consiste encore à simplement pousser x hors du bigone. \square

2.2 Définitions

Définitions relatives aux courbes :

Définition 2.16 (Courbes).

Dorénavant, dans toute cette thèse, étant donnée une surface Σ ,

- Deux 1-sous-variétés \bar{a} et \bar{b} de Σ , fermées, lisses, compactes, connexes, sont dites *isotopes* s'il existe un chemin continu de 1-sous-variétés d'extrémités \bar{a} et \bar{b} . Lorsque \bar{a} et \bar{b} sont incluses dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, il est équivalent de dire qu'il existe un chemin de difféomorphismes de Σ que l'on note $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$ tel que $H_0 = \text{Id}$ et $H_1(\bar{a}) = \bar{b}$. Dans l'ensemble des 1-sous-variétés de Σ , fermées, lisses, compactes et connexes, être isotope est une relation d'équivalence.
- Une *courbe* sera la classe d'isotopie d'une 1-sous-variété de Σ , fermée, lisse, compacte, connexe, qui ne borde pas de disque dans Σ .
- On note $\text{Bord}(\Sigma)$ l'ensemble des courbes de Σ correspondant aux classes d'isotopie des composantes connexes de $\partial\Sigma$.
- On note $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ l'ensemble des courbes de Σ et $\text{Courb}(\Sigma)$ l'ensemble $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ privé de $\text{Bord}(\Sigma)$.
- Un *représentant d'une courbe* $a \in \text{Courb}(\Sigma)$ est une 1-sous-variété lisse de Σ appartenant à a .
- L'*intersection géométrique* entre deux courbes a et b est le nombre $I(a, b)$ minimum de points d'intersection entre deux représentants transverses \bar{a} et \bar{b} de a et b . Nous dirons que deux courbes a et b *s'intersectent* ou *se coupent* si elles vérifient $I(a, b) \neq 0$.
- Précisons qu'un *ensemble de courbes*, par définition d'*ensemble* au sens habituel du terme, ne contient chaque élément qu'une fois. De plus, nous les choisirons toujours de cardinal fini.
- L'*intersection géométrique* de deux ensembles de courbes \mathcal{A} et \mathcal{B} est l'entier $I(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ défini par :

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} I(a, b).$$

- Un *représentant d'un ensemble \mathcal{A} de courbes* est un ensemble de représentants des courbes de \mathcal{A} (un représentant par courbe).
- Un *représentant en position minimale d'intersection d'un ensemble \mathcal{A} de courbes* est un représentant de l'ensemble \mathcal{A} tel que pour tout couple (a, b) de courbes de \mathcal{A} , les représentants \bar{a} et \bar{b} sont en position minimale d'intersection.
- Harvey a introduit dans [Ha] le *complexe de courbes*¹ où les sommets sont les courbes de $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et pour tout entier $k \geq 0$, les k -simplexes sont les ensembles \mathcal{A} de $k +$

¹Le complexe $C(\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma))$ est de dimension $3g - 3c + 2b - 1$ d'après la proposition 2.17 plus bas. Pour mémoire, le groupe d'automorphismes du complexe de courbes a été étudié par Ivanov [Iv2], Korkmaz [Ko1], et Luo [Lu]. Ils ont montré le théorème suivant : sauf pour un nombre fini de surfaces exceptionnelles, tous les automorphismes du complexe de courbes sont induits par des difféomorphismes. On n'utilisera pas ce résultat.

1 courbes distinctes, tels que $I(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$. On utilisera abondamment cette notion de *simplexe de courbes*.

- Un ensemble de courbes *sans intersection triple* sera un ensemble de courbes tel que pour trois courbes a, b et c y appartenant, le produit $I(a, b)I(b, c)I(c, a)$ est nul.

On retiendra les deux propositions suivantes. La première est bien connue et découle d'un découpage de la surface en pantalon.

Proposition 2.17. *Soit Σ une surface et soient c, g, b respectivement le nombre de composantes connexes, le genre et le nombre de composantes de bord de Σ . Alors tout simplexe de courbes appartenant à $\text{Courb}(\Sigma)$ contient au plus $3g - 3c + b$ courbes. De plus, tout simplexe est une face d'un simplexe contenant exactement $3g - 3c + b$ courbes. \square*

Les propositions 2.13 et 2.15 peuvent être reformulées ainsi :

Proposition 2.3. *Soit Σ une surface. Etant donné un ensemble de courbes \mathcal{A} , il existe un ensemble de représentants des courbes de \mathcal{A} qui soient en position minimale d'intersection. De plus, si \mathcal{A} est sans intersection triple, un tel ensemble de représentants est unique à isotopie forte près. \square*

Définitions relatives aux sous-surfaces :

Soit une surface Σ .

Définition 2.18 (Isotopie entre 2-sous-variétés).

Deux 2-sous-variétés lisses compactes non vides V et W dans Σ sont dites *isotopes* s'il existe un chemin continu de 2-sous-variétés lisses compactes d'extrémités V et W . Si V et W sont incluses dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, il est équivalent de dire qu'il existe un chemin continu de difféomorphismes de Σ que l'on note $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$ tel que $H_0 = \text{Id}$ et $H_1(V) = W$.

On réserve la dénomination de *sous-surface* pour une certaine classe de 2-sous-variétés. Pour poser clairement les définitions, on commence par distinguer deux types de sous-surfaces : les *sous-surfaces non marquées* dont les courbes de bord sont deux à deux non isotopes dans Σ , et les *sous-surfaces marquées* qui complètent la définition et la généralisent.

Définition 2.19 (Sous-surfaces non marquées).

- Une *sous-surface non marquée* S de Σ sera la classe d'isotopie d'une 2-sous-variété V de Σ , connexe, non vide, dont les bords sont des représentants de courbes de $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ tels que V ne contienne pas deux bords isotopes dans Σ .
- Soit S une sous-surface non marquée de Σ , un *représentant de S* est une 2-sous-variété de Σ isotope à V , et ∂S est la classe d'isotopie de la 1-sous-variété ∂V .
- Soit S une sous-surface non marquée. On note $\text{Bord}(S)$ l'ensemble des courbes de $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ qui sont la classe d'isotopie d'une composante connexe de ∂V où V est un représentant de S .

Lorsqu'une 2-sous-variété contient des paires de bords isotopes, on utilise la définition de *sous-surface marquée* décrite ci-dessous :

Définition 2.20 (Sous-surfaces marquées).

- Lorsque V est une 2-sous-variété V connexe non vide, non homéomorphe à un disque ou un cylindre, dont les bords sont soit confondus avec ceux de Σ , soit des représentants de courbes de $\text{Courb}(\Sigma)$, on associe à V la *sous-surface marquée* (T, \mathcal{A}) où T est la sous-surface non marquée (au sens décrit ci-dessus) associée à la 2-variété W obtenue à partir de V en recollant entre eux chaque couple de bords isotopes, et où \mathcal{A} est un simplexe de courbes de $\text{Courb}(\Sigma)$ appelé *marquage* et contenant pour chaque paire de courbes de bords isotopes de V la classe d'isotopie de ces deux courbes. Ainsi, V et W sont de même caractéristique d'Euler, mais le genre de W est égal à la somme du genre de V et du cardinal de $|\mathcal{A}|$ (cf. figure 6).

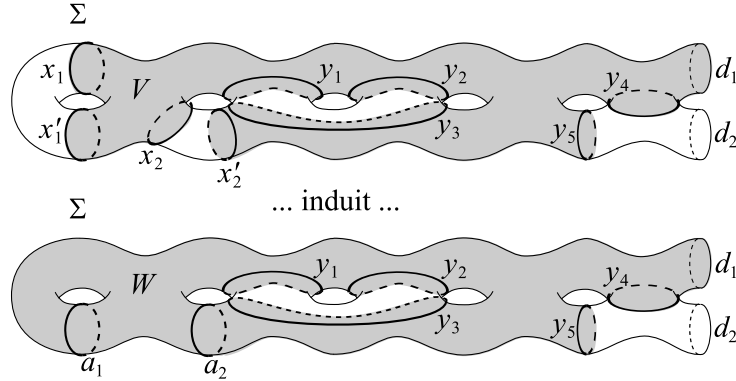


FIG. 6 – Exemple d’une sous-surface marquée (S, \mathcal{A}) associée à la 2-sous-variété V , où S est la classe d’isotopie de W et où $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$.

- Soit (T, \mathcal{A}) une surface marquée que l’on note S , soit W un représentant de T , soit \mathcal{V} le voisinage tubulaire ouvert inclus dans W d’une 1-sous-variété représentant \mathcal{A} et incluse dans W . Un *représentant de S* est une 2-sous-variété de Σ isotope à $W \setminus \mathcal{V}$, et ∂S est la réunion de la classe d’isotopie de la 1-sous-variété ∂W et des courbes de \mathcal{A} .
- Soit (T, \mathcal{A}) une surface marquée que l’on note S . Le simplexe de courbes $\text{Bord}(S)$ est par définition la réunion $\text{Bord}(T) \cup \mathcal{A}$.
- Soit (T, \mathcal{A}) une surface marquée que l’on note S . On distingue dans $\text{Bord}(S)$ les *bords naturels* de S , confondus avec des bords de Σ – on les note $\text{Bord}^{\text{nat}}(S)$, et les *bords intérieurs* de S , appartenant à $\text{Courb}(\Sigma)$ – on les note $\text{Bord}^{\text{int}}(S)$. Ainsi par définition,

$$\begin{aligned} \text{Bord}^{\text{nat}}(S) &= \text{Bord}(S) \cap \text{Bord}(\Sigma), \\ \text{Bord}^{\text{int}}(S) &= \text{Bord}(S) \cap \text{Courb}(\Sigma) \text{ et } \mathcal{A} \subset \text{Bord}^{\text{int}}(S). \end{aligned}$$

Par exemple, sur la figure 6, $\text{Bord}^{\text{nat}}(S) = \{d_1\}$ et $\text{Bord}^{\text{int}}(S) = \{a_1, a_2, y_1, y_2, y_3, y_3, y_4, y_5\}$.

- Soit (T, \mathcal{A}) une surface marquée que l’on note S . On note $\text{Courb}(S)$ l’ensemble des courbes c de $\text{Courb}(T) \setminus \mathcal{A}$ telles que $I(c, \mathcal{A}) = 0$ (si \mathcal{A} est vide, on oublie cette dernière condition). On note $\text{Courb}(S, \partial S)$ la réunion de $\text{Courb}(S) \cup \text{Bord}(S)$.
- On note $\text{Sub}(\Sigma)$ l’ensemble des sous-surfaces marquées dans Σ .

Convention. Toute sous-surface non marquée S peut être considérée comme une sous-surface marquée S' égale à (S, \emptyset) . Dans ce cas, on commettra l’abus de langage consistant à confondre S et S' . D’ailleurs, les définitions relatives aux sous-surfaces non marquées peuvent être vues comme des cas particuliers des définitions de même nom relatives aux sous-surfaces marquées. Dans la

suite de cette thèse, on emploiera le terme *sous-surface* pour désigner les sous-surfaces marquées dont le marquage peut être éventuellement vide. On parlera explicitement de *sous-surface non marquée* ou de *sous-surfaces à marquage non vide* si l'on a besoin de faire la distinction.

Remarque. La définition de sous-surface que l'on a adoptée peut paraître inutilement compliquée, mais elle permet d'établir une bijection entre les simplexes de courbes de $\text{Courb}(\Sigma)$ et les partitions de Σ en sous-surfaces (cf. définition 2.24 de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$).

Le lemme suivant est très pratique et nous l'utiliserons souvent de façon implicite. Sa démonstration découle de la définition de sous-surface, elle est laissée au lecteur.

Lemme 2.21 (Somme de caractéristique d'Euler de sous-surfaces disjointes).

Etant donnée une surface Σ , la somme des caractéristiques d'Euler de sous-surfaces disjointes de Σ est minorée par la caractéristique d'Euler de Σ . \square

Définition 2.22 (Complexe de sous-surfaces).

Le *complexe de sous-surfaces*² est le complexe simplicial dont les sommets sont les sous-surfaces de $\text{Sub}(\Sigma)$ et dont les k -simplexes (pour tout entier $k \geq 0$) sont les ensembles de $k + 1$ sous-surfaces distinctes $\mathcal{A} = \{S_0, S_1, \dots, S_k\}$ tels que tout couple de sous-surfaces (S_i, S_j) dans \mathcal{A} vérifie $S_i \cap S_j = \emptyset$. Le complexe de sous-surfaces présenté ici diffère du complexe de domaines défini par McCarthy et Papadopoulos [McPp] en ce sens que l'on considère non les sous-surfaces plongées, mais les classes d'isotopie de telles sous-surfaces, et que l'on s'interdit les anneaux.

Définition 2.23 (Inclusion entre courbes et sous-surfaces ou entre sous-surfaces).

Soit Σ une surface

- i) Etant données une courbe $a \in \text{Courb}(\Sigma)$ et une sous-surface $S \in \text{Sub}(\Sigma)$, on dira que a est incluse dans S s'il existe un représentant \bar{a} de a et un représentant \bar{S} de S tel que \bar{a} soit inclus dans \bar{S} .
- ii) Soient deux sous-surfaces S et T de Σ . On dit que S est inclus dans T s'il existe deux représentants \bar{S} et \bar{T} de S et de T tels que \bar{S} est inclus dans \bar{T} .

Remarque. L'intersection entre sous-surfaces est bien définie, car la réunion des ensembles des bords de chaque surface constitue un ensemble de courbes sans intersection triple. Cependant, les composantes connexes de l'intersection peuvent être homéomorphes à des disques ou des cylindres, donc l'intersection de sous-surfaces n'est pas une sous-surface à notre sens.

Les couples surface et simplexe de courbes :

Définition 2.24. Soit Σ une surface et soit \mathcal{A} un simplexe de courbes inclus dans $\text{Courb}(\Sigma)$. On note :

²En raison de l'additivité de la caractéristique d'Euler et du fait que les sous-surfaces de $\text{Sub}(\Sigma)$ sont de caractéristique d'Euler strictement négative, le cardinal de tout ensemble de sous-surfaces disjointes est majoré par $-\chi(\Sigma)$. Comme ce nombre est atteint lors d'une décomposition de Σ en pantalons, la dimension du complexe de sous-surfaces est égale à $-\chi(\Sigma) - 1$.

- $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ l'ensemble des sous-surfaces S de Σ telles que $\text{Bord}(S)$ soit inclus dans $\mathcal{A} \cup \text{Bord}(\Sigma)$ et telles que $\text{Courb}(S) \cap \mathcal{A}$ soit vide. On exclut \emptyset (la sous-surface vide) de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$.
- $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ le graphe ayant un sommet par sous-surface dans $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$, et ayant une arête par courbe de \mathcal{A} , de sorte que les extrémités d'une arête associée à a soient les deux sommets associés aux deux sous-surfaces dont a est un bord, cf. figure 7.

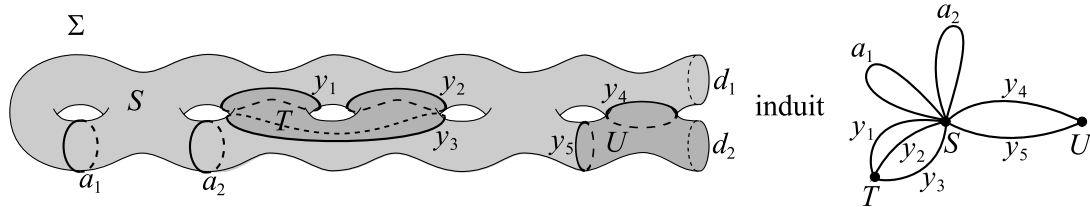


FIG. 7 – Soit \mathcal{A} le simplexe $\{a_1, a_2, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ nous ayant servi d'exemple figure 6. On a représenté le graphe $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ associé en donnant aux sommets et aux arêtes les noms des sous-surfaces et des courbes d'où ils sont issus.

- $\Sigma_{\mathcal{A}}$ la surface Σ éclatée le long des courbes de \mathcal{A} .
- $\text{rec}_{\mathcal{A}} : \Sigma_{\mathcal{A}} \rightarrow \Sigma$ l'application canonique de recollement de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ dans Σ .

3 Mapping class group

Nous commençons ce chapitre par un paragraphe dédié aux différentes définitions du mapping class group et des liens qui existent entre elles (paragraphe 3.1). Puis au cours des trois paragraphes suivants, nous présentons trois types fondamentaux de mapping classes : les twists de Dehn (paragraphe 3.2), les mapping classes périodiques (paragraphe 3.3), et les mapping classes pseudo-Anosov (paragraphe 3.4). Ces trois types de mapping classes sont au cœur de la classification de Nielsen-Thurston des difféomorphismes, que nous présentons à la fin de ce chapitre au paragraphe 3.6 et qui sera notre outil principal dans l'étude des morphismes du groupe de tresses dans le mapping class group.

3.1 Les différentes définitions du mapping class group et les liens entre elles

On a déjà donné dans l'introduction la définition de différents mapping class groups et leurs notations respectives. Cependant, on sera parfois amené au cours de cette thèse à utiliser d'autres définitions du mapping class group dérivées de ces précédentes. On recense ci-dessous les différentes notations correspondant à ces différentes définitions, puis on évoque certains liens entre ces définitions qui nous permettront de passer de l'une à l'autre.

Définition 3.1. Soit Σ une surface orientable, non nécessairement connexe, de bord éventuellement vide.

- Le *mapping class group* de Σ noté $\text{Mod}(\Sigma)$ est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ préservant l'orientation de Σ , pouvant échanger les différentes composantes de bord et les différentes composantes connexes de Σ .
- Le *mapping class group de Σ étendu* noté $\text{Mod}^\diamond(\Sigma)$ est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ ne préservant éventuellement pas l'orientation de Σ ; lorsque Σ est connexe, $\text{Mod}(\Sigma)$ est un sous-groupe normal de $\text{Mod}^\diamond(\Sigma)$ d'indice 2.
- Le *mapping class group de Σ préservant chaque composantes de bord*, noté $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ (préservant l'orientation et) préservant globalement chaque composantes de bord.
- Soit X la réunion *disjointe* dans Σ d'une sous-surface éventuellement non connexe et d'une 1-sous-variété éventuellement non connexe. Le *mapping class group de Σ relativement à X* , noté $\text{Mod}(\Sigma, X)$, est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ (préservant l'orientation et) fixant X point par point, les isotopies étant elles-mêmes assujetties à fixer X point par point. On appellera $\text{oub}_X : \text{Mod}(\Sigma, X) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma)$ le morphisme canonique.
- Soit \mathcal{A} un simplexe de courbes non isotopes à un bord de Σ . On note également $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ préservant globalement \mathcal{A} et pouvant échanger entre elles des composantes de bord. Soit $\text{dec}_{\mathcal{A}}$ le morphisme canonique $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$. On définit également $\mathcal{P}\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma) = \text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma) \cap \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$.
- Gardons la même définition de \mathcal{A} . On note $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma)$ le sous-groupe de $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ égal à $\text{dec}_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}))$. Ainsi, $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma)$ est le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de Σ préservant \mathcal{A} courbe par courbe, préservant les composantes de bord de Σ , et ne permutant pas les sous-surfaces bordées par les courbes de $\mathcal{A} \cup \text{Bord}(\Sigma)$.

Les différentes assertions contenues dans la prochaine proposition établissent des liens entre les différents mapping class groups évoqués ci-dessus. Les preuves sont laissées au lecteur. Cette proposition est à compléter par la proposition 3.9. Cette dernière fait intervenir les *twists de Dehn*, des mapping classes que nous allons définir au prochain paragraphe.

Proposition 3.2.

i) Soit Σ' une sous-surface de Σ et soit Σ'' l'adhérence du complémentaire de Σ' dans Σ . On a alors l'isomorphisme :

$$\text{Mod}(\Sigma, \Sigma' \cup \partial\Sigma) \cong \text{Mod}(\Sigma'', \partial\Sigma'').$$

ii) Pour tout simplexe de courbes \mathcal{A} , les deux mapping class groups suivants sont isomorphes :

$$\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma \cup (\bigcup_{a \in \mathcal{A}} a)) \cong \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial(\Sigma_{\mathcal{A}})).$$

iii) Soient Σ' et Σ'' deux sous-surfaces dans Σ telles que Σ'' est l'adhérence du complémentaire de Σ' dans Σ . Alors $\text{Mod}(\Sigma, \Sigma')$ et $\text{Mod}(\Sigma, \Sigma'')$ sont deux sous-groupes de $\text{Mod}(\Sigma)$ tel que chacun des deux est inclus dans le centralisateur de l'autre. \square

3.2 Les twists de Dehn

Une famille importante de mapping classes est celle des twists de Dehn, car ce sont des mapping classes élémentaires qui engendrent $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ (cf. le théorème 3.8). Par ailleurs, elles permettent de réaliser des relations de tresses dans le mapping class group (cf. la proposition 3.4), relations qui sont à l'origine des morphismes existant entre groupes de tresses et mapping class groups, dont l'étude est le sujet de cette thèse.

Définition 3.3 (Twists de Dehn le long de courbes de $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$).

Soit Σ une surface orientée. On donne à l'anneau $[0, 1] \times S^1$ noté \mathbb{A} l'orientation produit. Etant donnée une courbe a appartenant à $\text{Courb}(\Sigma)$, soit \bar{a} une 1-sous-variété lisse de $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ représentant a . Soit \mathcal{V} un voisinage tubulaire compact de \bar{a} et soit ϕ un homéomorphisme positif de \mathcal{V} dans l'anneau \mathbb{A} . Définissons l'homéomorphisme

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} = [0, 1] \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{A} = [0, 1] \times S^1 \\ (t, e^{i\theta}) & \longmapsto & (t, e^{i(\theta+2\pi t)}) \end{array} .$$

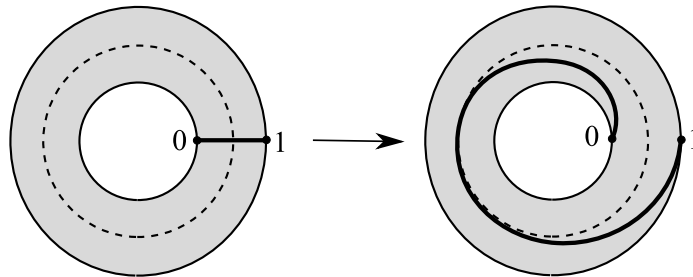


FIG. 8 – Définition du twist de Dehn.

Considérons l'homéomorphisme t_a valant l'identité hors du voisinage tubulaire \mathcal{V} et valant $\phi^{-1} \circ D \circ \phi$ sur \mathcal{V} . Par un résultat classique en topologie différentielle en dimension deux, la classe

d'isotopie de tout homéomorphisme contient une unique classe d'isotopie de difféomorphismes. C'est ainsi que t_a définit une unique classe d'isotopie de difféomorphismes, autrement dit une unique mapping class de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. On la note T_a et on l'appelle le *twist de Dehn selon la courbe a* . Remarquons qu'a priori, T_a dépend de la classe d'isotopie de l'homéomorphisme positif ϕ , mais il n'existe qu'une seule telle classe d'isotopie (le mapping class group du cylindre est trivial); de même les choix du représentant \bar{a} et du voisinage \mathcal{V} sont indifférents, donc le twist de Dehn T_a est bien défini. La mapping class induite par T_a dans $\text{Mod}(\Sigma)$ est encore notée T_a et est encore appelée le *twist de Dehn selon la courbe a* .

On définit également de façon similaire les twists de Dehn le long de courbes de $\text{Bord}(\Sigma)$. Pour cela, étant donnée une courbe $a \in \text{Bord}(\Sigma)$, on choisit un représentant \bar{a} dans $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ isotope au bord correspondant à a (*isotope* au sens de chemin continu de courbes). On définit alors T_a comme précédemment. Le twist de Dehn T_a vu dans le groupe $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ n'est pas trivial, tandis que vu dans $\text{Mod}(\Sigma)$, il est trivial.

Lorsque Σ est plongée dans \mathbb{S}^3 et qu'on la regarde de l'extérieur (*intérieur* et *extérieur* dépendent de l'orientation de Σ), un twist de Dehn le long de la courbe a a pour effet sur une courbe b intersectant a de lui faire parcourir une fois la courbe a en partant vers la gauche chaque fois qu'elle intersecte a .

Premières propriétés des twists de Dehn.

La proposition suivante est classique. Elle joue un grand rôle dans cette thèse.

Proposition 3.4 (Propriétés des twists de Dehn, N.V. Ivanov, J.D. McCarthy [Mc1]).

Les twists de Dehn vérifient les propriétés suivantes :

- Pour tout F dans $\text{Mod}(\Sigma)$, $F T_a = T_a F$ si et seulement si $F(a) = a$.
- Soient T_a et T_b deux twists de Dehn, et i et j deux entiers non nuls. La relation $T_a^i T_b^j = T_b^j T_a^i$ a lieu si et seulement si $I(a, b) = 0$.
- Soient T_a et T_b deux twists de Dehn, et i et j deux entiers non nuls. La relation de tresse $T_a^i T_b^j T_a^i = T_b^j T_a^i T_b^j$ a lieu si et seulement si $I(a, b) = 1$ et $i = j = \pm 1$. □

La démonstration de cette proposition est classique (cf. [FLP]). Signalons qu'elle utilise la formule d'intersection donnée au lemme 3.5, qu'on ne démontrera pas non plus, mais que l'on réutilisera dans cette thèse.

Lemme 3.5 (Fathi, Laudenbach, Poénaru, cf. [FLP]).

Si a, b, c sont trois courbes telles que $I(b, c) = 0$, alors pour tout entier k ,

$$I(T_a^k(b), c) = |k|I(a, b)I(a, c).$$

Dans le cas général, lorsqu'on ne suppose pas $I(b, c) = 0$, on a l'inégalité :

$$|I(T_a^k(b), c) - |k|I(a, b)I(a, c)| \leq I(b, c).$$

□

Chaîne de courbes.

Il existe d'autres relations vérifiées par les twists de Dehn qui sont d'une importance capitale dans cette thèse : les relations faisant intervenir des *chaînes de courbes*.

Définition 3.6 (Chaîne de courbes).

Etant donnée une surface Σ , pour tout entier $k \geq 2$, une k -chaîne de courbes est une suite ordonnée de courbes deux à deux distinctes (a_1, a_2, \dots, a_k) telle que pour tout couple (i, j) d'entiers inférieurs à k , on ait $I(a_i, a_j) = 0$ si $|i - j| \neq 1$ et $I(a_i, a_j) = 1$ si $|i - j| = 1$ (cf. figure 9).

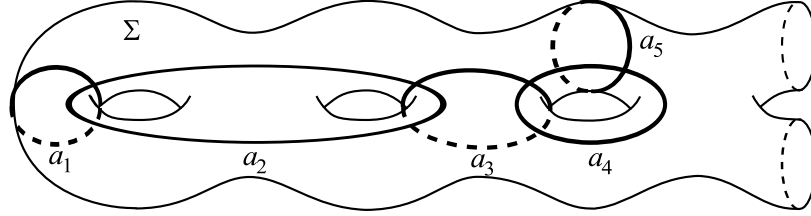


FIG. 9 – Exemple de chaîne de courbes.

Les relations entre twists de Dehn le long de courbes disposées en chaînes de courbes sont exposées dans le lemme 3.7 ci-dessous. Il est classique, on ne le redémontrera pas, mais on reviendra dessus au cours du chapitre 4 présentant le groupe de tresses, à la proposition 4.16, pour en donner une interprétation plus profonde.

Lemme 3.7 (C. Labruère, L. Paris, cf. [LaPa]).

Soit (c_1, c_2, \dots, c_k) une k -chaîne de courbes où k est un entier supérieur ou égal à 2. Alors,

- si k est pair, le voisinage tubulaire de $c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_k$ est une surface S de genre $\frac{k}{2}$ avec une composante de bord d , et le produit $(T_{c_1}(T_{c_2}T_{c_1}) \dots (T_{c_k} \dots T_{c_2}T_{c_1}))^2$ est la mapping class α qui préserve chaque courbe c_i , $1 \leq i \leq k$, dont la restriction hors de S coïncide avec l'identité, et telle que $\alpha^2 = T_d$, le twist de Dehn le long de la courbe d bordant la surface S (cf. figure 10). Notons qu'après avoir attribué une orientation aux courbes c_i , $1 \leq i \leq k$, α renverse cette orientation.

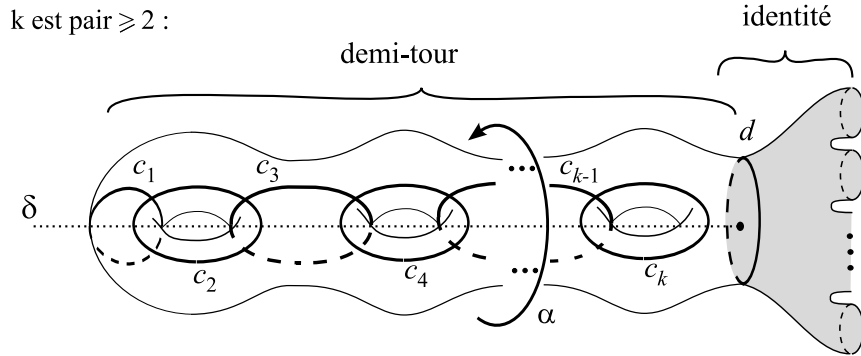


FIG. 10 – Le produit $(T_{c_1}(T_{c_2}T_{c_1}) \dots (T_{c_k} \dots T_{c_2}T_{c_1}))^2$ lorsque k est pair.

- si k est impair, le voisinage tubulaire de $c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_k$ est une surface S de genre $\frac{k-1}{2}$ avec deux composantes de bord d_1 et d_2 , et le produit $(T_{c_1}(T_{c_2}T_{c_1}) \dots (T_{c_k} \dots T_{c_2}T_{c_1}))^2$ est le produit des deux twists de Dehn $T_{d_1}T_{d_2}$ (cf. figure 11). \square

k est impair ≥ 3 : $\alpha = T_{d_1} T_{d_2}$

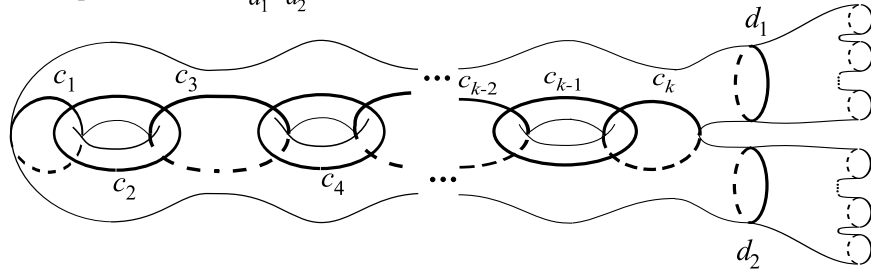


FIG. 11 – Le produit $T_{c_1}(T_{c_2}T_{c_1}) \dots (T_{c_k} \dots T_{c_2}T_{c_1})$ lorsque k est impair.

Présentation du mapping class group par les twists de Dehn.

Rappelons le théorème suivant dû à M. Dehn [D] puis redécouvert par W.B.R. Lickorish [Lk]. Pour la démonstration de la partie 1°), on pourra se référer à [Bi], théorème 4.1. La partie 2°) est une conséquence de la partie 1°) en utilisant des *relations de la lanterne* (cf. [FaMa] section 5.1) afin d'obtenir les twists de Dehn le long des courbes de bord.

Théorème 3.8 (Le mapping class group engendré par les twists de Dehn).

1°) Soit $\Sigma_{g,b}$ une surface dont le genre vérifie $g \geq 1$. Le groupe $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$ est engendré par les twists de Dehn le long des courbes non séparantes de $\Sigma_{g,b}$. On peut par exemple se restreindre aux courbes dessinées sur la figure 12.

2°) Les mêmes twists de Dehn peuvent être vus comme appartenant à $\text{Mod}(\Sigma_{g,b}, \partial\Sigma_{g,b})$; dans ce cas ils engendrent $\text{Mod}(\Sigma_{g,b}, \partial\Sigma_{g,b})$. \square

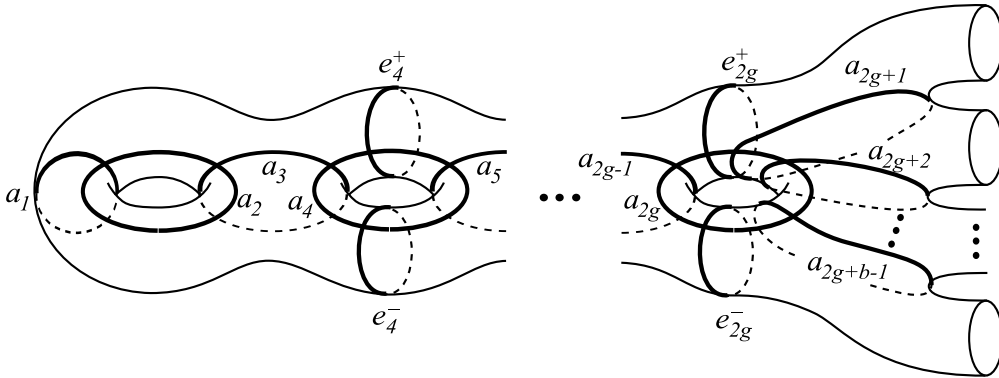


FIG. 12 – Courbes dans $\Sigma_{g,b}$ engendrant $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$.

Liens entre mapping class groups et twists de Dehn.

Donnons trois résultats classiques et un théorème de Paris et Rolfsen où les twists de Dehn apparaissent naturellement lorsqu'on compare différents mapping class groups.

Proposition 3.9 (Suites exactes centrales entre mapping class groups).

Les trois suites ci-dessous sont des suites exactes centrales.

i) Pour toute surface Σ connexe, la suite ci-dessous est exacte :

$$1 \rightarrow \langle T_d, d \in \text{Bord}(\Sigma) \rangle \rightarrow \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma) \xrightarrow{\text{oub}_{\partial\Sigma}} \mathcal{PMod}(\Sigma) \rightarrow 1.$$

ii) Pour tout simplexe de courbes $\mathcal{A} \subset \text{Courb}(\Sigma)$, la suite ci-dessous est exacte :

$$1 \rightarrow \langle T_a, a \in \mathcal{A} \rangle \rightarrow \mathcal{P}_\mathcal{A}\text{Mod}(\Sigma) \xrightarrow{\text{dec}_\mathcal{A}} \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_\mathcal{A}) \rightarrow 1.$$

iii) Soit \mathcal{A} un simplexe de courbes non isotopes à un bord de Σ . Pour toute courbe $a \in \mathcal{A}$, notons a^+ et a^- les deux bords dans $\Sigma_\mathcal{A}$ provenant de a . En recollant dans $\Sigma_\mathcal{A}$ chaque bord a^+ ($a \in \mathcal{A}$) sur son bord associé a^- , on retrouve la surface Σ . Une telle opération de recollement induit un morphisme canonique $\text{rec}_\mathcal{A} : \text{Mod}(\Sigma_\mathcal{A}, \partial\Sigma_\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}_\mathcal{A}\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ qui vérifie la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \langle T_{a^+} T_{a^-}^{-1}, a \in \mathcal{A} \rangle \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_\mathcal{A}, \partial\Sigma_\mathcal{A}) \xrightarrow{\text{rec}_\mathcal{A}} \mathcal{P}_\mathcal{A}\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow 1.$$

□

La notion de *sous-groupe parabolique du mapping class group* a été introduite par L. Paris et D. Rolfsen dans [PaRo] : Etant donnée une surface Σ , les *sous-groupes paraboliques du mapping class group* de Σ sont les sous-groupes induit par l'inclusion de sous-surfaces $\Sigma' \subset \Sigma$. Le prochain théorème, dû à Paris et Rolfsen, étudie certains noyaux associés aux sous-groupes paraboliques du mapping class group.

Théorème 3.10 (Paris et Rolfsen, [PaRo]).

Soit Σ une surface et Σ' une surface incluse dans Σ telles que $\partial\Sigma'$ et $\partial\Sigma$ soient disjoints. On note a_1, a_2, \dots, a_r les bords de Σ' bordant un disque dans Σ ; on note b_j, b'_j pour $1 \leq j \leq s$ les paires de bords de Σ' qui cobordent un anneau dans Σ . Alors l'inclusion $\iota : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ induit un morphisme $\iota_* : \text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma') \rightarrow \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dont le noyau est le groupe abélien \mathcal{T} de rang $r + s$ engendré par $T_{a_i}, 1 \leq i \leq r$ et par $T_{b_j}^{-1} T_{b'_j}, 1 \leq j \leq s$.

Des produits particuliers de twists de Dehn : les multitwists.

On finit ce paragraphe sur les twists de Dehn en présentant les multitwists. Ce sont des produits particuliers de twists de Dehn qui apparaissent souvent dans le noyau de morphismes entre différents mapping class groups, comme au ii) de la proposition 3.9.

Définition 3.11 (Les multitwists).

Un *multitwist le long de courbes de \mathcal{A}* où \mathcal{A} est un simplexe de courbes est le produit de puissances de twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{A} .

Un multitwist ne peut s'écrire que d'une seule manière comme produit de puissances de twists de Dehn (à l'ordre près des facteurs, en excluant les puissances nulles et en rassemblant en une seul facteur les puissances d'un même twist de Dehn) :

Lemme 3.12 (Unicité de la factorisation d'un multitwist en produit de twists de Dehn).

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux simplexes³ de courbes et soient $(k_a)_{a \in \mathcal{A}}$ et $(\ell_b)_{b \in \mathcal{B}}$ deux familles d'entiers non nuls indicées par \mathcal{A} et \mathcal{B} . Si

$$\prod_{a \in \mathcal{A}} T_a^{k_a} = \prod_{b \in \mathcal{B}} T_b^{\ell_b},$$

Alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ et pour tout couple de courbes (a, b) dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, l'égalité $a = b$ implique l'égalité $k_a = \ell_b$.

Le bon cadre pour prouver ce lemme est la théorie de Thurston et l'introduction du *système de réduction canonique* σ qui se fera au paragraphe 3.6 de ce chapitre. C'est donc au paragraphe 3.6 que l'on prouvera le lemme 3.12.

³Rappelons qu'un simplexe de courbes est un ensemble de courbes deux à deux disjointes : il n'y a pas de doublons.

3.3 Les mapping classes périodiques

Définition 3.13 (Mapping classes périodiques, ordre et période).

Une mapping class $F \in \mathcal{M}od(\Sigma)$ est dite *périodique* s'il existe un entier k non nul tel que $F^k = \text{Id}$ (où Id est la classe d'isotopie de l'identité de Σ). Le plus petit entier k tel que $F^k = \text{Id}$ est appelé *l'ordre* de F . Une mapping class de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ est dite *périodique* si sa projection \bar{F} dans $\mathcal{M}od(\Sigma)$ est une mapping class périodique au sens précédent. Le plus petit entier k tel que $\bar{F}^k = \text{Id}$ sera appelé *la période* de F et non l'ordre de F car F^k n'est pas l'identité. Cependant, la période de F est égale à l'ordre de \bar{F} .

En guise d'exemple, voici un lemme classique :

Lemme 3.14. *Les twists de Dehn ne sont pas périodiques.*

Démonstration. Soit Σ une surface (de caractéristique d'Euler strictement négative) telle que $\text{Courb}(\Sigma)$ soit non vide (donc Σ n'est pas un pantalon), et soit a une courbe de $\text{Courb}(\Sigma)$. Si a est non séparante, il est facile de construire une courbe b appartenant à $\text{Courb}(\Sigma)$ qui intersecte a en un point, en considérant un chemin dans Σ_a joignant les deux bords issus de la courbe a . Un raisonnement similaire permet de construire une courbe b appartenant à $\text{Courb}(\Sigma)$ qui intersecte a en deux points, lorsque a est séparante. Alors, pour tout entier k non nul, T_a^k n'est pas trivial car d'après le lemme 3.5,

$$I(T_a^k(b), b) = |k|I(a, b)^2 \neq 0,$$

tandis que $I(\text{Id}(b), b) = 0$. □

Le théorème suivant donne toutes les mapping classes périodiques à partir des isométries de la surface. Etant donnée une surface admissible Σ que l'on munit d'une métrique hyperbolique g , notons $\text{Isom}^+(\Sigma, g)$ le groupe des isométries positives de (Σ, g) , qui est un sous-groupe de $\text{Diff}^+(\Sigma)$. D'après le théorème de réalisation de Nielsen, si $\partial\Sigma = \emptyset$, pour toute mapping class $F \in \mathcal{M}od(\Sigma)$ périodique d'ordre m , il existe une métrique hyperbolique g sur Σ et une isométrie $f \in \text{Isom}^+(\Sigma, g)$ telle que F est la classe d'isotopie de f et f vérifie $f^m = \text{Id}$. Ce théorème de Nielsen a été généralisé par Kerckhoff aux sous-groupes finis de $\mathcal{M}od(\Sigma)$ où $\partial\Sigma$ peut ne pas être vide (cf. [Ke1] et [Ke2]) :

Théorème 3.15 (« Théorème de réalisation de Nielsen », Kerckhoff, cf. [Ke2]).

Soit Σ une surface, avec ou sans bord. Soit Γ un sous-groupe fini de $\mathcal{M}od(\Sigma)$. Alors il existe un groupe fini $\bar{\Gamma}$ de $\text{Diff}^+(\Sigma)$ qui s'envoie isomorphiquement sur Γ par le morphisme naturel $\text{Diff}^+(\Sigma) \rightarrow \mathcal{M}od(\Sigma)$. De plus, on peut choisir $\bar{\Gamma}$ comme étant un sous-groupe du groupe d'isométries d'une métrique de courbure constante sur Σ où les bords sont géodésiques.

Ceci n'a pas d'équivalent sur $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ lorsque $\partial\Sigma$ est non vide, car le groupe $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ est sans torsion dès que $\partial\Sigma$ est non vide. En effet, si $F \in \mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ est périodique de période m , F^m est un multitwist non trivial le long des courbes de bord. Cette situation est précisée par le lemme 3.17 ci-dessous.

3.3.1 Les mapping classes périodiques dans les surfaces à bord

On se place dans le cadre des mapping classes périodiques préservant au moins un bord de la surface considérée. Avant d'énoncer le lemme 3.17, rappelons un résultat classique provenant de la théorie des variétés riemanniennes que l'on admettra dans cette thèse.

Lemme 3.16. *Soit M une variété riemannienne et f une isométrie sur M . Si f fixe un point x et si la différentielle de f en x est l'identité, alors f est l'identité. Même chose lorsque f fixe point par point une courbe de bord de M . \square*

Les corollaires du lemme 3.16. Le lemme 3.16 est fondamental à la compréhension des mapping classes périodiques. Il est à l'origine de nombreux corollaires essentiels dans cette thèse :

- Le lemme 3.17 : « Si $\partial\Sigma$ est non vide, alors $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est sans torsion. »
- Le corollaire 3.18 du lemme 3.17, qui permet de déduire l'existence de certaines mapping classes périodiques à partir de mapping classes périodiques définies sur des surfaces « plus simples » (i.e. de genre plus petit ou de caractéristique d'Euler plus grande).
- Le lemme 3.19 : « Si $\partial\Sigma$ est non vide et si d appartient à $\text{Bord}(\Sigma)$, alors tout sous-groupe fini de $\text{Mod}_d(\Sigma)$ est cyclique. »

Lemme 3.17 (Comportement des mapping classes périodiques au voisinage de $\partial\Sigma$).

Soit Σ une surface connexe telle que $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Soit d une courbe de bord de Σ et soit $\text{Mod}(\Sigma, d)$ l'ensemble des mapping classes de Σ fixant d point par point. Alors le groupe $\text{Mod}(\Sigma, d)$ est sans torsion. De plus, soit F une mapping class périodique de période $m \geq 2$ appartenant à $\text{Mod}(\Sigma, d)$. Alors il existe un entier ℓ premier avec m tel que $F^m = T_d^\ell$ (en particulier, ℓ est non nul).

Démonstration. Toute mapping class qui appartiendrait à la torsion de $\text{Mod}(\Sigma, d)$ est par définition une mapping class périodique. Or si l'on montre qu'aucune puissance non nulle d'une mapping class périodique n'est triviale dans $\text{Mod}(\Sigma, d)$, on aura montré que $\text{Mod}(\Sigma, d)$ est sans torsion. C'est ce que nous allons faire en démontrant la deuxième partie de ce lemme.

Soit \bar{F} appartenant à $\text{Diff}^+(\Sigma, d)$ un représentant de F fixant d point par point. Soit d' une courbe isotope à d dans Σ et n'intersectant pas $\partial\Sigma$. Appelons \mathcal{V} le cylindre compact inclus dans Σ dont les deux bords sont d et d' et soit Σ' l'adhérence du complémentaire de \mathcal{V} dans Σ (cf. figure 13).

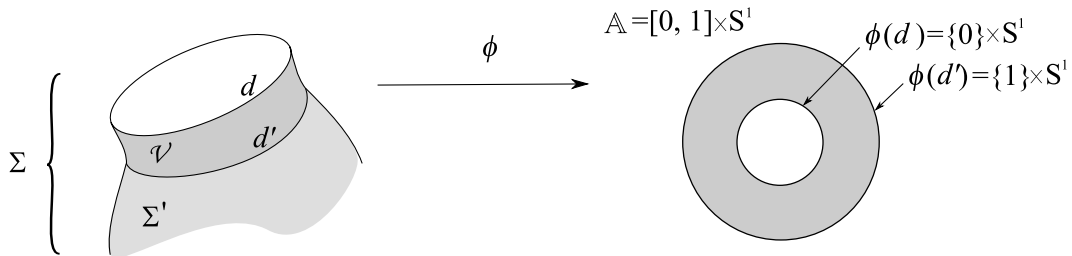


FIG. 13 – La situation décrite dans la démonstration du lemme 3.17.

Appliquons le théorème de réalisation de Nielsen - Kerckhoff : il existe une métrique hyperbolique g sur Σ' et une isométrie \bar{F}_1 de (Σ', g) représentant la restriction de F à Σ' . Notons

f la restriction de \bar{F}_1 à d' . Puisque \bar{F}_1 est une isométrie périodique d'ordre m , il existe un entier k tel que f est une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{m}$ sur d' muni de la métrique induite. Or pour tout $p \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, la mapping class $oub_d(F)^p$ (où $oub_d(F)$ est la mapping class induite par F dans $\text{Mod}(\Sigma)$) est différente de l'identité donc d'après le lemme 3.16, f^p est différente de l'identité. Donc k est premier avec m .

Soit \mathbb{A} l'anneau $[0, 1] \times S^1$ et soit ϕ un difféomorphisme positif de \mathcal{V} dans \mathbb{A} tel que $\phi(d) = \{0\} \times S^1$ et $\phi(d') = \{1\} \times S^1$ (cf. figure 13). De plus, on peut construire ϕ de sorte que l'application $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ de $\{1\} \times S^1$ dans $\{1\} \times S^1$ coïncide avec $(1, e^{i\theta}) \mapsto (1, e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{m})})$ puisque f est une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{m}$ sur d' . On prolonge f sur \mathcal{V} (cf. figure 14) en posant pour tout $t \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$f(\phi^{-1}((t, e^{i\theta}))) = \phi^{-1}((t, e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{m}t)})).$$

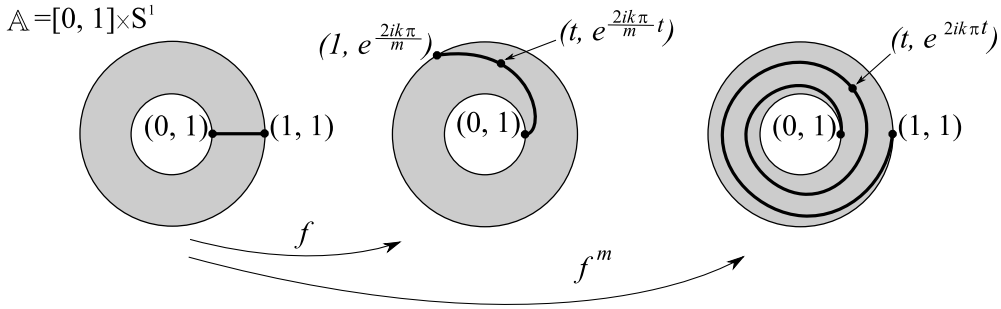


FIG. 14 – Image du segment $[0, 1] \times \{1\}$ par f et f^m .

De cette façon, f fixe d point par point et coïncide avec \bar{F}_1 sur d' . Soit \bar{F}_2 l'homéomorphisme de Σ fixant d point par point, coïncidant avec f sur \mathcal{V} et avec \bar{F}_1 sur Σ' . Par définition du twist de Dehn, la classe d'isotopie de l'homéomorphisme \bar{F}_2^m contient $T_d^k \in \text{Mod}(\Sigma, d)$. Soit G la mapping class de $\text{Mod}(\Sigma, d)$ incluse dans la classe d'isotopie de l'homéomorphisme $\bar{F}\bar{F}_2^{-1}$. Par construction $oub_d(\bar{F}) = oub_d(\bar{F}_2)$, donc d'après la suite exacte suivante

$$1 \rightarrow \langle T_d \rangle \rightarrow \text{Mod}(\Sigma, d) \xrightarrow{oub_d} \text{Mod}_d(\Sigma) \rightarrow 1,$$

les classes d'isotopie de \bar{F} et \bar{F}_2^{-1} dans $\text{Mod}(\Sigma, d)$ commutent, donc les homéomorphismes $(\bar{F}\bar{F}_2^{-1})^m$ et $\bar{F}^m\bar{F}_2^{-m}$ sont isotopes, donc $G^m = F^m T_d^{-k}$. D'autre part, d'après cette même suite exacte, le fait que $oub_d(\bar{F}) = oub_d(\bar{F}_2)$ implique qu'il existe un entier j tel que $G = T_d^j$. De ces deux dernières égalités, il vient $F^m = G^m T_d^k = T_d^{jm+k}$, et $jm+k$ est premier avec m . \square

Donnons un corollaire du lemme 3.17 qui permet de déduire l'existence de certaines mapping classes périodiques à partir de mapping classes périodiques définies sur des surfaces « plus simples » (i.e. de genre plus petit ou de caractéristique d'Euler plus grande).

Corollaire 3.18 (Reconstruction d'une mapping class périodique).

Soit Σ une surface connexe. Soit I un ensemble fini et soit $\mathcal{A}_I = \{a_i, i \in I\}$ un simplexe de courbes dans Σ . Pour tout $i \in I$, on note a_i^+ et a_i^- les bords de $\Sigma_{\mathcal{A}_I}$ issus du découpage de \mathcal{A}_I le long de la courbe a_i . Soit \tilde{F} une mapping class de $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}_I})$ périodique d'ordre deux qui préserve $\{a_i^+, a_i^-\}$ pour tout $i \in I$. Alors il existe une unique mapping class $F \in \text{Mod}(\Sigma)$ périodique d'ordre deux telle que F induise \tilde{F} dans $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}_I})$.

Démonstration.

1°) *Notations*

Soient J et K deux sous-ensembles de I tels que $J \sqcup K$ forme une partition de I et tels que pour tout $j \in J$, les bords a_j^+ et a_j^- de $\Sigma_{\mathcal{A}_I}$ soient échangés par \tilde{F} , tandis que pour tout $k \in K$, les bords a_k^+ et a_k^- de $\Sigma_{\mathcal{A}_I}$ ne le soient pas. On note $\mathcal{A}_J = \{a_j, j \in J\}$ et $\mathcal{A}_K = \{a_k, k \in K\}$.

2°) *Existence de F*

Soit \bar{F}_1 un difféomorphisme de $\text{Diff}^+(\Sigma_{\mathcal{A}_I})$ d'ordre 2 représentant \tilde{F} . On construit un difféomorphisme \bar{F}_2 de $\text{Diff}^+(\Sigma_{\mathcal{A}_K})$ en identifiant dans $\Sigma_{\mathcal{A}_I}$ chaque bord a_j^+ au bord a_j^- en posant la relation suivante dans $\Sigma_{\mathcal{A}_I}$: pour tout couple de points $(x, y) \in \Sigma_{\mathcal{A}_I}$,

$$x \sim y \text{ si et seulement si } \begin{cases} x = y, \\ \text{ou} \\ x, y \in a_j^+ \cup a_j^- \text{ et } y = \bar{F}_1(x). \end{cases}$$

La structure différentielle de $\Sigma_{\mathcal{A}_K}$ induite de celle de $\Sigma_{\mathcal{A}_I}$ est bien définie à conjugaison près par un difféomorphisme (cf. [Hi] page 184 : *Gluing Manifolds Together*) et par construction, \bar{F}_2 est bien un difféomorphisme de $\Sigma_{\mathcal{A}_K}$. Soit F_2 la mapping class de $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}_K})$ contenant \bar{F}_2 . Il est clair que F_2 est périodique d'ordre deux. Remarquons que F_2 préserve chaque bord a_k^ε , $k \in K$, $\varepsilon \in \{+, -\}$. On peut alors définir F_3 comme étant un représentant de F_2 dans $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}_K}, \{a_k^+, a_k^-, k \in K\})$. D'après le lemme 3.17, pour tout $k \in K$, il existe deux entiers impairs m_k^+ et m_k^- tels que

$$F_3^2 = \prod_{k \in K} T_{a_k^+}^{m_k^+} T_{a_k^-}^{m_k^-}.$$

Soit F_4 la mapping class de $\text{Mod}(\Sigma)$ obtenue en identifiant pour tout $k \in K$ les bords a_k^+ et a_k^- . La mapping class F_4 ainsi construite vérifie :

$$F_4^2 = \prod_{k \in K} T_{a_k}^{(m_k^+ + m_k^-)}.$$

Posons alors $F_5 = F_4 \left(\prod_{k \in K} T_{a_k}^{\ell_k} \right)^{-1}$, où pour tout $k \in K$, le rationnel ℓ_k défini par $\ell_k = \frac{m_k^+ + m_k^-}{2}$ est un entier puisque m_k^+ et m_k^- sont tous deux impairs. Puisque ce produit est commutatif, il vient que $F_5^2 = \text{Id}$. Par construction, la mapping class F_5 fixe les courbes de \mathcal{A}_I et induit dans $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}_I})$ la mapping class \tilde{F} . La mapping class F_5 joue donc le rôle de F dans l'énoncé.

3°) *Unicité de F*

Supposons qu'il existe deux mapping classes F et F' dans $\text{Mod}_{\mathcal{A}_I}(\Sigma)$ telles que $F^2 = F'^2 = \text{Id}$ et telles que F et F' induisent \tilde{F} dans $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}_I})$. D'après la suite exacte

$$1 \rightarrow \langle T_{a_i}, i \in I \rangle \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{A}_I}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}_I}) \rightarrow 1,$$

il existe des entiers p_i , $i \in I$ et une mapping class $W = \prod_{i \in I} T_{a_i}^{p_i}$ tels que $F' = FW$. Mais F et F' fixent les courbes de \mathcal{A}_I , donc ces deux mapping classes commutent avec W et $(FF'^{-1})^2 = W^2$. Or FF'^{-1} est périodique d'ordre deux comme produit commutatif de deux mapping classes périodiques d'ordre deux, donc la mapping class $W^2 = \prod_{i \in I} T_{a_i}^{2p_i}$ est triviale. Alors pour tout $i \in I$, $2p_i = 0$, donc W est trivial et finalement, $F = F'$ d'après le lemme 3.12. \square

Le lemme 3.16 permet d'étudier les mapping classes périodiques lorsque Σ est de bord non vide et que ces mapping classes préservent au moins un bord que l'on appellera d . Ce lemme mène à deux résultats, selon que l'on étudie les mapping classes de $\text{Mod}(\Sigma, d)$, c'est-à-dire les mapping class fixant d point par point, cf. le lemme 3.17, ou que l'on étudie les mapping classes de $\text{Mod}_d(\Sigma)$, c'est-à-dire les mapping classes préservant d globalement, cf. le lemme 3.19. Dans le cas de $\text{Mod}(\Sigma, d)$, le lemme 3.16 nous a permis de montrer que $\text{Mod}(\Sigma, d)$ était sans torsion.

Dans le cas de $\text{Mod}_d(\Sigma)$, le lemme 3.16 va nous permettre de montrer que tout sous-groupe fini de $\text{Mod}_d(\Sigma)$ est cyclique :

Lemme 3.19. *Soit Σ une surface connexe de bord non vide et soit d une composante de bord. Tout sous-groupe fini de $\text{Mod}_d(\Sigma)$ est cyclique.*

Démonstration. Soit Γ un groupe fini inclus dans $\text{Mod}_d(\Sigma)$. D'après le théorème de Kerckhoff (cf. théorème 3.15) il existe une métrique hyperbolique g sur Σ et un groupe fini $\bar{\Gamma}$ de $\text{Isom}^+(\Sigma, g)$ qui s'envoie isomorphiquement sur Γ par le morphisme naturel $\text{Diff}^+(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma)$. Orientons le bord d et définissons l'application

$$\theta : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

qui à toute isométrie \bar{K} associe l'angle de la rotation induite par \bar{K} sur d , cet angle est un réel modulo 2π . Il est clair que θ est un morphisme. D'après le lemme 3.16, toute isométrie qui fixe d point par point est l'identité, donc θ est un morphisme injectif. Ainsi Γ est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc Γ est cyclique. \square

3.3.2 Ordre maximal des mapping classes et groupes finis en fonction de la surface.

Chercher l'ordre maximal des mapping classes périodiques sur une surface donnée ou chercher l'ordre du plus grand sous-groupe fini du mapping class group d'une surface donnée revient au même lorsque cette surface a du bord, d'après le lemme 3.19. Dans ce qui suit, on rappelle la formule de Riemann-Hurewicz (lemme 3.20), un calcul de caractéristique d'Euler, de laquelle découle le calcul de l'ordre maximal

- d'une mapping class périodique dans une surface de genre nul (corollaire 3.23),
- d'une mapping class périodique dans une surface à bord (corollaires 3.24 et 3.25),
- des sous-groupes finis dans une surface sans bord (corollaire 3.26).

Le lemme suivant, dû à Hurwitz, est classique et sa preuve est laissée au lecteur.

Lemme 3.20 (Formule de Riemann-Hurwitz).

Soit Σ une surface éventuellement à bord et soit Γ un sous-groupe fini d'ordre m de $\text{Diff}^+(\Sigma)$, tel que $m \geq 1$. Alors Σ/Γ est une surface et le quotient naturel $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma/\Gamma$ est un revêtement ramifié. Soit Q_1, \dots, Q_ℓ les points de ramification de π , et, pour $1 \leq i \leq \ell$, soit $o(Q_i)$ le nombre d'antécédents de Q_i par π . Alors les caractéristiques d'Euler de Σ et Σ/Γ (en tant que surface) sont liées par la formule :

$$\chi(\Sigma) + \sum_{i=1}^{\ell} (m - o(Q_i)) = m \cdot \chi(\Sigma/\Gamma) .$$

\square

Définition 3.21 (Points de ramification et points singuliers).

Les points de Σ/Γ dont le nombre d'antécédents par la projection $\Sigma \rightarrow \Sigma/\Gamma$ est strictement inférieur à $|\Gamma|$ sont appelés *points de ramifications*. Leurs antécédents dans Σ sont appelés *points singuliers*.

Remarque.

- Pour tout i , le groupe Γ agit transitivement sur $\pi^{-1}(\{Q_i\})$. Pour cette raison, le cardinal $o(Q_i)$ de $\pi^{-1}(\{Q_i\})$ divise m .
- Lorsque Γ est engendré par un seul élément f , pour tout $i \leq \ell$, l'action de f sur $\pi^{-1}(\{Q_i\})$ est cyclique, donc $\pi^{-1}(\{Q_i\})$ appartient à $\text{Fix}(f^{o(Q_i)})$, l'ensemble des points fixes de $f^{o(Q_i)}$. Or d'après le théorème de Lefschetz, le nombre de points fixes de f et de ses itérées ne dépend que de la classe d'isotopie de f (précisons que dans le théorème de Lefschetz, le nombre de points fixes tient compte de l'ordre de multiplicité de chaque point fixe, mais dans le cas d'isométries différentes de l'identité, cet entier vaut toujours 1). Donc la donnée de ℓ et de $\{o(Q_i), 1 \leq i \leq \ell\}$ est un invariant de la classe d'isotopie de f . Puisque $\chi(\Sigma/\langle f \rangle)$ ainsi que le nombre de bords de $\Sigma/\langle f \rangle$ sont aussi invariants par isotopie sur f , la surface $\Sigma/\langle f \rangle$ elle-même est un invariant de la classe d'isotopie de f .
- Ce lemme conjointement avec le théorème de Kerckhoff a de nombreux corollaires dont en voici quelques uns que l'on utilisera au cours de cette thèse.

L'ordre maximal des mapping classes périodiques sur une surface et le nombre de bords fixés / points fixes dans cette surface varient en sens inverse. Plus précisément :

Corollaire 3.22 (Points fixes et de bords préservés par une mapping class périodique).

Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et soit F une mapping class de $\text{Mod}(\Sigma)$ périodique d'ordre m . Alors, la somme du nombre de composantes de bords préservées par F et du nombre de points fixes de F est majorée par $2 + \frac{2g}{m-1}$.

Démonstration. Soit \bar{F} un difféomorphisme d'ordre m représentant F . Soit b' le nombre de bords préservés par \bar{F} et soit ℓ' le nombre de points fixes de \bar{F} . Soit \mathcal{D} l'ensemble des bords de Σ qui ne font pas partis des b' bords fixés par \bar{F} . Soit Σ' la surface Σ dont chacun des bords de \mathcal{D} ont été rebouchés. Soit \bar{F}' le difféomorphisme induit par \bar{F} dans Σ' . Appliquons le lemme 3.20 à \bar{F}' en reprenant les notations introduites dans son énoncé. L'ordre m de \bar{F}' (égale à l'ordre de \bar{F}) coïncide avec l'ordre du groupe $\Gamma = \langle \bar{F}' \rangle$. Remarquons en outre que :

- $\chi(\Sigma') = 2 - 2g - b'$;
- pour tout point fixe Q , $o(Q) = 1$;
- $\sum_{i=1}^{\ell'} (m - o(Q_i)) \geq \ell'(m - 1)$;
- $\chi(\Sigma'/\Gamma) \leq 2 - b'$.

Finalement, on obtient :

$$(2 - 2g - b') + \ell'(m - 1) \leq m.(2 - b'),$$

d'où :

$$(m - 1)b' + \ell'(m - 1) \leq 2(m - 1) + 2g,$$

d'où la formule : $b' + \ell' \leq 2 + \frac{2g}{m-1}$. □

Le corollaire suivant est le cas particulier où $g = 0$.

Corollaire 3.23 (Mapping casses périodiques sur une sphère).

Soit S une sphère à trous et F une mapping class périodique de $\text{Mod}(S)$. S'il existe au moins trois bords dans S chacun préservé par F , alors F est l'identité de $\text{Mod}(S)$. □

Corollaire 3.24 (Ordre des mapping classes périodiques dans les surfaces à bord).

L'ordre des mapping classes périodiques dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{g,b})$ avec $g \geq 1$ et $b \geq 1$ est :

- inférieur ou égal à $6|\chi(\Sigma)|$ lorsque $b = 1$,
- inférieur ou égal à $2|\chi(\Sigma)|$ lorsque $b = 2$,
- inférieur ou égal à $|\chi(\Sigma)|$ lorsque $b \geq 3$.

Démonstration. Reprenons la formule de Riemann-Hurewicz (lemme 3.20) appliqué à une mapping class F périodique d'ordre m dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$:

$$\chi(\Sigma) + \sum_{i=1}^{\ell} \left(m - \frac{m}{q_i} \right) = m \cdot \chi(\Sigma') \quad (1)$$

où $q_i = \frac{m}{o(Q_i)}$ et où $\Sigma' = \Sigma / \langle F \rangle$. Remarquons que puisque F appartient à $\mathcal{PMod}(\Sigma)$, Σ' possède le même nombre de composantes de bords que Σ . Si $\chi(\Sigma') < 0$, alors on déduit de (1) que $m \leq |\chi(\Sigma)|$. Or lorsque $b \geq 3$, Σ' possède au moins trois bords, donc $\chi(\Sigma') < 0$, donc $m \leq |\chi(\Sigma)|$ et l'énoncé est prouvé dans ce cas là.

Lorsque $b = 1$ ou $b = 2$, si $\chi(\Sigma') < 0$, le résultat est prouvé de la même manière. Supposons donc que $b = 1$ ou $b = 2$ et que $\chi(\Sigma') \geq 0$. Puisque F est une mapping class qui respecte l'orientation et que $\chi(\Sigma') \geq 0$, Σ' est un disque si $b = 1$ ou un anneau si $b = 2$. Distinguons les cas selon que $b = 1$ ou $b = 2$.

- Cas où $b = 1$. Reprenons l'égalité (1). On la divise par $-m$, on remplace $\chi(\Sigma')$ par 1 et on obtient :

$$\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{q_i} = \ell - 1. \quad (2)$$

Il vient les résultats suivants :

- si $\ell \in \{0, 1\}$, alors l'équation (2) ne peut être vérifiée ;
- si $\ell = 2$, $\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$ implique que $\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} \geq \frac{1}{6}$ car pour tous entiers q_1 et q_2 , on a $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq 1$ ou $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Donc $m \leq 6|\chi(\Sigma)|$;
- si $\ell \geq 3$, il vient $\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} + \frac{\ell}{2} \geq \frac{|\chi(\Sigma)|}{m} + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{q_i} = \ell - 1$, d'où $\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} \geq \frac{1}{2}$ (le cas extrême a

lieu lorsque $\ell = 3$ et $q_1 = q_2 = q_3 = 2$). Donc $m \leq 2|\chi(\Sigma)|$.

Finalement, lorsque $b = 1$, on vérifie toujours $m \leq 6|\chi(\Sigma)|$.

- Cas où $b = 2$. L'égalité (1) devient :

$$\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{q_i} = \ell. \quad (3)$$

Il vient les résultats suivants :

- si $\ell = 0$, alors l'équation (3) ne peut être vérifiée ;
- si $\ell \geq 1$, il vient $\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} + \frac{\ell}{2} \geq \frac{|\chi(\Sigma)|}{m} + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{q_i} = \ell$, d'où $\frac{|\chi(\Sigma)|}{m} \geq \frac{1}{2}$ (le cas extrême a lieu lorsque $\ell = 1$ et $q_1 = 2$). Donc $m \leq 2|\chi(\Sigma)|$.

Finalement, lorsque $b = 2$, on vérifie toujours $m \leq 2|\chi(\Sigma)|$. □

Précisons les choses lorsque la surface est de genre 1 :

Lemme 3.25 (Ordre des mapping classes périodiques dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{1,b})$, $b \geq 1$).

L'ordre maximal des mapping classes périodiques de $\mathcal{PMod}(\Sigma_{1,b})$, $b \geq 1$, est 6.

Démonstration. Notons m l'ordre d'une mapping class vivant dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{1,b})$. Lorsque $b = 1$, on a $m \leq 6|\chi(\Sigma_{1,1})|$ d'après le corollaire 3.24, donc $m \leq 6$. Lorsque $b = 2$, on a $m \leq 2|\chi(\Sigma_{1,2})|$ d'après le corollaire 3.24, donc $m \leq 4$. Enfin, lorsque $b \geq 3$, l'équation $b \leq 2 + \frac{2g}{m-1}$

provenant du lemme 3.22 implique que $m \leq 3$ (rappelons que $g = 1$). Finalement, pour tout b supérieur ou égal à 1, on a $m \leq 6$. Le cas $m = 6$ est atteint par exemple par la classe d'isotopie du difféomorphisme du tore à un trou provenant du difféomorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d'ordre 6. \square

Enfin le résultat suivant est un corollaire technique du lemme 3.20, qui fournit une borne au cardinal d'un sous-groupe fini du mapping class group d'une surface Σ de genre g . Il est dû à Hurwitz. Nous le donnons sans démonstration. Pour une référence, voir [FaMa], section 6.2.

Corollaire 3.26 (Le théorème « 84(g-1) »).

Soit Σ une surface connexe sans bord de genre au moins 2. Alors l'ordre d'un sous-groupe fini du mapping class group est majoré par la borne $42|\chi(\Sigma)|$ égale à $84(g - 1)$. \square

3.4 Les mapping classes pseudo-Anosov

Dans les chapitres ultérieurs, les seuls faits qu'on utilisera sur les mapping classes pseudo-Anosov sont la définition 3.27 et les deux résultats qui suivent (la proposition 3.30 et le théorème 3.32). Cependant, la démonstration de la proposition 3.30 fait appel à la théorie des *difféomorphismes pseudo-Anosov* que l'on présente plus bas au paragraphe 3.5. Si l'on accepte cette proposition 3.30, on peut sauter le paragraphe 3.5 et continuer la lecture au paragraphe 3.6.

La définition suivante des mapping classes pseudo-Anosov est équivalente à la définition historique des mapping classes pseudo-Anosov, elle a l'avantage sur cette dernière de proposer un énoncé très simple. Elle peut être vue comme une conséquence des travaux de Thurston.

Définition 3.27 (Mapping classes pseudo-Anosov).

Pour toute surface Σ connexe non homéomorphe à un pantalon, une mapping class $F \in \mathcal{M}od(\Sigma)$ qui vérifie $F^k(a) \neq a$ pour toute courbe a appartenant à $\mathcal{C}ourb(\Sigma)$ et tout entier non nul k est dite *pseudo-Anosov*.

Remarque. Conformément à cette définition, il n'existe pas de mapping class pseudo-Anosov sur un pantalon. On peut prouver directement que les mapping classes sur un pantalon sont toutes périodiques si les bords peuvent être permutés, ou sont triviales s'ils ne le sont pas. De façon générale, une mapping class ne peut pas être à la fois périodique et pseudo-Anosov.

La prochaine proposition fait appel à la définition suivante :

Définition 3.28 ($\widetilde{\mathcal{C}entr}(F)$).

Etant donnée une surface Σ , pour toute mapping class pseudo-Anosov F appartenant à $\mathcal{M}od(\Sigma)$, on note $\widetilde{\mathcal{C}entr}(F)$ le sous-groupe de $\mathcal{M}od(\Sigma)$ constitué des mapping classes G telles qu'il existe un entier non nul m tel que G et F^m commutent.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Lemme 3.29. *Quels que soient les entiers $k \neq 0$, $k' \neq 0$ et les mapping classes pseudo-Anosov $F, F' \in \mathcal{M}od(\Sigma)$,*

$$i) \widetilde{\mathcal{C}entr}(F^k) = \widetilde{\mathcal{C}entr}(F).$$

ii) Si $F^k = (F')^{k'}$, alors $\widetilde{\text{Centr}}(F) = \widetilde{\text{Centr}}(F')$. □

Le paragraphe 3.5 est consacré à la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 3.30 (Structure de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$). *Soit Σ une surface connexe sans bord et soit F une mapping class pseudo-Anosov dans $\text{Mod}(\Sigma)$. Il existe un morphisme surjectif $\ell_F : \widetilde{\text{Centr}}(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) *Le noyau $\text{Ker}(\ell_F)$ coïncide avec l'ensemble des mapping classes d'ordre fini de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$.*
- ii) *Le noyau $\text{Ker}(\ell_F)$ est un groupe d'ordre inférieur ou égal à $6|\chi(\Sigma)|$.*
- iii) *Le morphisme ℓ_F ne dépend pas de F , mais uniquement de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ à un facteur -1 près. Si deux pseudo-Anosov F et F' sont tels qu'il existe deux entiers positifs p et q tels que $F^p = F'^q$, alors $\widetilde{\text{Centr}}(F) = \widetilde{\text{Centr}}(F')$ et $\ell_F = \ell_{F'}$.*

En corollaire vient le résultat suivant dû à McCarthy « *le centralisateur d'un pseudo-Anosov dans $\text{Mod}(\Sigma)$ est virtuellement infini cyclique* ». Ce résultat est vrai également pour $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ lorsque F est une mapping class pseudo-Anosov. Rappelons la définition de *groupe virtuellement cyclique*, puis énonçons le corollaire.

Définition 3.31 (Groupe virtuellement infini cyclique).

On dit qu'un groupe est *virtuellement cyclique* s'il est fini ou contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini.

Théorème 3.32 (J.D. McCarthy [Mc2]). *Soit Σ une surface admissible et F une mapping class pseudo-Anosov de $\text{Mod}(\Sigma)$. Alors $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ est virtuellement infini cyclique.*

Démonstration. Soit M une mapping class de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ tel que $\ell(M) = 1$. Alors l'ensemble quotient $\widetilde{\text{Centr}}(F)/\langle M \rangle$ est en bijection avec $\text{Ker}(\ell)$, donc $[\widetilde{\text{Centr}}(F) : \langle M \rangle] = |\text{Ker}(\ell)|$. Ainsi $\langle M \rangle$ est un sous-groupe infini cyclique d'indice fini de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$. □

Le but du prochain paragraphe est de développer (en surface) la théorie pseudo-Anosov de façon à prouver la proposition 3.30.

3.5 Théorie des difféomorphismes pseudo-Anosov.

Nous allons maintenant rappeler les résultats fondamentaux de la théorie des *difféomorphismes pseudo-Anosov* sur des surfaces sans bords, afin de prouver la proposition 3.30. Il existe une littérature très riche concernant cette théorie. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous appuyerons principalement sur l'article de C. Bonatti et L. Paris [BoPa], section 2. Les références classiques sont [FLP], [Th], [BlCa], [Iv1]. Commençons par une remarque sur la terminologie concernant les « difféomorphismes pseudo-Anosov ». Dans tout le paragraphe 3.5, Σ désignera une surface sans bord.

Difféomorphismes et homéomorphismes pseudo-Anosov. Rappelons que les « difféomorphismes pseudo-Anosov » sur une surface Σ sont en fait à la fois des homéomorphismes sur Σ , et des difféomorphismes sur Σ privé d'un nombre fini de points, au voisinage desquels on connaît l'allure de ces homéomorphismes (les *points singuliers*, cf. [BoPa]). A ce sujet, C. Bonatti et L. Paris [BoPa] parlent d'« homéomorphismes pseudo-Anosov » quand nous parlons de

« difféomorphismes pseudo-Anosov », mais il s'agit bien des mêmes objets. Rappelons également qu'il existe des difféomorphismes au sens strict dans la classe d'isotopie d'un « difféomorphisme pseudo-Anosov » et qu'un « difféomorphisme pseudo-Anosov » définit toujours une unique classe d'isotopie de difféomorphismes au sens strict, i.e. définit bien une unique mapping class.

Propriétés des difféomorphismes pseudo-Anosov. Le théorème fondamental de la théorie pseudo-Anosov, dû à Thurston (cf. [Ca], [Th]), est le suivant :

Une mapping class $F \in \mathcal{M}(\Sigma)$ est pseudo-Anosov au sens de la définition 3.27, si et seulement s'il existe un « difféomorphisme pseudo-Anosov » (cf. ci-après) $\bar{F} \in \text{Diff}(\Sigma)$ représentant F .

En guise de définition de « *difféomorphisme pseudo-Anosov* », on se contente de décrire certaines de leurs propriétés ci-dessous. Pour cela, on se donne un « *difféomorphisme pseudo-Anosov* » quelconque \bar{F} appartenant à $\text{Diff}(\Sigma)$ (on réserve les lettres capitales pour les mapping classes de $\text{Mod}(\Sigma)$ et les lettres capitales avec une barre au-dessus pour les difféomorphismes de $\text{Diff}(\Sigma)$). Alors par définition, \bar{F} vérifie les propriétés suivantes :

Les feuilletages \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^u , le groupe $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ et le morphisme L . Il existe deux feuilletages uniques transverses \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u associés à \bar{F} appelés *feuilletages stable et instable*, invariants par \bar{F} et munis de *mesures transverses invariantes* (cf. [BoPa]). Notons $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ l'ensemble des difféomorphismes de $\text{Diff}(\Sigma)$ qui préservent \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u . Les difféomorphismes de $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ sont pseudo-Anosov ou d'ordre fini. La proposition 3.34 donne les principales propriétés du logarithme du *coefficient de dilatation* $\lambda^u(\cdot)$ (cf. [BoPa]) des difféomorphismes de $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ à travers un morphisme

$$L : \begin{array}{ccc} \text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{G} & \longmapsto & \log(\lambda^u(\bar{G})) \end{array} .$$

Nous n'utiliserons pas la définition de coefficient de dilatation, mais uniquement l'existence du morphisme L et la proposition 3.34 ci-dessous.

Points singuliers, séparatrices et indice. Le feuilletage \mathcal{F}^u associé à \bar{F} contient un nombre fini de *points singuliers* (cf. [BoPa]), ils sont confondus avec les points singuliers de \mathcal{F}^s . On note \mathcal{S} l'ensemble des points singuliers. De chaque point singulier part un nombre fini $k \geq 1$ de feuilles appelées *séparatrices* (cf. [BoPa]). L'entier k associé à un point singulier P est noté $\text{Ind}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u : P)$, est appelé *l'indice de $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ au point singulier P* , et est toujours supérieur ou égal à 3. Tous les éléments de $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ envoient les points singuliers sur des points singuliers de même indice. Chaque séparatrice contient un unique point singulier (cf. [BoPa] proposition 2.1, assertion (3)). Les indices et la caractéristique d'Euler de Σ sont reliés par la proposition suivante (cf. [FLP], Exposé 5) :

Proposition 3.33.

$$\chi(\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{S}} \left(1 - \frac{\text{Ind}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u : P)}{2} \right).$$

Proposition 3.34 (Propriétés de L). *Le morphisme $L : \text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u) \rightarrow \mathbb{R}$ (dépendant du difféomorphisme pseudo-Anosov \bar{F}) vérifie les cinq propriétés suivantes :*

- i) le réel $L(\bar{F})$ vérifie $L(\bar{F}) > 0$,*
- ii) l'image de L est isomorphe à \mathbb{Z} ,*

- iii) le noyau $\text{Ker}(L)$ agit librement sur l'ensemble des séparatrices de \mathcal{F}^u ,
- iv) le noyau $\text{Ker}(L)$ est de cardinal fini.

Démonstration.

- i) Par définition du coefficient de dilatation, $L(F) = \log(\lambda^u(F))$ vérifie $L(F) > 0$ car $\lambda^u(F) > 1$ (cf. [FLP], Exposé 9).
- ii) On se réfère à [ArYo] pour ce résultat.
- iii) Puisque $\text{Ker}(L)$ est inclus dans $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$, $\text{Ker}(L)$ préserve \mathcal{F}^u et permute les séparatrices. L'action induite par $\text{Ker}(L)$ sur l'ensemble des séparatrices de \mathcal{F}^u est libre d'après le lemme 2.11 de [BoPa] (le groupe $\text{Ker}(L)$ est noté $\text{Sym}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ dans [BoPa]).
- iv) Puisque \mathcal{S} est fini et qu'en chaque point singulier part un nombre fini de séparatrices, l'ensemble des séparatrices est un ensemble fini. Or $\text{Ker}(L)$ agit librement dessus, donc $\text{Ker}(L)$ est de cardinal fini. \square

Rappelons que pour toute mapping class pseudo-Anosov $F \in \text{Mod}(\Sigma)$, on a défini $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ comme étant l'ensemble des mapping classes $G \in \text{Mod}(\Sigma)$ telles qu'il existe un entier non nul m tel que G et F^m commutent (cf. définition 3.28).

Précisons que le groupe $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ contient le centralisateur de F , mais n'y est pas égal en général. Cette définition est posée en vue de la proposition suivante établissant un isomorphisme entre $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ et $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$.

Proposition 3.35 (Réalisation de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ dans $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$).

Soit F une mapping class pseudo-Anosov de $\text{Mod}(\Sigma)$ et soient \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u les deux feuilletages stable et instable d'un difféomorphisme pseudo-Anosov représentant F . Alors il existe un unique isomorphisme

$$\psi : \begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Centr}}(F) & \longrightarrow & \text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u) \\ G & \longmapsto & \bar{G} \end{array}$$

où pour tout $G \in \widetilde{\text{Centr}}(F)$, \bar{G} est un représentant de G appartenant à $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$.

Démonstration. On démontre plutôt l'existence de l'isomorphisme inverse de ψ que l'on note dans cette démonstration

$$\phi : \begin{array}{ccc} \text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u) & \longrightarrow & \widetilde{\text{Centr}}(F) \\ \bar{G} & \longmapsto & G \end{array}$$

où G est la classe d'isotopie de \bar{G} . Dans toute cette preuve, soit \bar{F} le représentant de F que l'on a choisi pour définir les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u . Il existe un entier non nul k tel que \bar{F}^k fixe toutes les séparatrices.

Montrons d'abord que ϕ est bien défini. Pour tout difféomorphisme \bar{G} appartenant à $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$, $\bar{G}\bar{F}^k\bar{G}^{-1}\bar{F}^{-k}$ appartient à $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ et fixe toutes les séparatrices. Or puisque L est un morphisme dans \mathbb{R} , $L(\bar{G}\bar{F}^k\bar{G}^{-1}\bar{F}^{-k}) = 0$, donc $\bar{G}\bar{F}^k\bar{G}^{-1}\bar{F}^{-k} = \text{Id}$ et \bar{G} commute avec \bar{F}^k , donc G appartient à $\widetilde{\text{Centr}}(F)$.

Montrons que le morphisme ϕ est injectif. Pour tout difféomorphisme $\bar{A} \in \text{Ker}(\phi)$, \bar{A} est isotope à l'identité. Alors \bar{A} préserve les classe d'isotopie de courbes, donc \bar{A} ne peut pas être pseudo-Anosov, donc \bar{A} est un difféomorphisme d'ordre fini isotope à l'identité. Alors, d'après [FLP], exposé 12, \bar{A} est l'identité.

Montrons enfin que le morphisme ϕ est surjectif. Soit G un élément de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$: il existe un entier non nul ℓ tel que G et F^ℓ commutent. Alors soit \bar{G}' un représentant de G dans $\text{Diff}(\Sigma', \mathcal{P})$;

\bar{G}' vérifie $\bar{G}'\bar{F}^\ell\bar{G}'^{-1}$ est isotope à \bar{F}^ℓ , donc d'après le théorème III, exposé 12 dans [FLP] (voir aussi théorème 2.14 dans [BoPa]), il existe un difféomorphisme \bar{H} isotope à l'identité tel que $\bar{H}\bar{G}'\bar{F}^\ell(\bar{H}\bar{G}')^{-1} = \bar{F}^\ell$. Posons $\bar{G} = \bar{H}\bar{G}'$. On a alors $\bar{G}\bar{F}^\ell\bar{G}^{-1} = \bar{F}^\ell$. Donc \bar{G} préserve les feuilletages stable et instable de \bar{F}^ℓ , donc \bar{G} appartient à $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$. Ainsi tout G de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ a un antécédent dans $\text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$. \square

On est maintenant en mesure de prouver la proposition 3.30, dont on redonne l'énoncé :

Proposition 3.30. *Soit Σ une surface connexe sans bord et soit F une mapping class pseudo-Anosov dans $\text{Mod}(\Sigma)$. Il existe un morphisme surjectif $\ell_F : \widetilde{\text{Centr}}(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) *Le noyau $\text{Ker}(\ell_F)$ coïncide avec l'ensemble des mapping classes d'ordre fini de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$.*
- ii) *Le noyau $\text{Ker}(\ell_F)$ est un groupe d'ordre inférieur ou égal à $6|\chi(\Sigma)|$.*
- iii) *Le morphisme ℓ_F ne dépend pas de F , mais uniquement de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ à un facteur -1 près. Si deux pseudo-Anosov F et F' sont tels qu'il existe deux entiers positifs p et q tels que $F^p = F'^q$, alors $\widetilde{\text{Centr}}(F) = \widetilde{\text{Centr}}(F')$ et $\ell_F = \ell_{F'}$.*

Démonstration. Soit Σ une surface sans bord. D'après la proposition 3.35, il existe un isomorphisme $\psi : \widetilde{\text{Centr}}(F) \rightarrow \text{Norm}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$, $G \mapsto \bar{G}$, tel que \bar{G} soit un représentant de G . Soit ℓ_F le morphisme $L \circ \psi$ renormalisé, de sorte que $\text{Im}(\ell_F) = \mathbb{Z}$. Démontrons les points i), ii) et iii).

i) Il est clair que pour tout $G \in \widetilde{\text{Centr}}(F)$, si $\ell_F(G) \neq 0$, pour tout entier m différent de 1, $\ell_F(G^m) \neq \ell_F(G)$, donc G n'est pas d'ordre fini. Par contre, $\text{Ker}(\ell_F)$ est égal à $\psi^{-1}(\text{Ker}(L))$ qui est fini, donc les éléments de $\text{Ker}(\ell_F)$ sont d'ordre fini.

ii) Le morphisme ψ est un isomorphisme d'après la proposition 3.35, donc $\text{Ker}(\ell)$, qui est égal à $\text{Ker}(L \circ \psi)$, est isomorphe à $\text{Ker}(L)$. Calculons le cardinal de $\text{Ker}(L)$ dont on sait qu'il est fini d'après la proposition 3.34.iv).

Rappelons que tous les points singuliers sont d'indice au moins 3. Partons de la proposition 3.33 :

$$\chi(\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{S}} \left(1 - \frac{\text{Ind}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u : P)}{2} \right).$$

La surface Σ est de caractéristique d'Euler strictement négative, donc l'ensemble des points singuliers n'est pas vide. Posons X l'ensemble des séparatrices de \mathcal{F}^u . Soit P un point singulier et notons $k = \text{Ind}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u : P)$. Les k séparatrices issues de P ont conjointement une contribution de $1 - \frac{k}{2}$ à la caractéristique d'Euler de Σ , donc ont chacune une contribution de $\frac{1}{k} - \frac{1}{2}$. Ainsi, puisque $k \geq 3$, la contribution par séparatrice issue de P à la caractéristique d'Euler de Σ est inférieure ou égale à $-\frac{1}{6}$. Ceci étant également vrai pour toutes les séparatrices de \mathcal{F}^u , l'ensemble X des séparatrices de \mathcal{F}^u doit être de cardinal au plus $6|\chi(\Sigma)|$. Or l'action de $\text{Ker}(L)$ sur X est libre d'après la proposition 3.34.iii), donc $\text{Ker}(L)$ est de cardinal inférieur ou égal celui de X , d'où :

$$|\text{Ker}(L)| \leq 6|\chi(\Sigma)|.$$

Or $\text{Ker}(L)$ est isomorphe à $\text{Ker}(\ell_F)$ via ψ , donc :

$$|\text{Ker}(\ell_F)| \leq 6|\chi(\Sigma)|.$$

iii) Soit G une mapping class pseudo-Anosov telle que $\widetilde{\text{Centr}}(G) = \widetilde{\text{Centr}}(F)$ et soient ℓ_G et ℓ_F les deux morphismes associés à G et F . Les éléments périodiques de $\widetilde{\text{Centr}}(G)$ et de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ sont les mêmes donc $\text{Ker}(\ell_G) = \text{Ker}(\ell_F)$. On a donc le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes et les flèches verticales pleines sont des égalités, donc la flèche en pointillés est un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \text{Ker}(\ell_G) & \longrightarrow & \widetilde{\text{Centr}}(G) & \xrightarrow{\ell_G} & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow = & & \downarrow = & & \vdots \\
1 & \longrightarrow & \text{Ker}(\ell_F) & \longrightarrow & \widetilde{\text{Centr}}(F) & \xrightarrow{\ell_F} & \mathbb{Z} \longrightarrow 1
\end{array}$$

Or ℓ_F (respectivement ℓ_G) est l'application quotient $\widetilde{\text{Centr}}(G) \rightarrow \widetilde{\text{Centr}}(G)/\text{Ker}(\ell_G) \cong \mathbb{Z}$ (resp. $\widetilde{\text{Centr}}(F) \rightarrow \widetilde{\text{Centr}}(F)/\text{Ker}(\ell_F) \cong \mathbb{Z}$). Donc ℓ_G et ℓ_F coïncident à un isomorphisme de \mathbb{Z} près. Or le seul isomorphisme non trivial de \mathbb{Z} envoie 1 sur -1 .

Soient F et F' deux pseudo-Anosov tels qu'il existe deux entiers positifs p et q tels que $F^p = F'^q$, soient ℓ_F et $\ell_{F'}$ les deux morphismes associés à F et F' . Le fait $F^p = F'^q$ implique que $\widetilde{\text{Centr}}(F) = \widetilde{\text{Centr}}(F')$, donc d'après ce qui précède, $\ell = \ell'$ ou $\ell = -\ell'$. Soient u et v les deux entiers positifs tels que $\ell_F(F) = u$ et $\ell_{F'}(F') = v$. Alors $\ell_F(F^p) = pu$ et $\ell_{F'}(F'^q) = qv$, donc $\ell_F(F^p)$ et $\ell_{F'}(F'^q)$ sont de mêmes signes, donc $\ell_F = \ell_{F'}$. \square

Remarque. Dans le cas général, $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ est un produit semi-direct $\text{Per} \rtimes \mathbb{Z}$ où Per est le sous-groupe fini de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$ constitué des éléments d'ordre fini de $\widetilde{\text{Centr}}(F)$. En effet, la suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Per} \xrightarrow{\text{incl.}} \widetilde{\text{Centr}}(F) \xrightarrow{\ell_F} \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

est scindée puisque l'avant dernier terme de la suite est \mathbb{Z} . Cependant, le produit n'est direct que s'il existe une mapping class pseudo-Anosov appartenant à $\ell_F^{-1}(\{1\})$, dont l'action sur les séparatrices est triviale.

3.6 Théorie de Thurston, système de réduction essentiel

Birman, Lubotsky et McCarthy, ainsi que Ivanov ont classifié les mapping classes en fonction d'un ensemble de courbes caractéristiques appelées *courbes de réduction essentielles*, cf. la définition 3.37. L'ensemble de ces courbes est lui-même appelé *système de réduction canonique*, cf. la définition 3.39.

Définition 3.36 (Courbes de réduction).

On appelle *courbe de réduction* d'une mapping class $F \in \text{Mod}(\Sigma)$ une (classe d'isotopie de) courbe a telle que l'ensemble $\{F^i(a), i \in \mathbb{N}\}$ soit fini et constitue un simplexe de courbes de $\text{Courb}(\Sigma)$.

En particulier, il existe un entier non nul m vérifiant $F^m(a) = a$. Si \mathcal{A} est un simplexe de courbes de réduction de F qui est F -stable, alors la mapping class F induit une mapping class \widehat{F} dans $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$. En notant $\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ le groupe des mapping classes F préservant le simplexe de courbes \mathcal{A} , on a le morphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma) & \longrightarrow & \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}) \\
\wedge : F & \longmapsto & \widehat{F}
\end{array}$$

La définition qui suit a été donnée et exploitée dans [BiLuMc] et [Iv] :

Définition 3.37 (Courbes de réduction essentielles).

Une courbe de réduction d'une mapping class F est dite *essentielle* s'il n'existe aucune autre courbe de réduction de F qui est d'intersection géométrique non nulle avec elle.

Le lemme suivant est évident compte-tenu de la définition de courbes de réduction essentielle.

Lemme 3.38. *L'ensemble de toutes les courbes de réduction essentielles d'une mapping class F est un simplexe F -stable.* \square

Définition 3.39 (Système de réduction canonique σ).

L'ensemble des courbes de réduction essentielle d'une mapping class F est noté $\sigma(F)$ et est appelé *système de réduction canonique* de F .

Le système de réduction canonique possède les propriétés suivantes que l'on utilisera tout au long de ces pages. La démonstration se trouve dans [BiLuMc] et dans [Iv].

Proposition 3.40 (Propriétés de σ).

Soient F et G deux mapping classes quelconques. Alors :

- i) $G(\sigma(F)) = \sigma(GFG^{-1})$;
- ii) pour tout entier m non nul, $\sigma(F^m) = \sigma(F)$;
- iii) si F et G commutent, les courbes de $\sigma(F)$ sont des courbes de réduction pour G et réciproquement. En particulier, $I(\sigma(F), \sigma(G)) = 0$;
- iv) $\sigma(F)$ est vide si et seulement si F est périodique ou pseudo-Anosov. \square

Définition 3.41 (Système adéquatement réduit, composante pseudo-Anosov).

Un simplexe \mathcal{A} de courbes de réduction d'une mapping class F est dit *adéquatement réduit* s'il existe un entier non nul m tel que \widehat{F}^m fixe globalement chaque composante connexe de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ et \widehat{F}^m induit sur chaque composante connexe de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ une mapping class périodique ou pseudo-Anosov. Un tel entier m étant donné, une composante connexe de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ sur laquelle la restriction de \widehat{F}^m est pseudo-Anosov est appelée *composante pseudo-Anosov relativement à F* (on vérifie que cette définition est indépendante de m).

Alors le théorème de classification de Nielsen-Thurston, revu par Birman, Lubotzky, McCarthy et Ivanov s'énonce ainsi :

Théorème 3.42 (Théorème de classification de Nielsen-Thurston revisité, [BiLuMc] et [Iv1]).

Soit Σ une surface et soit F une mapping class de $\text{Mod}(\Sigma)$. Un système de réduction \mathcal{A} pour F est adéquatement réduit si et seulement si \mathcal{A} contient le système de réduction canonique $\sigma(F)$. \square

En guise de premier exemple, le lemme suivant décide si une courbe de réduction doit être une courbe de réduction essentielle ou non, en fonction du comportement de la restriction de la mapping class à une sous-surface contenant cette courbe. En corollaire, on prouvera le lemme 3.12 dont on avait reporté la démonstration, puis on donnera la proposition 3.46, établissant un lien entre les systèmes de réduction canoniques de deux mapping classes et de leur produit lorsque ces deux mapping classes commutent.

Lemme 3.43 (Système de réduction canonique sur des sous-surfaces).

Soit Σ une surface et Σ' une sous-surface de Σ non homéomorphe à un pantalon. Soit F une mapping class de $\text{Mod}(\Sigma)$ qui préserve Σ' et soit F' dans $\text{Mod}(\Sigma')$ la restriction de F à Σ' .

- 1°) S'il existe une courbe de réduction de F dans $\text{Courb}(\Sigma)$ non incluse dans $\Sigma \setminus \Sigma'$, alors il existe une courbe de réduction d'une puissance non nulle de F' dans $\text{Courb}(\Sigma')$.
- 2°) Soit x une courbe appartenant à $\text{Courb}(\Sigma')$. S'il existe une courbe de réduction de F dans $\text{Courb}(\Sigma)$ qui intersecte x , alors il existe une courbe de réduction d'une puissance non nulle de F' dans $\text{Courb}(\Sigma')$ qui intersecte x .
- 3°) Toute courbe de $\sigma(F)$ non isotope à un bord de Σ' est incluse soit dans Σ' , soit dans $\Sigma \setminus \Sigma'$.
- 4°) De plus, $\sigma(F') = \sigma(F) \cap \text{Courb}(\Sigma')$.

Démonstration. Le 2°) implique le 1°) : il suffit en effet de choisir une courbe x dans Σ' qui intersecte une courbe de réduction de F et d'après le 2°), il existe une courbe de réduction de F' incluse dans Σ' . Soit x une courbe de réduction de $\text{Courb}(\Sigma')$, soit c une courbe de réduction de F telle que $I(x, c) \neq 0$. On va montrer qu'il existe une courbe de réduction c' de F' telle que $I(x, c') \neq 0$.

Si c est inclus dans Σ' , il n'y a rien à démontrer. Sinon, $c \cap \Sigma'$ consiste en un nombre fini de chemins à extrémités dans $\partial\Sigma'$, et ce nombre est non nul car la courbe c intersecte la courbe x qui est incluse dans Σ' . Alors il existe un entier m non nul tel que F^m préserve chaque bord de Σ' et préserve chaque composante connexe de $c \cap \Sigma'$. Au moins l'un de ces chemins coupe la courbe x puisque $I(c, x) \neq 0$. Prenons-en un que l'on appelle d . Le chemin d est à extrémités dans un ou deux bords de Σ' . Dans les deux cas, soit P le pantalon correspondant à l'intersection de Σ' avec le voisinage tubulaire de la réunion de d et du ou des bords de Σ' contenant ses extrémités (en foncé sur les figures 15 et 16) dont F^{2m} préserve chaque bord. Remarquons qu'aucun bord de P ne borde de disque :

- si P n'a qu'un seul bord a en commun avec Σ' , alors chacun des deux autres bords est isotope à la réunion d'un chemin inclus dans a et d'un chemin inclus dans d , mais a et d ne cobordent pas de bigones, donc les deux bords de P autres que a ne bordent pas de disque ;

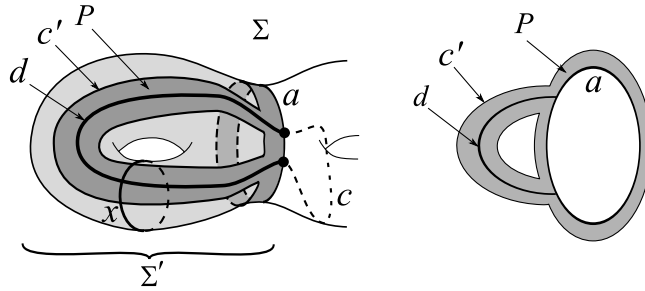


FIG. 15 – Le pantalon P dans Σ' lorsque les deux extrémités de P appartiennent au même bord a de Σ' .

- et si P a deux bords en commun avec Σ' , ces deux bords étant non isotopes dans Σ , ils ne peuvent coborder un cylindre, donc le troisième bord de P ne peut pas border de disque (ni bien sûr les deux autres car ils appartiennent à $\text{Bord}(\Sigma')$).

Remarquons aussi que la courbe x ne peut être l'un des bords de P sinon, d n'intersecterait pas x . La courbe x ne peut pas non plus être incluse dans P car toutes les courbes incluses dans un

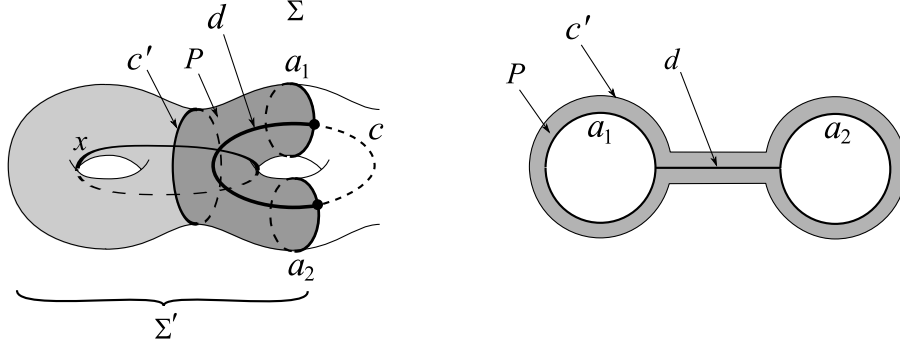


FIG. 16 – Le pantalon P dans Σ' lorsque les deux extrémités de P appartiennent à deux bords distincts a_1 et a_2 de Σ' .

pantalon sont isotopes à l'un de ses bords. Par conséquent, il existe un bord c' de P qui intersecte la courbe x . Ce bord c' ne peut pas être un bord de Σ' sinon, il n'intersecterait pas x . La courbe c' est donc une courbe de $\text{Courb}(\Sigma')$, stable par F^{2m} donc par $(F')^{2m}$, et intersectant la courbe x . C'est ce qu'il fallait démontrer.

Montrons le 3°. La mapping class F préserve Σ' , donc $F(\text{Bord}(\Sigma')) = \text{Bord}(\Sigma')$, donc les courbes de $\text{Bord}(\Sigma')$ sont des courbes de réduction de F . Or une courbe de $\sigma(F)$ n'intersecte aucune courbe de réduction de F , donc toute courbe de $\sigma(F)$ non isotope à un bord de Σ' est incluse soit dans Σ' , soit dans $\Sigma \setminus \Sigma'$.

Montrons le 4°. Soit x une courbe de réduction de F' . Si x n'est pas une courbe de réduction essentielle de F , alors il existe une courbe de réduction c de F dans $\text{Courb}(\Sigma)$ qui intersecte x . Alors d'après le 2°, il existe un entier m non nul et une courbe de réduction c' de $(F')^m$ dans $\text{Courb}(\Sigma')$ qui intersecte x . Donc x n'est pas une courbe de réduction essentielle de $(F')^m$, donc x n'est pas une courbe de réduction essentielle de F' (puisque $\sigma(F') = \sigma((F')^m)$). Autrement dit, $\sigma(F') \subset \sigma(F) \cap \text{Courb}(\Sigma')$. L'inclusion réciproque est évidente : si une courbe appartient à $\sigma(F)$, elle appartient a fortiori à $\sigma(F')$. \square

Lemme 3.44 (Caractérisation des courbes de réduction essentielles).

Soit Σ une surface et soit F appartenant à $\text{Mod}(\Sigma)$. Soit a une courbe orientée telle que F préserve a et son orientation. Alors, il existe deux sous-surfaces connexes S_1 et S_2 (éventuellement confondues) dans Σ telles que

- la courbe a borde S_1 (respectivement S_2) par la gauche (resp. par la droite),
- les surfaces S_1 et S_2 sont stables par F ,
- pour tout $i \in \{1, 2\}$, la mapping class induite par F dans $\text{Mod}(S_i)$, notée $F|_{S_i}$, est soit périodique, soit pseudo-Anosov.

Notons S_{12} la réunion de S_1 et S_2 le long de a . Notons $F|_{S_{12}}$ la mapping class induite par F dans $\text{Mod}(S_{12})$. Alors a appartient à $\sigma(F)$ si et seulement si on est dans l'un des trois cas suivants :

- a) $F|_{S_1}$ ou $F|_{S_2}$ est pseudo-Anosov ;
- b) $F|_{S_1}$ et $F|_{S_2}$ sont toutes deux périodiques de même ordre $m \geq 1$, et $F^m|_{S_{12}}$ est une puissance non nulle du twist de Dehn le long de la courbe a ;
- c) $F|_{S_1}$ et $F|_{S_2}$ sont périodiques d'ordre respectivement $m_1 \geq 1$ et $m_2 \geq 1$ avec $m_1 \neq m_2$.

Démonstration. Soit Γ l'ensemble de courbes $\sigma(F) \cup \{a\}$. Orientons a et notons S_1 (respectivement S_2) la composante connexe de Σ_Γ bordant a par la gauche (resp. par la droite). Pour tout

$i \in \{1, 2\}$, remarquons que $\sigma(F|_{S_i}) = \emptyset$, donc $F|_{S_i}$ est soit pseudo-Anosov, soit périodique. Par ailleurs, la surface S_{12} ne peut pas être un pantalon, donc il existe des courbes dans $\text{Courb}(S_{12})$ qui intersectent a .

Montrons que si a appartient à $\sigma(F)$, alors a), b) ou c) est vérifié. Les cas a), b), c) décrivent tous les cas possibles sauf celui où $F|_{S_1}$ et $F|_{S_2}$ sont périodiques d'ordre $m \geq 1$ et $F^m|_{S_{12}}$ coïncide avec l'identité. Soit c une courbe de $\text{Courb}(S_{12})$ qui intersecte a . Cette courbe c est préservée par F^m , donc c est une courbe de réduction de F^m , donc a ne peut pas appartenir à $\sigma(F^m)$, donc a n'appartient pas non plus à $\sigma(F)$.

Montrons maintenant que chacun des cas a), b), c) implique que $a \in \sigma(F)$ (ou qu'il existe un entier p tel que $a \in \sigma(F^p)$, ce qui est équivalent).

Dans le cas a), appelons Σ' la sous-surface S_1 ou S_2 sur laquelle F induit une mapping class pseudo-Anosov. Alors Σ' n'est pas un pantalon. S'il existait une courbe de réduction c de F qui intersectait a , elle ne serait pas incluse dans $\Sigma \setminus \Sigma'$, donc on peut appliquer le 1°) du lemme 3.43 : il existerait une courbe de réduction c' d'une puissance non nulle de F qui serait incluse dans Σ' (cf. figure 17). Ceci est absurde car la restriction de F (et de ses puissances non nulles) à Σ' est pseudo-Anosov. Donc toute courbe c de $\text{Courb}(\Sigma)$ telle que $I(a, c) \neq 0$ n'est pas une courbe de réduction de F , donc la courbe de réduction a de F est une courbe de réduction essentielle de F .

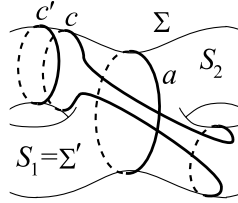


FIG. 17 – Description du cas a) lors de la démonstration du lemme 3.44.

Dans le cas b), il existe un entier non nul ℓ tel que $(F|_{S_{12}})^m = T_a^\ell$. Mais alors pour tout entier p et toute courbe c de $\text{Courb}(S_{12})$ intersectant a , on a d'après le lemme 3.5 :

$$I((F|_{S_{12}})^{mp}(c), c) = I(T_a^{\ell p}(c), c) = |\ell p| I(a, c)^2 \neq 0.$$

Donc aucune courbe c intersectant a ne peut être préservée par une quelconque puissance de $(F|_{S_{12}})^m$, donc a appartient à $\sigma((F|_{S_{12}})^m)$. Donc a appartient à $\sigma(F^m)$ d'après le 4°) du lemme 3.43.

Dans le cas c), S_1 et S_2 ne peuvent être confondues. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, soit $\mathcal{M}\text{od}(S_i, a)$ l'ensemble des classes d'isotopie de difféomorphismes de S_i fixant (un représentant de) la courbe a point par point, et soit $F_i \in \mathcal{M}\text{od}(S_i, a)$ telle que F_i induise la mapping class $F|_{S_i}$ dans $\mathcal{M}\text{od}(S_i)$. Introduisons quelques notations :

- Pour deux entiers k et ℓ , notons $k \wedge \ell$ leur pgcd et $k \vee \ell$ leur ppcm.
- Pour tout $i \in \{1, 2\}$, soit d_i tel que $F_i^{m_i} = T_a^{d_i}$ avec $d_i \wedge m_i = 1$ d'après le lemme 3.17.
- Posons $m'_1 = \frac{m_1}{m_1 \wedge m_2} = \frac{m_1 \vee m_2}{m_2}$.
- Posons $m'_2 = \frac{m_2}{m_1 \wedge m_2} = \frac{m_1 \vee m_2}{m_1}$; ainsi, m'_1 et m'_2 sont premiers entre eux.

Alors pour tout $i \in \{1, 2\}$,

$$F_i^{(m_1 \vee m_2)} = T_a^{\left(\frac{m_1 \vee m_2}{m_i} d_i\right)} = T_a^{m'_{(3-i)} d_i}.$$

Donc il existe un entier q tel que :

$$(F|_{S_{12}})^{(m_1 \vee m_2)} = T_a^{(m'_2 d_1 + m'_1 d_2)} T_a^{q(m_1 \vee m_2)}.$$

Puisque m_1 et m_2 sont différents, l'un d'eux, par exemple m_2 , n'est pas égal à $m_1 \vee m_2$, donc m'_1 est différent de 1. Or d_1 et m'_2 sont premiers avec m'_1 , donc m'_1 est premier avec $m'_2 d_1$. Or m'_1 divise $m'_1 d_2 + q(m_1 \vee m_2)$, donc m'_1 est premier avec $m'_2 d_1 + m'_1 d_2 + q(m_1 \vee m_2)$, donc $m'_2 d_1 + m'_1 d_2 + q(m_1 \vee m_2)$ est différent de zéro. Donc $(F|_{S_{12}})^{(m_1 \vee m_2)}$ est une puissance non nulle de T_a . Ainsi, en prenant $p = (m_1 \vee m_2)$ et en considérant F^p à la place de F , on s'est ramené au cas b) avec $m = 1$. \square

En corollaire, on établit le lien entre un multitwist et son système de réduction canonique.

Corollaire 3.45 (Système de réduction canonique d'un multitwist).

Soit \mathcal{A} un simplexe de courbes. Soit $\prod_{a \in \mathcal{A}} T_a^{k_a}$ un multitwist noté A le long des courbes de \mathcal{A} . Alors $\sigma(A) = \{a \in \mathcal{A} \mid k_a \neq 0\}$. En particulier, si A est un multitwist tel que $\sigma(A) = \emptyset$, alors $A = \text{Id}$.

Démonstration. C'est un corollaire direct du lemme 3.44 où l'on applique le cas b) au voisinage de chaque courbe de \mathcal{A} . \square

On est maintenant en mesure de prouver le lemme 3.12 dont on avait reporté la démonstration. Rappelons-en l'énoncé.

Lemme 3.12 (Unicité de la factorisation d'un multitwist en produit de twists de Dehn). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux simplexes de courbes et soient $(k_a)_{a \in \mathcal{A}}$ et $(\ell_b)_{b \in \mathcal{B}}$ deux familles d'entiers non nuls indicées par \mathcal{A} et \mathcal{B} . Si

$$\prod_{a \in \mathcal{A}} T_a^{k_a} = \prod_{b \in \mathcal{B}} T_b^{\ell_b},$$

Alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ et pour tout couple de courbes (a, b) dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, l'égalité $a = b$ implique l'égalité $k_a = \ell_b$.

Démonstration. Notons $A = \prod_{a \in \mathcal{A}} T_a^{k_a}$ et $B = \prod_{b \in \mathcal{B}} T_b^{\ell_b}$. Puisque $A = B$, on a $\sigma(A) = \sigma(B)$. Or d'après le lemme 3.45, on a $\sigma(A) = \mathcal{A}$ et $\sigma(B) = \mathcal{B}$ car les puissances k_a , $a \in \mathcal{A}$, et ℓ_b , $b \in \mathcal{B}$, sont non nulles par hypothèse, donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Considérons alors la suite d'entiers $(j_a)_{a \in \mathcal{A}}$ définie par $j_a = k_a - \ell_a$. On a :

$$\prod_{a \in \mathcal{A}} T_a^{j_a} = \text{Id}.$$

Donc $\sigma(\prod_{a \in \mathcal{A}} T_a^{j_a}) = \sigma(\text{Id}) = \emptyset$, donc d'après le corollaire 3.45, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $j_a = 0$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Voici un dernier corollaire du lemme 3.44, qui établit un lien entre les systèmes de réduction canoniques de F , de G , et de FG lorsque F et G sont deux mapping classes qui commutent.

Proposition 3.46. Soient F et G deux mapping classes qui commutent. Alors,

$$\sigma(FG) \subset \sigma(F) \cup \sigma(G).$$

Démonstration. Soit une courbe a appartenant à $\sigma(FG)$. Puisque FG commute avec F et avec G , $I(a, \sigma(F) \cup \sigma(G)) = 0$. Notons $\mathcal{A} = \sigma(F) \cup \sigma(G)$. Supposons que a n'appartienne pas à \mathcal{A} et montrons que cela est absurde.

Puisque a n'appartient pas à \mathcal{A} , tout en vérifiant $I(a, \mathcal{A}) = 0$, il existe une sous-surface S de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ telle que a est incluse dans S . Or par hypothèse, les mapping classes F et G commutent, donc chacune préserve $\sigma(F)$ et préserve $\sigma(G)$, donc elles préservent \mathcal{A} , donc elles

permutent les sous-surfaces de $\mathcal{S}ub_{\mathcal{A}}(\Sigma)$. De plus, FG commute avec F et avec G , donc F et G préservent $\sigma(FG)$. Il existe donc un entier $m > 0$ tel que F^m et G^m fixent la composante connexe S et la courbe a . De plus, quitte à choisir m assez grand, on peut supposer que les restrictions de F^m et G^m à S , notées $(F^m)|_S$ et $(G^m)|_S$, soient des mapping classes de $\mathcal{M}od(S)$ chacune égales à l'identité ou pseudo-Anosov. Mais elles ne peuvent pas être pseudo-Anosov puisqu'elles fixent a . Donc $(FG)^m$ préserve S et $((FG)^m)|_S$ est l'identité. Donc d'après le lemme 3.44, a ne peut pas être une courbe de réduction essentielle. D'où la contradiction attendue. \square

4 Groupes de tresses

Le groupe de tresses \mathcal{B}_n apparaît dans des domaines très divers des mathématiques et par conséquent peut être défini de nombreuses manières dont celles-ci :

- de façon purement géométrique (comme le définit Artin en 1925, cf. [Bi]) ;
- comme groupe fondamental d'un espace de configurations, (comme l'ont remarqué Fadell et Neuwirth cf. [FaNe]) ;
- comme groupe d'Artin par générateurs et relations, cf. ci-dessous ;
- comme mapping class group d'un disque pointé, (découvert par Artin, cf. [At2], [Bi] et [BiBd]) ;
- comme mapping class group symétrique d'une surface de genre strictement positif ayant une ou deux composantes de bord, (c'est un théorème de Birman, repris plus tard par Perron et Vannier dans un cadre plus général, cf. [BiHi] ou [PeV]) ;
- comme sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre à n générateurs (cf. [At1]) ;

Plan : Au paragraphe 4.1, nous énonçons rapidement les conventions choisies pour dessiner les tresses, mais nous ne définissons véritablement le groupe de tresses qu'au paragraphe 4.2, alors vu comme groupe d'Artin de type A_{n-1} . Au paragraphe 4.3 nous donnons la définition (équivalente) de \mathcal{B}_n vu comme mapping class group du disque pointé, afin d'être en mesure au paragraphe 4.4 d'interpréter le théorème de Birman et Hilden faisant le lien entre \mathcal{B}_n et le *mapping class group symétrique* d'une surface de genre non nul. Ce théorème permet de considérer \mathcal{B}_n comme un sous-groupe d'un mapping class group d'une surface de genre non nul relativement à son bord et a inspiré le théorème principal de cette thèse.

4.1 Le groupe de tresses vu de façon géométrique

Nous ne développons pas cet aspect, nous supposons qu'il est déjà connu du lecteur et nous nous contentons de préciser les conventions choisies (nous avons repris celles de Kassel et Turaev utilisées dans [KaTu]) pour dessiner les tresses de \mathcal{B}_n où n est un entier supérieur ou égal à 2.

- Les brins des tresses sont dessinées du haut vers le bas ;
- les brins sont implicitement numérotés de 1 à n en partant de la gauche ;
- un croisement *positif* entre les brin i et $i + 1$ est un croisement où le brin $i + 1$ passe au-dessus du brin i , dans le cas contraire, le croisement est dit *négatif* ;
- pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n - 1$, on note τ_i (respectivement τ_i^{-1}) la tresse consistant en un croisement positif (resp. négatif) des brins i et $i + 1$ (cf. figure 18) ;
- étant données α et β deux tresses, le produit $\alpha\beta$ est la tresse commençant par α puis se poursuivant plus bas par la tresse β (cf. figure 18).



FIG. 18 – Exemples de tresses dans \mathcal{B}_5 .

4.2 Le groupe de tresses en tant que groupe d'Artin

Artin a démontré en 1925 que toute tresse géométrique de \mathcal{B}_n , où n est un entier supérieur ou égal à 2, peut s'écrire comme un produit des tresses géométriques τ_i définies au paragraphe précédent et de leurs inverses, et a montré que le groupe \mathcal{B}_n admettait la présentation suivante (cf. définition 4.1), en prenant pour ensemble de générateurs les tresses τ_i . C'est cette présentation qui nous servira de définition pour le groupe de tresses à n brins \mathcal{B}_n .

Définition 4.1 (Le groupe de tresses \mathcal{B}_n).

Le *groupe de tresses à n brins \mathcal{B}_n* est le groupe admettant la présentation suivante que l'on appellera *présentation classique du groupe de tresses* :

- générateurs : $\tau_i, 1 \leq i \leq n - 1$,
- relations : pour tous $i, j \leq n - 1$:
$$\begin{cases} \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ lorsque } |i - j| \neq 1 ; \\ \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j \text{ lorsque } |i - j| = 1 . \end{cases}$$

Notation 4.2 (L'ensemble des générateurs standards classique).

L'ensemble $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}\}$ sera appelé *l'ensemble des générateurs standards* et sera noté $\text{Gen}_{\mathcal{B}_n}^{cl}$. L'ensemble des relations sera noté \mathcal{R}_{cl} . On note :

$$\delta = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-1} .$$

Dans cette présentation, τ_1 et τ_{n-1} ont des rôles particuliers. Pour rendre tout à fait symétrique les rôles des générateurs standard, il suffit, comme nous allons le voir, d'ajouter un $n^{\text{ème}}$ générateur τ_0 (cf. figure 19) :

$$\tau_0 = \delta \tau_{n-1} \delta^{-1} .$$

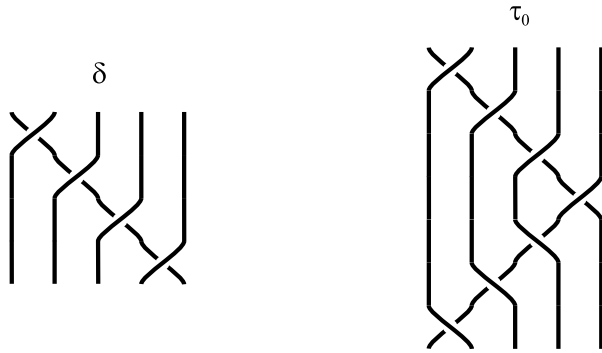


FIG. 19 – Les tresses δ et τ_0 (après simplification) dans \mathcal{B}_5 .

Notation 4.3 (L'ensemble des générateurs standards augmenté).

L'ensemble $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ sera appelé *l'ensemble des générateurs standards augmenté* et sera noté $\text{Gen}_{\mathcal{B}_n}^{aug}$, où $\tau_0 = \delta \tau_{n-1} \delta^{-1}$. On adopte la notation suivante : pour tout entier k , τ_k est le générateur standard τ_ℓ où ℓ est le reste de la division euclidienne de k par n . De plus, pour tout couple d'entiers (i, j) , on note $|i - j|_n$ l'entier $\min(\{|i - j + kn|, k \in \mathbb{Z}\})$. Celui-ci correspond à la distance dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entre les classes modulo n de i et de j .

Passer de $\text{Gen}_{\mathcal{B}_n}^{cl}$ à $\text{Gen}_{\mathcal{B}_n}^{aug}$ ne change pas la présentation si l'on ajoute à \mathcal{R}_{cl} la relation r_0 :

$$\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{n-2} = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-1} . \quad (r_0)$$

On va montrer de plus que les relations suivantes, faisant intervenir τ_0 sont vérifiées dans \mathcal{B}_n et peuvent donc être ajoutées à la présentation $\langle \text{Gen}_{\mathcal{B}_n}^{aug} \mid \mathcal{R}_{cl} \cup \{r_0\} \rangle$ de \mathcal{B}_n sans changer le groupe \mathcal{B}_n :

Lemme 4.4.

- i) Pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n-1$, on a $\delta \tau_i \delta^{-1} = \tau_{i+1}$.
- ii) Pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n-1$, les tresses τ_i et τ_j vérifient une relation de tresses si et seulement si $|i-j|_n = 1$. Autrement elles commutent.
- iii) Pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n-1$, posons $\delta_i = \tau_{i+1} \tau_{i+2} \dots \tau_{i+n-1}$ (cf. figure 20).
On a $\delta = \delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_{n-1}$.

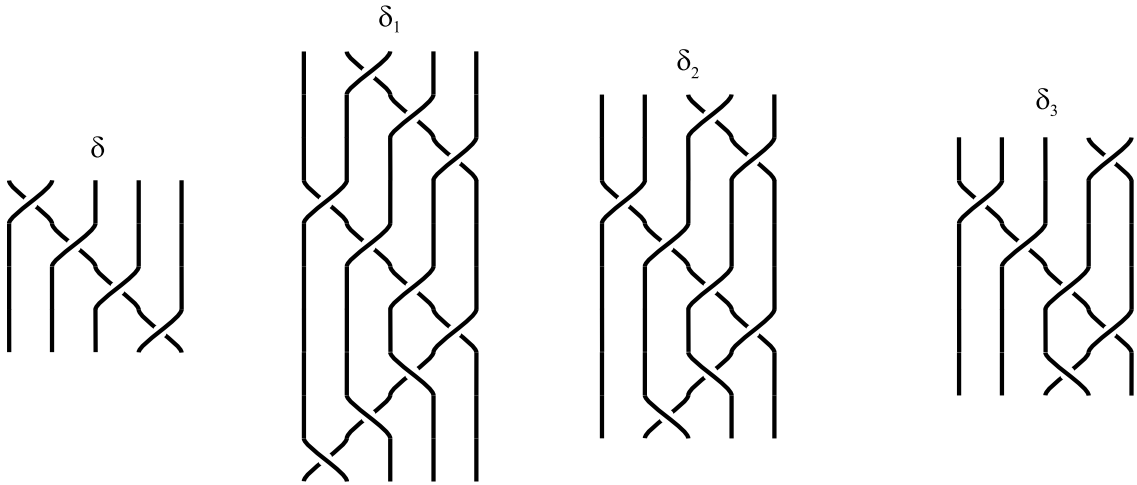


FIG. 20 – Les tresses δ_i (ici dans \mathcal{B}_5) représentent toutes la tresse δ .

On en déduit alors :

Corollaire 4.5. Le groupe de tresses à n brins \mathcal{B}_n admet la présentation suivante que l'on appellera présentation cyclique du groupe de tresses :

- générateurs : $\tau_i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,
- relations : pour tous $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:
$$\begin{cases} \tau_{i+1} \tau_{i+2} \dots \tau_{i+n-1} = \tau_{j+1} \tau_{j+2} \dots \tau_{j+n-1} ; \\ \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ lorsque } |i-j|_n \neq 1 ; \\ \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j \text{ lorsque } |i-j|_n = 1 . \end{cases}$$

Démonstration du lemme 4.4.

Montrons i). Lorsque $1 \leq i \leq n-2$, on a :

$$\begin{aligned} \delta \tau_i &= (\tau_1 \dots \tau_{i-1}) \tau_i \tau_{i+1} (\tau_{i+2} \dots \tau_{n-1}) \tau_i \\ &= (\tau_1 \dots \tau_{i-1}) \tau_i \tau_{i+1} \tau_i (\tau_{i+2} \dots \tau_{n-1}) \\ &= (\tau_1 \dots \tau_{i-1}) \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} (\tau_{i+2} \dots \tau_{n-1}) \\ &= \tau_{i+1} (\tau_1 \dots \tau_{i-1}) \tau_i \tau_{i+1} (\tau_{i+2} \dots \tau_{n-1}) \\ &= \tau_{i+1} \delta \end{aligned}$$

Lorsque $i = n - 1$, on a $\delta \tau_{n-1} \delta^{-1} = \tau_0$ par définition de τ_0 . Lorsque $i = 0$, l'égalité $\delta \tau_0 \delta^{-1} = \tau_1$ vient de ce que $\delta^2 \tau_{n-1} = \tau_1 \delta^2$. Or effectivement,

$$\begin{aligned} \delta^2 \tau_{n-1} &= \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-2} \tau_{n-1} \delta \tau_{n-1} \\ &= \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-2} \delta \tau_{n-2} \tau_{n-1} \\ &= \tau_1 \delta \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-2} \tau_{n-1} \\ &= \tau_1 \delta^2 \end{aligned}$$

Montrons ii). Remarquons que pour tout i compris entre 1 et $n - 2$, le couple (τ_0, τ_i) est conjugué par l'élément δ au couple (τ_1, τ_{i+1}) . Par ailleurs, le couple (τ_0, τ_{n-1}) est conjugué par l'élément δ^{-1} au couple (τ_{n-1}, τ_{n-2}) . Donc pour tous i, j compris entre 0 et $n - 1$, les relations entre τ_i et τ_j ne dépendent que de la valeur de $|i - j|_n$.

Montrons iii). Pour tout i compris entre 1 et $n - 1$, d'après le point i), on a :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \tau_{i+1} \tau_{i+2} \dots \tau_{i+n-1} \\ &= (\delta^i \tau_1 \delta^{-i})(\delta^i \tau_2 \delta^{-i}) \dots (\delta^i \tau_{n-1} \delta^{-i}) \\ &= \delta^i \delta \delta^{-i} \\ &= \delta. \end{aligned} \quad \square$$

Remarque. Si l'on dispose les brins dans \mathbb{R}^3 , non pas alignés les uns à côté des autres comme au paragraphe 4.1 mais en cercle, le générateur τ_0 est le croisement du premier et du $n^{\text{ème}}$ brin. Ce type de présentation du groupe de tresse a été étudié dans un cadre plus général par V. Sergiescu (cf. [S]). Les conventions de V. Sergiescu représentent chaque brin par un point et représentent les générateurs que l'on choisit (des croisements entre deux brins) par une arête reliant les deux points correspondants, cf. figure 21.

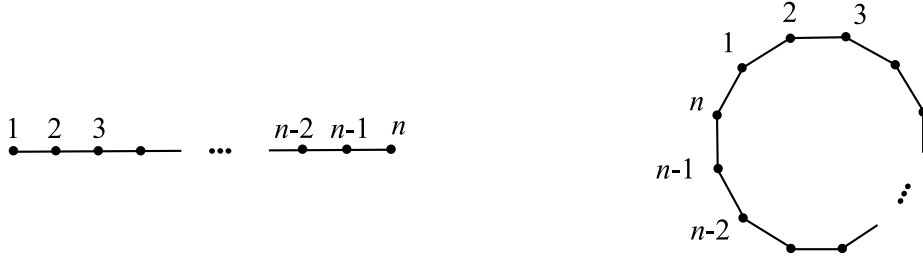


FIG. 21 – Graphes de V. Sergiescu associés au groupe \mathcal{B}_n : à gauche, le graphe associé à la présentation classique, à droite le graphe associé à la présentation cyclique.

Il existe dans \mathcal{B}_n un élément particulier appelé *élément de Garside* et noté Δ , dont l'une des puissances engendre le centre de \mathcal{B}_n :

Définition 4.6 (Elément de Garside du groupe de tresses).

L'*élément de Garside* Δ dans \mathcal{B}_n est :

$$\Delta = \tau_1 (\tau_2 \tau_1) (\tau_3 \tau_2 \tau_1) \dots (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \dots \tau_1)$$

Cet élément vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 4.7 (Propriétés de Δ).

- Pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$, on a $\Delta \tau_i = \tau_{n-i} \Delta$;
- $\Delta^2 = (\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-1})^n = (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \dots \tau_1)^n$;
- le centre de \mathcal{B}_n est un groupe cyclique infini engendré par Δ^2 . □

4.3 Le groupe de tresses en tant que mapping class group d'un disque pointé ; les twists de tresses

Définition 4.8. Soit \mathbb{D}_n un disque dans \mathbb{C} contenant les points $\{1, 2, \dots, n\}$. Considérons l'ensemble $\text{Diff}_{\mathcal{P}_n}^+(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$ des difféomorphismes de \mathbb{D}_n qui préservent l'orientation, stabilisent l'ensemble de n points $\mathcal{P}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et fixent le bord $\partial\mathbb{D}_n$. La composition fait de cet ensemble un groupe. Ce groupe passe au quotient sous la relation d'isotopie suivante : deux difféomorphismes sont dits isotopes s'ils sont les extrémités d'un chemin continu de difféomorphismes de $\text{Diff}_{\mathcal{P}_n}^+(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$. Le groupe quotient n'est autre que le groupe de tresses à n brins (Artin, 1925, cf. plus bas le théorème 4.13). On peut donc définir le groupe de tresses ainsi :

$$\mathcal{B}_n = \pi_0(\text{Diff}_{\mathcal{P}_n}^+(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)).$$

Il existe un système de $n - 1$ générateurs vérifiant les mêmes relations que les τ_i , $i \leq n - 1$. Ces générateurs sont les *twists de tresses* définis comme suit.

Définition 4.9 (Twists de tresses).

Soient deux points p et q appartenant à \mathcal{P}_n et un arc a d'extrémité p et q et dont l'intérieur évite \mathcal{P}_n et $\partial\mathbb{D}$. Soit \mathcal{V} un voisinage tubulaire compact de a et soit ϕ un homéomorphisme positif allant de \mathcal{V} dans \mathbb{D} , le disque dans \mathbb{C} de centre 0 et de rayon 1 tel que $\phi(p) = -\frac{1}{2}$, $\phi(q) = \frac{1}{2}$ et $\phi(a) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Définissons l'homéomorphisme

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & ze^{2i\pi|z|} \end{array} .$$

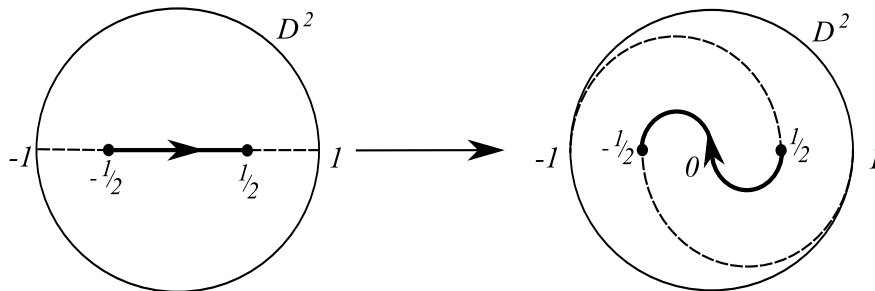


FIG. 22 – Définition du twist de tresses.

Soit h_a l'homéomorphisme valant l'identité hors de \mathcal{V} et valant $\phi^{-1}h\phi$ sur \mathcal{V} . Appelons *twist de tresses* selon l'arc a et notons-le H_a l'unique classe d'isotopie de difféomorphismes contenue dans la classe d'isotopie d'homéomorphismes de h_a . Puisque ϕ est unique à isotopie près, H_a est bien défini.

Définition 4.10. On notera \mathcal{T}_n l'ensemble des twists de tresses.

L'ensemble \mathcal{T}_n coïncide ainsi avec la classe de conjugaison des générateurs standards du groupe \mathcal{B}_n .

Deux éléments de \mathcal{T}_n peuvent vérifier des relations de tresses ou des relations de commutation. Ces deux cas de figure peuvent être caractérisés géométriquement ; c'est ce qui motive la prochaine définition. Dans les autres cas, d'après un résultat de Crisp et Paris (cf. [CrPa]), deux éléments de \mathcal{T}_n engendrent un groupe libre.

Définition 4.11 (Adjacence et indépendance).

Etant donnés deux arcs a_1 et a_2 de $\mathbb{D}_n \setminus (\mathcal{P}_n \cup \partial\mathbb{D}_n)$ à extrémités dans \mathcal{P}_n , les twists de tresses H_{a_1} et H_{a_2} seront dits *adjacents* (respectivement *indépendants*) si l'intersection des deux arcs a_1 et a_2 est réduite à une et une seule extrémité, (resp. si les deux arcs a_1 et a_2 sont disjoints) cf. figure 23.



FIG. 23 – Deux arcs adjacents à gauche ; deux arcs indépendants à droite.

Les deux résultats suivants sont dus à Artin et motivent ces définitions.

Proposition 4.12 (Relations entre twists de tresses).

Deux twists de tresses commutent si et seulement s'ils sont indépendants. Deux twists de tresses vérifient une relation de tresses si et seulement s'ils sont adjacents. \square

Le théorème suivant a été énoncé en premier par Artin en 1925. On trouvera une démonstration dans [Bi], théorème 1.8 page 18.

Théorème 4.13 (\mathcal{B}_n est isomorphe au groupe $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$, Artin, 1925).

Soient $n-1$ arcs a_1, \dots, a_{n-1} de $\mathbb{D}_n \setminus (\mathcal{P}_n \cup \partial\mathbb{D}_n)$ à extrémités dans \mathcal{P}_n tels que pour tous entiers i et j inférieurs ou égaux à $n-1$, les arcs a_i et a_j sont adjacents si $i-j = \pm 1$, et sont disjoints si $|i-j| \geq 2$ (cf. figure 24). Alors les H_{a_i} engendrent $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$. De plus, la présentation de $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$ avec les générateurs H_{a_i} coïncident avec la présentation standard :

- générateurs : $H_{a_i}, 1 \leq i \leq n-1$,
- relations : pour tous $i, j \leq n-1$:
$$\begin{cases} H_{a_i}H_{a_j} = H_{a_j}H_{a_i} & \text{si } |i-j| \neq 1 \\ H_{a_i}H_{a_j}H_{a_i} = H_{a_j}H_{a_i}H_{a_j} & \text{si } |i-j| = 1 \end{cases} .$$

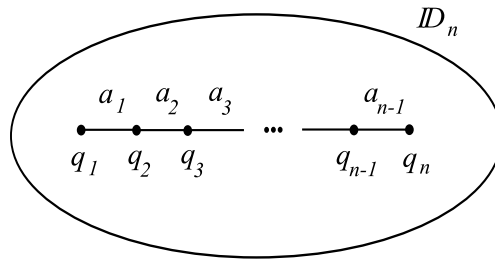


FIG. 24 – Les $H_{a_i}, i \leq n-1$, engendrent $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$.

4.4 Le groupe de tresses en tant que mapping class group symétrique ; un plongement de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$

Cet aspect du groupe de tresses sera fondamental dans cette thèse. En particulier, comme nous le démontrerons (cf. théorèmes 1 et 2), le morphisme ρ_{ref} donné ci-dessous est à la base de tous les morphismes non triviaux du groupe de tresses dans le mapping class group, pourvu que le genre de la surface ne soit pas trop grand.

Définition 4.14 (Surfaces de référence $\Sigma(\mathcal{B}_n)$ et représentations de référence $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$).

Pour tout entier n inférieur ou égal à 3, notons $\Sigma(\mathcal{B}_n)$ la surface $\Sigma_{\frac{n-1}{2},1}$ si n est impair, ou $\Sigma_{\frac{n-2}{2},2}$ si n est pair. Notons $(c_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ la $(n-1)$ -chaîne de courbes représentée figures 25 et 26, et soit $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ le morphisme de référence donné par

$$\tilde{\rho}_{\text{ref}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_n & \longrightarrow & \mathcal{M}od(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n)) \\ \tau_i & \longmapsto & T_{c_i} \end{array}$$

pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$. On note ρ_{ref} la projection de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma(\mathcal{B}_n))$.

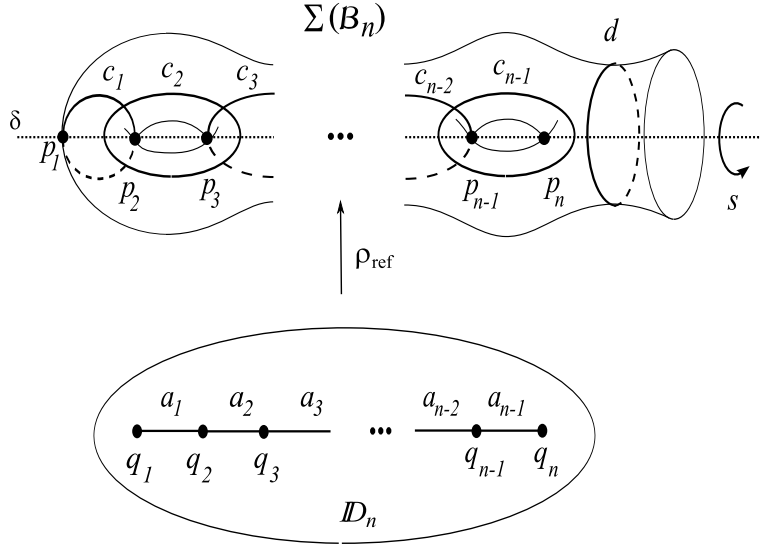


FIG. 25 – Le morphisme de référence $\rho_{\text{ref}} : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{M}od(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ lorsque n est impair.

Dans le but de mieux décrire ρ_{ref} , on définit le mapping class group symétrique $\mathcal{S}Mod(\Sigma(\mathcal{B}_n))$. Le théorème 4.17 ci-après justifie cette définition.

Définition 4.15 (Le Mapping class group symétrique $\mathcal{S}Mod(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ associé à ρ_{ref}).

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se fixe un morphisme de référence ρ_{ref} . On définit :

- \bar{s} le difféomorphisme périodique d'ordre deux de $\text{Diff}^+(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ coïncidant avec la symétrie par rapport à l'axe δ représentée dans les figures 25 et 26 ;
- $\text{SDiff}^+(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ l'ensemble des difféomorphismes de $\text{Diff}^+(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ qui commutent avec \bar{s} ;
- $\mathcal{S}Mod(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ l'ensemble des classes d'isotopie des difféomorphismes de $\text{SDiff}^+(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$, c'est un sous-groupe de $\mathcal{M}od(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$;

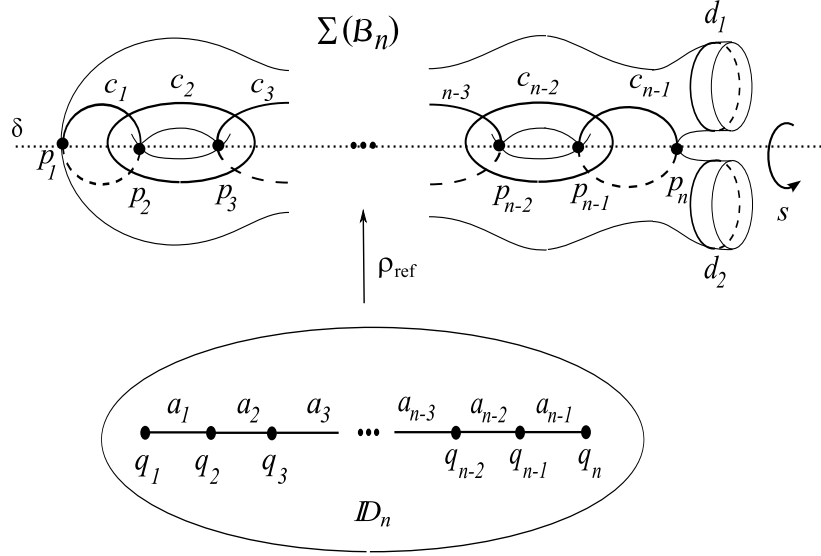


FIG. 26 – Le morphisme de référence $\rho_{\text{ref}} : \mathcal{B}_n \rightarrow \text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ lorsque n est pair.

- $\mathcal{SMod}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ le sous-groupe de $\mathcal{PMod}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ induit par $\mathcal{SMod}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$;
- s la mapping class égale à $\rho_{\text{ref}}(\Delta^2)$ dans $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ lorsque n est impair ; lorsque n est pair, s n'est pas défini ;
- \tilde{s} le relevé de s dans $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ lorsque n est impair, tel que $\tilde{s}^2 = T_d$ où d est l'unique bord de $\Sigma(\mathcal{B}_n)$; lorsque n est pair, \tilde{s} n'est pas défini.

Reprenons le lemme 3.7 à la lumière de ces nouvelles définitions :

Proposition 4.16 (C.Labruère, L.Paris, [LaPa]).

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, dans $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$,

- lorsque n est impair, $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\Delta^2) = \tilde{s}$ (cf. figure 25 et définition 4.15) ;
- lorsque n est pair, $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\Delta^2) = T_{d_1}T_{d_2}$ (cf. figure 26). □

C'est grâce au théorème ci-dessous que l'on sait que \mathcal{B}_n apparaît comme un sous-groupe du mapping class group.

Théorème 4.17 (\mathcal{B}_n comme sous-groupe de $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$, Birman-Hilden, [BiHi]).

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Le mapping class group symétrique $\mathcal{SMod}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ associé à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ est égal à l'image de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ dans $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$. □

Précisons les liens entre \mathcal{B}_n et $\mathcal{SMod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ où $\Sigma = \Sigma(\mathcal{B}_n)$. L'isomorphisme $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ envoie la classe de conjugaison des twists de tresses sur la classe de conjugaison des twists de Dehn de $\mathcal{SMod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ le long de courbes non séparantes, et transforme la proposition 3.4 traduisant les relations entre twists de Dehn en la proposition 4.12 traduisant les relations entre twists de tresses. On rassemble ces résultats dans la proposition 4.18.

Proposition 4.18 (Liens entre twists de Dehn et twists de tresses).

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et soit Σ la surface $\Sigma(\mathcal{B}_n)$. Soit \mathcal{T}_n la classe de conjugaison des twists de tresses de \mathcal{B}_n .

- i) Les images des twists de tresses de \mathcal{B}_n par ρ_{ref} sont exactement les twists de Dehn de $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ le long de courbes non séparantes.
- ii) Les twists de Dehn de $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ le long de courbes non séparantes constituent une unique classe de conjugaison dans $\mathcal{SMod}(\Sigma)$, image de \mathcal{T}_n par ρ_{ref} .
- iii) Le morphisme ρ_{ref} envoie deux twists de tresses indépendants sur deux twists de Dehn T_a et T_b définis le long de deux courbes a et b vérifiant $I(a, b) = 0$; et ρ_{ref} envoie deux twists de tresses adjacents sur deux twists de Dehn T_a et T_b définis le long de deux courbes a et b vérifiant $I(a, b) = 1$.

Démonstration.

Montrons i). L'inclusion $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{T}_n) \subset \{\text{Twists de Dehn}\}$ est facile : un conjugué de \mathcal{H}_{a_1} est envoyé sur un conjugué de T_{a_1} , donc un twist de Dehn le long d'une courbe non séparante, qui de plus doit appartenir à $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ d'après le théorème 4.17. Montrons que réciproquement, les twists de Dehn appartenant à $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ le long de courbes non séparantes appartiennent à $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{T}_n)$.

Rappelons que $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ est l'ensemble des mapping classes qui commutent avec α (cf. définition 4.15). Soit π le morphisme de revêtement de Σ dans \mathbb{D}_n où les n points marqués sont les points de ramification du revêtement (cf. par exemple [PeVa]). C'est un résultat classique que de vérifier que ρ_{ref} coïncide avec le relèvement associé à π dans $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ des mapping classes de $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$ représentant les éléments de \mathcal{B}_n . On sait également que tout twist de Dehn le long d'une courbe ayant un représentant préservé par un représentant $\bar{\alpha}$ et passant par deux points fixes de $\bar{\alpha}$ est envoyé via π sur un twist de tresses dans $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$. Alors pour montrer le i), il suffit de montrer que toutes les courbes non séparantes de Σ et stables par α possèdent un représentant préservé par un représentant $\bar{\alpha}$ et passant par deux points fixes de $\bar{\alpha}$.

Vérifions-le. Soit c une courbe non séparante de Σ stable par α . D'après le théorème de Kerckhoff (cf. le théorème 3.15), il existe une métrique hyperbolique sur Σ telle que α soit représenté par une isométrie $\bar{\alpha}$. Soit \bar{c} la géodésique (bien définie et unique, d'après un résultat classique de géométrie hyperbolique) dans la classe d'isotopie de c . La restriction de $\bar{\alpha}$ à la courbe \bar{c} est une isométrie du cercle, donc une symétrie ou une rotation. Dans le premier cas, \bar{c} ne contient exactement deux points fixes de $\bar{\alpha}$ et on a démontré ce qu'on voulait. Dans le deuxième, \bar{c} n'en contient aucun, et nous allons démontrer que ceci est absurde. Supposons donc que \bar{c} ne passe par aucun point fixe de $\bar{\alpha}$ et que $\bar{\alpha}$ au voisinage de \bar{c} est une rotation. Alors la restriction de $\bar{\alpha}$ à un voisinage tubulaire compact $\bar{\alpha}$ -stable de \bar{c} préserve chaque bord de ce cylindre. Donc, en considérant la surface Σ privé d'un voisinage tubulaire ouvert de \bar{c} stable par $\bar{\alpha}$, on obtient une surface Σ' qui a deux nouveaux bords préservés par $\bar{\alpha}$. Or $\bar{\alpha}$ avait déjà $2g + 2$ points fixes et bords préservés ($2g + 1$ point fixes et un bord préservé lorsque n est impair, et $2g + 2$ points fixes lorsque n est pair). Maintenant, $\bar{\alpha}$ induit sur Σ' une mapping class d'ordre deux avec $2g + 4$ points fixes et bords préservés, ce qui est trop si Σ' était connexe d'après le corollaire 3.22, donc Σ' n'est pas connexe et c était séparante, ce qui est contradiction avec nos hypothèses. Donc le i) est démontré.

Montrons ii). On sait déjà que \mathcal{T}_n est la classe de conjugaison des twists de tresses de $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$. En transportant cette situation via ρ_{ref} dans $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ et en utilisant le résultat du i), il vient que les twists de Dehn de $\mathcal{SMod}(\Sigma)$ le long de courbes non séparantes forment une unique classe de conjugaison dans $\mathcal{SMod}(\Sigma)$.

Montrons iii). Ce résultat découle des propositions 3.4 concernant les twists de Dehn et 4.12 concernant les twists de tresses. □

Centralisateurs et normalisateurs associés aux images de ρ_{ref} et $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$.

On termine ce paragraphe en donnant le centralisateur de l'image de \mathcal{B}_n par des morphismes particuliers inspirés de ρ_{ref} , allant de \mathcal{B}_n dans différents mapping class groups. Puis on donnera le normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$.

Proposition 4.19 (Centralisateur de l'image de \mathcal{B}_n , n impair, par des morphismes particuliers). *Soit n un entier impair supérieur ou égal à 5. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \geq \frac{n-1}{2}$ et $b \geq 0$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ une $(n-1)$ -chaîne de courbes. Soit \mathcal{M} l'un des groupes $\text{Mod}(\Sigma)$, $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, ou $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Soit ρ le morphisme de \mathcal{B}_n dans \mathcal{M} défini par*

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On appelle $\Sigma(\rho)$ le voisinage tubulaire compact de la réunion des courbes a_i , $1 \leq i \leq n-1$. Soit $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ le sous-groupe de \mathcal{M} des mapping classes qui préservent $\Sigma(\rho)$ et induisent l'identité dans $\text{Mod}(\Sigma(\rho))$. Enfin, soit Z la mapping class $\rho(\Delta^2)$. Alors :

- i) le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} est le groupe engendré par Z et par $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$;
- ii) pour toute mapping class V appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} , V^2 appartient à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$.

Remarque. Avant de démontrer cette proposition, remarquons que puisque $g \geq \frac{n-1}{2}$ avec $n \geq 5$, il existe des $(n-1)$ -chaînes de courbes dans Σ . Donc quel que soit le triplet d'entiers (n, g, b) prévu par l'énoncé, celui-ci décrit une situation qui existe.

Démonstration. Commençons par montrer le i). Il est clair que le groupe $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ défini dans l'énoncé est dans le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$, et que d'après les propriétés de Δ^2 dans \mathcal{B}_n , Z est également dans le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$. Donc le groupe engendré par $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ et Z est bien dans le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$. Réciproquement, montrons que tout élément du centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ s'exprime comme le produit de Id ou Z par un élément de $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$. Pour cela, nous partons d'une mapping class F appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$. Nous allons d'abord poser quelques définitions dans Σ , puis nous allons étudier F .

a) *Définitions dans Σ .*

Pour tout entier i compris entre 2 et $n-1$, posons :

$$\Delta_i = \tau_1(\tau_2\tau_1) \dots (\tau_i\tau_{i-1} \dots \tau_1).$$

Pour tout i pair compris entre 4 et $n-1$, soient les courbes e_i^+ et e_i^- telles que $\rho(\Delta_{i-1}^2) = T_{e_i^+}T_{e_i^-}$.

Par récurrence sur l'entier i impair compris entre 3 et $n-2$, on définit les pantalons P_i^+ et P_i^- (cf. figure 27) de sorte que :

- lorsque $i = 3$, notons P_3^+ et P_3^- respectivement les pantalons inclus dans Σ de bord $\{a_1, a_3, e_4^+\}$ et $\{a_1, a_3, e_4^-\}$,
- lorsque i est un entier impair compris entre 5 et $n-2$ et que P_{i-2}^+ et P_{i-2}^- ont été définis, quitte à échanger les courbes e_{i+1}^+ et e_{i+1}^- , on peut supposer que $\{e_{i-1}^+, a_i, e_{i+1}^+\}$ et $\{e_{i-1}^-, a_i, e_{i+1}^-\}$ sont les bords de deux pantalons que l'on appelle respectivement P_i^+ et P_i^- .

Soit enfin la courbe d telle que $\rho(\Delta_{n-1}^4) = T_d$. On note P_∂ le pantalon de bord $\{e_{n-2}^+, e_{n-2}^-, d\}$ (cf. figure 27). On note également \mathcal{A}^0 la réunion des courbes a_i , i pair compris entre 2 et $n-1$, et \mathcal{A}^1 la réunion des courbes a_i , i impair compris entre 1 et $n-2$ et des courbes e_j^+ et e_j^- , j pair compris entre 4 et $n-1$.

b) *Etude de la mapping class F appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$.*

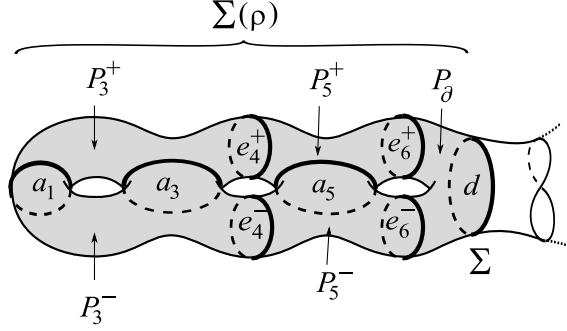


FIG. 27 – Le découpage de $\Sigma(\rho)$ en pantalons ; la courbe d et le simplexe \mathcal{A}^1 contenant les courbes a_i , i impair tel que $1 \leq i \leq n-1$ et les courbes e_j^+ , e_j^- , j pair tel que $4 \leq j \leq n-1$ (cas où n est impair).

La mapping class F commute avec T_{a_i} pour tout i impair compris entre 1 et $n-2$, donc $F(a_i) = a_i$. De même, F commute avec $T_{e_j^+}T_{e_j^-}$ pour tout j pair compris entre 4 et $n-1$, donc $F(\{e_j^+, e_j^-\}) = \{e_j^+, e_j^-\}$. Donc F préserve l'ensemble de sous-surface $\{P_i^+, P_i^-\}$ pour tout i impair compris entre 3 et $n-2$. Enfin, F commute avec T_d car T_d appartient à $\rho(\mathcal{B}_n)$, donc F préserve la courbe d , préserve le pantalon P_∂ et préserve la surface $\Sigma(\rho)$ incluse dans Σ , de bord d et contenant la courbe a_1 . Remarquons que pour tout i impair compris entre 3 et $n-4$, les pantalons P_i^+ et P_{i+2}^+ ont la courbe e_{i+1}^+ en commun, donc les pantalons $F(P_i^+)$ et $F(P_{i+2}^+)$ ont la courbe $F(e_{i+1}^+)$ en commun. De deux choses l'une :

- ou bien $F(e_{i+1}^+) = e_{i+1}^+$, donc $F(P_i^+) = P_i^+$ et $F(P_{i+2}^+) = P_{i+2}^+$,
- ou bien $F(e_{i+1}^+) = e_{i+1}^-$, donc $F(P_i^+) = P_i^-$ et $F(P_{i+2}^+) = P_{i+2}^-$.

Finalement, de proche en proche, seules deux alternatives sont possibles :

- Première alternative : pour tout i impair compris entre 3 et $n-2$, $F(P_i^+) = P_i^+$. Alors F fixe e_j^+ et e_j^- pour tout j pair compris entre 4 et $n-1$. On définit $F' \in \mathcal{M}od(\Sigma(\rho))$ comme étant la restriction de F à $\Sigma(\rho)$.
- Deuxième alternative : pour tout i impair compris entre 3 et $n-2$, $F(P_i^+) = P_i^-$. Alors F échange e_j^+ et e_j^- pour tout j pair compris entre 4 et $n-1$. Or Z fixe les courbes a_i pour tout i impair compris entre 1 et $n-1$, et échange les courbes e_j^+ et e_j^- pour tout j pair compris entre 4 et $n-1$. Donc FZ fixe toutes les courbes de \mathcal{A}^1 . Puisque F et Z préservent la surface $\Sigma(\rho)$ incluse dans Σ , on peut définir $F' \in \mathcal{M}od(\Sigma(\rho))$ comme étant la restriction de FZ à $\Sigma(\rho)$.

Etudions F' . La mapping class F' fixe toutes les courbes de \mathcal{A}^1 , donc préserve chaque sous-surface de $\text{Sub}_{\mathcal{A}^1}(\Sigma(\rho))$, lesquelles sont des pantalons, et préserve chacun de leurs bords, donc F' induit dans $\mathcal{P}Mod((\Sigma(\rho))_{\mathcal{A}^1})$ une mapping class triviale, où $(\Sigma(\rho))_{\mathcal{A}^1}$ est la surface obtenue de $\Sigma(\rho)$ après découpage le long des courbes de \mathcal{A}^1 . Alors, d'après la suite exacte :

$$1 \rightarrow \langle T_a, a \in \mathcal{A}^1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}^1}Mod(\Sigma(\rho)) \rightarrow \mathcal{P}Mod((\Sigma(\rho))_{\mathcal{A}^1}) \rightarrow 1,$$

la mapping class F' est un multitwist le long des courbes de \mathcal{A}^1 . Cependant, F' commute avec T_a , $a \in \mathcal{A}^0$, donc d'après la proposition 3.4, les courbes \mathcal{A}^0 sont des courbes de réduction de F' . Or chaque courbe de \mathcal{A}^1 intersecte l'une des courbes de \mathcal{A}^0 , donc aucune des courbes de \mathcal{A}^1 ne peut être une courbe de réduction essentielle de F' , donc d'après le corollaire 3.45, F' est l'identité.

Revenons à la mapping class F . La restriction de F à $\Sigma(\rho)$ ou la restriction de FZ à $\Sigma(\rho)$

vaut Id dans $\text{Mod}(\Sigma(\rho))$. Donc le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} est le groupe engendré par Z et par $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, le sous-groupe de \mathcal{M} des mapping classes induisant l'identité sur $\Sigma(\rho)$.

Prouvons le ii). D'après le i), pour tout V appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$, il existe $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $V' \in \mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ tel que $V = Z^\varepsilon V'$. Calculons V^2 . La mapping class Z peut être vue comme un élément de \mathcal{M} qui induit l'identité hors de $\Sigma(\rho)$, donc Z commute avec tout élément de $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, donc $V^2 = Z^{2\varepsilon} (V')^2$. D'autre part, $Z^2 = T_d$ où d est le bord de $\Sigma(\rho)$, donc Z^2 peut être vu comme un élément de $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$. Puisque V' appartient à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, on en déduit que V^2 appartient à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$. \square

Proposition 4.20 (Centralisateur de l'image de \mathcal{B}_n , n pair, par des morphismes particuliers). *Soit n un entier pair supérieur ou égal à 6. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \geq \frac{n}{2} - 1$ et $b \geq 0$. Soit \mathcal{M} l'un des groupes $\text{Mod}(\Sigma)$, $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, ou $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ une $(n-1)$ -chaîne de courbes. Soit ρ le morphisme de \mathcal{B}_n dans \mathcal{M} défini par*

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}$$

pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$. On appelle $\Sigma(\rho)$ le voisinage tubulaire compact de la réunion des courbes a_i , $1 \leq i \leq n-1$. Soit $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ le sous-groupe de \mathcal{M} des mapping classes qui préservent $\Sigma(\rho)$ et induisent l'identité dans $\text{Mod}(\Sigma(\rho))$. Alors :

- i) le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} est réduit au groupe $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, sauf dans les cas (a) et (b) ci-dessous où il est égal au groupe engendré par $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ et par Z , où Z est un prolongement quelconque à tout Σ de la mapping class $s \in \text{Mod}(\Sigma(\rho))$ définie à la définition 4.15 (précisons que $\Sigma(\rho)$ est homéomorphe à $\Sigma(\mathcal{B}_n)$).
- ii) pour toute mapping class V appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} , V^2 appartient à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$.

Les cas (a) et (b) évoqués ci-dessus sont les suivants où \mathcal{A} est le simplexe $\{a_1, a_3, \dots, a_{n-1}\}$:

- (a) l'ensemble de courbes \mathcal{A} est non séparant,
- (b) $\Sigma_{\mathcal{A}}$ consiste en deux composantes connexes homéomorphes et $\mathcal{M} = \text{Mod}(\Sigma)$.

Démonstration. A quelques modifications près, précisées ci-dessous, la démonstration est la même que dans le cas impair (cf. la proposition 4.19).

Commençons par prouver le i). Il est clair que le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ contient dans \mathcal{M} contient selon les cas les groupes annoncés au i) de l'énoncé. Montrons l'inclusion réciproque. De façon similaire à la démonstration de la proposition 4.19, on définit les objets suivants que l'on retrouve sur la figure 28 :

- une $(n-1)$ -chaîne de courbes $(a_i)_{1 \leq i \leq n-1}$,
- des courbes e_j^+ et e_j^- pour tout j pair compris entre 4 et $n-2$,
- des courbes d^+ et d^- ,
- des pantalons P_i^+ et P_i^- pour tout i impair compris entre 3 et $n-1$,
- l'ensemble de courbes \mathcal{A} des courbes a_i , i impair compris entre 1 et $n-1$,
- l'ensemble de courbes \mathcal{A}^1 des courbes de \mathcal{A} et des courbes e_j^+ et e_j^- pour tout j pair compris entre 4 et $n-2$.

Partons d'une mapping class F appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$. En remarquant que $\Sigma(\rho) = \Sigma(\mathcal{B}_n)$, soit s la mapping class de $\text{Mod}(\Sigma(\rho))$ définie à la définition 4.15. L'action de s sur les courbes de \mathcal{A}^1 consiste à fixer les courbes a_i pour tout i impair compris entre 1 et $n-1$, à échanger les courbes e_j^+ et e_j^- pour tout j pair compris entre 4 et $n-2$, et à échanger les courbes

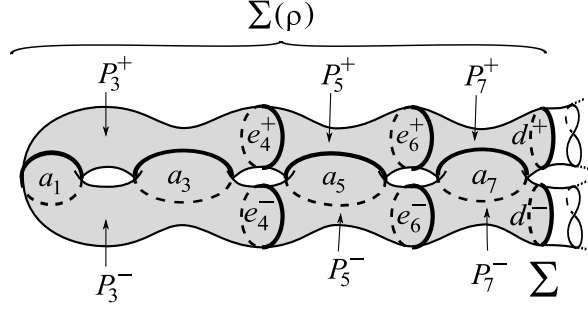


FIG. 28 – Le découpage de $\Sigma(\rho)$ en pantalons; les courbes d^+ , d^- et le simplexe \mathcal{A}^1 contenant les courbes a_i , i impair tel que $1 \leq i \leq n-1$ et les courbes e_j^+ et e_j^- , j pair tel que $4 \leq j \leq n-2$ (cas où n est pair).

d^+ et d^- . Comme au cours de la démonstration de la proposition 4.19, en considérant l'action de F sur l'ensemble de pantalons de $\text{Sub}_{\mathcal{A}^1}(\Sigma(\rho))$, on s'aperçoit que la restriction de F à $\Sigma(\rho)$ coïncide avec s ou avec l'identité de $\Sigma(\rho)$, selon que F fixe ou échange les bords d^+ et d^- .

Plaçons-nous dans l'un quelconque des cas (a) ou (b) de l'énoncé. Alors la mapping class $s \in \text{Mod}(\Sigma(\rho))$ est prolongeable sur tout \mathcal{M} . On appelle Z ce prolongement. Dans tous les autres cas (les cas différents de (a) et (b)), les courbes d^+ et d^- n'appartiennent pas à la même orbite sous l'action de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ sur $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$, donc dans ces cas, F ne peut pas échanger d^+ et d^- et ne peut pas coïncider avec s sur $\Sigma(\rho)$, donc F induit l'identité dans $\text{Mod}(\Sigma(\rho))$. Pour conclure,

- lorsque l'une des conditions (a) ou (b) est satisfaite, le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} est le groupe engendré par Z et $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$,
- lorsqu'aucune des conditions (a) ou (b) n'est satisfaite, le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} est le sous-groupe $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$.

Prouvons le ii). Hors des cas (a) et (b), il n'y a rien à prouver. Dans les cas (a) ou (b), d'après le i), pour tout V appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$, il existe $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $V' \in \mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ tel que $V = Z^\varepsilon V'$. Si $\varepsilon = 0$, il n'y a rien à prouver. Sinon, remarquons que la mapping class Z préserve l'ensemble de courbes $\{d_+, d_-\}$, et préserve $\Sigma \setminus \Sigma(\rho)$ donc $Z^{-1}V'Z$ appartient à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$. Or $V^2 = ZV'ZV' = Z^2(Z^{-1}V'Z)V'$ et Z^2 appartient à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, donc V^2 appartient lui aussi à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$. \square

La prochaine proposition calcule le normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ et de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans respectivement $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ et $\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$. Elle fait appel au lemme ci-dessous.

Lemme 4.21. *Tout automorphisme de \mathcal{B}_n qui préserve les twists de tresses est intérieur.*

Démonstration. Soit φ un automorphisme de \mathcal{B}_n préservant les twists de tresses. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ la suite d'arcs dans \mathbb{D}_n^2 telle que par l'identification $\mathcal{B}_n = \text{Mod}(\mathbb{D}_n^2)$, $\tau_i = H_{a_i}$. Notons $(b_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ la suite d'arcs dans \mathbb{D}_n^2 telle que $\varphi(\tau_i) = H_{b_i}$. Puisque les H_{b_i} , $1 \leq i \leq n-1$, vérifient les mêmes relations que les H_{a_i} , $1 \leq i \leq n-1$, en appliquant la proposition 4.12, il vient que les b_i constituent une chaîne d'arcs. Il existe alors un homéomorphisme du disque qui envoie la chaîne $(a_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ sur la chaîne $(b_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ et qui préserve \mathcal{P} . La classe d'isotopie d'un tel homéomorphisme est un élément de \mathcal{B}_n qui agit par conjugaison sur les générateurs standards de \mathcal{B}_n

de la même manière que φ . On en déduit que l'automorphisme φ est exactement l'action par conjugaison de cet élément. \square

Proposition 4.22 (Normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ et de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$).

Le normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ est le groupe engendré par $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ et par le centralisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ (i.e. le groupe d'ordre 2 engendré par s d'après les propositions 4.19 et 4.20 dans le cas où $\Sigma = \Sigma(\rho) = \Sigma(\mathcal{B}_n)$).

Le normalisateur de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ est le groupe $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ lorsque n est impair, et est le groupe engendré par $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ et par le twist de Dehn T_{d_+} lorsque n est pair, où d_+ est l'un des deux bords de $\Sigma(\mathcal{B}_n)$.

Démonstration. Commençons par déterminer le normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$. Pour tout $F \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$, l'automorphisme intérieur Ad_F qui envoie tout élément G sur FGF^{-1} préserve les twists de Dehn le long de courbes non séparantes. Donc pour tout $F \in \text{Norm}_{\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))}(\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n))$, Ad_F préserve les twists de Dehn de $\mathcal{S}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ le long de courbes non séparantes, donc d'après la proposition 4.18, Ad_F induit dans \mathcal{B}_n un automorphisme qui préserve les twists de tresses. Or, d'après le lemme 4.21, de tels automorphismes sont intérieurs. Autrement dit, il existe $\xi \in \mathcal{B}_n$ tel que $\text{Ad}_{\rho_{\text{ref}}(\xi)}$ et Ad_F coïncide sur $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$, donc $\text{Ad}_{\rho_{\text{ref}}(\xi)^{-1}F}$ fixe les éléments de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$. Donc $\rho_{\text{ref}}(\xi)^{-1}F$ est dans le centralisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$, d'où le résultat.

Passons maintenant au normalisateur de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$. Rappelons que l'on dispose de la suite exacte centrale :

$$1 \rightarrow \langle T_d, d \in \text{Bord}(\Sigma(\mathcal{B}_n)) \rangle \rightarrow \mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n)) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n)) \rightarrow 1.$$

Par conséquent, le normalisateur de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ est inclus dans l'ensemble des relevés des éléments du normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$.

- Dans le cas n impair, les relevés de s sont déjà dans $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$, et le twist de Dehn T_d où d est l'unique bord de $\Sigma(\mathcal{B}_n)$ est également déjà dans $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$, donc le normalisateur de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ est $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$, qui coïncide avec l'ensemble de relevés des éléments du normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$.
- Dans le cas où n est pair, le normalisateur de $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ est réduit à $\rho_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ car la mapping class s n'appartient pas à $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$. Donc le normalisateur de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ est le groupe engendré par $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$, T_{d_+} et T_{d_-} où d_+ et d_- sont les deux bords de $\Sigma(\mathcal{B}_n)$. Mais le produit $T_{d_+}T_{d_-}$ appartient déjà à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$, donc le normalisateur de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\mathcal{B}_n), \partial\Sigma(\mathcal{B}_n))$ est le groupe engendré par $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_n)$ et T_{d_+} . \square

II. Morphismes géométriques du groupe de tresses et corollaires

Dans cette partie, nous prouvons les corollaires du théorème 1. Elle est composée de deux chapitres, le premier définit le cadre du deuxième dans lequel les corollaires sont énoncés et prouvés. Plus précisément :

Chapitre 5 :

Ce chapitre a pour but de présenter différents types de morphismes géométriques du groupe de tresses et de poser certaines définitions afin d'énoncer le théorème principal (le théorème 1) dans un contexte qui lui est adapté.

On donnera également quelques résultats reliant différents types de morphismes géométriques entre eux. Ces résultats serviront notamment lors du deuxième chapitre de cette partie, lorsqu'on prouvera les corollaires du théorème 1, mais ils serviront également plus loin dans la preuve du théorème 1.

Chapitre 6 :

On prouve dans ce chapitre tous les corollaires du théorème 1, dont certains reprennent des théorèmes d'Ivanov et McCarthy, Bell et Margalit, Dyer et Grossman.

- on étudie l'injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans les différents mapping class groups $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ et $\mathcal{P}\mathcal{M}od(\Sigma)$;
- on étudie les morphismes de \mathcal{B}_n dans lui-même, l'injectivité de tels morphismes et les automorphismes de \mathcal{B}_n ;
- enfin on étudie les morphismes du mapping class group d'une surface de genre $g \geq 2$ dans celui d'une surface de genre $g' \leq g + 1$, l'injectivité de tels morphismes et les automorphismes du mapping class group.

5 Les morphismes entre groupe de tresses et mapping class group, le théorème 1

Ce chapitre a pour but de :

- 1°) poser les principales définitions concernant les morphismes du groupes de tresses dans les mapping class groups (*morphismes cycliques, morphismes de monodromie, transvection*), et donner quelques faits basiques ;
- 2°) énoncer le théorème principal dans le cas des morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$, et dans celui des morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$;
- 3°) montrer comment l'on passe de $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{PMod}(\Sigma))$ à $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$, et comment les deux théorèmes ci-dessus se déduisent l'un de l'autre ;
- 4°) présenter quelques résultats sur les transvections de morphismes de monodromie et en déduire le calcul du centralisateur de l'image d'un morphisme de monodromie.

Les quatre paragraphes de ce chapitre suivront ce plan.

5.1 Morphismes cycliques, morphismes de monodromie et transvections

On donne dans ce paragraphe les principales définitions relatives aux morphismes du groupe de tresses dans les mapping class group : les *morphismes cycliques*, les *morphismes de monodromie*, les *transvections de morphismes de monodromie*.

Morphismes cycliques.

Définition 5.1 (Morphismes cycliques).

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, tout morphisme φ du groupe de tresses \mathcal{B}_n dans un groupe quelconque est dit *cyclique* si :

$$\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2) = \cdots = \varphi(\tau_{n-1}).$$

Lemme 5.2. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 5, étant donné un morphisme de \mathcal{B}_n dans un groupe quelconque, dès qu'il existe deux entiers distincts i et j de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tels que $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_j)$, alors φ est un morphisme cyclique.*

Démonstration. Rappelons que par convention, pour tout entier ℓ , τ_ℓ désigne le générateur standard τ_k où k est le reste de la division euclidienne de ℓ par n . De plus, rappelons que pour tous entiers i et j , on note $|i-j|_n$ l'entier $\min(\{|i-j+kn|, k \in \mathbb{Z}\})$.

Soient i et j deux entiers distincts dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tels que $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_j)$.

a) Si $|i-j|_n = 1$, par exemple si $j = i+1$, le fait d'avoir $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_{i+1})$ implique $\varphi(\delta\tau_i\delta^{-1}) = \varphi(\delta\tau_{i+1}\delta^{-1})$, autrement dit $\varphi(\tau_{i+1}) = \varphi(\tau_{i+2})$ et finalement de proche en proche,

$$\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2) = \cdots = \varphi(\tau_{n-1}).$$

b) Si $|i-j|_n > 1$ et $|(i+1)-j|_n > 1$, alors posons $\beta_i = \tau_i\tau_{i+1}\tau_i$. Le fait d'avoir $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_j)$ entraîne $\varphi(\beta_i\tau_i\beta_i^{-1}) = \varphi(\beta_i\tau_j\beta_i^{-1})$, d'où $\varphi(\tau_{i+1}) = \varphi(\tau_j)$, donc finalement $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_{i+1})$, et on s'est ramené au a).

c) Si $|i - j|_n > 1$ et $|(i + 1) - j|_n = 1$, alors on a $j = i + 2$ ou $j = i + 2 - n$, donc $|i - j|_n > 1$ et $|i - (j + 1)|_n > 1$, et en échangeant les rôles de i et j , on s'est ramené au b). \square

Rappelons que l'abélianisé de \mathcal{B}_n est infini cyclique. On en déduit le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Tout morphisme de \mathcal{B}_n dans un groupe abélien est cyclique.* \square

Morphismes de monodromie.

Définition 5.4 (Morphismes de monodromie).

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3 et toute surface Σ , un morphisme de \mathcal{B}_n dans un sous-groupe \mathcal{M} de $\text{Mod}(\Sigma)$ ou de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est appelé *un morphisme de monodromie* si les générateurs standards du groupe de tresses sont envoyés sur des twists de Dehn ou leurs inverses le long de courbes deux à deux distinctes.

En posant cette définition, on a à l'esprit la proposition 3.4 (propriétés de twists de Dehn) et la définition 3.6 (chaîne de courbes), de sorte que :

Lemme 5.5. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, toute surface Σ et tout morphisme de monodromie ρ de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma)$ ou $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, il existe une $(n - 1)$ -chaîne de courbes $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ ainsi qu'un entier $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$, on ait :*

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon.$$

\square

En corollaire, on obtient une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de morphisme de monodromie.

Lemme 5.6 (Critère d'existence des morphismes de monodromie).

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et Σ la surface $\Sigma_{g,b}$. Il existe des morphismes de monodromie de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

Démonstration. Pour la condition suffisante, il suffit de considérer un plongement de $\Sigma(\mathcal{B}_n)$ dans Σ . Alors le morphisme de monodromie de référence $\tilde{\rho}_{\text{ref}} : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma(\mathcal{B}_n))$ induit un morphisme de monodromie dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$.

Pour la condition nécessaire, remarquons que l'existence de morphismes de monodromie ne dépend que de celle d'une $(n - 1)$ -chaîne de courbes. Or s'il existe une $(n - 1)$ -chaîne dans Σ , d'après la proposition 2.3, il existe un représentant en position minimale d'intersection d'une telle $(n - 1)$ -chaîne. Le voisinage tubulaire compact d'un tel représentant (ils sont tous homéomorphes, donc il suffit de le constater sur un exemple) est une surface plongée dans Σ qui est de genre égal à la partie entière de $\frac{n}{2} - 1$. Donc $g \geq \frac{n}{2} - 1$. \square

Transvections.

Définition 5.7 (Transvections).

Soit n un entier supérieur ou égal à 3, soit G un groupe quelconque et soient ρ et ρ' deux morphismes de \mathcal{B}_n dans G . On dira que ρ' est une transvection de ρ s'il existe un élément g dans le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans G tel que pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$, on ait :

$$\rho'(\tau_i) = \rho(\tau_i)g.$$

Le lemme suivant montre de quelle façon les transvections surviennent naturellement à partir d'une suite exacte centrale de groupes. De telles suites sont fréquentes entre mapping class groups : la proposition 3.9 en donnait déjà trois exemples différents.

Lemme 5.8. Soient une suite exacte centrale de groupes $1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{\psi} \widehat{G} \rightarrow 1$, un entier $n \geq 3$ et deux morphismes ρ et ρ' de \mathcal{B}_n dans G tels que $\psi \circ \rho = \psi \circ \rho'$. Alors

- i) ρ' est une transvection de ρ ,
- ii) ρ est cyclique si et seulement si $\psi \circ \rho$ est cyclique.

Démonstration. Prouvons le i). Pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$, il existe $g_i \in N$ tel que $\rho'(\tau_i) = \rho(\tau_i)g_i$. On a alors les égalités suivantes, vraies pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$:

$$\begin{aligned} \rho'(\tau_i) \rho'(\tau_{i+1}) \rho'(\tau_i) &= \rho(\tau_i) \rho(\tau_{i+1}) \rho(\tau_i) g_i g_{i+1} g_i, \\ \rho'(\tau_{i+1}) \rho'(\tau_i) \rho'(\tau_{i+1}) &= \rho(\tau_{i+1}) \rho(\tau_i) \rho(\tau_{i+1}) g_{i+1} g_i g_{i+1}. \end{aligned}$$

Les relations de tresses dans \mathcal{B}_n impliquent que les quatre membres apparaissant dans ces deux égalités sont tous égaux entre eux. On en déduit que pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$,

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}.$$

Or les g_i , $1 \leq i \leq n - 1$, commutent, donc sont tous égaux. Donc ρ' est une transvection de ρ .

Prouvons maintenant le ii). Si ρ est cyclique, alors $\psi \circ \rho$ est cyclique. Réciproquement, si $\psi \circ \rho$ est cyclique, alors il est clair qu'il existe un morphisme cyclique ρ' tel que $\psi \circ \rho' = \psi \circ \rho$. Mais alors, d'après le i), ρ est une transvection de ρ' . Donc ρ est cyclique. \square

Le plus souvent, les transvections que l'on rencontrera seront des transvections de morphismes de monodromie. Bien que l'on déduit la définition de *transvections de morphismes de monodromie* de celles de *transvection* et de *morphisme de monodromie*, on la redonne ici pour fixer les idées. On prouvera que sous certaines conditions, tous les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ où Σ est une surface connexe sont des transvections de monodromie.

Définition 5.9 (Transvection de morphisme de monodromie).

Soient un entier n supérieur ou égal à 3, une surface Σ , un sous-groupe \mathcal{M} de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ ou de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Une *transvection de morphisme de monodromie* est un morphisme ρ tel qu'il existe

- une $(n - 1)$ -chaîne de courbes $(a_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ dans $\text{Courb}(\Sigma)$,
- un entier $\varepsilon \in \{\pm 1\}$,
- une mapping class $V \in \mathcal{M}$ commutant avec T_{a_i} pour tout $i \leq n - 1$,

et qui vérifient pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$:

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V.$$

Enfin, on adopte la définition suivante :

Définition 5.10 (Morphisme de même nature).

Soient un entier n supérieur ou égal à 3, une surface Σ et deux morphismes ρ_1 et ρ_2 de \mathcal{B}_n dans un sous-groupe de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ ou $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$. On dira que ρ_1 et ρ_2 sont de même nature s'ils sont tous deux des morphismes cycliques, ou tous deux des transvections de morphismes de monodromie, ou tous deux ni l'un ni l'autre. Dans le cas contraire, on dira qu'ils sont de nature différente.

5.2 Énoncé du théorème principal

Rappelons l'énoncé du théorème 1 (prouvé au cours du chapitre 13) :

Théorème 1 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$, $n \geq 6$).

Soient n un entier quelconque supérieur ou égal à 6 et Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ avec $g \leq \frac{n}{2}$. Soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$. Si ρ n'est pas cyclique, ρ est une transvection de morphisme de monodromie. De plus, de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

En fait, on prouvera d'abord le théorème 1 dans le cas où n est un entier pair supérieur ou égal à 6, cf. chapitres 7 à 12. On prouvera le cas général avec n pair ou impair au chapitre 13.

Comme on le verra plus bas dans ce chapitre au paragraphe 5.3, on peut en déduire de ce théorème le théorème suivant 2 dans lequel on ne considère plus les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$, mais dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Théorème 2 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$, $n \geq 6$).

Soient n un entier quelconque supérieur ou égal à 6 et Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ avec $g \leq \frac{n}{2}$. Soit $\tilde{\rho}$ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Alors $\tilde{\rho}$ est cyclique ou bien est une transvection de morphisme de monodromie. De plus de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

5.3 Passage de $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma))$ à $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma))$

Dans ce paragraphe, on montre les liens qui existent entre les ensembles $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma))$ et $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma))$. On montre en particulier deux résultats :

- La proposition 5.12 : pour tout $n \geq 3$ et toute surface Σ , tout morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ se relève de façon unique à transvection près en un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$.
- Le théorème 2 : pour tout $n \geq 6$ et toute surface Σ de genre $g \leq \frac{n}{2}$, tout morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est soit cyclique, soit une transvection de morphisme de monodromie (il s'agit du théorème 1 adapté aux morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$).

Lemme 5.11. Soit Σ une surface de bord non vide. Soient F et G appartenant à $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ telles que F et G commutent. Alors pour tous relevés \tilde{F} et \tilde{G} de F et G dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$, \tilde{F} et \tilde{G} commutent.

Remarque. Ce lemme n'est pas aussi évident qu'il y paraît. Si a et b sont des éléments d'un groupe G qui commutent et si H est une extension centrale de G , alors des relevés de a et b dans H ne commutent par forcément. A titre d'exemple, que l'on considère l'extension centrale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \bar{i}, \bar{j} \mid \bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{i}, \bar{i}^2 = \bar{j}^2 = 1 \rangle$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$ qui est égale au groupe quaternionique $\mathbb{H}_8 = \langle i, j, -1, \mid -1 \text{ est central}, ij = -ji, i^2 = j^2 = -1, (-1)^2 = 1 \rangle$. Les éléments \bar{i} et \bar{j} commutent dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais pas leurs antécédents i et j dans \mathbb{H}_8 ! La preuve du lemme 5.11 ci-dessous paraît longue et technique, mais je suis incapable d'en produire une plus simple.

Démonstration. Repartons de la suite exacte centrale reliant $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$:

$$1 \rightarrow \langle T_d, d \in \text{Bord}(\Sigma) \rangle \rightarrow \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma) \rightarrow 1. \quad (*)$$

Alors deux relevés dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ d'un même élément de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ diffèrent d'un élément central. Par conséquent, pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que partant de deux éléments F et G de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ qui commutent, il existe deux relevés \tilde{F} et \tilde{G} de F et G dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ qui commutent. Soit donc F et G deux mapping classes de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ qui commutent.

1°) Si F et G sont périodiques, puisque Σ est de bord non vide, d'après le lemme 3.19 il existe $H \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ telle que F et G sont toutes deux des puissances de H . Soit p et q deux entiers tels que $F = H^p$ et $G = H^q$. Soit \tilde{H} un relevé de H dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Alors \tilde{H}^p et \tilde{H}^q sont des relevés de F et G qui commutent.

2°) Etudions le cas où F est pseudo-Anosov et G est périodique, et notons \tilde{F} et \tilde{G} des relevés de F et G respectivement dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Puisque $FGF^{-1} = G$, il existe une mapping class centrale $V \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ telle que $\tilde{F}\tilde{G}\tilde{F}^{-1} = \tilde{G}V$. Soit p l'ordre de G et soit W la mapping class centrale de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ telle que $\tilde{G}^p = W$. On a alors d'une part :

$$(\tilde{F}\tilde{G}\tilde{F}^{-1})^p = \tilde{F}\tilde{G}^p\tilde{F}^{-1} = \tilde{F}W\tilde{F}^{-1} = W, \quad (1)$$

et d'autre part :

$$(\tilde{F}\tilde{G}\tilde{F}^{-1})^p = (\tilde{G}V)^p = WV^p. \quad (2)$$

En comparant (1) et (2), on s'aperçoit que V est trivial car $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est sans torsion, donc \tilde{F} et \tilde{G} commutent.

3°) Si F et G sont pseudo-Anosov, en vertu du théorème 3.32 il existe deux entiers non nuls p et q tels que $F^p = G^q$. Soient ℓ et k deux entiers tels que $\ell p + kq = p \wedge q = d$. Posons

- $H = F^k G^\ell$ (de sorte que H vérifie $H^p = G^d$ et $H^q = F^d$; H est pseudo-Anosov),
- $P = F(H^{-1})^{(q/d)}$ (de sorte que $P^d = 1$ et $F \in \langle P, H \rangle$),
- $Q = G(H^{-1})^{(p/d)}$ (de sorte que $Q^d = 1$ et $G \in \langle Q, H \rangle$).

D'après le lemme 3.19, puisque P et Q sont deux mapping classes périodiques qui commutent, il existe une mapping class $R \in \langle P, Q \rangle$ telle que $\langle P, Q \rangle = \langle R \rangle$. Ainsi F et G appartiennent au groupe abélien engendré par H et R . Alors d'après l'étape 2°), deux relevés \tilde{H} et \tilde{R} de H et R dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ engendrent eux aussi un groupe abélien. De plus, celui-ci contient deux relevés \tilde{F} et \tilde{G} de F et G dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$. En particulier F et G admettent deux relevés \tilde{F} et \tilde{G} qui commutent.

4°) Soient F et G deux mapping classes quelconques de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ qui commutent. Soit \mathcal{A} l'ensemble de courbes $\sigma(F) \cup \sigma(G)$. Remarquons que \mathcal{A} est simplexe d'après la proposition 3.40.

a) Supposons que F et G appartiennent à $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ (i.e. F et G fixent $\mathcal{A} = \sigma(F) \cup \sigma(G)$ courbe par courbe). Nous allons décrire pour tout $H \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ la construction d'un relevé de H dans $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$, puis nous l'appliquerons à F et G . Pour cela, considérons le diagramme

commutatif suivant où toutes les flèches sont canoniques ($rec_{\mathcal{A}}$ provient de la proposition 3.9, les trois autres morphismes ont été introduits au paragraphe 3.1 définition 3.1) :

$$\begin{array}{ccc}
H_3 \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma) & \xleftarrow{rec_{\mathcal{A}}} & \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial\Sigma_{\mathcal{A}}) \ni H_2 \\
\downarrow \text{oub}_{\partial\Sigma} & & \downarrow \text{oub}_{\partial\Sigma_{\mathcal{A}}} \\
H_4, H \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma) & \xrightarrow{dec_{\mathcal{A}}} & \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}) \ni H_1, H_5
\end{array}$$

Pour tout $H \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma)$, notons H_i , $1 \leq i \leq 5$, les mapping classes suivantes, dérivées de H en suivant le diagramme ci-dessus :

- $H_1 = dec_{\mathcal{A}}(H) :$ $H_1 \in \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$,
- H_2 un relevé de H_1 dans $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial\Sigma_{\mathcal{A}}) :$ $H_2 \in \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial\Sigma_{\mathcal{A}})$,
- $H_3 = rec_{\mathcal{A}}(H_2) :$ $H_3 \in \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial\Sigma_{\mathcal{A}})$,
- $H_4 = \text{oub}_{\partial\Sigma}(H_3) :$ $H_4 \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$,
- $H_5 = dec_{\mathcal{A}}(H_4) :$ $H_5 \in \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$.

Le diagramme est commutatif : $\text{oub}_{\partial\Sigma_{\mathcal{A}}} = (dec_{\mathcal{A}})(\text{oub}_{\partial\Sigma})(rec_{\mathcal{A}})$, donc $H_1 = H_5$. Or on a la suite exacte centrale :

$$1 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma) \xrightarrow{dec_{\mathcal{A}}} \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}) \rightarrow 1, \quad (**)$$

où $\mathcal{T} = \langle T_d, d \in \mathcal{A} \rangle$. Donc H et H_4 , les antécédents de H_1 et H_5 par $dec_{\mathcal{A}}$, diffèrent d'un multitwist le long des courbes de \mathcal{A} . Donc à un élément de \mathcal{T} près, H_3 est un relevé H .

Appliquons ceci à F et G . Du fait que F et G commutent, F_1 et G_1 commutent. Or sur chaque composante connexe de $\Sigma_{\mathcal{A}}$, les restrictions de F_1 et G_1 sont périodiques ou pseudo-Anosov, donc on peut appliquer ce qui a été démontré ci-dessus au 1^o), 2^o), 3^o) et en déduire que F_2 et G_2 commutent. Donc F_3 et G_3 commutent encore. Or comme on vient de le voir pour H , il existe T et T' appartenant à \mathcal{T} tel que $\tilde{F} = F_3T$ et $\tilde{G} = G_3T'$ sont des relevés de F et G . De plus T et T' sont centraux dans $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, donc puisque F_3 et G_3 commutent, \tilde{F} et \tilde{G} commutent.

b) Si F et G sont deux mapping classes tout à fait quelconques qui commutent, notons \tilde{F} et \tilde{G} des relevés de F et G dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. A priori, il existe un multitwist W le long des courbes de bord tel que $\tilde{F}\tilde{G}\tilde{F}^{-1} = \tilde{G}W$. Posons à nouveau $\mathcal{A} = \sigma(F) \cup \sigma(G)$. Puisque F et G commutent, ils préservent globalement \mathcal{A} , donc il existe un entier m non nul tel que F^m et G^m préservent \mathcal{A} courbe par courbe, autrement dit, F^m et G^m appartiennent à $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma)$. Or l'égalité $\tilde{F}\tilde{G}\tilde{F}^{-1} = \tilde{G}W$ implique $\tilde{F}\tilde{G}^m\tilde{F}^{-1} = \tilde{G}^mW^m$, puis

$$\tilde{F}^m\tilde{G}^m\tilde{F}^{-m} = \tilde{G}^mW^{m^2}.$$

Cependant, d'après 4^o) a), $\tilde{F}^m\tilde{G}^m\tilde{F}^{-m} = \tilde{G}^m$, donc W^{m^2} est trivial. Mais $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est sans torsion, donc W est trivial et \tilde{G} et \tilde{F} commutent. \square

Proposition 5.12 (Relèvement de $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma))$ dans $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$).

Soit n un entier supérieur ou égal à 3, soient Σ une surface et $\rho : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ un morphisme. Rappelons que l'on note $\text{oub}_{\partial\Sigma}$, ou simplement oub , la projection canonique de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. Alors :

1^o) Il existe un morphisme $\tilde{\rho} : \mathcal{B}_n \rightarrow \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ tel que $\text{oub} \circ \tilde{\rho} = \rho$.

2^o) Un tel morphisme $\tilde{\rho}$ est unique à transvection près, c'est-à-dire que si $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$ vérifient $\text{oub}(\tilde{\rho}_1) = \text{oub}(\tilde{\rho}_2) = \rho$, il existe $V \in \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ telle que V est dans le centralisateur de $\tilde{\rho}_1(\mathcal{B}_n)$ et de $\tilde{\rho}_2(\mathcal{B}_n)$ et vérifie pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$\tilde{\rho}_2(\tau_i) = \tilde{\rho}_1(\tau_i) V.$$

3°) Un tel morphisme $\tilde{\rho}$ est cyclique si et seulement si ρ est cyclique.

4°) Un tel morphisme $\tilde{\rho}$ est une transvection de morphisme de monodromie si et seulement si ρ est une transvection de morphisme de monodromie.

Démonstration. On montre les quatre points dans l'ordre.

1°) Partons de la suite exacte centrale :

$$1 \rightarrow \langle T_d, d \in \text{Bord}(\Sigma) \rangle \rightarrow \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma) \xrightarrow{\text{oub}} \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma) \rightarrow 1. \quad (*)$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, soit A_i une mapping class de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ telle que $\text{oub}(A_i) = \rho(\tau_i)$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, on a

$$\text{oub}(A_i A_{i+1} A_i) = \text{oub}(A_{i+1} A_i A_{i+1}),$$

donc d'après la suite exacte (*), pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, il existe un multitwist noté W_i le long des courbes de bord de Σ tel que

$$A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1} W_i.$$

Posons alors :

$$\begin{cases} A'_1 := A_1, \\ A'_i := A_i W_1 W_2 \cdots W_{i-1} \text{ lorsque } 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Rappelons que les W_i sont centraux, donc pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$A'_i A'_{i+1} A'_i = A'_{i+1} A'_i A'_{i+1}.$$

Par ailleurs, pour tous entiers i et j inférieurs ou égaux à $n-1$ tels que $|i-j| \geq 2$, les mapping classes A_i et A_j commutent, donc d'après le lemme 5.11, les mapping classes A'_i et A'_j commutent également. Finalement l'application $\tilde{\rho}$ définie par

$$\tilde{\rho}(\tau_i) = A'_i$$

est bien un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. De plus, par construction, $\text{oub}(\tilde{\rho}) = \rho$.

2°) Soient deux morphismes $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$ de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ vérifiant $\text{oub}(\tilde{\rho}_1) = \text{oub}(\tilde{\rho}_2)$. Compte tenu de la suite exacte centrale (*), on peut appliquer le lemme 5.8 : $\tilde{\rho}_2$ est une transvection de $\tilde{\rho}_1$.

3°) Toujours d'après le lemme 5.8, $\tilde{\rho}$ est cyclique si et seulement si ρ est cyclique.

4°) Si $\tilde{\rho}$ est une transvection de morphisme de monodromie, il est clair que $\text{oub} \circ \tilde{\rho}$ est encore une transvection de morphisme de monodromie. Réciproquement, si ρ est une transvection de morphisme de monodromie, il existe

- une $(n-1)$ -chaîne de courbes $(a_i)_{1 \leq i \leq n-1}$,
- un entier $\varepsilon \in \{\pm 1\}$,
- une mapping class V commutant avec T_{a_i} pour tout $i \leq n-1$,

tels que pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$, on ait :

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V.$$

Soit \tilde{V} un relevé de V dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Or pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, la mapping class V commute avec T_{a_i} , donc V fixe a_i , donc \tilde{V} fixe a_i , donc \tilde{V} commute avec T_{a_i} dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Alors le morphisme $\tilde{\rho}$, vérifiant pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$ l'égalité

$$\tilde{\rho}(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon \tilde{V}$$

est une transvection de monodromie. □

Cette dernière proposition nous permet de prouver le théorème 2 annoncé au paragraphe 5.2 :

Théorème 2 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$).

Soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 6. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq n/2$ et $b \geq 0$. Soit $\tilde{\rho}$ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$. Alors $\tilde{\rho}$ est cyclique ou bien est une transvection de morphisme de monodromie. De plus de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

Démonstration. La deuxième partie est claire : l'existence de tels morphismes et équivalente à celle d'une $(n-1)$ -chaîne de courbes dans Σ , donc équivalente à ce que $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

Il nous reste à montrer que tous les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ sont soit cycliques, soit des transvections de morphismes de monodromie. Soit $\tilde{\rho}$ un morphisme non cyclique de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$. En composant $\tilde{\rho}$ par la projection $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma) \xrightarrow{oub} \mathcal{P}Mod(\Sigma)$, on obtient un morphisme ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$. D'après le 3^o de la proposition 5.12, ρ n'est pas cyclique, donc d'après le théorème 1, ρ est une transvection de morphisme de monodromie, donc d'après le 3^o de la proposition 5.12, $\tilde{\rho}$ est une transvection de morphisme de monodromie. \square

5.4 Transvections de morphismes de monodromie

Dans cette thèse, nous allons être amenés à manipuler des transvections de morphismes de monodromie. C'est pourquoi nous commençons cette partie par quelques lemmes nous permettant de les « comparer » entre elles.

Soit Σ une surface et soit \mathcal{M} un sous-groupe de $\mathcal{M}od(\Sigma)$ ou de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$. Toute transvection de morphisme de monodromie de \mathcal{B}_n dans \mathcal{M} peut être décrite par la donnée d'une $(n-1)$ -chaîne (a_1, \dots, a_{n-1}) de courbes dans Σ , d'un entier $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, et d'une mapping class V qui commute avec T_{a_i} pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Nous allons montrer qu'un tel triplet $((a_1, \dots, a_{n-1}), \varepsilon, V)$ est unique. Il nous sera utile pour la suite de le prouver pour tout entier n supérieur ou égal à 4.

Lemme 5.13. (*Unicité du triplet représentant une transvection*)

Soit n un entier supérieur ou égal à 4, soit Σ une surface, et soit \mathcal{M} un sous-groupe de $\mathcal{M}od(\Sigma)$ ou de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$. Soit ρ une transvection de morphisme de monodromie de \mathcal{B}_n dans \mathcal{M} telle qu'il existe deux triplets $((a_1, \dots, a_{n-1}), \varepsilon, V)$ et $((c_1, \dots, c_{n-1}), \eta, W)$ vérifiant pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V = T_{c_i}^\eta W.$$

Alors, ces deux triplets sont égaux.

Démonstration. Etant données les propriétés de V et W , le calcul de $\rho(\tau_1\tau_3^{-1})$ mène à :

$$(T_{a_1} T_{a_3}^{-1})^\varepsilon = (T_{c_1} T_{c_3}^{-1})^\eta . \quad (1)$$

Il s'agit d'une égalité de multitwists (car $I(a_1, a_3) = I(c_1, c_3) = 0$), donc l'un des deux cas suivants est vrai :

$$- \text{ ou bien } \varepsilon = \eta, a_1 = c_1 \text{ et } a_3 = c_3 ; \quad (2)$$

$$- \text{ ou bien } \varepsilon = -\eta, a_1 = c_3 \text{ et } a_3 = c_1 . \quad (3)$$

Etudions le cas (3) afin de l'exclure. Le cas (3) implique :

$$\rho(\tau_1) = T_{c_1}^\eta W = T_{a_3}^{-\varepsilon} W, \quad (4)$$

or on a également $\rho(\tau_1) = T_{a_1}^\varepsilon V$, d'où :

$$W = (T_{a_3} T_{a_1})^\varepsilon V. \quad (5)$$

De même, les égalités

$$\begin{cases} \rho(\tau_2) = T_{a_2}^\varepsilon V, \\ \rho(\tau_2) = T_{c_2}^\eta W = T_{c_2}^{-\varepsilon} W, \end{cases} \quad (6)$$

impliquent que

$$W = (T_{c_2} T_{a_2})^\varepsilon V. \quad (7)$$

En rapprochant (5) et (7), on obtient :

$$T_{c_2} T_{a_2} = T_{a_3} T_{a_1}. \quad (8)$$

Etant donnée (8), on a atteint l'absurdité recherchée si l'on montre que

$$I(a_2, c_2) = 0 \quad (9)$$

car (8) est alors une égalité entre multitwists qui, d'après le lemme 3.12, mène à :

$$\{c_2, a_2\} = \{a_3, a_1\}, \quad (10)$$

puis au fait que $a_2 = a_1$ ou $a_2 = a_3$!

Montrons l'assertion (9). Puisque V commute avec T_{a_3} et T_{a_1} , il commute avec $(T_{a_3} T_{a_1})^\varepsilon V$, donc avec W d'après (5). Donc V commute avec W , V et T_{a_2} , donc d'après (7), V commute également avec T_{c_2} . Finalement, T_{c_2} commute avec W , V et T_{c_2} , donc d'après (7), il commute avec T_{a_2} , autrement dit, l'égalité (9) a lieu.

Finalement, des cas (2) et (3), c'était le cas (2) qu'il fallait retenir, donc $a_1 = c_1$, $\varepsilon = \eta$, et $V = W$. Or pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $T_{a_i}^\varepsilon V = T_{c_i}^\eta W$, donc on en déduit l'égalité $T_{a_i} = T_{c_i}$, et finalement l'égalité $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$. \square

On déduit du lemme 5.13 les définitions suivantes :

Définition 5.14 (Eléments caractéristiques d'une transvection de morphisme de monodromie). Soit n un entier supérieur ou égal à 4, soit Σ une surface, soit \mathcal{M} un sous-groupe de $\text{Mod}(\Sigma)$ ou de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, et soit ρ une transvection de morphisme de monodromie de \mathcal{B}_n dans \mathcal{M} .

– On appelle *triplet caractéristique de ρ* l'unique (d'après le lemme 5.13) triplet $((a_1, \dots, a_{n-1}), \varepsilon, V)$ tel que pour tout $i \leq n-1$, on ait :

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V.$$

– On appellera :

- $(n-1)$ -chaîne caractéristique de la transvection la $(n-1)$ -chaîne (a_1, \dots, a_{n-1}) ,
- signe caractéristique de la transvection l'entier ε ,
- direction de la transvection la mapping class V .

– On note $\Sigma(\rho)$ le voisinage tubulaire de $\bigcup_{i \leq n-1} a_i$ où $(a_i)_{i \leq n-1}$ est la $(n-1)$ -chaîne caractéristique de ρ . Attention : $\Sigma(\rho)$ n'appartient pas forcément à $\text{Sub}(\Sigma)$ car les bords de $\Sigma(\rho)$ peuvent border des disques dans Σ .

– On appellera *morphisme de monodromie* et *morphisme cyclique associés à la transvection ρ* le morphisme de monodromie ρ^* et le morphisme cyclique φ tels que pour tout $i \leq n-1$, on ait :

$$\begin{cases} \rho^*(\tau_i) &= T_{a_i}^\varepsilon, \\ \varphi(\tau_i) &= V. \end{cases}$$

de sorte que pour tout $\xi \in \mathcal{B}_n$, on ait :

$$\rho(\xi) = \rho^*(\xi)\varphi(\xi).$$

La décomposition d'une transvection de morphisme de monodromie fait apparaître deux morphismes : un morphisme de monodromie ρ^* déterminé par une $(n-1)$ -chaîne de courbes et un entier ± 1 , et un morphisme cyclique déterminé par la connaissance de la direction de la transvection, c'est-à-dire déterminé par une mapping class V appartenant au centralisateur de $\rho^*(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} . Le calcul de ce centralisateur est donc essentiel dans la suite de ce chapitre. Il s'exprime simplement à l'aide de la surface $\Sigma(\rho)$, comme l'énonce la proposition suivante.

Reprenons les propositions 4.19 et 4.20. Avec le formalisme de ce chapitre, elles s'expriment ainsi :

Proposition 5.15 (Centralisateur de l'image d'un morphisme de monodromie).

Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \geq \frac{n}{2} - 1$ et $b \geq 0$. Soit \mathcal{M} l'un des groupes $\text{Mod}(\Sigma)$, $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, ou $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Soit ρ un morphisme de monodromie de \mathcal{B}_n dans \mathcal{M} . Soit $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ le sous-groupe de \mathcal{M} des mapping classes qui préservent la sous-surface $\Sigma(\rho)$ et induisent l'identité dans $\text{Mod}(\Sigma(\rho))$. Alors :

- i) le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} est réduit au groupe $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, sauf dans les cas (a), (b), (c) ou (d) ci-dessous où il est égal au groupe engendré par $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ et par Z , où Z est un prolongement quelconque à tout Σ de la mapping class $s \in \text{Mod}(\Sigma(\rho))$ définie à la définition 4.15 (précisons que $\Sigma(\rho)$ est homéomorphe à $\Sigma(\mathcal{B}_n)$);*
- ii) pour toute mapping class V appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans \mathcal{M} , V^2 appartient à $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$.*

Les cas (a), (b) et (c) évoqués ci-dessus sont les suivants où \mathcal{A} est le simplexe $\{a_1, a_3, \dots, a_{n-1}\}$:

- (a) l'entier n est impair,*
- (b) l'ensemble de courbes \mathcal{A} est non séparant,*
- (c) $\Sigma_{\mathcal{A}}$ consiste en deux composantes connexes homéomorphes et $\mathcal{M} = \text{Mod}(\Sigma)$.*

□

6 Corollaires du théorème 1

On prouve dans ce chapitre les corollaires du théorème 1 annoncés dans l'introduction. Rappelons l'énoncé du théorème 1 (prouvé au cours de chapitre 13) :

Théorème 1 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$, $n \geq 6$).

Soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 6. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ avec $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$. Soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$. Si ρ n'est pas cyclique, ρ est une transvection de morphisme de monodromie. De plus de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

Plan de ce chapitre :

- Au paragraphe 6.1, on étudie l'injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans les différents mapping class groups $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et $\mathcal{PMod}(\Sigma)$;
- au paragraphe 6.2, on étudie les morphismes de \mathcal{B}_n dans lui-même et dans \mathcal{B}_{n+1} ;
- au paragraphe 6.3, on étudie les morphismes entre les mapping class groups de deux surfaces éventuellement différentes ;
- au paragraphe 6.4, on étudie les morphismes du mapping class group d'une surface dans lui-même.

6.1 Injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group

D'après les théorèmes 1 et 2, lorsque le genre de Σ est majoré par $\frac{n}{2}$, les morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group associé à la surface Σ sont soit cycliques, soit des transvections de morphismes de monodromie. Par conséquent, la question de l'injectivité des morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group se réduit à celle de l'injectivité des morphismes de monodromie (cf. la proposition 6.1) et des transvections des morphismes de monodromie (cf. la proposition 6.2), car les morphismes cycliques ne sont évidemment pas injectifs. Ces différents résultats sont rassemblés dans le théorème 3).

Etant donnée ρ , une transvection de morphisme de monodromie de \mathcal{B}_n dans le mapping class group d'une surface Σ , la surface $\Sigma(\rho)$ (décrite lors de la définition 5.14) va nous permettre de caractériser l'injectivité des transvections de morphismes de monodromie.

Proposition 6.1 (Injectivité des morphismes de monodromie).

i) Cas de $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 6 et toute surface Σ , un morphisme de monodromie $\tilde{\rho}$ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est injectif si et seulement si $\text{Bord}(\Sigma(\tilde{\rho})) \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ (autrement dit, les courbes de bord de $\Sigma(\tilde{\rho})$ ne bordent pas de disque dans Σ).

ii) Cas de $\mathcal{PMod}(\Sigma)$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 6 et toute surface Σ , un morphisme de monodromie ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est injectif si et seulement si $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \not\subset \text{Bord}(\Sigma)$ (autrement dit, les courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ ne bordent pas de disque dans Σ et l'une d'elles au moins n'est pas isotopes à un bord de Σ).

Démonstration.

Montrons la partie i).

Soit θ le morphisme induit par $\tilde{\rho}$ dans $\mathcal{Mod}(\Sigma(\tilde{\rho}), \partial\Sigma(\tilde{\rho}))$. D'après le théorème 4.17, θ est injectif. Soit ι l'inclusion de $\Sigma(\tilde{\rho})$ dans Σ et ι_* le morphisme induit de $\mathcal{Mod}(\Sigma(\tilde{\rho}), \partial\Sigma(\tilde{\rho}))$ dans $\mathcal{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, de sorte que $\tilde{\rho} = \iota_* \circ \theta$.

- *Condition nécessaire.* Si $\tilde{\rho}$ est injectif, en particulier, $\tilde{\rho}(\Delta^4)$ n'est pas trivial. Or dans le cas où n est impair, $\tilde{\rho}(\Delta^4)$ coïncide avec $T_d^{\pm 1}$ où d est l'unique courbe de bord de $\Sigma(\tilde{\rho})$, donc il faut que $T_d \neq 1$, autrement dit, $d \in \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Dans le cas où n est pair, $\tilde{\rho}(\Delta^4)$ coïncide avec $(T_{d_1}T_{d_2})^{\pm 2}$ où d_1 et d_2 sont les deux bords de $\Sigma(\tilde{\rho})$. Puisqu'on a $(T_{d_1}T_{d_2})^{\pm 1} \neq 1$, il faut que les courbes d_1 et d_2 ne bordent pas toutes deux un disque. De plus, si l'une d'elles est triviale dans Σ (par exemple d_1 , cf. figure 29), alors $\iota_* \circ \theta((\tau_{a_1} \dots \tau_{a_{n-2}})^{2(n-1)})$ coïncide avec $\iota_* \circ \theta((\tau_{a_1} \dots \tau_{a_{n-1}})^n)$, ce qui est absurde, car un produit de $n(n-1)$ générateurs standards ne peut pas être égal à un produit de $2(n-1)(n-2)$ générateurs standards (ce n'aurait pu être possible que si $n \in \{1, 4\}$). Donc à nouveau, $\{d_1, d_2\} \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$.

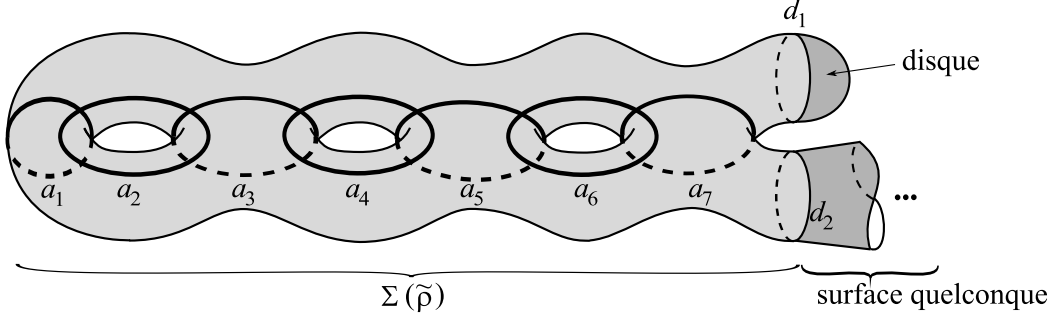


FIG. 29 – Exemple avec $n = 8$: si d_1 est triviale, on a $(T_{a_1} \dots T_{a_{n-2}})^{2(n-1)} = (T_{a_1} \dots T_{a_{n-1}})^n = T_{d_2}$.

- *Condition suffisante.* On suppose que $\text{Bord}(\Sigma(\tilde{\rho})) \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Alors d'après le théorème 3.10, dans le cas où n est impair, ou dans celui où n est pair et où les deux courbes de bord de $\Sigma(\tilde{\rho})$ ne sont pas isotopes dans Σ , ι_* est injectif. Dans le cas où n est pair et où les deux courbes de bord d_1 et d_2 de $\Sigma(\tilde{\rho})$ sont isotopes dans Σ , toujours d'après le théorème 3.10, $\text{Ker}(\iota_*) = \langle T_{d_1}T_{d_2}^{-1} \rangle$. Or d'après le théorème 4.17, $\theta(\mathcal{B}_n)$ coïncide avec $\mathcal{SMod}(\Sigma(\tilde{\rho}), \partial\Sigma(\tilde{\rho}))$ tandis que $T_{d_1}T_{d_2}^{-1}$ n'y appartient pas. Donc $\text{Ker}(\iota_*) \cap \text{Im}(\theta) = \{1\}$, donc $\iota_*(\theta)$ est injectif. Finalement, dans tous les cas, $\iota_* \circ \theta$ est injectif, donc $\tilde{\rho}$ aussi.

Montrons la partie ii).

A nouveau, soit θ le morphisme induit par ρ dans $\mathcal{Mod}(\Sigma(\rho), \partial\Sigma(\rho))$. D'après le théorème 4.17, θ est injectif. Soit ι l'inclusion de $\Sigma(\rho)$ dans Σ et ι_* le morphisme induit de $\mathcal{Mod}(\Sigma(\rho), \partial\Sigma(\rho))$ dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$, de sorte que $\rho = \iota_* \circ \theta$. Le morphisme ι_* n'est pas nécessairement injectif.

- *Condition nécessaire.* Comme dans le cas de la partie i) avec $\tilde{\rho}$, il faut que $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$, mais puisque les twists de Dehn le long des courbes de bord sont triviaux dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$, il faut que $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \not\subset \text{Bord}(\Sigma)$.
- *Condition suffisante.* Supposons que $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et que $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \not\subset \text{Bord}(\Sigma)$, et vérifions que ρ est injectif. Notons Σ' le complémentaire de $\Sigma(\rho)$ dans Σ ; on suppose que si un bord de $\Sigma(\rho)$ est isotope à un bord de Σ , ces deux bords coïncident, de sorte qu'avec ces hypothèses, chacune des composantes connexes de Σ' est de caractéristique d'Euler au plus -1 . Or, puisque $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \not\subset \text{Bord}(\Sigma)$, la surface Σ' est non vide et $\partial^{\text{int}}\Sigma(\rho) \neq \emptyset$. Le morphisme ρ est à valeurs dans $\mathcal{PMod}(\Sigma, \Sigma')$ qui est isomorphe à $\mathcal{Mod}(\Sigma(\rho), \partial^{\text{int}}(\Sigma(\rho)))$. Si $\partial^{\text{int}}(\Sigma(\rho)) = \partial(\Sigma(\rho))$, alors le théorème 4.17 s'applique et ρ est injectif. C'est toujours ce qui se produit dans le cas impair, mais dans le cas pair, il peut arriver d'après les hypothèses que $\partial^{\text{int}}(\Sigma(\rho)) = \{d\} \neq \partial(\Sigma(\rho))$, où d est l'une des deux courbes de bord de $\Sigma(\rho)$. Dans ce cas, $\mathcal{PMod}(\Sigma, \Sigma')$ est isomorphe à $\mathcal{Mod}(\Sigma(\rho), d)$

et ρ induit un morphisme ς de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\rho), d)$ qui est injectif si et seulement si ρ est lui-même injectif. Notons pr la projection canonique de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\rho), \partial\Sigma(\rho))$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma(\rho), d)$. Alors $\varsigma = pr \circ \theta$. De plus, on a $\text{Ker}(\varsigma) = \text{Ker}(pr) \cap \theta(\mathcal{B}_n) = \{1\}$, car $\text{Ker}(pr) = \langle T_{d'} \rangle$ où d' est le bord de $\Sigma(\rho)$ différent de d , mais $T_{d'}$ n'appartient pas à $\theta(\mathcal{B}_n)$. Donc ς est injectif, donc ρ est injectif. \square

Proposition 6.2 (Injectivité des transvections).

i) Soit n un entier supérieur ou égal à 3, soit G un groupe quelconque, soient ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans G et ρ_1 une transvection de ρ . Si G est sans torsion (par exemple si $G = \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ avec $\partial\Sigma \neq \emptyset$), alors ρ est injectif si et seulement si ρ_1 est injectif.

ii) Soit n un entier supérieur ou égal à 6 et soit Σ une surface de genre $g \leq \frac{n}{2}$. Alors pour tout morphisme de monodromie ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, toute transvection de ρ est injective si et seulement si ρ est injectif.

Démonstration.

Montrons la partie i).

Soit ρ un morphisme injectif de \mathcal{B}_n dans G et soit ρ_1 une transvection de ρ . Montrons par l'absurde que ρ_1 est injectif. Ce faisant, nous aurons démontré la partie i) de la proposition 6.2 car ρ peut également être vu comme une transvection de ρ_1 . Supposons donc qu'il existe ξ , un élément non trivial de \mathcal{B}_n , tel que $\rho_1(\xi) = 1$. Par définition d'une transvection, il existe un morphisme cyclique $\varphi : \mathcal{B}_n \rightarrow G$ tel que pour tout $\zeta \in \mathcal{B}_n$, on ait $\rho_1(\zeta) = \rho(\zeta)\varphi(\zeta)$. On a donc $\rho(\xi) = \varphi(\xi)^{-1}$, or par définition des transvections, $\varphi(\xi)$ est dans le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans G , donc $\rho(\xi)$ doit également y appartenir. Puisque ρ est injectif, cela signifie que ξ appartient au centre de \mathcal{B}_n , donc ξ est une puissance de Δ^2 . Il existe donc un entier non nul k tel que $(\rho(\Delta)\varphi(\Delta))^{2k} = 1$. Comme G est sans torsion on en déduit que $\rho(\Delta)\varphi(\Delta) = \rho_1(\Delta) = 1$. Alors, comme plus haut, $\varphi(\Delta)$ est dans le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans G , donc $\rho(\Delta)$ doit également y appartenir, et puisque ρ est injectif, Δ doit appartenir au centre de \mathcal{B}_n , donc être une puissance de Δ^2 , ce qui est absurde.

Montrons la partie ii).

1°) Montrons que si le morphisme ρ est injectif, alors la transvection ρ_1 est injective.

Reprenons la même démonstration qu'au i), mais en supposant cette fois que $n \geq 6$, que $G = \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et que ρ est un morphisme de monodromie injectif. On veut montrer que la transvection ρ_1 est injective. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un élément ξ non trivial de \mathcal{B}_n tel que $\rho_1(\xi) = 1$. Comme au i), on en déduit l'existence d'un entier non nul k tel que $\rho(\Delta^{-2k}) = \varphi(\Delta^{2k})$. Or Δ est un produit de $\frac{n(n-1)}{2}$ générateurs, donc $\varphi(\Delta^2)$ est la puissance $n(n-1)$ -ème d'une mapping class V appartenant au centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. Appelons W la mapping class V^2 dont on sait d'après la proposition 5.15 qu'elle vit dans $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, où $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ est le sous-groupe de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ des mapping classes qui préservent $\Sigma(\rho)$ et induisent l'identité dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma(\rho))$. Récapitulons : on a d'une part $\varphi(\Delta^2) = W^{\frac{n(n-1)}{2}}$, d'autre part $\varphi(\Delta^{2k}) = \rho(\Delta^{-2k})$, et enfin $\rho(\Delta^4) = T_d^{\pm 1}$ où d est l'unique courbe de bord de $\Sigma(\rho)$ si n est impair tandis que $\rho(\Delta^2) = (T_{d_1}T_{d_2})^{\pm 1}$ où d_1 et d_2 sont les deux courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ si n est pair. Il en résulte que la mapping class W , vivant dans $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$, satisfait :

- a) $W^{kn(n-1)} = T_d^{\mp k}$ si n est impair, où d est l'unique courbe de bord de $\Sigma(\rho)$;
- b) $W^{\frac{kn(n-1)}{2}} = (T_{d_1}T_{d_2})^{\mp k}$, si n est pair, où $\{d_1, d_2\}$ constitue le bord de $\Sigma(\rho)$.

Rappelons que puisque ρ est supposé injectif, d'après la proposition 6.1, les courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ ne sont pas toutes triviales, donc les mapping classes T_d dans le cas a) et $T_{d_1}T_{d_2}$ dans le cas b) ne sont pas triviales.

Montrons que le cas a) mène à une contradiction. La courbe d est une courbe séparante de Σ . Appelons Σ' la composante connexe de Σ différente de $\Sigma(\rho)$. D'après la proposition 3.2.i), $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma, \Sigma(\rho))$ est isomorphe à $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma', d)$. La mapping class W peut ainsi être vue comme une mapping class périodique dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma', d)$. Appelons m son ordre. D'après le lemme 3.17, il existe un entier p premier avec m tel que $W^m = T_d^p$, donc l'égalité $W^{kn(n-1)} = T_d^{\mp k}$ implique $W^{n(n-1)} = T_d^{\mp 1}$. On en déduit que la période de W est $n(n-1)$, donc il est supérieur ou égal à 42 puisque $n \geq 7$. Or $\Sigma(\rho)$ est de genre $\frac{n}{2} - 1$ et Σ est de genre au plus $\frac{n}{2}$ donc Σ' est de genre au plus 1. Mais il n'existe pas de mapping class périodique non triviale dans une surface de genre nul dont les bords sont fixés d'après le corollaire 3.23, et l'ordre des mapping classes périodiques d'une surface de genre 1 de bord non vide et dont les bords sont fixés est majoré par 6 d'après le corollaire 3.25. C'est une contradiction.

Montrons que le cas b) mène lui aussi à une contradiction. Si Σ est le recollement de $\Sigma(\rho)$ sur lui-même en identifiant ses deux bords d_1 et d_2 en une seule courbe d , alors $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ est le groupe cyclique engendré par T_d , donc il existe un entier m tel que $W = T_d^m$, mais d'autre part $W^{\frac{kn(n-1)}{2}} = (T_{d_1}T_{d_2})^{\mp k} = T_d^{\mp 2k}$, d'où $(T_d^m)^{\frac{kn(n-1)}{2}} = T_d^{\mp 2k}$, ce qui est absurde car T_d n'est pas un élément de torsion. Il reste à étudier le cas où d_1 et d_2 sont deux courbes distinctes dans $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$, dont on sait qu'au moins une n'est pas une courbe de bord de Σ . Remarquons que V préservait $\{d_1, d_2\}$, donc W (qui est le carré de V) préserve chacune des courbes d_1 et d_2 . Finalement, comme précédemment, W peut être vue comme une mapping class périodique de période au moins 15 (car $\frac{n(n-1)}{2}$ vaut au moins 15 lorsque $n \geq 6$), alors que W vit sur une surface de genre au plus 1 à bord dont elle préserve chaque bord et devrait être par conséquent triviale si le genre valait 0, ou d'ordre au plus 6 si le genre valait 1, d'après les corollaires 3.23 et 3.25. C'est une contradiction.

2°) *Montrons que si le morphisme ρ n'est pas injectif, alors la transvection ρ_1 non plus n'est pas injective.*

Soit ρ un morphisme de monodromie non injectif de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et soit ρ_1 une transvection de ρ . Montrons que ρ_1 n'est pas injectif. Compte-tenu de la proposition 6.1.ii), il peut exister plusieurs raisons pour que ρ ne soit pas injectif. On distingue deux cas, selon que $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \cap \text{Courb}(\Sigma)$ soit vide ou non.

- Si $\text{Bord}(\Sigma(\rho))$ ne contient aucune courbe dans $\text{Courb}(\Sigma)$ (i.e. la ou les courbes de $\text{Bord}(\Sigma(\rho))$ bordent des disques dans Σ ou sont isotopes à des bords de Σ), alors $\mathcal{M}^{\Sigma(\rho)}$ est trivial. Donc d'après la proposition 5.15, lorsque n est impair, le centralisateur de $\rho(\mathcal{B}_n)$ est engendré par $\rho(\Delta^2)$ qui est d'ordre 2, et lorsque n est pair, ce centralisateur est trivial. Donc dans tous les cas, on a $\rho_1(\Delta^4) = 1$. Donc ρ_1 n'est pas injectif.
- Si $\text{Bord}(\Sigma(\rho))$ contient une courbe dans $\text{Courb}(\Sigma)$ tandis que ρ n'est pas injectif, c'est que n est pair et que le bord de $\text{Bord}(\Sigma(\rho))$ qui n'est pas dans $\text{Courb}(\Sigma)$ borde un disque. Dans ce cas, on va montrer que ρ_1 n'est pas injectif en exhibant deux éléments de \mathcal{B}_n qui ne commutent pas dans \mathcal{B}_n mais dont les images commutent. Posons $\Delta_{n-2} = \tau_1(\tau_2\tau_1) \dots (\tau_{n-2}\tau_{n-3} \dots \tau_1)$. On a vu au cours de la démonstration de la proposition 6.1 que dans les conditions présentes, on avait $\rho(\Delta^2) = \rho(\Delta_{n-2}^4)$ (cf. figure 29). Donc en particulier $\rho(\Delta_{n-2}^4)$ commute avec $\rho(\tau_{n-1})$, donc $\rho_1(\Delta_{n-2}^4)$ commute avec $\rho_1(\tau_{n-1})$. Mais Δ_{n-2}^4 ne commute pas avec τ_{n-1} , donc ρ_1 n'est pas injectif. \square

Compte tenu des théorèmes 1 et 2, et des propositions 6.1 et 6.2, on obtient le théorème 3 :

Théorème 3 (Injectivité des morphismes du groupe de tresses dans le mapping class group).

Soit n un entier supérieur ou égal à 6 et soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ telle que $g \leq \frac{n}{2}$. Soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ ou dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$.

i) Cas de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Le morphisme ρ est injectif si et seulement s'il est une transvection de morphisme de monodromie telle que $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ (autrement dit, les courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ ne bordent pas de disque dans Σ).

ii) Cas de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. Le morphisme ρ est injectif si et seulement s'il est une transvection de morphisme de monodromie telle que $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \subset \text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et $\text{Bord}(\Sigma(\rho)) \not\subset \text{Bord}(\Sigma)$ (autrement dit, les courbes de bord de $\Sigma(\rho)$ ne bordent pas de disque dans Σ et ne sont pas toutes isotopes à des bords de Σ). \square

6.2 Morphismes entre groupes de tresses.

En 2000, R.Bell et D.Margalit ont démontré (cf. [BeMa]) que tous les morphismes injectifs de \mathcal{B}_n dans lui-même étaient des transvections de direction Δ^{2k} , $k \in \mathbb{Z}$ d'automorphismes intérieurs éventuellement composés par Inv (cf. définition 6.3 ci-dessous). Ils ont montré que de façon similaire, les morphismes injectifs de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_{n+1} étaient des transvections de restrictions à \mathcal{B}_n d'automorphismes intérieurs de \mathcal{B}_{n+1} éventuellement composés par Inv.

Nous allons prouver que tous les morphismes non cycliques sont de la forme indiquée par R.Bell et D.Margalit. Au passage, nous redémontrons le théorème suivant dû à Lin en 1982, cf. [Ln1] : si m est strictement inférieur à n , les morphismes de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m se résument aux morphismes cycliques.

Pour alléger les notations, on considère que les groupes de tresses sont inclus les uns dans les autres par l'inclusion canonique envoyant les générateurs standards sur les générateurs standards de même indice.

Introduisons un automorphisme particulier de \mathcal{B}_n :

Définition 6.3 (L'involution Inv de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_n).

Soit Inv l'automorphisme involutif de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_n qui envoie τ_i sur τ_i^{-1} pour tout $i \leq n-1$.

Théorème 4 (Morphismes entre groupes de tresses).

Soient n et m deux entiers tels que $n \geq 6$ et $3 \leq m \leq n+1$.

i) Cas où $m < n$: tout morphisme φ de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m est cyclique.

ii) Cas où $m = n$: tout morphisme φ non cyclique de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_n est une transvection d'automorphisme intérieur composée éventuellement par l'involution Inv : il existe $\gamma, v \in \mathcal{B}_n$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que pour tout $i \leq n-1$, on ait :

$$\varphi(\tau_i) = \gamma \tau_i^\varepsilon \gamma^{-1} v.$$

De plus, v est un multiple de Δ^2 .

iii) Cas où $m = n+1$: considérons le groupe \mathcal{B}_n comme le sous-groupe de \mathcal{B}_{n+1} engendré par les $n-1$ premiers générateurs standards de \mathcal{B}_{n+1} . Alors, tout morphisme φ de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_{n+1} est à transvection près la restriction à \mathcal{B}_n d'un morphisme de \mathcal{B}_{n+1} dans lui-même. D'après le ii), si φ n'est pas cyclique, il existe donc $\gamma, v \in \mathcal{B}_{n+1}$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que pour tout $i \leq n-1$, on ait :

$$\varphi(\tau_i) = \gamma \tau_i^\varepsilon \gamma^{-1} v.$$

De plus, v appartient au centralisateur de $\{\gamma \xi \gamma^{-1}, \xi \in \mathcal{B}_n\}$ dans \mathcal{B}_{n+1} .

iv) Tous les morphismes non cycliques ci-dessus sont injectifs.

Démonstration. Pour montrer l'une ou l'autre des quatre parties de l'énoncé, on commence par poser les définitions suivantes. Soient :

- n et m deux entiers tels que $n \geq 6$ et $m \geq n - 1$,
- φ un morphisme allant de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m ,
- Σ la surface $\Sigma(\mathcal{B}_m)$, de genre g égal à la partie entière de $\frac{m-1}{2}$,
- $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ le morphisme de \mathcal{B}_m dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$,
- s la mapping class de $\text{Mod}(\Sigma)$ introduite à la définition 4.15, relativement à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$,
- $\widetilde{\text{Ad}}_s$ l'automorphisme de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ qui à une mapping class F associe la classe d'isotopie dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ de $\bar{s}\bar{F}\bar{s}^{-1}$ où \bar{s} et \bar{F} sont des difféomorphismes représentant s et F ,
- $\mathcal{S}\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ l'ensemble des points fixes de $\widetilde{\text{Ad}}_s$ (conformément à la définition 4.15),
- c_i la courbe telle que $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\tau_i) = T_{c_i}$, pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Sous réserve que $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi$ soit une transvection de morphisme de monodromie, on note de plus :

- $((a_1, \dots, a_{n-1}), \varepsilon, V)$ le triplet caractéristique de $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi$ de sorte que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on ait :

$$\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V. \quad (1)$$

Commençons par montrer un fait que l'on réutilisera plusieurs fois dans cette démonstration.

Lorsque $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi$ est une transvection de morphisme de monodromie, montrons que les courbes a_i , $1 \leq i \leq n-1$, sont s -stables. Pour tout $i, j \leq n-1$, on a $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi(\tau_i \tau_j^{-1}) = (T_{a_i} T_{a_j}^{-1})^\varepsilon$. Or lorsque $|i - j| \geq 2$, $T_{a_i} T_{a_j}^{-1}$ est un multitwist appartenant à $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi(\mathcal{B}_n)$, inclus dans $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$, lui-même égal à $\mathcal{S}\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Donc $T_{a_i} T_{a_j}^{-1}$ est un point fixe de $\widetilde{\text{Ad}}_s$. Or $\widetilde{\text{Ad}}_s(T_{a_i} T_{a_j}^{-1}) = T_{s(a_i)} T_{s(a_j)}^{-1}$, donc $T_{a_i} T_{a_j}^{-1} = T_{s(a_i)} T_{s(a_j)}^{-1}$, donc d'après le lemme 3.12, on obtient $s(a_i) = a_i$ et $s(a_j) = a_j$. Finalement, pour tout $i \leq n-1$, on a $s(a_i) = a_i$. Ceci étant, on peut attaquer la démonstration des différentes parties de l'énoncé.

Montrons la partie i).

On distingue les cas selon la parité de n . Si n est impair, le genre g de Σ est égal à la partie entière de $\frac{m-1}{2}$, donc est strictement inférieur à $\frac{n-1}{2}$ (car $m < n$ et car n est impair) donc d'après le théorème 1, tout morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est cyclique. En particulier, $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi$ est cyclique. Or $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ est injectif, donc φ est cyclique.

Dans le cas où n est un entier pair supérieur à 6 et où $m \leq n - 2$, le raisonnement précédent fonctionne. Par contre, lorsque $m = n - 1$, le genre g est égal à la partie entière de $\frac{m-1}{2}$, elle-même égale à la partie entière de $\frac{m}{2}$ car m est impair, donc g est égal à $\frac{n-1}{2}$, donc d'après le théorème 1, il peut exister des morphismes non cycliques de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Supposons que ce soit le cas de $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi$. On résume la situation par le diagramme commutatif suivant où $r = \frac{n}{2}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{2r} & \xrightarrow{\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi} & \text{Mod}(\Sigma_{r-1,1}, \partial\Sigma_{r-1,1}) \\ & \searrow \varphi & \nearrow \tilde{\rho}_{\text{ref}} \\ & \mathcal{B}_{2r-1} & \end{array}$$

On souhaite obtenir une contradiction. Soit Σ' la surface égale au voisinage tubulaire des courbes a_i pour $1 \leq i \leq m-2$. Cette surface est de genre $g-1$ et possède deux composantes de bord que l'on note e^+ et e^- (cf. figure 30). Puisque s préserve les courbes a_i , s préserve la surface Σ' , et préserve aussi le découpage de Σ' le long des courbes a_i , $i \in \text{Imp}(m-2)$. Ce découpage de Σ' est la réunion disjointe de deux sous-surfaces de genre nul l'une et l'autre : les sous-surfaces Σ'_1 et Σ'_2 sur la figure 30. Si s les préservait chacune, s fixerait chacun de leurs bords et serait donc l'identité sur chacun d'eux, ce qui est absurde. Donc s les échange, d'où :

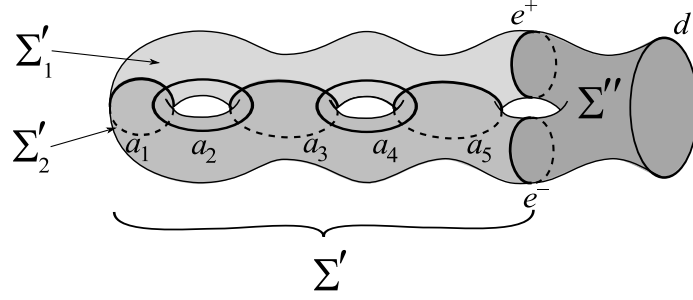


FIG. 30 – Démonstration du théorème 4 : La surface marquée Σ et ses deux sous-surface Σ' et Σ'' , cas où $n = 8$, $r = 4$.

$$s(e^+) = e^- \text{ et } s(e^-) = e^+.$$

Notons Σ'' le complémentaire de Σ' dans Σ . Ainsi Σ'' est un pantalon dont les bords sont d , e^+ et e^- . Or la courbe a_m intersecte a_{m-1} mais pas les courbes a_i d'indice $i \leq m-2$, donc a_m est incluse dans Σ'' , donc a_m est l'une des courbe e^+ , e^- , ou d . Or a_m ne peut être égal à d puisque d ne coupe pas a_{m-1} , de plus a_m ne peut pas non plus être égal à e^+ ou e^- puisque ces deux courbes ne sont pas s -stables contrairement à a_m . C'est une contradiction.

Montrons les parties ii) et iii).

Le morphisme φ de \mathcal{B}_n dans \mathcal{B}_m est supposé non cyclique, donc le morphisme $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi$ de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ n'est pas cyclique puisque $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ est injectif d'après le théorème 4.17, donc d'après le théorème 1, le morphisme $\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi$ est une transvection de morphisme de monodromie. Reprenons l'égalité (1) : pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a :

$$\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V. \quad (1)$$

On reprend les notations introduites au début de cette démonstration. Dans un premier temps, nous allons montrer que dans (1), on peut remplacer T_{a_i} par $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma\tau_i\gamma^{-1})$ où γ est un élément de \mathcal{B}_m indépendant de i , puis dans un deuxième temps, nous montrerons que V appartient à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$. On distingue deux cas :

- Si $m = n$, on dispose de deux $(m-1)$ -chaînes de courbes : $(c_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq m-1}$. Par hypothèse, $\Sigma = \Sigma(\mathcal{B}_m)$, or $\Sigma(\mathcal{B}_m)$ est par définition le voisinage tubulaire de la réunion des courbes de $(c_i)_{1 \leq i \leq m-1}$. De même, Σ est le voisinage tubulaire de la réunion des courbes de $(a_i)_{1 \leq i \leq m-1}$. En effet, lorsque m est impair, ceci est vrai pour toute $(m-1)$ -chaîne de courbes. Lorsque m est pair, il existe un plongement de $(m-1)$ -chaînes de courbes dans Σ dont Σ n'est pas le voisinage tubulaire, dessiné figure 31. Mais on montrerait

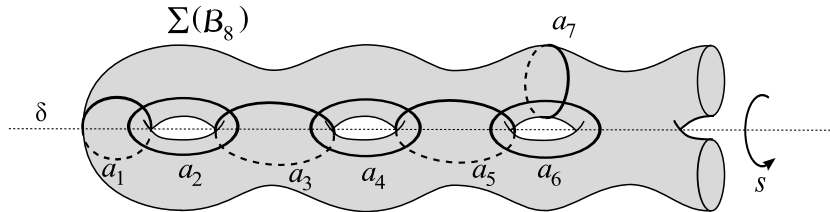


FIG. 31 – Cas d'une $(m-1)$ -chaîne de courbe (m pair) dans une surface $\Sigma(\mathcal{B}_m)$, par définition homéomorphe à $\Sigma_{\frac{m-2}{2}, 2}$.

comme on l'a fait dans la partie i) à propos des courbes e^+ et e^- que la courbe a_{m-1} ainsi définie n'est pas s -stable. Alors, puisque Σ est un voisinage tubulaire des deux $(m-1)$ -chaînes de courbes $(c_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq m-1}$, elles sont topologiquement équivalentes dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, au sens où il existe une mapping class F dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ qui vérifie $F(c_i) = a_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Donc pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, on a $FT_{c_i}F^{-1} = T_{a_i}$. Par ailleurs, les twists de Dehn le long des courbes c_i , $1 \leq i \leq m-1$, engendrent $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$, or les courbes a_i , $1 \leq i \leq m-1$, sont s -stables, donc T_{a_i} appartient à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$. On en déduit que F appartient au normalisateur de $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$ dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Alors d'après la proposition 4.22, quitte à composer F par une puissance de twist de Dehn (central) le long d'une courbe de bord de Σ , on peut supposer que F appartient à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$. Soit alors γ un élément de \mathcal{B}_m tel que $F = \tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, on a $T_{a_i} = T_{F(c_i)} = FT_{c_i}F^{-1} = \tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma)\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\tau_i)\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma)^{-1} = \tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma\tau_i\gamma^{-1})$. Autrement dit, on a montré que :

$$\text{pour tout } i \in \{1, \dots, m-1\}, T_{a_i} = \tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma\tau_i\gamma^{-1}). \quad (2)$$

- Si $m = n+1$, Σ n'est plus un voisinage tubulaire de la réunion des courbes de $(a_i)_{1 \leq i \leq m-2}$. On peut toujours trouver comme avant une mapping class F envoyant les courbes de $(c_i)_{1 \leq i \leq m-2}$ sur celles de $(a_i)_{1 \leq i \leq m-2}$, mais a priori, cette mapping class F n'appartient pas à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$ et on ne peut pas conclure comme précédemment. Pour y remédier, nous allons construire une courbe a_{m-1} stable par s , telle que $(a_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ soit une $(m-1)$ -chaîne de courbes. On se sera ramené de cette façon au cas précédent où $m = n$ et l'égalité (2) est vérifiée. Construisons donc cette courbe a_{m-1} . Soit Σ' la surface égale au voisinage tubulaire de la réunion des courbes a_i , $1 \leq i \leq m-2$. Puisque toutes les courbes a_i , $1 \leq i \leq m-2$, sont stables par s , la surface Σ' est stable par s . Nous allons construire la courbe a_{m-1} par morceaux comme décrit ci-après. On se référera aux figures 32 et 33. Soit

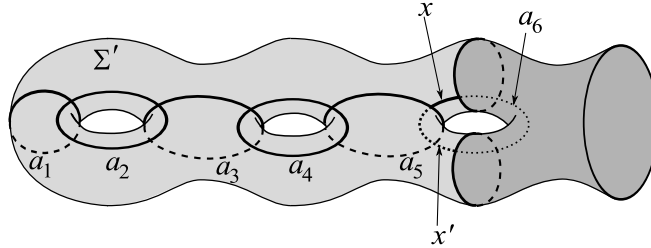


FIG. 32 – Construction de la courbe a_{m-1} lorsque m est impair (ici, $n = 6$ et $m = 7$).

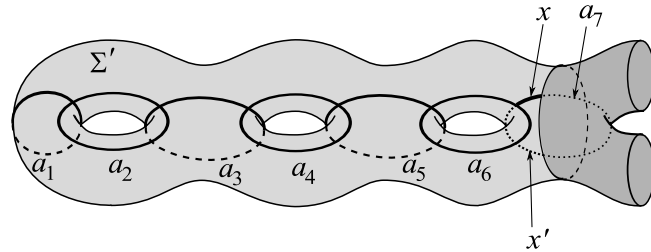


FIG. 33 – Construction de la courbe a_{m-1} lorsque m est pair (ici, $n = 7$ et $m = 8$).

x un chemin dans Σ' dont l'une de ses extrémités appartient à a_{m-2} et l'autre appartient au bord de Σ' , et tel que l'intérieur de x n'intersecte aucune courbe a_i , $1 \leq i \leq m-2$. Soit

x' le chemin image de x par s . La réunion $x \cup x'$ est un chemin s -stable à extrémités dans $\partial\Sigma'$ qui intersecte a_{m-2} une fois et n'intersecte pas les courbes a_i , $1 \leq i \leq m-3$. Il est facile de refermer le chemin $x \cup x'$ du côté du complémentaire de Σ' dans Σ de sorte que la courbe a_{m-1} obtenue soit s -stable, intersecte a_{m-2} une fois et n'intersecte pas les courbes a_i , $1 \leq i \leq m-3$. Alors la $(m-1)$ -chaîne de courbes $(a_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ ainsi définie est s -stable.

On a montré qu'il existait $\gamma \in \mathcal{B}_m$ tel que (2) soit vérifié. Montrons maintenant que dans (1), la mapping class V appartient à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$. Pour tout $i \leq n-1$, on a $T_{a_i}^\varepsilon V = \tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi(\tau_i)$ donc $T_{a_i}^\varepsilon V$ appartient à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$, or T_{a_i} appartient à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$ comme on l'a vu au début de cette démonstration, donc V lui-même appartient à $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$, donc il existe $v \in \mathcal{B}_m$ tel que $V = \tilde{\rho}_{\text{ref}}(v)$. Finalement, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on obtient :

$$\tilde{\rho}_{\text{ref}} \circ \varphi(\tau_i) = \tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma \tau_i^\varepsilon \gamma^{-1}) \tilde{\rho}_{\text{ref}}(v) = \tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma \tau_i^\varepsilon \gamma^{-1} v). \quad (3)$$

Or $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ est injectif. Donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on obtient :

$$\varphi(\tau_i) = \gamma \tau_i^\varepsilon \gamma^{-1} v. \quad (4)$$

De plus, V commute avec T_{a_i} pour tout $i \leq n-1$, donc doit appartenir au centralisateur de $\langle \tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma \tau_i \gamma^{-1}), i \leq n-1 \rangle$, donc doit appartenir au centralisateur de $\{\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\gamma \xi \gamma^{-1}), \xi \in \mathcal{B}_n\}$ dans $\tilde{\rho}_{\text{ref}}(\mathcal{B}_m)$. Or $\tilde{\rho}_{\text{ref}}$ est injectif, donc v appartient au centralisateur de $\{\gamma \xi \gamma^{-1}, \xi \in \mathcal{B}_n\}$ dans \mathcal{B}_m . Lorsque $m = n$, on a $\gamma \in \mathcal{B}_n$, donc $\{\gamma \xi \gamma^{-1}, \xi \in \mathcal{B}_n\} = \mathcal{B}_n$ et v appartient au centre de \mathcal{B}_n , donc est un multiple de Δ^2 d'après le théorème 4.7.

Montrons la partie iv).

Les morphismes non triviaux sont injectifs, car puisque \mathcal{B}_n est sans torsion, d'après le lemme 6.2, une transvection d'automorphisme intérieur est injective. Le fait de composer par Inv ne modifie pas le caractère injectif. \square

Théorème 6.4 (Dyer & Grossman, [DyGr], 1981).

Soit n un entier supérieur ou égal à 6. On a : $\text{Out}(\mathcal{B}_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit φ un automorphisme de \mathcal{B}_n . D'après le théorème 4, il existe Φ , un automorphisme intérieur éventuellement composé par Inv , et un entier pair k , tels que pour tout $i \leq n-1$,

$$\varphi(\tau_i) = \Phi(\tau_i) \Delta^k. \quad (1)$$

Or φ et Φ étant des automorphismes, ils conservent le centre de \mathcal{B}_n , engendré par Δ^2 ou son inverse. Donc $\varphi(\Delta^2) = \Delta^{\pm 2}$ et $\Phi(\Delta^2) = \Delta^{\pm 2}$. On a alors deux possibilités :

$$\varphi(\Delta^2) = \Phi(\Delta^2), \quad (2)$$

$$\text{ou } \varphi(\Delta^2) = \Phi(\Delta^2) \Delta^{\pm 4}. \quad (3)$$

Mais Δ^2 est un produit de $n(n-1)$ générateurs standards, donc l'égalité (1) implique :

$$\varphi(\Delta^2) = \Phi(\Delta^2) \Delta^{kn(n-1)}. \quad (4)$$

Les égalités (3) et (4) sont incompatibles, donc (2) a lieu, $k = 0$, $\varphi = \Phi$ et modulo Inv , tous les automorphismes de \mathcal{B}_n sont intérieurs. \square

6.3 Morphismes entre mapping class groups

Dans cette section, nous allons étudier les morphismes entre deux mapping class groups associés à deux surfaces Σ et Σ' de genres g et g' tels que $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$, et de nombres de bords b et b' quelconques. On considérera ainsi :

- les morphismes de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$ (cf. théorèmes 5 et 6),
- les morphismes de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma')$ (cf. théorèmes 7 et 8),
- les morphismes injectifs de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$ (cf. théorème 9),
- les morphismes injectifs de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma')$ (cf. théorème 10).

Nous montrerons principalement qu'à une exception près (lorsque Σ est de genre 2 et Σ' est homéomorphe à $\Sigma_{2,0}$), les morphismes non triviaux entre mapping class groups sont *induits par des plongements*. En vue des théorèmes 5 et 6, nous précisons ce que nous entendons par là concernant les mapping class groups relativement au bord :

Définition 6.5 (Morphisme de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$ induit par un plongement, conjugaison extérieure).

Soient Σ et Σ' deux surfaces connexes (munies d'une orientation). Soit F la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' pouvant ne pas respecter les orientations de Σ et Σ' et soit Σ'' la sous-surface de Σ' image de Σ par F . Notons \bar{F} un représentant de F ; \bar{F} est un difféomorphisme de Σ dans Σ'' . Pour tout $A \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et tout représentant $\bar{A} \in \text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ de A , le produit $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ préserve l'orientation de Σ'' et induit l'identité sur $\partial\Sigma''$ ($= \bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}(\partial\Sigma)$), donc $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ appartient à $\text{Diff}^+(\Sigma'', \partial\Sigma'')$. La classe d'isotopie de $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma'', \partial\Sigma'')$ ne dépend que de F et A . Or il existe un prolongement canonique de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma'', \partial\Sigma'')$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$. Notons $\widetilde{\text{Ad}}_F(A)$ l'image de la classe d'isotopie de $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ par ce prolongement. L'application $\widetilde{\text{Ad}}_F$ ainsi définie

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_F : \quad \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma') \\ A &\longmapsto \widetilde{\text{Ad}}_F(A) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. Un tel morphisme sera appelé *le morphisme de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$ induit par le plongement F* .

Insistons sur le fait que rien n'est supposé sur le plongement F : l'image par F d'une courbe de bord de Σ peut border un disque dans Σ' , ou encore les images par F de deux courbes de bord de Σ peuvent être isotopes dans Σ' . De plus, ce plongement peut ne pas respecter les orientations de Σ et Σ' .

Lorsque $\Sigma'' = \Sigma'$, on peut identifier Σ' et Σ de sorte que le plongement F devienne un élément de $\mathcal{M}\text{od}^\circ(\Sigma)$. Le morphisme obtenu $\widetilde{\text{Ad}}_F$ est alors un automorphisme de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Dans ce cas, $\widetilde{\text{Ad}}_F$ sera appelé *conjugaison extérieure par F* .

Avant de passer à l'énoncé des théorèmes décrivant l'ensemble des morphismes entre les différents mapping class groups, nous rappelons deux faits classiques :

- l'existence d'un centre non trivial dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,0})$,
- le calcul des abélianisés des mapping class groups des surfaces de genre $g \geq 2$ ayant $b \geq 0$ composantes de bord (triviaux si et seulement si $g \geq 3$),

et nous donnons quelques définitions permettant de présenter les morphismes particuliers qui interviendront dans les théorèmes :

- les morphismes cycliques dans le cadre des mapping class groups,
- les transvection de morphismes.

Définition 6.6 (Involution hyper-elliptique).

Dans $\Sigma_{2,0}$, soit \bar{H} la rotation d'angle π autour de l'axe δ sur la figure 34. Notons H la classe d'isotopie de \bar{H} . Cette mapping class est appelée *l'involution hyper-elliptique de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$* .

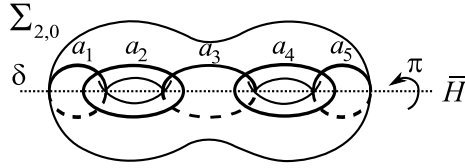


FIG. 34 – La mapping class H de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$.

Proposition 6.7 (Centre de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$, Dehn, [De2]).

Dans $\Sigma_{2,0}$, l'involution hyper-elliptique H est la seule mapping class différente de l'identité, préservant l'orientation et préservant toutes les courbes de $\text{Courb}(\Sigma_{2,0})$. Elle est périodique d'ordre 2 et engendre le centre de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$. \square

Théorème 6.8 (Abélianisé du mapping class group, Korkmaz, [Ko2]).

Pour toute surface $\Sigma_{g,b}$ avec $g \geq 3$ et $b \geq 0$, l'abélianisé des mapping class groups $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est trivial. Lorsque $g = 2$ et $b \geq 0$, l'abélianisé du mapping class group $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est isomorphe $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et par cet isomorphisme, la classe des twists de Dehn le long des courbes non séparantes est envoyée sur la classe de 1.

Démonstration. Le calcul de l'abélianisé des différents mapping class groups (comprenant les mapping class groups à bord et sans bord $\text{Mod}(\Sigma)$, $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$) a été mené par Korkmaz, cf. [Ko2], page 109 théorème 5.1. On prouve ci-dessous que la classe des twists de Dehn engendre l'abélianisé du mapping class group lorsque $g = 2$. Tout d'abord, examinons le cas lorsque $\Sigma = \Sigma_{2,0}$. Partons de la présentation de $\text{Mod}(\Sigma)$. On choisit comme générateurs les twists de Dehn le long des cinq courbes a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 dans Σ de la figure 34. Notons x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 les générateurs du groupe libre non commutatif \mathbb{F}_5 . Le morphisme $\mathbb{F}_5 \rightarrow \text{Mod}(\Sigma)$ défini par $x_i \mapsto T_{a_i}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ conduit à la présentation suivante de $\text{Mod}(\Sigma)$ donnée par Waynrib (cf. [Bi] page 184) :

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid \mathcal{R}, \begin{cases} (x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^2 = 1 \\ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)^6 = 1 \\ [x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, x_5] = 1 \end{cases} \rangle$$

où \mathcal{R} est l'ensemble des relations de commutation $[x_i, x_j] = 1$ lorsque $|j - i| \geq 2$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ et des relations de tresses $x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si l'on ajoute à celles-ci les relations $[x_i, x_{i+1}] = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on obtient $x_1 = x_2 = \dots = x_5$. Les autres relations deviennent alors $x_1^{20} = 1$, $x_1^{30} = 1$ et $x_1^0 = 1$. Finalement, l'abélianisé de $\text{Mod}(\Sigma)$ a pour présentation $\langle x_1 \mid x_1^{10} = 1 \rangle$, donc l'abélianisé de $\text{Mod}(\Sigma)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et par cet isomorphisme, la classe des twists de Dehn le long des courbes non séparantes est envoyée sur la classe de 1. Dans le cas des surfaces de genre 2 avec $b > 0$, on a un morphisme canonique surjectif $\text{Mod}(\Sigma_{2,b}) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ par lequel les twists de Dehn le long de courbe non séparantes sont envoyés sur des twists de Dehn le long de courbes non séparantes. Donc là encore, par le morphisme d'abélianisation, la classe des twists de Dehn le long des courbes non séparantes est envoyée sur la classe de 1. \square

Définition 6.9 (Morphismes cycliques $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,b})$).

Un morphisme de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,b})$, $b \geq 0$, dans un groupe quelconque est dit *cyclique* si son image est cyclique.

Remarque. Cette définition ne concerne que les surfaces de genre 2. En effet, pour toute surface de genre supérieur ou égal à 3, d'après le théorème 6.8 dû à Korkmaz, l'abélianisé du mapping class group est trivial, donc tout morphisme du mapping class group de ces surfaces dans un groupe cyclique est trivial. Donc la définition de morphisme cyclique est sans objet dès que le groupe à la source serait le mapping class group d'une surface de genre supérieur ou égal à 3.

Lemme 6.10. *Soit b un entier positif ou nul et soit \mathcal{M} l'un des deux mapping class groups $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{2,b})$ ou $\text{Mod}(\Sigma_{2,b}, \partial\Sigma_{2,b})$. Etant donné un morphisme Ψ de \mathcal{M} dans $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$, il existe un morphisme Ψ' de \mathcal{M} dans $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ défini par $\Psi'(T_a) = \Psi(T_a)H$ pour toute courbe non séparante a de $\text{Courb}(\Sigma_{2,b})$, où H est l'involution hyper-elliptique de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$.*

Démonstration. L'abélianisé de \mathcal{M} est isomorphe à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ d'après le théorème 6.8 dû à Korkmaz, et est engendré par la classe des twists de Dehn le long des courbes non séparantes. Donc puisque $H^{10} = \text{Id}$, le morphisme φ de \mathcal{M} dans $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ envoyant chaque twist de Dehn le long d'une courbe non séparante sur la mapping class H est bien défini. De plus, H est central, donc pour tout $F \in \mathcal{M}$, les mapping classes $\Psi(F)$ et $\varphi(F)$ commutent. Donc pour tous $F_1, F_2 \in \mathcal{M}$, on a :

$$(\Psi(F_1)\varphi(F_1))(\Psi(F_2)\varphi(F_2)) = \Psi(F_1F_2)\varphi(F_1F_2).$$

Autrement dit, l'application $\mathcal{M} \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{2,0})$, $F \mapsto \Psi(F)\varphi(F)$ est un morphisme. \square

Définition 6.11 (Transvection d'un morphisme du mapping class group dans un groupe).

Soit Σ une surface de genre 2, soit \mathcal{M} l'un des mapping class groups $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ ou $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, soit G un groupe. Pour tout morphisme Ψ de \mathcal{M} dans G et pour tout élément g appartenant au centralisateur de $\Psi(\mathcal{M})$ dans G tel que $g^{10} = 1_G$, on appellera *transvection de Ψ de direction g* le morphisme Ψ' qui associe à tout twist de Dehn T_a le long d'une courbe non séparante a l'image $\Psi(T_a)g$. Une transvection de direction 1_G d'un morphisme est égale à ce morphisme.

Remarque. Le lemme 6.10 assure la bonne définition des transvections. Remarquons que la démonstration de ce lemme fait apparaître un morphisme cyclique et nécessite donc que l'abélianisé du groupe à la source, \mathcal{M} ici, ne soit pas trivial. En fait, quel que soit le groupe G , si la surface Σ mise en jeu est de genre supérieur ou égal à 3, il n'existe pas de transvection de morphisme de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans G .

Les deux théorèmes suivants déterminent les morphismes entre mapping class groups. On les prouve ensemble. Le premier donne une condition nécessaire et suffisante d'existence de morphismes non triviaux et non cycliques entre deux mapping class groups en fonction des surfaces mises en jeu. Le deuxième détermine ces morphismes.

Théorème 5 (Existence de morphismes non triviaux de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$.

- Lorsque $g = 2$, il existe des morphismes cycliques non triviaux de $\text{Mod}(\Sigma_{2,b}, \partial\Sigma_{2,b})$ dans n'importe quel mapping class group admettant un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Lorsque $g \geq 3$, il n'existe pas de tel morphismes cycliques.
- Lorsque $g \geq 2$, il existe des morphismes non cycliques de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ si et seulement si l'une des deux conditions est vérifiée : $b \neq 0$ et $g' \geq g$, ou bien $b = 0$ et Σ' est homéomorphe à Σ .

L'énoncé du théorème 6 tient compte des restrictions d'existence des morphismes non cycliques de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ évoquées dans le théorème 5.

Théorème 6 (Morphismes de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$, avec $g' \in \{g, g+1\}$, et telles que $\Sigma' = \Sigma$ si $b = 0$. Tout morphisme non cyclique de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ est un morphisme induit par la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' , ou éventuellement une transvection de direction H (l'involution hyper-elliptique de $\mathcal{M}od(\Sigma_{2,0})$) d'un tel morphisme si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$. De plus, si $b = 0$, le morphisme induit par la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' (à transvection près dans le cas mentionné ci-dessus) est une conjugaison extérieure.

Démonstration des théorèmes 5 et 6. Remarquons que le théorème 5 énonce des résultats d'existence et de non existence. Les résultats d'existence sont faciles à vérifier, il suffit de prendre l'un des morphismes évoqués dans l'énoncé du théorème 6. La partie difficile du théorème 5 est le résultat de non-existence qui sera démontré à l'étape 4^o) de ce qui suit. Le théorème 6 sera démontrés à l'étape 11^o) .

1^o) Définitions.

Commençons par associer à la surface Σ un groupe d'Artin G ainsi qu'un morphisme $\rho_0 : G \rightarrow \mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ (c'est par l'intermédiaire de ce morphisme qu'on pourra appliquer le théorème 1). Pour cela, on associe à la surface $\Sigma = \Sigma_{g,b}$ le graphe $\Gamma_{g,b}$ décrit sur la figure 35. On note G

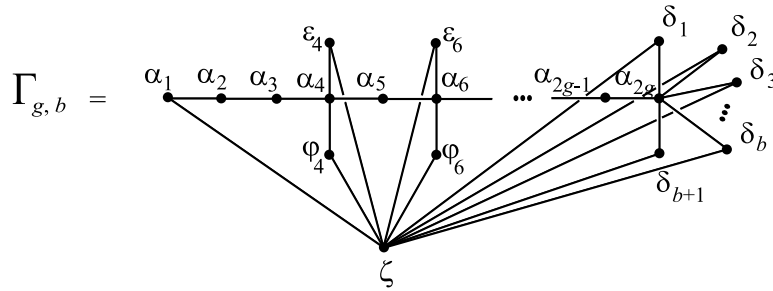


FIG. 35 – Etape 1^o) : Le graphe $\Gamma_{g,b}$ associé à la surface $\Sigma_{g,b}$.

le groupe d'Artin de type $\Gamma_{g,b}$, et S le système de générateurs décrits sur la même figure. Cet ensemble S contient $4g + b - 2$ éléments :

- $\alpha_i, 1 \leq i \leq 2g$, et ζ
- ε_{2i} et $\varphi_{2i}, 2 \leq i \leq g - 1$,
- $\delta_i, 1 \leq i \leq b + 1$.

Soient les courbes $a_i, 1 \leq i \leq 2g$, les courbes e_{2i} et $f_{2i}, 1 \leq i \leq g - 1$, les courbes $d_i, 1 \leq i \leq b + 1$, décrites sur la figure 36. Notons \mathcal{A} l'ensemble de ces courbes. Notons encore z la courbe décrite sur la figure 36, notons ρ_0 le morphisme (non injectif) du groupe d'Artin (G, S) dans $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ défini par :

- $\rho_0(\alpha_i) = T_{a_i}, 1 \leq i \leq 2g$, et $\rho_0(\zeta) = T_z$
- $\rho_0(\varepsilon_{2i}) = T_{e_{2i}}$ et $\rho_0(\varphi_{2i}) = T_{f_{2i}}, 2 \leq i \leq g - 1$,
- $\rho_0(\delta_i) = T_{d_i}, 1 \leq i \leq b + 1$.

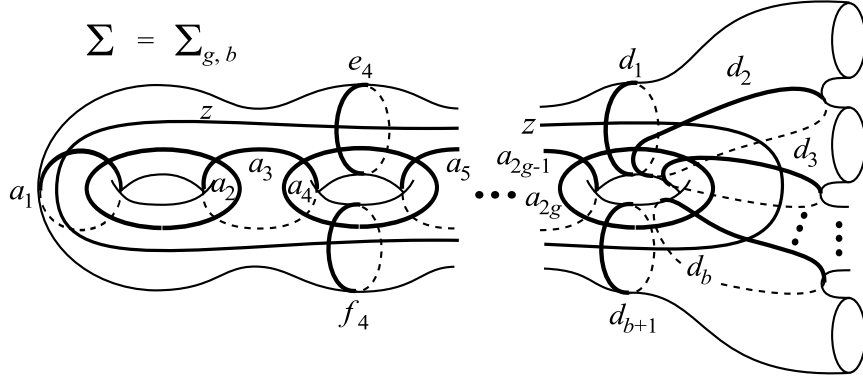


FIG. 36 – Etape 1°) : Les courbes de \mathcal{A} et la courbe z .

Soit Ψ un morphisme de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ et soit Φ le morphisme de G dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ égal à $\Psi \circ \rho_0$. Nous allons étudier Ψ au moyen de Φ .

2°) *Etudions le cas particulier où $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2)$.*

Par conjugaison, l'égalité $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2)$ implique que tous les éléments de S ont la même image par Φ . Donc l'image par Φ de G est un groupe cyclique. Donc l'image de $\rho_0(G)$ par Ψ est un groupe cyclique. Mais d'après le théorème 3.8, les twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{A} engendrent $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, donc $\rho_0(G) = \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et l'image de Ψ est un groupe cyclique. Autrement dit, Ψ est un morphisme de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans un groupe abélien. Or d'après le théorème 6.8 dû à Korkmaz, l'abélianisé du mapping class group $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est trivial dès que le genre de Σ est supérieur ou égal à 3. Donc sous l'hypothèse $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2)$, dès que $g \geq 3$, Ψ est trivial. Lorsque $g = 2$, d'après le même théorème, pour tout $b \geq 0$, l'abélianisé de $\text{Mod}(\Sigma_{2,b}, \partial\Sigma_{2,b})$ vaut $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Alors sous l'hypothèse $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2)$, lorsque $g = 2$, l'image de Ψ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Autrement dit, sous l'hypothèse $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2)$, il existe des morphismes non triviaux de $\text{Mod}(\Sigma_{2,b}, \partial\Sigma_{2,b})$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ si et seulement s'il existe un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$. Ces morphismes non triviaux sont des morphismes cycliques.

Dans la suite, on suppose que $\Phi(\alpha_1) \neq \Phi(\alpha_2)$.

3°) *Montrons que Φ est une transvection de morphisme de monodromie.*

En généralisant la notion de morphisme de monodromie au groupe d'Artin G (i.e. les images des éléments de S sont des twists de Dehn ou des inverses de twists de Dehn), nous allons montrer que Φ est une transvection de morphisme de monodromie.

Tout couple $(\xi, \xi') \in S \times S$ vérifiant une relation de tresses est conjugué au couple (α_1, α_2) . Or on a supposé que $\Phi(\alpha_1) \neq \Phi(\alpha_2)$, donc par conjugaison, tout couple $(\xi, \xi') \in S \times S$ vérifiant une relation de tresses vérifie $\Phi(\xi) \neq \Phi(\xi')$. Commençons par introduire les différents sous-ensembles de S suivants (cf. figure 37) :

- $S(\alpha_1) = \{\alpha_i, 1 \leq i \leq 2g\} \cup \{\delta_1\}$,
- $S(\alpha_2) = \{\alpha_i, 2 \leq i \leq 2g\} \cup \{\delta_1, \zeta\}$,
- $S(\alpha_j) = \{\alpha_i, j \leq i \leq 2g\} \cup \{\delta_1, \zeta\} \cup \{\alpha_i, 1 \leq i \leq j-2\}$, $j \in \{3, \dots, 2g\}$,

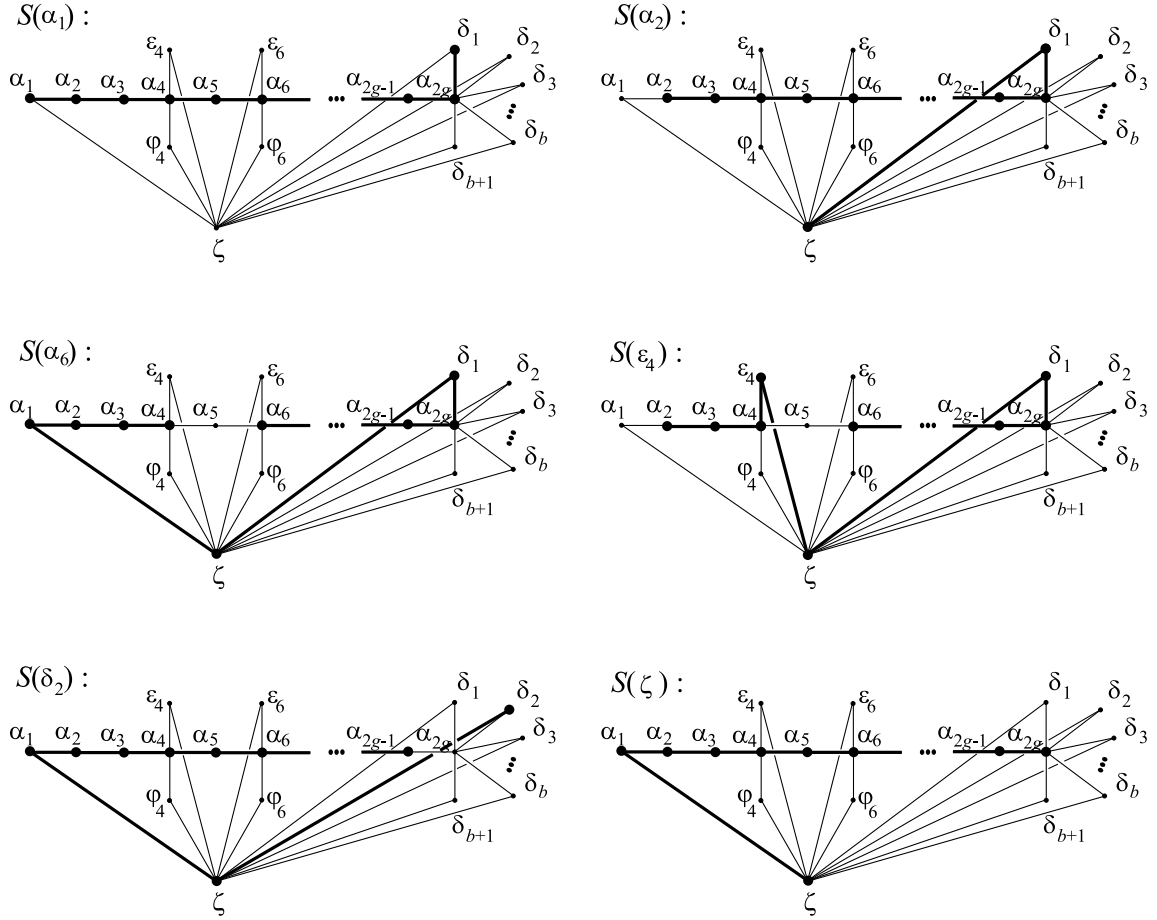


FIG. 37 – Etape 3^o) : Pour tout $\xi \in S$, l'ensemble $S(\xi)$ est celui des générateurs associés aux sommets dessinés en gras sur le graphe correspondant.

- $S(\varepsilon_{2j}) = \{\alpha_i, 2 \leq i \leq 2j\} \cup \{\varepsilon_{2j}, \zeta, \delta_1\} \cup \{\alpha_i, 2g \geq i \geq 2j+2\}, \quad j \in \{2, \dots, g-1\},$
- $S(\varphi_{2j}) = \{\alpha_i, 2 \leq i \leq 2j\} \cup \{\varphi_{2j}, \zeta, \delta_1\} \cup \{\alpha_i, 2g \geq i \geq 2j+2\}, \quad j \in \{2, \dots, g-1\},$
- $S(\delta_j) = \{\delta_j, \zeta\} \cup \{\alpha_i, 1 \leq i \leq 2g-2\}, \quad j \in \{1, \dots, b+1\},$
- $S(\zeta) = \{\zeta\} \cup \{\alpha_i, 1 \leq i \leq 2g-1\}.$

Pour tout $\xi \in S$, notons $G(\xi)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de $S(\xi)$. Or tout sous-groupe G' de G engendré par les éléments d'un sous-ensemble S' de S (appelé dans la littérature *sous-groupe parabolique de G*) est lui-même un groupe d'Artin d'après le théorème de Van der Leek (cf. [Le, Chap II, théorème 4.13]). Donc pour tout $\xi \in S$, le groupe $G(\xi)$ est isomorphe à \mathcal{B}_{2g+2} . Pour tout $\xi \in S$, notons Φ_ξ la restriction de Φ à $G(\xi)$. Or par hypothèse, $g' \leq g+1$, donc $g' \leq \frac{2g+2}{2}$ et le théorème 2 s'applique : pour tout $\xi \in S$, ou bien Φ_ξ est cyclique, ou bien Φ_ξ est une transvection de morphisme de monodromie. Mais on a vu que si $\Phi(\alpha_1) \neq \Phi(\alpha_2)$, alors pour tout $\xi \in S$, le morphisme Φ_ξ n'est pas cyclique.

Considérons l'ensemble des morphismes Φ_ξ pour tout $\xi \in S$. Puisque pour tout $\xi \in S$, le morphisme Φ_ξ est une transvection de morphisme de monodromie, on peut parler du *signe caractéristique* et de la *direction* de Φ_ξ en tant que transvection (cf. la définition 5.14). Nous dirons que deux morphismes Φ_ξ et $\Phi_{\xi'}$, ξ et ξ' appartenant à S , sont *compatibles* s'ils ont mêmes signes caractéristiques et mêmes directions. Il est clair qu'être compatible est une relation d'équivalence.

Or d'après le lemme 5.13, pour tous ξ et ξ' appartenant à S , dès que $S(\xi)$ et $S(\xi')$ contiennent au moins trois éléments consécutifs en commun, les morphismes Φ_ξ et $\Phi_{\xi'}$ sont compatibles. On en déduit ainsi que :

- Φ_{α_i} et $\Phi_{\alpha_{i+1}}$ sont compatibles pour tout $i \in \{1, \dots, 2g\}$,
- $\Phi_{\varepsilon_{2i}}$ et Φ_{α_1} sont compatibles pour tout $i \in \{2, \dots, g-1\}$, de même de $\Phi_{\varphi_{2i}}$ et Φ_{α_1} ,
- Φ_{δ_i} et Φ_{α_1} sont compatibles pour tout $i \in \{1, \dots, b+1\}$,
- Φ_ζ et Φ_{α_1} sont compatibles.

Il n'existe donc qu'une seule classe d'équivalence : tous les morphismes Φ_ξ sont compatibles entre eux lorsque ξ parcourt S . Il existe donc dans Σ' des courbes

- $a'_i, 1 \leq i \leq 2g$,
- e'_{2i} et $f'_{2i}, 2 \leq i \leq g-1$,
- $d'_i, 1 \leq i \leq b+1$,

dont l'ensemble est noté \mathcal{A}' ainsi qu'un entier $\eta \in \{\pm 1\}$ et une mapping class $W \in \mathcal{M}od(\Sigma', \partial\Sigma')$ tels que :

- $\Phi(\alpha_i) = T_{a'_i}^\eta W, 1 \leq i \leq 2g$,
- $\Phi(\varepsilon_{2i}) = T_{e'_{2i}}^\eta W$ et $\Phi(\varphi_{2i}) = T_{f'_{2i}}^\eta W, 2 \leq i \leq g-1$,
- $\Phi(\delta_i) = T_{d'_i}^\eta W, 1 \leq i \leq b+1$,

où W commute avec les twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{A}' .

Considérons la réflexion de \mathbb{R}^3 par rapport à un plan contenant les courbes $a_{2j}, 1 \leq j \leq g$ et coupant les autres courbes de \mathcal{A} en deux points. Cette réflexion préserve toutes les courbes de \mathcal{A} et préserve Σ , tout en renversant l'orientation de Σ . Notons K la classe d'isotopie appartenant à $\mathcal{M}od^\circ(\Sigma)$ de cette réflexion. Soit V la mapping class égale à Id si $\eta = 1$ ou à K si $\eta = -1$, et soit $\widetilde{\text{Ad}}_V$ la conjugaison extérieure de $\mathcal{M}od(\Sigma, \partial\Sigma)$ par V (cf. la définition 6.5). Posons

$$\dot{\Psi} = \Psi \circ \widetilde{\text{Ad}}_V.$$

Après avoir remplacé W par W^η , on obtient :

- $\dot{\Psi}(T_{a_i}) = T_{a'_i} W, 1 \leq i \leq 2g$,
- $\dot{\Psi}(T_{e_{2i}}) = T_{e'_{2i}} W$ et $\dot{\Psi}(T_{f_{2i}}) = T_{f'_{2i}} W, 2 \leq i \leq g-1$,
- $\dot{\Psi}(T_{d_i}) = T_{d'_i} W, 1 \leq i \leq b+1$,

Il ne nous reste qu'à déterminer W et les courbes de \mathcal{A}' pour déterminer le morphisme $\dot{\Psi}$ donc le morphisme Ψ , lorsque Ψ n'est pas cyclique.

4°) *On suppose que Ψ n'est pas cyclique. Montrons que les courbes de $\mathcal{A}' \setminus \{d'_j, 2 \leq j \leq b\}$ sont disposées dans Σ' comme sur la figure 38. En particulier :*

- les genres de Σ' et Σ vérifient $g' \geq g$;
- pour tout $i \in \{2, \dots, g-1\}$, les deux courbes e'_{2i} et f'_{2i} sont distinctes et cobordent une surface de genre $i-1$ contenant les courbes $a'_j, 1 \leq j \leq 2i-1$, mais ne rencontrant pas les courbes $a'_j, j \geq 2i+1$;
- si $\Sigma' \neq \Sigma_{g,0}$, les courbes d'_1 et d'_{b+1} cobordent une surface de genre $g-1$, si $\Sigma' = \Sigma_{g,0}$, on a $d'_1 = d'_2 = \dots = d'_{b-1}$;
- si $\partial\Sigma$ est vide, donc si $b=0$, alors $\Sigma' = \Sigma_{g,0}$ (et on aura démontré le théorème 5) ;
- pour tout $i \in \{2, \dots, g-2\}$, on sait que e'_{2i} et a'_{2i+1} cobordent un pantalon avec e'_{2i+2} ou avec f'_{2i+2} , mais on ne sait pas avec lequel précisément. Idem avec $e'_{2g-2}, a'_{2g-1}, d'_1$ et d'_{b+1} .

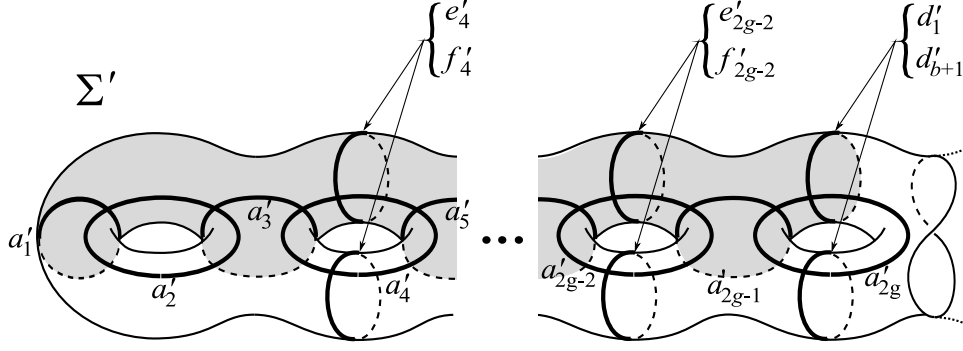


FIG. 38 – Etape 4^o) : les courbes a'_i , $1 \leq i \leq 2g$, e'_{2j} et f'_{2j} , $2 \leq j \leq g-1$, d'_1 et d'_{b+1} .

4^o) a) *Les couples de courbes de \mathcal{A}' sans points d'intersection.*

Puisque Ψ est un morphisme, si deux antécédents commutent, leurs images commutent. Soient x et y deux courbes appartenant à \mathcal{A} telles que $I(x, y) = 0$, et soient x' et y' des courbes dans Σ' telles que $\dot{\Psi}(T_x) = T_{x'}W$ et $\dot{\Psi}(T_y) = T_{y'}W$. Or $I(x, y) = 0$, donc T_x et T_y commutent, par conséquent $T_{x'}W$ et $T_{y'}W$ commutent, et puisque W centralise l'image de $\dot{\Psi}$, $T_{x'}$ et $T_{y'}$ commutent, donc x' et y' vérifient $I(x', y') = 0$.

4^o) b) *Les couples de courbes de \mathcal{A}' s'intersectant en un point; le genre g' de Σ' .*

Puisque Ψ est un morphisme, si deux antécédents vérifient une relation de tresses, leurs images en vérifient une aussi. Soient x et y deux courbes appartenant à \mathcal{A} telles que $I(x, y) = 1$, et soient x' et y' des courbes dans Σ' telles que $\dot{\Psi}(T_x) = T_{x'}W$ et $\dot{\Psi}(T_y) = T_{y'}W$. Il est impossible d'avoir $x' = y'$ car alors, d'après l'étape 2^o), le morphisme Ψ serait cyclique. Donc $x' \neq y'$. Or W centralise l'image de $\dot{\Psi}$, donc $T_{x'}$ et $T_{y'}$ vérifient une relation de tresses sans être égaux, donc il vient $I(x', y') = 1$.

On déduit de ce qui précède et du 4^o) a) que partant de la $(2g)$ -chaîne de courbes $(a_i)_{i \leq 2g}$ dans \mathcal{A} , les courbes $(a'_i)_{i \leq 2g}$ dans \mathcal{A}' forment également une $(2g)$ -chaîne de courbes, donc Σ' est de genre $g' \geq g$. Puisque par hypothèse $g' \leq g+1$, il vient que $g' \in \{g, g+1\}$.

4^o) c) *Les couples de courbes de \mathcal{A}' éventuellement confondues.*

Ayant supposé que Ψ était non cyclique et d'après l'étape 2^o), pour tout couple de générateurs standards ξ et ξ' adjacents dans S , les mapping classes $\Phi(\xi)$ et $\Phi(\xi')$ sont deux à deux distinctes. Donc les courbes a'_i , $1 \leq i \leq 2g$ sont deux à deux distinctes. On en déduit que dès que deux éléments de S ne vérifient pas les mêmes relations vis-à-vis des éléments α_i , $1 \leq i \leq 2g$, leurs images par Φ sont distinctes. Donc les seuls couples de courbes de Σ' pouvant éventuellement être confondues sont les couples de la forme :

$$\begin{aligned} & \{e'_{2i}, f'_{2i}\} \text{ avec } i \in \{2, 3, \dots, g-1\}, \\ & \text{et } \{d'_j, d'_k\} \text{ avec } j, k \in \{1, 2, \dots, b+1\}. \end{aligned}$$

4^o) d) *Montrons que pour tout $i \in \{2, 3, \dots, g-1\}$, les courbes e'_{2i} et f'_{2i} sont distinctes et cobordent dans Σ' une surface homéomorphe à $\Sigma_{i-1,2}$ contenant les courbes a'_j , $1 \leq j \leq 2i-1$, mais pas les courbes a'_j , $j \geq 2i+1$.*

Soit i un entier dans $\{2, \dots, g-1\}$ donné pour tout le 4^o) d). Les courbes a'_k , $1 \leq k \leq 2i-1$ forment une $(2i-1)$ -chaîne, donc il existe deux courbes disjointes e''_{2i} et f''_{2i} qui cobordent une surface homéomorphe à $\Sigma_{i-1,2}$ dans Σ' et telles que :

$$\left(\prod_{k=1}^{2i-1} T_{a'_k} \right)^{2i} = T_{e''_{2i}} T_{f''_{2i}}. \quad (1)$$

On a le même type de relation dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$:

$$\left(\prod_{k=1}^{2i-1} T_{a_k} \right)^{2i} = T_{e_{2i}} T_{f_{2i}}. \quad (2)$$

En composant (2) par $\dot{\Psi}$, on obtient :

$$\left(\prod_{k=1}^{2i-1} T_{a'_k} W \right)^{2i} = T_{e'_{2i}} T_{f'_{2i}} W^2, \quad (3)$$

d'où l'on déduit, grâce au fait que W est dans le centralisateur de $\dot{\Psi}(\rho_0(G))$:

$$T_{e''_{2i}} T_{f''_{2i}} = T_{e'_{2i}} T_{f'_{2i}} W^{(2-2i)(2i-1)}. \quad (4)$$

Or $I(e''_{2i}, f''_{2i}) = 0$, donc $\sigma(T_{e''_{2i}} T_{f''_{2i}}) = \{e''_{2i}, f''_{2i}\}$. Alors en reprenant l'égalité (4) et puisque $T_{e'_{2i}}$, $T_{f'_{2i}}$ et W commutent, la proposition 3.46 implique que

$$\{e''_{2i}, f''_{2i}\} \subset \sigma(T_{e'_{2i}}) \cup \sigma(T_{f'_{2i}}) \cup \sigma(W). \quad (5)$$

Pour tout $i \in \{2, 3, \dots, g-1\}$, les courbes $a'_1, a'_3, \dots, a'_{2i-1}$ et e''_{2i} cobordent une sphère à $i+1$ trous, et de même, les courbes $a'_1, a'_3, \dots, a'_{2i-1}$ et f''_{2i} cobordent une sphère à $i+1$ trous (cf. figure 39). Puisque la courbe a'_{2i} intersecte a'_{2i-1} en un seul point, et n'intersecte pas les courbes $a'_1, a'_3, \dots, a'_{2i-3}$, par un argument de connexité (cf. figure 39), elle doit intersecter les courbes e''_{2i} et f''_{2i} .

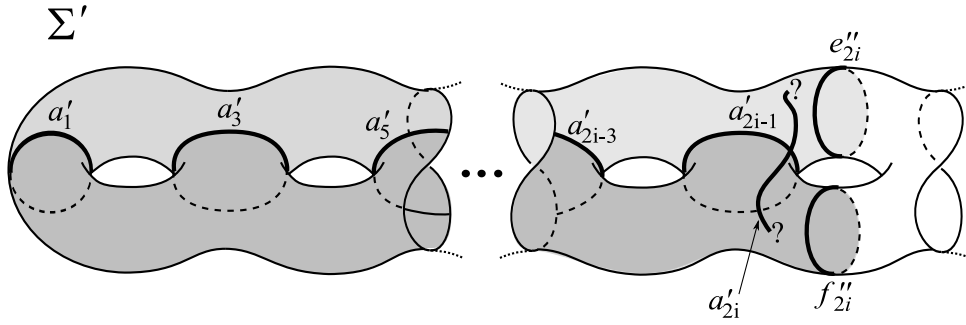


FIG. 39 – Etape 4^o) d) : montrons que $I(e''_{2i}, a'_{2i})$ et $I(f''_{2i}, a'_{2i})$ sont non nuls.

A l'inverse, la courbe a'_{2i} n'intersecte pas les courbes de $\sigma(W)$ puisque W est dans le centralisateur de $\dot{\Psi}(\rho_0(G))$. On en déduit que

$$\{e''_{2i}, f''_{2i}\} \cap \sigma(W) = \emptyset. \quad (6)$$

Donc d'après (5),

$$\{e''_{2i}, f''_{2i}\} \subset \{e'_{2i}, f'_{2i}\}. \quad (7)$$

Mais puisque e''_{2i} et f''_{2i} sont distinctes, on en déduit que e'_{2i} et f'_{2i} sont distinctes. Finalement,

$$\{e''_{2i}, f''_{2i}\} = \{e'_{2i}, f'_{2i}\}. \quad (8)$$

et e'_{2i} et f'_{2i} cobordent dans Σ' une surface homéomorphe à $\Sigma_{i-1,2}$ contenant les courbes a'_j , $1 \leq j \leq 2i-1$. De plus, les courbes a'_j , $j \geq 2i+1$, ne rencontrent pas la surface $\Sigma_{i-1,2}$. En effet, elles sont distinctes des courbes a'_j , $j \leq 2i-1$, et ne les intersectent pas, or il n'y a pas de place pour de telles courbes dans $\Sigma_{i-1,2}$ puisque $\Sigma_{i-1,2}$ est un voisinage tubulaire de la réunion des courbes a'_j , $j \leq 2i-1$.

4^o) e) Lorsque $\partial\Sigma$ est non vide, montrons que :

- si $\Sigma' = \Sigma_{g,0}$, alors $d'_1 = d'_2 = \dots = d'_{b+1}$,

- si $\Sigma' \neq \Sigma_{g,0}$, alors les courbes d'_1 et d'_{b+1} sont distinctes et cobordent dans Σ' une surface homéomorphe à $\Sigma_{g-1,2}$ contenant les courbes a'_j , $1 \leq j \leq 2g-1$.

Notons u' et v' deux courbes de Σ' telles que

$$\left(\prod_{k=1}^{2g-1} T_{a'_k} \right)^{2g} = T_{u'} T_{v'}. \quad (9)$$

On montre omme au 4°) d) à la ligne (7), où $(e''_i, f''_i, e'_i, f'_i)$ est remplacé maintenant par (u', v', d'_1, d'_{b+1}) , que :

$$\{u', v'\} \subset \{d'_1, d'_{b+1}\}.$$

Si $\Sigma' = \Sigma_{g,0}$, alors $u' = v'$. L'ensemble des courbes

$$\{a'_{2j-1}, 1 \leq j \leq g\} \cup \{e'_{2i}, f'_{2i}\} \cup \{2 \leq j \leq g-1\} \cup \{u'\}$$

forment un simplexe de $3g-3$ courbes, donc un simplexe maximal dans Σ' . Or les courbes d'_k , $1 \leq k \leq b+1$ n'intersectent pas les courbes de ce simplexe. Elles sont donc incluses dans ce simplexe. Mais pour tout $k \in \{1, 2, \dots, b+1\}$, on a $I(d'_k, a'_{2g}) = 1$, or u' et a'_{2g-1} sont les seules courbes de ce simplexe à intersecter a'_{2g} , donc $d'_k \in \{u', a'_{2g-1}\}$. Cependant d'_k n'intersecte pas a'_{2g-2} , donc $d'_k = u'$.

Si $\Sigma' \neq \Sigma_{g,0}$, alors $u' \neq v'$, donc on peut conclure comme au 4°) d) : les courbes d'_1 et d'_{b+1} sont distinctes et cobordent dans Σ' une surface homéomorphe à $\Sigma_{g-1,2}$ contenant les courbes a'_j , $1 \leq j \leq 2g-1$.

4°) f) Lorsque $\partial\Sigma$ est vide, montrons que Σ' est homéomorphe à Σ , et on aura démontré le théorème 5.

Lorsque $\partial\Sigma$ est vide, on a $d_1 = d_{b+1}$ et $d'_1 = d'_{b+1}$. Reprenons l'égalité (9) : il existe deux courbes u' et v' dans Σ' qui cobordent une surface de genre $g-1$ telles que :

$$\left(\prod_{k=1}^{2g-1} T_{a'_k} \right)^{2g} = T_{u'} T_{v'}.$$

On en déduit comme avant que $\{u', v'\} \subset \{d'_1\}$, donc $u' = v'$. Mais u' et v' cobordaient une surface homéomorphe à $\Sigma_{g-1,2}$. Puisque les deux bords de cette surface sont isotopes dans Σ' , il existe dans Σ' une surface sans bord de genre g . Donc Σ' est une surface sans bord de genre g .

5°) Déterminons la mapping class W introduite au 3°) .

5°) a) Montrons que lorsque $g \geq 3$, W est l'identité.

Soit Σ une surface de genre au moins 3. Soit Q une sous-surface de Σ de genre 3 définie ainsi : si $g = 3$ et $b \leq 1$, posons $Q = \Sigma$, sinon Q est la sous-surface de Σ contenant la courbe a_1 et bordée par la courbe séparante x définie par $(T_{a_1}(T_{a_2}T_{a_1}) \dots (T_{a_6} \dots T_{a_1}))^4 = T_x$. Soit \mathcal{E} l'ensemble de courbes $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \cup \{e_4, e_6, f_4, f_6\}$, où les courbes e_6 et f_6 sont les courbes d_1 et d_{b+1} lorsque $g = 3$ et sont éventuellement confondues (cf. figure 40). Les twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{E} appartiennent à une unique classe de conjugaison dans $\text{Mod}(Q, x)$ et de plus, engendrent $\text{Mod}(Q, x)$ d'après le théorème 3.8. Donc a priori, l'abélianisé de $\text{Mod}(Q, x)$ est cyclique, engendré par la classe des twists de Dehn le long des courbes non séparantes. Or d'après le théorème 6.8 dû à Korkmaz, il est trivial. Donc il existe un produit P de twists de Dehn le long de courbes de \mathcal{E} tel que la somme des puissances de chaque terme du produit vaille 1, et tel que ce produit soit égal à l'identité dans $\text{Mod}(Q, x)$. L'image par $\check{\Psi}$ de P est de la forme $P'W$ où P' est le produit P à ceci près que twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{E} ont été remplacées respectivement par les twists de Dehn le long des courbes $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5, a'_6, e'_4, f'_4, e'_6, f'_6$. Notons x' la courbe de Σ' définie par $(T_{a'_1}(T_{a'_2}T_{a'_1}) \dots (T_{a'_6} \dots T_{a'_1}))^4 = T_{x'}$ et Q' la sous-surface de Σ' contenant a'_1 et bordée par x' (si x' est triviale, on pose $Q' = \Sigma'$). Le produit P' vaut l'identité dans $\text{Mod}(Q', x')$ pour les mêmes raisons que P vaut l'identité dans $\text{Mod}(Q, x)$, or

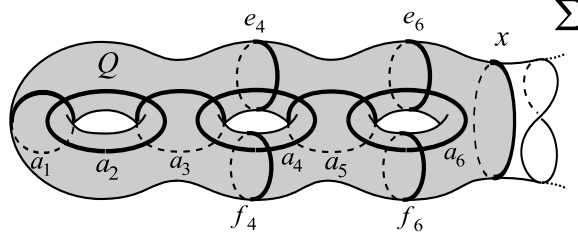


FIG. 40 – Etape 5°) a) : La surface Σ et la sous-surface Q .

$\text{Mod}(Q', x')$ est un sous-groupe de $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$, donc P' vaut l'identité dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$. Alors on conclut de l'égalité $\check{\Psi}(P) = P'W$ que W est l'identité.

5°) b) *Montrons que lorsque $g = 2$, W vérifie $W^{10} = \text{Id}$ et que W peut être différent de Id seulement si $b' = 0$.*

On refait le même raisonnement que précédemment à ceci près que l'on pose $Q = \Sigma$ si $b \leq 1$, tandis que si $b \geq 2$, Q est la surface de genre 2 bordée par la courbe x et contenant la courbe a_1 où x est la courbe définie par $(T_{a_1}(T_{a_2}T_{a_1}) \dots (T_{a_4} \dots T_{a_1}))^4 = T_x$. On définit Q' dans Σ' de façon équivalente. Du fait que l'abélianisé de $\text{Mod}(Q, x)$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, il existe dans $\text{Mod}(Q, x)$ un produit P de twists de Dehn le long des courbes de $\mathcal{E} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cup \{d_1, d_{b+1}\}$ tel que la somme des puissances de chaque terme du produit vaille 10, et tel que ce produit soit égal à l'identité dans $\text{Mod}(Q, x)$. Le même raisonnement que précédemment montre que $\check{\Psi}(P) = P'W^{10}$ où P' est un produit trivial dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$, donc $W^{10} = \text{Id}$. Puisque $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ est sans torsion dès que $b' > 0$, W peut ne pas être trivial seulement si $b' = 0$.

5°) c) *Montons que lorsque $g = 2$, W est trivial sauf si $(g', b') = (2, 0)$ auquel cas $W \in \{\text{Id}, H\}$, où H est l'involution hyper-elliptique H (cf. définition 6.6).*

Rappelons que W commute avec les twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{A}' , donc W fixe chacune de ces courbes. D'après le 5°) b), et puisque $g = 2$ et $g' \in \{2, 3\}$, nous avons deux cas à traiter, selon que $\Sigma' = \Sigma_{2,0}$ ou bien $\Sigma' = \Sigma_{3,0}$. Lorsque $\Sigma' = \Sigma_{2,0}$, on a $\mathcal{A}' = \{a'_i, 1 \leq i \leq 4\} \cup \{d'_1\}$, cf. figure 41 à gauche. Puisque les twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{A}' engendrent $\text{Mod}(\Sigma')$, W est dans le centre de $\text{Mod}(\Sigma')$, donc $W \in \{\text{Id}, H\}$ où H est l'involution hyper-elliptique. Lorsque $\Sigma' = \Sigma_{3,0}$, on a $b \neq 0$ d'après le 4°) f), donc \mathcal{A}' contient les courbes a'_i , $1 \leq i \leq 4$, d'_1 et d'_{b+1} , avec $b+1 \neq 1$, cf. figure 41 à droite. Rappelons que d'après le 4°) e), les courbes d'_1 et d'_{b+1} sont bien distinctes et cobordent dans Σ' une surface de genre $g-1=1$ et contenant la courbe a'_1 . Soit R cette sous-surface. Rappelons que W est périodique, fixe les courbes de \mathcal{A}' donc préserve R et induit une mapping class W' dans $\text{Mod}(R)$. La mapping class W' appartient même à $\mathcal{P}\text{Mod}(R)$ car W' doit fixer les courbes d'_1 et d'_{b+1} . Remarquons que les twists de Dehn le long des courbes a'_1, a'_2 et a'_3 engendrent $\mathcal{P}\text{Mod}(R)$, or W' fixe ces courbes, donc commute avec les twists de Dehn le long de ces courbes, donc W' est central dans $\mathcal{P}\text{Mod}(R)$. Mais le centre de $\mathcal{P}\text{Mod}(R)$ est trivial (cf. [De2]), donc W' est l'identité de $\mathcal{P}\text{Mod}(R)$. Or il est facile de voir qu'une mapping class périodique qui coïncide avec l'identité sur une sous-surface est l'identité. Donc W est l'identité de $\text{Mod}(\Sigma')$.

Définition : Soit $\check{\Psi}$ le morphisme $\check{\Psi}$ si $W = \text{Id}$, ou soit $\check{\Psi}$ la transvection de $\check{\Psi}$ de direction H si $W = H$ (cf. 6.11). Remarquons que W ne peut être égal à H précisément que si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$. Or sous ces conditions et du fait que H est central, une telle transvection est bien définie.

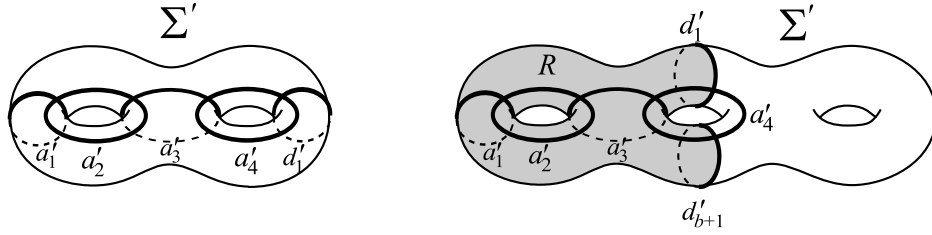


FIG. 41 – Etape 5°) c) : La surface Σ' et les courbes de \mathcal{A}' que doit fixer W : le cas $g' = 2$ à gauche, le cas $g' = 3$ à droite.

6°) Montrons que $\check{\Psi}$ envoie les twists de Dehn le long de courbes non séparantes sur des twists de Dehn le long de courbes non séparantes, puis montrons que si c_1 et c_2 sont deux courbes non séparantes de Σ telles que $I(c_1, c_2) = 0$, alors $I(c'_1, c'_2) = 0$ où c'_1 et c'_2 sont les courbes de Σ' telles que $\check{\Psi}(T_{c_1}) = T_{c'_1}$ et $\check{\Psi}(T_{c_2}) = T_{c'_2}$.

Rappelons que deux twists de Dehn le long de deux courbes non séparantes sont conjugués, et d'autre part que la classe de conjugaison d'un twist de Dehn le long d'une courbe non séparante ne contient que de tels twists de Dehn. Donc ayant démontré que l'image de T_{a_1} par $\check{\Psi}$ était un twist de Dehn le long d'une courbe non séparante, on a démontré que l'image de tout twist de Dehn le long d'une courbe non séparante est un twist de Dehn le long d'une courbe non séparante.

Soient maintenant c_1, c_2, c'_1 et c'_2 des courbes définies comme dans l'intitulé du 6°) . Puisque $I(c_1, c_2) = 0$, les twists de Dehn T_{c_1} et T_{c_2} commutent, donc leurs images par $\check{\Psi}$ égales à $T_{c'_1}$ et $T_{c'_2}$ doivent commuter, donc $I(c'_1, c'_2) = 0$.

7°) Montrons que lorsque $g \geq 4$, les courbes $e'_{2i}, i \in \{2, \dots, g-2\}$, sont situées sur une même composante connexe de la surface Σ' découpée le long des courbes $a'_{2j-1}, j \in \{1, \dots, g\}$, d'_1 et d'_{b+1} , (sur la figure 38, les courbes e'_{2i} sont dans la partie grisée et les courbes f'_{2i} dans la partie non grisée).

Pour cela, introduisons la courbe w sur Σ définie comme sur la figure 42 : la courbe w est non séparante, intersecte les courbes a_2 et a_{2g} en un point, les courbes de $\{e_{2i}, 2 \leq i \leq g-1\}$ en deux points, et n'intersecte pas les autres courbes de \mathcal{A} . La courbe w est non séparante, donc d'après le 6°) , il existe une courbe w' dans Σ' telle que $\check{\Psi}(T_w) = T_{w'}$.

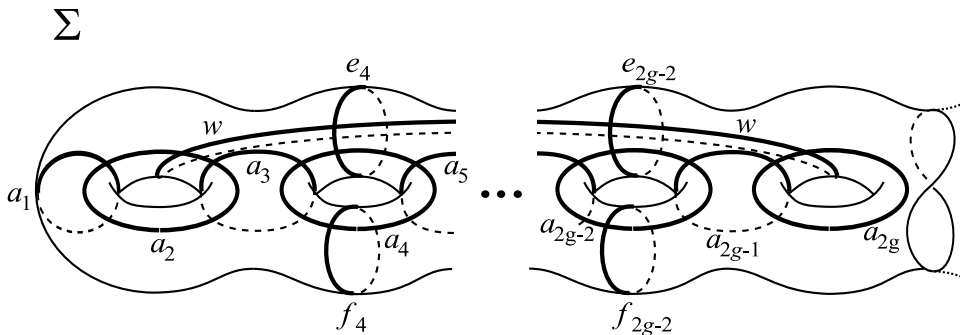


FIG. 42 – Etape 7°) : la courbe de w dans la surface Σ .

Puisqu'on a $I(w, a_2) = I(w, a_{2g}) = 1$, T_w et T_{a_2} vérifient une relation de tresses, de même que T_w et $T_{a_{2g}}$. Or $\check{\Psi}$ est un morphisme, donc il en va de même de $T_{w'}$ et $T_{a'_2}$: $T_{w'}$ et $T_{a'_2}$ vérifient une relation de tresses ce qui signifie a priori que $w' = a'_2$ ou que $I(w', a'_2) = 1$, et il en va de même de $T_{w'}$ et $T_{a'_{2g}}$. Remarquons cependant que les courbes w' et a'_{2g} sont distinctes car $T_{a'_{2g}}$ ne vérifie pas les mêmes relations avec $T_{w'}$ et avec $T_{a'_{2g}}$ (on sait que $T_{a'_{2g}} \neq T_{a'_2}$ et $I(a'_{2g}, a'_2) = 0$). De même, $T_{w'}$ et $T_{a'_2}$ sont distinctes. Donc les relations de tresses que $T_{w'}$ vérifie avec $T_{a'_2}$ et $T_{a'_{2g}}$ ne sont pas triviales, et l'on a :

$$I(w', a'_2) = I(w', a'_{2g}) = 1.$$

Mais pour tout $i \in \{2, \dots, g-1\}$, on a $I(w, f_{2i}) = 0$, donc d'après le 6°), puisque toutes les courbes mises en jeu sont non séparantes, pour tout $i \in \{2, \dots, g-1\}$ on a $I(w', f'_{2i}) = 0$. Pour les mêmes raisons, on a $I(w', a'_{2j-1}) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, g\}$, ainsi que $I(w', d'_1) = 0$ et $I(w', d'_{b+1}) = 0$.

Rappelons que d'après l'étape 4°) d), pour tout $i \in \{2, \dots, g-1\}$, les deux courbes e'_{2i} et f'_{2i} sont distinctes et cobordent une surface de genre $i-1$ contenant la courbe a'_2 , mais pas la courbe a'_{2g} . Alors, par un argument de connexité dans Σ' , le fait que $I(w', a'_2) = I(w', a'_{2g}) = 1$ implique que w' intersecte pour tout $i \in \{2, \dots, g-1\}$ au moins une des courbes e'_{2i} et f'_{2i} . Mais on a vu que pour tout $i \in \{2, \dots, g-1\}$, on a $I(w', f'_{2i}) = 0$, donc $I(w', e'_{2i}) \neq 0$, donc les courbes e'_{2i} , $i \in \{2, \dots, g-1\}$, sont toutes situées du côté de la courbe w' , c'est-à-dire toutes situées sur une même composante connexe de la surface Σ découpée le long des courbes a'_{2j-1} , $j \in \{1, \dots, g\}$, d'_1 et d'_{b+1} .

Définition : Les courbes w et w' , définies à l'étape 7°) dès que $g \geq 4$ nous seront encore utiles à l'étape 8°). Il nous sera également utile d'étendre leur définition dès que $g \geq 3$ (cf. figure 43). Si Ψ n'est pas cyclique, rappelons que la courbe w' est l'unique courbe de $\text{Courb}(\Sigma')$ telle que $\check{\Psi}(T_w) = T_{w'}$. De cette définition, on peut décrire la courbe w' comme on l'a fait au 7°) : elle vérifie (cf. figure 43) :

- $I(w', a'_2) = I(w', a'_{2g}) = 1$,
- $I(w', a'_k) = 0$ pour tout $k \in \{1\} \cup \{3, 4, \dots, 2g-1\}$,
- $I(w', d'_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, b+1\}$,
- $I(w', f'_{2i}) = 0$ pour tout $i \in \{2, 3, \dots, g-1\}$,
- $I(w', e'_{2i}) \neq 0$.

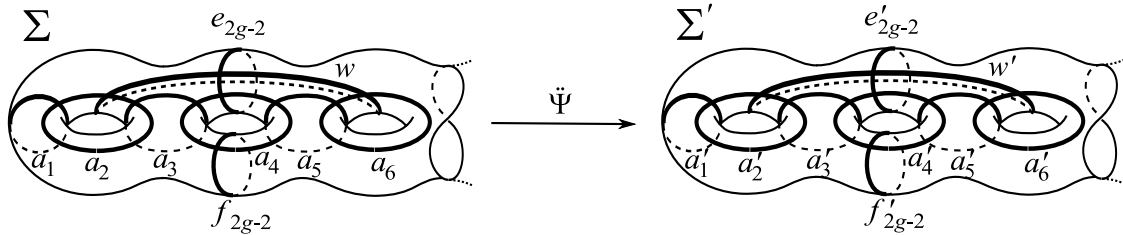


FIG. 43 – La courbe w dans le cas où $g = 3$ et la courbe w' telle que $\check{\Psi}(T_w) = T_{w'}$.

8°) Montrons que, dans le cas où $\partial\Sigma \neq \emptyset$ et $g \geq 3$, les courbes de $\mathcal{A}' \cup \{w'\}$ sont disposées dans Σ' comme sur la figure 44. En particulier, les courbes d'_i , $i \in \{1, \dots, b+1\}$, sont ordonnées dans Σ' de la façon suivante. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, b+1\}$, on notera :

$$d'_j \leq d'_i$$

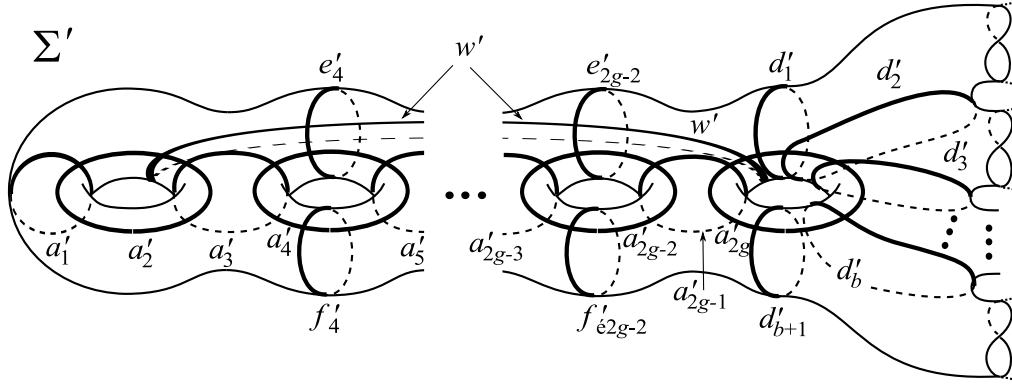


FIG. 44 – Etape 8°) : montrons que les courbes de \mathcal{A}' (notamment les courbes d'_j , $1 \leq j \leq b+1$) dans la surface Σ' sont disposées ainsi.

si les courbes d'_i et d'_j sont isotopes, ou si dans une représentation en position minimale d'intersection des courbes mises en jeu, il existe un sens de parcours de a'_{2g} tel qu'en le suivant, on rencontre les courbes a'_{2g-1} , w' , d'_j , d'_i dans cet ordre. Alors avec cette définition, on vérifie :

$$d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_{b+1}.$$

Avant toute chose, remarquons que le cas où Σ' est homéomorphe à $\Sigma_{g,0}$ est trivial car les courbes d'_j , $1 \leq j \leq b+1$, seraient alors confondues. Dans la suite, nous supposons donc que :

$$\Sigma' \neq \Sigma_{g,0}. \quad (H)$$

8°) a) *Commençons par poser les notations utiles à la preuve de l'étape 8°) .*

On se réfère à la figure 45. On se fixe un entier $i \in \{1, \dots, b+1\}$ valable du 8°) a) au 8°) d) et on va montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$, on a $d'_j \leq d'_i$. On commence par poser quelques définitions dépendant de i mais pour plus de lisibilité, l'indice i sera sous-entendu.

Soient les courbes suivantes, définies dans Σ et Σ' :

- \mathcal{V} (respectivement \mathcal{V}') le voisinage tubulaire compact de la $(2g - 1)$ -chaîne $(a_3, a_4, \dots, a_{2g}, d_i)$ (resp. $(a'_3, a'_4, \dots, a'_{2g}, d'_i)$), cf. figure 45 ;

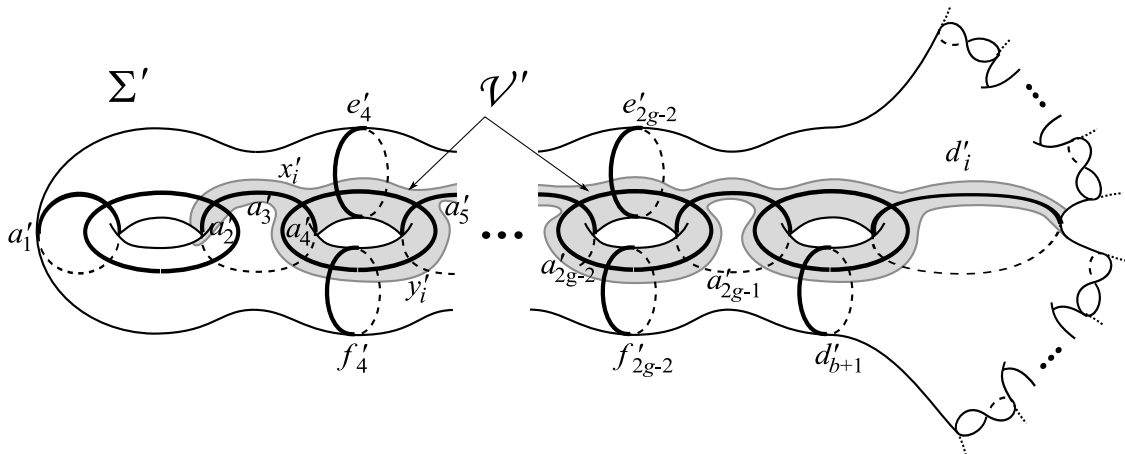


FIG. 45 – Etape 8°) a) : la sous-surface \mathcal{V}' de Σ' .

- \mathcal{V}_H et \mathcal{V}_B les deux sous-surfaces de \mathcal{V} délimitées par les courbes $(a_3, a_5, \dots, a_{2g-1}, d_i)$ telles que \mathcal{V}_H contiennent w et \mathcal{V}_B ne rencontre pas w ;
- \mathcal{V}'_H et \mathcal{V}'_B les deux sous-surfaces de \mathcal{V}' délimitées par les courbes $(a'_3, a'_5, \dots, a'_{2g-1}, d'_i)$ telles que \mathcal{V}'_H contiennent w' et \mathcal{V}'_B ne rencontre pas w' , cf. figure 46 ;
- x_H et x_B les deux bords de \mathcal{V} , de sorte que $x_H \subset \partial\mathcal{V}_H$ et $x_B \subset \partial\mathcal{V}_B$;
- x'_H et x'_B les deux bords de \mathcal{V}' , de sorte que $x'_H \subset \partial\mathcal{V}'_H$ et $x'_B \subset \partial\mathcal{V}'_B$, cf. figure 46.

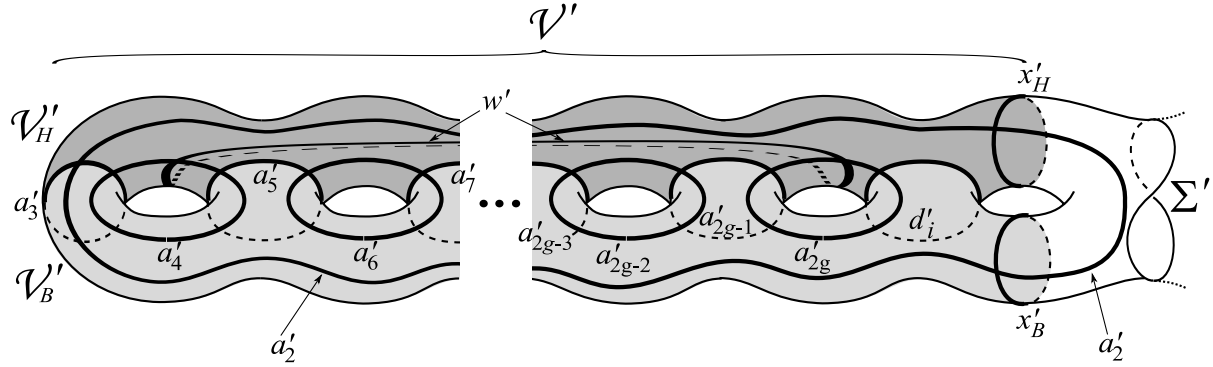


FIG. 46 – Etape 8°) a) : les sous-surface \mathcal{V}'_H et \mathcal{V}'_B de Σ' , et les bords x'_H et x'_B de \mathcal{V}' .

8°) b) Montrons que $\check{\Psi}(T_{x_H}) = T_{x'_H}$ et que $\check{\Psi}(T_{x_B}) = T_{x'_B}$.

Tout d'abord, les ensembles de courbes $\{x_H, x_B\}$ et $\{x'_H, x'_B\}$ vérifient :

$$\begin{cases} T_{x_H} T_{x_B} = \left(\left(\prod_{3 \leq k \leq 2g} T_{a_k} \right) d_i \right)^{2g} \\ T_{x'_H} T_{x'_B} = \left(\left(\prod_{3 \leq k \leq 2g} T_{a'_k} \right) d'_i \right)^{2g} \end{cases} ,$$

or pour tout $j \in \{1, \dots, 2g\}$, on a $\check{\Psi}(T_{a_j}) = T_{a'_j}$, et $\check{\Psi}(T_{d_i}) = T_{d'_i}$, donc $\check{\Psi}(T_{x_H} T_{x_B}) = T_{x'_H} T_{x'_B}$. Les courbes mises en jeu ne sont pas séparantes, or d'après le 6°) , $\check{\Psi}$ envoie des twists de Dehn le long de courbes non séparantes sur des twists de Dehn le long de courbes non séparantes, donc :

$$\{\check{\Psi}(T_{x_H}), \check{\Psi}(T_{x_B})\} = \{T_{x'_H}, T_{x'_B}\}. \quad (10)$$

Pour continuer la preuve du 8°) b), il nous faut dans un premier temps définir quelques courbes. Soient y_H et y_B les courbes dans Σ correspondant au bord du voisinage tubulaire des courbes a_{2g-1}, a_{2g} et d_i , telles que y_H soit dans \mathcal{V}_H et y_B soit dans \mathcal{V}_B . On définit de manière analogue les courbes y'_H et y'_B dans Σ' , cf. figure 47.

De la même façon qu'on a démontré (10), on peut montrer que :

$$\{\check{\Psi}(T_{y_H}), \check{\Psi}(T_{y_B})\} = \{T_{y'_H}, T_{y'_B}\}. \quad (11)$$

Montrons maintenant que $\check{\Psi}(T_{y_H}) = T_{y'_H}$ et $\check{\Psi}(T_{y_B}) = T_{y'_B}$. La courbe w' intersecte a'_{2g} , donc w' doit rencontrer le tore à deux trous T' bordé par y'_H et y'_B et contenant a'_{2g} , cf. figure 47. Mais w' intersecte aussi a'_2 , donc w' ne peut pas être inclus dans T' , donc w' doit intersecter y'_B ou y'_H . Or w' ne rencontre pas \mathcal{V}'_B par définition de \mathcal{V}'_B , mais y'_B est inclus dans \mathcal{V}'_B par définition de y'_B , donc w' n'intersecte pas y'_B . Donc w' doit intersecter y'_H , donc $T_{w'}$ et $T_{y'_H}$ ne commutent pas. Or on a $I(w, y_B) = 0$, donc T_w commute avec T_{y_B} , donc $\check{\Psi}(T_w)$, égal à $T_{w'}$ comme on l'a vu au 7°) , doit commuter avec $\check{\Psi}(T_{y_B})$. Donc $\check{\Psi}(T_{y_B})$ est différent de $T_{y'_B}$. Donc en utilisant (11), on obtient :

$$\check{\Psi}(T_{y_H}) = T_{y'_H} \text{ et } \check{\Psi}(T_{y_B}) = T_{y'_B}. \quad (12)$$

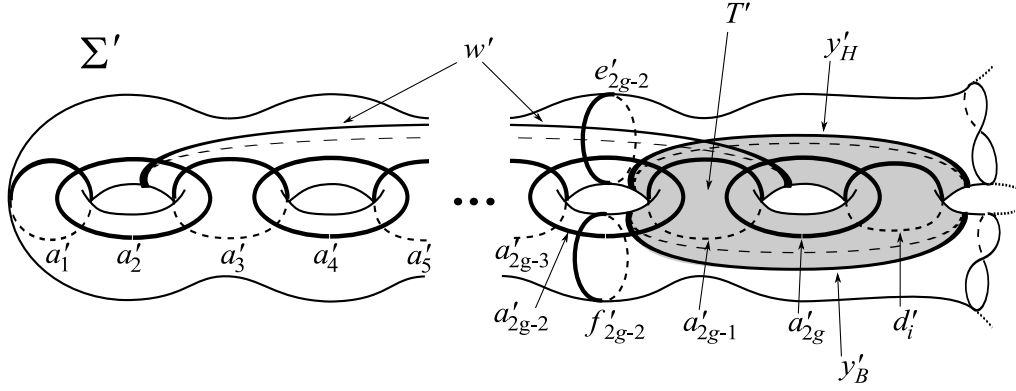


FIG. 47 – Etape 8°) b) : les courbes y'_H et y'_B dans Σ' .

Montrons enfin que $\ddot{\Psi}(T_{x_H}) = T_{x'_H}$ et que $\ddot{\Psi}(T_{x_B}) = T_{x'_B}$. Considérons la courbe e'_{2g-2} . Elle coupe en un point la courbe a'_{2g-2} , mais n'intersecte ni d'_i ni aucune courbe a'_k avec $k \neq 2g-2$. Donc si e'_{2g-2} était incluse dans \mathcal{V}'_H , d'après la figure 48, l'égalité (13) serait vraie :

$$e'_{2g-2} = y'_H. \quad (13)$$

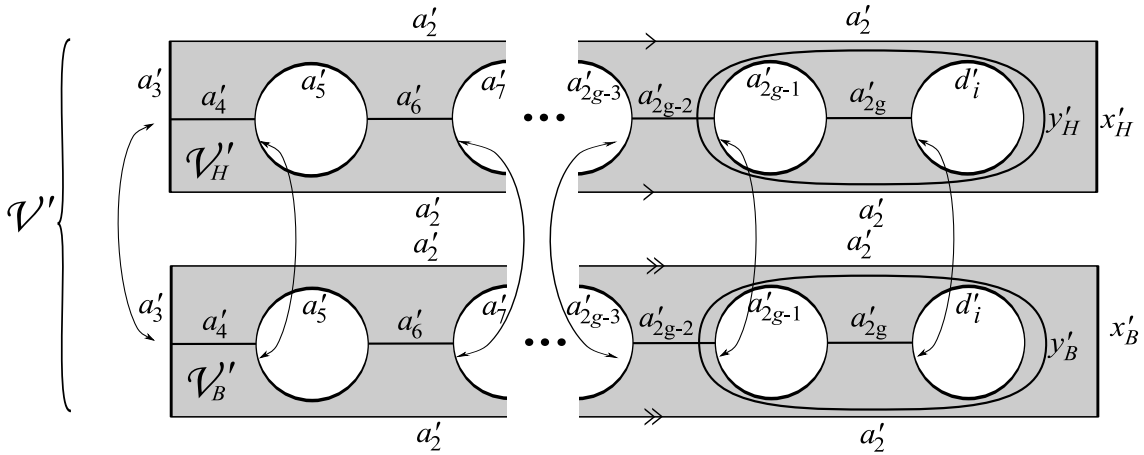


FIG. 48 – Etape 8°) b) : dans Σ' , les courbes y'_H et y'_B ne peuvent toutes les deux coïncider avec les courbes e'_{2g-2} et f'_{2g-2} .

De même, si f'_{2g-2} était incluse dans \mathcal{V}'_B , on aurait :

$$f'_{2g-2} = y'_B. \quad (14)$$

Cependant, il est impossible que (13) et (14) arrivent simultanément, car (en se reportant à la figure 47) les ensembles $\{e'_{2g-2}, f'_{2g-2}\}$ et $\{y'_H, y'_B\}$ sont les bords de deux sous-surfaces distinctes de Σ' , l'une isomorphe à $\Sigma_{g-2,2}$, l'autre isomorphe à $\Sigma_{1,2}$. Il résulterait donc de l'égalité $\{e'_{2g-2}, f'_{2g-2}\} = \{y'_H, y'_B\}$ qu'il existe une sous-surface sans bord incluse dans Σ' et isomorphe à $\Sigma_{g,0}$. Or une surface sans bord n'est incluse dans une autre que si elles sont égales, mais ici, Σ' n'est pas égale à $\Sigma_{g,0}$ puisque conformément à nos hypothèses (cf. (H)), $\Sigma' \neq \Sigma_{g,0}$. Il en résulte que (13) ou (14) est fautive et par conséquent e'_{2g-2} n'est pas incluse dans \mathcal{V}'_H ou f'_{2g-2} n'est pas incluse dans \mathcal{V}'_B . Donc $I(e'_{2g-2}, x'_H) \neq 0$ ou $I(f'_{2g-2}, x'_B) \neq 0$. Donc $T_{e'_{2g-2}}$ ne commute pas avec

$T_{x'_H}$ ou $T_{f'_{2g-2}}$ ne commute pas avec $T_{x'_B}$. Or $T_{e_{2g-2}}$ commute avec T_{x_B} et $T_{f_{2g-2}}$ commute avec T_{x_H} donc $T_{e'_{2g-2}}$ commute avec $\check{\Psi}(T_{x_B})$ et $T_{f'_{2g-2}}$ commute avec $\check{\Psi}(T_{x_H})$. Donc il serait absurde que $\check{\Psi}(T_{x_H}) = T_{x'_B}$ et $\check{\Psi}(T_{x_B}) = T_{x'_H}$. Donc

$$\check{\Psi}(T_{x_H}) = T_{x'_H} \text{ et } \check{\Psi}(T_{x_B}) = T_{x'_B}.$$

8°) c) *Montrons que pour tout entier $j \in \{1, \dots, b+1\}$ donné, une et une seule des trois situations suivantes se produit :*

$$I(d'_j, x'_H) \neq 0, \text{ ou } I(d'_j, x'_B) \neq 0, \text{ ou } d'_j = d'_i.$$

- Tout d'abord, il est clair que si $d'_j = d'_i$, alors $I(d'_j, x'_H) = 0$, ou $I(d'_j, x'_B) = 0$.
- Montrons maintenant que les inégalités $I(d'_j, x'_H) \neq 0$ et $I(d'_j, x'_B) \neq 0$ s'excluent mutuellement. Fixons un entier $j \in \{1, \dots, b+1\}$ différent de i . Alors, dans Σ , on a $I(d_j, x_H) = 0$ ou $I(d_j, x_B) = 0$, donc d'après le 6°), puisque ces trois courbes sont non séparantes, on a $I(d'_j, x'_H) = 0$, ou $I(d'_j, x'_B) = 0$. On a donc démontré que l'une quelconque des trois assertions de l'énoncé excluait les deux autres.

- Il nous reste à montrer qu'au moins l'une d'entre elles est réalisée. Fixons à nouveau un entier $j \in \{1, \dots, b+1\}$ différent de i , supposons que $I(d'_j, x'_H) = 0$ et $I(d'_j, x'_B) = 0$, et montrons qu'alors, $d'_j = d'_i$. Puisque $I(d'_j, x'_H) = 0$ et $I(d'_j, x'_B) = 0$, la courbe d'_j est incluse dans \mathcal{V}' , est d'intersection 1 avec a'_{2g} , mais ne coupe aucune autre courbe a'_k pour $k \in \{2, \dots, 2g-1\}$ ni ne coupe la courbe d'_i . Or comme on peut le voir sur la figure 49, la surface \mathcal{V}' découpée le long des courbes $\{a'_k, 3 \leq k \leq 2g-1\} \cup \{d'_i\}$ et du chemin $a'_2 \cap \mathcal{V}'$ est homéomorphe à la réunion disjointe de deux anneaux dans chacun desquels la courbe d'_i induit un bord. Quant à la courbe d'_j , elle ne borde pas de disque dans Σ' , donc son image dans ce découpage est isotope aux bords de l'un des deux anneaux. Donc dans Σ' , les classes d'isotopie d'_j et d'_i sont confondues.

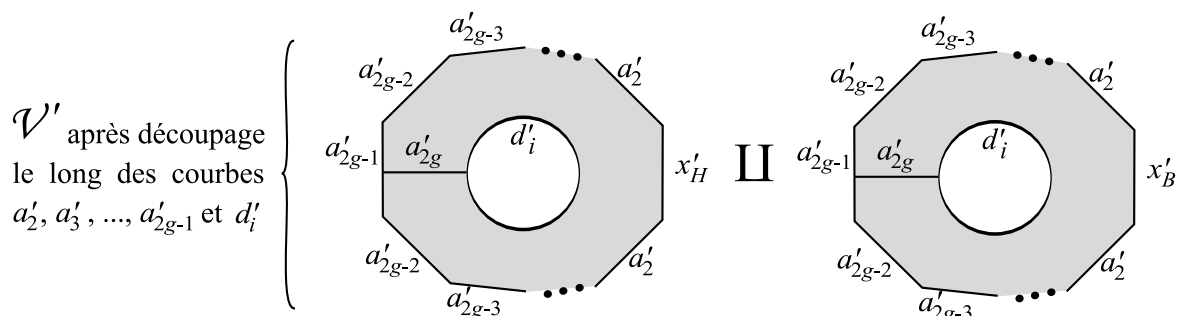


FIG. 49 – Etape 8°) c) : la surface \mathcal{V}' découpée le long des courbes $\{a'_k, 3 \leq k \leq 2g-1\} \cup \{d'_i\}$ et du chemin $a'_2 \cap \mathcal{V}'$ est homéomorphe à la réunion disjointe de deux anneaux dans chacun desquels la courbe d'_i induit un bord.

8°) d) *Montrons que pour tout $j \in \{1, \dots, b+1\}$, si $j \leq i$ alors $d'_j \leq d'_i$ au sens défini ci-dessus dans l'intitulé du 8°). Puisque les rôles de i et j sont symétriques, on aura démontré l'équivalence.*

Soit j un entier dans $\{1, \dots, i-1\}$. Alors dans Σ on a $I(d_j, x_B) = 0$, donc d'après le 6°), puisque toutes les courbes mises en jeu sont non séparantes, on a $I(d'_j, x'_B) = 0$. Alors d'après le 8°) c), on en déduit que $d'_j = d'_i$ ou $I(d'_j, x'_H) \neq 0$. Si $d'_j = d'_i$, le résultat est démontré : par définition $d'_j \leq d'_i$. Supposons donc que $I(d'_j, x'_H) \neq 0$ et montrons que ceci implique également que $d'_j \leq d'_i$. Tout d'abord, on a $I(d'_j, x'_B) = 0$ et $I(d'_j, a'_{2k-1}) = 0$ pour tout $k \in \{2, 3, \dots, g\}$,

donc $I(d'_j, \text{Bord}(\mathcal{V}'_B)) = 0$. Or d'_j intersecte la courbe x'_H située à l'extérieur de \mathcal{V}'_B donc d'_j ne rencontre pas \mathcal{V}'_B . Rappelons que $I(d'_j, a'_{2g}) = 1$ et que la courbe a'_{2g} est incluse dans $\mathcal{V}' = \mathcal{V}'_H \cup \mathcal{V}'_B$. On en déduit que :

$$d'_j \text{ intersecte } a'_{2g} \text{ dans } \mathcal{V}'_H. \quad (15)$$

Ceci étant dit, on a presque démontré que $d'_j \leq d'_i$. Pour finir la preuve, considérons la sous-surface \mathcal{V}'_H , cf. figure 50. La courbe w' est incluse dans \mathcal{V}'_H qui est de genre nul, donc w' sépare

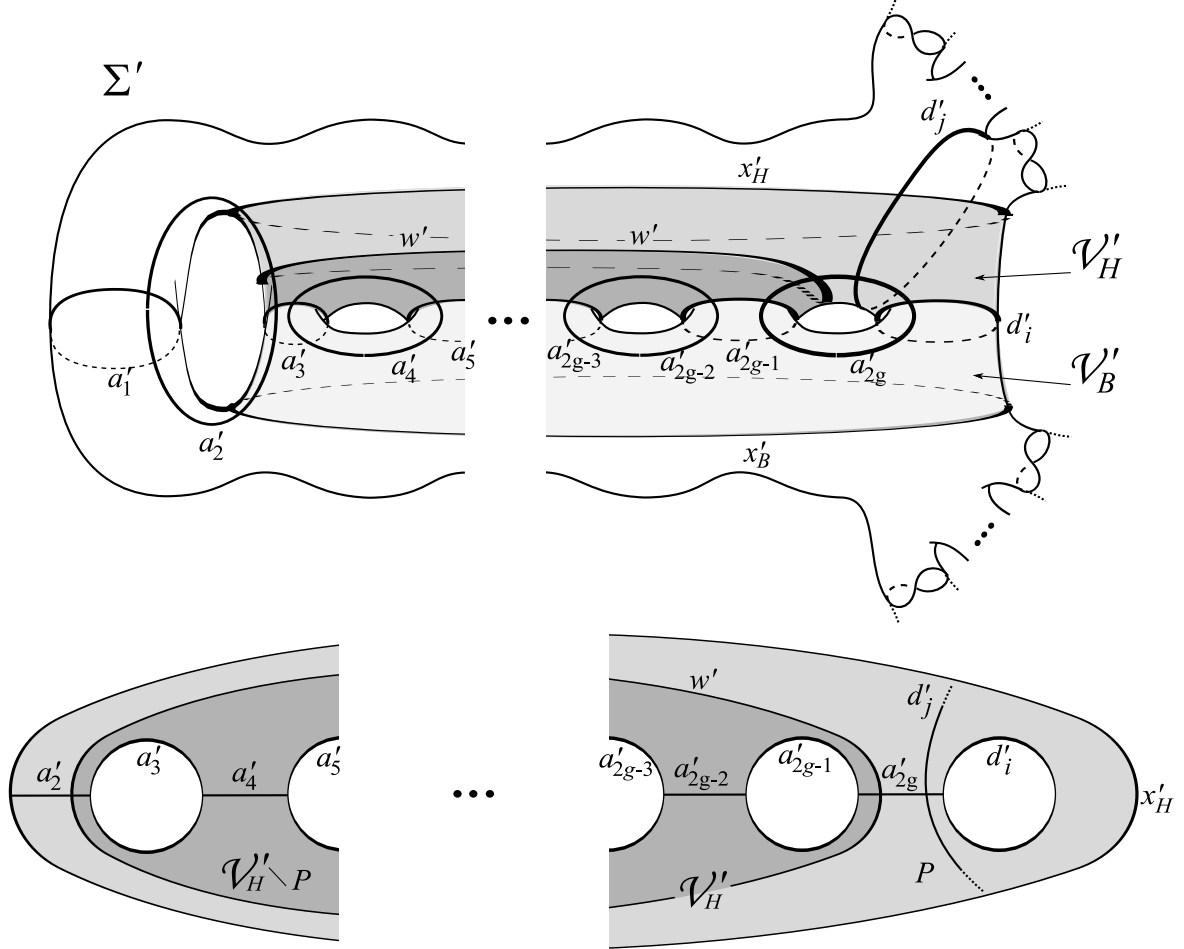


FIG. 50 – Etape 8°) d) : la sous-surface \mathcal{V}'_H de \mathcal{V}' .

\mathcal{V}'_H en deux composantes connexes, l'une homéomorphe à un pantalon que l'on appelle P qui contient un bord isotope dans Σ' à d'_i , l'autre contenant les bords isotopes dans Σ' à $a'_3, a'_5, \dots, a'_{2g-1}$. La courbe d'_j n'intersecte aucun des bords de $\mathcal{V}'_H \setminus P$ (rappelons qu'on avait vu au 7°) que $I(w', d'_j) = 0$), mais elle intersecte x'_H qui est un bord de P . Donc par connexité, d'_j ne rencontre pas $\mathcal{V}'_H \setminus P$, donc (15) devient :

$$d'_j \text{ intersecte } a'_{2g} \text{ dans } P. \quad (16)$$

Par conséquent, la courbe a'_{2g} coupe dans cet ordre la courbe a'_{2g-1} (l'un des bord de $\mathcal{V}'_H \setminus P$), la courbe w' (qui sépare P et $\mathcal{V}'_H \setminus P$ dans \mathcal{V}'_H), la courbe d'_j (partiellement incluse dans P), et enfin la courbe d'_i (l'un des bord de P). Donc par définition, $d'_j \leq d'_i$.

9°) Montrons le résultat du 8°) dans le cas où $g = 2$. Plus précisément, lorsque $\partial\Sigma \neq \emptyset$ et $g = 2$, les courbes de \mathcal{A}' sont disposées dans Σ' comme sur la figure 44 (exception faite de la courbe w' qui n'est pas définie dans le cas où $g = 2$). En particulier, les courbes d'_i , $i \in \{1, \dots, b+1\}$, sont ordonnées dans Σ' de la façon suivante. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, b+1\}$, on notera :

$$d'_j \leq d'_i$$

si les courbes d'_i et d'_j sont isotopes, ou si dans une représentation en position minimale d'intersection des courbes mises en jeu, il existe un sens de parcours de a'_4 tel qu'en le suivant, on rencontre les courbes a'_3, d'_1, d'_j, d'_i dans cet ordre. Alors avec cette définition, on vérifie :

$$d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_{b+1}.$$

Avant toute chose, remarquons que le cas où Σ' est homéomorphe à $\Sigma_{2,0}$ est trivial car les courbes d'_j , $1 \leq j \leq b+1$, seraient alors confondues. De plus, si $b = 1$, il vient automatiquement avec cette définition que $d'_1 \leq d'_2$ et le résultat est démontré. Dans la suite, nous supposons donc que :

$$b \geq 2 \text{ et } \Sigma' \neq \Sigma_{2,0}. \quad (H2)$$

On calque la preuve du 9°) sur celle du 8°), avec les adaptations suivantes. Rappelons que d'_1 et d'_{b+1} cobordent une surface de genre 1 contenant les courbes a'_1, a'_2 et a'_3 d'après le 4°). Soit i un entier appartenant à $\{1, \dots, b+1\}$. Posons les définitions suivantes (on se reporte à la figure 51).

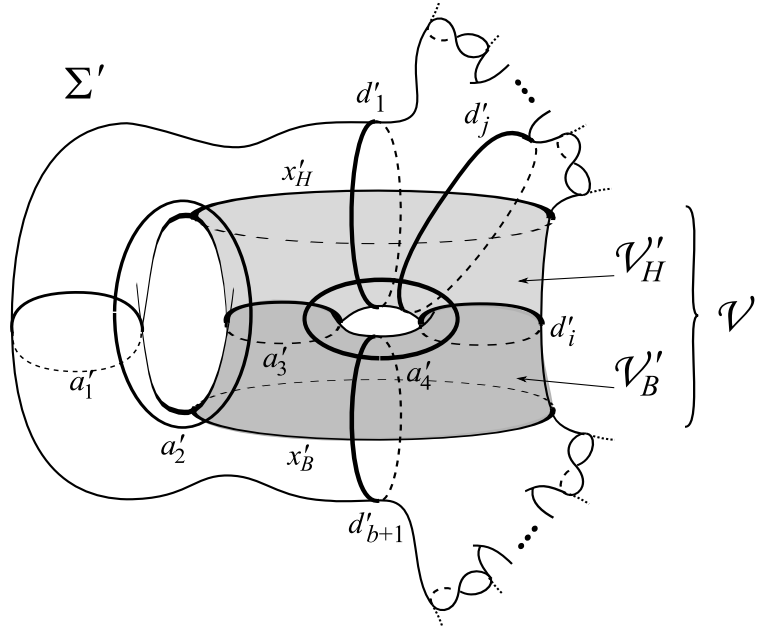


FIG. 51 – Etape 9°) : le cas $g = 2$.

Soient :

- \mathcal{V} (respectivement \mathcal{V}') le voisinage tubulaire compact de la 3-chaîne (a_3, a_4, d_i) (resp. (a'_3, a'_4, d'_i));
- \mathcal{V}_H et \mathcal{V}_B les deux sous-surfaces de \mathcal{V} délimitées par les courbes a_3 et d_i telles que \mathcal{V}_H ne rencontre pas d_{b+1} et que \mathcal{V}_B ne rencontre pas d_1 ;
- \mathcal{V}'_H et \mathcal{V}'_B les deux sous-surfaces de \mathcal{V}' délimitées par les courbes a'_3 et d'_i telles que \mathcal{V}'_H ne rencontre pas d'_{b+1} et \mathcal{V}'_B ne rencontre pas d'_1 ;

- x_H et x_B les deux bords de \mathcal{V} , de sorte que $x_H \subset \partial\mathcal{V}_H$ et $x_B \subset \partial\mathcal{V}_B$;
- x'_H et x'_B les deux bords de \mathcal{V}' , de sorte que $x'_H \subset \partial\mathcal{V}'_H$ et $x'_B \subset \partial\mathcal{V}'_B$.

Les sous-surfaces \mathcal{V}'_H et \mathcal{V}'_B sont définies de façon univoque, car il est impossible que ni \mathcal{V}'_H , ni \mathcal{V}'_B ne rencontre au moins l'une des courbes d'_1 et d'_{b+1} . En effet, si tel était le cas, les courbes d'_1 et d'_{b+1} seraient confondues avec la courbe d'_i et la surface Σ' seraient sans bord, ce qui serait contraire aux hypothèses (H2).

Comme au 8°) b), montrons d'abord que $\ddot{\Psi}(T_{x_H}) = T_{x'_H}$ et $\ddot{\Psi}(T_{x_B}) = T_{x'_B}$. D'après les définitions de \mathcal{V}'_H et \mathcal{V}'_B et la remarque que l'on vient de faire pour justifier leurs bonnes définitions, il vient que l'une des deux intersections $I(x'_H, d'_1)$ ou $I(x'_B, d'_{b+1})$ est non nulle. Donc

$$T_{x'_H} \text{ et } T_{d'_1} \text{ ne commutent pas, ou } T_{x'_B} \text{ et } T_{d'_{b+1}} \text{ ne commutent pas.} \quad (17)$$

Or par définition de x'_H et x'_B , on a :

$$\begin{aligned} T_{x'_B} T_{x'_H} &= (T_{a'_3} T_{a'_3} T_{d'_i})^4 \\ &= (\ddot{\Psi}(T_{a_3}) \ddot{\Psi}(T_{a_3}) \ddot{\Psi}(T_{d_i}))^4 \\ &= \ddot{\Psi}((T_{a_3} T_{a_3} T_{d_i})^4) \\ &= \ddot{\Psi}(T_{x_H} T_{x_B}) \\ &= \ddot{\Psi}(T_{x_H}) \ddot{\Psi}(T_{x_B}), \end{aligned}$$

mais x_H et x_B sont des courbes non séparantes, donc $\ddot{\Psi}(T_{x_H})$ et $\ddot{\Psi}(T_{x_B})$ sont des twists de Dehn d'après l'étape 6°), donc l'égalité obtenue ci-dessus est une égalité entre multitwists, donc d'après le lemme 3.12,

$$\{T_{x'_B}, T_{x'_H}\} = \{\ddot{\Psi}(T_{x_B}), \ddot{\Psi}(T_{x_H})\}. \quad (18)$$

Or par définition de x_B , on a $I(x_B, d_1) = 0$, donc T_{x_B} et T_{d_1} commutent, donc $\ddot{\Psi}(T_{x_B})$ et $T_{d'_1}$ commutent. De même $\ddot{\Psi}(T_{x_H})$ et $T_{d'_{b+1}}$ commutent. Alors, d'après (17) et (18), il vient que :

$$\ddot{\Psi}(T_{x_H}) = T_{x'_H} \text{ et } \ddot{\Psi}(T_{x_B}) = T_{x'_B}. \quad (19)$$

On peut alors continuer la preuve de l'étape 9°) comme on l'a fait à l'étape 8°). On montre ainsi que :

- pour tout $j \in \{1, \dots, b+1\}$, la courbe d'_j vérifie exactement l'une des trois conditions suivantes : $I(d'_j, x'_H) \neq 0$, $I(d'_j, x'_B) \neq 0$, ou $d'_j = d'_i$ (cf. 8°) c) ;
- et enfin, pour tout entier $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$, on a $d'_j \leq d'_i$ (cf. 8°) d)).

Ceci conclut le 9°).

10°) *Montrons que $\ddot{\Psi}$ (dont on a supposé qu'il n'était pas cyclique) est induit par un plongement de Σ dans Σ' .*

Soit $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ (respectivement $\mathcal{N}(\mathcal{A}')$) le voisinage tubulaire de la réunion des courbes de \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}') dans Σ (resp. Σ'). Si les courbes d'_j , $1 \leq j \leq b+1$, sont deux à deux distinctes, $\mathcal{N}(\mathcal{A}')$ est bien défini. S'il existe $j \in \{1, 2, \dots, b\}$ tel que $d'_j = d'_{j+1}$, on peut tout de même choisir un ensemble de représentants des courbes de \mathcal{A}' en position minimale d'intersection de sorte qu'en suivant la courbe a'_{2g} , on rencontre les courbes d'_j , $1 \leq j \leq b+1$, dans l'ordre de leurs indices. De cette façon, et compte tenu des étapes 4°), 7°) et 8°), il existe un difféomorphisme positif de $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{N}(\mathcal{A}')$ dont on note F la classe d'isotopie et qui vérifie :

- $F(a_i) = a'_i$, $1 \leq i \leq 2g$,
- $F(e_{2i}) = e'_{2i}$ et $F(f_{2i}) = f'_{2i}$, $2 \leq i \leq g-1$,
- $F(d_i) = d'_i$, $1 \leq i \leq b+1$.

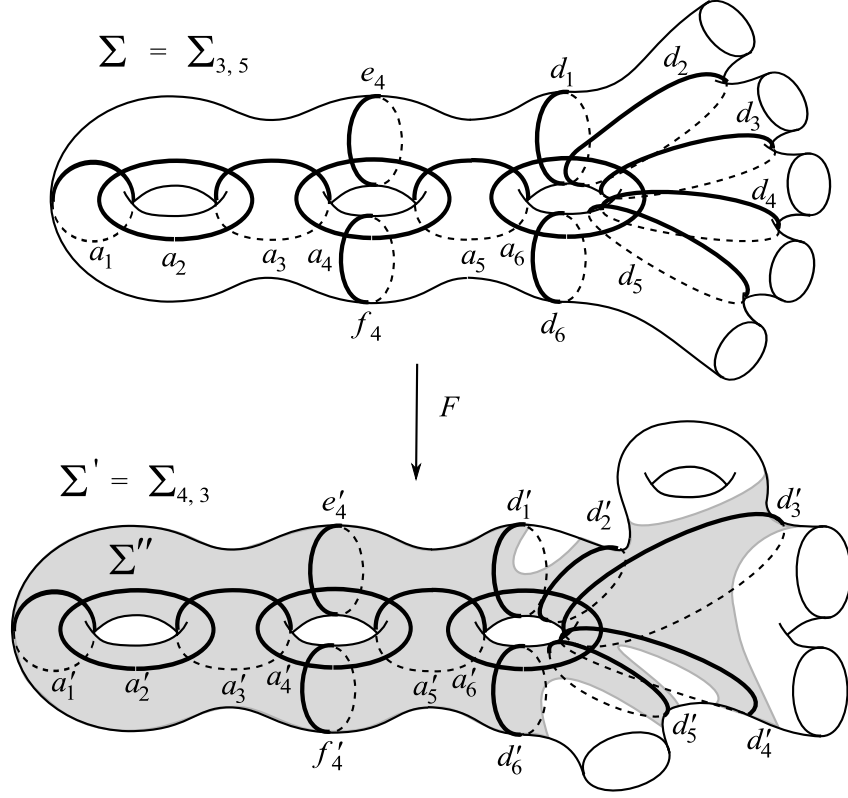


FIG. 52 – Etape 10°) : exemple de construction de F et de la surface $\Sigma'' = F(\Sigma)$ incluse dans Σ' . On a représenté dans cet exemple différents cas de figure :

- $d'_1 \cup d'_2$ borde un anneau,
- $d'_2 \cup d'_3$ borde une surface de genre un,
- $d'_3 \cup d'_4$ borde une surface de genre nul à 4 composantes de bord.

Appelons Σ'' le voisinage tubulaire fermé de la réunion des représentants des courbes a'_i , $i \in \{1, 2, \dots, 2g\}$ et d'_j , $j \in \{2, 3, \dots, b\}$. La surface Σ'' est homéomorphe à Σ et est incluse dans Σ' (cf. figure 52). Toujours d'après les étapes 4°), 7°), 8°) et 9°), on peut prolonger F sur tous les disques ouverts de $\Sigma \setminus \mathcal{V}(A)$, de façon à obtenir un difféomorphisme de Σ dans Σ'' que l'on appelle encore F . Comparons $\check{\Psi}$ et le morphisme $\widetilde{\text{Ad}}_F : \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow \mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$ (cf. définition 6.5 pour la définition de $\widetilde{\text{Ad}}_F$). Puisque F est la classe d'isotopie d'un difféomorphisme positif et en vertu de ce qui précède, pour toute courbe $a \in \mathcal{A}$, on a :

$$\check{\Psi}(T_a) = T_{a'} = T_{F(a)} = FT_aF^{-1} = \widetilde{\text{Ad}}_F(T_a).$$

Ainsi $\check{\Psi}$ et $\widetilde{\text{Ad}}_F$ coïncident sur $\{T_a, a \in \mathcal{A}\}$. Or d'après le théorème 3.8, un tel ensemble engendre $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$, donc on a l'égalité :

$$\check{\Psi} = \widetilde{\text{Ad}}_F. \quad (20)$$

11°) *Fin de la démonstration.*

Rappelons que lorsque Ψ n'est pas cyclique, on avait défini $\check{\Psi} = \Psi \circ \widetilde{\text{Ad}}_V$ à la fin de l'étape 3°), où $V \in \{\text{Id}, K\}$. Puis à la suite de l'étape 5°), sauf si $W = H$ on avait posé $\check{\Psi} = \check{\Psi}$. Donc, d'après (20), sauf si $W = H$,

$$\Psi = \widetilde{\text{Ad}}_F \circ \widetilde{\text{Ad}}_{V^{-1}} = \widetilde{\text{Ad}}_{FV^{-1}}.$$

Autrement dit, sauf si $W = H$, Ψ est un morphisme induit par un plongement de Σ dans Σ' . Dans le cas où $W = H$, Ψ est une transvection de direction H d'un morphisme induit par un plongement de Σ dans Σ' (cf. la définition 6.11 pour la définition de transvection). Ceci achève la démonstration du théorème 6. La démonstration du théorème 5 a été terminée à l'étape 4°) f). \square

Passons maintenant aux morphismes de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$. Ceux-là aussi peuvent dans la plupart des cas s'exprimer simplement à partir de *morphismes induits par un plongement*. Il nous faut d'abord définir ce terme dans le cas des morphismes de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$.

Définition 6.12 (Morphisme de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ induit par un plongement, conjugaison extérieure).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g = g'$ et $b \geq b'$. Soit F la classe d'isotopie d'un plongement de Σ dans Σ' telle que F envoie les bords de Σ sur des bords de Σ' ou des courbes triviales de Σ' (isotopes à un point), ce que l'on résume par :

$$F(\text{Bord}(\Sigma)) \cap \text{Courb}(\Sigma') = \emptyset. \quad (*)$$

Précisons que F peut ne pas respecter les orientations de Σ et Σ' . Soit $\Sigma'' = F(\Sigma)$. Notons \bar{F} un représentant de F ; \bar{F} est un difféomorphisme de Σ dans Σ'' . Pour tout $A \in \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et tout représentant $\bar{A} \in \text{Diff}^+(\Sigma)$ de A , le produit $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ préserve l'orientation de Σ'' , donc $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ appartient à $\text{Diff}^+(\Sigma'')$. Puisque $g = g'$, $b \geq b'$ et d'après (*), le complémentaire de Σ'' dans Σ' est une réunion disjointe de disques. Donc d'après le lemme d'Alexander, $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ induit canoniquement à isotopie près un difféomorphisme de Σ' . Notons $\text{Ad}_F(A)$ la classe d'isotopie de ce difféomorphisme. Et puisque \bar{A} préserve les bords de Σ , $\bar{F}\bar{A}\bar{F}^{-1}$ préserve les bords de Σ'' , or d'après (*), l'ensemble des bords de Σ' est inclus dans l'ensemble des bords de Σ'' , donc les bords de Σ' sont préservés par $\text{Ad}_F(A)$. Finalement, $\text{Ad}_F(A)$ appartient à $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$. L'application Ad_F ainsi définie

$$\text{Ad}_F : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma') \\ A & \longmapsto & \text{Ad}_F(A) \end{array}$$

est un morphisme de groupes. Un tel morphisme sera appelé *le morphisme de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ induit par le plongement F* .

Lorsque $\Sigma' = \Sigma$, d'après (*), il vient que $\Sigma'' = \Sigma'$, donc la classe d'isotopie F est inversible. Donc dans ce cas, F est un élément de $\text{Mod}^\diamond(\Sigma)$. Le morphisme obtenu Ad_F est alors un automorphisme de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ que l'on appellera *conjugaison extérieure par F* .

La démonstration des théorèmes 5 et 6 s'adapte presque intégralement au cas des morphismes de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ où Σ et Σ' vérifient les mêmes hypothèses que dans le théorème 6. Cependant, les énoncés sont légèrement différents. En guise de démonstration, on se contente de justifier ces différences, le fond étant le même.

Théorème 7 (Existence de morphismes non triviaux et non cycliques de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$.

- Lorsque $g = 2$ et seulement dans ce cas-là, il existe des morphismes cycliques non triviaux de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{2,b})$ dans n'importe quel mapping class group admettant un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
- Lorsque $g \geq 2$, il existe des morphismes non cycliques de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ si et seulement si $g' = g$ et $b' \leq b$.

Conformément à cet énoncé, l'étude des morphismes non triviaux et non cycliques de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ lorsque $g' \leq g + 1$ se réduit à l'étude des morphismes de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ lorsque $g' = g$ et $b' \leq b$. C'est l'objet du théorème 8 ci-dessous.

Théorème 8 (Morphismes de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$, $g' = g$ et $b' \leq b$. Soit Ψ un morphisme non cyclique de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$. Alors il existe un plongement F de Σ dans Σ' tel que

$$F(\text{Bord}(\Sigma)) \cap \text{Courb}(\Sigma') = \emptyset$$

et tel que Ψ soit le morphisme Ad_F induit par le plongement F , ou éventuellement la transvection par H du morphisme Ad_F si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$.

Démonstration des théorèmes 7 et 8. Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$, et telles qu'il existe un morphisme $\Psi : \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$. Reprenons la démonstration des théorèmes 5 et 6. On redéfinit le même ensemble de courbes non séparantes \mathcal{A} engendrant $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ (ou $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ selon le mapping class group dans lequel on se place). On distingue le cas où Ψ envoie T_{a_1} et T_{a_2} sur une même image, de celui où Ψ les différencie.

- Si $\Psi(T_{a_1}) = \Psi(T_{a_2})$, alors l'image de Ψ est nécessairement cyclique. Le morphisme Ψ est alors trivial dès que $g \geq 3$, car dans ce cas, l'abélianisé de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ est trivial d'après le théorème 6.8 dû à Korkmaz, donc n'admet pas de quotient abélien autre que le groupe trivial. D'après le même théorème, si $g = 2$, l'abélianisé de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ vaut $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, donc le morphisme Ψ est trivial ou éventuellement cyclique d'image isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, selon que de tels groupes puissent se plonger ou non dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$.
- Si $\Psi(T_{a_1}) \neq \Psi(T_{a_2})$, d'après la démonstration des théorèmes 5 et 6, il existe un plongement de Σ dans Σ' (donc $g' \geq g$), ne préservant pas nécessairement l'orientation, dont on note F la classe d'isotopie, et il existe une mapping class $W \in \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ qui fixe chaque courbe $F(a)$, $a \in \mathcal{A}$, tels que pour tout $a \in \mathcal{A}$, on ait :

$$\Psi(T_a) = T_{F(a)} W. \quad (1)$$

Précisons que même si W est trivial, on ne peut pas raisonner en évoquant le fait que Ψ coïncide avec Ad_F sur un ensemble qui engendre $\text{Mod}(\Sigma)$ et en conclure que $\Psi = \text{Ad}_F$, car Ad_F n'est pas un morphisme bien défini tant que l'on n'a pas démontré que :

$$F(\text{Bord}(\Sigma)) \cap \text{Courb}(\Sigma') = \emptyset. \quad (*)$$

A partir de maintenant, on se place dans le cas où $\Psi(T_{a_1}) \neq \Psi(T_{a_2})$ et donc où (1) est vrai. On distingue les cas $b = 0$ et $b \neq 0$.

1°) Cas où $b = 0$. Montrons qu'alors Σ' doit être isomorphe à Σ .

On refait la preuve que l'on avait faite au 4°) de la démonstration des théorèmes 5 et 6. On s'appuie sur la figure 53. Lorsque $b = 0$, on a :

$$(T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_{2g-1}})^{2g} = T_{d_1} T_{d_{b+1}} = T_{d_1}^2,$$

En composant cela par Ψ , on obtient

$$(T_{F(a_1)} T_{F(a_2)} \dots T_{F(a_{2g-1})})^{2g} W^{(2g-1)2g} = T_{F(d_1)}^2 W^2.$$

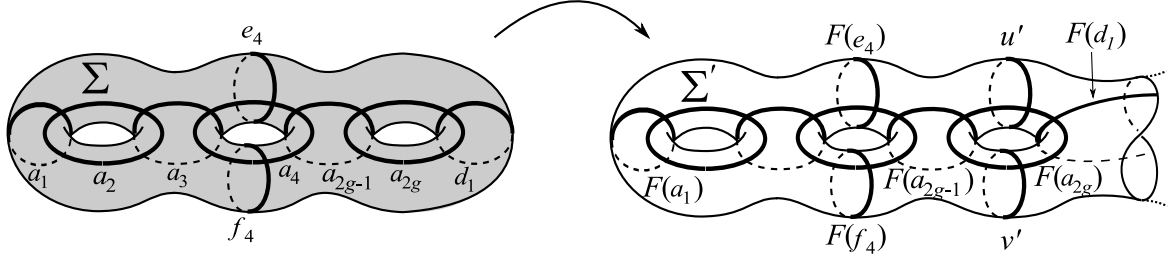


FIG. 53 – Démonstration des théorèmes 7 et 8, 1°) : cas où $b = 0$ et $g = 3$.

Or il existe deux courbes u' et v' dans Σ' telles que :

$$(T_{F(a_1)} T_{F(a_2)} \cdots T_{F(a_{2g-1})})^{2g} = T_{u'} T_{v'},$$

d'où :

$$T_{u'} T_{v'} = T_{F(d_1)}^2 W^{2-2g(2g-1)}.$$

Donc d'après le lemme 3.46, en considérant les systèmes de réduction canoniques dans cette dernière égalité, on a :

$$\{u', v'\} \subset \{F(d_1)\} \cup \sigma(W),$$

mais $I(\sigma(W), F(a_{2g})) = 0$ car W commute avec $T_{F(a_{2g})}$, tandis que puisque $(F(a_1), \dots, F(a_{2g}))$ est une $(2g)$ -chaîne de courbe, la définition de u' et v' impose que $I(u', F(a_{2g})) \neq 0$ et $I(v', F(a_{2g})) \neq 0$ (cf. figure 53). Donc $u' = v' = F(d_1)$, donc Σ' est homéomorphe à $\Sigma_{g,0}$, donc à Σ .

Donc lorsque $b = 0$, le théorème 7 est démontré. De plus, puisque justement $b' = b = 0$, $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma) = \mathcal{M}\text{od}(\Sigma) = \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$, de même pour Σ' , donc on rentre dans le cadre du théorème 6, donc lorsque $b = 0$, le théorème 8 est également démontré. Dans la suite de cette démonstration, plaçons-nous dans le cas où $b \neq 0$.

2°) *Cas où $b \neq 0$. Montrons que dans (1), W est trivial, sauf si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$ auquel cas $W \in \{\text{Id}, H\}$.*

On distingue les cas selon la valeur du couple (g, b) :

- Lorsque $g \geq 3$, l'abélianisé de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ est trivial d'après le théorème 6.8 dû à Korkmaz. On a vu au 5°) a) de la démonstration des théorèmes 5 et 6 que dans ce cas, W devait être trivial.
- Lorsque $g = 2$ et $b \neq 0$, l'abélianisé de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ vaut $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et on a vu au 5°) b) de la démonstration des théorèmes 5 et 6 que dans ce cas, W^{10} devait être trivial. Par ailleurs, W doit fixer les courbes $F(a)$ où a décrit \mathcal{A} . Or on a vu au 5°) c) de la démonstration des théorèmes 5 et 6 qu'il n'existait pas de mapping class périodique dans Σ' autre que l'identité qui fixait les courbes $F(a_1), F(a_2), F(a_3), F(a_4), F(d_1), F(d_{b+1})$ lorsque $g' = 3$ et $b' = 0$. Dans cette démonstration, tout découlait du fait que les courbes $F(d_1)$ et $F(d_{b+1})$ étaient distinctes et cobordaient une surface de genre 1 contenant les courbes $F(a_1), F(a_2)$ et $F(a_3)$. Ce fait subsiste pour tout couple (g', b') dès que $g' \geq 2$ et $(g', b') \neq (2, 0)$. Ainsi aucune mapping class en dehors de l'identité ne peut satisfaire les conditions vérifiées par W lorsque $g = 2, b \neq 0$ et $(g', b') \neq (2, 0)$. Par contre, lorsque $(g', b') = (2, 0)$, on a vu au 5°) b) de la démonstration du théorème 6 qu'exactement deux mapping classes : Id et H , l'involution hyper-elliptique, pouvaient convenir.

Définition : Soit $\check{\Psi}$ le morphisme Ψ si $W = \text{Id}$, ou soit $\check{\Psi}$ la transvection de Ψ de direction H si $W = H$ (cf. la définition 6.11). Remarquons que W ne peut être égal à H précisément que si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$. Or sous ces conditions et du fait que H est central, une telle transvection est bien définie.

Remarquons que d'après (1), pour toute courbe $a \in \mathcal{A}$, on obtient :

$$\check{\Psi}(T_a) = T_{F(a)}. \quad (2)$$

3°) Cas où $b \neq 0$. Montrons que $g' = g$, $b' \leq b$ et que la condition (*) a lieu.

Posons quelques définitions :

- Pour toute courbe x dans $\text{Courb}(\Sigma)$ (resp. dans $\text{Courb}(\Sigma')$), notons T_x le twist de Dehn dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ (resp. dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$) et \tilde{T}_x le twist de Dehn dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ (resp. dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$).
- Soit $\tilde{\Psi}$ le morphisme de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ induit par la classe d'isotopie de plongement F .
- Soient enfin $\text{oub}_{\partial\Sigma}$ le morphisme canonique de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et $\text{oub}_{\partial\Sigma'}$ le morphisme canonique de $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$.

Puisque les twists de Dehn \tilde{T}_a le long des courbes $a \in \mathcal{A}$ engendrent $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et que pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $\text{oub}_{\partial\Sigma'} \circ \tilde{\Psi}(\tilde{T}_a) = \check{\Psi} \circ \text{oub}_{\partial\Sigma}(\tilde{T}_a)$, il vient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma) & \xrightarrow{\text{oub}_{\partial\Sigma}} & \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma) \\ \tilde{\Psi} \downarrow & & \downarrow \check{\Psi} \\ \text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma') & \xrightarrow{\text{oub}_{\partial\Sigma'}} & \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma') \end{array}$$

Appliquons la commutativité de ce diagramme. Soit d un bord de Σ . On a d'une part :

$$\check{\Psi} \circ \text{oub}_{\partial\Sigma}(\tilde{T}_d) = \check{\Psi}(\text{Id}) = \text{Id}, \quad (3)$$

et d'autre part :

$$\text{oub}_{\partial\Sigma'} \circ \tilde{\Psi}(\tilde{T}_d) = \text{oub}_{\partial\Sigma'}(\tilde{T}_{F(d)}) = T_{F(d)}. \quad (4)$$

Par commutativité du diagramme, les lignes (3) et (4) calculent la même chose, donc $T_{F(d)} = \text{Id}$, donc $F(d)$ est soit une courbe triviale de Σ' , soit un bord de Σ' . Ceci étant vrai pour tout bord d de Σ , on a démontré que la condition (*) a lieu, donc a fortiori $g' \leq g$ et $b' \leq b$. Comme l'existence de F montrait que $g' \geq g$ (cf. le 4°) b) de la démonstration du théorème 6), il vient que $g' = g$ et $b' \leq b$. Donc le 3°) est démontré.

Finalement, puisque $g' = g$, $b' \leq b$, pour tout plongement F' vérifiant la condition (*), le morphisme $\text{Ad}_{F'} : \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ est bien défini. Ceci achève la démonstration du théorème 7. L'assertion (2) montre par ailleurs que tous les morphismes non cycliques de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ sont des morphismes induits par un plongement de Σ dans Σ' , ou des transvections de tels plongements lorsque $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$, donc le théorème 8 est également démontré. \square

Morphismes injectifs entre mapping class groups

Parmi tous ces morphismes entre mapping class groups relativement ou non au bord, on souhaite décrire ceux qui sont injectifs. C'est l'objet des théorèmes 9 et 10.

Théorème 9 (Injections de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$. Alors, un morphisme de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma')$ est injectif si et seulement :

- lorsque $b \neq 0$: s'il est induit, à transvection près lorsque $g = 2$, par un plongement F de Σ dans Σ' tel que F envoie les courbes de $\text{Bord}(\Sigma)$ sur des courbes deux à deux distinctes de $\text{Courb}(\Sigma', \partial\Sigma')$,
- lorsque $b = 0$: s'il n'est pas cyclique (il s'agit alors, à transvection près lorsque $g = 2$, d'une conjugaison extérieure avec $\Sigma' = \Sigma$).

Démonstration. Les morphismes cycliques ne sont pas injectifs, donc compte tenu du théorème 6, seuls les morphismes induits par un plongement et leurs transvections lorsqu'elles sont définies, sont susceptibles d'être injectifs. On raisonne en deux temps. En premier lieu, on considère les morphismes induits par un plongement (y compris les conjugaisons extérieures). En second lieu, on considère les transvections de direction non triviale de ces morphismes. Rappelons que de telles transvections n'existent que si $g = 2$ et $(g', b') = (2, 0)$ et qu'elles sont de direction H .

- Dans le cas où $b \neq 0$, tout morphisme induit par un plongement F est injectif si et seulement si F envoie les courbes de $\text{Bord}(\Sigma)$ sur des courbes deux à deux distinctes de $\text{Courb}(\Sigma', \partial\Sigma')$ d'après le théorème 3.10. Dans le cas où $b = 0$, les conjugaisons extérieures sont des automorphismes, donc des morphismes injectifs.

- Plaçons-nous maintenant dans le cadre des morphismes non cycliques de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,0})$, où Σ est de genre 2 avec b composantes de bords, $b \geq 0$. Nous allons démontrer que si $\dot{\Psi}$ est une transvection de direction H d'un tel morphisme Ψ que l'on suppose injectif, alors $\dot{\Psi}$ est également injectif. Puisque Ψ peut être vu à son tour comme une transvection de direction H de $\dot{\Psi}$, on aura montré que $\dot{\Psi}$ est injectif si et seulement si Ψ est injectif. Ainsi, dans le cadre que l'on s'est fixé, la propriété d'être ou non injectif demeure lorsqu'on passe d'un morphisme à la transvection de direction H de ce morphisme. Compte tenu du premier point, le théorème 9 est alors démontré.

Démontrons donc que dans le cadre que l'on s'est fixé, si $\dot{\Psi}$ est une transvection de direction H d'un morphisme injectif Ψ , alors $\dot{\Psi}$ est injectif. Etant donné que l'abélianisé de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et que par cet isomorphisme, la classe d'un twist de Dehn le long d'une courbe séparante est envoyé sur 1 d'après le théorème 6.8 dû à Korkmaz, il existe un morphisme $v : \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui associe 1 à tout twist de Dehn le long d'une courbe non séparante, et qui associe 0 à tout produit d'un nombre pair de tels twists de Dehn. Calculons $\text{Ker}(\dot{\Psi})$. Soit A une mapping class de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ telle que $\dot{\Psi}(A) = \text{Id}$. Supposons que A ne soit pas trivial. Puisque $\dot{\Psi}$ est une transvection de Ψ de direction H , on a $\dot{\Psi}(A) = \Psi(A)H^{v(A)}$ avec un abus de langage concernant la notation $H^{v(A)}$ puisque $v(A) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais sans ambiguïté puisque H est périodique d'ordre 2. Or $\dot{\Psi}(A) = \text{Id}$, donc $\Psi(A) = H^{v(A)}$, mais $\Psi(A) \neq \text{Id}$ car Ψ est injectif et $A \neq \text{Id}$, donc $\Psi(A) = H$ et $v(A) = 1$. Nous allons montrer qu'un tel A n'existe pas. En reprenant les notations utilisées aux démonstrations des théorèmes 6 et 8, posons :

$$A_0 = T_{d_1}T_{a_4}T_{a_3}T_{a_2}T_{a_1}^2T_{a_2}T_{a_3}T_{a_4}T_{d_1}.$$

Alors il existe un entier $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que :

$$\Psi(A_0) = (T_{d_1}T_{a_4}T_{a_3}T_{a_2}T_{a_1}^2T_{a_2}T_{a_3}T_{a_4}T_{d_1}) (H^\varepsilon)^{10}.$$

Or la première partie de ce produit vaut H , la deuxième vaut Id , car $H^0 = H^{10} = \text{Id}$. Mais alors pour tout A_1 tel que $\Psi(A_1) = H$, on a $\Psi(A_0A_1) = \text{Id}$. Or Ψ est injectif, donc $A_0A_1 = \text{Id}$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$, donc $v(A_0A_1) = 0$, donc $v(A_1) = v(A_0)$, donc $v(A_1) = 0$. Ainsi, il n'existe pas de mapping class $A \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ telle que $v(A) = 1$ et $\Psi(A) = H$. Donc $\text{Ker}(\dot{\Psi}) = \{\text{Id}\}$ et $\dot{\Psi}$ est injectif. \square

Théorème 10 (Injections de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$).

Soient Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ et Σ' la surface $\Sigma_{g',b'}$ avec $g \geq 2$ et $g' \leq g + 1$. Alors, un morphisme

de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ est injectif si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- les surfaces Σ et Σ' sont homéomorphes,
- le morphisme est une conjugaison extérieure (i.e. un automorphisme de la forme Ad_F avec $F \in \mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma)$ cf. définition 6.5), ou éventuellement la transvection de direction H d'une conjugaison extérieure lorsque Σ' et Σ sont homéomorphes à $\Sigma_{2,0}$.

Démonstration. Lorsque Σ est une surface sans bord, le résultat est contenu dans l'énoncé du théorème 9. Lorsque Σ est une surface à bord, les morphismes non triviaux de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ sont induits par des (classes d'isotopie de) plongements F vérifiant

$$F(\text{Bord}(\Sigma)) \cap \text{Courb}(\Sigma') = \emptyset, \quad (*)$$

d'après le théorème 8. Soit Ψ un morphisme de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ injectif induit par un plongement F . Si F envoie une courbe d de $\text{Bord}(\Sigma)$ sur une courbe contractile dans Σ' , l'injectivité de Ψ est mise en défaut. En effet, considérons un chemin non séparant dans Σ à extrémités dans d . Le voisinage tubulaire de la réunion de ce chemin et de d dans Σ est un pantalon dont d est l'un des bords. Appelons x et y les deux autres bords, cf. figure 54. Ce

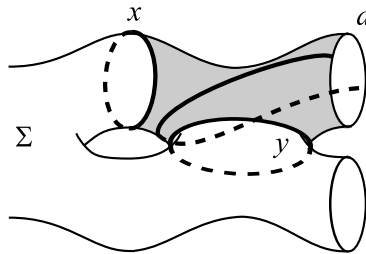


FIG. 54 – Situation évoquée dans la démonstration du théorème 10

pantalon est envoyé par F sur un pantalon de bord $\{F(d), F(x), F(y)\}$, mais puisque $F(d)$ est une courbe contractile, $F(x)$ et $F(y)$ sont une seule et même (classe d'isotopie de) courbe. Donc $T_{F(x)} = T_{F(y)}$. Ainsi $\Psi(T_x) = \Psi(T_y)$ bien que $T_x \neq T_y$. Donc (*) doit être remplacé par $F(\text{Bord}(\Sigma)) \subset \text{Bord}(\Sigma')$. Mais $b' \leq b$. Donc finalement, (*) doit être remplacé par :

$$F(\text{Bord}(\Sigma)) = \text{Bord}(\Sigma'). \quad (**)$$

Ceci implique que $\Sigma' = \Sigma$ et que F appartient à $\mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma)$, ce qu'il fallait démontrer. \square

6.4 Morphismes du mapping class group dans lui-même.

On complète le paragraphe précédent en précisant la situation des morphismes injectifs de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$ lorsque $\Sigma' = \Sigma$. En particulier, on retrouve le théorème d'Ivanov et McCarthy stipulant que $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ est co-hopfien (cf. [IvMc]). On donne en outre une preuve complète de la cohofianité de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ (cf. théorème 11). On verra que lorsque $b = 0$, le groupe $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ vérifie une propriété beaucoup plus forte (cf. le i) des théorèmes 11 et 12). Comme au paragraphe précédent, compte tenu du centre non trivial de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,0})$, le cas de la surface $\Sigma_{2,0}$ est à part, et fait l'objet d'un théorème indépendant (cf. théorème 12).

Remarque. Etant données deux surfaces Σ et Σ' , on a défini au paragraphe 6.3 ce qu'était un morphisme de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma', \partial\Sigma')$ induit par la classe d'isotopie F d'un plongement

de Σ dans Σ' , cf. définition 6.5. Lorsque $\Sigma = \Sigma'$, F n'est pas nécessairement isotope à un difféomorphisme. Toutefois, si c'est le cas, F appartient au groupe $\text{Mod}^\circ(\Sigma)$.

Théorème 11 (Cohopfanité de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ et structure de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$, où $\Sigma \neq \Sigma_{2,0}$).
Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \geq 2$ et $(g,b) \neq (2,0)$.

- i) Le mapping class group $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est cohopfien, c'est-à-dire que les injections sont des automorphismes. De plus, lorsque $b = 0$, ce sont tous les morphismes non triviaux de $\text{Mod}(\Sigma)$ qui sont des automorphismes.*
- ii) L'application $\text{Ad} : \text{Mod}^\circ(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$ est un isomorphisme.*
- iii) Le groupe d'automorphismes extérieurs $\text{Out}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$ de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Sym}(b)$, où $\text{Sym}(b)$ est le groupe symétrique sur b éléments.*

Démonstration.

Montrons la partie i).

Lorsque $b = 0$ et $g \geq 3$, d'après le théorème 9, tout morphisme non trivial de $\text{Mod}(\Sigma)$ dans lui-même est une conjugaison extérieure, donc il n'existe pas de morphismes injectifs non bijectifs. Lorsque $b > 0$ et $g \geq 2$, d'après le théorème 9, tout morphisme injectif de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ dans lui-même est induit par une classe d'isotopie F d'un plongement de Σ dans lui-même et les courbes de $\text{Bord}(\Sigma)$ sont envoyées par F sur des courbes deux à deux distinctes de $\text{Courb}(\Sigma, \partial\Sigma)$. La définition du complémentaire $(F(\Sigma))^c$ de $F(\Sigma)$ dans Σ exige un choix de notre part : dans cette démonstration, nous identifierons les composantes connexes de $\partial(F(\Sigma))$ isotopes à des composantes connexes de $\partial\Sigma$, de sorte que $(F(\Sigma))^c$ ne contienne aucune composante connexe homéomorphe à un disque ou un anneau. Ainsi, $(F(\Sigma))^c$ est une réunion (éventuellement vide) de composantes connexes de caractéristique d'Euler strictement négative. Or si une courbe de $\text{Bord}(F(\Sigma))$ appartient à $\text{Courb}(\Sigma)$, $(F(\Sigma))^c$ est non vide, donc $\chi(F(\Sigma)) < \chi(\Sigma)$: ce serait absurde. Donc $\text{Bord}(F(\Sigma)) = \text{Bord}(\Sigma)$, $F(\Sigma) = \Sigma$ et $F \in \text{Mod}^\circ(\Sigma)$. Donc là encore, tout morphisme non trivial de $\text{Mod}(\Sigma)$ dans lui-même est une conjugaison extérieure et il n'existe pas de morphismes injectifs non bijectifs. Ceci prouve la partie i).

Montrons la partie ii)

On vient de montrer que tout morphisme injectif de $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ provient d'une conjugaison extérieure par un élément de $\text{Mod}^\circ(\Sigma)$, donc est un automorphisme. Donc la flèche $\text{Ad} : \text{Mod}^\circ(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$ est surjective. Montrons maintenant que le morphisme Ad est injectif. Soit F dans $\text{Mod}^\circ(\Sigma)$ telle que Ad_F soit l'identité de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$. Considérons les courbes de la figure 55 et posons $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_{3g-3+b}\}$. Puisque Ad_F est l'identité de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$, Ad_F fixe les twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{A} , donc F fixe les courbes de \mathcal{A} . De plus, Ad_F envoie les twists de Dehn le long des courbes de \mathcal{A} sur eux-mêmes et non leurs inverses, donc F préserve l'orientation de Σ . En particulier F appartient à $\text{Mod}(\Sigma)$. De plus, la partition de Σ en pantalons suivant les courbes de \mathcal{A} est telle que si F fixe chaque courbe de \mathcal{A} , F ne permute pas les pantalons (cela aurait été possible dans $\Sigma_{2,0}$ mais par hypothèse, ce cas est écarté). Donc F induit dans $\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ une mapping class \widehat{F} appartenant en fait à $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$. Mais le mapping class group d'un pantalon dont les bords ne sont pas permutés est trivial, donc \widehat{F} est triviale. Donc F est un multitwist le long des courbes de \mathcal{A} et $\sigma(F)$ est inclus dans \mathcal{A} . Cependant, Ad_F fixe les twists de Dehn le long des courbes x_1, \dots, x_g , donc F fixe ces mêmes courbes. Ces courbes sont donc des courbes de réduction de F , donc les courbes de réduction essentielles de F ne peuvent intersecter les courbes x_1, \dots, x_g . Or chaque courbe de \mathcal{A} intersecte l'une des courbes x_1, \dots, x_g , donc finalement $\sigma(F)$ est vide. Or F est un multitwist, donc F est l'identité. Ceci prouve l'injectivité de Ad et conclut la preuve de la partie ii).

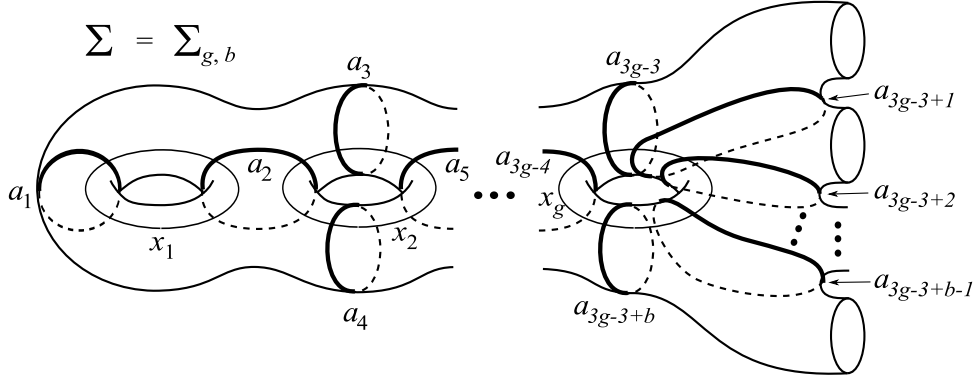


FIG. 55 – L'ensemble de courbes $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_{3g-3+b}\}$ décompose Σ en pantalons.

Montrons la partie iii).

Considérons le diagramme suivant où \mathcal{M} est le groupe $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \partial\Sigma)$, et ε et Act sont des morphismes tels que pour tout $G \in \mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma)$, $\varepsilon(G) = \pm 1$ selon que G respecte ou non l'orientation, et $\text{Act}(G)$ est la permutation qu'induit G sur les composantes de bord de Σ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma) & \xrightarrow{(\varepsilon, \text{Act})} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Sym}(b) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \text{Inn}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{Aut}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{Out}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

La première ligne est exacte par définition de $\mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma)$. La deuxième ligne est exacte par définition de $\text{Out}(\mathcal{M})$. La première flèche verticale est un isomorphisme car $\text{Inn}(\mathcal{M})$ est isomorphe au quotient de \mathcal{M} par son centre, lui même isomorphe à $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. La deuxième flèche est isomorphe d'après la partie ii) de ce théorème. Enfin toutes les flèches sont canoniques donc le diagramme est commutatif. On en déduit que la troisième flèche verticale est un isomorphisme. Ceci prouve la partie iii) et achève la démonstration de ce théorème. \square

Passons au cas de la surface $\Sigma_{2,0}$. Le résultat est très différent car, en raison du centre non trivial exceptionnel de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,0})$, le morphisme $\text{Ad} : \mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,0}))$ n'est ni injectif, ni surjectif.

Théorème 12 (Cohopfanité de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ et structure de $\text{Aut}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma))$, où $\Sigma = \Sigma_{2,0}$, McCarthy⁴ [Mc1]).

Soit Σ la surface fermée de genre 2. Rappelons que l'on note H l'involution hyper-elliptique de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ (cf. définition 6.6). Notons également ℓ_H la transvection de direction H (cf. définition 6.11) de l'identité de $\text{Aut}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma))$. Alors :

- i) Le mapping class group $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ est cohopfien. On a même mieux : tous les endomorphismes non cycliques sont des automorphismes.
- ii) Le morphisme ℓ_H de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ est une involution, et toute transvection de direction H d'une conjugaison extérieure coïncide au produit (commutatif) de cette conjugaison extérieure par ℓ_H .
- iii) Il existe une involution K de $\mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma)$ renversant l'orientation. Le groupe engendré par Ad_K et ℓ_H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et ne contient que des automorphismes extérieurs en dehors de l'identité.
- iv) La restriction de la flèche $\text{Aut}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)) \rightarrow \text{Out}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma))$ à $\langle \text{Ad}_K, \ell_H \rangle$ est un isomorphisme. En particulier, $\text{Out}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- v) L'application $\text{Ad} : \mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma))$ participe à la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \langle H \rangle \rightarrow \mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma) \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)) \rightarrow \langle \overline{\ell_H} \rangle \rightarrow 1,$$

où $\overline{\ell_H}$ est l'image de ℓ_H dans le quotient de $\text{Aut}(\mathcal{M}\text{od}(\Sigma))$ par $\text{Ad}(\mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma))$.

Démonstration. La partie i) est un corollaire immédiat du théorème 9.

Montrons la partie ii).

Définissons comme au cours de la démonstration du théorème 9 le morphisme $v : \mathcal{M}\text{od}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui associe 1 à tout twist de Dehn le long d'une courbe non séparante, et qui associe 0 à tout produit d'un nombre pair de tels twists de Dehn. On a pour tout $F \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ avec un abus de langage évident :

$$\ell_H(F) = F H^{v(F)}.$$

Or $v(H) = 0$ car H peut être exprimé comme un produit de 20 twists de Dehn le long de courbes non séparantes dans $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ (on vérifie que le produit $(T_{a_1} T_{x_1} T_{a_2} T_{x_2})^5$ correspond à la définition de H , cf. définition 6.6, où (a_1, x_1, a_2, x_2) est la 4-chaîne de courbes dessinées figure 56), donc pour tout $F \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$, on a :

$$\ell_H \circ \ell_H(F) = \ell_H(F H^{v(F)}) = (F H^{v(F)}) H^{v(F H^{v(F)})} = F H^{v(F)} H^{v(F)} = F.$$

Donc ℓ_H est une involution. De plus, pour tout $F \in \mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma)$ et tout $G \in \mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$, $FGF^{-1}H = FGHF^{-1}$, donc $\ell_H \circ \text{Ad}_F = \text{Ad}_F \circ \ell_H$. Enfin, $\text{Ad}_F \circ \ell_H$ coïncide sur les twists de Dehn le long de courbes non séparantes (un ensemble qui engendre $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$) avec la transvection de direction H de la conjugaison extérieure par F , donc cette transvection est égale à $\text{Ad}_F \circ \ell_H$. La partie ii) est démontrée.

Montrons la partie iii).

Soient à nouveau les cinq courbes a_1, a_2, a_3, x_1, x_2 dans Σ , cf. figure 56. On voit la surface Σ plongée dans \mathbb{R}^3 et on considère la réflexion de \mathbb{R}^3 par rapport à un plan contenant les courbes x_1 et x_2 , et coupant les courbes a_1, a_2, a_3 en deux points. La réflexion selon ce plan renverse l'orientation de Σ . Notons K la classe d'isotopie de la restriction de cette réflexion à Σ : K appartient à $\mathcal{M}\text{od}^\diamond(\Sigma)$. L'automorphisme Ad_K est bien un automorphisme extérieur de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$, car aucun automorphisme intérieur ne peut envoyer un twist de Dehn sur l'inverse

⁴Dans [Mc1], McCarthy démontre les points ii) - v) de ce théorème. Le point i) par contre traite des endomorphismes de $\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{2,0})$ en toute généralité. Cette approche est nouvelle et propre à cette thèse.

d'un twist de Dehn. Quant à l'involution ℓ_H , c'est également un automorphisme extérieur car elle n'envoie pas les twists de Dehn sur des twists de Dehn. Remarquons que les automorphismes Ad_K et ℓ_H commutent car H appartient au centre de $\text{Mod}^\circ(\Sigma)$, et que le produit $\text{Ad}_K \circ \ell_H$ est un automorphisme extérieur pour la même raison que ℓ_H .

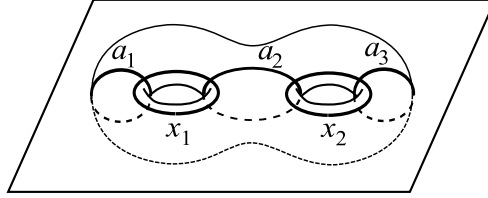


FIG. 56 – La surface Σ , les courbes a_1, a_2, a_3, x_1, x_2 , et le plan contenant les courbes x_1 et x_2 .

Montrons la partie iv).

Les automorphismes de $\text{Mod}(\Sigma)$ sont des transvections de direction Id ou H d'une conjugaison extérieure d'après les théorèmes 6 et 8. Donc pour tout automorphisme de $\text{Mod}(\Sigma)$, quitte à le composer judicieusement par Ad_K et/ou par ℓ_H , on obtient un automorphisme intérieur. Donc les classes de Ad_K et ℓ_H dans $\text{Out}(\text{Mod}(\Sigma))$ engendrent $\text{Out}(\text{Mod}(\Sigma))$. Mais par ailleurs, Ad_K et ℓ_H sont extérieurs et ne peuvent être obtenus l'un de l'autre par composition par des automorphismes intérieurs, donc $\text{Out}(\text{Mod}(\Sigma))$ n'est pas cyclique. Enfin, ce sont des involutions qui commutent, donc $\text{Out}(\text{Mod}(\Sigma))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où Ad_K et ℓ_H jouent chacun le rôle d'un générateur.

Montrons la partie v).

Tout d'abord, les conjugaisons extérieures sont des automorphismes, donc Ad est bien un morphisme allant de $\text{Mod}^\circ(\Sigma)$ dans $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma))$. Calculons le noyau de Ad . Reprenons la démonstration du théorème 11. On constate que si un élément $F \in \text{Mod}^\circ(\Sigma)$ vérifie $\text{Ad}_F = \text{Id}$ dans $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma))$, alors F fixe les courbes a_1, a_2, a_3 et préserve la décomposition en pantalons de Σ le long des courbes a_1, a_2, a_3 , tout en permutant éventuellement les deux pantalons de cette décomposition, cf. figure 56. En utilisant le fait que F doit fixer les courbes x_1 et x_2 , on en déduit par le même type d'argument que lors de la démonstration du théorème 11 que le noyau de Ad est inclus dans l'ensemble à deux éléments : $\{\text{Id}, H\}$. Réciproquement, Ad_{Id} et Ad_H coïncident avec l'identité de $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma))$. Donc $\text{Ker}(\text{Ad}) = \{\text{Id}, H\}$. Calculons maintenant le conoyau de Ad . On a vu que tout automorphisme de $\text{Mod}(\Sigma)$ est le produit d'une conjugaison extérieure avec Id ou avec ℓ_H . Or ℓ_H lui-même n'est pas une conjugaison extérieure, donc le conoyau de Ad est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et est engendré par l'image de ℓ_H . \square

Remarque. (Comparaison de $\text{Aut}(\mathcal{B}_n)$ et $\text{Aut}(\text{Mod}(\Sigma_{2,0}))$).

Dans le cas du groupe $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ et contrairement au groupe \mathcal{B}_n , les endomorphismes non cycliques sont des automorphismes. Comparativement au groupe \mathcal{B}_n , cela vient du fait que dans le cas de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$, le centre est contenu dans la torsion, donc les transvections d'automorphismes sont encore des automorphismes. Par contre, dans \mathcal{B}_n où le centre est infini, les transvections de direction non triviale d'automorphismes dans \mathcal{B}_n ne sont pas surjectives.

III. Démonstration du théorème 1

Dans cette partie, nous prouvons le théorème 1. Il découlera au chapitre 13 du théorème 12.2 (ci-dessous) démontré au chapitre 12. C'est la démonstration de ce théorème qui est au cœur de cette partie.

Théorème 12.2 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$, $n \geq 6$, n pair).

Soit n un entier pair supérieur ou égal à 6 et Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ avec $g \leq \frac{n}{2}$. Alors tout morphisme ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est soit cyclique, soit une transvection de morphisme de monodromie, c'est-à-dire que, dans ce dernier cas, il existe

- une $(n-1)$ -chaîne de courbes $(a_i)_{1 \leq i \leq n-1}$,
- un entier $\varepsilon \in \{\pm 1\}$,
- une mapping class V commutant avec T_{a_i} pour tout $i \leq n-1$,

tels que pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$, on ait :

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V.$$

On attire l'attention du lecteur sur le fait que dans ce théorème et contrairement au théorème 1, n est un entier pair.

Notations :

Tout au long de cette partie, nous adopterons les notations suivantes. Les deux premières seront rappelées en tête de chaque chapitre :

- n est un entier pair supérieur ou égal à 6, g et b sont des entiers positifs ou nuls tels que $2 - 2g - b \leq -1$ et $2g \leq n$,
- ρ est un morphisme donné de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$; à partir du chapitre 9, on suppose que ρ n'est pas cyclique,
- τ_i où $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ est le $i^{\text{ème}}$ générateur standard de \mathcal{B}_n ; lorsque l'indice i vérifie $i < 0$ ou $i > n-1$, τ_i est le $j^{\text{ème}}$ générateur standard de \mathcal{B}_n où j est le reste (positif) de la division euclidienne de i par n ; on note $\text{Gen}_{\mathcal{B}_n} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$; on note pour tous entiers i et j , on note $|i-j|_n$ l'entier $\min(\{|i-j+kn|, k \in \mathbb{Z}\})$,
- A_i est $\rho(\tau_i)$ pour tout entier i ; on note $\mathcal{G} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$; on note $\text{Imp}(n) = \{1, 3, \dots, n-1\}$ les $\frac{n}{2}$ nombres impairs compris entre 0 et n , et $\mathcal{X} = \{A_i, i \in \text{Imp}(n)\}$.
- $\sigma(\mathcal{G})$ est par définition la réunion $\cup_{i \leq n-1} \sigma(A_i)$ et $\sigma(\mathcal{X})$ est par définition la réunion $\cup_{i \in \text{Imp}(n-1)} \sigma(A_i)$.

Plan de la démonstration du théorème 12.2 :

Chapitre 7 :

Soit $\sigma_p(\mathcal{G})$, l'ensemble des courbes périphériques, c'est-à-dire des courbes séparantes de $\sigma(\mathcal{G})$ telles que l'une des deux composantes connexes de Σ privé d'une telle courbe est de genre nul. On démontre qu'à transvection près, on peut supposer que $\sigma_p(\mathcal{G})$ est vide. Dès le chapitre suivant, on supposera que $\sigma_p(\mathcal{G})$ est vide. On montre de plus dans ce chapitre que dans de nombreux cas, on peut se ramener au cas où Σ est une surface sans bord.

Chapitre 8 :

On montre que, bien que $\sigma_p(\mathcal{G})$ est supposé être vide, $\sigma(\mathcal{G})$ est non vide, ou bien ρ est cyclique. Dorénavant, ρ est supposé non cyclique, de sorte que $\sigma(\mathcal{G})$ est non vide.

Chapitre 9 :

On réalise une partition de $\sigma(\mathcal{G})$ en deux ensembles de courbes : $\sigma_s(\mathcal{G})$ et $\sigma_n(\mathcal{G})$, vérifiant chacun des propriétés intéressantes. Parmi celles-ci, les courbes de $\sigma_s(\mathcal{G})$ n'appartiennent chacune au système de réduction canonique que d'une seule mapping class A_i pour tout entier i compris entre 0 et $n - 1$. Quant aux courbes de $\sigma_n(\mathcal{G})$, elles sont stables par l'action de \mathcal{B}_n induite par ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$.

Chapitre 10 :

On démontre que $\sigma(\mathcal{G})$ ne contient pas de courbes séparantes.

Chapitre 11 :

On décrit (à isotopie près et) à difféomorphisme près l'ensemble de courbes $\sigma(\mathcal{X})$ dans la surface Σ , où $\mathcal{X} = \{A_i, i \in \{1, 3, 5, \dots, n - 1\}\}$.

Chapitre 12 :

On rassemble les résultats des chapitres précédents et on montre que ρ est une transvection de morphisme de monodromie : le théorème 12.2 est démontré.

Chapitre 13 :

On étend le théorème 12.2 aux cas où n est un entier impair supérieur ou égal à 7, prouvant ainsi le théorème 1.

Chapitre 14 :

On discute des hypothèses du théorème 1, on énonce quelques conjectures et on présente quelques exemples surprenants lorsque les hypothèses ne sont plus vérifiées.

7 Morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group d'une surface de genre nul ; courbes périphériques

Ce chapitre est composé de deux paragraphes :

- Au paragraphe 7.1, on s'intéresse aux morphismes du groupe de tresses dans le mapping class group d'une surface de genre nul. On montrera le théorème suivant :

Théorème 7.1 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma_{0,b}, \partial\Sigma_{0,b})$ et dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{0,b})$).

Soit Σ une surface de genre nul. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, tout morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, respectivement dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, est cyclique.

- Au paragraphe 7.2, on suppose que $n \geq 6$, $g \geq 1$, $b \geq 1$ et qu'il existe un morphisme ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. On étudie certaines courbes séparantes de $\sigma(\mathcal{G})$, les courbes dites *périphériques* (cf. définition 7.2). En corollaire du théorème 7.1, on obtient la proposition 7.3 selon laquelle les courbes périphériques sont des points fixes par l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Courb}(\Sigma)$. Il est alors facile de ramener l'étude de tout morphisme ρ à celle d'un morphisme ρ' pour lequel l'ensemble des courbes périphériques est vide (cf. proposition 7.4). Enfin, on montre comment dans certains cas, tout se passe dans Σ comme si Σ était une surface sans bord (cf. la proposition 7.5).

Définition 7.2 (Courbes périphériques, $\sigma_p(\mathcal{G})$).

Une courbe de $\sigma(\mathcal{G})$ est dite *périphérique* si elle sépare Σ en deux composantes connexes dont l'une est de genre nul. L'ensemble des courbes périphériques est noté $\sigma_p(\mathcal{G})$. Pour tout $A \in \mathcal{G}$, on note $\sigma_p(A) = \sigma_p(\mathcal{G}) \cap \sigma(A)$.

Proposition 7.3 (Stabilité des courbes périphériques).

- On a les égalités : $\sigma_p(A_0) = \sigma_p(A_1) = \dots = \sigma_p(A_{n-1}) = \sigma_p(\mathcal{G})$.*
- Le groupe $\rho(\mathcal{B}_n)$ est inclus dans $\mathcal{P}_{\sigma_p(\mathcal{G})}\text{Mod}(\Sigma)$ (le sous-groupe de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ qui fixe chaque courbe de $\sigma_p(\mathcal{G})$ et qui préserve chaque sous-surface de $\text{Sub}_{\sigma_p(\mathcal{G})}(\Sigma)$).*

Proposition 7.4 (Suppression des courbes périphériques).

Soit Σ' la composante connexe de genre non nul de $\Sigma_{\sigma_p(\mathcal{G})}$. Alors :

- Pour tout $\xi \in \mathcal{B}_n$, $\rho(\xi)$ induit une mapping class dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ que l'on note $\rho'(\xi)$. L'application $\rho' : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ ainsi définie est un morphisme.*
- Les morphismes ρ et ρ' sont de même nature : l'un est cyclique (respectivement est une transvection de morphisme de monodromie) si et seulement si l'autre l'est.*

Proposition 7.5. *Soit \mathcal{A} un simplexe de courbes et \mathcal{K} un sous-groupe de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ tel que \mathcal{A} soit \mathcal{K} -stable et tel que toute orbite de courbes de \mathcal{A} sous l'action de \mathcal{K} soit de cardinal au moins 3. Alors la projection canonique $\text{oub}_{\partial\Sigma} : \Sigma \rightarrow \Sigma_{g,0}$ induit un isomorphisme entre les graphes $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ et $\Gamma(\Sigma_{g,0}, \text{oub}_{\partial\Sigma}(\mathcal{A}))$. En particulier, $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ est de cardinal inférieur ou égal à $2g - 2$, et \mathcal{A} est de cardinal inférieur ou égal à $3g - 3$. De plus, en notant $\text{oub}_{\partial\Sigma}^* : \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g,0})$ le morphisme induit par $\text{oub}_{\partial\Sigma}$, on a pour toute mapping class $F \in \mathcal{K}$, pour toute courbe $a \in \mathcal{A}$ et toute sous-surface $S \in \text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$:*

$$\begin{aligned} \text{oub}_{\partial\Sigma}(F(a)) &= \text{oub}_{\partial\Sigma}^*(F)(\text{oub}_{\partial\Sigma}(a)), \\ \text{oub}_{\partial\Sigma}(F(S)) &= \text{oub}_{\partial\Sigma}^*(F)(\text{oub}_{\partial\Sigma}(S)). \end{aligned}$$

7.1 Morphismes de \mathcal{B}_n dans le mapping class group d'une surface de genre nul

Nous allons montrer que les morphismes de \mathcal{B}_n ($n \geq 3$) dans le mapping class group de surfaces de genre nul (dont les composantes de bord ne sont pas permutées) sont cycliques, en utilisant le fait que certains mapping class groups sont *biordonnables*.

Définition 7.6 (Groupe biordonnable). Un groupe G est dit *biordonnable* s'il existe un ordre total \leq sur G invariant par multiplication à gauche et à droite, i.e. pour tous a, b, g et h dans G , on a :

$$a \leq b \iff gah \leq gbh$$

Dans la suite, on notera par défaut \leq l'ordre de tous les groupes biordonnables que nous rencontrerons, et noterons par $<$ l'ordre strict associé à \leq .

Proposition 7.7. *Tout morphisme de \mathcal{B}_n dans un groupe biordonnable est cyclique.*

Démonstration. Soit G un groupe ordonnable et soit φ un morphisme de \mathcal{B}_n dans G . Supposons que $\varphi(\tau_1) < \varphi(\tau_2)$. Soit γ l'élément $\tau_1\tau_2\tau_1$. Alors $\varphi(\gamma\tau_1\gamma^{-1}) < \varphi(\gamma\tau_2\gamma^{-1})$. Or, rappelons que $\gamma\tau_1\gamma^{-1} = \tau_2$ et $\gamma\tau_2\gamma^{-1} = \tau_1$ donc $\varphi(\tau_2) < \varphi(\tau_1)$, ce qui est absurde. De même, supposer $\varphi(\tau_2) < \varphi(\tau_1)$ aboutit à une contradiction. Donc $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$, donc φ est cyclique. \square

Grâce à la proposition 7.8 ci-dessous, on pourra appliquer la proposition 7.7 aux mapping class groups et prouver ainsi le théorème 7.1.

Proposition 7.8 (Bonatti, Paris). *Pour toute surface Σ de genre nul, $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est biordonnable.* \square

En corollaire, on obtient :

Théorème 7.1 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma_{0,b}, \partial\Sigma_{0,b})$ et dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{0,b})$.)

Soit Σ une surface de genre nul. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, tout morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, respectivement dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, est cyclique.

Démonstration. Tout morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est cyclique, car d'après la proposition 7.8, $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est biordonnable. Concernant les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, d'après la proposition 5.12, ils se relèvent en des morphismes de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ qui doivent être cycliques. Donc à nouveau d'après la proposition 5.12, les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ sont cycliques. \square

7.2 Courbes périphériques

Nous allons prouver dans ce paragraphe les propositions 7.3, 7.4 et 7.5. Les deux dernières seront des corollaires de la première. De plus, la proposition 7.5 utilise le théorème 7.1.

Soit n un entier supérieur ou égal 6, soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \geq 1$ et $b \geq 2$ et soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. Rappelons la définition 7.2

Définition 7.2 (Courbes périphériques, $\sigma_p(\mathcal{G})$).

Une courbe a de $\sigma(\mathcal{G})$ est dite *périphérique* si elle sépare Σ en deux composantes connexes dont

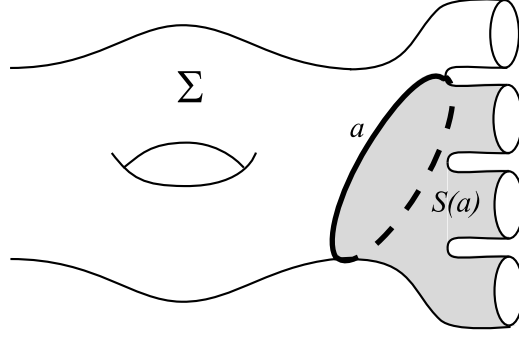


FIG. 57 – Exemple de courbe périphérique.

l'une est une sphère à trous (cf. figure 57). L'ensemble des courbes périphériques sera noté $\sigma_p(\mathcal{G})$. On notera également $\sigma_p(A)$ l'ensemble de courbes de $\sigma_p(\mathcal{G}) \cap \sigma(A)$.

Proposition 7.3 (Stabilité des courbes périphériques).

- i) On a les égalités : $\sigma_p(A_0) = \sigma_p(A_1) = \dots = \sigma_p(A_{n-1}) = \sigma_p(\mathcal{G})$.
- ii) Le groupe $\rho(\mathcal{B}_n)$ est inclus dans $\mathcal{P}_{\sigma_p(\mathcal{G})}\text{Mod}(\Sigma)$ (le sous-groupe de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ qui fixe chaque courbe de $\sigma_p(\mathcal{G})$ et qui préserve chaque sous-surface de $\text{Sub}_{\sigma_p(\mathcal{G})}(\Sigma)$).

Lemme 7.9. Pour toute courbe x périphérique et toute mapping class F telle que $I(F(x), x) = 0$, F fixe la courbe x et n'échange pas ses deux voisinages latéraux.

Démonstration du lemme 7.9. Soit S la sphère bordée par x . Puisque $I(F(x), x) = 0$, si $F(x)$ est distincte de x , alors soit $F(x)$ est dans S et $F(S)$ est incluse dans S , soit $F(x)$ est hors de S et S est incluse dans $F(S)$ (rappelons que $\text{Bord}(F(S)) \cap \text{Bord}(\Sigma) = \text{Bord}(S) \cap \text{Bord}(\Sigma)$ car F appartient à $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$). Or S et $F(S)$ sont homéomorphes, donc ces deux hypothèses sont absurdes. Finalement, $F(x) = x$. De plus, S et $F(S)$ sont situées du même coté de x , donc F n'échange pas les deux voisinages de x . \square

Démonstration de la proposition 7.3.

i) Soient A et C deux mapping classes de \mathcal{G} qui commutent, soit x une courbe de $\sigma_p(A)$ et soit Z une mapping class telle que $ZAZ^{-1} = C$. Alors $Z(x) \in \sigma_p(C)$, et puisque que $AC = CA$, on a $I(\sigma(A), \sigma(C)) = 0$, donc $I(x, Z(x)) = 0$. Alors le lemme 7.9 s'applique à la courbe x et à la mapping class Z , et l'on obtient $Z(x) = x$, donc $x \in \sigma(C)$. Ceci montre que pour tous $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tels que $|i - j|_n > 1$, on a $\sigma_p(A_i) = \sigma_p(A_j)$. Alors par transitivité, on a

$$\sigma_p(A_0) = \sigma_p(A_1) = \dots = \sigma_p(A_{n-1}) = \sigma_p(\mathcal{G}).$$

ii) Pour tout $x \in \sigma_p(\mathcal{G})$, tout $A \in \mathcal{G}$, on vient de voir que $x \in \sigma(A)$, donc $I(x, A(x)) = 0$, donc d'après le lemme 7.9, $A(x) = x$ et A n'intervertit pas les deux composantes connexes de Σ_x . Donc A appartient à $\mathcal{P}_x\text{Mod}(\Sigma)$. Or \mathcal{G} engendre $\rho(\mathcal{B}_n)$, donc ceci prouve la deuxième partie de la proposition 7.3. \square

Proposition 7.4 (Suppression des courbes périphériques).

Soit Σ' la composante connexe de genre non nul de $\Sigma_{\sigma_p(\mathcal{G})}$. Alors :

- i) Pour tout ξ appartenant à \mathcal{B}_n , la mapping class $\rho(\xi)$ induit dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ une mapping class que l'on note $\rho'(\xi)$. L'application $\rho' : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma')$ ainsi définie est un morphisme.

- ii) Les morphismes ρ et ρ' sont de même nature : l'un est cyclique (respectivement est une transvection de morphisme de monodromie) si et seulement si l'autre l'est.

Démonstration.

i) Soit Σ' la composante connexe de genre non nul de $\Sigma_{\sigma_p(\mathcal{G})}$ et soit \mathcal{U} le sous-ensemble de courbes de $\sigma_p(\mathcal{G})$ qui bordent la sous-surface de Σ isomorphe à Σ' . D'après la proposition 7.3 sur la stabilité des courbes périphériques, $\rho(\mathcal{B}_n)$ est inclus dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$. Notons π' le morphisme de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{\mathcal{U}})$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma')$. Alors $\rho' = \pi' \circ \text{dec}_{\mathcal{U}} \circ \rho$: ρ' est bien un morphisme.

ii) D'après la proposition 5.12, il existe un relèvement $\tilde{\rho}'$ de ρ' dans $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \text{Mod}(\Sigma', \partial\Sigma'))$, de même nature que ρ' . En prolongeant pour tout $\xi \in \mathcal{B}_n$ les mapping classes $\tilde{\rho}'(\xi)$ par l'identité sur Σ , puis en la composant au but par le morphisme $\text{oub}_{\partial\Sigma} : \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$, on obtient un morphisme ρ_1 allant de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ tel que $\pi' \circ \text{dec}_{\mathcal{U}} \circ \rho_1 = \rho'$. Par construction, ρ_1 est de même nature que ρ' .

Soit Σ'' la réunion des sous-surfaces de $\mathcal{S}\text{ub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$ autres que Σ' . Notons π'' le morphisme de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{\mathcal{U}})$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma'')$. D'après le théorème 7.1, $\pi'' \circ \text{dec}_{\mathcal{U}} \circ \rho$ est un morphisme cyclique. Notons W la mapping class $\pi'' \circ \text{dec}_{\mathcal{U}} \circ \rho(\tau_1)$ de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma'')$ et soit \tilde{W} la mapping class de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma, \Sigma')$, égale à $\rho(\tau_1)(\rho_1(\tau_1))^{-1}$, et qui induit W sur $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma'')$. Soit ρ_2 la transvection de ρ_1 de direction \tilde{W} (i.e. pour tout entier i dans $\{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $\rho_2(\tau_i) = \rho_1(\tau_i)\tilde{W}$). On a encore le fait que ρ_2 et ρ' sont de même nature.

Soit

$$1 \rightarrow \langle T_u, u \in \mathcal{U} \rangle \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{U}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma) \xrightarrow{\text{dec}_{\mathcal{U}}} \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma_{\mathcal{U}}) \rightarrow 1$$

la suite exacte centrale. On a $\text{dec}_{\mathcal{U}} \circ \rho_2 = \text{dec}_{\mathcal{U}} \circ \rho$, donc d'après le lemme 5.8, ρ_2 est une transvection de ρ , donc ρ_2 et ρ sont de même nature. Finalement, ρ' et ρ sont de même nature. \square

Définition 7.10 (L'application de fermeture des surfaces à bords : *fer*).

Soit Σ une surface de bord non vide. Pour tout bord d de Σ , on choisit un point P_d dans d . Soit Σ' la surface sans bord obtenue (exceptionnellement éventuellement le tore ou la sphère) en contractant dans Σ chaque bord d sur le point P_d qui lui est associé. La contraction effectuée est indépendante des choix effectués, nous la noterons :

$$\text{fer} : \Sigma \rightarrow \Sigma'.$$

L'application *fer* induit un morphisme canonique entre mapping class groups que l'on notera :

$$\text{fer}^* : \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma').$$

Proposition 7.5. Soient \mathcal{A} un simplexe de courbes et \mathcal{K} un sous-groupe de $\mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma)$ tel que \mathcal{A} soit \mathcal{K} -stable et tel que toute orbite de courbes de \mathcal{A} sous l'action de \mathcal{K} soit de cardinal au moins 3. Alors l'application $\text{fer} : \Sigma \rightarrow \Sigma_{g,0}$ induit un isomorphisme entre les graphes $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ (cf. définition 2.24) et $\Gamma(\Sigma_{g,0}, \text{fer}(\mathcal{A}))$. En particulier, $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ est de cardinal inférieur ou égal à $2g-2$, et \mathcal{A} est de cardinal inférieur ou égal à $3g-3$. De plus, en notant $\text{fer}^* : \mathcal{P}\mathcal{M}\text{od}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{g,0})$ le morphisme induit par *fer*, on a pour toute mapping class $F \in \mathcal{K}$, pour toute courbe $a \in \mathcal{A}$ et toute sous-surface $S \in \text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} \text{fer}(F(a)) &= \text{fer}^*(F)(\text{fer}(a)), \\ \text{fer}(F(S)) &= \text{fer}^*(F)(\text{fer}(S)). \end{aligned}$$

Démonstration.

1°) Montrons qu'après avoir contracté chaque bord sur un point, aucune sous-surface de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ n'est envoyée par *fer* sur une sphère privée d'un ou deux disques, et donc qu'aucune

courbe de \mathcal{A} n'est envoyée sur une courbe triviale par fer et qu'aucun couple de courbes de \mathcal{A} n'est envoyé sur une même classe d'isotopie dans $\Sigma_{g,0}$. Ayant montré cela, nous aurons montré que les ensembles de courbes \mathcal{A} et $fer(\mathcal{A})$ sont de même cardinal.

a) Par hypothèse, l'ensemble \mathcal{A} ne contient pas de point fixe sous l'action de \mathcal{K} . Donc \mathcal{A} ne contient pas de courbe périphérique d'après le lemme 7.9. Donc aucune sous-surface de $\mathcal{S}ub_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ n'est envoyée par fer sur une sphère privée d'un disque, ce qui revient à dire qu'aucune courbe de \mathcal{A} n'est envoyée sur une courbe homotope à un point.

b) Montrons qu'aucune sous-surface de $\mathcal{S}ub_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ n'est envoyée par fer sur une sphère privée de deux disques, ce qui revient à dire qu'aucun couple de courbes de \mathcal{A} n'est envoyé sur une même classe d'isotopie dans $\Sigma_{g,0}$. S'il existait deux courbes distinctes a et a' de \mathcal{A} telles que $fer(a) = fer(a')$, alors il existerait dans $\mathcal{S}ub_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ une sous-surface S de genre nul dont le bord serait constitué d'un nombre arbitraire de bords naturels, et d'exactly deux bords intérieurs : a et a' . Mais toute mapping class de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ préservant \mathcal{A} globalement devrait préserver la surface S puisqu'elle est naturellement bordée, donc devrait préserver le couple $\{a, a'\}$. C'est contraire à nos hypothèses, puisque l'orbite de a sous l'action de \mathcal{K} doit être de cardinal au moins trois.

Compte tenu de a) et b), les ensembles \mathcal{A} et $fer(\mathcal{A})$ sont de même cardinal.

2°) Sachant que \mathcal{A} et $fer(\mathcal{A})$ sont de même cardinal, la projection fer induit un morphisme de graphes Ψ , canonique et bijectif, du graphe $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ vers le graphe $\Gamma(\Sigma_{g,0}, fer(\mathcal{A}))$. De plus, la projection fer et le morphisme fer^* étant canoniques, l'action de \mathcal{K} sur $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ induit une action de $fer^*(\mathcal{K})$ sur $\Gamma(\Sigma_{g,0}, fer(\mathcal{A}))$ et les propriétés de commutation attendues sont vérifiées. \square

8 Morphismes irréductibles de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ avec $n \geq 6$

Dans tout ce chapitre et les suivants, n est un entier pair supérieur ou égal à 6, Σ est la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$ et ρ est un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ tel que $\sigma_p(\mathcal{G}) = \emptyset$.

L'idée de la démonstration du théorème 12.2 est d'étudier \mathcal{G} au moyen de $\sigma(\mathcal{G})$. Le but de ce chapitre est d'écartier le cas où $\sigma(\mathcal{G})$ est vide (on dira dans ce cas que ρ est *irréductible*) en montrant qu'alors ρ est cyclique (cf. le théorème 8.2). Rappelons à ce sujet quelques faits basiques sur les morphismes cycliques.

Rappel sur les morphismes cycliques. (cf. la définition 5.1 et les lemmes 5.2 et 5.3)

Soient n un entier supérieur ou égal à 5 et φ un morphisme de \mathcal{B}_n dans un groupe quelconque.

- i) Le morphisme φ est dit *cyclique* si on a : $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2) = \dots = \varphi(\tau_{n-1}) = \varphi(\tau_0)$.
- ii) Dès qu'il existe deux entiers distincts i et j dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tels que $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_j)$, le morphisme φ est cyclique.
- iii) Si l'image de φ est un groupe abélien, le morphisme φ est cyclique.

Définition 8.1 (Morphismes irréductibles, morphismes périodiques, morphismes pseudo-Anosov).

On dira que ρ est un *morphisme irréductible* de \mathcal{B}_n si $\rho(\tau_1)$ est une mapping class irréductible (de façon équivalente si $\sigma(\rho(\tau_1)) = \emptyset$). Si $\rho(\tau_1)$ est périodique (respectivement pseudo-Anosov), le morphisme ρ sera dit *périodique* (respectivement *pseudo-Anosov*). Si ρ est non irréductible, on dira que ρ est un morphismes *réductible*.

Rappelons que dans \mathcal{B}_n , les générateurs standards sont conjugués, donc sont tous réductibles, tous périodiques ou tous pseudo-Anosov. De plus, les assertions $\sigma(\rho(\tau_1)) = \emptyset$ et $\sigma(\mathcal{G}) = \emptyset$ sont équivalentes. Compte-tenu de la définition 8.1, le théorème-clé de ce chapitre, le théorème 8.2, s'énonce ainsi :

Théorème 8.2. *Tout morphisme irréductible de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est cyclique.*

On distinguera le cas des morphismes périodiques (cf. propositions 8.8 et 8.9) de celui des morphismes pseudo-Anosov (cf. proposition 8.11). La démonstration de ce théorème est rapide lorsque Σ est de bord non vide mais les méthodes employées ne permettent pas de traiter le cas sans bord. Lorsque $\partial\Sigma = \emptyset$, on raisonne par l'absurde en supposant que ρ n'est pas cyclique, on exhibe un sous-groupe fini de $\rho(\mathcal{B}_n)$ et on montre que son cardinal dépasse le cardinal théorique maximal d'un sous-groupe fini de $\mathcal{Mod}(\Sigma)$.

Le premier paragraphe présente quelques résultats sur les relations dans $\rho(\mathcal{B}_n)$ utiles pour minorer le cardinal de certains sous-groupes de $\rho(\mathcal{B}_n)$. Les deuxième et troisième paragraphes (8.2 et 8.3) sont consacrés à la démonstration du théorème dans les cas respectivement des morphismes périodiques et des morphismes pseudo-Anosov.

8.1 Cardinaux de sous-groupes abéliens de $\rho(\mathcal{B}_n)$

Notations 8.3.

- Soit φ un morphisme de \mathcal{B}_n dans un groupe qu'on ne précise pas. Pour tout élément ξ dans \mathcal{B}_n , on notera $\xi = \varphi(\xi)$.

- Pour tout entier positif pair N , notons $\text{Imp}(N) = \{1, 3, \dots, N-1\}$ l'ensemble des entiers positifs impairs inférieurs à N . Notons $r = \frac{N}{2}$. Ainsi $\text{Imp}(n)$ contient les r premiers entiers impairs.
- Soit \mathcal{L}_n le sous-groupe abélien libre $\langle \tau_i, i \in \text{Imp}(n) \rangle_{\mathcal{B}_n}$ de \mathcal{B}_n .

Le groupe \mathcal{L}_n est isomorphe à \mathbb{Z}^r . Le but de ce paragraphe est d'étudier la structure algébrique du groupe abélien $\varphi(\mathcal{L}_n)$, c'est-à-dire d'étudier la structure des quotients de \mathcal{L}_n , cf. le lemme 8.5, puis de calculer le cardinal de $\varphi(\mathcal{L}_n)$, cf. le lemme 8.7. Commençons par énoncer un cas élémentaire.

Lemme 8.4. *S'il existe deux entiers distincts i et j inférieurs ou égaux à $n-1$ et un entier non nul ℓ tels que $\bar{\tau}_i^\ell = \bar{\tau}_j^\ell$, alors on a :*

$$\bar{\tau}_1^\ell = \bar{\tau}_2^\ell = \dots = \bar{\tau}_{n-1}^\ell.$$

Démonstration. Distinguons les cas selon que $|i-j|_n = 1$ ou $|i-j|_n \geq 2$.

1°) Supposons que $|i-j|_n = 1$, par exemple $j = i+1$. Alors, en faisant agir les puissances de $\bar{\delta}$ sur l'égalité $\bar{\tau}_i^\ell = \bar{\tau}_{i+1}^\ell$, on obtient pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$: $\bar{\tau}_k^\ell = \bar{\tau}_{k+1}^\ell$. D'où la conclusion.

2°) Supposons que $|i-j|_n \geq 2$. Puisque $n \geq 6$, il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $|i-(j+\varepsilon)|_n \geq 2$. Donc :

$$(\bar{\tau}_j \bar{\tau}_{j+\varepsilon} \bar{\tau}_j) \bar{\tau}_i (\bar{\tau}_j \bar{\tau}_{j+\varepsilon} \bar{\tau}_j)^{-1} = \bar{\tau}_i \quad \text{et} \quad (\bar{\tau}_j \bar{\tau}_{j+\varepsilon} \bar{\tau}_j) \bar{\tau}_j (\bar{\tau}_j \bar{\tau}_{j+\varepsilon} \bar{\tau}_j)^{-1} = \bar{\tau}_{j+\varepsilon}.$$

Alors $\bar{\tau}_i^\ell = \bar{\tau}_j^\ell$ implique $\bar{\tau}_i^\ell = \bar{\tau}_{j+\varepsilon}^\ell$, d'où $\bar{\tau}_j^\ell = \bar{\tau}_{j+\varepsilon}^\ell$, et on s'est ramené au cas précédent. \square

Lemme 8.5. *Il existe quatre entiers positifs ou nuls M, m, d, s tels que le groupe $\varphi(\mathcal{L}_n)$ est isomorphe au quotient de \mathcal{L}_n par les trois relations suivantes :*

$$\tau_1^M = \tau_3^M = \dots = \tau_{n-1}^M = 1, \quad \text{R1}(M)$$

$$\tau_1^m = \tau_3^m = \dots = \tau_{n-1}^m, \quad \text{R2}(m)$$

$$(\tau_1 \tau_3 \dots \tau_{2r-1})^d = \tau_1^s. \quad \text{R3}(d, s)$$

Lorsque M est non nul, m et d sont également non nuls et les entiers M, m, d, s vérifient les relations de divisibilité suivantes :

- m divise M ;
- d divise m et m divise s ;
- M divise $(r - \frac{s}{d})m$;

Enfin, $d = 1$ si et seulement si φ est cyclique (c'est-à-dire si $m = 1$).

Remarque. Au paragraphe suivant, on appliquera ce lemme à l'image de ρ où ρ sera un morphisme de \mathcal{B}_n dans un mapping class group. L'entier M sera alors l'ordre de $\rho(\tau_1)$ et l'entier m sera l'ordre de $\rho(\tau_1 \tau_3^{-1})$.

Démonstration.

0°) Avant de commencer, remarquons que si l'on choisit $M = m = d = s = 0$, le quotient de \mathcal{L}_n par $(\text{R1}(0), \text{R2}(0), \text{R3}(0, 0))$ est égal à \mathcal{L}_n .

1°) Montrons que toute relation vérifiée dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$ provient de la combinaison d'un nombre a priori indéterminé de relations du type $\text{R1}(M), \text{R2}(m), \text{R3}(d, s)$ où M, m, d, s sont des entiers a priori quelconques.

Compte tenu du fait que \mathcal{L}_n est abélien, toute relation dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$ s'écrit sous la forme :

$$\bar{\tau}_1^{k_1} \bar{\tau}_3^{k_3} \dots \bar{\tau}_{n-1}^{k_{n-1}} = 1, \quad (1)$$

où les k_i , $i \in \text{Imp}(n)$, sont r entiers non tous nuls. Partons d'une telle relation R. On va montrer que cette relation R est équivalente à un ensemble de relations du type R1(M), R2(m), R3(d, s) où M, m, d, s sont des entiers quelconques. On distingue trois cas : a), b) et c) ci-dessous.

a) Si les k_i sont tous nuls sauf un, par exemple s'il s'agit de k_1 , on a la relation $\bar{\tau}_1^{k_1} = 1$, et par conjugaison, on obtient $\bar{\tau}_i^{k_1} = 1$ pour tout $i \in \text{Imp}(n)$: c'est la relation R1(k_1).

b) Si les k_i sont tous égaux, cette relation est R3($k_1, 0$).

c) Dans les autres cas, considérons les différences $|k_i - k_j|$, $i, j \in \text{Imp}(n)$. Elles ne sont pas toutes nulles. Supposons par exemple que $k_1 - k_3 \neq 0$. Alors après avoir conjugué (1) par $\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1$, on obtient :

$$\bar{\tau}_3^{k_1} \bar{\tau}_1^{k_3} (\bar{\tau}_5^{k_5} \dots \bar{\tau}_{n-1}^{k_{n-1}}) = 1, \quad (2)$$

et en rapprochant (1) et (2) :

$$\bar{\tau}_1^{k_1} \bar{\tau}_3^{k_3} = \bar{\tau}_3^{k_1} \bar{\tau}_1^{k_3}, \quad (3)$$

d'où $\bar{\tau}_1^{k_1 - k_3} = \bar{\tau}_3^{k_1 - k_3}$, donc d'après le lemme 8.4, on a :

$$\bar{\tau}_1^{|k_1 - k_3|} = \bar{\tau}_3^{|k_1 - k_3|} = \dots = \bar{\tau}_{n-1}^{|k_1 - k_3|}. \quad (4)$$

On fait de même pour tous les couples $(i, j) \in \text{Imp}(n)^2$, $i \neq j$. Soit p le pgcd de $\{|k_i - k_j|, i, j \in \text{Imp}(n)\}$. On obtient la relation (5) égale à R2(p) :

$$\bar{\tau}_1^p = \bar{\tau}_2^p = \dots = \bar{\tau}_{n-1}^p. \quad (5)$$

Pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, la division euclidienne de k_i par p fournit deux entiers q_i et k'_i tels que $k_i = q_i p + k'_i$ où $0 \leq k'_i < p$. Puisque les k_i , $i \in \text{Imp}(n)$, diffèrent les uns les autres d'un multiple de p , les k'_i , $i \in \text{Imp}(n)$, sont tous égaux. Appelons k' cette valeur commune. Compte tenu de la relation (5), la relation R donnée par (1) est équivalente à :

$$\bar{\tau}_1^{k'} \bar{\tau}_3^{k'} \dots \bar{\tau}_{n-1}^{k'} = \bar{\tau}_1^{(-p \sum q_i)}. \quad (6)$$

Dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$, cette relation (6) est équivalente à R1($-p \sum q_i$) si $k' = 0$, et est équivalente à R3($k', -p \sum q_i$) sinon. Finalement, la relation R donnée par (1) découle des relations (5) et (6). Donc elle découle de l'ensemble des relations R2(p) et R1($-p \sum q_i$) si $k' = 0$, ou à l'ensemble des relations R2(p) et R3($k', -p \sum q_i$) si $k' \neq 0$. Ceci achève la preuve du 1°).

2°) Montrons maintenant qu'il existe quatre entiers M, m, d, s tels que $\varphi(\mathcal{L}_n)$ soit isomorphe au quotient de \mathcal{L}_n par les trois relations R1(M), R2(m) et R3(d, s).

Définissons M, m, d, s ainsi :

$$E_1 = \{ k \in \mathbb{N}^* \mid \bar{\tau}_1^k = 1 \} \text{ et } M = \begin{cases} \min(E_1) \text{ si } E_1 \neq \emptyset \\ 0 \text{ si } E_1 = \emptyset, \end{cases}$$

$$E_2 = \{ k \in \mathbb{N}^* \mid \bar{\tau}_1^k = \bar{\tau}_3^k \} \text{ et } m = \begin{cases} \min(E_2) \text{ si } E_2 \neq \emptyset \\ 0 \text{ si } E_2 = \emptyset, \end{cases}$$

$$E_3 = \{ k \in \mathbb{N}^* \mid (\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_3 \dots \bar{\tau}_{n-1})^k \in \langle \bar{\tau}_1 \rangle \} \text{ et } d = \begin{cases} \min(E_3) \text{ si } E_3 \neq \emptyset \\ 0 \text{ si } E_3 = \emptyset, \end{cases}$$

s est choisi de façon quelconque dans $\{ k \in \mathbb{N}^* \mid (\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_3 \dots \bar{\tau}_{n-1})^d = \bar{\tau}_1^k \}$.

Alors par définition de M, m, d et s , les trois relations R1(M), R2(m) et R3(d, s) sont vérifiées dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$. D'après le 1°), toute relation R découle des relations du type R1(M), $M \in \mathbb{Z}$, R2(m), $m \in \mathbb{Z}$ et R3(d, s), $d, s \in \mathbb{Z}$, qui ont lieu dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$. Montrons donc que toute relation du type R1, R2 ou R3 vérifiée dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$ résulte des trois relations R1(M), R2(m) et R3(d, s).

- Si R est du type R1. Soit M' un entier non nul tel que la relation $R1(M')$ soit vérifiée dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$. Alors E_1 est non vide, donc M est non nul. Or la réunion des deux relations $R1(M)$ et $R1(M')$ impliquent la relation $R1(M \wedge M')$, où $a \wedge b$ désigne le pgcd entre a et b . Cependant, par définition de M , on a $M \wedge M' \geq M$, donc M divise M' et par conséquent, $R1(M)$ implique $R1(M')$.
- Si R est du type R2. De même, toute relation du type $R2(m')$ où m' est un entier non nul est induite par $R2(m)$.
- Si R est du type R3. S'il existe deux entiers non nuls d' et s' avec $d' \neq 0$ tels que $R3(d', s')$ ait lieu dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$, alors E_3 est non vide, donc d est non nul et la conjonction de $R3(d', s')$ et $R3(d, s)$ induit $R3(kd' + \ell d, ks' + \ell s)$, pour tous entiers k et ℓ . Choisissons k et ℓ tels que $kd' + \ell d = d' \wedge d$. Par définition de d , $d \leq (d' \wedge d)$, donc $d = (d' \wedge d)$ et d divise d' . Soit p l'entier d'/d . Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} R3(d, s) \\ R3(d', s') \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} R3(d, s) \\ R3(pd, ps) \\ R3(pd, s') \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} R3(d, s) \\ R3(pd, ps) \\ R1(|ps - s'|) \end{array} \right\}$$

Or, à nouveau, la définition de M implique que $|ps - s'|$ est un multiple de M . Donc $R3(d', s')$ découle des trois relations $R1(M)$, $R2(m)$ et $R3(d, s)$.

3°) Soient M, m, d et s les entiers définis au 2°). D'après le 2°), $\varphi(\mathcal{L}_n)$ est isomorphe au groupe \mathcal{L}_n quotienté par les trois relations $R1(M)$, $R2(m)$, $R3(d, s)$. Montrons que si M est non nul, alors m et d sont non nuls également, puis déterminons les relations de divisibilité qui lient ces quatre entiers.

- Si M est non nul, alors $R1(M)$ implique $R2(M)$ et $R3(M, 0)$, donc par définition de m et d , il vient que m et d sont non nuls.
- Puisque $R1(M)$ implique $R2(M)$, les relations $R2(M)$ et $R2(m)$ coexistent dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$, donc $R2(M \wedge m)$ aussi est vérifiée. Alors, par définition de m , m est inférieur ou égal à $M \wedge m$, donc on a $m = M \wedge m$, donc m divise M .
- De même, la relation $R2(m)$ implique $R3(m, rm)$. Or $R3(m, rm)$ et $R3(d, s)$ impliquent une troisième relation $R3(u, v)$ où $u = m \wedge d$, et v est un entier déterminé par r, m, d et s . Mais par définition de d , d est inférieur ou égal à u , donc d divise m .
- Quant à l'entier s présent dans $R3(d, s)$, on a vu au cours du 1°) que $R3(d, s)$ implique $R2(s)$, donc m divise s .
- Il nous reste à montrer que M divise $(r - \frac{s}{d})m$. Partons de la relation $R3(d, s)$ dans laquelle on remplace $\bar{\tau}_1^s$ par $\bar{\tau}_1^{kd}$ où $k = \frac{s}{d}$. On obtient :

$$[(\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_5 \dots \bar{\tau}_{n-1}) \bar{\tau}_1^{-k}]^d = 1, \quad (7)$$

puis :

$$[(\bar{\tau}_3 \bar{\tau}_1^{-1})(\bar{\tau}_5 \bar{\tau}_1^{-1}) \dots (\bar{\tau}_{n-1} \bar{\tau}_1^{-1}) \bar{\tau}_1^{(r-k)}]^d = 1. \quad (8)$$

Donc, puisque m est un multiple de d :

$$[(\bar{\tau}_3 \bar{\tau}_1^{-1})(\bar{\tau}_5 \bar{\tau}_1^{-1}) \dots (\bar{\tau}_{n-1} \bar{\tau}_1^{-1}) \bar{\tau}_1^{(r-k)}]^m = 1, \quad (9)$$

or d'après $R2(m)$, pour tout $i \in \text{Imp}(n) \setminus \{1\}$, on a $(\bar{\tau}_i \bar{\tau}_1^{-1})^m = 1$. Donc (9) implique :

$$\bar{\tau}_1^{(r-k)m} = 1. \quad (9)$$

Autrement dit, $R1((r - k)m)$ a lieu dans $\varphi(\mathcal{L}_n)$. Alors comme avant, par définition de M , on en déduit que M divise $(r - k)m$.

4°) Montrons que φ est cyclique si et seulement si $d = 1$.

Si φ est cyclique, alors R2(1) est vrai, donc R3(1, r) aussi. Inversement, si $d = 1$, montrons que $m = 1$. Si $d = 1$, en notant $\xi = \tau_1^s$ on a :

$$\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_5 \dots \bar{\tau}_{n-1} = \bar{\xi}, \quad (10)$$

d'où :

$$\bar{\tau}_1^{-1} \bar{\tau}_3^{-1} = \bar{\tau}_5 \dots \bar{\tau}_{n-1} \bar{\xi}^{-1}. \quad (11)$$

Rappelons que $\bar{\xi} = \bar{\tau}_1^s$, or m divise s , donc $\bar{\xi}$ est un multiple de $\bar{\tau}_1^m$. Mais d'après la relation R2(m) et le lemme 8.4, on a $\bar{\tau}_1^m = \bar{\tau}_2^m = \dots = \bar{\tau}_{n-1}^m$, donc $\bar{\tau}_1^m$ est central dans $\varphi(\mathcal{B}_n)$, donc $\bar{\xi}$ est central dans $\varphi(\mathcal{B}_n)$. En reprenant l'égalité (11), il vient que $\bar{\tau}_2$ commute avec le membre de droite, donc $\bar{\tau}_2$ commute avec le membre de gauche et on obtient :

$$\bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1^{-1} \bar{\tau}_3^{-1} = \bar{\tau}_1^{-1} \bar{\tau}_3^{-1} \bar{\tau}_2,$$

d'où

$$\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1^{-1} = \bar{\tau}_3^{-1} \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3,$$

or

$$\bar{\tau}_3^{-1} \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_2^{-1},$$

donc

$$\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1^{-1} = \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_2^{-1},$$

et en conjuguant par $\bar{\delta}$:

$$\bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_2^{-1} = \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_4 \bar{\tau}_3^{-1},$$

d'où

$$\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1^{-1} = \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_4 \bar{\tau}_3^{-1},$$

alors

$$\bar{\tau}_2 = (\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1^{-1}) \bar{\tau}_1 (\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_1^{-1})^{-1} = (\bar{\tau}_3 \bar{\tau}_4 \bar{\tau}_3^{-1}) \bar{\tau}_1 (\bar{\tau}_3 \bar{\tau}_4 \bar{\tau}_3^{-1})^{-1} = \bar{\tau}_1,$$

donc $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_1$. Donc φ est cyclique. \square

Définition 8.6 ($\mathcal{L}_n(M, m, d, s)$).

Pour tout quadruplet d'entiers M, m, d, s , dès que cette définition a un sens (i.e. lorsque m est un multiple de d et M est un multiple de m , en vertu du lemme 8.5), notons $\mathcal{L}_n(M, m, d, s)$ le groupe $\langle \tau_i, i \in \text{Imp}(n) \rangle$ quotienté par les relations (R1(M)), (R2(m)), (R3(d, s)). Par exemple, $\mathcal{L}_n(0, 0, 0, 0) \cong \mathbb{Z}^r$ et $\mathcal{L}_n(M, M, M, rM) \cong (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^r$.

Lemme 8.7 (Cardinal de $\mathcal{L}_n(M, m, d, s)$).

Pour tous $M > 0, m \geq 2$, et d et s quelconques, le cardinal de $\mathcal{L}_n(M, m, d, s)$ est égal à qdm^{r-1} où $q = \frac{M}{m}$ et $r = \frac{n}{2}$.

Démonstration. Le groupe $\mathcal{L}_n(0, 0, 0, 0)$ est engendré par :

$$\tau_1, \tau_3, \tau_5, \dots, \tau_{n-3}, \tau_{n-1}. \quad (1)$$

Posons $u_i = \tau_i \tau_1^{-1}$ pour tout $i \in \text{Imp}(n) \setminus \{1\}$, posons $k = \frac{s}{d}$ (k est un entier car d'après le lemme 8.5, d divise m qui divise s), puis posons $w = (u_3 u_5 \dots u_{n-3} u_{n-1}) \tau_1^{(r-k)}$. Par un changement de variables, on passe de l'ensemble (1) engendrant $\mathcal{L}_n(0, 0, 0, 0)$ à l'ensemble (2) ci-dessous engendrant encore $\mathcal{L}_n(0, 0, 0, 0)$:

$$\tau_1, u_3, u_5, \dots, u_{n-3}, w. \quad (2)$$

Par ce même changement de variables, la relation R1(M) est équivalente à :

$$\tau_1^M = 1, u_3^M = 1, u_5^M = 1, \dots, u_{n-3}^M = 1, w^M = 1. \quad (3)$$

Notons $\xi \mapsto \bar{\xi}$ le morphisme canonique de $\mathcal{L}_n(0, 0, 0, 0)$ dans $\mathcal{L}_n(M, M, M, rM)$, le quotient de $\mathcal{L}_n(0, 0, 0, 0)$ par R1(M). Dans $\mathcal{L}_n(M, M, M, rM)$, compte-tenu du fait que d'après le lemme 8.5, on a M divise $(r - k)m$, il vient que

$$\bar{w}^m = (\bar{u}_3 \bar{u}_5 \dots \bar{u}_{n-3} \bar{u}_{n-1})^m \bar{\tau}_1^{(r-k)m} = (\bar{u}_3 \bar{u}_5 \dots \bar{u}_{n-3} \bar{u}_{n-1})^m,$$

donc la relation R2(m) dans $\mathcal{L}_n(M, M, M, rM)$ est équivalente à :

$$\bar{u}_3^m = 1, \bar{u}_5^m = 1, \dots, \bar{u}_{n-3}^m = 1, \bar{w}^m = 1. \quad (4)$$

Enfin, toujours dans $\mathcal{L}_n(M, M, M, rM)$, la relation R3(d, s) est : $(\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_3 \dots \bar{\tau}_{n-1})^d = \bar{\tau}_1^s$. Remplaçons τ_1^s par τ_1^{kd} , la relation R3(d, s) est équivalente à $[(\tau_1 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_5 \dots \bar{\tau}_{n-1}) \bar{\tau}_1^{-k}]^d = 1$, puis à

$$[(\bar{\tau}_3 \bar{\tau}_1^{-1})(\bar{\tau}_5 \bar{\tau}_1^{-1}) \dots (\bar{\tau}_{n-1} \bar{\tau}_1^{-1}) \bar{\tau}_1^{(r-k)}]^d = 1,$$

donc la relation R3(d, s) dans $\mathcal{L}_n(M, M, M, rM)$ est équivalente à :

$$\bar{w}^d = 1. \quad (5)$$

Finalement, puisque m divise M et puisque d divise m , l'ensemble des relations R1(M), R3(m) et R3(d, s) est équivalent dans $\mathcal{L}_n(0, 0, 0, 0)$ à :

$$\tau_1^M = 1, u_3^m = 1, u_5^m = 1, \dots, u_{n-3}^m = 1, w^d = 1. \quad (6)$$

On en déduit que le groupe $\mathcal{L}_n(M, m, d, s)$ est le groupe abélien dont une présentation par générateurs et relations est obtenue en rassemblant les lignes (2) et (6). On en déduit que $\mathcal{L}_n(M, m, d, s)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{r-2} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Il est donc de cardinal $Mm^{r-2}d = qdm^{r-1}$ où $q = \frac{M}{m}$. \square

8.2 Morphismes périodiques de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$, $b \geq 0$

La première proposition traite le cas à bord ($\Sigma = \Sigma_{g,b}$ avec $b > 0$). Le reste de ce paragraphe est consacré au cas sans bord ($b = 0$), plus délicat. Pour tout morphisme ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ et pour tout $i \leq n-1$, on note $A_i = \rho(\tau_i)$.

Proposition 8.8 (Les morphismes périodiques de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$, $b > 0$, sont cycliques).
Tout morphisme périodique ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b > 0$ est cyclique.

Démonstration. Soit ρ un morphisme périodique de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$. Remarquons que les mapping classes A_i pour tout $i \leq n-1$ sont conjuguées. Elle sont donc périodiques de même ordre. Appelons m cet ordre.

Puisque le bord de Σ est non vide, d'après le lemme 3.19, A_1 et A_4 engendrent un groupe cyclique que l'on note Γ . Tout générateur de Γ est un produit de puissances de A_1 et A_4 , donc Γ est un groupe cyclique d'ordre m . Or les sous-groupes de Γ engendrés d'une part par A_1 et d'autre part par A_4 sont également d'ordre m , donc A_1 et A_4 engendrent chacun indépendamment Γ . Ainsi, dans \mathcal{G} , deux générateurs standards quelconques qui commutent engendrent chacun le même groupe cyclique. Donc A_2 engendre le même groupe cyclique que A_4 , c'est-à-dire le même groupe cyclique que A_1 . En particulier A_2 et A_1 commutent. Or A_2 et A_1 vérifient aussi une relation de tresses, donc finalement $A_1 = A_2$. Alors, d'après le lemme 5.2, ρ est cyclique. \square

Proposition 8.9 (Les morphismes périodiques de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Mod}(\Sigma_{g,0})$ sont cycliques).
Soit n un entier supérieur ou égal à 6 et Σ la surface fermée $\Sigma_{g,0}$ telle que $g \leq \frac{n}{2}$. Tout morphisme périodique ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Mod}(\Sigma)$ est cyclique.

Rappelons un lemme classique en théorie des groupes finis :

Lemme 8.10. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 5, les seuls quotients de \mathfrak{S}_n sont $\{1\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et \mathfrak{S}_n .*

Démonstration. Soit Q un groupe quotient de \mathfrak{S}_n par un sous-groupe distingué D . Puisque D est distingué dans \mathfrak{S}_n , $D \cap \mathfrak{A}_n$ est distingué dans le groupe alterné \mathfrak{A}_n , mais \mathfrak{A}_n est simple, donc $D \cap \mathfrak{A}_n$ est l'un de deux groupes $\{1\}$ ou \mathfrak{A}_n . Alors si $D \cap \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n$, il vient $D \in \{ \mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_n \}$, puis $Q \in \{ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{1\} \}$. Et si $D \cap \mathfrak{A}_n = \{1\}$, alors la restriction à D de la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est de noyau $D \cap \mathfrak{A}_n$, donc est injective, donc $D = \{1\}$ ou D est un groupe à deux éléments : $\{1, a\}$. Or D est distingué dans \mathfrak{S}_n donc les conjugués de a sont égaux à a , autrement dit, a est central. Mais le centre de \mathfrak{S}_n est trivial, donc D n'est pas un groupe à deux éléments. Reste le cas $D = \{1\}$ qui implique $Q = \mathfrak{S}_n$. \square

Nous pouvons maintenant attaquer la démonstration de la proposition 8.9.

Démonstration de la proposition 8.9. On raisonne par l'absurde. Soit ρ un morphisme périodique que l'on suppose non cyclique. On distingue les cas, selon les ordres de A_1 et de $A_3A_1^{-1}$ (l'ordre de $A_3A_1^{-1}$ est différent de 1 puisque ρ n'est pas cyclique).

1°) **Cas où A_1 est d'ordre 2.**

Si pour tout $i \leq n-1$, la mapping class A_i est d'ordre 2, alors $\rho(\mathcal{B}_n)$ est isomorphe à un quotient du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Or le seul quotient non trivial de \mathfrak{S}_n avec $n \geq 6$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'après le lemme 8.10, mais on suppose que ρ n'est pas cyclique, donc $\rho(\mathcal{B}_n)$ est isomorphe au groupe \mathfrak{S}_n . En particulier, $\rho(\mathcal{B}_n)$ est fini, de cardinal :

$$n! = (n-1)! \times n \geq 5! \times n = 120n \geq 240g.$$

Or d'après le corollaire 3.26, le cardinal d'un sous-groupe fini de $\mathcal{M}od(\Sigma)$ est majoré par $42|\chi(\Sigma)| = 84g - 84$, d'où une contradiction.

2°) **Cas où A_1 n'est pas d'ordre 2, mais $A_3A_1^{-1}$ est d'ordre 2.**

Si $(A_3A_1^{-1})^2 = 1$, alors $A_3^2 = A_1^2$, donc d'après le lemme 8.4, on a $A_1^2 = A_2^2 = \dots = A_{n-1}^2$. Soit \mathcal{Z} le centralisateur $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}od(\Sigma)}(A_1^2)$ de A_1^2 dans $\mathcal{M}od(\Sigma)$ et soit p le morphisme canonique de \mathcal{Z} dans $\mathcal{Z}/\langle A_1^2 \rangle$. Remarquons que $\rho(\mathcal{B}_n)$ est inclus dans \mathcal{Z} , donc on peut considérer le morphisme $p \circ \rho$ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Z}/\langle A_1^2 \rangle$. Il n'est pas cyclique, car $A_3A_1^{-1}$ n'est pas une puissance de A_1^2 : en effet, s'il existait un entier k tel que $A_3 = A_1^{(1+2k)}$, par conjugaison, on aurait $A_5 = A_1^{(1+2k)}$, donc $A_3 = A_5$, mais c'est absurde car ρ n'est pas cyclique. Ainsi, le morphisme $p \circ \rho$ n'est pas cyclique, mais $p \circ \rho(\tau_1^2) = p(A_1^2) = 1$. Alors, comme on l'a vu au 1°), $p \circ \rho(\mathcal{B}_n)$ est isomorphe au groupe \mathfrak{S}_n et donc contient au moins 240g éléments. Or $\rho(\mathcal{B}_n)$ est une extension centrale de $p \circ \rho(\mathcal{B}_n)$ par le groupe fini $\langle A_1^2 \rangle$:

$$1 \rightarrow \langle A_1^2 \rangle \rightarrow \rho(\mathcal{B}_n) \xrightarrow{p} p \circ \rho(\mathcal{B}_n) \rightarrow 1.$$

Donc $\rho(\mathcal{B}_n)$ est un groupe fini qui contient au moins 480g éléments. Comme au 1°), ceci est absurde.

3°) **Cas où A_1 est d'ordre $M \geq 3$ et où $A_3A_1^{-1}$ est d'ordre m avec $3 \leq m \leq M$.**

D'après le théorème de Kerckhoff (cf. 3.15), le groupe abélien $\langle A_i, i \in \text{Imp}(n) \rangle$ étant fini, il existe une métrique hyperbolique g sur Σ et un morphisme injectif de $\langle A_i, i \in \text{Imp}(n) \rangle$ dans $\text{Isom}(\Sigma; g)$. Notons \mathcal{F} son image et \bar{A}_i l'image de A_i pour tout $i \in \text{Imp}(n)$. Rappelons que l'on suppose que ρ n'est pas cyclique, donc $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_3$. Nous allons montrer que l'action de \mathcal{F} sur les points de Σ est libre, car si un élément de \mathcal{F} avait un point fixe dans Σ , il en aurait automatiquement trop en regard du corollaire 3.22. On conclura en montrant que si les éléments

de \mathcal{F} sont sans points fixes, l'inégalité liant $\chi(\Sigma)$ et $\chi(\Sigma/\langle\mathcal{F}\rangle)$ donnée par le lemme 3.20 ne peut être satisfaite, d'où la contradiction.

a) Montrons que l'action de \mathcal{F} sur Σ est libre.

Soit x un point de Σ et soit $\text{Stab}(x)$ le sous-groupe de \mathcal{F} qui fixe le point x . Supposons que $\text{Stab}(x)$ ne soit pas réduit à $\{1\}$. Rappelons que deux isométries qui fixent un même point et qui ont la même différentielle en ce point sont égales (cf. le lemme 3.16). Or la différentielle d'une isométrie en un point fixe est une rotation. On en déduit que $\text{Stab}(x)$ est un groupe cyclique. Soit G une isométrie engendrant $\text{Stab}(x)$, soit M' son ordre, compris (au sens large) entre 2 et M car d'une part G n'est pas l'identité, d'autre part G appartient au groupe abélien \mathcal{F} engendré par des éléments d'ordre M . Nous allons compter le nombre ℓ de points fixes de G . D'une part, d'après le corollaire 3.22, nous avons :

$$\ell \leq 2 + \frac{2g}{M' - 1}. \quad (1)$$

D'autre part, si G commute avec une autre isométrie G' , alors l'image par G' de tout point fixe de G est encore un point fixe de G . Puisque le groupe \mathcal{F} est abélien, l'ensemble des points fixes de G contient l'orbite de x par le groupe \mathcal{F} , donc :

$$|\text{Orb}(x)| \leq \ell, \quad (2)$$

où $\text{Orb}(x)$ l'orbite de x . Par définition de \mathcal{F} et d'après le lemme 8.5, il existe quatre entiers M' , m' , d et s tels que \mathcal{F} soit isomorphe à $\mathcal{L}_n(M', m', d, s)$. Or puisque par hypothèse, M est l'ordre de A_1 et m est l'ordre de $A_3A_1^{-1}$, on a $M' = M$ et $m' = m$. Donc \mathcal{F} est isomorphe à $\mathcal{L}_n(M, m, d, s)$ et d'après le lemme 8.7, \mathcal{F} est de cardinal $qd(m)^{r-1}$ où $q = \frac{M}{m}$ et $r = \frac{n}{2}$. On peut alors calculer le cardinal de l'orbite de x :

$$|\text{Orb}(x)| = \frac{|\mathcal{F}|}{|\text{Stab}(x)|} = \frac{qd(m)^{r-1}}{M'}. \quad (3)$$

En rassemblant (1), (2) et (3), on obtient :

$$\frac{qd(m)^{r-1}}{M'} = |\text{Orb}(x)| \leq \ell \leq 2 + \frac{2g}{M' - 1}. \quad (4)$$

En multipliant tout par $\frac{M'}{q}$, on obtient :

$$d(m)^{r-1} \leq 2\frac{M'}{q} + 2g\frac{1}{q}\frac{M'}{M' - 1}. \quad (5)$$

Or, $\frac{M'}{q} \leq \frac{M}{q} = m$, donc on peut majorer $\frac{M'}{q}$ par m . On majore g par r , $\frac{1}{q}$ par 1, et $\frac{M'}{M' - 1}$ par 2. Alors (5) devient :

$$d(m)^{r-1} \leq 2m + 4r, \text{ avec } \begin{cases} r = \frac{n}{2} \geq 3, \\ d \geq 2 \text{ et } d \text{ divise } m, \text{ d'après le lemme 8.5,} \\ m \geq 3 \text{ par hypothèse.} \end{cases} \quad (6)$$

Lorsque $m = 3$ on a $d = 3$, donc (6) devient :

$$3^r \leq 6 + 4r, \quad (7)$$

mais cette équation n'est jamais vérifiée pour $r \geq 3$ (pour $r = 3$, on obtient $27 \leq 6 + 12$ qui est absurde et pour $r > 3$, c'est encore plus flagrant). Lorsque $m \geq 4$, reprenons (6) en majorant à droite $4r$ par mr , en simplifiant par m , puis en minorant à gauche m par 4 et d par 2. On obtient :

$$2 \times 4^{(r-2)} \leq 2 + r, \quad (8)$$

qui n'est pas vérifiée pour $r = 3$ et encore moins pour $r > 3$. Ainsi, il était absurde de supposer que $\text{Stab}(x) \neq \{1\}$. Donc l'action de \mathcal{F} sur Σ est libre.

b) Appliquons la formule de Riemann-Hurwitz (cf. le lemme 3.20) au groupe fini \mathcal{F} :

$$\chi(\Sigma) + \sum(|\mathcal{F}| - o(Q_i)) = |\mathcal{F}| \cdot \chi(\Sigma/\mathcal{F}). \quad (9)$$

La surface Σ vérifie $\chi(\Sigma) = 2 - 2g$. Par ailleurs, l'action de \mathcal{F} sur Σ étant libre, il n'y a pas de points de ramification Q_i dans la surface Σ/\mathcal{F} donc $\sum(|\mathcal{F}| - o(Q_i)) = 0$. Donc les deux termes de l'égalité (9) sont strictement négatifs. Or les éléments de \mathcal{F} préservent l'orientation, donc Σ/\mathcal{F} est une surface fermée orientable avec $\chi(\Sigma/\mathcal{F}) \leq -2$. Mais l'ordre de \mathcal{F} est de $qd(m)^{r-1}$ avec $q \geq 1$, $d \geq 2$, $m \geq 2$, $r \geq g$, donc $|\mathcal{F}| \geq 2^g$, donc l'égalité (9) implique $2 - 2g \leq 2^g(-2)$, i.e. :

$$g \geq 1 + 2^g, \text{ avec } g \geq 0, \quad (10)$$

ce qui est absurde. \square

8.3 Morphismes pseudo-Anosov de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$, $b \geq 0$

Proposition 8.11 (Les morphismes pseudo-Anosov de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ sont cycliques).

Soit n un entier supérieur ou égal à 6 et soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$. Tout morphisme pseudo-Anosov de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est cyclique.

Démonstration. Soit $\rho : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma)$ un morphisme pseudo-Anosov. Pour tout $i \leq n-1$, posons à nouveau $A_i = \rho(\tau_i)$.

1°) La mapping class A_1 est pseudo-Anosov, donc d'après le théorème 3.32, son centralisateur est virtuellement infini cyclique. Or la mapping class A_3 commute avec A_1 , donc il existe deux entiers non nuls p et p' tels que $A_1^{p'} = A_3^p$. En conjuguant cette égalité par $A_3A_4A_3$, on obtient $A_1^{p'} = A_4^p$. Donc $A_3^p = A_4^p$, donc d'après le lemme 8.4 :

$$A_1^p = A_2^p = A_3^p \cdots = A_{n-1}^p. \quad (1)$$

Exploitions ceci, en distinguant les cas selon que $b > 0$ (cf. 2°)) ou $b = 0$ (cf. 3°) - 5°)).

2°) Dans le cas où $b > 0$, on fait une preuve directe. D'après la proposition 5.12, il existe $\tilde{\rho}$, un relèvement de $\rho \in \text{Hom}(\mathcal{B}_n, \mathcal{PMod}(\Sigma))$ dans $\text{Hom}(\mathcal{B}_n, \text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma))$. Pour tout $i \leq n-1$, notons $\tilde{A}_i = \tilde{\rho}(\tau_i)$, de sorte que \tilde{A}_i soit un relevé de A_i . Posons alors $W = \tilde{A}_3\tilde{A}_1^{-1}$. Puisque $A_1^p = A_3^p$, la mapping class W^p est un multitwist le long des courbes de bord. Soit Z la mapping class $(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3)^2$. Alors $Z\tilde{A}_1Z^{-1} = \tilde{A}_3$ et $Z\tilde{A}_3Z^{-1} = \tilde{A}_1$, donc $ZW^pZ^{-1} = W^{-p}$. Or Z et W^p commutent puisque W est central dans $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$, donc on a $W^{2p} = \text{Id}$. Mais $\text{Mod}(\Sigma, \partial\Sigma)$ est sans torsion d'après le lemme 3.17, donc $W = \text{Id}$, donc $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_3$ et $\tilde{\rho}$ est cyclique, donc a fortiori ρ est cyclique.

3°) Dans le cas où $b = 0$, on raisonne par l'absurde et l'on suppose que ρ n'est pas cyclique. Alors, en vertu du lemme 8.4, les A_i , $1 \leq i \leq n-1$, sont deux à deux distincts. Considérons le groupe $\widetilde{\text{Centr}}(A_1^p)$ (cf. définition 3.28 du paragraphe 3.4). D'après (1), $\rho(\mathcal{B}_n) \subset \widetilde{\text{Centr}}(A_1^p)$. Soit ℓ le morphisme associé à A_1^p défini par la proposition 3.30. D'après cette proposition, le cardinal de $\text{Ker}(\ell)$ doit vérifier :

$$|\text{Ker}(\ell)| \leq 6|\chi(\Sigma)|. \quad (2)$$

Or, puisque les A_i , $i \leq n-1$, sont conjugués dans $\widetilde{\text{Centr}}(A_1^p)$, $\ell(A_i)$ est indépendant de $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Donc le groupe engendré $A_jA_k^{-1}$ où $j, k \leq n-1$ est inclus dans $\text{Ker}(\ell)$. On va pourtant montrer qu'il est de cardinal supérieur à $6|\chi(\Sigma)|$, d'où la contradiction.

4°) Supposons que $(A_1A_3^{-1})$ soit d'ordre $p = 2$. Rappelons que l'on suppose que ρ n'est pas cyclique, donc que A_1 et A_3 sont différents. Alors le sous-groupe \mathcal{F} de $\text{Ker}(\ell)$ défini par :

$$\mathcal{F} := \langle A_i A_{n-1}^{-1} ; 1 \leq i \leq n-3 \rangle$$

est isomorphe à un quotient \mathfrak{S}_{n-2} par le morphisme : (12) $\mapsto A_1 A_{n-1}^{-1}$, (23) $\mapsto A_2 A_{n-1}^{-1}$, ..., $(n-3, n-2) \mapsto A_{n-3} A_{n-1}^{-1}$. Cependant, $A_1 \neq A_3$, donc ce quotient n'est pas $\{1\}$ ni $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, lorsque $n \geq 8$, d'après le lemme 8.10, ce quotient est \mathfrak{S}_{n-2} . Lorsque $n = 6$, le seul quotient non banal de \mathfrak{S}_4 (i.e. différent de $\{1\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et \mathfrak{S}_4) est le quotient de \mathfrak{S}_4 par la clôture normale de l'élément (12)(34). L'élément (12)(34) a pour image dans \mathcal{F} l'élément $(A_1 A_5^{-1})(A_3 A_5^{-1})$ qui est égal à $A_1 A_3 A_5^{-2}$, donc égal à $A_1 A_3^{-1}$ car $A_3^{-2} = A_5^{-2}$ d'après (1). Or $A_1 A_3^{-1}$ n'est pas trivial puisque $A_1 \neq A_3$. Donc \mathcal{F} n'est pas isomorphe au sous-groupe non banal de \mathfrak{S}_4 mentionné plus haut, donc même lorsque $n = 6$, \mathcal{F} est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-2} . Donc $\text{Ker}(\ell)$ contient \mathcal{F} qui possède $(n-2)!$ éléments. Lorsque $n \geq 8$, on obtient :

$$|\text{Ker}(\ell)| \geq |\mathcal{F}| = (n-2)! \geq 5!(n-2) > 6(n-2) \geq 6(2g-2) = 6|\chi(\Sigma)|. \quad (3)$$

Or (2) et (3) mènent à une contradiction, c'est la contradiction attendue.

Le cas $n = 6$ implique $|\mathcal{F}| = |\mathfrak{S}_4| = 4! = 24 \geq 6|\chi(\Sigma)|$, car lorsque $n = 6$, $g \leq \frac{n}{2} = 3$, donc $|\chi(\Sigma)| \leq 4$. Cependant $\text{Ker}(\ell)$ contient aussi l'élément $A_{n-2} A_{n-1}^{-1}$ qui est différent de tout élément de \mathcal{F} car \mathcal{F} est dans le centralisateur de A_{n-1} , alors que $A_{n-2} A_{n-1}^{-1}$ n'y est pas. En effet, si $A_{n-2} A_{n-1}^{-1}$ était dans le centralisateur de A_{n-1} , alors A_{n-2} et A_{n-1} commuteraient, or ils vérifient aussi une relation de tresses, donc ils seraient égaux et ρ serait cyclique : absurde. Ainsi $\text{Ker}(\ell)$ contient \mathcal{F} de cardinal $|\mathcal{F}| \geq 6|\chi(\Sigma)|$ et l'élément $A_{n-2} A_{n-1}^{-1}$ n'appartenant pas à \mathcal{F} , donc $|\text{Ker}(\ell)| > 6|\chi(\Sigma)|$, ce qui est absurde : c'est la contradiction attendue.

5°) Supposons que $(A_1 A_3^{-1})$ soit d'ordre $p \geq 3$ et considérons les groupes abéliens \mathcal{H} et \mathcal{H}' définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \langle A_i, i \in \text{Imp}(n) \rangle_{\text{Mod}(\Sigma)} \\ \text{et } \mathcal{H}' &:= \langle A_i A_{n-1}^{-1}, i \in \text{Imp}(n-2) \rangle_{\text{Mod}(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Appliquons le lemme 8.5 à ces deux groupes :

- *Concernant le groupe \mathcal{H} .* Il est clair qu'il existe deux entiers d et s tels que \mathcal{H} soit isomorphe à $\mathcal{L}_n(0, p, d, s)$ où d'après le lemme 8.5, $d \neq 1$, d divise p , et p divise s . De plus, puisque $\ell(A_1) = \dots = \ell(A_{n-1}) > 0$, toutes les relations doivent être homogènes, donc en considérant la relation $\text{R3}(d, s)$, il vient $s = rd$. La relation $\text{R3}(d, s)$ s'écrit alors :

$$\left(\prod_{i \in \text{Imp}(n)} A_i \right)^d = A_1^{rd}, \quad (4)$$

et elle implique :

$$\left(\prod_{i \in \text{Imp}(n-3)} A_i A_{n-1}^{-1} \right)^d = (A_1 A_{n-1}^{-1})^{rd}, \quad (5)$$

- *Concernant le groupe \mathcal{H}' .* Il est clair que \mathcal{H}' est isomorphe à $\mathcal{L}_{n-2}(p, p, d', s')$ où d' et s' sont à déterminer. La relation $(\text{R3}(d', s'))$ s'écrit :

$$\left(\prod_{i \in \text{Imp}(n-3)} A_i A_{n-1}^{-1} \right)^{d'} = (A_1 A_{n-1}^{-1})^{s'}, \quad (6)$$

et elle implique :

$$\left(\prod_{i \in \text{Imp}(n)} A_i \right)^{d'} = A_1^{s'} A_{n-1}^{(rd' - s')}. \quad (7)$$

Or p divise s' d'après le lemme 8.5, donc $A_1^{s'} = A_{n-1}^{s'}$ et (7) devient :

$$\left(\prod_{i \in \text{Imp}(n)} A_i \right)^{d'} = A_{n-1}^{rd'}. \quad (8)$$

Dans (8), par conjugaison, on peut remplacer $A_{n-1}^{rd'}$ par $A_1^{rd'}$. Les égalités (4) et (8) sont à rapprocher, et par définition de d , il vient que d divise d' . Par ailleurs, en comparant (5) et (6), il vient par définition de d' que d' divise d . Ainsi $d' = d$, donc \mathcal{H}' est isomorphe à $\mathcal{L}_{n-2}(p, p, d, s')$ avec, d'après le lemme 8.5 :

$$d \geq 2, d \text{ divise } p. \quad (9)$$

Alors d'après le lemme 8.7, $|\mathcal{H}'| = dp^{r-2}$. Les seuls couples (p, d) respectant (9) et tels que $p < 6$ sont (3,3), (4,2), (4,4) et (5,5). Or si $(p, d) = (4, 2)$, alors r est pair car comme on l'a vu dans les lignes qui précèdent (4), p divise s qui est égal à rd . On recense dans le tableau suivant toutes les valeurs dp^{r-2} pour les couples (p, d) où $p < 6$ en fonction de r , et on minore les valeurs dp^{r-2} pour les couples (p, d) avec $p \geq 6$ en fonction de r .

$r \setminus (p, d)$	(3, 3)	(4, 2)	(4, 4)	(5, 5)	(p, d) avec $p \geq 6$
$r = 3$	9	–	16	25	$dp^{r-2} \geq 2 \times 6 = 12$
$r = 4$	27	32	64	125	$dp^{r-2} \geq 2 \times 6^2 = 72$
$r \geq 5$	$27 \times 3^{r-4}$	$32 \times 4^{r-4}$	$64 \times 4^{r-4}$	$125 \times 5^{r-4}$	$dp^{r-2} \geq 2p^{r-2} = 72 \times 6^{r-4}$

Tableau 1 – Calcul de dp^{r-2} en fonction de d, p, r

D'après le tableau 1, pour tout $r \geq 3$, l'expression dp^{r-2} est minimum lorsque $p = d = 3$ (cf. tableau 1), donc :

$$|\mathcal{H}'| \geq 3^{r-1}. \quad (11)$$

Cependant, $\text{Ker}(\ell)$ contient également l'élément $A_2A_{n-1}^{-1}$, lui aussi d'ordre p . Or $A_2A_{n-1}^{-1}$ ne commute pas avec A_1 (autrement A_2 commuterait avec A_1 , on aurait $A_1 = A_2$ et ρ serait cyclique). Pourtant, \mathcal{H}' est dans le centralisateur de A_1 . Donc $A_2A_{n-1}^{-1}$ n'appartient pas à \mathcal{H}' . De même $(A_2A_{n-1}^{-1})^{-1}$ n'appartient pas à \mathcal{H}' . Or $A_2A_{n-1}^{-1}$ et son inverse sont différents car $p \geq 3$. Alors le groupe $\langle \mathcal{H}' \cup A_2A_{n-1}^{-1} \rangle$ contient l'ensemble suivant

$$\{ H(A_2A_{n-1}^{-1})^k, H \in \mathcal{H}', k \in \{-1, 0, 1\} \},$$

de cardinal $3|\mathcal{H}'|$. Donc $|\text{Ker}(\ell)| \geq 3^r$. Or, pour tout entier de $r \geq 3$, la valeur 3^r est strictement plus grande que $6(2r - 2)$, elle-même supérieure ou égale à $6|\chi(\Sigma)|$. Ainsi :

$$|\text{Ker}(\ell)| > 6|\chi(\Sigma)|. \quad (12)$$

Or (2) et (12) mènent à une contradiction, c'est la contradiction attendue. \square

9 Propriétés des courbes de $\sigma(\mathcal{G})$; les courbes spéciales $\sigma_s(\mathcal{G})$

Rappelons que n est un entier pair supérieur ou égal à 6, Σ est la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$, et ρ est un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ tel que $\sigma_\rho(\mathcal{G}) = \emptyset$. On suppose de plus que ρ n'est pas cyclique, donc d'après le théorème 8.2, $\sigma(\mathcal{G})$ est non vide.

Il sera pratique d'adopter la convention suivante :

Notation 9.1. Pour tout entier k et tout entier d non nul, notons $[k]_d$ le reste de la division euclidienne de k par d . De plus, rappelons que pour alléger les notations, on écrira A_k au lieu de $A_{[k]_n}$, et τ_k au lieu de $\tau_{[k]_n}$.

On suppose de plus que ρ n'est pas cyclique, donc d'après le théorème 8.2, $\sigma(\mathcal{G})$ est non vide. C'est précisément par le biais des systèmes de réduction canoniques $\sigma(A_0), \sigma(A_1), \dots, \sigma(A_{n-1})$, que l'on va étudier A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , et en déduire des renseignements sur ρ .

Cependant, on doit faire face à plusieurs difficultés. Par exemple une courbe de $\sigma(\mathcal{G})$ peut appartenir aux systèmes de réduction canoniques de plusieurs éléments de \mathcal{G} . Dans le cas extrême, il se pourrait a priori que les éléments de \mathcal{G} aient tous le même système de réduction canonique, sans que ρ ne soit cyclique. Une autre difficulté est que a priori, $\sigma(\mathcal{G})$ n'est pas préservé par l'action de \mathcal{B}_n via ρ .

On montrera dans ce chapitre que l'ensemble $\sigma(\mathcal{G})$ admet une partition en deux sous-ensembles notés $\sigma_n(\mathcal{G})$ et $\sigma_s(\mathcal{G})$ qui répondent aux difficultés soulevées : les courbes de $\sigma_n(\mathcal{G})$ sont stables par l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Courb}(\Sigma)$ et sont incluses dans le système de réduction canonique de toutes les mapping classes de \mathcal{G} , tandis que chaque courbe de $\sigma_s(\mathcal{G})$ appartient au contraire au système de réduction canonique d'une seule mapping class de \mathcal{G} .

9.1 Plan du chapitre et résultats démontrés

Les deux premiers paragraphes présentent des résultats techniques essentiels à ce chapitre et qui seront réutilisés dans les chapitres ultérieurs :

- Le paragraphe 9.2 étudie les simplexe de courbes \mathcal{B}_n -stables et démontre la proposition 9.2 suivante (où le terme d'*action cyclique*, récurrent dans la suite de cette thèse, est précisée par la définition 9.10) :

Proposition 9.2 (Toute action de \mathcal{B}_n sur un simplexe de courbes \mathcal{B}_n -stable est cyclique).
Soit \mathcal{A} un simplexe de courbes dans $\text{Courb}(\Sigma)$ stable par l'action de \mathcal{B}_n via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$. Alors les actions de \mathcal{B}_n induite par ρ sur \mathcal{A} , sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ et sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ sont cycliques, i.e. les éléments de $\tau_i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ont les mêmes actions.

- Le paragraphe 9.3 présente l'action du sous-groupe cyclique \mathcal{J} de \mathcal{B}_n engendré par δ sur $\sigma(\mathcal{G})$ où δ est l'élément $\tau_1\tau_2 \dots \tau_{n-1}$ de \mathcal{B}_n , et montre la proposition 9.3 :

Proposition 9.3. *Soit a une courbe de $\sigma(\mathcal{G})$. Alors $\mathcal{J}.a$ contient au maximum n courbes. Le cas limite $|\mathcal{J}.a| = n$ ne peut être atteint que lorsque $\mathcal{J}.a$ n'est pas un simplexe.*

- Au cours des paragraphes 9.4 - 9.5, on s'intéressera aux propriétés susceptibles d'être vérifiées par toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$. A ce sujet, pour toute courbe a , on notera $\text{sp}(a)$ l'ensemble suivant :

$$\text{sp}(a) = \{A \in \mathcal{G} \mid a \in \sigma(A)\}.$$

L'un des buts de ce chapitre est de complètement décrire cette application $\text{sp} : \text{Courb}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{G})$ (l'ensemble des parties de \mathcal{G}) qu'on appellera *le spectre de a* , (cf. paragraphe 9.3). Le paragraphe 9.4 aura pour but de montrer la proposition suivante.

Proposition 9.4. *Toute courbe a appartenant à $\sigma(\mathcal{G})$ vérifie soit toutes les propriétés de gauche (1g) - (6g), soit toutes les propriétés de droite (1d) - (6d).*

$$(1g) \quad I(a, \delta.a) = 0 \quad ; \quad I(a, \delta.a) \neq 0 \quad (1d)$$

$$(2g) \quad |\text{sp}(a)| \geq 2 \quad ; \quad |\text{sp}(a)| = 1 \quad (2d)$$

$$(3g) \quad I(a, \sigma(\mathcal{G})) = 0 \quad ; \quad I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0 \quad (3d)$$

$$(4g) \quad \forall k, \text{sp}(a) \not\subset \{A_k, A_{k+2}\} \quad ; \quad \exists k \mid \text{sp}(a) \subset \{A_k, A_{k+2}\} \quad (4d)$$

$$(5g) \quad |\mathcal{J}.a| < n \quad ; \quad |\mathcal{J}.a| = n \quad (5d)$$

$$(6g) \quad \mathcal{J}.a \text{ est un simplexe} \quad ; \quad \mathcal{J}.a \text{ n'est pas un simplexe} \quad (6d)$$

Cette proposition nous incite à poser les définitions suivantes :

Définition 9.5 (Courbes normales, courbes spéciales).

– Une courbe a appartenant à $\sigma(\mathcal{G})$ sera dite *spéciale* si elle vérifie $I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0$, autrement dit si elle vérifie les assertions de droite de la proposition 9.4. On note $\sigma_s(\mathcal{G})$ l'ensemble des courbes spéciales et on pose $\sigma_s(A) = \sigma_s(\mathcal{G}) \cap \sigma(A)$.

– Une courbe a appartenant à $\sigma(\mathcal{G})$ sera dite *normale* si elle vérifie $I(a, \sigma(\mathcal{G})) = 0$, autrement dit si elle vérifie les assertions de gauche de la proposition 9.4. On note $\sigma_n(\mathcal{G})$ l'ensemble des courbes normales et on pose $\sigma_n(A) = \sigma_n(\mathcal{G}) \cap \sigma(A)$.

Exemple. Soient Σ la surface $\Sigma_{4,2}$ et ρ le morphisme de \mathcal{B}_8 dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ tel que pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$, on ait :

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i} V,$$

où V est une mapping class qui commute avec les T_{a_i} et telle que $\sigma(V) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, où les courbes a_i et les courbes x_k sont celles dessinées sur la figure 58. Dans cet exemple, pour tout i , on a :

$$\sigma(A_i) = \underbrace{\sigma_s(A_i)}_{\{a_i\}} \cup \underbrace{\sigma_n(A_i)}_{\{x_k, 1 \leq k \leq 4\}}.$$

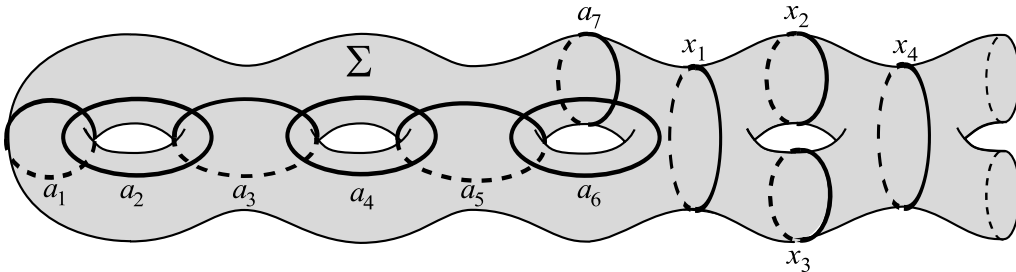


FIG. 58 – Exemple de courbes spéciales et de courbes normales.

- Puis au paragraphe 9.5, on montrera les résultats suivants de stabilité et d'existence :

Proposition 9.6 (Stabilité des courbes spéciales).

- i) L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ est \mathcal{J} -stable.
- ii) Pour tout i , $\sigma_s(A_i)$ est stable par tout élément de $\mathcal{G} \setminus \{A_{i-1}, A_{i+1}\}$.

Proposition 9.7 (Stabilité des courbes normales).

L'ensemble $\sigma_n(\mathcal{G})$ est \mathcal{B}_n -stable et les actions de \mathcal{B}_n via ρ sur $\sigma_n(\mathcal{G})$, sur $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ et sur $\text{Bord}(\Sigma_{\sigma_n(\mathcal{G})})$ sont cycliques.

On savait que le spectre des courbes spéciales était réduit à une courbe. La proposition suivante est une conséquence de la proposition précédente et précise ce qu'il en est pour les courbes normales.

Proposition 9.8 (Spectre des courbes normales).

Le spectre d'une courbe normale est toujours égal à \mathcal{G} .

Proposition 9.9 (Existence des courbes spéciales).

L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ n'est pas vide.

- Enfin au paragraphe 9.6, on rassemblera les résultats des paragraphes précédents concernant les courbes normales et spéciales en la proposition 9.22.

9.2 Action de \mathcal{B}_n sur les simplexes de courbes

Dans ce paragraphe, on montre la proposition suivante. Elle fait intervenir la notion d'*action cyclique* définie ci-après.

Proposition 9.2 (Toute action de \mathcal{B}_n sur un simplexe de courbes \mathcal{B}_n -stable est cyclique).

Soit \mathcal{A} un simplexe de courbes dans $\text{Courb}(\Sigma)$ stable par l'action de \mathcal{B}_n via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$. Alors les actions de \mathcal{B}_n induite par ρ sur \mathcal{A} , sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ et sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ sont cycliques.

Définition 9.10 (Action cyclique).

- Une action d'un groupe G sur un ensemble \mathcal{E} sera dite *cyclique* si le morphisme φ de G dans $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ associé à cette action est tel que le quotient $G/\text{Ker}(\varphi)$ est un groupe cyclique.
- Une *action cyclique sur un ensemble* \mathcal{E} sera une action d'un groupe cyclique (\mathbb{Z} ou l'un de ses quotients) sur \mathcal{E} .
- Une *action cyclique sur un graphe* Γ sera la donnée d'un morphisme de \mathbb{Z} ou l'un de ses quotients dans $\text{Aut}(\Gamma)$. Précisons qu'un *automorphisme* de Γ est un couple de bijections, l'une agissant sur les sommets, l'autre sur les arêtes, tel que les images des extrémités d'une arête soient les extrémités de l'image de cette arête.

Cette définition est compatible avec celle d'*action cyclique de \mathcal{B}_n* dans le mapping class group.

L'existence d'actions cycliques de \mathcal{B}_n nous incite à définir les sous-groupes suivants de \mathcal{B}_n :

Définition 9.11. Il existe un morphisme de \mathcal{B}_n dans \mathbb{Z} appelé *le degré* noté traditionnellement λ défini par $\lambda(\tau_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Soient les sous-groupes suivants de \mathcal{B}_n :

$$\mathcal{F}_n := \langle\langle \tau_i \tau_1^{-1}, 3 \leq i \leq n-1 \rangle\rangle_{\mathcal{B}_n},$$

$$\mathcal{F}_n^* := \langle \tau_i \tau_1^{-1}, 3 \leq i \leq n-1 \rangle_{\mathcal{B}_n}.$$

où $\langle\langle \ \ \ \ \rangle\rangle_{\mathcal{B}_n}$ désigne la clôture normale dans \mathcal{B}_n , de sorte que $\mathcal{F}_n = \text{Ker}(\lambda)$.

La définition de \mathcal{F}_n est justifiée par le lemme suivant. Celle de \mathcal{F}_n^* est justifiée par le fait que \mathcal{F}_n^* est isomorphe au groupe \mathcal{B}_{n-2} tout en étant inclus dans \mathcal{F}_n .

Lemme 9.12. *Etant donné un ensemble \mathcal{E} sur lequel agit \mathcal{B}_n , l'action de \mathcal{B}_n est cyclique si et seulement si l'action restreinte à \mathcal{F}_n est triviale, si et seulement si l'action restreinte à \mathcal{F}_n^* est triviale*

Démonstration. Soit \mathcal{E} un ensemble sur lequel agit \mathcal{B}_n et soit Φ le morphisme $\mathcal{B}_n \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{E})$ associé à cette action. D'après la définition de λ , tout morphisme de \mathcal{B}_n est cyclique si et seulement si son noyau contient $\text{Ker}(\lambda)$. Or \mathcal{F}_n coïncide avec $\text{Ker}(\lambda)$, donc l'action de \mathcal{B}_n dans \mathcal{E} est cyclique si et seulement si le noyau de Φ contient \mathcal{F}_n , autrement dit si et seulement si l'action restreinte à \mathcal{F}_n sur \mathcal{E} est triviale.

De plus, si l'action de \mathcal{F}_n^* sur \mathcal{E} est triviale, alors τ_1 et τ_3 ont la même action sur \mathcal{E} . Alors l'action de \mathcal{B}_n sur \mathcal{E} est donnée par un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\text{Bij}(\mathcal{E})$ qui envoie τ_1 et τ_3 sur la même image, où $\text{Bij}(\mathcal{E})$ est le groupe des bijections de \mathcal{E} . Donc d'après le lemme 5.2, ce morphisme est cyclique, donc l'action de \mathcal{B}_n sur \mathcal{E} est cyclique. La réciproque est évidente. \square

Le résultat principal que l'on utilisera nous permettant de déclarer qu'une action est cyclique est le suivant, dû à Artin.

Proposition 9.13 (Artin, cf. [At3]). *Pour tout entier n supérieur à 5, toute action de \mathcal{B}_n sur un ensemble donné \mathcal{E} ayant strictement moins de n éléments est cyclique, et l'action restreinte à \mathcal{F}_n est triviale.* \square

A l'aide du lemme 9.12 et de la proposition 9.13, on peut démontrer la proposition 9.2.

Démonstration de la proposition 9.2. Rappelons-en l'énoncé. Soit n un entier pair supérieur ou égal à 6, soit Σ une surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$, soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$, et soit \mathcal{A} un simplexe de courbes dans $\text{Courb}(\Sigma)$ stable par l'action de \mathcal{B}_n via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$. On souhaite montrer que les actions induites de \mathcal{B}_n sur \mathcal{A} , sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ et sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ sont cycliques. Pour cela, il suffira de montrer d'après le lemme 9.12 que ces trois actions restreintes à \mathcal{F}_n sont triviales. On commence par montrer que l'action de \mathcal{F}_n sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ est triviale.

1°) *Montrons que l'action de \mathcal{F}_n sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ est triviale.*

Puisque l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve \mathcal{A} , l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Sub}(\Sigma)$ préserve $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$. Considérons donc l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$.

Les sous-surfaces naturellement bordées sont des points fixes de l'action de \mathcal{B}_n . Soit \mathcal{C} l'ensemble des sous-surfaces de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ qui n'ont aucun bord naturel. Pour tout $S \in \mathcal{C}$, on a $\chi(S) = \chi(\text{oub}_{\partial\Sigma}(S))$. Or la somme $\sum_{S \in \mathcal{C}} \chi(\text{oub}_{\partial\Sigma}(S))$ est minorée par $\chi(\Sigma_{g,0}) = 2 - 2g$. De plus, pour tout $S \in \mathcal{C}$, $\chi(\text{oub}_{\partial\Sigma}(S)) \leq -1$, donc le cardinal de \mathcal{C} vérifie $|\mathcal{C}| \leq 2g - 2$, et finalement $|\mathcal{C}| \leq n - 2$. Donc d'après la proposition 9.13, \mathcal{B}_n agit cycliquement sur les surfaces de \mathcal{C} . Finalement, \mathcal{B}_n agit cycliquement sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$. Donc \mathcal{F}_n agit trivialement sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ d'après le lemme 9.12.

2°) *Montrons que l'action de \mathcal{F}_n sur \mathcal{A} est triviale.*

Soit a une courbe de \mathcal{A} . Nous allons discuter de l'action de \mathcal{F}_n sur $\mathcal{B}_n.a$ en fonction du signe de $|\mathcal{F}_n.a| - (n - 2)$. Nous montrerons que dans tous les cas, l'action de \mathcal{F}_n sur $\mathcal{B}_n.a$ est triviale. Cela suffira car \mathcal{A} est une réunion d'orbites de courbes sous l'action de \mathcal{B}_n .

2°) a) *Cas où la courbe a vérifie $|\mathcal{F}_n.a| < n - 2$.*

Soit une courbe c appartenant à $\mathcal{B}_n.a$ et soit γ un élément de \mathcal{B}_n tel que $c = \gamma.a$. Puisque \mathcal{F}_n est distingué dans \mathcal{B}_n , il vient que $\mathcal{F}_n = \{\gamma\varphi\gamma^{-1}, \varphi \in \mathcal{F}_n\}$. Alors on a :

$$|\mathcal{F}_n.c| = |\{\gamma\varphi\gamma^{-1}.c, \varphi \in \mathcal{F}_n\}| = |\{\gamma\varphi.a, \varphi \in \mathcal{F}_n\}| = |\{\varphi.a, \varphi \in \mathcal{F}_n\}| = |\mathcal{F}_n.a| < n - 2. (*)$$

Distinguons deux cas, selon que $n \geq 8$ ou que $n = 6$:

- Lorsque $n \geq 8$, on peut appliquer la proposition 9.13 à l'action de \mathcal{F}_n^* sur $\mathcal{F}_n.c$. En particulier, $\rho(\tau_3\tau_1^{-1})$ et $\rho(\tau_5\tau_1^{-1})$ ont la même action sur les courbes de $\mathcal{F}_n.c$.
- Lorsque $n = 6$, on ne peut pas appliquer la proposition 9.13 à \mathcal{F}_n^* car \mathcal{F}_n^* est isomorphe à un groupe de tresses de rang 4 seulement. On a vu que l'orbite de c sous \mathcal{F}_n contenait au maximum trois éléments d'après (*). Donc l'action de \mathcal{F}_n^* sur $\mathcal{F}_n.c$ est décrite par un morphisme de \mathcal{B}_4 dans \mathfrak{S}_3 . Or un tel morphisme envoie les générateurs standards τ_1, τ_2 et τ_3 de \mathcal{B}_4 sur trois éléments conjugués dans \mathfrak{S}_3 , donc trois transpositions, trois 3-cycles, ou trois fois l'identité. Dans le premier cas, puisque τ_1 et τ_3 commutent, ils sont envoyés sur le même élément ; dans le second cas, le morphisme est cyclique car l'ensemble des 3-cycles dans \mathfrak{S}_3 constitue avec l'identité un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; et dans le troisième cas, le morphisme est trivial. Donc dans tous les cas, les éléments τ_1 et τ_3 ont la même image. En transposant cela au groupe \mathcal{F}_n^* , les mapping classes $\rho(\tau_3\tau_1^{-1})$ et $\rho(\tau_5\tau_3^{-1})$ ont la même action sur $\mathcal{F}_n.c$.

Finalement, pour tout $c \in \mathcal{B}_n.a$ et pour tout entier n pair supérieur ou égal à 6, les mapping classes $\rho(\tau_3\tau_1^{-1})$ et $\rho(\tau_5\tau_3^{-1})$ ont la même action sur $\mathcal{F}_n.c$, donc $\rho(\tau_5\tau_3^{-1})$ fixe chaque courbe de $\mathcal{F}_n.c$. Ceci étant vrai pour tout $c \in \mathcal{B}_n.a$, on en conclut que $\rho(\tau_5\tau_3^{-1})$ fixe chaque courbe de $\mathcal{B}_n.a$. Alors pour tout $\xi \in \mathcal{B}_n$, la mapping class $\rho(\xi\tau_5\tau_3^{-1}\xi^{-1})$ fixe chaque courbe de $\{\xi.(b.a), \beta \in \mathcal{B}_n\}$. Or pour tout $\xi \in \mathcal{B}_n$, on a $\{\xi.(b.a), \beta \in \mathcal{B}_n\} = \mathcal{B}_n.a$. Par ailleurs, la clôture normale de $\tau_5\tau_3^{-1}$ dans \mathcal{B}_n est \mathcal{F}_n , donc on a montré que \mathcal{F}_n agissait trivialement sur $\mathcal{B}_n.a$ via ρ .

2°) b) *Cas où la courbe a vérifie $|\mathcal{F}_n.a| = m \geq n - 2$.*

Soient S et S' les deux sous-surfaces (éventuellement confondues) de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ contenant la courbe a dans leur bord. Puisque l'action de \mathcal{F}_n est triviale sur $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$, l'ensemble de courbes $\mathcal{F}_n.a$ est inclus dans $\text{Bord}(S) \cap \text{Bord}(S')$, donc :

- si $S \neq S'$, S et S' sont deux sous-surfaces recollées le long de au moins m courbes dans Σ donc le recollement est une sous-surface de Σ de genre au moins $m - 1$, donc $g \geq m - 1$,
- et si $S = S'$, alors S est une surface marquée dont le marquage contient m courbes, donc le recollement de S le long de son marquage est une sous-surface de Σ de genre m , donc $g \geq m$,

donc en résumé, $g \geq m - 1$. Or d'une part $g \leq \frac{n}{2}$, d'autre par $m \geq n - 2$. On obtient $\frac{n}{2} \geq n - 3$. Le seul entier $n \geq 6$ possible est $n = 6$. On obtient alors $g = 3$, $m = n - 2 = 4$, $S \neq S'$, et $\text{Bord}(S) \cap \text{Bord}(S')$ est réduit à $\mathcal{F}_n.a$. De plus, tout le genre de Σ est réalisé dans le recollement de S et S' le long des courbes de $\mathcal{F}_n.a$, donc il ne peut pas exister dans $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ un autre couple de sous-surfaces (T, T') tel que $\text{Bord}(T) \cap \text{Bord}(T')$ contienne m courbes de \mathcal{A} . Donc $\mathcal{B}_n.a = \mathcal{F}_n.a$. On peut alors appliquer la proposition 9.13 à l'action de \mathcal{B}_n (un groupe de tresses d'ordre 6) sur $\mathcal{B}_n.a$ (un simplexe de 4 courbes) et en déduire que l'action de \mathcal{F}_n sur $\mathcal{B}_n.a$ est triviale, ce qu'on voulait démontrer.

3°) *Montrons que l'action de \mathcal{F}_n sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ est triviale.*

Soit a une courbe de \mathcal{A} et soient a^+ et a^- les deux bords de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ issus du découpage le long de la courbe a . D'après le 2°), l'action de \mathcal{F}_n sur \mathcal{A} est triviale, donc l'action de \mathcal{F}_n^* sur $\text{Courb}(\Sigma)$ via ρ fixe la courbe a , donc l'action de \mathcal{F}_n^* sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ via ρ préserve $\{a^+, a^-\}$. Or \mathcal{F}_n^* est isomorphe à \mathcal{B}_{n-2} et $n - 2 > 2$, donc d'après la proposition 9.13, l'action de \mathcal{F}_n^* sur $\{a^+, a^-\}$ est cyclique,

donc $\tau_3\tau_1^{-1}$ et $\tau_5\tau_1^{-1}$ ont la même action sur $\{a^+, a^-\}$, donc l'action de $\tau_5\tau_3^{-1}$ sur $\{a^+, a^-\}$ est triviale. Ceci étant vrai pour toute courbe a de l'ensemble \mathcal{A} , $\tau_5\tau_3^{-1}$ agit trivialement sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$. Or l'ensemble de courbes \mathcal{A} étant \mathcal{B}_n -stable, l'action de la clôture normale de $\tau_5\tau_3^{-1}$ dans \mathcal{B}_n (égale à \mathcal{F}_n) sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ est triviale. Donc l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Bord}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ est cyclique. \square

9.3 Particularités de l'action de \mathcal{J} sur \mathcal{G}

Rappelons que n est un entier pair supérieur ou égal à 6, Σ est la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$, et ρ est un morphisme non cyclique de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$.

Définition 9.14 (Le groupe \mathcal{J} et son action sur \mathcal{G}).

Soit δ l'élément $\tau_1\tau_2 \dots \tau_{n-1}$ de \mathcal{B}_n et soit \mathcal{J} le sous-groupe de \mathcal{B}_n engendré par δ . Pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$\delta\tau_i\delta^{-1} = \tau_{i+1}.$$

On en déduit une action de \mathcal{J} sur \mathcal{G} définie ainsi : pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, posons :

$$\delta.A_i = \rho(\delta)A_i\rho(\delta)^{-1} = A_{i+1}.$$

On définit également une action de \mathcal{J} sur $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ en posant pour tout sous-ensemble \mathcal{K} de \mathcal{G} :

$$\delta.\mathcal{K} = \{\delta.A, A \in \mathcal{K}\} = \{\rho(\delta)A\rho(\delta)^{-1}, A \in \mathcal{K}\}.$$

La \mathcal{J} -coloration σ et sp le spectre associé.

Définition 9.15 (\mathcal{J} -coloration et spectre associé).

Une \mathcal{J} -coloration sur un \mathcal{J} -ensemble \mathcal{E} (i.e. un ensemble sur lequel agit le groupe \mathcal{J}) est une application col de \mathcal{G} dans $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ compatible avec les actions de \mathcal{J} sur \mathcal{G} et sur \mathcal{E} , i.e. telle que pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a :

$$\text{col}(\delta.A) = \delta.\text{col}(A).$$

Etant donnée une \mathcal{J} -coloration col, on appelle *spectre* associé à col l'application de \mathcal{E} dans $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ qui à tout $e \in \mathcal{E}$ associe $\{A \in \mathcal{G}, | e \in \text{col}(A)\}$.

Proposition 9.16. *La restriction de l'application σ de \mathcal{G} dans $\text{Courb}(\Sigma)$ qui, à toute mapping class $A \in \mathcal{G}$ associe son système de réduction canonique $\sigma(A) \subset \text{Courb}(\Sigma)$ est une \mathcal{J} -coloration.*

Démonstration. L'application σ est bien une \mathcal{J} -coloration car pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta.\sigma(A) &= \{\delta.a, a \in \sigma(A)\} \\ &= \{\rho(\delta)(a), a \in \sigma(A)\} \\ &= \{a', a' \in \sigma(\rho(\delta)A\rho(\delta)^{-1})\} \\ &= \sigma(\delta.A). \end{aligned}$$

\square

Notation 9.17. Dans ce chapitre, on notera sp le spectre associé à la \mathcal{J} -coloration σ . Ainsi par définition, pour tout $a \in \text{Courb}(\Sigma)$,

$$\text{sp}(a) = \{A \in \mathcal{G} | a \in \sigma(A)\}.$$

En considérant l'action de \mathcal{J} sur \mathcal{G} , $\sigma(\mathcal{G})$ et $\text{Sub}_{\sigma(\mathcal{G})}(\Sigma)$, on montrera le résultat suivant.

Proposition 9.3. *Soit a une courbe de $\sigma(\mathcal{G})$. Alors $\mathcal{J}.a$ contient au maximum n courbes. Le cas limite $|\mathcal{J}.a| = n$ ne peut être atteint que lorsque $\mathcal{J}.a$ n'est pas un simplexe.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition fait appel :

- à un lemme sur les graphes munis d'action cyclique (cf. lemme 9.18),
- à un lemme exposant une première version de la proposition 9.3 (cf. lemme 9.19),
- à un lemme traitant d'un cas particulier (cf. lemme 9.20),
- à un corollaire exposant une deuxième version de la proposition 9.3 (cf. corollaire 9.21).

La démonstration de la proposition 9.3 à proprement dite se trouve page 160.

Lemme 9.18. *Soit Γ un graphe connexe non orienté comportant m arêtes. On suppose qu'il existe une action de \mathbb{Z} sur Γ , compatible avec sa structure de graphe, et qui soit transitive sur l'ensemble des arêtes. Alors le couple graphe-action (Γ, \cdot) est l'un des couples suivants :*

- (a) *Le graphe Γ est constitué de k sommets et m arêtes où k est égal à 2 ou à un diviseur de m (cf. figure 59) :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sommets : } \mathcal{S} = \{P_i; 0 \leq i \leq k-1\}, \\ \text{arêtes : } \mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{m-1}\} \text{ et il existe un entier } p \text{ premier avec } k \text{ (} p = 1 \\ \text{si } k = 1) \text{ tel que pour tout entier } i \text{ compris entre } 0 \text{ et } m-1, \text{ l'arête} \\ a_i \text{ joint les sommets } P_{[i]_k} \text{ et } Q_{[i+p]_k}. \text{ Ainsi, pour tout entier } i \text{ tel} \\ \text{que } 0 \leq i < k, \text{ les sommets } P_i \text{ et } P_{[i+p]_k} \text{ sont joints par les arêtes} \\ a_{[i]_m}, a_{[i+k]_m}, \dots, a_{[i+(d-1)k]_m} \text{ au nombre de } d, \text{ où } d = m \text{ si } k = 2 \text{ et} \\ d = \frac{m}{k} \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

L'action associée à ce graphe Γ est donnée par $1.P_i = P_{[i+1]_k}$ et $1.a_i = a_{[i+1]_m}$ pour tout entier i tel que $0 \leq i < k$.

- (b) *Le graphe Γ est constitué de $k + \ell$ sommets et de m arêtes où k et ℓ sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et premiers entre eux et m est un multiple de $k\ell$ (cf. figure 59) :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sommets : } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \sqcup \mathcal{S}_2 \text{ où } \mathcal{S}_1 = \{P_0, \dots, P_{k-1}\} \text{ et } \mathcal{S}_2 = \{Q_0, \dots, Q_{\ell-1}\}, \\ \text{arêtes : } \mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{m-1}\} \text{ tel que pour tout entier } i \text{ compris entre } 0 \text{ et } m-1, \\ \text{l'arête } a_i \text{ joint les sommets } P_{[i]_k} \text{ et } Q_{[i]_\ell}. \text{ Ainsi, pour tous entiers } i \text{ et } j \\ \text{tels que } 0 \leq i < k \text{ et } 0 \leq j < m, \text{ les sommets } P_i \text{ et } Q_j \text{ sont joints par } d \\ \text{arêtes où } d = \frac{m}{k\ell}. \end{array} \right.$$

L'action associée à ce graphe Γ est donnée par $1.P_i = P_{[i+1]_k}$, par $1.Q_i = Q_{[i+1]_\ell}$ et par $1.a_i = a_{[i+1]_m}$ pour tous entiers i et j tels que $0 \leq i < k$ et $0 \leq j < m$.

Démonstration. On vérifie aisément que les graphes proposés munis des actions de \mathbb{Z} décrites dans l'énoncé existent (cf. figure 59) et que les actions sont bien transitives sur les arêtes. Réciproquement, montrons que sous ces hypothèses, Γ est nécessairement l'un des graphes annoncés.

On commence par écarter les cas quasi-triviaux des graphes à un ou deux sommets :

- si Γ ne possède qu'un sommet et consiste en un bouquet de m cercles, il s'agit d'un cas particulier du cas (a) avec $k = 1$;
- si Γ possède exactement deux sommets et s'ils sont échangés par la \mathbb{Z} -action, on est dans le cas (a) avec $k = 2$;
- si Γ possède exactement deux sommets et s'ils sont fixes par la \mathbb{Z} -action, on est dans le cas (b) avec avec $(k, \ell) = (1, 1)$.

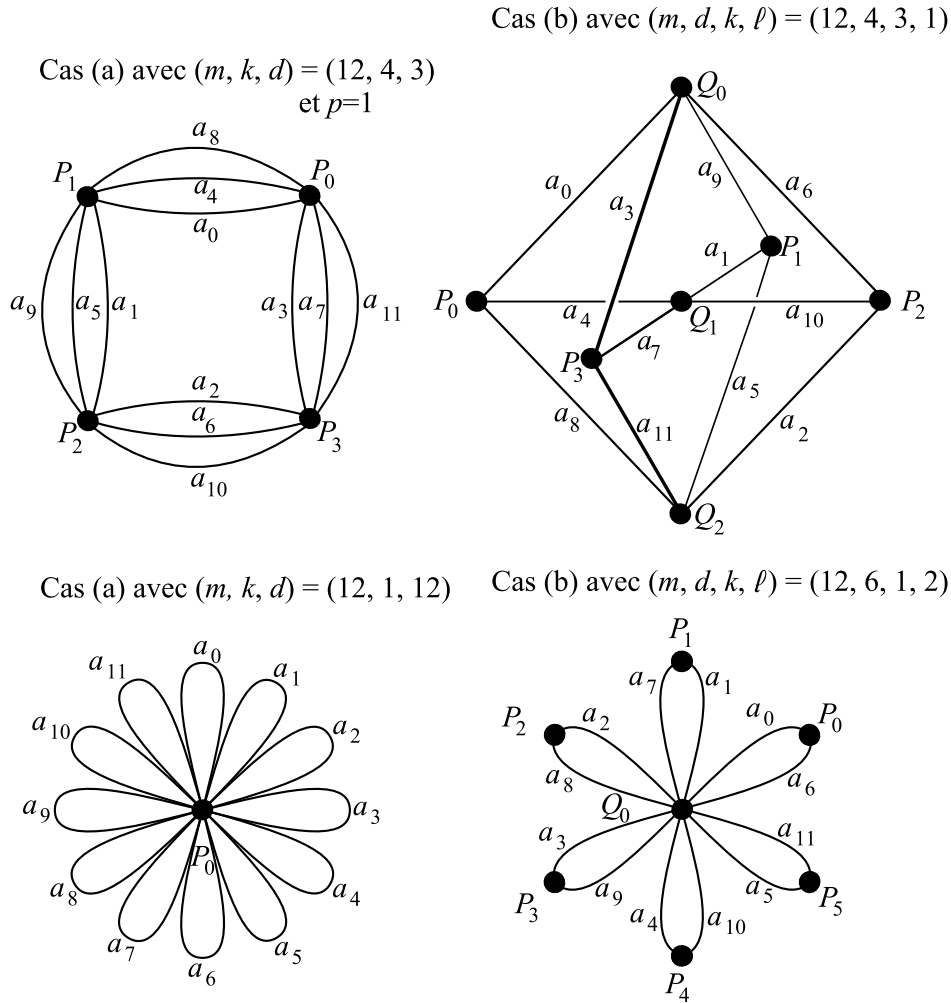


FIG. 59 – Quatre exemples de graphes à 12 arêtes, munis d'une \mathbb{Z} -action transitive sur les arêtes.

Intéressons-nous au cas des graphes munis d'une \mathbb{Z} -action transitive sur les sommets comportant au moins 3 sommets. Soit m le nombre d'arêtes. L'action étant cyclique, $m\mathbb{Z}$ agit trivialement sur les arêtes. Or chaque sommet peut être repéré de façon univoque par l'ensemble des arêtes dont il est une extrémité : en effet, si deux sommets distincts étaient les extrémités des mêmes arêtes, par connexité, le graphe serait réduit à ces deux sommets et aux arêtes qui en seraient issues, donc en particulier, ce graphe aurait strictement moins de 3 sommets : c'est contraire à nos hypothèses. Donc toute action triviale sur les arêtes induit une action triviale sur les sommets. Ainsi $m\mathbb{Z}$ agit trivialement sur l'ensemble des sommets. On peut donc quotienter l'action de \mathbb{Z} par $m\mathbb{Z}$ et obtenir ainsi une action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur Γ qui agit librement et transitivement sur les arêtes. L'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur les couples non ordonnés de sommets $\{p, q\}$ où p et q sont les extrémités d'une même arête est donc transitive elle aussi. On en déduit qu'il existe une ou deux orbites de sommets sous l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, selon que les extrémités d'une même arête appartiennent à une même orbite ou non.

Cas (a) : une seule orbite de sommets. Soit k le nombre de sommets avec $k \geq 3$. Puisque les sommets forment une seule orbite sous l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, k doit diviser m donc $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agit sur Γ en fixant les sommets ; et pour chaque couple de sommets (S_1, S_2) reliés par des arêtes,

$k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agit librement et transitivement sur les $d = m/k$ arêtes dont S_1 et S_2 sont les extrémités. Soit $\tilde{\Gamma}$ le graphe obtenu du graphe Γ en identifiant entre elles les arêtes de mêmes extrémités. Alors le quotient de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, isomorphe à $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, agit sur $\tilde{\Gamma}$ et agit transitivement sur les k arêtes et les k sommets du graphe $\tilde{\Gamma}$. Appelons P_0, P_1, \dots, P_{k-1} les k sommets de $\tilde{\Gamma}$ de sorte que pour tout $\ell \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, on ait $\ell.P_0 = P_\ell$. Soit p un entier compris entre 1 et $k-1$ tel que les sommets P_0 et P_p soient joints par une arête. On obtient le graphe de gauche figure 60. Remarquons que k et p sont premiers entre eux car autrement, le graphe $\tilde{\Gamma}$ (et le graphe Γ par conséquent) ne serait pas connexe. En revenant au graphe Γ , on note de la même façon ses sommets, on note a_0 l'une des d arêtes d'extrémités P_0 et P_p , et pour tout $\ell \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, on note a_ℓ l'arête $\ell.a_0$ d'extrémités $P_{[\ell]_k}$ et $P_{[\ell+p]_k}$. On obtient le graphe de droite figure 60.

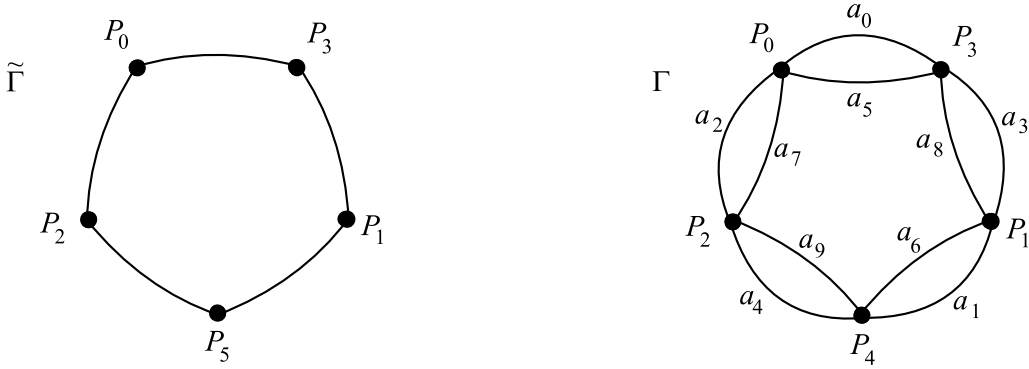


FIG. 60 – Exemple de graphe du type (a) où $k = 5$, $\ell = 3$, $d = 2$, $m = 10$.

Cas (b) : deux orbites de sommets.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des arêtes. On se place sous l'hypothèse où contrairement au cas (a), pour toute arête $a \in \mathcal{A}$:

les extrémités d'une de a appartiennent à deux orbites différentes. (1)

Soient a_0 une arête, P_0 et Q_0 les extrémités de a_0 . Soit \mathcal{S}_1 l'orbite de P_0 et soit k le cardinal de \mathcal{S}_1 . De même, soit \mathcal{S}_2 l'orbite de Q_0 et soit ℓ le cardinal de \mathcal{S}_2 . On nomme les sommets de \mathcal{S}_1 et de \mathcal{S}_2 sorte que pour tous $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $j \in \{0, \dots, \ell-1\}$, $p \in \mathbb{Z}$,

$$p.P_i = P_{[i+p]_k}, p.Q_j = Q_{[j+p]_\ell}, \text{ et } p.a_i = a_{[i+p]_m}. \quad (2)$$

On a donc $\mathcal{S}_1 = \{P_0, \dots, P_{k-1}\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{Q_0, \dots, Q_{\ell-1}\}$. Les entiers k et ℓ doivent diviser m car l'action de l'entier m sur les sommets est triviale. Comme le cardinal de l'orbite de P_0 est k , le stabilisateur de P_0 est $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. De même le stabilisateur de Q_0 est $\ell\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On en déduit les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{cases} \{a \in \mathcal{A} \mid P_0 \text{ est une extrémité de } a\} = (k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).a_0, \\ \{a \in \mathcal{A} \mid Q_0 \text{ est une extrémité de } a\} = (\ell\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).a_0, \end{cases} \quad (3)$$

On dira que deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité en commun. Alors :

$$\{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ est adjacent à } a_0\} = (k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cup \ell\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).a_0. \quad (4)$$

Or l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est transitive sur les arêtes, donc ce fait est vrai pour toute arête de Γ . Alors étant donné un chemin d'arêtes dont la première arête est a_0 , c'est-à-dire une suite finie d'arêtes $(a'_0 = a_0, a'_1, \dots, a'_r)$, $r \geq 1$, telle que $a'_i \cap a'_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i \leq r-1$, la dernière arête a'_r doit vérifier :

$$a'_r \in (k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} + \ell\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).a'_0.$$

Mais Γ est connexe, donc toute arête de Γ peut être vue comme la dernière arête d'un chemin d'arêtes partant de a , donc $k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} + \ell\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, or $k < m$ et $\ell < m$ donc

$$k \text{ et } \ell \text{ sont premiers entre eux.} \quad (5)$$

Déterminons d , le nombre d'arêtes ayant les mêmes extrémités que a_0 (cf. figure 61). D'après (3), l'ensemble de ces arêtes est $(k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).a \cap (\ell\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).a$, donc en utilisant (5) :

$$\{\text{arêtes d'extrémités } P_0 \text{ et } Q_0\} = ((k\ell)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).a_0, \quad (6)$$

Donc on compte exactement $d = \frac{m}{k\ell}$ arêtes de mêmes extrémités que a_0 .

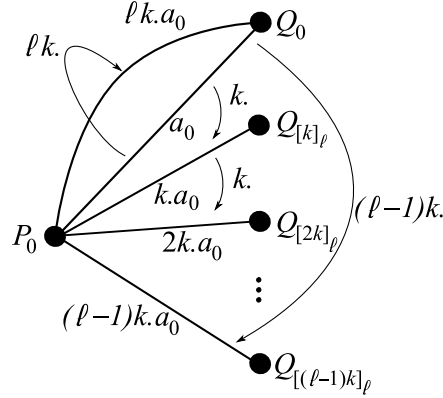


FIG. 61 – Action de \mathbb{Z} sur a . Les points Q_1, Q_2, \dots, Q_ℓ forment l'orbite de Q_1 .

A partir de m, k, ℓ , on peut maintenant décrire complètement Γ et l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur Γ . Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$ et tout $j \in \{0, \dots, \ell-1\}$, d'après le théorème chinois, il existe un unique entier $u \in \{0, \dots, k\ell-1\}$ tel que u soit congru à i modulo k et à j modulo ℓ . Alors d'après (6) :

$$\begin{aligned} \{\text{arêtes d'extrémités } P_i \text{ et } Q_j\} &= \{(u + p k \ell).a_0, 0 \leq p \leq d-1\} \\ &= \{a_u, a_{u+k\ell}, \dots, a_{u+(d-1)k\ell}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

On obtient ainsi les $m = d k \ell$ arêtes de Γ . Un tel graphe est caractérisé par le triplet (m, k, ℓ) ou de façon équivalente par le triplet (d, k, ℓ) . \square

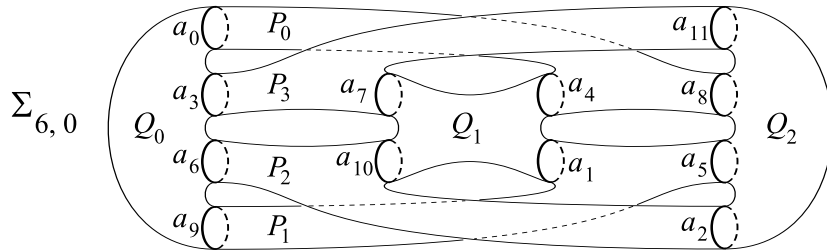


FIG. 62 – Un simplexe de 12 courbes $\{a_i, i \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\}$ dans $\Sigma_{6,0}$, tel qu'il existe une action de \mathbb{Z} dans $\text{Mod}(\Sigma_{6,0})$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $i \in \{0, \dots, 11\}$:

$$\begin{aligned} k.a_i &= a_{[i+k]_{12}}, \\ k.P_i &= P_{[i+k]_4}, \\ k.Q_i &= Q_{[i+k]_3}. \end{aligned}$$

Lemme 9.19. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$. Soit \mathcal{A} un simplexe d'au moins trois courbes dans Σ et un morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dont l'image préserve \mathcal{A} et qui induit une action transitive sur les courbes de \mathcal{A} . Alors le cardinal de \mathcal{A} est inférieur ou égal à $2g$. Le cas d'égalité $|\mathcal{A}| = 2g$ ne peut se produire que si $g = 6$ et $b = 0$. Dans ce cas, la position des courbes de \mathcal{A} et l'action de \mathbb{Z} sur ces courbes sont uniques à l'image par un homéomorphisme près; ce cas est représenté figure 62 où l'action de \mathbb{Z} est précisée de la façon suivante : notons $\{a_i, 0 \leq i \leq 11\}$ l'ensemble des courbes, $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ et $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ les sept sous-surfaces de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $i \in \{0, \dots, 11\}$, on a $k.a_i = a_{[i+k]_{12}}$, $k.P_i = P_{[i+k]_4}$, $k.Q_i = Q_{[i+k]_3}$.

Démonstration.

1°) Montrons le lemme 9.19 dans le cas où $b = 0$.

Soit Γ le graphe $\Gamma(\Sigma; \mathcal{A})$. L'action de \mathbb{Z} sur Σ induit une action de \mathbb{Z} sur Γ qui est transitive sur les arêtes. Alors Γ est l'un des graphes décrits par le lemme 9.18. On va majorer le cardinal $|\mathcal{A}|$ en fonction de g , le genre de Σ . Pour cela, conformément au lemme 9.18, notons :

- $m = |\mathcal{A}|$ le nombre de courbes de \mathcal{A} , aussi égal au nombre d'arêtes de Γ ,
- \mathcal{S} l'ensemble des sommets de Γ ,
- c le nombre de cycles indépendants de Γ , on a : $c = 1 + |\mathcal{A}| - |\mathcal{S}|$,
- h le nombre de sommets dans Γ de valence 1 ou 2.

Rappelons que $b = 0$, donc les sommets de valence 1 ou 2 correspondent dans Σ à des composantes connexes n'ayant qu'un ou deux bords et sont donc de genre non nul, donc $g \geq c + h$. De plus, par hypothèse, $m \geq 3$.

Dans le cas (a) du lemme 9.18, notons $k = |\mathcal{S}|$. Il vient :

- si $k = 1$, alors on a $c = m$, or $g \geq c$, donc a fortiori, $m < 2g$;
- si $k = 2$, alors on a $c = 1 + m - 2 = m - 1$, d'où $g \geq c = m - 1 > \frac{m}{2}$, donc $m < 2g$;
- si $k \geq 3$, alors posons $d = \frac{m}{k}$. On a $c = 1 + m - k = 1 + \frac{(d-1)m}{d}$. Donc :
 - si $d = 1$, tous les sommets sont de valence 2, donc $h = k = m$ et on a : $g \geq c + k = 1 + m$, donc $m < 2g$;
 - si $d \geq 2$, alors : $g \geq c \geq 1 + \frac{m}{2}$, donc $m < 2g$.

Dans le cas (b) du lemme 9.18, soient k et ℓ les cardinaux des deux orbites \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de sommets et $d = \frac{m}{k\ell}$. Quitte à échanger \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , on peut supposer que $k \leq \ell$. Rappelons que k et ℓ sont premiers entre eux. On parcourt les cas (d, k, ℓ) dans l'ordre alphanumérique croissant en tenant compte de ces restrictions :

- si $(d, k, \ell) = (1, 1, m)$, alors les ℓ sommets de \mathcal{S}_2 sont de valence 1, donc $h = \ell = m$ donc $g \geq h = \ell = m$, donc $m < 2g$;
- si $(d, k, \ell) = (1, 2, \frac{m}{2})$, alors $c = 1 + m - (2 + \frac{m}{2}) = \frac{m}{2} - 1$, or les $\ell = \frac{m}{2}$ sommets de \mathcal{S}_2 sont de valence 2, donc $h = \frac{m}{2}$ et $g \geq c + h = m - 1$, donc $m < 2g$;
- si $(d, k, \ell) = (1, 3, 4)$, alors $c = 6$ et $m = 12$, donc $g \geq \frac{m}{2}$, donc $m \leq 2g$;
- si $(d, k, \ell) = (1, 3, 5)$, alors $c = 8$ et $m = 15$, donc $g \geq \frac{m+1}{2}$, donc $m < 2g$;
- si $(d, k, \ell) = (1, k, \ell)$ avec $k = 3$ et $\ell \geq 7$, ou $k \geq 4$ et $\ell \geq 5$ (rappelons que k et ℓ sont premiers entre eux), alors $c = 1 + m(1 - \frac{1}{\ell} - \frac{1}{k})$. Or $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$, donc $g \geq c \geq 1 + \frac{m}{2}$, donc $m < 2g$;
- si $(d, k, \ell) = (2, 1, \frac{m}{2})$, alors un sommet est de valence m et $\frac{m}{2}$ sommets sont de valence 2, donc $h = \frac{m}{2}$ et $c = 1 + m - (1 + \frac{m}{2})$, donc $g \geq h + c = m$, donc $m < 2g$;
- si $(d, k, \ell) = (d, 1, \frac{m}{d})$ avec $d \geq 3$, alors on a $d + 1$ sommets et dm arêtes, donc $c = 1 - (1 + \frac{m}{d}) + (dm) = \frac{d-1}{d}m$, or $\frac{d-1}{d} > \frac{1}{2}$, donc $g \geq c \geq \frac{m}{2}$ et finalement, $m < 2g$;
- si $(d, k, \ell) = (m, 1, 1)$, alors $g \geq c = 1 + m - 2 = m - 1$, or $m \geq 3$, donc $m < 2g$;

- si (d, k, ℓ) vérifie $d \geq 2$, $k \geq 2$ et $\ell \geq 2$, on a $c = 1 + m - (k + \ell)$. Mais $k\ell = \frac{m}{d} \leq \frac{m}{2}$, donc $k + \ell \leq \frac{m}{2}$ (en effet, une somme d'entiers est toujours inférieure ou égale au produit de ces deux entiers dès que ceux-ci sont supérieurs ou égaux à 2), donc $g \geq c \geq 1 + \frac{m}{2}$, donc $m < 2g$.

Finalement, dans tous les cas, $m \leq 2g$. Le cas d'égalité ne survient que dans le cas (b), lorsque le triplet (d, k, ℓ) vaut $(1, 3, 4)$, cf. figure 59, graphe en haut à droite. La surface correspondante munie des courbes de \mathcal{A} , indexées de façon cohérente avec l'action de \mathbb{Z} , est la surface $\Sigma_{6,0}$ représentée figure 62.

2°) *Montrons le lemme 9.19 dans le cas où $b > 0$.*

Supposons qu'on ait une surface Σ munie d'un simplexe \mathcal{A} d'au moins trois courbes et d'un morphisme φ de \mathbb{Z} dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ dont l'image préserve \mathcal{A} et induit sur ses courbes une action transitive. Alors, après avoir appliqué $\text{oub}_{\partial\Sigma}$ à Σ et à \mathcal{A} et remplacé φ par $\text{oub}_{\partial\Sigma}^* \circ \varphi$, on s'est ramené au cas sans bord. Or le simplexe \mathcal{A} possède au moins trois courbes et l'action de \mathbb{Z} induite par φ est transitive sur \mathcal{A} , donc la proposition 7.5 s'applique : \mathcal{A} et $\text{oub}_{\partial\Sigma}(\mathcal{A})$ possèdent autant de courbes chacun. Donc $|\mathcal{A}| \leq 2g$, et si $|\mathcal{A}| = 2g$, alors $|\text{oub}_{\partial\Sigma}(\mathcal{A})| = 2g$, donc d'après ce qu'on vient de voir dans le cas sans bord, le seul couple $(\text{oub}_{\partial\Sigma}(\Sigma), \text{oub}_{\partial\Sigma}(\mathcal{A}))$ pour lequel $|\text{oub}_{\partial\Sigma}(\mathcal{A})| = 2g$ est celui de la figure 62. Or, d'après la proposition 7.5, pour toute sous-surface $S \in \mathcal{S}\text{ub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$, on a :

$$\text{oub}_{\partial\Sigma}(\varphi(1)(S)) = \text{oub}_{\partial\Sigma}^*(\varphi(1))(\text{oub}_{\partial\Sigma}(S)).$$

Dans le cas sans bord aucune sous-surface n'est préservée par $\text{oub}_{\partial\Sigma}^*(\varphi(1))$, donc aucune sous-surface n'est préservée par $\varphi(1)$ dans le cas à bord. C'est absurde car une sous-surface naturellement bordée de $\mathcal{S}\text{ub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ est préservée par toute mapping class de $\mathcal{P}\text{Mod}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$. Donc dans une surface de genre 6 à bord, les courbes de \mathcal{A} ne peuvent pas être disposées comme sur la figure 62, donc dès qu'il y a du bord, on a $|\mathcal{A}| < 2g$. \square

Afin de mieux comprendre la situation évoquée par le cas particulier de la figure 62 lorsqu'elle s'applique à des courbes de $\sigma(\mathcal{G})$ où ρ est un morphisme de \mathcal{B}_{12} dans $\text{Mod}(\Sigma_{6,0})$, on prouve le lemme suivant :

Lemme 9.20. *Soit Σ la surface $\Sigma_{6,0}$ et soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_{12} dans $\text{Mod}(\Sigma)$. On suppose qu'il existe un simplexe de 12 courbes dans $\sigma(\mathcal{G})$ tel qu'un sous-groupe de \mathcal{J} agisse transitivement dessus. Alors ρ est cyclique.*

Démonstration. Soit \mathcal{A} un simplexe de 12 courbes dans $\sigma(\mathcal{G})$ tel qu'un sous-groupe \mathcal{K} de $\mathcal{J} = \langle \delta \rangle_{\mathcal{B}_{12}}$ agisse transitivement dessus. On veut montrer qu'alors ρ est cyclique. Pour cela, on suppose que ρ n'est pas cyclique et on cherche une contradiction (en fait, on va utiliser le fait que ρ n'est pas cyclique pour montrer que ρ est cyclique : c'est la contradiction recherchée).

Soit γ un générateur de \mathcal{K} et soit k un entier tel que $\gamma = \delta^k$. Quitte à remplacer \mathcal{A} par $\delta^\ell \mathcal{A}$ où ℓ est un entier, on peut supposer que $\mathcal{A} \cap \sigma(A_0)$ n'est pas vide. Soit a_0 l'une des courbes de $\mathcal{A} \cap \sigma(A_0)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, 11\}$, notons a_i la courbe $\gamma^i \cdot a_0$. Elle appartient à $\sigma(A_{ki})$. Alors \mathcal{A} est l'ensemble $\{a_j, 0 \leq j \leq 11\}$, et la surface Σ munie des courbes de \mathcal{A} et de l'action de \mathcal{K} sur Σ et sur \mathcal{A} est (à l'image par un homéomorphisme près) la surface munie des douze courbes et de l'action de \mathbb{Z} représentée sur la figure 62.

1°) *Montrons que k est premier avec 3.*

Raisonnons par l'absurde : supposons que k soit un multiple de 3 et posons $k' = \frac{k}{3}$. Posons alors $\mathcal{L} = \langle \delta^{2k'} \rangle$. Nous allons montrer que $\mathcal{L} \cdot a_0$ contient 18 courbes puis que c'est absurde. On vérifie que :

- $a_6 = \gamma^6.a_0 \neq a_0$, donc $\delta^{6k}.a_0 \neq a_0$, donc $(\delta^{2k'})^9.a_0 \neq a_0$;
- $a_8 = \gamma^8.a_0 \neq a_0$, donc $\delta^{8k}.a_0 \neq a_0$, donc $(\delta^{2k'})^{12}.a_0 \neq a_0$;
- $\gamma^{12}.a_0 = a_0$, donc $\delta^{12k}.a_0 = a_0$, donc $(\delta^{2k'})^{18}.a_0 = a_0$.

Par conséquent, $\mathcal{L}.a_0$ contient 18 courbes. Par ailleurs, $\mathcal{L}.a_0$ est inclus dans $\sigma(A_0) \cup \sigma(A_2) \cup \dots \cup \sigma(A_{n-2})$ qui est un simplexe car le groupe $\langle A_0, A_2, \dots, A_{n-2} \rangle$ est abélien. Finalement, $\mathcal{L}.a_0$ est un simplexe de 18 courbes dans Σ , mais c'est absurde car le plus grand simplexe dans Σ contient $3g - 3 + b = 15$ courbes. Donc k est premier avec 3.

2°) *Montrons que $I(\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{G})) = 0$.*

Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'il existe une courbe de c de $\sigma(\mathcal{G})$ qui intersecte une courbe de \mathcal{A} . Puisque $\sigma(\mathcal{G})$ est stable par \mathcal{K} , on peut supposer sans perte de généralité que c appartient à $\sigma(A_{\pm 1})$ et intersecte a_0 . D'après la figure 62, il existe un pantalon P dans Σ dont les courbes de bord sont a_0 , $a_4 = \gamma^4.a_0$ et $a_8 = \gamma^8.a_0$. Or les courbes a_4 et a_8 appartiennent à $\sigma(\gamma^4.A_0) \cup \sigma(\gamma^{8k}.A_0)$, donc appartiennent à $\sigma(\delta^{4k}.A_0) \cup \sigma(\delta^{8k}.A_0)$. Or $\sigma(\delta^{4k}.A_0) \cup \sigma(\delta^{8k}.A_0) \subset \sigma(A_4) \cup \sigma(A_8)$ car $4k$ et $8k$ sont des entiers appartenant à $4\mathbb{Z} \setminus 12\mathbb{Z}$ compte tenu du fait que k est premier avec 3 d'après le 1°). De plus $A_{\pm 1}$ commute avec A_4 et A_8 , donc la seule courbe de bord de P que c intersecte est a_0 (et non a_4 ou a_8). Considérons maintenant l'image de cette situation par γ^4 . Le pantalon P reste stable, mais c est envoyée sur une courbe $\gamma^4.c$ qui intersecte a_4 , mais pas a_0 ni a_8 , cf. figure 63. Par manque de place dans le pantalon P , ces deux courbes c et $\gamma^4.c$ doivent s'intersecter. Pourtant c et $\gamma^4.c$ appartiennent respectivement à $\sigma(A_{\pm 1})$ et $\sigma(A_{4k\pm 1}) \cup \sigma(A_{8k\pm 1})$, or $A_{\pm 1}$ commute avec $A_{4k\pm 1}$ et $A_{8k\pm 1}$, donc il est absurde que c et $\gamma^4.c$ s'intersectent : c'est une contradiction.

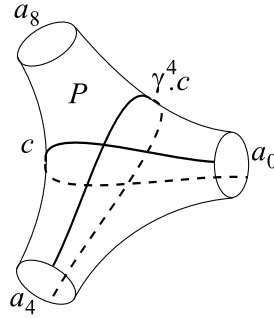


FIG. 63 – Les courbes c et $\gamma^4.c$ doivent s'intersecter dans P .

3°) *Montrons que $\mathcal{A} = \mathcal{J}.a_0$; autrement dit, tout se passe comme si $\mathcal{K} = \mathcal{J}$.*

Notons $\delta\mathcal{K}$ l'ensemble $\{\delta\xi, \xi \in \mathcal{K}\}$ et $\delta\mathcal{A}$ l'ensemble $\{\delta.x, x \in \mathcal{A}\}$. Supposons que $\mathcal{K} \neq \mathcal{J}$. Alors il est clair que \mathcal{K} et $\delta\mathcal{K}$ n'ont aucun élément en commun. Puisque \mathcal{A} et $\delta\mathcal{A}$ sont des orbites de courbes sous l'action de \mathcal{K} , on a $\mathcal{A} = \delta\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A} \cap \delta\mathcal{A} = \emptyset$. Si $\mathcal{A} \cap \delta\mathcal{A} = \emptyset$, alors $\mathcal{A} \cup \delta\mathcal{A}$ est un simplexe de 24 courbes car d'après le 2°), $I(\sigma(\mathcal{G}), \mathcal{A}) = 0$. Mais c'est absurde car dans Σ , le plus grand simplexe contient $3g - 3 + b = 15$ courbes. Donc finalement $\mathcal{A} = \delta\mathcal{A}$. Alors \mathcal{A} est stable par \mathcal{J} , donc $\mathcal{A} = \mathcal{J}.a_0$. Autrement dit, tout se passe comme si $\mathcal{K} = \mathcal{J}$.

Notations.

- Soit D la mapping class $\rho(\delta)$.
- Pour tout entier i compris entre 1 et 11, soit a_i la courbe $D^i(a_0)$ de sorte que $a_i \in \sigma(A_i)$ et $\mathcal{A} = \{a_i, 0 \leq i \leq 11\}$. Insistons sur le fait que conformément au 3°), il ressort de ces notations que $\mathcal{A} = \mathcal{J}.a_0$.

- Soit Q_0 (respectivement Q_1 , resp. Q_2) la sous-surface de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ bordée par les courbes a_0, a_3, a_6 et a_9 (resp. a_1, a_4, a_7 et a_{10} , resp. a_2, a_5, a_8 et a_{11}), cf. figure 62.

4°) a) *Montrons que $\sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A} \cup \text{Courb}(Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2)$ et pour tout $x \in \sigma(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{A}$, on a $D^3(x) = x$.*

S'il existe une courbe x appartenant à $\sigma(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{A}$, la courbe x n'intersecte aucune courbe de \mathcal{A} en vertu du 2°). Or toutes les sous-surfaces de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ en dehors de Q_0, Q_1 et Q_2 sont des pantalons, donc x appartient à $\text{Courb}(Q_0), \text{Courb}(Q_1)$, ou $\text{Courb}(Q_2)$. Quitte à considérer $D(x)$ ou $D^2(x)$ au lieu de x , on peut supposer que x appartient à $\text{Courb}(Q_0)$. Soit un entier i compris entre 0 et 11 tel que $x \in \sigma(A_i)$. Alors $D^3(x)$ appartient à $\sigma(A_{i+3})$. Or A_i et A_{i+3} commutent, donc x et $D^3(x)$ ne peuvent pas s'intersecter. Mais $\text{Courb}(Q_0)$ ne contient pas de simplexe de deux courbes, donc $D^3(x) = x$.

4°) b) *Montrons que $\sigma(D) \subset \mathcal{A} \cup \text{Courb}(Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2)$ et pour tout $x \in \sigma(D) \setminus \mathcal{A}$, on a $D^3(x) = x$.*

D'après le 3°), $\mathcal{A} = \mathcal{J}.a_0$, donc \mathcal{A} est stable par la mapping class D , donc les courbes de \mathcal{A} sont des courbes de réduction de D , donc les courbes de $\sigma(D)$ n'intersectent pas les courbes de \mathcal{A} . Or toutes les sous-surfaces de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ en dehors de Q_0, Q_1 et Q_2 sont des pantalons, donc les courbes de $\sigma(D)$ appartiennent à $\mathcal{A} \cup \text{Courb}(Q_0) \cup \text{Courb}(Q_1) \cup \text{Courb}(Q_2)$. De plus, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, la surface Q_i ne contient pas de simplexe de plus d'une courbe car la quantité $3g - 3 + b$ vaut 1 dans le cas de Q_i . Donc $\sigma(D) \cap \text{Courb}(Q_i)$ est vide ou est réduit à une courbe. Or D^3 préserve $\sigma(D) \cap \text{Courb}(Q_i)$, donc D^3 doit préserver cette courbe.

5°) *Montrons que $\sigma(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{A} \subset \sigma(D) \setminus \mathcal{A}$, et décrivons $\sigma(D) \setminus \mathcal{A}$: si $\sigma(D) \setminus \mathcal{A}$ n'est pas vide, $\sigma(D) \setminus \mathcal{A}$ contient trois courbes, l'une incluse dans Q_0 que l'on note c_0 , et les deux courbes $c_1 = D(c_0)$ et $c_2 = D^2(c_0)$ incluses respectivement dans Q_1 et Q_2 .*

D'après l'action de D sur \mathcal{A} , D permute Q_0, Q_1 et Q_2 , tandis que D^3 préserve chacune d'elles. Notons $\widehat{D^3}$ la restriction de D^3 à Q_0 : $\widehat{D^3}$ appartient à $\text{Mod}(Q_0)$. Examinons $\sigma(D) \setminus \mathcal{A}$ selon la nature de $\widehat{D^3}$ et montrons que $\sigma(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{A} \subset \sigma(D) \setminus \mathcal{A}$.

- Si $\widehat{D^3}$ est pseudo-Anosov, alors $(\widehat{D^3})^4$ aussi. Or D^{12} est dans le centre de $\rho(\mathcal{B}_{12})$, donc toutes les courbes de $\sigma(\rho(\mathcal{B}_{12}))$ sont des courbes de réduction de D^{12} . Donc Q_0 ne contient aucune courbe de $\sigma(\rho(\mathcal{B}_{12}))$. Ainsi,

$$\sigma(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{A} \subset \sigma(D) \setminus \mathcal{A} = \emptyset.$$

- Si $\widehat{D^3}$ est périodique, alors $\widehat{D^3}$ serait la classe d'isotopie d'un difféomorphisme positif d'ordre fini d'après le théorème de Kerckhoff. Or d'après le théorème de Kerékjártó (cf. [Kj]), un tel difféomorphisme est conjugué à une rotation de la sphère. Or si une telle rotation, d'ordre 4 ici, préserve une courbe, elle préserve également chacun des deux hémisphères séparés par cette courbe. L'une de ces deux hémisphères contient l'orbite de a_0 , c'est-à-dire les quatre bords a_0, a_3, a_6, a_9 . Donc la courbe préservée borde un disque. Donc $\widehat{D^3}$ ne préserve aucune courbe de $\text{Courb}(Q_0)$. Donc d'après le 4°) a) et 4°) b),

$$\sigma(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{A} \subset \sigma(D) \setminus \mathcal{A} = \emptyset.$$

- Si $\widehat{D^3}$ est réductible, notons c_0 une courbe de réduction essentielle de $\widehat{D^3}$. Alors $\sigma(\widehat{D^3}) = \{c_0\}$ d'après le 4°) b). Donc $\mathcal{J}.c_0$ est un ensemble de trois courbes, une dans Q_0 , une dans Q_1 et une dans Q_2 . Toute courbe de $\text{Courb}(Q_0)$ autre que c_0 intersecte c_0 , donc par définition de $\sigma(\widehat{D^3})$, cette courbe n'est pas une courbe de réduction de $\widehat{D^3}$, elle ne peut donc pas être préservée par $\widehat{D^3}$. Donc d'après le 4°), $\sigma(\mathcal{G}) \cap \text{Courb}(Q_0) \subset \{c_0\}$. Donc si $\widehat{D^3}$ est réductible, on a :

$$\sigma(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{A} \subset \sigma(D) \setminus \mathcal{A} = \mathcal{J}.c_0 = \{c_0, c_1, c_2\},$$

où $c_1 = D(c_0)$ et $c_2 = D^2(c_0)$.

En vue de pouvoir discuter aux étapes 7°) et 8°) de la stabilité de \mathcal{A} sous l'action de \mathcal{B}_{12} , nous allons étudier au 6°) la stabilité de $\mathcal{J}.c_0$ sous l'action de \mathcal{B}_{12} lorsque la courbe c_0 est définie, c'est-à-dire lorsque $\sigma(D) \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$ d'après l'étape 5°).

6°) *Montrons que si $\sigma(D) \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$, alors l'action de \mathcal{B}_{12} via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\mathcal{J}.c_0$.*

Par définition de c_0 d'après le 5°), c_0 appartient à $\sigma(D)$. Puisque $\sigma(D)$ est stable par D , donc $\sigma(D)$ contient $\mathcal{J}.c_0$, et si a_0 appartient à $\sigma(D)$, alors $\sigma(D)$ contient $\mathcal{J}.a_0$ qui est égal à \mathcal{A} , tandis que si a_0 n'appartient pas à $\sigma(D)$, alors $\sigma(D) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Or d'après le 5°), $\sigma(D)$ est inclus dans $\mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A}$. Donc $\sigma(D) = \mathcal{J}.c_0$ ou $\sigma(D) = \mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A}$. Or pour tout $\xi \in \mathcal{B}_{12}$, la mapping class $\rho(\xi)$ commute avec D^{12} , donc $\rho(\xi)(\sigma(D^{12})) = \sigma(D^{12})$, donc $\rho(\xi)(\sigma(D)) = \sigma(D)$, car $\sigma(D^{12}) = \sigma(D)$. Donc l'action de \mathcal{B}_{12} via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve les courbes de $\sigma(D)$. Alors si $\sigma(D) = \mathcal{J}.c_0$, on a démontré que l'action de \mathcal{B}_{12} via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\mathcal{J}.c_0$. Il nous reste à étudier le cas où $\sigma(D) = \mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A}$. On va montrer que :

Toute mapping class qui préserve $\mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A}$ préserve $\mathcal{J}.c_0$ et préserve \mathcal{A} . (1)

Or l'action de \mathcal{B}_{12} via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\sigma(D) = \mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A}$, donc elle préserve $\mathcal{J}.c_0$. Le résultat annoncé à l'étape 6°) sera démontré.

Montrons donc l'assertion (1). La courbe c_0 vit dans Q_0 , est séparante dans Q_0 et induit donc une partition de $\text{Bord}(Q_0)$ en deux sous-ensembles : les bords situés d'un côté de c_0 et les bords situés de l'autre. Or la courbe c_0 est stable par D^3 , donc cette partition doit être stable par D^3 . Les bords de Q_0 sont les courbes a_0, a_3, a_6, a_9 , d'images respectives a_3, a_6, a_9, a_0 par D^3 , donc cette partition ne peut être que $\{a_0, a_6\} \sqcup \{a_3, a_9\}$ (en effet, il est clair que les deux autres partitions $\{a_0, a_3\} \sqcup \{a_6, a_9\}$ et $\{a_0, a_9\} \sqcup \{a_3, a_6\}$ ne sont pas stables par D^3). Considérons le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma(D))$, cf. figure 64 graphe de droite. On s'aperçoit que le plus petit

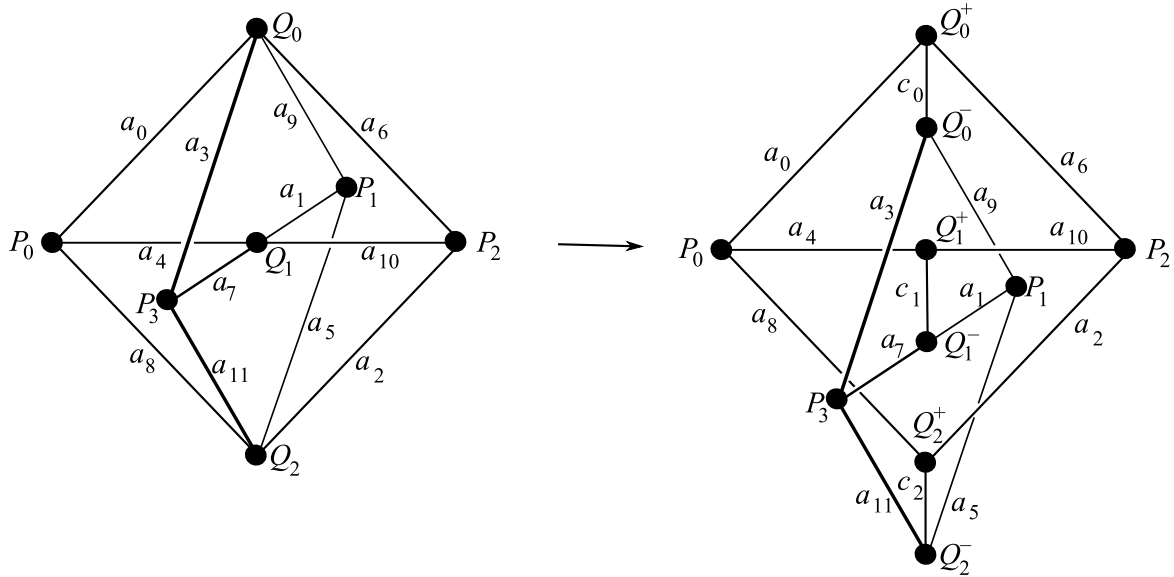


FIG. 64 – Le graphe $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ à gauche, le graphe $\Gamma(\Sigma, \mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A})$ à droite.

cycle injectif d'arêtes passant par a_0 contient quatre arêtes, par exemple le cycle a_0, a_4, a_{10}, a_6 ,

tandis que le plus petit cycle injectif d'arêtes passant par c_0 contient six arêtes, par exemple le cycle $a_0, c_0, a_3, a_{11}, c_2, a_8$. Or toute mapping class préservant $\mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A}$ induit une action sur le graphe $\Gamma(\Sigma, \mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A})$, mais ne peut pas échanger dans ce graphe deux arêtes telles que a_0 et c_0 , puisqu'elles ont des propriétés combinatoires différentes, comme on vient de le voir. Donc toute mapping class qui préserve $\mathcal{J}.c_0 \cup \mathcal{A}$ préserve $\mathcal{J}.c_0$ et préserve \mathcal{A} : l'assertion (1) est démontrée.

7°) *Montrons que si l'action de \mathcal{B}_{12} sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve \mathcal{A} alors ρ est cyclique.*

Puisque l'on suppose que l'action de \mathcal{B}_{12} sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve le simplexe de courbes \mathcal{A} , on peut appliquer la proposition 9.2 et conclure que \mathcal{B}_{12} agit cycliquement sur \mathcal{A} , puis que \mathcal{F}_{12} agit trivialement sur \mathcal{A} . Considérons le sous-groupe \mathcal{F}_{12}^* de \mathcal{F}_{12} , isomorphe à \mathcal{B}_{10} . Alors pour toute surface $S \in \text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$, le morphisme ρ restreint à \mathcal{F}_{12}^* induit un morphisme dans $\mathcal{P}\text{Mod}(S)$. Or S est de genre nul et \mathcal{F}_{12}^* est isomorphe à \mathcal{B}_{10} , donc on peut appliquer le théorème 7.1 et conclure que la restriction de ρ à \mathcal{F}_{12}^* induit dans $\mathcal{P}\text{Mod}(S)$ un morphisme cyclique. Donc la restriction de ρ à \mathcal{F}_{12}^* induit dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ un morphisme cyclique. Ainsi le groupe $\rho(\mathcal{F}_{12}^*)$ inclus dans $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma)$ se projette en un sous-groupe abélien \widehat{G} de $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$. Alors en s'appuyant sur le diagramme ci-dessous,

$$\begin{array}{ccccc} \rho(\mathcal{F}_{12}^*) < & \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma) & \xrightarrow{\text{dec}_{\mathcal{A}}} & \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}) & > \widehat{G} \\ & & \nearrow \text{dec}_{\mathcal{A}} & \uparrow \text{oub}_{\partial\Sigma_{\mathcal{A}}} & \\ G < & \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma) & \xleftarrow{\text{rec}_{\mathcal{A}}} & \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial\Sigma_{\mathcal{A}}) & > \widetilde{G} = \text{oub}_{\partial\Sigma_{\mathcal{A}}}^{-1}(\widehat{G}) \end{array}$$

on définit successivement les groupes :

- $\widetilde{G} = \text{oub}_{\partial\Sigma_{\mathcal{A}}}^{-1}(\widehat{G})$ où $\text{oub}_{\partial\Sigma_{\mathcal{A}}} : \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial\Sigma_{\mathcal{A}}) \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ est le morphisme canonique d'« oubli ». D'après le lemme 5.11, \widetilde{G} est abélien,
- $G = \text{rec}_{\mathcal{A}}(\widetilde{G})$ où $\text{rec}_{\mathcal{A}} : \text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}}, \partial\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\text{Mod}(\Sigma)$ est le morphisme de recollement le long des courbes de \mathcal{A} . Le groupe G est abélien puisque \widetilde{G} l'est.

Or par construction, $\rho(\mathcal{F}_{12}^*)$ est inclus dans G , un groupe abélien, donc $\rho(\mathcal{F}_{12}^*)$ est abélien. Or \mathcal{F}_{12}^* est isomorphe à \mathcal{B}_{10} et l'abélianisé de \mathcal{B}_{10} est cyclique, donc $\rho(\mathcal{F}_{12}^*)$ est cyclique. On en déduit que la mapping class $\rho(\tau_3\tau_4^{-1}) = \rho(\tau_3\tau_1^{-1})(\rho(\tau_4\tau_1^{-1}))^{-1}$ coïncide avec l'identité. Donc $\rho(\tau_3) = \rho(\tau_4)$, donc d'après le lemme 5.2, le morphisme ρ est cyclique.

8°) *Montrons que si $\rho(\mathcal{B}_{12})$ ne préserve pas \mathcal{A} , alors ρ est encore cyclique.*

Si $\rho(\mathcal{B}_{12})$ ne préserve pas \mathcal{A} , il est clair qu'il existe une courbe $a' \in \mathcal{A}$ et une mapping class $F \in \mathcal{G}$ tels que $F(a')$ n'appartienne pas à \mathcal{A} . Quitte à conjuguer F par une puissance de D , on peut supposer sans perte de généralité que $a' = a_0$. Or pour tout $i \in \{0\} \cup \{2, 3, \dots, 10\}$, la mapping class A_i commute avec A_0 , donc préserve $\sigma(A_0)$, donc envoie a_0 dans $\sigma(\mathcal{G})$. Or d'après l'étape 5°), $\sigma(\mathcal{G})$ est inclus dans $\mathcal{A} \cup \sigma(D)$, c'est-à-dire que $\sigma(\mathcal{G})$ est inclus dans \mathcal{A} si $\sigma(D) \setminus \mathcal{A} = \emptyset$, ou dans $\mathcal{A} \cup \mathcal{J}.c_0$ si $\sigma(D) \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$. Or si $\sigma(D) \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{J}.c_0$ est stable par $\rho(\mathcal{B}_{12})$ d'après l'étape 6°) donc A_i ne peut pas envoyer a_0 dans $\mathcal{J}.c_0$. Donc dans tous les cas, A_i envoie a_0 dans \mathcal{A} . Or on a vu que $F(a_0)$ n'appartenait pas à \mathcal{A} , donc $F \in \{A_1, A_{11}\}$. Quitte à conjuguer F par $A_{11}(A_0A_{11})(A_1A_0A_{11})$, on peut supposer sans perte de généralité que $F = A_1$. Résumons : on a montré que

$$\text{si } \rho(\mathcal{B}_{12}) \text{ ne préserve pas } \mathcal{A}, \text{ alors } A_1(a_0) \text{ n'appartient pas à } \mathcal{A}. \quad (2)$$

Cela implique que

$$\text{sp}(a_0) \subset \{A_0, A_2\}, \quad (3)$$

car sinon, il existerait $j \in \{3, 4, \dots, 11\}$ tel que $a_0 \in \sigma(A_j)$ et comme on vient de le voir, on en déduirait que $A_1(a_0)$ appartiendrait à \mathcal{A} , ce qui contredirait (2). Or par définition de a_0 , A_0 appartient à $\text{sp}(a_0)$. Donc (3) implique que $\text{sp}(a_0) \in \{\{A_0\}, \{A_0, A_2\}\}$, d'où par équivariance,

$$\text{ou } \left. \begin{array}{l} \text{pour tout } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \text{ on a } \text{sp}(a_i) = \{A_i\}; \\ \text{pour tout } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \text{ on a } \text{sp}(a_i) = \{A_i, A_{i+2}\}. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Pour tout $\ell \in \{4, 5, \dots, 11\}$ et tout $\varepsilon \in \{1, 2\}$, A_ε et A_ℓ commutent, donc $A_\varepsilon(a_\ell)$ appartient à $\sigma(A_\ell)$, lui-même inclus dans $\sigma(\mathcal{G})$. Or d'après le 5°), $\sigma(\mathcal{G})$ est inclus dans $\mathcal{A} \cup \sigma(D)$, donc $A_\varepsilon(a_\ell)$ appartient à \mathcal{A} ou éventuellement à $\mathcal{J}.c_0$ si $\sigma(D) \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$. Mais on a vu que $\mathcal{J}.c_0$ (sous réserve d'existence) est stable par l'action de \mathcal{B}_{12} d'après l'étape 6°), donc $A_\varepsilon(a_\ell)$ appartient à \mathcal{A} . Montrons que $A_\varepsilon(a_\ell) = a_\ell$. On raisonne de façon différente selon les deux cas évoqués par (4).

- Si $\text{sp}(a_\ell) = \{A_\ell\}$, alors chaque courbe de \mathcal{A} a un spectre réduit à un singleton, et le système de réduction canonique de chaque mapping class de \mathcal{G} ne contient qu'un seul élément de \mathcal{A} , donc puisque $A_\varepsilon(a_\ell) \in \mathcal{A} \cap \sigma(A_\ell)$, il vient que $A_\varepsilon(a_\ell) = a_\ell$.
- Si $\text{sp}(a_\ell) = \{A_\ell, A_{\ell+2}\}$, alors a_ℓ et $a_{\ell-2}$ sont les seules courbes de \mathcal{A} présentes dans $\sigma(A_\ell)$. Donc $A_\varepsilon(a_\ell) = a_\ell$ ou $A_\varepsilon(a_\ell) = a_{\ell-2}$. Si $A_\varepsilon(a_\ell) = a_{\ell-2}$, on aurait $\text{sp}(A_\varepsilon(a_\ell)) = \{A_{\ell-2}, A_\ell\}$. Or A_ε commute avec au moins l'une des deux mapping classes $A_{\ell-2}$ ou $A_{\ell+2}$. Si A_ε commute avec $A_{\ell-2}$, le fait que $A_{\ell-2} \notin \text{sp}(a_\ell)$ implique que $A_{\ell-2} \notin \text{sp}(A_\varepsilon(a_\ell))$; tandis que si A_ε commute avec $A_{\ell+2}$, le fait que $A_{\ell+2} \in \text{sp}(a_\ell)$ implique que $A_{\ell+2} \in \text{sp}(A_\varepsilon(a_\ell))$. Dans les deux cas, le fait que $\text{sp}(A_\varepsilon(a_\ell)) = \{A_{\ell-2}, A_\ell\}$ est contredit, donc $A_\varepsilon(a_\ell) \neq a_{\ell-2}$, donc $A_\varepsilon(a_\ell) = a_\ell$.

Donc A_ε préserve chaque courbe a_ℓ , $4 \leq \ell \leq 11$. Posons

$$\mathcal{A}' = \{a_\ell, 4 \leq \ell \leq 11\}.$$

Considérons la surface $\Sigma_{\mathcal{A}'}$ figure 65. Puisque A_ε préserve chaque courbe de \mathcal{A}' , A_ε ne peut pas permuter les composantes connexes de $\Sigma_{\mathcal{A}'}$. Donc A_ε (rappelons que ε décrit $\{1, 2\}$) induit une mapping class \tilde{A}_ε dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}'})$. Or

$$\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}'}) = \prod_{S \in \text{Comp}(\Sigma_{\mathcal{A}'})} \mathcal{P}\text{Mod}(S),$$

autrement dit, $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}'})$ est un produit direct de mapping class groups de surfaces de genre nul (cf. figure 65). Pour toute composante connexe S de $\Sigma_{\mathcal{A}'}$, les projetés de \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 dans $\mathcal{P}\text{Mod}(S)$ vérifient une relation de tresses, or S est de genre nul, donc on peut appliquer le théorème 7.1. Donc $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$. Finalement, A_1 et A_2 induisent deux mapping classes égales dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}'})$, donc d'après la suite exacte centrale suivante :

$$1 \rightarrow \langle T_{a_i}, 0 \leq i \leq n-1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}_{\mathcal{A}'}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\mathcal{A}'}) \rightarrow 1,$$

les mapping classes A_1 et A_2 diffèrent d'un multitwist qui est central dans $\mathcal{P}\text{Mod}_{\mathcal{A}'}(\Sigma)$, donc A_1 et A_2 commutent dans Σ . Or A_1 et A_2 vérifient une relation de tresses, donc finalement, $A_1 = A_2$, autrement dit, ρ est cyclique. \square

Corollaire 9.21. *Soit n un entier supérieur ou égal à 6, soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et soit un morphisme non cyclique ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. Alors, tout simplexe de courbes sur lequel un sous-groupe de \mathcal{J} agit transitivement possède strictement moins de $2g$ courbes.*

Démonstration. D'après le lemme 9.19, un tel simplexe \mathcal{A} possède strictement moins de $2g$ courbes, sauf si $g = 6$ et $b = 0$ ou \mathcal{A} peut comporter 12 courbes. Mais d'après le lemme 9.20,

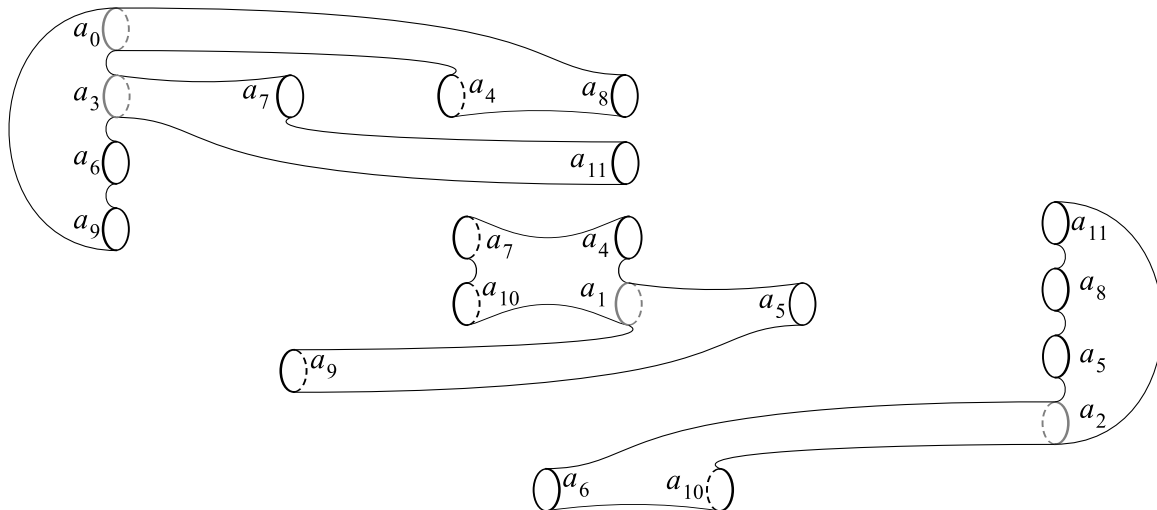


FIG. 65 – La surface $\Sigma_{\mathcal{A}'}$ est une réunion disjointe de surfaces de genre nul.

le fait que ρ ne soit pas cyclique interdit que \mathcal{A} comporte 12 courbes. Ceci prouve le corollaire. \square

On peut maintenant prouver la proposition 9.3. Rappelons que $n \geq 6$, $\Sigma = \Sigma_{g,b}$ où g et b sont des entiers tels que $g \leq n/2$, et ρ est un morphisme non cyclique de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$.

Proposition 9.3. *Soit a une courbe de $\sigma(\mathcal{G})$. Alors $\mathcal{J}.a$ contient au plus n courbes. Le cas limite $|\mathcal{J}.a| = n$ ne peut être atteint que lorsque $\mathcal{J}.a$ n'est pas un simplexe.*

Démonstration. Soit a une courbe de $\sigma(\mathcal{G})$. Si l'orbite $\mathcal{J}.a$ est un simplexe de courbes, le corollaire 9.21 s'applique et $\mathcal{J}.a$ possède strictement moins de $2g$ courbes, donc strictement moins de n courbes.

Si $\mathcal{J}.a$ n'est pas un simplexe, montrons que $|\mathcal{J}.a| \leq n$. On peut supposer sans perte de généralité que $a \in \sigma(A_0)$, autrement dit, $\text{sp}(a) \supset \{A_0\}$. Pour tout $k \in \{0\} \cup \{2, \dots, n-2\}$, les mapping classes A_0 et A_k commutent, donc d'après la proposition 3.40, $I(\sigma(A_0), \sigma(A_k)) = 0$, donc $I(a, \delta^k.a) = 0$. Or $\mathcal{J}.a$ n'est pas un simplexe. Donc a intersecte l'une des courbes de $\mathcal{J}.a$ qui appartient nécessairement à $\sigma(A_{n-1})$ ou $\sigma(A_1)$. Ces deux cas de figure sont symétriques et l'on peut supposer sans perte de généralité que $I(a, \sigma(A_1)) \neq 0$. Alors, puisque A_0 et A_2 sont les seules mapping classes à ne pas commuter avec A_1 , et que $I(a, \sigma(A_1)) \neq 0$, on en déduit que $\text{sp}(a) \subset \{A_0, A_2\}$. Soit k le plus petit entier positif non nul tel que $\delta^k.a = a$. L'entier k vérifie $\delta^k.\text{sp}(a) = \text{sp}(a)$, mais puisque $\text{sp}(a) \subset \{A_0, A_2\}$, il faut que k soit un multiple de n . Soit p l'entier $\frac{k}{n}$, de sorte que $|\mathcal{J}.a| = pn$.

Notons $\mathcal{K} = \langle \delta^2 \rangle$. Puisque $|\mathcal{J}.a| = pn$, on a $|\mathcal{K}.a| = p\frac{n}{2} \geq pg$. Or l'ensemble $\mathcal{K}.A_0 = \{A_i, i \in \text{Pair}(n)\}$ est constitué d'éléments commutant deux à deux, donc $\sigma(\mathcal{K}.A_0)$ est un simplexe, donc $\mathcal{K}.a$, qui est inclus dans $\sigma(\mathcal{K}.A_0)$, est aussi un simplexe. Autrement dit, $\mathcal{K}.a$ est un simplexe de courbes sur lequel \mathcal{K} , un sous-groupe de \mathcal{J} , agit transitivement. Donc d'après le corollaire 9.21, $|\mathcal{K}.a| < 2g \leq n$. Donc $p = 1$ et $|\mathcal{J}.a| = n$. \square

9.4 Partition de $\sigma(\mathcal{G})$: la proposition 9.4

Nous allons démontrer la proposition 9.4 dont nous rappelons l'énoncé.

Proposition 9.4 (Partition de $\sigma(\mathcal{G})$).

Toute courbe a appartenant à $\sigma(\mathcal{G})$ vérifie soit toutes les propriétés de gauche (1g) - (6g), soit toutes les propriétés de droite (1d) - (6d).

$$(1g) \quad I(a, \delta.a) = 0 \quad ; \quad I(a, \delta.a) \neq 0 \quad (1d)$$

$$(2g) \quad |\text{sp}(a)| \geq 2 \quad ; \quad |\text{sp}(a)| = 1 \quad (2d)$$

$$(3g) \quad I(a, \sigma(\mathcal{G})) = 0 \quad ; \quad I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0 \quad (3d)$$

$$(4g) \quad \forall k, \text{sp}(a) \not\subset \{A_k, A_{k+2}\} \quad ; \quad \exists k \mid \text{sp}(a) \subset \{A_k, A_{k+2}\} \quad (4d)$$

$$(5g) \quad |\mathcal{J}.a| < n \quad ; \quad |\mathcal{J}.a| = n \quad (5d)$$

$$(6g) \quad \mathcal{J}.a \text{ est un simplexe} \quad ; \quad \mathcal{J}.a \text{ n'est pas un simplexe} \quad (6d)$$

Remarquons que chacune des six lignes du tableau de la proposition contient deux assertions contraires (compte tenu du fait que $|\mathcal{J}.a| \leq n$ vu à la proposition 9.3), de sorte que toute courbe a vérifie exactement une assertion par ligne. Nous allons montrer que toutes les assertions de droite sont équivalente entre elles. Montrons d'abord le cycle (1d) \Rightarrow (3d) \Rightarrow (4d) \Rightarrow (5d) \Rightarrow (6d) \Rightarrow (1d).

La première implication est triviale.

Etape 1 : (1d) \Rightarrow (3d). Toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$ telle que $I(a, \delta.a) \neq 0$ vérifie a fortiori $I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0$. \square

Etape 2 : (3d) \Rightarrow (4d). Pour toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$, montrons que si $I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0$, alors il existe un entier k tel que $\text{sp}(a) \subset \{A_k, A_{k+2}\}$.

Démonstration. Puisque $I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0$, il existe un entier k tel que $I(a, \sigma(A_{k+1})) \neq 0$. Or pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{k, k+2\}$, les mapping classes A_{k+1} et A_i commutent, donc d'après la proposition 3.40, $I(\sigma(A_1), \sigma(A_i)) = 0$, donc $a \notin \sigma(A_i)$. Ainsi $\text{sp}(a) \subset \{A_k, A_{k+2}\}$. \square

Etape 3 : (4d) \Rightarrow (5d). Pour toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$, montrons que s'il existe un entier k tel que $\text{sp}(a) \subset \{A_k, A_{k+2}\}$, alors $|\mathcal{J}.a| = n$.

Démonstration. Supposons par exemple qu'il existe un entier k tel que $\text{sp}(\delta^k.a) = \{A_0, A_2\}$ (la situation est encore plus simple si $\text{sp}(\delta^k.a)$ est un singleton). Alors pour tout entier i , $\text{sp}(\delta^{k+i}.a) = \{A_i, A_{i+2}\}$. Or $\delta^i.a = a$ seulement si $\text{sp}(\delta^{k+i}.a) = \text{sp}(\delta^k.a)$, donc seulement si i est un multiple de n . Donc $|\mathcal{J}.a| \geq n$. Donc, d'après la proposition 9.3, $|\mathcal{J}.a| = n$. \square

L'étape 4 découle de la proposition 9.3.

Etape 4 : (5d) \Rightarrow (6d). Pour toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$, si $|\mathcal{J}.a| = n$, alors $\mathcal{J}.a$ n'est pas un simplexe. \square

Etape 5 : (6d) \Rightarrow (1d). Toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$ telle que $\mathcal{J}.a$ n'est pas un simplexe vérifie $I(a, \delta.a) \neq 0$.

Démonstration. Partons d'une courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$, et notons \mathcal{A} son orbite $\mathcal{J}.a$. On a :

$$\begin{aligned}
I(\mathcal{A}, \mathcal{A}) &= \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} I(\delta^i.a, \delta^j.a) && \text{par définition de } I(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \\
&= \sum_{0 \leq i, k \leq n-1} I(\delta^i.a, \delta^{i+k}.a) && \text{par changement de variables,} \\
&= \sum_{0 \leq i, k \leq n-1} I(a, \delta^k.a) && \text{car pour tous } i, k, \text{ on a } I(\delta^i.a, \delta^{i+k}.a) = I(a, \delta^k.a), \\
&= n \sum_{0 \leq k \leq n-1} I(a, \delta^k.a) && \text{en rassemblant les termes semblables,} \\
&= n (I(a, \delta.a) + I(a, \delta^{-1}.a)) && \text{en ne gardant que les termes non nuls car dès que } k \neq \\
& && \pm 1, \text{ les courbes } a \text{ et } \delta^k.a \text{ appartiennent aux systèmes} \\
& && \text{de réduction canoniques de deux mapping classes qui} \\
& && \text{commutent, donc sont d'intersection nulle,} \\
&= 2n I(a, \delta.a) && \text{car } I(a, \delta.a) = I(a, \delta^{-1}.a).
\end{aligned}$$

Donc si \mathcal{A} n'est pas un simplexe, autrement dit si $I(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \neq 0$, alors $I(a, \delta.a) \neq 0$. \square

On achève la démonstration de la proposition 9.4 en montrant les implications

$$(1d) \Rightarrow (2d) \Rightarrow (4d).$$

Etape 6 : (1d) \Rightarrow (2d). Toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$ telle que $I(a, \delta.a) \neq 0$ vérifie $|\text{sp}(a)| = 1$.

Démonstration. Si $I(a, \delta.a) \neq 0$, en faisant agir δ^{-1} sur le couple $(a, \delta.a)$, on obtient $I(\delta^{-1}.a, a) \neq 0$. Soit i un entier compris entre 0 et $n-1$ tel que $a \in \sigma(A_i)$. Alors on a $\delta.a \in \sigma(A_{i+1})$ et $\delta^{-1}.a \in \sigma(A_{i-1})$. Donc d'après la proposition 3.40, l'inégalité $I(a, \delta.a) \neq 0$ implique l'inclusion $\text{sp}(a) \subset \{A_i, A_{i+2}\}$ et de même, l'inégalité $I(\delta^{-1}.a, a) \neq 0$ implique l'inclusion $\text{sp}(a) \subset \{A_{i-2}, A_i\}$. Finalement, on a $\text{sp}(a) = \{A_i\}$. \square

La dernière implication est triviale.

Etape 7 : (2d) \Rightarrow (4d). Pour toute courbe $a \in \sigma(\mathcal{G})$ telle que $|\text{sp}(a)| = 1$, il existe un entier k tel qu'on ait $\text{sp}(a) \subset \{A_k, A_{k+2}\}$. \square

Rappelons la définition 9.5, cruciale pour les chapitres suivants.

Définition 9.5 (Courbes normales, courbes spéciales).

– Une courbe a appartenant à $\sigma(\mathcal{G})$ sera dite *spéciale* si elle vérifie $I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0$, autrement dit si elle vérifie les assertions de droite de la proposition 9.4. On note $\sigma_s(\mathcal{G})$ l'ensemble des courbes spéciales et on pose $\sigma_s(A) = \sigma_s(\mathcal{G}) \cap \sigma(A)$.

– Une courbe a appartenant à $\sigma(\mathcal{G})$ sera dite *normale* si elle vérifie $I(a, \sigma(\mathcal{G})) = 0$, autrement dit si elle vérifie les assertions de gauche de la proposition 9.4. On note $\sigma_n(\mathcal{G})$ l'ensemble des courbes normales et on pose $\sigma_n(A) = \sigma_n(\mathcal{G}) \cap \sigma(A)$.

9.5 Résultats de stabilité et existence des courbes spéciales

Ce paragraphe est consacré aux propositions 9.6, 9.7 et 9.9.

Proposition 9.6 (Stabilité des courbes spéciales).

- i) L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ est \mathcal{J} -stable.
- ii) Pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, l'ensemble $\sigma_s(A_i)$ est stable par tout élément de $\mathcal{G} \setminus \{A_{i-1}, A_{i+1}\}$.

Démonstration.

Montrons la partie i).

Pour tout a appartenant à $\sigma_s(\mathcal{G})$, on a $I(a, \delta.a) \neq 0$, autrement dit, du point de vue de la courbe $\delta.a$, on a $I(\delta.a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0$. Comme par ailleurs, \mathcal{G} est stable par l'action de δ via ρ , la courbe $\delta.a$ appartient à $\sigma(\mathcal{G})$, donc finalement, elle appartient à $\sigma_s(\mathcal{G})$. Donc $\sigma_s(\mathcal{G})$ est \mathcal{J} -stable.

Montrons la partie ii).

Pour simplifier la démonstration, posons $i = 0$. Soit a une courbe spéciale de $\sigma_s(A_0)$. Soit j un entier compris entre 3 et $n-2$ de sorte que A_j commute avec A_0 et A_1 . Alors $A_j(a) \in \sigma(A_0)$ et $A_j(\delta.a) \in \sigma(A_1)$. Or a est spéciale, donc $I(a, \delta.a) \neq 0$, donc en appliquant A_j au couple $(a, \delta.a)$, on obtient $I(A_j(a), \sigma(A_1)) \neq 0$, donc $A_j(a) \in \sigma_s(A_0)$.

De façon symétrique, lorsque $j = 2$, en remplaçant $\delta.a$ par $\delta^{-1}.a$, on montre que $I(A_2(a), \sigma(A_{n-1})) \neq 0$, donc $A_2(a) \in \sigma_s(A_0)$.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas $j = 0$. On a toujours $a \in \sigma_s(A_0)$ et de plus $A_0(a) \in \sigma(A_0)$. On souhaite montrer que $A_0(a)$ est une courbe spéciale. On va montrer que $|\mathcal{J}.(A_0(a))| = n$, ce qui est suffisant d'après la proposition 9.4. Pour commencer, on a $\text{sp}(a) = \{A_0\}$, or pour tout $\ell \in \{2, \dots, n-2\}$, la mapping class A_ℓ commute avec A_0 et $a \notin \sigma(A_\ell)$, donc $A_0(a) \notin \sigma(A_\ell)$. Donc on a :

$$\{A_0\} \subset \text{sp}(A_0(a)) \subset \{A_{n-1}, A_0, A_1\}.$$

Donc pour tout entier k , $\delta^k.\text{sp}(A_0(a)) = \text{sp}(A_0(a))$ si et seulement si k est un multiple de n , donc si $\delta^k.A_0(a) = A_0(a)$ alors k est un multiple de n , donc $|\mathcal{J}.(A_0(a))| \geq n$. Donc d'après la proposition 9.3, on a $|\mathcal{J}.(A_0(a))| = n$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Proposition 9.7 (Stabilité des courbes normales).

L'ensemble $\sigma_n(\mathcal{G})$ est \mathcal{B}_n -stable et les actions de \mathcal{B}_n via ρ sur $\sigma_n(\mathcal{G})$, sur $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ et sur $\text{Bord}(\Sigma_{\sigma_n(\mathcal{G})})$ sont cycliques.

Démonstration. Rappelons que d'après la proposition 9.4, $\sigma_n(\mathcal{G})$ est un simplexe. Alors si l'on montre que $\sigma_n(\mathcal{G})$ est \mathcal{B}_n -stable, on pourra appliquer la proposition 9.2 (selon laquelle toute action de \mathcal{B}_n sur un simplexe de courbes \mathcal{B}_n -stable est cyclique) et en déduire la proposition 9.7. Soit a une courbe normale. Nous allons montrer que :

- 1°) On montre que $A_1(a)$ appartient à $\sigma(\mathcal{G})$.
- 2°) On montre que $A_1(a)$ n'est pas spéciale, donc est normale.
- 3°) On en déduit que $\sigma(\mathcal{G})$ est \mathcal{B}_n -stable.

1°) Soit donc a une courbe normale. D'après le (2g) de la proposition 9.4, $\text{sp}(a)$ contient au moins deux éléments A_i et A_j avec $0 \leq i < j \leq n-1$, et d'après le (4g) de la même proposition, on peut supposer que $j \notin \{i+2, i+n-2\}$, en particulier $\{i, j\} \neq \{0, 2\}$. On en déduit que A_1 commute avec au moins l'une des deux mapping classes A_i et A_j , donc $A_1(a) \in \sigma(\mathcal{G})$.

2°) Supposons que $A_1(a)$ soit spéciale. Alors $A_1(a)$ appartient à $\sigma_s(A_0)$ ou à $\sigma_s(A_2)$, car autrement, d'après la proposition 9.6.ii), $A_1^{-1}(A_1(a))$ serait encore une courbe spéciale, ce qui est absurde car $A_1^{-1}(A_1(a)) = a$ qui est une courbe normale. La situation étant symétrique, on peut supposer que

$$A_1(a) \in \sigma_s(A_0). \tag{1}$$

Ayant supposé que $A_1(a)$ était spéciale, on a $I(A_1(a), \delta.A_1(a)) \neq 0$, donc

$$I(a, A_1^{-1}(\delta.A_1(a))) \neq 0. \tag{2}$$

Or d'après (1), $A_1(a) \in \sigma(A_0)$, donc $\delta.A_1(a) \in \sigma(A_1)$ et $A_1^{-1}(\delta.A_1(a)) \in \sigma(A_1)$. Alors (2) implique :

$$I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0,$$

ce qui est absurde puisque a est une courbe normale.

3°) Nous concluons ainsi : on vient de montrer que $A_1(\sigma_n(\mathcal{G})) = \sigma_n(\mathcal{G})$. Or $\sigma_n(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}) \setminus \sigma_s(\mathcal{G})$ et les deux ensembles $\sigma(\mathcal{G})$ et $\sigma_s(\mathcal{G})$ sont \mathcal{J} -stables (pour $\sigma_s(\mathcal{G})$, c'est la proposition 9.6 qui le dit), donc $\sigma_n(\mathcal{G})$ est \mathcal{J} -stable. Donc pour tout entier i compris entre 1 et $n - 1$, on a $(\rho(\delta^i)A_1\rho(\delta^i)^{-1})(\sigma_n(\mathcal{G})) = \sigma_n(\mathcal{G})$, autrement dit, $A_i(\sigma_n(\mathcal{G})) = \sigma_n(\mathcal{G})$. Or \mathcal{G} engendre $\rho(\mathcal{B}_n)$, donc finalement, $\sigma_n(\mathcal{G})$ est stable par $\rho(\mathcal{B}_n)$. \square

Proposition 9.8 (Spectre des courbes normales).

Le spectre d'une courbe normale est toujours égal à \mathcal{G} .

Démonstration. Soit a une courbe normale. Il existe un entier k tel que la courbe $a' = \rho(\delta^k)(a)$ appartienne à $\sigma(A_0)$. Alors la courbe $(A_0A_1A_0A_3^{-3})(a')$ appartient à $\sigma(A_1)$ car $(A_0A_1A_0A_3^{-3})A_0(A_0A_1A_0A_3^{-3})^{-1} = A_1$. Mais puisque l'action de \mathcal{B}_n est cyclique sur les courbes normales d'après la proposition 9.7, l'action de $(A_0A_1A_0A_3^{-3})$ est triviale et $(A_0A_1A_0A_3^{-3})(a') = a'$, donc la courbe a' elle-même appartient à $\sigma(A_1)$. Le même raisonnement peut être répété de sorte que a' appartient à $\sigma(A_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Alors, en conjuguant cela par $\rho(\delta^{-k})$, il vient que la courbe $a = \rho(\delta^{-k})(a')$ appartient à $\sigma(A_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. La proposition est démontrée. \square

Proposition 9.9 (Existence des courbes spéciales). *L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ n'est pas vide.*

Démonstration. Rappelons que le morphisme ρ est supposé non cyclique. On raisonne par l'absurde en supposant que toutes les courbes de $\sigma(\mathcal{G})$ sont normales.

Tout d'abord, ρ n'est pas cyclique, donc d'après le théorème 8.2, $\sigma(\mathcal{G})$ n'est pas vide. Alors l'ensemble $\sigma(\mathcal{G})$ de courbes (toutes supposées normales) est un simplexe d'après la proposition 9.4, qui est \mathcal{B}_n -stable d'après la proposition 9.7. La proposition 9.2 s'applique au simplexe $\sigma(\mathcal{G})$, autrement dit l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Bord}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})})$ est cyclique et celle de \mathcal{F}_n sur $\text{Bord}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})})$ est triviale. Donc le morphisme ρ induit un morphisme $\bar{\rho}$ de \mathcal{F}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})})$. Or on a l'isomorphisme canonique :

$$\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})}) = \prod_{S \in \text{Comp}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})})} \mathcal{P}\text{Mod}(S).$$

Soit S l'une de ces composantes et soit $\bar{\rho}_S$ le morphisme induit par ρ sur dans $\mathcal{P}\text{Mod}(S)$. Le morphisme $\bar{\rho}_S$ est *irréductible* au sens où pour tout $i \in \{3, \dots, n - 1\}$, l'élément $\tau_i\tau_1^{-1}$ est envoyé sur une mapping class irréductible. En effet, d'après la proposition 3.46, $\sigma(\rho(\tau_i\tau_1^{-1})) \subset \sigma(\rho(\tau_i)) \cup \sigma(\rho(\tau_1^{-1}))$, mais ces deux ensembles $\sigma(\rho(\tau_i))$ et $\sigma(\rho(\tau_1^{-1}))$ ne contiennent aucune courbe dans S , donc $\sigma(\bar{\rho}_S(\tau_i\tau_1^{-1})) = \emptyset$. On dira que $\bar{\rho}_S$ est *périodique* ou *pseudo-Anosov* selon que $\bar{\rho}_S(\tau_3\tau_1^{-1})$ est périodique ou pseudo-Anosov. Notons $A = \bar{\rho}_S(\tau_3\tau_1^{-1})$, $B = \bar{\rho}_S(\tau_4\tau_1^{-1})$, $C = \bar{\rho}_S(\tau_5\tau_1^{-1})$, et $Z = ABACBA$.

Cas où $\bar{\rho}_S$ est pseudo-Anosov⁵ : D'après le théorème 3.32 selon laquelle le centralisateur d'une mapping class pseudo-Anosov est virtuellement infini cyclique, puisque C est dans le centralisateur de A , il existe deux entiers non nuls p et q tels que $A^p = C^q$. En conjuguant cette

⁵On ne peut pas appliquer les résultats du chapitre 8 car \mathcal{F}_n^* peut être isomorphe à \mathcal{B}_4 , or ce cas n'est pas traité par le chapitre 8. D'un autre côté, les arguments utilisés ici auraient paru disproportionnés dans le chapitre 8 lorsque le bord de Σ est non vide, et ne peuvent s'adapter lorsque le bord est vide.

égalité par Z , on obtient $C^p = A^q$. Donc finalement $A^{p^2} = C^{qp} = A^{q^2}$, d'où l'on déduit que $p = q$ ou $p = -q$. Nous allons montrer que chacune de ces deux assertions est absurde. Pour cela, posons $\gamma_{13} = \tau_1\tau_2\tau_1\tau_3\tau_2\tau_1$ et $\gamma_{35} = \tau_3\tau_4\tau_3\tau_5\tau_4\tau_3$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}\gamma_{13} \tau_1 \gamma_{13}^{-1} &= \tau_3 \text{ et } \gamma_{35} \tau_1 \gamma_{35}^{-1} = \tau_1, \\ \gamma_{13} \tau_3 \gamma_{13}^{-1} &= \tau_1 \text{ et } \gamma_{35} \tau_3 \gamma_{35}^{-1} = \tau_5, \\ \gamma_{13} \tau_5 \gamma_{13}^{-1} &= \tau_5 \text{ et } \gamma_{35} \tau_5 \gamma_{35}^{-1} = \tau_3.\end{aligned}$$

Donc en posant $v = \gamma_{13}\gamma_{35}^{-1}$, l'élément v appartient à \mathcal{F}_n et :

$$\begin{aligned}v \tau_1 v^{-1} &= \tau_3, & v \tau_3 v^{-1} &= \tau_5, & v \tau_5 v^{-1} &= \tau_1, \\ v (\tau_3\tau_1^{-1}) v^{-1} &= \tau_5\tau_3^{-1}, & v (\tau_5\tau_3^{-1}) v^{-1} &= \tau_1\tau_5^{-1}, & v (\tau_1\tau_5^{-1}) v^{-1} &= \tau_3\tau_1^{-1}.\end{aligned}$$

Alors en posant $U = \rho_S(v)$:

$$\begin{aligned}\text{on a :} & & UAU^{-1} &= CA^{-1}, & U(CA^{-1})U^{-1} &= C^{-1}, & UC^{-1}U^{-1} &= A, \\ \text{donc si } C^p &= A^p : & UA^pU^{-1} &= \text{Id}, & U(\text{Id})U^{-1} &= A^{-p}, & UA^{-p}U^{-1} &= A^p, \\ \text{et si } C^p &= A^{-p} : & UA^pU^{-1} &= A^{-2p}, & U(A^{-2p})U^{-1} &= A^p, & UA^pU^{-1} &= A^p.\end{aligned}$$

Alors si $C^p = A^p$, A^p est égal à Id, ce qui est absurde car A est pseudo-Anosov, et si $C^p = A^{-p}$, on a $UA^pU^{-1} = A^p$ et $UA^pU^{-1} = A^{-2p}$ d'où $A^p = A^{-2p}$, donc $A^{3p} = \text{Id}$: absurde. Donc ρ_S n'est pas pseudo-Anosov.

Cas où $\bar{\rho}_S$ est périodique. Remarquons que les mapping classes A, B, C sont conjuguées. Elle sont donc périodiques de même ordre. Appelons m cet ordre. On restreint le morphisme $\bar{\rho}_S$ à la source à \mathcal{F}_n^* , isomorphe à \mathcal{B}_{n-2} . D'après la proposition 5.12, on peut relever ce nouveau morphisme de \mathcal{F}_n^* dans $\mathcal{PMod}(S)$ en un morphisme $\tilde{\rho}_S$ de \mathcal{F}_n^* dans $\mathcal{Mod}(S, \partial S)$. Notons $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, les images par $\tilde{\rho}_S$ de $\tau_3\tau_1^{-1}, \tau_4\tau_1^{-1}, \tau_5\tau_1^{-1}$. Alors \tilde{A}^m et \tilde{C}^m sont des multitwists le long des courbes de $\text{Bord}(S)$. Or ces multitwists sont dans le centre de $\mathcal{Mod}(S, \partial S)$ et par ailleurs, $\tilde{Z}\tilde{A}^m\tilde{Z}^{-1} = \tilde{C}^m$ (où $\tilde{Z} = (\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C})^2$), donc $\tilde{A}^m = \tilde{C}^m$. Par conséquent, $\tilde{A}\tilde{C}^{-1}$ vérifie $(\tilde{A}\tilde{C}^{-1})^m = 1$ dans $\mathcal{Mod}(S, \partial S)$. Mais $\mathcal{Mod}(S, \partial S)$ est sans torsion, donc $\tilde{A}\tilde{C}^{-1}$ est trivial et $\tilde{A} = \tilde{C}$. En revenant à $\mathcal{PMod}(S)$, on a démontré que $\bar{\rho}_S(\tau_3\tau_1^{-1}) = \bar{\rho}_S(\tau_5\tau_1^{-1})$.

Or ceci est vrai pour toutes les composantes connexes S de $\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})}$, donc en revenant au morphisme $\bar{\rho} : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})})$, on a montré que $\bar{\rho}(\tau_3\tau_1^{-1}) = \bar{\rho}(\tau_5\tau_1^{-1})$. Alors $\bar{\rho}(\tau_5\tau_3^{-1})$ est l'identité de $\mathcal{PMod}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})})$. Rappelons que \mathcal{B}_n stabilise $\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})}$. Alors par conjugaison dans \mathcal{B}_n , on en déduit que le morphisme $\bar{\rho} : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma_{\sigma(\mathcal{G})})$ est trivial. Donc l'image de la restriction du morphisme ρ à \mathcal{F}_n^* dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est incluse dans le groupe abélien engendré par les twists de Dehn le long des courbes de $\sigma(\mathcal{G})$. Donc la restriction de ρ à \mathcal{F}_n^* est un morphisme cyclique d'après le lemme 5.3. On en déduit que $\rho(\tau_5\tau_3^{-1})$ est l'identité, donc que $\rho(\tau_3) = \rho(\tau_5)$, et enfin que ρ est un morphisme cyclique d'après le lemme 5.2. C'est contraire aux hypothèses de début de preuve, donc la proposition est démontrée. \square

9.6 Ce qu'il faut retenir des courbes normales et spéciales

Rappelons-en la définition :

Définition 9.5 (Courbes normales, courbes spéciales).

On dira qu'une courbe a appartenant à $\sigma(\mathcal{G})$ est *spéciale* si elle vérifie $I(a, \sigma(\mathcal{G})) \neq 0$, et qu'elle est normale si elle vérifie $I(a, \sigma(\mathcal{G})) = 0$. On note $\sigma_s(\mathcal{G})$ l'ensemble des courbes spéciales, et $\sigma_n(\mathcal{G})$ l'ensemble des courbes normales. De plus, pour tout $A \in \mathcal{G}$, on notera

$$\begin{aligned}\sigma_n(A) &= \sigma_n(\mathcal{G}) \cap \sigma(A), \\ \sigma_s(A) &= \sigma_s(\mathcal{G}) \cap \sigma(A).\end{aligned}$$

Les résultats à retenir sur les courbes normales et spéciales sont les suivants :

Proposition 9.22 (Caractérisations et propriétés des courbes normales et des courbes spéciales).
Soit a une courbe de $\sigma(\mathcal{G})$. Alors :

- i) Les assertions suivantes sont équivalentes, elles sont vérifiées par les courbes spéciales et elles seulement parmi les courbes de $\sigma(\mathcal{G})$:*
 - $|\text{sp}(a)| = 1$ (en particulier, on a la partition $\sigma_s(\mathcal{G}) = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \sigma_s(A_i)$),
 - $I(a, \delta.a) = I(a, \delta^{-1}.a) \neq 0$,
 - $|\mathcal{J}.a| = n$.
- ii) Les assertions suivantes sont équivalentes, elles sont vérifiées par les courbes normales et elles seulement parmi les courbes de $\sigma(\mathcal{G})$:*
 - $\text{sp}(a) = \mathcal{G}$ (en particulier, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a $\sigma_n(A_i) = \sigma_n(\mathcal{G})$),
 - $I(\mathcal{J}.a, \mathcal{J}.a) = 0$,
 - $|\mathcal{J}.a| < n$.
- iii) Les courbes de $\sigma(\mathcal{G})$ se répartissent ainsi :*
 - $\sigma_s(\mathcal{G})$ est non vide et contient n ou $2n$ courbes,
 - $\sigma(\mathcal{G})$ admet la partition : $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma_s(\mathcal{G}) \sqcup \sigma_n(\mathcal{G})$.
- iv) Les courbes de $\sigma(\mathcal{G})$ vérifient les propriétés de stabilité suivantes :*
 - $\sigma_n(\mathcal{G})$ est stable par l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Courb}(\Sigma)$ et la restriction de cette action sur $\sigma_n(\mathcal{G})$ est cyclique : pour tout $a \in \sigma_n(\mathcal{G})$ et tous entiers i et j compris entre 0 et $n-1$, on a $A_i(a) = A_j(a)$.
 - $\sigma_s(\mathcal{G})$ est stable par l'action de \mathcal{J} sur $\text{Courb}(\Sigma)$.

Démonstration. Les assertions du i) proviennent de la proposition 9.4, celles du ii) proviennent des propositions 9.4 et 9.8, celles du iii) proviennent des propositions 9.4 et 9.9, excepté pour le calcul du cardinal de $\sigma_s(\mathcal{G})$ que l'on développe ci-dessous. Enfin les assertions du iv) proviennent des propositions 9.6 et 9.7 concernant les résultats de stabilité. Le cardinal des orbites pour les courbes spéciales provient de la proposition 9.4.

Montrons que le cardinal de $\sigma_s(\mathcal{G})$ vaut n ou $2n$. Puisque $\sigma_s(\mathcal{G}) = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \sigma_s(A_i)$ et puisque $\delta.\sigma_s(A_i) = \sigma_s(A_{i+1})$ d'après la proposition 9.6, le cardinal de $\sigma_s(\mathcal{G})$ est égal à n fois celui de $\sigma_s(A_0)$. Or $\sigma_s(A_0)$ contient une ou deux courbes car d'une part, il ne peut pas en contenir zéro sinon $\sigma_s(\mathcal{G})$ serait vide, et d'autre part, il ne peut pas en contenir trois ou plus comme nous allons le montrer. Si $\sigma_s(A_0)$ contenait au moins trois courbes, l'ensemble de courbes $\sigma_s(A_0) \cup \sigma_s(A_2) \cup \dots \cup \sigma_s(A_{n-2})$ serait un simplexe \mathcal{A} d'au moins $\frac{3n}{2}$ courbes qui serait stable par l'action de $\langle \delta^2 \rangle$ sur $\text{Courb}(\Sigma)$. Or les orbites incluses dans \mathcal{A} sous l'action de $\langle \delta^2 \rangle$ contiennent au minimum $\frac{n}{2} \geq 3$ courbes, donc on peut appliquer la proposition 7.5 : après avoir rebouché les bords de Σ , le simplexe \mathcal{A} contient encore au moins $\frac{3n}{2}$ courbes deux à deux distinctes. Or $\frac{3n}{2} \geq 3g$ tandis que le cardinal de tout simplexe dans une surface sans bord de genre g est majoré par $3g - 3$. C'est la contradiction attendue. \square

10 Les courbes spéciales ne sont pas séparantes

Rappelons que n est un entier pair supérieur ou égal à 6, Σ est la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$, et ρ est un morphisme non cyclique de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ tel que $\sigma_p(\mathcal{G})$ est vide. D'après la proposition 9.9, l'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ n'est pas vide.

10.1 Plan du chapitre et résultats démontrés

Dans ce chapitre, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 10.1. *Les courbes de $\sigma_s(\mathcal{G})$ ne sont pas séparantes.*

- Au paragraphe 10.2, nous présentons un sous-ensemble \mathcal{X} de \mathcal{G} , stable sous l'action de \mathcal{H} via ρ où \mathcal{H} est un sous-groupe de \mathcal{B}_n . L'intérêt de cet ensemble \mathcal{X} vis-à-vis de \mathcal{G} est que l'action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} est bien plus riche que celle de \mathcal{J} sur \mathcal{G} . En effet, l'action de \mathcal{J} sur \mathcal{G} est cyclique puisque \mathcal{J} est cyclique, tandis que \mathcal{H} agit r fois transitivement sur \mathcal{X} où r est le cardinal de \mathcal{X} . En contre-partie, \mathcal{X} est plus petit que \mathcal{G} .

- Le paragraphe 10.3 est consacré à la démonstration de la proposition 10.1. La preuve sera topologique et la borne de $\frac{n}{2}$ sur le genre de Σ est essentielle ici. S'il fallait prouver le même résultat avec l'hypothèse affaiblie $g \leq \frac{n}{2} + 1$, l'argument invoqué dans ce chapitre devrait être abandonné et il faudrait chercher des raisons plus profondes, mais nous conjecturons que le résultat resterait vrai.

10.2 Le sous-groupe \mathcal{H} de \mathcal{B}_n et son action sur le sous-ensemble \mathcal{X} de \mathcal{G}

Définition 10.2 (Le sous-ensemble $\text{Imp}(n)$ de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ et le sous-ensemble \mathcal{X} de \mathcal{G}).
Pour tout entier positif m non nul, soit $\text{Imp}(m)$ l'ensemble des premiers entiers impairs inférieurs ou égaux à m . Soit $\mathcal{X} = \{A_i, i \in \text{Imp}(n)\}$ le sous-ensemble de \mathcal{G} . On note $\sigma(\mathcal{X}) = \cup_{i \in \text{Imp}(n)} \sigma(A_i)$ l'ensemble de courbes associé.

Remarque. Les éléments de \mathcal{X} commutent deux à deux. L'ensemble \mathcal{X} engendre un groupe abélien, donc l'ensemble $\sigma(\mathcal{X})$ est un simplexe de courbes.

Définition 10.3 (Le sous-groupe \mathcal{H} de \mathcal{B}_n).

Pour tout entier i appartenant à $\text{Imp}(n)$, posons

$$\gamma_i = \tau_i \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+2} \tau_i \tau_{i+1} \tau_i,$$

où pour tout entier k , τ_k désigne le générateur standard τ_ℓ où ℓ est le reste de la division euclidienne de k par n . Le groupe \mathcal{H} est le sous-groupe de \mathcal{B}_n défini par

$$\mathcal{H} := \langle \gamma_i, i \in \text{Imp}(n) \rangle.$$

Proposition 10.4 (Propriétés du groupe \mathcal{H}).

i) L'action de \mathcal{H} par conjugaison via ρ sur $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ préserve \mathcal{X} .

- ii) Le morphisme $\mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{X})$ décrivant l'action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} , où $\mathfrak{S}(\mathcal{X})$ est le groupe symétrique sur les éléments de \mathcal{X} , est surjectif. En particulier, cette action est $\frac{n}{2}$ fois transitive.
- iii) L'action de \mathcal{H} sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\sigma_s(\mathcal{X})$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, l'élément γ_i agit par conjugaison sur $\{\tau_j, j \in \text{Imp}(n)\}$ de \mathcal{B}_n de la façon suivante :

$$\gamma_i \tau_j \gamma_i^{-1} = \begin{cases} \tau_j & \text{si } j \notin \{i, i+2\} ; \\ \tau_{j-2} & \text{si } j = i+2 ; \\ \tau_{j+2} & \text{si } j = i . \end{cases}$$

On en déduit ceci :

- i) Le groupe \mathcal{H} agit par conjugaison sur \mathcal{B}_n et préserve l'ensemble $\{\tau_j, j \in \text{Imp}(n)\}$, donc le groupe \mathcal{H} agit via ρ sur $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ et préserve \mathcal{X} .
- ii) Pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, le morphisme $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{X})$, où $\mathfrak{S}(\mathcal{X})$ est le groupe symétrique sur les éléments de \mathcal{X} , envoie γ_i sur la transposition qui échange A_i et A_{i+2} , donc $\phi(\mathcal{H})$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathcal{X})$ contenant $\frac{n}{2} - 1$ transpositions à supports disjoints, donc ϕ est surjectif.
- iii) L'action de \mathcal{H} sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\sigma(\mathcal{X})$ puisque l'action de \mathcal{H} sur $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ préserve \mathcal{X} . Or l'action de \mathcal{B}_n sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\sigma_n(\mathcal{G})$ d'après la proposition 9.7, donc l'action de \mathcal{H} sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve elle aussi $\sigma_n(\mathcal{G})$, donc préserve également le complémentaire de $\sigma_n(\mathcal{G})$ dans $\sigma(\mathcal{X})$, qui n'est autre que $\sigma_s(\mathcal{X})$. \square

10.3 Démonstration de la proposition 10.1

Nous allons montrer la proposition :

Proposition 10.1. *Les courbes de $\sigma_s(\mathcal{G})$ ne sont pas séparantes.*

On aura besoin de la définition de *bord spécial* d'une sous-surface. Profitons-en pour rappeler celle de *bord naturel* :

Définition 10.5 (Bord naturel et bord spécial).

Soit n un entier pair supérieur ou égal à 6, soient Σ une surface et ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$. Soit \mathcal{A} un simplexe de courbes inclus dans $\text{Courb}(\Sigma)$. Pour toute sous-surface S de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$, un bord d de S sera dit *naturel* s'il appartient à $\text{Bord}(\Sigma)$, et sera dit *spécial* s'il appartient à $\sigma_s(\mathcal{G})$.

On va procéder en cinq étapes.

Etape 1. *S'il existe dans $\sigma_s(\mathcal{G})$ une courbe séparante, alors pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, l'ensemble de courbes $\sigma_s(A_i)$ contient exactement une courbe séparante bordant un tore à une composante de bord (cf. figure 66). Ainsi, Σ est une surface de genre $g = \frac{n}{2}$.*

Démonstration. S'il existe une courbe séparante dans $\sigma_s(\mathcal{G})$, il en existe une dans $\sigma_s(A_1)$ que l'on appelle a_1 . Soit \mathcal{A} l'ensemble de courbe $\mathcal{H}.a_1$. Puisqu'on a $a_1 \in \sigma(\mathcal{X})$ et que \mathcal{X} est \mathcal{H} -stable, l'ensemble \mathcal{A} est inclus dans $\sigma(\mathcal{X})$, donc est un simplexe. Considérons le graphe $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$. Puisque les courbes de \mathcal{A} sont séparantes, si on retire de $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ l'une de ses arêtes, on obtient un graphe disconnexe. Donc le graphe $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$ ne contient aucun cycle : ce graphe est un arbre fini. Il contient donc des feuilles. Soit T une sous-surface de $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$ correspondant à une feuille dans $\Gamma(\Sigma, \mathcal{A})$. Puisque exactement une courbe de \mathcal{A} borde T , T n'est pas stable par

l'action de \mathcal{H} , donc T ne contient aucun bord naturel. Donc T n'a qu'un bord, donc T est de genre non nul. Chaque sous-surface de l'orbite $\mathcal{H}.T$ peut être repérée par la courbe $a \in \mathcal{A}$ qui la borde. Or le nombre de courbes dans \mathcal{A} est au moins égal au cardinal de \mathcal{X} , donc il existe au moins $\frac{n}{2}$ sous-surfaces disjointes homéomorphes à T dans $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(\Sigma)$. Mais Σ est de genre $g \leq \frac{n}{2}$, donc il en existe exactement $\frac{n}{2}$, ces sous-surfaces sont des tores à une composante de bord et Σ est de genre $g = \frac{n}{2}$. Il existe donc exactement $\frac{n}{2}$ courbes dans \mathcal{A} , donc une courbe séparante dans chaque ensemble $\sigma_s(A_i)$, $i \in \text{Imp}(n)$. De plus, le complémentaire de ces $\frac{n}{2}$ tores est une surface de genre nul ayant $\frac{n}{2}$ bords spéciaux et b bords naturels (cf. figure 66). \square

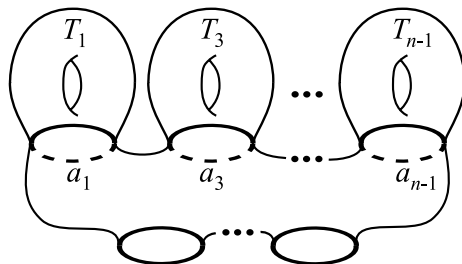


FIG. 66 – La surface Σ et les courbes séparantes a_i , $i \in \text{Imp}(n)$ de $\sigma(\mathcal{X})$.

A partir de maintenant, on se place dans la situation décrite par l'étape 1 et on adopte les notations suivantes.

Notations 10.6 (Situation décrite par l'étape 1).

Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, notons a_i l'unique courbe séparante de $\sigma_s(A_i)$ et T_i le tore à une composante de bord dans Σ bordé par a_i . Notons également S la surface de genre nul obtenue en privant la surface Σ des tores T_i d'indice $i \in \text{Imp}(n)$ (cf. figure 66). Enfin, posons $\text{Pair}(n) = \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \text{Imp}(n)$.

Notations 10.7 (Représentants des classes d'isotopie).

Choisissons des représentants \bar{a}_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ en position minimale d'intersection des courbes a_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ (un tel système de représentants est unique à isotopie près, d'après la proposition 2.3). On en déduit des représentants \bar{S} , \bar{T}_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, des sous-surfaces S , T_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Définition 10.8 (Arcs et chemins d'arcs).

Pour tous i, j, k dans $\{1, 2, 3\}$, notons $\text{Arc}_j^k(i)$ l'ensemble des adhérences des composantes connexes de $\bar{a}_i \setminus (\bar{a}_j \cup \bar{a}_k)$. On dira qu'un élément de $\text{Arc}_j^k(i)$ est un *arc inclus dans \bar{a}_i à extrémités dans \bar{a}_j et \bar{a}_k* .

On appelle *chemin d'arcs* une réunion d'arcs telle que cette réunion soit homéomorphe à un segment ou à un cercle. Dans le premier cas, le chemin d'arc sera dit *ouvert*, dans le deuxième il sera dit *fermé*.

Si une composante connexe D de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$, ou de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$, de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$ est homéomorphe à un disque dont le bord est un chemin d'arcs fermé, chacun des arcs de ce chemin d'arcs sera appelé *côté de D* . Une telle composante à quatre côtés sera appelée un *rectangle*, à six côtés un *hexagone*, et à huit côtés un *octogone*.

Etape 2. Il existe un difféomorphisme \bar{F} de Σ préservant l'orientation et n'intervertissant pas les composantes de bord de Σ tel que

- pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on ait $\bar{F}(\bar{a}_i) = \bar{a}_{4-i}$,
- et pour tout $i \in \{5, 6, \dots, n-1\}$, on ait $\bar{F}(\bar{a}_i) = \bar{a}_i$.

Démonstration. Soit \bar{G} un difféomorphisme représentant la mapping class $\rho(\gamma_1)$ où γ_1 est défini par :

$$\gamma_1 := \tau_1\tau_2\tau_1\tau_3\tau_2\tau_1.$$

Notons $\bar{\mathcal{A}}$ l'ensemble de représentants de courbes $\{\bar{a}_2\} \cup \{\bar{a}_i, i \in \text{Imp}(n)\}$ et $\bar{\mathcal{A}}'$ l'ensemble $\{\bar{G}(\bar{a}_2)\} \cup \{\bar{G}(\bar{a}_i), i \in \text{Imp}(n)\}$. D'après la proposition 10.4,

- pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $\rho(\gamma_1)A_i\rho(\gamma_1)^{-1} = A_{4-i}$,
- et pour tout $i \in \{5, 6, \dots, n-1\}$, on a $\rho(\gamma_1)A_i\rho(\gamma_1)^{-1} = A_i$.

Par ailleurs, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la courbe a_i est l'unique courbe séparante appartenant à $\sigma_s(A_i)$, donc :

- pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la courbe $\bar{G}(\bar{a}_i)$ est isotope à \bar{a}_{4-i} ,
- et pour tout $i \in \{5, 6, \dots, n-1\}$, la courbe $\bar{G}(\bar{a}_i)$ est isotope à \bar{a}_i .

Alors $\bar{\mathcal{A}}$ et $\bar{\mathcal{A}}'$ sont deux ensembles de courbes faiblement isotopes. Rappelons que $\bar{\mathcal{A}}$ est un ensemble de représentants de courbes en position minimale d'intersection, donc ne cobordant pas de bigone. Alors $\bar{\mathcal{A}}'$, en tant qu'image de $\bar{\mathcal{A}}$ par \bar{G} , est lui aussi un ensemble de représentants de courbes ne cobordant pas de bigone, donc est lui aussi ensemble de représentants de courbes en position minimale d'intersection. De plus $\bar{\mathcal{A}}$ est sans intersection triple donc $\bar{\mathcal{A}}'$ également. Alors, d'après la proposition 2.15, $\bar{\mathcal{A}}$ et $\bar{\mathcal{A}}'$ sont dans la même classe d'isotopie forte. Autrement dit, il existe un difféomorphisme isotope à l'identité \bar{H} tel $\bar{H}(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{\mathcal{A}}'$. Alors le difféomorphisme \bar{F} défini par $\bar{F} := \bar{H}^{-1}\bar{G}$ vérifie les assertions de l'énoncé. \square

Etape 3. Les arcs de $\text{Arc}_1^1(2)$ et $\text{Arc}_3^3(2)$ sont inclus respectivement dans \bar{T}_1 et \bar{T}_3 . Autrement dit, les seuls arcs inclus dans $\bar{a}_2 \cap \bar{S}$ appartiennent à $\text{Arc}_1^3(2)$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et considérons un arc $\bar{\ell}$ appartenant à $\text{Arc}_1^1(2)$ et inclus dans \bar{S} . Puisque \bar{S} est de genre nul, $\bar{\ell}$ sépare \bar{S} en deux composantes connexes. L'une d'elles contient le bord \bar{a}_3 . Puisque les courbes \bar{a}_1 et \bar{a}_2 ne cobordent pas de bigone, l'autre composante n'est pas un disque, elle contient donc un bord spécial ou un bord naturel. Dans les deux cas, appelons d ce bord. Finalement, on a un chemin $\bar{\ell}$ séparant \bar{S} en deux composantes, l'une contenant \bar{a}_3 , l'autre contenant d .

De même $\bar{F}(\bar{\ell})$ appartient à $\text{Arc}_3^3(2)$ (car $\bar{\ell}$ appartient à $\text{Arc}_1^1(2)$), est inclus dans \bar{S} et sépare \bar{S} en deux composantes, l'une contenant $\bar{F}(\bar{a}_3)$ qui est égal à \bar{a}_1 , l'autre contenant $\bar{F}(d)$ qui est égal à d .

On en déduit la figure 67 où il est clair que $\bar{\ell}$ et $\bar{F}(\bar{\ell})$ s'intersectent, ce qui est absurde : $\bar{F}(\bar{\ell})$ et $\bar{\ell}$ ne peuvent s'intersecter (transversalement), car ils sont inclus tous deux dans la même courbe. \square

Etape 4. Les composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ sont des rectangles. Les composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$ (respectivement $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$) consistent en exactement un hexagone et un nombre indéterminé de rectangles.

Démonstration.

1°) Composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$.

On peut voir \bar{S} comme un anneau dont les bords sont \bar{a}_1 et \bar{a}_3 , privé de $\frac{n}{2} - 2 + b$ disques ouverts, correspondant aux courbes a_i , $i \in \text{Imp}(n) \setminus \{1, 3\}$ et aux bords de Σ (cf. figure 68). Le

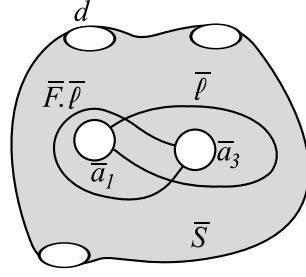


FIG. 67 – L'existence d'un arc $\bar{\ell}$ dans $\text{Arc}_1^1(2)$ induit l'existence d'un arc $\bar{F}(\bar{\ell})$ dans $\text{Arc}_3^3(2)$ intersectant $\bar{\ell}$.

tore \bar{T}_2 ne contient aucune de ces courbes ni aucun de ces bords donc les composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ sont homéomorphes à des disques. Tous les bords d'une composante \bar{C} de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ sont des chemins d'arcs s'appuyant sur les courbes \bar{a}_1 , \bar{a}_2 et \bar{a}_3 . Or on a vu que les arcs inclus dans $\bar{a}_2 \cap \bar{S}$ appartiennent à $\text{Arc}_1^3(2)$. Il est facile de voir que dans un tel anneau, les seuls chemins d'arcs injectifs incluant des arcs appartenant à $\text{Arc}_1^3(2)$ et bordant des disques sont des rectangles : deux côtés appartiennent à $\text{Arc}_1^3(2)$, un côté à $\text{Arc}_2^2(1)$ et un côté à $\text{Arc}_2^2(3)$.

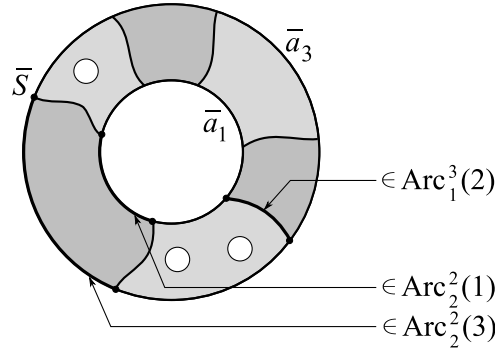


FIG. 68 – La surface \bar{S} est vue comme un anneau, les parties en gris foncé sont les composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$.

2°) *Composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_3)$.*

On peut voir \bar{T}_2 comme le recollement le long d'arcs inclus dans \bar{a}_1 et \bar{a}_3 des composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$, $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ et $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$. Dans cette preuve, nous appelons *domaines* ces composantes connexes. Un domaine de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$ est bordé par des arcs appartenant à $\text{Arc}_2^2(1)$ et à $\text{Arc}_1^1(2)$. Remarquons que dans \bar{T}_1 (comme dans n'importe quel tore à une composante de bord), il existe au plus trois arcs disjoints deux à deux, non isotopes, dont les extrémités appartiennent à $\partial\bar{T}_1$. L'ensemble des arcs de $\text{Arc}_1^1(2)$ contient donc au maximum trois classes d'isotopie (cf. figure 69).

Or les arcs de $\text{Arc}_1^1(2)$ et de $\text{Arc}_2^2(1)$ constituent les bords des domaines de $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2$. On en déduit qu'il n'existe que quatre types de domaines possibles dans \bar{T}_1 : des rectangles, des hexagones, des octogones et *des cylindres à bords bigonaux*, c'est-à-dire des sphères à deux composantes de bords, telles que chacune est un chemin de deux arcs (cf. figure 70).

Les composantes connexes de $\bar{T}_3 \cap \bar{T}_2$ vérifient les même propriétés, puisqu'on les obtient en appliquant le difféomorphisme \bar{F} de l'étape 2 aux composantes connexes de $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2$.

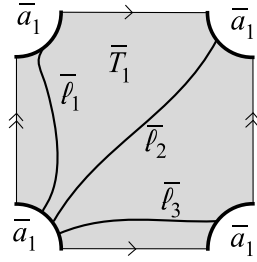


FIG. 69 – Un exemple de trois arcs appartenant à $\text{Arc}_1^1(2)$, disjoints, non isotopes, dans \bar{T}_1 .

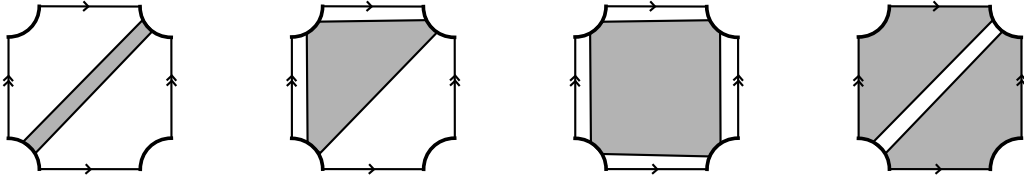


FIG. 70 – Les quatre types de domaines : de gauche à droite : le rectangle, l'hexagone, l'octogone, le cylindre à bords bigonaux.

3°) *Calcul de caractéristique d'Euler.*

Nous allons déterminer la contribution de chaque domaine à la caractéristique d'Euler de \bar{T}_2 (égale à -1 puisque \bar{T}_2 est un tore à une composante de bord). Rappelons que \bar{T}_2 est le recollement des domaines le long des arcs de $\text{Arc}_2^2(1) \cup \text{Arc}_2^2(3)$ inclus dans \bar{T}_2 . Donc si un domaine D possède exactement k côtés appartenant à $\text{Arc}_2^2(1) \cup \text{Arc}_2^2(3)$, alors sa contribution à $\chi(\bar{T}_2)$ est de $\chi(D) - \frac{k}{2}$. En effet, lorsqu'on somme les caractéristiques d'Euler de tous les domaines, les arcs de recollement ont été comptés deux fois chacun. Pour calculer la contribution d'un domaine à la caractéristique d'Euler de \bar{T}_2 , il faut donc apporter un terme correctif de $-\frac{1}{2}$ pour chaque arc de recollement inclus dans le bord de D . Ainsi,

- les rectangles ont une contribution de 0 ;
- les hexagones ont une contribution de $-\frac{1}{2}$;
- les cylindres à bords bigonaux ont une contribution de -1 ;
- les octogones ont des contributions de -1 .

Or d'après l'étape 2, les domaines de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$ sont difféomorphes à ceux de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$. Par ailleurs, la contribution des domaines de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ est nulle, puisque tous les domaines de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ sont des rectangles (vu plus haut en 1°). Donc la contribution globale des domaines de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$ comme celle des domaines de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$ doit valoir $-\frac{1}{2}$. On en déduit que $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1$ contient exactement un hexagone et un nombre indéterminé de rectangles. De même pour $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$. \square

Exemple 10.9. Un exemple du tore \bar{T}_2 constitué de deux hexagones et d'un nombre indéterminé de rectangles, conformément à la conclusion de l'étape 4, est donné figure 71.

Etape 5. *On aboutit à une contradiction.*

Démonstration. Le tore \bar{T}_3 contient les composantes connexes de $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$ et de $\bar{T}_4 \cap \bar{T}_3$, lesquelles sont deux à deux disjointes puisque $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_4 = \emptyset$. Parmi elles, on compte deux hexagones, l'un inclus dans $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$, l'autre inclus dans $\bar{T}_4 \cap \bar{T}_3$. Chacun possède trois côtés inclus dans \bar{a}_3 (cf. figure 72).

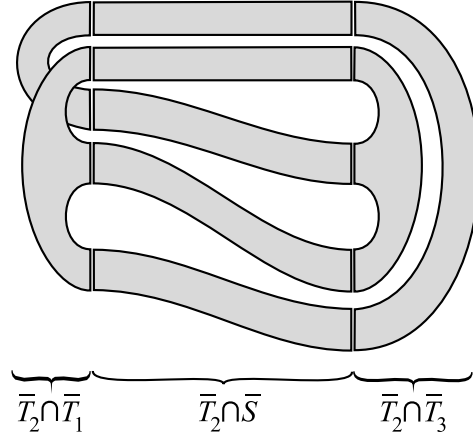


FIG. 71 – Le tore \bar{T}_2 , constitué de deux hexagones et d'un nombre indéterminé de rectangles.

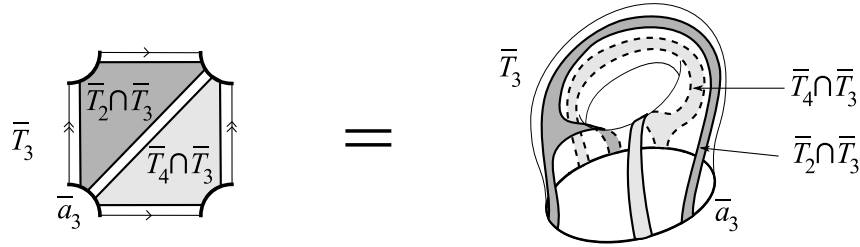


FIG. 72 – Deux hexagones disjoints, l'un inclus dans $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$, l'autre inclus dans $\bar{T}_4 \cap \bar{T}_3$.

Rappelons qu'il n'est possible d'inclure dans un tore à une composante de bord que trois arcs à extrémités dans le bord, deux à deux disjoints et non isotopes. On en déduit que nos deux hexagones inclus pour l'un dans $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$ et pour l'autre dans $\bar{T}_4 \cap \bar{T}_3$ sont disposés comme sur la figure 72. En particulier, retenons que :

$$\begin{aligned} &\text{les six côtés inclus dans le bord du tore appartiennent} \\ &\text{alternativement à l'un et à l'autre des deux tores.} \end{aligned} \quad (1)$$

On va montrer que les deux tores \bar{T}_2 et \bar{T}_4 s'intersectent, ce qui est absurde. Pour cela, on va étudier l'inclusion de $\bar{T}_4 \cap \bar{S}$ dans les différentes composantes connexes de $\bar{S} \setminus \bar{T}_2$. Dans ce qui suit, on se référera à la figure 73. Puisque $\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3$ contient un hexagone, $\bar{T}_2 \cap \bar{a}_3$ contient au moins trois composantes connexes, lesquelles se prolongent dans $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ en au moins trois rectangles. Rappelons en effet que les rectangles de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$ n'ont qu'un seul côté dans \bar{a}_3 , donc deux composantes connexes distinctes de $\bar{T}_2 \cap \bar{a}_3$ sont les côtés de deux rectangles distincts de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$. Or ces rectangles de $\bar{T}_2 \cap \bar{S}$, au moins au nombre de trois, ont tous un côté dans \bar{a}_1 et un côté dans \bar{a}_3 , et comme \bar{S} est de genre nul, on en déduit que $\bar{S} \setminus \bar{T}_2$ contient au moins trois composantes connexes, autrement dit trois régions, comme par exemple les régions R_1, R_2, R_3 , sur la figure 73. Puisque les deux tores \bar{T}_2 et \bar{T}_4 sont disjoints, les rectangles de $\bar{T}_4 \cap \bar{S}$ sont à l'intérieur des différentes régions. Cependant, tous les rectangles de $\bar{T}_4 \cap \bar{S}$ ont un côté inclus dans \bar{a}_5 , donc ils devraient tous se situer dans la région contenant la courbe \bar{a}_5 . Mais ceci est impossible, car en raison de l'assertion (1), il existe des rectangles de $\bar{T}_4 \cap \bar{S}$ dans au moins trois régions distinctes (cf. figure 73). \square

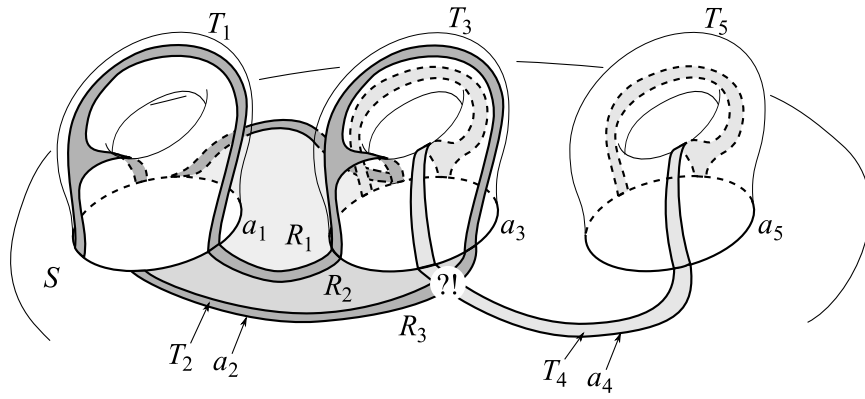


FIG. 73 – Dans cette configuration où les hexagones $T_2 \cap T_3$ et $T_4 \cap T_3$ sont « noués » dans T_3 , les tores T_2 et T_4 s'intersectent, ce qui ne doit pourtant pas avoir lieu.

Ceci achève la démonstration de la proposition 10.1. Donc il n'existe pas de courbes spéciales séparantes dans $\sigma(\mathcal{G})$. □

11 Description de $\sigma(\mathcal{X})$ dans Σ

Rappelons que n est un entier pair supérieur ou égal à 6, Σ est la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$, et ρ est un morphisme non cyclique de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ tel que :

l'ensemble $\sigma_\rho(\mathcal{G})$ est vide.

D'après la proposition 9.9, l'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ n'est pas vide.

Dans ce chapitre, on déterminera la disposition des courbes de $\sigma(\mathcal{X})$ dans Σ en distinguant les courbes spéciales et les courbes normales. Autrement dit, on sera en mesure de décrire $\Gamma(\Sigma; \sigma_s(\mathcal{X}))$ (cf. définition 2.24) et $\Gamma(\Sigma; \sigma(\mathcal{X}))$. Notre outil principal sera l'action du sous-groupe \mathcal{H} de \mathcal{B}_n sur le sous-ensemble \mathcal{X} de \mathcal{G} .

11.1 Plan du chapitre et résultats démontrés

- Le paragraphe 11.2 énonce un résultat concernant l'action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} . On y définit notamment les \mathcal{H} -colorations, censées exprimer les contraintes venant de la structure de \mathcal{B}_n , sur les éléments caractéristiques des mapping classes A_i , $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
- Le paragraphe 11.3 détermine le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$. Notamment, on prouvera la proposition :

Proposition 11.1 (Position des courbes de $\sigma_s(\mathcal{X})$ dans Σ).

- L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ contient n courbes (donc pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a $|\sigma_s(A)| = 1$).*
- L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{X})$ est non séparant dans Σ , ou bien il est séparant mais pour tout $a \in \sigma_s(\mathcal{X})$, l'ensemble de courbes $\sigma_s(\mathcal{X}) \setminus \{a\}$ est non séparant. Autrement dit, le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$ est l'un de ceux représentés figure 74.*

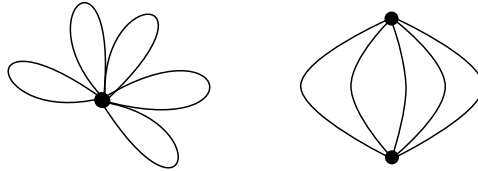


FIG. 74 – Les deux plongements possibles de $\sigma_s(\mathcal{X})$ dans Σ (ici pour $n = 10$).

- Au paragraphe 11.4, ayant décrit $\sigma_s(\mathcal{X})$, on passe à la description de l'ensemble $\sigma(\mathcal{X}) = \sigma_s(\mathcal{X}) \cup \sigma_n(\mathcal{X})$ avec les propositions 11.2 et 11.4.

Proposition 11.2 (Existence de la surface $\widehat{\Sigma}$).

- Il existe une unique sous-surface $\widehat{\Sigma}$ dans $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ contenant les courbes de $\sigma_s(\mathcal{G})$.*
- Le bord de chaque sous-surface appartenant à $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ contient $\sigma_s(\mathcal{X})$.*
- La surface $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\widehat{g} \in \{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\}$.*
- La surface Σ est de genre $g \in \{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\}$.*
- L'ensemble $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ est réduit à une composante connexe de genre nul, ou à deux composantes connexes dont l'une est de genre nul et l'autre est de genre 0 ou 1.*

Exemple. Voici trois situations décrites figure 75 illustrant le point v) de la proposition 11.2. Chacun de ces cas représente les courbes spéciales de $\sigma(\mathcal{X})$, les éventuelles courbes normales de $\sigma(\mathcal{G})$, et la surface $\widehat{\Sigma}$, associées à trois morphismes de \mathcal{B}_6 dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{3,2})$:

- dans le cas de gauche, $\mathcal{S}\text{ub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ est réduit à une composante connexe de genre nul,
- dans le cas central, $\mathcal{S}\text{ub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ consiste en deux sous-surfaces de genre nul,
- dans le cas de droite, $\mathcal{S}\text{ub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ consiste en deux sous-surfaces, l'une de genre nul, l'autre de genre un.

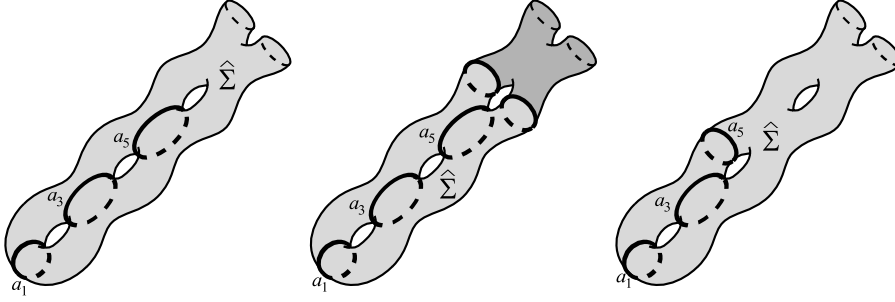


FIG. 75 –

La proposition 11.2 nous permet de poser les définitions suivantes qui nous resserviront au chapitre suivant.

Définition 11.3 ($\widehat{\Sigma}$, $\check{\Sigma}$ et \mathcal{U}).

- Soit $\widehat{\Sigma}$ la sous-surface de $\mathcal{S}\text{ub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ contenant les courbes spéciales.
- Posons $\mathcal{U} = \text{Bord}(\widehat{\Sigma}) \cap \sigma_n(\mathcal{G})$ de sorte que \mathcal{U} soit l'ensemble des bords normaux de $\widehat{\Sigma}$.
- Soit $\check{\Sigma}$ la réunion des sous-surfaces de $\mathcal{S}\text{ub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$ différentes de $\widehat{\Sigma}$. Si $\widehat{\Sigma}$ est la seule sous-surface de $\mathcal{S}\text{ub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$, on dira que $\check{\Sigma}$ est vide.

Exemple. Considérons le morphisme ρ de \mathcal{B}_8 dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{4,2})$ tel que pour tout i compris entre 1 et $n-1$, on ait $\rho(\tau_i) = T_{a_i} V$, où les courbes a_i sont celles dessinées figure 76, et où V est une mapping class commutant avec les T_{a_i} et telle que $\sigma(V) = \{x_1, x_2, x_3\}$, où les courbes x_k sont celles dessinées figure 76. Alors on a les égalités : $\sigma_n(\mathcal{G}) = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\mathcal{U} = \{x_1, x_2\}$. De plus, $\widehat{\Sigma}$ est la sous-surface de $\Sigma_{\mathcal{U}}$ qui contient les courbes a_i (donc dessinée en clair sur la figure 76) et $\check{\Sigma}$ est la sous-surface de $\Sigma_{\mathcal{U}}$ qui ne contient pas les courbes a_i (donc dessinée en foncé sur la figure 76).

Pour la proposition suivante, rappelons que l'on a supposé dans ce chapitre que $\sigma_p(\mathcal{G})$ était vide, autrement dit, les courbes séparantes appartenant à $\sigma_n(\mathcal{G})$ séparent Σ en deux surfaces, chacune de genre non nul.

Proposition 11.4 (Description de $\mathcal{S}\text{ub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$).

On a $|\mathcal{U}| \leq 2$ et $\mathcal{S}\text{ub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$ vérifie les propriétés suivantes :

- si \mathcal{U} est vide, $\Sigma = \widehat{\Sigma}$; si $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\frac{n}{2}$, \mathcal{U} est vide,
- si \mathcal{U} est réduit à une courbe non séparante u , $\check{\Sigma}$ est vide et $\{u\}$ est le marquage de $\widehat{\Sigma}$,
- si \mathcal{U} est réduit à une courbe séparante u , $\check{\Sigma}$ est une sous-surface connexe de genre 1,
- si \mathcal{U} contient deux courbes, elles sont non séparantes et $\check{\Sigma}$ est connexe, de genre nul.

On résume cela en disant que $\Gamma(\Sigma, \mathcal{U})$ est l'un des quatre graphes figure 86 où :

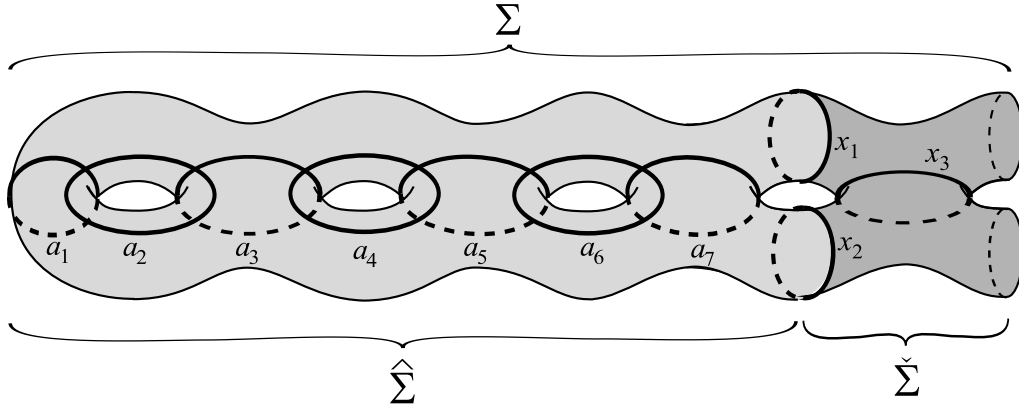


FIG. 76 –

- les sommets entourés représentent les sous-surfaces de genre non nul de $\text{Sub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$,
- l'entier placé à côté des sommets entourés en indique le genre,
- les arêtes sont représentées en pointillés par soucis de cohérence avec la remarque 11.9 en fin de chapitre.

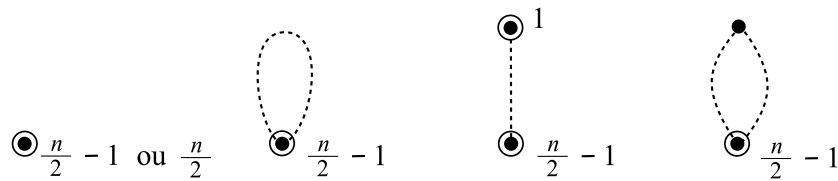


FIG. 77 – Les cinq graphes possibles pour $\Gamma(\Sigma, \mathcal{U})$ (cf. proposition 11.4).

On pourrait alors en déduire facilement les différents graphes possibles correspondants à $\Gamma(\Sigma; \sigma(\mathcal{X}))$. On le fait uniquement à titre de remarque (cf. remarque 11.9 en fin de chapitre), car cela s'avérera inutile dans la suite de la démonstration de la proposition 12.1. En effet, les propositions 11.1, 11.2 et 11.4 y suffiront.

11.2 Action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} et \mathcal{H} -colorations

Rappels. Rappelons les définitions du groupe \mathcal{H} et du sous-ensemble \mathcal{X} de \mathcal{G} (cf. paragraphe 10.2, définitions 10.2 et 10.3, et proposition 10.4). Pour tout entier m non nul, soit $\text{Imp}(m)$ l'ensemble des premiers entiers impairs inférieurs ou égaux à m . Soit \mathcal{X} le sous-ensemble $\{A_i, i \in \text{Imp}(n)\}$ de \mathcal{G} constitué de $\frac{n}{2}$ éléments commutant deux à deux. On note $\sigma(\mathcal{X}) = \cup_{i \in \text{Imp}(n)} \sigma(A_i)$ le simplexe de courbes associé et $\sigma_s(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{X}) \cap \sigma_s(\mathcal{G})$. Le groupe \mathcal{H} est le sous-groupe $\langle \gamma_i, i \in \text{Imp}(n) \rangle$ de \mathcal{B}_n où pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, l'élément γ_i est le produit $\tau_i \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+2} \tau_{i+1} \tau_i$. Il vérifie les propriétés suivantes :

i) L'action de \mathcal{H} sur $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ via ρ préserve \mathcal{X} . En effet, pour tout $i, j \in \text{Imp}(n)$, on a :

$$\gamma_i \cdot A_j = \rho(\gamma_i) A_j \rho(\gamma_i)^{-1} = \begin{cases} A_j & \text{si } i \notin \{j, j-2\}; \\ A_{j-2} & \text{si } i = j-2; \\ A_{j+2} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- ii) Le morphisme $\mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{X})$ décrivant l'action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} , où $\mathfrak{S}(\mathcal{X})$ est le groupe symétrique sur les éléments de \mathcal{X} , est surjectif. En particulier, cette action est $\frac{n}{2}$ fois transitive.
- iii) L'action de \mathcal{H} sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\sigma_s(\mathcal{X})$.

On a déjà donné la définition de \mathcal{J} -coloration (cf. définition 9.15). On définit ce qu'est une \mathcal{H} -coloration sur le même principe.

Définition 11.5 (\mathcal{H} -colorations sur \mathcal{X}).

Une \mathcal{H} -coloration est une fonction de \mathcal{X} dans $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, l'ensemble des parties d'un \mathcal{H} -ensemble \mathcal{E} (i.e. un ensemble muni d'une action de \mathcal{H}) :

$$\text{col}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$$

telle que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $A \in \mathcal{X}$, on ait :

$$\xi.\text{col}_{\mathcal{X}}(A) = \text{col}_{\mathcal{X}}(\xi.A).$$

Les entiers de $\text{Imp}(n)$, en bijection avec \mathcal{X} , sont appelés *couleurs*. On dira qu'un élément $e \in \mathcal{E}$ est de couleur i si $e \in \text{col}_{\mathcal{X}}(A_i)$. Un élément $e \in \mathcal{E}$ peut être de plusieurs couleurs à la fois ou éventuellement d'aucune couleur.

Inversement, partant d'une \mathcal{H} -coloration $\text{col}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ dont \mathcal{X} est l'ensemble des couleurs, \mathcal{H} un groupe agissant sur \mathcal{X} et sur \mathcal{E} , définissons l'application appelée \mathcal{H} -spectre :

$$\text{sp}_{\mathcal{X}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{X}) \\ e & \longmapsto & \{A \in \mathcal{X} \mid e \in \text{col}_{\mathcal{X}}(A)\} \end{array} .$$

L'application \mathcal{H} -spectre est elle aussi \mathcal{H} -équivariante.

Proposition 11.6. *L'application $\sigma_s : \mathcal{X} \rightarrow \text{Courb}(\Sigma)$ est une \mathcal{H} -coloration.*

Démonstration. Rappelons que σ est une \mathcal{H} -coloration (ceci est une reformulation de l'assertion i) de la proposition 3.40). Par ailleurs $\sigma_s(\mathcal{X})$ est \mathcal{H} -stable. Alors pour tous $i, j \in \text{Imp}(n)$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_s(\gamma_i.A_j) &= \sigma(\gamma_i.A_j) \cap \sigma_s(\mathcal{X}) \\ &= \gamma_i.\sigma(A_j) \cap \sigma_s(\mathcal{X}) \\ &= \gamma_i.\sigma(A_j) \cap \gamma_i.\sigma_s(\mathcal{X}) \\ &= \gamma_i.(\sigma(A_j) \cap \sigma_s(\mathcal{X})) \\ &= \gamma_i.\sigma_s(A_j). \end{aligned}$$

□

Lemme 11.7. *Soit \mathcal{E} un \mathcal{H} -ensemble. Soit $\text{col}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ une \mathcal{H} -coloration et soit $\text{sp}_{\mathcal{X}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X})$ le \mathcal{H} -spectre associé. Soit e un élément de \mathcal{E} tel que le \mathcal{H} -spectre de e contienne k mapping classes ($0 \leq k \leq \frac{n}{2}$). Alors il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que $|\mathcal{H}.e| = \ell C_r^k$ où $r = \frac{n}{2}$.*

Démonstration. Ceci est une application simple des principes généraux d'action de groupe. De façon générale, si \mathcal{F} est un ensemble fini sur lequel agit \mathcal{H} , si l'on choisit un élément $f_0 \in \mathcal{F}$ et si l'on note $S = \text{Stab}_{\mathcal{H}}(f_0)$ le sous-groupe de \mathcal{H} qui fixe f_0 , et \mathcal{Z} une transversale de \mathcal{H}/S , alors,

- on a la réunion disjointe $\mathcal{H} = \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{Z}} \gamma.S$
- si l'action de \mathcal{H} sur \mathcal{F} est transitive, on a $|\mathcal{Z}| = |\mathcal{H}/S| = |\mathcal{F}|$.

Etant donné un élément e de \mathcal{E} comme dans l'énoncé, tel que $\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)$ soit un ensemble de k mapping classes de \mathcal{X} avec $0 \leq k \leq r$ où $r = \frac{n}{2}$, considérons l'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathcal{X})$ des parties de \mathcal{X} contenant k éléments. En faisant jouer à $\mathcal{P}_k(\mathcal{X})$ le rôle de \mathcal{F} et $\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)$ le rôle de f_0 , on remarque que l'action de \mathcal{H} sur $\mathcal{P}_k(\mathcal{X})$ est transitive car l'action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} est k -fois transitive. On obtient alors :

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{Z}} \gamma \cdot \text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)), \quad (1)$$

$$\text{et } |\mathcal{Z}| = |\mathcal{H} / \text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e))| = |\mathcal{P}_k(\mathcal{X})| = C_r^k. \quad (2)$$

Mais (1) implique :

$$\mathcal{H}.e = \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{Z}} \gamma \cdot (\text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)).e), \quad (3)$$

car pour tout γ' et γ'' distincts appartenant à \mathcal{Z} , $\gamma'.\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)$ et $\gamma''.\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)$ sont différents, donc les éléments de $\gamma'.(\text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)).e)$, qui sont tous de même spectre, sont de spectre différent du spectre des éléments de $\gamma''.(\text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)).e)$. Donc les deux ensembles $\gamma'.(\text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)).e)$ et $\gamma''.(\text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)).e)$ sont disjoints. En posant $\ell = |(\text{Stab}_{\mathcal{H}}(\text{sp}_{\mathcal{X}}(e)).e)|$, on déduit de (2) et (3) l'égalité de cardinaux suivante :

$$|\mathcal{H}.e| = \ell C_r^k. \quad (4)$$

□

11.3 Description du plongement de $\sigma_s(\mathcal{X})$ dans Σ

Dans ce paragraphe, on va montrer la proposition suivante :

Proposition 11.1 (Plongements de $\sigma_s(\mathcal{X})$ dans Σ).

- i) L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{G})$ contient n courbes (donc pour tout $A \in \mathcal{G}$, $|\sigma_s(A)| = 1$).
- ii) L'ensemble $\sigma_s(\mathcal{X})$ est non séparant dans Σ , ou bien il est séparant mais pour tout $a \in \sigma_s(\mathcal{X})$, $\sigma_s(\mathcal{X}) \setminus \{a\}$ est non séparant. Autrement dit, le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$ est l'un de ceux représentés figure 78.

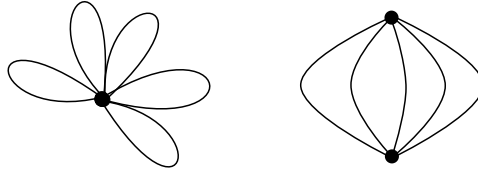


FIG. 78 – Les deux plongements possibles de $\sigma_s(\mathcal{X})$ dans Σ (ici pour $n = 10$).

Démonstration. Rappelons que d'après la proposition 9.22, $\sigma_s(\mathcal{G})$ contient n ou $2n$ courbes, selon que $\sigma_s(A_1)$ contienne une ou deux courbes, car les $\sigma_s(A_i)$, $0 \leq i \leq n-1$ contiennent tous le même nombre de courbes. Puisque \mathcal{X} ne contient que les mapping classes d'indice impair, $\sigma_s(\mathcal{X})$ contient $\frac{n}{2}$ ou n courbes. Tout en montrant la partie ii) on montrera que $\sigma_s(\mathcal{X})$ contient $\frac{n}{2}$ courbes, ce qui prouvera la partie i) de l'énoncé.

Montrons que le résultat lorsque $\partial\Sigma$ est non vide se déduit du résultat lorsque $\partial\Sigma$ est vide. Pour cela supposons que $\partial\Sigma$ n'est pas vide. Considérons le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$ et le sous-groupe \mathcal{H} préservant le simplexe $\sigma_s(\mathcal{X})$. Puisque chaque orbite de courbes de $\sigma_s(\mathcal{X})$ sous \mathcal{H} est de

cardinal au moins $\frac{n}{2} \geq 3$, on peut appliquer la proposition 7.5. Autrement dit, $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$ est canoniquement isomorphe à $\Gamma(\text{oub}_{\partial\Sigma}(\Sigma), \text{oub}_{\partial\Sigma}(\sigma_s(\mathcal{X})))$ qui est le graphe associé au morphisme $\text{oub}_{\partial\Sigma}^* \circ \rho$ de \mathcal{B}_n dans $\text{oub}_{\partial\Sigma}(\Sigma)$, de même que le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$ est associé au morphisme ρ . Donc il suffit de montrer les parties i) et ii) lorsque $\partial\Sigma$ est vide pour en déduire le résultat général.

A partir de maintenant, on suppose que $\partial\Sigma$ est vide. On va utiliser l'action de \mathcal{H} sur le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$. Afin de rendre l'action de \mathcal{H} plus évidente, on « colorie » les différentes arêtes et les différents sommets de $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$ de la manière suivante :

Le graphe $\Gamma = \Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$.

On note Γ le graphe $\Gamma(\Sigma, \sigma_s(\mathcal{X}))$. Ses sommets sont en bijection avec $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\Sigma)$ et ses arêtes en bijection avec $\sigma_s(\mathcal{X})$. L'action de \mathcal{H} sur $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\Sigma)$ induit une action de \mathcal{H} sur l'ensemble des sommets de Γ et l'action de \mathcal{H} sur $\sigma_s(\mathcal{X})$ induit une action de \mathcal{H} sur l'ensemble des arêtes de Γ . De plus, ces deux actions sont compatibles avec la structure de graphe de Γ . On dispose également de deux \mathcal{H} -colorations :

- la \mathcal{H} -coloration $\sigma_s : \mathcal{X} \rightarrow \sigma_s(\mathcal{X})$, qui peut être vue comme une \mathcal{H} -coloration sur les arêtes de Γ . De cette façon, le \mathcal{H} -spectre de chaque arête de Γ contient une unique couleur $i \in \text{Imp}(n)$;
- la \mathcal{H} -coloration $\omega_{\mathcal{X}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\Sigma) \\ A & \longmapsto & \{S \in \text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\Sigma) \mid \text{Bord}(S) \cap \sigma_s(A) \neq \emptyset\} \end{array}$, qui peut être

vue comme une \mathcal{H} -coloration sur les sommets de Γ . Ainsi le \mathcal{H} -spectre de chaque sommet contient exactement les couleurs des arêtes partant de ce sommet.

Puisque σ_s et $\omega_{\mathcal{X}}$ sont des \mathcal{H} -colorations, l'action de \mathcal{H} sur les sommets et les arêtes de Γ est compatible avec l'action de \mathcal{H} sur leurs couleurs. Finalement, le groupe \mathcal{H} agit sur le graphe Γ muni de ses couleurs.

Les cycles et les valences dans Γ .

Notons c le nombre de cycles indépendants présents dans Γ . On a évidemment :

Fait 1 : $c \leq g$.

Les sommets de valence 1 correspondent à des sous-surfaces bordées par des courbes séparantes, or d'après la proposition 10.1, il n'existe pas dans $\sigma_s(\mathcal{X})$ de courbes séparantes dans Σ , donc :

Fait 2 : *Il n'existe pas de sommet de valence 1.*

Donc le graphe Γ contient des cycles :

Fait 3 : $c \geq 1$.

Remarquons que les sommets de valence 2 correspondent à des composantes connexes n'ayant que deux bords, donc étant de genre non nul. On en déduit :

Fait 4 : *Le nombre de sommets de valence 2 est borné par $g - c$.*

Or s'il existe un sommet p de valence 2, tel que $i, j \in \text{Imp}(n)$ soient les couleurs des deux arêtes ayant une extrémité en p , l'orbite de p sous l'action de \mathcal{H} est de cardinal au moins $\frac{n}{2}$ si $i = j$, et de cardinal au moins $C_{\frac{n}{2}}^2 \geq \frac{n}{2}$ si $i \neq j$, d'après le lemme 11.7. Mais en rapprochant les faits 3 et 4, ce nombre devrait être majoré par $g - 1$, or $g - 1 < \frac{n}{2}$ donc finalement :

Fait 5 : *Il n'existe pas de sommets de valence 2.*

Nous allons traiter séparément le cas des graphes ayant des arêtes dont les extrémités sont confondues de ceux qui n'en possèdent pas. Dans la suite, on parlera de *pétales* pour désigner de telles arêtes.

Définition 11.8 (Pétales). Appelons *pétale* une arête dont les deux extrémités sont confondues.

Graphes pourvus de pétales. S'il existe un pétale, alors il en existe exactement $\frac{n}{2}$ et $g = \frac{n}{2}$ car d'une part, il en existe dans chaque couleur, donc au moins $\frac{n}{2}$, et d'autre part, à chaque pétale correspond un cycle indépendant de Γ , or le nombre de cycle est majoré par g . De plus, puisque le nombre maximal autorisé de cycles indépendants est atteint, si l'on ôte ces g arêtes au graphe Γ on obtient un arbre. Or dans un arbre, chaque arête est *séparante*, c'est-à-dire que l'arbre privé de cette arête est disconnexe. Mais d'après la proposition 10.1, $\sigma_s(\mathcal{X})$ ne contient pas de courbes séparantes, donc le graphe Γ privé de ses pétales est réduit à un sommet. Finalement, le graphe Γ est une rose (cf. graphe de gauche figure 78).

Graphes dépourvus de pétales. Supposons maintenant que Γ soit un graphe dans lequel aucune arête n'a ses deux extrémités confondues.

A priori, le cardinal du simplexe $\sigma_s(\mathcal{X})$ est borné par $3g - 3 \leq \frac{3n}{2} - 3$ car $b = 0$. Le groupe $\langle \delta^2 \rangle$ préserve $\sigma_s(\mathcal{X})$ et chaque courbe de $\sigma_s(\mathcal{G})$ a une orbite de cardinal n sous l'action de \mathcal{J} d'après la proposition 9.22.i), donc une orbite de cardinal $\frac{n}{2}$ sous l'action de $\langle \delta^2 \rangle$. Donc seulement deux cardinaux sont a priori possibles pour $\sigma_s(\mathcal{X})$: $\frac{n}{2}$ ou n . Alors, dans Γ :

Fait 6 : *Il existe au plus deux arêtes d'une même couleur.*

Traisons le cas où $|\sigma_s(\mathcal{X})| = \frac{n}{2}$:

Si $|\sigma_s(\mathcal{X})| = \frac{n}{2}$, alors pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, il existe une seule arête de couleur i , donc seulement deux sommets possèdent la couleur i . Par ailleurs, d'après les faits 2 et 5, tous les sommets sont au moins de valence 3, et puisqu'il n'y a pas de pétales, les arêtes arrivant à un sommet sont de couleur deux à deux distinctes. Donc dans le cas $n = 6$, il existe exactement 2 sommets de valence 3 et le graphe est semblable à celui de droite de la figure 78. Lorsque $n \geq 8$, si un sommet p est de valence v avec $3 \leq v < \frac{n}{2}$, alors l'orbite de p est de cardinal au moins $C_{\frac{n}{2}}^v$ d'après le lemme 11.7. Parmi les $C_{\frac{n}{2}}^v$ sommets de l'orbite de p , on en compte au moins $C_{(\frac{n}{2}-1)}^{v-1}$ d'où part une arête de couleur j , pour un $j \in \text{Imp}(n)$ fixé. Justifions cela brièvement :

Prenons $j = n - 1$ et posons $\mathcal{H}_{n-2} = \langle \gamma_i, i \in \text{Imp}(n-2) \rangle$ de sorte que \mathcal{H}_{n-2} soit un sous-groupe de \mathcal{H} qui fixe la couleur $n - 1$ et agit $\frac{n}{2} - 1$ fois transitivement sur l'ensemble des $\frac{n}{2} - 1$ autres couleurs de $\text{Imp}(n)$. Partant d'un sommet q de valence v d'où part une arête de couleur j et $v - 1$ arêtes de couleurs deux à deux distinctes et différentes de j , puis en appliquant le lemme 11.7, on compte au moins $C_{(\frac{n}{2}-1)}^{v-1}$ sommets distincts dans l'orbite de q sous l'action de \mathcal{H}_{n-2} .

On compte donc au moins $C_{(\frac{n}{2}-1)}^{v-1} \geq \frac{n}{2} - 1 \geq 3$ sommets distincts d'où part une arête de couleur j , alors qu'il ne devrait en exister que deux puisqu'il n'existe qu'une seule arête de couleur j dans Γ . Donc il faut que $v = \frac{n}{2}$, donc il n'existe que deux sommets dans Γ et le graphe est celui de droite figure 78.

On vient de traiter les cas où $|\sigma_s(\mathcal{X})| = \frac{n}{2}$. A partir de maintenant, on supposera que $|\sigma_s(\mathcal{X})| = n$. De cette façon et d'après le fait 6, on aura balayé tous les cas possibles.

Traisons le cas où $|\sigma_s(\mathcal{X})| = n$:

On veut montrer que ce cas est absurde.

On supposera dorénavant qu'il existe deux courbes dans chaque couleur.

Remarquons qu'alors :

Fait 7 : *Deux arêtes de même couleur ne peuvent avoir les deux mêmes extrémités.*

En effet, supposons au contraire que deux arêtes d'une même couleur aient les mêmes extrémités. Alors elles formeraient un cycle auquel on peut associer leur couleur. On obtiendrait au total $\frac{n}{2}$ cycles indépendants, donc on aurait $c = g = \frac{n}{2}$ et il n'existerait pas d'autres cycles indépendants dans Γ d'après le fait 1. Il n'existerait pas non plus d'autres arêtes, d'après le fait 6, que les n arêtes constituant ces $\frac{n}{2}$ cycles. Identifions dans Γ deux arêtes dès qu'elles ont la même couleur et appelons Γ' le graphe ainsi obtenu (cf. figure 79). Le graphe Γ' est un arbre contenant g arêtes, donc Γ' possède des sommets de valence 1. Ces sommets de valence 1 correspondant dans Γ à des sommets de valence 2. Or il ne doit pas en exister d'après le fait 5. Donc le fait 7 est démontré.

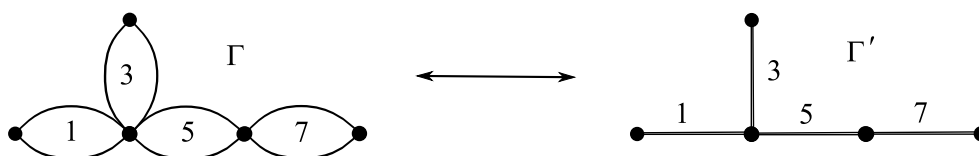


FIG. 79 – Cas $g \geq 4$, lorsque deux arêtes d'une même couleur ont deux extrémités en commun.

Allons plus loin :

Fait 8 : *Deux arêtes de même couleur ne peuvent partager une extrémité commune.*

Pour le montrer, supposons au contraire que deux arêtes de même couleur aient une extrémité en commun. Rappelons qu'il n'existe que deux arêtes d'une même couleur d'après le fait 6, et que deux telles arêtes ne peuvent avoir les deux mêmes extrémités d'après le fait 7, donc pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, il n'existe qu'un seul sommet que nous appelons p_i qui est une extrémité commune aux deux arêtes de couleur i . Par symétrie de l'action de \mathcal{H} sur \mathcal{X} , les p_i sont tous distincts ou tous confondus.

a) **Les p_i sont tous distincts.** On se référera à la figure 80. Comme les p_i ne sont pas de valence 2 d'après le fait 5, chaque p_i est l'extrémité des deux arêtes de couleur i et l'extrémité d'au moins une arête de couleur $j \neq i$. Or le sous-groupe de \mathcal{H} qui fixe la couleur i agit transitivement sur les autres couleurs, donc p_i est aussi l'extrémité d'une arête de couleur k pour tout $k \in \text{Imp}(n) \setminus \{i\}$. Ainsi p_i est de valence exactement $\frac{n}{2} + 1$. Or la somme des valences de chaque sommet (au moins égale à $\frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1)$ ici) doit être égal à deux fois le nombre d'arêtes (n arêtes ici), donc on obtient l'inégalité :

$$\frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1) \leq 2n. \quad (*)$$

Il vient alors $n^2 + 2n \leq 8n$, donc $n \leq 6$. Or par hypothèse, $n \geq 6$, donc $n = 6$ et (*) est une égalité, donc les 12 extrémités des 6 arêtes se retrouvent dans le décompte $\frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1)$, il n'en existe pas d'autres, donc il n'existe pas non plus d'autres sommets que p_1, p_3 et p_5 . Le graphe Γ contient donc $c = 1 + 6 - 3 = 4$ cycles indépendants, ce qui est absurde car $c \leq g \leq \frac{n}{2} = 3$.

b) **Les p_i sont tous confondus.** On se référera à la figure 81. Appelons p le sommet $p_1 = p_3 = \dots = p_{n-1}$, de valence n (pas davantage car par hypothèse, on exclut les graphes

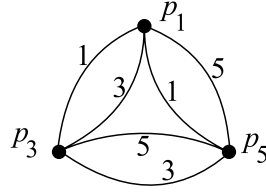


FIG. 80 – Exemple de graphe rejeté où les p_i sont distincts.

pourvus de pétales). Ce sommet est le seul sommet de valence n car d'après le fait 7, deux arêtes de même couleur ne peuvent avoir les mêmes extrémités. Les extrémités des n arêtes, et qui sont distinctes de p , forment un ensemble d'au plus $\frac{n}{3}$ sommets distincts, car il n'y a pas de feuille ni de sommet de valence 2 d'après les faits 2 et 5. Le graphe contient donc au plus $1 + \frac{n}{3}$ sommets et son nombre de cycles indépendants est au moins de $1 + n - (\frac{n}{3} + 1) = \frac{2n}{3}$ ce qui est absurde car $\frac{2n}{3} > \frac{n}{2} \geq g$.

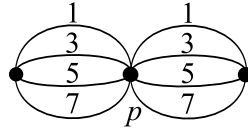


FIG. 81 – Exemple de graphe rejeté où les p_i sont tous confondus en un seul sommet p .

Ainsi, le fait 8 est démontré.

Montrons que les conditions $|\sigma_s(\mathcal{X})| = n$ et $n \geq 8$ ne mènent à aucun graphe solution.

Notons S le nombre de sommets. Puisque Γ comporte n arêtes, le nombre de cycles indépendants doit vérifier $c = 1 + n - S \leq \frac{n}{2}$. Donc :

$$S \geq \frac{n}{2} + 1.$$

Soit v la valence minimale parmi les sommets de Γ . On a vu d'après les faits 2 et 5 que $v \geq 3$. Or la somme des valences sur tous les sommets de Γ est au moins de vS et doit être égale à deux fois le nombre de sommets, donc $2n$, donc on a $2n \geq vS$ d'où :

$$S \leq \frac{2n}{v}.$$

Il est alors absurde que $v \geq 4$ car on aurait $\frac{n}{2} + 1 \leq S \leq \frac{n}{2}$. Par ailleurs si $v = 3$, on a au moins $C_{\frac{n}{2}}^3$ sommets de valence 3 dans Γ d'après le lemme 11.7. Lorsque $n \geq 10$, ceci conduit à l'absurdité suivante :

$$n \leq C_{\frac{n}{2}}^3 \leq S \leq \frac{2n}{3}.$$

Lorsque $n = 8$, puisque $v = 3$, il existe une orbite de sommets de valence 3. Une telle orbite contient un multiple de 4 sommets. Mais comme il existe 8 arêtes dans Γ et par conséquent 16 demi-arêtes, il doit exister dans Γ exactement 4 sommets de valence 3 et un sommet de valence 4 (remplacer le sommet de valence 4 par deux sommets de valence 2 est interdit par le fait 5). On obtient ainsi un graphe semblable à ceux de la figure 82. Appelons P_1, P_3, P_5 et P_7 les quatre sommets de valence 3 et Q le sommet de valence 4, comme sur la figure 82. Le sous-groupe de \mathcal{H} qui fixe la couleur 1 ne préserve pas un tel graphe, car il fixe les sommets P_1 et Q mais modifie la couleur de l'unique arête qui joint les sommets P_1 et Q : selon les cas, cette arête est de couleur 3, 5 ou 7, donnant lieu à différents graphes (la figure 82 montre deux exemples avec 7 et 3). Donc ce cas $n = 8$ est absurde. Finalement, les conditions $|\sigma_s(\mathcal{X})| = n$ et $n \geq 8$ ne mènent à aucun graphe solution.

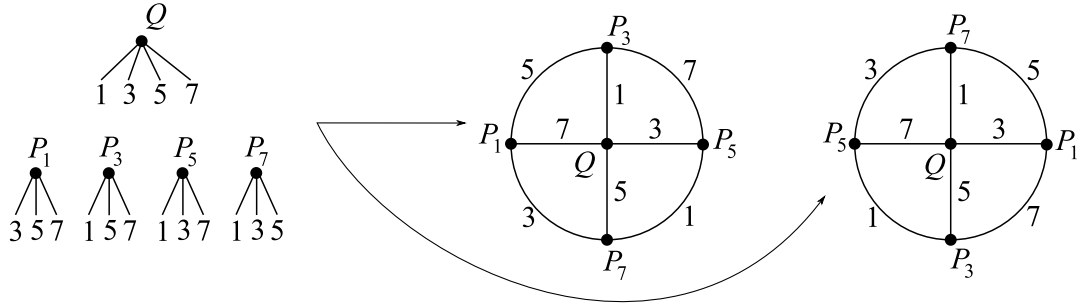


FIG. 82 – Deux exemples de graphes a priori possibles avec $n = 8$ et $|\sigma_s(\mathcal{X})| = 8$. (Ils sont différents car Q et P_1 sont reliés par une arête de couleur 7 dans un cas, 5 dans l'autre. Mais, ils ne sont pas \mathcal{H} -stables puisque l'action de γ_5 les permute.)

Montrons que $|\sigma_s(\mathcal{X})| = n$ lorsque $n = 6$ est absurde.

En vertu des faits 2, 5 et 8, tous les sommets sont de valence 3, chacun étant l'extrémité de trois arêtes de couleurs respectives 1, 3 et 5. On obtient le graphe représenté figure 83. Rappelons d'après la proposition 9.4 (5d) décrivant les propriétés équivalentes des courbes spéciales, chaque orbite d'arêtes de $\sigma_s(\mathcal{X})$ sous l'action de $\langle \delta^2 \rangle$ est de cardinal $\frac{n}{2} = 3$, donc on distingue deux orbites parmi les six courbes de $\sigma_s(\mathcal{X})$, et l'action de δ^2 sur le graphe Γ est périodique d'ordre trois. Alors l'un des sommets est préservé tandis que les trois autres sont cycliquement permutés. Appelons P le sommet préservé. Ses courbes de bord forment une orbite sous l'action de δ^2 , on les appellera a'_1, a'_3, a'_5 , où l'indice désigne la couleur de la courbe. Appelons les autres courbes a_1, a_3, a_5 , où les indices désigne encore la couleur de la courbe. Pour tout $i \in \{1, 3, 5\}$, notons P_i la sous-surface différente de P qui contient la courbe a'_i dans son bord. On se réfère à la figure 83.

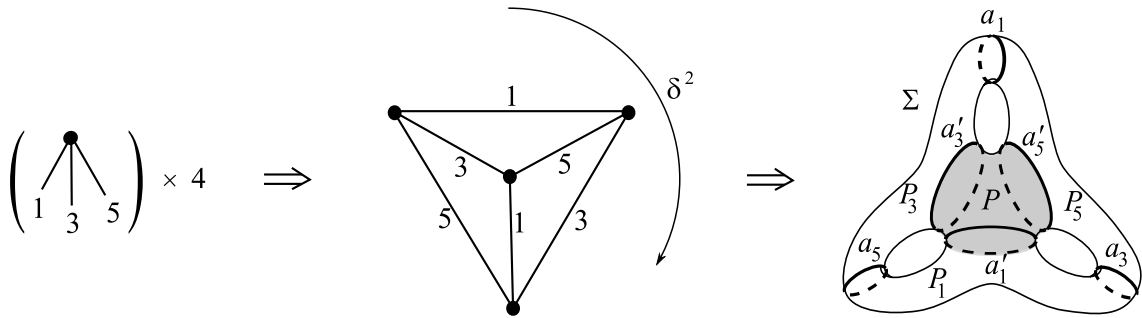


FIG. 83 – Cas $n = 6$: la surface $\Sigma_{3,0}$ munie des courbes de $\sigma_s(\mathcal{X})$ lorsque $|\sigma_s(\mathcal{X})| = 6$.

On va montrer qu'une telle configuration ne peut pas se produire en considérant les courbes spéciales de $\mathcal{Y} = \mathcal{G} \setminus \mathcal{X} = \{A_0, A_2, A_4\}$. Remarquons que l'ensemble de courbe $\sigma_s(\mathcal{G})$ est un ensemble de courbes sans intersection triple, donc d'après la proposition 2.3, il existe un unique système de représentants des courbes de $\sigma_s(\mathcal{G})$ en position minimale d'intersection, à isotopie (forte) près. De plus, tout représentant de la mapping class $\rho(\delta)$ envoie un tel système de représentant sur lui-même, à une isotopie (forte) près. Bien entendu, $\sigma_s(\mathcal{Y}) = \delta \cdot \sigma_s(\mathcal{X})$, et avec des notations cohérentes évidentes, on note $a_0, a_2, a_4, a'_0, a'_2, a'_4$ les courbes de $\sigma_s(\mathcal{Y})$. Considérons la sous-surface P_1 . Il vient les faits suivants, qui aboutissent à une contradiction :

- $a'_2 = \delta.a'_1$ et $a'_0 = \delta^{-1}.a'_1$, donc d'après la proposition 9.22, $I(a'_1, a'_2) = I(a'_1, a'_0) \neq 0$, donc $a'_0 \cap P_1$ et $a'_2 \cap P_1$ ne sont pas vides.
- De même en considérant les courbes a_3 et a_5 , il vient que $I(a_3, a_4) = I(a_3, a_2) \neq 0$ et $I(a_5, a_0) = I(a_5, a_4) \neq 0$, donc $a_0 \cap P_1$, $a_2 \cap P_1$ et $a_4 \cap P_1$ ne sont pas vides.
- Si une courbe x de $\sigma_s(\mathcal{Y})$ contient dans P_1 un chemin à extrémités dans un même bord, aucune autre courbe y de $\sigma_s(\mathcal{Y})$ ne peut contenir un chemin dans P_1 dont les extrémités seraient dans la réunion des deux autres bords, car alors x et y s'intersecteraient. C'est ce qu'illustre la figure 84 (deux cas sont à considérer selon que les extrémités de y appartiennent au même bord de P_1 ou non).



FIG. 84 – Cas $n = 6$: la courbe x et la courbe y doivent s'intersecter.

- En appliquant le dernier point à la courbe $x = a'_0$ et à la courbe $y = a_4$, on s'aperçoit que $a'_0 \cap P_1$ ne peut pas contenir de chemin à extrémités dans a'_1 . Donc $a'_0 \cap P_1$ est constitué de chemins joignant les bords a'_1 et a_5 . De même, $a'_2 \cap P_1$ est constitué de chemins joignant les bords a'_1 et a_3 .
- En appliquant l'avant-dernier point à la courbe $x = a_2$ et $y = a_0$, on s'aperçoit que $a_2 \cap P_1$ ne peut pas contenir de chemin à extrémités dans a_3 . En prenant $x = a_4$ et $y = a_0$, on trouve de même que $a_4 \cap P_1$ ne peut pas contenir de chemin à extrémités dans a_3 . On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'en fait, aucune courbe de $\sigma_s(Y)$ ne peut contenir de chemin dans P_1 à extrémités dans un même bord de P_1 . La situation obtenue est celle de la figure 85.

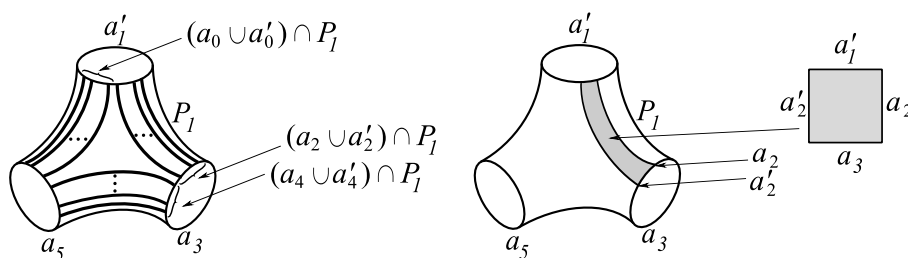


FIG. 85 – Cas $n = 6$: l'intersection des courbes de $\sigma_s(\mathcal{Y})$ et de P_1 .

- On en déduit l'existence dans la surface $\Sigma_{\sigma_s(\mathcal{G})}$ d'une composante connexe homéomorphe à un disque dont le bord est formé de quatre portions de courbes, provenant des courbes a'_1 , a_2 , a'_2 , a_3 . On en déduit donc qu'il existe dans $\mathcal{S}ub_{\sigma_s(\mathcal{Y})}(\Sigma)$ une sous-surface bordée à la fois par a_2 et a'_2 . Alors, en faisant agir δ^{-1} sur la surface Σ munies des courbes de $\sigma_s(\mathcal{Y})$, il devrait exister dans $\mathcal{S}ub_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\Sigma)$ une sous-surface bordée à la fois par a_1 et a'_1 . Ce n'est pas le cas. C'est la contradiction attendue.

Finalement, les conditions $|\sigma_s(\mathcal{X})| = n$ et $n = 6$ ne mènent à aucun graphe solution. Ceci conclut la démonstration de la proposition 11.1. \square

11.4 Description de $\sigma_n(\mathcal{G})$ et de $\sigma(\mathcal{X})$ dans Σ

D'après la proposition 11.1, pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, l'ensemble de courbes $\sigma_s(A_i)$ est réduit à une unique courbe. On la note a_i . Dans ce paragraphe, connaissant l'ensemble $\sigma_s(\mathcal{X})$ égal à $\{a_1, a_3, \dots, a_{n-1}\}$ (cf. la proposition 11.1), on souhaite décrire le simplexe $\sigma(\mathcal{X})$. Insistons sur le fait que d'après la proposition 9.22, on a $\sigma_n(A_1) = \sigma_n(\mathcal{G})$, d'où l'égalité

$$\sigma(\mathcal{X}) = \sigma_s(\mathcal{X}) \cup \sigma_n(\mathcal{G}).$$

Signalons que $\sigma(\mathcal{X})$ est un simplexe puisque \mathcal{X} engendre un groupe abélien. Par conséquent, $\sigma_s(\mathcal{X})$ et $\sigma_n(\mathcal{G})$ sont également des simplexes, qui de surcroît vérifient : $I(\sigma_s(\mathcal{X}), \sigma_n(\mathcal{G})) = 0$. On a même, d'après la propriété des courbes normales :

$$I(\sigma_s(\mathcal{G}), \sigma_n(\mathcal{G})) = 0.$$

Proposition 11.2 (Existence et description de la surface $\widehat{\Sigma}$).

- i) Il existe une unique sous-surface $\widehat{\Sigma}$ dans $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ contenant les courbes de $\sigma_s(\mathcal{G})$.
- ii) Le bord de chaque sous-surface appartenant à $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ contient $\sigma_s(\mathcal{X})$.
- iii) La surface $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\widehat{g} \in \{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\}$.
- iv) La surface Σ est de genre $g \in \{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\}$.
- v) L'ensemble $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ est réduit à une composante connexe de genre nul, ou à deux composantes connexes dont l'une est de genre nul et l'autre est de genre 0 ou 1.

Démonstration.

Montrons la partie i).

Rappelons que les courbes normales n'intersectent aucune courbe de $\sigma(\mathcal{G})$, donc en particulier, n'intersectent pas les courbes spéciales. Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, soit $\widehat{\Sigma}_i$ la sous-surface de $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ qui contient la courbe a_i . Rappelons que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la courbe $\delta.a_i$ est une courbe spéciale de $\sigma_s(A_{i+1})$, donc $\delta.a_i = a_{i+1}$. Or $I(a_i, \delta.a_i) \neq 0$ d'après la proposition 9.22 car a_i est spéciale, donc $I(a_i, a_{i+1}) \neq 0$, donc $\widehat{\Sigma}_i = \widehat{\Sigma}_{i+1}$. Ainsi toutes les courbes spéciales sont incluses dans une unique sous-surface $\widehat{\Sigma}$ de $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$.

Montrons la partie ii).

Soit S une sous-surface appartenant à $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$. Si aucun des bords de S n'est une courbe normale, alors S appartient à $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\Sigma)$ et d'après la proposition 11.1, le bord de S contient $\sigma_s(\mathcal{X})$ et la partie ii) est démontrée.

Supposons donc que $\sigma_n(\mathcal{G})$ ne soit pas vide et intéressons-nous aux surfaces de $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ dont l'un des bords au moins est une courbe normale. Nous définissons un sous-groupe \mathcal{H}^* de \mathcal{H} (lui-même défini à la définition 10.3) par :

$$\mathcal{H}^* := \langle \gamma_i \gamma_j^{-1}, i, j \in \text{Imp}(n) \rangle$$

Il agit via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$ et notamment sur $\sigma(\mathcal{X})$ de sorte que :

Action de \mathcal{H}^ via ρ sur $\sigma_s(\mathcal{X})$.* On a vu que l'action de \mathcal{H} via ρ sur $\text{Courb}(\Sigma)$ préserve $\sigma_s(\mathcal{X})$, donc l'action de \mathcal{H}^* fait de même puisque \mathcal{H}^* est inclus dans \mathcal{H} . De plus, le morphisme $\mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{X})$ envoie \mathcal{H}^* sur $\mathfrak{A}(\mathcal{X})$, le groupe symétrique alterné sur les éléments de \mathcal{X} . En effet, pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, ce morphisme envoie $\gamma_i \gamma_{i+2}^{-1}$ sur la permutation circulaire sur les trois éléments A_i, A_{i+2}, A_{i+4} . Or $\mathfrak{A}(\mathcal{X})$ agit transitivement sur \mathcal{X} (rappelons que \mathcal{X} contient au moins trois éléments). Donc l'action de \mathcal{H}^* sur $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ préserve \mathcal{X} et est transitive sur \mathcal{X} . On en déduit que \mathcal{H}^* agit transitivement sur $\sigma_s(\mathcal{X})$.

Action de \mathcal{H}^ via ρ sur $\sigma_n(\mathcal{G})$.* Rappelons que d'après la proposition 9.7, l'action de \mathcal{B}_n sur $\sigma_n(\mathcal{G})$ et sur $\text{Bord}(\Sigma_{\sigma_n(\mathcal{G})})$ est cyclique. Alors l'action de \mathcal{F}_n (cf. définition 9.11) sur $\sigma_n(\mathcal{G})$ et sur $\text{Bord}(\Sigma_{\sigma_n(\mathcal{G})})$ est triviale d'après le lemme 9.12. Or \mathcal{H}^* est un sous-groupe de \mathcal{F}_n , donc l'action de \mathcal{H}^* sur $\text{Courb}(\Sigma)$ fixe chaque courbe de $\sigma_n(\mathcal{G})$ et chaque bord de $\Sigma_{\sigma_n(\mathcal{G})}$.

Action de \mathcal{H}^ via ρ sur $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\widehat{\Sigma})$.* D'après l'action de \mathcal{H}^* sur $\sigma_n(\mathcal{G})$, l'action de \mathcal{H}^* via ρ sur $\text{Sub}(\Sigma)$ préserve $\widehat{\Sigma}$ et préserve l'ensemble $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ de sous-surfaces. Soit S une surface appartenant à $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ et dont l'un des bords au moins est une courbe normale. D'après l'action de \mathcal{H}^* via ρ sur $\sigma_n(\mathcal{G})$, l'action de \mathcal{H}^* via ρ sur $\text{Sub}(\Sigma)$ préserve la surface S .

Exploitions ceci. Pour toute sous-surface S appartenant à $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ telle que $\text{Bord}(S)$ contient une courbe normale, S doit être stable par \mathcal{H}^* . Donc $\text{Bord}(S)$ est \mathcal{H}^* -stable, donc $\text{Bord}(S) \cap \sigma_s(\mathcal{X})$ l'est également, donc $\text{Bord}(S)$ doit contenir tout $\sigma_s(\mathcal{X})$ puisque \mathcal{H}^* agit transitivement sur $\sigma_s(\mathcal{X})$.

Montrons les parties iii) et iv).

D'après le ii), chaque sous-surface appartenant à $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ contient au moins $\frac{n}{2}$ courbes spéciales dans son bord. Or $\sigma_s(\mathcal{X})$ contient $\frac{n}{2}$ courbes, donc $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ contient une seule composante connexe ayant n bords issus des courbes spéciales, ou $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ contient deux composantes connexes ayant chacun $\frac{n}{2}$ bords issus des courbes spéciales. Dans le premier cas $\widehat{\Sigma}$ contient un ensemble non séparant de $\frac{n}{2}$ courbes, donc $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\widehat{g} \geq \frac{n}{2}$. Dans le deuxième cas $\widehat{\Sigma}$ contient un ensemble non séparant de $\frac{n}{2} - 1$ courbes, donc $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\widehat{g} \geq \frac{n}{2} - 1$. Rappelons que par hypothèse, $g \leq \frac{n}{2}$. Par ailleurs, Σ contient $\widehat{\Sigma}$, donc $\widehat{g} \leq g$. Finalement, on a :

$$\frac{n}{2} - 1 \leq \widehat{g} \leq g \leq \frac{n}{2}$$

Montrons la partie v).

Nous venons de voir au iii) - iv) que $\text{Sub}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\widehat{\Sigma})$ est un ensemble d'exactlyement une ou deux surfaces.

- S'il n'en existe qu'une, notons-la S . La surface $\widehat{\Sigma}$ est le recollement de S sur elle-même en faisant coïncider n bords entre eux. La différence de genre entre $\widehat{\Sigma}$ et S est donc $\frac{n}{2}$, mais $\widehat{\Sigma}$ est de genre maximal $\frac{n}{2}$, donc S est de genre nul.
- S'il en existe deux, notons-les S_1 et S_2 . Le recollement de S_1 sur S_2 se fait le long de n bords, donc la différence de genre entre $\widehat{\Sigma}$ et S est de $\frac{n}{2} - 1$, mais $\widehat{\Sigma}$ est de genre au plus $\frac{n}{2}$, donc la somme des genres de S_1 et de S_2 doit être égale à 0 ou 1. □

Ayant décrit la position des courbes de $\sigma_s(\mathcal{X})$ vis-à-vis des courbes de $\sigma_n(\mathcal{G})$, il nous reste à décrire précisément $\sigma_n(\mathcal{G})$. Rappelons tout d'abord la définition 11.3 de $\widehat{\Sigma}$, $\check{\Sigma}$ et \mathcal{U} donnée dans l'introduction.

Définition 11.3 ($\widehat{\Sigma}$, $\check{\Sigma}$ et \mathcal{U}).

- Soit $\widehat{\Sigma}$ la sous-surface de $\text{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ contenant les courbes spéciales.
- Posons $\mathcal{U} = \text{Bord}(\widehat{\Sigma}) \cap \sigma_n(\mathcal{G})$ de sorte que \mathcal{U} soit l'ensemble des bords normaux de $\widehat{\Sigma}$.
- Soit $\check{\Sigma}$ la réunion des sous-surfaces de $\text{Sub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$ différentes de $\widehat{\Sigma}$. Si $\widehat{\Sigma}$ est la seule sous-surface de $\text{Sub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$, on dira que $\check{\Sigma}$ est vide.

Attention : Rappelons que l'on a supposé dans ce chapitre que $\sigma_p(\mathcal{G})$ était vide, autrement dit, les courbes séparantes appartenant à $\sigma_n(\mathcal{G})$ séparent Σ en deux surfaces, chacune de genre non nul. Sans cette hypothèse, la proposition 11.4 serait fausse.

Remarque. Si $\check{\Sigma}$ est non vide, on a $\text{Bord}(\widehat{\Sigma}) \cap \text{Bord}(\check{\Sigma}) = \mathcal{U}$. Dans le chapitre suivant, ce n'est pas tant la connaissance de $\sigma_n(\mathcal{G})$ que celle de \mathcal{U} qui nous servira. C'est pourquoi la prochaine proposition porte sur l'ensemble de courbes \mathcal{U} plus que sur $\sigma_n(\mathcal{G})$. Toutefois, par soucis de cohérence avec l'ensemble de ce chapitre, on le termine en donnant en remarque les graphes possibles de $\Gamma(\Sigma, \sigma(\mathcal{X}))$.

Proposition 11.4 (Description de $\text{Sub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$).

On a $|\mathcal{U}| \leq 2$. Les sous-surfaces de $\text{Sub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$ vérifient les propriétés suivantes :

- si \mathcal{U} est vide, $\Sigma = \widehat{\Sigma}$; si $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\frac{n}{2}$, \mathcal{U} est vide,
- si \mathcal{U} est réduit à une courbe non séparante u , $\check{\Sigma}$ est vide et $\{u\}$ est le marquage de $\widehat{\Sigma}$,
- si \mathcal{U} est réduit à une courbe séparante u , $\check{\Sigma}$ est une sous-surface connexe de genre 1,
- si \mathcal{U} contient deux courbes, elles sont non séparantes et $\check{\Sigma}$ est connexe, de genre nul.

On résume cela en disant que $\Gamma(\Sigma, \mathcal{U})$ est l'un des quatre graphes figure 86 où :

- les sommets entourés représentent les sous-surfaces de genre non nul de $\text{Sub}_{\mathcal{U}}(\Sigma)$,
- l'entier placé à côté des sommets entourés en indique le genre,
- les arêtes sont représentées en pointillés par soucis de cohérence avec la remarque 11.9 ci-dessous.

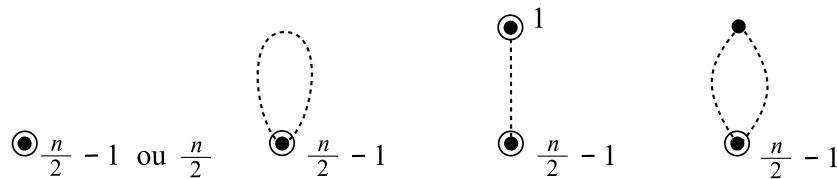


FIG. 86 – Les cinq graphes possibles pour $\Gamma(\Sigma, \sigma_n(\mathcal{G}))$ (cf. proposition 11.4).

Démonstration. Toute la démonstration découle d'un calcul de genre, comme nous allons le voir. Rappelons que g est le genre de Σ . Notons \widehat{g} le genre de $\widehat{\Sigma}$ et \check{g} le genre de $\check{\Sigma}$ (nul par convention lorsque $\check{\Sigma}$ est vide). D'après la proposition 11.2, on a :

$$g \in \{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\}, \widehat{g} \in \{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\}, \check{g} \in \{0, 1\}.$$

Remarquons que chaque composante connexe (non vide) de $\check{\Sigma}$ qui est séparée de $\widehat{\Sigma}$ par une courbe séparante de \mathcal{U} est de genre non nul, car on a supposé qu'il n'existait pas de courbe périphérique dans $\sigma(\mathcal{G})$. Donc il ne peut exister qu'une seule composante connexe non vide de $\check{\Sigma}$ séparée de $\widehat{\Sigma}$ par une courbe séparante. Par ailleurs, si une composante connexe (non vide) de $\check{\Sigma}$ est de genre nul, elle est séparée de $\widehat{\Sigma}$ par au moins deux courbes de \mathcal{U} (toujours car les courbes de \mathcal{U} ne sont pas des courbes périphériques), donc le recollement de $\widehat{\Sigma}$ et d'une composante connexe de $\check{\Sigma}$ de genre nul contribue également de façon non nulle au genre de Σ . Donc $\check{\Sigma}$ ne possède qu'une seule composante connexe, autrement dit $\check{\Sigma}$ est connexe. On a donc la formule, vraie dès que $\check{\Sigma}$ est non vide :

$$g - \widehat{g} - \check{g} = |\mathcal{U}| - 1.$$

Ce nombre doit être égal à zéro ou à un. Donc $|\mathcal{U}| \in \{1, 2\}$ (toujours sous l'hypothèse où $\check{\Sigma}$ est non vide) et s'il est égal à deux, alors $\check{g} = 0$. On a vu que réciproquement, si $\check{g} = 0$ tandis

que $\check{\Sigma}$ est non vide, on a $|\mathcal{U}| \geq 2$, donc $|\mathcal{U}| = 2$. De même, si $\check{\Sigma}$ est non vide, $|\mathcal{U}| = 1$ si et seulement si $\check{g} = 1$. Ces deux derniers cas correspondent aux deux graphes dessinés à droite figure 86. Lorsque $\check{\Sigma}$ est vide, on obtient évidemment les deux graphes de gauche sur la figure 86. \square

Remarque 11.9. Pour conclure ce chapitre, on dessine sur la figure 87 les différents graphes de $\Gamma(\Sigma, \sigma(\mathcal{X}))$ compatibles avec les propositions 11.1, 11.2 et 11.4. On ne prouve pas que ces graphes soient bien les seuls, mais cela se déduit des propositions précitées. La légende de cette figure est la suivante :

- les arêtes pleines représentent les courbes spéciales,
- les arêtes en pointillés représentent les courbes normales,
- les sommets entourés représentent les sous-surfaces de genre non nul de $\mathcal{S}ub_{\sigma_n \mathcal{G}}(\Sigma)$,
- l'entier placé à côté des sommets entourés en indique le genre.

Précisons que les sommets de valence non entouré correspondent à des sous-surface de genre nul dont le bord contient des courbes de bord de Σ .

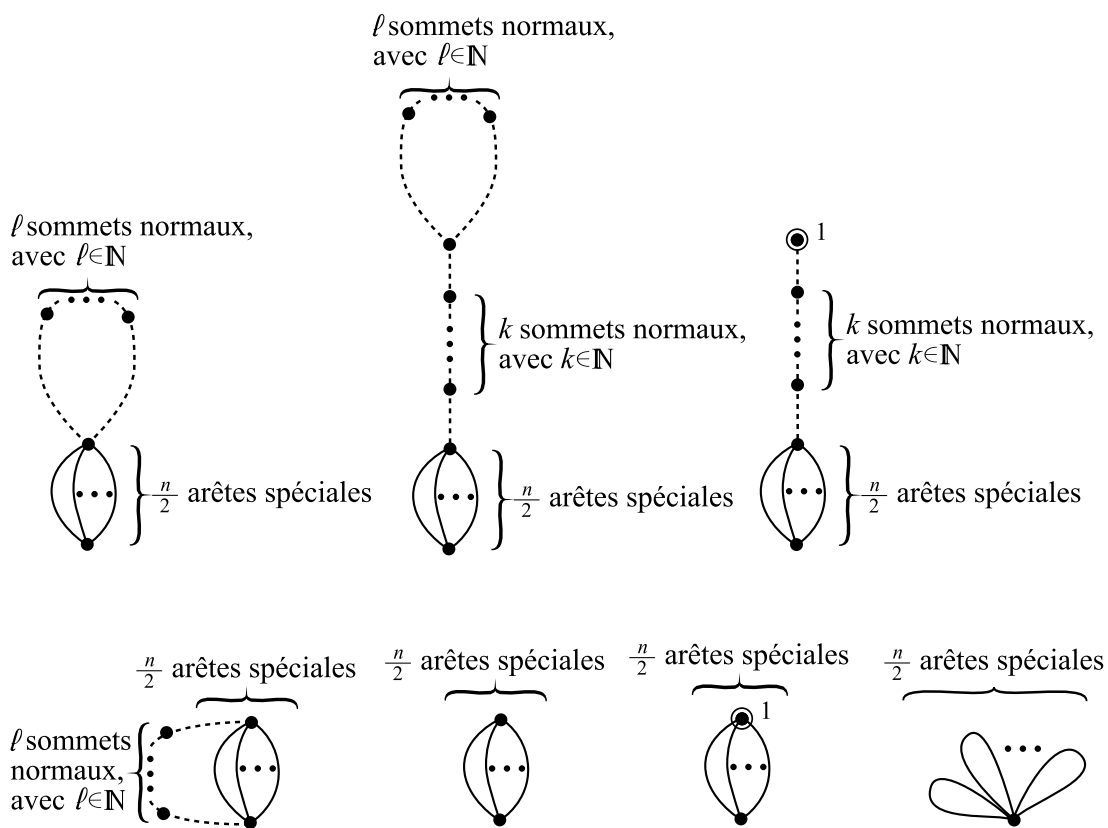


FIG. 87 -

12 Expression des mapping classes de \mathcal{G}

Rappelons que n est un entier pair supérieur ou égal à 6, Σ est la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$, et ρ est un morphisme non cyclique de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ tel que $\sigma_p(\mathcal{G})$ est vide. D'après la proposition 11.1, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, le système de réduction canonique de chaque mapping class A_i est réduit à une courbe spéciale que l'on note a_i , aux courbes normales près. On cherche à montrer que ρ est une transvection de morphisme de monodromie.

12.1 Plan du chapitre et résultats démontrés

Dans ce chapitre, nous montrons la proposition :

Proposition 12.1. *Sous les hypothèses de ce chapitre, le morphisme ρ est une transvection de morphisme de monodromie.*

On a alors prouvé le théorème suivant :

Théorème 12.2 (Le théorème 1 dans le cas où n est pair).

Soit n un entier pair supérieur ou égal à 6, soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$. Alors tout morphisme ζ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est soit cyclique, soit une transvection de morphisme de monodromie.

Démonstration. Si ζ est cyclique, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que ζ ne soit pas cyclique. Soit Σ' la composante connexe de $\Sigma_{\sigma_p(\mathcal{G})}$ de genre g (rappelons que $\sigma_p(\mathcal{G})$ est l'ensemble des courbes périphériques introduit au chapitre 7). D'après le i) et ii) de la proposition 7.4 le morphisme ζ induit un morphisme $\zeta' : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma')$ non cyclique. Alors d'après la proposition 12.1, ζ' est une transvection de morphisme de monodromie. Alors, d'après le ii) de la proposition 7.4, le morphisme ζ lui-même était une transvection de morphisme de monodromie. \square

Plan du chapitre : La méthode employée pour déterminer le morphisme ρ et prouver la proposition 12.1 consiste dans un premier temps à se restreindre à la surface $\widehat{\Sigma}$ définie au chapitre 11, définition 11.3 (rappelons que $\widehat{\Sigma}$ est une sous-surface de $\mathcal{Sub}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$, stable sous l'action de \mathcal{B}_n contenant les courbes spéciales, mais pas les courbes normales). On définit alors le morphisme

$$\wedge : \begin{array}{ccc} \mathcal{PMod}_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{Mod}(\widehat{\Sigma}) \\ A & \longmapsto & \widehat{A} \end{array} .$$

On note $\widehat{\rho}$ le morphisme égal à la composition $\wedge \circ \rho$, et allant de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{Mod}(\widehat{\Sigma})$. Ce morphisme est bien défini car $\rho(\mathcal{B}_n)$ préserve $\sigma_n(\mathcal{G})$ d'après la proposition 9.7. Puis on utilisera l'information véhiculée par les courbes spéciales pour identifier les mapping classes \widehat{A}_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. A ce propos, d'après le lemme 3.43, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ on a :

$$\sigma(\widehat{A}_i) = \sigma(A_i) \cap \text{Courb}(\widehat{\Sigma}) = \{a_i\}.$$

C'est ainsi que le paragraphe 12.2 est consacré à l'étude du morphisme $\widehat{\rho}$ via les mapping classes \widehat{A}_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On montrera que $\widehat{\rho}$ est une transvection de morphisme de monodromie, cf. proposition 12.4. Puis au cours du paragraphe 12.3, nous utiliserons ces résultats pour déterminer le morphisme ρ et ainsi prouver la proposition 12.1.

12.2 Le morphisme $\hat{\rho}$ est une transvection de morphisme de monodromie

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que le morphisme $\hat{\rho}$ est une transvection de morphisme de monodromie. On notera $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{X}}$ les images de \mathcal{G} et \mathcal{X} par \wedge , où $\mathcal{X} = \{A_i, i \in \text{Imp}(n)\} = \{A_1, A_3, \dots, A_{n-1}\}$. Afin d'étudier le morphisme $\hat{\rho}$, nous nous intéresserons aux mapping classes induites par celles de $\hat{\mathcal{X}}$ dans $\text{Mod}(\tilde{\Sigma})$ où $\tilde{\Sigma}$ est la surface $\hat{\Sigma}_{\sigma_s(\hat{\mathcal{X}})}$. Remarquons à nouveau d'après le lemme 3.43 que :

$$\begin{cases} \sigma_s(\hat{\mathcal{X}}) = \sigma_s(\mathcal{X}) \cap \text{Courb}(\hat{\Sigma}) = \{a_i, i \in \text{Imp}(n)\}, \\ \sigma_n(\hat{\mathcal{X}}) = \sigma_n(\mathcal{X}) \cap \text{Courb}(\hat{\Sigma}) = \emptyset. \end{cases}$$

Découpage de $\hat{\Sigma}$ le long des courbes de $\sigma_s(\hat{\mathcal{X}})$

- Soit $\tilde{\Sigma}$ la surface $\hat{\Sigma}_{\sigma_s(\hat{\mathcal{X}})}$. D'après la proposition 11.2.v), $\tilde{\Sigma}$ est connexe de genre nul ou bien comporte deux composantes connexes dont l'une est de genre nul et l'autre est de genre 0 ou 1.
- Soit \sim le morphisme canonique $\sim : \underset{\tilde{A}}{\text{Mod}}_{\sigma_s(\hat{\mathcal{X}})}(\hat{\Sigma}) \longrightarrow \text{Mod}(\tilde{\Sigma})$, où $\underset{\tilde{A}}{\text{Mod}}_{\sigma_s(\hat{\mathcal{X}})}(\hat{\Sigma})$ est le groupe des mapping classes de $\text{Mod}(\hat{\Sigma})$ préservant $\sigma_s(\hat{\mathcal{X}})$. On notera $\tilde{\mathcal{X}}$ l'image de $\hat{\mathcal{X}}$.
- Pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, notons a_i^+ et a_i^- les deux bords issus du découpage de $\hat{\Sigma}$ le long de a_i . Notons $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma}) = \{a_i^+, i \in \text{Imp}(n)\}$ et $\text{Bord}^-(\tilde{\Sigma}) = \{a_i^-, i \in \text{Imp}(n)\}$. Lorsque $\tilde{\Sigma}$ n'est pas connexe, les bords a_i^+ et a_i^- sont répartis de telle sorte que $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma})$ et $\text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$ sont chacun inclus dans le bord de l'une des composantes connexes de $\tilde{\Sigma}$. Pour ces définitions, on se réfère à la figure 88 qui représente le cas où $\tilde{\Sigma}$ est connexe.

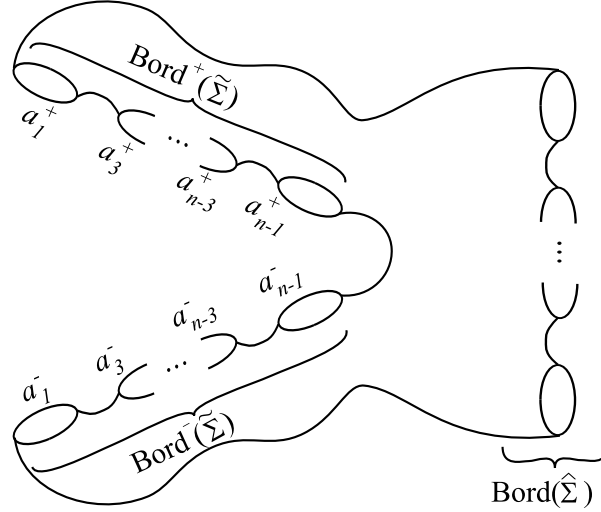


FIG. 88 – La surface $\tilde{\Sigma}$ (cas où $\tilde{\Sigma}$ est connexe).

- Notons $\tilde{\rho}$ le morphisme de $\hat{\rho}^{-1}(\text{Mod}_{\sigma_s(\hat{\mathcal{X}})}(\hat{\Sigma}))$ dans $\text{Mod}(\tilde{\Sigma})$ qui à tout $\xi \in \mathcal{B}_n$ tel que $\hat{\rho}(\xi)$ préserve $\sigma_s(\mathcal{X})$ associe $\sim(\hat{\rho}(\xi))$. Remarquons que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, la mapping class $\rho(\xi)$ préserve $\sigma_s(\mathcal{X})$. On a donc une action de \mathcal{H} sur $\tilde{\mathcal{X}}$ définie de la façon suivante : pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on pose :

$$\xi.\tilde{A} = \tilde{\rho}(\xi)\tilde{A}\tilde{\rho}(\xi)^{-1}.$$

Remarquons que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $A \in \mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ tel que A préserve $\sigma_n(\mathcal{G})$ et $\sigma_s(\mathcal{X})$, la mapping class $\tilde{\rho}(\xi) \tilde{A} \tilde{\rho}(\xi)^{-1}$ est la composée des morphismes \wedge puis \sim appliquée à la mapping class $\rho(\xi) A \rho(\xi)^{-1}$. On en déduit que \mathcal{H} agit sur $\tilde{\mathcal{X}}$ de la même manière que \mathcal{H} agit sur \mathcal{X} , i.e. , pour tout $i, j \in \text{Imp}(n)$, on a :

$$\gamma_i \cdot \tilde{A}_j = \begin{cases} \tilde{A}_j & \text{si } i \notin \{j, j-2\}; \\ \tilde{A}_{j-2} & \text{si } i = j-2; \\ \tilde{A}_{j+2} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Lemme 12.3 (Les mapping classes \tilde{A}_i , $i \in \text{Imp}(n)$).

Les mapping classes \tilde{A}_i , $i \in \text{Imp}(n)$, coïncident toutes entre elles. Elles sont soit triviales, soit périodiques d'ordre 2 échangeant a_j^+ et a_j^- pour tout $j \in \text{Imp}(n)$.

Démonstration.

Action de \mathcal{H} sur $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma}) \sqcup \text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$:

Remarquons que chaque mapping class de $\tilde{\mathcal{X}}$ préserve $\sigma_s(\tilde{A}_i)$ pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, donc chaque mapping class de $\tilde{\mathcal{X}}$ préserve $\{a_i^+, a_i^-\}$ pour tout $i \in \text{Imp}(n)$. Si \tilde{A}_1 fixe chacun des bords a_3^+ et a_3^- , alors montrons qu'il fixe chacun des bords a_i^+ et a_i^- pour tout $i \in \text{Imp}(n) \setminus \{1\}$. Rappelons que d'après la proposition 10.4, \mathcal{H} agit $\frac{n}{2}$ fois transitivement sur \mathcal{X} , donc sur $\tilde{\mathcal{X}}$, donc pour tout $i \in \text{Imp}(n) \setminus \{1\}$, il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\xi \cdot \tilde{A}_1 = \tilde{A}_i$ et $\xi \cdot \tilde{A}_3 = \tilde{A}_i$. Alors si \tilde{A}_1 fixe les bords a_3^+ et a_3^- , $\xi \cdot \tilde{A}_1$ fixe les bords $\xi \cdot a_3^+$ et $\xi \cdot a_3^-$ (\mathcal{H} agit canoniquement via ρ sur $\text{Bord}(\tilde{\Sigma})$), donc \tilde{A}_i fixe les bords a_i^+ et a_i^- . Il existe donc a priori quatre actions possibles de $\tilde{\mathcal{X}}$ sur $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma}) \sqcup \text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$:

- les mapping classes de $\tilde{\mathcal{X}}$ fixent les courbes de $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma}) \sqcup \text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$;
- les mapping classes de $\tilde{\mathcal{X}}$ échangent a_i^+ et a_i^- pour tout $i \in \text{Imp}(n)$;
- pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, \tilde{A}_i échange a_i^+ avec a_i^- , et fixe a_j^+ et a_j^- pour tout $j \in \text{Imp}(n) \setminus \{i\}$;
- pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, \tilde{A}_i fixe a_i^+ et a_i^- , et échange a_j^+ avec a_j^- pour tout $j \in \text{Imp}(n) \setminus \{i\}$.

Les deux cas a) et b) correspondent aux situations prévues par l'énoncé. Dans le reste de cette démonstration, on cherche à réfuter les cas c) et d). Remarquons que dans les cas c) et d), \tilde{A}_1 envoie certains bords de $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma})$ dans $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma})$ et d'autres bords de $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma})$ dans $\text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$. Or d'une part les bords de $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma})$ appartiennent à une même composante connexe de $\tilde{\Sigma}$ et de même les bords de $\text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$ appartiennent à une même composante connexe de $\tilde{\Sigma}$, d'autre part, \tilde{A}_1 envoie les composantes connexes de $\tilde{\Sigma}$ sur des composantes connexes de $\tilde{\Sigma}$, donc il existe une composante connexe dans $\tilde{\Sigma}$ qui contient des bords de $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma})$ et des bords de $\text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$. Par transitivité, les bords de $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma})$ et de $\text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$ appartiennent à une même composante connexe, donc :

$$\text{la surface } \tilde{\Sigma} \text{ est connexe.} \tag{1}$$

La nature des mapping classes de $\tilde{\mathcal{X}}$:

La mapping class \tilde{A}_1 est pseudo-Anosov ou périodique, car $\sigma(\tilde{A}_1) = \emptyset$. Or si \tilde{A}_1 était pseudo-Anosov, les courbes de $\sigma_s(\tilde{X})$ le long desquelles on a découpé $\tilde{\Sigma}$ pour obtenir $\tilde{\Sigma}$ seraient toutes des courbes spéciales de \tilde{A}_1 d'après le lemme 3.44, or $\sigma_s(\tilde{A}_1) = \{a_1\}$, d'où une contradiction. Donc \tilde{A}_1 est périodique. De plus \tilde{A}_1^2 fixe chaque courbe de $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma}) \sqcup \text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$, donc d'après le corollaire 3.23, \tilde{A}_1^2 est l'identité. Donc \tilde{A}_1 est l'identité ou est périodique d'ordre deux. Le même raisonnement peut être tenu pour \tilde{A}_i pour tout $i \in \text{Imp}(n)$. Donc :

les mapping classes de $\tilde{\mathcal{X}}$ sont toutes l'identité ou sont toutes périodiques d'ordre deux. (2)

Réfutation du cas c) :

Dans le cas c), \tilde{A}_1 fixe au moins $n - 2$ bords de $\tilde{\Sigma}$, or la surface $\tilde{\Sigma}$ est connexe d'après (1) et de genre nul, et par ailleurs \tilde{A}_1 est périodique d'après (2), donc on peut appliquer le corollaire 3.23 : \tilde{A}_1 est l'identité. Mais alors \tilde{A}_1 doit fixer a_1^+ et a_1^- , ce qui contredit les hypothèses du c). Ce cas là n'a donc pas lieu.

Etude et réfutation du cas d) :

Un argument simple permet de réfuter cette situation lorsque $n \geq 8$: considérons la mapping class $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$. Elle est périodique d'ordre 2, car \tilde{A}_1 et \tilde{A}_3 commutent. D'après le corollaire 3.23, une mapping class périodique qui fixe plus de deux bords est l'identité, or ici, $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$ fixe tous les bords spéciaux à l'exception des bords a_1^+ , a_1^- , a_3^+ et a_3^- , donc $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$ fixe au moins quatre bords (rappelons que $n \geq 8$), donc $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$ est l'identité, mais c'est absurde car $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$ permute non trivialement les bords a_1^+ , a_1^- , a_3^+ et a_3^- . Donc le cas d) ne peut arriver a priori que si $n = 6$.

Considérons le cas $n = 6$ et décrivons la situation. Rappelons que d'après (1), $\tilde{\Sigma}$ est connexe. Soit $\text{Bord}^0(\tilde{\Sigma})$ l'ensemble des bords de $\tilde{\Sigma}$ n'appartenant pas à $\text{Bord}^+(\tilde{\Sigma}) \sqcup \text{Bord}^-(\tilde{\Sigma})$. A nouveau, la mapping class $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$ est périodique, fixe les bords a_5^+ , a_5^- alors qu'elle permute les bords a_1^+ , a_1^- , a_3^+ et a_3^- de façon non triviale. Or d'après le corollaire 3.23, une telle mapping class fixe au plus deux bords. Donc $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$ ne fixe aucun bord de $\text{Bord}^0(\tilde{\Sigma})$. Pourtant, d'une part $\text{Bord}^0(\tilde{\Sigma})$ est inclus dans $\text{Bord}(\Sigma) \cup \mathcal{U}$, d'autre part les mapping classes de $\tilde{\mathcal{X}}$ fixent les courbes de $\text{Bord}(\Sigma) \cap \text{Bord}^0(\tilde{\Sigma})$ et ont toutes la même action sur les courbes de $\mathcal{U} \cap \text{Bord}^0(\tilde{\Sigma})$. Alors dans chacun des trois cas de figure $|\mathcal{U}| \in \{0, 1, 2\}$ autorisés par la proposition 11.4, la mapping class $\tilde{A}_1\tilde{A}_3$ fixe les courbes de $\text{Bord}^0(\tilde{\Sigma})$. Il faut donc que $\text{Bord}^0(\tilde{\Sigma})$ soit vide. Donc :

$$\hat{\Sigma} = \Sigma = \Sigma_{3,0}, \text{ et } \tilde{\Sigma} = \Sigma_{0,6}.$$

On a représenté la surface $\tilde{\Sigma}$ figure 89 et on y a décrit trois exemples de mapping classes périodiques \tilde{A}_1 , \tilde{A}_3 , et \tilde{A}_5 dont l'action sur les courbes de $\text{Bord}(\tilde{\Sigma})$ est cohérente avec le cas d).

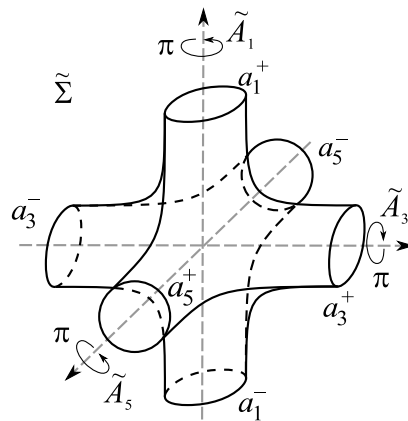


FIG. 89 – Le cas $n = 6$ où \tilde{A}_1 fixe a_1^+ et a_1^- , et permute a_3^+ avec a_3^- , et a_5^+ avec a_5^- .

A présent, on oublie le morphisme \wedge puisque celui-ci est trivial, étant donné que \mathcal{U} est vide (et donc que $\sigma_n(\mathcal{G})$ est vide). La contradiction à laquelle nous allons aboutir proviendra de l'étude de la mapping class $Z = (A_3A_4A_5)^2$: on verra qu'elle induit sur une sous-surface de Σ une mapping

class périodique d'ordre 4 et que le carré de Z coïncide avec A_1 modulo une puissance de twist de Dehn le long de la courbe a_1 . Mais comme on le verra, une telle mapping class n'admet pas de racine carrée, ce qui est absurde puisque Z est un carré.

1°) *Nous allons d'abord montrer que l'ensemble $\sigma(Z)$ est contenu dans $\{a_1\}$.*

On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'une courbe x différente de a_1 appartenant à $\sigma(Z)$. Rappelons que $\sigma(Z) = \sigma(Z^2)$. Commençons par constater que Z commute avec A_1 car A_1 commute avec A_3, A_4 et A_5 , donc Z fixe la courbe a_1 . De plus, $ZA_3Z^{-1} = A_5$ et $ZA_5Z^{-1} = A_3$, donc Z échange les courbes a_3 et a_5 . Donc Z induit une mapping class \tilde{Z} dans $\text{Mod}(\tilde{\Sigma})$. De plus, Z^2 commute avec A_3, A_4 et A_5 : ce sont des relations classiques dans le groupe engendré par A_3, A_4 et A_5 , isomorphe à un quotient de \mathcal{B}_4 où les générateurs standards seraient envoyés sur A_3, A_4 et A_5 . Donc :

$$Z^2 \text{ commute avec } A_1, A_3, A_4, A_5. \quad (3)$$

et par la même occasion,

$$\text{la mapping class } Z^2 \text{ fixe les courbes } a_1, a_3, a_4 \text{ et } a_5. \quad (4)$$

Donc les courbes a_1, a_3, a_4, a_5 sont des courbes de réduction de Z^2 , donc on a $I(\sigma(Z^2), \{a_1, a_3, a_4, a_5\}) = 0$. Reprenons l'étude de $\sigma(Z^2)$. Puisque a_4 intersecte a_3 et a_5 , aucune de ces trois courbes ne peut appartenir à $\sigma(Z^2)$. On a donc montré qu'à l'exception de la courbe a_1 , toutes les courbes de réduction essentielles de $\sigma(Z)$ sont incluses dans la surface $\tilde{\Sigma}$ (en commettant un léger abus de langage consistant à voir la surface $\tilde{\Sigma}$ comme une sous-surface de Σ). Or, d'après le lemme 3.43,

$$\sigma(Z) \cap \text{Courb}(\tilde{\Sigma}) = \sigma(\tilde{Z}).$$

Décrivons alors la surface $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$. Puisque a_4 intersecte a_3 et a_5 mais n'intersecte pas les courbes de $\sigma(Z)$, il existe dans $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$ un chemin inclus dans a_4 dont l'une des extrémités appartient à $a_3^+ \cup a_3^-$ et l'autre extrémité appartient à $a_5^+ \cup a_5^-$. Quitte à renommer les courbes, on peut supposer que ce chemin est à extrémités dans a_3^+ et a_5^+ , donc ces deux bords appartiennent à une même composante connexe de $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$ que l'on nomme C^+ . Or A_1 commute avec Z^2 d'après (3) donc il préserve les courbes de $\sigma(Z)$, induit une action sur les bords de $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$, et comme on l'a vu, envoie a_3^+ et a_5^+ sur a_3^- et a_5^- et donc envoie C^+ sur une composante connexe C^- de $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$ contenant les bords a_3^- et a_5^- . Même chose avec A_3 qui envoie a_3^+ et a_5^+ sur a_3^+ et a_5^- , montrant ainsi que a_3^+ et a_5^- sont des bords d'une même composante connexe, donc $C^+ = C^-$. Appelons C cette composante connexe de $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$ qui contient les bords a_3^+, a_3^-, a_5^+ et a_5^- . Rappelons que l'on a supposé qu'il existait une courbe x différente de a_1 dans $\sigma(\tilde{Z})$. Donc la composante connexe C est différente de $\tilde{\Sigma}$, donc $\chi(C) > \chi(\tilde{\Sigma})$. Or même si C ne contient qu'un seul bord autre que les bords a_3^+, a_3^-, a_5^+ et a_5^- , on aura $\chi(C) \leq -3$ tandis que $\chi(\tilde{\Sigma}) = -4$, donc finalement, $\chi(C) = -3$ et il existe une unique composante connexe P de $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$ distincte de C . Donc les deux composantes connexes C et P contiennent chacune un bord issu du découpage de $\tilde{\Sigma}$ le long de la courbe x . On note x^+ le bord induit par x contenu dans P et x^- le bord induit par x contenu dans C . Les deux bords autres que x^+ de P ne peuvent être que a_1^+ et a_1^- . On a ainsi parfaitement décrit la surface non connexe $\tilde{\Sigma}_{\sigma(\tilde{Z})}$ que l'on représente figure 90 (sous l'hypothèse toutefois que $\sigma(Z)$ contient une courbe x différente de a_1).

Finalement, $\sigma(\tilde{Z}) = \{x\}$. Or \tilde{A}_3 commute avec \tilde{Z}^2 , donc \tilde{A}_3 fixe la courbe x . Alors \tilde{A}_3 induit une mapping class dans $\text{Mod}(\tilde{\Sigma}_x)$. Or $\tilde{\Sigma}_x$ contient deux composantes connexes non homéomorphes, donc \tilde{A}_3 induit une mapping class sur chaque composante connexe. Appelons F la mapping class ainsi induite sur C . Elle est périodique d'ordre deux sur la surface C (car \tilde{A}_3 était

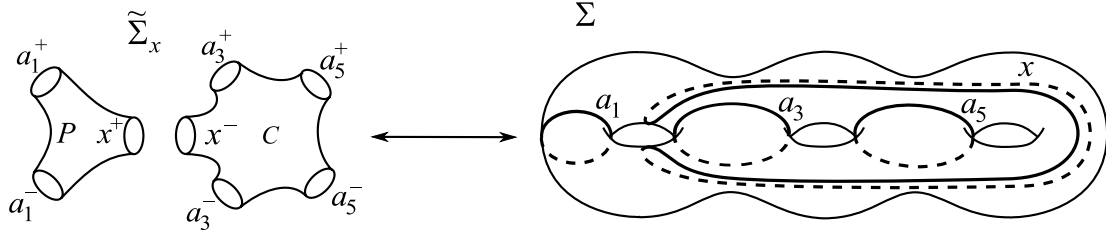


FIG. 90 – La courbe x telle que $\sigma(\tilde{Z}) = \{x\}$.

elle-même périodique d'ordre deux), elle échange a_5^+ et a_5^- , mais elle fixe x , a_3^+ , a_3^- et C est de genre nul. Ceci est en contradiction avec le corollaire 3.23 selon lequel une mapping class périodique sur une surface de genre nul et qui en fixe trois bords est l'identité. C'est la contradiction attendue. On a donc montré que $\sigma(Z) \subset \{a_1\}$.

2°) Montrons que Z^2 et A_1 coïncident modulo une puissance de twist de Dehn le long de la courbe a_1 .

Rappelons d'après (2) que \tilde{A}_1 est périodique d'ordre deux. La mapping class \tilde{Z} vérifie $\sigma(\tilde{Z}) = \emptyset$, donc elle est soit pseudo-Anosov, soit périodique. Mais si elle était pseudo-Anosov, les courbes a_1 , a_3 et a_5 seraient des courbes de réduction essentielles de Z , ce qui n'est pas le cas au moins pour a_3 et a_5 . Donc \tilde{Z} est périodique. Alors les mapping classes \tilde{Z} et \tilde{A}_1 sont périodiques et commutent, donc elles engendrent un groupe fini. De plus, elles fixent toutes les deux les bords a_1^+ et a_1^- : on l'a supposé par hypothèse pour \tilde{A}_1 ; montrons-le pour \tilde{Z} : la mapping class $A_3A_4A_5$ fixe la courbe a_1 car A_3 , A_4 et A_5 fixent la courbe a_1 , donc la mapping class $Z = (A_3A_4A_5)^2$ fixe la courbe a_1 et ne permute pas les deux composantes connexes de $\mathcal{V} \setminus a_1$ où \mathcal{V} serait un voisinage tubulaire de a_1 , donc \tilde{Z} fixe les courbes a_1^+ et a_1^- . Quant à A_1 , par hypothèse, on est dans le cas d) où \tilde{A}_1 fixe les courbes a_1^+ et a_1^- . Donc \tilde{Z} et \tilde{A}_1 sont deux mapping classes périodiques et fixent chacune un même bord (même deux comme on vient de le voir), donc d'après le lemme 3.19, \tilde{Z} et \tilde{A}_1 engendrent un groupe cyclique. Or \tilde{Z} est d'ordre pair (car elle échange $\{a_3^+, a_3^-\}$ avec $\{a_5^+, a_5^-\}$) et \tilde{A}_1 est d'ordre deux. Donc il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\tilde{A}_1 = \tilde{Z}^k$. Or \tilde{Z}^4 a une action triviale sur les bords de $\tilde{\Sigma}$, donc est l'identité, donc $k \in \{1, 2, 3\}$. Mais \tilde{Z} et \tilde{Z}^3 échangent $\{a_3^+, a_3^-\}$ avec $\{a_5^+, a_5^-\}$ tandis que \tilde{A}_1 préserve chacun de ces ensembles, donc $k \notin \{1, 3\}$. Finalement,

$$\tilde{A}_1 = \tilde{Z}^2.$$

Considérons le produit $Z^2A_1^{-1}$. On vient de voir que $\sim(Z^2A_1^{-1})$ est trivial dans $\text{Mod}(\tilde{\Sigma})$, donc d'après la suite exacte :

$$1 \rightarrow \langle T_{a_1}, T_{a_3}, T_{a_5} \rangle \rightarrow \text{Mod}_{\sigma_s(\mathcal{X})}(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}(\tilde{\Sigma}) \rightarrow 1,$$

la mapping class $Z^2A_1^{-1}$ est un multitwist le long des courbes a_1 , a_3 et a_5 . Mais d'après la proposition 3.46, $\sigma(Z^2A_1^{-1})$ est inclus dans $\{a_1\}$, car d'après le 1°), $\sigma(Z^2) \subset \{a_1\}$, et du fait que $\tilde{\Sigma} = \Sigma$, $\sigma(A_1) = \{a_1\}$. Donc $Z^2A_1^{-1}$ est une puissance de twist de Dehn le long de la courbe a_1 .

3°) On obtient une contradiction en examinant $Y = A_3A_4A_5$, la racine carrée de Z .

On peut voir $\tilde{\Sigma}$ comme une sphère marquée de six points correspondant aux six bords. Or \tilde{Z} est une mapping class périodique sur $\tilde{\Sigma}$, donc d'après le théorème de Kerckhoff, \tilde{Z} peut être représentée par un difféomorphisme périodique de $\tilde{\Sigma}$, et d'après Kerékjártó, ce difféomorphisme

périodique est conjugué par un difféomorphisme isotope à l'identité à une rotation sur la sphère $\tilde{\Sigma}$. Puisque \tilde{Z} est d'ordre 4, $\tilde{\Sigma}$ est la classe d'isotopie d'une rotation d'angle $\pm\pi/2$ dont l'axe passe par les deux points marqués correspondant aux bords a_1^+ et a_1^- . Le carré de cette rotation est dans la classe d'isotopie de \tilde{A}_1 . Ceci justifie la figure 91 représentant la surface de genre deux Σ_{a_1} et les deux mapping classes périodiques induites par A_1 et Z sur Σ_{a_1} que l'on note A'_1 et Z' . On compte sur la figure 91 quatre points fixes P_1, P_2, P_3 et P_4 pour A'_1 . On en déduit que :

- (1) Z' n'a pas de points fixes,
- (2) $Z'^2 = A'_1$ a quatre points fixes.

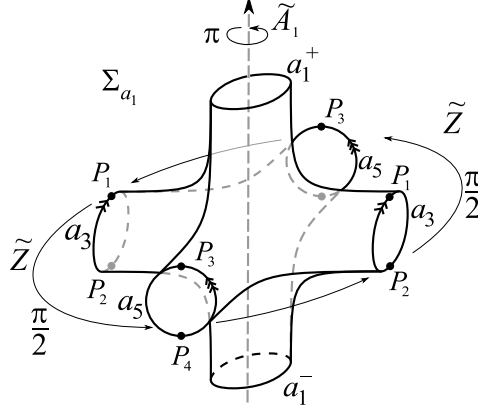


FIG. 91 – La mapping class périodique \tilde{A}_1 induite par A_1 dans Σ_{a_1} (les flèches le long des courbes a_3 et a_5 symbolisent un recollement le long de ces courbes de sorte que Σ_{a_1} est bien une surface de genre deux ayant deux composantes de bord : a_1^+ et a_1^-).

Posons $Y := A_3A_4A_5$. D'après la proposition 9.6, A_3, A_4 et A_5 fixent $\sigma_s(A_1)$, donc fixent a_1 , donc la mapping class Y induit une mapping class Y' sur Σ_{a_1} . Soit Y' la mapping class induite par Y sur Σ_{a_1} , périodique d'ordre 8 puisque Z' est périodique d'ordre 4. Comme on va le voir, les assertions (1) et (2) impliquent (3)-(5) :

- (3) Y' est périodique d'ordre 8 sans points fixes,
- (4) $Y'^2 = Z'$ est périodique d'ordre 4 sans points fixes,
- (5) Y'^4 possède quatre points fixes appartenant à une même orbite sous Y' .

Justifions l'assertion (5). Si Y' préservait $\{P_1, P_3\}$, Y'^2 fixerait P_1 et P_3 mais ce n'est pas le cas, donc l'orbite de P_1 sous Y' est de cardinal au moins 4. Or Y'^2 préserve $\{P_1, P_3\}$, donc l'orbite de P_1 sous Y' est de cardinal au plus 4. Donc l'orbite de P_1 et de P_3 , comme celles de P_2 et de P_4 sont de cardinaux 4. Or Y'^4 contient 4 points fixes et non 8, donc l'orbite de P_1 et celle de P_2 sont les mêmes. L'assertion (5) est démontrée. On est alors en mesure d'appliquer le lemme 3.20 liant les caractéristiques d'Euler de Σ_{a_1} et de la surface quotient $\Sigma_{a_1}/\langle Y' \rangle$. Pour cela, calculons $\chi(\Sigma_{a_1}/\langle Y' \rangle)$. Les mapping classes A'_3, A'_4 et A'_5 induites par A_3, A_4 et A_5 dans $\text{Mod}(\Sigma_{a_1})$ échangent a_1^+ et a_1^- (on le sait par hypothèse pour A_3 et A_5 , on le déduit facilement pour A_4), donc Y' échange a_1^+ et a_1^- , donc la surface $\Sigma_{a_1}/\langle Y' \rangle$ doit avoir un unique bord. Puisque Y' préserve l'orientation, $\Sigma_{a_1}/\langle Y' \rangle$ est soit un disque, soit un tore muni d'une composante de bord, soit une surface de genre deux muni d'une composante de bord, donc $\chi(\Sigma_{a_1}/\langle Y' \rangle) \in \{1, -1, -3\}$. Enfin, rappelons que les points de ramification du revêtement $\Sigma_{a_1} \rightarrow \Sigma_{a_1}/\langle Y' \rangle$ entrent également en jeu. Or ici, d'après (5), on compte un seul point de ramification Q qui possède 4 antécédents P_1, P_2, P_3 et P_4 , donc avec les notations du lemme 3.20, on a $o(Q) = 4$. Rappelons que dans le

lemme 3.20, le cardinal de $\langle Y' \rangle$ intervient également, est noté m et vaut 8 ici. On obtient :

$$\underbrace{\chi(\Sigma_{a_1})}_{-4} + \underbrace{(m - o(Q))}_{8-4} = \underbrace{m}_8 \cdot \underbrace{\chi(\Sigma_{a_1}/\langle Y' \rangle)}_{1, -1 \text{ ou } -3}.$$

Cette égalité ne peut être satisfaite car le membre de gauche est nul alors que celui de droite ne l'est pas. Ceci constitue la contradiction attendue et termine la démonstration du lemme 12.3. \square

Nous pouvons maintenant prouver la proposition :

Proposition 12.4 (Description de $\widehat{\rho}$).

Il existe un entier $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et une mapping class α de $\text{Mod}(\widehat{\Sigma})$, égale à l'identité ou périodique d'ordre deux et fixant les courbes a_i , $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tels que, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, le morphisme $\widehat{\rho}$ vérifie :

$$\widehat{\rho}(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon \alpha.$$

Démonstration. Commençons par le cas où \widetilde{A}_1 est trivial. Dans ce cas, \widehat{A}_1 est un multitwist le long des courbes de $\sigma(\widehat{\mathcal{X}})$. Mais $\sigma(\widehat{A}_1) = \sigma_s(A_1) \cap \text{Courb}(\widehat{\Sigma}) = \{a_1\}$, donc il existe un entier ε non nul tel que $\widehat{A}_1 = T_{a_1}^\varepsilon$. Par conjugaison par les éléments de $\widehat{\rho}(\mathcal{H})$, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$\widehat{\rho}(\tau_i) = \widehat{A}_i = T_{a_i}^\varepsilon. \quad (1)$$

Or pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, \widehat{A}_i et \widehat{A}_{i+1} vérifient une relation de tresses, donc d'après la proposition 3.4, ε appartient à $\{\pm 1\}$ et $I(a_i, a_{i+1}) = 1$. Ainsi, dans le cas où \widetilde{A}_1 est trivial, la démonstration est terminée.

Dans le cas où \widetilde{A}_1 n'est pas l'identité, on a $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_3 = \dots = \widetilde{A}_{n-1}$ d'après le lemme 12.3. D'après le corollaire 3.18, ces mapping classes périodiques d'ordre 2 induisent une mapping class α d'ordre 2 sur $\text{Mod}(\widetilde{\Sigma})$. D'après la proposition 3.46, pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, on a les inclusions $\sigma(\widehat{A}_i \alpha) \subset \sigma(\widehat{A}_i) \cup \sigma(\alpha)$ et $\sigma(\widehat{A}_i) \subset \sigma(\widehat{A}_i \alpha) \cup \sigma(\alpha^{-1})$, mais $\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha^{-1}) = \emptyset$, donc on obtient l'égalité $\sigma(\widehat{A}_i \alpha) = \sigma(\widehat{A}_i) = \{a_i\}$. Par définition de α , la mapping class $\widehat{A}_i \alpha$ induit une mapping class triviale dans $\text{Mod}(\widetilde{\Sigma})$, donc pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, il existe un entier k_i tel que :

$$\widehat{A}_i \alpha = T_{a_i}^{k_i}. \quad (2)$$

Remarquons que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, la mapping class $\widehat{\rho}(\xi) \alpha \widehat{\rho}(\xi)^{-1}$ est périodique d'ordre 2 et induit dans $\text{Mod}(\widetilde{\Sigma})$ une mapping class coïncidant avec $\xi \cdot \widetilde{A}_1$, or $\xi \cdot \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1$ d'après le lemme 12.3, donc par unicité de la construction de α (cf. le corollaire 3.18), on a l'égalité $\widehat{\rho}(\xi) \alpha \widehat{\rho}(\xi)^{-1} = \alpha$. Alors, par conjugaison par les éléments de $\widehat{\rho}(\mathcal{H})$, les k_i sont tous égaux à un entier que l'on note ε . Donc pour tout $i \in \text{Imp}(n)$, on a :

$$\widehat{A}_i \alpha = T_{a_i}^\varepsilon. \quad (3)$$

Or le produit $\widehat{A}_3 \widehat{A}_4 \widehat{A}_3$ envoie par conjugaison \widehat{A}_3 sur \widehat{A}_4 et T_{a_3} sur T_{a_4} (car $\widehat{A}_3 \widehat{A}_4 \widehat{A}_3(\sigma_s(\widehat{A}_3)) = \sigma_s(\widehat{A}_4)$, donc $\widehat{A}_3 \widehat{A}_4 \widehat{A}_3(a_3) = a_4$). Donc, en conjuguant l'égalité $\widehat{A}_1 T_{a_1}^{-\varepsilon} = \widehat{A}_3 T_{a_3}^{-\varepsilon}$ par $\widehat{A}_3 \widehat{A}_4 \widehat{A}_3$, il vient $\widehat{A}_1 T_{a_1}^{-\varepsilon} = \widehat{A}_4 T_{a_4}^{-\varepsilon}$. Donc $\widehat{A}_4 T_{a_4}^{-\varepsilon} = \widehat{A}_3 T_{a_3}^{-\varepsilon}$. Alors, en faisant agir δ sur cette dernière égalité, on obtient (4) :

$$\widehat{A}_1 T_{a_1}^{-\varepsilon} = \widehat{A}_2 T_{a_2}^{-\varepsilon} = \dots = \widehat{A}_{n-1} T_{a_{n-1}}^{-\varepsilon} = \widehat{A}_0 T_{a_0}^{-\varepsilon}. \quad (4)$$

On en déduit que α (égal à $\widehat{A}_1 T_{a_1}^{-\varepsilon}$) est stable par l'action de δ (i.e. α commute avec $\widehat{\rho}(\delta)$). Or $\alpha(a_1) = a_1$, donc pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a $\alpha(a_i) = a_i$. De même, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la mapping class α commute avec T_{a_i} , donc avec $T_{a_i}^\varepsilon \alpha$. Autrement dit

α commute avec \widehat{A}_i . On peut alors parler de la transvection de $\widehat{\rho}$ de direction α que l'on note $L_\alpha(\widehat{\rho})$. On a ainsi pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a :

$$L_\alpha(\widehat{\rho})(\tau_i) = \widehat{A}_i \alpha = T_{a_i}^\varepsilon. \quad (5)$$

Cette égalité (5) est à rapprocher de (1). On prouve alors comme précédemment que $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. \square

12.3 Le morphisme ρ est une transvection de morphisme de monodromie

On démontre enfin dans ce paragraphe la proposition 12.1 : on sait que le morphisme $\widehat{\rho}$ induit par ρ est une transvection de morphisme de monodromie. Il reste à en déduire que le morphisme ρ lui-même est une transvection de morphisme de monodromie.

Rassemblons les principales informations sur $\widehat{\Sigma}$, $\check{\Sigma}$ et \mathcal{U} contenues dans la définition 11.3 et la proposition 11.4. Ces deux surfaces et ce simplexe de courbes font le lien entre $\widehat{\Sigma}$ et Σ .

Rappels (La définition 11.3 et les propositions 11.2 et 11.4).

- Soit $\widehat{\Sigma}$ la sous-surface de $\mathcal{S}ub_{\sigma_n(\mathcal{G})}(\Sigma)$ contenant les courbes spéciales. La surface $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\frac{n}{2} - 1$ ou $\frac{n}{2}$.
- Posons $\mathcal{U} = \text{Bord}(\widehat{\Sigma}) \cap \sigma_n(\mathcal{G})$. L'ensemble de courbes \mathcal{U} peut être vide et contient au maximum deux courbes.
- Soit $\check{\Sigma}$ la sous-surface de $\mathcal{S}ub_{\mathcal{U}}(\Sigma)$ différente de $\widehat{\Sigma}$ (bien définie d'après la proposition 11.4). Si $\widehat{\Sigma}$ est la seule sous-surface de $\mathcal{S}ub_{\mathcal{U}}(\Sigma)$, on dira que $\check{\Sigma}$ est vide.

Les liens entre $\widehat{\Sigma}$, $\check{\Sigma}$ et \mathcal{U} sont les suivants :

- si \mathcal{U} est vide, $\Sigma = \widehat{\Sigma}$; si $\widehat{\Sigma}$ est de genre $\frac{n}{2}$, \mathcal{U} est vide,
- si \mathcal{U} est réduit à une courbe non séparante u , $\check{\Sigma}$ est vide et $\{u\}$ est le marquage de $\widehat{\Sigma}$,
- si \mathcal{U} est réduit à une courbe séparante u , $\check{\Sigma}$ est de genre 1,
- si \mathcal{U} contient deux courbes, elles sont non séparantes et $\check{\Sigma}$ est non vide, de genre nul.

Proposition 12.5. *Il existe $W \in \mathcal{P}Mod(\Sigma)$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on ait :*

- dans $\mathcal{M}od(\widehat{\Sigma})$, $\wedge(W)$ commute avec $\wedge(T_{a_i})$ et $\wedge(A_i)$,
- dans $\mathcal{M}od(\widehat{\Sigma})$, $\wedge(A_i W^{-1}) = \wedge(T_{a_i}^\varepsilon)$,
- dans $\mathcal{M}od(\widehat{\Sigma})$, $\vee(W)$ commute avec $\vee(A_i)$,
- dans $\mathcal{M}od(\check{\Sigma})$, $\vee(A_i W^{-1}) = \vee(T_{a_i}^\varepsilon)$.

Démonstration. Distinguons les cas en fonction de \mathcal{U} .

a) Si \mathcal{U} est vide, alors $\widehat{\Sigma} = \Sigma$, donc $A_1 T_{a_1}^{-1}$ coïncide avec α , la mapping class définie à la proposition 12.4, et d'après cette même proposition, cette définition de W convient.

b) Si \mathcal{U} est réduit à une courbe non séparante u , alors, si α est l'identité, posons $W = \text{Id}$ dans le groupe $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$; et si α n'est pas l'identité, d'après le corollaire 3.18, il existe une unique mapping class W de $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ périodique d'ordre deux, fixant la courbe u et telle que $dec_u(W) = \alpha$. Alors à nouveau d'après la proposition 12.4, cette définition de W convient.

c) Si \mathcal{U} est séparant dans Σ (ce qui rassemble les cas non traités précédemment), nous allons montrer que la mapping class $W = A_1 T_{a_1}^{-1}$ appartenant à $\mathcal{P}Mod(\Sigma)$ convient. Commençons par montrer que le morphisme $\vee \circ \rho$ est cyclique.

L'ensemble de courbes \mathcal{U} est stable par les mapping classes de \mathcal{G} car les courbes de \mathcal{U} sont topologiquement différentes des autres courbes de $\sigma_n(\mathcal{G})$ et ne peuvent être échangées avec elles, en effet ce sont les seules à séparer $\widehat{\Sigma}$ de $\check{\Sigma}$. Distinguons deux cas, selon que $\check{\Sigma}$ est de genre 1, ou de genre nul.

- Si $\check{\Sigma}$ est de genre 1, d'après la proposition 11.4, \mathcal{U} est réduit à une seule courbe, qui est donc stable par l'action de $\rho(\mathcal{B}_n)$. Donc l'image du morphisme $\vee \circ \rho$ est incluse dans $\mathcal{PMod}(\check{\Sigma})$ (les bords ne sont pas permutés). Alors on peut appliquer la proposition 11.2 : puisque $\check{\Sigma}$ est de genre $1 < \frac{n}{2} - 1$, le morphisme $\vee \circ \rho$ est cyclique.
- Si $\check{\Sigma}$ est de genre nul, \mathcal{U} peut contenir deux courbes. Elles peuvent être échangées par les éléments de \mathcal{G} , mais d'après la proposition 9.7, l'action des mapping classes de \mathcal{G} sur \mathcal{U} est cyclique. Alors, conformément à la définition 9.11, posons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &:= \langle\langle \tau_i \tau_1^{-1}, 2 \leq i \leq n-1 \rangle\rangle_{\mathcal{B}_n}, \\ \mathcal{F}_n^* &:= \langle \tau_i \tau_1^{-1}, 3 \leq i \leq n-1 \rangle_{\mathcal{B}_n}.\end{aligned}$$

où $\langle\langle \rangle\rangle_{\mathcal{B}_n}$ est la clôture normale dans \mathcal{B}_n . D'après le lemme 9.12, \mathcal{F}_n agit trivialement sur \mathcal{U} . Alors \mathcal{F}_n^* est un groupe isomorphe à \mathcal{B}_{n-2} envoyé par $\vee \circ \rho$ dans $\mathcal{PMod}(\check{\Sigma})$. Compte tenu du théorème 7.1, l'action de \mathcal{B}_{n-2} dans $\mathcal{PMod}(\check{\Sigma})$ est cyclique. Donc $\vee(A_3 A_1^{-1}) = \vee(A_4 A_1^{-1})$, d'où $\vee(A_3) = \vee(A_4)$ et par conjugaison par des puissances de $\vee \circ \rho(\delta)$, on obtient que :

$$\vee(A_1) = \vee(A_2) = \cdots = \vee(A_{n-1}).$$

Donc là encore, le morphisme $\vee \circ \rho$ est cyclique.

Alors, d'après la proposition 12.4, la mapping class $W = A_1 T_{a_1}^{-\varepsilon}$ appartenant à $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ vérifie pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ les faits suivants (où α est la mapping class de $\mathcal{Mod}(\widehat{\Sigma})$ introduite à la proposition 12.4) :

- dans $\mathcal{Mod}(\widehat{\Sigma})$, $\wedge(W)$ est égal à α et donc commute avec T_{a_i} ,
- dans $\mathcal{Mod}(\widehat{\Sigma})$, $\wedge(T_{a_i}^\varepsilon W) = \widehat{A}_i$,
- dans $\mathcal{Mod}(\check{\Sigma})$, $\vee(A_i T_{a_i}^{-\varepsilon}) = \vee(A_i) = \vee(W)$.

Ceci achève la démonstration de la proposition 12.5. □

Proposition 12.1. *Le morphisme $\rho : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma)$ est une transvection de morphisme de monodromie.*

Démonstration. Soit W la mapping class de $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ définie à la proposition 12.5. Remarquons que d'après cette même proposition, $\wedge(A_i W^{-1})$ appartient à $\mathcal{PMod}(\widehat{\Sigma})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, car $\wedge(A_i W^{-1}) = \wedge(T_{a_i}^\varepsilon)$. De même, lorsque $\check{\Sigma}$ est non vide, $\vee(A_i W^{-1})$ appartient à $\mathcal{PMod}(\check{\Sigma})$ car $\vee(A_i W^{-1}) = \vee(T_{a_i}^\varepsilon)$. Donc $A_i W^{-1}$ et $T_{a_i}^\varepsilon$ appartiennent à $\mathcal{PUMod}(\Sigma)$. Considérons alors la suite exacte centrale

$$1 \rightarrow \langle T_u, u \in \mathcal{U} \rangle \rightarrow \mathcal{PUMod}(\Sigma) \xrightarrow{dec_u} \mathcal{PMod}(\Sigma_{\mathcal{U}}) \rightarrow 1 \quad (1)$$

où $dec_{\mathcal{U}}$ est le morphisme canonique. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les mapping classes $A_i W^{-1}$ et $T_{a_i}^\varepsilon$ induisent des mapping classes égales dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{\mathcal{U}})$, donc elles diffèrent d'un élément central. Par conséquent, W commute avec A_i . On peut alors définir un morphisme $\rho' : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma)$ en posant

$$\rho'(\tau_i) = A_i W^{-1} = \rho(\tau_i) W^{-1}$$

pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$. Soit $\rho'' : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma)$ le morphisme de monodromie géométrique défini par

$$\rho'(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Les morphismes ρ' et ρ'' vérifient $dec_{\mathcal{U}}(\rho') = dec_{\mathcal{U}}(\rho'')$ d'après la proposition 12.5, donc en appliquant le lemme 5.8 associé à la suite exacte centrale (1), il vient que ρ' et ρ'' sont de même nature, donc ρ' est une transvection de morphisme de monodromie, donc par construction, il en va de même de ρ . \square

13 Démonstration du théorème 1

Dans ce chapitre, on reprend le théorème 12.2 prouvé au chapitre précédent afin d'en déduire le théorème 1.

Théorème 1 (Morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$, $n \geq 6$).

Soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 6. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où g est inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$ et b est quelconque. Soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$. Si ρ n'est pas cyclique, ρ est une transvection de morphisme de monodromie. De plus, de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$.

Démonstration. Soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 6. Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq \frac{n}{2}$ et $b \geq 0$. Soit ρ un morphisme de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ que l'on suppose non-cyclique. Commençons par montrer que ρ est une transvection de morphisme de monodromie.

Lorsque n est pair, il s'agit du théorème 12.2.

Supposons donc que n est impair. Remarquons que dans ce cas, la condition $g \leq \frac{n}{2}$ équivaut à $g \leq \frac{n-1}{2}$. Si ρ est cyclique, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que ρ n'est pas cyclique. Notons :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n-1}^{(1)} &= \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2} \rangle_{\mathcal{B}_n}, \\ \mathcal{B}_{n-1}^{(2)} &= \langle \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{n-1} \rangle_{\mathcal{B}_n}. \end{aligned}$$

Le morphisme ρ de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ induit par restriction à $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ et $\mathcal{B}_{n-1}^{(2)}$ les morphismes $\rho^{(1)} : \mathcal{B}_{n-1}^{(1)} \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma)$ et $\rho^{(2)} : \mathcal{B}_{n-1}^{(2)} \rightarrow \mathcal{PMod}(\Sigma)$. Le morphisme ρ n'est pas cyclique, donc les mapping classes $\rho(\tau_2)$ et $\rho(\tau_3)$ sont distinctes d'après le lemme 5.2, donc les morphismes $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ ne sont pas cycliques. Alors, d'après le théorème 12.2, $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ sont des transvections de morphismes de monodromie. Conformément au théorème 12.2, il existe deux $(n-2)$ -chaînes : $(a_i, 1 \leq i \leq n-2)$ et $(c_i, 2 \leq i \leq n-1)$; deux mapping classes : V appartenant au centralisateur de $\langle T_{a_i}, 1 \leq i \leq n-2 \rangle$ dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ et W appartenant au centralisateur de $\langle T_{c_i}, 2 \leq i \leq n-1 \rangle$ dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$; et deux entiers ε et η appartenant à $\{\pm 1\}$, tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$\begin{cases} \rho^{(1)}(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V, \\ \rho^{(2)}(\tau_{i+1}) = T_{c_{i+1}}^\eta W. \end{cases}$$

Or $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ coïncident sur les générateurs standards τ_i avec $2 \leq i \leq n-2$, c'est-à-dire sur au moins quatre générateurs standards consécutifs (quatre lorsque $n = 7$). Alors d'après le lemme 5.13, $V = W$, $\varepsilon = \eta$, et $a_i = c_i$ pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$. Notons $a_{n-1} = c_{n-1}$, on a ainsi pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$\rho(\tau_i) = T_{a_i}^\varepsilon V.$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'une transvection de morphismes de monodromie : d'une part, la mapping class V est bien dans le centralisateur de $\langle T_{a_i}, 1 \leq i \leq n-1 \rangle$, car le fait que $V = W$ implique que V commute aussi avec $T_{a_{n-1}}$; d'autre part les courbes a_i , $1 \leq i \leq n-1$, constituent bien une $(n-1)$ -chaîne car la courbe a_{n-1} intersecte a_{n-2} en un point, n'intersecte pas les courbes a_i pour $i \in \{2, \dots, n-3\}$, et n'intersecte pas non plus a_1 . Justifions ce dernier point : τ_1 et τ_{n-1} commutent, donc $\rho(\tau_1)$ et $\rho(\tau_{n-1})$ commutent, donc $T_{a_1}V$ et $T_{a_{n-1}}V$ commutent, or V commute avec T_{a_1} et $T_{a_{n-1}}$ donc finalement, T_{a_1} et $T_{a_{n-1}}$ commutent, donc $I(a_1, a_{n-1}) = 0$. Ainsi, ρ est bien une transvection de morphisme de monodromie.

Il reste à montrer que de telles transvections de morphismes de monodromie existent si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$. Or il en existe si et seulement s'il existe des morphismes de monodromie, et d'après le lemme 5.6, il existe des morphismes de monodromie si et seulement si $g \geq \frac{n}{2} - 1$. \square

14 Discussion sur les hypothèses du théorème 1

L'objet du théorème 1 est l'étude des morphismes du groupe de tresses \mathcal{B}_n dans le mapping class group $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$ où b est quelconque tandis que les entiers n et g vérifient les hypothèses :

- $n \geq 6$,
- $g \leq \frac{n}{2}$.

On conçoit que plus n est petit et g grand, et plus il est difficile de « contrôler » les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$. A cela s'ajoute une autre difficulté lorsque n est petit : lorsque n est égal à 3, 4 ou 5, on a peu de prises sur \mathcal{B}_n : les actions de sous-groupes de \mathcal{B}_n sur lui-même sont moins riches, les relations de commutation sont plus rares, etc.

Ce chapitre a pour but essentiellement de présenter certains contre-exemples au résultat principal lorsque l'on sort des hypothèses faites sur n et g .

Nous décrirons également les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$ avec $g \leq \frac{n}{2}$ lorsque n est petit, mais sans démonstration. Nous reportons les démonstrations de ces résultats à des publications ultérieures car les techniques sont particulières et nécessitent de nombreux préliminaires supplémentaires (notamment sur les mapping classes périodiques, pseudo-Anosov et même sur les multitwists, sur les groupes symétriques et certaines propriétés des morphismes entre groupes de tresses et groupes symétriques). Pour le moment, nous laissons donc ces résultats au rang de « conjectures ».

Quant aux cas où le genre de la surface Σ dépasse la borne $\frac{n}{2}$, nous n'avons pas encore de preuves. Nous ne ferons que poser des questions et exposer certains contre-exemples.

14.1 Cas où $n = 3$ et $\Sigma = \Sigma_{1,1}$

Rappelons que tout morphisme de \mathcal{B}_3 dans $\mathcal{PMod}(S)$ où S est une sphère privée d'au moins trois disques est cyclique (cf. théorème 7.1). Nous nous intéressons donc aux surfaces de genre $g \geq 1$.

Proposition 14.1. *Soit Σ la surface $\Sigma_{1,1}$ et soient ℓ et m deux courbes dans Σ telles que $I(\ell, m) = 1$. Le morphisme ρ de \mathcal{B}_3 dans $\mathcal{Mod}(\Sigma)$ donné par $\rho(\tau_1) = T_\ell^{-1}T_m^2$ et $\rho(\tau_2) = T_m^{-1}T_\ell^2$ est bien défini. Pourtant, il n'est pas cyclique et n'est pas une transvection de morphisme de monodromie. En effet, $\rho(\tau_1)$ est pseudo-Anosov.*

Démonstration.

1°) Montrons que le morphisme ρ est bien défini. Pour cela, il suffit de constater que $\rho(\tau_1)$ et $\rho(\tau_2)$ vérifient une relation de tresses. Or en effet :

$$(T_\ell^{-1}T_m^2)(T_m^{-1}T_\ell^2)(T_\ell^{-1}T_m^2) = T_\ell^{-1}T_mT_\ell T_m^2 = T_\ell^{-1}T_\ell T_m T_\ell T_m = T_m T_\ell T_m,$$

et de façon symétrique, $(T_m^{-1}T_\ell^2)(T_\ell^{-1}T_m^2)(T_m^{-1}T_\ell^2) = T_\ell T_m T_\ell = T_m T_\ell T_m$.

2°) Montrons que la mapping class $\rho(\tau_1)$, égale à $T_\ell^{-1}T_m^2$, est un pseudo-Anosov. Pour le montrer, on utilise l'isomorphisme classique entre $\mathcal{Mod}(\Sigma)$ et $SL_2(\mathbb{Z})$. A défaut de redémontrer cet isomorphisme, nous allons le définir soigneusement. On munit les courbes ℓ et m d'une orientation de sorte qu'au point d'intersection, l'orientation produit du couple (ℓ, m) coïncide avec l'orientation de Σ (cf. figure 92). Notons $[\ell]$ et $[m]$ les classes en homologie entière des courbes ℓ et m . Le premier groupe d'homologie $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ est alors isomorphe à $\mathbb{Z}[\ell] \oplus \mathbb{Z}[m]$. De plus, on dispose d'un isomorphisme Φ de $\mathcal{Mod}(\Sigma)$ dans le groupe $\text{Aut}(H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}))$ identifié

avec $SL_2(\mathbb{Z})$, le groupe des matrices de déterminant 1 à coefficients entiers. L'image de T_ℓ par Φ est l'automorphisme $(T_\ell)_*$ de $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ qui envoie $[\ell]$ sur $[\ell]$, et $[m]$ sur $[m] - [\ell]$ (cf. figure 92), et dont la matrice dans la base $([\ell], [m])$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, l'image de T_m par Φ est l'automorphisme $(T_m)_*$ de $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ qui envoie $[\ell]$ sur $[\ell] + [m]$, et $[m]$ sur $[m]$, et dont la matrice dans la base $([\ell], [m])$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

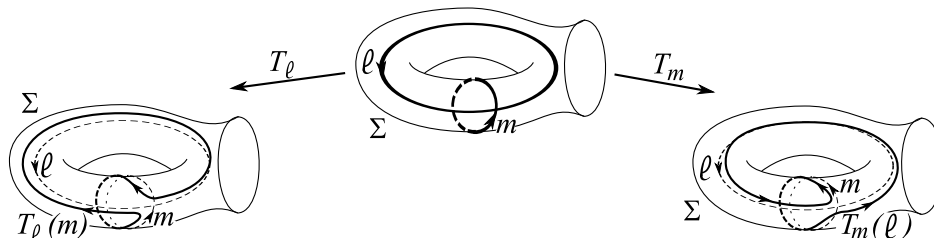


FIG. 92 – Les courbes ℓ , m et $T_\ell(m)$ et $T_m(\ell)$ dans Σ .

Maintenant, selon un second résultat classique concernant l'isomorphisme Φ , les matrices de trace en valeur absolue strictement supérieure à 2 correspondent via Φ^{-1} à des mapping classes pseudo-Anosov⁶. Or, avec nos conventions, la matrice $\Phi(T_\ell^{-1}T_m^2)$ est égale au produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de trace 4, donc $T_\ell^{-1}T_m^2$ est une mapping class pseudo-Anosov. \square

Cet exemple de morphisme est l'un des premiers d'une famille infinie de morphismes partageant les mêmes propriétés. Plus précisément, nous faisons la conjecture suivante :

Conjecture 14.2. *Il existe une famille infinie de classes de conjugaison de morphismes (i.e. qui ne peuvent pas s'obtenir les uns des autres par composition par un automorphisme intérieur à l'arrivée ou au départ) injectifs, mais pas surjectifs, de \mathcal{B}_3 dans $\text{Mod}(\Sigma_{1,1})$, tels que les twists de tresses dans \mathcal{B}_3 sont envoyés sur des mapping classes pseudo-Anosov dans $\text{Mod}(\Sigma_{1,1})$. Tout morphisme de \mathcal{B}_3 dans $\text{Mod}(\Sigma_{1,1})$ est soit cyclique, soit une transvection de morphisme de monodromie, soit dans l'une des classes de conjugaison de cette famille infinie.*

14.2 Cas où $n = 3$ et $\Sigma = \Sigma_{1,b}$ avec $b \geq 2$

Sous les hypothèses de ce paragraphe, la situation se complique, en comparaison avec le cas où $\Sigma = \Sigma_{1,1}$. Voici un exemple.

Proposition 14.3. *Soit Σ la surface $\Sigma_{1,2}$ et soient a_1 , a_2 et a_3 les courbes dans Σ dessinées figure 93. Le morphisme ρ de \mathcal{B}_3 dans $\text{Mod}(\Sigma)$ donné par $\rho(\tau_1) = T_{a_2}T_{a_3}$ et $\rho(\tau_2) = T_{a_2}T_{a_1}$ est bien*

⁶Pour mémoire, la démonstration de ce résultat dans ses grandes lignes est la suivante. Les matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ dont la trace est en valeur absolue strictement supérieure à 2 ont des valeurs propres réelles irrationnelles. Ces dernières sont associées à des vecteurs propres dont le rapport des coordonnées est irrationnel. Or, les courbes de Σ sont associées dans \mathbb{R}^2 à des droites de pente rationnelle, donc les mapping classes associées via Φ aux matrices de trace en valeur absolue strictement supérieure à 2, ainsi que leurs itérées, ne préservent aucune courbe de Σ et sont donc pseudo-Anosov).

défini. Pourtant, il n'est pas cyclique et n'est pas une transvection de morphisme de monodromie. En effet, $\sigma(\rho(\tau_1))$ contient une unique courbe séparante x . La surface Σ_x est constituée d'un pantalon P et d'un tore T privé d'un disque. La restriction de $\rho(\tau_1)$ à P est l'identité, et sa restriction à T est périodique d'ordre 3. Soit y l'unique courbe de $\rho(\tau_2)$. On a $I(x, y) = 4$.

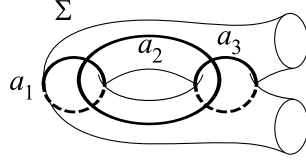


FIG. 93 – Les courbes a_1, a_2, a_3 dans Σ .

Démonstration.

1°) Vérifions que ρ est bien défini. Posons $S = T_{a_1}T_{a_2}T_{a_3}T_{a_1}$ et $T = (T_{a_2}T_{a_3}T_{a_1})^2$. Par le calcul (ou par un dessin de tresses dans \mathcal{B}_4), on se convainc que S est périodique d'ordre 3 et T est périodique d'ordre 2 dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$. Posons alors $A = S^{-1}T = T_{a_2}T_{a_3}$ et $B = T^{-1}S^2 = T_{a_2}T_{a_1}$. On a $ABA = S^{-1}TT^{-1}S^2S^{-1}T = T$ et $BAB = T^{-1}S^2S^{-1}TT^{-1}S^2 = T^{-1}S^3 = T$. Donc le morphisme ρ est bien défini.

2°) Dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{1,2})$, les mapping classes A et B sont réductibles : $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ contiennent chacun exactement une courbe séparante. Posons $\{x\} = \sigma(A)$ et $\{y\} = \sigma(B)$. La courbe x (respectivement y) sépare $\Sigma_{1,2}$ en un tore troué, sur lequel A (resp. B) admet une restriction périodique, et un pantalon, sur lequel la restriction de A (resp. de B) vaut l'identité. Les courbes x et y vérifient $I(x, y) = 4$ (cf. figure 94).

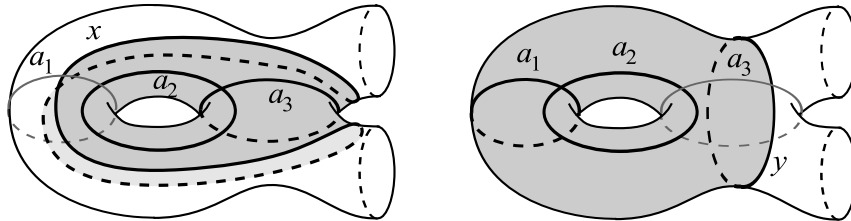


FIG. 94 – Une relation de tresses inhabituelle : $A = T_{a_2}T_{a_3}$ et $B = T_{a_2}T_{a_1}$. Les parties grisées sont les « supports » de A et B .

14.3 Cas où $n = 4$

Définition 14.4 (Morphismes dégénérés).

On dira qu'un morphisme ρ de \mathcal{B}_4 dans un groupe quelconque est *dégénéré* s'il vérifie $\rho(\tau_1) = \rho(\tau_3)$.

Commençons par une conjecture sur les morphismes de \mathcal{B}_4 dans $\mathcal{Mod}(\Sigma_{1,b})$ avec $b \geq 1$.

Conjecture 14.5 (Morphismes de \mathcal{B}_4 dans $\text{Mod}(\Sigma_{1,b})$ avec $b \geq 1$).

Soit b un entier supérieur ou égal à 1 et Σ la surface $\Sigma_{1,b}$. Tout morphisme ρ de \mathcal{B}_4 dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma)$ est dégénéré.

Intéressons-nous maintenant aux morphismes de \mathcal{B}_4 dans des surfaces de genre $g = 2$.

Définition 14.6 (Morphismes exceptionnels).

Soit Σ la surface $\Sigma_{2,0}$. Un morphisme ρ de \mathcal{B}_4 dans $\text{Mod}(\Sigma)$ est dit *exceptionnel* s'il existe une 5-chaîne de courbes $(a_i, i \leq 5)$ telle que, ρ soit l'un des deux morphismes suivants ρ_1^{exp} ou ρ_2^{exp} :

$$\begin{aligned} \rho_1^{exp}(\tau_1) &= T_{a_1}^2 T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4}, & \rho_2^{exp}(\tau_1) &= T_{a_1}^2 T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4} \alpha, \\ \rho_1^{exp}(\tau_2) &= T_{a_5} T_{a_4} T_{a_2}^{-1} T_{a_1} T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4}, & \rho_2^{exp}(\tau_2) &= T_{a_5} T_{a_4} T_{a_2}^{-1} T_{a_1} T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4} \alpha, \\ \rho_1^{exp}(\tau_3) &= (T_{a_1}^2 T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4})^{-1} \alpha, & \rho_2^{exp}(\tau_3) &= (T_{a_1}^2 T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4})^{-1}, \end{aligned}$$

où α est la mapping class (centrale, donc indépendante de la 5-chaîne de courbes choisies) représentée figure 95.

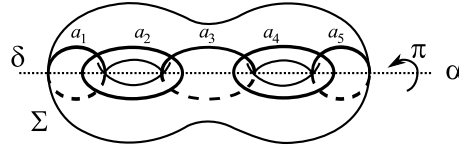


FIG. 95 – La mapping class α de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$.

La proposition suivante précise la situation des morphismes exceptionnels. Sa démonstration est une simple vérification.

Proposition 14.7. *L'image de tout morphisme exceptionnel de \mathcal{B}_4 dans $\text{Mod}(\Sigma)$, où Σ est la surface $\Sigma_{2,0}$, est une extension centrale d'indice 2 du groupe \mathfrak{S}_4 , précisément la deuxième extension de Schur notée S_4^{**} , portant le numéro 29 dans la classification des groupes finis de faible cardinal par le logiciel GAP 4. C'est un groupe fini d'ordre 48 ayant pour présentation :*

$$\tilde{\mathfrak{S}}_4 := \langle u, v \mid u^8 = 1, u^4 = v^4, uvu = vuv, (uvu)^2 = 1, \rangle.$$

où les rôles u, v, u^3 sont joués par les images des générateurs τ_1, τ_2, τ_3 . \square

Remarque. On peut prouver, par un raffinement du théorème 84($g - 1$) (cf. le corollaire 3.26) et en démontrant qu'il n'existe pas de mapping class périodique d'ordre 7 dans $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ que 48 est l'ordre maximal de tout sous-groupe fini de $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$.

On fait alors les conjectures suivantes :

Conjecture 14.8 (Morphismes de \mathcal{B}_4 dans $\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$).

Tout morphisme non dégénéré de \mathcal{B}_4 dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$ est soit une transvection de morphisme de monodromie, soit un morphisme exceptionnel. De plus, il existe exactement deux classes de conjugaison de morphismes exceptionnels de \mathcal{B}_4 dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{2,0})$. On passe de l'une à l'autre par la transvection de direction α .

Conjecture 14.9 (Morphismes de \mathcal{B}_4 dans $\text{Mod}(\Sigma_{2,b})$ avec $b > 0$).

Tout morphisme non dégénéré de \mathcal{B}_4 dans $\mathcal{P}\text{Mod}(\Sigma_{2,b})$ avec $b > 0$ est une transvection de morphisme de monodromie.

14.4 Cas où $n = 5$

De même que nous avons déduit le théorème 1 du théorème 12.2 où le nombre de brins n du groupe de tresses \mathcal{B}_n était pair, le cas $n = 5$ peut se déduire du cas $n = 4$ et sous réserve que la conjecture du cas $n = 4$ soit démontrée, le résultat suivant pour le cas $n = 5$ en découlera :

Conjecture 14.10. *Soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq 2$ et b est quelconque. Si $g = 2$, tout morphisme de \mathcal{B}_5 dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ est soit cyclique, soit une transvection de morphisme de monodromie. Si $g = 1$, tous les morphisme de \mathcal{B}_5 dans $\mathcal{PMod}(\Sigma)$ sont cycliques.*

Le résultat pour le cas $n = 5$ est donc semblable aux cas $n \geq 6$, et différent des cas $n \in \{3, 4\}$. Cependant, le groupe \mathcal{B}_5 apparaît souvent trop « petit » pour que les démonstrations des chapitres précédents, rédigées pour les cas $n \geq 6$, puissent être adaptées au cas $n = 5$. Il nécessiterait trop de preuves spécifiques. Nous rejetons donc la rédaction du cas $n = 5$ dans de prochaines publications en corollaire du cas $n = 4$.

14.5 Lorsque l'entier g est supérieur à $\frac{n}{2}$

Tout au long de la troisième partie, on a utilisé l'inégalité $g \leq \frac{n}{2}$. Voici quelques points clé où on l'a utilisée :

- On l'a utilisée pour majorer l'ordre de sous-groupes finis du mapping class group, nous permettant ainsi d'éliminer les morphismes non cycliques dont les images des générateurs standards auraient été périodiques ou pseudo-Anosov.
- On l'a utilisée à maintes reprises pour prouver l'existence de courbes dans $\sigma(A_1)$ qui intersectaient des courbes dans $\sigma(A_2)$: les courbes que nous avons appelées les *courbes spéciales*. On l'a même utilisée pour montrer que ces courbes spéciales devaient intersecter en réalité leur propre image par $\rho(\delta)$, ce qui devient faux lorsque $g = n - 1$. Nous avons en tête deux constructions illustrant ceci, dont l'une est une transvection du morphisme de l'exemple développé au paragraphe « Situation lorsque $g \geq n - 1$ » de direction l'involution hyperelliptique « évidente » lorsque n est pair.
- On a utilisé cette inégalité pour montrer que ces courbes spéciales doivent être non séparantes. On a des contre-exemples dès que $g = n$: il suffit de considérer l'isomorphisme standard de \mathcal{B}_n dans le mapping class group d'un disque muni de n points marqués $\text{Mod}(\mathbb{D}_n, \partial\mathbb{D}_n)$, puis autour de chaque point marqué, d'ôter un petit disque et de recoller le long du cercle obtenu un tore troué. Alors, les twists de tresses échangeant les points marqués sur le disque de départ, images des générateurs standards de \mathcal{B}_n deviennent des mapping classes échangeant des tores troués. Les courbes qui délimitaient le support des twists de tresses sont maintenant des courbes séparantes qui jouent le rôle de courbes spéciales.
- On a enfin utilisé cette inégalité pour montrer que les images des générateurs standards, dont on ne connaissait que leur système de réduction canonique, étaient en réalité des twists de Dehn, (à transvection près).

Cependant, cette borne est arbitraire ! Le résultat reste encore intéressant et plus facile à montrer si l'on avait demandé : $g < \frac{n}{2}$. On aurait ainsi pu éviter de traiter certaines « exceptions ».

On aurait encore pu en déduire la description des endomorphismes des groupes de tresses, mais pas la description des endomorphismes des mapping class groups. A l'inverse, des inégalités moins restrictives que $g \leq \frac{n}{2}$ auraient été envisageables, mais la preuve du théorème principal en aurait été beaucoup plus compliquée : les cas particuliers et les exceptions auraient été plus nombreux, et il aurait souvent fallu chercher des obstructions plus fines. Par exemple, au chapitre 10, on a pu se contenter d'un argument topologique sur le support des mapping classes images des générateurs standards, pour nier le fait que les courbes spéciales auraient pu être séparantes. Or le résultat est sans doute encore vrai avec un genre un peu plus grand, mettons $g \leq \frac{n}{2} + 1$, mais notre preuve n'aurait plus été valable. L'inégalité $g \leq \frac{n}{2}$ nous a paru le meilleur compromis entre prouver d'une part le théorème principal, et prouver d'autre part les corollaires présents dans cette thèse. Il nous semble que l'inégalité la plus large permettant de généraliser le théorème principal est $g \leq n - 2$. Autrement dit, on se pose la question suivante :

Question : Soit n un entier supérieur ou égal à 5, soit Σ la surface $\Sigma_{g,b}$ où $g \leq n - 2$ et b est un entier quelconque. Est-il vrai que les morphismes de \mathcal{B}_n dans $\mathcal{PMod}(\Sigma_{g,b})$ sont soit cycliques, soit des transvections de morphismes de monodromie ?

Situation lorsque $g \geq n - 1$. La réponse est non lorsque $g \geq n - 1$. En effet, considérons l'exemple suivant. Soit une sphère S munie de n points marqués. En chaque point marqué, ôtons un petit disque centré en ce point marqué. Doublons la surface S . Nous obtenons une surface DS fermée de genre $n - 1$. En doublant la surface, un twist de tresses sur la sphère S devient une mapping class A réductible dans DS dont le support T , homéomorphe à un tore à deux trous, est bordé par deux courbes x et y non séparantes. On a $\sigma(A) = \{x, y\}$ et la restriction de A dans $\text{Mod}(T)$ est périodique d'ordre 2 (cf. exemple figure 96 où T_2 joue le rôle de T et x_2 et y_2 jouent les rôles de x et y). Par conséquent, le morphisme classique, non cyclique, de \mathcal{B}_n dans $\text{Mod}(S)$, envoyant les générateurs standards sur des twists de tresses permutant les points marqués, induit un morphisme de \mathcal{B}_n dans DS tel que les images des générateurs standards sont des mapping classes conjuguées à A .

Par exemple, avec $n = 5$, soit Σ la surface $\Sigma_{4,0}$. Par le procédé décrit précédemment, on obtient un morphisme de \mathcal{B}_5 dans $\text{Mod}(\Sigma)$ tel que $\sigma\rho(\tau_i) = \{x_i, y_i\}$ pour tout $i \leq 4$, où les courbes x_i et les courbes y_i sont celles dessinées figure 96.

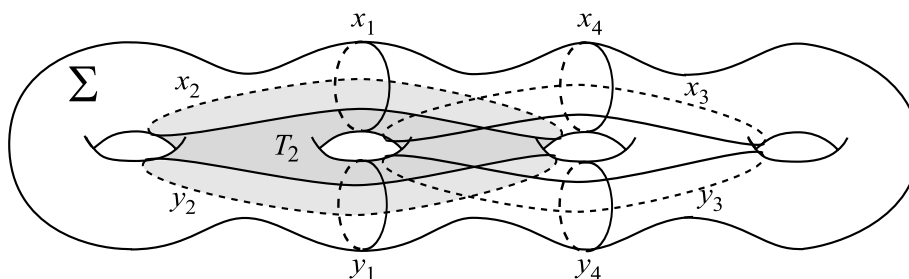


FIG. 96 – Un morphisme non cyclique, différent des transvections de morphismes de monodromie, de \mathcal{B}_5 dans $\text{Mod}(\Sigma_{4,0})$.

Comme la question posée ci-dessus le laisse entendre, nous n'avons pas trouvé d'autres morphismes non cycliques qui ne soient pas des transvections de morphismes de monodromie, lorsque $g \leq n - 2$.

15 Bibliographie

- [ArYo] P. Arnoux, J.-C. Yoccoz. *Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (1) **292** (1981), pp 75 - 78.
- [At1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen Hamburg **4** (1925), pp 47 - 72, (JMF 51.0450.01).
- [At2] E. Artin. *Theory of braids*, Annals of Math. (2) **48** (1947), pp 101 - 126.
- [At3] E. Artin, *Braids and permutations*, Annals of Math. (2) **48** (1947), pp 643 - 649.
- [BeMa] R. Bell, D. Margalit, *Braid groups and the cohopfian property*, Journal of Algebra **303** (2006), pp 275 - 294.
- [Bi] J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press **82** (1975), Princeton.
- [BiBr] J. Birman and T. Brendel, *Braids : A survey*, in Handbook of Knot Theory (Ed. W. Menasco and T. Thistlethwaite) (2005), Elsevier.
- [BiHi] J. Birman, H. Hilden, *On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces*, Annals of Math. (2) **97** (1973), pp 424 - 439.
- [BiLuMc] J. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy, *Abelian and Solvable Subgroups of the Mapping Class Group*, Duke Mathematical Journal (4) **50** (1983), pp 1007 - 1020.
- [BlCa] S.A. Bleiler, A.J. Casson, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Students Texts **9** (1988), Cambridge University Press, Cambridge.
- [BoPa] C. Bonatti, L. Paris, *Roots in the mapping class groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (Third Series) (2) **98** (2009), pp 471 - 503.
- [Bri] E. Brieskorn, *Sur les groupes de tresses*, Séminaire Bourbaki, exposé **401**, lecture Notes math. **317** (1971/72), Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 1 - 24.
- [Bro] L.E.J. Brouwer, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, Math. Ann. **80** (1919), pp 39 - 41.
- [BrSa] E. Brieskorn, K. Saito, *Artin Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. **17** (1972), pp. 245 - 271.
- [Ca] A. Casson (notes de S. Bleier), *Classification of diffeomorphisms after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts **9** (1988), Cambridge University Press, Cambridge.
- [CaTu] C. Cassel, V. Turaev, *Braid groups*, Graduate Texts in Mathematics, **247** (2008), Springer, New York.

- [ChCr] R. Charney, J. Crisp, *Automorphism groups of some affine and finite type Artin groups*, Mathematical Research Letters **12** (2005), pp 321 - 333.
- [CrPa1] J. Crisp, L. Paris, *The solution to a conjecture of Tits on subgroups generated by the squares of the generators of an Artin group*, Inventiones mathematicae **145** (2001), pp 19 - 36.
- [CrPa2] J. Crisp, L. Paris, *Artin groups of type B and D*, Avances in Geometry **5** (2005), pp 607 - 636.
- [De1] M. Dehn. *On curve systems on two-sided surfaces, with application to the mapping problem*, Conférence (complétée) au colloquium de Breslau le 2 novembre 1922, notes en anglais dans [D3], pp 234 - 252.
- [De2] M. Dehn. *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math. **69**, pp 135 - 206; traduction en anglais dans [De3], pp 256 - 362.
- [De3] M. Dehn. *Papers in Group Theory and Topology*, Springer (1987), traduit et préfacé par John Stillwell.
- [DyGr] J.L.Dyer Grossman, E.K. Grossman. *The automorphism groups of the braid groups*, Amer. J. Math. (6) **103** (1981), pp 1151 - 1169.
- [Ei] S. Eilenberg. *Sur les transformations périodiques de la surface de sphère*, Fund. Math. **22** (1934), pp 28 - 41.
- [Ep] D.B.A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), pp 83 - 107.
- [Fa] B. Farb, *Problems on Mapping Class Groups and Related Topics*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **74** (2006), American Mathematical Society, AMS Bookstore.
- [FaMa] B. Farb, D. Margalit *A Primer on Mapping Class Group*, la version 3.1 de juin 2009 est disponible sur la page web : <http://www.math.uchicago.edu/~margalit/mcg/mcgv31.pdf>
- [FdNe] E. Fadell, L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962), pp 111 - 118.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay, Astérisque **66** et **67** (1979), Société Mathématique de France, Paris.
- [Hi] Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate texts in Mathematics **33** (1976), Springer-Verlag, New York Inc.
- [Hv1] W.J. Harvey, *Geometric structure of surface mapping class groups*, Homological group theory (Proc. Durham, 1977), London Math.Soc. Lecture Note Ser. **36** (1979), pp 255 - 269, Cambridge Univ. Press, Cambridge New York.

- [Hv2] W.J. Harvey, *Boundary structure of the modular group*, dans *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, édité par I. Kra et B. Maskit, Annals of Math. Studies **97** (1981), Princeton University Press, pp 245 - 251.
- [HtTh] A. Hatcher, W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology (3) **19** (1980), pp 221 - 237.
- [Iv1] N.V. Ivanov, *Subgroups of Teichmüller Modular Groups*, traduit du russe par E.J.F. Primrose et revu par l'auteur, Translations of Mathematical Monographs **115** (1992), American Mathematical Society, Providence, RI.
- [Iv2] N.V. Ivanov, *Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller Spaces*, Math. Res. Notices **14** (1997), pp 651 - 666 ; également dans : Progress in knot theory and related topics, Travaux en cours **56**, Volume **56** (1997), Hermann, Paris, pp 113 - 120.
- [IvMc] N.V. Ivanov, J. McCarthy, *On injective homomorphisms between Teichmüller Modular Groups I*, Inventiones mathematicae **135** (1999), pp 425 - 486, Springer-Verlag.
- [J] D. Johnson, *The structure of Torelli group I : A finite set of generators for \mathcal{I} .*, Annals of Mathematics **118** (1983), pp 423 - 442.
- [Ke1] S.P. Kerckhoff, *The Nielsen realisation problem*, Bull. AMS (3) **2** (1980), pp 452 - 454.
- [Ke2] S.P. Kerckhoff, *The Nielsen realisation problem*, Ann. of math. (2), **117** (1983), pp 235 - 265.
- [Kj] B. de Kerékjártó. *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, Math. Annalen **80** (1919), pp 3 - 7.
- [Ko1] M. Korkmaz, *Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori*, Topology and its Applications (2) **95** (1999), pp 85 - 111.
- [Ko2] M. Korkmaz, *Low-dimensional homology groups of mapping class groups : a survey*, Turkish Journal of Mathematics (1) **26**, (2002).
- [LaPa] C. Labruère, L. Paris, *Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), pp 73 - 114.
- [Le] H. Van der Leek, *The Homotopy Type of Complex Hyperplane Complements*, Ph.D. Thesis, Utrecht (1994).
- [Lk] W.B.R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **60** (1964), pp 769 - 778.
- [Ln1] V. Lin, *Artin braids and the groups and spaces connected with them*, Plenum Publishing Corporation (1982), pp 736 - 788.

- [Ln2] V. Lin, *Braids and Permutations*, arXiv :math.GR/0404528 v1, 29 Apr 2004.
- [Lu] F. Luo, *Automorphisms of complexes of curves*, *Topology* (2) **39** (2000), pp 283 - 298.
- [Mc1] J.D. McCarthy, *Automorphisms of surface mapping class groups. A recent theorem of N. Ivanov*, *Invent. Math.* **84** (1986), pp 49 - 71.
- [Mc2] J.D. McCarthy, *Normalizers and Centralizers of pseudo-Anosov mapping classes* (ceci constitue une partie de la thèse de l'auteur pour son Ph. D à Columbia University).
- [McPp] J.D. McCarthy, A.Papadopoulos *Automorphisms of the complex of domains*, preprint, Max-Plank Institut, Bonn (2006).
- [Ni1] J. Nielsen, *Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I*, *Acta Math.* **50** (1927), pp 189 - 358.
- [Ni2] J. Nielsen, *Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen II*, *Acta Math.* **53** (1929), pp 1 - 76.
- [Ni3] J. Nielsen, *Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen III*, *Acta Math. V.* **58** (1932), pp 87 - 167.
- [Ni] J. Nielsen, *Abbildungsklassen endlicher Ordnung*, [J] *Acta Math.* **73** (1942), pp. 23 - 115, [ISSN 0001-5962].
- [Pa] L. Paris, *From braid groups to mapping class groups*, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **74** (2006), Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp 355 - 371
- [PaRo] L. Paris, D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **521** (2000), pp 47 - 83, Walter de Gruyter, Berlin - New York.
- [PeV] B. Perron, J.P. Vannier, *Groupe de monodromie géométrique des singularités simples*, *Mathematische Annalen* **306** (1996), pp 231 - 245, Springer-Verlag.
- [Ro] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, Berkeley 1976.
- [Se] V. Sergiescu, *Graphes planaires et présentations des groupes de tresses*, *Mathematische Zeitschrift*, vol. **214** (1993), pp 477 - 490, Springer-Verlag.
- [Th] W.P. Thurston, *On the geometry and dynamics of surfaces.*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* (2) **19** (1988), pp 417 - 431.
- [Ti] J. Tits, *Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus*, *J. Algebra* vol **4** (1966), pp 96 - 116.