

# Schémas numériques pour les modèles de turbulence statistiques en un point.

Soutenance de thèse

Aurélien Larcher

IRSN/DPAM/SEMIC/LIMSI

05 Novembre 2010

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et algorithme
- 4 Schéma monotone pour les modèles RANS
- 5 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 6 Convergence de l'équation de convection–diffusion volumes-finis

## Contexte

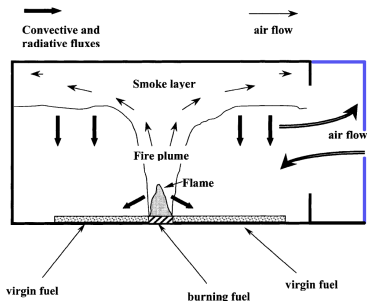
Contexte au sein de la DPAM : la simulation des incendies dans les milieux confinés.

Des écoulements caractérisés par :

- 1 des domaines de calcul de grande dimension :  $\approx$  mètres
- 2 des structures d'écoulements de très petite taille :  $\approx$  millimètres-microns

Les écoulements à décrire sont complexes :

- Géométries complexes  
⇒ recirculations, séparations
- Convection naturelle  
⇒ stratification



⇒ Traiter la turbulence dans le cas d'écoulements complexes ?

# Problématique

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique**
- 3 Discrétisations et algorithme
- 4 Schéma monotone pour les modèles RANS
- 5 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 6 Convergence de l'équation de convection–diffusion volumes-finis

## Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad p = \bar{p} + p'$$

## Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad p = \bar{p} + p'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left( 2\mu_\ell (\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right) - \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \mathbf{R} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds  $\mathbf{R} = -\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$  et  $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^t \bar{\mathbf{u}}}{2}$ .

## Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad p = \bar{p} + p'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left( 2\mu_\ell \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) - \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \mathbf{R} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds  $\mathbf{R} = -\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$  et  $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^t \bar{\mathbf{u}}}{2}$ .

- Prendre en compte l'effet du cisaillement turbulent ?

→ viscosité additionnelle dans le terme de diffusion:  $\mu_t$



## Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad p = \bar{p} + p'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left( 2\mu_\ell (\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right) - \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \mathbf{R} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds  $\mathbf{R} = -\overline{\rho\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$  et  $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla\bar{\mathbf{u}} + \nabla^t\bar{\mathbf{u}}}{2}$ .

- Prendre en compte l'effet du cisaillement turbulent ?

→ viscosité additionnelle dans le terme de diffusion:  $\mu_t$

- Modéliser les corrélations des fluctuations de vitesse  $\overline{u'_i u'_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  ?

→ processus de diffusion pour le champ moyen:

$$\mathbf{R} = 2\mu_t (\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{Id} \quad (\text{Boussinesq})$$

## Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad p = \bar{p} + p'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left( 2(\mu_\ell + \mu_t)(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right) - \nabla(\bar{p} + \frac{2}{3}k) \\ \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds  $\mathbf{R} = -\overline{\rho\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$  et  $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla\bar{\mathbf{u}} + \nabla^t\bar{\mathbf{u}}}{2}$ .

- Prendre en compte l'effet du cisaillement turbulent ?

→ viscosité additionnelle dans le terme de diffusion:  $\mu_t$

- Modéliser les corrélations des fluctuations de vitesse  $\overline{u'_i u'_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  ?

→ processus de diffusion pour le champ moyen:

$$\mathbf{R} = 2\mu_t(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{Id} \quad (\text{Boussinesq})$$

⇒ Comment évaluer la viscosité turbulente  $\mu_t$  ?

## Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre
  - calculer  $\mu_t$  par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle
  - choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser  $\mu_t$

## Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre
  - calculer  $\mu_t$  par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle
  - choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser  $\mu_t$
- Cas du modèle  $k - \varepsilon$  :

- ▶ *Vitesse* : Énergie cinétique turbulente (ECT)

$$k = \frac{1}{2} \overline{|u'|^2}$$

- ▶ *Temps* : Taux de dissipation de la ECT

$$\varepsilon = 2\nu \overline{|\mathbf{D}(u')|^2}$$

## Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre  
→ calculer  $\mu_t$  par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle  
→ choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser  $\mu_t$
- Cas du modèle  $k - \varepsilon$  :

- ▶ *Vitesse* : Énergie cinétique turbulente (ECT)

$$k = \frac{1}{2} \overline{|u'|^2}$$

- ▶ *Temps* : Taux de dissipation de la ECT

$$\varepsilon = 2\nu \overline{|\mathbf{D}(u')|^2}$$

- Calcul de  $\mu_t$  par relation de Prandtl-Kolmogorov

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

## Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre  
→ calculer  $\mu_t$  par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle  
→ choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser  $\mu_t$
- Cas du modèle  $k - \varepsilon$  :

- ▶ *Vitesse* : Énergie cinétique turbulente (ECT)

$$k = \frac{1}{2} \overline{|u'|^2}$$

- ▶ *Temps* : Taux de dissipation de la ECT

$$\varepsilon = 2\nu \overline{|\mathbf{D}(u')|^2}$$

- Calcul de  $\mu_t$  par relation de Prandtl-Kolmogorov

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

⇒ Comment évaluer les échelles  $k$  et  $\varepsilon$  ?

## Équations de bilan turbulentes

Production turbulente :  $\mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

## Équations de bilan turbulentes

$$\text{Production turbulente : } \mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}(k, \varepsilon)}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

Non-linéarités



## Équations de bilan turbulentes

$$\text{Production turbulente : } \mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}(k, \varepsilon)}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

Non-linéarités

- Taux de dissipation de l'ECT :

$$\underbrace{\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right)}_{(2)} = \underbrace{\frac{\varepsilon}{k} \left( C_{\varepsilon 1} \mathbf{P}(k, \varepsilon) - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \right)}_{(3+4)}$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\rho$  vérifiant le bilan de masse :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0$

## Équations de bilan turbulentes

$$\text{Production turbulente : } \mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}(k, \varepsilon)}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

Non-linéarités  
+  
Couplage

- Taux de dissipation de l'ECT :

$$\underbrace{\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right)}_{(2)} = \frac{\varepsilon}{k} \underbrace{\left( C_{\varepsilon 1} \mathbf{P}(k, \varepsilon) - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \right)}_{(3+4)}$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\rho$  vérifiant le bilan de masse :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0$

## En résumé : Équations de bilan pour le modèle RANS $k - \varepsilon$ complet

(Par souci de clarté,  $\mathbf{u}$  et  $p$  désignent désormais les champs moyens.)

- 1 Bilan de quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{g}$$

avec  $\mathbf{g}$  terme de forçage.

- 2 Conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- 3 Équations de bilan couplées pour les échelles  $k$  et  $\varepsilon$  :

$$\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_k(k, \varepsilon) \nabla k) = f_k(k, \varepsilon)$$

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k, \varepsilon) \nabla \varepsilon) = f_\varepsilon(k, \varepsilon)$$

## En résumé : Équations de bilan pour le modèle RANS $k - \varepsilon$ complet

(Par souci de clarté,  $\mathbf{u}$  et  $p$  désignent désormais les champs moyens.)

- 1 Bilan de quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{g}$$

avec  $\mathbf{g}$  terme de forçage.

- 2 Conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- 3 Équations de bilan couplées pour les échelles  $k$  et  $\varepsilon$  :

$$\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_k(k, \varepsilon) \nabla k) = f_k(k, \varepsilon)$$

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k, \varepsilon) \nabla \varepsilon) = f_\varepsilon(k, \varepsilon)$$

Fonctions non-linéaires de  $k$  et  $\varepsilon$  !

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et algorithme**
- 4 Schéma monotone pour les modèles RANS
- 5 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 6 Convergence de l'équation de convection–diffusion volumes-finis

## Maillage admissible et partition en temps

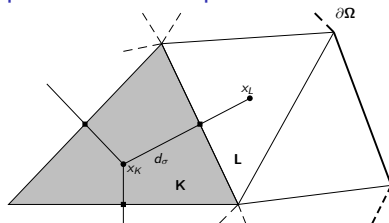


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- $\mathcal{M}$  : famille de volumes de contrôles  $K$ , polygones ( $d = 2$ ) ou polyèdres ( $d = 3$ ) convexes et disjoints.

## Maillage admissible et partition en temps

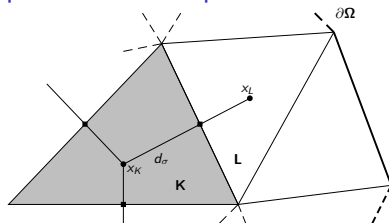


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- $\mathcal{M}$  : famille de volumes de contrôles  $K$ , polygones ( $d = 2$ ) ou polyèdres ( $d = 3$ ) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$  : ensemble des faces du maillage

## Maillage admissible et partition en temps

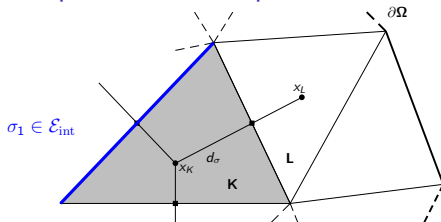


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- $\mathcal{M}$  : famille de volumes de contrôles  $K$ , polygones ( $d = 2$ ) ou polyèdres ( $d = 3$ ) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$  : ensemble des faces du maillage
  - ▶  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  ensemble des faces internes



## Maillage admissible et partition en temps

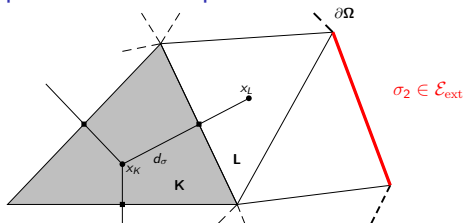


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- $\mathcal{M}$  : famille de volumes de contrôles  $K$ , polygones ( $d = 2$ ) ou polyèdres ( $d = 3$ ) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$  : ensemble des faces du maillage
  - ▶  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  ensemble des faces internes
  - ▶  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  ensemble des faces externes

## Maillage admissible et partition en temps

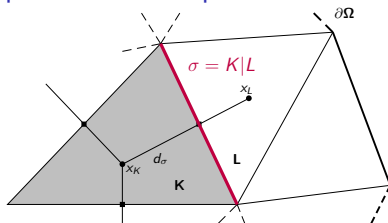


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- $\mathcal{M}$  : famille de volumes de contrôles  $K$ , polygones ( $d = 2$ ) ou polyèdres ( $d = 3$ ) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$  : ensemble des faces du maillage
  - ▶  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  ensemble des faces internes
  - ▶  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  ensemble des faces externes
  - ▶ Pour tout  $L$  voisin de  $K$ ,  $\sigma = K|L$  face commune à  $K$  et  $L$

## Maillage admissible et partition en temps

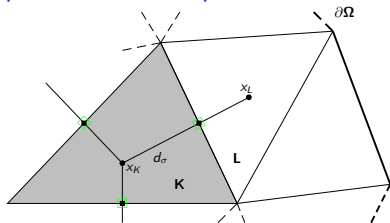


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- $\mathcal{M}$  : famille de volumes de contrôles  $K$ , polygones ( $d = 2$ ) ou polyèdres ( $d = 3$ ) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$  : ensemble des faces du maillage
  - ▶  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  ensemble des faces internes
  - ▶  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  ensemble des faces externes
  - ▶ Pour tout  $L$  voisin de  $K$ ,  $\sigma = K|L$  face commune à  $K$  et  $L$
- $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{M}}$  : famille de points vérifiant une condition d'orthogonalité
  - ▶  $[x_K, x_L]$  orthogonal à  $\sigma_{K|L}$
  - ▶  $x_K \in K$

## Maillage admissible et partition en temps

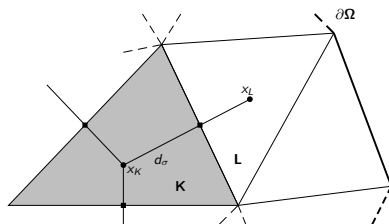
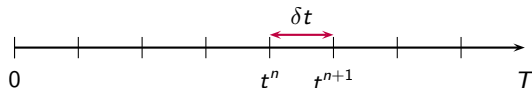


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- $\mathcal{M}$  : famille de volumes de contrôles  $K$ , polygones ( $d = 2$ ) ou polyèdres ( $d = 3$ ) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$  : ensemble des faces du maillage
- $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{M}}$  : famille de points vérifiant une condition d'orthogonalité
- Partition uniforme de l'intervalle de temps  $[0, T]$  en intervalles  $[t^{n-1}, t^n]_{1 \leq n \leq N}$



Pour les analyses de convergence et pour avoir des estimations uniformes par rapport au maillage, on définit une suite de discrétisations régulières par :

### Definition

$(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  de  $\Omega$  est une suite de discrétisations régulières

- 1  $h_{\mathcal{M}}^{(m)} \rightarrow 0$  quand  $m \rightarrow \infty$ ,
- 2 il existe un paramètre de régularité  $\theta_0 > 0$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}}^{(m)} \geq \theta_0, \forall m \in \mathbb{N}$ , avec:

$$(2) \quad \theta_{\mathcal{M}} = \inf_{K \in \mathcal{M}} \left\{ \frac{d_{K,\sigma}}{d_{\sigma}}; \sigma \in \mathcal{E}(K) \right\} \cup \left\{ \frac{d_{K,\sigma}}{\text{diam}(K)}; \sigma \in \mathcal{E}(K) \right\}$$

(Dessin ?)

# Élément finis de Crouzeix–Raviart

# Méthode de volumes finis standard

## Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à  $t^{n+1}$ ,  $0 \leq n < N$  :

- 1 Trouver  $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$  tel que:

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

Préservation de la **positivité** de  $k$  et  $\varepsilon$  ?

- ▶ Traitement du terme de convection
- ▶ Semi-discrétisation adaptée des termes sources, pour  $\xi = k, \varepsilon$  :

$$f_\xi(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n) = \alpha_\xi(k^n, \varepsilon^n) - \xi^{n+1} \beta_\xi(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

avec  $\alpha_k, \beta_k$  deux fonctions non-linéaires telles que  $\alpha_k > 0$  et  $\beta_k \geq 0$



## Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à  $t^{n+1}$ ,  $0 \leq n < N$  :

- 1 Trouver  $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$  tel que: [Schéma VF + Méthode de Newton]

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

- 2 Trouver  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  tel que:

- 1 Prédiction :

$$\frac{\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \rho^{n-1} \mathbf{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}$$

- 2 Projection  $L^2$  :

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0$$

## Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à  $t^{n+1}$ ,  $0 \leq n < N$  :

- 1 Trouver  $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$  tel que: [Schéma VF + Méthode de Newton]

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

- 2 Trouver  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  tel que: [Schéma EF + Méthode de projection]

- 1 Prédiction :

$$\frac{\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \rho^{n-1} \mathbf{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}$$

- 2 Projection  $L^2$  :

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0$$

## Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à  $t^{n+1}$ ,  $0 \leq n < N$  :

- 1 Trouver  $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$  tel que: [Schéma VF + Méthode de Newton]

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

- 2 Trouver  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  tel que: [Schéma EF + Méthode de projection]

- 1 Prédiction :

$$\frac{\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \rho^{n-1} \mathbf{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}$$

- 2 Projection  $L^2$  :

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0$$

- 3 Conservation de la masse à l'instant  $t^{n+1}$  :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1}) = 0$$

## Note sur la conservation de la masse

- Discrétisation du bilan de masse en volumes finis :
- Discrétisation du bilan de masse en Crouzeix–Raviart :
- Propriété de monotonicité :

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et algorithme
- 4 Schéma monotone pour les modèles RANS**
- 5 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 6 Convergence de l'équation de convection–diffusion volumes-finis

## Problème étudié

$\Omega$  ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ .

Équations de bilan de  $k$  et  $\varepsilon$  couplées :

$$\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_k(k, \varepsilon) \nabla k) = \mathbf{P} - \rho \varepsilon$$

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k, \varepsilon) \nabla \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} \mathbf{P} - \rho C_{\varepsilon 2} \varepsilon)$$

avec  $\rho$  et  $\mathbf{u}$  suffisamment réguliers, supposés connus et vérifiant :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Peut-on construire un schéma de volumes finis préservant inconditionnellement la positivité des inconnues ?

## Discretisation du système

- **Bilan de masse** :  $(\rho\bar{u})_\sigma^n$ ,  $\rho^n$  et  $\rho^{n-1}$  connus à  $t^{n+1}$  et vérifiant,

$$(4) \quad \text{pour tout } K \in \mathcal{M}, \quad |K| \frac{\rho_K^n - \rho_K^{n-1}}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} (\rho\bar{u})_\sigma^n = 0$$

- **Équation modèle pour  $k$**  :

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla_{\mathcal{M}} \cdot ((\rho\bar{u})^n k^{n+1}) - \Delta_{\mathcal{M}, \mu^n}(k^{n+1}) = S^{n+1}$$

- ▶ **Opérateur de convection VF** :

$$[\nabla_{\mathcal{M}} \cdot \rho\bar{u}k]_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| (\rho\bar{u})_\sigma k_\sigma$$

avec  $(\rho\bar{u})_\sigma$  les flux massiques vérifiant le bilan de masse (4) et  $k_\sigma$  est la discrétisation *upwind*.

- ▶ **Terme de diffusion VF**:

$$- [\Delta_{\mathcal{M}, \mu}(k)]_K = \frac{1}{|K|} \left[ \sum_{\sigma=K|L} \mu_\sigma \frac{|\sigma|}{d_\sigma} (k_K - k_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \mu_\sigma \frac{|\sigma|}{d_\sigma} k_K \right]$$

Linéarisation:  $\mu(k, \varepsilon)$  calculée grâce aux valeurs de  $k$  and  $\varepsilon$  évalués au pas de temps précédent.

## Discrétisation du système (2)

### • Équation modèle pour $k$ (suite)

- ▶ Termes sources : stratégie de discrétisation en temps (pour l'équation de  $k$ )

★ Si  $S$  est constant:

$$S = C > 0 \Rightarrow S^{n+1} = C$$

$$S = C < 0 \Rightarrow S^{n+1} = -|C| k^{n+1}/k^n$$

★ Si  $S = g(k)$  est une fonction donnée de  $k$ , même raisonnement:

$$g \text{ positive function} \Rightarrow S^{n+1} = g(k^n)$$

$$g \text{ negative function} \Rightarrow S^{n+1} = -|g(k^{n+1})| k^{n+1}/k^n$$

Dans tous les cas, on peut écrire  $S$  sous la forme :

$$(5) \quad S^{n+1} = \beta(k^n, \varepsilon^n) - \alpha(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1}, k^n, \varepsilon^n) k^{n+1}$$

où  $\beta$  et  $\alpha$  sont deux fonctions strictement positives.

⇒ Diagonale de la matrice du système, surchargée par les termes sources négatifs.

## Lemme

A matrice de  $\mathbb{R}^{M \times M}$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq M$  :

1  $A_{i,i} > 0$

2  $A_{i,j} \leq 0, \forall 1 \leq j \leq M, j \neq i$

3  $\sum_{1 \leq j \leq M} A_{i,j} > 0$

*A est une matrice non-singulière appelée M-matrice, admettant une matrice inverse  $A^{-1}$  positive.*



## Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , l'équation volumes finis modèle s'écrit:

$$(6) \quad \left[ \frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left( (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[ |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[ \beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

## Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , l'équation volumes finis modèle s'écrit:

$$(6) \quad \left[ \frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left( (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[ |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[ \beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs

## Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , l'équation volumes finis modèle s'écrit:

$$(6) \quad \left[ \frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left( (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[ |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[ \beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs

## Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , l'équation volumes finis modèle s'écrit:

$$(6) \quad \left[ \frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left( (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[ |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[ \beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs
- Second membre strictement positif

## Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , l'équation volumes finis modèle s'écrit:

$$(6) \quad \left[ \frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left( (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[ |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[ \beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs
- Second membre strictement positif

En sommant tous les éléments d'une rangée de la matrice, **si le bilan de masse est vérifié**:

$$(7) \quad |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + |K| \frac{\rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma} (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} - (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} = |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + \underbrace{|K| \frac{\rho_K^{n-1}}{\delta t}}_{>0}$$

## Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , l'équation volumes finis modèle s'écrit:

$$(6) \quad \left[ \frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left( (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[ |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[ \beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs
- Second membre strictement positif

En sommant tous les éléments d'une rangée de la matrice, **si le bilan de masse est vérifié**:

$$(7) \quad |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + |K| \frac{\rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma} (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} - (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} = |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + \underbrace{|K| \frac{\rho_K^{n-1}}{\delta t}}_{>0}$$

⇒ La matrice associée à l'opérateur de convection VF est une M-matrice.

Rôle essentiel du bilan de masse pour assurer la positivité - Larrouturou [JCP 1991]

## Discretisation des termes sources: un exemple

Modèle  $k - \varepsilon$  RNG :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_k^{n+1} = \mathbf{P}^n - \rho^n |\varepsilon^{n+1}| \frac{k^{n+1}}{\max(k^n, k^*)} \\ \mathbf{S}_\varepsilon^{n+1} = \gamma^n (C_{\varepsilon 1} \mathbf{P}^n - \rho^n (C_{\varepsilon 2} + C_{\text{rng}} \text{sgn}(C_{\varepsilon r}^+)) \frac{(\varepsilon^{n+1})^2}{\max(k^n, k^*)} - \rho^n C_{\text{rng}} \text{sgn}(C_{\varepsilon r}^-) \frac{(\varepsilon^n)^2}{\max(k^n, k^*)} \end{array} \right.$$

avec,

- $x^+ = |x|$  et  $x^- = |-x|$
- $\gamma^n = \frac{\rho^{n-1} C_\mu k^n}{\mu_t^n}$
- $C_{\text{rng}} = C_\mu C_\eta \eta^2$
- $C_{\varepsilon r} = C_{\varepsilon 2} + C_{\text{rng}}$
- $k^*$  fixé pour limiter les termes sources

## Théorème

*Existence, unicité et positivité stricte de  $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$ ,  $0 \leq n < N$  si  $(k^0, \varepsilon^0)$  strictement positives.*

## Proof.

- 1 Positivité : argument de M-Matrice précédent.
- 2 Existence : principe du maximum pour une équation de convection–diffusion–réaction afin de borner la solution de manière uniforme, puis théorème de degré topologique.
- 3 Unicité : par linéarité et principe du maximum.





# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et algorithme
- 4 Schéma monotone pour les modèles RANS
- 5 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 6 Convergence de l'équation de convection–diffusion volumes-finis

## Problème étudié

$\Omega$  ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ .

Équations de Stokes stationnaires + convection–diffusion modèle pour  $k$  :

$$(8a) \quad -\nabla \cdot (\lambda(k) \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}$$

$$(8b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(8c) \quad -\nabla \cdot (\lambda(k) \nabla k) + \nabla \cdot (k \mathbf{u}) = \lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2$$

$$(8d) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

avec :

- $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$
- $\lambda(k) = \min(\lambda_\infty, \mu^2 + \ell^2 k)^{1/2}$ , avec  $\ell$  réel positif et deux réels  $\mu$  et  $\lambda_\infty$ , tels que  $\lambda_\infty > \mu > 0$

Peut-on montrer la convergence du schéma éléments finis/volumes finis sur ce problème ?

## Un résultat de convergence

Convergence du schéma numérique ?

- $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}, k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  suite de solutions approchées telle que  $(\mathcal{M}^{(m)})$  suite de discrétisations régulières
- $(\mathbf{u}, p, k)$  solution de (8) au sens faible :

$(\mathbf{u}, p, k) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ , for any  $\alpha \in [1, d/(d-1))$  and,  
for all  $(\mathbf{v}, q, \psi) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega)$  :

$$(9) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx &= 0, \\ \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla k \cdot \nabla \psi \, dx - \int_{\Omega} k \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \, dx &= \int_{\Omega} \lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \psi \, dx. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Montrer que  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}, k^{(m)}) \rightarrow (\mathbf{u}, p, k)$  quand  $m \rightarrow \infty$

## Une difficulté : régularité du terme de production turbulente

Terme de production turbulente :  $\lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2$

Remarque : prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans (9)

$$\int_{\Omega} \lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}$$

alors, classiquement, il existe  $C > 0$  tel que :

$$\|\lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2\|_{L^1(\Omega)} \leq C$$

→ Le second membre de l'équation de  $k$  n'est pas dans  $L^2(\Omega)$  mais  $L^1(\Omega)$  seulement !

Conséquences :

- *Estimations* : cadre fonctionnel différent →  $k \in W_0^{1,q}(\Omega)$  avec  $q$  vérifiant une condition de type exposant critique de Sobolev.
- *Convergence* : Passage à la limite dans le second membre de l'équation de  $k$  ?

## Problème discret

- Trouver  $(\mathbf{u}, p, k) \in \mathbf{V}_h \times H_M \times H_M$  vérifiant :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \quad \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla_h \mathbf{u} : \nabla_h \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla_h \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

$$\forall q \in H_M, \quad \int_{\Omega} q \nabla_h \cdot \mathbf{u} \, dx = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma=K|L} \frac{|\sigma|}{d_{\sigma}} \lambda(k)_{\sigma} (k_K - k_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \frac{|\sigma|}{d_{K,\sigma}} \lambda(k)_{\sigma} (k_K) \\ + \sum_{\sigma=K|L} (v_{\sigma,K}^+ k_K - v_{\sigma,K}^- k_L) = |K| \left[ \lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \right]_K,$$

- Avec les discrétisations volumes finis suivantes :

- ▶ Flux convectif *upwind*, avec  $v_{\sigma,K}^+ = \max(v_{K,\sigma}, 0)$  et  $v_{\sigma,K}^- = -\min(v_{K,\sigma}, 0)$ .
- ▶ Terme source constant par maille :

$$\left[ \lambda |\nabla_h \mathbf{u}|^2 \right]_K = \frac{\lambda(k_K)}{|K|} \int_K |\nabla_h \mathbf{u}|^2 \, dx.$$

- ▶ Terme de diffusion : on suppose juste que  $\lambda_{\sigma}$  satisfait,

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \quad \min [\lambda(k_K), \lambda(k_L)] \leq \lambda(k)_{\sigma} \leq \max [\lambda(k_K), \lambda(k_L)], \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}(K) \quad \lambda(k)_{\sigma} = \lambda(k_K).$$

## Deux résultats de convergence des gradients discrets

### Lemma (Convergence faible dans $L^2(\Omega)^d$ du gradient EF)

$(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  suite de discretisations régulières de  $\Omega$ .

$(v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  suite de fonctions discrètes telles que :  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\|v\|_{1,b} \leq C$  avec  $C$  réel strictement positif.

Si  $(v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow v \in H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , alors la suite  $(\nabla_h v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  des gradients constants par maille converge faiblement dans  $L^2(\Omega)^d$  vers  $\nabla v$ .

### Lemma (Convergence faible du gradient VF)

$(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  suite de discretisations régulières de  $\Omega$ .

$(v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  suite de fonctions discrètes telles que  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $v^{(m)} \in H_{\mathcal{M}}^{(m)}$ .

On suppose qu'il existe  $\alpha \in [1, +\infty)$   $C > 0$  tels que :  $\|v^{(m)}\|_{1,\alpha,\mathcal{M}} \leq C$

Si  $(v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  converge in  $L^1(\Omega)$  to  $v \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ , alors  $(\nabla_{\mathcal{M}} v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  converge faiblement dans  $L^\alpha(\Omega)^d$  vers  $\nabla v$

## Estimations *a priori*

Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , une suite de discrétisations régulières de paramètre de régularité  $\theta_0 > 0$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}, k^{(m)})$  vérifie les estimations *a priori* suivantes :

### Théorème

$(\mathbf{u}, p, k) \in \mathbf{V}_h \times H_{\mathcal{M}} \times H_{\mathcal{M}}$  solution du problème (10) satisfait:

$$\|\mathbf{u}\|_{1,b} + \|k\|_{1,\alpha,\mathcal{M}} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

avec:

- $\alpha \in [1, d/(d-1))$
- $C$  dépendant de  $\mathbf{f}$ ,  $\Omega$ ,  $\mu$ ,  $\theta_0$  and  $\alpha$

### Proof.

- L'estimation de  $\mathbf{u}$  est classique car  $\lambda$  est bornée inférieurement par  $\mu > 0$ .
- L'estimation de  $p$  est une conséquence de la condition *inf-sup*.
- L'estimation de  $k$  s'obtient de manière similaire au cas du Laplacien [?].



## Compacité

Les estimations précédentes ainsi que les estimations usuelles sur les translatées en espace permettent de déduire par Kolmogorov :

### Lemma (Compacité des solutions discrètes)

$(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  suite de discrétisations régulières de  $\Omega$ .

$(\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{p}^{(m)}, k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  suite de solutions approchées correspondantes.

À l'extraction d'un sous-suite près :

- 1  $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ , dans  $L^2(\Omega)^d$
- 2  $(\mathbf{p}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{p} \in L^2(\Omega)$ , dans  $L^2(\Omega)$
- 3  $(k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow k \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ , dans  $L^\beta(\Omega)$ , pour tout  $\alpha \in [1, d/(d-1))$  et  $\beta \in [1, d/(d-2))$
- 4  $(\nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \nabla \mathbf{u}$ , dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  par Théorème 5.1
- 5  $(\nabla_{\mathcal{M}} k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \nabla k$  dans  $L^\alpha(\Omega)^d$ , pour tout  $\alpha \in [1, d/(d-1))$  par Théorème 5.2

De plus, on montre que :

### Lemma

$\lambda(k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow L^\beta(\Omega)$  to  $\lambda(k)$ , pour  $\beta \in [1, +\infty)$ .



## Passage à la limite : Équations de Stokes (1)

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)^d$  et  $\varphi^{(m)} = r_h^{(m)}\varphi$  son interpolée dans  $\mathbf{V}_h^{(m)}$ .

- Le passage à la limite dans Stokes est classique :

$$\underbrace{\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \varphi^{(m)} \, dx}_{T_1} - \underbrace{\int_{\Omega} p^{(m)} \nabla_h \cdot \varphi^{(m)} \, dx}_{T_2} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi^{(m)} \, dx.$$

- Terme de diffusion :

$$T_1 = \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \varphi \, dx + \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h (\varphi^{(m)} - \varphi) \, dx.$$

$$T_{1,1} = \int_{\Omega} \underbrace{\lambda(k^{(m)})}_{\text{fort } L^2(\Omega)} \underbrace{\nabla_h \mathbf{u}^{(m)}}_{\text{faible } L^2(\Omega)} : \nabla_h \varphi \, dx \quad \rightarrow \quad \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla_h \mathbf{u} : \nabla_h \varphi \, dx.$$

$$T_{1,2} = \underbrace{\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h (\varphi^{(m)} - \varphi) \, dx}_{\leq C_{\varphi} h^{(m)}} \quad \rightarrow \quad 0$$

- Terme de pression : rôle crucial de la préservation de la divergence par  $r_h$

$$T_2 = \int_{\Omega} p^{(m)} \nabla_h \cdot \varphi_h^{(m)} \, dx = \int_{\Omega} \underbrace{p^{(m)}}_{\text{faible } L^2(\Omega)} \nabla \cdot \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} p \nabla \cdot \varphi \, dx$$

## Passage à la limite : Équations de Stokes (2)

- ▶ Terme source :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi \, d\mathbf{x}.$$

- ▶ Contrainte d'incompressibilité :

$$\int_{\Omega} \pi^{(m)} \varphi \, \nabla_h \cdot \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi \underbrace{\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{(m)}}_{\text{faible } L^2(\Omega)} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\pi^{(m)} \varphi - \varphi) \underbrace{\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{(m)}}_{\text{borne } L^2(\Omega)} \, d\mathbf{x} = 0.$$

## Passage à la limite : Équations de $k$ (1)

- Le passage à la limite dans le second membre pose problème :
  - d'après les résultats  $(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$ , donc converge faiblement dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  vers une certaine limite.
- Ceci ne suffit pas :
  - on doit montrer la convergence forte de  $(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$
- Le terme source est obtenu en prenant  $\mathbf{u}^{(m)}$  comme fonction test dans le terme de diffusion de l'équation de Stokes,

$$\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \varphi^{(m)} \, dx$$

ce qui suggère d'utiliser la première équation pour montrer la convergence.

On montre donc, le résultat suivant :

### Lemma (Convergence forte de la dissipation visqueuse)

*La suite  $(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  converge fortement dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  to  $\lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}$ .*

## Passage à la limite : Équations de $k$ (2)

$\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)}$  converge faiblement vers  $\overline{\lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}}$  dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$ .

La limite satisfait donc,  $\forall \varphi \in L^2(\Omega)^{d \times d}$  :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \varphi \, dx = \int_{\Omega} \overline{\lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}} : \varphi \, dx$$

Mais également,  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)^{d \times d}$  :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \varphi \, dx = \int_{\Omega} \lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u} : \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)^{d \times d},$$

D'où, on déduit:

$$(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}, \quad m \rightarrow \infty$$

Convergence faible de  $(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$

## Passage à la limite : Équations de $k$ (3)

Prenons  $\mathbf{u}^m$  comme fonction test dans Stokes :

$$\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x}.$$

Les résultats de compacité ne suffisent pas pour passer à la limite à gauche... mais comme  $\mathbf{u}^{(m)}$  converge dans  $L^2(\Omega)^d$ , on peut donc le faire à droite :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

De plus,  $\mathbf{u}$  satisfait l'équation de Stokes :

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

Convergence de la norme  $\|(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})\|_{L^2}$

## Passage à la limite : Équations de $k$ (4)

Le passage à la limite dans les termes de diffusion et de convection font appel aux résultats usuels de l'analyse des méthodes volumes finis :

- Diffusion : similaire aux technique développées dans [?] en adaptant avec une viscosité variable et en utilisant la convergence faible du gradient VF.
- Convection : preuve similaire à l'étape 3 de la preuve du Théorème 6.1 de [?] pour le terme  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ .

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et algorithme
- 4 Schéma monotone pour les modèles RANS
- 5 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 6 Convergence de l'équation de convection–diffusion volumes-finis**

## Problème étudié

$\Omega$  ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ .

Équation de convection–diffusion instationnaire à donnée  $L^1$  :

$$\begin{aligned}\partial_t u + \nabla \cdot (u \mathbf{v}) - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{a.e. in } \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0 && \text{a.e. in } \partial\Omega \times (0, T),\end{aligned}$$

avec  $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$  et  $u_0 \in L^1(\Omega)$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &\in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T]), \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T).\end{aligned}$$

Peut-on montrer la convergence du schéma de volumes finis pour ce problème ?



$\forall K \in \mathcal{M}$ , for  $0 \leq n < N$ ,

$$(11) \quad \frac{|K|}{\delta t} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \sum_{\sigma=K|L} v_{K,\sigma}^{n+1/2} u_\sigma^{n+1} + \sum_{\sigma=K|L} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} (u_K^{n+1} - u_L^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} u_K^{n+1} = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt$$

tel que pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  et  $0 \leq n \leq N$ , on note  $v_{K,\sigma}^{n+1/2}$  l'approximation du champ de vitesse est défini par:

$$(12) \quad v_{K,\sigma}^{n+1/2} = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma=K|L} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\gamma(\mathbf{x}) \, dt$$

et la discrétisation de  $u$  sur les faces internes est la discrétisation décentrée amont.

# Résultat de convergence

Énoncé + Limite vérifie le problème faible

# Nécessité d'un nouveau résultat de compacité

Présentation de la différence avec le cas Naviers-Stokes ( $L^2$ ), espace non-dual

# Un lemme d'Aubin–Simon discret

Que permet le lemme d'Aubin–Simon en continu par rapport à Kolmogorov

# Un lemme d'Aubin–Simon discret

Comment obtenir un équivalent discret ?

Lemme de Lions  $\rightarrow$  estimation des translatées en temps.

# Un lemme d'Aubin–Simon discret

Un dessin de la méthode de reflexion pour borner les sauts

## Estimation *a priori*

En un slide, donner les estimations

# Convergence

(Estimations + Compacité) permet de conclure à la convergence.