



HAL
open science

Identification et modélisation d'ordre fractionnaire des machines synchrones fonctionnant comme générateur

Szymon Racewicz

► **To cite this version:**

Szymon Racewicz. Identification et modélisation d'ordre fractionnaire des machines synchrones fonctionnant comme générateur. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2010. Français. NNT: . tel-00552148

HAL Id: tel-00552148

<https://theses.hal.science/tel-00552148>

Submitted on 5 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THESE EN COTUTELLE INTERNATIONALE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'Université de Grenoble
et
de l'Université Technologique de Gdansk**

Spécialité : Génie électrique

préparée au laboratoire G2Elab

dans le cadre de **l'Ecole Doctorale Electronique, Electrotechnique, Automatique & Traitement du Signal**

et à la Faculté de Génie Electrique et Automatique de l'Université Technologique de Gdansk

présentée et soutenue publiquement

par

Szymon Racewicz

le 30 novembre 2010

**Identification et modélisation d'ordre fractionnaire
des machines synchrones fonctionnant comme générateur**

***DIRECTEURS DE THESE
Piotr J. Chrzan, Nicolas M. Retière
CO-DIRECTEUR DE THESE
Delphine M. Riu***

JURY

M. Paweł ZIMNY	, Président
M. Kazimierz ZAKRZEWSKI	, Rapporteur
M. Paweł STASZEWSKI	, Rapporteur
M. Thierry POINOT	, Rapporteur
M. Piotr CHRZAN	, Directeur de thèse
M. Nicolas RETIERE	, Directeur de thèse
Mme. Delphine RIU	, Co-encadrant
M. Mieczysław RONKOWSKI	, Examineur

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée dans le cadre de la convention de cotutelle internationale de thèse entre l'Université Technologique de Gdansk et l'Université Joseph Fourier. J'ai eu donc l'opportunité extraordinaire de travailler dans deux pays (Pologne et France), avec deux équipes. J'ai commencé les travaux en Pologne, dans le département d'Electronique de Puissance et de Machines Electriques. A partir de la deuxième année j'ai continué mes études au Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble, dans l'équipe SYREL.

Au cours de mes cinq années de doctorat, j'ai rencontré tellement de personnes bienveillantes et chaleureuses que mentionner chacune d'elles est impossible...

Je voudrais remercier tout d'abord Delphine Riu, maître de conférences au G2Elab, qui m'a très bien encadré tout au long de cette thèse. C'est avec elle que j'ai passé le plus du temps en travaillant sur mon sujet. Elle a été non seulement une personne avec de grandes connaissances mais aussi une amie chaleureuse pendant tout ce temps. Je tiens également à la remercier pour son soutien et son aide après mon départ de France.

Mes remerciements cordiaux vont aussi à Nicolas Retière, professeur au G2Elab et Piotr Chrzan, professeur de l'Université Technologique de Gdansk. Grâce à eux j'ai pu réaliser une thèse en cotutelle. Je leur suis très reconnaissant d'avoir effectué toutes les formalités concernant mon départ en France et également d'avoir bien orienté ma thèse lors de nombreuses réunions.

Il me tient à cœur de dire un grand merci à ma famille. Je remercie mes parents qui m'ont toujours encouragé à faire un doctorat et je remercie ma femme Marysia qui s'est occupée seule de notre petite fille Emilka pour que je puisse terminer la rédaction.

Je n'oublie pas de remercier mes amis du laboratoire G2Elab avec qui j'ai passé de formidables moments lors des nombreux événements au labo et hors de l'université et qui tenaient à améliorer mon français et tout particulièrement : MC, Sylvie, Carolina, Asma, Lina-Maria, Diem, Jérémie, Damien, Alex (pour la « règle de Teu » !), Benoit, Didier, Yann, Philippe, Boris, Maxime... à tous merci ! (fig. 0.1)

Un merci particulier à Damien Picault et Jérémie Aimé pour leur participation à mon mariage en Pologne.

Il faut que je remercie aussi Jacques Davoine et toute l'équipe CAESUG 1 pour les émotions sportives merveilleuses pendant les nombreux entraînements de volleyball à midi et ensuite pendant les matches du Championnat de Volleyball 2008 et de la Coupe de Printemps 2008. Allez CAESUG 1 !

Je remercie tous les permanents de France et de Pologne pour leur aide lors des démarches administratives et les techniciens pour leur coup de main pendant les manipes.

Et maintenant quelques mots en polonais...

Chciałbym także podziękować znajomym i przyjaciołom z Polski: Leszkowi Jarzębowiczowi za wspólne obiady w „Kwadracie” i cichą rywalizację na liczbę napianych stron doktoratu oraz Maćkowi Harasowi, z którym dzieliłem pokój EM115 za miłe wspomnienie czasu studiów w Grenoble.

Jestem również wdzięczny profesorom, pracownikom i doktorantom z Katedry Energoelektroniki i Maszyn Elektrycznych Politechniki Gdańskiej za ich życzliwość i fachową pomocy w trakcie realizacji mojego doktoratu. W szczególności dziękuję Michałowi Michnie, Grzegorzowi Kostro i Filipowi Kuttowi.



Fig. 0.1. Mes amis de la salle informatique du G2Elab

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	5
CHAPITRE I. ETAT DE L'ART DE LA MODELISATION DES SYSTEMES D'ENERGIE ELECTRIQUE AVEC DES SYSTEMES D'ORDRE NON ENTIER	8
I.1. INTRODUCTION	8
I.2. RAPPELS SUR LA MODELISATION D'ORDRE FRACTIONNAIRE	9
I.2.1. <i>Historique</i>	9
I.2.2. <i>Rappels mathématiques</i>	10
I.3. ETAT DE L'ART SUR L'UTILISATION DES SYSTEMES D'ORDRE NON ENTIER EN GENIE ELECTRIQUE	13
I.3.1. <i>Actionneurs et générateurs électriques : machines synchrones et asynchrones</i>	14
I.3.2. <i>Piles à combustibles de type PEMFC</i>	15
I.3.3. <i>Dispositifs de stockage électrochimique : batteries et supercapacités</i>	17
I.4. CONCLUSION.....	18
CHAPITRE II. MODELES D'ORDRE NON ENTIER DE PIECES FERROMAGNETIQUES EN REGIME NON LINEAIRE	20
II.1. INTRODUCTION	20
II.2. MODELISATION ANALYTIQUE D'UNE TOLE FERROMAGNETIQUE EN REGIME LINEAIRE – INTRODUCTION DES SYSTEMES D'ORDRE NON ENTIER.....	20
II.3. MODELISATION ANALYTIQUE D'UNE TOLE FERROMAGNETIQUE EN REGIME SATURE	24
II.3.1. <i>Etat de l'art</i>	24
II.3.1.1. Approximation de la courbe de première aimantation.....	24
II.3.1.2. Approximation de l'inductance en régime saturé.....	26
II.3.2. <i>Modélisation d'ordre non entier d'une tôle ferromagnétique saturée</i>	27
II.4. SIMULATION PAR ELEMENTS FINIS D'UNE TOLE FERROMAGNETIQUE SATUREE	28
II.4.1. <i>Caractéristique de la tôle</i>	28
II.4.1.1. Courbe de saturation	29
II.4.2. <i>Calcul par éléments finis</i>	30
II.5. VALIDATION DU MODELE D'ORDRE UN DEMI D'UNE TOLE FERROMAGNETIQUE SATUREE	31
II.5.1. <i>Evolution des paramètres L_0 et ω_0 avec le courant</i>	31
II.5.1.1. Fonctions $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$	33
II.5.2. <i>Comparaison des modèles non linéaires avec la simulation par éléments finis</i>	35
II.6. CONCLUSION.....	37
CHAPITRE III. VALIDATION DU MODELE FRACTIONNAIRE NON LINEAIRE SUR UNE MACHINE SYNCHRONNE REELLE	38
III.1. INTRODUCTION	38
III.2. MODELISATION D'ORDRE NON ENTIER DE MACHINE SYNCHRONNE EN CONDITIONS SATUREES	38
III.2.1. <i>Schéma équivalent classique d'ordre entier</i>	41

III.2.2.	<i>Schéma équivalent d'ordre un demi</i>	43
III.3.	IDENTIFICATION DES PARAMETRES DU SCHEMA EQUIVALENT D'ORDRE NON ENTIER DE LA MACHINE SYNCHRONE.....	45
III.3.1.	<i>Méthode SSFR</i>	46
III.3.2.	<i>Identification des paramètres du modèle</i>	48
III.3.3.	<i>Résultats d'identification</i>	49
III.4.	INFLUENCE DE LA SATURATION SUR LES PARAMETRES DE LA MACHINE SYNCHRONE.....	51
III.4.1.	<i>Schéma équivalent d'ordre non entier en présence de saturation</i>	52
III.4.2.	<i>Adaptation du banc de mesures SSFR à la saturation</i>	53
III.4.2.1.	Influence de la source de tension DC stabilisée.....	54
III.4.2.2.	Résultats expérimentaux.....	55
III.4.3.	<i>Identification des paramètres de la machine synchrone saturée</i>	57
III.5.	CONCLUSION.....	60
CHAPITRE IV. REPONSE TEMPORELLE DU MODELE D'ORDRE UN DEMI D'UN ALTERNATEUR.....		61
IV.1.	INTRODUCTION.....	61
IV.2.	EQUATIONS ELECTRIQUES DECRIVANT LE COMPORTEMENT D'UN ALTERNATEUR RACCORDE A UN RESEAU (R-L).....	61
IV.3.	MISE EN FORME DU SYSTEME D'ETAT GENERALISE.....	64
IV.4.	DISCRETISATION ET RESOLUTION DU SYSTEME.....	68
IV.5.	RESULTATS DE SIMULATIONS.....	74
IV.6.	CONCLUSION.....	80
CHAPITRE V. VERS UNE COMMANDE D'ORDRE NON ENTIER ROBUSTE POUR UN MODELE D'ORDRE NON ENTIER AVEC INCERTITUDES.....		81
V.1.	INTRODUCTION.....	81
V.2.	INTRODUCTION A LA COMMANDE CRONE.....	81
V.3.	PRESENTATION DU SYSTEME A COMMANDER.....	83
V.4.	EVALUATION DE LA COMMANDE CRONE AU SYSTEME ETUDIE.....	86
V.5.	CONCLUSION.....	89
CONCLUSION GENERALE.....		90
ANNEXE 1. MESURES EXPERIMENTALES D'UNE TOLE FERROMAGNETIQUE SATUREE.....		93
ANNEXE 2. EXPRESSION ANALYTIQUE DES GRANDEURS OPERATIONNELLES.....		96
ANNEXE 3. GRANDEURS DE BASE DE LA MACHINE SYNCHRONE.....		97
ANNEXE 4. DETAIL DES CALCULS DU SYSTEME D'ETAT GENERALISE.....		99
BIBLIOGRAPHIE.....		109

Introduction générale

Dans le domaine de l'aéronautique, la recherche de l'efficacité énergétique passe par la re-conception complète de la distribution électrique. En effet, celle-ci a de nombreux avantages par rapport aux systèmes hydrauliques ou pneumatiques, plus lourds et onéreux en exploitation. Les progrès en électronique de puissance et dans le développement de nouveaux actionneurs électriques permettent dès lors d'envisager de sérieux gains en termes de masse, de coût, de flexibilité et de fiabilité. La tendance est donc d'aller vers le « Plus électrique », voire même le « Tout électrique » [22, 9, 64, 27].

Cette thèse s'inscrit ainsi dans le projet européen MOET (ang. *More Open Electrical Technologies*) qui a pour objectif de définir de nouvelles architectures de distribution électrique intégrant une insertion massive de composants électriques (*Power by Wire*). Plus précisément, les objectifs de ce projet consistent à définir et valider une nouvelle architecture de distribution électrique HVDC, à évaluer l'intégration dans l'avion de ces nouveaux équipements et enfin, à développer un environnement logiciel permettant une conception « métier » cohérente et plus rapide.

Nos travaux s'inscrivent dans la thématique portant sur la modélisation et la simulation des différents composants du réseau électrique afin d'améliorer l'analyse et la commande de ces systèmes. Les simulations, valables sur de grandes plages de fréquences, permettront ainsi de valider le fonctionnement de chaque composant d'une part et du système global d'autre part avant toute construction de prototype.

Dans ce mémoire, cette modélisation sera dédiée exclusivement aux générateurs électriques embarqués à bord de gros porteurs civils, afin d'analyser leurs performances dynamiques.

Pour modéliser finement une machine synchrone, il est nécessaire de prendre en compte certains phénomènes fréquentiels tels l'effet de peau apparaissant dans certaines pièces conductrices de cette machine avec l'augmentation de la fréquence. De nombreuses références existent dans la littérature sur la construction, le fonctionnement et la modélisation plus ou moins étendue de ces machines. Nous avons développé dans cette thèse un outil de modélisation relativement original, avec l'utilisation des systèmes d'ordre non entier.

Cette thèse présente ainsi une vision nouvelle sur la modélisation mathématique des machines synchrones. Comme nous le verrons à travers ces travaux, cet outil permettra de construire des modèles précis, d'ordre réduit, valables sur de larges plages de fréquences et intégrant des phénomènes non linéaires comme la saturation. Cette classe de modèles est recherchée afin d'améliorer la procédure de conception et de simulation de nouvelles machines ainsi que du système tout entier (réseau) où elles sont insérées.

Ce mémoire de thèse est constitué de cinq chapitres.

Le premier chapitre est une introduction aux systèmes d'ordre non entier. A travers le contexte évoqué plus haut, nous expliciterons mieux la nécessité actuelle d'améliorer les modèles fréquentiels des différents dispositifs électriques afin d'améliorer l'étude du système complet. A travers des exemples d'application des modèles d'ordre non entier nous montrerons les avantages et les limites de cette démarche.

Le deuxième chapitre abordera la modélisation d'une machine synchrone à travers le calcul analytique de l'impédance d'ordre non entier d'une tôle ferromagnétique saturée, représentant des pièces massives du rotor de la machine synchrone. Ce modèle sera ensuite validé à partir de simulations par éléments finis effectuées avec le logiciel *Flux*[®].

La modélisation complète de la machine synchrone sera traitée dans le troisième chapitre, en utilisant également les systèmes d'ordre non entier. Nous construirons ainsi un schéma équivalent d'ordre non entier dans les axes d et q de la machine (référentiel de Park) et le validerons à partir de tests sur une machine synchrone réelle. Une nouvelle méthode d'identification de la machine en régime saturé sera ainsi présentée.

Le chapitre IV aborde le problème du calcul de la réponse temporelle d'un modèle d'ordre non entier relativement complexe. Ainsi, à partir des équations différentielles d'ordre non entier régissant le fonctionnement de la machine synchrone, un système d'état généralisé sera construit. Ce système sera par la suite discrétisé et résolu afin d'obtenir la réponse temporelle liée à quelques régimes transitoires de la machine.

Ce mémoire se conclura à travers le chapitre V, qui présentera une application du modèle non linéaire d'ordre non entier (établi au chapitre III) à la synthèse de la commande

robuste CRONE [54]. Ce chapitre formera une introduction à la commande d'ordre non entier et présentera des perspectives sur le sujet pour l'avenir.

Chapitre I.

Etat de l'art de la modélisation des systèmes d'énergie électrique avec des systèmes d'ordre non entier

1.1. Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif de rappeler l'état de l'art dans le domaine de la modélisation des systèmes d'énergie électriques par les systèmes d'ordre non entier. L'accent sera mis notamment sur la modélisation du générateur synchrone qui est encore aujourd'hui la principale source de production de l'énergie électrique [36] et qui est au cœur de cette thèse.

Dans les réseaux d'énergie électrique contemporains, on assiste à une diversification considérable des différentes sources d'énergie (pile à combustible, panneaux solaires, éoliens/générateurs). L'énergie produite est ensuite transformée par une grande quantité de composants électriques (transformateurs, convertisseurs, etc.) pour être finalement acheminée aux installations électriques diverses (moteurs, appareils électroménagers, etc.). Le réseau électrique se complexifie par ailleurs avec le recours à de nombreux dispositifs de stockage (batteries, volants d'inertie, etc.) permettant de gérer les intermittences des producteurs d'énergie renouvelable pour maintenir de très bonnes performances.

Pour concevoir et conduire correctement ces réseaux électriques, plus complexes, plus fragiles par rapport aux perturbations dynamiques survenant dans le réseau, il est nécessaire de maîtriser le comportement de chaque équipement constitutif du réseau pour pouvoir anticiper les problèmes de fonctionnement.

Disposer de modèles précis des différents composants électriques est une gageure. Faire en sorte que ces modèles soient d'ordre réduit mais parcimonieux, c'est-à-dire qu'il puisse décrire avec peu de paramètres un réel comportement physique, est également utile pour la conception et la simulation de ces systèmes. Il devient ainsi aujourd'hui primordial d'améliorer ces modèles afin de pouvoir prévoir les différentes interactions entre composants et éventuellement revenir à une étape de conception des réseaux.

Deux classes élémentaires de modèles mathématiques sont à la disposition des concepteurs de réseaux : les modèles de distribution globale (ou modèles équivalents de type circuit) et les modèles de distribution locale (ou modèles de type éléments finis). On utilise tout particulièrement ces derniers modèles pour le calcul précis de distributions spatiales

d'induction ou flux magnétique et de couples électromagnétiques. Néanmoins, la programmation et la résolution des modèles par éléments finis exigent du temps ainsi qu'un ordinateur de puissance suffisante.

A côté, les modèles de type circuit permettent de simuler des dispositifs électriques relativement vite, en régimes dynamiques et transitoires, avec une précision suffisante pour la majorité de cas de fonctionnement. Cette classe de modèles nous semble donc plus utile du point de vue de la modélisation du système électroénergétique complet [79, 74]. Améliorer la précision de ces modèles nécessite cependant d'augmenter leur ordre. Les systèmes d'ordre non entier que nous utiliserons dans cette thèse permettront de conserver une approche simple de modélisation tout en limitant le nombre de paramètres de caractérisation.

Avant de présenter nos travaux de thèse, nous allons introduire brièvement l'histoire et les notions de base concernant la modélisation d'ordre fractionnaire. Ensuite, nous illustrerons à travers de nombreux exemples du génie électrique, les avantages associés à cette modélisation basée sur les systèmes d'ordre non entier.

1.2. Rappels sur la modélisation d'ordre fractionnaire

1.2.1. Historique

La modélisation d'ordre fractionnaire consiste à décrire les phénomènes physiques associés à des dispositifs dont le comportement peut être régi par des équations aux dérivées partielles. Le calcul infinitésimal (différentiel et intégral) d'ordre fractionnaire marque son début au XVII^{ème} siècle, après quelques travaux de Gottfried Wilhelm Leibniz (1697) et Leonhard Euler (1730). Cent ans plus tard il recommence à être étudié par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A. K. Grünwald (1867-1872) ou A.V. Letnikov (1868-1872) [24]. Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul infinitésimal d'ordre fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du XX^{ème} siècle. Le formalisme mathématique de la dérivation non entière associé au développement des outils informatiques a permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur du FOD (ang. *Fractional Order Differential*). Aujourd'hui, l'approche fractionnaire est ainsi appliquée pour la modélisation des dispositifs

électriques [13, 45, 12, 7, 63], pour la modélisation des conséquences des désastres naturel [89] ou pour la synthèse de la commande [54, 51, 48]. La modélisation d'ordre fractionnaire est aussi présente dans le domaine des sciences biologiques (les modèles des parties du corps humain) [43, 15, 26] ou même des sciences humaines et sociales (la modélisation des comportements des marchés) [38].

1.2.2. Rappels mathématiques

D'après la définition de Grünwald-Letnikov [59] on peut définir la dérivée d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{R}$) par la relation :

$$D^{(\alpha)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k \cdot h) \right] \quad (\text{I.1})$$

où : $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k+1)}$ et $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$ est la fonction Gamma (utilisée quand k appartient à l'ensemble des réels).

Dans le cas particulier d'une fonction $f(t)$ causale (nulle pour $t < 0$), on a : $f(t - k \cdot h) = 0$ pour $t - k \cdot h < 0$ et $t = m \cdot h$, donc lorsque $m < k$. Alors la somme de $k = 0$ à $k = \infty$ se réduit à la somme étendue de $k = 0$ à $k = m$. On peut donc écrire :

$$D^{(\alpha)} f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \cdot \left[\sum_{k=0}^m (-1)^k \cdot \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k \cdot h) \right] \quad (\text{I.2})$$

On peut ainsi constater que la dérivation non entière d'une fonction prend en compte l'intégralité du passé de cette fonction. C'est grâce à cette propriété que les systèmes d'ordre non entier présenteront un caractère parcimonieux.

Nous présentons ci-dessous quelques exemples de calcul de dérivées non entières : une dérivation non entière d'une exponentielle (I.3) et d'un sinus (I.4).

$$D^{(\alpha)} [e^{x \cdot t}] = x^\alpha \cdot e^{x \cdot t} \quad (\text{I.3})$$

$$D^{(\alpha)} [\sin(\omega \cdot t)] = \omega^\alpha \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} \alpha) \quad (\text{I.4})$$

La fig. I.1 ci-dessous illustre la notion de dérivation non entière pour une fonction sinusoïdale décrite en (I.4).

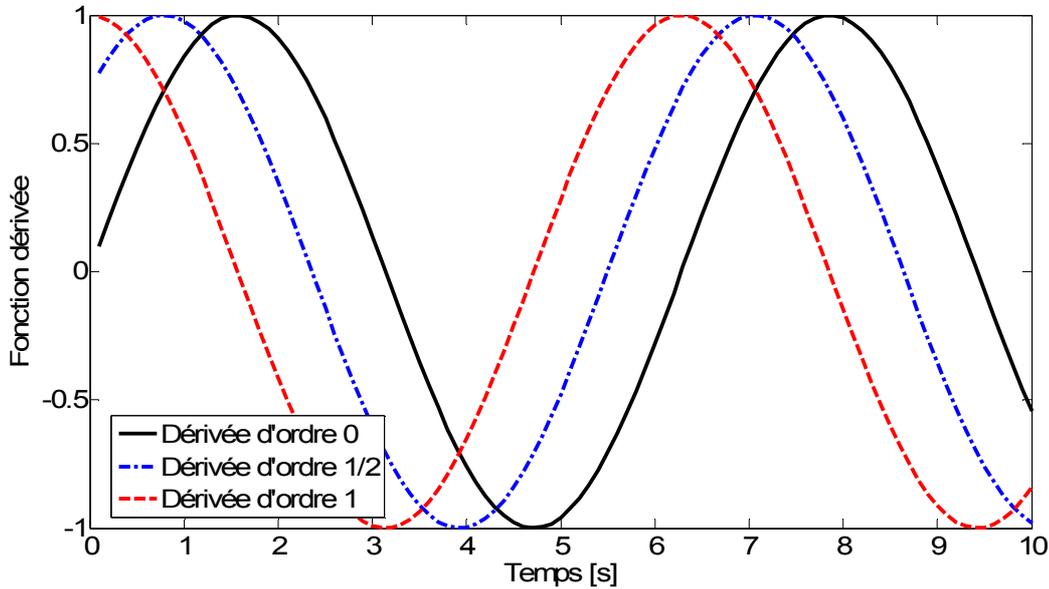


Fig. I.1. Dérivation d'ordre 0, 1/2 et 1 d'une fonction sinusoïdale

On peut différencier deux classes de systèmes d'ordre non entier : les systèmes à caractère *explicite* et ceux à caractère *implicite*. Dans le premier cas, l'opérateur D^α porte directement sur la fonction f , alors que, dans le deuxième cas, cet opérateur porte sur le produit de f par une exponentielle décroissante [55].

Un système décrit par une entrée $e(t)$ et une sortie $y(t)$ à caractère *explicite* est caractérisé par l'équation :

$$\tau^\alpha \cdot D^\alpha y(t) + y(t) = e(t) \quad (I.5)$$

Sa fonction de transfert $F_{exp}(s)$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$F_{exp}(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = \frac{1}{1 + (\tau \cdot s)^\alpha} \quad (I.6)$$

où s est l'opérateur de Laplace.

Quand le système est de caractère *implicite*, l'équation différentielle qui le décrit devient :

$$\tau^\alpha \cdot D^\alpha [y(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau}}] = e(t) \cdot e^{\frac{t}{\tau}} \quad (I.7)$$

Sa fonction de transfert $F_{imp}(s)$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$F_{imp}(s) = \frac{y(s)}{e(s)} = \frac{1}{(1 + \tau \cdot s)^\alpha} \quad (\text{I.8})$$

Les systèmes d'ordre un demi caractérisés par les équations (I.6) et (I.8) peuvent être représentés facilement dans le domaine fréquentiel par les fonctions de transfert :

$$F_{imp}^{1/2} = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.9})$$

$$F_{exp}^{1/2} = \frac{1}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.10})$$

où ω_0 est la pulsation de coupure du système.

Le diagramme de Bode est une représentation de la réponse fréquentielle d'un système décrit par une fonction de transfert $F(s)$. Le *Gain* en [dB] et la *Phase* en [deg] sont définis par :

$$Gain = 20 \log|F(s)| \quad \text{et} \quad Phase = \frac{180}{\pi} \cdot \arctan(F(s)) \quad (\text{I.11})$$

La fig. I.2 ci-dessous présente le diagramme de Bode des fonctions de transfert d'ordre $\frac{1}{2}$ (*implicite* et *explicite*), 1 et 2.

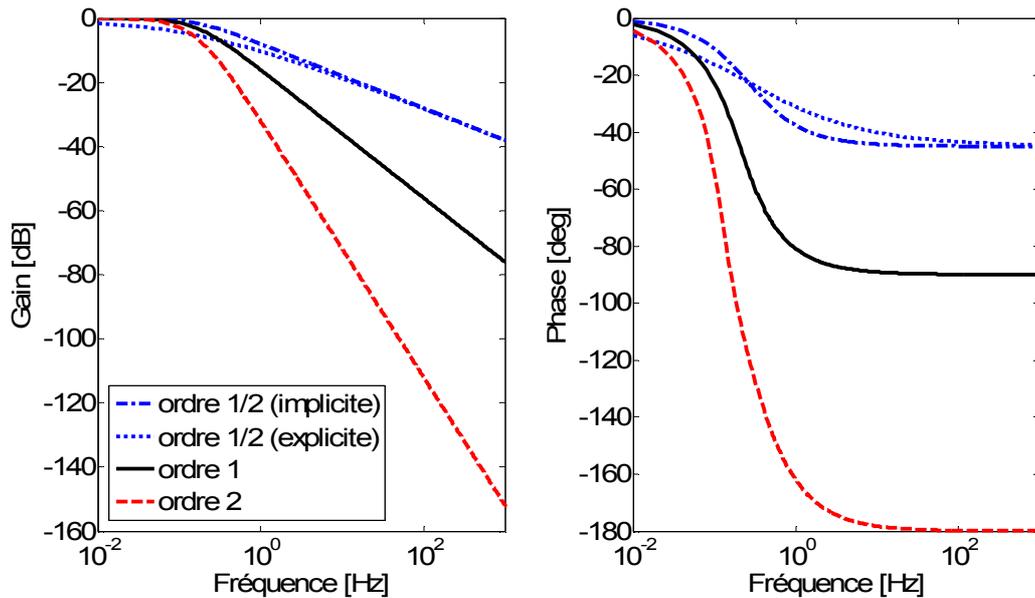


Fig. I.2. Comparaison des réponses fréquentielles des systèmes d'ordre $\frac{1}{2}$, 1 et 2

Pour le système d'ordre 1, le module de la réponse fréquentielle décroît alors de 20 dB par décade et la phase tend vers -90° . Dans le diagramme de Bode du système d'ordre 2, le module décroît de 40 dB par décade et la phase tend vers -180° . Dans le cas du système d'ordre $\frac{1}{2}$ (implicite aussi bien qu'explicite), le module de la réponse fréquentielle décroît de 10 dB par décade et la phase tend vers -45° . La représentation dans le domaine fréquentiel semble ainsi tout à fait appropriée et simple pour manipuler les systèmes d'ordre non entier et modéliser les composants de réseaux avec cet outil mathématique.

La simulation dans le domaine temporel pose néanmoins certains problèmes dans la mesure où la propriété de compacité disparaît ; des outils de simulation numériques doivent alors être développés spécifiquement pour calculer la réponse d'un système ou réseau électrique modélisé par des systèmes d'ordre non entier.

1.3. Etat de l'art sur l'utilisation des systèmes d'ordre non entier en génie électrique

Les systèmes d'ordre non entier sont tout particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (champ, température, etc.). Le lien entre diffusion et modélisation d'ordre non entier est analysé en détails dans [60] ; la suite de ce chapitre illustre

succinctement plusieurs cadres applicatifs où la modélisation d'ordre non entier s'avère tout particulièrement intéressante.

1.3.1. Actionneurs et générateurs électriques : machines synchrones et asynchrones

Les machines électriques sont des composants omniprésents dans les systèmes et réseaux d'énergie électrique, que ce soit pour la génération (centrales électriques) ou pour les usages industriels ou domestiques en incluant le transport. Avec l'électrification croissante des principaux domaines industriels, on trouve des actionneurs électriques dans les réseaux de forte puissance comme ceux de taille plus modeste (réseaux embarqués ou îliens) [28, 42, 32, 75].

La modélisation précise et compacte des machines électriques devient donc un objectif essentiel en termes de conception et de simulation des futurs systèmes et réseaux électriques. La finesse des modèles des générateurs et moteurs, synchrone et asynchrone notamment, est ainsi très importante dans l'étude de la stabilité, de sécurité et de fiabilité des réseaux. Ils doivent désormais tenir compte des effets liés aux harmoniques générés par les dispositifs d'électronique de puissance massivement insérés dans le réseau de manière à le gérer plus efficacement, pour modéliser l'influence de ces harmoniques sur le comportement dynamique des machines (surtout sur le couple électromagnétique).

Pour construire un modèle valable sur une grande plage de fréquences, il est nécessaire de tenir compte de l'effet de peau dans certaines parties conductrices de la machine [2]. Pour la machine synchrone, les courants induits liés à la diffusion du champ magnétique, se localisent principalement dans les barres de la cage d'amortisseurs ou dans les pièces massives du rotor. Pour la machine asynchrone, ces effets induits se situent dans la cage d'écureuil de la machine.

Des modèles analytiques, rappelés dans la suite de ce mémoire, permettent de représenter ces phénomènes d'induction [61], qui conduisent classiquement à la construction de schémas électriques équivalents intégrant un certain nombre de cellules (R-L).

Les travaux sur l'utilisation des systèmes d'ordre non entier pour la modélisation des machines électriques ont été commencés dans les années 90 par le professeur M. Ivanès et N. Retière au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, en France. Pendant plus qu'une

décade, plusieurs articles sont apparus, traitant de la méthode, son application et l'identification des paramètres des nouveaux schémas équivalent [67, 65, 73, 69, 71, 70, 61, 62, 63]. D'autres travaux en France ont utilisé la modélisation d'ordre non entière pour modéliser les phénomènes transitoires dans les machines électriques [21, 20].

L'idée principale consiste à insérer des impédances d'ordre non entier dans les schémas équivalents classiques de machines en tenant compte de la localisation des courants induits dans la machine. Une étude analytique complète dans [68] a permis de valider cette approche dans le cas de la machine asynchrone. Cette démarche permet de construire des modèles de connaissance et d'ordre réduit des machines électriques tournantes, valables sur une large plage de fréquences. A l'inverse de la modélisation classique, la modélisation d'ordre fractionnaire permet de caractériser correctement les machines électriques aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire où il faut prendre en compte les effets liés à la fréquence d'alimentation, comme par exemple l'effet de peau.

Plus de détails sur la formulation du problème de la modélisation d'ordre fractionnaire de la machine synchrone seront présentés aux chapitre II et le chapitre III de ce mémoire de thèse.

I.3.2. Piles à combustibles de type PEMFC

Une pile à combustible de type PEMFC produit l'énergie électrique grâce à l'oxydation sur l'anode d'un combustible (hydrogène) couplée à la réduction sur la cathode d'un oxydant (oxygène) [41]. Son principe de fonctionnement repose sur des phénomènes physico-chimiques de nature diffusive (diffusion des espèces gazeuses au niveau des électrodes notamment), ce qui invite à utiliser la modélisation d'ordre fractionnaire à l'instar des machines tournantes.

Parmi les différents modèles à constantes plus ou moins localisées (mentionnés et présentés en [83] et [12]), nous présentons celui qui est le plus à même d'être utilisé dans le cadre d'une application « système », à savoir un modèle sous forme de circuit électrique équivalent (fig. I.3).

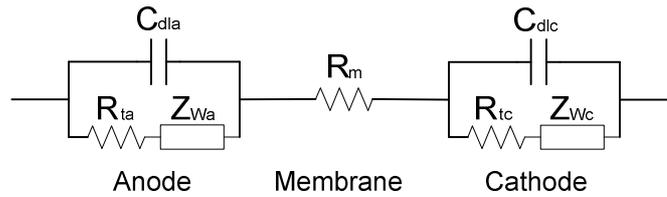


Fig. I.3. Schéma équivalent électrique de la pile à combustible

Le schéma présenté ci-dessus est constitué de trois parties : deux électrodes à gaz et une membrane. Les électrodes (anode et cathode) sont décrites comme l'association en parallèle d'une capacité de double couche (C_{dla} et C_{dlc}) et d'une impédance faradique qui est la somme d'une résistance de transfert de charge (R_{ta} et R_{tc}) et d'une impédance de Warburg (Z_{Wa} et Z_{Wc}) [76, 6]. Ces impédances de Warburg modélisent la diffusion des espèces gazeuses (oxygène et hydrogène) au niveau des électrodes. La membrane est représentée par une résistance (R_m).

Pour des raisons tout à fait similaires aux machines électriques, l'impédance de Warburg décrite en (I.12) est approximée par une impédance (I.13) d'ordre non entier (ici égal à $1/2$), faisant apparaître une dépendance en racine carrée de la fréquence ω [68, 61].

$$Z_W(\omega) = A_k \cdot \frac{\tanh(\sqrt{j\omega \cdot \tau_k})}{\sqrt{j\omega \cdot \tau_k}} \quad \text{avec} \quad \tau_k = \frac{\delta^2}{D_k^{eff}} \quad (\text{I.12})$$

$$Z_W^{1/2}(\omega) = \frac{A_k}{\sqrt{1 + j\omega \cdot \tau_k}} \quad (\text{I.13})$$

où A_k est une constante qui dépend de la cinétique électrochimique de la diffusion des espèces dans l'électrode, D_k^{eff} est un coefficient effectif de diffusion et δ est l'épaisseur de l'électrode [76].

Grâce à cette approximation, le modèle complet de la pile à combustible est compact (décrit avec peu de paramètres) et permet de simuler numériquement le comportement diffusif des gaz au niveau des électrodes avec une grande précision et un nombre de paramètres réduit par rapport aux modèles classiques (réduction d'un facteur deux !) [83, 76].

Un problème subsiste cependant pour caractériser les piles à combustible, dans la mesure où le phénomène de diffusion des espèces gazeuses peut être complètement caché par

rapport au phénomène de double couche (modélisé par les capacités C_{dl}), empêchant dès lors d'identifier avec une grande précision les paramètres du modèle.

I.3.3. Dispositifs de stockage électrochimique : batteries et supercapacités

Les dispositifs de stockage sont de plus en plus présents dans les réseaux ou systèmes d'énergie dans la mesure où ils peuvent contribuer à une gestion énergétique plus efficace, du point de vue du producteur, du consommateur ou du distributeur [88, 40].

A ce titre, les batteries électrochimiques (plomb, Ni-Cd, Li-ion ou autres) et les supercapacités ont un potentiel d'utilisation considérable dans un contexte de diversification des sources et d'utilisation d'énergies intermittentes. Mais là encore, il est nécessaire de bien maîtriser leur fonctionnement dynamique de manière à bien les dimensionner et mettre en place des stratégies de gestion de l'énergie en tenant compte de leur état de charge et de leur vieillissement (BMS : Battery Management System).

Le supercondensateur est un condensateur de très grande capacité par rapport à ses dimensions relativement petites grâce au phénomène de double couche [81]. Il permet ainsi de disposer de densités de puissance beaucoup plus importantes que celles des batteries plus utilisées comme sources d'énergie. Que ce soit pour une batterie ou une supercapacité, il est nécessaire de modéliser finement la porosité au niveau des électrodes où diffusent les ions de l'électrolyte [84, 82]. De manière similaire aux machines électriques et piles à combustible, ce phénomène peut là encore être modélisé électriquement par des systèmes d'ordre non entier.

Le modèle classique du supercondensateur est présenté sur la fig. I.4 ci-dessous.



Fig. I.4. Schéma équivalent du supercondensateur

Il est composé de trois éléments : une résistance interne R_i (qui modélise l'électrolyte et ses connections), une inductance L (qui modélise des connections et qui élimine des erreurs d'identification aux fréquences intermédiaires) et une impédance complexe Z_p modélisant la porosité des électrodes du supercondensateur [10].

$$Z_p(\omega) = \frac{\tau \cdot \coth(\sqrt{j\omega \cdot \tau})}{C \cdot \sqrt{j\omega \cdot \tau}} \quad (\text{I.14})$$

Classiquement, on peut approcher l'impédance Z_p par un nombre fini de cellules R-C placées en parallèle [10]. Cette approche conduit toutefois à un modèle comportant beaucoup (trop) de paramètres pour une approche Systèmes.

[72] propose donc une approximation de l'impédance Z_p par un système d'ordre $\frac{1}{2}$ décrit par (I.15). Cela permet d'obtenir une très bonne cohérence avec le modèle analytique, en identifiant un minimum de paramètres (4 au lieu d'environ 20 pour le modèle classique).

$$Z_p^{1/2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}}{C_0 \cdot j\omega} \quad (\text{I.15})$$

La modélisation d'ordre non entier a ainsi permis de réduire considérablement l'ordre du modèle (nombre de paramètres) et en même temps d'améliorer la précision de sa représentation fréquentielle. Il faut cependant noter que le modèle développé en [72] est linéaire, ce qui veut dire qu'il ne prend pas en compte l'influence de la température ou d'effets de tension. Néanmoins, d'autres travaux présentent des modèles d'ordre fractionnaire de supercapacités non linéaires [7].

Pour les batteries, des travaux similaires utilisent la modélisation d'ordre non entier pour réduire l'ordre de représentation, mais également pour caractériser le vieillissement de la batterie à partir d'un nombre restreint de paramètres [37].

1.4. Conclusion

Au début de ce chapitre nous avons donné quelques rappels historiques sur la définition et l'utilisation des systèmes d'ordre non entier et introduit quelques propriétés élémentaires concernant la notion de dérivation d'ordre non entier. Ensuite, à partir d'un état de l'art sur l'utilisation des systèmes d'ordre non entier en génie électrique, nous avons montré que la modélisation d'ordre fractionnaire est un outil mathématique très puissant permettant de bien caractériser les phénomènes diffusifs de nature distribuée, dans des dispositifs aussi divers qu'une pile à combustible, un supercondensateur ou une machine

électrique. Ces modèles sont ainsi précis et valables sur de grandes plages de fréquences de fonctionnement, tout en gardant un nombre de paramètres limités.

Toutefois, les modèles d'ordre fractionnaire n'ont été validés pour l'instant que pour des cas de fonctionnement majoritairement linéaires. Il est donc intéressant d'étudier l'influence des non linéarités sur la structure et les paramètres des modèles d'ordre non entier. L'un des objectifs de cette thèse est ainsi de revenir sur la modélisation d'ordre non entier d'un générateur synchrone, **d'évaluer l'influence de la saturation magnétique sur les paramètres du modèle d'ordre non entier de la machine** et de **valider ces modèles**.

Le deuxième objectif de cette thèse est de **pouvoir simuler le comportement d'une machine synchrone modélisée par des systèmes d'ordre non entier dans le domaine temporel**. Comme nous l'avons évoqué plus haut, le calcul de la réponse temporelle d'un modèle d'ordre non entier est loin d'être trivial.

Chapitre II.

Modèles d'ordre non entier de pièces ferromagnétiques en régime non linéaire

II.1. Introduction

Nous allons présenter et valider dans ce chapitre un nouveau modèle analytique de tôle ferromagnétique soumise à la saturation de l'induction magnétique et au développement de courants induits. Comme nous le verrons à travers l'état de l'art, peu de modèles permettent d'intégrer ces deux phénomènes et si cela est fait, les approximations utilisées conduisent à des modèles trop approximatifs. Ce nouveau modèle est issu directement de l'équation régissant la diffusion du champ magnétique dans un cas unidirectionnel en faisant apparaître les systèmes d'ordre non entier. Ce premier modèle de tôle ferromagnétique sera utile au chapitre III pour modéliser des pièces ferromagnétiques massives de machines électriques, en supposant que le rayon de courbure de ces pièces cylindriques est suffisamment grand pour que l'on puisse les modéliser par des tôles ferromagnétiques minces et conductrices.

Après avoir introduit les systèmes d'ordre non entier pour modéliser une tôle en régime linéaire, nous présenterons une approche pour intégrer la saturation du circuit magnétique dans les paramètres du modèle. Il est important de noter que nous nous intéressons uniquement aux régimes petits signaux, c'est-à-dire des régimes pour lesquels l'état magnétique varie faiblement autour d'un point de fonctionnement magnétique. La saturation est donc introduite par un champ magnétique constant et les inductances opérationnelles sont calculées à partir de petites variations des conditions magnétiques autour d'un point de fonctionnement.

II.2. Modélisation analytique d'une tôle ferromagnétique en régime linéaire – Introduction des systèmes d'ordre non entier

Considérons une tôle ferromagnétique, caractérisée par une perméabilité μ , une conductivité σ , une résistivité ρ . Cette tôle est entourée par un bobinage comportant n spires (fig. II.1).

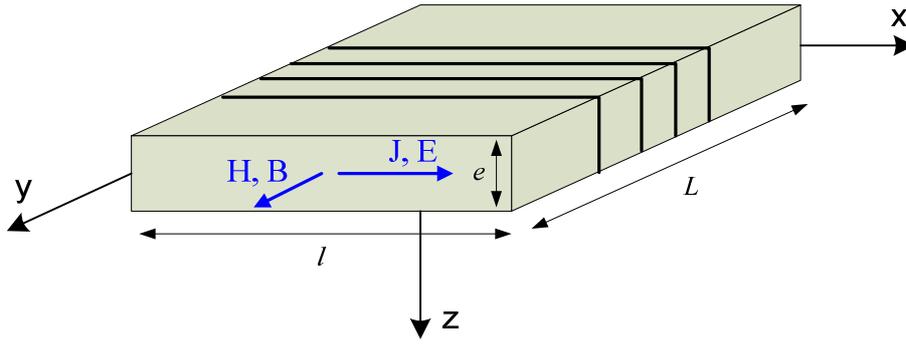


Fig. II.1. Schéma d'une tôle ferromagnétique

A partir des équations de diffusion du champ magnétique H et des conditions aux limites, l'impédance analytique classique d'une tôle (fig. II.1) s'exprime sous la forme (II.1) [2] :

$$\bar{Z}_{tôle} = j\omega \cdot L_0 \cdot \frac{\tanh(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \quad (\text{II.1})$$

où L_0 est une inductance en continu de la tôle qui est décrite par l'équation (II.2) :

$$L_0 = \frac{\mu \cdot n^2 \cdot e \cdot l}{L} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}^2 = j\omega \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \mu \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad (\text{II.2})$$

Etant donné que cette impédance (II.1) n'est pas utilisable directement dans un logiciel de simulation, on peut l'approximer en décomposant en série la fonction tangente hyperbolique, ce qui nous amène à un circuit électrique d'ordre entier composé d'un nombre infini de cellules (R-L) ou (R-C) [2]. En pratique, le nombre de cellules est choisi fini par rapport à une précision désirée. Néanmoins, au fur et à mesure qu'on ajoute des cellules, les paramètres perdent de la signification physique [30]. De plus, l'ordre du schéma équivalent augmente avec le nombre de cellules, ce qui conduit à une augmentation considérable du temps de simulation.

Nous proposons ainsi une nouvelle approximation basée non pas sur une décomposition en série mais sur un développement limité de la fonction tangente hyperbolique. Ce développement limité d'ordre deux de la fonction tangente hyperbolique (de l'équation (II.1)) est donné par (II.3) et (II.4) :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{x}{1 + \frac{x^2}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (\text{II.3})$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (\text{II.4})$$

En reportant cette approximation dans l'expression de l'impédance, on trouve [62] :

$$\bar{Z}_{inductive}^{1/2} = \frac{L_0 \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (\text{II.5})$$

où L_0 est donnée par (II.2) et ω_0 est la pulsation de coupure représentée par (II.6).

$$\omega_0 = \frac{1}{\frac{1}{\rho} \cdot \mu \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2} \quad (\text{II.6})$$

Nous avons ainsi introduit la notion de système d'ordre $\frac{1}{2}$, avec une impédance évoluant avec la racine carrée de la fréquence.

La fig. II.2 montre une comparaison des deux modèles de l'impédance présentés dans ce paragraphe, le modèle analytique (II.1) et celui d'ordre un demi (II.5) pour les caractéristiques de la tôle données au tableau II.1.

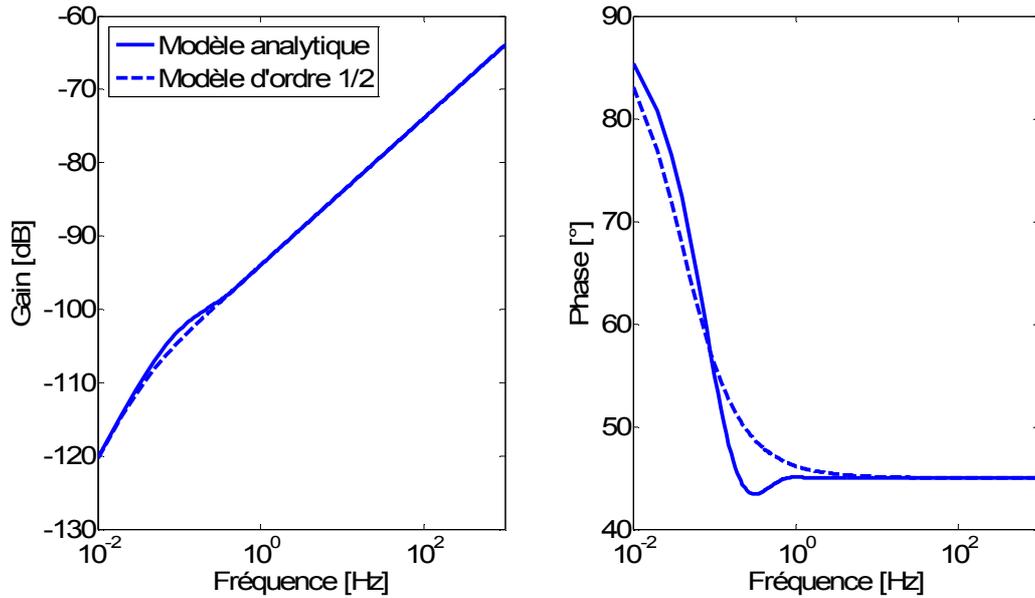


Fig. II.2. Modèle classique et d'ordre un demi d'une tôle ferromagnétique en régime linéaire

On peut remarquer que le modèle d'ordre $\frac{1}{2}$ est très proche du modèle analytique. Le module et la phase de l'impédance d'ordre $\frac{1}{2}$ tendent vers les mêmes valeurs que celles du modèle analytique. Les écarts observés sur le gain et la phase sont liés à l'approximation choisie pour effectuer le développement limité de la fonction tangente hyperbolique. Néanmoins, le fait marquant est qu'un phénomène physique de nature distribuée, modélisé classiquement par un circuit composé d'un nombre infini d'éléments passifs, peut être remplacé par une seule impédance d'ordre non entier à deux paramètres pour une même précision. Cela contribue à une diminution considérable du nombre de paramètres du schéma équivalent par rapport aux modèles classiques d'ordre entier.

REMARQUE : La même approche a été utilisée pour modéliser une cage d'amortisseurs, représentée schématiquement par une barre rectangulaire, conductrice et entourée d'un milieu ferromagnétique idéal. L'impédance de cette barre est alors décrite par l'équation (II.7) [70].

$$\bar{Z}_{résistive}^{1/2} = R_0 \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (\text{II.7})$$

où R_0 est la résistance en continu de la barre et ω_0 est la pulsation de coupure.

Ces impédances seront également introduites dans le schéma équivalent d'un générateur synchrone avec amortisseurs.

II.3. Modélisation analytique d'une tôle ferromagnétique en régime saturé

II.3.1. Etat de l'art

Nous rappelons brièvement dans ce paragraphe les différents modèles analytiques intégrant en petits signaux la saturation des pièces ferromagnétiques.

II.3.1.1. Approximation de la courbe de première aimantation

Dans cette première partie, le calcul analytique repose sur la résolution de l'équation de diffusion du champ magnétique en régime saturé, en approximant parfois grossièrement la courbe de première aimantation pour relier l'induction au champ magnétique. Ainsi, dans [46], l'auteur présente un modèle unidimensionnel basé sur une modélisation simple d'une courbe de magnétisation de matériau ferromagnétique (II.8) suivant :

$$B = k \cdot H^{\frac{1}{m}} \quad (\text{II.8})$$

Après résolution de l'équation de diffusion du champ, l'impédance de la tôle s'exprime finalement par la relation (II.9) :

$$\bar{Z}_{\text{tôle}}(\omega, i) = (a_m + jb_m) \cdot \sqrt{\frac{\mu_m(i) \cdot \omega}{\sigma}} \quad (\text{II.9})$$

où a_m et b_m sont des fonctions du paramètre m (II.10) et la perméabilité magnétique μ_m est liée à l'amplitude du champ magnétique H_m (II.11) calculée aux limites de domaine.

$$a_m = \frac{2m}{[2m \cdot (m+1) \cdot (3m+1)^2]^{\frac{1}{4}}} \quad \text{et} \quad b_m = \frac{\sqrt{2m(m+1)}}{[2m \cdot (m+1) \cdot (3m+1)^2]^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{II.10})$$

$$\mu_m(i) = k \cdot H_m(i)^{\frac{1}{m}-1} \quad (\text{II.11})$$

Ce modèle est établi pour des petites variations de courant magnétisant autour d'un point de fonctionnement. Le cas où $a_m = b_m$, c'est-à-dire pour $m = 1$, correspond au comportement linéaire du matériau.

Le module et la phase de l'impédance $\bar{Z}_{\text{tôle}}$ s'écrivent alors sous la forme suivante (II.12) :

$$|\bar{Z}_{tôle}| = \left(\frac{2m}{m+1}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_m \cdot \omega}{\sigma}} \quad \text{et} \quad \Phi \bar{Z}_{tôle} = \arctan \sqrt{\frac{m+1}{2m}} \quad (\text{II.12})$$

On peut donc tracer le diagramme de Bode de cette impédance pour les différents niveaux du courant magnétisant (fig. II.3). On prend l'exemple d'une tôle de longueur élémentaire (un mètre), caractérisée par une courbe de saturation donnée ($k = 0,7$; $m = 6$) et d'une conductivité $\sigma = 9,93 \cdot 10^6$ S/m et entourée d'un bobinage à 100.000 spires.

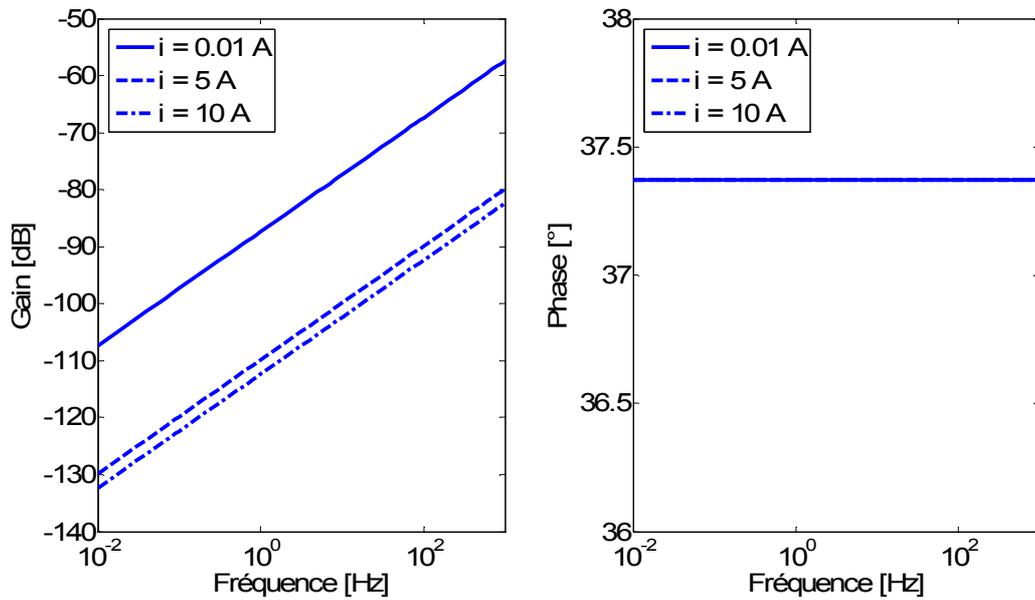


Fig. II.3. Diagramme de Bode d'un modèle analytique d'une tôle ferromagnétique saturée (approximation de la courbe de première aimantation)

On peut remarquer que cette impédance varie avec la fréquence comme un système non entier d'ordre $\frac{2}{\pi} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{m+1}{2m}}\right)$ où le gain décroît uniformément avec un accroissement du courant magnétisant et la phase reste constante pour toute la plage de fréquences. Avec l'approximation de la courbe de saturation (II.8), ce modèle reste trop simple et permet seulement de caractériser correctement une décroissance de l'inductance avec le courant magnétisant pour la haute fréquence (fig. II.4).

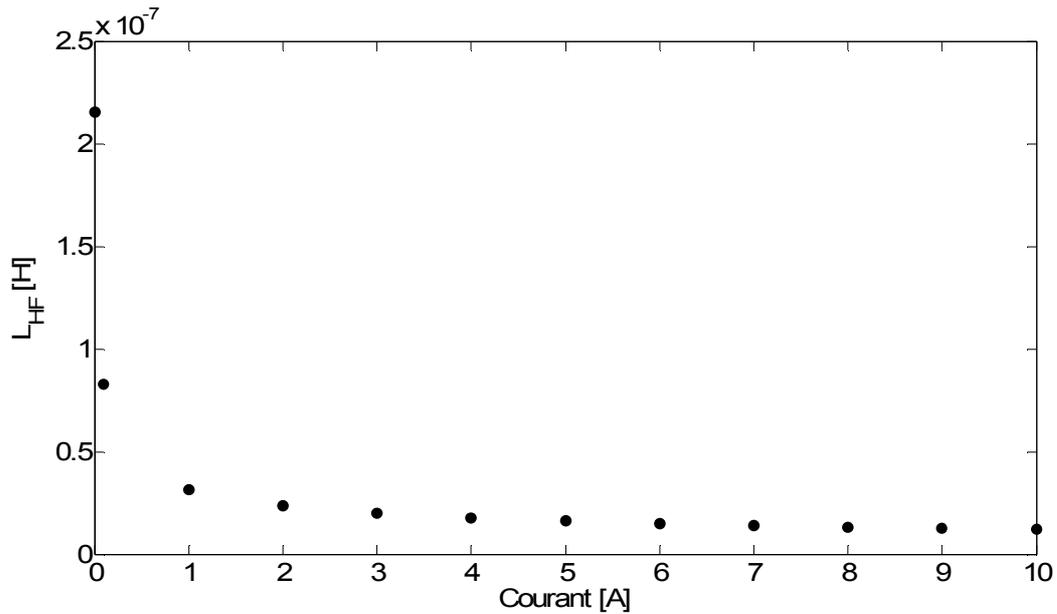


Fig. II.4. Variation de l'inductance d'une tôle avec le courant magnétisant

II.3.1.2. Approximation de l'inductance en régime saturé

D'autres modèles plus empiriques existent dans la littérature, où les variations du module de l'impédance (ou plutôt de l'inductance en continu) avec le courant d'alimentation sont régies par la relation (II.13) [34] :

$$\bar{Z}_{tôle}(\omega, i) = L_{static}(i) \cdot j\omega = \left(\frac{l_0}{1 + k \cdot i^n} + l_\sigma \right) \cdot j\omega \quad (II.13)$$

où les paramètres l_0 , l_σ , k et n sont identifiés à partir de mesures expérimentales.

D'autres modèles plus ou moins complexes peuvent également être utilisés ([66]). Le gain en précision peut être alors discuté.

Dans le cas du modèle présenté ici (II.13), le diagramme de Bode de l'impédance, pour le même jeu de paramètres qu'au cas II.3.1.1, est tracé sur la fig. II.5.

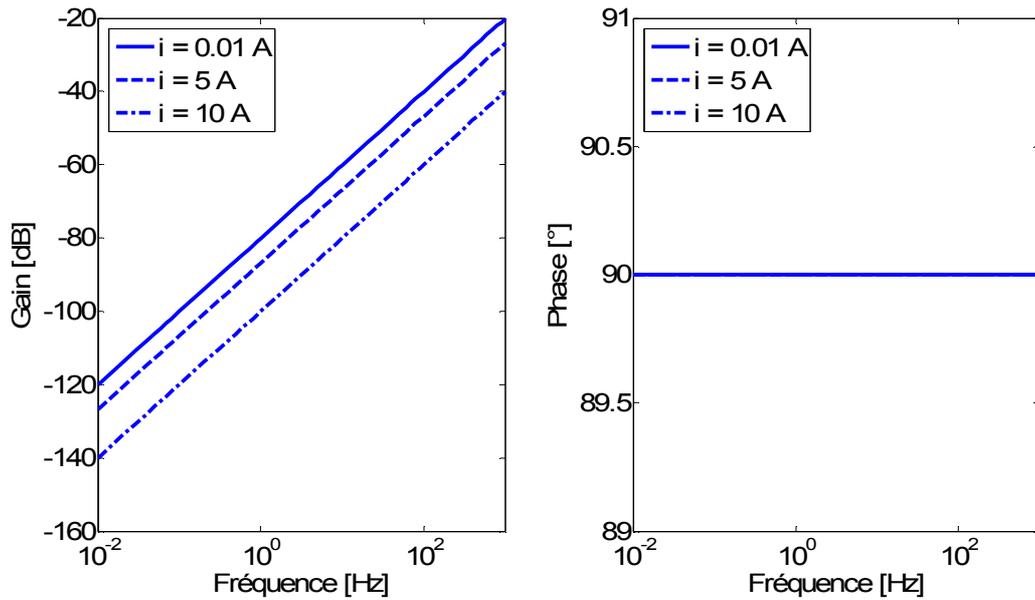


Fig. II.5. Diagramme de Bode d'un modèle analytique d'une tôle ferromagnétique saturée

Ce modèle ne permet là encore que de décrire une variation de gain de l'impédance avec le courant. Avec ce modèle la diffusion n'est pas représentée. L'impédance modélisée se comporte comme un système d'ordre un, où le gain augmente de 20 dB par décade. La phase reste égale à 90°.

II.3.2. Modélisation d'ordre non entier d'une tôle ferromagnétique saturée

Notre objectif est de construire un modèle fréquentiel de tôle ferromagnétique intégrant le point de fonctionnement magnétique de cette tôle. On propose donc de garder la même structure du modèle d'ordre $\frac{1}{2}$ présenté à l'équation (II.5), mais avec des paramètres L_0 et ω_0 qui varient avec le courant (II.14) selon :

$$\bar{Z}_{tôle}^{1/2}(\omega, i) = \frac{L_0(i) \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0(i)}}} \quad (\text{II.14})$$

Nous ne définissons pas *a priori* de loi d'évolution $L_0(i)$ ou $\omega_0(i)$, mais comme la perméabilité apparente décroît avec la saturation, on attend une diminution significative de l'inductance L_0 et un accroissement de la pulsation de coupure ω_0 avec l'augmentation du courant magnétisant i .

Pour valider ce modèle, une simulation par éléments finis d'une tôle bobinée a été effectuée. Les résultats sont présentés dans le paragraphe suivant.

II.4. Simulation par éléments finis d'une tôle ferromagnétique saturée

En prenant l'exemple d'une tôle ferromagnétique (fig. II.1) dont les caractéristiques physiques sont présentées dans le paragraphe II.4.1, une simulation par éléments finis a été effectuée pour différents niveaux de courant magnétisant. Les calculs ont été menés avec le logiciel *Flux3D*[®] (fig. II.6).

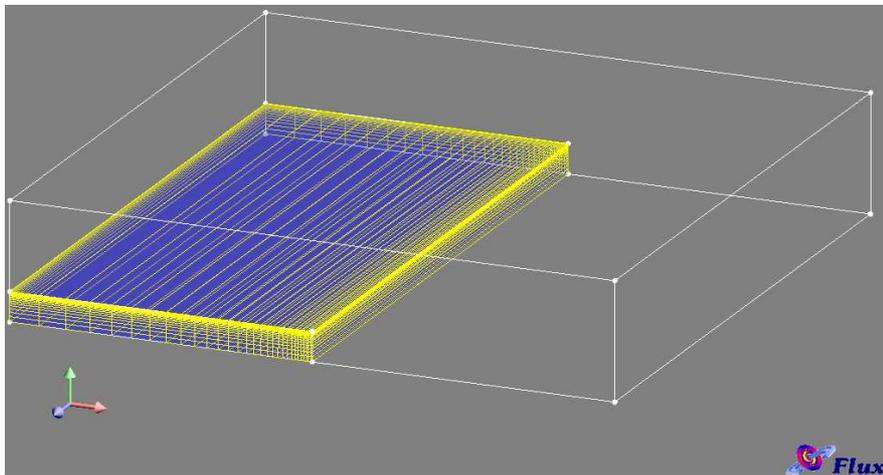


Fig. II.6. Modèle par éléments finis d'une tôle ferromagnétique étudiée sous *Flux3D*

II.4.1. Caractéristique de la tôle

Les caractéristiques physiques de la tôle simulée correspondent au matériau ferromagnétique FeSi à grains orientés de qualité M6 (FeSi GO M6) caractérisée par la courbe de saturation $B(H)$ donnée sur la fig. II.7. Ce matériau est souvent utilisé pour fabriquer des dispositifs électrotechniques, par exemple des tôles pour les transformateurs. Les dimensions et les caractéristiques physiques exactes de la tôle étudiée sont présentées dans le tableau II.1.

Tableau II.1. Caractéristiques physiques de la tôle ferromagnétique étudiée

Caractéristique	Valeur
Longueur (L)	1 m
Largeur (l)	0,05 m
Epaisseur (e)	0,005 m
Conductivité (σ)	$9,93 \cdot 10^6$ S/m
Perméabilité de l'air (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Perméabilité relative (μ_r)	50000
Nombre de spires	1

II.4.1.1. Courbe de saturation

Le logiciel *Flux3D*[®] permet d'introduire la courbe de saturation d'un matériau simulé de différentes manières. Afin d'optimiser le temps de calcul et d'éviter des problèmes numériques, nous avons choisi d'approcher la courbe de saturation par l'équation suivante à trois coefficients :

$$B(H) = \mu_0 \cdot H + J_s \cdot \frac{H_a + 1 - \sqrt{(H_a + 1)^2 - 4 \cdot H_a \cdot (1 - a)}}{2 \cdot (1 - a)} \quad (\text{II.15})$$

avec $H_a = \mu_0 \cdot H \cdot \frac{\mu_r - 1}{J_s}$ et $0 < a < 0,5$

La fig. II.7 montre une approximation de la courbe de saturation par l'équation II.15 avec les coefficients trouvés : $\mu_r = 50000$, $J_s = 1,8$, $a = 0,1$.

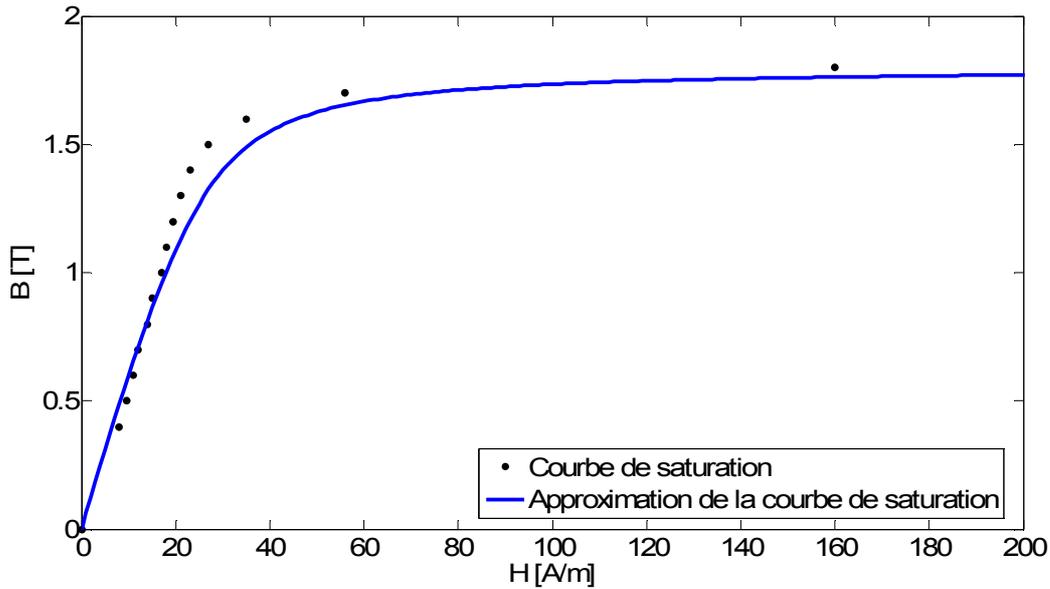


Fig. II.7. Courbe de saturation d'une tôle ferromagnétique étudiée

II.4.2. Calcul par éléments finis

Afin de modifier les conditions magnétiques du matériau, le courant DC dans un enroulement (constitué d'une spire pour simplifier l'analyse) évolue entre 0,01 A et 20 A, ce qui correspond à un champ magnétique entre 0,05 A/m et 100 A/m. Pour chaque niveau de courant magnétisant, l'impédance opérationnelle a été calculée à partir de l'équation (II.16) en effectuant de petites variations de courant magnétisant autour du point de fonctionnement avec une fréquence comprise entre 0,01 Hz et 1000 Hz. L'amplitude de ces variations est fixée à 0,01 A.

$$Z_{oper} = \frac{|E|}{|H|} \quad (II.16)$$

E et H représentent respectivement le champ électrique et le champ magnétique à la surface de la tôle.

Finalement, en prenant en compte les dimensions de la tôle, son impédance a été calculée à partir de l'équation (II.17). Les résultats de simulation ainsi que la courbe

représentant l'impédance calculée selon l'expression analytique classique (II.1) sont présentés sur la fig. II.8.

$$Z_{tôle} = \frac{2 \cdot l \cdot n^2}{L} \cdot Z_{oper} \quad (II.17)$$

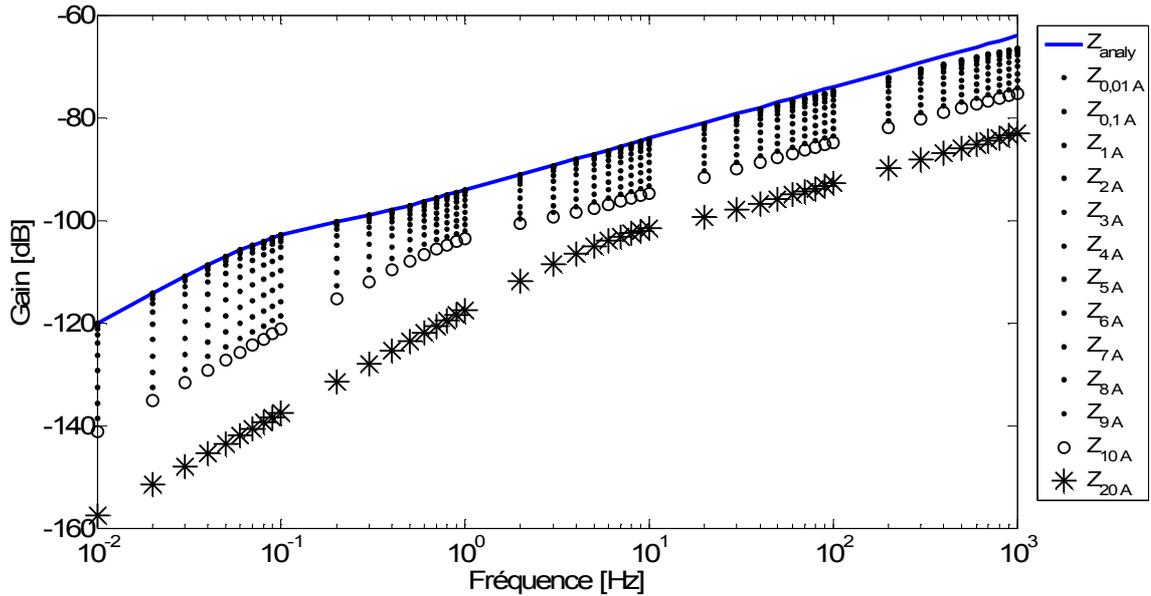


Fig. II.8. Impédance d'une tôle ferromagnétique pour différents niveaux de saturation

II.5. Validation du modèle d'ordre un demi d'une tôle ferromagnétique saturée

II.5.1. Evolution des paramètres L_0 et ω_0 avec le courant

Afin de déduire l'évolution des paramètres $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$ du modèle non linéaire d'ordre un demi (II.14), on analyse d'abord son comportement asymptotique aux basses et hautes fréquences comme montré ci-dessous.

Pour les basses fréquences, on a :

$$\bar{Z}^{1/2} = \frac{j\omega \cdot L_0}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} L_0 \cdot j\omega \Rightarrow L_0|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{Z_{basse_fréq}}{j\omega} \quad (II.18)$$

Pour les hautes fréquences, on obtient :

$$\bar{Z}^{1/2} = \frac{j\omega \cdot L_0}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} L_0 \cdot \sqrt{j\omega \cdot \omega_0} \Rightarrow \omega_0 \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{Z_{haute_fréq}^2}{L_0^2 \cdot j\omega} \quad (\text{II.19})$$

Ensuite, grâce aux simulations par éléments finis (fig. II.8) on peut calculer les valeurs des paramètres L_0 et ω_0 pour chaque niveau de courant magnétisant i (tableau II.2, fig. II.9).

Tableau II.2. Identification des paramètres L_0 et ω_0

Courant [A]	L_0 [H]	ω_0 [rad/s]
0,01	$0.1559 \cdot 10^{-4}$	0.2523
0,1	$0.1554 \cdot 10^{-4}$	0.2531
1	$0.1492 \cdot 10^{-4}$	0.2636
2	$0.1390 \cdot 10^{-4}$	0.2832
3	$0.1234 \cdot 10^{-4}$	0.3191
4	$0.1020 \cdot 10^{-4}$	0.3867
5	$0.0772 \cdot 10^{-4}$	0.5099
6	$0.0546 \cdot 10^{-4}$	0.7173
7	$0.0376 \cdot 10^{-4}$	1.0507
8	$0.0261 \cdot 10^{-4}$	1.5890
9	$0.0187 \cdot 10^{-4}$	2.4195
10	$0.0138 \cdot 10^{-4}$	3.5629
20	$0.0021 \cdot 10^{-4}$	18.9189

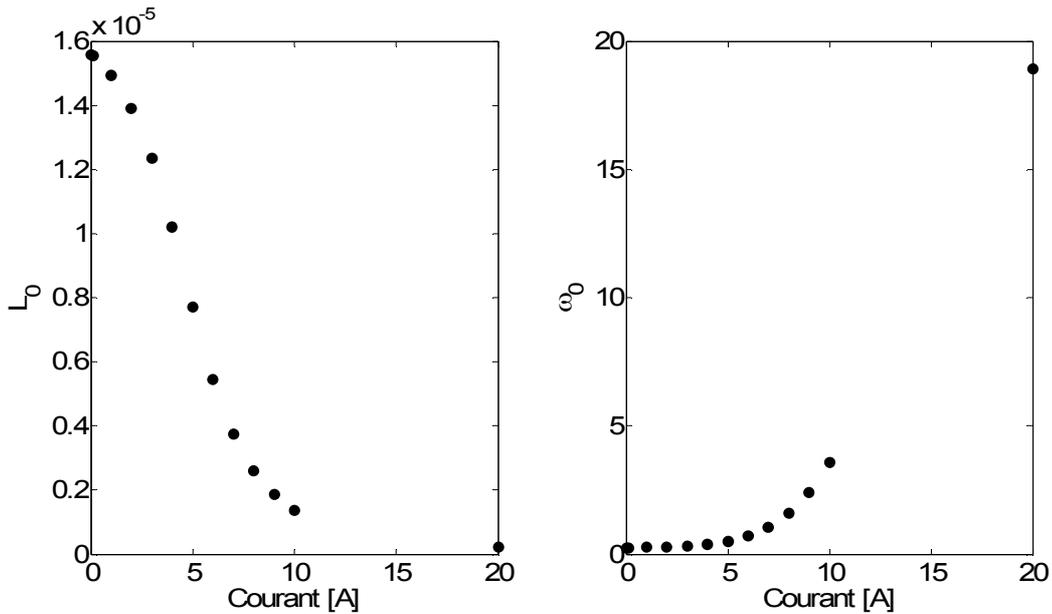


Fig. II.9. Paramètres $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$ calculés à partir des simulations par éléments finis

II.5.1.1. Fonctions $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$

Afin d'unifier le modèle (II.14), les évolutions des paramètres $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$ peuvent être approchés par des relations algébriques en fonction du courant.

En prenant l'équation (II.13), qui décrit une diminution de gain de l'impédance avec le courant, on peut extraire l'expression de l'inductance statique qui décrit bien l'évolution de l'inductance L_0 avec le courant magnétisant (II.20) :

$$L_0(i) = \left(\frac{L_0'}{1 + k \cdot i^n} + l_\sigma \right) \quad (\text{II.20})$$

où $L_0' = L_0$ qui est décrit par la relation (II.2), $l_\sigma = 0$, k et n sont identifiés à partir des simulations éléments finis.

La fig. II.10 montre une approximation de l'évolution du paramètre L_0 par la relation (II.20) avec les coefficients suivants : $L_0' = 1,5708 \cdot 10^{-5}$, $l_\sigma = 0$, $k = 0,0102$, $n = 2,9414$.

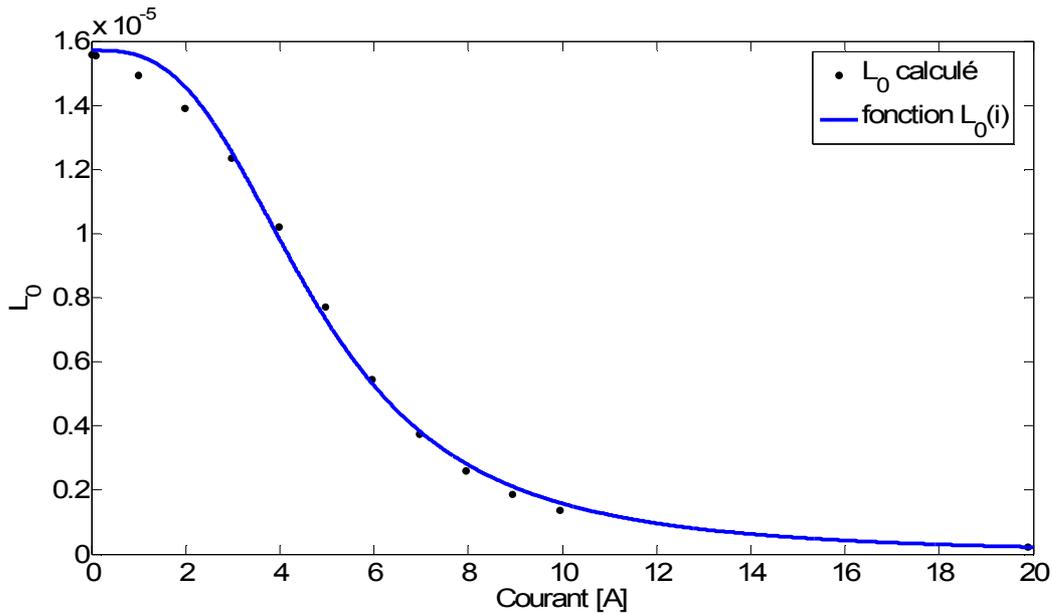


Fig. II.10. Paramètre $L_0(i)$ calculé et approché par la fonction (II.20)

En ce qui concerne l'évolution du paramètre $\omega_0(i)$, on ne trouve aucune relation physique qui pourrait l'approcher. On peut calculer la valeur du ω_0 en se basant sur les équations (II.2) et (II.6), or :

$$\omega_0 = \frac{m}{L_0} \quad \text{avec} \quad m = \frac{4 \cdot l}{\sigma \cdot L \cdot e} \quad (\text{II.21})$$

Malheureusement cette relation n'est vraie que pour le cas linéaire. On essaye alors d'approcher avec une précision satisfaisante l'évolution de $\omega_0(i)$ par une équation simple (II.22) en n'identifiant que deux coefficients (k' et n') :

$$\omega_0(i) = \omega_0' + k' \cdot i^{n'} \quad (\text{II.22})$$

où $\omega_0' = \omega_0$ qui est décrit par la relation (II.6), k' et n' sont identifiés à partir de mesures.

La fig. II.11 montre une approximation de l'évolution du paramètre ω_0 par la relation (II.22) avec les coefficients suivants : $\omega_0' = 0,2564$, $k' = 0,0054$ et $n' = 2,7202$.

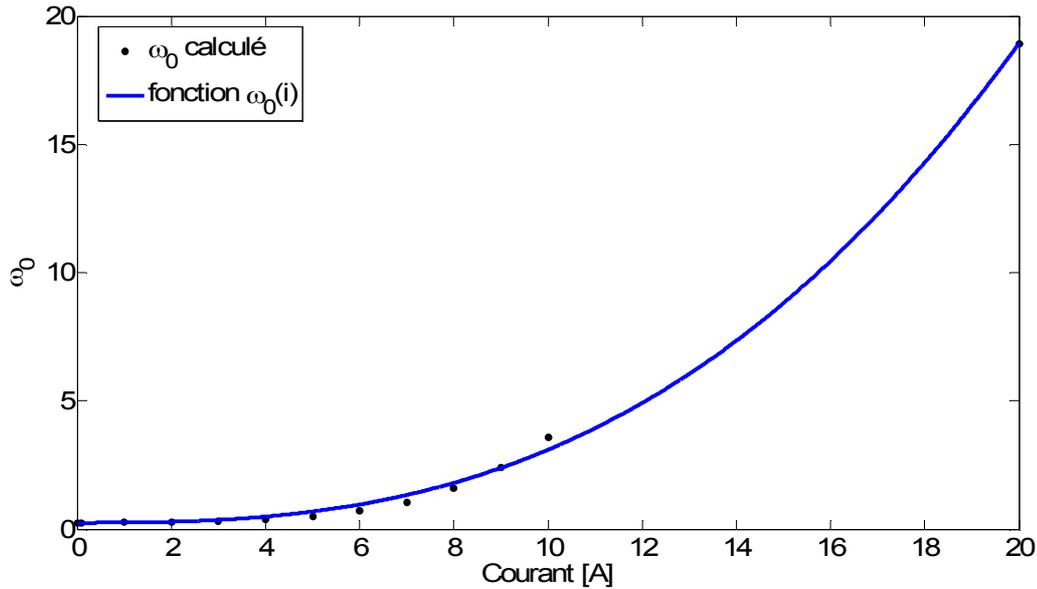


Fig. II.11. Paramètre $\omega_0(i)$ calculé et approché par la fonction (II.22)

Finalement, le modèle non linéaire d'ordre un demi de l'impédance peut s'écrire sous la forme (II.23). Il est caractérisé par quatre paramètres à identifier : k , n et k' , n' .

$$\bar{Z}_{tôle}^{1/2}(\omega, i) = \frac{\frac{L_0'}{1+k \cdot i^n} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + \frac{j\omega}{\omega_0' + k' \cdot i^{n'}}}} \quad (\text{II.23})$$

Rappel : les paramètres L_0' et ω_0' peuvent être calculés ((II.2) et (II.6)) ou identifiés à partir de mesures en régime linéaire ou pour un courant magnétisant nul.

II.5.2. Comparaison des modèles non linéaires avec la simulation par éléments finis

La fig. II.12 présente une comparaison des trois modèles non linéaires de l'impédance avec la simulation par éléments finis. Les modèles décrits dans les paragraphes II.3.1.1 et II.3.1.2 sont appelés respectivement « Z_{May} » et « Z_{Ret} ».

On remarque que le modèle d'ordre un demi associe les avantages des deux autres modèles, c'est-à-dire, pour les basses fréquences il se comporte comme le modèle d'ordre un avec le gain qui augmente de 20 dB par décade (« Z_{Ret} »), alors que pour les hautes fréquences, son gain augmente de 10 dB par décade et la phase tend vers 45° (« Z_{May} »).

Le modèle d'ordre un demi proposé en régime non linéaire semble donc pouvoir modéliser correctement le comportement d'une tôle ferromagnétique soumise à des phénomènes de saturation (en régime petits signaux) et de courant induits.

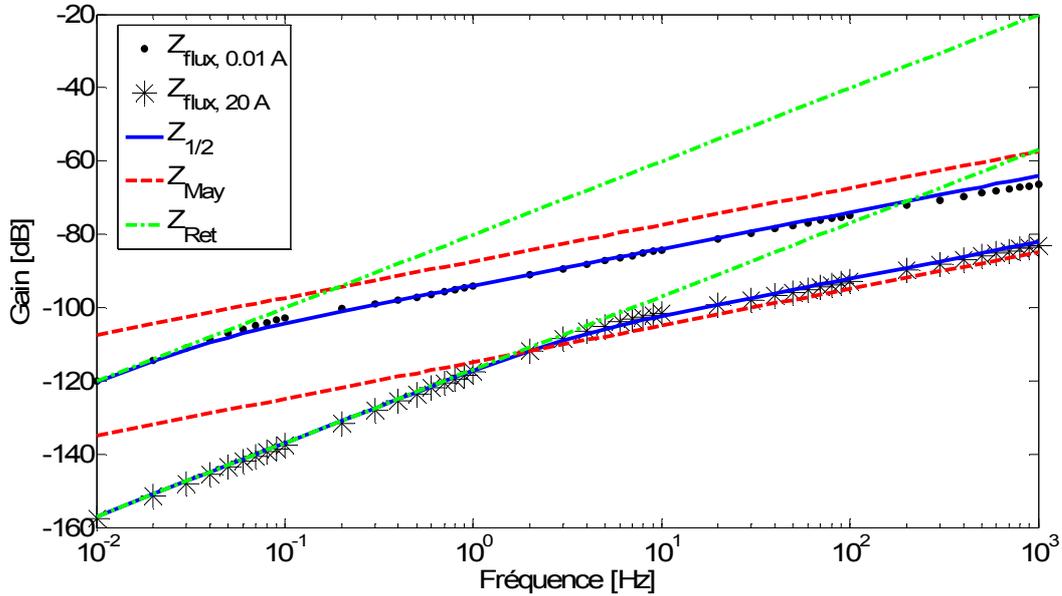


Fig. II.12. Comparaison des modèles non linéaire de l'impédance avec la simulation

L'approche présentée dans ce chapitre a été vérifiée expérimentalement sur une tôle ferromagnétique réelle (fig. II.13).

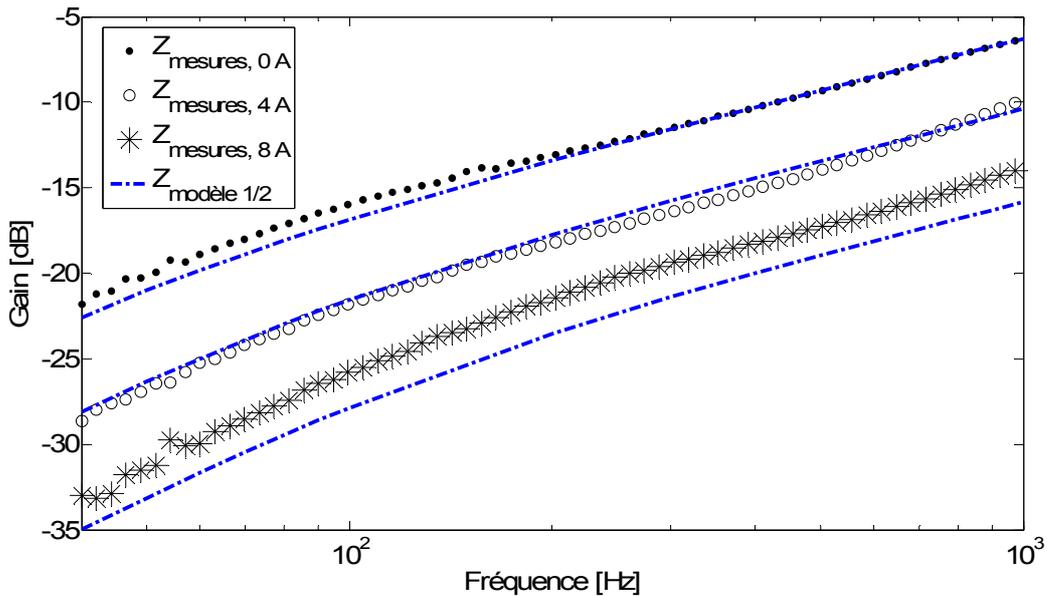


Fig. II.13. Validation du modèle non linéaire d'ordre ½ sur une tôle ferromagnétique réelle

L'écart entre les mesures et le modèle vient principalement du caractère approximatif des courbes $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$ identifiées par rapport aux mesures. Le protocole expérimental complet est reporté en annexe 1.

II.6. Conclusion

Ce chapitre a permis ainsi de construire un nouveau modèle de connaissance d'une tôle ferromagnétique à travers la résolution analytique des équations de Maxwell, et notamment de l'équation de la diffusion. Ce nouveau modèle est basé sur les systèmes d'ordre non entier, dont les paramètres varient avec le courant magnétisant de la tôle.

A partir des résultats de simulations par éléments finis effectuées avec le logiciel *Flux*[®], nous avons également validé la structure du modèle proposé en présence de saturation. Ce nouveau modèle sera ensuite intégré au schéma équivalent d'une machine synchrone pour améliorer sa modélisation fréquentielle sur de grandes plages de fréquences, en présence de saturation. Ceci fera l'objet du chapitre III.

Chapitre III.

Validation du modèle fractionnaire non linéaire sur une machine synchrone réelle

III.1. Introduction

Au cours du chapitre précédent on a montré que le modèle fractionnaire de l'impédance peut être exploité non seulement dans les conditions linéaires mais aussi dans les conditions de forte saturation. Cela pose une question : est-il possible d'implanter ce nouveau modèle pour caractériser des machines électriques travaillant dans des conditions normales de fonctionnement, avec la plupart du temps une saturation des pièces ferromagnétiques (notamment au niveau des isthmes d'encoches [33]) ?

En partant du modèle classique d'une machine synchrone représentée dans un référentiel tournant (modèle dit de Park), l'objectif de ce chapitre est ainsi de construire un modèle de machine synchrone intégrant les impédances d'ordre non entier non linéaires décrites au chapitre II. Ce modèle sera dans un deuxième temps identifié en recourant à des tests expérimentaux basés sur la méthode SSFR (*StandStill Frequency Response*).

III.2. Modélisation d'ordre non entier de machine synchrone en conditions saturées

La modélisation de Park consiste à réduire la complexité géométrique des machines électriques réelles afin de simplifier leur modèle et leur analyse. Le principe repose sur un changement de repère, des axes (a, b, c) représentant les enroulements statoriques de la machine triphasée vers les axes orthogonaux (d, q, o) , liés au rotor tournant de la machine [85]. Cela permet de modéliser des inductances indépendamment de la position du rotor par rapport aux enroulements du stator. De plus, les valeurs de tensions et de courants sont considérées comme continues, n'étant plus fonction de la vitesse de rotation de la machine. Cette modélisation vectorielle permet de faciliter la synthèse et l'implantation de commandes numériques de machines.

Dans le cas d'un système triphasé équilibré où la somme des courants statoriques est égale à zéro ($i_a+i_b+i_c=0$), cette représentation (d, q, o) peut être encore simplifiée en

négligeant la composante homopolaire o . La machine peut alors être modélisée suivant deux axes (d, q). Cette simplification vectorielle est représentée sur la fig. III.1.

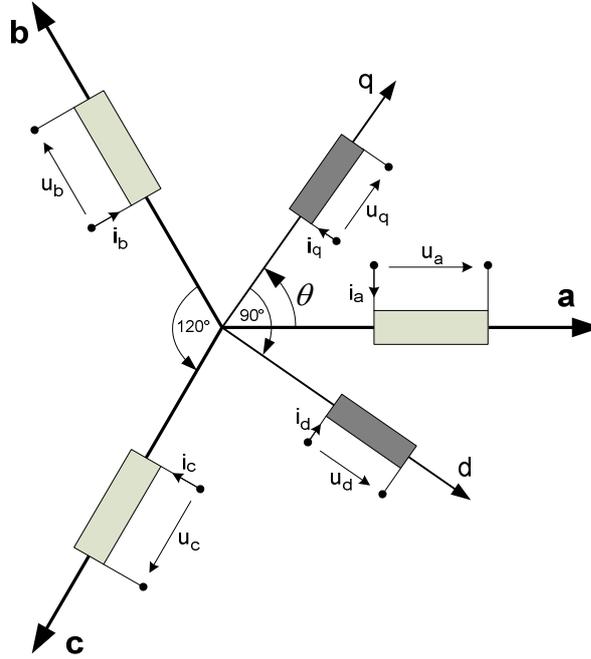


Fig. III.1. Représentation de la transformation de Park

Les relations entre les courants, les tensions et les flux dans les axes (d, q, o) par rapport aux axes (a, b, c) sont données ci-dessous (III.1) [85] :

$$\begin{aligned} \bar{i}_{dqo} &= A(\theta) \cdot \bar{i}_{abc} \\ \bar{u}_{dqo} &= A(\theta) \cdot \bar{u}_{abc} \\ \bar{\varphi}_{dqo} &= A(\theta) \cdot \bar{\varphi}_{abc} \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

où $A(\theta)$ est appelé la matrice de transformation de Park donnée par (III.2).

$$A(\theta) = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Une machine synchrone triphasée avec un rotor bobiné comportant des amortisseurs dans l'axe rotorique, peut être représentée sur la fig. III.2 dans le référentiel de Park. Les

amortisseurs servent à amortir les oscillations des grandeurs électriques (flux magnétiques) pendant les régimes transitoires (démarrage et courts-circuits essentiellement).

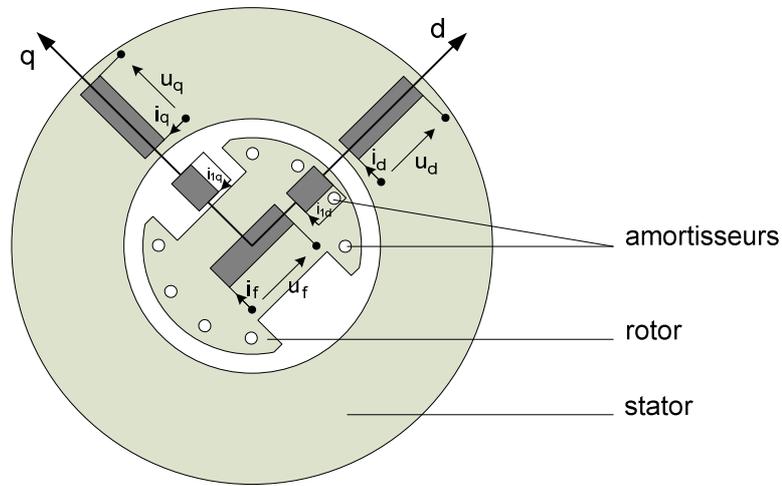


Fig. III.2. Représentation de Park de la machine synchrone

Les équations de tension qui constituent le système d'équations de Park de la machine synchrone sont données ci-dessous [14] :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_d = r_s \cdot i_d + \frac{d\varphi_d}{dt} - \omega \cdot \varphi_q \\ u_q = r_s \cdot i_q + \frac{d\varphi_q}{dt} + \omega \cdot \varphi_d \\ u_0 = r_s \cdot i_o + \frac{d\varphi_o}{dt} \\ u_f = r_f \cdot i_f + \frac{d\varphi_f}{dt} \\ 0 = r_{1d} \cdot i_{1d} + \frac{d\varphi_{1d}}{dt} \\ 0 = r_{1q} \cdot i_{1q} + \frac{d\varphi_{1q}}{dt} \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

A partir de cette représentation et de la modélisation vectorielle des grandeurs électriques, on peut alors construire un schéma équivalent dans chacun des axes d et q de la machine comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

III.2.1. Schéma équivalent classique d'ordre entier

En analysant la fig. III.2, un schéma équivalent d'ordre 2 valable en régime permanent peut être construit à partir de considérations physiques (modélisation des pertes Joule, flux principaux et de fuite, etc.); ce schéma est décrit sur la fig. III.3 [39].

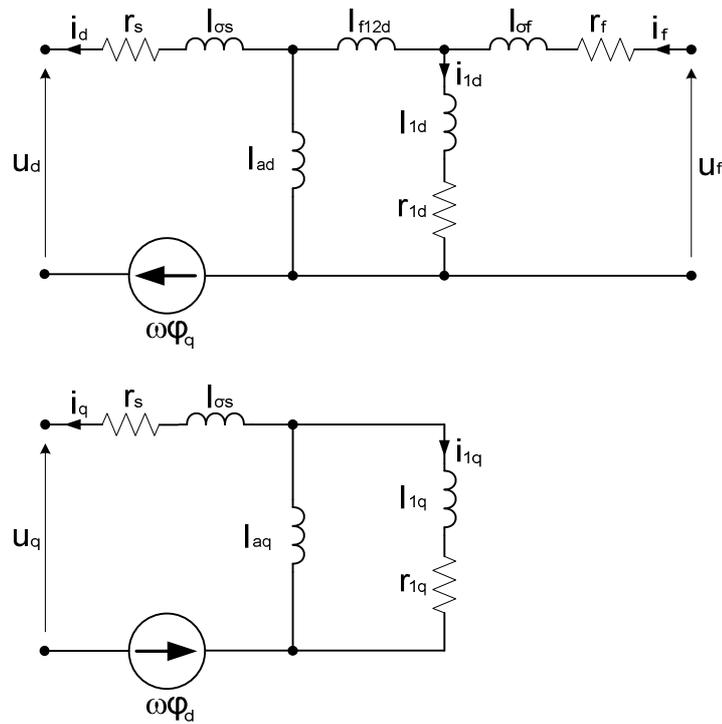


Fig. III.3. Schéma équivalent d'ordre 2 de la machine synchrone (axes d et q)

Les paramètres caractérisant ce schéma équivalent dans l'axe d , sont les suivants :

- la résistance (r_s) et l'inductance de fuite ($l_{\sigma s}$) des enroulements du stator,
- l'inductance magnétisante (l_{ad}) représentant l'énergie stockée dans l'entrefer,
- la force électromotrice ($\omega\phi_q$) induite au stator par la rotation du rotor à la pulsation ω ,
- l'inductance (l_{f12d}) qui décrit le flux mutuel entre les amortisseurs et l'excitation,
- la résistance (r_{1d}) et l'inductance (l_{1d}) des amortisseurs,
- la résistance (r_f) et l'inductance de fuite ($l_{\sigma f}$) des enroulements d'excitation.

Et dans l'axe q :

- la résistance (r_s) et l'inductance de fuite ($l_{\sigma s}$) des enroulements du stator,
- l'inductance magnétisante (l_{aq}) représentant l'énergie stockée dans l'entrefer,

- la force électromotrice ($\omega\varphi_d$) induite au stator par la rotation du rotor à la pulsation ω ,
- la résistance (r_{lq}) et l'inductance (l_{lq}) des amortisseurs.

Ce schéma équivalent ne tient pas compte de l'effet de peau dans les pièces conductrices de la machine. Classiquement, pour améliorer la précision de ce schéma, on rajoute un certain nombre de cellules (R-L) permettant de modéliser ce phénomène de nature distribuée [5, 16, 35]. En théorie, ce nombre de cellules doit être infini s'il l'on souhaite représenter finement ce phénomène [68, 17]. En pratique, on choisit généralement de rajouter plusieurs cellules (R-L) pour avoir un schéma équivalent valable jusqu'à environ 1 kHz [11, 29]. Néanmoins cette démarche augmente considérablement l'ordre du schéma équivalent et peut mener à une perte de pertinence physique des paramètres du modèle lors de l'identification [25].

L'exemple du modèle classiquement utilisé pour modéliser l'effet de peau dans les pièces conductrices (amortisseurs) d'une machine synchrone est décrit en [29, 31] et montré sur la fig. III.4.

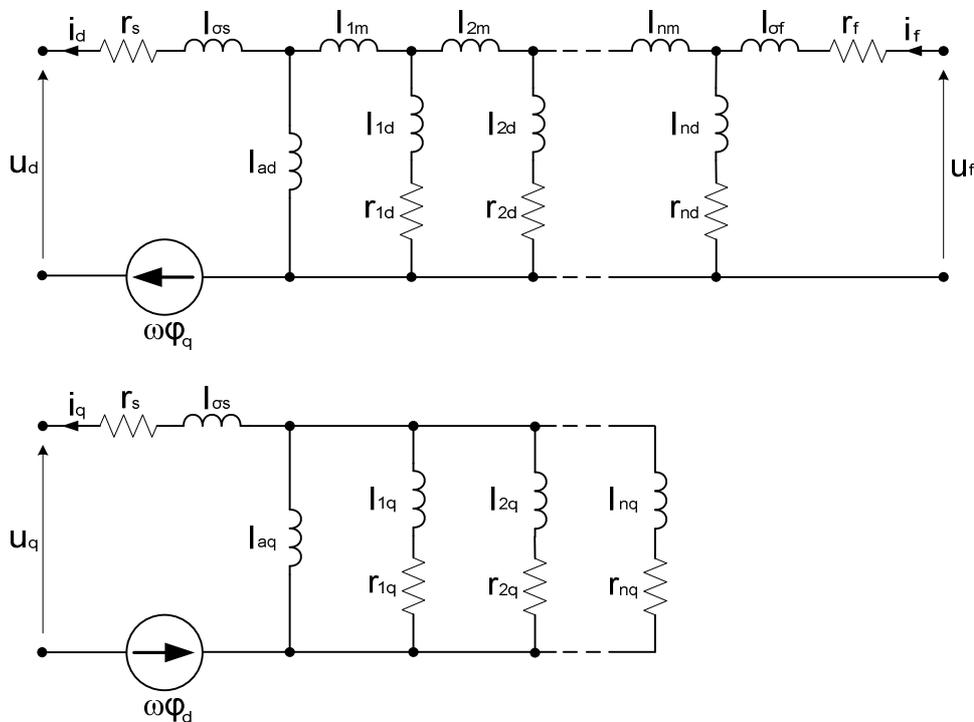


Fig. III.4. Schéma équivalent de la machine synchrone en tenant compte de l'effet de peau

Classiquement, les modèles comportent deux branches R-L dans chaque axe, par rapport au modèle décrit sur la fig. III.3, ce qui conduit à un modèle d'ordre 3 avec onze paramètres dans l'axe d et sept paramètres dans l'axe q .

III.2.2. Schéma équivalent d'ordre un demi

Afin de prendre en compte les effets liés à la fréquence sans augmenter trop l'ordre du modèle, nous allons modifier le schéma équivalent décrit au paragraphe III.2.1 en intégrant les impédances présentées au chapitre II. Des travaux récents [68] montrent qu'une telle modélisation conduit à des modèles fiables et compacts sur une grande plage de fréquence allant jusqu'à 1 kHz.

L'intégration des impédances d'ordre $\frac{1}{2}$ dans le schéma équivalent de machine synchrone s'effectue également par de simples considérations physiques. On ajoute les impédances d'ordre non entier « là » où des courants induits sont supposés se développer. Ce sont tout d'abord les parties massives du rotor qui n'est pas feuilleté afin d'avoir une résistance mécanique élevée [14]. On ajoute donc aux schémas équivalents d'axe d et q une impédance d'ordre $\frac{1}{2}$ de type « inductif » (décrite par les équations (III.4) et (III.5)) en parallèle des inductances l_{ad} et l_{aq} représentant l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer et supposées constantes.

$$\bar{Z}_{1d}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1d} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1d}}}} \quad (\text{III.4})$$

$$\bar{Z}_{1q}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1q} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1q}}}} \quad (\text{III.5})$$

Des courants induits peuvent également se développer dans la cage d'amortisseurs. L'impédance d'ordre $\frac{1}{2}$ de type « résistif » d'une barre d'amortisseur est décrite par les équations (III.6) et (III.7) respectivement pour les axes d et q . Ces impédances remplacent les impédances (R-L) modélisant les amortisseurs de la fig. III.4.

$$\bar{Z}_{2d}^{1/2}(\omega) = R_{2d} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2d}}} \quad (\text{III.6})$$

$$\bar{Z}_{2q}^{1/2}(\omega) = R_{2q} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2q}}} \quad (\text{III.7})$$

On suppose également qu'aux fréquences considérées, les courants induits peuvent être négligés dans le bobinage du stator (modélisés par une résistance r_s et une inductance l_{os}) ainsi que dans les enroulements d'excitation (modélisés par une résistance r_f et une inductance l_{of}). En ce qui concerne le champ mutuel de fuite (l_{f12d} et l_{f12q}) liant les enroulements statoriques et les amortisseurs dans l'axes d et q , lui aussi n'est pas influencé par les courants induits [68].

La fig. III.5 présente finalement le schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone, déduit des considérations physiques présentées dans ce paragraphe.

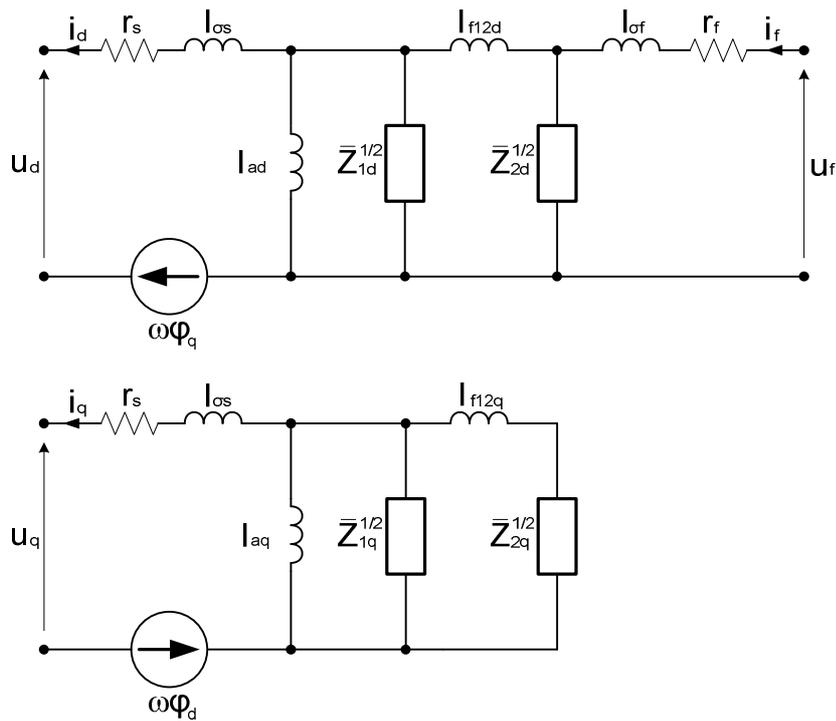


Fig. III.5. Schéma équivalent d'ordre 1/2 d'un alternateur (axes d et q)

REMARQUE : Lors de l'identification, ce modèle devra être simplifié. En effet, le paramètre ω_{2q} ne peut pas être identifié puisque l'on ne dispose pas assez d'informations rotoriques dans l'axe q par rapport à l'axe d , sans l'enroulement d'excitation. L'impédance Z_{2q} est ainsi court-circuitée par l'impédance Z_{1q} pour les hautes fréquences. Nous avons ainsi remplacé la

branche d'amortisseurs décrite par Z_{2q} , par une résistance r_{2q} et une inductance l_{2q} constantes avec la fréquence (fig. III.6).

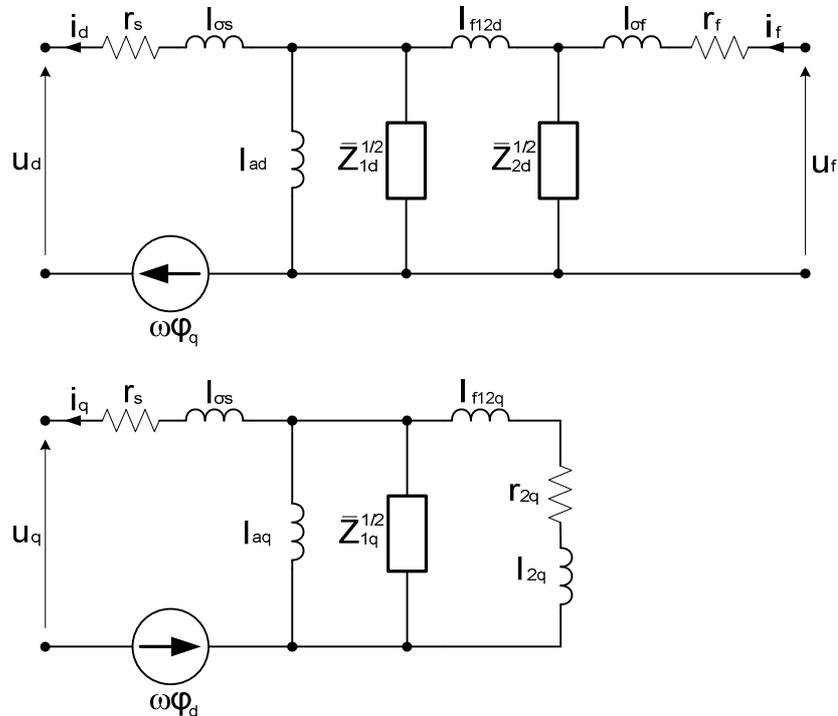


Fig. III.6. Schéma équivalent d'ordre $\frac{1}{2}$ simplifié d'un alternateur (axes d et q)

III.3. Identification des paramètres du schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone

Dans la première étape, on se concentre sur l'identification des paramètres de la machine synchrone en régime linéaire grâce aux tests réalisés suivant la norme SSFR (ang. *StandStill Frequency Response tests* [25]), norme que nous rappelons brièvement par la suite. La machine étudiée est une machine synchrone à deux paires de pôles, appelée par la suite machine « Enco » du nom de son constructeur. Ces données sont regroupées dans le tableau III.1.

Tableau III.1. Plaque signalétique de la machine synchrone « Enco »

Caractéristique	Valeur
Puissance apparente (S_n)	3 kVA
Tension statorique (V_n)	220 V
Courant statorique (I_n)	7,9 A
Tension rotorique (V_f)	20 V
Courant rotorique (I_f)	8 A
Fréquence (f)	50 Hz
Vitesse de rotation (ω_m)	1500 tr/min
Facteur de puissance	0,8

III.3.1. Méthode SSFR

Afin d'obtenir les paramètres du schéma équivalent de la machine synchrone étudiée, on se sert de la méthode SSFR qui permet de déterminer les caractéristiques fréquentielles d'une machine synchrone à l'arrêt [25, 29]. Cette méthode est non destructive pour la machine testée et ne requiert pas d'équipements sophistiqués. En effet, on alimente en monophasé l'une des phases de la machine par une source de tension sinusoïdale de fréquence variable entre quelques mHz et environ 1 kHz et de faible amplitude pour ne pas saturer le circuit magnétique.

Grâce à la réponse fréquentielle de la méthode SSFR on peut obtenir quatre fonctions opérationnelles qui sont :

- L'inductance opérationnelle \bar{L}_d d'axe d vue du stator quand l'enroulement d'excitation est en court-circuit :

$$\bar{L}_d = \frac{\bar{Z}_d - r_s}{j\omega} \quad (\text{III.8})$$

où :

$$\bar{Z}_d(s) = \left. \frac{\bar{u}_d(s)}{i_d(s)} \right|_{u_f=0} \quad (\text{III.9})$$

- L'inductance opérationnelle \bar{L}_q d'axe q vue du stator quand l'enroulement d'excitation est en court-circuit :

$$\bar{L}_q = \frac{\bar{Z}_q - r_s}{j\omega} \quad (\text{III.10})$$

où :

$$\bar{Z}_q(s) = \left. \frac{\bar{u}_q(s)}{\bar{i}_q(s)} \right|_{u_f=0} \quad (\text{III.11})$$

- La fonction de transfert $s\bar{G}$ entre le stator et l'enroulement d'excitation :

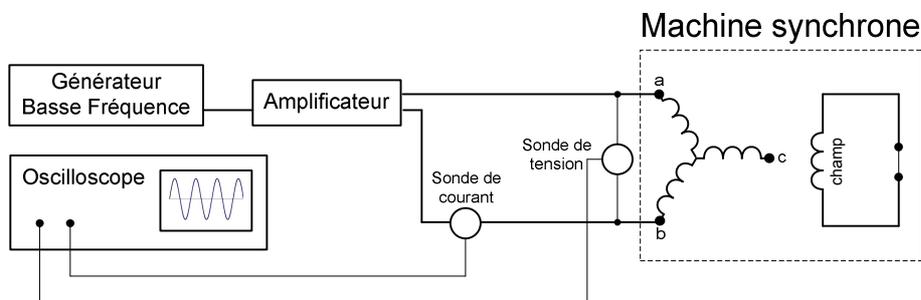
$$s\bar{G}(s) = \left. \frac{\bar{i}_f(s)}{\bar{i}_d(s)} \right|_{u_f=0} \quad (\text{III.12})$$

- L'impédance \bar{Z}_{af0} entre le stator et l'enroulement d'excitation :

$$\bar{Z}_{af0}(s) = \left. \frac{\bar{u}_f(s)}{\bar{i}_d(s)} \right|_{i_f=0} \quad (\text{III.13})$$

Les expressions analytiques complètes des grandeurs opérationnelles du schéma équivalent d'ordre $\frac{1}{2}$ sont présentées dans l'annexe 2.

Afin de mesurer ces différentes grandeurs opérationnelles, un banc de mesures a été développé au *G2Elab*; son synoptique est présenté sur la fig. III.7.



**Fig. III.7. Synoptique du banc de mesures du test SSFR
(mesure de l'impédance opérationnelle Z_d)**

A partir de la configuration présentée ci-dessus, on arrive à mesurer deux impédances opérationnelles : Z_d et Z_q (fig. III.8). A partir d'une mesure des résistances statoriques, on déduit alors les inductances opérationnelles L_d et L_q .

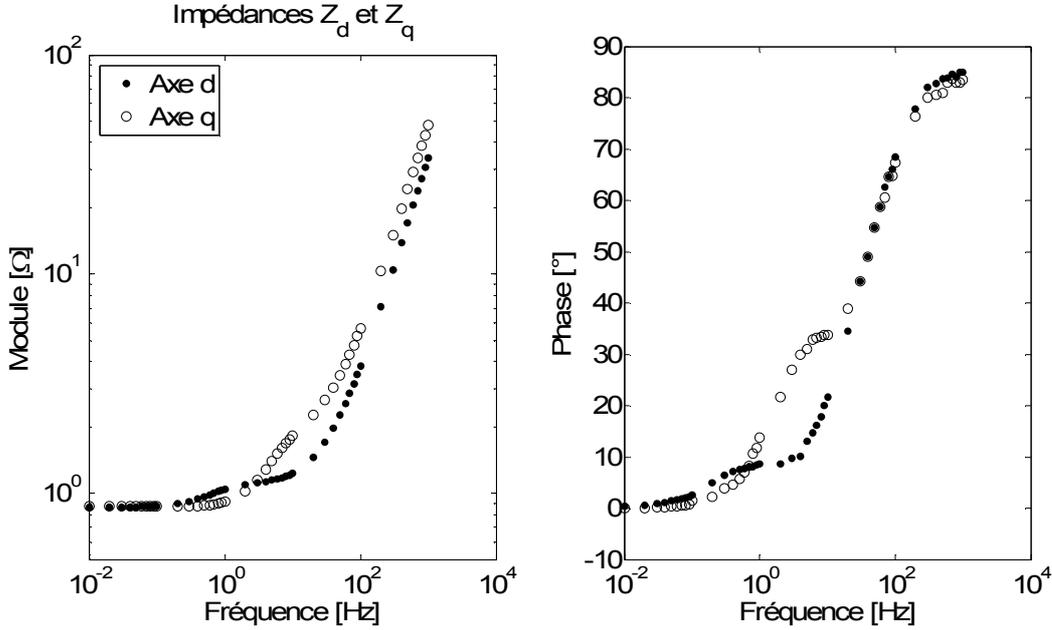


Fig. III.8. Mesures expérimentales des impédances opérationnelles Z_d et Z_q

Les autres grandeurs opérationnelles (sG et Z_{af0}) sont mesurées directement. Tous les résultats de mesures expérimentales sont présentés dans le paragraphe III.3.3.

III.3.2. Identification des paramètres du modèle

La méthode d'identification des paramètres du modèle fractionnaire, adoptée dans cette thèse est basée sur la méthode des moindres carrés. Cette méthode s'applique à n'importe quelle fonction vectorielle de variables x_i , et consiste à déterminer les n paramètres $\bar{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ en minimisant le critère quadratique J correspondant à la somme des carrés des écarts entre la variable y_i et la valeur correspondante de la fonction du modèle à optimiser (III.14). Cette méthode s'avère particulièrement efficace lorsque la fonction à identifier est non linéaire [87].

$$J(\bar{a}) = \sum_{i=1}^m [y_i - F_{\bar{a}}(x_i)]^2 \quad (\text{III.14})$$

La fonction $F_{\bar{a}}(x_i)$ représente une des quatre grandeurs opérationnelles caractérisant la machine avec les différents paramètres \bar{a} à identifier, alors que y_i représente les mesures de ces grandeurs opérationnelles. m est le nombre de points de mesures.

L'identification a été effectuée avec le logiciel *Matlab*[®] qui propose des procédures se basant sur la méthode des moindres carrés et sur l'algorithme d'optimisation de Levenberg – Marquardt (en utilisant la fonction *lsqnonlin*).

Suite à une redondance d'informations dans notre problème d'identification ([61, 62]), disposant de trois grandeurs opérationnelles différentes (L_d, sG, Z_{af0}), les paramètres de l'axe d n'ont été identifiés qu'à partir du module de la fonction de transfert L_d . Les paramètres de l'axe q ont également été déterminés à partir du module de L_q . Des travaux précédents présentés dans [61] ont montré la robustesse de cette approche, en comparant l'identification des paramètres issue des autres grandeurs opérationnelles.

III.3.3. Résultats d'identification

En appliquant la méthodologie présentée aux paragraphes précédents, on procède à l'identification des paramètres du modèle d'ordre non entier de la machine synchrone « Enco ». Ils sont présentés dans le tableau III.2. Toutes les grandeurs caractéristiques de la machine ont été exprimées en per unit [p.u.] (cf. annexe 3).

Il faut noter que les paramètres L_{1d} et L_{1q} n'ont pas à être identifiés globalement car ils peuvent être estimés directement à partir du comportement basses fréquences des inductances opérationnelles. Ainsi, L_{1d} et L_{1q} sont données par les équations ci-dessous.

$$L_{1d} = \frac{(L_{d1} - l_{\sigma s}) \cdot l_{ad}}{l_{ad} - (L_{d1} - l_{\sigma s})} \quad (\text{III.15})$$

$$L_{1q} = \frac{(L_{q1} - l_{\sigma s}) \cdot l_{aq}}{l_{aq} - (L_{q1} - l_{\sigma s})} \quad (\text{III.16})$$

où L_{d1} et L_{q1} sont les valeurs des inductances opérationnelles L_d et L_q enregistrées pour les basses fréquences.

De même, les résistances r_{sd} et r_{sq} sont mesurées en continu.

Tableau III.2. Paramètres du modèle d'ordre non entier de la machine synchrone « Enco »

Paramètre identifié	Valeur obtenue en [p.u.]
r_s	0,0537
$l_{\sigma s}$	0,0880
l_{ad}	1,5399
L_{1d}	6,9862
ω_{1d}	0,0044
l_{f12d}	0,0163
R_{2d}	0,0378
ω_{2d}	0,1285
$l_{\sigma f}$	0,0102
r_f	0,0372
l_{aq}	0,6414
L_{1q}	6,0454
ω_{1q}	0,0091
l_{2q}	0,1105
r_{2q}	0,1172

Afin de valider le modèle identifié, on va comparer les diagrammes de Bode des grandeurs opérationnelles mesurées et identifiées avec le modèle d'ordre non entier. Le résultat de cette comparaison est présenté sur la fig. III.9.

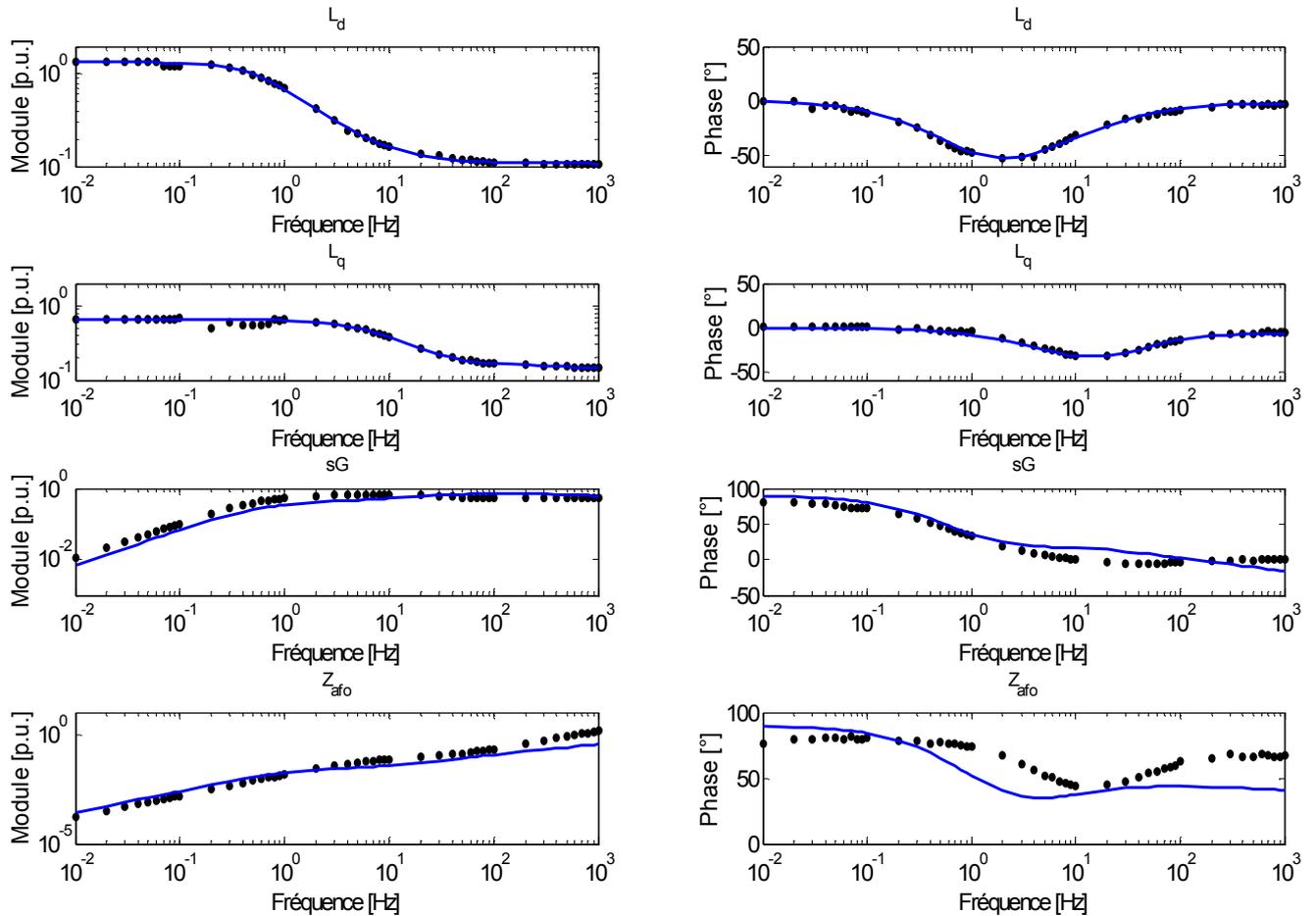


Fig. III.9. Diagrammes de Bode des grandeurs opérationnelles de la machine synchrone « Enco »

Rappelons que l'identification des paramètres a été réalisée seulement à partir du module des grandeurs opérationnelles L_d et L_q . Les erreurs observées sur la phase des fonctions sG et Z_{af0} sont sans doute liées à ce choix. Nous avons présenté ici les meilleurs résultats d'optimisation, mais ils sont l'objet d'un compromis [61, 62].

III.4. Influence de la saturation sur les paramètres de la machine synchrone

On suppose que le phénomène de saturation se manifeste principalement dans l'axe direct d car pour les machines à pôles saillants, l'entrefer dans l'axe transversal q est beaucoup plus grand. La fig. III.10 présente une simulation par éléments finis d'une distribution de flux magnétique dans une machine synchrone à quatre pôles saillants. La machine a été alimentée par le courant DC nominal. L'enroulement a a été connecté en série

avec des enroulements b et c connectés en parallèle. Quand l'axe d du rotor est concordant avec l'axe a de la machine synchrone (cas (a)), le champ magnétique pénètre le rotor entier qui influence le passage du flux magnétique, ce qui est ensuite observable aux bornes de la machine comme une variation des paramètres. Dans le cas (b) (l'axe q du rotor concordant avec l'axe a de la machine), les lignes du flux magnétique se ferment dans un épanouissement, alors on n'observe pas une telle réaction du rotor dans l'axe q . C'est pourquoi dans la suite de l'étude on ne s'occupe que de mesures et d'identification de paramètres dans l'axe d avec la saturation de la machine. Les paramètres de l'axe transversal q du schéma équivalent sont supposés constants.

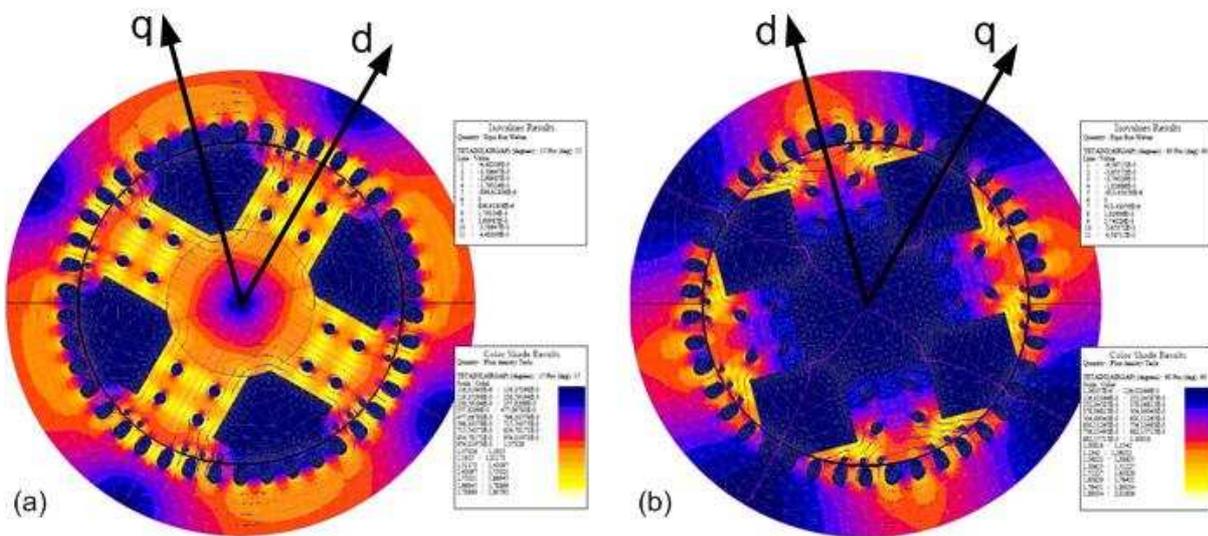


Fig. III.10. Simulation par éléments finis d'une distribution de flux magnétique dans une machine synchrone à quatre pôles saillants.
(a) l'axe d du rotor concordant avec l'axe a de la machine
(b) l'axe q du rotor concordant avec l'axe a de la machine

III.4.1. Schéma équivalent d'ordre non entier en présence de saturation

Nous avons vu au chapitre II qu'une tôle ferromagnétique soumise à un fort courant magnétisant et au développement de courants induits pouvait être modélisée finement par une impédance d'ordre $\frac{1}{2}$ dont les paramètres, L_0 et ω_0 , varient fortement avec le niveau de saturation.

La saturation de la machine synchrone peut potentiellement influencer quatre inductances du modèle d'ordre $\frac{1}{2}$ présenté sur la fig. III.6 : l'inductance magnétisante (l_{ad}), les inductances de fuite (l_{os} et l_{of}) et l'inductance mutuelle (l_{f12d}). Cependant, comme nous le

verrons plus loin, seule l'influence de la saturation sur l'inductance magnétisante aura pu être analysée précisément dans ces travaux.

Le schéma équivalent d'ordre $\frac{1}{2}$ en présence de saturation est décrit dans le paragraphe III.4.3.

III.4.2. Adaptation du banc de mesures SSFR à la saturation

Afin d'étudier l'évolution des paramètres du schéma équivalent d'ordre non entier avec la saturation de la machine, le banc de mesures SSFR décrit précédemment a du être adapté. Ainsi, par rapport au schéma présenté sur la fig. III.7, le bobinage du rotor est connecté à une source de tension DC stabilisée, destinée à modifier le point de fonctionnement magnétique de la machine (fig. III.11). Le protocole expérimental modifié reste cependant facile à appliquer et permet de contrôler précisément le flux magnétisant de la machine. Le banc d'essai est présenté sur la fig. III.12.

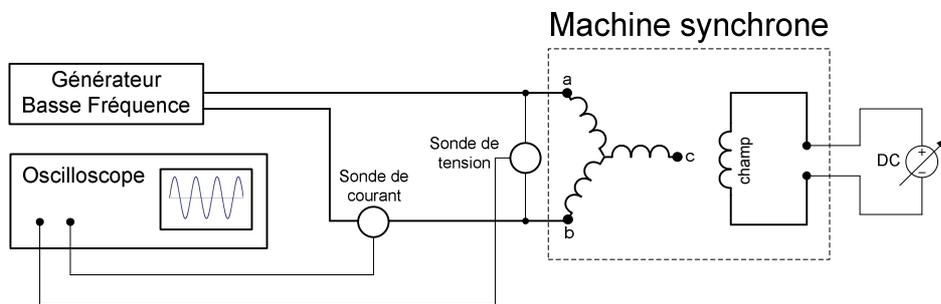


Fig. III.11. Synoptique du banc de mesures du test SSFR modifié

Le signal du générateur basse fréquence reste de faible amplitude pour respecter la norme [25], c'est-à-dire pour assurer 0,5% du courant nominal. Le modèle obtenu sera donc valable pour de petites variations autour d'un point de fonctionnement magnétique quelconque (modèle saturé petits signaux).



Fig. III.12. Banc de mesures du test SSFR modifié de la machine synchrone « Enco »

Néanmoins, ce protocole présente quelques inconvénients. Tout d'abord, il ne permet pas d'obtenir d'autres grandeurs opérationnelles que L_d ou L_q , définies par les équations (III.8) et (III.10), puisqu'elles ne requièrent que des mesures de tension et courant statoriques. Les autres grandeurs (sG et Z_{af0}) qui pourraient contribuer à améliorer la précision de l'identification, nécessitent de mesurer les courants et/ou tension rotoriques ((III.12) et (III.13)), ce qui est impossible avec la source de tension DC connectée.

Par ailleurs, l'injection d'un courant magnétisant élevé lorsque le rotor de la machine est bloqué peut entraîner un échauffement de la machine, qui engendre une variation des résistances [1]. Sans avoir pu évaluer précisément cette dépendance en température en instrumentant la machine à l'aide de capteurs adéquats, nous tiendrons compte de cette variation paramétrique dans l'identification des autres paramètres.

III.4.2.1. Influence de la source de tension DC stabilisée

Pour garder les conditions du test SSFR, l'enroulement d'excitation (pour la mesure de l'impédance Z_d) doit être court-circuité. La source de tension DC doit ainsi présenter une impédance faible par rapport à la résistance de l'enroulement d'excitation, sur toute la plage de fréquences considérée. Pour juger de l'influence de la source de tension DC sur la justesse de mesures dans les conditions de saturation, le module et la phase de l'impédance

opérationnelle Z_d ont été mesurés dans trois conditions différentes suivant que l'enroulement d'excitation soit ouvert, court-circuité par un fil ou, enfin, court-circuité par la source de tension DC fournissant un courant de 1 A. Sur la fig. III.13 on peut constater que la source de tension DC stabilisée présente une résistance interne suffisamment basse pour provoquer un court-circuit de l'enroulement de l'inducteur, ce qui permet ensuite de procéder au test SSFR de manière classique.

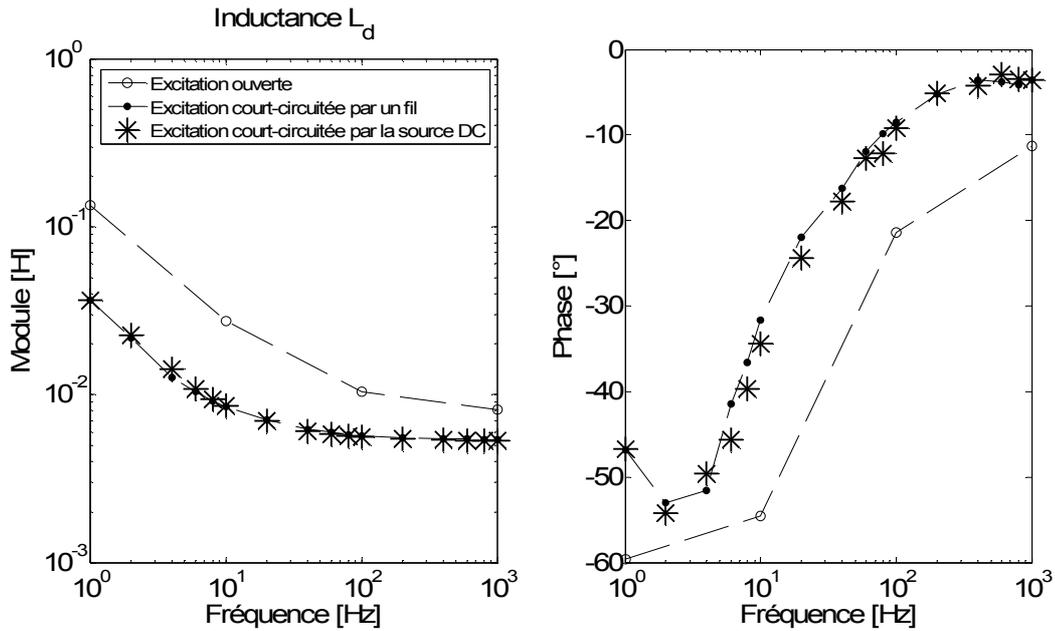


Fig. III.13. Influence de l'excitation sur l'impédance opérationnelle Z_d

III.4.2.2. Résultats expérimentaux

Le courant magnétisant injecté dans l'inducteur de la machine « Enco » varie entre 0 et 9 A, par pas de 1 A. L'impédance opérationnelle Z_d , mesurée entre 0,1 Hz et 1 kHz, par pas de 0,2 Hz, a été enregistrée pour chaque niveau de saturation. L'inductance opérationnelle L_d résultante est présentée sur la fig. III.14.

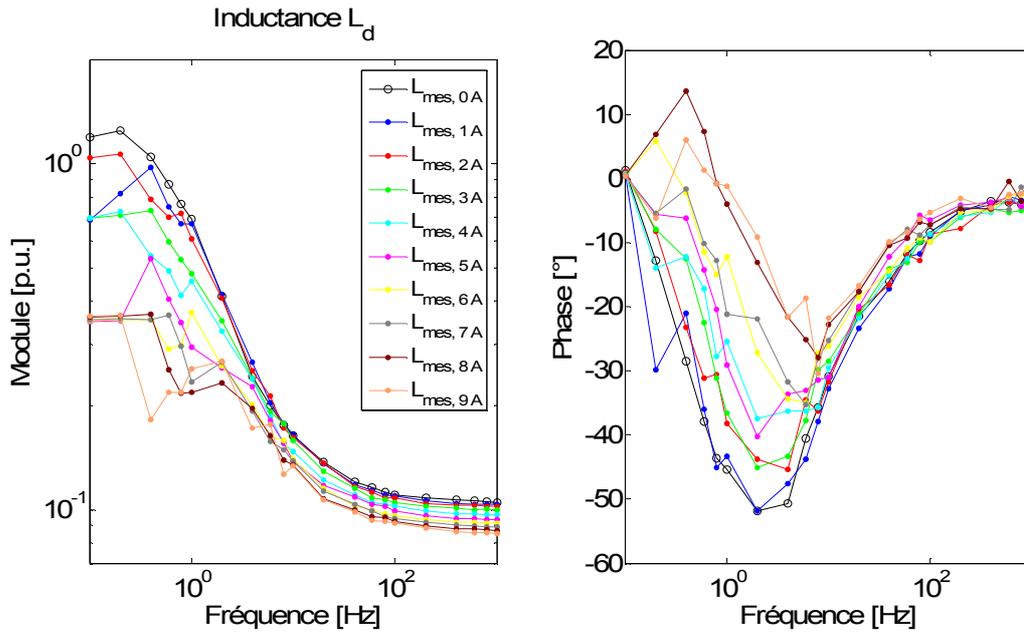


Fig. III.14. Inductance de la machine « Enco » pour différents niveaux de saturation

Suite à l'échauffement de la machine inhérent à l'injection d'un courant continu dans une machine non ventilée, la résistance du stator varie entre $0,875 \Omega$ à $0,9322 \Omega$ (fig. III.15). Pour éliminer son influence sur la valeur de l'inductance opérationnelle L_d (III.8), la résistance r_s a été corrigée pour chaque niveau de courant magnétisant.

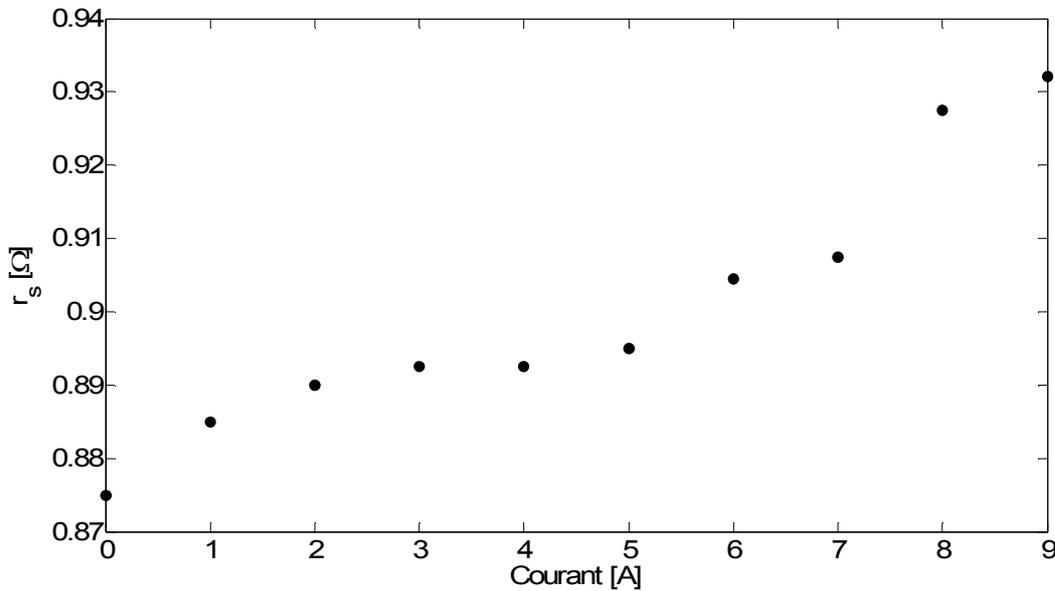


Fig. III.15. Variation de la résistance du stator avec le courant magnétisant

III.4.3. Identification des paramètres de la machine synchrone saturée

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la saturation peut influencer les quatre inductances apparaissant dans le modèle d'axe d présenté sur la fig. III.6 : l'inductance principale, les inductances de fuite et les mutuelles. Malheureusement, comme nous ne disposons que d'une seule impédance opérationnelle, nous n'avons pas pu différencier finement l'influence de la saturation sur telle ou telle inductance.

La figure ci-dessous présente l'erreur en pourcent entre le module de la grandeur opérationnelle L_d mesurée et modélisée, pour les fréquences de 100 Hz à 1 kHz, en fonction de la variation en pourcent des paramètres choisis ($l_{\sigma s}$, l_{f12d} et $l_{\sigma f}$). D'après cette figure, il apparaît que l'inductance $l_{\sigma s}$ joue un rôle prédominant dans la modélisation du comportement de la machine, notamment pour les hautes fréquences. Nous supposons ainsi que seuls trois paramètres varient avec le courant de magnétisation : L_{1d} pour la basse fréquence, ω_{1d} pour la fréquence intermédiaire et finalement $l_{\sigma s}$ pour la haute fréquence. Tous les autres paramètres seront gardés constants avec le courant.

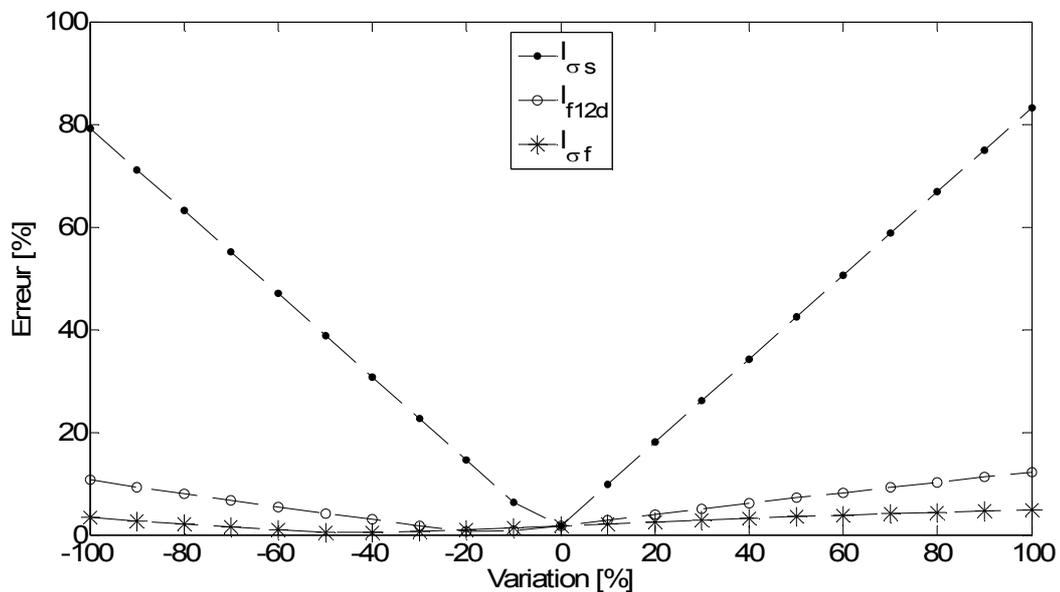


Fig. III.16. Sensibilité du modèle aux variations des inductances

Pour identifier les trois paramètres (L_{1d} , ω_{1d} , $l_{\sigma s}$) avec la saturation, il faut revenir aux paramètres initiaux identifiés en régime linéaire, sans courant magnétisant rotorique (voir tableau III.2). Ensuite, à partir des basses fréquences des mesures expérimentales (fig. III.14),

on réidentifie le paramètre L_{1d} pour chaque niveau de courant magnétisant, en gardant les autres paramètres constants. La même approche est adoptée pour la réidentification du paramètre $l_{\sigma s}$ à partir du comportement haute fréquence cette fois-ci. Finalement, en prenant en compte les évolutions des deux inductances trouvées (L_{1d} et $l_{\sigma s}$), on réidentifie la valeur de la pulsation de coupure ω_{1d} à partir des fréquences intermédiaires.

Les valeurs identifiées de chaque paramètre sont ensuite affinées pour tenir compte de l'évolution des autres. Elles sont résumées dans le tableau III.3.

Tableau III.3. Paramètres du modèle fractionnaire de la machine synchrone « Enco » saturée

	0 A	1 A	2 A	3 A	4 A	5 A	6 A	7 A	8 A	9 A
r_s	0,0537	figé								
$l_{\sigma s}$	0,0880	0,0858	0,0846	0,0854	0,0831	0,0817	0,0808	0,0773	0,0741	0,0715
l_{ad}	1,5399	figé								
L_{1d}	6,9862	5,1200	3,4932	1,6500	1,2713	0,5980	0,3697	0,3146	0,2752	0,2349
ω_{1d}	0,0044	0,0039	0,0059	0,0060	0,0077	0,0123	0,0263	0,0478	0,0794	0,1619
l_{f12d}	0,0163	figé								
R_{2d}	0,0378	figé								
ω_{2d}	0,1285	figé								
$l_{\sigma f}$	0,0102	figé								
r_f	0,0372	figé								

L'évolution des paramètres L_{1d} , ω_{1d} et $l_{\sigma s}$ en fonction du courant de magnétisation est représentée sur la fig. III.17. Les lignes bleues correspondent à l'extrapolation des points expérimentaux par les fonctions (II.20) et (II.22).

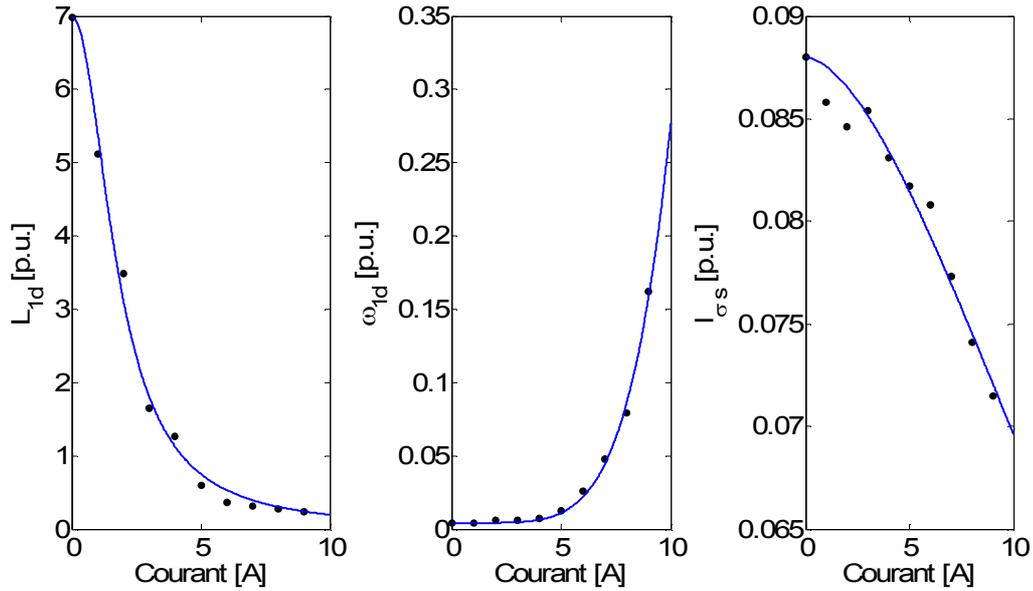


Fig. III.17. Evolutions des paramètres L_{1d} , ω_{1d} et I_{cs} avec la saturation

La fig. III.18 présente une comparaison finale du modèle non linéaire d'ordre non entier de la machine synchrone avec les mesures expérimentales. On constate que le modèle reste valable pour tous les niveaux de saturation dans la plage de fréquences considérée, même si pour les niveaux de saturation élevés, il existe quelques erreurs sur la phase aux basses fréquences. Ces écarts sont vraisemblablement liés au manque de justesse des mesures expérimentales ainsi qu'à la méthode d'identification qui ne prend en compte que les modules des grandeurs opérationnelles.

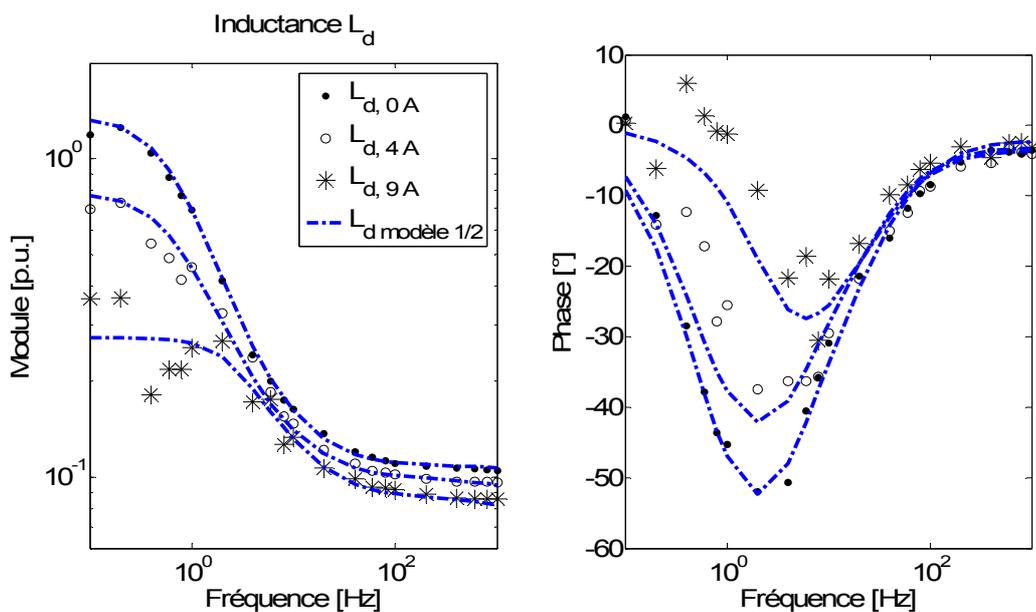


Fig. III.18. Comparaison du modèle non linéaire fractionnaire avec les mesures SSFR de la machine synchrone « Enco » saturée

III.5. Conclusion

Au cours de ce chapitre, les impédances non linéaires d'ordre un demi développées dans le chapitre II ont été insérées directement dans le schéma équivalent de la machine synchrone pour modéliser le développement de courants induits dans certaines pièces conductrices de la machine, parfois soumises également à un régime de saturation magnétique.

Les paramètres du schéma équivalent construit ainsi ont ensuite été identifiés à partir de tests SSFR effectués sur une machine synchrone en régime saturé. La saturation est prise en compte à travers la variation des paramètres du schéma équivalent de la machine tels que l'inductance des parties massives du rotor (L_{ld}), la pulsation de coupure (ω_{ld}) et l'inductance de fuite du stator (l_{os}). Ce phénomène de saturation ne peut pas être négligé car il influence considérablement l'inductance opérationnelle L_d , notamment aux basses fréquences de fonctionnement, et donc le comportement de la machine.

Les impédances d'ordre un demi intégrées dans le schéma équivalent permettent également de diminuer l'ordre de ce schéma, ce qui est très avantageux pour réduire les temps de simulation et de synthèse de la commande comme nous le verrons au chapitre V.

Chapitre IV.

Réponse temporelle du modèle d'ordre un demi d'un alternateur

IV.1. Introduction

La modélisation de la machine synchrone présentée au chapitre III est principalement basée sur une approche fréquentielle puisque, comme nous l'avons vu, la propriété de compacité s'exprime principalement dans ce domaine. Il nous a cependant semblé indispensable avant de conclure quant aux résultats de cette thèse, d'aborder l'approche temporelle (étape obligatoire pour l'étude en simulation du comportement de machines intégrées au réseau électrique).

Ce chapitre présente ainsi une méthodologie permettant d'obtenir la réponse temporelle de l'alternateur modélisé par un schéma équivalent d'ordre non entier. Nous avons ainsi construit une méthodologie complète pour calculer les modes associés au système d'état d'ordre non entier décrivant notre machine intégrée au réseau.

IV.2. Equations électriques décrivant le comportement d'un alternateur raccordé à un réseau (R-L)

On rappelle ci-dessous (fig. IV.1) le schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone, présenté dans le paragraphe III.2.2. On suppose que la machine est connectée à une charge modélisée par une résistance équivalente R_{ch} et une inductance équivalente L_{ch} .

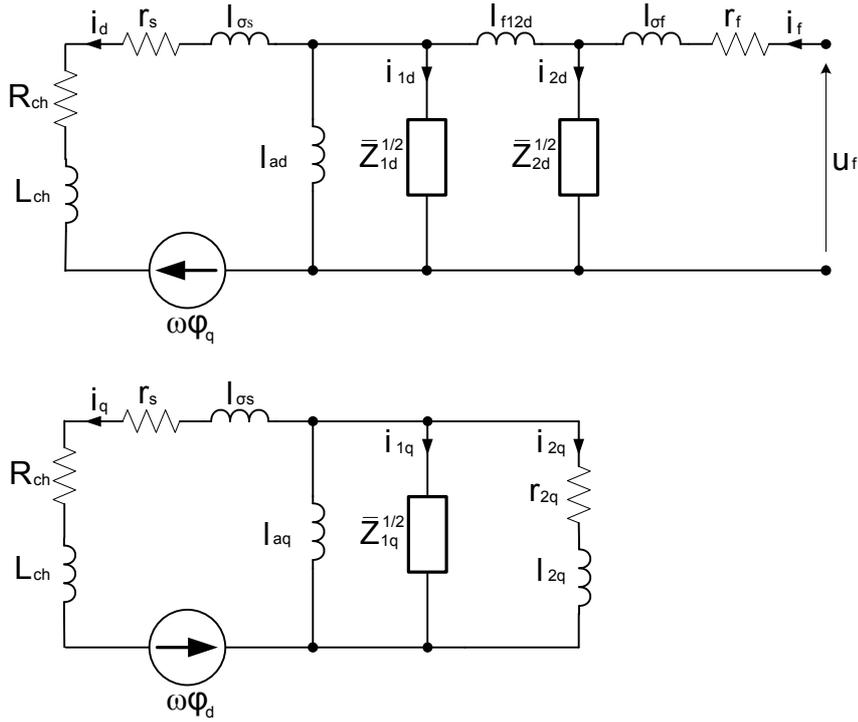


Fig. IV.1. Schéma équivalent d'ordre $\frac{1}{2}$ d'un alternateur connecté à une charge RL (axes d et q)

Les modèles d'ordre non entier utilisés pour modéliser la machine sont de nature *implicite* puisque les pièces modélisées sont de dimension finie [59]. La mise en équations afin d'obtenir la réponse temporelle du système s'avère relativement compliquée et longue à mettre en œuvre. En effet, le système d'état généralisé correspondant comprend un nombre de variables d'état extrêmement important par rapport à un modèle d'ordre entier classique, du fait que la propriété de compacité des systèmes d'ordre non entier disparaît lorsque l'on passe dans le domaine temporel [68].

Pour réduire le temps de calcul, nous allons donc approcher les systèmes d'ordre non entier implicites apparaissant dans le modèle (fig. IV.1) par les systèmes explicites donnés ci-dessous [19].

$$\bar{Z}_{1d}^{1/2}(s) = \frac{L_{1d} \cdot s}{1 + \sqrt{\frac{s}{\omega_{1d}}}} \quad (\text{IV.1})$$

$$\bar{Z}_{2d}^{1/2}(s) = R_{2d} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{s}{\omega_{2d}}} \right) \quad (\text{IV.2})$$

$$\bar{Z}_{1q}^{1/2}(s) = \frac{L_{1q} \cdot s}{1 + \sqrt{\frac{s}{\omega_{1q}}}} \quad (\text{IV.3})$$

où s est l'opérateur de Laplace égale à $j\omega$.

Afin de valider cette hypothèse, nous avons comparé dans le diagramme de Bode ci-dessous les grandeurs opérationnelles mesurées (points noirs), avec leur modèle identifié, constitué soit avec des systèmes implicite (ligne bleue) soit explicite (ligne rouge).

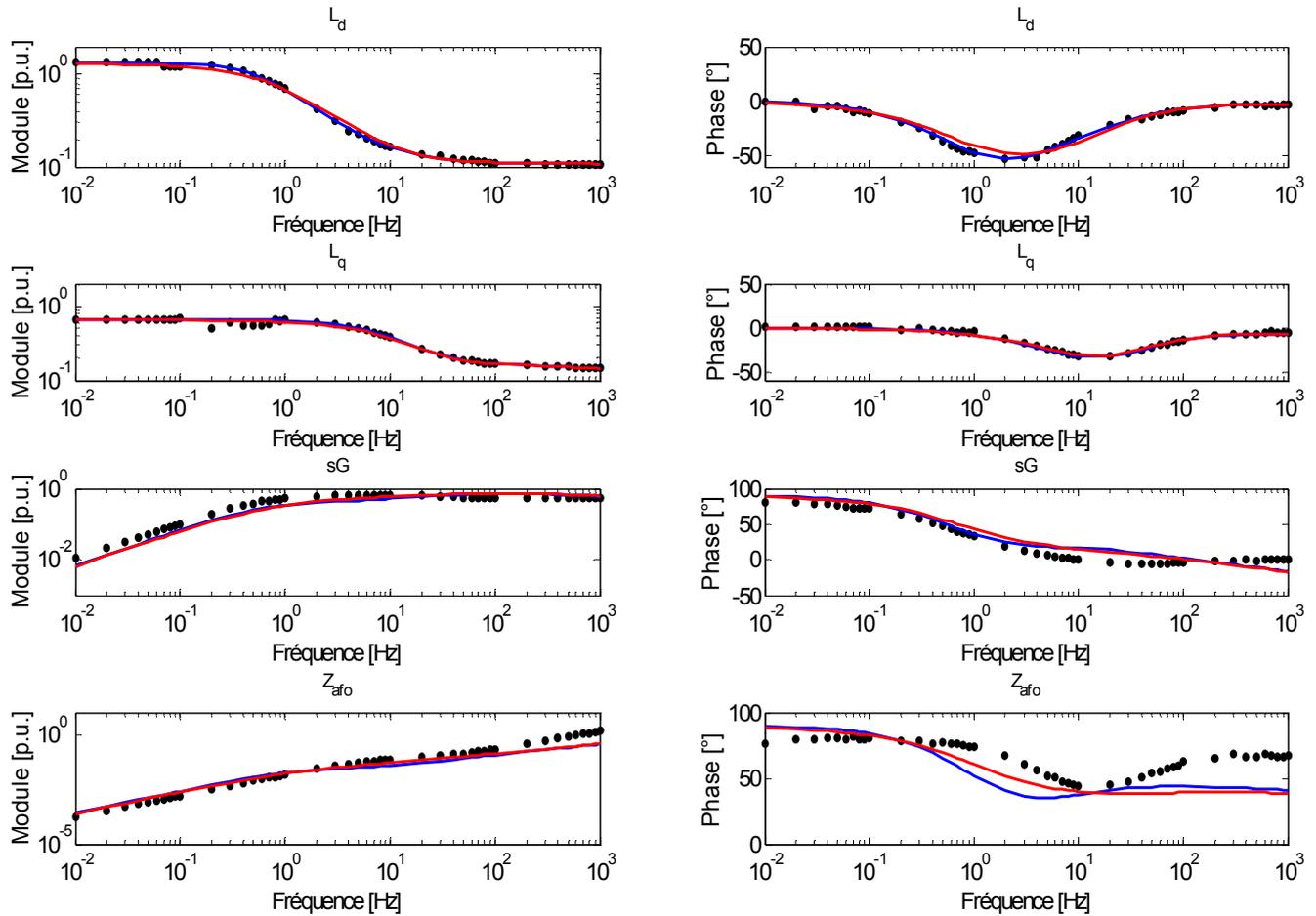


Fig. IV.2. Diagrammes de Bode des grandeurs opérationnelles de la machine synchrone « Enco » (mesures – points noirs, modèle implicite – ligne bleue, modèle explicite approché– ligne rouge)

Cette approximation étant tout à fait acceptable, nous assimilerons donc par la suite les systèmes de nature *implicite* par leurs équivalents *explicites* pour l'étude dynamique de la machine synchrone dans le domaine temporel.

En considérant que la vitesse de rotation (donc la pulsation ω) reste constante, le système d'équations régissant les grandeurs électriques petits signaux du schéma équivalent

(fig. IV.1) dans le domaine de Laplace, est donné par le système d'équations (IV.4) ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ch} \cdot i_d + s \cdot L_{ch} \cdot i_d = -r_s \cdot i_d - s \cdot l_{\sigma s} \cdot i_d - s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) - \omega \varphi_q \\ u_f = i_f \cdot r_f + s \cdot l_{\sigma f} \cdot i_f + s \cdot l_{f12d} \cdot (i_f - i_{2d}) - s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\ 0 = Z_{1d}^{1/2} \cdot i_{1d} + s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\ 0 = Z_{2d}^{1/2} \cdot i_{2d} + s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) - s \cdot l_{f12d} \cdot (i_f - i_{2d}) \\ R_{ch} \cdot i_q + s \cdot L_{ch} \cdot i_q = -r_s \cdot i_q - s \cdot l_{\sigma s} \cdot i_q - s \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) + \omega \varphi_d \\ 0 = s \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) + r_{2q} \cdot i_{2q} + s \cdot l_{2q} \cdot i_{2q} \\ 0 = Z_{1q}^{1/2} \cdot i_{1q} + s \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

où :

$$\varphi_d = l_{\sigma s} \cdot i_d + l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) \quad (IV.5)$$

$$\varphi_q = l_{\sigma s} \cdot i_q + l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \quad (IV.6)$$

On remplaçant finalement les termes : $Z_{1d}^{1/2}$, $Z_{2d}^{1/2}$, $Z_{1q}^{1/2}$, φ_d , φ_q dans le système d'équations (IV.4) par leurs expressions données en (IV.1), (IV.2), (IV.3), (IV.5) et (IV.6) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ch} \cdot i_d + s \cdot L_{ch} \cdot i_d = -r_s \cdot i_d - s \cdot l_{\sigma s} \cdot i_d - s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) - \omega \cdot l_{\sigma s} \cdot i_q - \omega \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \\ u_f = i_f \cdot r_f + s \cdot l_{\sigma f} \cdot i_f + s \cdot l_{f12d} \cdot (i_f - i_{2d}) - s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\ 0 = s \cdot L_{1d} \cdot i_{1d} + s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) + s^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega_{1d}}} \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\ 0 = R_{2d} \cdot i_{2d} + s^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega_{2d}}} \cdot R_{2d} \cdot i_{2d} + s \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) - s \cdot l_{f12d} \cdot (i_f - i_{2d}) \\ R_{ch} \cdot i_q + s \cdot L_{ch} \cdot i_q = -r_s \cdot i_q - s \cdot l_{\sigma s} \cdot i_q - s \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) + \omega \cdot l_{\sigma s} \cdot i_d + \omega \cdot l_{ad} \cdot (i_d - i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\ 0 = s \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) + r_{2q} \cdot i_{2q} + s \cdot l_{2q} \cdot i_{2q} \\ 0 = s \cdot L_{1q} \cdot i_{1q} + s \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) + s^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega_{1q}}} \cdot l_{aq} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \end{array} \right. \quad (IV.7)$$

IV.3. Mise en forme du système d'état généralisé

Les variables d'état du système ont été prises égales aux courants :

$$\begin{aligned} & i_d, i_f, i_{1d}, i_{2d} \\ & i_q, i_{1q}, i_{2q} \end{aligned}$$

Ensuite, pour construire le système d'état généralisé, on utilise le changement de variables donné ci-dessous :

$$\begin{aligned} x_1 &= i_d \\ x_2 &= x_1^{(1/2)} = i_d^{(1/2)} & x_{10} &= i_q \\ x_3 &= i_f & x_{11} &= x_{10}^{(1/2)} = i_q^{(1/2)} \\ x_4 &= x_3^{(1/2)} = i_f^{(1/2)} & x_{12} &= i_{1q} \\ x_5 &= i_{1d} & x_{13} &= x_{12}^{(1/2)} = i_{1q}^{(1/2)} \\ x_6 &= x_5^{(1/2)} = i_{1d}^{(1/2)} & x_{14} &= i_{2q} \\ x_7 &= i_{2d} & x_{15} &= x_{14}^{(1/2)} = i_{2q}^{(1/2)} \\ x_8 &= x_7^{(1/2)} = i_{2d}^{(1/2)} & x_{16} &= x_{15}^{(1/2)} = i_{2q}^{(1)} \\ x_9 &= x_8^{(1/2)} = i_{2d}^{(1)} \end{aligned} \tag{IV.8}$$

Le système IV.7 s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= x_2 - x_1^{(1/2)} \\ 0 &= (l_{\sigma_s} + l_{ad} + L_{ch}) \cdot x_2^{(1/2)} + (R_{ch} + r_s) \cdot x_1 - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_9 + (\omega \cdot l_{\sigma_s} + \omega \cdot l_{aq}) \cdot x_{10} + \omega \cdot l_{aq} \cdot x_{12} + \omega \cdot l_{aq} \cdot x_{14} \\ 0 &= x_4 - x_3^{(1/2)} \\ 0 &= l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{\sigma_f} + l_{f12d} + l_{ad}) \cdot x_4^{(1/2)} - r_f \cdot x_3 + l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} + (l_{f12d} + l_{ad}) \cdot x_9 + u_f \\ 0 &= x_6 - x_5^{(1/2)} \\ 0 &= l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{ad} + l_{f12d}) \cdot x_4^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} + (l_{ad} + l_{f12d}) \cdot x_9 + \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}} \cdot x_8 + R_{2d} \cdot x_7 \\ 0 &= x_8 - x_7^{(1/2)} \\ 0 &= x_9 - x_8^{(1/2)} \\ 0 &= \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot x_2^{(1)} + l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot x_4^{(1)} - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} + \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot x_6^{(1)} + (L_{1d} + l_{ad}) \cdot x_6^{(1/2)} + \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot x_9^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_9 \\ 0 &= x_{11} - x_{10}^{(1/2)} \\ 0 &= (l_{\sigma_s} + l_{aq} + L_{ch}) \cdot x_{11}^{(1/2)} + (R_{ch} + r_s) \cdot x_{10} + l_{aq} \cdot x_{13}^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{16} - (\omega \cdot l_{\sigma_s} + \omega \cdot l_{ad}) \cdot x_1 + \omega \cdot l_{ad} \cdot x_3 - \omega \cdot l_{ad} \cdot x_5 - \omega \cdot l_{ad} \cdot x_7 \\ 0 &= x_{13} - x_{12}^{(1/2)} \\ 0 &= l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{13}^{(1/2)} + (l_{aq} + l_{2q}) \cdot x_{16} + r_{2q} \cdot x_{14} \\ 0 &= x_{15} - x_{14}^{(1/2)} \\ 0 &= x_{16} - x_{15}^{(1/2)} \\ 0 &= \frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot x_{11}^{(1)} + l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} + \frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot x_{13}^{(1)} + (L_{1q} + l_{aq}) \cdot x_{13}^{(1/2)} + \frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot x_{16}^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{16} \end{aligned} \right. \tag{IV.9}$$

Après plusieurs manipulations des équations linéaires (IV.9) (le détail des calculs est donné en annexe 4), on exprime finalement toutes les dérivées d'ordre $\frac{1}{2}$ de chaque variable d'état choisie, en fonction de toutes les autres (IV.10).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1^{(1/2)} = x_2 \\
 x_2^{(1/2)} = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_3 + k_3 \cdot x_7 + k_4 \cdot x_8 + k_5 \cdot x_9 + k_6 \cdot x_{10} + k_7 \cdot x_{12} + k_7 \cdot x_{14} + k_8 \cdot u_f \\
 x_3^{(1/2)} = x_4 \\
 x_4^{(1/2)} = k_9 \cdot x_1 + k_{10} \cdot x_3 + k_{11} \cdot x_7 + k_{12} \cdot x_8 + k_{13} \cdot x_9 + k_{14} \cdot x_{10} + k_{15} \cdot x_{12} + k_{15} \cdot x_{14} + k_{16} \cdot u_f \\
 x_5^{(1/2)} = x_6 \\
 x_6^{(1/2)} = k_{17} \cdot x_1 + k_{18} \cdot x_3 + k_{19} \cdot x_7 + k_{20} \cdot x_8 + k_{21} \cdot x_9 + k_{22} \cdot x_{10} + k_{23} \cdot x_{12} + k_{23} \cdot x_{14} + k_{24} \cdot u_f \\
 x_7^{(1/2)} = x_8 \\
 x_8^{(1/2)} = x_9 \\
 x_9^{(1/2)} = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + m_4 \cdot x_4 + m_5 \cdot x_7 + m_6 \cdot x_8 + m_7 \cdot x_9 + m_8 \cdot x_{10} + m_9 \cdot x_{11} + m_{10} \cdot x_{12} + m_{11} \cdot x_{13} + m_{10} \cdot x_{14} + m_{11} \cdot x_{15} + m_{12} \cdot u_f^{(1/2)} + m_{13} \cdot u_f \\
 x_{10}^{(1/2)} = x_{11} \\
 x_{11}^{(1/2)} = k_{25} \cdot x_1 - k_{26} \cdot x_3 + k_{26} \cdot x_5 + k_{26} \cdot x_7 + k_{27} \cdot x_{10} + k_{28} \cdot x_{14} + k_{29} \cdot x_{16} \\
 x_{12}^{(1/2)} = x_{13} \\
 x_{13}^{(1/2)} = k_{30} \cdot x_1 - k_{31} \cdot x_3 + k_{31} \cdot x_5 + k_{31} \cdot x_7 + k_{32} \cdot x_{10} + k_{33} \cdot x_{14} + k_{34} \cdot x_{16} \\
 x_{14}^{(1/2)} = x_{15} \\
 x_{15}^{(1/2)} = x_{16} \\
 x_{16}^{(1/2)} = m_{14} \cdot x_1 + m_{15} \cdot x_2 - m_{16} \cdot x_3 - m_{17} \cdot x_4 + m_{16} \cdot x_5 + m_{17} \cdot x_6 + m_{16} \cdot x_7 + m_{17} \cdot x_8 + m_{18} \cdot x_{10} + m_{19} \cdot x_{11} + m_{20} \cdot x_{14} + m_{21} \cdot x_{15} + m_{22} \cdot x_{16}
 \end{array} \right. \quad (IV.10)$$

Les expressions pour les coefficients k et m sont données en annexe 4.

Le système d'état généralisé (IV.10) peut s'écrire alors sous la forme réduite (IV.11).

$$\bar{x}^{(1/2)} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u} \quad (IV.11)$$

où :

$$\bar{x}^{(1/2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1/2)} \\ x_2^{(1/2)} \\ x_3^{(1/2)} \\ x_4^{(1/2)} \\ x_5^{(1/2)} \\ x_6^{(1/2)} \\ x_7^{(1/2)} \\ x_8^{(1/2)} \\ x_9^{(1/2)} \\ x_{10}^{(1/2)} \\ x_{11}^{(1/2)} \\ x_{12}^{(1/2)} \\ x_{13}^{(1/2)} \\ x_{14}^{(1/2)} \\ x_{15}^{(1/2)} \\ x_{16}^{(1/2)} \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \end{bmatrix} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_f \\ u_f^{(1/2)} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_8 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{16} & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{24} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{13} & m_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.12)$$

Et la matrice d'état généralisé A est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & 0 & k_7 & 0 & k_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_9 & 0 & k_{10} & 0 & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & k_{15} & 0 & k_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{17} & 0 & k_{18} & 0 & 0 & 0 & k_{19} & k_{20} & k_{21} & k_{22} & 0 & k_{23} & 0 & k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{10} & m_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{25} & 0 & -k_{26} & 0 & k_{26} & 0 & k_{26} & 0 & 0 & k_{27} & 0 & 0 & 0 & k_{28} & 0 & k_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{30} & 0 & -k_{31} & 0 & k_{31} & 0 & k_{31} & 0 & 0 & k_{32} & 0 & 0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{14} & m_{15} & -m_{16} & -m_{17} & m_{16} & m_{17} & m_{16} & m_{17} & 0 & m_{18} & m_{19} & 0 & 0 & m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (IV.13)$$

IV.4. Discrétisation et résolution du système

Afin de calculer la réponse temporelle à partir du système d'état généralisé (IV.10), on va utiliser la méthode directe [53]. Elle consiste à remplacer les dérivées d'ordre un demi de chaque variable d'état par une approximation numérique, ce qui conduit à des équations récurrentes directement calculables.

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de calculer la dérivation non entière d'une variable, comme nous l'avons vu au chapitre II. Ce sont par exemple les méthodes basées sur la définition de Riemann-Liouville [59] ou Caputo [52]. Nous allons dans cette thèse utiliser la définition de Grünwald-Letnikov [59], qui permet d'évaluer numériquement par discrétisation la dérivation non entière.

La dérivation d'ordre α d'une fonction x à l'instant $t_m = m \cdot h$ est ainsi donnée par [59] :

$$x^{(\alpha)}(t_m) \approx x^{(\alpha)}(m \cdot h) = \frac{1}{h^\alpha} \cdot \left\langle x(m \cdot h) + \sum_{k=1}^m \left\{ (-1)^k \cdot \binom{\alpha}{k} \cdot x[(m-k) \cdot h] \right\} \right\rangle \quad (\text{IV.14})$$

où : $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k+1)}$ et $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$ est la fonction Gamma (généralisation de la notion de factorielle sur les nombre réel), α est l'ordre de dérivation de la variable x , m est le numéro de l'échantillon et h est le pas d'échantillonnage.

L'expression $\binom{\alpha}{k}$ peut être aussi écrite sous la forme plus simple :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} \quad (\text{IV.15})$$

Une de propriétés la plus significative de la dérivation non entière d'une fonction $x(t)$ à un instant t_m est le fait que pour sa détermination on prend en compte le passé intégral de la fonction. Cependant, compte-tenu de la valeur des paramètres $\binom{\alpha}{k}$, les instants récents ont plus de poids sur la valeur de la dérivation que les instants plus lointains. Etant limité par le logiciel *Matlab*[®] qui permet de calculer la fonction Gamma pour un nombre maximal de 171, et une factorielle de 170, on ne peut pas utiliser l'équation IV.15 directement. Comme

$\binom{0.5}{170} = -1.2755 \cdot 10^{-4}$, il est nécessaire de prendre en compte des instants plus lointains pour assurer une bonne précision des calculs. L'équation IV.15 a été donc réécrite sous la forme suivante :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{(\alpha-1)}{2} \cdot \frac{(\alpha-2)}{3} \cdot \dots \cdot \frac{(\alpha-k+1)}{k} \quad (\text{IV.16})$$

Cette forme est plus élégante pour calculer numériquement et permet de prendre en compte pratiquement tous les instants du passé (car k peut prendre les valeurs beaucoup plus grandes que 170).

Une limitation du nombre d'échantillons correspondant au passé de la fonction est cependant nécessaire au risque de faire croître trop drastiquement le temps de simulation (fig. IV.3).

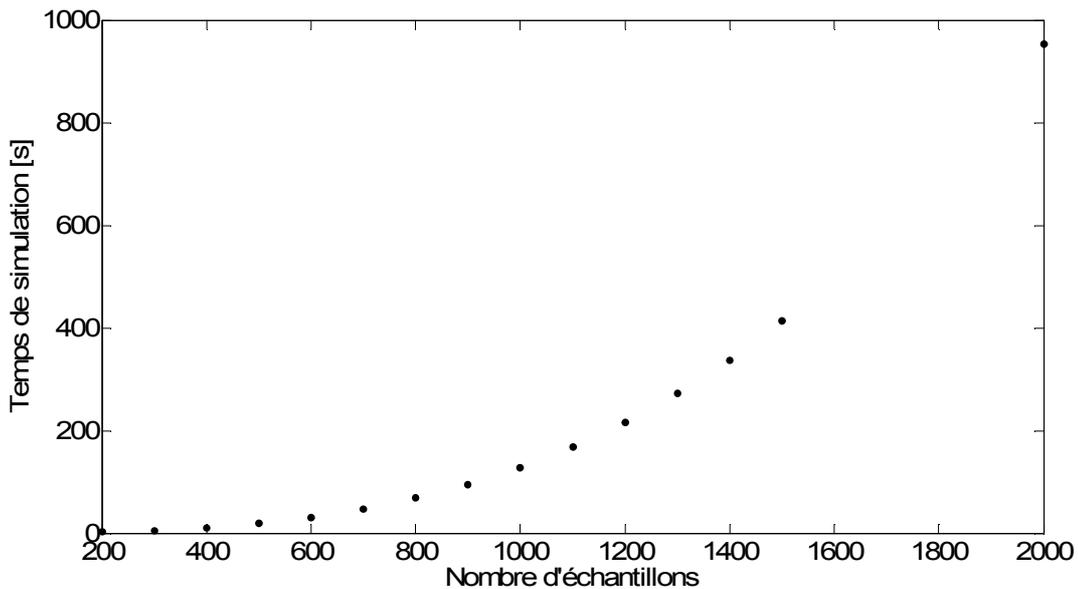


Fig. IV.3. Accroissement du temps de simulation avec le nombre d'échantillons
(simulations faites sur un ordinateur avec le processeur Intel Core 2 Duo E4600 @ 2,40 GHz)

L'erreur d'approximation induite par cette limitation peut être estimée grâce à l'équation (IV.17) [60].

$$\varepsilon = \frac{M \cdot K^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|} \quad (\text{IV.17})$$

où M est la valeur maximale de la fonction x , α est l'ordre de dérivation et K est le nombre d'échantillons pris en compte.

La fig. IV.4 présente l'erreur ε en fonction du nombre d'échantillons, pour $\alpha = 0,5$.

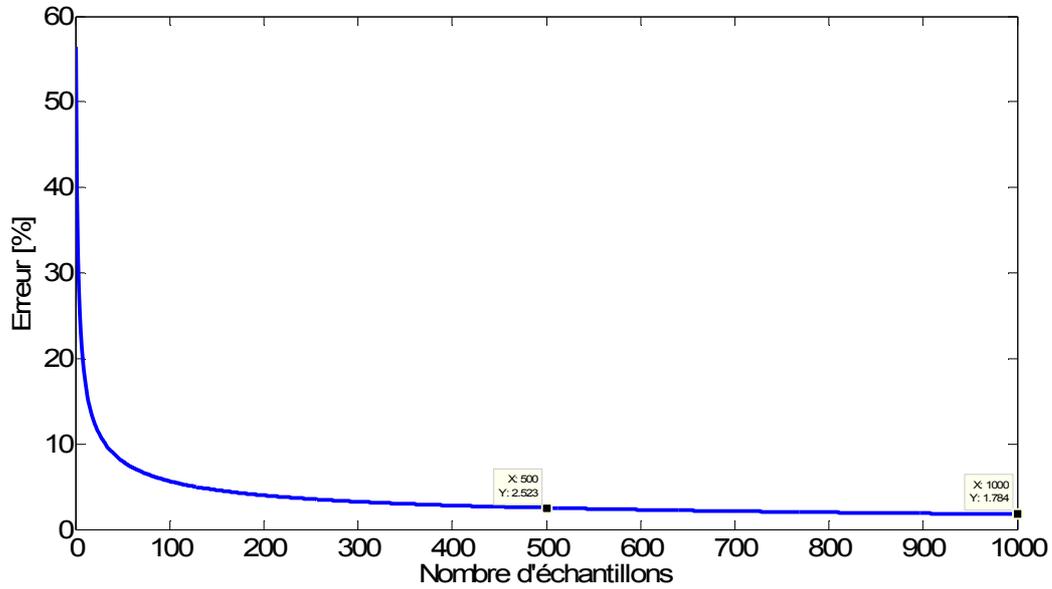


Fig. IV.4. Erreur induite par une limitation du nombre des instants du passé

En appliquant la définition (IV.14) pour le calcul des dérivations d'ordre $\frac{1}{2}$ du système d'état généralisé IV.10, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_1(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_2(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_1[(m-k) \cdot h] \\
x_2(mh) &= \sqrt{h} \cdot [k_1 \cdot x_1(mh) + k_2 \cdot x_3(mh) + k_3 \cdot x_7(mh) + k_4 \cdot x_8(mh) + k_5 \cdot x_9(mh) + k_6 \cdot x_{10}(mh) + k_7 \cdot x_{12}(mh) + k_7 \cdot x_{14}(mh) + k_8 \cdot u_f(mh)] - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_2[(m-k) \cdot h] \\
x_3(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_4(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_3[(m-k) \cdot h] \\
x_4(mh) &= \sqrt{h} \cdot [k_9 \cdot x_1(mh) + k_{10} \cdot x_3(mh) + k_{11} \cdot x_7(mh) + k_{12} \cdot x_8(mh) + k_{13} \cdot x_9(mh) + k_{14} \cdot x_{10}(mh) + k_{15} \cdot x_{12}(mh) + k_{15} \cdot x_{14}(mh) + k_{16} \cdot u_f(mh)] - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_4[(m-k) \cdot h] \\
x_5(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_6(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_5[(m-k) \cdot h] \\
x_6(mh) &= \sqrt{h} \cdot [k_{17} \cdot x_1(mh) + k_{18} \cdot x_3(mh) + k_{19} \cdot x_7(mh) + k_{20} \cdot x_8(mh) + k_{21} \cdot x_9(mh) + k_{22} \cdot x_{10}(mh) + k_{23} \cdot x_{12}(mh) + k_{23} \cdot x_{14}(mh) + k_{24} \cdot u_f(mh)] - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_6[(m-k) \cdot h] \\
x_7(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_8(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_7[(m-k) \cdot h] \\
x_8(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_9(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_8[(m-k) \cdot h] \\
x_9(mh) &= \sqrt{h} \cdot \left[m_1 \cdot x_1(mh) + m_2 \cdot x_2(mh) + m_3 \cdot x_3(mh) + m_4 \cdot x_4(mh) + m_5 \cdot x_7(mh) + m_6 \cdot x_8(mh) + m_7 \cdot x_9(mh) + m_8 \cdot x_{10}(mh) + m_9 \cdot x_{11}(mh) + m_{10} \cdot x_{12}(mh) + \right. \\
&\quad \left. m_{11} \cdot x_{13}(mh) + m_{10} \cdot x_{14}(mh) + m_{11} \cdot x_{15}(mh) + m_{12} \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \left[u_f(mh) + \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot u_f[(m-k) \cdot h] \right] \right\rangle + m_{13} \cdot u_f(mh) \right] - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_9[(m-k) \cdot h] \\
x_{10}(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_{11}(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{10}[(m-k) \cdot h] \\
x_{11}(mh) &= \sqrt{h} \cdot [k_{25} \cdot x_1(mh) - k_{26} \cdot x_3(mh) + k_{26} \cdot x_5(mh) + k_{26} \cdot x_7(mh) + k_{27} \cdot x_{10}(mh) + k_{28} \cdot x_{14}(mh) + k_{29} \cdot x_{16}(mh)] - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{11}[(m-k) \cdot h] \\
x_{12}(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_{13}(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{12}[(m-k) \cdot h] \\
x_{13}(mh) &= \sqrt{h} \cdot [k_{30} \cdot x_1(mh) - k_{31} \cdot x_3(mh) + k_{31} \cdot x_5(mh) + k_{31} \cdot x_7(mh) + k_{32} \cdot x_{10}(mh) + k_{33} \cdot x_{14}(mh) + k_{34} \cdot x_{16}(mh)] - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{13}[(m-k) \cdot h] \\
x_{14}(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_{15}(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{14}[(m-k) \cdot h] \\
x_{15}(mh) &= \sqrt{h} \cdot x_{16}(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{15}[(m-k) \cdot h] \\
x_{16}(mh) &= \sqrt{h} \cdot [m_{14} \cdot x_1(mh) + m_{15} \cdot x_2(mh) - m_{16} \cdot x_3(mh) - m_{17} \cdot x_4(mh) + m_{16} \cdot x_5(mh) + m_{17} \cdot x_6(mh) + m_{16} \cdot x_7(mh) + m_{17} \cdot x_8(mh) + m_{18} \cdot x_{10}(mh) + m_{19} \cdot x_{11}(mh) + m_{20} \cdot x_{14}(mh) + m_{21} \cdot x_{15}(mh) + m_{22} \cdot x_{16}(mh)] \\
&\quad - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{16}[(m-k) \cdot h]
\end{aligned} \tag{IV.18}$$

Sous la forme réduite, le système IV.18 s'exprime par :

$$M \cdot \bar{x}(mh) = Q \Rightarrow \bar{x}(mh) = M^{-1} \cdot Q \quad (\text{IV.19})$$

où :

$$\bar{x}(mh) = Q = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_1[(m-k) \cdot h] \\ \sqrt{h} \cdot k_8 \cdot u_f(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_2[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_3[(m-k) \cdot h] \\ \sqrt{h} \cdot k_{16} \cdot u_f(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_4[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_5[(m-k) \cdot h] \\ \sqrt{h} \cdot k_{24} \cdot u_f(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_6[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_7[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_8[(m-k) \cdot h] \\ m_{12} \cdot \left\{ u_f(mh) + \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot u_f[(m-k) \cdot h] \right\} + \sqrt{h} \cdot m_{13} \cdot u_f(mh) - \sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_9[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{10}[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{11}[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{12}[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{13}[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{14}[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{15}[(m-k) \cdot h] \\ -\sum_{k=1}^m (-1)^k \cdot \binom{0.5}{k} \cdot x_{16}[(m-k) \cdot h] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{h} \cdot k_1 & 1 & -\sqrt{h} \cdot k_2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_3 & -\sqrt{h} \cdot k_4 & -\sqrt{h} \cdot k_5 & -\sqrt{h} \cdot k_6 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_7 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{h} \cdot k_9 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{10} & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{11} & -\sqrt{h} \cdot k_{12} & -\sqrt{h} \cdot k_{13} & -\sqrt{h} \cdot k_{14} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{15} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{h} \cdot k_{17} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{18} & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} \cdot k_{19} & -\sqrt{h} \cdot k_{20} & -\sqrt{h} \cdot k_{21} & -\sqrt{h} \cdot k_{22} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{23} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{h} \cdot m_1 & -\sqrt{h} \cdot m_2 & -\sqrt{h} \cdot m_3 & -\sqrt{h} \cdot m_4 & 0 & 0 & -\sqrt{h} \cdot m_5 & -\sqrt{h} \cdot m_6 & 1 - \sqrt{h} \cdot m_7 & -\sqrt{h} \cdot m_8 & -\sqrt{h} \cdot m_9 & -\sqrt{h} \cdot m_{10} & -\sqrt{h} \cdot m_{11} & -\sqrt{h} \cdot m_{10} & -\sqrt{h} \cdot m_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{h} \cdot k_{25} & 0 & \sqrt{h} \cdot k_{26} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{26} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{26} & 0 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{27} & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{28} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{h} \cdot k_{30} & 0 & \sqrt{h} \cdot k_{31} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{31} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{31} & 0 & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{32} & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} \cdot k_{33} & 0 & -\sqrt{h} \cdot k_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{h} \\ -\sqrt{h} \cdot m_{14} & -\sqrt{h} \cdot m_{15} & \sqrt{h} \cdot m_{16} & \sqrt{h} \cdot m_{17} & -\sqrt{h} \cdot m_{16} & -\sqrt{h} \cdot m_{17} & -\sqrt{h} \cdot m_{16} & -\sqrt{h} \cdot m_{17} & 0 & -\sqrt{h} \cdot m_{18} & -\sqrt{h} \cdot m_{19} & 0 & 0 & -\sqrt{h} \cdot m_{20} & -\sqrt{h} \cdot m_{21} & 1 - \sqrt{h} \cdot m_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

En résolvant l'équation (IV.19) on obtient seize variables d'état, de x_1 à x_{16} , qui correspondent aux courants $i_d, i_q, i_f, i_{1d}, i_{2d}, i_{1q}, i_{2q}$ et leurs dérivées d'ordre $\frac{1}{2}$ ou 1 (IV.8).

IV.5. Résultats de simulations

L'équation (IV.19) a été résolue sous le logiciel *Matlab*[®]. Trois états différents de la machine synchrone étudiée ont été simulés : la marche à vide, le point de fonctionnement nominal et l'analyse de court-circuit. Chaque état a été simulé pendant une seconde avec un pas d'échantillonnage égal à une milliseconde. Le nombre d'échantillons correspondant au passé a été limité à 1000 pour chaque pas de temps.

Egalement, deux changements d'état ont été simulés. A partir de la marche à vide, la machine a été chargée (pour une charge RL nominale) avec une élévation simultanée de la tension d'excitation. Un deuxième essai a consisté à court-circuiter la machine à partir de sa marche à vide.

Afin d'obtenir les courants sinusoïdaux (i_a, i_b, i_c) dans les axes naturels (a, b, c), la transformation inverse de Park [36] a été effectuée sur les courants i_d et i_q , c'est-à-dire, sur les variables d'état x_1 et x_{10} . Ensuite, les tensions des trois phases (u_a, u_b, u_c) sur la charge RL ont été calculées en utilisant l'équation donnée ci-dessous :

$$u_{a,b,c} = i_{a,b,c} \cdot R_{ch} + \frac{di_{a,b,c}}{dt} \cdot L_{ch} \quad (\text{IV.22})$$

Pour minimiser les erreurs numériques lorsque du calcul de la dérivation $\frac{di_{a,b,c}}{dt}$, les échantillons des courants i_a, i_b, i_c ont été interpolés avec un pas de $1 \cdot 10^{-6}$ second.

Les figures suivantes (fig. IV.5, fig. IV.6, fig. IV.7, fig. IV.8, fig. IV.9, fig. IV.10) présentent les courants i_d, i_q, i_f , ainsi que la tension u_a et le courant i_a , pour les trois états de fonctionnement de la machine. Pour rendre les images plus lisibles, les tensions u_b, u_c et les courants i_b, i_c ne sont pas montrés sur les figures. Ils ont le même module que u_a et i_a mais ils sont décalés de 120° et 240° .

Toutes les valeurs de paramètres de la machine sont ramenées au stator.

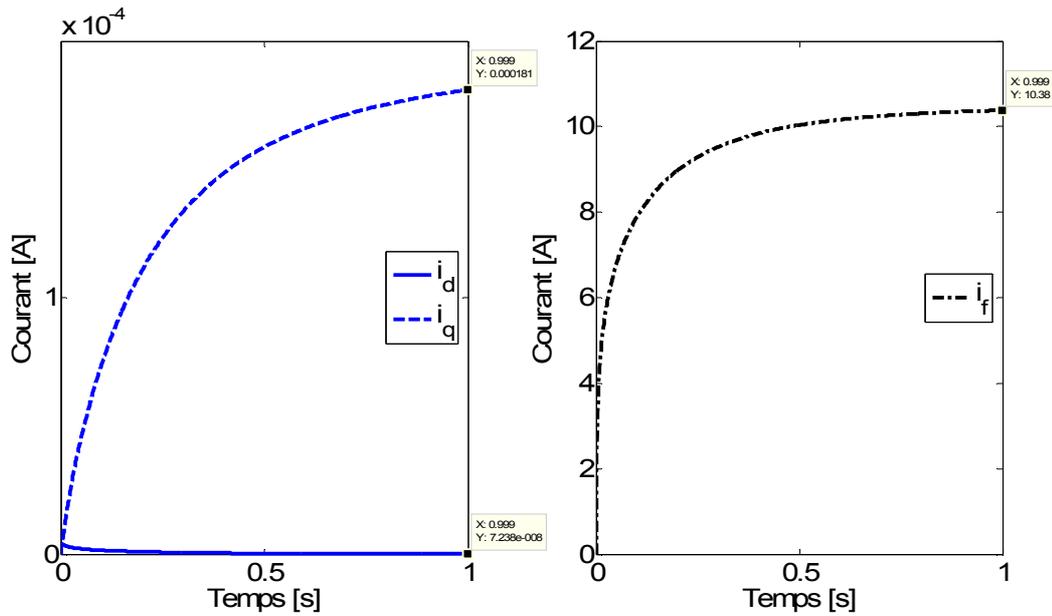


Fig. IV.5. Courants i_d , i_q , i_f pendant la marche à vide

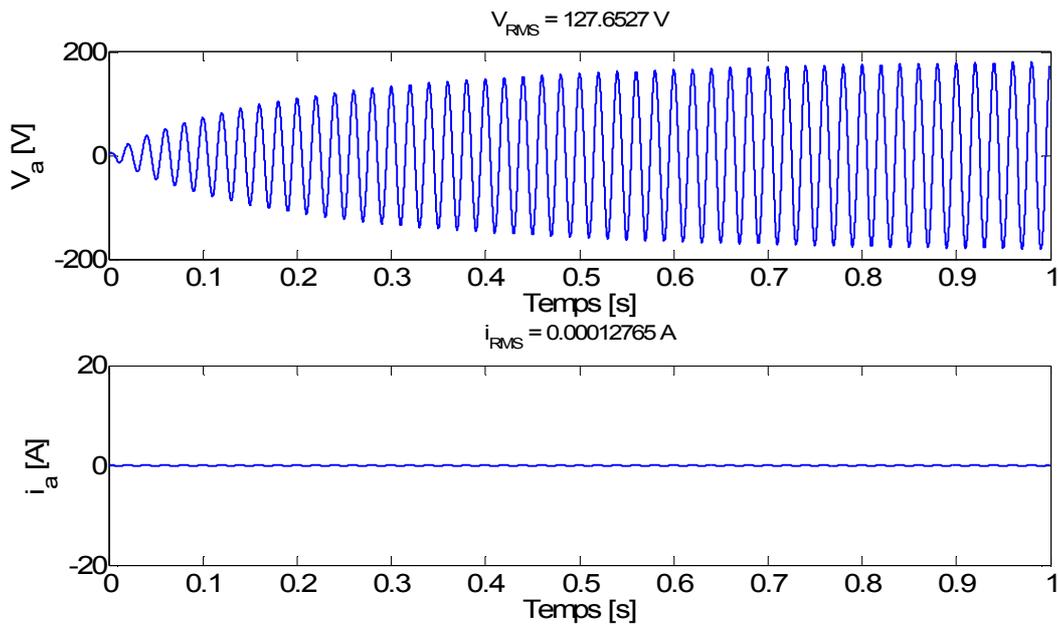


Fig. IV.6. Tension u_a et courant i_a pendant la marche à vide

Pour simuler les conditions de la marche à vide, la résistance de charge a été prise égale à $1 \cdot 10^6 \Omega$ et l'inductance de charge à 0 H. Le courant d'excitation a été réglé de façon à obtenir la tension nominale aux bornes de la machine.

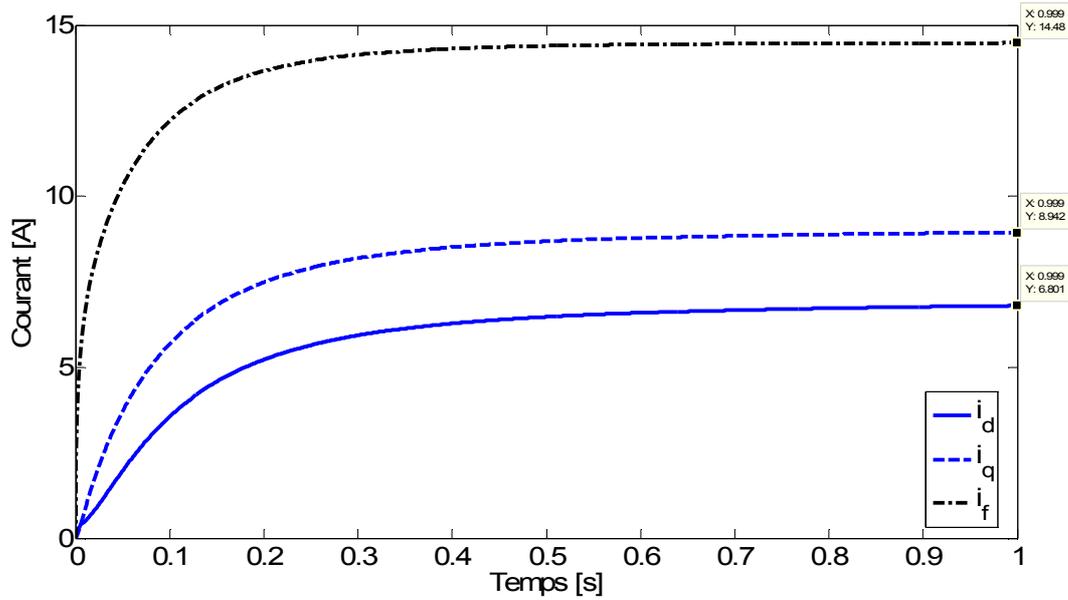


Fig. IV.7. Courants i_d , i_q , i_f au point de fonctionnement

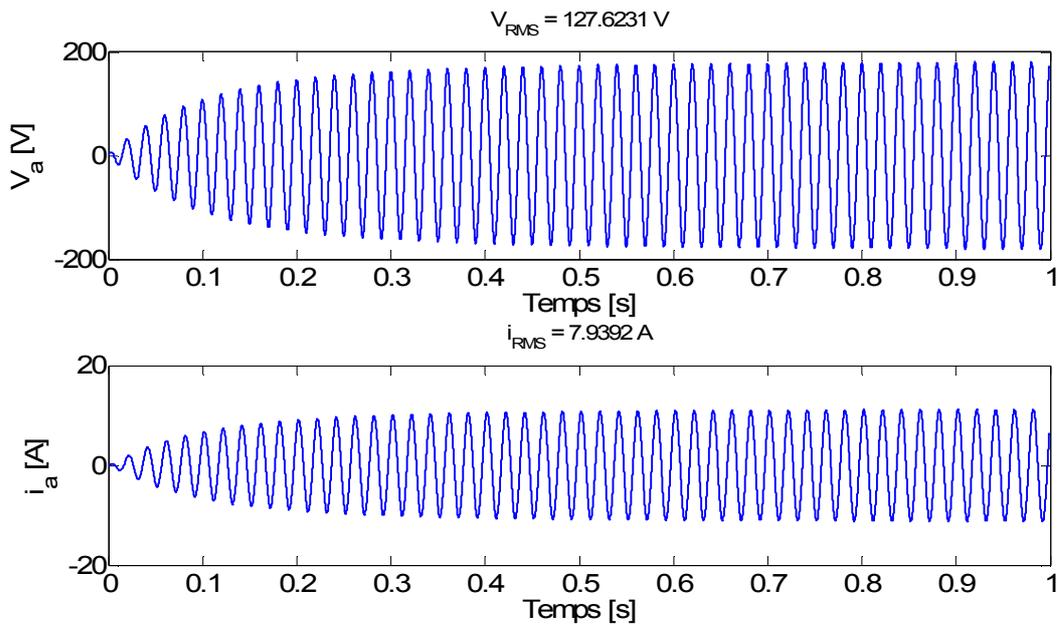


Fig. IV.8. Tension u_a et courant i_a au point de fonctionnement

Afin de se placer au point de fonctionnement de la machine synchrone étudiée, la résistance de charge R_{ch} nominale et l'inductance de charge L_{ch} nominale ont été calculées à partir des données de la plaque signalétique (tableau III.1) et des équations (IV.23, IV.24) :

$$R_{ch} = Z_{ch} \cdot \cos \varphi = \frac{V_n}{\sqrt{3} \cdot I_n} \cdot \cos \varphi \approx 12,86 \Omega \quad (\text{IV.23})$$

$$L_{ch} = \frac{X_{ch}}{\omega} = \frac{\sqrt{Z_{ch}^2 - R_{ch}^2}}{2 \cdot \pi \cdot f} \approx 0,0307 H \quad (IV.24)$$

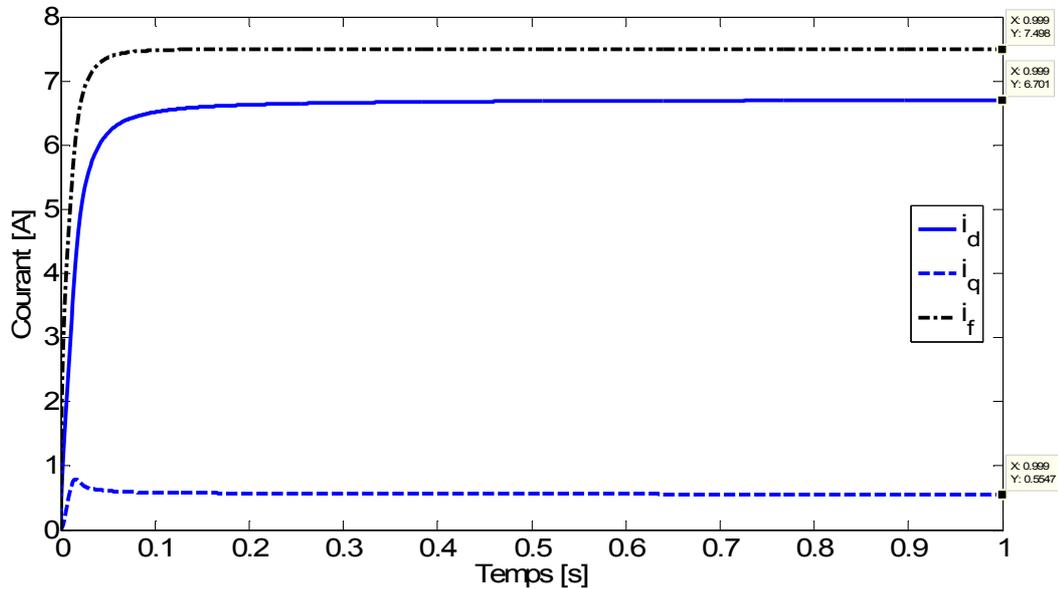


Fig. IV.9. Courants i_d , i_q , i_f pendant le court-circuit

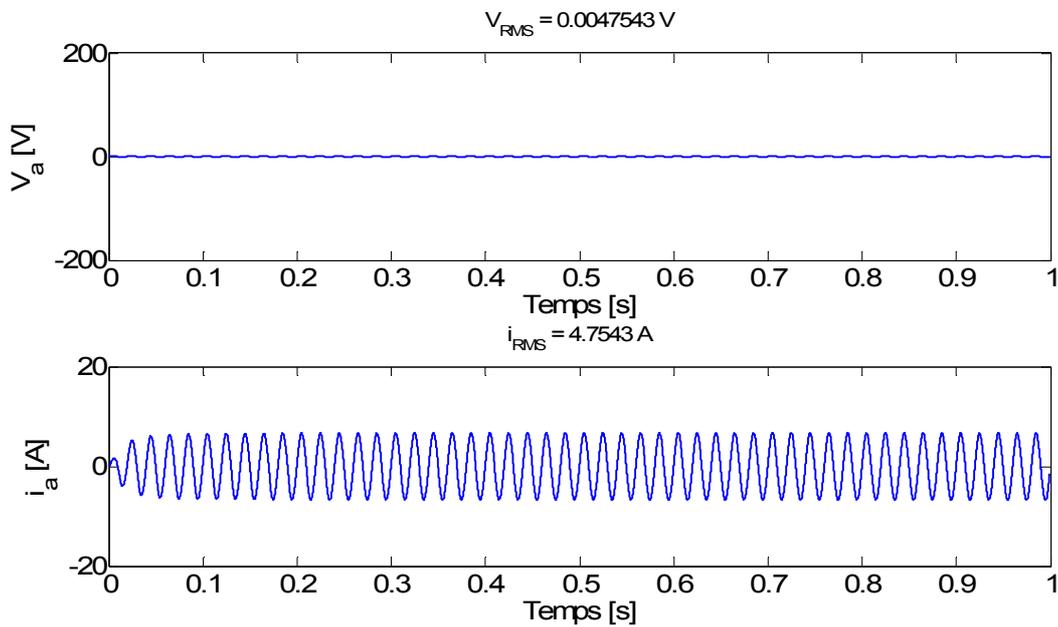


Fig. IV.10. Tension u_a et courant i_a pendant le court-circuit

Pour simuler les conditions du court-circuit, la résistance de charge a été prise égale à $1 \cdot 10^{-3} \Omega$ et l'inductance de charge a été mise à 0 H. Le courant d'excitation a été fixé à la valeur permettant d'obtenir la tension nominale aux bornes de la machine lors de la marche à vide.

Les quatre figures suivantes (fig. IV.11, fig. IV.12, fig. IV.13, fig. IV.14) présentent les deux changements d'état mentionnés plus haut.

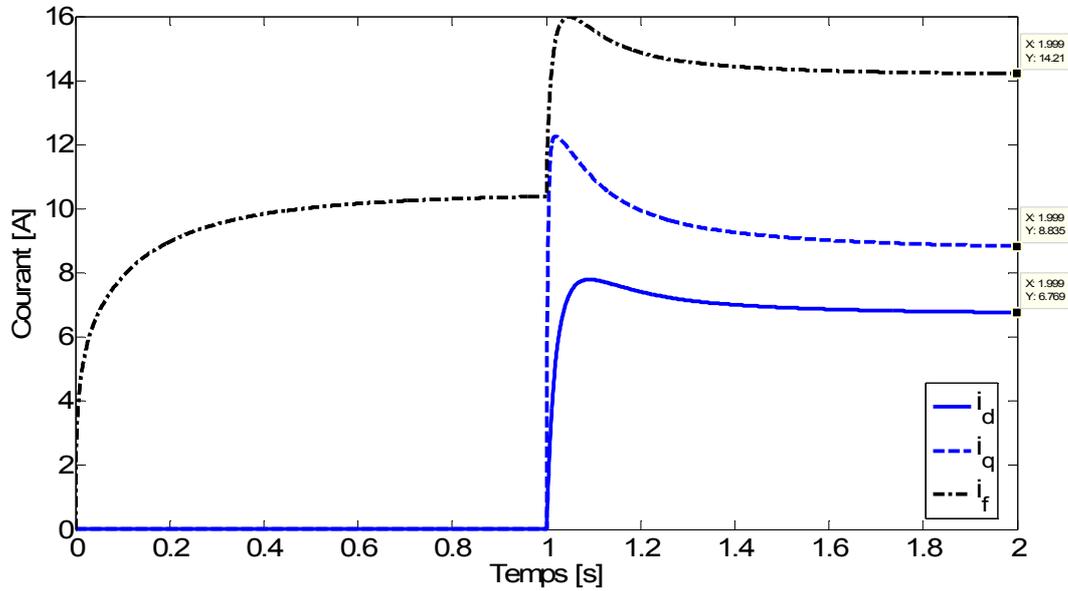


Fig. IV.11. Courants i_d , i_q , i_f pendant le passage de la marche à vide au point de fonctionnement

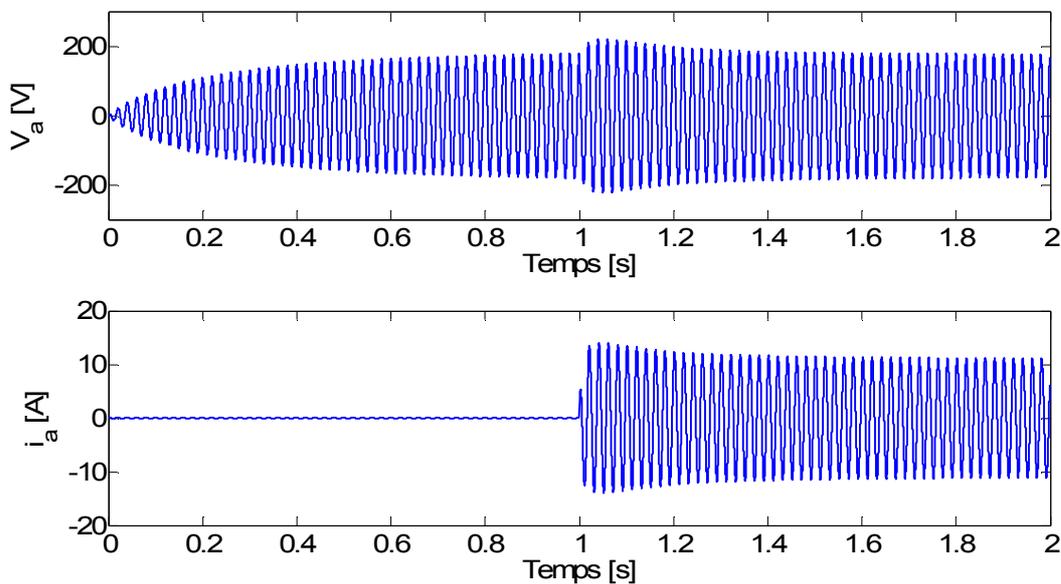


Fig. IV.12. Tension u_a et courant i_a pendant le passage de la marche à vide au point de fonctionnement

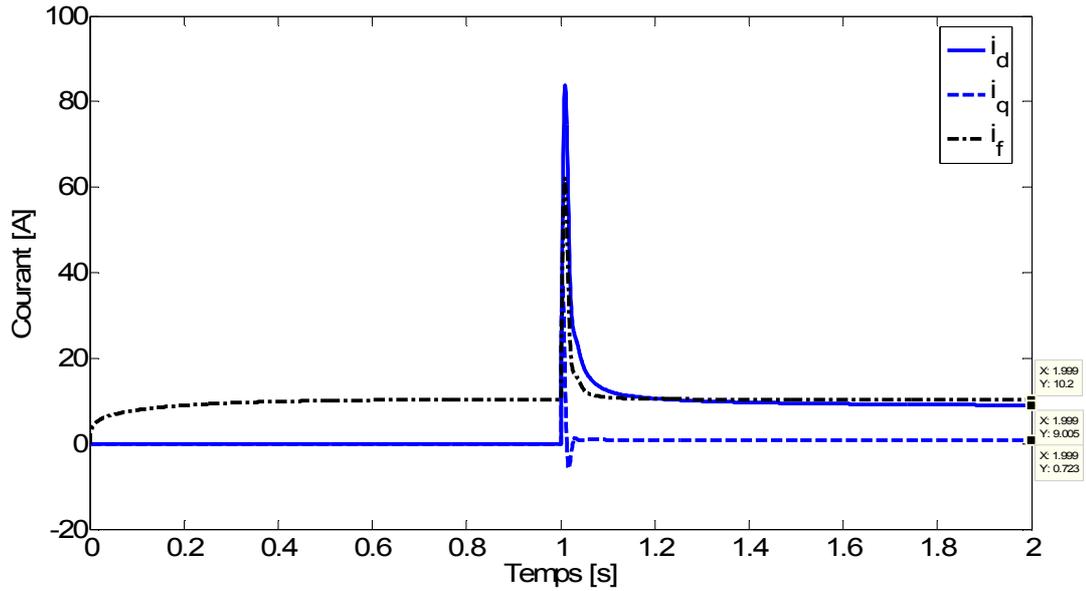


Fig. IV.13. Courants i_d , i_q , i_f pendant le passage de la marche à vide au court-circuit

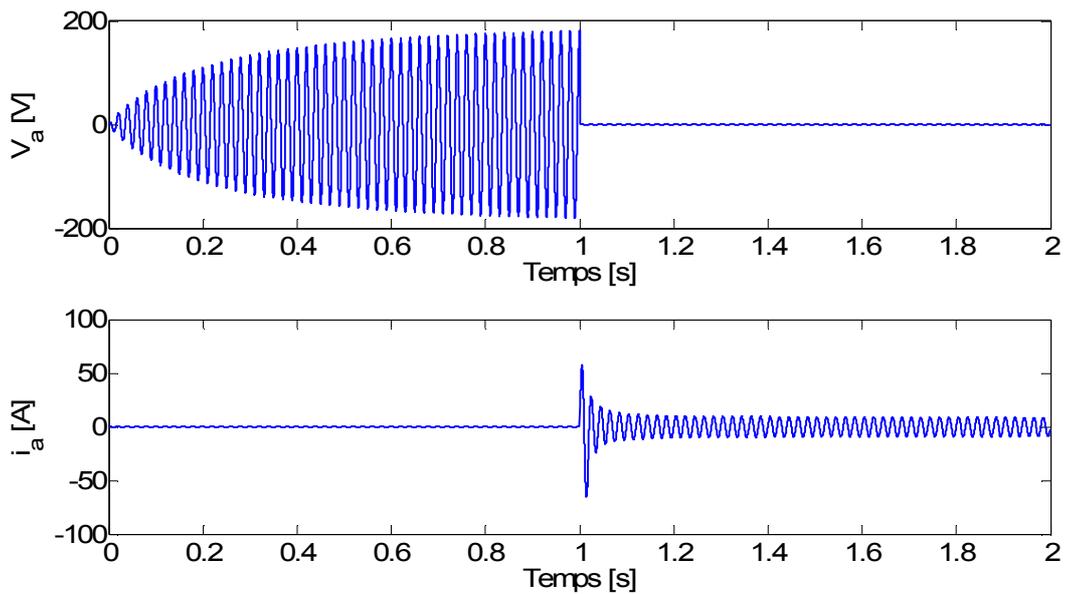


Fig. IV.14. Tension u_a et courant i_a pendant le passage de la marche à vide au court-circuit

Les simulations de tous ces états de fonctionnement permettent de caractériser entièrement le comportement dynamique d'une machine synchrone et en conséquence de vérifier parfaitement son modèle [3]. Elles sont bien représentatives des caractéristiques classiques d'un alternateur lors de ces phases de fonctionnement.

IV.6. Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons obtenu une réponse temporelle du générateur synchrone à partir de son modèle d'ordre non entier. A cet effet, le système d'état généralisé d'ordre un demi a été construit et a été résolu en appliquant la définition de Grünwald-Letnikov pour une représentation numérique des dérivées d'ordre non entier. Trois états bien distincts de fonctionnement de la machine synchrone ont ensuite été simulés : la marche à vide, le point de fonctionnement nominal et le court-circuit.

Il faut noter que la démarche proposée n'est possible qu'à condition de remplacer les dérivées implicites par les dérivées explicites. Dans notre cas, cette hypothèse a été validée.

L'un des problèmes majeurs apparaissant pendant la résolution du système d'état généralisé d'ordre non entier est une absence de valeurs de la fonction dérivée dans le passé dans les premiers instants. Cela ne permet pas d'atteindre la précision désirée au début de la simulation. Au fur et à mesure, cette précision augmente mais malheureusement le temps de simulation aussi et considérablement. Il existe néanmoins des méthodes permettant d'augmenter les performances de calculs intégrant de grandes quantités d'échantillons correspondant au passé [60, 80]. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'approfondir ce point.

Chapitre V.

Vers une commande d'ordre non entier robuste pour un modèle d'ordre non entier avec incertitudes

V.1. Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons développé un modèle fréquentiel fin et compact de la machine synchrone. Il nous semble intéressant avant de conclure ce mémoire de revenir sur l'objectif initial de notre travail de modélisation, à savoir la synthèse de la commande d'un alternateur soumis à des incertitudes de fonctionnement [77]. On parle alors de commande robuste.

La commande est robuste quand elle est insensible aux différences entre l'état du système et son modèle qui a été utilisé pour synthétiser la commande [78]. La robustesse de la commande est donc exigée dans les cas où le modèle du procédé n'est pas bien connu ou lorsque ses paramètres varient fortement. La commande robuste permet ainsi d'élargir les marges de stabilité du système et optimiser ses performances [90].

La robustesse d'un système commandé peut être obtenue en employant différentes stratégies : commande adaptative [44], indexation du gain [50], utilisation de réseau de neurones artificiel [86] ou synthèse H^∞ [78, 4]. Comme les modèles utilisés pour la commande des systèmes reposent sur les systèmes d'ordre non entier, nous avons utilisé une approche similaire pour la commande – la commande CRONE (*Commande Robuste d'Ordre Non Entier*) [54, 56]. Après avoir rappelé le principe de cette commande, nous montrerons dans quelle mesure cette commande peut être utilisée pour rendre plus robuste la commande d'un générateur synchrone soumis à des incertitudes paramétriques comme la température ou la saturation des tôles magnétiques.

V.2. Introduction à la commande CRONE

La commande CRONE a été développée au Laboratoire d'Automatique et de Productique de Bordeaux par l'équipe du professeur Oustaloup. C'est dans ce laboratoire qu'ont été initialisées les premières recherches sur l'utilisation de la dérivation non entière en tant qu'opérateur et outil de modélisation dès 1975 [56].

La notion de robustesse peut être associée à la notion de stabilité ou de performances (pour un système stable). Dans le premier cas, l'objectif est de maintenir la stabilité pour toute variation de paramètres d'un procédé (cas de l'approche H_∞ [23]). Dans l'approche CRONE, on parle de robustesse du degré de stabilité, qui est mesuré par le facteur de résonance en asservissement ou le facteur d'amortissement en asservissement et en régulation [56]. L'objectif est alors de maintenir non seulement la stabilité mais aussi certaines performances dynamiques fréquentielles ou temporelles (robustesse en performance) vis-à-vis des incertitudes paramétriques du procédé.

Au cours de ces quelques dernières décades, trois générations bien distinctes de la commande CRONE se sont distinguées suivant le comportement fréquentiel du procédé. Une brève description de chacun d'entre elles est présentée dans le paragraphe suivant.

La différence principale entre les trois générations de la commande CRONE est liée à la contribution du régulateur synthétisé aux variations de marge de phase.

Dans la première stratégie (**commande CRONE de 1^{ère} génération**), la phase du régulateur reste constante autour de la fréquence au gain unité en boucle ouvert (ω_u). Cela veut dire qu'une variation de marge de phase du système (qui est de nature additive de phase du procédé et du régulateur autour de la fréquence ω_u) est provoquée seulement par une variation de phase du procédé. La première génération de la commande CRONE est donc bien adaptée aux procédés dont la phase (pour l'état paramétrique nominal) présente un comportement asymptotique autour de la fréquence ω_u .

La deuxième stratégie (**commande CRONE de 2^{ème} génération**) quant à elle est dédiée aux procédés dont la phase (pour l'état paramétrique nominal) présente un comportement quelconque autour de la fréquence ω_u . Dans ce cas, le régulateur CRONE annule les variations de marge de phase du système par un apport, soit d'une avance de phase, soit d'un retard de phase (ou des deux). Dans le lieu de Black, le gabarit vertical du système ([56]) glisse sur lui-même lors d'une reparamétrisation du procédé.

La troisième stratégie (**commande CRONE de 3^{ème} génération**) de la commande CRONE est la plus évoluée et présente une approche optimale. Si, lors d'une reparamétrisation du procédé, le gabarit vertical du système ne glisse plus sur lui-même, c'est-à-dire si on n'assure plus la robustesse désirée, il faut le généraliser [56]. Il y a deux niveaux de généralisation. Le premier conduit à la construction d'un gabarit de direction quelconque (gabarit rectiligne) ; le deuxième niveau consiste à substituer au gabarit rectiligne un ensemble de gabarits du même type (multi-gabarits), ce qui conduit à la définition d'un

gabarit curviligne. La figure ci-dessous représente la construction des gabarits suivant le niveau de généralisation.

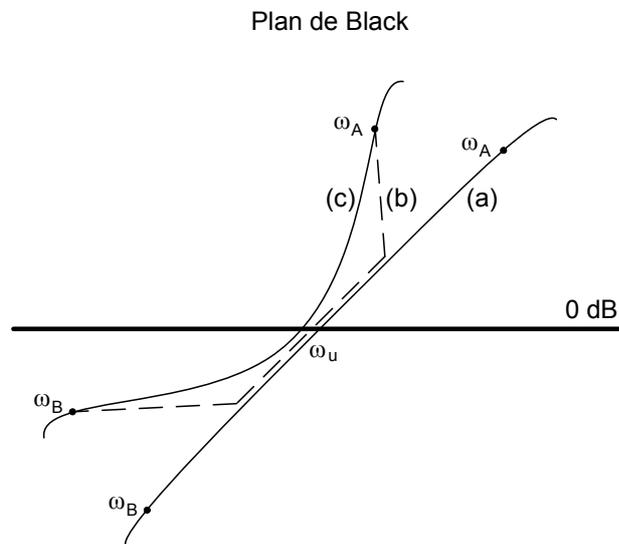


Fig. V.1. Représentation du gabarit rectiligne (a), du multi-gabarit (b) et du gabarit curviligne (c) dans le plan de Black

Le principal intérêt de la commande CRONE est de construire avec un minimum de paramètres un correcteur qui soit robuste sur une très grande plage de fréquences. On retrouve la propriété de parcimonie des systèmes d'ordre non entier présentée dans la partie modélisation. La contrepartie réside dans l'implantation de correcteurs numériques d'ordre assez élevé. Les industriels utilisant cette commande semblent cependant très satisfaits de régler un correcteur complexe et performant avec peu de paramètres [58].

V.3. Présentation du système à commander

La fig. V.2 présente le schéma fonctionnel de la commande classique (petits signaux) d'un alternateur. Afin de synthétiser une commande, on a besoin de trouver la fonction de transfert (V.1) représentant le procédé.

$$G_{\text{procédé}}(s) = \frac{\Delta u_t(s)}{\Delta u_r(s)} \quad (\text{V.1})$$

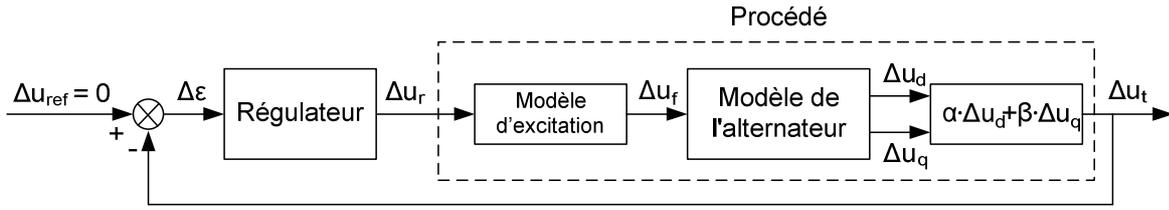


Fig. V.2. Schéma de la commande de l'alternateur

Le système d'excitation est modélisé par une transmittance du premier ordre :

$$G_{exc}(s) = \frac{\Delta u_f(s)}{\Delta u_r(s)} = \frac{1}{1 + \tau_e \cdot s} \quad (V.2)$$

où τ_e est la constante de temps d'un amplificateur (dans notre cas $\tau_e = 0,005$).

A partir du modèle d'état généralisé d'un générateur synchrone développé au chapitre IV, on obtient la relation suivante entre la sortie du système (tension statorique) et son entrée (tension d'excitation) :

$$\Delta \bar{y}(s) = (\sqrt{s} \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot \Delta \bar{u}(s) = (\sqrt{s} \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{s} \end{bmatrix} \cdot \Delta u_f(s) \quad (V.3)$$

On en déduit donc la transmittance de l'alternateur :

$$\bar{G}_{alt}(s) = \frac{\Delta \bar{y}(s)}{\Delta u_f(s)} = (\sqrt{s} \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{s} \end{bmatrix} \quad (V.4)$$

La transmittance de l'alternateur \bar{G}_{alt} (V.4) représente donc la dépendance de toutes les variables d'états de la tension d'excitation u_f . Nous nous intéressons particulièrement aux courants i_d et i_q , ce qui conduit aux transmittances suivantes :

$$G_{i_d}(s) = \frac{\Delta i_d(s)}{\Delta u_f(s)} = \frac{\Delta y_1(s)}{\Delta u_f(s)} = G_{alt1}(s) \quad G_{i_q}(s) = \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta u_f(s)} = \frac{\Delta y_{10}(s)}{\Delta u_f(s)} = G_{alt10}(s) \quad (V.5)$$

Etant données les transmittances G_{i_d} et G_{i_q} on trouve facilement les fonctions de transferts pour les tensions u_d et u_q :

$$G_{u_d}(s) = \frac{\Delta u_d(s)}{\Delta i_d(s)} \cdot \frac{\Delta i_d(s)}{\Delta u_f(s)} = Z_{ch}(s) \cdot G_{i_d}(s) \quad G_{u_q}(s) = \frac{\Delta u_q(s)}{\Delta i_q(s)} \cdot \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta u_f(s)} = Z_{ch}(s) \cdot G_{i_q}(s) \quad (V.6)$$

où Z_{ch} représente une impédance de charge qui est égale à $R_{ch} + s \cdot L_{ch}$ dans cette étude.

Afin de trouver la transmittance G_{u_t} qui représente le rapport entre la sortie de l'alternateur (tension aux bornes u_a) et son entrée (tension u_f), donnée par :

$$G_{u_t}(s) = \frac{\Delta u_t(s)}{\Delta u_f(s)} = \alpha \cdot G_{u_d}(s) + \beta \cdot G_{u_q}(s) \quad (\text{V.7})$$

il nous reste à déterminer les coefficients α et β .

En sachant que :

$$u_t^2 = u_d^2 + u_q^2 \quad (\text{V.8})$$

on linéarise cette équation autour du point de fonctionnement u_{t_0} :

$$2u_{t_0} \cdot \Delta u_t = 2u_{d_0} \cdot \Delta u_d + 2u_{q_0} \cdot \Delta u_q \Rightarrow \Delta u_t = \frac{u_{d_0}}{u_{t_0}} \cdot \Delta u_d + \frac{u_{q_0}}{u_{t_0}} \cdot \Delta u_q = \alpha \cdot \Delta u_d + \beta \cdot \Delta u_q \quad (\text{V.9})$$

Pour un angle de charge θ égale à 30° , correspondant au point du fonctionnement nominal, on a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \theta = 0,5 \\ \beta &= \cos \theta = 0,866 \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

Finalement, la fonction de transfert du procédé (V.1), s'écrit sous la forme suivante :

$$G_{\text{procédé}}(s) = \frac{\Delta u_t(s)}{\Delta u_r(s)} = G_{\text{exc}}(s) \cdot [0,5 \cdot G_{u_d}(s) + 0,866 \cdot G_{u_q}(s)] \quad (\text{V.11})$$

Pour information, la transmittance du procédé (fig. V.2), c'est-à-dire, la fonction de transfert de la machine « Enco » avec le système d'excitation, est montrée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 G_{\text{procédé}} = & .3e-3 * (.1e6 + .3e3 * s) * (.3e99 * s^7 + .2e101 * s^{(13/2)} \\
 & + .1e116 * s^6 + .1e118 * s^{(11/2)} + .2e119 * s^5 + .1e121 * s^{(9/2)} \\
 & + .1e122 * s^4 + .5e123 * s^{(7/2)} + .3e124 * s^3 + .4e125 * s^{(5/2)} \\
 & + .1e126 * s^2 + .5e112 * s^{(3/2)} + .1e113 * s + .2e99 * s^{(1/2)} \\
 & + .5e99) / (.4e96 + .1e108 * s^8 + .1e111 * s^{(15/2)} + .3e113 * s^7 \\
 & + .2e115 * s^{(13/2)} + .4e116 * s^6 + .1e118 * s^{(11/2)} + .2e119 * s^5 \\
 & + .5e120 * s^{(9/2)} + .5e121 * s^4 + .3e122 * s^{(7/2)} + .2e123 * s^3 \\
 & + .3e123 * s^{(5/2)} + .1e124 * s^2 + .2e110 * s^{(3/2)} + .8e110 * s \\
 & + .6e95 * s^{(1/2)}) / (.2e3 + s)
 \end{aligned} \tag{V.12}$$

Le Diagramme de Bode du procédé est représenté sur la fig. V.3. Nous nous sommes limités au domaine fréquentiel pour lequel les paramètres de la machine ont été identifiés (10 mHz – 1 kHz).

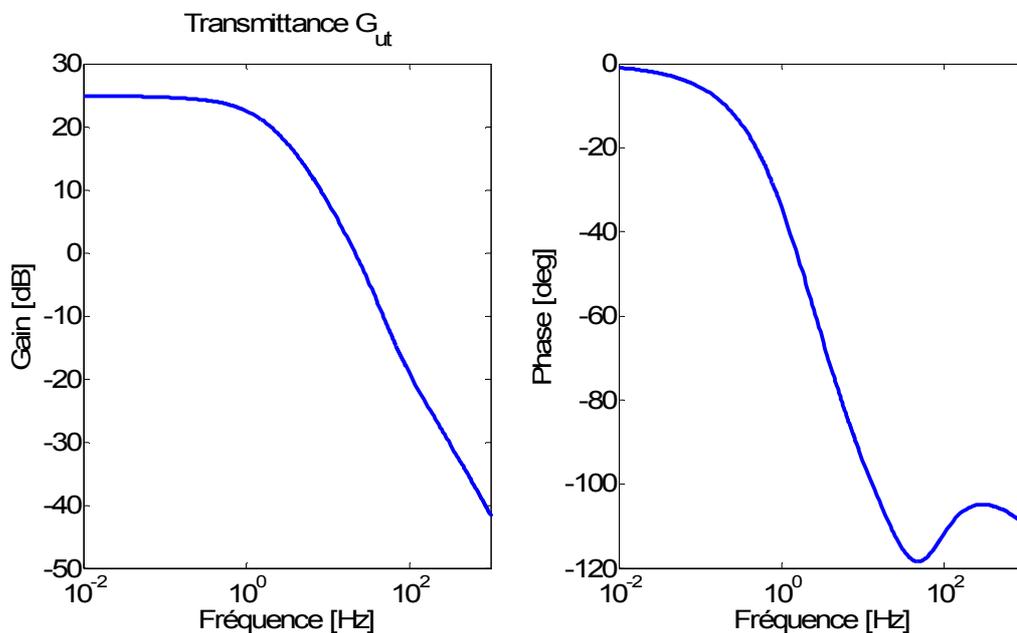


Fig. V.3. Diagramme de Bode du procédé

V.4. *Evaluation de la commande CRONE au système étudié*

Afin de déterminer la génération de la commande CRONE la plus adaptée au procédé étudié, il faut tracer dans le diagramme de Bode les caractéristiques fréquentielles du procédé pour l'état paramétrique nominal et voir comment elles se modifient en tenant compte d'incertitudes paramétriques.

Les diagrammes de Bode ci-dessous ont été tracés pour la fonction de transfert donnée de l'équation (V.11), en tenant compte des différentes incertitudes paramétriques liées à la

vitesse de rotation (fig. V.4), aux températures du stator ou du rotor (fig. V.5), à l'angle de charge (fig. V.6) et à la saturation magnétique (fig. V.7).

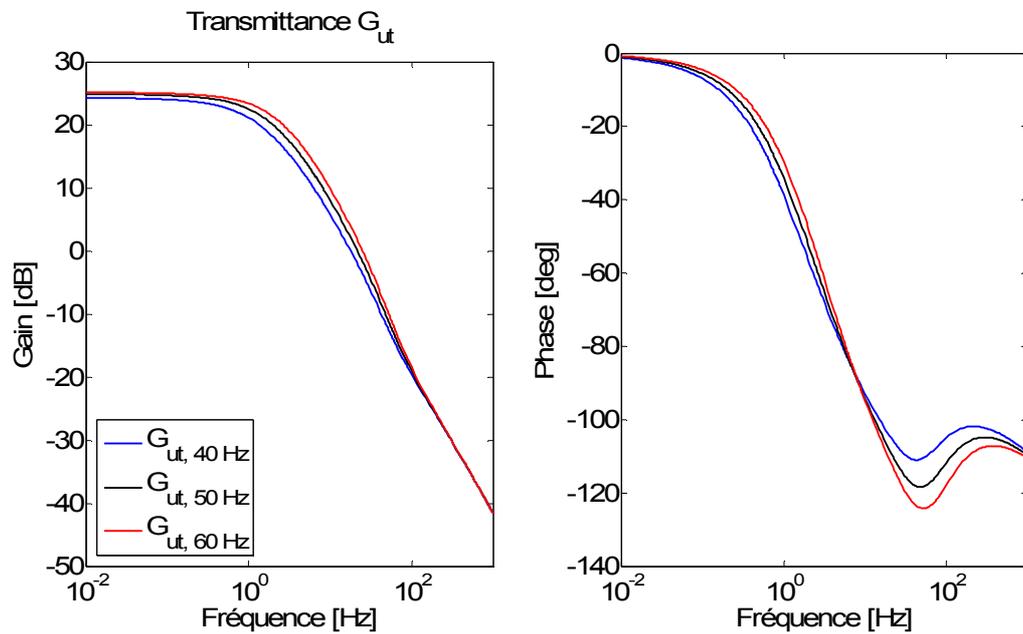


Fig. V.4. Diagramme de Bode du procédé pour trois vitesses de rotation différentes

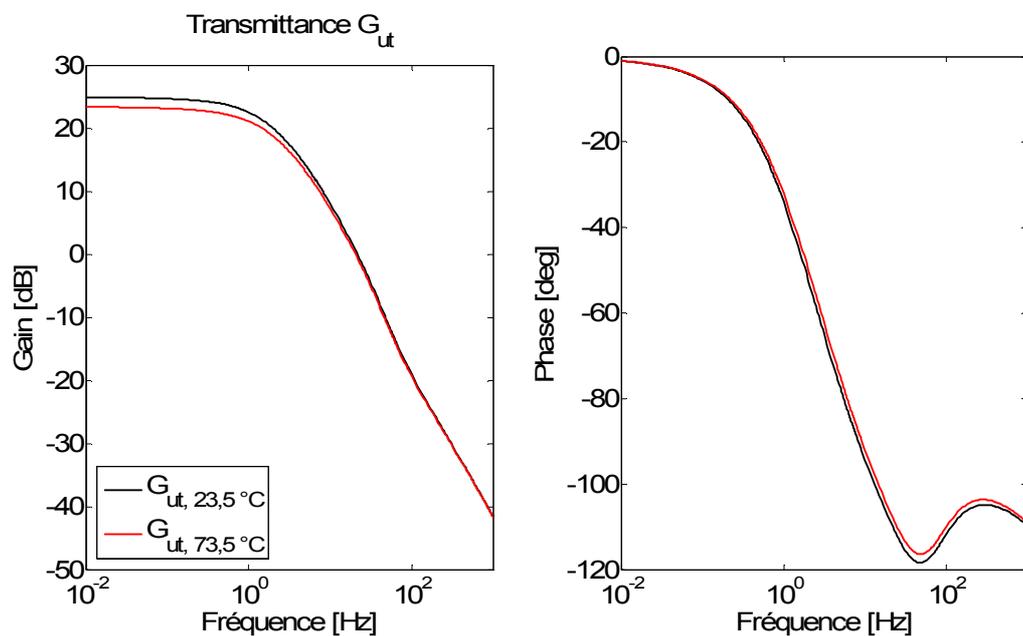


Fig. V.5. Diagramme de Bode du procédé pour deux températures de la machine différentes

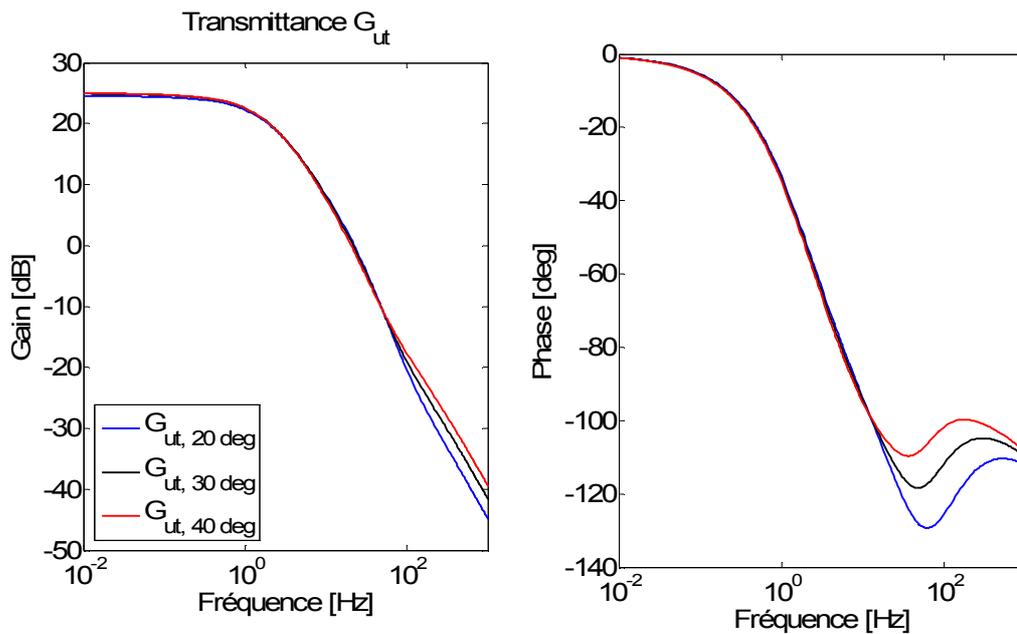


Fig. V.6. Diagramme de Bode du procédé pour trois angles de charge différents

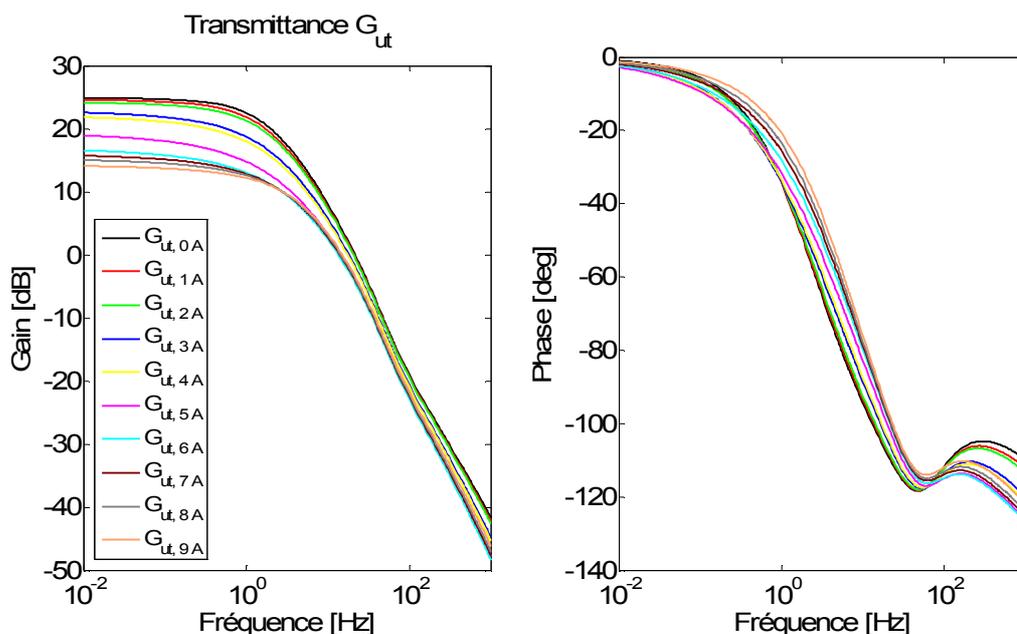


Fig. V.7. Diagramme de Bode du procédé pour différents niveaux de saturation

D'après les figures présentées ci-dessus, on constate que la saturation magnétique a une influence notable sur le comportement fréquentiel de la machine, tout particulièrement pour les basses fréquences. Le but est donc de synthétiser la commande robuste de façon à ne pas avoir une variation de marge de phase du système lors de la reparamétrisation du procédé avec la saturation magnétique.

Afin de synthétiser la commande CRONE il faut pouvoir optimiser le contour du gabarit en fonction des performances à attendre (comme la marge de phase, le facteur de

résonance, le facteur d'amortissement, etc.). Les calculs peuvent être ensuite effectués avec le logiciel *Matlab*[®] équipé d'une Toolbox CRONE [57, 47].

V.5. Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de présenter les perspectives de recherches de ce travail de thèse en abordant la problématique de la commande. Il nous a semblé en effet important d'évaluer l'apport de la commande robuste d'ordre non entier aux modèles d'ordre non entier de générateurs synchrones validés dans cette thèse. La prise en compte de la saturation dans la modélisation fréquentielle de notre machine permet dès lors d'analyser la génération de commande CRONE la plus adaptée à notre procédé.

La synthèse et l'implantation de correcteurs d'ordre non entier n'ont malheureusement pas pu être faites dans le cadre de cette thèse, mais cela fera l'objet d'une poursuite d'études.

Conclusion générale

Des modèles fréquentiels non linéaires, précis et compacts du générateur synchrone ont été présentés dans cette thèse. Contrairement aux modèles classiques comportant plusieurs cellules (R-L), ils intègrent des impédances d'ordre un demi qui permettent de bien caractériser les phénomènes d'induction électromagnétique en réduisant en même temps l'ordre et le nombre des paramètres du modèle.

Dans une première partie, afin de prendre en compte les effets liés à la fréquence (comme l'effet de peau) ainsi que le phénomène de la saturation dans les circuits magnétiques de la machine synchrone, le modèle non linéaire d'ordre un demi de l'impédance d'une tôle ferromagnétique a été proposé. Grâce aux simulations par éléments finis d'une tôle ferromagnétique en régime de saturation, la structure et l'évolution des paramètres du modèle ont été validées.

Les résultats satisfaisants du chapitre II ont conduit, dans un deuxième temps, à l'établissement du schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone. Les impédances d'ordre un demi ont simplement remplacé les branches R-L du schéma équivalent de Park modélisant le développement de courants induits dans certaines pièces conductrices de la machine. Le modèle obtenu possède ainsi une certaine parcimonie, étant décrit avec un nombre de paramètres raisonnable. Ces paramètres ont par ailleurs tous un sens physique, étant relié directement aux caractéristiques physiques et géométriques de la machine.

Dans le but de valider ce nouveau schéma équivalent, un banc expérimental a été conçu pour effectuer des tests SSFR sur une machine synchrone « Enco » d'une puissance de 3 kVA, en présence de saturation. Les résultats de l'expérimentation ont permis d'identifier les paramètres de la machine pour chaque niveau de saturation. L'évolution des paramètres de la machine saturée étant similaire à celle de la tôle ferromagnétique, nous avons pu conclure à la validité de l'approche proposée.

Le chapitre IV a fait l'objet d'une démarche de calcul de la réponse temporelle d'une machine modélisée par des systèmes d'ordre non entier. A cet effet, le système d'état généralisé du générateur synchrone a été construit à partir des équations différentielles d'ordre

non entier de la machine synchrone. Un algorithme numérique a été implémenté sous le logiciel *Matlab*[®] afin de résoudre le système d'état d'ordre généralisé et trouver la réponse temporelle de la machine modélisée avec les systèmes d'ordre non entier. Trois différents états de fonctionnement du générateur ont été simulés : une marche à vide, l'établissement d'un régime permanent et un court-circuit. Nous avons également observé les régimes transitoires après le passage de la marche à vide au point de fonctionnement et de la marche à vide au court-circuit.

La dernière partie de ce mémoire a présenté une possibilité d'exploitation du modèle d'ordre non entier, non linéaire, notamment pour la synthèse de la commande robuste CRONE. Grâce au système d'état généralisé, la transmittance de l'alternateur a été calculée pour un point de fonctionnement donné. Ensuite, à partir des jeux de paramètres identifiés au chapitre IV, nous avons été capables de tracer les diagrammes de Bode pour les différentes incertitudes paramétriques, notamment pour la saturation (où la variation du gain pour la basse fréquence a été jusqu'à 10 dB). Les études menées peuvent être utilisées dans l'objectif de synthétiser une commande robuste et de simuler son fonctionnement.

Finalement, ce travail a permis d'élargir la connaissance sur les modèles d'ordre non entier des machines électriques. Néanmoins, il reste encore plusieurs problèmes et questions à analyser.

Ainsi, l'inconvénient majeur de la modélisation étudiée dans cette thèse est la nécessité d'avoir des données SSFR, indispensables pour pouvoir réaliser l'identification des paramètres. C'est une méthode très coûteuse en temps qui exige de plus une grande précision pendant la réalisation des mesures. Vu que le rotor de la machine est bloqué et alimenté avec un courant DC, il faut surveiller en permanence la température des enroulements et des autres éléments de la machine. Il serait ainsi intéressant de tenir compte de ces phénomènes thermiques dans la modélisation de la machine, notamment à travers l'identification des résistances du modèle. On pourrait également réfléchir à de nouvelles procédures d'identification basées sur des mesures réalisées *on-line* sur la machine.

Pour la conception des machines, il serait également pertinent de déterminer les pertes Fer directement à travers les paramètres identifiés et de valider cette modélisation à travers des simulations par éléments finis notamment.

Un deuxième inconvénient concerne la discrétisation et la résolution du système d'état généralisé, permettant de calculer la réponse temporelle de la machine. Le calcul de la dérivée d'ordre non entier nécessite de tenir compte de tous les instants du passé. En conséquence, une simulation de fonctionnement d'un dispositif pendant de longues périodes devient impossible à cause des limites de mémoire et de puissance du processeur utilisé. Là encore, de nombreux travaux portent sur les calculs numériques liés aux dérivées d'ordre non entier et devraient permettre à court terme une amélioration de ce point bloquant.

Malgré ces difficultés, la modélisation d'ordre non entier permettant de caractériser le comportement des machines électriques dans un domaine fréquentiel, peut être adaptée à tous les procédés électrotechniques dans lesquels se développent des courants induits.

La compacité et la justesse des modèles comportant les systèmes d'ordre non entier nous poussent aujourd'hui à les utiliser dans le domaine de la commande, notamment la commande robuste. Une approche unifiée, intégrant la modélisation d'ordre non entier et la commande robuste d'ordre non entier, comme par exemple la commande CRONE, permettrait de développer des outils originaux pour l'analyse simple de systèmes électrotechniques.

Annexe 1. Mesures expérimentales d'une tôle ferromagnétique saturée

Les mesures expérimentales ont été effectuées sur la tôle ferromagnétique M800-50A dont les caractéristiques physiques sont présentées dans le tableau A1.1. Elle a été entourée de deux bobinages à 118 spires : un bobinage en cuivre servant à saturer le matériau de la tôle avec un courant DC et d'un deuxième, fait de fil de Litz, servant à mesurer son impédance en introduisant un courant à faible amplitude et une fréquence variable (fig. A1.1). La courbe de saturation du matériau de la tôle est tracée sur la fig. A1.2.

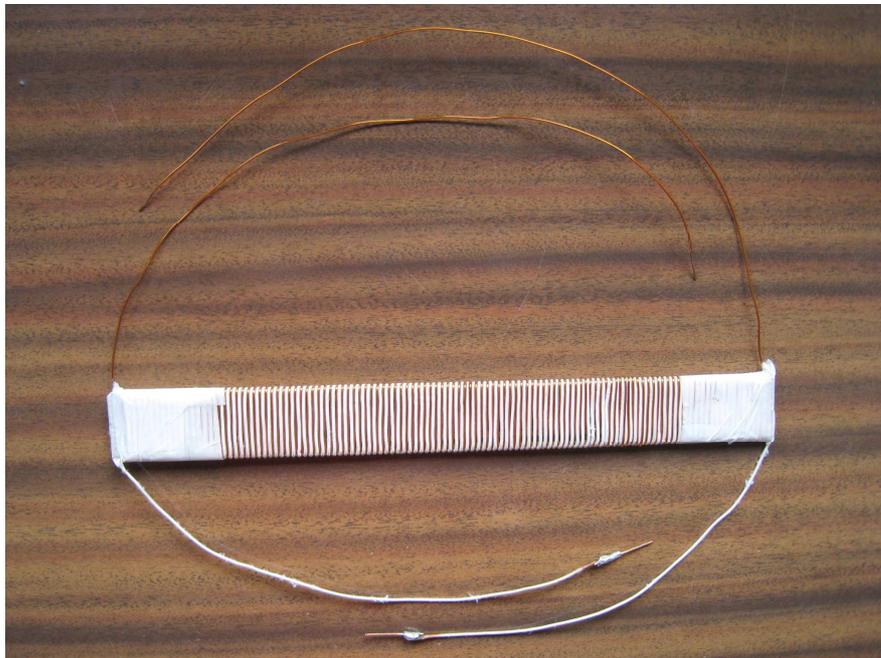


Fig. A1.1. Tôle ferromagnétique M800-50A avec les bobinages

Tableau A1.1. Caractéristiques physiques de la tôle M800-50A

Caractéristique	Valeur
Longueur (L)	0,3 m
Largeur (l)	0,03 m
Epaisseur (e)	0,00065 m
Conductivité (σ)	$1,5 \cdot 10^7$ S/m
Perméabilité de l'air (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Perméabilité relative (μ_r)	10027
Nombre de spires	118

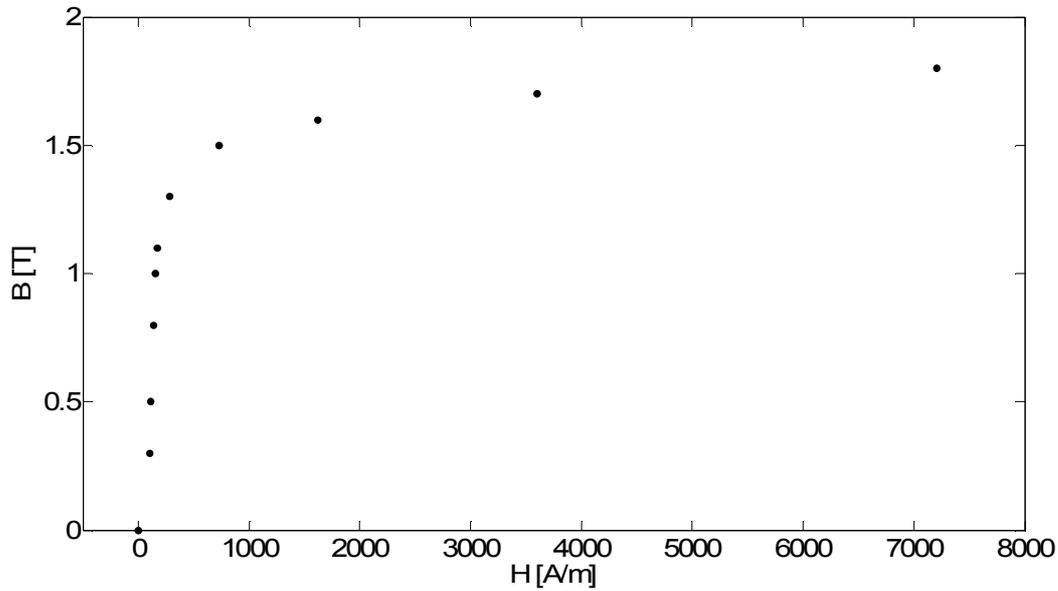


Fig. A1.2. Courbe de saturation de la tôle M800-50A

Etant limité par le matériel, l'impédance a été mesurée à partir de 40 Hz. Le courant magnétisant a été monté jusqu'à 8 A grâce à une source de tension DC stabilisée. Le schéma de connexion du banc de mesures est montré sur la fig. A1.3.

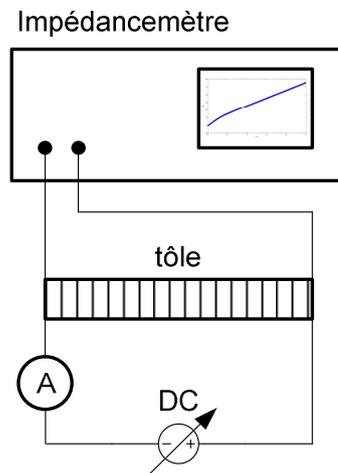


Fig. A1.3. Banc de mesure de l'impédance de la tôle

La fig. A1.4 présente les résultats de mesures ainsi que le modèle non linéaire d'ordre un demi (II.14) avec les paramètres $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$ calculés selon les équations (II.18) et (II.19). Les évolutions des paramètres L_0 et ω_0 avec le courant ainsi que les courbes les approximant sont tracées sur la fig. A1.5. Les paramètres identifiés pour les fonctions approximantes

(II.20) et (II.22) sont égaux à : $L_0' = 3,2860 \cdot 10^{-4}$, $\omega_0' = 348,2662$, $k = 0,0793$, $n = 1,8233$, $k' = 35,3275$ et $n' = 1,2139$.

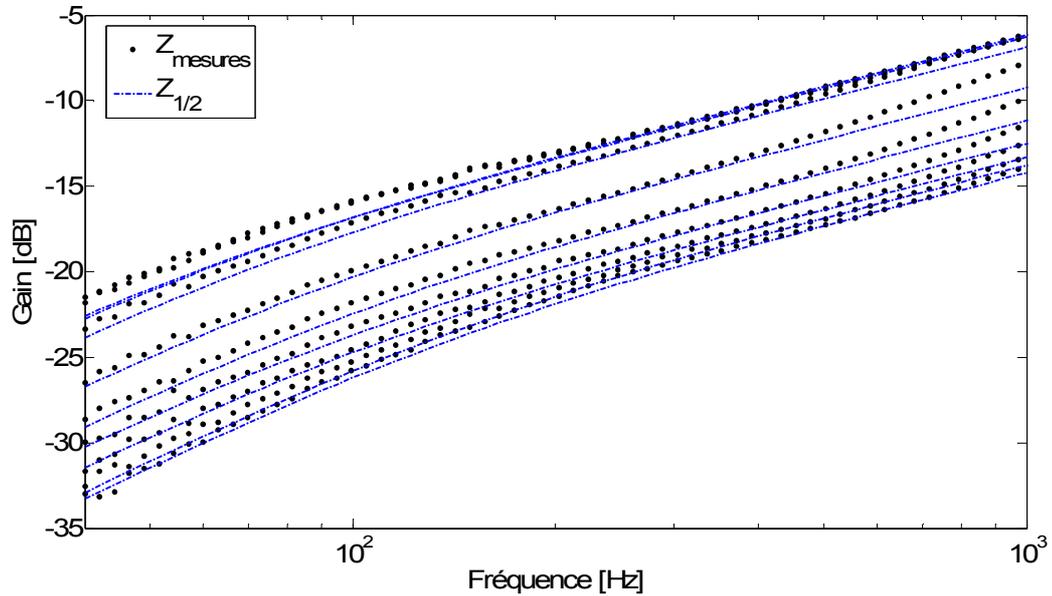


Fig. A1.4. Résultats de mesures et leurs modèles non linéaires d'ordre 1/2

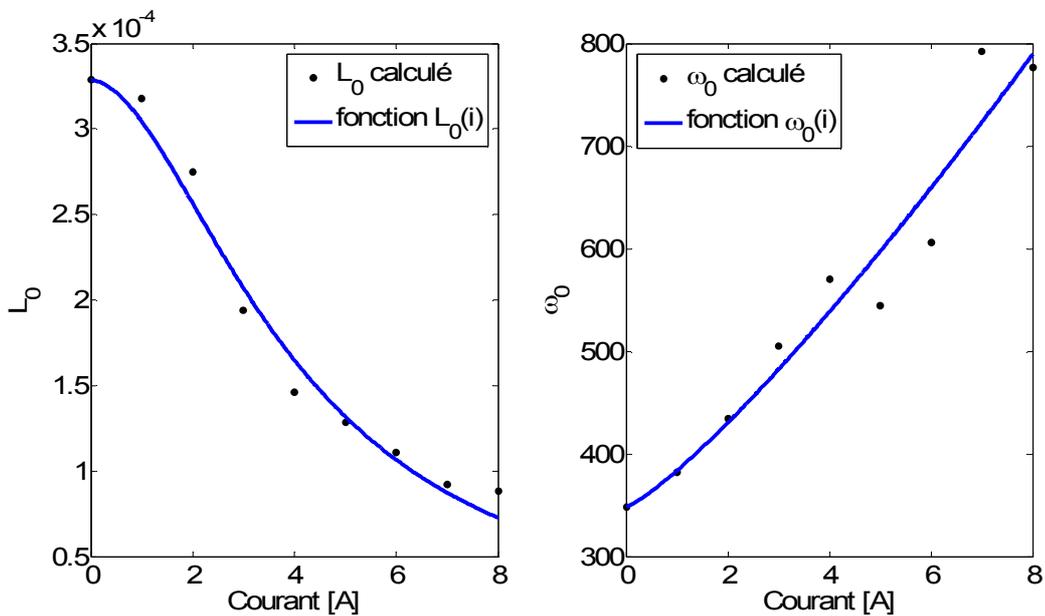


Fig. A1.5. Paramètres $L_0(i)$ et $\omega_0(i)$ d'une tôle réelle calculés à partir de mesures et approchés par les fonctions (II.20) et (II.22)

Finalement, le modèle non linéaire d'ordre un demi (II.23) peut être validé par rapport aux mesures expérimentales (fig. II.13).

Annexe 2. Expression analytique des grandeurs opérationnelles

Les grandeurs opérationnelles calculées à partir du schéma équivalent présenté sur la fig. III.5 s'écrivent :

$$L_d(\omega) = l_d + \frac{j\omega \cdot l_{ad} \cdot \frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{f12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{f12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}}{j\omega + \frac{j\omega \cdot l_{ad} + \frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{f12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{f12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}}{j\omega}} \quad (\text{A2.1})$$

$$L_q(\omega) = l_q + \frac{j\omega \cdot l_{aq} \cdot \frac{Z_{1q}^{1/2} \cdot (j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q})}{Z_{1q}^{1/2} + j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q}}}{j\omega \cdot l_{aq} + \frac{Z_{1q}^{1/2} \cdot (j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q})}{Z_{1q}^{1/2} + j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q}}} \quad (\text{A2.2})$$

$$sG(\omega) = \frac{\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} \cdot Z_{2d}^{1/2}}{(j\omega \cdot l_f + r_f) \cdot \left(\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} + j\omega \cdot l_{f12d} + Z_{2d}^{1/2} \right) + Z_{2d}^{1/2} \cdot \left(\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} + j\omega \cdot l_{f12d} \right)} \quad (\text{A2.3})$$

$$Z_{af0}(\omega) = \frac{\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} \cdot Z_{2d}^{1/2}}{j\omega \cdot l_{f12d} + \frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} + Z_{2d}^{1/2}} \quad (\text{A2.4})$$

Annexe 3. Grandeurs de base de la machine synchrone

Pour comparer les différents alternateurs, c'est-à-dire de puissance et de tensions nominales différentes, il est souvent utile d'utiliser un système réduit pour normaliser toutes les grandeurs électriques du système [39].

Les grandeurs réduites sont définies comme :

$$\text{grandeur réduite [p.u.]} = \frac{\text{grandeur réelle}}{\text{grandeur de base}} \quad (\text{A3.1})$$

Les grandeurs de base sont choisies habituellement de sorte que pour les conditions nominales les grandeurs du système telles que puissance, tension d'alimentation, etc. soient égales dans le système réduit à 1 p.u.

Le tableau A3.1 résume les caractéristiques nominales d'un alternateur telles qu'elles sont données par un constructeur tandis que les tableau A3.2 et tableau A3.3 présentent les définitions des grandeurs de base.

Tableau A3.1. Caractéristiques nominales d'un alternateur

Caractéristiques nominales	Notation
Puissance apparente	S_n
Tension entre phases	U_n
Fréquence d'utilisation	f_n
Inductance synchrone d'axe direct	l_{ad}
Inductance de fuite d'axe direct	$l_{\sigma s}$
Excitation nécessaire pour disposer d'un p.u. de tension à vide	I_{exco}

Grandeurs de base côté stator [39] :

Tableau A3.2. Grandeurs de base côté stator

Grandeurs de base	Notation	Définition
Tension phase / neutre	V_b	$\frac{U_n}{\sqrt{3}}$
Courant	I_b	$\frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_n}$
Fréquence (pulsation)	$f_b (\omega_b)$	$f_n (\omega_n)$
Impédance	Z_b	$\frac{U_n^2}{S_n}$

Grandeurs de base côté excitation [31, 18] :

Tableau A3.3. Grandeurs de base côté excitation

Grandeurs de base	Notation	Définition
Tension	V_{fb}	$Z_{fb} \cdot I_{fb}$
Courant	I_{fb}	$(l_{ad} - l_{\sigma s}) \cdot I_{exco}$
Impédance	Z_{fb}	$\frac{S_n}{I_{fb}^2}$

Annexe 4. Détail des calculs du système d'état généralisé

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1^{(1/2)} = x_2 \\
 x_2^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{\sigma_s} + l_{ad} + L_{ch}} \cdot \left[(R_{ch} + r_s) \cdot x_1 - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_9 + (\omega \cdot l_{\sigma_s} + \omega \cdot l_{aq}) \cdot x_{10} + \omega \cdot l_{aq} \cdot x_{12} + \omega \cdot l_{aq} \cdot x_{14} \right] \\
 x_3^{(1/2)} = x_4 \\
 x_4^{(1/2)} = \frac{1}{l_{of} + l_{f12d} + l_{ad}} \cdot \left[l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - r_f \cdot x_3 + l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} + (l_{f12d} + l_{ad}) \cdot x_9 + u_f \right] \\
 x_5^{(1/2)} = x_6 \\
 x_6^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{ad}} \cdot \left[l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{ad} + l_{f12d}) \cdot x_4^{(1/2)} + (l_{ad} + l_{f12d}) \cdot x_9 + \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}} \cdot x_8 + R_{2d} \cdot x_7 \right] \\
 x_7^{(1/2)} = x_8 \\
 x_8^{(1/2)} = x_9 \\
 x_9^{(1/2)} = \frac{-1}{\frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}}} \cdot \left[\frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot (x_2^{(1/2)} - x_4^{(1/2)} + x_6^{(1/2)})^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} + (L_{1d} + l_{ad}) \cdot x_6^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_9 \right] \\
 x_{10}^{(1/2)} = x_{11} \\
 x_{11}^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{\sigma_s} + l_{aq} + L_{ch}} \cdot \left[(R_{ch} + r_s) \cdot x_{10} + l_{aq} \cdot x_{13}^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{16} - (\omega \cdot l_{\sigma_s} + \omega \cdot l_{ad}) \cdot x_1 + \omega \cdot l_{ad} \cdot x_3 - \omega \cdot l_{ad} \cdot x_5 - \omega \cdot l_{ad} \cdot x_7 \right] \\
 x_{12}^{(1/2)} = x_{13} \\
 x_{13}^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{aq}} \cdot \left[l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} + (l_{aq} + l_{2q}) \cdot x_{16} + r_{2q} \cdot x_{14} \right] \\
 x_{14}^{(1/2)} = x_{15} \\
 x_{15}^{(1/2)} = x_{16} \\
 x_{16}^{(1/2)} = \frac{-1}{\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}}} \cdot \left[\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot (x_{11}^{(1/2)} + x_{13}^{(1/2)})^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} + (L_{1q} + l_{aq}) \cdot x_{13}^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{16} \right]
 \end{array} \right.$$

Calcul de $x_2^{(1/2)}$, $x_4^{(1/2)}$ et $x_6^{(1/2)}$:

$$\begin{cases} x_2^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{\sigma s} + l_{ad} + L_{ch}} \cdot \left[(R_{ch} + r_s) \cdot x_1 - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_9 + (\omega \cdot l_{\sigma s} + \omega \cdot l_{aq}) \cdot x_{10} + \omega \cdot l_{aq} \cdot x_{12} + \omega \cdot l_{aq} \cdot x_{14} \right] \\ x_4^{(1/2)} = \frac{1}{l_{\sigma f} + l_{f12d} + l_{ad}} \cdot \left[l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - r_f \cdot x_3 + l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} + (l_{f12d} + l_{ad}) \cdot x_9 + u_f \right] \\ x_6^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{ad}} \cdot \left[l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{ad} + l_{f12d}) \cdot x_4^{(1/2)} + (l_{ad} + l_{f12d}) \cdot x_9 + \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}} \cdot x_8 + R_{2d} \cdot x_7 \right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{-(R_{ch} + r_s)}{l_{\sigma s} + l_{ad} + L_{ch}} & E &= \frac{l_{ad}}{l_{\sigma f} + l_{f12d} + l_{ad}} & I &= \frac{-l_{ad}}{l_{ad}} \\ B &= \frac{-l_{ad}}{l_{\sigma s} + l_{ad} + L_{ch}} & F &= \frac{r_f}{l_{\sigma f} + l_{f12d} + l_{ad}} & J &= \frac{-(l_{ad} + l_{f12d})}{l_{ad}} \\ C &= \frac{-\omega \cdot (l_{\sigma s} + l_{aq})}{l_{\sigma s} + l_{ad} + L_{ch}} & G &= \frac{l_{f12d} + l_{ad}}{l_{\sigma f} + l_{f12d} + l_{ad}} & K &= \frac{-R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}} \cdot l_{ad}} \\ D &= \frac{-\omega \cdot l_{aq}}{l_{\sigma s} + l_{ad} + L_{ch}} & H &= \frac{1}{l_{\sigma f} + l_{f12d} + l_{ad}} & L &= \frac{-R_{2d}}{l_{ad}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_2^{(1/2)} = A \cdot x_1 - B \cdot x_4^{(1/2)} + B \cdot x_6^{(1/2)} + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14} \\ x_4^{(1/2)} = E \cdot x_2^{(1/2)} - F \cdot x_3 + E \cdot x_6^{(1/2)} + G \cdot x_9 + H \cdot V_f \\ x_6^{(1/2)} = I \cdot x_2^{(1/2)} - J \cdot x_4^{(1/2)} + J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7 \end{cases}$$

$$T_1 = A \cdot x_1 + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14}$$

$$T_2 = -F \cdot x_3 + G \cdot x_9 + H \cdot V_f$$

$$T_3 = J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7$$

$$\begin{cases} x_2^{(1/2)} + B \cdot x_4^{(1/2)} - B \cdot x_6^{(1/2)} = T_1 \\ -E \cdot x_2^{(1/2)} + x_4^{(1/2)} - E \cdot x_6^{(1/2)} = T_2 \\ -I \cdot x_2^{(1/2)} + J \cdot x_4^{(1/2)} + x_6^{(1/2)} = T_3 \end{cases}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & B & -B \\ -E & 1 & -E \\ -I & J & 1 \end{bmatrix} \quad W_{x_2} = \begin{bmatrix} T_1 & B & -B \\ T_2 & 1 & -E \\ T_3 & J & 1 \end{bmatrix} \quad W_{x_4} = \begin{bmatrix} 1 & T_1 & -B \\ -E & T_2 & -E \\ -I & T_3 & 1 \end{bmatrix} \quad W_{x_6} = \begin{bmatrix} 1 & B & T_1 \\ -E & 1 & T_2 \\ -I & J & T_3 \end{bmatrix}$$

$$\det W = 1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE$$

$$\det W_{x_2} = T_1 - BET_3 - BJT_2 + BT_3 + JET_1 - BT_2$$

$$\det W_{x_4} = T_2 + IET_1 + BET_3 - IBT_2 + ET_3 + ET_1$$

$$\det W_{x_6} = T_3 - BIT_2 - EJT_1 + IT_1 - JT_2 + BET_3$$

$$\begin{cases} x_2^{(1/2)} = \frac{T_1 - BET_3 - BJT_2 + BT_3 + JET_1 - BT_2}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE} \\ x_4^{(1/2)} = \frac{T_2 + IET_1 + BET_3 - IBT_2 + ET_3 + ET_1}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE} \\ x_6^{(1/2)} = \frac{T_3 - BIT_2 - EJT_1 + IT_1 - JT_2 + BET_3}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_2^{(1/2)} &= \frac{A \cdot x_1 + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14} - BE \cdot (J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7) - BJ \cdot (-F \cdot x_3 + G \cdot x_9 + H \cdot V_f) + B \cdot (J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7) + JE \cdot (A \cdot x_1 + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14}) - B \cdot (-F \cdot x_3 + G \cdot x_9 + H \cdot V_f)}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE} \\ x_4^{(1/2)} &= \frac{-F \cdot x_3 + G \cdot x_9 + H \cdot V_f + IE \cdot (A \cdot x_1 + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14}) + BE \cdot (J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7) - IB \cdot (-F \cdot x_3 + G \cdot x_9 + H \cdot V_f) + E \cdot (J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7) + E \cdot (A \cdot x_1 + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14})}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE} \\ x_6^{(1/2)} &= \frac{J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7 - BI \cdot (-F \cdot x_3 + G \cdot x_9 + H \cdot V_f) - EJ \cdot (A \cdot x_1 + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14}) + I \cdot (A \cdot x_1 + B \cdot x_9 + C \cdot x_{10} + D \cdot x_{12} + D \cdot x_{14}) - J \cdot (-F \cdot x_3 + G \cdot x_9 + H \cdot V_f) + BE \cdot (J \cdot x_9 + K \cdot x_8 + L \cdot x_7)}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE} \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{A + JEA}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_9 = \frac{IEA + EA}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{17} = \frac{-EJA + IA}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_2 = \frac{BJF + BF}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{10} = \frac{-F + IBF}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{18} = \frac{BIF + JF}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_3 = \frac{-BEL + BL}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{11} = \frac{BEL + EL}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{19} = \frac{L + BEL}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_4 = \frac{-BEK + BK}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{12} = \frac{BEK + EK}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{20} = \frac{K + BEK}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_5 = \frac{B - BEJ - BJG + BJ + JEB - BG}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{13} = \frac{G + IEB + BEJ - IBG + EJ + EB}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{21} = \frac{J - BIG - EJB + IB - JG + BEJ}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_6 = \frac{C + JEC}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{14} = \frac{IEC + EC}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{22} = \frac{EJC + IC}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_7 = \frac{D + JED}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{15} = \frac{IED + ED}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{23} = \frac{-EJD + ID}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_8 = \frac{-BJH - BH}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{16} = \frac{H - IBH}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$k_{24} = \frac{-BIH - JH}{1 + BEI + BEJ - BI + EJ + BE}$$

$$x_2^{(1/2)} = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_3 + k_3 \cdot x_7 + k_4 \cdot x_8 + k_5 \cdot x_9 + k_6 \cdot x_{10} + k_7 \cdot x_{12} + k_7 \cdot x_{14} + k_8 \cdot u_f$$

$$x_4^{(1/2)} = k_9 \cdot x_1 + k_{10} \cdot x_3 + k_{11} \cdot x_7 + k_{12} \cdot x_8 + k_{13} \cdot x_9 + k_{14} \cdot x_{10} + k_{15} \cdot x_{12} + k_{15} \cdot x_{14} + k_{16} \cdot u_f$$

$$x_6^{(1/2)} = k_{17} \cdot x_1 + k_{18} \cdot x_3 + k_{19} \cdot x_7 + k_{20} \cdot x_8 + k_{21} \cdot x_9 + k_{22} \cdot x_{10} + k_{23} \cdot x_{12} + k_{23} \cdot x_{14} + k_{24} \cdot u_f$$

Calcule de $x_{11}^{(1/2)}$ et $x_{13}^{(1/2)}$:

$$\begin{cases} x_{11}^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{\sigma s} + l_{aq} + L_{ch}} \cdot [(R_{ch} + r_s) \cdot x_{10} + l_{aq} \cdot x_{13}^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{16} - (\omega \cdot l_{\sigma s} + \omega \cdot l_{ad}) \cdot x_1 + \omega \cdot l_{ad} \cdot x_3 - \omega \cdot l_{ad} \cdot x_5 - \omega \cdot l_{ad} \cdot x_7] \\ x_{13}^{(1/2)} = \frac{-1}{l_{aq}} \cdot [l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} + (l_{aq} + l_{2q}) \cdot x_{16} + r_{2q} \cdot x_{14}] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{-(R_{ch} + r_s)}{l_{\sigma s} + l_{aq} + L_{ch}} & R &= \frac{-l_{aq}}{l_{aq}} \\ N &= \frac{-l_{aq}}{l_{\sigma s} + l_{aq} + L_{ch}} & S &= \frac{-(l_{aq} + l_{2q})}{l_{aq}} \\ O &= \frac{\omega \cdot (l_{\sigma s} + l_{ad})}{l_{\sigma s} + l_{aq} + L_{ch}} & T &= \frac{-r_{2q}}{l_{aq}} \\ P &= \frac{\omega \cdot l_{ad}}{l_{\sigma s} + l_{aq} + L_{ch}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11}^{(1/2)} = M \cdot x_{10} + N \cdot x_{13}^{(1/2)} + N \cdot x_{16} + O \cdot x_1 - P \cdot x_3 + P \cdot x_5 + P \cdot x_7 \\ x_{13}^{(1/2)} = R \cdot x_{11}^{(1/2)} + S \cdot x_{16} + T \cdot x_{14} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_4 &= O \cdot x_1 - P \cdot x_3 + P \cdot x_5 + P \cdot x_7 + M \cdot x_{10} + N \cdot x_{16} \\ T_5 &= T \cdot x_{14} + S \cdot x_{16} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11}^{(1/2)} - N \cdot x_{13}^{(1/2)} = T_4 \\ -R \cdot x_{11}^{(1/2)} + x_{13}^{(1/2)} = T_5 \end{cases}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -N \\ -R & 1 \end{bmatrix} \quad W_{x_{11}} = \begin{bmatrix} T_4 & -N \\ T_5 & 1 \end{bmatrix} \quad W_{x_{13}} = \begin{bmatrix} 1 & T_4 \\ -R & T_5 \end{bmatrix}$$

$$\det W = 1 - NR$$

$$\det W_{x_{11}} = T_4 + NT_5$$

$$\det W_{x_{13}} = T_5 + RT_4$$

$$\begin{cases} x_{11}^{(1/2)} = \frac{T_4 + NT_5}{1 - NR} \\ x_{13}^{(1/2)} = \frac{T_5 + RT_4}{1 - NR} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}^{(1/2)} = \frac{O \cdot x_1 - P \cdot x_3 + P \cdot x_5 + P \cdot x_7 + M \cdot x_{10} + N \cdot x_{16} + N \cdot (T \cdot x_{14} + S \cdot x_{16})}{1 - NR} \\ x_{13}^{(1/2)} = \frac{T \cdot x_{14} + S \cdot x_{16} + R \cdot (O \cdot x_1 - P \cdot x_3 + P \cdot x_5 + P \cdot x_7 + M \cdot x_{10} + N \cdot x_{16})}{1 - NR} \end{cases}$$

$$k_{25} = \frac{O}{1 - NR} \quad k_{30} = \frac{RO}{1 - NR}$$

$$k_{26} = \frac{P}{1 - NR} \quad k_{31} = \frac{RP}{1 - NR}$$

$$k_{27} = \frac{M}{1 - NR} \quad k_{32} = \frac{RM}{1 - NR}$$

$$k_{28} = \frac{NT}{1 - NR} \quad k_{33} = \frac{T}{1 - NR}$$

$$k_{29} = \frac{N + NS}{1 - NR} \quad k_{34} = \frac{S + RN}{1 - NR}$$

$$\begin{cases} x_{11}^{(1/2)} = k_{25} \cdot x_1 - k_{26} \cdot x_3 + k_{26} \cdot x_5 + k_{26} \cdot x_7 + k_{27} \cdot x_{10} + k_{28} \cdot x_{14} + k_{29} \cdot x_{16} \\ x_{13}^{(1/2)} = k_{30} \cdot x_1 - k_{31} \cdot x_3 + k_{31} \cdot x_5 + k_{31} \cdot x_7 + k_{32} \cdot x_{10} + k_{33} \cdot x_{14} + k_{34} \cdot x_{16} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1^{(1/2)} = x_2 \\
 x_2^{(1/2)} = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_3 + k_3 \cdot x_7 + k_4 \cdot x_8 + k_5 \cdot x_9 + k_6 \cdot x_{10} + k_7 \cdot x_{12} + k_7 \cdot x_{14} + k_8 \cdot V_f \\
 x_3^{(1/2)} = x_4 \\
 x_4^{(1/2)} = k_9 \cdot x_1 + k_{10} \cdot x_3 + k_{11} \cdot x_7 + k_{12} \cdot x_8 + k_{13} \cdot x_9 + k_{14} \cdot x_{10} + k_{15} \cdot x_{12} + k_{15} \cdot x_{14} + k_{16} \cdot V_f \\
 x_5^{(1/2)} = x_6 \\
 x_6^{(1/2)} = k_{17} \cdot x_1 + k_{18} \cdot x_3 + k_{19} \cdot x_7 + k_{20} \cdot x_8 + k_{21} \cdot x_9 + k_{22} \cdot x_{10} + k_{23} \cdot x_{12} + k_{23} \cdot x_{14} + k_{24} \cdot V_f \\
 x_7^{(1/2)} = x_8 \\
 x_8^{(1/2)} = x_9 \\
 x_9^{(1/2)} = \frac{-1}{\frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}}} \cdot \left[\frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot \left(x_2^{(1/2)} - x_4^{(1/2)} + x_6^{(1/2)} \right)^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} + (L_{1d} + l_{ad}) \cdot x_6^{(1/2)} + l_{ad} \cdot x_9 \right] \\
 x_{10}^{(1/2)} = x_{11} \\
 x_{11}^{(1/2)} = k_{25} \cdot x_1 - k_{26} \cdot x_3 + k_{26} \cdot x_5 + k_{26} \cdot x_7 + k_{27} \cdot x_{10} + k_{28} \cdot x_{14} + k_{29} \cdot x_{16} \\
 x_{12}^{(1/2)} = x_{13} \\
 x_{13}^{(1/2)} = k_{30} \cdot x_1 - k_{31} \cdot x_3 + k_{31} \cdot x_5 + k_{31} \cdot x_7 + k_{32} \cdot x_{10} + k_{33} \cdot x_{14} + k_{34} \cdot x_{16} \\
 x_{14}^{(1/2)} = x_{15} \\
 x_{15}^{(1/2)} = x_{16} \\
 x_{16}^{(1/2)} = \frac{-1}{\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}}} \cdot \left[\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot \left(x_{11}^{(1/2)} + x_{13}^{(1/2)} \right)^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} + (L_{1q} + l_{aq}) \cdot x_{13}^{(1/2)} + l_{aq} \cdot x_{16} \right]
 \end{array} \right.$$

Calcul de $x_9^{(1/2)}$:

$$x_9^{(1/2)} = \frac{-1}{\frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot \left[\begin{array}{l} (k_1 - k_9 + k_{17}) \cdot x_1 + (k_2 - k_{10} + k_{18}) \cdot x_3 + (k_3 - k_{11} + k_{19}) \cdot x_7 + \\ (k_4 - k_{12} + k_{20}) \cdot x_8 + (k_5 - k_{13} + k_{21}) \cdot x_9 + (k_6 - k_{14} + k_{22}) \cdot x_{10} + \\ (k_7 - k_{15} + k_{23}) \cdot x_{12} + (k_7 - k_{15} + k_{23}) \cdot x_{14} + (k_8 - k_{16} + k_{24}) \cdot u_f \end{array} \right]^{(1/2)} + \\ l_{ad} \cdot (k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_3 + k_3 \cdot x_7 + k_4 \cdot x_8 + k_5 \cdot x_9 + k_6 \cdot x_{10} + k_7 \cdot x_{12} + k_7 \cdot x_{14} + k_8 \cdot u_f) - \\ l_{ad} \cdot (k_9 \cdot x_1 + k_{10} \cdot x_3 + k_{11} \cdot x_7 + k_{12} \cdot x_8 + k_{13} \cdot x_9 + k_{14} \cdot x_{10} + k_{15} \cdot x_{12} + k_{15} \cdot x_{14} + k_{16} \cdot u_f) + \\ (L_{1d} + l_{ad}) \cdot (k_{17} \cdot x_1 + k_{18} \cdot x_3 + k_{19} \cdot x_7 + k_{20} \cdot x_8 + k_{21} \cdot x_9 + k_{22} \cdot x_{10} + k_{23} \cdot x_{12} + k_{23} \cdot x_{14} + k_{24} \cdot u_f) + l_{ad} \cdot x_9 \end{array} \right\} = \\ = \frac{1}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} - \left[\begin{array}{l} (k_1 - k_9 + k_{17}) \cdot x_2 + (k_2 - k_{10} + k_{18}) \cdot x_4 + (k_3 - k_{11} + k_{19}) \cdot x_8 + \\ (k_4 - k_{12} + k_{20}) \cdot x_9 + (k_6 - k_{14} + k_{22}) \cdot x_{11} + \\ (k_7 - k_{15} + k_{23}) \cdot x_{13} + (k_7 - k_{15} + k_{23}) \cdot x_{15} + (k_8 - k_{16} + k_{24}) \cdot V_f^{(1/2)} \end{array} \right] - \sqrt{\omega_{1d}} \cdot \left[\begin{array}{l} (k_1 - k_9 + k_{17}) \cdot x_1 + (k_2 - k_{10} + k_{18}) \cdot x_3 + (k_3 - k_{11} + k_{19}) \cdot x_7 + \\ (k_4 - k_{12} + k_{20}) \cdot x_8 + (k_5 - k_{13} + k_{21}) \cdot x_9 + (k_6 - k_{14} + k_{22}) \cdot x_{10} + \\ (k_7 - k_{15} + k_{23}) \cdot x_{12} + (k_7 - k_{15} + k_{23}) \cdot x_{14} + (k_8 - k_{16} + k_{24}) \cdot V_f \end{array} \right] - \\ \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot (k_{17} \cdot x_1 + k_{18} \cdot x_3 + k_{19} \cdot x_7 + k_{20} \cdot x_8 + k_{21} \cdot x_9 + k_{22} \cdot x_{10} + k_{23} \cdot x_{12} + k_{23} \cdot x_{14} + k_{24} \cdot V_f) - \sqrt{\omega_{1d}} \cdot x_9 \end{array} \right\}$$

$$m_1 = \frac{-\sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_1 - k_9 + k_{17}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{17}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_2 = \frac{-(k_1 - k_9 + k_{17})}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_3 = \frac{-\sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_2 - k_{10} + k_{18}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{18}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_4 = \frac{-(k_2 - k_{10} + k_{18})}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_5 = \frac{-\sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_3 - k_{11} + k_{19}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{19}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_6 = \frac{-(k_3 - k_{11} + k_{19}) - \sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_4 - k_{12} + k_{20}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{20}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_7 = \frac{-(k_4 - k_{12} + k_{20}) - \sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_5 - k_{13} + k_{21}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{21} - \sqrt{\omega_{1d}}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_8 = \frac{-\sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_6 - k_{14} + k_{22}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{22}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_9 = \frac{-(k_6 - k_{14} + k_{22})}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_{10} = \frac{-\sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_7 - k_{15} + k_{23}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{23}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_{11} = \frac{-(k_7 - k_{15} + k_{23})}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_{12} = \frac{-(k_8 - k_{16} + k_{24})}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$m_{13} = \frac{-\sqrt{\omega_{1d}} \cdot (k_8 - k_{16} + k_{24}) - \frac{L_{1d} \cdot \sqrt{\omega_{1d}}}{l_{ad}} \cdot k_{24}}{1 + k_5 - k_{13} + k_{21}}$$

$$x_9^{(1/2)} = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + m_4 \cdot x_4 + m_5 \cdot x_7 + m_6 \cdot x_8 + m_7 \cdot x_9 + m_8 \cdot x_{10} + m_9 \cdot x_{11} + m_{10} \cdot x_{12} + m_{11} \cdot x_{13} + m_{10} \cdot x_{14} + m_{11} \cdot x_{15} + m_{12} \cdot u_f^{(1/2)} + m_{13} \cdot u_f$$

Calcul de $x_{16}^{(1/2)}$:

$$x_{16}^{(1/2)} = \frac{-1}{\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}}} \cdot \left[\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot \left(k_{25} \cdot x_1 - k_{26} \cdot x_3 + k_{26} \cdot x_5 + k_{26} \cdot x_7 + k_{27} \cdot x_{10} + k_{28} \cdot x_{14} + k_{29} \cdot x_{16} + \right)^{(1/2)} + l_{aq} \cdot (k_{25} \cdot x_1 - k_{26} \cdot x_3 + k_{26} \cdot x_5 + k_{26} \cdot x_7 + k_{27} \cdot x_{10} + k_{28} \cdot x_{14} + k_{29} \cdot x_{16}) + \right. \\ \left. (L_{1q} + l_{aq}) \cdot (k_{30} \cdot x_1 - k_{31} \cdot x_3 + k_{31} \cdot x_5 + k_{31} \cdot x_7 + k_{32} \cdot x_{10} + k_{33} \cdot x_{14} + k_{34} \cdot x_{16}) + l_{aq} \cdot x_{16} \right] = \\ = \frac{1}{1 + k_{29} + k_{34}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & - \left[(k_{25} + k_{30}) \cdot x_2 - (k_{26} + k_{31}) \cdot x_4 + (k_{26} + k_{31}) \cdot x_6 + \right] - \sqrt{\omega_{1q}} \cdot (k_{25} \cdot x_1 - k_{26} \cdot x_3 + k_{26} \cdot x_5 + k_{26} \cdot x_7 + k_{27} \cdot x_{10} + k_{28} \cdot x_{14} + k_{29} \cdot x_{16}) - \\ & \frac{(L_{1q} + l_{aq}) \cdot \sqrt{\omega_{1q}}}{l_{aq}} \cdot (k_{30} \cdot x_1 - k_{31} \cdot x_3 + k_{31} \cdot x_5 + k_{31} \cdot x_7 + k_{32} \cdot x_{10} + k_{33} \cdot x_{14} + k_{34} \cdot x_{16}) - \sqrt{\omega_{1q}} \cdot x_{16} \end{aligned} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
m_{14} &= \frac{-\sqrt{\omega_{1q}} \cdot k_{25} - \frac{(L_{1q} + l_{aq}) \cdot \sqrt{\omega_{1q}}}{l_{aq}} \cdot k_{30}}{1 + k_{29} + k_{34}} & m_{19} &= \frac{-(k_{27} + k_{32})}{1 + k_{29} + k_{34}} \\
m_{15} &= \frac{-(k_{25} + k_{30})}{1 + k_{29} + k_{34}} & m_{20} &= \frac{-\sqrt{\omega_{1q}} \cdot k_{28} - \frac{(L_{1q} + l_{aq}) \cdot \sqrt{\omega_{1q}}}{l_{aq}} \cdot k_{33}}{1 + k_{29} + k_{34}} \\
m_{16} &= \frac{-\sqrt{\omega_{1q}} \cdot k_{26} - \frac{(L_{1q} + l_{aq}) \cdot \sqrt{\omega_{1q}}}{l_{aq}} \cdot k_{31}}{1 + k_{29} + k_{34}} & m_{21} &= \frac{-(k_{28} + k_{33})}{1 + k_{29} + k_{34}} \\
m_{17} &= \frac{-(k_{26} + k_{31})}{1 + k_{29} + k_{34}} & m_{22} &= \frac{-\sqrt{\omega_{1q}} \cdot k_{29} - \frac{(L_{1q} + l_{aq}) \cdot \sqrt{\omega_{1q}}}{l_{aq}} \cdot k_{34} - \sqrt{\omega_{1q}}}{1 + k_{29} + k_{34}} \\
m_{18} &= \frac{-\sqrt{\omega_{1q}} \cdot k_{27} - \frac{(L_{1q} + l_{aq}) \cdot \sqrt{\omega_{1q}}}{l_{aq}} \cdot k_{32}}{1 + k_{29} + k_{34}}
\end{aligned}$$

$$x_{16}^{(1/2)} = m_{14} \cdot x_1 + m_{15} \cdot x_2 - m_{16} \cdot x_3 - m_{17} \cdot x_4 + m_{16} \cdot x_5 + m_{17} \cdot x_6 + m_{16} \cdot x_7 + m_{17} \cdot x_8 + m_{18} \cdot x_{10} + m_{19} \cdot x_{11} + m_{20} \cdot x_{14} + m_{21} \cdot x_{15} + m_{22} \cdot x_{16}$$

Bibliographie

- [1] **Ahrabian Gh., El-Serafi A. M.**, *Identification of the synchronous machine parameters under magnetic saturated conditions using Stand Still Frequency Response Test*, Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 2001.
- [2] **Alger P. L.**, *Induction Machines*, Gordon and Breach, New York, 1970.
- [3] **Anuszczyk J.**, *Maszyny elektryczne w energetyce. Zagadnienia wybrane*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- [4] **Asgharian R., Tavakoli S. A.**, *A systematic approach to performance weights selection in design of robust H^∞ PSS using genetic algorithms*, IEEE Trans. on Energy Conversion, Volume 11, No. 1, March 1996.
- [5] **Baab D. S., Williams J. E.**, *Network Analysis of A-C Machine Conductors*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Volume 70, No. 2, pp. 2001-2005, July 1951.
- [6] **Bautista M., Bultel Y., Ozil P.**, *Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell Modeling: DC and AC Solutions*, Trans IChemE, Part A, 82 (A7), pp. 907-917, July 2004.
- [7] **Bertrand N., Sabatier J., Briat O., Vinassa J.-M.**, *Fractional non-linear modelling of ultracapacitors*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, Volume 15, Issue 5, pp. 1327-1337, May 2010.
- [8] **Boboń A., Kudła J., Żywiec A.**, *Parametry elektromagnetyczne maszyny synchronicznej. Wykorzystanie metody elementów skończonych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1998.
- [9] **Buchheit C., Bulin G., Poujol C., Jomier T.**, *More Electric Propulsion System*, Proc. More Electric Aircraft Forum, Barcelona, Spain, 8-11 September 2009.
- [10] **Buller S., Karden E., Kok D., de Doncker R. W.**, *Modeling the dynamic behaviour of supercapacitors using impedance spectroscopy*, IEEE Transactions on Industry Applications, Volume 38, No. 6, November/December 2002.
- [11] **Canay I. M.**, *Determination of the model parameters of machines from the reactance operators $x_d(p)$ and $x_q(p)$* , IEEE Transaction of Energy Conversion, Volume 8, No. 2, pp. 272-279, June 1993.
- [12] **Cao H., Deng Z., Li X., Yang J., Qin Y.**, *Dynamic modeling of electrical characteristics of solid oxide fuel cells using fractional derivatives*, International Journal of Hydrogen Energy, Volume 35, Issue 4, pp. 1749-1758, February 2010.
- [13] **Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Graziani S., Strazzeri S.**, *A Fractional Model for IPMC Actuators*, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, IMTC 2008, pp. 2103-2107, 12-15 May 2008.

-
- [14] **Chatelain J. D.**, *Machines électriques*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1989.
- [15] **Craiem D. O.**, **Armentano R. L.**, *Arterial viscoelasticity: a fractional derivative model*, 28th Annual International Conference of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS '06, pp. 1098-1101, August 30 2006-September 3 2006.
- [16] **Creer W. H.**, **Novotny D. W.**, **Lipo T. A.**, *Determination of equivalent circuits for induction machines with skin effect using terminal characteristics*, Electric Machines and Power Systems, Volume 10, No. 5-6, pp. 379-394, 1985.
- [17] **Dandeno P. L.**, **Iravani M. R.**, *Third order turboalternator electrical stability models with applications to subsynchronous resonance studies*, IEEE Transaction of Energy Conversion, Volume 10, No. 1, pp. 78-84, March 1995.
- [18] **Dandeno P. L.**, **Kundur P.**, **Poray A. T.**, **Zein El-Din H. M.**, *Adaptation and validation of turbogenerator model parameters through on-line frequency response measurements*, IEEE Trans. on Energy Conversion, Volume 2, pp. 1656-1661, September 1987.
- [19] **Enacheanu O.**, *Modélisation fractale des réseaux électriques*, Thèse de doctorat de Grenoble INP, Octobre 2008.
- [20] **Faucher J.**, **Khaorapapong T.**, **Kabbaj H.**, *Comparison of four fractional power order transfer function models of rotor bar*, Proceedings of the Fifth International Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2001, Volume1, pp. 448-451, Shenyang, 18-20 August 2001.
- [21] **Faucher J.**, **Khaorapapong T.**, **Kabbaj H.**, *Parametric identification of fractional transfer function models of induction motor rotor bar*, Proceedings of the IEEE SDEMPED Conference, International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, pp. 299-303, Grado (Italy), 1-3 September 2001.
- [22] **Faucher J.**, *Simulation Study of new Aircraft Electrical Power Network performances*, Proc. More Electric Aircraft Forum, Barcelona, Spain, 8-11 September 2009.
- [23] **Francis B. A.**, *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer Verlag, 1987.
- [24] **Gorenflo R.**, **Mainardi F.**, *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, pp. 223 – 276, Wien and New York 1997.
- [25] **IEEE Std**, *Standard procedure for obtaining synchronous machine parameters by StandStill Frequency Response testing*, IEEE Std 115 A, 1995.

-
- [26] **Ionescu C. M., De Keyser R.**, *Time Domain Validation of a Fractional Order Model for Human Respiratory System*, The 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, MELECON 2008, pp. 89-95, Ajaccio, 5-7 May 2008.
- [27] **Jomier Ed. T.**, *MOET Technical Report*, www.moetproject.eu, December 2009.
- [28] **Jun W., Zhengming Z., Xiaoying S.**, *Comparisons of electric machines used for the electro-mechanical actuation systems in all-electric airplane*, Sixth International Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2003, Volume 2, pp. 665-668, 9-11 Novembre 2003.
- [29] **Kamwa I., Farzaneh M.**, *Data translation and order reduction for turbine-generator models used in network studies*, IEEE Transaction of Energy Conversion, Volume 12, No. 2, pp. 118-126, June 1997.
- [30] **Kamwa I., Viarouge P., Le-Hui H., Dickinson J.**, *A frequency domain maximum likelihood of synchronous machine high order models using SSFR data*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Volume 7, pp. 525-536, Sept. 1992.
- [31] **Kamwa I., Viarouge P.**, *On equivalent circuit structures for empirical modelling of turbine-generators*, IEEE Transaction on Energy Conversion, Volume 9, No. 3, pp.579-586, September 1994.
- [32] **Kaneko T., Shimada M., Kujiraoka S., Kojima T.**, *Easy Maintenance and Environmentally-friendly Train Traction System*, Hitachi Review, 53(1):15-19, 2004.
- [33] **Kaukonen J.**, *Salient pole synchronous machine modelling in an industrial direct torque controlled drive application*, Thesis at Lappeenranta University of Technology, March 1999.
- [34] **Keyhani A., Tsai H.**, *Igspice simulations of induction machines with saturable inductances*, IEEE Transactions. on Energy Conversion, Volume 4, pp. 118-125, March 1989.
- [35] **Klingshirn E. A., Jordan H. E.**, *Simulation of Polyphase Induction Machines with Deep Rotor Bars*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Volume PAS-89, No. 6, pp. 1038-1043, July/August 1970.
- [36] **Krause P. C.**, *Analysis of Electric Machinery*, McGraw-Hill Book Company, United States of America, 1986.
- [37] **Kuhn E.**, *Contribution à la conception optimale d'une motorisation hybride parallèle : Choix d'un modèle d'accumulateur*, Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, 2004.
- [38] **Kulish V. V., Chan W.-K.**, *Fractional Model of Market Behavior: a New Modeling Approach*, International Conference on Cyberworlds, pp. 289-296, 23-25 November 2005.

-
- [39] **Kundur P.**, *Power system stability and control*, Electric Power Research Institute, McGraw-Hill, 1994.
- [40] **Lee B. S., Gushee D. E.**, *Massive Electricity Storage Makes Sense*, Chemical Engineering Progress, February 2010.
- [41] **Lewandowski W. M.**, *Proekologiczne odnawialne źródła energii*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2007.
- [42] **Lin M., Srivastava A. K., Schulz N. N.**, *A Generic Digital Model of Multiphase Synchronous Generator for Shipboard Power System*, IEEE Electric Ship Technologies Symposium, ESTS 2007, pp. 348-355, Arlington (Virginia), 21-23 May 2007.
- [43] **Liu J. G., Xu M. Y.**, *Study on the Viscoelasticity of Cancellous Bone Based on Higher-Order Fractional Models*, The 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering, ICBBE 2008, pp. 1733-1736, 16-18 May 2008.
- [44] **Malik O. P., Zeng Y.**, *Design of a robust adaptive controller for a water turbine governing system*, IEEE Trans. on Energy Conversion, Volume 10, No. 2, June 1995.
- [45] **Martinez R., Bolea Y., Grau A., Martinez H.**, *Fractional DC/DC converter in solar-powered electrical generation systems*, IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA 2009, pp. 1-6, 22-25 September 2009.
- [46] **Mayergoyz I.**, *Nonlinear diffusion of electromagnetic fields: with applications to eddy currents and superconductivity*, Academic Press, 1998.
- [47] **Melchior P., Orsoni B., Lavalie O., Oustaloup A.**, *The CRONE toolbox for Matlab: fractional path planning design inrobotics*, Proceedings of the 10th IEEE International Workshop on Robot and Human Interactive Communication, 2001.
- [48] **N'Doye I., Zasadzinski M., Radhy N.-E., Bouaziz A.**, *Robust Controller Design for Linear Fractional-Order Systems with Nonlinear Time-Varying Model Uncertainties*, 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED '09, pp. 821-826, Thessaloniki, 24-26 June 2009.
- [49] **Oldham K. B., Spanier J.**, *The fractional calculus – Theory and applications and differentiation and integration to arbitrary order*, Academic Press, New York, 1974.
- [50] **Orelind G., Wozniak L., Medanic J., Whittemore T.**, *Optimal PID gain schedule for hydrogenerators-design and application*, IEEE Trans. Energy Conversion, Volume 4, No. 3, pp. 300-307, September 1989.
- [51] **Ostalczyk P.**, *The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis*, International Journal of Systems Science, Volume 31, Issue 12, pp. 1551-1561, December 2000.

-
- [52] **Ostalczyk P.**, *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2008.
- [53] **Oustaloup A., Cois O., Le Lay L.**, *Représentation et identification par modèle non entier*, Hermes Science Publications, Paris, 2005.
- [54] **Oustaloup A.**, *La commande CRONE*, Hermès science publications, Paris, 1991.
- [55] **Oustaloup A.**, *La dérivation non entière*, Hermès, Paris, 1995.
- [56] **Oustaloup A., Mathieu B.**, *La commande CRONE: Du scalaire au multivariable*, Hermès science publications, Paris 1999.
- [57] **Oustaloup A., Melchior P., Lanusse P., Cois O., Dancla F.**, *The CRONE toolbox for Matlab*, Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design, Anchorage, Alaska, USA, 25-27 September 2000.
- [58] **Oustaloup A., Moreau X., Nouillant M.**, *From the second generation CRONE control to the CRONE suspension*, International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Conference Proceedings, Volume 2, pp. 143-148, 17-20 October 1993.
- [59] **Podlubny I.**, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 198, London, Academic Press, 1999.
- [60] **Podlubny I.**, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.
- [61] **Racewicz S.**, *Modélisation des machines synchrones par des systèmes d'ordre un demi*, Stage Master 2 Recherche à l'INP de Grenoble, 2005.
- [62] **Racewicz S., Riu D., Retière N., Chrzan P. J.**, *Half-order modelling of turboalternators – An adapted method of parameter identification*, ICEM 2006, Chania, Crete Island, September 2006.
- [63] **Racewicz S., Riu D., Retière N., Chrzan P. J.**, *Non linear half-order modeling of synchronous machine*, IEMDC 2009, pp. 778-783, Miami, Florida, 3-6 May 2009.
- [64] **Ravel P.**, *Electrical distribution of high power: impacts, technologies*, Proc. More Electric Aircraft Forum, Barcelona, Spain, 8-11 September 2009.
- [65] **Retière N. M., Ivanès M. S.**, *An introduction to electric machine modeling by systems of noninteger order. Application to double-cage induction machine*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Volume 14, Issue 4, pp. 1026-1032, December 1999.
- [66] **Retière N.**, *Etude des défauts dans les associations onduleur – machine asynchrone. Exemple d'une machine de traction*, Thèse de doctorat de l'INPG, Novembre 1997.

- [67] **Retière N., Ivanès M.**, *Modeling of electric machines by implicit derivative half-order systems*, IEEE Power Engineering Review, pp. 62–64, September 1998.
- [68] **Riu D.**, *Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi*, Thèse de doctorat de l'INPG, Décembre 2001.
- [69] **Riu D., Retière N., Ivanès M.**, *Electric machine modelling by half order systems*, ICEM 2000, pp. 1646-1650, Espoo, Finlande, 28-30 August 2000.
- [70] **Riu D., Retière N., Ivanès M.**, *Induced currents modeling by half-order systems application to hydro- and turbo-alternators*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Volume 18, pp. 94-99, March 2003.
- [71] **Riu D., Retière N., Ivanès M.**, *Turbine generator modeling by non-integer order systems*, IEMDC 2001, pp. 185-187, Cambridge (Massachusetts), 17-20 June 2001.
- [72] **Riu D., Retière N., Linzen D.**, *Half-order modelling of supercapacitors*, IEEE industry applications conference: 39th IAS annual meeting, pp. 2550-2554, Seattle, 3-7 October 2004.
- [73] **Riu D., Retière N.**, *Modélisation des machines électriques par des systèmes d'ordre un demi*, Revue internationale de Génie Electrique, Volume 3, No. 4/2000, 2000.
- [74] **Ronkowski M.**, *Circuit-oriented models of electrical machines for simulation of converter systems*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektryka, nr 78, Gdańsk 1995.
- [75] **Rossi C., Casadei D., Pilati A., Marano M.**, *Wound Rotor Salient Pole Synchronous Machine Drive for Electric Traction*, Conference Record of the 2006 IEEE Industry Applications Conference, 41st IAS Annual Meeting, Volume 3, pp. 1235-1241, Tampa (Florida), 8-12 October 2006.
- [76] **Sailler S., Usman Iftikhar M., Druart F., Riu D., Bulter Y., Retière N.**, *Modélisation fractionnaire des piles à combustible de type PEMFC*, 18^{ème} Congrès Français de Mécanique, CFM 2007, Grenoble, 27-31 août 2007.
- [77] **Sautreuil M., Retière N., Riu D., Senane O.**, *A Generic Method for Robust Performance Analysis of Aircraft DC Power Systems*, IECON, Orlando, Etats-Unis, 10-13 Novembre 2008.
- [78] **Skogestad S., Postlethwaite I.**, *Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. Second Edition*, John Wiley & Sons, Ltd, England, 2005.
- [79] **Sobczyk T. J.**, *Graniczne możliwości obwodowych modeli maszyn elektrycznych*, Proceedings of XLII International Symposium on Electrical Machines, SME 2006, Cracow, Poland, 3-6 July 2006.
- [80] **Stolarczyk M.**, *Różniczka niecałkowitego rzędu w sterowaniu robota mobilnego*, rozprawa doktorska na wydziale Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki Politechniki Łódzkiej, 2007.

-
- [81] **Sutkowski T.**, *Rezerwowe i bezprzerwowe zasilanie w energię elektryczną - urządzenia i układy*, Stowarzyszenie Elektryków Polskich. Centralny Ośrodek Szkolenia i Wydawnictw, Warszawa 2007.
- [82] **Urbain M., Rael S., Davat B., Desprez P.**, *Energetical Modelling of Lithium-Ion Battery Discharge and Relaxation*, IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC 2008, pp. 3628-3634, Rhodes, 15-19 June 2008.
- [83] **Usman Iftikhar M., Riu D., Druart F., Rosini S., Bultel Y., Retière N.**, *Dynamic Modeling of Proton Exchange Membrane Fuel Cell Using Non-integer Derivatives*, Journal of Power Sources, Volume 160, Issue 2, pp. 1170-1182, 6 October 2006.
- [84] **Varentsov V. K., Koshev A. N., Chirkina M. A.**, *The Electrochemical Processes in Porous Ambience - Nonstationary Models*, Third International Forum on Strategic Technologies, IFOST 2008, pp.148-152, Novosibirsk-Tomsk, 23-29 June 2008.
- [85] **Vas P.**, *Electrical Machines and Drives. A space vector theory approach*, Oxford Science Publications, 1992.
- [86] **Venayagamoorthy G. K., Harley R. G.**, *A continually on-line trained neurocontroller for excitation and turbine control of a turbogenerator*, IEEE Trans. Energy Conversion, Volume 16, No. 3, pp. 261-269, September 2001.
- [87] **Xhuvani A.**, *Modélisation et identification des paramètres d'une machine synchrone destinée à être alimentée par un convertisseur statique*, Thèse de doctorat de l'INP de Toulouse, 1989.
- [88] **Yang B., Makarov Y., Desteese J., Viswanathan V., Nyeng P., McManus B., Pease J.**, *On the use of energy storage technologies for regulation services in electric power systems with significant penetration of wind energy*, 5th International Conference on European Electricity Market, EEM 2008, pp. 1-6, Lisboa, 28-30 May 2008.
- [89] **Zhao C., Zhao Y., Liu Y., Li Y., Luo L.**, *Fractional Personnel Losing Modeling Approach and Application*, International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering, CiSE 2009, pp. 1-4, 11-13 December 2009.
- [90] **Zhao Q., Jiang J.**, *Robust controller design for generator excitation systems*, IEEE Trans. on Energy Conversion, Volume 10, No. 2, June 1995.

Identification et modélisation d'ordre fractionnaire des machines synchrones fonctionnant comme générateur

Un modèle fréquentiel non linéaire, précis et compact du générateur synchrone a été présenté dans cette thèse. Contrairement aux modèles classiques comportant plusieurs cellules R-L, il intègre des impédances d'ordre un demi qui permettent de bien caractériser les phénomènes d'induction électromagnétique sur la grande plage de fréquences, tout en réduisant l'ordre et le nombre des paramètres du modèle. Le modèle proposé tient compte de l'effet de peau dans les barres de la cage d'amortisseurs, des courants induits dans les pièces massives du rotor et de la saturation des circuits magnétiques de la machine. Les impédances d'ordre non entier qui modélisent les phénomènes mentionnés ont été validées par rapport aux mesures effectuées sur une tôle ferromagnétique bobinée, ainsi qu'en les comparant aux simulations par éléments finis. L'identification des paramètres de la machine étudiée a été faite grâce aux caractéristiques SSFR (ang. *StandStill Frequency Response*) mesurées sur la machine synchrone saturée. Ensuite, une méthodologie pour le calcul de la réponse temporelle d'une machine modélisée par des systèmes d'ordre non entier a été présentée. A cet effet, le système d'état généralisé du générateur synchrone a été construit à partir des équations différentielles d'ordre non entier de la machine synchrone. Finalement, une possibilité d'exploitation du modèle non linéaire d'ordre non entier du générateur synchrone, notamment pour la synthèse de la commande robuste CRONE, a été brièvement présentée.

Mots-clés : machine synchrone, modélisation d'ordre non entier, identification des paramètres, SSFR, commande CRONE

Identification and non-integer order modelling of synchronous machines operating as generator

The thesis presents an original mathematical model of a synchronous generator using non-integer order derivatives. Contrary to the classical models of multiple R-L branches, it integrates half-order impedances, which allow an accurate description of the electromagnetic induction phenomena along a wide frequency range. Thus minimising at the same time the order and the number of parameters in the model. The proposed model takes into account the skin effect in damper bars, the eddy-currents in massive parts of the rotor and the magnetic saturation of the machine. Non-integer order transfer functions which model the above mentioned phenomena, have been validated with respect to the measurements performed on a ferromagnetic wounded sheet and also to finite element simulations. Parameter identification of the studied machine has been done thanks to the SSFR (*StandStill Frequency Response*) characteristics measured on the saturated synchronous machine. Furthermore, an approach to the time response calculations of the machine modelled by non-integer order systems has been presented. For this purpose, the system of synchronous generator state equations has been built from the synchronous machine half-order differential equations. Finally, the non-linear, non-integer order model for a synchronous generator has been applied to the robust control CRONE synthesis.

Keywords: synchronous machine, noninteger order modelling, parameter identification, SSFR, CRONE control

Identyfikacja i modelowanie rzędu ułamkowego maszyn synchronicznych pracujących jako generator

W pracy przedstawiono oryginalny model matematyczny generatora synchronicznego wykorzystujący pochodne rzędów niecałkowitych. W przeciwieństwie do modeli klasycznych, zbudowanych z dużej liczby drabinek R-L, zawiera on impedancje rzędu połówkowego, które pozwalają w dokładny sposób opisać zjawiska indukcji elektromagnetycznej w szerokim zakresie częstotliwości, minimalizując jednocześnie rząd i liczbę parametrów modelu. Zaproponowany model uwzględnia efekt naskórkowości w prętach klatki tłumiącej, efekty działania prądów wirowych w częściach masywnych wirnika oraz nasycenie obwodu magnetycznego maszyny. Transmitancje rzędu ułamkowego mające na celu modelowanie powyższych zjawisk zostały zweryfikowane na podstawie pomiarów impedancji uzwojonej blachy ferromagnetycznej oraz symulacji metodą elementów skończonych. Identyfikacja parametrów badanej maszyny została przeprowadzona w oparciu o pomierzone charakterystyki SSFR (ang. *StandStill Frequency Response*) wykonane na stopniowo magnesowanej maszynie synchronicznej. Następnie przedstawiono metodologię modelowania generatora synchronicznego w dziedzinie czasu w oparciu o jego model rzędu niecałkowitego. W tym celu zbudowany został układ równań stanu, wyprowadzony na podstawie równań różniczkowych rzędu połówkowego maszyny synchronicznej. W pracy przedstawiono skrótowo sposób wykorzystania nieliniowego modelu rzędu ułamkowego generatora synchronicznego do syntezy sterowania odpornego CRONE.

Słowa kluczowe: maszyna synchroniczna, modelowanie rzędu niecałkowitego, identyfikacja parametrów, SSFR, sterowanie CRONE