HAL
open science

# Contribution aux méthodes d'argumentation pour la prise de décision. Application à l'arbitrage au sein de la filière céréalière.

Jean-Rémi Bourguet

## To cite this version:

Jean-Rémi Bourguet. Contribution aux méthodes d'argumentation pour la prise de décision. Application à l'arbitrage au sein de la filière céréalière.. Informatique [cs]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2010. Français. NNT : . tel-00553266

**HAL Id: tel-00553266**

**https://theses.hal.science/tel-00553266**

Submitted on 6 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**École doctorale I2S Montpellier**

**Université Montpellier II**

# Contribution aux méthodes d'argumentation pour la prise de décision. Application à l'arbitrage au sein de la filière céréalière.

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le

pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'Université Montpellier II**

**(spécialité informatique)**

par

Jean-Rémi Bourguet

| | |
|---|---|
| *Rapporteurs :* | Juliette Dibie-Barthélemy, Maître de Conférences (HdR), AgroParisTech, Paris<br>Jacky Montmain, Professeur, Ecole des mines d'Alès, Nîmes |
| *Co-directrices de thèse :* | Leila Amgoud, Chargée de Recherche (HdR), CNRS, Toulouse<br>Marie-Laure Mugnier, Professeur, Université Montpellier 2, Montpellier<br>Rallou Thomopoulos, Chargée de Recherche, INRA, Montpellier |
| *Examinateur :* | Xavier Rouau, Directeur de Recherche, INRA, Montpellier |

**Equipe projet GRAPHIK**
Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier
Institut National de Recherche Agronomique

Mis en page avec la classe thloria.

# Table des matières

**Introduction** **1**

1 Etude de l'argumentation . . . . . 1

2 Motivation de recherche . . . . . 2

2.1 Intérêts applicatifs . . . . . 2

2.2 Intérêts théoriques . . . . . 2

2.3 Contenu du manuscrit . . . . . 3

**Chapitre 1 Systèmes d'argumentation abstraits** **7**

1.1 Le système d'argumentation à la Dung . . . . . 8

1.1.1 Cadre de travail . . . . . 8

1.1.2 Sémantiques d'acceptabilité . . . . . 9

1.1.2.1 Sémantique naïve . . . . . 9

1.1.2.2 Sémantique admissible . . . . . 10

1.1.2.3 Sémantique préférée . . . . . 10

1.1.2.4 Sémantique stable . . . . . 11

1.1.2.5 Sémantique complète . . . . . 11

1.1.2.6 Sémantique de base . . . . . 12

1.1.2.7 Liens entre les sémantiques . . . . . 13

1.1.3 Statuts des arguments . . . . . 15

1.2 Instanciation d'un système d'argumentation . . . . . 15

**Chapitre 2 Comparaison et Unification des systèmes** **19**

2.1 Les systèmes d'argumentation à base de préférences et de valeurs . . . . . 20

2.1.1 Système d'argumentation à base de préférences `PAF` . . . . . 20

2.1.2 Système d'argumentation à base de valeurs `VAF` . . . . . 21

2.1.3 Système d'argumentation à base de multiples valeurs `VSAF` . . . . . 23

2.1.4 Système d'argumentation à base de préférences contextuelles `CPAF` . . . . 24

2.2 Comparaison des systèmes d'argumentation . . . . . 25

2.2.1 Comparaison des systèmes à la Dung et à base de préférences . . . . . 26

2.2.2 Comparaison des systèmes à base de valeurs et de multiples valeurs . . . 26
2.2.3 Comparaison des systèmes à base de préférences et de valeurs . . . . . 27
2.2.3.1 Construction d'un PAF équivalent à partir d'un VAF : . . . . . 27
2.2.3.2 Construction de plusieurs types de VAF à partir d'un PAF : . . . 28
2.2.3.2.1 Construction bijective . . . . . 28
2.2.3.2.2 Construction surjective . . . . . 29
2.2.4 Comparaison des systèmes à base de préférences classiques et contextuelles 31
2.3 Vers un modèle unificateur à base de préférences . . . . . 31
2.3.1 Expression d'un argument dans un contexte . . . . . 31
2.3.2 Comparaison du système unifié avec les systèmes issus de la littérature . . 32
2.4 Travaux connexes . . . . . 34
2.4.1 Comparaison des systèmes PAF et VAF . . . . . 34
2.4.2 Comparaison des systèmes PAF et VSAF . . . . . 34

**Chapitre 3 Agrégation et Fusion des systèmes 37**
3.1 Fusionner plusieurs systèmes à la Dung . . . . . 38
3.1.1 Système d'argumentation partiel . . . . . 38
3.1.2 Etape 1 : L'expansion . . . . . 39
3.1.3 Etape 2 : La fusion . . . . . 40
3.2 Analyse critique . . . . . 41
3.2.1 Comportement de l'opérateur somme . . . . . 41
3.2.2 Comparaison des opérateurs somme et max . . . . . 43
3.2.3 Limite de la fusion . . . . . 44
3.3 La consistance lors d'une agrégation . . . . . 45
3.3.1 L'agrégation de défaite . . . . . 45
3.3.1.1 Cas des relations d'attaque exhaustivement sensibles aux conflits 46
3.3.1.2 Cas des relations d'attaque sensibles aux conflits . . . . . 46
3.3.2 Opérations de fusion naturelles . . . . . 49
3.3.2.1 La fusion sceptique . . . . . 49
3.3.2.1.1 Cas particulier . . . . . 49
3.3.2.1.2 Cas général . . . . . 50
3.3.2.2 La fusion crédule . . . . . 51
3.3.2.2.1 Cas particulier . . . . . 51
3.3.2.2.2 Cas général . . . . . 53
3.3.2.3 La fusion préférentielle . . . . . 54

**Chapitre 4 Système de décision argumentée** **57**
4.1 Modèle de décision . . . . . 58
4.1.1 Processus de décision . . . . . 58
4.1.2 Parties prenantes . . . . . 58
4.1.3 Actions potentielles . . . . . 59
4.1.4 Critères décisionnels . . . . . 59
4.1.5 Préférences décisionnelles . . . . . 59
4.1.6 Informations préférentielles . . . . . 61
4.2 Modèle d'arbitrage argumenté de la littérature . . . . . 61
4.2.1 Système de décision à base d'arguments . . . . . 62
4.2.1.1 Les principes unipolaires . . . . . 64
4.2.1.2 Les principes bipolaires . . . . . 66
4.2.1.3 Les principes apolaires . . . . . 67
4.2.2 Une typologie formelle de l'argument pratique . . . . . 68
4.2.3 Application à la décision multi-critères . . . . . 70
4.2.4 Cadre décisionnel étendu . . . . . 72
4.2.4.1 Intégration des préférences et des actions spécialisées . . . . . 72
4.2.4.2 Génération des attaques dans le système décisionnel . . . . . 73
4.2.5 Principe de décision étendu . . . . . 74
4.2.5.1 Limites du principe bipolaire de promotion et prévention focus . 75
4.2.5.2 Principe unipolaire de décision statuée . . . . . 76

**Chapitre 5 Politique de Santé Publique en Alimentation** **79**
5.1 Contexte de l'étude . . . . . 80
5.1.1 Motivation du PNNS . . . . . 80
5.1.2 Recommandations du PNNS concernant le pain . . . . . 80
5.1.2.1 Structure du grain de blé . . . . . 80
5.1.2.2 Processus de transformation du blé . . . . . 81
5.1.2.3 Recommandations spécifiques . . . . . 82
5.1.3 Positionnement des parties prenantes . . . . . 82
5.1.3.1 Positionnement des décideurs du *PNNS* . . . . . 82
5.1.3.2 Positionnement des professionnels de la meunerie . . . . . 82
5.1.3.3 Positionnement des professionnels des industries d'aval . . . . . 83
5.1.3.4 Positionnement des nutritionnistes et professionnels de santé . . 83
5.1.3.5 Positionnement des consommateurs . . . . . 84
5.1.4 Positionnement scientifique . . . . . 85
5.2 Méthode et matériel . . . . . 85

5.2.1 Identification et analyse des sources d'information . . . . . 86
5.2.2 Modélisation des informations disponibles en arguments structurés . . . . 86
5.2.3 Transcription en système de décision argumentée . . . . . 87
5.3 Résultats . . . . . 89
5.3.1 Schéma global . . . . . 89
5.3.2 Arguments . . . . . 89
5.3.3 Graphe d'attaque des arguments de la préoccupation nutritionnelle . . . . 92
5.3.4 Définition des audiences dans la préoccupation nutritionnelle . . . . . 92
5.3.5 Recommandations segmentées . . . . . 93

**Chapitre 6 Représentation en Graphes Conceptuels 95**
6.1 Le formalisme des graphes conceptuels . . . . . 96
6.1.1 Les graphes basiques . . . . . 96
6.1.2 Extensions des graphes basiques . . . . . 100
6.1.2.1 Les BG-règles . . . . . 100
6.1.2.2 Les CG-contraintes négatives . . . . . 102
6.1.2.3 Les BG-règles de défauts . . . . . 103
6.1.2.4 Les graphes emboîtés typés . . . . . 107
6.2 Systèmes d'argumentation dans un modèle basé sur les GC . . . . . 108
6.2.1 Argumentation et représentation par graphes . . . . . 108
6.2.2 De l'approche "micro" à l'approche "macro" . . . . . 109
6.2.2.1 Description du support . . . . . 109
6.2.2.2 Graphe d'attaque . . . . . 110
6.2.2.3 Description d'un argument . . . . . 111
6.2.2.4 Génération de la relation d'attaque . . . . . 111
6.2.3 Calcul des extensions avec des règles de défauts . . . . . 113
6.2.3.1 Extensions naïves . . . . . 113
6.2.3.2 Extensions préférées . . . . . 115
6.2.3.3 Extensions stables . . . . . 117
6.2.3.4 Extension de base . . . . . 118

**Conclusion 121**
1 Résumé des recherches . . . . . 121
2 Perspectives . . . . . 122

**Annexe A Annexe du Chapitre 1 123**
A.1 Structure de l'argument . . . . . 123
A.2 Générer une relation d'attaque . . . . . 125

A.2.1 La réfutation . . . . . 125
A.2.2 La contrariété . . . . . 126
A.2.3 La forte réfutation . . . . . 128
A.2.4 La forte contrariété . . . . . 129
A.2.5 La très forte réfutation . . . . . 130
A.3 Quelques propriétés pour bien choisir cette relation . . . . . 131
A.3.1 Notion de conflits . . . . . 131
A.3.2 Propriétés primitives d'une relation d'attaque . . . . . 131
A.3.3 Respect ou violation de la consistance des extensions . . . . . 132
A.3.3.1 Cas particulier des conflits minimaux binaires : . . . . . 132
A.3.3.2 Cas général des conflits minimaux ternaires ou plus : . . . . . 133
A.3.4 Assurance de la consistance des extensions . . . . . 133

**Annexe B Annexe du Chapitre 2** **137**

**Bibliographie** **151**

# Introduction

Ce manuscrit est le résultat d'une activité de recherche de trois années dans le domaine de la représentation des connaissances. La question étudiée dans cette thèse concerne la prise de décision argumentée en présence de connaissances contradictoires émanant d'acteurs dont la perception et les priorités sont divergentes.

Le domaine d'application plus particulièrement considéré est la définition de la qualité alimentaire, pour laquelle entrent en jeu différents points de vue (intérêt nutritionnel, qualités gustatives, sécurité sanitaire des produits) et différents acteurs (industriels, chercheurs, citoyens) dont les intentions divergent. L'objectif du travail est la conception d'un cadre théorique et méthodologique permettant l'aide à la décision au sein d'un modèle de représentation des connaissances, illustré par un cas d'étude issu de la filière céréalière.

En quête d'innovations finalisées, ces recherches ont comme dénominateur commun l'étude de l'argumentation dans plusieurs contextes de l'IA que nous aborderons au fil de la lecture. Cette introduction situe en premier lieu l'intérêt d'étudier celle-ci [OTP58], les motivations qui en découlent et guide la lecture de nos contributions.

## 1 Etude de l'argumentation

Pour légitimer l'utilité d'étudier l'argumentation par les logiciens et les théoriciens de la connaissance, il faut situer son apport majeur vis-à-vis de la logique moderne, celle qui conçoit classiquement la démonstration comme l'examen de preuves issues d'un raisonnement mathématique. La nature même de la délibération argumentée s'oppose à la nécessité et à l'évidence, car aucun agent raisonné ne trouverait utile de délibérer en présence d'une solution nécessaire et d'argumenter contre l'évidence.

Depuis l'Antiquité cette distinction a donc été envisagée, le raisonnement dialectique puis les théories anciennes de la rhétorique ont été étudiées en parallèle du raisonnement analytique, traitant du vraisemblable en lieu et place des propositions nécessaires. Dès lors, l'utilisation de l'argumentation pour le transfert d'une adhésion concernant des prémisses vers une adhésion concernant une conclusion fut inlassablement critiquée. Ainsi, s'il veut agir, l'argumentateur est obligé de s'adapter à un auditoire, on comprend alors que l'efficacité de ce transfert sur un auditoire ignorant ait pu gêner quelque peu les convictions de certains.

C'est en changeant d'auditoire que l'argumentation changea d'aspect. Par exemple, les genres délibératifs, judiciaire et épidictique correspondaient selon les Anciens aux manières discursives de s'adresser à des auditoires en train de délibérer, de juger ou d'assister simplement à un développement oratoire sans conséquences pratiques.

Il arrive fréquemment qu'un orateur ait besoin de persuader un auditoire composite, aux points de vues différentiables. Il pourra ainsi à souhait intensifier des croyances, affermir des convictions vis-à-vis de nouvelles attaques entrantes, en les protégeant, utiliser des arguments

multiples, faire appel et reconnaître des valeurs communes, considérer le préférable et renforcer par là l'adhésion en vue de se prononcer sur des énoncés fondés ou recommander des décisions futures.

Ainsi, lorsqu'engagée dans une situation délibérative, l'argumentation permet de comprendre les décisions. C'est la raison pour laquelle elle est en général et surtout envisagée quotidiennement pour ses effets pratiques, en se tournant vers l'avenir, en proposant de choisir une action ou d'y préparer. La délibération argumentée devrait alors conduire en son terme à une conclusion inévitable, si les arguments avancés sont disposés comme sur le plateau d'une balance dont le principe est admis par tous. Ceci est pour autant inenvisageable dans bien des situations, par exemple quand il s'agit de choisir une personne, et qu'un accord sur les critères permettant ce choix n'est pas envisageable, la recherche d'un consensus ou à moindre mesure d'un compromis est alors nécessaire.

# 2 Motivation de recherche

## 2.1 Intérêts applicatifs

A titre de cas d'étude, nous avons travaillé sur un débat, précisément au sujet de l'augmentation de la teneur en fibres de la farine utilisée pour le pain de consommation courante (e.g. le pain français), et ce dans une visée de santé publique. Divers acteurs de la filière céréalière sont donc concernés, notamment le ministère de la santé au travers de ses recommandations dans le cadre du PNNS (Programme National Nutrition Santé). Sa proposition de législation quant à l'offre de produits céréaliers plus complets (en termes de fibres) a vu naître un jeu d'argumentation des parties prenantes de la filière (meuniers, boulangers, chercheurs technologues, etc.). Ceci a engendré des points de vue conflictuels et donné lieu à l'amorçage de contre-propositions par les acteurs du monde céréalier. En réponse à cela, nous proposons au travers de ce manuscrit, un modèle décisionnel à base d'arguments, dans lequel l'ensemble des consommateurs peut être discriminé, précisément en termes d'audiences, donnant de ce fait une importance relative aux critères nutritionnels. Les recommandations sont alors segmentées sur la base des arguments issus des parties prenantes.

## 2.2 Intérêts théoriques

La question considérée est donc celle des méthodes de raisonnement en présence d'informations contradictoires, puis de leur introduction, au sein d'un modèle de représentation des connaissances, les graphes conceptuels, lequel permet tout aussi bien de représenter et de raisonner avec celles-ci.

La base de notre approche est l'utilisation de systèmes d'argumentation issus de la littérature en IA. Les systèmes d'argumentation sont des cadres formels visant à représenter des arguments, les interactions entre ces arguments, et à déterminer quels énoncés sont inférables par un ensemble d'arguments jugé cohérent, ces énoncés pouvant par exemple correspondre à des croyances ou à des décisions à prendre. L'un des cadres formels les plus abstraits, qui fait référence dans le domaine, est celui proposé par Dung en 1995.

Dans ce cadre, un système d'argumentation est défini par un ensemble fini d'arguments et une relation binaire sur cet ensemble, appelée relation d'attaque. Précisons que les arguments sont donnés et n'ont pas de structure, justifiant l'appellation de système d'argumentation abstrait. On peut également voir un tel système comme un graphe étiqueté dont les sommets sont les arguments et les arcs représentent la relation d'attaque directe.

S'il existe une communauté internationale active en argumentation, d'une part, et en décision, d'autre part, ces deux domaines ont jusqu'ici été abordés le plus souvent séparément. Notre approche a donc la spécificité d'associer différents modèles qui n'ont peu voire jamais été combinés dans la littérature, l'argumentation comme élément d'explication dans la prise de décision ayant été rarement utilisée. Notre modèle d'arbitrage argumenté est novateur en plusieurs aspects : 1) il implique donc de nouvelles notions associant argumentation et décision, 2) il est confronté à une situation réelle de décision à base d'arguments, 3) une partie de ce modèle est introduit au sein d'un formalisme graphique de représentation des connaissances.

## 2.3 Contenu du manuscrit

Ici, vont être résumés les six chapitres qui composent le manuscrit, il s'agit d'autant de contributions inhérentes, parfois partiellement, parfois exclusivement, au domaine de l'argumentation, de la décision, de la représentation des connaissances et de la qualité alimentaire.

### *Chapitre 1 : Systèmes d'argumentation abstraits*

L'argumentation est le processus essentiel sur lequel s'appuient nos contributions. Classiquement, il se caractérise par trois étapes : 1) la construction d'arguments et d'attaques entre arguments, 2) l'évaluation de l'acceptabilité collective des arguments, 3) la conclusion ou la définition d'énoncés fondés. Ce chapitre présente la notion de système d'argumentation telle qu'elle a été proposée par Dung en 1995. La généralité de son modèle, permettant notamment la prise en compte de ceux antérieurs ayant trait à la programmation logique ou au traitement de l'inconsistance, en a fait une référence en termes de cadre de travail en argumentation. Depuis cette proposition, beaucoup de travaux ont discuté des limites de ce formalisme, l'ayant tour à tour étendu, généralisé ou instancié. Nous proposons dans ce premier chapitre d'en présenter les fondements (principalement en termes de composants syntaxiques et de sémantiques d'acceptabilités collectives), ainsi que certaines de ses instanciations (illustrées en annexe de ce chapitre). Guidés par une étude de référence sur la capture de l'inconsistance par les attaques entre arguments, nous décrirons certaines propriétés de ses instanciations, et proposerons également en annexe d'autres types d'attaques aux propriétés souhaitées. L'un d'eux sera réutilisé dans la suite des chapitres (4, 5 et 6).

### *Chapitre 2 : Comparaison et Unification des systèmes*

Une limite du système "à la Dung" est de considérer tous les arguments présents comme ayant la même force. Cette hypothèse semble souvent inadéquate puisqu'un argument est généralement construit à partir de plusieurs informations, certaines pouvant avoir plus de poids que d'autres. En conséquence, plusieurs extensions à ce cadre ont été proposées dans la littérature, raffinant les travaux antérieurs entrepris sur l'intégration des préférences entre arguments. Nous proposons dans ce chapitre d'en rappeler leurs structures syntaxiques pour le calcul des acceptabilités collectives, puis de resituer ces cadres de travail les uns par rapport aux autres au regard d'une étude comparative de leurs composants syntaxiques, fondée sur un postulat d'équivalence sémantique (c'est à dire par rapport aux calculs des acceptabilités). Enfin, nous proposons un cadre contextuel unificateur qui sera comparé, par cette méthode, aux systèmes d'argumentation déjà présents dans la littérature et réutilisé dans les chapitres traitant particulièrement d'agrégations, de fusions et de décisions (3, 4 et 5).

## Chapitre 3 : Agrégation et Fusion des systèmes

Lorsqu'il s'agit d'évaluer des arguments dans un ou plusieurs systèmes d'argumentation, une approche classique essaiera de déterminer des acceptabilités globales pour ceux-ci. Un mode de fusion visant à "expanser" les systèmes de façon consensuelle avant de les fusionner en un seul est proposé dans la littérature. Nous montrerons que ce mode de fusion peut violer la consistance des arguments collectivement acceptés par le système fusionné. Partant de ce constat, nous proposerons d'investiguer les méthodes d'agrégation entre attaques et préférences de la littérature pour déterminer dans quelles conditions celles-ci conduisent ou non à cette violation. Puis nous considérerons de nouvelles méthodes d'agrégation contextuelle et de fusion inter-contextuelles en déterminant également dans quels cas celles-ci aboutissent ou non au respect de la consistance des arguments collectivement acceptés. Nous réutiliserons notamment dans la suite des chapitres (4 et 5) un type d'agrégation contextuelle pour établir des recommandations.

## Chapitre 4 : Système de décision argumentée

La décision constitue la caractérisation d'un choix pouvant être entrepris de manière raisonnée. Si les systèmes décisionnels classiquement proposés dans la littérature sont utilisables en présence d'informations incontestables, de critères universellement acceptés et considérés, leur utilisation est plus limitée lorsqu'il s'agit de les confronter à des décisions pratiques de la vie courante mêlant points de vue divergents, croyances défectibles et informations préférentielles. D'où l'intérêt de l'argumentation au sein des cadres décisionnels, celle-ci ne se contentant plus de traiter uniquement des arguments, mais guidant le choix de la meilleure action à entreprendre sur la base de ces arguments, alors appelés "pratiques". Le sujet de ce chapitre est donc de situer le rôle de l'argumentation au sein de la décision dans la littérature afin d'étendre un modèle de référence en décision argumentée. Le modèle que nous proposons prend en compte deux aspects : 1) la contextualisation des préférences nous permettant d'introduire plusieurs points de vue ouvrant la voie au traitement du compromis, 2) l'introduction d'actions spécialisées (i.e. des actions qui sont des spécialisations d'autres actions) permettant notamment l'élaboration d'actions consensuelles. Au travers d'un exemple de la vie de tous les jours, nous illustrerons les caractéristiques de notre système décisionnel étendu à base d'arguments, puis le restreindrons volontairement aux arguments en faveur d'actions, afin de proposer un principe de décision pertinent pour notre cas d'étude concernant une politique de santé publique présentée dans le Chapitre 5.

## Chapitre 5 : Politique de Santé Publique en Alimentation

Le Programme National Nutrition Santé a pour objectif général d'améliorer l'état de santé de l'ensemble de la population en agissant sur l'un des déterminants majeurs qu'est la nutrition. Il propose ainsi une série de recommandations nutritionnelles à l'ensemble des acteurs des filières agroalimentaires. La recommandation faite autour de la farine utilisée pour le pain de consommation courante est sujette à polémique. L'argument avancé par les décideurs est nutritionnel, en effet la recommandation de passer d'un type 55 (0.55% de matière minérale) à un type 80 (0.80% de matière minérale) implique une hausse de la consommation en fibres, vitamines et minéraux, ce qui est pertinent d'un point de vue nutritionnel. Cependant celle-ci va se heurter aux considérations d'autres acteurs impliqués par cette recommandation : des meuniers concepteurs de la farine, en passant par les boulangers qui l'utilisent pour confectionner leurs pains jusqu'aux consommateurs. En se basant sur notre modèle décisionnel à base d'arguments, nous

représenterons les arguments de ce cas d'étude, et proposerons des recommandations basées sur des préférences en termes d'audiences (végétariens, cardiaques, obèses, etc.).

### Chapitre 6 : Représentation en Graphes Conceptuels

Les systèmes à base de connaissances permettent de résoudre des problèmes en s'appuyant sur des connaissances formelles relatives à un domaine donné. Pour mener à bien cela, il existe des formalismes de représentation des connaissances et de raisonnement permettant notamment de prendre en considération les aspects syntaxiques et sémantiques de ces connaissances dans le domaine considéré. Ici, nous nous appuierons sur le modèle des graphes conceptuels introduit par Sowa en 1984 et ses diverses extensions. Nous proposons, dans ce chapitre, une représentation de la structure interne de l'argument pratique, ce qui permet générer les interactions entre arguments du modèle décisionnel précédemment introduit, en illustrant notre démarche par l'application. Enfin, nous utiliserons une extension issue de la logique des défauts dans les graphes conceptuels pour prendre en charge une partie du cadre logique de l'acceptabilité à la Dung.

Enfin, dans la conclusion, nous dresserons un bilan des contributions de ce travail et ouvrirons quelques perspectives.

# 1

# Systèmes d'argumentation abstraits

## Sommaire


**1.1 Le système d'argumentation à la Dung . . . . . 8**

1.1.1 Cadre de travail . . . . . 8

1.1.2 Sémantiques d'acceptabilité . . . . . 9

1.1.3 Statuts des arguments . . . . . 15

**1.2 Instanciation d'un système d'argumentation . . . . . 15**


L'argumentation est un domaine d'étude séculaire en philosophie et en épistémologie, elle n'en demeure pas moins un champ disciplinaire assez récent en Intelligence Artificielle, dont les premiers balbutiements ne datent que du début des années 80. L'essence même de l'argumentation peut être vue comme l'utilisation particulière et intuitive de paradigmes pour le raisonnement non-monotone. Il s'agit donc bien d'un modèle de raisonnement qui vise à accroître ou à décroître l'acceptabilité d'un point de vue en avançant des arguments en sa faveur ou en sa défaveur. Un article de synthèse [BCD07] présente l'émergence des recherches dans cette thématique ainsi que l'esquisse de ce que seront les futurs enjeux pour ces approches. Si nous devions, ici, résumer en quelques lignes la nature des recherches en argumentation, nous dirions en premier lieu que les travaux précurseurs [BFM80] utilisèrent une structure de graphe pour représenter le système d'argumentation et qu'ils y définirent des notions telles que le support ou l'attaque, lesquelles deviendront par la suite des concepts clefs du domaine. Avec l'étape de formalisation du raisonnement argumentaire, le carcan de la logique classique fut très vite dépassé au profit de l'existence d'un raisonnement défectible [Sar93], inspiré notamment par les travaux de Reiter sur la logique des défauts [Rei80]. Outre l'aspect théorique des recherches, un cas d'étude adéquat au formalisme naissant fut celui du raisonnement légal [Ash91, Pra93] dans lequel le raisonnement abductif introduit par Pierce [Pie79] s'avéra être un cadre pertinent [KKT92] pour traiter d'argumentation réelle. C'est donc bien avec le désir d'abstraire la nature même de l'argument autant que les paradigmes du raisonnement argumentaire que Dung proposa un modèle capturant la notion essentielle d'acceptabilité individuelle et collective des arguments [Dun95]. La généralité de son cadre, permettant notamment la prise en compte des modèles ayant trait à la programmation logique ou au traitement de l'inconsistance, en a fait une référence en termes de cadre de travail en argumentation. Ainsi depuis cette proposition, beaucoup de travaux ont discuté des limites de ce formalisme, l'ayant tour à tour étendu, généralisé ou instancié. Nous proposons dans ce premier chapitre d'en rappeler les fondements.

## 1.1 Le système d'argumentation à la Dung

Un processus d'argumentation suit trois étapes primordiales, qui peuvent se répéter indéfiniment par l'ajout de nouveaux entrants : 1) la construction d'arguments et de contre-arguments, 2) l'évaluation de l'acceptabilité collective des arguments, 3) la conclusion ou plus spécifiquement la définition d'énoncés fondés.

### 1.1.1 Cadre de travail

La théorie de Dung [Dun95] est basée sur le concept de **système abstrait d'argumentation**. Focalisé sur l'étape d'évaluation des arguments, ce système prend en entrée un couple réunissant un ensemble d'arguments et une relation binaire représentant la relation d'attaque entre ces arguments, et retourne des ensembles de "bons" arguments, appelés extensions. Les arguments et les attaques sont donc des entités abstraites, leurs origines et leurs structures demeurent inconnues.

**Définition 1** (Système d'argumentation [Dun95])**.** *Un **système argumentation** est un couple* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *où :*
- $\mathcal{A}$ *est un ensemble d'**arguments**,*
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est une relation binaire, appelée relation d'**attaque**.*

*Pour* $\alpha_i, \alpha_j \in \mathcal{A}$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *veut dire que l'argument* $\alpha_i$ *attaque l'argument* $\alpha_j$*.*

La notation AF rappelle l'appellation anglaise du terme "système d'argumentation" : **A**rgumentation **F**ramework. Pour des raisons de clarté, un système d'argumentation est couramment représenté par le graphe orienté qui lui est naturellement associé. Ce graphe, appelé **graphe d'attaque** ou graphe orienté AF, est noté $G^{\mathtt{AF}} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ où $\mathcal{X}$ est un ensemble de noeuds représentant les **arguments** de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{Y}$ est un ensemble d'arcs représentant les attaques de $\mathcal{R}$. Si $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$, on retrouve bien un arc entre le noeud représentant l'argument $\alpha_i$ et le noeud représentant l'argument $\alpha_j$. On dit que $\alpha_j$ est un assaillant de $\alpha_i$.

**Exemple 1.** *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 1.1.*

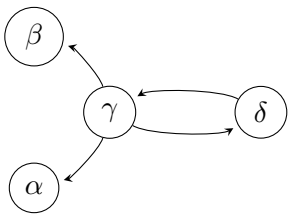



FIGURE 1.1 – Le graphe d'attaque $G^{\mathtt{AF}}$

L'absence d'attaques dans un ensemble d'arguments est une propriété remarquable puisqu'elle assure la cohérence de cet ensemble.

**Définition 2** (Sans-conflit [Dun95])**.** *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation.* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ *est un ensemble **sans-conflit** si et seulement si* $\nexists\ \alpha_i, \alpha_j \in \mathcal{S}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$*.*

**Exemple 2** (Exemple 1 suite)**.** *Dans* AF*,* $\mathcal{S} = \{\alpha, \beta\}$ *est un ensemble sans-conflit, alors que* $\mathcal{S}' = \{\gamma, \delta\}$ *ne l'est pas.*

La notion de défense a été également envisagée par Dung, même si elle n'a jamais été définie formellement. En effet, Dung envisage comme l'action de défendre, l'action d'attaquer un éventuel assaillant. A partir de cela, nous définirons ici la notion de défense collective comme l'action indirecte d'un ensemble d'arguments sur un argument par l'attaque de tous ses assaillants. La défense peut également être envisagée de manière individuelle et directe [CDLSM02].

**Définition 3** (Défense)**.** *Soient* AF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation,* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ *et* $\alpha_j \in \mathcal{A}$*.* $\mathcal{S}$ *défend* $\alpha_j$ *ssi* $\forall \alpha_k \in \mathcal{A}$ *t.q.* $(\alpha_k, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *alors* $\exists\ \alpha_i \in \mathcal{S}$ *t.q.* $(\alpha_i, \alpha_k) \in \mathcal{R}$*.*

Si l'ensemble $\mathcal{S}$ défend un argument, on dit alors que $\mathcal{S}$ est un ensemble défenseur et qu'il défend cet argument contre tout assaillant.

**Exemple 3** (Exemple 1 suite)**.** *L'ensemble* $\{\delta\}$ *défend les arguments* $\alpha$*,* $\beta$ *et* $\delta$ *contre* $\gamma$*. L'ensemble* $\{\gamma\}$ *défend l'argument* $\gamma$ *contre* $\delta$*. La Figure 1.2 représente cette notion de défense par des arcs discontinus allant de l'ensemble défenseur vers l'argument défendu, étiquetés par l'assaillant.*

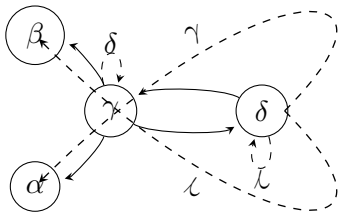



FIGURE 1.2 – La défense dans un graphe d'attaque

L'apport essentiel de la théorie de Dung est qu'elle s'intéresse à une forme collective d'acceptabilité entre arguments, reposant sur les notions de défense et d'ensemble sans-conflit. Différentes sémantiques d'acceptabilité ont été définies. Une sémantique a pour but d'identifier des sous-ensembles d'arguments qui soient au moins cohérents (c'est à dire sans-conflit) et in fine capables de se défendre contre tout assaillant éventuel. Ces sous-ensembles, appelés extensions, sont ensuite utilisés pour identifier le statut des conclusions supportées par ces arguments.

### 1.1.2 Sémantiques d'acceptabilité

Différentes sémantiques ont été proposées pour évaluer les arguments. Nous les rappelons ci-dessous.

#### 1.1.2.1 Sémantique naïve

La sémantique naïve proposée dans [BDKT97], accepte les ensembles sans-conflit et qui sont maximaux pour l'inclusion ensembliste. Ces ensembles sont appelés les **extensions naïves**.

**Définition 4** (Extension naïve [BDKT97])**.** *Soit* AF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation. L'ensemble* $\mathcal{E}^{na} \subseteq \mathcal{A}$ *est une extension naïve de* AF *si et seulement si* $\mathcal{E}^{na}$ *est sans-conflit et* $\nexists$ $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{E}^{na} \subset \mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}$ *est sans-conflit.*

**Exemple 4** (Exemple 1 suite)**.** *Dans* AF*, les ensembles* $\{\gamma\}$ *et* $\{\alpha, \beta, \delta\}$ *sont les extensions naïves.*

Pour un argumenteur rationnel, un argument est acceptable si l'argumenteur peut le défendre contre tout assaillant éventuel. On conçoit aisément qu'un tel argumenteur accepte un argument seulement lorsqu'il peut le juger acceptable.

#### 1.1.2.2 Sémantique admissible

L'ensemble de tous les arguments acceptés par l'argumenteur est donc un ensemble d'arguments sans-conflit dont il peut défendre chaque élément contre tout assaillant. C'est en ces termes que Dung a défini la notion d'**ensemble admissible** d'arguments.

**Définition 5** (Acceptabilité et admissibilité [Dun95]). *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation,*

1. $\alpha_i \in \mathcal{A}$ *est* ***acceptable par rapport à*** $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ *si et seulement si* $\mathcal{S}$ *défend* $\alpha_i$.
2. $\mathcal{E}^{ad} \subseteq \mathcal{A}$ *est* ***ensemble admissible*** *si et seulement si* $\mathcal{E}^{ad}$ *est sans-conflit et* $\forall\ \alpha_i \in \mathcal{E}^{ad}$, $\alpha_i$ *est acceptable par rapport à* $\mathcal{E}^{ad}$.

L'ensemble des ensembles admissibles est noté $Ext^{ad}$. et l'ensemble des arguments des ensembles admissibles d'un système AF est noté Acc(AF).

**Exemple 5** (Exemple 1 suite). *Dans* AF, *les ensembles* $\{\emptyset\}$, $\{\alpha, \delta\}$, $\{\beta, \delta\}$, $\{\alpha, \beta, \delta\}$, $\{\gamma\}$ *et* $\{\delta\}$ *sont admissibles.*

La notion d'**ensemble admissible** est au coeur de toutes les sémantiques de Dung. En effet, chaque sémantique identifie des ensembles admissibles qui vérifient une certaine forme d'optimalité.

**Lemme 1** (Ensemble extensible [Dun95]). *Soient* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation,* $\mathcal{E}^{ad} \subseteq \mathcal{A}$ *est un ensemble admissible d'arguments de* AF *et* $\alpha_i$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$ *deux arguments acceptables par rapport à* $\mathcal{E}^{ad}$, *il se vérifie que :*

1. $\mathcal{E}^{ad\,\prime} = \mathcal{E}^{ad} \cup \{\alpha_i\}$ *est un ensemble admissible,*
2. $\alpha_j$ *est acceptable par rapport à* $\mathcal{E}^{ad\,\prime}$.

#### 1.1.2.3 Sémantique préférée

La sémantique préférée se base sur la maximalité pour l'inclusion. Le principe d'une **extension préférée** pour un argumenteur est le fait qu'il accepte tous les arguments qu'il peut défendre. L'extension préférée est donc un ensemble admissible qui est maximal pour l'inclusion.

**Définition 6** (Extension préférée [Dun95]). *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation. L'ensemble* $\mathcal{E}^{pr} \subseteq \mathcal{A}$ *est une extension préférée de* AF *si et seulement si* $\mathcal{E}^{pr}$ *est un ensemble admissible et* $\nexists\ \mathcal{E}^{ad} \subseteq \mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{E}^{pr} \subset \mathcal{E}^{ad}$ *et* $\mathcal{E}^{ad}$ *est un ensemble admissible. L'ensemble des extensions préférées est noté* $Ext^{pr}$.

**Exemple 6** (Exemple 1 suite). *Le système d'argumentation* AF *possède deux extensions préférées* $\mathcal{E}_1^{pr} = \{\alpha, \beta, \delta\}$ *et* $\mathcal{E}_2^{pr} = \{\gamma\}$.

**Corollaire 1** ([Dun95]). *Chaque système d'argumentation possède une extension préférée.*

Ainsi, il peut être possible que la seule extension préférée d'un système d'argumentation soit l'ensemble vide, le système est alors qualifié de **trivial**.

#### 1.1.2.4 Sémantique stable

Le principe d'une **extension stable** pour un argumenteur est le fait qu'il attaque tous les arguments qu'il n'a pas acceptés.

**Définition 7** (Extension stable [Dun95])**.** *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation. L'ensemble* $\mathcal{E}^{st} \subseteq \mathcal{A}$ *est une extension stable de* AF *si et seulement si* $\mathcal{E}^{st}$ *est un ensemble sans-conflit et* $\forall\ \alpha_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}^{st}$, $\exists\ \alpha_j \in \mathcal{E}^{st}$ *tel que* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$. *L'ensemble des extensions stables est noté* $Ext^{st}$.

**Exemple 7** (Exemple 1 suite)**.** *Le système d'argumentation* AF *possède deux extensions stables* $\mathcal{E}_1^{st} = \{\alpha, \beta, \delta\}$ *et* $\mathcal{E}_2^{st} = \{\gamma\}$.

Si l'ensemble des extensions stables et préférées de l'Exemple 1 coïncident, ceci n'est pas toujours le cas. En effet, à la différence de l'extension préférée, il peut ne pas exister d'extension stable dans un système d'argumentation.

**Exemple 8.** *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\beta, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 1.3. Le système* AF *ne possède pas d'extension*

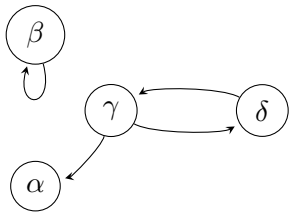



FIGURE 1.3 – Le graphe orienté AF

*stable, en revanche il possède deux extensions préférées* $\mathcal{E}_1^{pr} = \{\alpha, \delta\}$ *et* $\mathcal{E}_2^{pr} = \{\gamma\}$.

**Lemme 2** ([Dun95])**.** *Toute extension stable est une extension préférée mais la réciproque n'est pas vraie.*

Tout autant que la sémantique stable trouve un sens en terme d'ensemble maximal sans-conflit et attaquant le complément des arguments de l'extension par rapport à l'ensemble des arguments du système, la sémantique préférée se construit en terme d'ensemble maximal sans-conflit et pouvant se défendre. Une nuance peut cependant être apportée à cette dernière, en effet il peut exister des ensembles d'arguments particuliers à "mi-chemin" qui ont la capacité de se défendre seuls et contenant tous les arguments qu'ils défendent.

#### 1.1.2.5 Sémantique complète

Une autre sémantique intéressante est celle qui permet de construire des extensions complètes. Le principe d'une **extension complète** pour un argumenteur est le fait qu'il accepte tous les arguments qu'il défend et qu'il défend tous les arguments qu'il accepte (ainsi il peut ou non accepter des arguments se défendant seuls).

**Définition 8** (Extension complète [Dun95])**.** *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation. Un ensemble* $\mathcal{E}^{co} \subseteq \mathcal{A}$ *est une extension complète de* AF *si et seulement si* $\mathcal{E}^{co}$ *est un ensemble admissible et* $\forall\ \alpha_i \in \mathcal{A}$, *si* $\alpha_i$ *est acceptable par rapport à* $\mathcal{E}^{co}$, *alors* $\alpha_i \in \mathcal{E}^{co}$. *L'ensemble des extensions complètes est noté* $Ext^{co}$.

**Exemple 9** (Exemple 1 suite)**.** *Le système* AF *possède deux extensions complètes* $\mathcal{E}_1^{co} = \{\alpha, \beta, \delta\}$, $\mathcal{E}_2^{co} = \{\gamma\}$ *et* $\mathcal{E}_3^{co} = \{\emptyset\}$.

Dung a également montré que la notion du point fixe permet de caractériser ces extensions complètes. Pour cela, il introduit la **fonction caractéristique** d'un système d'argumentation.

**Définition 9** (Fonction caractéristique [Dun95])**.** *Soit* AF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation. La fonction caractéristique est définie comme suit :*

$$\mathcal{F}_{\texttt{AF}} : 2^{\mathcal{A}} \longrightarrow 2^{\mathcal{A}}$$
$$\mathcal{F}_{\texttt{AF}}(\mathcal{S}) = \{\alpha_i \mid \alpha_i \textit{ est acceptable par rapport à } \mathcal{S}\}$$

**Lemme 3** ([Dun95])**.** *Soit* AF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation,* $\mathcal{E}^{ad} \subseteq \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{E}^{co} \subseteq \mathcal{A}$ *:*
- $\mathcal{E}^{ad}$ *est un ensemble admissible si et seulement si* $\mathcal{E}^{ad}$ *est sans-conflit et* $\mathcal{E}^{ad} \subseteq \mathcal{F}_{\texttt{AF}}(\mathcal{E}^{ad})$.
- $\mathcal{E}^{co}$ *est une extension complète si et seulement si* $\mathcal{E}^{co}$ *est sans-conflit et* $\mathcal{E}^{co} = \mathcal{F}_{\texttt{AF}}(\mathcal{E}^{co})$.
- *Toute extension préférée est une extension complète mais la réciproque n'est pas vraie.*
- *L'ensemble des extensions complètes de* AF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *forme un inf-demi-treillis de* $(2^{\mathcal{A}}, \subseteq)$.

**Exemple 10.** *Soit* AF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 1.4. Le système* AF *possède trois extensions*

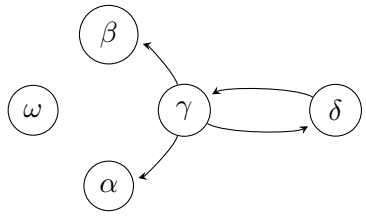



FIGURE 1.4 – Le graphe orienté AF

*complètes* $\mathcal{E}_1^{co} = \{\alpha, \beta, \delta, \omega\}$, $\mathcal{E}_2^{co} = \{\gamma, \omega\}$ *et* $\mathcal{E}_3^{co} = \{\omega\}$, *en revanche il n'y a que deux extensions préférées* $\mathcal{E}_1^{pr} = \mathcal{E}_1^{co}$ *et* $\mathcal{E}_2^{pr} = \mathcal{E}_2^{co}$.

Les sémantiques présentées jusque-là sont considérées comme étant crédules. En effet, selon celles-ci, un système d'argumentation peut avoir plusieurs extensions. Par conséquent, un argument peut avoir plusieurs statuts : il peut être accepté par une extension et rejeté par une autre. Dung a donc proposé une autre sémantique qui soit sceptique, donnant un statut unique à n'importe quel argument.

#### 1.1.2.6 Sémantique de base

Dung va ainsi introduire une sémantique qui affine la sémantique complète, insistant sur un aspect d'incontestabilité dans le choix de l'ensemble d'arguments. Le principe d'une **extension de base** pour un argumenteur est le fait qu'il retient en premier lieu l'ensemble des arguments non-attaqués, et qu'il y accepte ensuite tous les arguments défendus par ceux-ci. Ce nouvel ensemble est un ensemble d'arguments incontestés auquel il ajoutera à nouveau l'ensemble des arguments défendus par ceux-ci. Et cela jusqu'à ne plus pouvoir accepter de nouveaux arguments. A la différence de toutes les autres, il ne peut donc exister qu'une seule extension de base, ce qui lui confère un caractère hautement sceptique.

**Définition 10** (Extension de base [Dun95, Amg99]). *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation. Un ensemble* $\mathcal{E}^{ba} \subseteq \mathcal{A}$ *est une extension de base de* $\mathtt{AF}$ *si et seulement si* $\mathcal{E}^{ba}$ *est le plus petit point fixe de la fonction caractéristique* $\mathcal{F}_{\mathtt{AF}}$*. L'ensemble contenant l'extension de base est noté* $Ext^{ba}$*.*

Dans [Amg99], il a été montré que l'extension de base est obtenue en appliquant itérativement la fonction caractéristique $\mathcal{F}_{\mathtt{AF}}$ à l'ensemble vide. Ainsi, l'extension de base $\mathcal{E}^{ba}$ est telle que $\mathcal{E}^{ba} = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{F}^i_{\mathtt{AF}}(\emptyset)$. Notons aussi qu'un système d'argumentation possède toujours une extension de base, celle-ci pouvant être l'ensemble vide.

**Exemple 11** (Exemples 1 et 10 suite). *Dans l'Exemple 1 l'extension de base est* $\{\emptyset\}$*, dans l'Exemple 10 il s'agit de l'ensemble* $\{\omega\}$*.*

**Lemme 4** ([Dun95, BDKT97]). *Soit* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$*, un système d'argumentation.*

- *L'extension de base est la plus petite des extensions complètes (pour l'inclusion ensembliste).*
- *Toute extension préférée (respectivement stable, complète) contient l'extension de base.*

#### 1.1.2.7 Liens entre les sémantiques

**Théorème 1** ([Dun95]). *Soit* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$*, un système d'argumentation,* $\mathcal{E}^{ad} \subseteq \mathcal{A}$*,* $\mathcal{E}^{pr} \subseteq \mathcal{A}$*,* $\mathcal{E}^{co} \subseteq \mathcal{A}$*.*

1. *Pour chaque ensemble admissible* $\mathcal{E}^{ad}$*, il existe une extension complète* $\mathcal{E}^{co}$ *telle que* $\mathcal{E}^{ad} \subseteq \mathcal{E}^{co}$*.*
2. *Pour chaque extension complète* $\mathcal{E}^{co}$*, il existe une extension préférée* $\mathcal{E}^{pr}$ *telle que* $\mathcal{E}^{co} \subseteq \mathcal{E}^{pr}$*.*
3. *L'extension de base coïncide exactement avec l'intersection de toutes les extensions complètes.*
4. *Soit* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$*, on a :* $\mathcal{E}$ *est une extension stable* $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ *est une extension préférée* $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ *est une extension complète* $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ *est un ensemble admissible.*

La Figure 1.5 présente les inclusions entre les ensembles d'extensions sous les différentes sémantiques données. Dung a énoncé une condition suffisante, pour un système d'argumentation, engendrant la coïncidence de toutes ces extensions en une seule.

**Définition 11** (Système bien fondé [Dun95]). *Un système d'argumentation* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *est dit bien fondé si et seulement s'il n'existe pas de suite infinie d'arguments* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *telle que* $\forall\ i \in \mathbb{N}$*,* $(\alpha_{i+1}, \alpha_i) \in \mathcal{R}$*.*

**Exemple 12** (Exemple 1 suite). *Le système d'argumentation de l'Exemple 1 n'est pas un système d'argumentation bien fondé.*

Dans le cadre d'un graphe d'attaque à ensemble d'arguments fini, un système d'argumentation est bien fondé si et seulement si il ne contient pas de circuit.

**Propriété 1** (Coïncidence des extensions [Dun95]). *Tout système d'argumentation bien fondé a exactement une extension complète. Cette dernière est à la fois stable, préférée et coïncide avec l'extension de base.*

**Exemple 13.** *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\delta, \gamma)\}$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 1.6.* $\mathtt{AF}$ *est bien fondé. Sa seule extension préférée, stable, basique et complète est l'ensemble* $\{\alpha, \beta, \delta\}$*.*

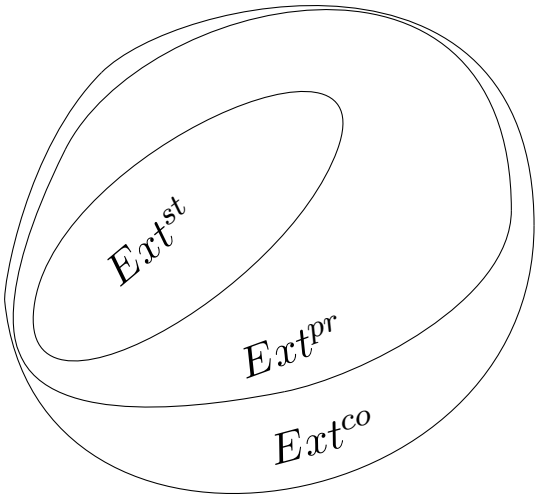



FIGURE 1.5 – Inclusion des sémantiques d'extension

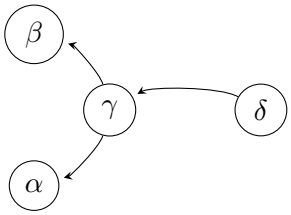



FIGURE 1.6 – Le graphe orienté AF

L'unicité de l'extension préférée est aussi garantie pour certains types de graphes, notamment, les graphes ne possédant pas de circuit de longueur paire.

**Propriété 2** ([DBC01])**.** *Un système d'argumentation possède une unique extension préférée si son graphe d'attaque ne contient pas de circuit de longueur paire, mais la réciproque n'est pas vraie.*

**Exemple 14.** *Soit* AF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma, \epsilon\}$ *et* $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma), (\epsilon, \gamma)\}$. *Son graphe d'attaque est représenté par la Figure 1.7.* AF *ne possède qu'une seule extension pré-*

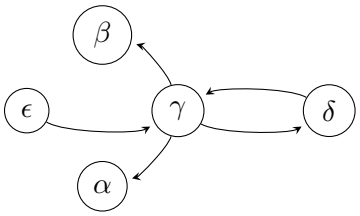



FIGURE 1.7 – Le graphe orienté AF

*férée qui est aussi stable, complète et de base, à savoir l'ensemble* $\{\alpha, \beta, \delta, \epsilon\}$. *Néanmoins son graphe d'attaque contient un circuit de longueur paire.*

### 1.1.3 Statuts des arguments

Dans la section précédente, nous avons montré comment des arguments peuvent être regroupés au sein d'ensembles cohérents et ainsi soutenir un même point de vue. Toutefois, ces ensembles ne témoignent en rien de l'état d'un argument donné vis-à-vis du système. Dans ce qui suit, nous présentons les différents statuts [VP00] que peut prendre un argument.

**Définition 12** ([VP00]). *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation et* $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ *ses extensions sous une sémantique donnée. Soit* $\alpha \in \mathcal{A}$.

- $\alpha$ *est sceptiquement accepté ssi il existe au moins une extension non-vide et* $\alpha \in \mathcal{E}_j \ \forall \ \mathcal{E}_j$ *avec* $j = 1, \ldots, n$,
- $\alpha$ *est crédulement accepté ssi* $\exists \ \mathcal{E}_j$ *tel que* $\alpha \in \mathcal{E}_j$ *et* $\exists \ \mathcal{E}_k$ *tel que* $\alpha \notin \mathcal{E}_k$,
- $\alpha$ *est rejeté ssi* $\nexists \ \mathcal{E}_j$ *tel que* $\alpha \in \mathcal{E}_j$.

**Exemple 15** (Exemples 1 et 14 suite). *Dans l'Exemple 1 tous les arguments sont crédulement acceptés au regard des sémantiques préférée, stable et complète. Dans l'Exemple 14* $\gamma$ *est rejeté et les autres arguments sont sceptiquement acceptés au regard de toutes les sémantiques.*

Une conséquence directe de la Définition 12 est qu'un argument est sceptiquement accepté si et seulement s'il appartient à l'intersection de toutes les extensions, qu'il est crédulement accepté si et seulement s'il n'appartient pas à l'intersection de toutes les extensions mais qu'il appartient à l'union de toutes les extensions et qu'il est rejeté si et seulement s'il n'appartient pas à l'union de toutes les extensions. Formellement :

**Propriété 3** ([VP00]). *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation et* $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ *ses extensions sous une sémantique donnée. Soit* $\alpha \in \mathcal{A}$.

- $\alpha$ *est sceptiquement accepté ssi* $\alpha \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$,
- $\alpha$ *est crédulement accepté ssi* $\alpha \notin \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$ *et* $\alpha \in \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$,
- $\alpha$ *est rejeté ssi* $\alpha \notin \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$.

Soit $\mathtt{Sce}(\mathtt{AF})$ (respectivement $\mathtt{Cre}(\mathtt{AF})$, $\mathtt{Rej}(\mathtt{AF})$) une fonction qui retourne l'ensemble de tous les arguments sceptiquement acceptés (respectivement crédulement acceptés, rejetés) d'un système d'argumentation $\mathtt{AF}$. Ces trois ensembles sont deux à deux disjoints, et leur union correspond exactement à l'ensemble des arguments $\mathcal{A}$.

**Propriété 4** ([VP00]). *Soit* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *un système d'argumentation :*

- $\mathit{Sce}(\mathtt{AF}) \cap \mathit{Cre}(\mathtt{AF}) = \emptyset$, $\mathit{Sce}(\mathtt{AF}) \cap \mathit{Rej}(\mathtt{AF}) = \emptyset$, $\mathit{Cre}(\mathtt{AF}) \cap \mathit{Rej}(\mathtt{AF}) = \emptyset$,
- $\mathit{Sce}(\mathtt{AF}) \cup \mathit{Cre}(\mathtt{AF}) \cup \mathit{Rej}(\mathtt{AF}) = \mathcal{A}$.

## 1.2 Instanciation d'un système d'argumentation

Une présentation plus détaillée de cette section est fournie en annexe du Chapitre 1. Nous rappelons ici les notions qui seront utiles à la compréhension du Chapitre 3.

Si le terme d'argument est au coeur du système d'argumentation à la Dung, il n'y est pas réellement défini, et de ce fait la relation d'attaque entre arguments est supposée donnée. Comme précisé en introduction plusieurs courants dans la recherche en argumentation ont émergé. Le

courant monologique ("mono") s'est concentré sur la définition de la notion d'argument permettant par la suite de générer les interactions. L'argument y possède généralement une unique conclusion. Les prémisses peuvent être considérées comme des hypothèses voire des preuves pour la conclusion.
Par exemple, dans l'argument $\beta$ de Eratosthène, un ensemble d'hypothèses et d'observations (des faits) supportent une conclusion.

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\beta$ | : | 1) La Terre est sphérique.<br>2) Le Soleil est loin de la Terre.<br>3) Au même moment il peut se refléter au fond d'un puits, et ne pas tomber verticalement sur un obélisque. |
| Conclusion de $\beta$ | : | Le diamètre de la Terre est calculable. |

Dans le cadre des problèmes concernant le traitement de l'inconsistance dans des bases de connaissances, ont été développés des systèmes d'argumentation utilisant la définition de l'argument. Ces systèmes sont construits autour d'un langage propositionnel. Dans la littérature, [SL92] et [EGKF93] y distinguent deux types de connaissances d'une base $\Sigma$ : les connaissances sûres formant un ensemble $K$ qui représente le noyau de connaissances et les croyances regroupées dans un ensemble $E$. De ce fait, une base de connaissances est une paire $\Sigma = (K, E)$.

**Notations :** $Supp(\alpha)$ et $Conc(\alpha)$ renvoient respectivement au support $H$ et à la conclusion $h$ de l'argument $\alpha = (H, h)$. Pour $\mathcal{S} \subseteq \Sigma$, $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ représente l'ensemble des arguments qui peuvent être construits depuis $\mathcal{S}$.

Dans [AB09], la notion de "conflit" entre les connaissances constituant le support de deux arguments sert de base à la construction de la relation d'attaque, afin que celle-ci ait de bonnes propriétés.

**Définition 13** (Conflit minimal [AB09])**.** *Soit $\Sigma$ une base de connaissances, et $C \subseteq \Sigma$. L'ensemble $C$ est un conflit minimal ssi :*
- *$C$ est inconsistant,*
- *$\forall\ x \in C$, $C \setminus \{x\}$ est consistant.*

*$\mathcal{C}_\Sigma$ correspond à l'ensemble de tous les conflits minimaux de $\Sigma$.*

Un système d'argumentation doit donc être en mesure de par sa relation d'attaque $\mathcal{R}$ de capturer des conflits minimaux.

**Définition 14** (Capture de conflits [AB09])**.** *Soit $C \in \mathcal{C}_\Sigma$. Un couple $(\alpha_i, \alpha_j)$ dans $\mathcal{R}$ capture $C$ si $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$.*

Une fois les captures de ces conflits minimaux réalisées, [AB09] caractérisent des types de relation d'attaque.

**Définition 15** (Dépendance aux conflits [AB09])**.** *Une relation d'attaque est dépendante au conflit ssi $\forall\ \alpha_i, \alpha_j \in \mathcal{A}(\Sigma)$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ implique qu'il existe un conflit minimal $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$.*

La dépendance aux conflits assure que toute attaque soit "justifiée". Cependant, une telle relation peut ne pas capturer certains conflits présents dans l'union des supports de deux arguments. Il est donc nécessaire d'assurer un caractère exhaustif pour cette capture. Cette notion a été envisagée sous le nom de sensibilité.

**Définition 16** (Sensibilité aux conflits [AB09])**.** *Une relation d'attaque est sensible au conflit ssi* $\forall\ \alpha_i,\ \alpha_j \in \mathcal{A}(\Sigma)$ *tel que il existe un conflit minimal* $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$ *alors on a soit* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *ou* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$*.*

La sensibilité aux conflits assure qu'aucun conflit ne sera oublié. Toutefois, le fait qu'une relation d'attaque capture tous les conflits minimaux n'est pas suffisant pour assurer la consistance des extensions.

**Définition 17** (Consistance d'une extension [AB09])**.** *Soit* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$*, un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances* $\Sigma$*. Une extension* $\mathcal{E}$ *(sous une sémantique donnée) satisfait la consistance ssi* $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} Supp(\alpha)$ *est consistant.*

Par la suite, nous allons considérer une base de connaissances dont les conflits minimaux sont tous binaires. Cela signifie que tout conflit minimal contient exactement deux formules. Le résultat suivant fournit une classe de relations d'attaque qui assure la cohérence des extensions.

**Proposition 1** ([AB09])**.** *Soit* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$*, un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances* $\Sigma$ *telle que tous les conflits minimaux soit binaires. Si* $\mathcal{R}$ *est sensible aux conflits, alors pour tout* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\Sigma)$ *tel que* $\mathcal{B}$ *est sans-conflit, l'ensemble* $\bigcup_{\alpha_i \in \mathcal{B}} Supp(\alpha_i)$ *est consistant.*

Pour assurer la consistance d'une extension, la relation d'attaque doit être sensible aux conflits. Il n'est donc pas nécessaire à la relation d'attaque qu'elle soit dépendante aux conflits.

**Corollaire 2** ([AB09])**.** *Soit* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$*, un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances* $\Sigma$ *telle que tous les conflits minimaux soient binaires. Si* $\mathcal{R}$ *est sensible aux conflits, alors* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$ *satisfait la consistance des extensions.*

Cependant, le fait que la relation d'attaque soit de plus dépendante aux conflits (toujours dans le cas de conflits minimaux binaires) assure que l'extension soit sans-conflit.

Comme il a été discuté précédemment, le cas dans lequel se situe la capture des conflits minimaux dictera ou non si une relation d'attaque de par ses propriétés primitives est bien en mesure d'engendrer de tels systèmes souhaités. La suite de ce manuscrit, et directement le Chapitre 2, présente des extensions au modèle de Dung avec comme point commun le fait d'intégrer des préférences (de façon directe ou indirecte) entre arguments dans le raisonnement et la construction de systèmes agrégés. Précisons que pour toute la suite de ce manuscrit, nous n'aborderons que des bases de connaissances où les conflits minimaux sont binaires, nous utiliserons une relation d'attaque consensuelle (présentée dans l'annexe de ce chapitre) particulièrement prompte à capturer des conflits en présence d'actions spécialisées ou mutuellement exclusives.

# 2

# Comparaison et Unification des systèmes

## Sommaire


**2.1 Les systèmes d'argumentation à base de préférences et de valeurs . 20**
2.1.1 Système d'argumentation à base de préférences PAF . . . . . 20
2.1.2 Système d'argumentation à base de valeurs VAF . . . . . 21
2.1.3 Système d'argumentation à base de multiples valeurs VSAF . . . . . 23
2.1.4 Système d'argumentation à base de préférences contextuelles CPAF . . . 24
**2.2 Comparaison des systèmes d'argumentation . . . . . 25**
2.2.1 Comparaison des systèmes à la Dung et à base de préférences . . . . . 26
2.2.2 Comparaison des systèmes à base de valeurs et de multiples valeurs . . 26
2.2.3 Comparaison des systèmes à base de préférences et de valeurs . . . . . 27
2.2.4 Comparaison des systèmes à base de préférences classiques et contextuelles 31
**2.3 Vers un modèle unificateur à base de préférences . . . . . 31**
2.3.1 Expression d'un argument dans un contexte . . . . . 31
2.3.2 Comparaison du système unifié avec les systèmes issus de la littérature . 32
**2.4 Travaux connexes . . . . . 34**
2.4.1 Comparaison des systèmes PAF et VAF . . . . . 34
2.4.2 Comparaison des systèmes PAF et VSAF . . . . . 34


Un système de raisonnement en Intelligence Artificielle peut tout autant s'intéresser au traitement de l'inconsistance, comme abordé dans le Chapitre 1, qu'à celui de la représentation de l'incertitude, due notamment à la présence de connaissances incomplètes, imprécises et/ou évolutives ou encore à l'absence de certaines informations. Il est donc nécessaire d'appréhender ces connaissances en tant que croyances en raison de leur possible remise en question au cours du raisonnement. La prise en compte d'un référentiel épistémique n'échappera donc pas aux modèles de raisonnement. McCarthy [McC79] prit le parti de ne jamais valider une connaissance dans l'absolu, mais de relativiser au contraire sa véracité par l'existence d'un contexte témoignant ou non de celle-ci. En argumentation, la sélection de telle ou telle croyance supportant des raisonnements plausibles fut permise par l'introduction de préférences. Ainsi, Simari et Loui [SL92] introduisirent des relations de préférence entre arguments, distinguant les priorités implicites et explicites sur les croyances. Prakken et Sartor [PS97], parmi d'autres [SGCS03], considérèrent les arguments comme des règles défectibles, puis utilisèrent leur structure pour y définir des relations de préférence, le niveau de précision d'une règle au sein d'un argument

témoignant d'une certaine force dans le raisonnement. Une autre approche [SDP93, ACB96] fut de définir des priorités explicites pour traiter les préférences, générant par exemple des niveaux de certitude à partir des justifications de l'argument, appelées croyances. La notion de priorité joua alors un rôle crucial dans l'étude des systèmes à base de connaissances, et permit d'alléger la tâche de traitement de l'inconsistance. Ainsi, l'intégration des préférences dans le système d'argumentation à la Dung a notamment permis d'affiner la sélection d'arguments acceptables. Plusieurs extensions ont donc été proposées pour intégrer des préférences entre arguments. Nous proposons dans ce chapitre de rappeler leur structure, puis de resituer ces cadres de travail les uns par rapport aux autres au regard d'une étude comparative de leurs composants syntaxiques fondée sur un postulat d'équivalence sémantique. Enfin, nous proposons un cadre unificateur qui sera comparé aux systèmes d'argumentation déjà présents dans la littérature.

## 2.1 Les systèmes d'argumentation à base de préférences et de valeurs

L'un des reproches fait au cadre de travail à la Dung est qu'il ne permet pas de décider ou de statuer pour certaines configurations d'argumentation. Ainsi entre les systèmes d'argumentation décrits dans la Figure 1.1 et dans la Figure 1.7 du Chapitre 1, il peut se passer un siècle et demi, et il est évident que l'audience "universelle" de l'époque n'a pas attendu tant de temps pour ne plus dériver l'argument $\gamma$ de Lactance (voir annexe du Chapitre 1). Comment peut alors se modéliser un tel système, lequel parvient à s'affranchir des attaques en ne dérivant que certains arguments ?

Une limite du système à la Dung est de considérer tous les arguments présents comme ayant la même force. Cette hypothèse semble souvent inadéquate puisqu'il semblerait naturel de considérer un argument comme construit à partir de plusieurs informations, certaines pouvant apparaître avec plus ou moins de poids par rapport à d'autres (ceci pouvant provenir par exemple de la présence d'informations défectibles). En conséquence, plusieurs extensions à ce cadre de travail ont été proposées dans la littérature, raffinant les travaux antérieurs entrepris par Prakken et Sartor, associant une force à chaque argument, et intégrant les préférences dans une définition plus générale de la relation d'attaque appelée relation de **défaite**.

### 2.1.1 Système d'argumentation à base de préférences `PAF`

Dans [AC02], Amgoud et Cayrol proposent d'ajouter à cette relation d'attaque entre arguments, une autre relation binaire sur l'ensemble des arguments (appelée relation de préférence). Cette relation capture les différences de force entre arguments, et dans certains cas procède à une sélection entre arguments conflictuels. Comme pour la relation d'attaque, sa source n'étant pas spécifiée, cette abstraction lui permet d'être instanciée de différentes manières.

**Définition 18** (Système d'argumentation à base de préférences (`PAF`) [AC02])**.** *Un système d'argumentation à base de préférences est un tuple* `PAF` $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *où :*

- $\mathcal{A}$ *est un ensemble d'arguments,*
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est une relation d'attaque,*
- $\succeq \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est un préordre*[1] *(partiel ou total), appelé relation de préférence.*

*La notation* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \succeq$ *veut dire que l'argument* $\alpha_i$ *est au moins préféré à un argument* $\alpha_j$*.*

1. Un préordre est une relation binaire, réflexive et transitive

La notation PAF correspond à la traduction anglaise de "système d'argumentation à base de préférences" : **P**reference-based **A**rgumentation **F**ramework.

**Exemple 16.** *Soit* PAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$ *et* $\succeq = \{(\delta, \alpha), (\delta, \beta), (\delta, \gamma)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.1, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq$.

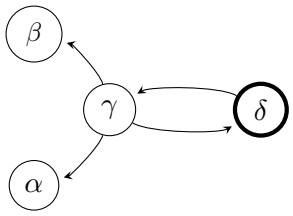



FIGURE 2.1 – Le graphe orienté PAF

La question alors soulevée fût comment prendre en compte ces préférences dans un PAF ? En réponse à cela, l'idée retenue a été de réduire le nombre d'attaques entre arguments. Ainsi, une attaque échoue lorsque l'argument attaqué est plus fort que son assaillant. Ainsi, est associé à chaque PAF, un système d'argumentation à la Dung dans lequel l'acceptabilité des arguments peut être évaluée.

**Définition 19** (Système associé à PAF [AC02])**.** *Soit* PAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$. *Le* AF *associé à* PAF *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{Def} \rangle$ *où* $\mathtt{Def} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathtt{Def}$ *si et seulement si* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \succ$ [2].

Les sémantiques d'acceptabilité de Dung sont ainsi appliquées au système associé à PAF afin d'évaluer ses arguments.

**Exemple 17.** *Soit* PAF *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 16 et* AF *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 13,* AF *est le système d'argumentation associé à* PAF *(l'arête correspondante à l'attaque de l'argument* $\gamma$ *sur l'argument* $\delta$ *a été supprimée dans le graphe d'attaque* $G^{\mathtt{AF}}$*). Ainsi, ce système* PAF *a une seule extension* $\{\alpha, \beta, \delta\}$*, qui est à la fois stable, préférée et de base.*

La notion de force envisagée par Prakken et Sartor peut typiquement être modélisée par la relation de préférence entre arguments dans [AC02]. Cette relation est abstraite et peut donc être instanciée de différentes manières. Par exemple, elle peut privilégier les arguments basés sur les informations les plus certaines [SDP93].

### 2.1.2 Système d'argumentation à base de valeurs VAF

De même, il a été imaginé que des arguments pourraient être envisagés par rapport aux valeurs qu'il promeuvent [Pra02, CBC05]. Par exemple, un argument peut avoir un portée séculaire ($v_{sec}$), dogmatique ($v_{dog}$), empiriste ($v_{emp}$), hypothétique ($v_{hyp}$) ou encore cartésienne ($v_{car}$). En particulier, Bench-Capon [BC03] a induit une priorité entre arguments à l'aide d'une préférence entre valeurs promues par ces arguments. Puisque dans sa théorie chaque argument promeut au plus une seule valeur, un argument est implicitement préféré à un autre si la valeur promue par le premier est préférée à la valeur promue par le second.

2. $(a, b) \in \succ$ ssi $(a, b) \in \succeq$ et $(b, a) \notin \succeq$.

**Définition 20** (Système d'argumentation à base de valeurs (`VAF`) [BC03])**.** *Un système d'argumentation à base de valeurs est un tuple* $\texttt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$ *où :*

- $\mathcal{A}$ *est un ensemble d'arguments,*
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est une relation d'attaque,*
- $\mathcal{V}$ *est un ensemble de valeurs,*
- $\texttt{val} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{V}$ *est une fonction qui associe une valeur à chaque argument,*
- $\texttt{Pref} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ *est un ordre strict*[3] *(partiel ou total), appelée relation de priorité entre les valeurs.*

La notation `VAF` correspond à la traduction anglaise de "système d'argumentation à base de valeurs" : **V**alue-based **A**rgumentation **F**ramework.

**Exemple 18.** *Soit* $\texttt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$, $\mathcal{V} = \{v_{dog}, v_{hyp}, v_{emp}\}$, $\texttt{val}(\alpha) = v_{dog}$, $\texttt{val}(\beta) = v_{hyp}$, $\texttt{val}(\gamma) = v_{dog}$, $\texttt{val}(\delta) = v_{emp}$ *et* $\texttt{Pref} = \{(v_{emp}, v_{dog}), (v_{emp}, v_{hyp})\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.2, la largeur d'un cadre de valeur correspondant à la force relative de la valeur au regard de la relation* `Pref`.

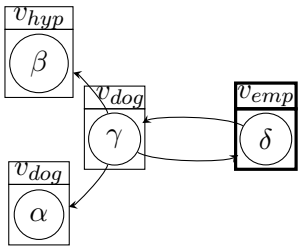



FIGURE 2.2 – Le graphe orienté `VAF`

Comme pour [AC02], un système d'argumentation à la Dung est associé à chaque `VAF`.

**Définition 21** (Système associé à `VAF` [BC03])**.** *Soit* $\texttt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$. *Le* `AF` *associé à* `VAF` *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats} \rangle$ *où* $\texttt{defeats} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \texttt{defeats}$ *si et seulement si* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\texttt{val}(\alpha_j), \texttt{val}(\alpha_i)) \notin \texttt{Pref}$.

Les sémantiques d'acceptabilité de Dung sont ensuite appliquées au système associé à `VAF` pour évaluer ses arguments.

**Exemple 19.** *Soit* `VAF` *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 18 et* `AF` *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 13,* `AF` *est le système d'argumentation associé à* `VAF`. *Ainsi, ce système* `VAF` *a une seule extension* $\{\alpha, \beta, \delta\}$, *qui est à la fois stable, préférée et de base.*

Inspiré par les travaux précurseurs de Olbrechts-Tyteca et Perelmann [OTP58], Bench-Capon a défini une audience comme un ensemble de préférences entre valeurs, envisageant les éléments de $\mathcal{P}$ tels des noms correspondant aux ordres possibles sur $\mathcal{V}$. Il existe donc potentiellement autant d'audiences qu'il y a de classements sur $\mathcal{V}$. Toute l'argumentation donnée sera donc évaluée par une audience en conformité avec ses valeurs préférées.

3. Un ordre strict est une relation binaire, irréflexive, antisymétrique et transitive

### 2.1.3 Système d'argumentation à base de multiples valeurs VSAF

Cependant, les philosophes Olbrechts-Tyteca et Perelmann [OTP58] identifièrent une difficulté de l'argumentation comme celle de pouvoir promouvoir au moins une valeur par audience. En ce sens l'argumentateur efficace est en capacité de faire adhérer plusieurs audiences aux valeurs promues par son argument dans un même discours. C'est donc naturellement que les cadres de travail où chaque argument promeut au plus une valeur ont été étendus [KvdT08] à ceux où plusieurs valeurs sont affectées à un même argument.

**Définition 22** (Système d'argumentation à base de multiples valeurs (VSAF) [KvdT08])**.** *Un système d'argumentation à base de multiples valeurs est un tuple* $\texttt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *où :*

- $\mathcal{A}$ *est un ensemble d'arguments,*
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est une relation d'attaque,*
- $\mathcal{V}$ *est un ensemble de valeurs,*
- $\arg : \mathcal{V} \mapsto 2^{\mathcal{A}}$ *est une fonction qui associe un ensemble d'arguments à une valeur,*
- $\gg \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ *est un ordre strict (partiel ou total) sur l'ensemble des valeurs.*

La notation VSAF correspond à la traduction anglaise de "système d'argumentation à base de multiples valeurs" : **M**ultiple **V**alue-based **A**rgumentation **F**ramework.

**Exemple 20.** *Soit* $\texttt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$, $\mathcal{V} = \{v_{dog}, v_{hyp}, v_{emp}, v_{sec}, v_{car}\}$, $\arg(v_{dog}) = \{\alpha, \gamma\}$, $\arg(v_{hyp}) = \{\beta\}$, $\arg(v_{emp}) = \{\delta\}$, $\arg(v_{sec}) = \{\alpha\}$, $\arg(v_{car}) = \{\gamma\}$ *et* $\gg = \{(v_{emp}, v_{dog}), (v_{emp}, v_{hyp}), (v_{emp}, v_{car})\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.3, la largeur d'un cadre de valeur correspondant à la force relative de la valeur au regard de la relation* $\gg$. *Notons que les arguments* $\alpha$ *et* $\gamma$ *promeuvent deux valeurs chacun.*

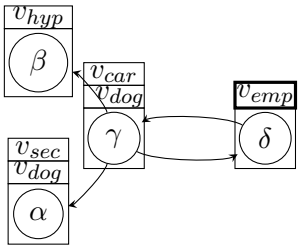



FIGURE 2.3 – Le graphe orienté VSAF

Puisqu'un argument peut promouvoir plusieurs valeurs dans ce système, il existe plusieurs façons rationnelles de considérer une préférence entre arguments. Des exemples assez intuitifs de cette relation, notée $\texttt{Pref}_{\triangledown}$, présents dans [KvdT08] sont donnés ci-dessous.

**Définition 23** (Relations de préférence [KvdT08])**.** *Soit* $\texttt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *et* $\alpha_i$, $\alpha_j \in \mathcal{A}$ *:*

- $(\alpha_i, \alpha_j) \in \texttt{Pref}_M$ *si et seulement si* $|\arg^{-1}(\{\alpha_i\})| > |\arg^{-1}(\{\alpha_j\})|$,
- $(\alpha_i, \alpha_j) \in \texttt{Pref}_{Bc}$ *si et seulement si* $\exists\ v \in \mathcal{V}$ *tel que* $\alpha_i \in \arg(v)$ *et* $\forall\ v' \in \mathcal{V}$ *avec* $\alpha_j \in \arg(v')$, $(v, v') \in \gg$.

La première relation donne une préférence aux arguments promouvant le plus de valeurs alors que la seconde privilégie les arguments promouvant la valeur la plus importante. Les sémantiques de Dung sont ensuite appliquées au système associé au VSAF défini comme suit :

**Définition 24** (Système associé au VSAF [KvdT08]). *Soit* $\texttt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$. *Le* AF *associé au* VSAF *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats}_\nabla \rangle$ *où* $\texttt{defeats}_\nabla \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \texttt{defeats}_\nabla$ *si et seulement si* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \texttt{Pref}_\nabla$.

**Exemple 21.** *Soit* VSAF *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 20 et* AF *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 13,* AF *est le système d'argumentation associé à* VSAF *par* $\nabla = Bc$. *Ainsi, ce système* VSAF *(*$\nabla = Bc$*) a une seule extension* $\{\alpha, \beta, \delta\}$, *qui est à la fois stable, préférée et de base.*

Dans les travaux concernant le PAF et le VAF, les préférences entre arguments sont supposées être non contradictoires ; cependant, dans les applications courantes, il peut arriver que cela ne soit pas toujours le cas. Leurs validités ont alors besoin d'être contextualisées comme l'imaginait Mc Carthy [McC79].

### 2.1.4 Système d'argumentation à base de préférences contextuelles CPAF

Dans [APP00], une extension de PAF a été proposée, l'idée étant d'y assumer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des arguments peut être muni de plusieurs relations de préférence $\succeq_1, \cdots \succeq_n$, chacune d'elle exprimant des préférences entre arguments dans un **contexte** particulier, contextes, qui envisagés de manière abstraite (mais envisageables par exemple tels des points des vue ou des contextes temporels), sont supposés totalement ordonnés.

**Définition 25** (Système d'argumentation à base de préférences contextuelles (CPAF) [APP00]). *Un système d'argumentation à base de préférences contextuelles est un tuple* $\texttt{CPAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \triangleright, \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle$ *où :*
- $\mathcal{A}$ *est un ensemble d'arguments,*
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est une relation d'attaque,*
- $\mathcal{C}$ *est un ensemble de contextes tel que* $|\mathcal{C}| = n$,
- $\triangleright$ *est un ordre total sur l'ensemble* $\mathcal{C}$ *des contextes,*
- $\succeq_i \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est un préordre (partiel ou total) associé au contexte* $c_i$.

La notation CPAF correspond à la traduction anglaise de "système d'argumentation à base de préférences contextuelles" : **C**ontextual **P**references-based **A**rgumentation **F**ramework.

Notons que pour deux arguments $\alpha_i$ et $\alpha_j$, il peut être possible que $(\alpha_i, \alpha_j) \in \succeq_k$ et $(\alpha_j, \alpha_i) \in \succeq_l$ avec $k \neq l$. Les différentes relations de préférence $\succeq_i$ peuvent être agrégées au sein d'une unique relation dénotée par $\otimes^\triangleright(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$.

Dans [APP00], une proposition naturelle est de garder toutes les préférences du contexte le plus fort (i.e. celles du contexte $c_i$ maximal par l'ordre $\triangleright$), et d'ajouter les préférences des contextes suivants qui ne sont pas en contradiction avec celles présentes dans le premier. Le même procédé est répété jusqu'à qu'il n'y ait plus de contextes restant.

**Définition 26** (Fonction d'agrégation [APP00]). *Soit* $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ *un ensemble de contextes.* $\otimes^\triangleright(\succeq_1, \cdots \succeq_n) = \texttt{Pref}^n$ *tel que*
- $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}$
- $\texttt{Pref}^1 = \{(\alpha, \beta) \in \succeq_i$ *t.q.* $\forall c_j \in \mathcal{C}^1 \setminus \{c_i\}$, $(c_i, c_j) \in \triangleright\}$
- $\mathcal{C}^{k+1} = \mathcal{C}^k \setminus \{c_i\}$
- $\texttt{Pref}^{k+1} = \texttt{Pref}^k \cup \{(\alpha, \beta) \in \succeq_i$, *t.q.* $c_i \in C^{k+1}$, $\forall c_j \in \mathcal{C}^{k+1} \setminus \{c_i\}$, $(c_i, c_j) \in \triangleright$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \texttt{Pref}^k\}$.

*Il est utile de préciser que dans cette définition, la relation* $\otimes^\triangleright(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$ *n'est pas nécessairement transitive.*

**Exemple 22.** *Soit* CPAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \triangleright, \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$, $\mathcal{C} = \{c_{emp}, c_{dog}\}$, $\triangleright = \{(c_{emp}, c_{dog})\}$, $\succeq_{emp} = \{(\delta, \gamma), (\delta, \alpha), (\delta, \beta)\}$ *et* $\succeq_{dog} = \{(\gamma, \delta), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\alpha, \delta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \beta)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.4, la largeur d'un cadre de contexte correspondant à la force relative du contexte au regard de la relation* $\triangleright$ *et la largeur du trait autour d'un noeud dans un contexte* $c_i$ *correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq_i$. *La préférence agrégée pour ce système n'est autre que* $\otimes^{\triangleright}(\succeq_{emp}, \cdots \succeq_{dog}) = \{(\delta, \gamma), (\delta, \alpha), (\delta, \beta), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \beta)\}$.

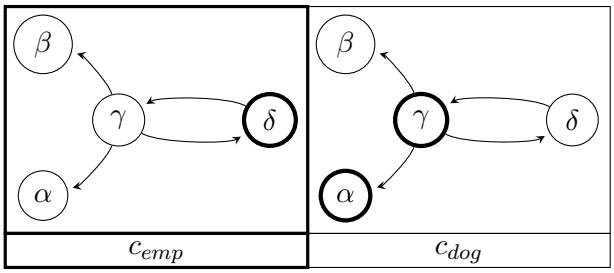



FIGURE 2.4 – Le graphe orienté CPAF

**Définition 27** (Système associé à CPAF [APP00])**.** *Soit* CPAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \triangleright, \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle$ *et* $\otimes^{\triangleright}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$ *la préférence agrégée. Le* AF *associé à* CPAF *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{Def} \rangle$ *où* $\mathtt{Def} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathtt{Def}$ *si et seulement si* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \otimes^{\triangleright}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$.

Les sémantiques de Dung sont ensuite appliquées au système associé à CPAF pour évaluer ses arguments.

**Exemple 23.** *Soit* CPAF *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 22 et* AF *le système d'argumentation décrit par l'Exemple 13,* AF *est le système d'argumentation associé à* CPAF. *Ainsi, ce système* CPAF *a une seule extension* $\{\alpha, \beta, \delta\}$, *qui est à la fois stable, préférée et de base.*

## 2.2 Comparaison des systèmes d'argumentation

Peu d'études issues de la littérature en argumentation se sont intéressées à la comparaison des différents systèmes d'argumentation qui intègrent les préférences. , il s'agit pourtant d'une manière immédiate de démontrer la généralité ou la spécificité d'un cadre de travail par rapport à un autre. Dans [KvdT08], Kaci et Van der Torre ont fait une première tentative de comparaison de ces systèmes. Cependant, ils ont utilisé un critère de comparaison qui est ambigu. Leur idée est de représenter un système donné dans un autre. Ce type de comparaison ne dit rien sur les résultats retournés par les différents systèmes. Il n'est pas non plus détaillé clairement la présence de généralité ou de spécificité d'un cadre de travail par rapport à un autre. Pour éviter ces lacunes, nous avons défini un postulat sémantique pour s'assurer du bien-fondé des comparaisons, et ce sous certaines conditions syntaxiques. Cette notion est basée sur les résultats retournés par les deux systèmes.

**Définition 28** (Systèmes d'argumentation équivalents)**.** *Soit* $\mathtt{AF}_1$, $\mathtt{AF}_2$ *deux systèmes d'argumentation. Les deux systèmes* $\mathtt{AF}_1$ *et* $\mathtt{AF}_2$ *sont équivalents ssi Ext(*$\mathtt{AF}_1$*) = Ext(*$\mathtt{AF}_2$*), où Ext(*$\mathtt{AF}_i$*) est l'ensemble de toutes les extensions de* $\mathtt{AF}_i$ *sous une sémantique donnée*[4].

4. Dans les preuves, la sémantique des ensembles admissibles est utilisée pour démontrer l'équivalence de deux systèmes.

Un résultat immédiat est l'équivalence de deux systèmes d'argumentation à base de préférences dans lesquels les préférences exprimées par l'ordre (partiel ou total) et le préordre (partiel ou total) coïncident, la seule différence portant sur la réflexivité de la notion de préférence.

**Propriété 5.** *Les systèmes d'argumentation associés respectivement à* $\texttt{PAF}_1 = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succ \rangle$ *et à* $\texttt{PAF}_2 = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *(avec* $\succ$ [5] *la relation stricte de* $\succeq$*) sont équivalents*[6].

A l'aide du postulat d'équivalence, il s'agit donc de mener une étude comparative des différents systèmes à base de préférences rappelés dans la première section de ce chapitre, de façon à situer ces derniers les uns par rapports aux autres en terme de spécialisation et/ou de généralisation.

### 2.2.1 Comparaison des systèmes à la Dung et à base de préférences

Le système d'argumentation à la Dung peut être vu comme un cas particulier du système d'argumentation basé sur les préférences. Plusieurs situations dans lesquelles `AF` et `PAF` sont équivalents peuvent être soulignées, en particulier les cas où aucune préférence stricte entre arguments n'existe et où toutes les attaques entre arguments aboutissent (si un argument $\alpha$ attaque un argument $\beta$ alors $\beta$ n'est pas préféré à $\alpha$).

**Propriété 6.** *Le système d'argumentation* $\texttt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *est équivalent au système d'argumentation associé à* $\texttt{PAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *ssi :*
- $\nexists\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha, \beta) \in \succ$*, ou*
- $\nexists\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta, \alpha) \in \succ$*.*

**Exemple 24.** *Soit* $\texttt{PAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$*,* $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$ *et* $\succeq = \{(\gamma, \delta), (\delta, \alpha), (\delta, \beta), (\delta, \gamma)\}$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.5, la largeur d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq$*. Le système associé à* `PAF` *est équivalent au système* `AF` *décrit par l'Exemple 1.*

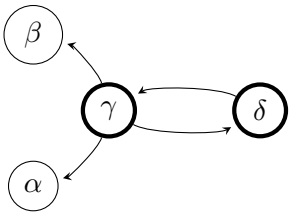



FIGURE 2.5 – Un graphe orienté `PAF`

*Ces systèmes ont pour extensions préférées les ensembles* $\{\alpha, \beta, \delta\}$ *et* $\{\gamma\}$*.*

### 2.2.2 Comparaison des systèmes à base de valeurs et de multiples valeurs

Le système `VAF` proposé par Bench-Capon peut être vu comme un cas particulier de son extension `VSAF` proposée par Kaci et Van der Torre dans [KvdT08], et ce notamment dans les conditions particulières où chaque argument dans `VSAF` promeut exactement la valeur promue dans `VAF` en respectant le même ordonnancement, et où le nombre de valeurs promues par un argument dans `VSAF` est proportionnel à l'importance de la valeur promue par ce même argument dans `VAF`.

5. $\succ$ est irréflexive, antisymétrique et transitive.
6. Les preuves de toutes les propriétés présentées dans ce chapitre figurent dans l'annexe située à la fin de ce manuscrit

**Propriété 7.**

- *Les deux systèmes d'argumentation* $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats} \rangle$ *et* $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats}_{Bc} \rangle$ *associés respectivement à* $\texttt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$ *et* $\texttt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *sont équivalents ssi* $\texttt{val} = \arg^{-1}$ *et* $\texttt{Pref} = \gg$.
- *Les deux systèmes d'argumentation* $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats} \rangle$ *et* $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats}_{M} \rangle$ *associés respectivement à* $\texttt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$ *avec* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *tel que pour* $i>j$ $(v_i, v_j) \in \texttt{Pref}$, *et* $\texttt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *sont équivalents ssi* $|\arg^{-1}(\texttt{val}^{-1}(v_i))| = i$.

**Exemple 25.** *Soit* $\texttt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$, $\mathcal{V} = \{v_{dog}, v_{hyp}, v_{emp}\}$, $\texttt{val}(\alpha) = v_{dog}$, $\texttt{val}(\beta) = v_{hyp}$, $\texttt{val}(\gamma) = v_{dog}$, $\texttt{val}(\delta) = v_{emp}$ *et* $\texttt{Pref} = \{(v_{dog}, v_{emp}), (v_{dog}, v_{hyp})\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.6, la largeur d'un cadre de valeur correspondant à la force relative de la valeur au regard de la relation* Pref. *Le système associé à* VAF *est équivalent au système associé à* VSAF *par* $\nabla = M$ *décrit par l'Exemple 20.*

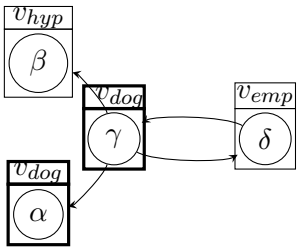



FIGURE 2.6 – Un graphe orienté VAF

*Ces systèmes ont pour unique extension l'ensemble* $\{\gamma\}$ *qui est à la fois stable, préférée et de base.*

### 2.2.3 Comparaison des systèmes à base de préférences et de valeurs

Dans cette partie, et dans le but de mener une étude comparative complète des systèmes VAF et PAF, il sera monté que chaque VAF peut être représenté par un PAF. L'idée est que la relation de préférence du PAF n'est rien d'autre que la préférence issue des valeurs promues par les arguments. Il sera aussi montré qu'un PAF peut être codé comme un VAF en définissant des valeurs fictives et un ordre entre elles, permettant de capturer la relation de préférence entre arguments. Il est donc successivement montré qu'un système PAF équivalent peut être construit à partir d'un système VAF, puis que plusieurs constructions de systèmes VAF équivalents existent et permettent de représenter un système PAF.

#### 2.2.3.1 Construction d'un PAF équivalent à partir d'un VAF :

**Définition 29.** *Soit* $\texttt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$, *un système d'argumentation basé sur les valeurs. A partir d'un* VAF, *on peut extraire un système d'argumentation à base de préférences,* $\texttt{PAF}^V = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq^V \rangle$, *avec la relation de préférence* $\succeq^V \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *définie comme suit :* $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $(\alpha, \beta) \in \succ^V$ *ssi* $(\texttt{val}(\alpha), \texttt{val}(\beta)) \in \texttt{Pref}$.

**Exemple 26.** *Le système* PAF *décrit par l'Exemple 16 est un système d'argumentation extrait à partir de* VAF *décrit par l'Exemple 18.*

La relation $\succ^V$ possède les mêmes propriétés que la relation Pref.

**Propriété 8.** *La relation $\succ^V$ est irréflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc un ordre strict.*

Le système d'argumentation à base de valeurs VAF peut donc être considéré comme un particulier du système d'argumentation à base de préférences PAF.

**Propriété 9.** *Les systèmes d'argumentation associés à* VAF *et à* $\mathtt{PAF}^V$ *sont équivalents.*

**Exemple 27.** *Le système associé à* PAF *décrit par l'Exemple 16 est équivalent au système associé à* VAF *(dont il est extrait) décrit par l'Exemple 18.*

#### 2.2.3.2 Construction de plusieurs types de VAF à partir d'un PAF :

**2.2.3.2.1 Construction bijective** Intuitivement, un système VAF peut être construit à partir d'un système PAF, et ce en affectant à chaque argument une valeur différente, puis en respectant l'ordonnancement des valeurs, à l'image (bijective) de celui des arguments.

**Définition 30.** *Soit* $\mathtt{PAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *un système d'argumentation à base de préférences. A partir d'un* PAF*, un système d'argumentation extrait bijectivement à base de valeurs* $\mathtt{VAF}_b^P$ *est un tuple* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}_b, \mathtt{val}_b, \mathtt{Pref}_b^P \rangle$ *tel que :*
- $\mathcal{V}_b$ *est un ensemble de valeurs possédant la même cardinalité que* $\mathcal{A}$ *(*$|\mathcal{V}_b| = |\mathcal{A}|$*),*
- $\mathtt{val}_b$ *est une bijection de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{V}_b$*, et*
- $\mathtt{Pref}_b^P \subseteq \mathcal{V}_b \times \mathcal{V}_b$ *est défini par :* $\forall\ v_\alpha,\ v_\beta \in \mathcal{V}_b$*,* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_b^P$ *ssi* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha),\ \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)) \in \succ$ *(*$\mathtt{val}_b^{-1}$ *correspond à la fonction inverse de* $\mathtt{val}_b$*).*

Notons que dans cette définition, il n'est pas précisé comment l'ensemble des valeurs est choisi.

**Exemple 28.** *Ainsi, à partir du système* PAF *présenté dans l'exemple 16, un système* $\mathtt{VAF}_b^P$ *peut être construit en associant à chaque argument* $(\alpha, \beta, \dots)$ *une valeur, par exemple son nom (“*$\alpha$*”, “*$\beta$*”, ...), et en conservant les mêmes préférences pour les noms comme pour les arguments sous-jacents.*

La relation $\mathtt{Pref}_b^P$ possède les mêmes propriétés que la relation $\succ$.

**Propriété 10.** *La relation* $\mathtt{Pref}_b^P$ *est irréflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc un ordre strict.*

Le système d'argumentation à base de préférences PAF peut donc être considéré comme un cas particulier du système d'argumentation à base de valeurs VAF.

**Propriété 11.** *Les systèmes d'argumentation associés à* PAF *et à* $\mathtt{VAF}_b^P$ *sont équivalents.*

Il peut être intéressant à ce stade de définir une relation entre valeurs présentes dans l'ensemble d'arrivée $\mathcal{V}_b$ d'un système d'argumentation à base de valeurs $\mathtt{VAF}_b^P$ (extrait bijectivement d'un système d'argumentation à base de préférences PAF). Cette relation appelée équivalence épidictique, notée Et, est définie comme suit :

**Définition 31.** *Deux valeurs* $v_\alpha,\ v_\beta \in \mathcal{V}_b$ *appartiennent à la relation d'équivalence épidictique* Et*, i.e.,* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Et}$ *ssi :*
- $\forall\ v_\gamma \in \mathcal{V}_b$*,* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma),\ \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)) \in \succ$ *ssi* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma),\ \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)) \in \succ$*,*
- $\forall\ v_\delta \in \mathcal{V}_b$*,* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha),\ \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ$ *ssi* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta),\ \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ$*.*

La propriété suivante exprime que la relation d'équivalence épidictique est bien une relation d'équivalence au sens mathématique.

**Propriété 12.** *La relation* Et *est réflexive, symétrique et transitive, c'est donc une relation d'équivalence.*

On peut alors définir des classes d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{V}_b$.

**Définition 32.** *La classe d'équivalence d'un élément $v_\alpha$ de $\mathcal{V}_b$ muni de la relation d'équivalence* Et*, notée* Et$(v_\alpha)$*, est alors l'ensemble de toutes les images de $v_\alpha$ par* Et *:* Et$(v_\alpha) = \{v_\beta \in \mathcal{V}_b \mid (v_\alpha, v_\beta) \in \texttt{Et}\}$.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence sur $\mathcal{V}_b$ est appelé l'ensemble quotient de $\mathcal{V}_b$ par Et, permettant de regrouper en un seul ensemble, les ensembles de valeurs situées dans la même classe d'équivalence.

**Définition 33.** *L'ensemble quotient de $\mathcal{V}_b$ par la relation d'équivalence* Et*, noté $\mathcal{V}_b$ / Et, est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{V}_b$ suivant* Et *: $\mathcal{V}_b$ / Et $= \{\texttt{Et}(v) \mid v \in \mathcal{V}_b\}$.*

L'ensemble quotient est donc un nouvel ensemble construit à partir de $\mathcal{V}_b$ et de Et, il s'agit bien d'un sous-ensemble de l'ensemble des parties de $\mathcal{V}_b$.

**2.2.3.2.2 Construction surjective** Une autre façon de représenter un système PAF avec un système VAF consiste à assigner une même valeur à l'ensemble des arguments étant eux même indifférents vis-à-vis de la relation de préférence $\succ$. Ce système, noté $\texttt{VAF}_s^P$, construit à partir d'une équivalence basée sur le possible caractère surjectif de la fonction val, est défini comme suit :

**Définition 34.** *Soit* PAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *un système d'argumentation à base de préférences. A partir d'un* PAF*, un système d'argumentation extrait surjectivement à base de valeurs* $\texttt{VAF}_s^P$ *est un tuple* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}_s, \texttt{val}_s, \texttt{Pref}_s^P \rangle$ *tel que :*

- *$\mathcal{V}_s$ est un ensemble de valeurs possédant une cardinalité au plus égale à celle de $\mathcal{A}$ ($|\mathcal{V}_s| \leq |\mathcal{A}|$),*
- $\texttt{val}_s$ *est une surjection de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{V}_s$,*
- $\texttt{Pref}_s^P \subseteq \mathcal{V}_s \times \mathcal{V}_s$ *est défini tel que :*
  1. *$\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, si $\texttt{val}_s(\alpha) = \texttt{val}_s(\beta)$ alors $\forall\ \gamma \in \mathcal{A}$ on a $(\alpha, \gamma) \in \succ$ ssi $(\beta, \gamma) \in \succ$ et on a $(\gamma, \alpha) \in \succ$ ssi $(\gamma, \beta) \in \succ$,*
  2. *$(v_\alpha, v_\beta) \in \texttt{Pref}_s^P$ ssi $\forall\ \alpha \in \texttt{val}_s^{-1}(v_\alpha)$ et $\forall\ \beta \in \texttt{val}_s^{-1}(v_\beta)$ on a $(\alpha, \beta) \in \succ$, où $\texttt{val}_s^{-1}$ correspond à la fonction inverse de $\texttt{val}_s$.*

**Exemple 29.** *Soit* VAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \texttt{val}, \texttt{Pref} \rangle$ *avec $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$, $\mathcal{V} = \{v_{emp}, v_{\overline{emp}}\}$, $\texttt{val}(\alpha) = v_{\overline{emp}}$, $\texttt{val}(\beta) = v_{\overline{emp}}$, $\texttt{val}(\gamma) = v_{\overline{emp}}$, $\texttt{val}(\delta) = v_{emp}$ et* Pref $= \{(v_{emp}, v_{\overline{emp}})\}$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.7, la largeur d'un cadre de valeur correspondant à la force relative de la valeur au regard de la relation* Pref*. A partir de* PAF *décrit par l'Exemple 16, le système* VAF *décrit par l'Exemple 29 est un système d'argumentation extrait surjectivement à base de valeurs.*

La relation $\texttt{Pref}_s^P$ possède les mêmes propriétés que la relation $\succ$.

**Propriété 13.** *La relation* $\texttt{Pref}_s^P$ *est irréflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc un ordre strict.*

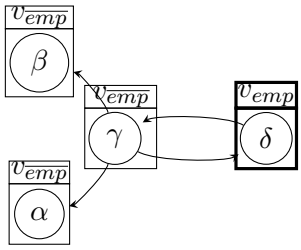



FIGURE 2.7 – Un graphe orienté VAF

Le système d'argumentation à base de préférences PAF peut donc être considéré comme un cas particulier du système d'argumentation à base de valeurs VAF.

**Propriété 14.** *Les systèmes d'argumentation associés à* PAF *et à* $\mathtt{VAF}_s^P$ *sont équivalents.*

Il existe une construction surjective minimale, noté $\mathtt{VAF}^P_{s(min)}$, donnant un ensemble de valeurs d'arrivée minimal noté $\mathcal{V}_s^{min}$ (au sens de la cardinalité) pour lequel le système $\mathtt{VAF}_s^P$ correspondant satisfait la Définition 34 et pour lequel il existe un $\mathtt{VAF}_b^P$ satisfaisant la Définition 30 et extrait bijectivement à partir d'un même PAF.

**Exemple 30.** *Soit* $\mathtt{VAF}_b^P = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}_b, \mathtt{val}_b, \mathtt{Pref}_b^P \rangle$ *extrait bijectivement à partir de* PAF *décrit dans l'Exemple 16 avec* $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$, $\mathcal{R} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$, $\mathcal{V}_b = \{v_{dog}, v_{car}, v_{hyp}, v_{emp}\}$, $\mathtt{val}_b(\alpha) = v_{dog}$, $\mathtt{val}_b(\beta) = v_{hyp}$, $\mathtt{val}_b(\gamma) = v_{car}$, $\mathtt{val}_b(\delta) = v_{emp}$ *et* $\mathtt{Pref}_b^P = \{(v_{emp}, v_{dog}), (v_{emp}, v_{hyp}), (v_{emp}, v_{car})\}$, $\mathtt{VAF}^P_{s(min)}$ *est la construction surjective minimale obtenu à partir de ce même* PAF *telle que* $\mathtt{VAF}^P_{s(min)} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}_s^{min}, \mathtt{val}_s, \mathtt{Pref}_s^P \rangle$ *avec* $\mathcal{V}_s^{min} = \{v_{\overline{emp}}, v_{emp}\}$, $\mathtt{val}_s(\alpha) = v_{\overline{emp}}$, $\mathtt{val}_s(\beta) = v_{\overline{emp}}$, $\mathtt{val}_s(\gamma) = v_{\overline{emp}}$, $\mathtt{val}_s(\delta) = v_{emp}$ *et* $\mathtt{Pref}_s^P = \{(v_{emp}, v_{\overline{emp}})\}$. *Les graphes d'attaque de ces deux systèmes sont représentés dans la Figure 2.8, la largeur d'un cadre de valeur correspondant à la force relative de la valeur au regard de la relation* $\mathtt{Pref}_b^P$ *et* $\mathtt{Pref}_s^P$, *et le cadre de valeur grisé correspondant à l'affectation de la valeur* $v_{\overline{emp}}$ *selon la fonction* $\mathtt{val}_s$ *aux trois arguments* $\alpha$, $\beta$ *et* $\gamma$.

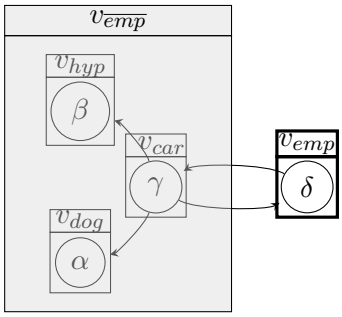



FIGURE 2.8 – Le graphe orienté VAF

**Propriété 15.** $|\mathcal{V}_s^{min}| = |\mathcal{V}_b \ / \ \mathtt{Et}|$

Il est à noter que cette construction surjective ne fait pas nécessairement de distinction entre arguments indifférents (c'est à dire "équivalents") et arguments incomparables.

### 2.2.4 Comparaison des systèmes à base de préférences classiques et contextuelles

Un système d'argumentation à base de préférences contextuelles CPAF peut être vu comme plusieurs systèmes PAFs complètement ordonnés, utilisant un opérateur d'agrégation :

**Définition 35.** *Soit* $\{\mathtt{PAF}_1 = \langle \mathsf{Arg}, \mathcal{R}, \succeq_1 \rangle$, ..., $\mathtt{PAF}_n = \langle \mathsf{Arg}, \mathcal{R}, \succeq_n \rangle\}$ *un ensemble de systèmes d'argumentation à base de préférences, totalement préordonné par la relation notée* $r_{PAF}$. $\oplus$ $(\mathtt{PAF}_1, ..., \mathtt{PAF}_n)$ *est un* $\mathtt{CPAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \triangleright, \succeq_{c_1}, \cdots \succeq_{c_n} \rangle$ *tel que :*
- $\mathcal{C}$ *est un ensemble de* $n$ *contextes, chaque* $c_i$ *est associé avec* $\mathtt{PAF}_i$ *:* $\succeq_{c_i} = \succeq_i$ *;*
- $\triangleright$ *est un préordre total sur* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$*, tel que* $(c_i, c_j) \in \triangleright$ *ssi* $(\mathtt{PAF}_i, \mathtt{PAF}_j) \in r_{PAF}$ *;*

Il est clair qu'au regard de cette définition, un système PAF peut être vu comme un cas particulier d'un système CPAF avec $n = 1$. D'autre part, l'évaluation du système CPAF est liée à une fonction d'agrégation qui mène à la construction d'un seul système PAF. Un système PAF peut aussi être obtenu par une agrégation des relations de préférences contextuelles à partir d'un système CPAF.

**Définition 36.** *Soit* $\mathtt{CPAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \triangleright, \succeq_1, \cdots \succeq_n \rangle$. *Un système d'argumentation à base de préférences agrégées à partir du système* CPAF *peut être défini comme suit :* $\mathtt{PAF}_{ag} = \langle \mathsf{Arg}, \mathcal{R}, \otimes(\succeq_1, \cdots \succeq_n) \rangle$.

Cette étude comparative a mis en valeur certains aspects intéressants. S'il paraît clair maintenant que plusieurs typologies du système VAF peuvent représenter un seul système PAF, un système VAF, lui, ne peut être représenté qu'au travers d'un seul système PAF, en accord avec l'étude issue de [KvdT08]. Le système PAF peut également être appréhendé comme un cas particulier du système CPAF (en termes d'équivalence). Ce dernier ne permet cependant pas une expressivité aussi importante que certains modèles à base de valeurs en argumentation, en effet un seul ensemble d'arguments est considéré pour l'ensemble des contextes, là où chaque valeur se réfère à des ensembles potentiellement différents d'arguments.

## 2.3 Vers un modèle unificateur à base de préférences

Cette section est destinée à proposer un cadre de travail en argumentation permettant de conserver l'aspect générique des systèmes à base de préférences directes entre arguments, tout en augmentant une certaine forme d'expressivité.

### 2.3.1 Expression d'un argument dans un contexte

En permettant à un argument de s'exprimer dans un ou plusieurs contextes (abstraitement liés aux notions de valeurs ou de critères), les travaux rappelés dans la première section de ce chapitre peuvent être intégrés dans un cadre de travail commun, utilisable notamment en situation de décision multi-critères.

**Définition 37.** *Un* système d'argumentation multi-contextuels à base de préférences *(*MCPAF*) est défini par un tuple* $\langle \mathcal{C}, \trianglerighteq, \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle, \langle \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$ *où :*
- $\mathcal{C}$ *est un ensemble de contextes tel que* $|\mathcal{C}| = n$*,*
- $\trianglerighteq \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ *est un préordre (partiel ou total),*
- $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ *(avec* $\mathcal{A} = \cup_{i \in [1,n]} \mathcal{A}_i$*) est un ensemble d'arguments s'exprimant dans un contexte* $c_i$*,*

– $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i$ *est une relation d'attaque sur* $\mathcal{A}_i$,
– $\succeq_i \subseteq \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i$ *est une relation de préférence sur* $\mathcal{A}_i$.

La notation `MCPAF` correspond à la traduction anglaise de "système d'argumentation multi-contextuels à base de préférences" : **M**ulti-**C**ontextual **P**reference-based **A**rgu-mentation **F**ramework.

**Exemple 31.** *Soit* `MCPAF` $= \langle \mathcal{C}, \trianglerighteq, \langle \mathcal{A}_{-IVe}, \mathcal{A}_{-IIIe}, \mathcal{A}_{IVe}, \mathcal{A}_{XVIe^{dog}}, \mathcal{A}_{XVIe^{emp}}, \mathcal{A}_{XVIIe} \rangle, \langle \mathcal{R}_{-IVe}, \mathcal{R}_{-IIIe}, \mathcal{R}_{IVe}, \mathcal{R}_{XVIe^{dog}}, \mathcal{R}_{XVIe^{emp}}, \mathcal{R}_{XVIIe} \rangle, \langle \succeq_{-IVe}, \succeq_{-IIIe}, \succeq_{IVe}, \succeq_{XVIe^{dog}}, \succeq_{XVIe^{emp}}, \succeq_{XVIIe} \rangle \rangle$ *avec* $\mathcal{A}_{-IVe} = \{\alpha\}$, $\mathcal{A}_{-IIIe} = \{\alpha, \beta\}$, $\mathcal{A}_{IVe} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{A}_{XVIe^{dog}} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\mathcal{A}_{XVIe^{emp}} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\mathcal{A}_{XVIIe} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$, $\mathcal{R}_{-IVe} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{R}_{-IIIe} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{R}_{IVe} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta)\}$, $\mathcal{R}_{XVIe^{dog}} = \mathcal{R}_{XVIe^{emp}} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma)\}$, $\mathcal{R}_{XVIIe} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma), (\epsilon, \gamma)\}$, $\mathcal{C} = \{c_{-IVe}, c_{-IIIe}, c_{IVe}, c_{XVIe^{dog}}, c_{XVIe^{emp}}, c_{XVIIe}\}$, $\trianglerighteq = \{(c_{XVIIe}, c_{XVIe^{emp}}), (c_{XVIIe}, c_{XVIe^{dog}}), (c_{XVIe^{emp}}, c_{XVIe^{dog}}), (c_{XVIe^{dog}}, c_{XVIe^{emp}}), (c_{XVIe^{emp}}, c_{IVe}), (c_{XVIe^{dog}}, c_{IVe}), (c_{IVe}, c_{-IIIe}), (c_{-IIIe}, c_{-IVe})\}$, $\succeq_{-IVe} = \{\emptyset\}$, $\succeq_{-IIIe} = \{\emptyset\}$, $\succeq_{IVe} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta)\}$, $\succeq_{XVIe^{dog}} = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta)\}$, $\succeq_{XVIe^{emp}} = \{(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\delta, \gamma)\}$, $\succeq_{XVIIe} = \{(\epsilon, \alpha), (\epsilon, \beta), (\epsilon, \gamma), (\epsilon, \delta)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 2.9, la largeur d'un cadre de contexte correspondant à la force relative du contexte au regard de la relation* $\trianglerighteq$ *(ici en tant que relation totale) et la largeur d'un noeud dans un contexte* $c_i$ *correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq_i$.

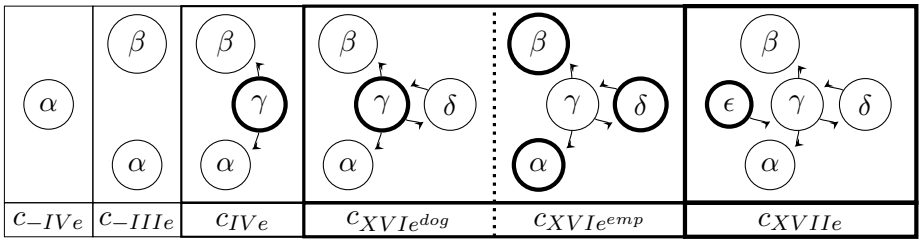



FIGURE 2.9 – Un graphe orienté `MCPAF`

A travers cet exemple, on perçoit bien l'intérêt d'un tel modèle en argumentation car il permet notamment d'exprimer la séquentialité inhérente à tout discours argumentaire : un argument est exprimé, puis un autre pouvant éventuellement contrarier ou être contrarié par le précédent est à son tour exprimé, l'évolution des préférences entre ces arguments restant permise par le modèle. D'autre part, un aspect intéressant est la possibilité de définir des contextes équivalents témoignant par exemple de la concomitance de plusieurs points de vue (au sens de préférences différentes entre arguments) dans un même temps argumentatif.

**Définition 38** (Système associé à `MCPAF`)**.** *Soit* `MCPAF` $= \langle \mathcal{C}, \trianglerighteq, \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle, \langle \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$, $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$ *la préférence agrégée et* $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1, \ldots \mathcal{R}_n)$ *l'attaque agrégée. Le* `AF` *associé à* `MCPAF` *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \texttt{Def} \rangle$ *où* $\texttt{Def} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \texttt{Def}$ *si et seulement si* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1, \ldots \mathcal{R}_n)$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$.

Une fois définie l'agrégation des préférences et des attaques, les sémantiques de Dung peuvent être appliquées au système d'argumentation associé à `MCPAF`, ce qui permet l'évaluation de ses arguments.

### 2.3.2 Comparaison du système unifié avec les systèmes issus de la littérature

A présent, il s'agit de comparer ce système d'argumentation à base de préférences par rapport à ceux proposés précédemment dans la littérature.

**Définition 39.** *Soit* CPAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \rhd, \succeq_1, \cdots \succeq_n \rangle$. *Le système* MCPAF$^C$ *peut être construit à partir de* CPAF *tel que* MCPAF$^C$ $= \langle \mathcal{C}, \trianglerighteq^C, \langle \mathcal{A}_1^C, \ldots, \mathcal{A}_n^C \rangle, \langle \mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$ *avec :*
- $\mathcal{A}_1^C = \cdots = \mathcal{A}_n^C = \mathcal{A}$,
- $\mathcal{R}_1^C = \cdots = \mathcal{R}_n^C = \mathcal{R}$,
- $\trianglerighteq^C = \rhd$.

**Propriété 16.** *Les systèmes d'argumentation associés à* CPAF *et à* MCPAF$^C$ [7] *sont équivalents.*

Le système d'argumentation à base de préférences contextuelles CPAF peut donc être considéré comme un cas particulier du système d'argumentation multi-contextuels à base de préférences MCPAF.

**Définition 40.** *Soit* VSAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$, *avec* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_{|\mathcal{V}|}\}$. *Le système* MCPAF$^M$ *peut être construit à partir de* VSAF *tel que* MCPAF$^M$ $= \langle \mathcal{C}^M, \trianglerighteq^M, \langle \mathcal{A}_1^M, \ldots, \mathcal{A}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \succeq_1^M, \ldots, \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle \rangle$ *avec :*
- $\mathcal{C}^M = \{v_1, \ldots, v_{|\mathcal{V}|}, c_{|\mathcal{V}|+1}\}$
- $\mathcal{A}_i^M = \arg(v_i)$,
- $\mathcal{A}_{|\mathcal{V}|+1}^M = \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M = \mathcal{R}$,
- $\forall\ c_i, c_j \in \mathcal{C}^M$, $(c_i, c_j) \in \trianglerighteq^M$ *si* $(v_i, v_j) \in \gg$,

Le système d'argumentation à base de multiples valeurs VSAF est également un cas particulier du système d'argumentation multi-contextuels à base de préférences MCPAF, comme le montre la Propriété 17, en accord avec le calcul des deux systèmes de Dung associés au système VSAF présentés dans la Définition 24.

**Propriété 17.**
- *Les deux systèmes d'argumentation* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{Def} \rangle$ *et* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{defeats}_{Bc} \rangle$ *associés respectivement à* MCPAF$^M$ $= \langle \mathcal{C}^M, \trianglerighteq^M, \langle \mathcal{A}_1^M, \ldots, \mathcal{A}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \succeq_1^M, \ldots, \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle \rangle$ *et* VSAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *sont équivalents ssi* $\oplus^{\trianglerighteq^M}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M) = \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ *et on a* $(\alpha, \beta) \in \otimes^{\trianglerighteq^M}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *si* $\exists$ *i,j tel que* $\alpha \in \mathcal{A}_i^M$, $\beta \in \mathcal{A}_j^M$ *et* $(c_i, c_j) \in \trianglerighteq^M$.
- *Les deux systèmes d'argumentation* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{Def} \rangle$ *et* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{defeats}_M \rangle$ *associés respectivement à* MCPAF$^M$ $= \langle \mathcal{C}^M, \trianglerighteq^M, \langle \mathcal{A}_1^M, \ldots, \mathcal{A}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \succeq_1^M, \ldots, \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle \rangle$ *et* VSAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *sont équivalents ssi* $\oplus^{\trianglerighteq^M}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M) = \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ *et on a* $(\alpha, \beta) \in \otimes^{\trianglerighteq^M}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *si* $|\{i | \alpha \in \mathcal{A}_i\}| > |\{i | \beta \in \mathcal{A}_i\}|$.

Nous avons ainsi montré que le système proposé MCPAF généralise tous les systèmes à base de préférences directes ou indirectes présentés dans ce chapitre. La Figure 2.10 représente l'étude comparative et resitue les composants des modèles proposés dans la littérature. Si le système d'argumentation à la Dung AF demeure le plus abstrait des systèmes d'argumentation, pouvant être associé à tous les autres, MCPAF apparaît comme le plus expressif en termes de modélisation et comme une généralisation de ces derniers. Ainsi dans le graphe présenté, les arcs représentent l'existence d'un cas particulier tel que $Système_i \Longrightarrow Système_j$ signifie "le $Système_i$ est un cas particulier du $Système_j$". Le modèle MCPAF propose un préordre partiel ou total pour comparer les contextes entre eux, ceci permet notamment la généralisation du modèle CPAF de par le caractère particulier de l'ordre sur le préordre. Le caractère total, lui, ne peut suffire pour représenter l'incomparabilité entre contextes qui est incontournable dans le système VSAF.

7. $\oplus^{\trianglerighteq}$ sera axiomatisé comme suit : $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_c, \ldots, \mathcal{R}_c) = \mathcal{R}_c$

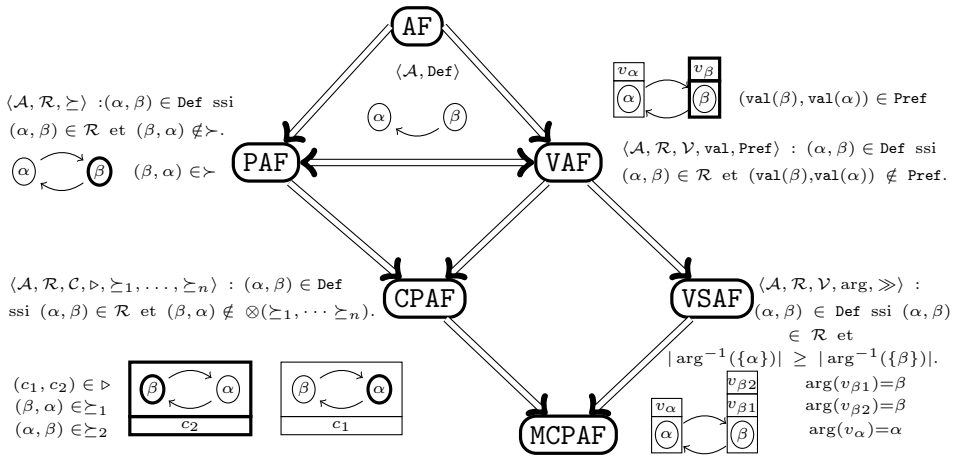



FIGURE 2.10 – Un graphe orienté de généralisation entre systèmes d'argumentation

## 2.4 Travaux connexes

Comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises dans ce chapitre, de précédents travaux [KvdT08], s'étaient déjà intéressés à la comparaison des systèmes d'argumentation, s'agissant notamment des systèmes `AF`, `PAF`, `VAF`, et `VSAF`. Cependant, la méthode de comparaison proposée était purement syntaxique et ambigüe, et aucune définition de l'équivalence entre systèmes d'argumentation n'était proposée. De plus, certaines comparaisons présentées dans ce travail n'étaient pas exactes, nous proposons deux contre-exemples pour appuyer ce propos.

### 2.4.1 Comparaison des systèmes `PAF` et `VAF`

Dans [KvdT08], il est affirmé que chaque système `PAF` peut être représenté par différents systèmes `VAF`s, ce qui est exact, en ajoutant cependant que tous ces systèmes `VAF` sont isomorphes, chacun d'eux représentant un renommage par rapport aux autres. Bien qu'inscrit dans le Lemme 4 de [KvdT08], cette assertion n'est pas exacte. Un contre-exemple est fourni ici :
Soit un système `PAF` défini par $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ avec $\mathcal{A} = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ et $\succeq = \{(\alpha,\ \beta),\ (\alpha,\gamma)\}$. Considérons les deux systèmes `VAF`s suivants : $\mathtt{VAF}_1 = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}_1, \mathtt{val}_1, \mathtt{Pref}_1 \rangle$, avec $\mathcal{V}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathtt{val}_1(\alpha) = v_3$, $\mathtt{val}_1(\beta) = v_2$ et $\mathtt{val}_1(\gamma) = v_1$, et $\mathtt{Pref}_1 = \{(v_3, v_2), (v_3, v_1)\}$. $\mathtt{VAF}_2 = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}_2, \mathtt{val}_2, \mathtt{Pref}_2 \rangle$, avec $\mathcal{V}_2 = \{v_1, v_2\}$, $\mathtt{val}_2(\alpha) = v_2$, $\mathtt{val}_2(\beta) = v_1$ et $\mathtt{val}_2(\gamma) = v_1$, et $\mathtt{Pref}_1 = \{(v_2, v_1)\}$. Bien que le système $\mathtt{VAF}_1$ et le système $\mathtt{VAF}_2$ soient équivalents au système `PAF`, ils ne sont pas isomorphes. En fait, l'assertion de [KvdT08] serait valide si $\mathtt{Pref}_i$ était un ordre total, ce qui n'est pas forcément le cas.

### 2.4.2 Comparaison des systèmes `PAF` et `VSAF`

Pour chaque système `VSAF`, il existe au moins un système `PAF` qui le représente. A partir de la définition présentée dans [KvdT08], $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathrm{arg}, \gg, MM \rangle$ représente $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathtt{Pref}_{MM} \rangle$ si et seulement si $\mathtt{Pref}_{MM}$ est la moins spécifique (au sens de la définition présentée dans [Yag08]) des relations parmi les $\mathtt{Pref}'_{MM}$s tel que $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R},$
$\mathtt{Pref}'_{MM} \rangle$ satisfait $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathrm{arg}, \gg, MM \rangle$. Soit $v_1$, $v_2 \in \mathcal{V}$ tel que $\mathrm{arg}(v_1)= \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$, $\mathrm{arg}(v_2)= \{\gamma,\ \delta\}$ et $(v_1, v_2) \in \gg$ ; les deux systèmes $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathtt{Pref}^1_{MM} \rangle$ et $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathtt{Pref}^2_{MM} \rangle$ satisfont $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V},$ $\mathrm{arg}, \gg, MM \rangle$ avec $\mathtt{Pref}^1_{MM} = \{(\alpha,\gamma),\ (\alpha,\delta),\ (\gamma,\delta),\ (\delta,\gamma)\}$ et $\mathtt{Pref}^2_{MM} = \{(\beta,\gamma),\ (\beta,\delta),\ (\gamma,\delta),$

$(\delta,\gamma)\}$. Or, il n'y a pas une relation plus spécifique qu'une autre entre $\texttt{Pref}^1_{MM}$ et $\texttt{Pref}^2_{MM}$ contredisant le Théorème 5 présenté dans [KvdT08].

Les travaux réalisés dans ce chapitre ont donné lieu à deux publications [BAT09, BAT10].

# 3

# Agrégation et Fusion des systèmes

## Sommaire


**3.1 Fusionner plusieurs systèmes à la Dung . . . . . 38**
3.1.1 Système d'argumentation partiel . . . . . 38
3.1.2 Etape 1 : L'expansion . . . . . 39
3.1.3 Etape 2 : La fusion . . . . . 40
**3.2 Analyse critique . . . . . 41**
3.2.1 Comportement de l'opérateur somme . . . . . 41
3.2.2 Comparaison des opérateurs somme et max . . . . . 43
3.2.3 Limite de la fusion . . . . . 44
**3.3 La consistance lors d'une agrégation . . . . . 45**
3.3.1 L'agrégation de défaite . . . . . 45
3.3.2 Opérations de fusion naturelles . . . . . 49


Le raffinement des systèmes d'argumentation abstraits à la Dung de la fin des années 90 et du début des années 2000 s'est attaché à considérer l'agent au coeur du raisonnement argumentatif. Outre l'enrichissement en termes explicatifs voire représentationnel engendré par ces extensions, c'est le mécanisme de raisonnement argumentatif, utilisé pour dériver des conclusions bien fondées, et à l'orée d'un système décisionnel, des actions supportées, qui a fait l'objet du plus d'attention. Les travaux en argumentation se sont donc diversifiés et ont donné lieu à plusieurs courants pour les modélisateurs, dont [BMB10] clarifie précisément la nature en terme d'approche "micro" (structure interne de l'argument), approche "macro" (relations entre arguments) et "rhétorique" (prenant en compte la perception des arguments par l'audience). A présent un enjeu réside dans le couplage de ces courants, et ce dans le but de pouvoir procurer de véritables systèmes multi-agents d'appui à la décision argumentée. Ainsi, de récentes méthodes de fusion de systèmes d'argumentation de type Dung ont été dérivées de celles classiquement proposées pour fusionner des bases de connaissances [CMDK$^+$07]. L'approche "macro" utilisée pour combiner les systèmes fait l'objet de l'étude proposée dans ce chapitre. Des éléments abordés dans le Chapitre 1 permettent de remarquer qu'au regard du courant "micro", ces méthodes peuvent aboutir à des systèmes d'argumentation globaux non souhaités, où l'incohérence présente entre systèmes peut être mal répercutée lors de l'étape de fusion. A la lumière de certaines propriétés propres aux théories du choix social, retranscrites il y a peu, en termes de fusion dans la littérature des systèmes d'argumentation [TBS08], nous étudierons ces nouvelles méthodes de fusion, déterminerons certaines de leurs limites, et montrerons dans quelle mesure certaines agrégations intra et inter système(s) peuvent aboutir à un système d'argumentation fusionné aux propriétés souhaitées.

## 3.1 Fusionner plusieurs systèmes à la Dung

Nous appelons agrégation en argumentation tout processus qui vise à unifier plusieurs entités d'un ou plusieurs systèmes d'argumentation (telles l'attaque, la préférence, etc.) en une seule et ce dans le but d'en déduire l'acceptabilité globale des arguments présents. L'opération de fusion en argumentation consiste à transformer un ensemble de systèmes d'argumentation à la Dung $\{\mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n\}$ en un seul. Une méthode pour mener à bien cette opération est proposée par Coste-Marquis et al. [CMDK+07]. Cette méthode basée sur une notion de distance entre AFs, qui sera rappelée dans ce chapitre, peut se décrire en deux étapes : (1) le calcul, à partir de chaque $\mathtt{AF}_i$, d'une expansion intégrant certaines informations d'autres AFs, rendant l'ensemble des expansions deux à deux comparables et (2) sélectionner, comme solution de fusion, un ou plusieurs AFs minimisant une fonction cumulant les distances entre l'AF sélectionné[8] et les expansions précédemment calculées.

### 3.1.1 Système d'argumentation partiel

Rappelons en premier lieu la définition d'un système partiel d'argumentation (noté PaAF).

**Définition 41** ([CMDK+07])**.** *Un système partiel d'argumentation sur un ensemble d'arguments $\mathcal{A}_p$ est un tuple* $\mathtt{PaAF} = \langle \mathcal{A}_P, \mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P, \mathcal{N}_P \rangle$ *tel que :*
- *$\mathcal{A}_P$ est un ensemble d'arguments,*
- *$\mathcal{R}_P$ est une relation d'attaque,*
- *$\mathcal{I}_P$ est une relation d'ignorance, telle que $\mathcal{R}_P \cap \mathcal{I}_P = \emptyset$,*
- *$\mathcal{N}_P = (\mathcal{A}_P \times \mathcal{A}_P) \setminus (\mathcal{R}_P \cup \mathcal{I}_P)$ est une relation de non-attaque.*

*Notons que $\mathcal{N}_P$ peut être déduite de $\mathcal{R}_P$ et $\mathcal{I}_P$, ces trois relations formant une partition de l'ensemble $\mathcal{A}_P \times \mathcal{A}_P$. Un* PaAF *peut donc être spécifié tel un triplet $\langle \mathcal{A}_P, \mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P \rangle$.*

Partant d'un ensemble de $\mathtt{AF} = \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$, Coste-Marquis et al. [CMDK+07] introduisent le concept de complétion d'un système partiel d'argumentation. Nous rappelons ici sa définition. Une complétion d'un PaAF est un AF classique où chaque relation d'ignorance entre deux arguments est remplacée ou non par une relation d'attaque. Un PaAF donné a donc de multiples complétions, l'ensemble est appelé profil complétif.

**Définition 42** (Complétion [CMDK+07])**.** *Une complétion de* $\mathtt{PaAF} = \langle \mathcal{A}_P, \mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P, \mathcal{N}_P \rangle$ *est un système d'argumentation* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *tel que*
- $\mathcal{A} = \mathcal{A}_P$
- $\mathcal{R}_P \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_P \cup \mathcal{I}_P$

*Etant donné un* PaAF*,* $\mathtt{PaAF} = \langle \mathcal{A}_P, \mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P, \mathcal{N}_P \rangle$*, le profil complétif de l'opération de complétion est* $\oplus^{com} \langle \mathcal{A}_P, \mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P, \mathcal{N}_P \rangle = \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_{2^{|\mathcal{I}_P|}} \rangle$ *où chaque* $\mathtt{AF}_i$ *est une complétion distincte de* PaAF*.*

Il y a $2^{|\mathcal{I}_P|}$ systèmes d'argumentation dans le profil complétif, représentant les possibles affectations des couples de $\mathcal{I}_P$ en tant qu'attaque ou non-attaque.
Etant donné un profil complétif, l'opération de déplétion est définie comme l'opération inverse (donnant le PaAF original).
La déplétion est définie par $\oplus^{dep} \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_{2^{|\mathcal{I}_P|}} \rangle = \langle \mathcal{A}_P, \mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P, \mathcal{N}_P \rangle$ ssi $\oplus^{com} \langle \mathcal{A}_P, \mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P, \mathcal{N}_P \rangle = \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_{2^{|\mathcal{I}_P|}} \rangle$. On note $\oplus_I^{dep} \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_{2^{|\mathcal{I}_P|}} \rangle = \mathcal{I}_P$ et $\oplus_R^{dep} \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_{2^{|\mathcal{I}_P|}} \rangle = \mathcal{R}_P$. Les notions de complétion et déplétion sont illustrées dans la Figure 3.1.

8. Plusieurs AFs pouvant minimiser cette fonction, la solution de la fusion peut être un ensemble d'AFs

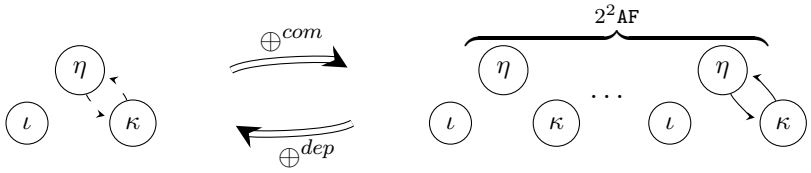



FIGURE 3.1 – Complétion et déplétion

Partant d'un ensemble de systèmes d'argumentation (ensemble également appelé profil), Coste-Marquis et al. vont proposer une méthode pour expandre un système d'argumentation autour d'un profil donné. Ainsi, après avoir défini quelques propriétés générales d'une expansion, ils en définissent un type : l'expansion consensuelle. Nous rappelons sa construction.

### 3.1.2 Etape 1 : L'expansion

La première phase de la fusion de $n$ systèmes d'argumentation pour Coste-Marquis et al. est donc le calcul de $n$ expansions consensuelles de la façon suivante :

**Définition 43** (Expansion consensuelle [CMDK+07])**.** *Soit* $\mathcal{P} = \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$ *un profil de* $n$ $\mathtt{AF}$*s tel que* $\mathtt{AF}_i = \langle \mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i \rangle$*. Soit* $conf(\mathcal{P}) = (\bigcup_i \mathcal{R}_i) \cap (\bigcup_i \overline{\mathcal{R}_i})$ *l'ensemble de couples d'arguments avec lesquels le profil* $\mathcal{P}$ *est en désaccord. L'expansion consensuelle de* $\mathtt{AF}_k$ *étant donné* $\mathcal{P}$ *est un système d'argumentation partiel* $\langle \mathcal{A}', \mathcal{R}', \mathcal{I}', \mathcal{N}' \rangle$ *noté* $exp_C(\mathtt{AF}_k, \mathcal{P})$ *défini tel que :*

- $\mathcal{A}' = \bigcup_i \mathcal{A}_i$,
- $\mathcal{R}' = \bigcup_i \mathcal{R}_i \setminus (conf(\mathcal{P} \setminus \mathtt{AF}_k) \setminus \overline{\mathcal{R}_k})$,
- $\mathcal{I}' = conf(\mathcal{P} \setminus \mathtt{AF}_k) \setminus (\mathcal{R}_k \cup \overline{\mathcal{R}_k})$,
- $\mathcal{N}' = (\mathcal{A}' \times \mathcal{A}') \setminus (\mathcal{R}' \cup \mathcal{I}')$.

**Exemple 32.** *Soit* $\mathcal{P} = \langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2, \mathtt{AF}_3 \rangle$ *un profil, les expansions de chaque système* $\mathtt{AF}_i$ *étant donné* $\mathcal{P}$ *sont représentées dans la Figure 3.2 :*

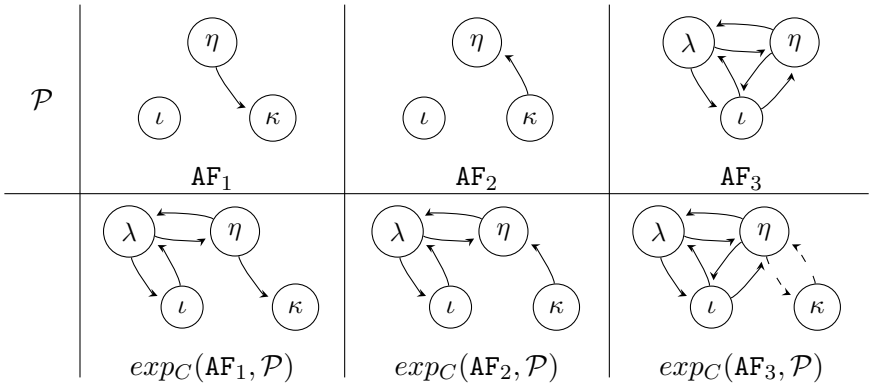



FIGURE 3.2 – L'expansion

Il s'agit donc de conserver pour un $\mathtt{AF}_k$ toutes ses attaques et non-attaques au sein de son expansion, en y ajoutant toutes les attaques et les non-attaques impliquant des arguments non présents dans $\mathtt{AF}_k$ et pour lesquelles tous les autres systèmes d'argumentation du profil (dans

lesquels ces arguments sont impliqués) sont unanimes quand à leur interaction (attaque ou non-attaque). S'il y a un conflit avec au moins un système d'argumentation dans le profil (à l'exception du $\mathtt{AF}_k$) alors l'interaction entre les arguments en question est jugée ignorée, c'est pourquoi une expansion est un PaAF.

### 3.1.3 Etape 2 : La fusion

L'étape de fusion est nécessaire pour choisir un ou plusieurs AFs, lesquels seront les plus proches de l'ensemble des expansions calculées. Coste-Marquis et al. ont défini une notion de distance entre systèmes d'argumentation afin de définir cette notion de proximité.

**Définition 44** (Distance entre AFs [CMDK+07])**.** *Etant donné* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *et* $\mathtt{PaAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}', \mathcal{I}', \mathcal{N}' \rangle$*, leur distance éditée* $d(\mathtt{AF}, \mathtt{PaAF})$ *est telle que* $d(\mathtt{AF}, \mathtt{PaAF}) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}} d_{a,b}(\mathtt{AF}, \mathtt{PaAF})$ *avec :*

- $d_{\alpha,\beta}(\mathtt{AF}, \mathtt{PaAF}) = 0$ *ssi* $(a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ *ou* $\overline{\mathcal{R}} \cap \mathcal{N}'$*,*
- $d_{\alpha,\beta}(\mathtt{AF}, \mathtt{PaAF}) = 1$ *ssi* $(a,b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N}'$ *ou* $\overline{\mathcal{R}} \cap \mathcal{R}'$*,*
- $d_{\alpha,\beta}(\mathtt{AF}, \mathtt{PaAF}) = 0.5$ *autrement.*

Il existe plusieurs façons de retenir le(s) système(s) AFs fusionné(s), soit retenir le(s) système(s) qui s'éloigne(ent) le moins de l'ensemble du profil quitte à en retenir qui s'éloigne(nt) nettement d'un système du profil, soit retenir le(s) système(s) qui s'éloigne(ent) le moins de chaque système du profil quitte à ce qu'il(s) s'éloigne(nt) nettement de l'ensemble. C'est un opérateur de fusion qui dictera ce mode de fusion.

**Définition 45** ([CMDK+07])**.** *Soit* $\langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$ *un profil de systèmes d'argumentation, la fusion par l'opérateur de fusion Op notée* $\otimes^{Op}$ *retient un ensemble de systèmes d'argumentation tel que :*

$$\otimes^{Op}\langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle = \langle \mathtt{AF}_j^M | Op_{i=1}^n d(\mathtt{AF}_j^M, exp_C(\mathtt{AF}_i, \mathcal{P})) \text{ est minimal} \rangle$$

*avec d la distance éditée (voir la Définition 44) et Op une fonction de fusion de* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *qui est essentiellement non décroissante pour chaque variable.*

Les choix pour $Op$ retenus par Coste-Marquis et al. sont la somme $Op = \sum$ et les opérateurs de maxima $Op = max$ ou $Op = leximax$.

**Exemple 33.** *Représentés dans la Figure 3.3, la fusion de* $\mathcal{P}$ *par les opérateurs leximax donne deux systèmes* $\mathtt{AF}_1^M$ *et* $\mathtt{AF}_2^M$*, et pour les opérateurs max et* $\sum$ *donne quatre systèmes* $\mathtt{AF}_1^M$*,* $\mathtt{AF}_2^M$*,* $\mathtt{AF}_3^M$ *et* $\mathtt{AF}_4^M$*.*

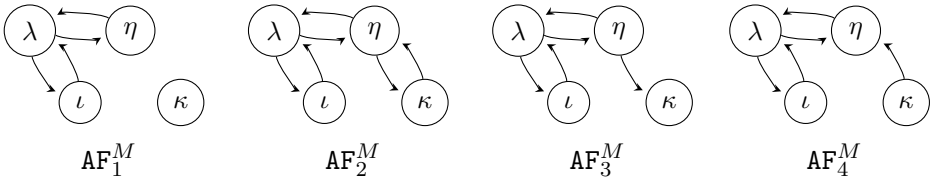



FIGURE 3.3 – Systèmes fusionnés

*Chaque distance entre les systèmes* $\mathtt{AF}_1^M$*,* $\mathtt{AF}_2^M$*,* $\mathtt{AF}_3^M$ *et* $\mathtt{AF}_4^M$ *et les expansions du profil* $\mathcal{P}$ *sont décrites ci-dessous :*
-$d(\mathtt{AF}_1^M, exp_C(\mathtt{AF}_1, \mathcal{P})) = 1$*,* $d(\mathtt{AF}_1^M, exp_C(\mathtt{AF}_2, \mathcal{P})) = 1$*,* $d(\mathtt{AF}_1^M, exp_C(\mathtt{AF}_3, \mathcal{P})) = 3$*.*
-$d(\mathtt{AF}_2^M, exp_C(\mathtt{AF}_1, \mathcal{P})) = 1$*,* $d(\mathtt{AF}_2^M, exp_C(\mathtt{AF}_2, \mathcal{P})) = 1$*,* $d(\mathtt{AF}_2^M, exp_C(\mathtt{AF}_3, \mathcal{P})) = 3$*.*

-$d(\mathtt{AF}_3^M, exp_C(\mathtt{AF}_1, \mathcal{P}))$ = 0, $d(\mathtt{AF}_3^M, exp_C(\mathtt{AF}_2, \mathcal{P}))$ = 2, $d(\mathtt{AF}_3^M, exp_C(\mathtt{AF}_3, \mathcal{P}))$ = 3.
-$d(\mathtt{AF}_4^M, exp_C(\mathtt{AF}_1, \mathcal{P}))$ = 2, $d(\mathtt{AF}_4^M, exp_C(\mathtt{AF}_2, \mathcal{P}))$ = 0, $d(\mathtt{AF}_4^M, exp_C(\mathtt{AF}_3, \mathcal{P}))$ = 3.

*Les opérateurs $\sum$ et max retournent $\mathtt{AF}_1^M$, $\mathtt{AF}_2^M$, $\mathtt{AF}_3^M$ et $\mathtt{AF}_4^M$ car quel que soit le système fusionné parmi ceux-ci, la somme de ses distances avec chacune des expansions est de 5, enfin l'expansion située à la distance maximale des systèmes fusionnés est toujours $exp_C(\mathtt{AF}_3, \mathcal{P})$, cette distance étant toujours de 3.*

*L'opérateur leximax retourne seulement $\mathtt{AF}_1^M$ et $\mathtt{AF}_2^M$ dû aux distances excessives de 2 entre $\mathtt{AF}_3^M$ et $exp_C(\mathtt{AF}_2, \mathcal{P})$ et entre $\mathtt{AF}_4^M$ et $exp_C(\mathtt{AF}_1, \mathcal{P})$.*

## 3.2 Analyse critique

Les opérateurs de fusion *Op* introduits par Coste-Marquis discutés ici seront la somme et l'opérateur maximum, le leximax ne correspondant qu'à un raffinement de ce dernier en cas d'égalité sur le calcul de la distance du système fusionné avec les expansions les plus éloignées. En préambule de cette discussion, nous proposons de réécrire le calcul du minima des opérateurs de fusion, en faisant apparaître directement les ensembles concernés, s'agissant des expansions et du système fusionné, et en raisonnant sur leur cardinalité.

**Proposition 2.** *Soit un profil $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P} = \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$ avec $\mathtt{AF}_i = \langle \mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i \rangle$ et $exp_C(AF_i, \mathcal{P})$ $= \langle \mathcal{A}', \mathcal{R}'_i, \mathcal{I}'_i \rangle$, la fusion par l'opérateur de fusion Op $\oplus^{Op}\mathcal{P} = \langle \mathtt{AF}_1^M, \ldots, \mathtt{AF}_m^M \rangle$ avec $\mathtt{AF}_k^M$ $= \langle \mathcal{A}', \mathcal{R}_k^M \rangle$ tel que $\mathtt{AF}_k^M$ (for k = 1, ..., m) minimise :*

$$Op_{i=1}^n \left[ |\overline{\mathcal{R}_k^M} \cap \mathcal{R}'_i| + |\mathcal{R}_k^M \cap (\overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{I'_i})| + \frac{|\mathcal{I}'_i \cap \mathcal{R}_k^M| + |\mathcal{I}'_i \cap \overline{\mathcal{R}_k^M}|}{2} \right].$$

**Preuve 17.** $\mathcal{P}_M = \langle \mathtt{AF}_j^M | Op_{i=1}^n d(\mathtt{AF}_j^M, exp_C(\mathtt{AF}_i, \mathcal{P}))$ *est minimal*$\rangle$.

$\mathcal{P}_M = \langle \mathtt{AF}_j^M | Op_{i=1}^n \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'} d_{\alpha,\beta}(\mathtt{AF}_j^M, \exp_C(\mathtt{AF}_i, \mathcal{P}))$ *est minimal*$\rangle$.

*Puisque :*

- $d_{\alpha,\beta}(\mathtt{AF}_j^M, \exp_C(\mathtt{AF}_i, \mathcal{P}))$ = 0 *ssi* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_j^M \cap \mathcal{R}'_i$ *ou* $(\overline{\mathcal{R}_j^M} \cap \overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{\mathcal{I}'_i})$,
- $d_{\alpha,\beta}(\mathtt{AF}_j^M, \exp_C(\mathtt{AF}_i, \mathcal{P}))$ = 1 *ssi* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_j^M \cap (\overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{\mathcal{I}'_i})$ *ou* $\overline{\mathcal{R}_j^M} \cap \mathcal{R}'_i$,
- $d_{\alpha,\beta}(\mathtt{AF}_j^M, \exp_C(\mathtt{AF}_i, \mathcal{P}))$ = $\frac{1}{2}$ *ssi* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_j^M \cap \mathcal{I}'_i$ *ou* $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathcal{R}_j^M} \cap \mathcal{I}'_i$.

*Il s'en déduit que :*

$\mathcal{P}_M = \langle \mathtt{AF}_j^M | Op_{i=1}^n \left[ |\overline{\mathcal{R}_k^M} \cap \mathcal{R}'_i| + |\mathcal{R}_k^M \cap (\overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{I'_i})| + \frac{|\mathcal{I}'_i \cap \mathcal{R}_k^M| + |\mathcal{I}'_i \cap \overline{\mathcal{R}_k^M}|}{2} \right]$ *minimal* $\rangle$. □

### 3.2.1 Comportement de l'opérateur somme

Quand l'opérateur de fusion choisi *Op* est la somme, il se vérifie que l'ensemble des systèmes fusionnés correspond exactement à un ensemble de complétion, auquel on peut appliquer une opération de déplétion. Ceci est montré dans la proposition suivante.

**Proposition 3.** *Etant donné un profil de système d'argumentation $\langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$ tel que $\otimes^{\sum} \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle = \mathcal{P}_M$, $R \subseteq \{1, \ldots, n\}$ et $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$ avec R et N les sous-ensembles maximaux vérifiant $(a, b) \in \bigcap_i^{i \in R} \mathcal{R}_i$ et $(a, b) \in \bigcap_i^{i \in N} \overline{\mathcal{R}_i}$.*

- *Si $|R| = |N|$ alors $(a, b) \in \oplus_I^{dep} \mathcal{P}_M$,*
- *Si $|R| > |N|$ alors $(a, b) \in \oplus_R^{dep} \mathcal{P}_M$,*
- *Si $|N| > |R|$ alors $(a, b) \notin \oplus_I^{dep} \mathcal{P}_M \cup \oplus_R^{dep} \mathcal{P}_M$.*

**Preuve 18.** *Soit* $\mathtt{AF}_j^M$ *et* $\mathtt{AF}_l^M$ *deux systèmes d'argumentation fusionnés tel que* $(\alpha,\beta) \notin \mathcal{R}_j^M$ *et* $(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}_l^M$, $\nexists\ i$ *tel que* $(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}_j^M \cap (\overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{I'_i}$, $(\alpha,\beta) \in \overline{\mathcal{R}_l^M} \cap \mathcal{R}'_i$, $(\alpha,\beta) \in \mathcal{I}'_i \cap \mathcal{R}_j^M$ *et* $(\alpha,\beta) \in \mathcal{I}'_i \cap \overline{\mathcal{R}_l^M}$. *Si* $\alpha$, $\beta$ *satisfont :*
- $|R| = |N|$, *ainsi* $|\{i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{R}'_i\}| = |\{i\ s.t\ (\alpha,\beta) \in \overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{I'_i}|$, *i.e* $|\{i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \overline{\mathcal{R}_j^M} \cap \mathcal{R}'_i\}| = |\{\ i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{R}_l^M \cap (\overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{I'_i}|$, *de plus* $|\{\ i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{I}'_i \cap \mathcal{R}_l^M\}| = |\{\ i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{I}'_i \cap \overline{\mathcal{R}_j^M}\}|$. *Les systèmes d'argumentation se comportant pour la paire* $(\alpha,\beta)$ *comme* $\mathtt{AF}_l$ *et* $\mathtt{AF}_j$ *ont le même total au regard de la somme des distances par rapport aux expansions, et ce précisément pour la paire* $(\alpha,\beta)$, *il y a donc autant de systèmes possédant ou non cette paire dans leur relation d'attaque, en accord avec le fait que* $(\alpha,\beta) \in \oplus_I^{dep}\mathcal{P}_M$.
- $|R| > |N|$, *ainsi* $|\{\ i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{R}'_i\}| > |\{\ i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{\mathcal{I}'_i}\}|$, $t.q\ |\{\ i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{R}_l^M \cap (\overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{I'_i}\}| < |\{i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \overline{\mathcal{R}_j^M} \cap \mathcal{R}'_i\}|$, *de plus* $|\{i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{I}'_i \cap \mathcal{R}_l^M\}| = |\{\ i\ t.q\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{I}'_i \cap \overline{\mathcal{R}_j^M}\}|$. *Les systèmes d'argumentation se comportant pour la paire* $(\alpha,\beta)$ *comme* $\mathtt{AF}_l$ *ont un total au regard de la somme des distances par rapport aux expansions moins grand que ceux se comportant comme* $\mathtt{AF}_j$ *, l'ensemble des systèmes fusionnés possèdent donc cette paire dans leur relation d'attaque, en accord avec le fait que* $(\alpha,\beta) \in \oplus_R^{dep}\mathcal{P}_M$.
- $|R| > |N|$, $(\alpha,\beta) \notin \oplus_I^{dep}\mathcal{P}_M \cup \oplus_R^{dep}\mathcal{P}_M$ *est obtenu par complémentarité.* □

En effet, si une majorité de systèmes d'argumentation sont en désaccord par rapport à une attaque $(\alpha,\beta)$, la suppression de cette attaque dans les systèmes fusionnés engendre la diminution de la distance moyenne de ceux-ci par rapport à tous les systèmes présents dans $\mathcal{P}$, et l'inverse est vrai si une majorité des systèmes sont en accord avec l'attaque $(\alpha,\beta)$. Si le nombre de systèmes en accord et en désaccord coïncident, alors de placer le couple en tant qu'attaque ou non-attaque dans les systèmes fusionnés ne change pas la distance moyenne par rapport aux expansions. C'est pourquoi nous avons un ensemble de systèmes fusionnés où des paires d'arguments peuvent être présentées en tant qu'attaque ou non (alors que les autres sont forcés d'être toujours présentés en rapport à l'un ou l'autre). La Figure 3.4 représente une fusion dans laquelle, entre autres, la somme est sélectionnée en tant qu'opérateur de fusion.

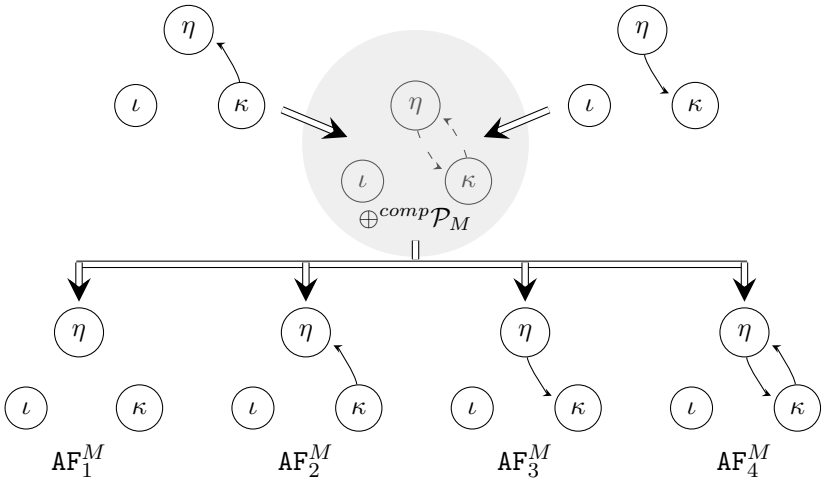



FIGURE 3.4 – Fusion avec $Op \in \{\sum, max, leximax\}$

### 3.2.2 Comparaison des opérateurs somme et max

De récents travaux combinant les approches d'argumentation et de théorie du choix social (TCS) [TBS08] ont montré que l'utilisation des propriétés classiques provenant du TCS peut être pertinente pour caractériser les types de fusion entre systèmes d'argumentation. En cela, nous trouvons intéressant d'investiguer les propriétés satisfaites par les opérateurs de fusions de Coste-Marquis et al., de façon à mieux cibler leurs différences de comportement. Nous définirons ci-dessous les propriétés du TCS issus de [TBS08], dans lesquels les systèmes d'argumentation $\langle \mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i \rangle$ issus d'un même profil ne partagent pas les mêmes arguments : il s'agira de notre cas général ($\blacktriangle$ : $\bigcup_i \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$), puis nous investiguerons le cas où tous les systèmes d'argumentation $\langle \mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i \rangle$ issus d'un même profil partagent les mêmes arguments : il s'agira de notre cas particulier ($\triangle$ : $\forall\ k, j,\ \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_j = \mathcal{A}$).

**Propriété 18** ([TBS08]). *Soient deux profils $\mathcal{P} = \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$ avec $\mathtt{AF}_i = \langle \mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i \rangle$ ($\bigcup_i \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$) et $\mathcal{P}' = \langle \mathtt{AF}'_1, \ldots, \mathtt{AF}'_n \rangle$ avec $\mathtt{AF}'_i = \langle \mathcal{A}'_i, \mathcal{R}'_i \rangle$ ($\bigcup_i \mathcal{A}'_i = \mathcal{A}'$) et un opérateur de fusion $\oplus^{agr}$. L'opérateur $\oplus^{agr}$ vérifie les propriétés suivantes :*

+ *Pareto (P.) : $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, si $\forall\ i \in [1, n]$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$ alors $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}}$.*
+ *Réaction Positive (R.P.) : $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$, si $\{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i\} \subseteq \{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}'_i\}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}}$, alors $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}'}$.*
+ *Indépendance des alternatives indifférentes (I.A.I.) : $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$, si $\forall\ i \in [1, n]$ il se vérifie que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}'_i$ ou $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathcal{R}_i} \cap \overline{\mathcal{R}'_i}$ alors $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}} \cap \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}'}$ ou $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}} \cup \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}'}$.*
+ *Non-Dictature (N.D) : $\nexists\ i_0$ tel que $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, si $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{i_0}$ alors $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{agr}\mathcal{P}}$.*

**Proposition 4.** *Le tableau suivant présente les propriétés du TCS issus de [TBS08] pour les opérateurs somme et max de Coste-Marquis et al. [CMDK+07].*

| | *P.* | *R.P.* | *I.A.I* | *N.D.* |
|---|---|---|---|---|
| $\oplus^{\sum_{i\in[1,n]}}$ | $\blacktriangle$ | $\triangle$ | $\blacktriangle$ | $\blacktriangle$ |
| $\oplus^{max_{i=1}^n}$ | $\blacktriangle$ | | $\blacktriangle$ | $\blacktriangle$ |

**Preuve 19.** *+P. ($\blacktriangle$)*

*Soit $\mathcal{P} = \langle \langle \mathcal{A}_1, R_1 \rangle, \ldots, \langle \mathcal{A}_n, R_n \rangle \rangle$, si $\alpha$, $\beta \in \mathcal{A}$ et $\forall\ i \in [1, n]$ on a $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$.*

*-Pour "$Op = \sum_{i\in[1,n]}$" : $|\mathcal{C}_R| > |\mathcal{C}_N|$ avec $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_N$ les sous-tuples maximaux tels que $(\alpha, \beta) \in \bigcap_i^{i\in C_R} \mathcal{R}_i$ et $(\alpha, \beta) \in \bigcap_i^{i\in C_N} \overline{\mathcal{R}_i}$ se vérifient puisque $|\mathcal{C}_R| = n$ et $|\mathcal{C}_N| = 0$, i.e $\forall\ \mathtt{AF}_k^M \in \oplus^{\sum_{i\in[1,n]}}\mathcal{P}$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_k^M$.*

*-Pour "$Op = max_{i=1}^n$" : $\nexists\ i$ tel que $(\alpha, \beta) \in (\overline{\mathcal{R}'_i} \cap \overline{\mathcal{I}'_i})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{I}'_i$, et $\forall\ i$ on a $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}'_i$. Ainsi, seule l'expression $|\overline{\mathcal{R}_k^M} \cap \mathcal{R}'_i|$ est prise en compte pour la minimisation de l'opérateur max, et pour tout i cette expression peut être minimisée par la présence de la paire $(\alpha, \beta)$ dans la relation d'attaque agrégée. Ainsi $\forall\ \mathtt{AF}_k^M \in \otimes^{max_{i=1}^n}\mathcal{P}$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_k^M$.*

*+R.P. ($\blacktriangle$)*

*-Pour "$Op = \sum_{i\in[1,n]}$" : considérons deux tuples $\langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2, \mathtt{AF}_3 \rangle$ et $\langle \mathtt{AF}'_1, \mathtt{AF}'_2, \mathtt{AF}'_3 \rangle$ et deux arguments $\alpha$, $\beta \in \mathcal{A}$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}'_1$, $\overline{\mathcal{R}'_2}$, $\overline{\mathcal{R}'_3}$ et $\alpha$, $\beta \notin \mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$. $\{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i\} \subseteq \{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}'_i\}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{\sum_{i\in[1,n]}}\langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2, \mathtt{AF}_3 \rangle}$, mais $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{\sum_{i\in[1,n]}}\langle \mathtt{AF}'_1, \mathtt{AF}'_2, \mathtt{AF}'_3 \rangle}$.*

*-Pour "Op = $max_{i=1}^{n}$" : considérons deux tuples $\langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2, \mathtt{AF}_3, \mathtt{AF}_4 \rangle$ tel que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{A}_4 = \{\alpha, \beta\}$, $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \{(\gamma, \beta)\}$ et $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_4 = \{(\alpha, \beta)\}$, et $\langle \mathtt{AF}'_1, \mathtt{AF}'_2, \mathtt{AF}'_3, \mathtt{AF}'_4 \rangle$ tel que $\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}'_2 = \mathcal{A}'_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{A}'_4 = \{\alpha, \beta\}$, $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}'_2 = \{(\alpha, \beta), (\gamma, \beta)\}$, $\mathcal{R}'_3 = \mathcal{R}'_4 = \{\emptyset\}$. $\{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i\} \subseteq \{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{i'}\}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{max_{i=1}^{n}} \langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2, \mathtt{AF}_3, \mathtt{AF}_4 \rangle}$, mais $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{max_{i=1}^{n}} \langle \mathtt{AF}'_1, \mathtt{AF}'_2, \mathtt{AF}'_3, \mathtt{AF}'_4 \rangle}$.*

*+R.P. (△)*

*-Pour "Op = $\sum_{i \in [1,n]}$" : Puisque $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{\sum_{i \in [1,n]} \mathcal{P}}}$, par la Proposition 3, on a $|\mathcal{C}_R| > |\mathcal{C}_N|$ avec $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_N$ les sous-tuples maximaux tels que $(\alpha, \beta) \in \bigcap_i^{i \in C_R} \mathcal{R}_i$ et $(\alpha, \beta) \in \bigcap_i^{i \in C_N} \overline{\mathcal{R}_i}$. De plus, $|\mathcal{C}'_R| \geq |\mathcal{C}_R|$ avec $\mathcal{C}'_R$ maximal pour $(\alpha, \beta) \in \bigcap_i^{i \in C'_R} \mathcal{R}'_i$ puisque $\{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i\} \subseteq \{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}'_i\}$. Pour les même raisons, $|\mathcal{C}'_N| \leq |\mathcal{C}_N|$ avec $\mathcal{C}'_N$ maximal pour $(\alpha, \beta) \in \bigcap_i^{i \in C'_N} \overline{\mathcal{R}'_i}$. On a donc $|\mathcal{C}'_R| \geq |\mathcal{C}_R| > |\mathcal{C}_N| \geq |\mathcal{C}'_N|$, ce qui implique que $|\mathcal{C}'_R| > |\mathcal{C}'_N|$ et donc par la Proposition 3 que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{\sum_{i \in [1,n]} \mathcal{P}'}}$.*

*-Pour "Op = $max_{i=1}^{n}$" : considérons deux tuples $\langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2, \mathtt{AF}_3, \mathtt{AF}_4 \rangle$ tel que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{R}_1 = \{(\alpha, \beta), (\gamma, \alpha)\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma)\}$, $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_4 = \{\emptyset\}$ et $\langle \mathtt{AF}'_1, \mathtt{AF}'_2, \mathtt{AF}'_3, \mathtt{AF}'_4 \rangle$ tel que $\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}'_2 = \mathcal{A}'_3 = \mathcal{A}'_4 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}'_2 = \{(\alpha, \beta)\}$, $\mathcal{R}'_3 = \{(\gamma, \alpha)\}$, $\mathcal{R}'_4 = \{\emptyset\}$. $\{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i\} \subseteq \{i : (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{i'}\}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{max_{i=1}^{n}} \langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2, \mathtt{AF}_3, \mathtt{AF}_4 \rangle}$, mais $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{max_{i=1}^{n}} \langle \mathtt{AF}'_1, \mathtt{AF}'_2, \mathtt{AF}'_3, \mathtt{AF}'_4 \rangle}$. Notons que cette preuve en est également une qui justifie que l'opérateur max n'a pas la propriété de réponse positive dans le cas général, celui où les ensembles d'arguments ne sont pas nécessairement égaux dans les systèmes d'argumentation formant les tuples.*

*+I.I.A. (▲)*

*-Pour "Op = $\sum_{i \in [1,n]}$" : La Proposition 3 montre l'indépendance d'une paire d'arguments par rapport à toutes les autres précisément pour la détermination de leurs présences ou non dans la relation d'attaque des systèmes fusionnés.*

*-Pour "Op = $max_{i=1}^{n}$" : Le contre-exemple de la preuve pour la propriété R.P. de l'opérateur "Op = $max_{i=1}^{n}$" dans le cas particulier (△) suffit à montrer que cet opérateur de fusion ne possède pas cette propriété dans le cas particulier (△) comme général (▲).*

*+N.D. (▲)*

*Les opérateurs "Op = $\sum_{i \in [1,n]}$" et "Op = $max_{i=1}^{n}$" considèrent les distances des systèmes fusionnés avec toutes les expansions (donc prennent en compte tous les systèmes d'argumentation d'un profil) pour déterminer si une paire d'arguments sera présente ou non dans la relation d'attaque des systèmes fusionnés.* □

### 3.2.3 Limite de la fusion

Dans le cas général (▲), il se peut que certains arguments ne soient jamais présents ensemble dans un même système du profil initial, ceux-ci ne s'attaqueront donc jamais dans le(s) système(s) fusionné(s), pouvant de ce fait faire perdre le caractère sensible à la relation d'attaque du système fusionné, par la présence d'un possible conflit minimal dans un ensemble formé d'éléments issus des supports de ces arguments.

Plus discutable encore est cette fusion dans le cas particulier (△), où : soit les relations d'attaque $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ sont similaires (dans ce cas il n'y a aucune raison de fusionner), soit elles sont différentes dû aux multiples choix pour aboutir à une relation d'attaque évoquée dans l'annexe du Chapitre 1 (réfutation, contrariété, forte contrariété, forte contrariété inversée, etc.).

Lorsque celles-ci sont toutes sensibles aux conflits, il se peut qu'une relation d'attaque d'un des systèmes fusionnés ne le soit pas.

**Proposition 5.** *Soit* $\mathcal{P} = \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$ *tel que* $\mathtt{AF}_i = \langle \mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i \rangle$ *où* $\mathcal{R}_i$ *est une relation d'attaque sensible au conflit et* $\mathtt{AF}_i$ *un système respectant la consistance de ses extensions, il peut exister un système fusionné* $\langle \mathcal{A}_j^M, \mathcal{R}_j^M \rangle \in \otimes^{Op} \langle \mathtt{AF}_1, \ldots, \mathtt{AF}_n \rangle$ *(avec* $Op \in \{\sum, max, leximax\}$*) tel que* $\mathcal{R}_j^M$ *est une relation d'attaque qui n'est pas sensible au conflit, et* $\langle \mathcal{A}_j^M, \mathcal{R}_j^M \rangle$ *ne respectant pas la consistance de ses extensions.*

**Preuve 20.** *Comme exprimé dans la Figure 3.4, pour* $\mathcal{P} = \langle \mathtt{AF}_1, \mathtt{AF}_2 \rangle$*, tel que* $\mathcal{A}_1(\Sigma) = \mathcal{A}_2(\Sigma) = \{\eta, \iota, \kappa\}$*,* $\mathcal{R}_1 = \{(\kappa, \eta)\}$*,* $\mathcal{R}_2 = \{(\eta, \kappa)\}$ *et* $\exists\, C \in \mathcal{C}_\Sigma$ *avec* $C \subseteq Supp(\kappa) \cup Supp(\eta)$*. Quand* $Op = \sum$*, la fusion proposée par Coste-Marquis et al. retourne quatre systèmes* $\mathtt{AF}_1^M$*,* $\mathtt{AF}_2^M$*,* $\mathtt{AF}_3^M$ *et* $\mathtt{AF}_4^M$*. Quand* $Op \in \{max, leximax\}$*, la fusion proposée par Coste-Marquis et al retourne seulement deux systèmes* $\mathtt{AF}_1^M$ *et* $\mathtt{AF}_4^M$*.*

*Si* $\mathtt{AF}_2^M$*,* $\mathtt{AF}_3^M$ *et* $\mathtt{AF}_4^M$ *sont autant de systèmes dans lesquels la relation d'attaque reste sensible aux conflits, puisque capturant le conflit* $C$*, la relation d'attaque du système fusionné* $\mathtt{AF}_1^M$ *perd sa sensibilité aux conflits, le système* $\mathtt{AF}_1^M$ *ne satisfait donc pas la consistance de ses extensions, dû à la non capture du conflit* $C \in Supp(\kappa) \cup Supp(\eta)$*.* □

La fusion proposée par Coste-Marquis et al. a donc un caractère caduque provenant de cette possible perte de sensibilité pour la relation d'attaque d'un des systèmes fusionnés, engendrant inéluctablement la violation de la consistance des extensions de celui-ci.

Une façon d'échapper à cette perte de sensibilité est de définir et d'assurer un caractère exhaustivement sensible à chacune des relations d'attaque des systèmes à fusionner, ce qui revient dans le cas où tous les systèmes ont le même ensemble d'arguments, à avoir également les mêmes relations d'attaque (en considérant qu'elles satisfassent uniquement cette propriété), qui plus est symétriques.

**Définition 46** (Forte sensibilité aux conflits)**.** *Une relation d'attaque est exhaustivement sensible au conflit ssi* $\forall\ \alpha_i,\ \alpha_j \in \mathcal{A}(\Sigma)$ *tel que il existe un conflit minimal* $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$ *alors on a* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$*.*

## 3.3 La consistance lors d'une agrégation

La fusion présentée dans la section précédente comporte une agrégation de différentes relations d'attaque. Le but de cette section est de voir dans quelle mesure une agrégation, dans laquelle des relations d'attaque sensibles aux conflits sont engagées, conserve cette propriété de sensibilité aux conflits pour la relation d'attaque agrégée (alors appelée défaite) et engendre bien un système d'argumentation qui respecte la consistance de ses extensions dans le cas de conflits minimaux binaires.

### 3.3.1 L'agrégation de défaite

L'agrégation la plus simple comme nous l'avons présentée dans le système `PAF`, `VAF` ou encore `VSAF` est celle impliquant une relation d'attaque et une relation de préférence. Les propositions suivantes présentent des cas dans lesquels cette agrégation dans un système `PAF` ne nuit pas à la consistance des extensions de ce système, précisément lorsqu'en cas de conflits minimaux binaires celles-ci sont générées à partir de la relation de défaite possédant la propriété de sensibilité aux conflits. Au vu de l'étude comparative présentée dans le Chapitre 2, ces propositions peuvent

tout autant être appliquées aux systèmes `VAF` et `VSAF` puisqu'un système `PAF` peut être justement extrait d'un système `VAF` comme système équivalent et qu'un système `PAF` peut être généré à partir d'un système `VSAF`. Nous étudions deux cas distincts, celui où la relation d'attaque à agréger à la préférence est exhaustivement sensible aux conflits, puis celui où elle se trouve être seulement sensible aux conflits.

#### 3.3.1.1 Cas des relations d'attaque exhaustivement sensibles aux conflits

Si la relation d'attaque est exhaustivement sensible aux conflits, dans le cas de conflits minimaux binaires, le système associé respectera la consistance des extensions.

**Proposition 6.** *Soit* `PAF` $= \langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R}, \succeq \rangle$*, et* `AF` $= \langle \mathcal{A}(\Sigma), \texttt{Def} \rangle$ *son système associé. Si* $\mathcal{R}$ *est une relation d'attaque exhaustivement sensible aux conflits alors :*
- `Def` *est sensible au conflit,*
- `AF` *respecte la consistance de ses extensions dans le cas où tous les conflits minimaux sont binaires.*

**Preuve 21.** *Supposons que* `Def` *ne soit pas sensible aux conflits.* $\exists\, C \in \mathcal{C}_\Sigma$ *tel que* $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$ *avec* $(\alpha_i, \alpha_j) \notin$ `Def` *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin$ `Def`*. Puisque* $\mathcal{R}$ *est exhaustivement sensible aux conflits, il se vérifie que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$*. Or, puisque* $(\alpha_i, \alpha_j) \notin$ `Def` *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin$ `Def`*, on a* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \succ$*, ainsi que* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$*,* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \succ$*. Autrement dit,* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \succeq$ *et* $(\alpha_i, \alpha_j) \notin \succeq$ *ainsi que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \succeq$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \succeq$*. Ceci est impossible, ainsi* `Def` *est sensible au conflit. De plus, si* `Def` *est sensible au conflit, par le Corollaire 2,* `AF` *respecte la consistance de ses extensions dans le cas où tous les conflits minimaux sont binaires.* □

**Exemple 34.** *Soit* `PAF` $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\lambda, \eta\}$*,* $\mathcal{R} = \{(\lambda, \eta), (\eta, \lambda)\}$ *et* $\succeq\, = \{(\lambda, \eta)\}$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 3.5, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq$*, les arcs en pointillés représentant les attaques issues de* $\mathcal{R}$ *ayant échoué, et les arcs continus les défaites issues de* `Def` *ayant été générées.*

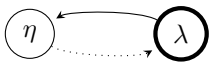



FIGURE 3.5 – Agrégation de `Def` avec attaques exhaustivement sensibles aux conflits

#### 3.3.1.2 Cas des relations d'attaque sensibles aux conflits

Lorsque l'attaque d'un système d'argumentation à base de préférence n'est que sensible aux conflits, la relation de défaite classiquement calculée peut perdre sa sensibilité et ainsi ne plus assurer la consistance des extensions.

**Exemple 35.** *Soit* `PAF` $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\lambda, \eta\}$*,* $\mathcal{R} = \{(\eta, \lambda)\}$ *et* $\succeq\, = \{(\eta, \lambda)\}$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 3.6, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq$*, les arcs en pointillés représentant les attaques issues de* $\mathcal{R}$ *ayant échoué, et les arcs continus les défaites issues de* `Def` *ayant été générées.*

FIGURE 3.6 – Agrégation de Def avec attaques seulement sensibles aux conflits

Il existe également un autre type de système associé au PAF lequel a la particularité de ne pas considérer la défaite entre un argument $\alpha_i$ et $\alpha_j$ dès lors que $\alpha_j$ est au moins préféré à $\alpha_i$ (et non pas strictement comme pour une défaite classique). Ce type de système associé est défini ci-dessous :

**Définition 47.** *Soit* PAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$. *Le* AF$'$ *associé à* PAF *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \mathit{Def} \rangle$ *où* $\mathit{Def} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathit{Def}$ *ssi* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \succeq$.

Pour un tel type de système associé, aucune garantie n'est également donnée concernant la conservation de la propriété de sensibilité aux conflits pour la relation Def.

**Exemple 36.** *Soit* PAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\lambda, \eta\}$, $\mathcal{R} = \{(\eta, \lambda), (\lambda, \eta)\}$ *et* $\succeq = \{\eta, \lambda), (\lambda, \eta)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 3.7, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq$, *les arcs en pointillés représentant les attaques issues de* $\mathcal{R}$ *ayant échouées, et les arcs continus les défaites issues de* Def *ayant été générées.*

FIGURE 3.7 – Agrégation de Def avec attaques seulement sensibles aux conflits

Pour pallier à cela, un nouveau type de système associé a été récemment envisagé dans la littérature consacrée au traitement de l'inconsistance des systèmes PAF, [AV09b]. Il y est préconisé dans le cas d'attaques non-symétriques l'utilisation d'un système associé repareillé à PAF, défini ci-dessous.

**Définition 48** (Système associé repareillé à PAF [AV09b])**.** *Soit* PAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$. *Le* AF$_r$ *repareillé associé à* PAF *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{Def}_r \rangle$ *où* $\mathtt{Def}_r \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $\mathtt{Def}_r = \{(\alpha_i, \alpha_j) | (\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \succ\} \cup \{(\alpha_j, \alpha_i) | (\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \succ\}$.

**Proposition 7.** *Soit* PAF $= \langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R}, \succeq \rangle$, *et* AF$_r$ $= \langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathtt{Def}_r \rangle$ *son système repareillé associé. Si* $\mathcal{R}$ *est une relation d'attaque sensible aux conflits alors :*

- $\mathtt{Def}_r$ *est sensible aux conflits.*
- AF$_r$ *respecte la consistance de ses extensions dans le cas où tous les conflits minimaux sont binaires.*

**Preuve 22.** *Supposons que* $\mathtt{Def}_r$ *ne soit pas sensible aux conflits.* $\exists\, C \in \mathcal{C}_\Sigma$ *tel que* $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$ *avec* $(\alpha_i, \alpha_j) \notin \mathtt{Def}_r$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \mathtt{Def}_r$. *Puisque* $\mathcal{R}$ *est sensible aux conflits, il se vérifie que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *ou* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$. *Or, puisque* $(\alpha_i, \alpha_j) \notin \mathtt{Def}_r$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \mathtt{Def}_r$, *on a* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \succ$, *ou* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \succ$. *Autrement dit,* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathtt{Def}_r$ *ou* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathtt{Def}_r$. *Ceci est impossible, ainsi* $\mathtt{Def}_r$ *est sensible aux conflits. De plus, si* $\mathtt{Def}_r$ *est sensible aux conflits, par le Corollaire 2,* AF$_r$ *respecte la consistance de ses extensions dans le cas où tous les conflits minimaux sont binaires.* □

**Exemple 37.** *Soit* $\texttt{PAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\lambda, \eta\}$, $\mathcal{R} = \{(\eta, \lambda)\}$ *et* $\succeq = \{(\lambda, \eta)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 3.8, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq$, *les arcs en pointillés représentant les attaques issues de* $\mathcal{R}$ *ayant échouées, et les arcs continus les défaites issues de* $\texttt{Def}_r$ *ayant été générées.*

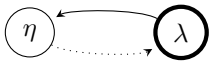



FIGURE 3.8 – Agrégation de $\texttt{Def}_r$ avec attaques seulement sensibles aux conflits

Si un système associé repareillé à un PAF assure la sensibilité aux conflits de la relation $\texttt{Def}_r$, ce système ne paraît pas tout à fait satisfaisant concernant le sens donné à cette relation. En effet, si deux arguments sont également préférés, mais si un seul attaque l'autre, ce système n'influera en aucun cas sur celle-ci. Or, nous souhaiterions que pour deux arguments également préférés, et pour lesquels l'union des supports inclut un conflit minimal, la relation de défaite entre eux soit symétrique. Pour cela, nous introduisons, et dans le cadre du MCPAF, des systèmes contextuels associés exhaustivement repareillés à MCPAF.

**Définition 49** (Système contextuel associé exhaustivement repareillé à MCPAF)**.** *Soit* $\texttt{MCPAF} = \langle \{c_1, \ldots, c_n\}, \triangleright, \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle, \langle \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$. *Le* $\texttt{AF}_i^{er}$, *système du contexte* $c_i$ *exhaustivement repareillé associé à* MCPAF *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \texttt{Def}_i^{er} \rangle$ *où* $\texttt{Def}_i^{er} \subseteq \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i$ *tel que* $\texttt{Def}_i^{er} = \{(\alpha_j, \alpha_k) | (\alpha_j, \alpha_k) \in \mathcal{R}_i \text{ et } (\alpha_k, \alpha_j) \notin \succ_i\} \cup \{(\alpha_k, \alpha_j) | (\alpha_j, \alpha_k) \in \mathcal{R}_i \text{ et } (\alpha_k, \alpha_j) \in \succeq_i\}$.

Puisque le système $\texttt{AF}_i^{er}$ ne fait qu'ajouter (par rapport au système associé repareillé) une relation de défaite entre arguments également préférés mais pour lesquels l'attaque n'est pas symétrique. Il va de soit que dans un contexte $c_i$, la relation $\texttt{Def}_r$ (issue du système repareillé associé à $\langle \mathcal{A}_i, \mathcal{R}_i, \succeq_i \rangle$) soit incluse dans la relation $\texttt{Def}_i^{er}$ : $\texttt{Def}_r \subseteq \texttt{Def}_i^{er}$. Puisque $\texttt{Def}_r$ est sensible aux conflits, $\texttt{Def}_i^{er}$ l'est aussi, et le système associé $\texttt{AF}_i^{er}$ respecte donc bien la consistance de ses extensions.

**Exemple 38.** *Soit* MCPAF *avec* $\mathcal{A}_i = \{\lambda, \eta\}$, $\mathcal{R}_i = \{(\eta, \lambda)\}$ *et* $\succeq_i = \{(\lambda, \eta), (\eta, \lambda)\}$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure 3.9, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq_i$, *les arcs fins représentant les attaques issues de* $\mathcal{R}_i$ *conservées en tant que défaites issues de* $\texttt{Def}_i^{er}$, *et les arcs épais les défaites issues de* $\texttt{Def}_i^{er}$ *ayant été générées.*

FIGURE 3.9 – Agrégation de $\texttt{Def}_i^{er}$ avec attaques seulement sensibles aux conflits

**Proposition 8.** *Soit* MCPAF, $\mathcal{R}_i$ *une relation d'attaque sensible au conflit et* $\succeq_i$ *un préordre complet. Si* $\exists\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_i$ *t.q.* $\mathcal{S}$ *est maximal avec* $\forall\ \alpha_j \in \mathcal{S}$ *et* $\forall\ \alpha_k \in \mathcal{A}_i \setminus \mathcal{S}$ *on* $(\alpha_j, \alpha_k) \in \succ_i$.
$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m$, *où* $\mathcal{S}_j$ *un ensemble maximal sans-conflit au regard de* $\mathcal{R}_i$

- *Si* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ *alors* $\mathcal{S}$ *est un ensemble d'arguments crédulement acceptés par le système* $\texttt{AF}_i^{er}$ *associé à* MCPAF,

– *Si* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m$ *alors* $\mathcal{S}_j$ *est un ensemble d'arguments crédulement ou sceptiquement acceptés par le système* $\mathtt{AF}_i^{er}$ *associé à* MCPAF,

**Preuve 23.**

– *Admettons que* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$, *et* $\mathcal{S}$ *ne soit pas un ensemble d'arguments sceptiquement acceptés par le système* $\mathtt{AF}_i^{er}$. *Ainsi,* $\exists\ \alpha_r$ *tel que* $\exists\ j$ *avec* $\alpha_r \notin \mathcal{E}_j$ *et* $Ext^{pr} = \{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m\}$ *où* $Ext^{pr}$ *est l'ensemble de toutes les extensions préférées de* $\mathtt{AF}_i^{er}$. *Ainsi,* $\exists \alpha_p$ *tel que* $(\alpha_p, \alpha_r) \in \mathtt{Def}_i^{er}$, *donc* $(\alpha_p, \alpha_r) \in \succeq_i$ *donc* $\alpha_p \in \mathcal{S}_1$ *et* $(\alpha_p, \alpha_r) \in \mathcal{R}_i$. *Or, ceci est impossible puisque* $\alpha_r \in \mathcal{S}_1$ *et* $\mathcal{S}_1$ *est sans-conflit.*

– *Admettons que* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_m$ *et que* $\exists\ j$ *tel que* $\mathcal{S}_j$ *ne soit pas un ensemble d'arguments crédulement ou sceptiquement acceptés par le système* $\mathtt{AF}_i^{er}$. *Ainsi* $\exists\ \alpha_r \in \mathcal{S}_j$ *tel que* $\alpha_r$ *est rejeté (*$\alpha_r \in \mathit{Rej}(\mathtt{AF}_i^{er})$*). Donc* $\exists \alpha_p$ *tel que* $(\alpha_p, \alpha_r) \in \mathtt{Def}_i^{er}$, *donc* $(\alpha_p, \alpha_r) \in \succeq_i$ *et* $\nexists\ \alpha_k$ *tel que* $(\alpha_k, \alpha_p) \in \mathtt{Def}_i^{er}$. *Or, puisque* $\alpha_r \in \mathcal{S}$, *on a* $(\alpha_r, \alpha_p) \in \succeq_i$, *donc* $(\alpha_r, \alpha_p) \in \mathtt{Def}_i^{er}$, *ceci est en contradiction avec le fait que* $\alpha_r$ *puisse être rejeté.*

□

Maintenant que nous pouvons justifier d'une sensibilité aux conflits pour des systèmes associés aux systèmes d'argumentation à base de préférences possédant des relations d'attaque sensibles aux conflits, et ainsi assurer la consistance des extensions en cas de conflits minimaux binaires. Nous allons proposer des fusions naturelles de plusieurs systèmes et discuter selon quelles limites celles-ci peuvent assurer au système fusionné de posséder une relation d'attaque toujours sensible aux conflits.

### 3.3.2 Opérations de fusion naturelles

Etant donné le système MCPAF unifié introduit dans le Chapitre 2, nous proposons par la suite plusieurs fusions intercontextuelles naturelles, et déterminons dans quelles mesures celles-ci sont souhaitées dans le cadre des systèmes d'argumentation.

#### 3.3.2.1 La fusion sceptique

**Définition 50.** *Le système d'argumentation* sceptiquement *fusionné exprime les arguments, attaques et préférences communs aux contextes :*

$$\oplus^{sce}\ \mathtt{MCPAF} \begin{cases} \mathcal{A}_{\oplus^{sce}\mathtt{MCPAF}} = \bigcap_i \mathcal{A}_i, \\ \mathcal{R}_{\oplus^{sce}\mathtt{MCPAF}} = \bigcap_i \mathcal{R}_i, \\ \succeq_{\oplus^{sce}\mathtt{MCPAF}} = \bigcap_i \succeq_i. \\ \mathtt{Def}_{\oplus^{sce}\mathtt{MCPAF}} = \bigcap_i \mathtt{Def}_i \\ \mathit{Def}_{\oplus^{sce}\mathtt{MCPAF}} = \bigcap_i \mathit{Def}_i \end{cases}$$

**3.3.2.1.1 Cas particulier** Une étude [DMA08] a été réalisée dans le cas particulier ($\triangle$), où chaque relation d'attaque contextuelle est faiblement complète, il s'avère que l'intersection des relations de défaite des différents contextes correspond exactement à la relation de défaite induite par l'union des préférences individuelles. Afin de présenter de manière compacte cette propriété, nous introduisons par la suite la notion de défaite induite par une relation de préférence.

**Définition 51** (Défaite induite [DMA08])**.** *Soit* $\succeq \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *une relation de préférence,* $\mathit{Def}(\succeq)$ *est la relation de défaite du système associé* $\mathtt{AF}'$ *à* $\mathtt{PAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec* $\mathcal{R}$ *une relation d'attaque faiblement complète.*

**Proposition 9.** *Soit* $\texttt{MCPAF} = \langle \mathcal{C}, \{\emptyset\}, \langle \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A} \rangle, \langle \mathcal{R}, \ldots, \mathcal{R} \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$. *Si* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète alors* $\mathit{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}} = \mathit{Def}(\bigcup_i \succeq_i)$.

**Preuve 24.** $\mathit{Def}(\bigcup_i \succeq_i) \subseteq \mathit{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}(\bigcup_i \succeq_i)$, *ainsi* $(\beta, \alpha) \notin \bigcup_i \succeq_i$. *Ainsi, pour tout i,* $(\beta, \alpha) \notin \succeq_i$, *puisque la relation* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète :* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$. *A partir de la Définition 51, on a* $\forall$ *i,* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_i$, *autrement dit* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$.

$\mathit{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}} \subseteq \mathit{Def}(\bigcup_i \succeq_i)$. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$. *Ainsi, pour tout i,* $(\beta, \alpha) \in \mathit{Def}_i$. *A partir de la Définition 51, on a* $\forall$ *i,* $(\alpha, \beta) \notin \succeq_i$, *autrement dit* $(\alpha, \beta) \notin \bigcup \succeq_i$. *Puisque la relation* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète :* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$, *donc* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}(\bigcup_i \succeq_i)$. □

**Exemple 39.** *Soit* $\texttt{MCPAF} = \langle \{c_1, c_2\}, \{\emptyset\}, \langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle, \langle \mathcal{R}, \mathcal{R} \rangle, \langle \succeq_1, \succeq_2 \rangle \rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\lambda, \eta, \kappa\}$, $\mathcal{R} = \{(\eta, \lambda), (\lambda, \eta), (\eta, \kappa), (\kappa, \eta)\}$, $\succeq_1 = \{(\eta, \lambda), (\eta, \kappa)\}$ *et* $\succeq_2 = \{(\lambda, \eta), (\lambda, \kappa)\}$. *Les graphe d'attaque des contextes* $c_1$ *et* $c_2$ *sont représentés par la Figure 3.10, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq_i$, *les arcs en pointillés représentant les attaques issues de* $\mathcal{R}$ *ayant échouées, et les arcs continus les défaites issues de* $\mathit{Def}_i$ *ayant été générées.*

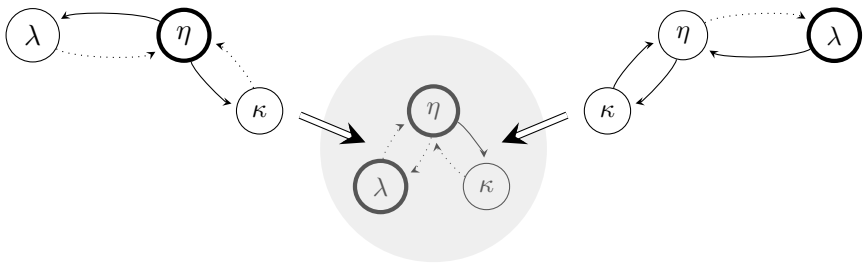



FIGURE 3.10 – Fusion intercontextuelle de $\texttt{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$ avec attaques exhaustivement sensibles aux conflits

**3.3.2.1.2 Cas général** Si nous nous plaçons dans le cas général (▲), la première critique évidente pouvant être faite à cette fusion est que certains arguments, précisément ceux non présents dans au moins un contexte, ne peuvent bénéficier de statuts au sein du système fusionné.

Lorsque chaque relation d'attaque contextuelle $\mathcal{R}_i$ est une relation sensible aux conflits, $\mathcal{R}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$ (resp. $\texttt{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$) peut être une relation d'attaque (resp. défaite) qui ne possède pas cette propriété, et ainsi aboutit à un système qui viole la consistance des extensions.

Enfin certaines défaites non unanimement présentes dans tous les contextes peuvent tout de même être présentes dans la défaite du système fusionné, calculée à partir de son attaque et de sa préférence agrégée.

**Proposition 10.** *Soit* $\texttt{MCPAF}$, $\texttt{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}} \subseteq \texttt{Def}$, *avec* $\texttt{Def}$ *est la défaite du système associé à* $\langle \mathsf{Arg}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}, \mathcal{R}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}, \succeq_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}} \rangle$ *tel que* $\texttt{Def} = \{(\alpha_i, \alpha_j) | (\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \succ_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}\}$.

**Preuve 25.** *Soit* $(\alpha, \beta) \in \texttt{Def}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$. *Par définition,* $(\alpha, \beta) \in \bigcap_i \texttt{Def}_i$. *Ainsi pour tout i,* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \succ_i$, *il se vérifie donc que* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \succ_{\oplus^{sce}\texttt{MCPAF}}$. *Ainsi,* $(\alpha, \beta) \in \texttt{Def}$. □

Enfin toutes les attaques (resp. préférences) incluses dans $\bigcup_i \mathcal{R}_i \setminus \bigcap_i \mathcal{R}_i$ (resp. $\bigcup_i \succeq_i \setminus \bigcap_i \succeq_i$) sont supprimées lors de cette fusion, comme représenté dans la Figure 3.11. C'est pourquoi,

il semble plus pertinent de prendre en compte l'ensemble des entités contextuelles lors d'un tel processus.

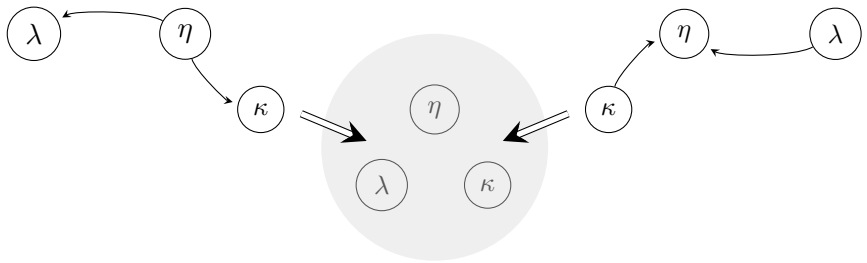



FIGURE 3.11 – Fusion intercontextuelle de $\mathtt{Def}_{\oplus^{sce}\mathtt{MCPAF}}$ avec attaques seulement sensibles aux conflits

#### 3.3.2.2 La fusion crédule

**Définition 52.** *La fusion* crédule *exprime les arguments, attaques et préférences de tous les contextes :*

$$\oplus^{cre}\ \mathtt{MCPAF}\ \begin{cases} \mathcal{A}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} = \bigcup_i \mathcal{A}_i, \\ \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} = \bigcup_i \mathcal{R}_i, \\ \succeq_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} = \bigcup_i \succeq_i. \\ \mathtt{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} = \bigcup_i \mathtt{Def}_i. \\ \mathit{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} = \bigcup_i \mathit{Def}_i. \end{cases}$$

**3.3.2.2.1 Cas particulier** Nous nous plaçons dans le cas particulier ($\triangle$). Si chaque relation d'attaque contextuelle est faiblement complète, il s'avère que l'union des relations de défaites des différents contextes correspond exactement à la relation de défaite induite par l'intersection des préférences individuelles, comme indiquée dans l'étude étude [DMA08].

**Proposition 11.** *Soit* $\mathtt{MCPAF} = \langle \mathcal{C}, \{\emptyset\}, \langle \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A} \rangle, \langle \mathcal{R}, \ldots, \mathcal{R} \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$. *Si* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète alors* $\mathit{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} = \mathit{Def}(\bigcap_i \succeq_i)$.

**Preuve 26.** $\mathit{Def}(\bigcap_i \succeq_i) \subseteq \mathit{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}(\bigcap_i \succeq_i)$, *ainsi* $(\beta, \alpha) \notin \bigcap_i \succeq_i$. *Il y a deux possibilités :*

- *Pour tout* $i$, $(\beta, \alpha) \notin \succeq_i$, *puisque la relation* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète :* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$. *A partir de la Définition 51, on a pour tout* $i$, $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_i$, *autrement dit* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$.
- $\exists\ j$ *t.q.* $(\beta, \alpha) \notin \succeq_j$, *puisque la relation* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète :* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$. *A partir de la Définition 51, on a* $\exists\ j$ *t.q.* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_j$, *autrement dit* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$.

$\mathit{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} \subseteq \mathit{Def}(\bigcap_i \succeq_i)$. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$. *Il y a deux possibilités :*

- $\forall\ i$, $(\beta, \alpha) \in \mathit{Def}_i$. *A partir de la Définition 51, on a pour tout* $i$, $(\alpha, \beta) \notin \succeq_i$, *autrement dit* $(\alpha, \beta) \notin \bigcap \succeq_i$. *Puisque la relation* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète :* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$, *donc* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}(\bigcap_i \succeq_i)$.
- $\exists\ j$ *t.q.* $(\beta, \alpha) \in \mathit{Def}_j$. *A partir de la Définition 51, on a* $\exists\ j$ *t.q.* $(\alpha, \beta) \notin \succeq_j$, *autrement dit* $(\alpha, \beta) \notin \bigcap \succeq_i$. *Puisque la relation* $\mathcal{R}$ *est faiblement complète :* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$, *donc* $(\alpha, \beta) \in \mathit{Def}(\bigcap_i \succeq_i)$.

□

**Exemple 40.** *Soit* $\texttt{MCPAF} = \langle\{c_1, c_2\}, \{\emptyset\}, \langle\mathcal{A}, \mathcal{A}\rangle, \langle\mathcal{R}, \mathcal{R}\rangle, \langle\succeq_1, \succeq_2\rangle\rangle$ *avec* $\mathcal{A} = \{\lambda, \eta, \kappa\}$, $\mathcal{R} = \{(\eta, \lambda), (\lambda, \eta), (\eta, \kappa), (\kappa, \eta)\}$, $\succeq_1 = \{(\eta, \lambda), (\eta, \kappa)\}$ *et* $\succeq_2 = \{(\lambda, \eta), (\lambda, \kappa)\}$. *Les graphes d'attaque des contextes* $c_1$ *et* $c_2$ *sont représentés par la Figure 3.12, la largeur du trait autour d'un noeud correspondant à la force relative de l'argument au regard de la relation* $\succeq_i$, *les arcs en pointillés représentant les attaques issues de* $\mathcal{R}$ *ayant échoués, et les arcs continus les défaites issues de* $\texttt{Def}_i$ *ayant été générées.*

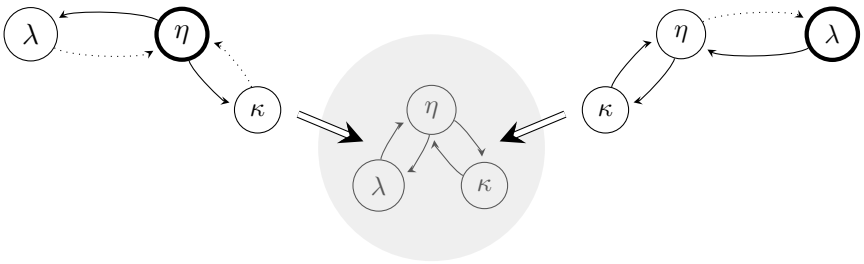



FIGURE 3.12 – Fusion intercontextuelle de $\texttt{Def}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$ avec attaques exhaustivement sensibles aux conflits

Dans le cas particulier, la fusion crédule permet de conserver la sensibilité pour l'attaque, comme illustré dans la Figure 3.13, puis pour la défaite.

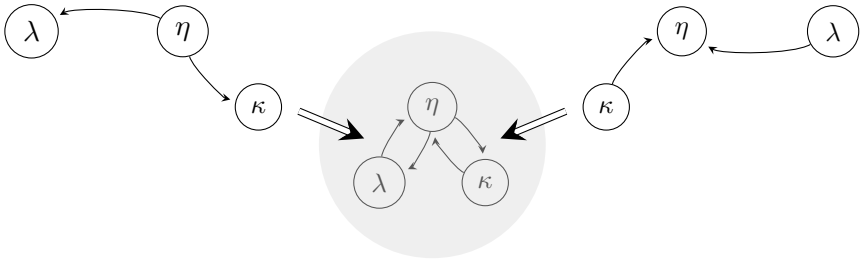



FIGURE 3.13 – Fusion intercontextuelle de $\texttt{Def}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$ avec attaques seulement sensibles aux conflits

**Proposition 12.** *Soit* $\texttt{MCPAF} = \langle\mathcal{C}, \{\emptyset\}, \langle\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}\rangle, \langle\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n\rangle, \langle\succeq_1, \ldots, \succeq_n\rangle\rangle$, *et* $\texttt{Def}$ *la défaite du système associé à* $\langle\mathsf{Arg}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}, \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}, \succeq_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}\rangle$ *tel que* $\texttt{Def} = \{(\alpha_i, \alpha_j) | (\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \succ_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}\}$. *Si* $\forall\ i$, $\mathcal{R}_i$ *est une relation d'attaque exhaustivement sensible aux conflits :*

- $\texttt{Def}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$ *est sensible aux conflits,*
- $\texttt{Def}$ *est sensible aux conflits.*

**Preuve 27.** - *Supposons que* $\texttt{Def}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$ *ne soit pas sensible aux conflits.* $\exists\ C \in \mathcal{C}_\Sigma$ *tel que* $C \subseteq Supp(\alpha) \cup Supp(\beta)$ *avec* $(\alpha, \beta) \notin \texttt{Def}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \texttt{Def}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$, *donc par définition :* $(\alpha, \beta) \notin \bigcup \texttt{Def}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \bigcup \texttt{Def}_i$. *Ainsi, pour tout i, on a* $[(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_i$ *ou* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \in \succ_i]$ *et* $[(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_i$ *ou* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\alpha, \beta) \in \succ_i]$. *Pour tout i, on a donc soit :*

- $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_i$. *Ceci est impossible car les relations d'attaque* $\mathcal{R}_i$ *sont toutes exhaustivement sensibles aux conflits.*

– $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_i$, $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\alpha, \beta) \in \succ_i$. *Ceci est impossible pour les mêmes raisons.*
– $(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_i$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \in \succ_i$. *Ceci est impossible toujours pour les mêmes raisons.*
– $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$, $(\beta, \alpha) \in \succ_i$, $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\alpha, \beta) \in \succ_i$. *Ceci est impossible car la relation* $\succ_i$ *est un ordre.*

*Ainsi,* $\mathtt{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$ *est bien sensible aux conflits.*

*- Supposons que* $\mathtt{Def}$ *ne soit pas sensible aux conflits.* $\exists\ C \in \mathcal{C}_\Sigma$ *tel que* $C \subseteq Supp(\alpha) \cup Supp(\beta)$ *avec* $(\alpha, \beta) \notin \mathtt{Def}$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \mathtt{Def}$, *ainsi* $[(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$ *ou* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$ *et* $(\beta, \alpha) \in \succ_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}]$ *et* $[(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$ *ou* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$ *et* $(\alpha, \beta) \in \succ_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}]$. *Pour tout i, on a donc soit :*

– $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_i$. *Ceci est impossible car les relations d'attaque* $\mathcal{R}_i$ *sont toutes exhaustivement sensibles aux conflits.*
– $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_i$, $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\alpha, \beta) \in \succ_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$. *Ceci est impossible pour les mêmes raisons.*
– $(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_i$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \in \succ_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$. *Ceci est impossible toujours pour les mêmes raisons.*
– $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i$, $(\beta, \alpha) \in \succ_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$, $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_i$ *et* $(\alpha, \beta) \in \succ_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$. *Ceci est impossible car la relation* $\succ_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$ *est un ordre.*

*Ainsi,* $\mathtt{Def}$ *est aussi sensible aux conflits.* □

**3.3.2.2.2 Cas général** Nous nous plaçons dans le cas général (▲). Lorsque chaque relation d'attaque contextuelle $\mathcal{R}_i$ est une relation sensible aux conflits, $\mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$ (resp. $\mathtt{Def}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}$) peut être une relation d'attaque (resp. défaite) qui ne possède pas cette propriété, et ainsi aboutit à un système qui viole la consistance des extensions, comme exprimé dans la Figure 3.14 avec les arguments $\kappa$ et $\eta$ dont l'inconsistance de l'ensemble formé par des éléments de leurs supports n'est plus capturée par la relation d'attaque agrégée par une fusion crédule.

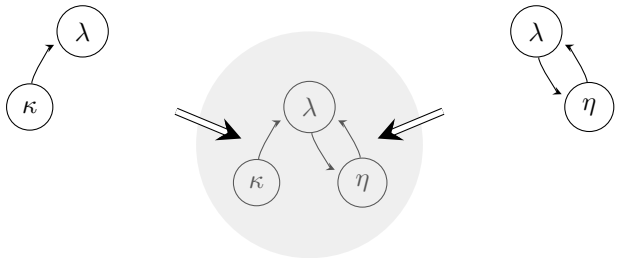



FIGURE 3.14 – Fusion intercontextuelle de $\mathtt{Def}_{\oplus^{sce}\mathtt{MCPAF}}$ avec perte de sensibilité aux conflits

Il s'agit donc de reconsidérer chaque paire d'arguments qui n'est jamais exprimée dans un même contexte, et donc potentiellement porteuse d'inconsistance. Nous proposons donc d'exprimer celle-ci au sein d'une relation d'ignorance, notée $\mathcal{I}_g$, laquelle est définie ci-dessous.

**Définition 53.** *Soit* $\mathtt{MCPAF}$, $I_g$, *la relation d'ignorance du système* $\mathtt{MCPAF}$ *est définie telle que :* $\mathcal{I}_g = \{(\alpha, \beta) | \forall i \in [1, n], \{\alpha, \beta\} \nsubseteq \mathcal{A}_i\}$

**Proposition 13.** *Soit* $\mathtt{MCPAF}$, *si pour tout i,* $\mathcal{R}_i$ *est une relation d'attaque sensible au conflit :*
– $\mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g$ *est sensible au conflit,*
– $\exists\ \mathtt{AF}_i \in \oplus^{com}\langle \mathcal{A}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}, \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}}, \mathcal{I}_g \rangle$ *tel que* $\mathtt{AF}_i$ *respecte la consistance de ses extensions, dans le cas où tous les conflits sont minimaux binaires.*

**Preuve 28.** *- Supposons que* $\mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g$ *ne soit pas sensible aux conflits.* $\exists\ C \in \mathcal{C}_\Sigma$ *tel que* $C \subseteq Supp(\alpha) \cup Supp(\beta)$ *avec* $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\mathtt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g$.

*Puisque* $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}$*, pour tout* $i$ $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{R}_i$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \mathcal{R}_i$*, puisque pour tout* $i$*,* $\mathcal{R}_i$ *est sensible aux conflits, le conflit* $C$ *n'étant pas pris en charge par une des relations* $\mathcal{R}_i$ *sensibles aux conflits, on en déduit que* $\nexists\ i$ *t.q.* $\{\alpha, \beta\} \subseteq \mathcal{A}_i$*. Ainsi* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{I}_g$ *et* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{I}_g$*. Ceci est impossible. Donc,* $\mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g$ *est bien sensible aux conflits.*
*-* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g \rangle$ *est bien une complétion de* $\langle \mathcal{A}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}, \mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}}, \mathcal{I}_g \rangle$*.* $\mathcal{R}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g$ *étant sensible aux conflits, il existe bien une complétion qui respecte la consistance de ses extensions dans le cas où tous les conflits sont minimaux binaires.* □

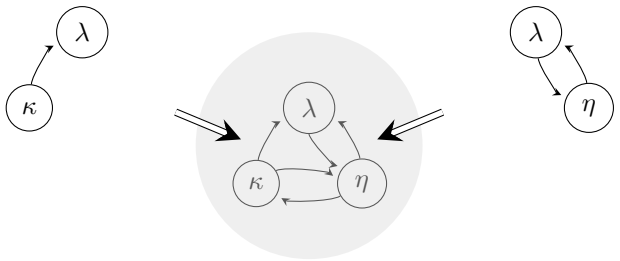



FIGURE 3.15 – Fusion intercontextuelle de $\texttt{Def}_{\oplus^{cre}\texttt{MCPAF}} \cup \mathcal{I}_g$ avec conservation de sensibilité aux conflits

L'agrégation des préférences décrite en fin de Chapitre 2, va être à présent intégrée à la fusion crédule, dont nous avons investigué quelques propriétés permettant de conserver la sensibilité au conflit concernant la défaite du système fusionné et respectant par là même la consistance de ses extensions.

#### 3.3.2.3 La fusion préférentielle

Nous utilisons la définition de la fonction d'agrégation $\otimes^{\triangleright}$ sur les préférences utilisée dans le cadre du CPAF, et rappelée dans la Définition 26 du Chapitre 2. Rappelons aussi, que cette agrégation utilise un ordre complet entre contextes, ce qui correspond à un cas particulier du préordre partiel introduit dans le MCPAF.

**Définition 54.** *La fusion* préférentielle *exprime les arguments, attaques de tous les contextes, tient compte de la relation d'ignorance et rejette les préférences en contradiction avec les préférences de contextes préférés :*

$$\oplus^{\triangleright}\ \texttt{MCPAF} \begin{cases} \mathcal{A}_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}} = \bigcup_i \mathsf{Arg}_i, \\ \mathcal{R}_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}} = \bigcup_i \mathsf{Arg}_i \cup \mathcal{I}_g, \\ \succeq_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}} = \otimes^{\triangleright}(\succeq_1, \ldots, \succeq_n). \end{cases}$$

Pour établir la proposition suivante, nous nous plaçons dans le cas particulier ($\triangle$).

**Proposition 14.** *Soit* $\texttt{MCPAF} = \langle \mathcal{C}, \triangleright, \langle \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A} \rangle, \langle \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$*. Si pour tout* $i$*, on a* $\succeq_i$ *un préordre complet alors* $\succeq_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}} = \succeq_k$ *tel que* $\exists\ c_k$ *avec* $\forall\ c_j \in \mathcal{C} \setminus \{c_k\}$*,* $(c_k, c_j) \in \triangleright$*.*

**Preuve 29.**
*Prouvons que* $\succeq_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}} = \succeq_k$ *:*

- $\succeq_k \subseteq \succeq_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}}$ *: Ceci est immédiat puisqu'il s'agit de la définition de l'agrégation des préférences par rapport à l'ordre complet* $\triangleright$ *sachant que* $c_k$ *est le contexte préféré,*
- $\succeq_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}} \subseteq \succeq_k$ *: Soit* $(\alpha, \beta) \in \succeq_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}}$*, on a* $(\alpha, \beta) \in \succeq_k$*. En effet, si* $(\alpha, \beta) \notin \succeq_k$ *alors* $(\beta, \alpha) \in \succeq_k$ *puisque* $\succeq_k$ *est un préordre complet. Ceci est impossible puisque* $(\alpha, \beta) \in \succeq_{\oplus^{\triangleright}\texttt{MCPAF}}$*.*

□

Cette dernière propriété est particulièrement importante, car dans la suite du manuscrit, ne seront envisagés que des cas où les préférences entre arguments sont des préordres complets, car calculés à partir de la force d'un argument, l'incomparabilité entre arguments ne sera donc plus envisagée. On comprend donc qu'une telle agrégation à partir d'un ordre complet entre contextes n'est dans ce cas là pas légitime, puisqu'il convient de raisonner avec les préférences du contexte préféré dans le cas d'un ordre complet entre contextes ou par exemple avec l'union des préférences des contextes préférés dans le cas d'un préordre complet entre contextes.
Nous considérerons donc uniquement une agrégation des préférences contextuelles suivant le système associé exhaustivement repareillé introduit dans ce chapitre. De plus, celui-ci nous assure le respect de la consistance des extensions lorsque la relation agrégée est sensible aux conflits, comme peut l'être la relation $\mathcal{R}_{ac}$, introduite dans l'annexe du Chapitre 1. Cette relation va à présent guider la suite de nos travaux, puisque nous allons proposer le calcul d'une relation d'attaque à partir d'actions promues par des arguments, dans un système décisionnel à base d'arguments. Cette relation, bien que présentée dans cette annexe comme générée à partir des supports des arguments, va à présent être utilisée à partir d'actions soutenues par l'argument, précisément lorsque ces actions peuvent être des spécialisations d'autres plus générales.

# 4

# Système de décision argumentée

## Sommaire


**4.1 Modèle de décision . . . . . 58**
4.1.1 Processus de décision . . . . . 58
4.1.2 Parties prenantes . . . . . 58
4.1.3 Actions potentielles . . . . . 59
4.1.4 Critères décisionnels . . . . . 59
4.1.5 Préférences décisionnelles . . . . . 59
4.1.6 Informations préférentielles . . . . . 61
**4.2 Modèle d'arbitrage argumenté de la littérature . . . . . 61**
4.2.1 Système de décision à base d'arguments . . . . . 62
4.2.2 Une typologie formelle de l'argument pratique . . . . . 68
4.2.3 Application à la décision multi-critères . . . . . 70
4.2.4 Cadre décisionnel étendu . . . . . 72
4.2.5 Principe de décision étendu . . . . . 74


Pour un agent confronté à la résolution d'un problème, la décision se définit comme la caractérisation d'un choix, pour lequel l'information se trouve être un substrat fondamental. Ainsi dans tout processus décisionnel, il ne peut choisir que parmi les actions qu'il connait de telle sorte que toute nouvelle information est susceptible de contraindre la décision vers tel ou tel choix. Le cadre décisionnel de Savage [Sav54] insista sur la séparation entre ce que le décideur ne contrôle pas (les événements e.g. météorologiques), ce que le décideur contrôle (les actions e.g. vestimentaires), et les conséquences engendrées par un tel couplage (le résultat e.g. trempé). Si le modèle de Savage peut être appliqué aux décisions humaines, il prend cependant en considération plusieurs phénomènes numériques, telle l'existence de probabilités au sujet des événements, ou une fonction d'utilité liant ces conséquences à un gain. De par son approche empirique, Simon [Sim55] fut l'un des plus critiques à son égard, mettant en exergue l'éloignement qui pouvait exister entre la pratique et ce modèle basé sur l'espérance d'utilité. La connaissance d'un décideur devient dans l'approche de Simon la capacité qu'il a à évaluer l'ensemble des conséquences, opposant au concept de rationalité absolue de Savage, un concept de rationalité limitée dans lequel imprécisions des connaissances sur les événements, préférences des décideurs et surtout limitations de l'information disponible deviennent les maîtres mots. A cela est ajoutée la présence de critères décisionnels ouvrant la voie aux travaux déjà très avancés concernant l'agrégation critérielle et introduisant imprécisions, importances relatives et degrés de satisfaction au regard des actions envisagées. Voilà donc qui fit de l'argumentation un phénomène prépondérant des cadres décisionnels, celle-ci ne se contentant plus de traiter uniquement des arguments, mais guidant

le choix de la meilleure action à entreprendre sur la base de ces arguments, alors appelés "pratiques". Le sujet de ce chapitre est dans un premier temps de resituer le rôle de l'argumentation au sein de la décision dans la littérature, puis de proposer un modèle d'arbitrage argumenté.

## 4.1 Modèle de décision

La décision correspond, classiquement, pour un individu isolé, à un phénomène instantané, engendrant le choix d'une solution parmi un ensemble de solutions envisageables. Cependant, la décision peut s'inscrire dans le temps comme un processus non-monotone au cours duquel les individus forgent progressivement leur choix à l'aide de définitions répétées d'objectifs, de recherches d'informations, etc. Nous détaillons dans cette première partie les éléments classiques d'un cadre décisionnel, ces notions présentées dans [Mou03], sont une base à la construction de théories décisionnelles argumentées, abordées dans la deuxième partie de ce chapitre.

### 4.1.1 Processus de décision

Nous placerons l'étude de la décision au travers d'un processus, dont la principale visée outre l'aspect représentationnel se situe dans l'aide à la décision, laquelle fut définie par [Roy85] comme suit : *"l'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités, mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponse aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision, éléments concourant d'une part à éclairer la décision et normalement à recommander ou simplement favoriser un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus, et d'autre part les objectifs ou systèmes de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé."*

Ainsi, Roy [Roy85] identifie différents types de sorties au processus de décision :

- Etant donné un ensemble d'actions $\sigma$, la problématique de choix qui consiste à identifier un sous-ensemble $\sigma' \subset \sigma$, aussi restreint que possible, composé des actions jugées comme les meilleures.
- La problématique du tri qui consiste à formuler le problème de décision en termes d'affectation de chaque action de $\sigma$ à une des catégories pré-définies.
- La problématique de rangement qui consiste à établir un classement sur l'ensemble $\sigma$ des actions (pré-ordre éventuellement partiel) traduisant la plus ou moins grande attractivité des actions.

### 4.1.2 Parties prenantes

Au cours d'un processus de décision, diverses parties prenantes peuvent être amenées à intervenir à différents titres. L'étude de ces acteurs décisionnels (typologie des acteurs, leurs objectifs et systèmes de valeurs, leurs interactions, etc.) constitue un aspect important à étudier pour analyser un processus de décision et concevoir un processus d'aide à la décision.

Le décideur est généralement l'intervenant du processus de décision que les modèles mis en oeuvre cherchent à éclairer, pour lequel ou au nom duquel l'étude d'aide à la décision est conduite. Dans de nombreux contextes décisionnels, le décideur ne correspond pas à un individu mais à un collectif d'individus. De plus, la présence d'acteurs multiples ayant des systèmes de

valeurs distincts rend parfois nécessaire l'intégration de cette diversité dans la modélisation. On parle alors de processus de décision multi-acteurs.

### 4.1.3 Actions potentielles

Une étape de la modélisation d'un problème de décision consiste à définir un ensemble des possibles avec lequel le décideur raisonne. Classiquement, le terme générique d'action est utilisé pour désigner une solution, une alternative ou une option, $\sigma = \{d_1, d_2, \ldots, d_m, \ldots\}$ est donc l'ensemble (fini ou dénombrable) des actions potentielles (i.e. jugées réalisables).

Par ailleurs, le processus décisionnel peut engendrer des actions fictives qui sont des actions "imaginaires" construites dans le but d'atteindre des consensus. Pour jouer ce rôle, il est donc souhaitable que ces actions fictives soient réalistes, c'est-à-dire correspondent à des solutions concrètes susceptibles d'être mises en oeuvre.

### 4.1.4 Critères décisionnels

Habituellement, dans une modélisation de processus décisionnel, une action est envisagée avec les conséquences de son éventuelle mise en pratique. Ces conséquences peuvent donc être multiples et hétérogènes dans leur nature. Elles reflètent également une certaine forme de diversité des points de vue jouant un rôle dans la comparaison des actions.

Si certaines conséquences permettent la comparaison directe des actions, le plus souvent, un travail de formalisation est nécessaire, permettant alors la comparaison des actions. De telles transcriptions peuvent permettre de définir des valeurs numériques associées aux actions, dont la comparaison guide la décision. Ces valeurs numériques sont classiquement appelées gains ou performances.

**Définition 55.** *Une fonction critère est une fonction à valeur réelle ($g : \sigma \to \Re$) définie sur l'ensemble $\sigma$ des actions potentielles rendant possible la comparaison de deux actions $d_i$ et $d_j$ à partir des valeurs $g(d_i)$ et $g(d_j)$ de sorte que $g(d_i) \geq g(d_j) \Rightarrow (d_i, d_j) \in \trianglerighteq_g$ où $(d_i, d_j) \in \trianglerighteq_g$ signifie que "$d_i$ est au moins aussi bon que $d_j$" relativement à l'axe de signification du critère $g$.*

**Exemple 41.** *"Si en passant par l'ouest, on rallonge quelque peu le chemin pour rejoindre l'épicerie, dans laquelle nous pourrons trouver à coup sûr du pain à la mie raffinée, il est possible de trouver en chemin du pain complet dans une nouvelle boulangerie, quitte à affronter une averse."*

| | *Ouest* | *Est* |
|---|---|---|
| $g_1$ = *Pain Mie Raffinée* | *1* | *1* |
| $g_2$ = *Pain Complet* | *1* | *0* |
| $g_3$ = *Vêtements secs* | *0* | *1* |

*Le tableau ci-dessus renseigne pour l'ensemble des actions possibles ($\sigma = \{Est, Ouest\}$), les valeurs obtenues par la fonction critère pour chaque critère. Généralement, pour traduire les valeurs vrai ou faux, les nombres 1 et 0 sont utilisés.*

### 4.1.5 Préférences décisionnelles

Pour modéliser les préférences entre actions, il est courant d'avoir recours à des relations binaires représentant la manière avec laquelle deux actions potentielles se comparent. La comparaison de deux actions fait apparaître diverses situations de préférence. La théorie classique

de la décision [Fis70] ne distingue que deux relations différentes : l'indifférence et la préférence qui sont toutes deux considérées comme transitives. Ensemble elles forment donc un préordre total.

Certaines approches traitent néanmoins [RV97] avec une relation d'incomparabilité traduisant l'impossibilité pour le décideur de comparer deux actions. On notera donc $\triangleright$ la relation de préférence (irréflexive et asymétrique), $\approx$ la relation d'indifférence (réflexive et symétrique) et $\propto$ la relation d'incomparabilité (irréflexive et symétrique).

**Définition 56** ([Mou03])**.** *Une structure de préférences est un ensemble de relations binaires* $(\triangleright, \approx, \propto)$ *tel que toute paire d'actions est reliée par une et une seule de ces relations.*

Dans certaines situations, la multiplicité des conséquences des actions et l'aspect contradictoire des points de vue incitent à adopter une approche multi-critères qui consiste à construire un modèle décisionnel en s'appuyant sur plusieurs critères modélisant chacun un point de vue. Néanmoins, la prise en compte de plusieurs critères est rendue délicate par l'aspect contradictoire des points de vue : il n'existe pas de solution unique qui s'impose, la construction des recommandations est donc plus complexe.

L'étape critique dans la modélisation multi-critères est la construction d'une famille de $m$ fonctions critères $g_1, g_2, \ldots, g_m$, $(m \geq 2)$, traduisant chacune les préférences relatives à un aspect spécifique des actions. La construction de telles fonctions soulève habituellement de nombreuses difficultés [Bou90] et relève plus de techniques que de méthodes scientifiques. Une fois la famille de critères $g_1, g_2, \ldots, g_m$ définie, la comparaison des actions s'appuie sur la comparaison des vecteurs performance $\mathtt{G} = (g_1(d_i), g_2(d_i), \ldots, g_m(d_i))$.

La seule donnée des vecteurs performance ne permet d'obtenir qu'une information très pauvre sur la comparaison des actions. En absence d'information supplémentaire, seules les paires d'actions liées par la relation de dominance $\triangleright^{\mathtt{G}}$ peuvent être comparées.

**Définition 57.** *La relation de dominance sur* $\sigma$ *notée* $\triangleright^{\mathcal{G}}$ *est définie par :*

$$(d_i, d_j) \in \triangleright^{\mathcal{G}} \textit{ ssi } \begin{cases} \forall k \in [1, m],\ g_k(d_i) \geq g_k(d_j). \\ \exists k \in [1, m],\ g_k(d_i) > g_k(d_j). \end{cases}$$

**Exemple 42** (Exemple 41 suite)**.** *Lorsque la comparaison ne tient compte que des critères "Pain Mie Raffinée" et "Pain Complet", l'action "Passer par l'ouest" domine l'action "Passer par l'est"* $((Ouest, Est) \in \triangleright^{\mathcal{G}})$*. A l'inverse, lorsque la comparaison ne tient compte que des critères "Pain Mie Raffinée" et "Vêtements Secs", l'action "Passer par l'est" domine l'action "passer par l'ouest"* $((Est, Ouest) \in \triangleright^{\mathcal{G}})$*. La relation de dominance est l'ensemble vide lorsque tous les critères sont considérés.*

Le décideur peut avoir besoin de recourir à certaines informations additionnelles notamment en termes de préférences.

Deux types d'informations se retrouvent alors intégrées dans de tels processus, des critères classiques et purement numériques (e.g. la distance, la durée, le coût, etc.), et d'autres plus qualitatifs (e.g. préférences organoleptiques). L'étape servant à transcrire certains aspects numériques (e.g. table nutritionnelle des pains français) en informations préférentielles (préférences nutritionnelles) doit être intégrée au processus.

### 4.1.6 Informations préférentielles

L'utilisation d'informations préférentielles se justifie par la constatation faite par [Ros91], selon laquelle la proportion de couples de vecteurs performance liées par la relation de dominance devient rapidement très faible à mesure que le nombre de critères croît.

**Définition 58** ([Mou03]). *L'information préférentielle, notée* $\mathtt{I}$*, correspond à toute information de nature à discriminer deux actions non reliées par la relation de dominance* $\triangleright^{\mathtt{G}}$*.*

Plusieurs types d'informations préférentielles peuvent exister au sein d'un processus décisionnel. L'information préférentielle peut notamment s'exprimer en faisant référence aux résultats attendus du modèle d'aide à la décision ou en appréciant la valeur que peuvent prendre les informations préférentielles utilisés dans le modèle d'agrégation. Plus précisément, il peut s'agir :

- d'un pré-ordre (partiel ou total) sur un sous-ensemble $\sigma' \subseteq \sigma$ ou une affirmation du type : "les actions dont la performance sur le critère $g_i$ est inférieure à x sont peu susceptibles d'être placées en tête de classement", dans un cas de rangement.
- d'une différence d'évaluation non significative sur un critère (en termes de valeurs qui ne sont pas significativement différentes).
- d'une comparaison de critères (ou de coalition de critères) en terme d'importance relative.

Dans un contexte multi-critères, lorsqu'une action ne domine pas toutes les autres par la relation $\triangleright^{\mathtt{G}}$, l'élaboration de recommandation requiert une procédure d'agrégation multi-critères [RB93], permettant ainsi de synthétiser des préférences sur chaque critère et contribuer à la définition d'un résultat global.

**Définition 59** ([Mou03]). *Une procédure d'agrégation multi-critères est une règle permettant d'établir, sur la base d'un tableau de performances et d'un ensemble de valeurs pour les paramètres préférentiels, un ou plusieurs ensemble(s) de préférences(s) sur l'ensemble des actions potentielles* $\sigma$*.*

**Exemple 43** (Exemple 41 suite). *En attribuant des poids à chacun des critères de l'Exemple 41 (*$w_1 = 1$*,* $w_2 = 2$*,* $w_3 = 1$*), une procédure d'agrégation multi-critères peut être la suivante :* $(d_i, d_j) \in \trianglerighteq$ *ssi* $\sum w_k g_k(d_i) \geq \sum w_k g_k(d_j)$*. Dans le cas de cette procédure d'agrégation, et avec le poids des critères décrit précédemment,* $\trianglerighteq = \{(Ouest, Est)\}$*.*

L'argumentation peut donc entrer pleinement dans cette procédure d'agrégation critérielle, elle peut en effet permettre d'intégrer l'ensemble de ces informations préférentielles en engendrant surtout un aspect explicatif au processus de décision, et cela pour être en mesure d'accomplir le meilleur choix raisonné (qualitatif comme numérique). Ce processus non-monotone, car soumis à la révision d'une action suite à de nouveaux arguments entrants, va être détaillé dans cette deuxième partie.

## 4.2 Modèle d'arbitrage argumenté de la littérature

À l'heure actuelle, même si elles demeurent peu nombreuses, de nouvelles approches en termes de prise de décision en présence de points de vue contradictoires voient le jour et intègrent donc le raisonnement argumentatif [BH08, RS09] comme levier décisionnel. L'avantage d'utiliser le volet argumentation se fait sentir par sa capacité à comprendre des situations où les informations sont incohérentes car provenant de plusieurs sources ou correspondant à plusieurs points de vue. Il semble également jouer un rôle important dans les tâches de décision, lorsque les avantages et

les inconvénients doivent être évalués sur la base des connaissances disponibles. Les questions de décision et d'argumentation ont été étudiées séparément, avec des objectifs différents. Très peu d'études abordent donc les avantages des méthodes argumentatives comme des éléments d'explication dans l'aide à la décision.

Amgoud et Prade [AP09] envisagent l'argumentation dans le volet décisionnel, comme un processus en deux temps 1) l'évaluation des arguments appuyant des raisonnements et des actions, 2) la recommandation d'actions par des principes bien connus de décision. Leur cadre envisage des conduites de décisions unipolaire, bipolaire et non-polaire donnant à leurs arguments une typologie permettant aussi bien à ceux-ci d'atteindre un but ou un rejet. Nous présentons trois aspects de leur démarche : le cadre décisionnel argumenté, leurs principes de décisions et une formalisation des arguments servant à la décision.

### 4.2.1 Système de décision à base d'arguments

Le cadre décisonnel introduit une distinction immédiate entre deux types d'arguments, ceux justifiant des croyances, appelés arguments épistémiques (e.g. certains modèles météorologiques nous informent qu'il va pleuvoir demain), et ceux justifiant des options et construits à partir de croyances, appelés arguments pratiques (e.g. puisqu'il pleut demain, il serait bon de se munir d'un parapluie). Si les arguments épistémiques ont été largement envisagés dans la littérature (se référer aux références au Chapitre 1 et à son annexe), les arguments pratiques ont eux fait l'objet de moins de travaux. Nous présenterons dans la Partie 4.2.2 une formalisation de ceux-ci proposée par [AP09]. Le choix y est fait de toujours considérer les arguments pratiques comme consistants, et ne pouvant être attaqués seulement par des arguments épistémiques eux-mêmes potentiellement porteurs d'un fragment d'inconsistance. Amgoud et Prade font également le choix d'équiper chaque ensemble d'arguments épistémiques et pratiques d'une relation de préférence, et de préférer, par défaut, tous les arguments épistémiques à tous les arguments pratiques.

**Définition 60** (Système décisionnel à base d'arguments [AP09])**.** *Un* ***système décisionnel à base d'arguments*** *est un tuple* $\texttt{DAF} = \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *où :*

- $\sigma$ *est un ensemble d'options,*
- $\mathcal{A}$ *est un ensemble d'arguments tel que* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_e \cup \mathcal{A}_p$ *;* $\mathcal{A}_e$ *correspond à l'ensemble des arguments épistémiques et* $\mathcal{A}_p$ *à l'ensemble des arguments pratiques,*
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est un ensemble de conflits tel que* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_e \cup \mathcal{R}_p \cup \mathcal{R}_m$ *avec* $\mathcal{R}_e \subseteq \mathcal{A}_e \times \mathcal{A}_e$*,* $\mathcal{R}_p \subseteq \mathcal{A}_p \times \mathcal{A}_p$ *et* $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{A}_e \times \mathcal{A}_p$*,*
- $\succeq \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *est un ensemble de préférences tel que* $\succeq = \succeq_e \cup \succeq_p \cup \succeq_m$ *avec* $\succeq_e \subseteq \mathcal{A}_e \times \mathcal{A}_e$*,* $\succeq_p \subseteq \mathcal{A}_p \times \mathcal{A}_p$ *et* $\succeq_m \subseteq \mathcal{A}_e \times \mathcal{A}_p$*,*

La notation DAF correspond à la traduction anglaise de "système de décision à base d'arguments" : **A**rgumentation-based **D**ecision **F**ramework.

Les contraintes suivantes sont ajoutées afin de respecter certaines spécificités du système décisionnel :

- $\mathcal{A}_e \cap \mathcal{A}_p = \emptyset$,
- $\mathcal{R}_p = \emptyset$.

Enfin deux fonctions sont introduites affectant à chaque option l'ensemble des arguments en sa faveur et en sa défaveur.

- $\mathcal{F}_p : \sigma \longrightarrow 2^{\mathcal{A}_p}$ est une fonction qui retourne les arguments pratiques en faveur d'une option candidate. De tels arguments sont dits pros l'option (e.g. prendre un parapluie est utile en cas de pluie).

– $\mathcal{F}_c : \sigma \longrightarrow 2^{\mathcal{A}_p}$ est une fonction qui retourne les arguments pratiques en défaveur d'une option candidate. De tels arguments sont dits cons l'option (e.g. prendre un parapluie est encombrant).

**Exemple 44.** *Nous nous plaçons dans le cas d'un choix entre deux types vestimentaires, à savoir le port d'un parapluie (noté ☂) et le port d'un ciré marin (noté ⚓). Soit un système décisionnel à base d'arguments* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *avec :*

– $\sigma = \{☂, ⚓\}$,

– $\mathcal{A} = \mathcal{A}_e \cup \mathcal{A}_p$, *avec* $\mathcal{A}_e = \{🌧, 🌡, 🌡, 🍃, 🍀\}$ *et* $\mathcal{A}_p = \{☂_{pro}, ☂_{con}, ⚓_{1\,pro}, ⚓_{2\,pro}, ⚓_{con}\}$ *:*

| $\mathcal{A}_e$ | *Raison épistémique* | $\mathcal{A}_p$ | *Raison pratique* |
|---|---|---|---|
| 🌧 | $e_{🌧}$ = *"Des averses sont prévues demain."* | $☂_{pro}$ | $p☂_{pro}$ = *"Prendre un parapluie est utile en cas de pluie."* |
| 🌡 | $e_{🌡}$ = *"Des températures douces sont prévues demain."* | $⚓_{1\,pro}$ | $p⚓_{1\,pro}$ = *"Porter un ciré marin est utile en cas de pluie."* |
| 🌡 | $e_{🌡}$ = *"Des températures fraîches sont prévues demain."* | $⚓_{2\,pro}$ | $p⚓_{2\,pro}$ = *"Porter un ciré marin protège du froid."* |
| 🍃 | $e_{🍃}$ = *"Des rafales de vent sont prévues demain."* | $☂_{con}$ | $p☂_{con}$ = *"Le vent peut retourner les baleines de parapluie."* |
| 🍀 | $e_{🍀}$ = *"Des vents calmes sont prévus demain."* | $⚓_{con}$ | $p⚓_{con}$ = *"Un ciré marin est généralement jaune."* |

– $\mathcal{R} = \mathcal{R}_e \cup \mathcal{R}_m$ *avec* $\mathcal{R}_e = \{(🌡, 🌡), (🌡, 🌡), (🍃, 🍀), (🍀, 🍃)\}$ *et* $\mathcal{R}_m = \{(🍀, ☂_{con}), (🌡, ⚓_{2\,pro})\}$,

– $\succeq\ = \succeq_e \cup \succeq_p \cup \succeq_m$ *avec* $\succeq_e = \{(🌧, 🌡), (🌧, 🌡), (🌧, 🍃), (🌧, 🍀), (🌡, 🌡), (🍀, 🍃)\}$ *et* $\succeq_p = \{(☂_{pro}, ⚓_{1\,pro}), (⚓_{1\,pro}, ☂_{pro}), (☂_{pro}, ⚓_{con}), (⚓_{con}, ☂_{pro}), (⚓_{con}, ⚓_{2\,pro}), (⚓_{con}, ☂_{con})\}$,

– $\mathcal{F}_p(☂) = \{☂_{pro}\}$, $\mathcal{F}_c(☂) = \{☂_{con}\}$, $\mathcal{F}_p(⚓) = \{⚓_{1\,pro}, ⚓_{2\,pro}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(⚓) = \{⚓_{con}\}$.

*Le graphe d'attaque du système* DAF *est représenté par la Figure 4.1.*

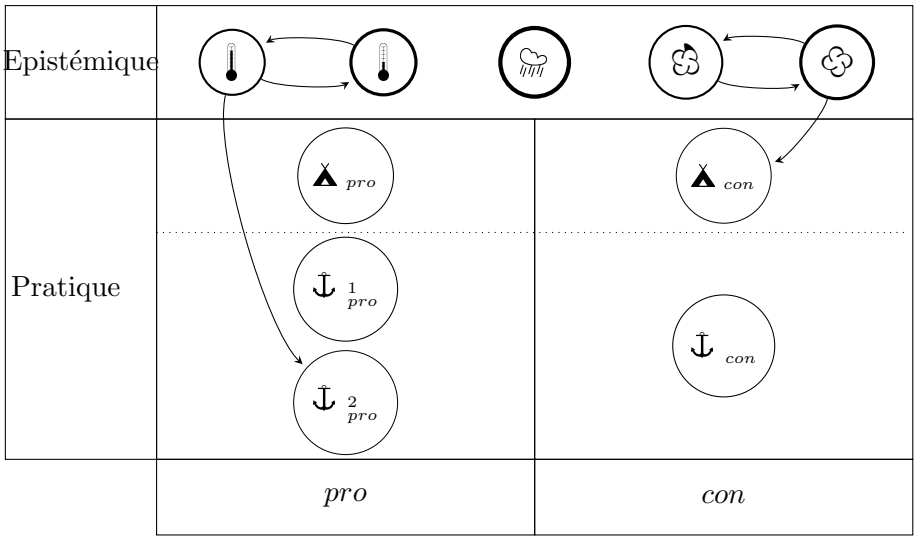



FIGURE 4.1 – Le graphe orienté DAF

A l'image de ce qui a été proposé dans le Chapitre 2, il est associé à chaque DAF, un système d'argumentation à la Dung dans lequel l'acceptabilité collective des arguments peut alors être évaluée.

**Définition 61** (Système associé à DAF [AP09])**.** *Soit* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$. *Le* AF *associé à* DAF *est un couple* $\langle \mathcal{A}, \mathtt{Def} \rangle$ *où* $\mathtt{Def} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathtt{Def}$ *si et seulement si* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \succ$.

**Exemple 45.** *Soit le système décisionnel à base d'arguments* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *décrit dans l'Exemple 44, le graphe d'attaque de son système* AF *associé est représenté par la Figure 4.2. Il permet ainsi d'envisager l'admissibilité collective des arguments. Le système* AF *possède une seule extension* $\{$, , , $_{pro}$, $_{1\,pro}$, $_{2\,pro}$, $_{con}\}$ *qui est à la fois stable, préférée et de base. On peut donc dire que quel que soit la sémantique considérée* $\mathtt{Sce}(\mathtt{AF}) = \{$, , , $_{pro}$, $_{1\,pro}$, $_{2\,pro}$, $_{con}\}$.

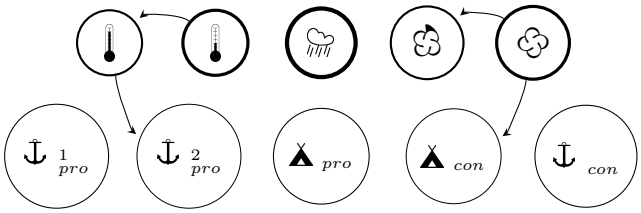



FIGURE 4.2 – Le graphe orienté du système AF associé à DAF

L'étape d'argumentation sert d'appui pour évaluer les options et ainsi proposer, en sortie du système décisionnel, un ordonnancement de celles-ci basé en partie sur l'acceptabilité des arguments en leur faveur et/ou défaveur.

**Définition 62** (Sortie du système décisionnel [AP09])**.** $\trianglerighteq_\sigma \subseteq \sigma \times \sigma$ *est une relation de préférence entre options d'un système décisionnel devant satisfaire les conditions suivantes :*

- *Transitivité : La relation doit être transitive (comme habituellement requis dans les théories de la décision).*
- *Complétude : La relation doit être complète, ce qui permet au système de proposer le(s) meilleur(s) candidat(s) (en étant en mesure de comparer n'importe quelle paire d'options).*

Amgoud et Prade dessinent alors trois cas de figure classiques pour élaborer ce préordre entre options en rapport direct avec l'utilisation faite de la dualité entre arguments pros et arguments cons :

1. Les principes unipolaires s'appuyant soit sur les arguments pros soit sur les arguments cons.
2. Les principes bipolaires s'appuyant à la fois sur les arguments pros et les arguments cons.
3. Les principes non-polaires s'appuyant sur une agrégation des arguments pros et cons.

A présent, nous allons détailler certaines méthodes utilisant ces principes.

#### 4.2.1.1 Les principes unipolaires

Nous rappelons les principes présentés dans [AP09], permettant la comparaison des décisions sur la base des seuls arguments pros, avec comme condition qu'ils soient sceptiquement acceptés (le statut de l'argument a été présenté dans le Chapitre 1). De façon similaire, ces principes sont appliqués sur les arguments cons. Dans un premier temps la préférence entre arguments n'intervient pas dans le calcul de la relation de préférence entre options, puis des raffinements font intervenir celle-ci.

Une méthode simple et naturelle consiste par exemple à préférer les options ayant le plus d'arguments pros sceptiquement acceptés (appelés sceptiques pros).

**Définition 63** (Décompte des arguments sceptiques pros [AP09])**.** *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$, AF *le système associé à* DAF *et* $d_1$, $d_2 \in \sigma$ *:*

$$(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma \text{ ssi } |\mathcal{F}_p(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})| \geq |\mathcal{F}_p(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})|.$$

**Exemple 46** (Exemple 44 suite)**.** *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44, avec le principe unipolaire de décompte des arguments sceptiques pros :*
*Puisque* (🌡, 🌡) $\in \succ_e$ *alors* $\mathcal{F}_p(\text{☂}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{☂}_{\substack{1\\pro}}, \text{☂}_{\substack{2\\pro}}\}$ *et* $\mathcal{F}_p(\text{⛱}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛱}_{pro}\}$*, donc par ce principe unipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{☂}, \text{⛱})\}$.

**Remarque 1.** *Si* (🌡, 🌡) $\notin \succ_e$ *alors* $\mathcal{F}_p(\text{☂}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{☂}_{\substack{1\\pro}}\}$ *et* $\mathcal{F}_p(\text{⛱}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛱}_{pro}\}$*, donc par ce principe unipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⛱}, \text{☂}), (\text{☂}, \text{⛱})\}$.
*En d'autres termes, si l'argument informant de températures fraîches le lendemain est strictement préféré à l'argument informant de températures douces, ce principe unipolaire donne une préférence stricte au choix du ciré. Si cela n'avait pas été le cas, ce principe donnerait une indifférence entre le choix du parapluie et le choix du ciré.*

Une des critiques que l'on peut faire à cette méthode est qu'elle ne fait pas intervenir la relation de préférence entre les arguments pratiques $\succeq_p$ (rappelons que si $\succeq_e$ intervient dans le calcul de l'acceptabilité, $\succeq_p$ n'intervient pas dans celui-ci puisque il n'y a pas d'attaques entre arguments pratiques et ceux-ci ne sont jamais strictement préférés à des arguments épistémiques). Ainsi, une autre méthode est proposée, soutenant l'option ayant en sa faveur un argument pratique sceptique (par le système d'argumentation associé) préféré à tout argument pratique sceptique en faveur d'une autre option.

**Définition 64** (Promotion focus [AP09])**.** *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$*,* AF *le système associé à* DAF *et* $d_1$*,* $d_2 \in \sigma$ *:*

$$(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma \text{ ssi } \exists \alpha \in \mathcal{F}_p(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) \text{ t.q. } \forall \beta \in \mathcal{F}_p(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}),\ (\alpha, \beta) \in \succeq_p.$$

**Exemple 47** (Exemple 44 suite)**.** *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44, avec le principe unipolaire de promotion focus. On a* $\text{☂}_{\substack{1\\pro}} \in \mathcal{F}_p(\text{☂}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})$ *et* $\text{⛱}_{pro} \in \mathcal{F}_p(\text{⛱}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})$*. De plus* $\forall\ \beta \in \mathcal{F}_p(\text{⛱})$*, on a* $(\text{☂}_{\substack{1\\pro}}, \beta) \in \succeq_p$ *et* $\forall\ \beta \in \mathcal{F}_p(\text{☂})$*, on a* $(\text{⛱}_{pro}, \beta) \in \succeq_p$*. Ainsi, par ce principe unipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⛱}, \text{☂}), (\text{☂}, \text{⛱})\}$.
*En d'autres termes, étant donné qu'il n'existe pas de préférence stricte entre les arguments pratiques pros préférés pour chacune des actions, ce principe donne une indifférence entre le choix du parapluie et le choix du ciré.*

Un reproche peut donc être fait à cette relation puisqu'elle se contente de renvoyer un statu quo entre deux options dès lors que les plus forts (au sens de la relation $\succeq_p$) des arguments pratiques sceptiques en leur faveur ne sont pas discriminés par la relation $\succeq_p$. Ainsi, il est proposé de tenir compte du reste des arguments sceptiques pros au regard de la relation $\succeq_p$.

**Définition 65** (Raffinement du statu quo [AP09])**.** *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$*,* AF *le système associé à* DAF *et* $d_1$*,* $d_2 \in \sigma$*. Soient* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$*,* $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ *tels que* $\forall \alpha_{i=1,\ldots,r} \in \mathcal{F}_p(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})$*, et* $\forall \beta_{i=1,\ldots,s} \in \mathcal{F}_p(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})$*, où chacun de ces vecteurs respecte un ordonnancement au regard de la relation* $\succeq_p$ *(e.g.* $(\alpha_1, \alpha_2) \in \succeq_p, \ldots, (\alpha_{r-1}, \alpha_r) \in \succeq_p$*). Soit* $v = min(r, s)$
$(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma$ *ssi :*
- $(\alpha_1, \beta_1) \in \succ_p$*, ou*
- $\exists\ k \leq v$ *tel que* $(\alpha_k, \beta_k) \in \succ_p$ *et* $\forall\ j < k$*,* $(\alpha_j, \beta_j) \in \approx_p$*, ou*
- $r > v$ *et* $\forall\ j \leq v$*,* $(\alpha_j, \beta_j) \in \approx_p$.

**Exemple 48** (Exemple 44 suite)**.** *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44, avec le principe unipolaire de raffinement du statut quo :*
*Puisque* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \in \succ_e$ *alors* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}, \text{⚓}_{\substack{2\\pro}}\}$ *et* $\mathcal{F}_p(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛰}_{pro}\}$*. Etant donné que* $(\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}, \text{⛰}_{pro}) \in \approx_p$*, par ce principe unipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⚓}, \text{⛰})\}$*.*

**Remarque 2.** *Si* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \notin \succ_e$ *alors* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}\}$ *et* $\mathcal{F}_p(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛰}_{pro}\}$*. Etant donné que* $(\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}, \text{⛰}_{pro}) \in \approx_p$*, par ce principe unipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{\emptyset\}$*.*
*En d'autres termes, étant donné qu'il n'existe pas de préférence stricte entre les arguments pratiques sceptiques pros préférés pour chacune des actions, le principe de raffinement du statut quo se tourne vers les autres arguments pratiques pros sceptiques préférés pour chacune des actions. Il n'en existe pas pour l'action du choix du parapluie. Par contre un deuxième argument pratique pro sceptique pour l'action du choix du ciré existe. Ce principe unipolaire donne dans ce cas une préférence stricte au choix du ciré. Dans tous les autres cas, ce deuxième argument existe, ce principe donne alors une incomparabilité entre le choix du parapluie et le choix du ciré.*

A l'inverse, le système décisionnel peut employer des méthodes de principe unipolaire basées sur les arguments sceptiques cons, en dépréciant les options ayant le plus d'arguments pratiques sceptiques en leur défaveur, ou ayant un argument sceptique en leur défaveur préféré à tous les arguments sceptiques en défaveur d'une autre option (appelée prévention focus), ou encore en procédant à un rafinement du statu quo.

#### 4.2.1.2 Les principes bipolaires

Une façon intuitive de définir des principes où les deux types d'arguments (pros et cons) entrent en jeu pour comparer des options est de combiner de façon conjonctive les principes unipolaires de chacun.

**Définition 66** (Décompte des arguments sceptiques pros et cons [AP09])**.** *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$*,* AF *le système associé à* DAF *et* $d_1$*,* $d_2 \in \sigma$ *:* $(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma$ *ssi*
- $|\mathcal{F}_p(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})| \geq |\mathcal{F}_p(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})|$*, et*
- $|\mathcal{F}_c(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})| \leq |\mathcal{F}_c(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})|$*.*

**Exemple 49** (Exemple 44 suite)**.** *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44, avec le principe bipolaire de décompte des arguments sceptiques pros et cons : Puisque* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \in \succ_e$*, on a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}, \text{⚓}_{\substack{2\\pro}}\}$ *et* $\mathcal{F}_p(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛰}_{pro}\}$*. Or dans tous les cas on a* $|\mathcal{F}_c(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})| \leq |\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF})|$*. Ainsi, par ce principe bipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⚓}, \text{⛰})\}$*.*

**Remarque 3.**

- *Si* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \notin \succ_e$ *et* $(\text{☘}, \text{☘}) \notin \succ_e$*, on a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}\}$*,* $\mathcal{F}_p(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛰}_{pro}\}$*,* $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\emptyset\}$*. Ainsi, dans ce cas, par ce principe bipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⛰}, \text{⚓})\}$*.*
- *Si* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \notin \succ_e$ *et si* $(\text{☘}, \text{☘}) \in \succ_e$*, on a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}\}$*,* $\mathcal{F}_p(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛰}_{pro}\}$*,* $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⛰}) \cap \mathcal{S}ce(\texttt{AF}) = \{\text{⛰}_{con}\}$*. Ainsi, dans ce cas, par ce principe bipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⛰}, \text{⚓}), (\text{⚓}, \text{⛰})\}$*.*

De la même façon, les approches combinées pros et cons peuvent permettre de préférer une option lorsque celle-ci possède un argument sceptique en sa faveur préféré aux sceptiques pros des autres options et qu'elle ne possède pas un argument sceptique en sa défaveur préféré aux sceptiques cons des autres options.

**Définition 67** (Promotion et Prévention focus [AP09]). *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$, AF *le système associé à* DAF *et* $d_1$, $d_2 \in \sigma$ : $(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma$ *ssi*

- $\exists \alpha \in \mathcal{F}_p(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$ *t.q.* $\forall \beta \in \mathcal{F}_p(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$, $(\alpha, \beta) \in \succeq_p$, *et*
- $\nexists \alpha \in \mathcal{F}_c(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$ *t.q.* $\forall \beta \in \mathcal{F}_c(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$, $(\alpha, \beta) \in \succeq_p$.

**Exemple 50** (Exemple 44 suite). *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44, avec le principe bipolaire de promotion et prévention focus : On a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$ *et* $\mathcal{F}_p(\text{⚔}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$. *De plus* $\forall\ \beta \in \mathcal{F}_p(\text{⚔})$, *on a* $(\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}, \beta) \in \succeq_p$ *et* $\forall\ \beta \in \mathcal{F}_p(\text{⚓})$, *on a* $(\text{⚔}_{pro}, \beta) \in \succeq_p$. *De plus,* $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⚔}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\emptyset\}$. *Ainsi dans ce cas, par ce principe bipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⚓}, \text{⚔}), (\text{⚔}, \text{⚓})\}$.

**Remarque 4.**

*Si* $(\text{☘}, \text{☘}) \in \succ_e$ *alors* $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⚔}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚔}_{con}\}$, *de plus* $(\text{⚔}_{con}\text{⚓}_{con}) \in \succ_p$. *Ainsi dans ce cas, par ce principe bipolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⚔}, \text{⚓})\}$. *En d'autres termes il existe un seul argument pratique con sceptique en défaveur de l'option du ciré et préféré au seul argument pratique con en défaveur de l'option du parapluie. La préférence stricte pour l'option du parapluie tient donc à l'existence de ce seul argument pratique con en défaveur de l'option du parapluie doté d'un statut sceptique, ce qui peut paraître paradoxal.*

Une autre famille de principe bipolaire, reprise par Amgoud et Prade, est le principe de Franklin, dans lequel les paires d'arguments sceptiques de même force sont ignorées, après quoi les principes bipolaires vus précédemment peuvent être appliqués grâce aux arguments restants.

**Définition 68** (Simplification de Franklin [AP09]). *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$, AF *le système associé à* DAF *et* $d \in \sigma$. *Soient* $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $C = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *tel que* $\forall \alpha_{i=1,\ldots,r} \in \mathcal{F}_p(d) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$, *et* $\forall \beta_{i=1,\ldots,m} \in \mathcal{F}_c(d) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})$, *où chacun de ces vecteurs respecte un ordonnancement au regard de la relation* $\succeq_p$ *(e.g.* $(\alpha_1, \alpha_2) \in \succeq_p$, $\ldots$, $(\alpha_{r-1}, \alpha_r) \in \succeq_p$*). Le résultat de la simplification est* $P' = (\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_r)$, $C' = (\beta_{j+1}, \ldots, \beta_m)$ *tel que :*

- $\forall 1 \leq i \leq j$, $(\alpha_i, \beta_i) \in \approx_p$ *et* $((\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}) \in \succ_p$ *ou* $(\beta_{j+1}, \alpha_{j+1}) \in \succ_p)$
- *Si* $j = r$ *(resp.* $j = m$*), alors* $P' = \emptyset$ *(resp.* $C' = \emptyset$*).*

**Exemple 51** (Exemple 44 suite). *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44. Les résultats par la simplification de Franklin sont les suivants :*

- *Pour l'option* ⚔, *puisque* $(\text{☘}, \text{☘}) \notin \succ_e$ *sont les vecteurs* $P' = (\text{⚔}_{pro})$ *et* $C' = \emptyset$, *car* $\mathcal{F}_c(\text{⚔}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\emptyset\}$.
- *Pour l'option* ⚓, *puisque* $(\text{☘}, \text{☘}) \in \succ_e$, *sont les vecteurs* $P' = (\text{⚓}_{\substack{2\\pro}})$ *et* $C' = \emptyset$, *car* $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}, \text{⚓}_{\substack{2\\pro}}\}$ *avec* $(\text{⚓}_{\substack{1\\pro}}, \text{⚓}_{con}) \in \approx_p$.

#### 4.2.1.3 Les principes apolaires

Dans certains cas, les arguments sceptiques en faveur et en défaveur d'une décision sont agrégés en un méta-argument ayant une force unique. Ainsi, pour comparer deux options, il suffit de comparer leurs méta-arguments. Une telle conception est en accord avec la pratique au sein de la décision multi-critères, puisque chaque option est évaluée selon différents critères utilisant la même échelle (possédant une partie positive et une partie négative), agrégés pour obtenir une évaluation globale de chaque option.

**Définition 69** (Critère d'agrégation [AP09]). *Soient* $\mathtt{DAF} = \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$, $\mathtt{AF}$ *le système associé à* $\mathtt{DAF}$, $d_1$, $d_2 \in \sigma$, *avec* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *et* $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *(resp.* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ *et* $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$*) des vecteurs d'arguments en faveur et en défaveur de l'option* $d_1$ *(resp.* $d_2$*) :*
$(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma$ *ssi* $(h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m), h(\gamma_1, \ldots, \gamma_l, \delta_1, \ldots, \delta_k)) \in \succeq_p$ *où* $h$ *est une fonction d'agrégation.*

Une illustration simple de ce critère peut être la comparaison des différences entre le nombre d'arguments sceptiques en faveur et en défaveur des options.

**Définition 70** ([AP09]). *Soient* $\mathtt{DAF} = \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$, $\mathtt{AF}$ *le système associé à* $\mathtt{DAF}$ *et* $d_1$, $d_2 \in \sigma$ *:*
$(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma$ *ssi* $|\mathcal{F}_p(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})| - |\mathcal{F}_c(d_1) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})| \geq |\mathcal{F}_p(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})| - |\mathcal{F}_c(d_2) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF})|$.

**Exemple 52** (Exemple 44 suite). *Soit* $\mathtt{DAF}$ *décrit dans l'Exemple 44, avec le principe apolaire de comparaison des différences entre le nombre d'arguments sceptiques en faveur et en défaveur des options : Puisque* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \in \succ_e$ *et* $(\text{⚽}, \text{⚽}) \notin \succ_e$, *on a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{1_{pro}}, \text{⚓}_{2_{pro}}\}$, $\mathcal{F}_p(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚠}_{pro}\}$, $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\emptyset\}$. *Ainsi, dans ce cas, par ce principe apolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{\emptyset\}$.

**Remarque 5.**

- *Si* $(\text{⚽}, \text{⚽}) \notin \succ_e$ *et* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \notin \succ_e$, *on a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{1_{pro}}\}$, $\mathcal{F}_p(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚠}_{pro}\}$, $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\emptyset\}$. *Ainsi, dans ce cas, par ce principe apolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⚠}, \text{⚓})\}$.
- *Si* $(\text{⚽}, \text{⚽}) \in \succ_e$ *et* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \in \succ_e$, *on a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{1_{pro}}, \text{⚓}_{2_{pro}}\}$, $\mathcal{F}_p(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚠}_{pro}\}$, $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$. *Ainsi, dans ce cas, par ce principe apolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⚓}, \text{⚠})\}$.
- *Si* $(\text{🌡}, \text{🌡}) \notin \succ_e$ *et* $(\text{⚽}, \text{⚽}) \in \succ_e$, *on a* $\mathcal{F}_p(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{1_{pro}}\}$, $\mathcal{F}_p(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚠}_{pro}\}$, $\mathcal{F}_c(\text{⚓}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚓}_{con}\}$ *et* $\mathcal{F}_c(\text{⚠}) \cap \mathcal{S}ce(\mathtt{AF}) = \{\text{⚠}_{con}\}$. *Ainsi, dans ce cas, par ce principe apolaire, on a* $\trianglerighteq_\sigma = \{(\text{⚠}, \text{⚓}), (\text{⚓}, \text{⚠})\}$.

Ce modèle décisionnel à base d'arguments étant défini, il s'agit à présent de rappeler la méthode utilisée dans [AP09] pour définir un argument pratique.

### 4.2.2 Une typologie formelle de l'argument pratique

Une fois l'approche "macro" détaillée, il s'agit de définir la théorie décisionnelle "micro", telle qu'elle est envisagée classiquement de façon bipolaire (dans le sens présence d'arguments pros et cons).

**Définition 71** (Théorie décisionnelle [AP09]). *A partir d'un vocabulaire* $\mathtt{Voc}$, *une* ***théorie décisionnelle*** *est un tuple* $\mathcal{T} = \langle \sigma, \mathcal{K}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ *où :*

- $\sigma$ *est un ensemble d'options.*
- $\mathtt{Voc}$ *est un ensemble de variables propositionnelles de deux sortes, les variables décisionnelles contrôlables et fixées par le décideur et les variables d'états fixées par la nature.*
- $\mathcal{K}$ *est une base de connaissances, partitionnée et stratifiée en* $\mathcal{K}^1, \ldots, \mathcal{K}^n$ *(*$\mathcal{K} = \mathcal{K}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{K}^n$*) telle que les formules dans* $\mathcal{K}^i$ *ont au moins la même certitude que celles dans* $\mathcal{K}^j$ *pour* $j < i$.

- *$\mathcal{G}$ est un ensemble de formules propositionnelles construites à partir de variables d'état et représentant les buts, le but représente ce que l'on veut atteindre. La base $\mathcal{G}$ est partitionnée et stratifiée en $\mathcal{G}^1, \ldots, \mathcal{G}^n$ ($\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{G}^n$) tels que les buts dans $\mathcal{G}^i$ ont au moins la même importance que les buts dans $\mathcal{G}^j$ pour $j < i$. Un but peut être évalué par une fonction* `value` : $\mathcal{G} \longrightarrow \Re$ *qui mesure son degré de satisfaction.*
- *$\mathcal{H}$ est un ensemble de formules propositionnelles construites à partir de variables d'état et représentant les rejets, le rejet représente ce que l'on veut éviter. La base $\mathcal{H}$ est partitionnée et stratifiée en $\mathcal{H}^1, \ldots, \mathcal{H}^n$ ($\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{H}^n$) tels que les rejets dans $\mathcal{H}^i$ ont au moins la même importance que les rejets dans $\mathcal{H}^j$ pour $j < i$. Un rejet peut être évalué par une fonction* `value` : $\mathcal{H} \longrightarrow \Re$ *qui mesure son degré de dissatisfaction.*

**Exemple 53** (Exemple 44 suite)**.** *Soit un vocabulaire* `Voc` *et une théorie décisionnelle $\mathcal{T} = \langle \sigma, \mathcal{K}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \rangle$ avec :*
- `Voc` $= \{$e🌧, e🌡, e🌡, e🌧, e🌧, p🔺$_{pro}$, p⚓$^{1}_{pro}$, p⚓$^{2}_{pro}$, p🔺$_{con}$, p⚓$_{con}\}$,
- $\sigma = \{$🔺, ⚓$\}$,
- $\mathcal{K}^1 = \{$p🔺$_{pro}$, p⚓$^{1}_{pro}$, p⚓$^{2}_{pro}$, p🔺$_{con}$, p⚓$_{con}\}$, $\mathcal{K}^2 = \{$e🌡, e🌧$\}$, $\mathcal{K}^3 = \{$e🌡, e🌧$\}$ *et* $\mathcal{K}^4 = \{$e🌧$\}$,
- $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2$ *tels que :*

| $\mathcal{G}$ | *Buts* | $\mathcal{H}$ | *Rejets* |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{G}_2 = \{$⛅$\}$ | ⛅: *"Etre sec."* | $\mathcal{H}_1 = \{$●$\}$ | ● : *"Etre Jaune."* |
| $\mathcal{G}_1 = \{$✌$\}$ | ✌: *"Etre commode."* | $\mathcal{H}_2 = \{$❄$\}$ | ❄: *"Avoir froid."* |

A partir de cette théorie décisionnelle, peuvent être construits des arguments. En effet, comme le définit le cadre abstrait `DAF`, chaque option peut avoir des arguments en sa faveur (appelés pros), et des arguments en sa défaveur (appelés cons). Ainsi, un argument est toujours associé à une option, et se réfère à un but ou à un rejet. Les arguments pros témoignent de l'existence de "conséquences positives" ou de l'absence de "conséquences négatives" pour une option donnée. Une conséquence positive signifie que l'application de l'option mènera à la satisfaction d'un but ou à l'évitement d'un rejet. De même, une conséquence négative signifie que l'application de l'option mènera à manquer un but, ou à réaliser un rejet.

**Définition 72** (Arguments pros [AP09])**.** *Soit $\mathcal{T}$ une théorie décisionnelle, un argument pro en faveur d'une option $d$ peut être soit (1) un tuple $\langle S, d, g \rangle$, soit (2) un tuple $\langle S, d, h \rangle$ tel que :*
- *$S \subseteq \mathcal{K}$, $d \in \sigma$, $S \cap \{d\}$ est consistant.*

  *(1) $S \cup \{d\} \vdash g$, avec $g \in \mathcal{G}$ et $S$ minimal pour l'inclusion ensembliste parmi les sous-ensembles de $\mathcal{K}$ satisfaisant les conditions précédentes.*
-

  *(2) $S \cup \{d\} \vdash \neg h$, avec $h \in \mathcal{H}$ et $S$ minimal pour l'inclusion ensembliste parmi les sous-ensembles de $\mathcal{K}$ satisfaisant les conditions précédentes.*

*Les arguments issus de (1) appartiennent à l'ensemble $\mathcal{A}_p^+$, ceux issus de (2) à $\mathcal{A}_p^-$.*

**Exemple 54** (Exemple 44 suite)**.** *Les ensembles des arguments pros du système* `DAF`*, construits à partir de la théorie décisionnelle $\mathcal{T}$ sont les suivants :*
- $\mathcal{A}_p^+ = \{$🔺$_{pro}$, ⚓$^{1}_{pro}\}$, *avec* 🔺$_{pro} = \langle$ p🔺$_{pro}$, 🔺, ⛅$\rangle$ *et* ⚓$^{1}_{pro} = \langle$ p⚓$^{1}_{pro}$, ⚓, ⛅$\rangle$,
- $\mathcal{A}_p^- = \{$⚓$^{2}_{pro}\}$, *avec* ⚓$^{2}_{pro} = \langle$ p⚓$^{2}_{pro}$, ⚓, ¬❄$\rangle$.

Les arguments cons témoigne de l'existence "de conséquences négatives" ou "de l'évitement de conséquences positives" pour une option donnée.

**Définition 73** (Arguments cons [AP09]). *Soit $\mathcal{T}$ une théorie décisionnelle, un argument con en défaveur d'une option d peut être soit (1) un tuple $\langle S, d, h\rangle$, soit (2) un tuple $\langle S, d, g\rangle$ tel que :*

- *$S \subseteq \mathcal{K}$, $d \in \sigma$, $S \cap \{d\}$ est consistant.*

  *(1) $S \cup \{d\} \vdash h$, avec $h \in \mathcal{H}$ et $S$ minimal pour l'inclusion ensembliste parmi les sous-ensembles de $\mathcal{K}$ satisfaisant les conditions précédentes.*

-

  *(2) $S \cup \{d\} \vdash \neg g$, avec $g \in \mathcal{G}$ et $S$ minimal pour l'inclusion ensembliste parmi les sous-ensembles de $\mathcal{K}$ satisfaisant les conditions précédentes.*

*Les arguments issus de (1) appartiennent à l'ensemble $\mathcal{A}_c^-$, ceux issus de (2) à $\mathcal{A}_c^+$.*

**Exemple 55** (Exemple 44 suite). *Les ensembles des arguments cons du système* DAF*, construits à partir de la théorie décisionnelle $\mathcal{T}$, sont les suivants :*

- $\mathcal{A}_c^- = \{$⚓ $_{con}\}$, *avec* ⚓ $_{con} = \langle$ $p$⚓ $_{con}$, ⚓, ●$\rangle$,
- $\mathcal{A}_c^+ = \{$▲ $_{con}\}$, *avec* ▲ $_{con} = \langle$ $p$▲ $_{con}$, ▲, ¬✌$\rangle$.

En raison de l'asymétrie de l'esprit humain entre ce qui est rejeté et ce qui est désiré, le premier étant généralement considéré comme plus fort que le deuxième, il est supposé que les arguments de $\mathcal{A}_c^-$ sont plus forts que les arguments $\mathcal{A}_c^+$, et inversement les arguments $\mathcal{A}_p^+$ sont plus forts que les arguments $\mathcal{A}_p^-$. Dans les cadres classiques de décision, la distinction but / évitement de rejet et rejet / évitement de but n'est pas considérée. Nous sommes en effet dans le cas particulier où il y a un effet de miroir entre les objectifs et les rejets en ce sens que $g$ est un but si et seulement si $\neg\, g$ est un rejet. Par conséquent, les deux ensembles $\mathcal{A}_c^-$ et $\mathcal{A}_c^+$ coïncident. Il en est de même pour les deux ensembles de $\mathcal{A}_p^+$ et $\mathcal{A}_p^-$.

Enfin, la nature d'un argument, c'est-à-dire son caractère pro ou con une option peut varier en fonction du contexte. En effet dans l'Exemple 44, si l'argument ⚓ $_{con}$ : "Un ciré marin est généralement jaune", en défaveur de l'option ⚓ , peut être celui d'un contexte $c_K$ (enfant de 9 ans dans une cour d'école) au sens des systèmes d'argumentation contextuels, le contexte $c_M$ (marin en haute mer) l'identifiera plutôt comme un argument pro en faveur de l'option, sachant que le but de cet argument serait alors de lui préserver sa vie par une meilleure visibilité. Les contextes peuvent donc être introduits en décision argumentée pour plusieurs raisons : ils offrent des informations préférentielles contextualisées par des points de vue, ils peuvent également être identifiés en tant que critères, permettant de ce fait de capturer les méthodes de décision multi-critères classiques.

### 4.2.3 Application à la décision multi-critères

Abordée dans [AP09] et intégrée dans leur cadre de travail en décision argumentée, une première catégorie d'approche en décision multi-critères classique, sans informations préférentielles, donne la même importance à tous les critères, l'idée étant de favoriser l'option qui satisfait le plus de critères positivement (buts et évitements de rejets). Une fonction `Resultat` est introduite dans [AP09], elle retourne pour un ensemble $\mathcal{B}$ d'arguments pratiques, toutes les conséquences de ces arguments, i.e., tous les buts, évitements de rejets, rejets et évitements de buts auxquels ces arguments se réfèrent.

**Définition 74** ([AP09]). *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq\rangle$*, et $d_1$, $d_2 \in \sigma$ :*
$(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma$ *ssi* $\texttt{Resultat}(\mathcal{F}_p(d_2)) \subseteq \texttt{Resultat}(\mathcal{F}_p(d_1))$.

Soulignons que $\mathcal{F}_p(d) \subseteq \mathcal{A}_p^+ \cup \mathcal{A}_p^-$ et $\mathcal{F}_c(d) \subseteq \mathcal{A}_c^- \cup \mathcal{A}_c^+$ pour tout $d \in \sigma$.

**Exemple 56** (Exemple 44 suite)**.** *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44 et la théorie décisionnelle $\mathcal{T}$ décrite dans l'Exemple 53. En appliquant le principe de la Définition 74, on a $\trianglerighteq_\sigma = \{($☂, ▲$)\}$. Ceci s'explique par le fait qu'en plus de protéger de la pluie (Etre sec : ⁝⁝), le ciré peut protéger aussi du froid (Ne pas avoir froid : ¬❄).*

C'est l'inverse dans la Définition 75.

**Définition 75** ([AP09])**.** *Soient* DAF $= \langle \sigma, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$*, et* $d_1$*,* $d_2 \in \sigma$ *:*
$(d_1, d_2) \in \trianglerighteq_\sigma$ *ssi* $\texttt{Resultat}(\mathcal{F}_c(d_1)) \subseteq \texttt{Resultat}(\mathcal{F}_c(d_2))$*.*

**Exemple 57** (Exemple 44 suite)**.** *Soit* DAF *décrit dans l'Exemple 44 et la théorie décisionnelle $\mathcal{T}$ décrite dans l'Exemple 53. En appliquant le principe de la Définition 75, on a $\trianglerighteq_\sigma = \{\emptyset\}$. Ceci s'explique par le fait que les conséquences négatives des deux options, à savoir, "Etre jaune" :* ● *pour le ciré et "Ne pas être commode" :* ¬ ✌ *pour le parapluie, ne sont pas comparables par l'inclusion ensembliste.*

Dans la deuxième catégorie d'approche en décision multi-critères, la présence d'informations préférentielles est prise en compte. Les préférences peuvent être liées au fait que les critères n'ont pas le même niveau de certitude, d'importance et de satisfaction. Dans ce cas, le principe de promotion focus donnée dans la Définition 64, intégrant la relation de préférence $\succeq_p$ entre les arguments pratiques sceptiquement acceptés peut être utilisé dans le processus décisionnel.

Dans ce qui suit, nous rappellerons la définition de la force d'un argument pratique, comme introduite dans [AP09], permettant ainsi de générer la relation $\succeq_p$. La force d'un argument dépend de trois éléments : le niveau de certitude de la connaissance impliquée dans le support de l'argument, le degré d'importance du but ou du rejet et le degré de (dis)satisfaction associé au (rejet)but. Formellement, voici comment se définit la force d'un argument :

**Définition 76** (Force d'un argument [AP09])**.** *Soit $\mathcal{T}$ une théorie décisionnelle, et un argument $\alpha = \langle S, d, g \rangle \in \mathcal{A}_p^+$ (resp. $\alpha = \langle S, d, h \rangle \in \mathcal{A}_c^-$). La force de $\alpha$ est un triplet* $\texttt{Force}(\alpha) = (\texttt{Lev}(\alpha), \texttt{Wei}(\alpha), \texttt{Sat}(\alpha))$ *(resp.* $(\texttt{Lev}(\alpha), \texttt{Wei}(\alpha), \texttt{Dis}(\alpha))$*) tel que :*

- *Le niveau de certitude de l'argument est* $\texttt{Lev}(\alpha) = min\{i | 1 \leq i \leq n$ *t.q.* $(\mathcal{S} \cap \mathcal{K}_i) \neq \emptyset\}$*. Si* $\mathcal{S} = \emptyset$*, on a* $\texttt{Lev}(\alpha) = n$*.*
- *Le poids de l'argument est* $\texttt{Wei}(\alpha) = j$ *si* $g \in \mathcal{G}^j$ *(resp.* $h \in \mathcal{H}^j$*).*
- *La satisfaction (resp. dissatisfaction) de l'argument est* $\texttt{Sat}(\alpha) = \texttt{value}(g)$ *(resp.* $\texttt{Dis}(\alpha) = \texttt{value}(h)$*).*

Un système d'argumentation devrait contrebalancer les niveaux de satisfaction des critères par leurs importances relatives. En effet, un critère très satisfait pour une décision $d_i$ n'est pas un argument fort en faveur de $d_i$ si le critère a peu d'importance. À l'inverse, un critère mal satisfait par $d_i$ est un argument fort contre $d_i$ seulement si ce critère est très important. En outre, dans des cas d'évaluation incertaine des critères, on peut avoir une dépréciation des arguments fondée sur cette incertitude. En d'autres termes, la force d'un argument représente dans quelle mesure la décision satisfera de manière certaine les critères les plus importants.

Un type de comparaison entre arguments est possible par conjonction de ces trois éléments :

**Définition 77** (Combinaison conjonctive [AP09])**.** *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux arguments :* $(\alpha, \beta) \in \succ_p$ *iff min* $\texttt{Force}(\alpha) > min$ $\texttt{Force}(\beta)$*.*

Il existe d'autres formes de conjonction visant à privilégier un élément de la force, par exemple la certitude, et lorsque celle-ci est équivalente pour deux arguments, la préférence est dictée par

le minimum des deux autres éléments. L'utilisation de telles combinaisons conjonctives ou semi-conjonctives exige une commensurabilité des échelles pour les trois éléments. La détermination du vecteur `Force` ne rentre pas dans le cadre de nos travaux. Ainsi pour la suite des travaux, nous envisagerons seulement le poids de l'argument (notamment dans notre cas d'étude du chapitre suivant). Cependant pour rester général dans ce chapitre, et dans l'extension que nous proposons aux cadres de décision argumentée, nous continuerons à considérer la notion de force.

### 4.2.4 Cadre décisionnel étendu

A partir du modèle proposé par [AP09], nous formulons une proposition d'extension en suggérant deux pistes de réflexion, guidées par le cas d'étude du chapitre suivant concernant une politique de santé publique. Nous nous restreindrons pour cela à l'étude du comportement des arguments pratiques.

La première extension proposée, abordée dans le paragraphe 4.2.4.1, est la représentation de plusieurs points de vue, pouvant avoir des niveaux d'importance différents, sous la forme de contextes (partiellement ou totalement) pré-ordonnés. Chaque contexte (point de vue) définit ses propres préférences.

La deuxième extension proposée, abordée dans le paragraphe 4.2.4.1 puis 4.2.4.2, est un mode de détermination de conflits en termes d'attaques, et ce spécifiquement lorsque des arguments soutiennent deux actions ne pouvant être engagées de façon concomitante. Nous génèrerons ainsi des attaques lorsque ce caractère, que nous appellerons la mutuelle exclusivité, est identifié entre deux actions. Nous introduirons également la notion de spécialisation pour une action, générant par exemple pour l'argument soutenant celle-ci, une attaque non-symétrique vers l'argument soutenant une action plus générale.

#### 4.2.4.1 Intégration des préférences et des actions spécialisées

**Définition 78** (Théorie décisionnelle étendue)**.** *Une **théorie décisionnelle étendue** $\mathcal{T}_{ext}$ est un tuple tel que $\mathcal{T}_{ext} = \langle \sigma_{ext}, \mathcal{C}, \langle \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n \rangle, \langle \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n \rangle, \langle \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n \rangle \rangle$, avec :*

- *$\sigma_{ext}$ est un ensemble d'options muni de deux relations : $\perp \subseteq \sigma_{ext} \times \sigma_{ext}$ et $\angle \subseteq \sigma_{ext} \times \sigma_{ext}$ avec $\perp$ une relation symétrique telle que $(d, d') \in \perp$ signifie que $d$ et $d'$ sont des options mutuellement exclusives, et $\angle$ une relation asymétrique telle que $(d, d') \in \angle$ signifie que $d$ est une option plus spécialisée que $d'$.*
- *`Voc` est un ensemble de variables propositionnelles de deux sortes, les variables décisionnelles contrôlables et fixées par le décideur et les variables d'états fixées par la nature.*
- *$\mathcal{C}$ est un ensemble de $n$ contextes,*
- *$\mathcal{K}_i$ est une base de connaissances du contexte $c_i$, partitionnée et stratifiée en $\mathcal{K}_i^1, \ldots, \mathcal{K}_i^p$ ($\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_i^1 \cup \ldots \cup \mathcal{K}_i^p$) telle que les formules dans $\mathcal{K}_i^k$ ont au moins la même certitude que celles dans $\mathcal{K}_i^j$ pour $j < k$. La base de connaissances globale est $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} = \bigcup_i \mathcal{K}_i$.*
- *$\mathcal{G}_i$ est un ensemble de formules propositionnelles construit à partir de variables d'état et représentant les buts du contexte $c_i$, le but représente ce que l'on veut atteindre. La base $\mathcal{G}_i$ est partitionnée et stratifiée en $\mathcal{G}_i^1, \ldots, \mathcal{G}_i^p$ ($\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i^1 \cup \ldots \cup \mathcal{G}_i^p$) tel que les buts dans $\mathcal{G}_i^k$ ont au moins la même importance que les buts dans $\mathcal{G}_i^j$ pour $j < k$. La base de buts globale est $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{G}_i$. Un but peut être évalué par une fonction `value` : $\mathcal{G} \longrightarrow \Re$.*
- *$\mathcal{H}_i$ est un ensemble de formules propositionnelles construit à partir de variables d'état et représentant les rejets, le rejet représente ce que l'on veut éviter. La base $\mathcal{H}_i$ est partitionnée et stratifiée en $\mathcal{H}_i^1, \ldots, \mathcal{H}_i^p$ ($\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^1 \cup \ldots \cup \mathcal{H}_i^p$) tel que les rejets dans $\mathcal{H}_i^k$ ont au moins*

*la même importance que les rejets dans $\mathcal{H}_i^j$ pour $j < k$. La base de rejets globale est $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{H} = \bigcup_i \mathcal{H}_i$. Un rejet peut être évalué par une fonction* `value` $: \mathcal{H} \longrightarrow \Re$.

Dans un premier temps, nous illustrerons ce modèle sur un seul contexte, de façon à présenter en détail le phénomène d'attaque à partir d'actions mutuellement exclusives ou spécialisées. C'est pour cela que l'indice contextuel n'apparaît pas dans l'exemple suivant.

**Exemple 58.** *(Exemple 44 Suite) Soit $\mathcal{T}_{ext} = \langle \sigma_{ext}, \mathcal{C}, \langle \mathcal{K} \rangle, \langle \mathcal{G} \rangle, \langle \mathcal{H} \rangle \rangle$ :*

- `Voc` $= \{$🌧, 🌂, 🌂, 🌂, 🌂, p☂ $_{pro}$, p⚓ $_{1_{pro}}$, p⚓ $_{2_{pro}}$, p☂ $_{con}$, p⚓ $_{con}$, p☂ $_{pro}\}$ *avec* p☂ $_{pro}$= *"Porter un parapluie bleu est discret."*
- $\sigma_{ext} = \{$☂, ☂, ⚓$\}$ *tel que* ☂ *signifie "Porter un parapluie bleu",* ☂ *signifie "Porter un parapluie" et* ⚓ *signifie "Porter un ciré."*
- $\perp = \{($☂, ⚓$), ($☂, ⚓$)\}$,
- $\angle = \{($☂, ☂$)\}$,
- $\mathcal{K}^1 = \{$p☂ $_{pro}$, p ☂ $_{pro}$, p⚓ $_{1_{pro}}$, p⚓ $_{2_{pro}}$, p☂ $_{con}$, p⚓ $_{con}\}$, $\mathcal{K}^2 = \{$🌂, 🌂$\}$, $\mathcal{K}^3 = \{$🌂, 🌂$\}$ *et* $\mathcal{K}^4 = \{$🌧$\}$,
- $\mathcal{G}^1 = \{$●$\}$ *avec* ● *: "Etre discret",* $\mathcal{G}^2 = \{$⁘$\}$ *avec* ⁘ *: "Etre sec",*
- $\mathcal{H}^1 = \{$●$\}$ *avec* ● *: "Etre jaune",* $\mathcal{H}^2 = \{\neg$ ✌$\}$ *avec* $\neg$ ✌ *: "Ne pas être commode."*

#### 4.2.4.2 Génération des attaques dans le système décisionnel

Si la génération d'attaque entre arguments pro en faveur d'options mutuellement exclusives semble naturelle, introduire une spécialisation au sein des actions change quelque peu le rôle des fonctions $\mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}_c$.
En effet, si un argument est en faveur d'une action, il semble naturel qu'il soit également favorable à toute action plus spécifique. De même, si argument est en défaveur d'une action il semble naturel qu'il soit également défavorable à toute action plus spécialisée. Ainsi, dans notre exemple l'argument pro en faveur du parapluie est également favorable au parapluie bleu. De même, l'argument con en défaveur du parapluie est également défavorable au parapluie bleu.

Ceci va donc également guider la génération des attaques entre les arguments dans notre système de décision à base d'arguments, à partir d'une théorie décisionnelle étendue. Prenons le cas des arguments pros et considérons les attaques, nous considérerons donc que l'argument soutenant une action plus spécifique attaque l'argument soutenant une action plus générale.

L'idée justifiant cette attaque est que l'argument "plus spécifique" dénonce l'argument plus général car insuffisamment précis. Par exemple dans le cas d'étude du chapitre suivant, un argument soutenant une hausse de la teneur en fibres pour le bénéfice-santé pourra être attaqué par un argument soutenant plus spécifiquement une hausse de la teneur en fibres solubles, les fibres insolubles pouvant s'avérer irritantes.

Ainsi, nous générerons les attaques entre arguments pratiques suivant le schéma suivant :

$\hookrightarrow$
- Deux arguments pros en faveur de deux actions mutuellement exclusives s'attaquent.
- Les arguments pros en faveur d'une action spécialisée attaquent les argument pros en faveur d'actions plus générales.

$\hookrightarrow$
- Les arguments cons en défaveur d'une action générale attaquent les arguments cons en défaveur d'actions plus spécifiques.

$\hookrightarrow$
- Deux arguments, l'un en faveur d'une action l'autre en défaveur de la même action s'attaquent de façon symétrique.

– Un argument en faveur d'une action spécialisée et un argument en défaveur d'une action plus générale s'attaquent de façon symétrique (e.g. un argument en faveur du parapluie bleu et un argument en défaveur du parapluie s'attaqueront bien mutuellement).

Le système décisionnel multi-contextuels à base d'arguments gère également des préférences contextuelles.

**Définition 79** (Sytème décisionnel multi-contextuels à base d'arguments)**.** *Soit une théorie décisionnelle étendue $\mathcal{T}_{ext}$, un* ***système décisionnel multi-contextuels à base d'arguments*** *est un tuple* $\texttt{MCDAF} = \langle \mathcal{C}, \trianglerighteq, \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle, \langle \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_n \rangle \rangle$ *où :*

- $\mathcal{C}$ *est un ensemble de $n$ contextes,*
- $\trianglerighteq \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ *est un préordre (partiel ou total),*
- $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ *(avec $\mathcal{A} = \cup_{i \in [1,n]} \mathcal{A}_i$) est un ensemble d'arguments s'exprimant dans un contexte $c_i$,*
- $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i$ *est une relation d'*attaque *telle que $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i^+ \cup \mathcal{R}_i^\pm \cup \mathcal{R}_i^-$. $\mathcal{R}_i^+$, $\mathcal{R}_i^-$ et $\mathcal{R}_i^\pm$ sont définis comme suit. Soient $\alpha$, $\beta \in \mathcal{A}_i$ associés respectivement aux options $d_\alpha$ et $d_\beta$ :*
  - $\hookrightarrow$ $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i^+$ *si $\alpha$ et $\beta$ sont deux arguments pros tels que $(d_\alpha, d_\beta) \in \perp$ ou $(d_\alpha, d_\beta) \in \angle$.*
  - $\hookrightarrow$ $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i^-$ *si $\alpha$ et $\beta$ sont deux arguments cons tels que $(d_\beta, d_\alpha) \in \angle$.*
  - $\hookrightarrow$ $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_i^\pm$ *et $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_i^\pm$ si $\alpha$ est un argument pro et $\beta$ un argument con tels que $d_\alpha = d_\beta$ ou $(d_\alpha, d_\beta) \in \angle$.*
- $\succeq_i$ *est une préférence contextuelle ($\succeq_i \subseteq \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i$) telle que $(\alpha, \beta) \in \succeq_i$ ssi min* $\texttt{Force}_i(\alpha) \geq$ *min* $\texttt{Force}_i(\beta)$.

A partir du système MCDAF, nous associerons à chaque contexte $c_i$ un système contextuel exhaustivement repareillé $\texttt{AF}_i^{er}$ de façon à générer une relation de défaite, nous permettant d'établir un statut pour chaque argument, via une extension à la Dung.

**Exemple 59** (Exemple 58 suite)**.** *Soit un système décisionnel* MCDAF*, construit à partir d'une théorie décisionnelle étendue $\mathcal{T}_{ext}$ avec les arguments suivant* $\blacktriangle_{pro} = \langle p\blacktriangle_{pro}, \blacktriangle, \ddots \rangle$, $\triangle_{pro} = \langle p\triangle_{pro}, \triangle, \bullet \rangle$, $\hat{\Downarrow}_{pro} = \langle p\hat{\Downarrow}^1_{pro}, \hat{\Downarrow}, \ddots \rangle$, $\blacktriangle_{con} = \langle p\blacktriangle_{con}, \blacktriangle, \neg \text{✌} \rangle$, $\triangle_{con} = \langle \ , p\blacktriangle_{con}, \triangle, \neg \text{✌} \rangle$, $\hat{\Downarrow}_{con} = \langle p\hat{\Downarrow}_{con}, \hat{\Downarrow}, \bullet \rangle$*. Son graphe orienté est représenté par la Figure 4.3, ainsi que le graphe orienté de son système exhaustivement repareillé associé* $\texttt{AF}_K^{er}$*.*
*Des exemples de préférences contextuelles considérées sont les suivants :* $(\blacktriangle_{pro}, \triangle_{pro}) \in \succ$ *et* $(\triangle_{con}, \blacktriangle_{con}) \in \succeq$*.*
*Le système associé possède trois extensions préférées* $\{\hat{\Downarrow}_{pro}, \triangle_{con}\}$, $\{\hat{\Downarrow}_{pro}, \blacktriangle_{con}\}$ *et* $\{\blacktriangle_{pro}, \triangle_{con}, \hat{\Downarrow}_{con}\}$*. Ce système respecte bien une consistance des extensions, comme envisagé dans l'étude menée dans le Chapitre 3.*

### 4.2.5 Principe de décision étendu

Puisque nous nous plaçons dans un cadre de décision général bipolaire (en présence d'arguments pros et cons), l'intuition serait d'utiliser un principe de décision lui-même bipolaire pour pouvoir établir des recommandations fondées en se basant sur les arguments sceptiques (lorsque ceux-ci sont uniquement pros (resp. cons), on peut éventuellement utiliser le principe unipolaire de promotion (resp. prévention) focus). Nous verrons que si ces principes sont utilisables lorsque des arguments sceptiques sont présents dans le système de décision, ils ont un comportement discutable lorsque l'ensemble des arguments sceptiques du système est vide.

L'étude d'un système contextuel exhaustivement repareillé associé à un contexte donné, abordée dans le chapitre précédent, nous informe que celui-ci respecte bien la consistance de ses

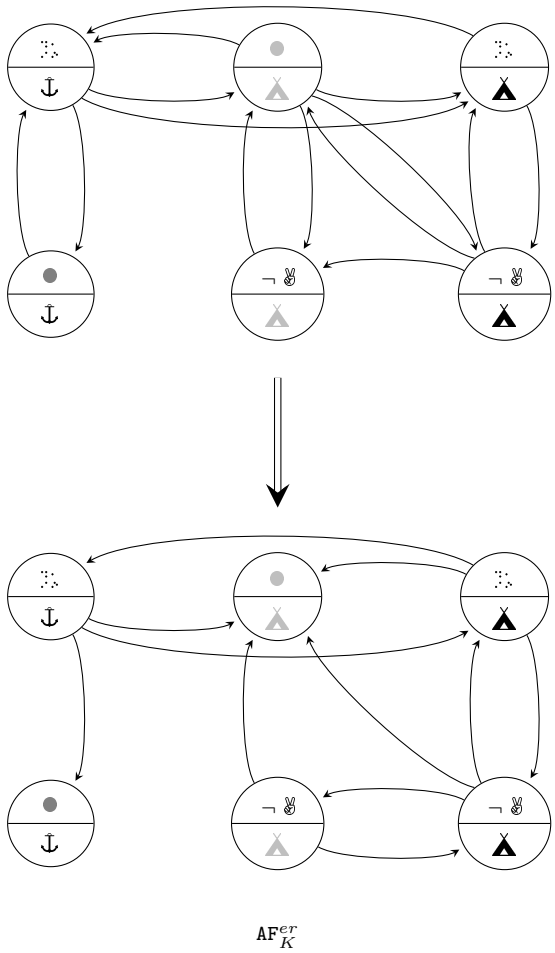



FIGURE 4.3 – Le graphe orienté MCDAF et son système associé $\mathtt{AF}_K^{er}$

extensions lorsque la relation d'attaque choisie est sensible aux conflits. Nous nous appuierons donc sur celui-ci pour établir des recommandations, en préordonnant partiellement les options.

#### 4.2.5.1 Limites du principe bipolaire de promotion et prévention focus

Supposons qu'il existe un ensemble d'arguments (en faveur ou en défaveur d'actions) possédant un statut sceptique dans un contexte $c_i$. Si on applique notre principe de décision bipolaire promotion et prévention focus, toute action $d$ promue par un argument pro de cet ensemble est préférée à toute autre $d_j$ exclusive vis-à-vis de $d$, spécialisée ou plus générale que $d$. En effet :

- Si $\exists \alpha \in \mathcal{F}_p(d) \cap \mathtt{Sce}(\mathtt{AF}_i^{er})$ alors $\nexists\ \beta \in \mathtt{Sce}(\mathtt{AF}_i^{er})$ avec $\beta \in \mathcal{F}_p(d_j)$ tel que $(d, d_j) \in \perp$ ou $\{d_j, d\} \in \angle$ ou $\{d, d_j\} \in \angle$. La première condition de la Définition 67 du principe bipolaire de promotion et prévention focus est vérifiée.
- Puisque $\alpha \in \mathcal{F}_p(d) \cap \mathtt{Sce}(\mathtt{AF}_i^{er})$ alors $\nexists \alpha' \in \mathcal{F}_c(d) \cap \mathtt{Sce}(\mathtt{AF}_i^{er})$. La deuxième condition de la Définition 67 du principe bipolaire de promotion et prévention focus est vérifiée.

En revanche, lorsque dans un contexte, il n'existe pas d'arguments avec un statut sceptique, ce principe bipolaire de promotion et prévention focus ne peut être pertinemment appliqué. Il s'agit précisément du cas de notre exemple.

Détaillons cela. Le système associé possède trois extensions préférées $\{\text{⚓}_{pro}, \text{△}_{con}\}$, $\{\text{⚓}_{pro}, \text{▲}_{con}\}$ et $\{\text{▲}_{pro}, \text{△}_{con}, , \text{⚓}_{con}\}$. Ainsi $\texttt{Sce}(\texttt{AF}) = \emptyset$, ce qui veut dire que pour le principe unipolaire de promotion focus donne $\trianglerighteq_\sigma = \{\emptyset\}$, le principe unipolaire de prévention focus donne $\trianglerighteq_\sigma = 2^{\sigma\times\sigma}$ et le principe bipolaire de prévention et promotion focus donne $\trianglerighteq_\sigma = \{\emptyset\}$. Or, si l'on considère les actions préconisées, c'est-à-dire précisément les actions soutenues par les arguments pros des extensions, on obtient :

- Pour $\{\text{⚓}_{pro}, \text{△}_{con}\}$, l'action préconisée est ⚓.
- Pour $\{\text{⚓}_{pro}, \text{▲}_{con}\}$, l'action préconisée est ⚓.
- Pour $\{\text{▲}_{pro}, \text{△}_{con}, , \text{⚓}_{con}\}$, l'action préconisée est ▲.

Ceci va à l'encontre des principes unipolaires et bipolaires de décision puisque l'action △ y est considérée tantôt comme équivalente aux autres (dans le principe de prévention focus), tantôt comme indifférente (dans le principe de promotion focus et dans le principe bipolaire de promotion et prévention focus), alors qu'elle n'est jamais préconisée par les extensions préférées.

#### 4.2.5.2 Principe unipolaire de décision statuée

Il faut donc faire un distinguo entre les arguments crédulement acceptés et les arguments rejetés (statuts abordés dans le Chapitre 1), dans le principe de décision. Pour cela nous proposons un nouveau principe unipolaire (qui ne traite plus seulement des arguments sceptiques) dans lequel nous focalisons uniquement notre démarche sur les arguments pros. Nous allons à présent détailler plusieurs contextes d'une théorie décisionnelle, et donc d'un système multi-contextuels de décision à base d'arguments, où seul des arguments pros sont considérés.

**Exemple 60** (Exemple 58 suite)**.** *Soit un théorie décisionnelle étendue :*
$\mathcal{T}_{ext} = \langle \sigma_{ext}, \langle \mathcal{K}, \mathcal{K}, \mathcal{K}\rangle, \langle \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3\rangle, \langle \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3\rangle\rangle$ *avec :*

- $\texttt{Voc} = \{e\text{☁}, e\text{☂}, e\text{☂}, e\text{☃}, e\text{☃}, p\text{▲}_{pro}, p\text{⚓}_{1\,pro}, p\text{⚓}_{2\,pro}, p\text{▲}_{con}, p\text{⚓}_{con}, p\text{△}_{pro}\}$,
- $\sigma_{ext} = \{\text{▲}, \text{△}, \text{⚓}\}$ *avec* $\perp = \{(\text{▲}, \text{⚓}), (\text{△}, \text{⚓})\}$ *et* $\angle = \{(\text{△}, \text{▲})\}$,
- $\mathcal{K} = \mathcal{K}^1, \mathcal{K}^2, \mathcal{K}^3, \mathcal{K}^4$ *avec* $\mathcal{K}^1 = \{p\text{△}_{pro}, p\text{▲}_{pro}, p\text{⚓}_{1\,pro}, p\text{⚓}_{2\,pro}, p\text{▲}_{con}, p\text{⚓}_{con}\}$, $\mathcal{K}^2 = \{e\text{☂}, e\text{☃}\}$, $\mathcal{K}^3 = \{e\text{☂}, e\text{☃}\}$ *et* $\mathcal{K}^4 = \{e\text{☁}\}$,
- $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1^1, \mathcal{G}_1^2$ *avec* $\mathcal{G}_1^1 = \{\bullet\}$ *et* $\mathcal{G}_1^2 = \{\cdots\}$,
- $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2^1, \mathcal{G}_2^2$ *avec* $\mathcal{G}_2^1 = \{\cdots\}$ *et* $\mathcal{G}_2^2 = \{\bullet\}$,
- $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_3^1$ *avec* $\mathcal{G}_3^1 = \{\bullet, \cdots\}$,
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = \{\emptyset\}$.

*Le système* MCDAF *basé sur cette théorie tel que :*
$\texttt{MCDAF} = \langle \{c_1, c_2, c_3\}, \trianglerighteq, \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_3\rangle, \langle \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_3\rangle, \langle \succeq_1, \ldots, \succeq_3\rangle\rangle$ *avec* $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \{\text{▲}_{pro}, \text{△}_{pro}, \text{⚓}_{pro}\}$ *(les arguments pro de l'Exemple 58) est représenté dans la Figure 4.4. A partir de celui-ci, on peut calculer chaque système contextuel exhaustivement repareillé* $\texttt{AF}_{eri}$ *(avec* $i \in$ *[1,3]), également représenté dans la Figure 4.4.*

*Les statuts des arguments des systèmes associés* $\texttt{AF}_i^{er}$ *sont les suivants :*

- *Pour* $\texttt{AF}_1^{er}$ *:* $\mathit{Sce}(\texttt{AF}_1^{er}) = \{\emptyset\}$, $\mathit{Cre}(\texttt{AF}_1^{er}) = \{\text{⚓}_{pro}, \text{▲}_{pro}\}$ *et* $\mathit{Rej}(\texttt{AF}_1^{er}) = \{\text{△}_{pro}\}$,
- *Pour* $\texttt{AF}_2^{er}$ *:* $\mathit{Sce}(\texttt{AF}_2^{er}) = \{\text{△}_{pro}\}$, $\mathit{Cre}(\texttt{AF}_2^{er}) = \{\emptyset\}$ *et* $\mathit{Rej}(\texttt{AF}_2^{er}) = \{\text{⚓}_{pro}, \text{▲}_{pro}\}$,
- *Pour* $\texttt{AF}_3^{er}$ *:* $\mathit{Sce}(\texttt{AF}_3^{er}) = \{\emptyset\}$, $\mathit{Cre}(\texttt{AF}_3^{er}) = \{\text{△}_{pro}, \text{⚓}_{pro}, \text{▲}_{pro}\}$ *et* $\mathit{Rej}(\texttt{AF}_3^{er}) = \{\emptyset\}$.

Nous proposons donc un principe de décision statuée, lequel préordonnera partiellement les options. On dira qu'une option $d_1$ est strictement préférée à une option $d_2$ dans le cas où tous les arguments pros en faveur de $d_1$ sont sceptiquement ou crédulement acceptés et tous les arguments pros en faveur de $d_2$ sont rejetés. On dira que deux options $d_1$ et $d_2$ sont indifférentes

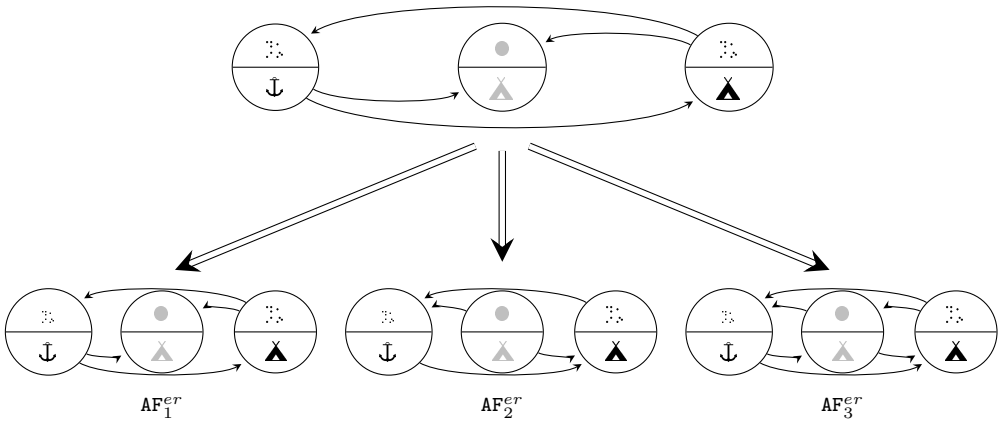



FIGURE 4.4 – Le graphe orienté du système MCDAF et ses systèmes contextuels

dans le cas où tous les arguments pros en leurs faveurs sont crédulement acceptés. Dans tous les autres cas, le principe renverra une incomparabilité entre actions.

**Définition 80** (Décision statuée)**.** *Soient* MCDAF *et* $\mathtt{AF}_i^{er}$ *un système contextuel exhaustivement repareillé associé à un contexte* $c_i$ *et* $d_1$, $d_2 \in \sigma$ *:*

- $(d_1, d_2) \in \rhd_\sigma^i$ *ssi* $\mathcal{F}_p(d_1) \subseteq \mathtt{Sce}(\mathtt{AF}_i^{er}) \cup \mathtt{Cre}(\mathtt{AF}_i^{er})$ *et* $\mathcal{F}_p(d_2) \subseteq \mathtt{Rej}(\mathtt{AF}_i^{er})$.
- $(d_1, d_2) \in \approx_\sigma^i$ *ssi* $\mathcal{F}_p(d_1) \subseteq \mathtt{Cre}(\mathtt{AF}_i^{er})$ *et* $\mathcal{F}_p(d_2) \subseteq \mathtt{Cre}(\mathtt{AF}_i^{er})$.
- $(d_1, d_2) \in \propto_\sigma^i$ *autrement.*

Ainsi, une recommandation pour le contexte $c_i$ sera l'ensemble $\{d | \forall d' \in \bigcup_j \sigma_j \setminus \{d\}$ on a $(d, d') \in \rhd_\sigma^i$ ou $(d, d') \in \approx_\sigma^i$ ou $(d, d') \in \propto_\sigma^i\}$.

**Exemple 61** (Exemple 60 suite)**.** *Le contexte* $c_1$ *recommande de porter un parapluie ou un ciré, le contexte* $c_2$ *un parapluie bleu et le contexte* $c_3$ *recommande les trois choix.*

Comme l'ensemble des arguments est le même dans chaque contexte (ce qui sera le cas dans le cadre de l'établissement des recommandations du cas d'étude présenté dans le chapitre suivant) et que les relations de préférences contextuelles préordonnent totalement ces arguments (ce qui sera aussi le cas dans le chapitre suivant), la Proposition 14 indique qu'appliquer la fusion préférentielle entre contextes (permettant par exemple de privilégier des contextes dans la recommandation) revient à traiter avec les préférences du contexte préféré (au vu de l'ordre strict entre contextes). De plus, nous ne traiterons pas par la suite avec le préordre entre contextes, car comme pour l'ordre, cela reviendrait à fusionner les contextes préférés (donc par exemple à envisager l'union de leurs préférences), donc traiter également avec un seul contexte (alors fusionné).

Notons que concomitamment à nos travaux, une autre étude [AV09a] s'est intéressée aux attaques entre arguments pratiques et à la recommandation d'option(s). Celle-ci s'appuie également sur le modèle de décision argumentée introduit dans [AP09]. La différence avec notre approche réside dans le fait, qu'il y est considéré un système dans lequel chaque option est mutuellement exclusive (pas de spécialisation) et où chacune des options est soutenue par un seul argument. La relation d'attaque entre arguments pratiques est donc faiblement complète et symétrique (au sens de l'étude de [DMA08] abordée dans le chapitre précédent). Ce cadre donne un statut à l'option : acceptable (si un argument pro en faveur de l'option est sceptiquement

accepté), négociable (si aucun argument pro en faveur de l'option n'est sceptiquement accepté, mais un argument pro en faveur de l'option est crédulement accepté), non supportée (s'il n'existe pas d'argument pro en faveur de l'option) et rejetée (si tous les arguments pros en faveur de l'option sont rejetés), permettant l'étude de la révision de ces statuts par l'entrée de nouveaux arguments. Il pourrait être intéressant de resituer les deux approches, en statuant par exemple nos options avec le principe proposé dans [AV09a].

Avant cela, il s'agit à présent d'appréhender dans quelle mesure notre modèle, qui n'a pas été encore éprouvé, convient à une situation réelle de décision à base d'arguments ? Nous proposons dans le chapitre suivant de présenter un cas d'étude issu d'une politique de santé publique menée depuis 2001 en France, visant à recommander la consommation de certains aliments. Le cas envisagé ici concerne le pain de consommation courante. Nous détaillerons à travers cet exemple les spécificités du modèle de décision argumentée, et discuterons de la pertinence de certaines contraintes précédemment introduites en situation réelle.

# 5

# Politique de Santé Publique en Alimentation

## Sommaire


**5.1 Contexte de l'étude . . . . . 80**
5.1.1 Motivation du PNNS . . . . . 80
5.1.2 Recommandations du PNNS concernant le pain . . . . . 80
5.1.3 Positionnement des parties prenantes . . . . . 82
5.1.4 Positionnement scientifique . . . . . 85
**5.2 Méthode et matériel . . . . . 85**
5.2.1 Identification et analyse des sources d'information . . . . . 86
5.2.2 Modélisation des informations disponibles en arguments structurés . . . 86
5.2.3 Transcription en système de décision argumentée . . . . . 87
**5.3 Résultats . . . . . 89**
5.3.1 Schéma global . . . . . 89
5.3.2 Arguments . . . . . 89
5.3.3 Graphe d'attaque des arguments de la préoccupation nutritionnelle . . . 92
5.3.4 Définition des audiences dans la préoccupation nutritionnelle . . . . . 92
5.3.5 Recommandations segmentées . . . . . 93


L'évaluation de la qualité alimentaire est un processus très complexe car il repose sur de nombreux critères historiquement regroupés en quatre grands types : qualité nutritionnelle, sensorielle, de service (ou de praticité) et d'hygiène. Ceux-ci peuvent être complétés par d'autres préoccupations émergentes telles l'impact environnemental, les phénomènes économiques, etc. Toutefois, tous ces aspects de la qualité et leurs différentes composantes ne sont pas toujours compatibles et leur amélioration simultanée est un problème qui parfois n'a pas de solution évidente, ce qui correspond à un véritable verrou pour la prise de décision. Le Programme National Nutrition Santé (PNNS) conduit une politique de santé publique menée par le Ministère de la santé. Il a pour objectif général d'améliorer l'état de santé de l'ensemble de la population en agissant sur l'un de ses déterminants majeurs qu'est la nutrition. Il propose ainsi une série de recommandations nutritionnelles à l'ensemble des acteurs des filières agroalimentaires et au grand public. Une de ces recommandations invite à favoriser les aliments céréaliers complets et en particulier à produire un pain de consommation courante plus complet, ce qui a suscité une polémique au sein de la filière. Le sujet de ce chapitre est de confronter le modèle d'arbitrage argumenté proposé précédemment avec ce cas d'application.

## 5.1 Contexte de l'étude

Nous présenterons successivement les motivations générales du PNNS (partie 5.1.1), les recommandations prônées par les décideurs concernant le pain de consommation courante (partie 5.1.2), les positions générales face à ces recommandations des parties prenantes de la filière céréalière (partie 5.1.3) et le positionnement de notre approche dans ce cas d'étude (partie 5.1.4).

### 5.1.1 Motivation du PNNS

Le Programme National Nutrition Santé est un programme interministériel lancé dans le discours de clôture des Etats Généraux de l'Alimentation en 2000, avec la volonté de faire face aux maladies fréquentes (maladies cardio-vasculaires, cancers, obésité, etc.) par le changement des habitudes de consommation sociétales. Le premier PNNS (2001-06) a établi un socle de repères nutritionnels. Il associe à l'objectif de santé publique les notions de goût, de plaisir et de convivialité. Ces repères, validés scientifiquement, ont été promus notamment grâce à un effort massif de communication par le biais de guides (plus de 5 millions d'exemplaires) et de campagnes de communication de grande ampleur.

Le PNNS s'est également muni d'un comité de pilotage qui réunit tous les mois des experts de santé publique, les administrations et les professionnels concernées (agroalimentaires, société civile) et constitue un petit "parlement de la nutrition" au sein duquel sont discutées toutes les initiatives.

Le deuxième Programme national nutrition santé (PNNS 2) est basé sur les recommandations du rapport que le Pr. Serge Hercberg a remis en 2006 au Ministre de la Santé et des Solidarités, à sa demande. Il intègre également les apports des travaux du Conseil national de l'alimentation (rapports de 2005 et 2006) et de l'Office parlementaire d'évaluation des politiques de santé d'octobre 2005 sur l'obésité (rapport Dériot). L'objectif du deuxième programme national nutrition santé est principalement de traduire concrètement les repères de consommation du premier PNNS, en recommandant plus finement des principes alimentaires au consommateur lambda. Une recommandation assez controversée incite les acteurs de la filière pain à concevoir et à proposer en distribution du pain plus complet qu'il ne l'est actuellement.

### 5.1.2 Recommandations du PNNS concernant le pain

Pour appréhender cette recommandation spécifique préconisée par les décideurs du PNNS, il s'agit d'abord de présenter quelques notions concernant le grain de blé (variété de blé tendre en ce qui concerne le pain), matériau premier du processus d'élaboration de la farine, ingrédient incontournable de la panification.

#### 5.1.2.1 Structure du grain de blé

Le grain de blé est un fruit sec d'un genre particulier, appelé caryopse, doté d'un sillon longitudinal formant l'axe de symétrie à partir duquel est présentée la coupe de la Figure 5.1. Une graine unique est enfermée dans la paroi du fruit ou péricarpe (1). Le tégument ou testa (2) de la graine est soudé au péricarpe. Au-dessous de la testa se trouve une couche de cellules dite couche d'aleurone (3), riche en protéines, en vitamines et en matières minérales. C'est l'ensemble de ces trois couches que l'on appelle le son.

L'enveloppe du grain de blé contient l'essentiel de la matière minérale mais aussi des fibres et des vitamines. Elle est donc nutritionnellement intéressante, bien qu'il s'agisse aussi d'un lieu

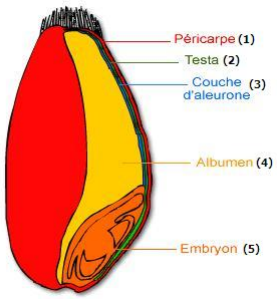



FIGURE 5.1 – Structure d'un grain de blé

privilégié pour les résidus en tout genre : champignons, mycotoxines ou encore métaux lourds.

La plus grande partie du grain est constituée par l'albumen ou amande (4), qui est le tissu de réserve de la graine. Cet albumen contient une fraction protéique (10 à 15%), le gluten potentiellement allergène, et surtout des grains d'amidon (glucides). L'amande est donc naturellement riche en amidon.

A une extrémité du grain se trouve l'embryon ou le germe (5), qui donnera la nouvelle plante lors de la germination. Cette partie du grain est également intéressante nutritionnellement.

#### 5.1.2.2 Processus de transformation du blé

Le principe général de la mouture (qui est l'action de moudre le grain pour le transformer en matériau farineux) repose sur la séparation des parties du grain de structures différentes : l'amande friable se laisse écraser facilement sans se rompre sous l'action des broyeurs. Du fait de la présence du sillon, l'enveloppe tégumentaire ne peut être retirée entièrement. Ce (faible) pourcentage résiduel détermine le taux de cendres. Les farines sont donc classées suivant leur taux de cendres qui n'est autre que la teneur en minéraux exprimée pour 100g de matière sèche. Le type d'une farine correspond en fait à un intervalle de taux de cendres. Il s'agit du critère réglementaire et commercial (Figure 5.2).

| Type | Teneur en minéraux | Dénomination courante |
|---|---|---|
| T45 | moins de 0,50 % | à pâtisserie ou fleur de farine |
| T55 | de 0,50 % à 0,60 % | raffinée |
| T65 | de 0,62 % à 0,75 % | raffinée sans additifs |
| T80 | de 0,75 % à 0,90 % | bise ou semi-complète |
| T110 | de 1,00 % à 1,20 % | complète |
| T150 | plus de 1,40 % | intégrale |

FIGURE 5.2 – Classification française des farines

Un pain de consommation courante assez répandu (grande surface, boulangerie industrielle, etc.) est le pain confectionné avec de la farine de type 65, on l'appelle également pain raffiné.

#### 5.1.2.3 Recommandations spécifiques

Parmi les actions spécifiques de promotion des repères de consommation, il est stipulé de promouvoir le repère de consommation sur les aliments céréaliers complets, particulièrement pour le pain de consommation courante :

- améliorer le pain courant en terme de qualité nutritionnelle : développer la consommation des pains fabriqués avec de la farine plus complète, par exemple de type 80 ;
- inclure le pain issu de la farine de type 80 dans le cahier des charges de la restauration collective ;
- concevoir des chartes d'engagement avec les filières professionnelles (boulangers et meuniers), les grandes enseignes de la distribution, les sociétés de restauration collective, la restauration commerciale, les municipalités et autres collectivités territoriales, les associations ;
- étudier la faisabilité d'une évolution de la réglementation sur le pain courant afin que l'indice minimal de la farine utilisée pour le pain courant soit d'au moins 65 et la teneur en sel au plus de 18g/kg de farine.

La consommation de produits céréaliers plus complets, bien que bénéfique d'un point de vue nutritionnel en raison des micro-nutriments et des fibres qu'ils fournissent, soulève la question du risque de contamination par les pesticides et autres contaminants. Faut il choisir des produits biologiques ou autres labels de confiance ? Peut-on tout sacrifier pour la sécurité et la santé avec le risque d'une sous-évaluation du plaisir sensoriel ou d'un surcoût en terme de prix ? Cela constitue un dilemme pour les consommateurs, mais également pour les acteurs de la chaîne agro-alimentaire et a fortiori les décideurs. La recommandation du PNNS, loin de faire l'unanimité dans les rangs des parties prenantes de la filière blé tendre, s'est donc heurtée aux desiderata des parties concernées.

### 5.1.3 Positionnement des parties prenantes

Différents acteurs sont impliqués dans cette recommandation : les meuniers, fabricants de la farine, les boulangers qui l'utilisent pour confectionner leur pain, les consommateurs, les organisations professionnelles, etc.

#### 5.1.3.1 Positionnement des décideurs du *PNNS*

L'argument principal de cette recommandation est nutritionnel. Le changement de type de farine ferait consommer a la fois plus de fibres, plus de vitamines et plus de minéraux.

#### 5.1.3.2 Positionnement des professionnels de la meunerie

De prime abord, les meuniers devraient être satisfaits d'accroître le taux d'extraction des farines et ainsi tirer un meilleur profit des grains qu'ils achètent car augmenter le taux d'extraction est plus simple technologiquement et plus rentable. Il y a cependant une crainte exprimée concernant le lien entre le type de farine utilisée et les aspects sensoriels du pain :

- modification de la couleur
- modification de la texture (croustillance)
- impression de satiété éprouvée par les consommateurs.

Le changement de type de farine pourrait donc entrainer une baisse de la consommation en quantité de pain pour le consommateur (moins attiré et plus rassasié) et un besoin moins

important de quantité de farine pour les boulangers. Les professionnels de la meunerie pensent donc vendre moins de farine en quantité. Les autres motifs d'inquiétude sont :

- le changement de procédé (nouvelle organisation, nouvelles connaissances, nouvelles compétences, nouveaux matériels et conditionnement) et perte d'un certain type de technicité (moins de fractionnements nécessaires) ;
- la répercussion sur le prix de revient et sur le prix de vente ;
- la réglementation phytosanitaire. Des problèmes phytosanitaires existent lorsque l'on privilégie un taux de cendres plus élevé. C'est pour cela qu'il existe des normes réglementaires telles que la teneur maximale en mycotoxines. Il peut aussi rester des résidus de pesticides, de métaux lourds au sein des parties périphériques du grain (les meuniers craignent de devoir être les garants de la bonne qualité sanitaire des nouvelles farines, plus sensibles) ;

#### 5.1.3.3 Positionnement des professionnels des industries d'aval

Les boulangers paraissent moins inquiets que les meuniers. L'augmentation de la teneur en fibres provoque une baisse de volume du pain, implique une augmentation de l'apport d'eau lors de la fabrication de la pâte (moins de farine à utiliser pour le même poids de pain). Etant donné qu'ils sont les derniers transformateurs de la filière, avant la vente du produit aux consommateurs, leur positionnement est plutôt envisagé en relation avec les attentes des clients en terme de retombées nutritionnelles et sanitaires. Ils s'inspirent donc en partie du positionnement des nutritionnistes et des professionnels de santé.

Le PNNS ne fait de recommandations que pour le pain et ne s'intéresse pas aux autres filières (biscotiers, biscuitiers, ...) pourtant elles aussi sont potentiellement concernées par ces évolutions. Un certain mécontentement des autres filières existe, principalement dû à un non-impact en termes publicitaires.

#### 5.1.3.4 Positionnement des nutritionnistes et professionnels de santé

Les professionnels de santé observent une déminéralisation chez les consommateurs de pains à base de farines dites complètes. L'augmentation du type de farine est donc directement corrélée avec une diminution de la biodisponibilité pour l'organisme des minéraux alimentaires. La biodisponibilité est la mesure de la vitesse d'absorption d'un élément par l'organisme. L'augmentation de la matière minérale dans les farines provoque une entrée de l'acide phytique. L'acide phytique est une biomolécule naturellement présente dans les graines de nombreuses céréales et légumineuses, en général sous la forme de sel de calcium ou de magnésium. Il diminue, voire inhibe, l'absorption de divers cations (Zn, Cu, Co, Mn, Ca, Fe) en formant des sels insolubles (phytates).

Une alternative est la fermentation au levain naturel, remplaçant la levure de boulangerie : Cette fermentation est lente et produit une acidité (pH<5.5) qui active des enzymes, appelées phytases, présentes dans la farine. Ces phytases dégradent l'acide phytique et libèrent ainsi les minéraux alimentaires. Cependant la phytase agit à pH acide, obligeant les boulangers à confectionner des pains acides. Une autre piste possible est l'utilisation de remoulages. Les remoulages correspondent à un mélange de particules d'enveloppes et de farine raffinée qui est broyé pour obtenir une granulométrie homogène. Leur intérêt serait de mieux maîtriser quelles particules d'enveloppe sont intégrées à la farine. En effet, les nutritionnistes ne se contentent pas d'un critère autour du taux de cendres pour recommander ou non l'utilisation d'un type de farine. Ils préfèrent une recommandation concernant le niveau de solubilité des fibres présentes dans la farine. A taux de cendres égal, les fibres présentes dans les farines peuvent être complètement

différentes. Les fibres présentes dans le péricarpe sont par exemple insolubles et irritantes. Des recherches sont menées pour privilégier l'enrichissement des pains en fibres solubles.

#### 5.1.3.5 Positionnement des consommateurs

Afin de comprendre le point de vue des consommateurs vis-à-vis d'une évolution de la réglementation concernant la farine utilisée dans le pain, une étude européenne [DSA+07] a été menée. La fréquence de consommation de différents types de pain pour un panel de consommateurs européens a été évaluée. Il en résulte que seulement 8% des personnes interrogées ne mangent pas de pain raffiné. En revanche, plus de 40% des personnes interrogées ne mangent pas de pain de seigle et 15% environ ne consomment pas de pain complet. 27% des personnes interrogées consomment du pain raffiné quotidiennement et environ 20% des participants mangent du pain complet quotidiennement. Dans tous les pays sondés, le pain raffiné est consommé plus fréquemment que les autres types de pains.

Les relations entre le niveau de consommation de pain, la perception des différents types de pains, les aspects sociaux, santé et plaisir ont également été étudiées :

- une corrélation négative entre la consommation de pain de seigle et la taille des foyers indique que les petits foyers mangent du pain de seigle plus fréquemment que les grands foyers.
- ceux qui perçoivent le pain complet comme sain et agréable mangent plus de pain de seigle, de pain multi-céréale et de pain complet et moins de pain raffiné.
- une relation similaire a été trouvée avec les fibres ajoutées aux pains dits "fonctionnels" et dans une moindre mesure, avec les pains composés de grains.

Les résultats suggèrent que le principal obstacle à la commercialisation de produits aux céréales complets ne serait pas le manque de connaissances sur la salubrité des produits aux céréales complets, mais plutôt l'image positive des produits céréaliers raffinés. Ainsi, il semble y avoir une faible motivation pour une augmentation de la consommation de produits céréaliers complets.

En outre, des résultats d'analyse par groupe démontrent l'existence d'au moins trois segments de consommateurs, qui doivent être ciblés avec des stratégies distinctes.

Le premier segment semble être la cible la plus facile pour la commercialisation des produits céréaliers complets, étant donné que ses membres perçoivent une valeur ajoutée par rapport aux produits céréaliers raffinés. Il ne semble pas particulièrement nécessaire de motiver ces consommateurs. Toutefois, certains obstacles demeurent à un niveau plus pratique, ces types d'obstacles seront notamment le prix, le goût, la commodité et la disponibilité. Développer et augmenter la disponibilité des types de produits qui répondent à ces consommateurs, à leurs habitudes ainsi qu'à leurs besoins pratiques est donc un meilleur moyen de cibler ce groupe.

Les deux autres segments sont clairement plus difficiles à cibler.

Les membres du deuxième segment ne semblent percevoir aucune valeur ajoutée des produits céréaliers complets par rapport aux produits raffinés. Ils considèrent les produits céréaliers raffinés aussi bons. Des moyens pour augmenter leur connaissance et leur compréhension sur les raisons pour lesquelles la consommation de produits céréaliers complets serait préférable devraient être conçus. Cependant, il existe probablement de nombreuses habitudes culturelles profondément enracinées (pas révélées par cette étude) qui doivent être pris en considération dans ce processus.

Le troisième segment est probablement le plus difficile à cibler. Ces consommateurs semblent ne pas se soucier des questions de santé ou d'alimentation, et ils semblent ne trouver aucune

raison à la consommation de produits céréaliers complets. Les tentatives visant à les encourager à consommer complet devrait commencer par évoquer leurs motivations et l'intérêt qu'ils ont pour la santé. Il est possible qu'une partie de ce segment peut avoir une attitude d'indifférence, caractéristique du type de personnes étant habituellement les dernières à adopter de nouvelles habitudes.

Dans cette étude, a été montré un nombre limité d'impressions ressenties sur les produits céréaliers raffinés et complets. En effet, la plupart des impressions relate la perception du critère "santé" des aliments. Cependant, le choix d'aliments céréaliers complets n'a pas besoin d'être motivée uniquement par ce critère. Une autre option serait, en effet, de les rendre attrayants pour d'autres raisons.

Puisque les consommateurs semblent être de plus en plus réceptifs à la composition des aliments qu'ils consomment, de nouveaux outils sont nécessaires pour répondre aux besoins émergents par l'adaptation, par l'innovation, et par l'optimisation des systèmes de décision, au sein même des filières agro-alimentaires.

### 5.1.4 Positionnement scientifique

Plusieurs méthodes ont déjà été mises en oeuvre pour traiter avec le raisonnement argumentatif de parties prenantes lors d'un débat délibératif (en particulier [MB94, Got98]) et proposées pour différentes applications. Ces méthodes se distinguent en (1) séparant les parties prenantes du problème, (2) se concentrant sur les intérêts non sur les positions, (3) inventant des options pour un gain mutuel, et (4) utilisant des critères objectifs. Dans notre cas d'étude, l'importance accordée aux différents critères impliqués varie entre les parties prenantes concernées par cette recommandation. Ainsi les experts peuvent évaluer un niveau de risque dû à un contaminant comme tout à fait acceptable en comparaison aux avantages sanitaires que celui-ci apporte (e.g. pour un produit phytosanitaire) ou en rapport avec le coût engendré par des précautions supplémentaires et leur efficacité (e.g. pour les mycotoxines), tandis que les consommateurs ne peuvent accepter un risque alimentaire, si faible soit-il.

- Quel type de représentation est le mieux adapté pour prendre en compte les points de vue des parties prenantes pouvant être contradictoires ?
- Peut-on inclure dans le modèle décisionnel différentes audiences représentant par exemple des segments de consommateurs ?
- Comment les conflits soulevés peuvent-ils être résolus afin de parvenir à des recommandations censées ?

Dans la suite de ce chapitre, il va être appliqué à ce cas d'étude le modèle décisionnel à base d'arguments proposé dans le chapitre précédent. Pour cela, les questions de modélisation soulevées sont les suivantes :

## 5.2 Méthode et matériel

Cette partie décrit les étapes successives nécessaires pour mener à bien l'étude de cas : l'identification des sources d'information disponibles (partie 5.2.1), la modélisation des arguments (partie 5.2.2) et la transcription en systèmes décisionnels argumentés (partie 5.2.3).

### 5.2.1 Identification et analyse des sources d'information

Plusieurs sources d'information ont été utilisées dans cette étude. Elles comprennent, des plus formelles aux moins formelles :

1. des articles scientifiques évalués par des pairs ;
2. des rapports techniques ou des informations publiées sur les sites Web ;
3. des conférences et réunions scientifiques autour de projets de recherche ;
4. des connaissances expertes obtenues au moyen d'entretiens.

Pour le cas d'étude considéré, concernant notamment les points de vue des parties prenantes au sujet de la recommandation du PNNS, nous avons utilisé les sources suivantes.

Les articles scientifiques que nous avons analysés incluent [BBL+08, SG07, DQ06, GLM+09]. [BBL+08] compare les différents types de farines d'un point de vue nutritionnel. [SG07] étudie le lien entre les fibres et la satiété. [DQ06, GLM+09] traitent des comportements de consommation et du consentement à payer des consommateurs, en particulier concernant la baguette française lorsque l'information concernant le niveau de fibres est fournie, sur la base expérimentale et statistique d'études de panels de consommateurs.

Nous avons également examiné des rapports techniques disponibles sur les sites web officiels concernant la politique de santé publique du PNNS [PNN10a, PNN10b], le projet européen Healthgrain sur l'amélioration de la nutrition et de la santé à travers les grains de céréales [DSA+07, HEA09], assisté à des projets et colloques français au sujet des mesures sanitaires, nutritionnelles, technologiques et organoleptiques des pains [DIN08, CAD08, AQU09, FCN09].

Enfin, plusieurs entretiens ont été menés pour recueillir les connaissances expertes du domaine, et en partie celles des spécialistes technologues de notre laboratoire.

### 5.2.2 Modélisation des informations disponibles en arguments structurés

A partir des sources d'information présentées ci-dessus, le travail de modélisation est une tâche itérative où les arguments sont d'abord recueillis en provenance des diverses parties prenantes, formalisés, puis validés par des experts de différents domaines.

Les motivations du PNNS sont d'abord considérées comme des "raisons" (pouvant être appréhendées comme des éléments d'une base de connaissances) qui justifient des arguments. La première étape de modélisation de l'argument est donc l'extraction d'une raison (notée `Raison`).

**Cas d'étude. Extraction de la raison.** *"Considérant la nutrition comme un levier déterminant pour la santé, une priorité nutritionnelle peut être d'augmenter la consommation quotidienne de glucides complexes par une hausse de la teneur en fibres dans les aliments." De cet énoncé issu de [PNN10a, PNN10b], la raison générale du Tableau 5.1 peut être extraite.*

| Raison |
|---|
| "La hausse de la teneur en fibres dans la diète est pertinente." |

Table 5.1 – Raison

Si l'argument envisagé précédemment peut être apparenté à un argument épistémique, la raison générale peut être raffinée en des raisons plus spécifiques qui soutiennent directement des actions, correspondant alors aux caractéristiques premières d'un argument pratique. Par conséquent, dans cette étude de cas, un argument est considéré comme un motif (une raison) soutenant une décision, une recommandation ou plus généralement une action (notée `Action`).

**Cas d'étude suite. Action supportée.** *"Le pain est sélectionné dans ce programme comme une source nutritionnelle de consommation quotidienne de fibres. L'augmentation du rendement de la farine (↗ R.F) se traduit par une plus forte teneur en fibres dans la farine et par conséquent dans le pain. Pour ces raisons, le PNNS envisage la possibilité d'une évolution de la législation du pain de consommation courante visant à augmenter la teneur en fibres dans le pain." De cet énoncé issu de [PNN10a, PNN10b], une raison spécifique supporte une action comme observé dans le Tableau 5.2.*

| | Raison | Action |
|---|---|---|
| 1 | "L'augmentation du rendement de la farine permet d'augmenter la teneur en fibres." | ↗ R.F |

TABLE 5.2 – Une raison supporte une action

### 5.2.3 Transcription en système de décision argumentée

Le choix acté pour le système `MCDAF` à partir d'une théorie $\mathcal{T}_{ext}$ dans le Chapitre 4 de déterminer en partie l'attaque entre arguments, à partir du caractère mutuellement exclusif des actions supportées par ceux-ci, est appliqué ici sur les arguments du cas d'étude. Pour capturer les arguments au regard des travaux des chapitres antérieurs, nous indiquons l'ensemble de toutes les actions envisagées associées à un ensemble d'arguments pouvant les supporter. Nous ne considérerons ici que des arguments pro. Détaillons de nouveaux arguments au sujet de la hausse ou la baisse du rendement de la farine (notés ↗ R.F et ↘ R.F).

| | Raison | Action |
|---|---|---|
| 1 | "L'augmentation du rendement de la farine permet d'augmenter la teneur en fibres." | ↗ R.F |
| 2 | "L'augmentation du rendement de la farine engendre des bénéfices économiques." | ↗ R.F |
| 3 | "La diminution du rendement de la farine rehausse les attributs sensoriels du pain." | ↘ R.F |
| 4 | "La diminution du rendement de la farine provoque un gain sanitaire." | ↘ R.F |

TABLE 5.3 – Arguments supportant des actions mutuellement exclusives

**Cas d'étude suite. Représentation du système.** *Les arguments du Tableau 5.3 décrivent différentes raisons soutenant des modifications dans la législation du pain de consommation courante. Le graphe d'attaque représentant le système* `MCDAF` *à partir d'une théorie décisionnelle* $\mathcal{T}_{ext}$ *où* $\sigma_{ext} = \{\nearrow R.F, \searrow R.F\}$ *avec* $\perp = \{(\nearrow R.F, \searrow R.F), (\searrow R.F, \nearrow R.F)\}$ *pour les arguments décrits dans le Tableau 5.3 est représenté dans la Figure 5.3.*
*Notons que* $\mathcal{F}_p(\nearrow R.F) = \{1, 2\}$ *et* $\mathcal{F}_p(\searrow R.F) = \{3, 4\}$.

**Cas d'étude suite. Décision.** *Dans la Figure 5.3, chaque argument se défend lui-même et les ensembles d'arguments supportant la même option sont sans-conflit. Il y a deux extensions préférées {1, 2} et {3, 4}.*

Comme le montre l'exemple discuté précédemment, lorsque plusieurs actions mutuellement exclusives sont soutenues par des arguments issus d'un système, les arguments y sont crédulement acceptés. Pour passer outre cette constatation, et comme nous l'avions présenté dans le Chapitre 2, des extensions au cadre de Dung intégrant des préférences ont été proposées dans

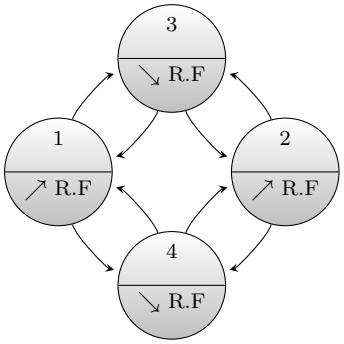



FIGURE 5.3 – Graphe orienté de MCDAF

la littérature, notamment celles où les arguments sont supposés avoir différentes forces (contextuelles) : [AC02, APP00], ou différentes valeurs prioritaires : [BC03, KvdT08]. Nous avions unifié ceux-ci pour intégrer un système d'argumentation multi-contextuels dans le cadre décisionnel. Ainsi, les arguments vont promouvoir un but et soutenir une action potentiellement spécialisée comme les arguments pratiques définis dans le chapitre précédent. Les arguments capturés tiennent compte des :

- Parties prenantes et des préoccupations (notés `P.Pren` et `Preoccup(s)`) ;
- Raisons (notées `Raison`) qui sont des éléments d'une base de connaissances ;
- Buts (notés `But(s)`) promus par les arguments, ayant un impact positif (par exemple une hausse de composant notée ↗, soit une baisse de composant notée ↘) ;
- Actions spécialisées notées "`Action` & `Specialisation`".

Ce type de formalisation d'arguments pratiques (détaillée dans la partie 5.3) est illustrée par un argument qui a été avancé par le PNNS lors de sa campagne initiale, visant à promouvoir l'objectif de type nutritionnel.

| | P. Pren. | Raison | Action | Préoccup.(s) | But(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | PNNS | "Réduire la consommation moyenne de chlorure de sodium (sel) est pertinente." | ↗ R.F & S | Nutrition | ↘ Sel |

TABLE 5.4 – Un argument pratique

**Cas d'étude suite. Arguments raffinés.** *Dans le Tableau 5.4, un argument de PNNS donne une raison de soutenir un pain sans sel, une action notée "↗ R.F & S."($\mathcal{F}_p$(↗ R.F & S.) = {PNNS 0[9]}). L'action "↗ R.F & S." est considérée comme une spécialisation de l'action ↗ R.F dans la théorie décisionnelle étendue $\mathcal{T}_{ext}$ ($\angle$ = {(↗ R.F & S., ↗ R.F)}, $\perp$ = {(↗ R.F, ↘ R.F), (↘ R.F, ↗ R.F), (↗ R.F & S., ↘ R.F), (↘ R.F, ↗ R.F & S.)}). Rappelons que dans le système* `MCDAF` *construit à partir de cette théorie $\mathcal{T}_{ext}$, cet argument attaque tout argument soutenant une action strictement plus générale ou exclusive (cette relation d'attaque n'est pas symétrique). Le graphe d'attaque de ce système* `MCDAF` *est représenté dans la Figure 5.4.*

Notons que si dans l'exemple précédent l'importance des buts n'est pas prise en compte pour générer le système associé à un contexte du système `MCDAF` à partir d'une théorie décisionnelle

9. Pour la suite du chapitre, l'identifiant d'un argument correspondra au nom de la partie prenante concernée associé au numéro de l'argument figurant dans le tableau.

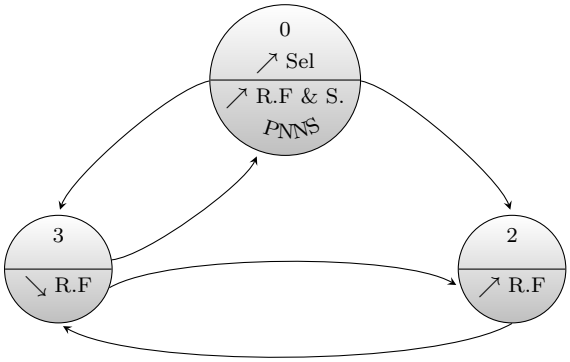



FIGURE 5.4 – Graphe orienté avec attaques non-symétriques

étendue $\mathcal{T}_{ext}$, cette importance sera contextuelle par la suite, comme le suggère le modèle proposé dans le Chapitre 4, et propre à ce que nous nommerons une audience, correspondant à un segment de consommateurs.

## 5.3 Résultats

Les arguments, en réponse à la recommandation du PNNS sont décrits dans la partie 5.3.2. Des audiences représentatives de certains segments de consommateurs sont détaillées dans la partie 5.3.4, celles-ci ne sont autres que les contextes de notre théorie décisionnelle étendue et de notre système décisionnel à base d'arguments `MCDAF` envisagé dans la partie 5.3.3, lequel nous permettra donc d'établir des recommandations segmentées envisagées dans la partie 5.3.5. Le schéma global de cette approche est résumé dans la partie 5.3.1.

### 5.3.1 Schéma global

Pour utiliser le modèle proposé, les étapes suivantes doivent être réalisées successivement :

1. Obtenir une représentation de tous les arguments, des buts promus, des actions soutenues et des attaques par le graphe d'attaque d'un système `MCDAF` à partir d'une théorie décisionnelle étendue $\mathcal{T}_{ext}$, ainsi que des parties prenantes et des préoccupations associées.
2. Définir l'audience, i.e., les publics ciblés par les arguments, e.g. des cartographies de consommateurs. Ainsi les audiences engendrent une priorité entre buts pour différents contextes.
3. Générer les relations de préférence entre arguments en rapport avec ces priorités dans le système `MCDAF`. Les préférences entre arguments seront donc définies à partir de l'importance des buts.
4. Définir la relation de défaite entre arguments des systèmes contextuels associés à `MCDAF`.
5. Résoudre le système, ce qui conduit à recommander une ou plusieurs actions, voire à comparer toutes les paires d'actions pour un segment de consommateurs (pour une audience).

### 5.3.2 Arguments

Deux options qui s'excluent mutuellement peuvent être caractérisées : passer à l'utilisation de la farine de type 80 (option notée $\curvearrowright T80$) ou conserver celle de type 65 (option notée $\circlearrowleft T65$)

pour le pain de consommation courante. Dans le Tableau 5.5, sont listés les arguments des décideurs engagés dans la politique de santé publique (`P.Pren` = PNNS), lesquels ont diverses préoccupations (`Preoccup(s)` = Nutrition, Economie), et tentent de promouvoir plusieurs buts [10] (`But(s)` = $\nearrow$ Fibres, $\nearrow$ Oligo-éléments, $\searrow$ Coûts) mais ne soutiennent qu'une seule option (`Option` = $\curvearrowright T80$).

| | P. Pren. | Raison | Option | Préoccup.(s) | But(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | PNNS | "L'utilisation d'une farine T80 à la place d'une farine T65 pour la panification est pertinente." | $\curvearrowright$ T80 | Nutrition | $\nearrow$ Fibres<br>$\nearrow$ Oligo-éléments (o.e.) |
| 2 | PNNS | "La T80 réduit les coûts de fabrication en raison d'un meilleur rendement." | $\curvearrowright$ T80 | Economie | $\searrow$ Coûts |
| 3 | PNNS | "Une diète riche en fibres réduit les coûts de santé publique." | $\curvearrowright$ T80 | Economie | $\searrow$ Coûts |

TABLE 5.5 – L'argumentation du PNNS

Ces arguments sont confrontés aux points de vue des autres parties prenantes concernées par la transformation du blé. Notons en premier lieu, les boulangers et les meuniers qui sont inquiets au sujet d'éventuels impacts quant à leur coeur d'activité. La meunerie française fait pression pour un réexamen de ces recommandations. Un rapport scientifique d'enquête sur les impacts nutritionnels de la farine de type 80 par rapport aux autres farines du marché a été utilisé pour répondre aux décideurs du PNNS. Dans le Tableau 5.6, sont listés les arguments des professionnels de la meunerie (`P.Pren` = Meuniers), au sujet des mêmes préoccupations que le PNNS, et tentant de promouvoir d'autres buts (`But(s)` = $\nearrow$ Offre segmentée, $\nearrow$ Technicité) et soutenant l'option conservatrice (`Action` = $\circlearrowleft T65$) voire une remise en cause de la pertinence de la recommandation, à l'aide par exemple d'un autre indicateur plus représentatif que ne l'est la teneur en cendres (`Option` = $\curvearrowright$ I. (I. signifie Indicateur)), qui peut donc être vu comme conflictuel avec les deux actions : $\circlearrowleft T65$ et $\curvearrowright$ T80.

| | P. Pren. | Raison | Option | Préoccup.(s) | But(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Meuniers | "Ne pas prescrire un type de farine unique." | $\circlearrowleft$ T65 | Economie | $\nearrow$ Offre segmentée |
| 2 | Meuniers | "Les compositions des farines T65 et T80 ne sont pas significativement différentes excepté pour les fibres." | $\circlearrowleft$ T65 | Nutrition | $\nearrow$ Oligo-éléments |
| 3 | Meuniers | "La teneur en cendres n'est pas un indicateur absolu de la teneur en fibres." | $\curvearrowright$ I. | Technologie | $\nearrow$ Technicité |
| 4 | Meuniers | "La production de farine T80 devrait coûter plus cher en raison du mélange des farines." | $\circlearrowleft$ T65 | Economie<br>Technologie | $\searrow$ Coûts<br>$\nearrow$ Technicité |
| 5 | Meuniers | "83% des consommateurs consomment plus de pain raffiné que de pain complet au regard de leur satiété." | $\circlearrowleft$ T65 | Economie | $\nearrow$ Bénéfices |
| 6 | Meuniers | "Une hausse de la consommation journalière de pains issus de la farine T65 augmente les apports en fibres." | $\circlearrowleft$ T65 | Nutrition | $\nearrow$ Fibres<br>$\nearrow$ Oligo-éléments |

TABLE 5.6 – L'argumentation des meuniers, $1^{ere}$ partie

En réponse à cela, une partie de la raison du dernier argument est réutilisée dans un nouvel argument avancé cette fois-ci par les défenseurs des recommandations (`P.Pren` = PNNS, `But(s)` = $\searrow Sel$, `Option` = $\curvearrowright T80$) (Tableau 5.7).

Dans certains cas, le principe de précaution peut s'avérer décisif pour le processus décisionnel. Dans cette étude de cas, le risque potentiel de causer un dommage aux consommateurs par le type de pain est négligeable, mais les critères sanitaires peuvent parfois être prioritaires sur

10. On considère qu'un argument peut promouvoir plusieurs buts, en fait un tel argument peut être considéré comme un ensemble de plusieurs arguments chacun promouvant exactement un but.

| | P. Pren. | Raison | Option | Préoccup.(s) | But(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | PNNS | "Une hausse de la consommation journalière de pains issus de la farine T65 augmente les apports en sel dans la diète." | $\curvearrowright$ T80 | Nutrition | $\searrow$ Sel |

TABLE 5.7 – La réponse argumentée du PNNS

les critères nutritionnels. Dans le Tableau 5.8, sont listés d'autres arguments provenant des meuniers, prenant en compte cette dimension sanitaire (`Preoccup(s)` = Sanitaire), promouvant d'autres buts (`But(s)` = $\searrow$ Mycotoxines, $\searrow$ Résidus de pest., $\searrow$ Acide phytique) et soutenant l'option conservatrice aussi bien que des options plus spécifiques (`Option` = $\circlearrowleft$ $T65$, $\curvearrowright(T80)$ & $D.$ (D. signifie Décortiqué), $\curvearrowright(T80)$ & $B.$ (B. signifie Biologique)).

| | P. Pren. | Raison | Option | Préoccup.(s) | But(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | Meuniers | "Augmenter le taux d'extraction provoque une hausse des contaminants dans la farine." | $\circlearrowleft$ T65 | Sanitaire | $\searrow$ Mycotoxines<br>$\searrow$ Résidus de pest. |
| 8 | Meuniers | "Un pré-traitement effectué sur le blé (t.q. le décorticage) peut baisser le niveau de mycotoxines." | $\curvearrowright(T80)$ & $D.$ | Sanitaire<br>Technologie | $\searrow$ Mycotoxines<br>$\nearrow$ Technicité |
| 9 | Meuniers | "Un pré-traitement accroît les coûts." | $\circlearrowleft$ T65 | Economie | $\searrow$ Coûts |
| 10 | Meuniers | "Confectionner du pain biologique permet d'éliminer les traces de pesticides." | $\curvearrowright(T80)$ & $B.$ | Sanitaire<br>Economie | $\searrow$ Résidus de pest.<br>$\nearrow$ Offre segmentée |
| 11 | Meuniers | "Augmenter le taux d'extraction provoque une hausse d'acide phytique" | $\circlearrowleft$ T65 | Nutrition | $\searrow$ Acide phytique (A.P) |

TABLE 5.8 – L'argumentation des meuniers, $2^{nd}$ partie

Les boulangers, eux, sont soucieux d'une possible diminution des ventes engendrée par les recommandations de la politique de santé publique. La modification du goût, de la texture et de l'aspect du pain avec la farine T80 pourrait avoir un impact sur l'achat quotidien du pain par les consommateurs. Néanmoins, la sensibilisation sur l'intérêt de ce changement pourrait à contrario avoir un effet positif sur la volonté des consommateurs de payer plus cher un type de baguette française nutritionnellement préférable. Dans le Tableau 5.9, sont listés les arguments de la profession boulangère (`P.Pren` = Boulangers), qui prennent en compte certaines préoccupations du consommateur (`Preoccup(s)` = Hédonisme), promouvant d'autres buts (`But(s)` = $\nearrow$ Organoleptique, $\nearrow$ Bénéfices) et soutenant tantôt l'action conservatrice, tantôt l'action réformiste, tantôt des options spécifiques (`Option` = $\circlearrowleft$ $T65$, $\curvearrowright$ $T80$, $\curvearrowright(T80)$ & $L.$ (L. signifie Levain), $\curvearrowright(T80)$ & $T.$ (T. signifie Tradition)).

| | P. Pren. | Raison | Option | Préoccup.(s) | But(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Boulangers | "L'utilisation du levain dans la panification permet de dégrader les phytates (en raison d'un faible pH)." | $\curvearrowright(T80)$ & $L.$ | Nutrition | $\searrow$ Acide Phytique |
| 2 | Boulangers | "L'acceptabilité pour le pain T80 est un challenge ambitieux (croustillance, goût,...)." | $\circlearrowleft$ T65 | Hédonisme<br>Economie | $\nearrow$ Organoleptique<br>$\nearrow$ Offre segmentée |
| 3 | Boulangers | "L'acceptabilité pour le pain T80 requiert une adaptation des conditions de panification (fermentation traditionnelle)." | $\curvearrowright(T80)$ & $T.$ | Hédonisme<br>Technologie<br>Economie | $\nearrow$ Organoleptique<br>$\nearrow$ Technicité<br>$\nearrow$ Offre segmentée |
| 4 | Boulangers | "L'adaptation du diagramme de panification pour le pain T80 accroît les coûts de fabrication." | $\circlearrowleft$ T65 | Economie | $\searrow$ Coûts |
| 5 | Boulangers | "Les consommateurs semblent consentir à payer 12% plus cher une baguette labellisée 'source de fibres'." | $\curvearrowright$ T80 | Economie | $\nearrow$ Bénéfices |

TABLE 5.9 – L'argumentation des boulangers

### 5.3.3 Graphe d'attaque des arguments de la préoccupation nutritionnelle

En premier lieu, il semble important de ne considérer que les arguments concernant une *même* préoccupation pour aboutir à un choix d'option. Ici nous nous concentrerons sur la préoccupation nutritionnelle. Par exemple, au cours d'un processus de décision, avant d'être évalués sur une échelle commune, il n'est pas opportun de considérer ensemble un argument nutritionnel et un argument économique.

**Cas d'étude suite. Contexte nutritionnel.**
*Soit une théorie décisionnelle étendue $\mathcal{T}_{ext}$ telle que :*
- $\sigma_{ext}$ = {↺ *T65*, ↷ *T80*, ↷ *T80 & L.*},
- $\perp$ = {(↺ *T65*, ↷ *T80*), (↺ *T80*, ↷ *T65*), (↺ *T65*, ↷ *T80 & L.*), (↺ *T80 & L.*, ↷ *T65*)},
- $\angle$ = (↷ *T80 & L.*, ↷ *T80*).

*Soit un système* `MCDAF` *tel que :*
- $\mathcal{F}_p$(↺ *T65*) = {*Meuniers 2, Meuniers 6, Meuniers 11*},
- $\mathcal{F}_p$(↷ *T80*) = {*PNNS 1, PNNS 4*},
- $\mathcal{F}_p$(↷ *T80 & L.*) = {*Boulangers 1*}.

*Le graphe représentant le système* `MCDAF`*, où les attaques sont générées à partir des actions promues par les arguments pro (voir les Tableaux 5.5 à 5.9) est illustré dans la Figure 5.5.*

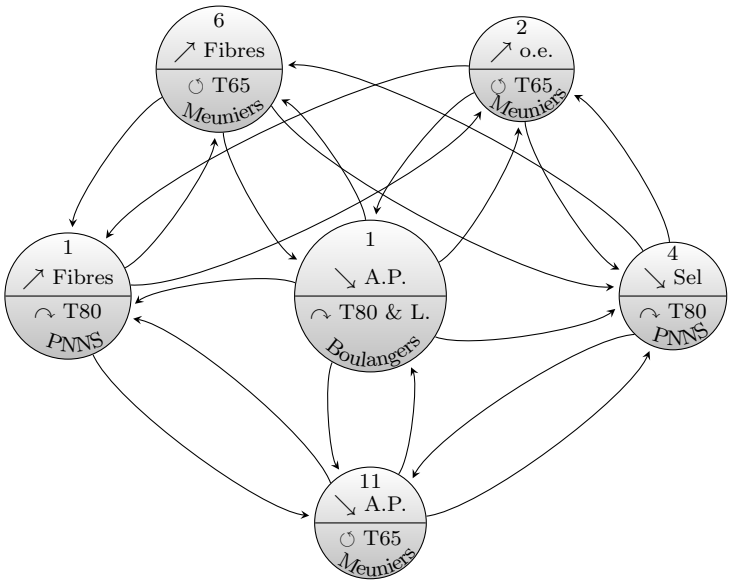



FIGURE 5.5 – Graphe orienté `MCDAF` pour la préoccupation nutritionnelle

### 5.3.4 Définition des audiences dans la préoccupation nutritionnelle

Plusieurs points de vue peuvent légitimement prétendre traiter de la même *préoccupation*. Pour une préoccupation donnée, nous proposons de considérer une audience ou un segment de consommateurs comme un type de contexte argumentatif, établissant des préférences entre les arguments exprimés à partir d'objectifs ou de buts prioritaires.

Dans la théorie décisionnelle étendue, nous représentons pour chaque audience une hiérarchisation de buts.

**Cas d'étude suite. Audiences en sortie.** *A partir d'entretiens concernant la prévention des maladies par l'alimentation, nous proposons de caractériser quatre audiences dans la préoccupation nutritionnelle. Ces audiences représentent quatre types de consommateurs : les obèses ($c_{ob}$), les personnes souffrant d'une déficience en fer ($c_{df}$), les personnes souffrant de maladies cardiovasculaires ($c_{ca}$) et les végétariens ($c_{ve}$). Ainsi, nous pouvons inclure ces quatre contextes dans notre théorie décisionnelle étendue $\mathcal{T}_{ext}$ :*

- $\mathcal{C} = \{c_{ob}, c_{df}, c_{ca}, c_{ve}\}$,
- $\langle \mathcal{G}_{ob}, \mathcal{G}_{df}, \mathcal{G}_{ca}, \mathcal{G}_{ve} \rangle$ *sont décrits ci-dessous :*

| | *Description* | *Audiences* |
|---|---|---|
| $\mathcal{G}_{ob}$ | *Obésité* | $\mathcal{G}^1_{ob} = \{\searrow$ *Sel*, $\searrow$ *A.P.*$\}$, $\mathcal{G}^2_{ob} = \{\nearrow$ *o.e.*$\}$, $\mathcal{G}^3_{ob} = \{\nearrow$ *Fibres*$\}$ |
| $\mathcal{G}_{df}$ | *Déficience en fer* | $\mathcal{G}^1_{df} = \{\searrow$ *Sel*, $\searrow$ *A.P.*$\}$, $\mathcal{G}^2_{df} = \{\nearrow$ *Fibres*$\}$, $\mathcal{G}^3_{df} = \{\nearrow$ *o.e.*$\}$ |
| $\mathcal{G}_{ca}$ | *Maladie cardiovasculaire* | $\mathcal{G}^1_{ca} = \{\nearrow$ *Fibres*, $\nearrow$ *o.e.*, $\searrow$ *A.P.*$\}$, $\mathcal{G}^2_{ca} = \{\searrow$ *Sel*$\}$ |
| $\mathcal{G}_{ve}$ | *Végétariens* | $\mathcal{G}^1_{ca} = \{\nearrow$ *Fibres*, $\nearrow$ *o.e.*, $\searrow$ *Sel*$\}$, $\mathcal{G}^2_{ca} = \{\searrow$ *A.P.*$\}$ |

### 5.3.5 Recommandations segmentées

La Figure 5.6 décrit les systèmes $\mathtt{AF}^{er}$s associés au système `MCDAF`. Pour chaque audience, le système associé donne un statut aux arguments, chacun d'eux est donc soit sceptiquement accepté (cercle gras), soit crédulement accepté (cercle plein), soit rejeté (cercle discontinu) selon la sémantique de l'extension préférée :

- Pour $\mathtt{AF}^{er}_{ob}$ : $\mathtt{Sce}(\mathtt{AF}^{er}_{ob}) = \{\emptyset\}$, $\mathtt{Cre}(\mathtt{AF}^{er}_{ob}) = \{$PNNS 1, PNNS 4, Meuniers 2, Meuniers 6, Meuniers 11$\}$ et $\mathtt{Rej}(\mathtt{AF}^{er}_{ob}) = \{$Boulangers 1$\}$,
- Pour $\mathtt{AF}^{er}_{df}$ : $\mathtt{Sce}(\mathtt{AF}^{er}_{df}) = \{\emptyset\}$, $\mathtt{Cre}(\mathtt{AF}^{er}_{df}) = \{$PNNS 1, PNNS 4, Meuniers 2, Meuniers 6, Meuniers 11$\}$ et $\mathtt{Rej}(\mathtt{AF}^{er}_{df}) = \{$Boulangers 1$\}$,
- Pour $\mathtt{AF}^{er}_{ca}$ : $\mathtt{Sce}(\mathtt{AF}^{er}_{ca}) = \{$PNNS 1, PNNS 4$\}$, $\mathtt{Cre}(\mathtt{AF}^{er}_{ca}) = \{\emptyset\}$ et $\mathtt{Rej}(\mathtt{AF}^{er}_{ca}) = \{$Boulangers 1, Meuniers 2, Meuniers 6, Meuniers 11$\}$,
- Pour $\mathtt{AF}^{er}_{ve}$ : $\mathtt{Sce}(\mathtt{AF}^{er}_{ve}) = \{\emptyset\}$, $\mathtt{Cre}(\mathtt{AF}^{er}_{ve}) = \{$Meuniers 2, Meuniers 6, Meuniers 11, Boulangers 1$\}$ et $\mathtt{Rej}(\mathtt{AF}^{er}_{ve}) = \{$PNNS 1, PNNS 4$\}$,

Par le principe unipolaire de décision statuée introduit dans le chapitre précédent, le système propose une ou plusieurs recommandation(s) (représentée(s) dans une ellipse dans la Figure 5.6) dérivée(s) d'une audience donnée.

Notons, par exemple, que l'audience exprimant une priorité pour la diminution du sel fait pencher la recommandation pour le pain T80, tandis que l'audience pour la prévention de l'acide phytique pousse à recommander un pain au levain naturel voire un pain T65. Les autres audiences poussent les recommandations vers un statu quo.

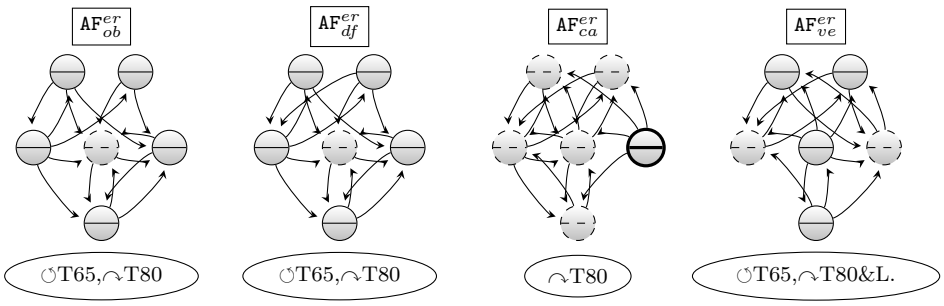



FIGURE 5.6 – Graphes orientés propres aux audiences

Comme pour toute action politique, les décideurs s'appuient systématiquement sur des arguments exprimant des préoccupations pertinentes (santé, économie, service, etc.) afin de recommander une option ayant le plus d'effets positifs pour le plus grand nombre voire pour un public ciblé. Ainsi dans le PNNS, les préoccupations sont essentiellement d'ordre "santé et nutrition", néanmoins il existe d'autres préoccupations telles que les enjeux économiques ou l'acceptabilité hédoniste des consommateurs.

Cette étude de cas représente une application originale dans le domaine de l'argumentation et une approche introspective dans le domaine de la chaîne agroalimentaire. Néanmoins, il faut d'abord une tâche de modélisation de données très coûteuse, qui ne peut être en l'état automatisée, et qui dépend fortement de la qualité de l'expertise et de l'élicitation (exhaustivité, certitude, etc.). Les tendances futures des outils d'aide à la décision impliquent de plus en plus les méthodes d'argumentation comme un moyen d'impliquer les parties prenantes dans la tâche de modélisation dans le processus décisionnel en favorisant leurs interactions.

Comme indiqué dans le présent chapitre, un tel système d'aide à la décision peut aussi être le moyen de cibler un produit alimentaire pour un utilisateur donné (et non pas pour un segment global). Cette méthode "hautement qualitative" ne peut pas être traitée par des approches conventionnelles, en particulier celles de la décision multi-critères bien que des notions telles les actions (options) ou les objectifs (critères) soient communes aux deux approches. Plusieurs analogies peuvent également être établies dans le domaine médical, où les arguments issus de différentes analyses sont utilisés pour cibler un diagnostic pour les patients. Plus généralement, l'arbitrage fondé sur l'argumentation est une approche prometteuse pour aider les humains à prendre des décisions plus "équilibrées", en tenant compte, par exemple, des trois piliers du concept de durabilité (social, environnemental et économique).

# 6

# Représentation en Graphes Conceptuels

## Sommaire


**6.1 Le formalisme des graphes conceptuels . . . . . 96**
6.1.1 Les graphes basiques . . . . . 96
6.1.2 Extensions des graphes basiques . . . . . 100
**6.2 Systèmes d'argumentation dans un modèle basé sur les GC . . . . . 108**
6.2.1 Argumentation et représentation par graphes . . . . . 108
6.2.2 De l'approche "micro" à l'approche "macro" . . . . . 109
6.2.3 Calcul des extensions avec des règles de défauts . . . . . 113


Les systèmes à base de connaissances [BLN06] ont été créés dans le but de résoudre des problèmes en s'appuyant sur des connaissances formelles relatives à un domaine donné. Pour mener à bien cela, il a donc fallu concevoir des formalismes de représentation des connaissances et de raisonnement permettant notamment de prendre en considération les aspects syntaxiques et sémantiques de ces connaissances dans le domaine considéré. Le formalisme généralement utilisé pour représenter et raisonner est celui de la logique classique, et le plus souvent en tant que fragments simplifiés pour faciliter les aspects d'acquisition des connaissances et calculatoire des raisonnements. Ainsi, une réflexion s'est entamée au cours des années 90 autour de la formalisation de la notion d'ontologie, qui philosophiquement fut introduite en tant qu'étude des propriétés générales de ce qui existe. En informatique, elle devient donc une structure formelle et explicite, Gruber [Gru93] la définissant comme une conceptualisation partagée d'un domaine donné. L'ontologie comporte ainsi au minimum un vocabulaire conceptuel, un ensemble de noms dotés d'un statut formel organisés en hiérarchie telle une taxonomie. Pour Guarino [Gua98], il ne s'agit ni plus ni moins que d'une théorie logique contrainte par le sens attendu de ce vocabulaire formel. Ainsi, on distingue classiquement deux types de connaissances : celles relatives à l'ontologie et celles décrivant une situation spécifique relative aux entités individuelles du domaine. Un modèle de représentation basé sur cette distinction paraît bien adapté aux systèmes d'argumentation. Ici, nous utiliserons donc comme support de représentation et de raisonnement le modèle des graphes conceptuels introduit par Sowa [Sow84], qui de notre avis est à même de répondre aux attentes représentationnelle des cadres de travail en argumentation. On parlera donc par la suite de support terminologique (ou vocabulaire) d'une part, et de connaissances factuelles (ou assertionnelle) d'autre part. A cela peuvent venir s'ajouter d'autres structures de connaissances qui viennent enrichir le modèle, telles des règles, des contraintes, etc. Le support

comporte au minimum des règles taxonomiques du type “si l’entité est de telle classe alors elle est aussi de telle classe”, et il peut également être accompagné de règles sémantiques plus générales, permettant l’inférence assertionnelle. L’intérêt de représenter un système d’argumentation par ce formalisme est double : de la même façon que ce dernier peut gérer l’abstraction du système en redéfinissant le cadre logique de l’acceptabilité, il peut également être un modèle adéquat pour représenter la structure interne des arguments et ainsi générer les interactions classiques introduites précédemment. Le plan de ce chapitre est donc le suivant : après avoir rappelé les notions de bas de ce formalisme, ainsi que certaines extensions qui nous seront utiles, nous y définirons la notion d’argument, pour y calculer des acceptabilités sous diverses sémantiques définies par Dung [Dun95].

## 6.1 Le formalisme des graphes conceptuels

Le formalisme des graphes conceptuels a connu de nombreuses évolutions depuis ses précurseurs, les graphes existentiels conçus par Pierce en 1931 [Pie79] en tant que “système diagrammatique de logique”. Sowa en 1984 [Sow84] s’inspire de ceux-ci pour définir le formalisme des graphes conceptuels particulièrement apprécié par le fait qu’il puisse donner une forme graphique à des expressions de la logique des prédicats du premier ordre. Si cet aspect interfaciel est pertinent pour représenter des connaissances, les problèmes de raisonnements ne sont pas pour autant nécessairement décidables, car la déduction en logique du premier ordre ne l’est pas. Des travaux du début des années 90 se sont donc attachés à définir un fragment, considéré comme la base du formalisme, les graphes basiques (BG) [MC92]. Ce noyau a été ensuite étendu à d’autres fragments décidables de la logique des prédicats, desquels sont nées de nombreuses extensions à ce modèle : règles [SM96], contraintes, vues imbriquées, ou encore défauts, toutes appelées à former la famille BG. Nous présenterons ici les définitions fondamentales du formalisme des graphes basiques, puis les notions étendues qui serviront dans la suite de ce chapitre à représenter un système d’argumentation (Voir [CM08] pour plus de précisions).

### 6.1.1 Les graphes basiques

Tout d’abord, nous présentons le modèle de base des graphes conceptuels. Nous rappelons donc que celui-ci est bien-fondé d’un point de vue logique, le raisonnement y étant correct et complet au regard de la logique du premier ordre (FOL). La connaissance ontologique y est généralement codée dans un support (également appelé vocabulaire) permettant de soutenir l’expression des graphes basiques (BG) ainsi que l’opération fondamentale de raisonnement, un homomorphisme de graphe appelé projection.

**Définition 81** (Support des graphes basiques)**.** *Le BG support est un tuple* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{T}_C, \mathcal{T}_R, \mathcal{I}, \sigma \rangle$ *tel que :*

- $\mathcal{T}_C$ *et* $\mathcal{T}_R$ *sont des ensembles finis disjoints de tpes.*
- $\mathcal{T}_C$ *est un ensemble de types de concept partiellement ordonnés par la relation* $\leq$ *dans lequel il existe un élément universel (qui est le superconcept de tous les éléments), noté* $\top$*.*
- $\mathcal{T}_R$ *est un ensemble de types de relation partiellement ordonnés par la relation* $\leq$*, et partitionné en sous-ensembles* $\mathcal{T}_R^1, \ldots, \mathcal{T}_R^k$ *de types de relation respectivement d'arité* $1, \ldots, k$*, et dans lesquels les éventuels éléments universels sont notés* $\top_1, \ldots, \top_k$*. L'arité d'une relation* $r$ *est notée* $arite(r)$*. Deux relations avec deux arités différentes ne sont pas comparables par* $\leq$*.*

- *$\mathcal{I}$ est un ensemble de marqueurs individuels qui est disjoint de $\mathcal{T}_C$ et $\mathcal{T}_R$. De plus, on note * le marqueur générique. On note l'ensemble des marqueurs $\mathcal{M} = \mathcal{I} \cup \{*\}$. Cet ensemble est muni de l'ordre partiel $\leq$ suivant : les éléments de $\mathcal{I}$ sont deux à deux incomparables, et $\forall\ m \in \mathcal{I}$, $m \leq *$. Chaque élément de $\mathcal{I}$ peut être assigné à plusieurs types ainsi qu'à tous les supertypes de ceux-ci.*
- *$\sigma$ associe à chaque relation j-aire ($r \in \mathcal{T}_R^j$) une signature c'est à dire un $j$-uplet de types de concept ($\sigma(r) \in (\mathcal{T}_C)^j$), où le $i$-ème concept est le type maximal pour le $i$-ème argument de la relation. Les signatures respectent les ordres sur $\mathcal{T}_R$ et $\mathcal{T}_C$ c'est-à-dire : $\forall\ r_1, r_2 \in \mathcal{T}_R^j$, $r_1 \leq r_2 \Rightarrow \sigma(r_1) \leq \sigma(r_2)$, i.e. pour tout $1 \leq i \leq j$, le $i$-ème argument de $\sigma(r_1)$ est plus spécifique (au sens large) que le $i$-ème argument de $\sigma(r_2)$.*

**Exemple 62.** *La Figure 6.1 décrit une partie du BG vocabulaire utilisé dans un système d'argumentation à la Dung.*

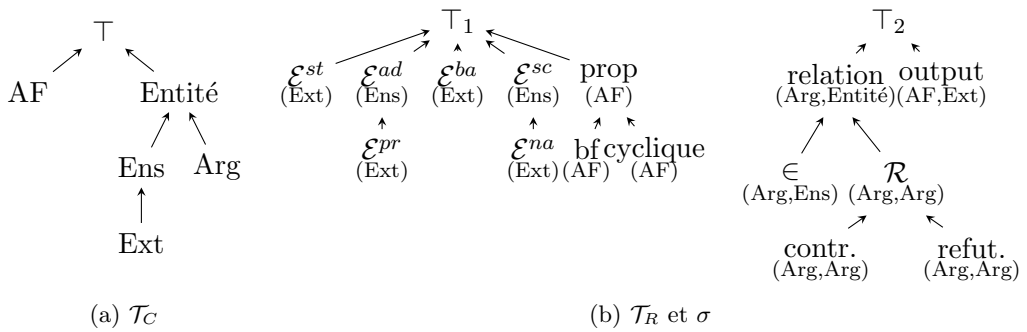



FIGURE 6.1 – Exemple graphique de vocabulaire

Un tel vocabulaire décrit des connaissances ontologiques de nature taxonomique telles que :
- "Une extension (Ext) est un ensemble (Ens)".
- "L'extension préférée ($\mathcal{E}^{pr}$) est une sorte d'extension admissible ($\mathcal{E}^{ad}$)" (ou plus précisément la propriété d'être une extension préférée est une spécialisation de la propriété d'être une extension admissible).
- "L'extension naïve ($\mathcal{E}^{pr}$) est une sorte d'ensemble sans-conflit ($\mathcal{E}^{sc}$)".
- "Le caractère bien fondé ($bf$) et cyclique sont des propriétés d'un système d'argumentation".
- "$\mathcal{R}$ est une relation (d'attaque) entre deux arguments, sa signature est $(\texttt{Arg}, \texttt{Arg})$".
- "$\in$ est une relation (d'appartenance) entre un argument et un ensemble, sa signature est $(\texttt{Arg}, Ens)$".
- "Les relations de contrariété (contr.) et de réfutation (refut.) sont des sortes de relation d'attaque (R)".

Les faits sont représentés par des graphes basiques, définis ci-dessous. Un BG permet d'asserter l'existence d'entités et de relations entre ces entités. Une entité peut être vue comme une instance d'un ou plusieurs types de concepts de $\mathcal{T}_C$, qui est soit identifiée (on lui associe un élément de $\mathcal{I}$), soit inconnue, on lui associe le marqueur générique. Ainsi, en relation avec le support, un graphe de base est défini comme suit :

**Définition 82** (Graphes basiques)**.** *Etant donné un support $\mathcal{S} = \langle \mathcal{T}_C, \mathcal{T}_R, \mathcal{I}, \sigma \rangle$, un graphe basique $G = \langle C_G, R_G, \mathcal{L}_G, \texttt{etiq}_G \rangle$ est un multigraphe biparti étiqueté tel que :*

- *$(C_G, R_G, \mathcal{L}_G)$ est un multigraphe biparti, fini et non orienté. $C_G$ est l'ensemble des noeuds concepts de $G$, $R_G$ est l'ensemble des noeuds relations de $G$, $\mathcal{L}_G$ est la famille des arêtes*[11].
- $\texttt{etiq}_G$ *est une fonction qui étiquette les noeuds et les arêtes de $(C_G, R_G, \mathcal{L}_G)$ et qui satisfait :*
  1. *Un noeud concept $c$ est étiqueté par une paire $(type(c), marqueur(c))$ où $type(c)$ est un ensemble de types*[12] *de $\mathcal{T}_C$ et $marqueur(c) \in \mathcal{I} \cup \{*\}$.*
  2. *Un noeud relation $r$ est étiqueté par $type(r) \in \mathcal{T}_R$.*
  3. *Le degré d'un noeud relation $r$ est égal à l'arité de $type(r)$.*
  4. *Les arêtes incidentes au noeud relation $r$ sont totalement ordonnées et sont étiquetées de 1 à $arite(type(r))$. On note $(r, i, c)$, une arête entre $r$ et $c$ étiquetée $i$.*

Un ordre sur les étiquettes peut être défini, il permettra de raisonner par la suite à l'aide de ces graphes. Soient deux étiquettes de sommets concept $(t, m)$ et $(t', m')$, $(t, m) \leq (t', m')$ si $m \leq m'$ (voir l'ordre sur les marqueurs dans la Définition 81) et $t \leq t'$, i.e $\forall\ t'_i \in t'$, $\exists\ t_j \in t$ avec $t_j \leq t'_i$ (si $t$ et $t'$ sont des types simples, la condition s'écrit simplement $t \leq t'$).

**Exemple 63.** *Les graphes $F$ et $T$ de la Figure 6.2 représentent des systèmes d'argumentation en tant que faits, le graphe $F$ représente le fait : "Il existe un argument qui attaque un argument qui attaque $\beta$", le graphe $T$ représente le fait : " il existe $\gamma$ un argument contrarie les arguments $\alpha, \beta, \delta$, avec $\delta$ qui contrarie l'argument $\gamma$", enfin le graphe $G$ représente le fait : "il existe un système d'argumentation qui est bien-fondé." Nous pouvons également représenter les graphes*

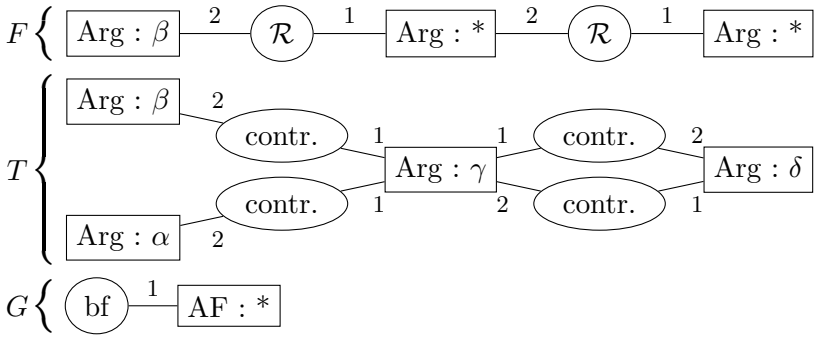



FIGURE 6.2 – Exemple de fait

*basiques comportant des relations unaires ou binaires sur une ligne d'édition, à savoir pour $G$ dans cet exemple : $[AF : *] \rightarrow (bf)$. Il peut être choisi dans certains cas de représenter les étiquettes des arêtes liées aux relations unaires et binaires par des arcs pour simuler les numéros d'arité 1 et 2, comme par exemple dans le cas d'un graphe d'attaque.*

Un graphe basique est sous forme *normale* si chacun de ses marqueurs individuels apparaît exactement une fois (autrement dit, on n'a pas deux sommets concepts qui représentent la même entité identifiée).

11. Multigraphe signifie qu'il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets. Biparti signifie que l'ensemble des sommets est partitionné en deux ensembles, ici $C_G$ et $R_G$, tels qu'il n'existe pas d'arête entre des sommets d'un même ensemble.

12. Les graphes de base définis ici sont étendus à des types de concepts conjonctifs. Pour plus de détails sur cette notion voir [CM08].

Ce formalisme de base est muni d'une sémantique en logique du premier ordre par le biais d'une transformation notée $\Phi$. Les types de concept se traduisent en prédicats unaires, les relations en prédicats de même arité, et les marqueurs individuels en constantes. L'ensemble des formules $\Phi(\mathcal{S})$ associé à un support $\mathcal{S}$ traduit naturellement les ordres partiels sur $\mathcal{T}_C$ et $\mathcal{T}_R$ (si $t_2 \leq t_1$, on a la formule $\forall\ x_1, \ldots, x_k\ (t_2(x_1, \ldots, x_k) \Rightarrow t_1(x_1, \ldots, x_k))$, où $k$ est l'arité des prédicats $t_1$ et $t_2$).

Un BG $G$ se traduit par une formule $\Phi(G)$ construite comme suit. A tout sommet concept est associé un terme, qui est la constante associée à son marqueur individuel le cas échéant, sinon une nouvelle variable. A tout sommet concept ou relation est associé un atome formé à partir du prédicat associé à son type, et du terme associé au sommet concept ou des termes associés aux entités voisines du sommet relation. Si le sommet a un type conjonctif, on obtient un tel atome par type "primitif". $\Phi(G)$ est la conjonction de ces atomes fermée existentiellement.

Dans l'Exemple 63 : $\Phi(F) = \exists x, \exists y(Arg(\beta) \wedge Arg(x) \wedge Arg(y) \wedge \mathcal{R}(x, \beta) \wedge \mathcal{R}(y, x))$ et $\Phi(G) = \exists x(AF(x) \wedge bf(x))$.
La notion fondamentale pour raisonner sur les BG est l'homomorphisme de graphes, couramment appelée "projection". Elle témoigne de la présence des connaissances encodées par un graphe dans un autre. En termes logiques, cette notion se traduit par la déduction.

**Définition 83** (Projection)**.** *Soient $F = \langle C_F, R_F, \mathcal{L}_F, \mathtt{etiq}_F \rangle$ et $T = \langle C_T, R_T, \mathcal{L}_T, \mathtt{etiq}_T \rangle$, deux graphes basiques définis sur un même support. Une projection $\Pi$ de $F$ dans $T$ est une application de $C_F$ dans $C_T$ et de $R_F$ dans $R_T$, préservant les arêtes et pouvant spécialiser les étiquettes des concepts et des relations, c'est-à-dire :*
- $\forall\ (r, i, c) \in \mathcal{L}_F$, $(\Pi(r), i, \Pi(c)) \in \mathcal{L}_T$,
- $\forall\ e \in C_F \cup R_F$, $\mathtt{etiq}_T(\Pi(e)) \leq \mathtt{etiq}_F(e)$.

*On dit alors que le graphe $F$ se projette dans le graphe $T$. On note $\Pi(F)$ l'image de $F$ dans $T$.*

La notion de projection fournit naturellement un mécanisme d'interrogation : $F$ peut être vue comme une requête, $T$ comme un fait donné, et toute projection $\Pi$ de $F$ dans $T$ fournit une réponse.

**Exemple 64.** *Dans la Figure 6.3, $F$ exprime la requête : "existe t-il un argument qui attaque un argument qui attaque l'argument $\beta$ ? (autrement dit l'argument $\beta$ est il défendu ?)". On a un homomorphisme (projection) de $F$ dans $T$. Donc l'argument $\beta$ est bien défendu.*

Un graphe basique est *irredondant* s'il ne se projette pas dans l'un de ses sous-graphes stricts. Autrement dit, il encode ses connaissances de façon minimale. Tout graphe peut être mis sous une forme irredondante qui lui est équivalente.

Le théorème suivant exprime le fait que l'opération de projection est adéquate et complète par rapport à la déduction.

**Théorème 2** (Adéquation et complétude de la projection)**.** *Soit $F$ et $T$ deux graphes basiques défini sur un support $\mathcal{S}$ avec $T$ sous forme normale. Le graphe $F$ se projette dans le graphe $T$ ssi $\Phi(\mathcal{S}), \Phi(T) \models \Phi(F)$.*

**Exemple 65.** *La Figure 6.4 représente le graphe $Q$ exprimant la requête suivante : "Existe t-il un système d'argumentation tel que les extensions de base, stable et préférée coïncident ?". Lorsque cette requête est appliquée au graphe $G$ de la Figure 6.2, celle-ci n'a pas de réponse, alors qu'intuitivement elle devrait car tout système bien fondé possède une extension de base,*

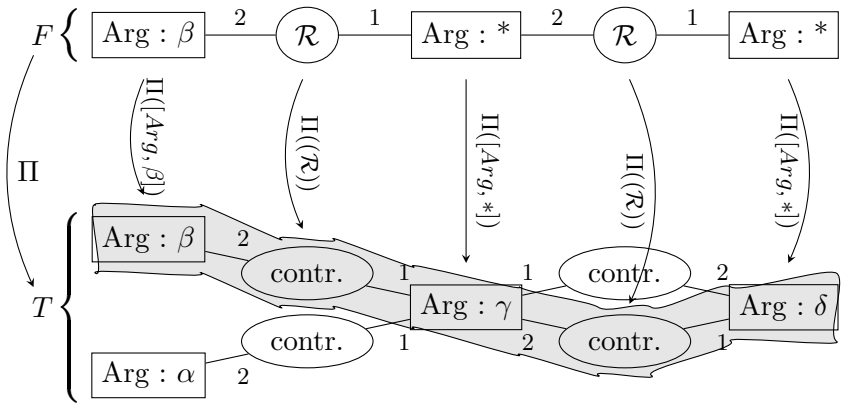



FIGURE 6.3 – Exemple de requête

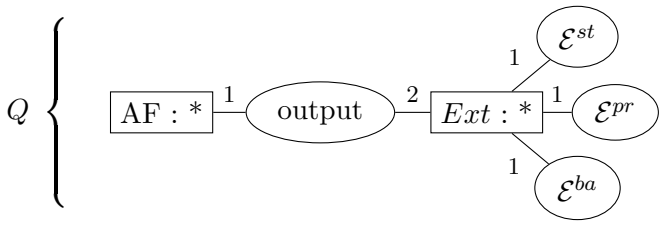



FIGURE 6.4 – Exemple de requête

*qui est à la fois stable et préférée. Ceci est dû à l'absence de certaines informations dans ce graphe.*
*Il est donc primordial pour satisfaire des requêtes de rajouter des informations de nature ontologique "en marge" du graphe. Ces informations manquantes peuvent être codées de façon générique sous forme de BG-règles.*

### 6.1.2 Extensions des graphes basiques

#### 6.1.2.1 Les BG-règles

Les règles dans le formalisme des graphes conceptuels étaient déjà présentes dans le formalisme originel [Sow84], elles ont cependant été précisément définies et munies de mécanisme fondés logiquement dans [SM96]. Celles-ci sont directement en relation avec les règles de forme déductive (à l'instar de l'induction et de l'abduction) définies par Pierce, avec comme particularité de s'imposer sur les faits ("Quand il y a un feu rouge, il faut s'arrêter"). Intuitivement, les règles représentent des connaissances de la forme " Si l'information Prémisse est présente dans le graphe, alors l'information Conclusion peut être ajoutée à ce graphe". Une BG-règle peut être représentée par un graphe basique bi-coloré, la couleur distinguant Prémisse et Conclusion.

**Définition 84** (BG-règle)**.** *Une BG-règle est un BG bicoloré où une couleur de* $\{C^P, C^C\}$ *est assignée à chaque noeud du BG tel que :*

- *Le sous-graphe P généré par les noeuds* $C^P$*-colorés est un graphe basique : on l'appelle la Prémisse de la règle.*

- *Lorsqu'un noeud relation est $C^P$-coloré alors tous ses voisins doivent aussi être $C^P$-colorés. On appelle sommet frontière tout sommet concept de la Prémisse lié à un sommet $C^C$-coloré.*
- *Le sous-graphe $C$ généré par les noeuds $C^C$-colorés et les sommets frontières est un graphe basique : on l'appelle la Conclusion de la règle.*

*Une BG-règle peut donc être également représentée comme une paire comprenant deux graphes basiques $(P, C)$ partageant éventuellement des sommets.*

Pour représenter graphiquement nos BG-règles nous utiliserons la couleur ○ comme $C^P$-couleur et la couleur ● comme $C^C$-couleur.

**Définition 85** (Application d'une BG-règle)**.** *Une BG-règle $R$ est applicable à un BG $G$ s'il existe une projection $\Pi$ de la Prémisse de $R$ dans $G$. Dans ce cas, le résultat de l'application de $R$ dans $G$ selon $\Pi$ est le BG $G' = (R, \Pi)G$ obtenu en concaténant $G$ et la Conclusion $C$ de $R$ par la fusion de tout sommet frontière $c_f$ de $C$ avec $\Pi(c_f)$. Le noeud obtenu par fusion de $c_f$ et $\Pi(c_f)$ possède la même étiquette que $\Pi(c_f)$. Une normalisation est nécessaire si $C$ comporte des sommets ayant un marqueur individuel apparaissant déjà dans $G$.*

**Exemple 66.** *La Figure 6.5 exprime la BG-règle : "si un système d'argumentation est bien-fondé alors il possède une extension préférée qui est aussi stable et de base." Une fois appliquée*

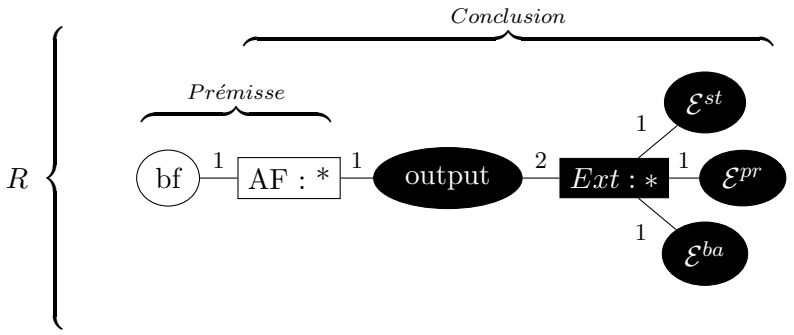



FIGURE 6.5 – Exemple de règle

*cette BG-règle au graphe $G$ de la Figure 6.2, le graphe obtenu satisfait bien la requête présentée dans l'Exemple 65.*

Soit $\mathtt{R}$ un ensemble de règles. Si $G'$ est obtenu à partir d'un BG $G$ par l'application d'une règle $R$ de $\mathtt{R}$, on dit que $G'$ est immédiatement dérivé de $(G, \mathtt{R})$. $G'$ est dit dérivé de $(G, \mathtt{R})$ s'il existe une séquence de BGs $G_0(= G)$, $G_1$, ..., $G_k(= G')$ $(k \geq 0)$ telle que tout $G_{i+1}$ $(0 \leq \mathrm{i} < k)$ est immédiatement dérivé de $(G_i, \mathtt{R})$. Une telle séquence est appelée une $\mathtt{R}$-dérivation de $G$ (où $G$ peut être un ensemble de faits, car on considère indifféremment un fait d'un ensemble de fait en graphes conceptuels).

Le mécanisme de marche avant consiste donc à effectuer des applications de règles d'un ensemble $\mathtt{R}$ sur un fait initial $G$, ce qui permet de dériver de nouveaux faits. Il s'arrête si on ne peut pas appliquer de règle en obtenant une information réellement nouvelle : le graphe obtenu serait forcément équivalent à celui qui précède. Ce processus peut ne pas s'arrêter, mais s'il s'arrête pour une séquence de dérivation, alors il s'arrête pour toutes les séquences de dérivation possibles et les graphes obtenus à la fin des séquences sont équivalents.

**Définition 86** (Problème de déduction)**.** *Le problème de déduction prend comme entrée une base de connaissances $\mathcal{K} = (\mathtt{F},\mathtt{R})$, où $\mathtt{F}$ est un ensemble de faits et $\mathtt{R}$ est un ensemble de règles, et un but BG $\mathtt{Q}$, et demande si $\mathtt{Q}$ est BG-déductible de $\mathcal{K}$, i.e. s'il existe une $\mathtt{R}$-dérivation de $\mathtt{F}$ à un BG $F'$ tel que $\mathtt{Q}$ se projette dans $F'$.*

**Théorème 3** (Adéquation et complétude de la marche avant)**.** *Soient $\mathcal{K} = (\mathtt{F},\mathtt{R})$ une base de connaissances et $\mathtt{Q}$ un BG, relatifs à un support $\mathcal{S}$.*

- ***(adéquation)*** *si $\mathtt{Q}$ est BG-déductible de $\mathcal{K}$ (i.e. il existe un BG $F'$ pouvant être dérivé de $\mathcal{K}$ tel que $\mathtt{Q}$ se projette dans $F'$) alors $\phi(\mathcal{S})$, $\phi(\mathtt{F})$, $\phi(\mathtt{R}) \models \phi(\mathtt{Q})$.*
- ***(complétude)*** *à la condition que $\mathtt{F}$ soit sous sa forme normale et que le graphe obtenu à chaque étape de dérivation soit mis sous forme normale : si $\phi(\mathcal{S})$, $\phi(\mathtt{F})$, $\phi(\mathtt{R}) \models \phi(\mathtt{Q})$ alors $\mathtt{Q}$ est BG-déductible de $\mathcal{K}$.*

#### 6.1.2.2 Les CG-contraintes négatives

Plusieurs types de contraintes peuvent être appliquées à une base de connaissances pour définir notamment sa "consistance". On dit qu'un graphe basique est consistant s'il satisfait l'ensemble des contraintes exprimées dans la base de connaissances. Il a été identifié deux types de contraintes usuellement présentes dans le raisonnement, les contraintes positives dont une sémantique intuitive serait "si l'information $A$ est présente, alors l'information $B$ doit aussi être présente" (e.g s'il y a un feu de signalisation, il est forcément coloré), et les contraintes négatives dont la sémantique serait plutôt "si l'information $A$ est présente, alors l'information $B$ ne doit pas l'être" (e.g s'il y a un feu de signalisation, il ne doit pas être éteint). Nous nous limiterons ici aux contraintes négatives, souvent utilisées comme le marqueur de l'inconsistance dans le formalisme des graphes conceptuels. On remarque qu'une contrainte négative peut être reformulée de façon équivalente comme "il ne faut pas l'information A et l'information B". Une contrainte négative sera donc simplement un BG qu'on ne doit pas trouver dans un fait consistant.

**Définition 87** (BG-contrainte négative)**.** *Une contrainte négative $C$ a la même forme qu'un BG. On dit qu'un BG $G$ satisfait une contrainte négative $C$ s'il n'existe aucune projection de $C$ dans $G$. Au contraire, un BG $G$ viole une contrainte négative $C$ s'il existe une projection de $C$ dans $G$.*

Pour représenter graphiquement les contraintes négatives nous utiliserons la couleur ●.

**Exemple 67.** *La Figure 6.6 exprime la contrainte négative : "il ne peut exister un système d'argumentation ayant comme propriété le caractère cyclique et bien-fondé."*

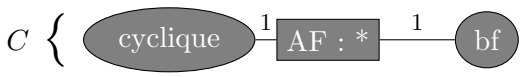



FIGURE 6.6 – Exemple de contrainte négative

**Définition 88.** *Soit une base de connaissance $\mathcal{K} = (\mathtt{F}, \mathtt{R}, \mathtt{C})$ où $\mathtt{F}$ est un ensemble de faits, $\mathtt{R}$ est un ensemble de règles et $\mathtt{C}$ est un ensemble de contraintes négatives, on dit que $\mathcal{K}$ satisfait $\mathtt{C}$ si et seulement si tout graphe $G$ $\mathtt{R}$-dérivé de $\mathtt{F}$ satisfait toute contrainte négative $C$ de $\mathtt{C}$.*

L'extension des BGs aux règles de défauts est basée à la fois sur les règles et sur les contraintes négatives, qui permettent de conditionner l'application de règles.

#### 6.1.2.3 Les BG-règles de défauts

La logique des défaut de Reiter a influencé de nombreux travaux dans le cadre de la modélisation du raisonnement humain. Par exemple, en situation de conduite, le feu orange est un feu d'arrêt du code de la route, la règle en vigueur stipule donc bien un arrêt pour le conducteur. Mais cette règle ne doit pas être considérée comme une règle classique, puisqu'elle comporte une exception (appelé également défaut) tenant compte de la distance d'arrêt nécessaire du véhicule suiveur. Récemment dans [BCFT09], ce type de raisonnement a été introduit formellement dans le modèle des graphes conceptuels.

**Définition 89** (BG-règle de défauts [BCFT09])**.** *Une BG-règle de défauts $R_d$ est un BG n+2-coloré où une couleur de $\{C^P, C^C, C^{J_1}, \ldots, C^{J_n}\}$ est assignée à chaque noeud du graphe BG tel que :*

- *Le sous-graphe $P$ généré par les noeuds $C^P$-colorés est un graphe basique noté $C^P$ : on l'appelle la Prémisse.*
- *Lorsqu'un noeud relation est $C^P$-coloré alors tous ses voisins doivent aussi être $C^P$-colorés. On appelle "sommet frontière" tout sommet concept de la Prémisse lié à un sommet hors de la Prémisse.*
- *Un sommet relation hors de la prémisse n'est lié qu'à des sommets de la même couleur ou à des sommets de $P$ (les sommets frontière).*
- *Le sous-graphe $J_i$ généré par les noeuds $C^{J_i}$-colorés et les sommets frontière est un graphe basique noté $C^{J_i}$ : on l'appelle la $i^{\text{ème}}$ Contrainte négative.*
- *Le sous-graphe $C$ généré par les noeuds $C^C$-colorés et les sommets frontière est un graphe basique noté $C^C$ : on l'appelle la Conclusion.*
- *On appelle "sommets spécifiques", les sommets concepts de $C$ communs avec un sous-graphe $J_i$.*

*Une BG-règle de défaut peut donc être également représentée comme un tuple comprenant $n+2$ graphes basiques $(P, J_1, \ldots, J_n, C)$ partageant éventuellement des sommets.*

Pour alléger la représentation de nos BG-règles de défauts, nous utiliserons comme pour les BG-règles la couleur ○ comme $C^P$-couleur, la couleur ● comme $C^C$-couleur ; et la couleur ● pour représenter une contrainte négative ; lorsque celles-ci sont au moins deux, nous utiliserons des niveaux de gris pour les distinguer entre elles.

**Exemple 68.** *La Figure 6.7 exprime la BG-règle de défauts : "Tous les systèmes d'argumentation sont bien-fondés à moins qu'ils ne soient cycliques." La prémisses est formée d'un seul sommet qui est également frontière.*

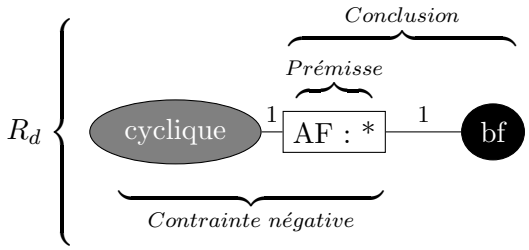



FIGURE 6.7 – Exemple de règle par défaut

La sémantique intuitive de l'application d'une règle de défauts est la suivante : "si $P$ est vérifiée et $J_1$ non violée, ..., et $J_n$ non violée alors la règle est applicable, c'est-à-dire $C$ peut être ajoutée". Il nous reste à préciser les notions de violation de contraintes et d'application de règle.

Pour simplifier la présentation de ces notions, nous supposerons sans perte de généralité que l'ensemble des faits est complètement instancié, c'est-à-dire qu'on n'a pas de sommets concepts génériques. Tout ensemble de faits peut se mettre sous cette forme en remplaçant $*$ dans chaque sommet générique par un nouveau marqueur individuel.

**Définition 90** (Application d'une BG-règle de défauts [BCFT09])**.** *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de contraintes négatives.*

- *Une règle de défauts $R_d = (P, J_1, \ldots, J_n, C)$ est applicable à un BG $G$ selon une projection $\Pi$ de $P$ dans $G$ si le graphe obtenu par application de la règle classique $(P, C)$, c'est-à-dire $((P, C), \Pi)G$, satisfait le nouvel ensemble de contraintes construit : $\mathcal{C} \bigcup_i \{\Pi(J_i)\}$ (comme décrit ci-dessous dans la phase 3)*[13].
- *Appliquer $R_d$ selon $\Pi$ consiste à :*
  1. *Calculer $((P, C), \Pi)G$.*
  2. *Instancier chaque nouveau sommet concept ayant un marqueur générique en remplaçant $*$ par un nouveau marqueur individuel (pour simplifier on crée un marqueur qui n'apparaît nulle part jusqu'ici). On note $\sigma$ cette substitution.*
  3. *Ajouter à $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{\sigma(\Pi(J_i))\}$. Autrement dit, on ajoute chaque contrainte négative de la règle à $\mathcal{C}$ après avoir lié cette contrainte à l'application de la règle en remplaçant dans chaque $J_i$ les sommets frontière (communs avec $P$) par leur image par $\Pi$ et les sommets spécifiques (communs avec $C$) par leur instanciation par $\sigma$.*

*Ainsi, pour qu'une règle soit applicable, il faut que le graphe obtenu satisfasse les contraintes de cette règle en liaison avec la projection qui guide l'application. En outre, ces contraintes doivent être vérifiées pour tous les graphes dérivés ensuite. D'où les phases 2 et 3 La phase 2 instancie les sommets ajoutés de façon à pouvoir lier les contraintes de la règle à cette application. La phase 3 instancie les contraintes de la règle et les ajoute à l'ensemble des contraintes $\mathcal{C}$.*

A partir d'une base de connaissances $\mathcal{K} = (\mathtt{F}, \Delta, \mathtt{C})$ où $\mathtt{F}$ est un ensemble de faits, $\Delta$ est un ensemble de règles de défaut et $\mathtt{C}$ est un ensemble de contraintes négatives, plusieurs faits non équivalents peuvent être inférés suivant l'ordre dans lequel ces règles sont appliquées aux éléments progressivement inférés à partir de la base, de possibles défauts pouvant apparaître interdisant l'application de certaines règles[14].

**Exemple 69.** *$\mathcal{K} = (\mathcal{F}, \Delta, \mathcal{C})$ est une base de connaissances décrite dans la Figure 6.8 telle que l'ensemble de faits $\mathcal{F}$ décrit un système d'argumentation, l'ensemble de règles de défauts $\Delta$ calcule l'appartenance d'arguments à un ensemble sans conflit et l'ensemble des contraintes négatives $\mathcal{C}$ témoigne de l'interdiction pour un argument d'appartenir à un ensemble sans-conflit dans la mesure où il s'attaque lui-même. Plus précisément, $\Delta$ comporte deux règles : la première dit qu'il existe un ensemble sans-conflit (la règle est réduite à une conclusion), la seconde dit que s'il existe un ensemble sans-conflit et un argument, alors cet argument appartient à l'ensemble sauf*

13. Ici, on applique une projection de domaine $D$ à un graphe dont l'ensemble de sommets est différent de $D$. La projection est appliquée seulement aux sommets du graphe qui appartiennent à D.

14. Les bases de connaissances avec règles de défauts ont été présentées dans [BCFT09], mélangeant des règles classiques et des règles de défauts. Dans ce manuscrit, les règles classiques ne sont pas utilisées, c'est pourquoi $\mathcal{K}$ apparaît comme un triplet et le mécanisme présenté est plus simple.

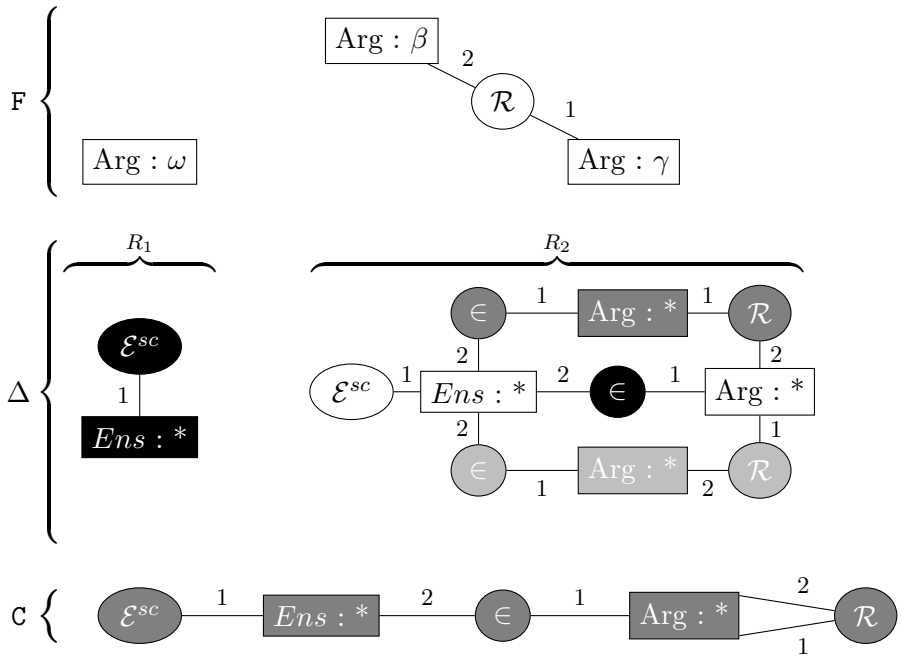



FIGURE 6.8 – Exemple de base de connaissances

*si un argument appartenant à cet ensemble l'attaque ou s'il attaque un argument appartenant à cet ensemble.*

Tous les états de faits possibles peuvent donc être représentés comme "des extensions de défauts" et générés par un arbre de dérivation.

**Définition 91** (Arbre de dérivation [BCFT09])**.** *Un arbre de dérivation (d.d.t.* [15]*) d'une base de connaissances $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, \Delta, \mathcal{C})$, noté $ddt(\mathcal{K})$, est un arbre dont les noeuds sont des couples $(N_i, C_i)$ où $N_i$ est un ensemble de faits et $C_i$ est un ensemble de contraintes négatives.*

- *La racine est $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$.*
- *Le fils d'un sommet est dérivé en appliquant une règle de défauts de l'ensemble $\Delta$ suivant la Définition 90.*
- *Les feuilles $\{F^1, \ldots, F^m\}$ sont les sommets pour lesquels aucune règle n'est plus applicable. L'ensemble des faits $E_j^\Delta$ d'une feuille $F^j$ est appelée extension de défauts. L'ensemble des contraintes $C_j^\Delta$ d'une feuille $F^j$ est appelée contraintes résultantes.*

*On note $Ext^\Delta = \{E_1^\Delta, \ldots, E_m^\Delta\}$, l'ensemble des extensions de défauts associé à l'arbre de dérivation de $\mathcal{K}$ (appelées également ensemble des extensions de défauts de $\mathcal{K}$).*

**Exemple 70.** *Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, \Delta, \mathcal{C})$, la base de connaissances décrite dans la Figure 6.8, la Figure 6.9 décrit son arbre de dérivation. Les feuilles $F^1$ et $F^2$ sont obtenues par l'application successive des règles $R_1$, $R_2$ et $R_2$ à partir de la racine représentée par l'ensemble de faits $\mathcal{F}$ et l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}$. L'application de la règle $R_1$, instancie le marqueur $*$ assigné au type Ens en tant que marqueur $m_1$. Puis la première application de la règle $R_2$ ajoute à $C_1$ soit une contrainte menant à $C_2$ rendant impossible l'appartenance à l'ensemble sans-conflit de tout*

15. d.d.t. rappelle le terme anglais default derivation tree.

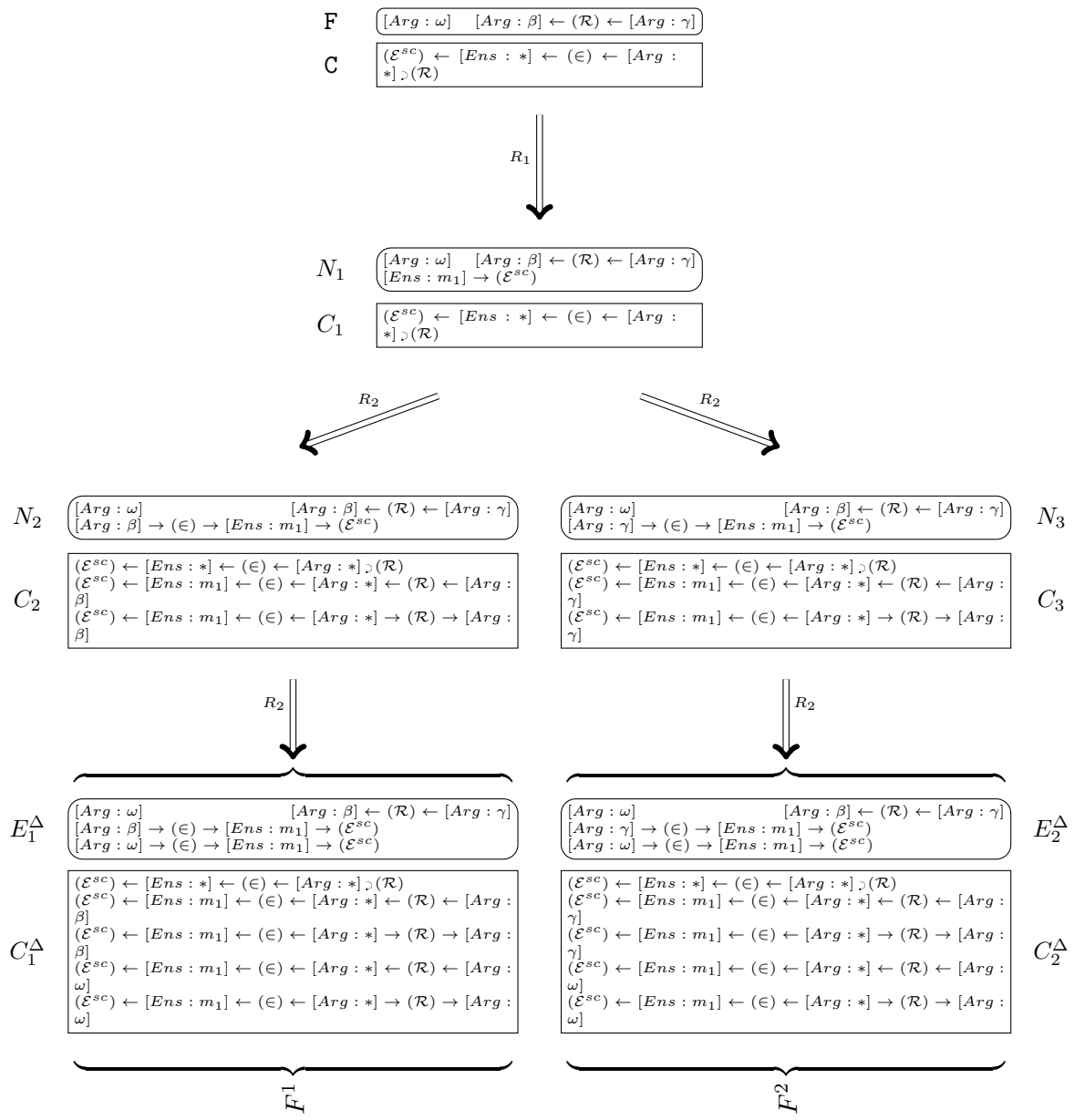



FIGURE 6.9 – Arbre de dérivation

*argument attaquant l'argument $\beta$, soit une contrainte menant à $C_3$ rendant impossible l'appartenance à l'ensemble sans-conflit de tout argument attaqué par l'argument $\gamma$. C'est donc pour cela qu'on obtient deux feuilles, comme autant d'ensembles sans-conflit maximaux. Détaillons plus précisément la première application de $R_2$ qui conduit de $(N_1, C_1)$ à $(N_2, C_2)$ : la projection $\Pi$ de la prémisse envoie $[Arg : *]$ sur $[Arg : \beta]$ et $[Ens : *]$ sur $[Ens : m_1]$, de plus $\Pi$ est appliquée également aux deux contraintes de la règle, ces applications sont rajoutées à $C_1$ (menant à $C_2$).*

Ainsi l'inférence de certains faits peut revêtir un caractère sceptique ou crédule, selon que l'on considère leur appartenance à tous ou au moins un ensemble de faits associé à une feuille de l'arbre de dérivation (c'est exactement le même principe décrit dans le Chapitre 1 pour déterminer le statut d'un argument à partir d'un ensemble d'extensions à la Dung).

#### 6.1.2.4 Les graphes emboîtés typés

Il se peut que le modélisateur ait besoin de construire une structure de graphes à base d'arbres imbriqués permettant de représenter la connaissance de façon hiérarchique afin de raisonner sur plusieurs niveaux. Ce modèle est notamment pertinent pour combiner les approches "micro" et "macro" de l'argumentation. Dans un graphe emboîté typé, un sommet concept peut être lui-même décrit par un ou plusieurs graphes, appelés emboîtements. De plus, la nature des liens qui lient le sommet à l'un de ses emboîtements (description selon un certain point de vue ou une certaine dimension, lien d'association, lien de composition méréologique, ...) est précisée par un type d'emboîtement. Tout sommet concept d'un graphe emboîté typé possède ainsi une *description*, éventuellement vide, qui est un ensemble de couples $(n_i, G_i)$, où $n_i$ est un type d'emboîtement et $G_i$ un graphe. Graphiquement, ces couples sont représentés par des boîtes à l'intérieur du sommet, étiquetées par $n_i$ et contenant le graphe $G_i$. L'exemple de la Figure 6.10 montre un sommet concept contenant un seul type d'emboîtement (composition).

**Définition 92** (Graphe emboîté typé)**.** *Formellement, on définit récursivement un graphe emboîté typé de la façon suivante :*

- *Un graphe emboîté typé $G'$ est obtenu à partir d'un graphe basique $G$ en ajoutant à chaque sommet concept $c$ un troisième champ, dénoté Desc(c), égal à ** une description vide. Ce graphe a une profondeur $depth(G') = 0$.*
- *Soient $G$ un graphe emboîté typé, et $c$ un sommet concept de $G$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des types d'emboîtement, et $G_1, \ldots, G_k$ des graphes emboîtés typés. Le graphe obtenu en substituant l'ensemble $\{(n_1, G_1), \ldots, (n_k, G_k)\}$ au troisième argument ** de $c$ est un graphe emboîté typé $G'$ avec les caractéristiques suivantes $depth(G') = max(1+ max_{i=1}^{k}\ depth(G_i), depth(G))$.*

**Exemple 71.** *La figure 6.10 décrit un graphe emboîté typé de profondeur 1 représentant l'assertion : "il existe un système d'argumentation bien-fondé tel que l'extension préférée, stable et de base coïncident qui est composé de trois arguments $\beta, \gamma, \delta$ tels que l'argument $\beta$ est attaqué par un argument $\gamma$, lui même attaqué par un argument $\delta$."*

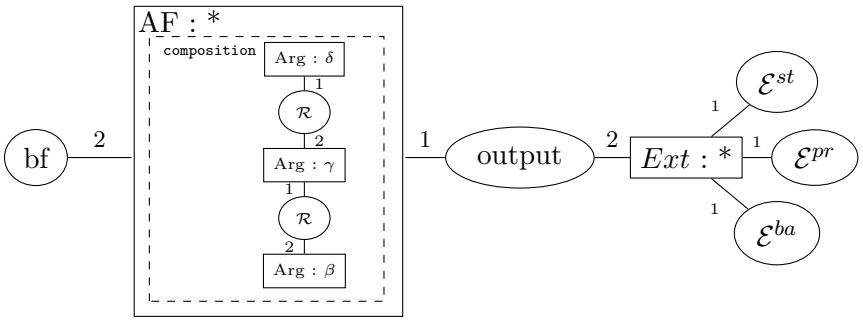



FIGURE 6.10 – Exemple de graphe emboîté typé

La notion de projection s'étend naturellement aux graphes emboîtés, en respectant les niveaux d'emboîtement. On peut étendre la sémantique logique $\Phi$ aux graphes emboîtés, de façon à conserver l'adéquation et la complétude de la projection.

## 6.2 Systèmes d'argumentation dans un modèle basé sur les GC

Peu d'études ont traité d'argumentation dans le formalisme (d'implémentation au sens où il permet d'implémenter le cadre abstrait d'argumentation à la Dung) des graphes conceptuels. Nous les énumérons ci-dessous et étendons cet état de l'art aux outils qui permettent de représenter des ensembles d'arguments.

### 6.2.1 Argumentation et représentation par graphes

Certains travaux se sont intéressés à l'analyse du discours argumentatif par les graphes conceptuels.

[MI99] présente un modèle à base de graphes conceptuels emboîtés pour représenter les différents éléments d'une situation discursive. Celui-ci permet de modéliser la structure des arguments sous la forme d'objets concepts de conversations. Le modèle comprend la prise en compte des objectifs discursifs qui impliquent généralement les destinataires du discours par l'élicitation des attitudes mentales. Ce modèle n'est toutefois pas muni de mécanismes de raisonnement.

Un autre angle d'étude a consisté en la représentation en graphes conceptuels des "argument maps" (cartes d'arguments) qui sont des représentations visuelles des structures de l'argumentation, permettant d'examiner à l'aide de requêtes les processus d'argumentation (par exemple par des requêtes sur les arguments avancés par une partie prenante). [MPC09] souligne que si l'explicitation de cartes d'arguments est bien prise en charge, le soutien à l'analyse, à la comparaison, et à la génération de cartes pertinentes pour des parties prenantes particulières est encore un problème de recherche ouvert. Pour développer de tels services, les auteurs proposent de s'appuyer sur les graphes conceptuels et définissent une architecture sur une combinaison de DebateGraph, un outil d'aide à l'argumentation, et Cogitant, un moteur de graphes conceptuels décrit au travers d'un cas d'étude concernant des politiques publiques d'écologie.

Il existe également des outils de représentation d'arguments qui facilitent la visualisation des arguments sous d'autres formes que les graphes conceptuels et en particulier leur structure.

*Araucaria* [Ara10] est un outil logiciel de cartographie d'arguments développé en 2001 par des chercheurs de l'Université de Dundee. Il est conçu pour représenter visuellement des arguments au moyen de diagrammes qui peuvent être utilisés pour l'analyse et le stockage. A partir d'un fichier texte, l'outil aide à générer des noeuds pouvant être soit constitués d'une prémisse, soit d'une conclusion, et permet notamment d'attacher un degré de confiance à ceux-ci. En plus de l'aspect recherche, le logiciel est destiné à certains professionnels, car il permet de réduire le temps nécessaire au traitement des données. En effet, le nombre considérable d'arguments devant être traités dans le domaine juridique a légitimé son utilisation par certains magistrats dans les tribunaux de l'Ontario, notamment, pour aider ceux-ci à traiter à un nombre élevé de cas relativement simples.

*Carneades* [Car10] est une application en cartographie d'arguments, avec une interface utilisateur graphique, et une bibliothèque de logiciels pour construire des applications supportant certaines tâches de l'argumentation. Carneades fournit des outils pour soutenir une variété de tâches d'argumentation, y compris : la cartographie et la visualisation d'arguments, leur évaluation par l'application de preuves normées ainsi que la construction d'ontologies d'arguments.

Ces outils ne permettent donc pas d'évaluer des acceptabilités collectives d'arguments comme présenté dans le Chapitre 1.

Nous avons choisi, pour effectuer cela, le modèle des graphes conceptuels car il est pour nous à même de lier deux enjeux primordiaux en argumentation : la représentation et le raisonnement. Dans la suite de ce chapitre, nous allons donc proposer une intégration de plusieurs dimensions de l'argumentation dans le modèle des GC. Dans un premier temps nous définirons une structure interne de l'argumentation. Sur cette base, nous définirons un type d'interaction, l'attaque sur les actions, comme définie dans le Chapitre 4 et appliquée dans le Chapitre 5, nous permettant ainsi de générer un graphe d'attaque basique, équivalent au cadre de travail à la Dung.

Dans un deuxième temps, nous équiperons ce graphe de méthodes de raisonnement permettant de calculer les différents ensembles maximaux caractéristiques d'arguments, au sens des extensions dans le système de Dung. Nous proposons donc un modèle d'implémentation en mesure de capturer en partie le modèle présenté dans le Chapitre 1.

### 6.2.2 De l'approche "micro" à l'approche "macro"

Nous illustrerons nos propos au travers du cas d'étude introduit dans le chapitre précédent. Dans nos exemples, nous allons considérer un jeu de trois arguments présentés dans le tableau suivant :

**Exemple 72.**

| *P. Pren.* | *Raison* | *Action* | *But(s)* |
|---|---|---|---|
| *PNNS* | *[BBL$^+$08]* | $\curvearrowright$ *T*80 | *Fibres (fb.) = 4.2 g/100g* |
| *Meuniers* | *[BBL$^+$08]* | $\circlearrowleft$ *T*65 | *Acide phytique (ac.) = 0.2 g/100g* |
| *Boulangers* | *[RL09]* | $\curvearrowright$(*T*80) *au levain* | *Acide phytique (ac.) = 0.21 g/100g* |

*Dans [BBL$^+$08], il est dit que le pain T80 contient une teneur en fibres de 4.2g/100g, on peut donc extraire un argument de cette raison soutenant le pain T80 en promouvant le taux de fibres, qui y est considéré comme tout à fait satisfaisant (par son taux élevé) en rapport au pain T65.*

*De même il y est dit que le pain T65 contient une teneur en acide phytique de 0.2g/100g, on peut donc extraire un argument de cette raison soutenant le pain T65 en promouvant le taux d'acide phytique, qui y est considéré comme tout à fait satisfaisant (par son taux bas) en rapport au pain T80.*

*Enfin, dans [RL09], il est dit que le pain T80 au levain contient une teneur en acide phytique de 0.21g/100g, on peut donc extraire un argument de cette raison soutenant le pain T80 au levain en promouvant le taux d'acide phytique, qui y est aussi considéré comme tout à fait satisfaisant (par son taux bas) en rapport au pain T80.*

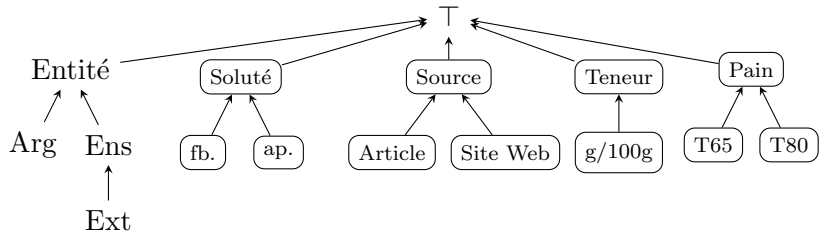
*Rappelons que d'un point de vue nutritionnel, on souhaite augmenter le taux de fibres et diminuer le taux d'acide phytique.*

Nous décrirons par la suite un argument suivant le triptyque d'une "Raison" soutenant une "Action" et promouvant un ou plusieurs "Buts".

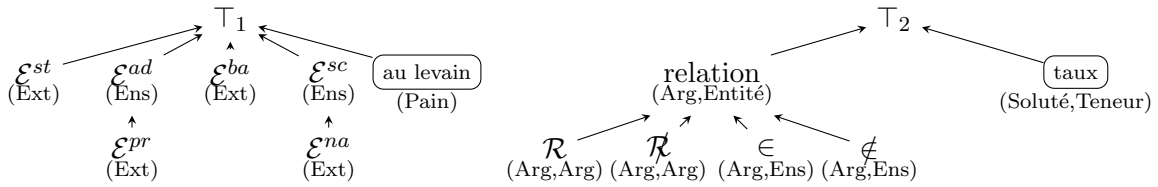
#### 6.2.2.1 Description du support

Pour utiliser le modèle à la Dung indépendamment d'un domaine d'application, il est indispensable de faire apparaitre une partie générique dans le support, il s'agit de la partie abstraite de notre modèle à base de graphes, permettant à celui-ci de prendre en compte la représentation

du système d'argumentation autant que le calcul de ses extensions. La partie abstraite du support décrit donc les entités classiques d'un cadre de travail en argumentation. Nous introduisons notamment en plus des relations habituelles d'attaque ($\mathcal{R}$) et d'appartenance ($\in$), des relations de non attaque ($\not\mathcal{R}$) de signature ($\texttt{Arg}, \texttt{Arg}$) et de non appartenance ($\notin$) de signature ($\texttt{Arg}, Ens$). Le reste du support décrivant l'ontologie du domaine d'application (ici, le pain) est présenté par des rectangles à angles arrondis dans la Figure 6.11. Le pain étant défini dans les tables nutri-




(a) $\mathcal{T}_C$




(b) $\mathcal{T}_R$

FIGURE 6.11 – Support du système d'argumentation à base de graphes

tionnelles selon le type de farine utilisée pour sa confection, il est donc naturel de voir apparaître les concepts T65 et T80 en tant que sortes de Pain. La relation au levain est une propriété du pain, elle apparaît donc comme relation unaire avec une signature se référant au concept Pain. Le concept Soluté (dont les sous-types sont fb. pour fibres et ac. pour acide phytique) forme avec le concept Teneur la signature de la relation taux. Enfin [BBL+08] et [RL09] sont des marqueurs individuels associé au type article qui est une sorte de Source.

#### 6.2.2.2 Graphe d'attaque

Le support étant composé d'une partie abstraite correspondante aux structures classiques des systèmes d'argumentation à la Dung, il est possible de définir un graphe d'attaque à base de concepts et relations comme suit :

**Définition 93.** *Un graphe d'attaque à base de concepts et relations, noté $G^{\texttt{AF}}$ est un graphe conceptuel emboîté tel que pour une profondeur $depth(G^{\texttt{AF}}) = 0$ :*

- *L'étiquette d'un sommet concept $c$ est $\texttt{etiq}(c) = (\texttt{Arg}, i)$, on dit que $i$ est un argument,*
- *L'étiquette d'un sommet relation $r$ est $\texttt{etiq}(r) = (\mathcal{R})$. Ces sommets représentent la relation d'attaque.*

Il s'agit à présent de définir la structure interne de l'argument afin de générer automatiquement les attaques qui apparaîtront dans le graphe d'attaque.

#### 6.2.2.3 Description d'un argument

Nous décrivons ci-dessous un noeud argument $c$ dans le formalisme des graphes emboîtés typés :

**Définition 94.** *Un noeud argument $c$ tel que* $\texttt{etiq}(c) = (\texttt{Arg}, i)$ *possède trois types d'emboîtements, où :*
- *Le graphe $Raison(c)$ est appelé "graphe raison de l'argument $i$",*
- *Le graphe $But(c)$ est appelé "graphe but de l'argument $i$",*
- *Le graphe $Action(c)$ est appelé "graphe action de l'argument $i$".*

**Exemple 73.** *Les trois arguments décrit dans l'Exemple 72 sont représentés dans le graphe d'attaque de la Figure 6.12. On pourrait ajouter les parties prenantes comme extérieures à l'argument lui même, c'est-à-dire sous forme de sommets concepts et relations liés au sommet de type* `Arg`.

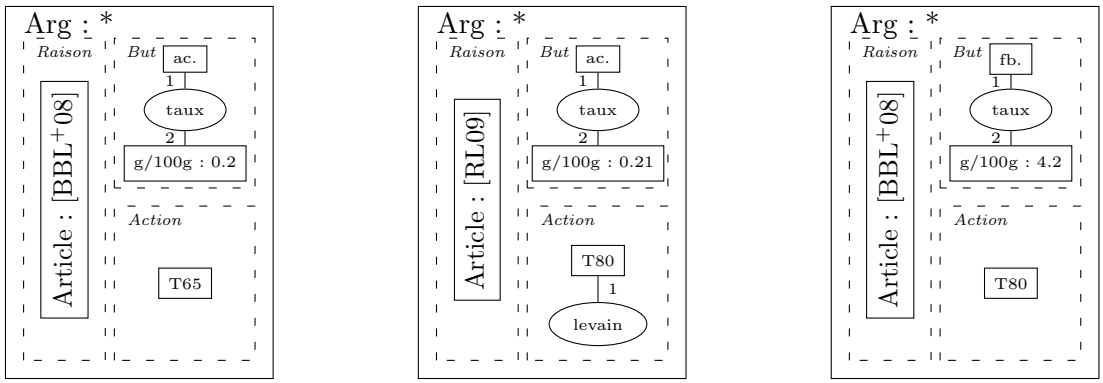



FIGURE 6.12 – Structure d'un argument en graphe conceptuel emboîté typé

A partir de cela plusieurs interactions entre arguments sont possibles. Typiquement nous ferons apparaître la notion d'attaque générée à partir des actions soutenus par des arguments pro (comme décrit dans le Chapitre 4).

Notons que la relation de préférence peut être générée par le degré de satisfaction, d'importance et de certitude des buts promus par ceux-ci, et qu'une troisième relation, l'inconsistance (qui peut être également considérée comme une attaque) peut être générée à partir des raisons des arguments. Nous n'aborderons pas, ici, la génération automatique de ces deux relations pour nous concentrer sur la relation d'attaque.

Dans la suite, nous présentons donc une méthode simple pour générer une relation d'attaque à partir des actions soutenues par les arguments, permettant ainsi de générer un graphe d'attaque à base de concepts et relations, à partir duquel nous calculerons les extensions au sens de Dung dans le formalisme des graphes conceptuels.

#### 6.2.2.4 Génération de la relation d'attaque

Nous utilisons l'opérateur de projection pour identifier les schémas d'inconsistance sur les actions, correspondant à la relation d'attaque $\mathcal{R}_{ac}$ introduite dans l'annexe du Chapitre 1 à partir des supports d'arguments (ici à partir des actions supportées comme décrit dans le Chapitre 4). En termes logiques, on dira que $\alpha$ attaque $\beta$ si l'action de $\alpha$ ne se déduit pas de celle de $\beta$.

En termes de graphes conceptuels, l'attaque d'un argument $\alpha$ sur un argument $\beta$ est générée dans le cas où le graphe action de l'argument $\alpha$ ne se projette pas dans le graphe action de l'argument $\beta$. On peut donc définir un algorithme simple pour construire la relation d'attaque sur les actions à partir d'un ensemble d'arguments.

**Algorithme 1:** Génération de $G^{\mathtt{AF}}$

**Données**: $G^{\mathtt{AF}}$ est initialisé avec $\{c_1, \ldots, c_n\}$ t.q. $\mathtt{etiq}(c_i) = (\mathtt{Arg}, i)$
**début**
  **pour** $i = 1$ *à* $n$ **faire**
    **pour** $j = 1$ *à* $n$ **faire**
      **si** $\nexists\ \Pi$ *de* $Action(c_i)$ *dans* $Action(c_j)$ **alors** ajouter à $G^{\mathtt{AF}}$ un sommet relation $r$ avec $\mathtt{etiq}(r) = (\mathcal{R})$ et les arêtes $(r, 1, c_i)$ et $(r, 2, c_j)$.

**Exemple 74.** *Les relations d'attaque générées grâce à l'Algorithme 1 sur les trois arguments décrit dans l'Exemple 72 sont représentées dans le graphe d'attaque de la Figure 6.13.*

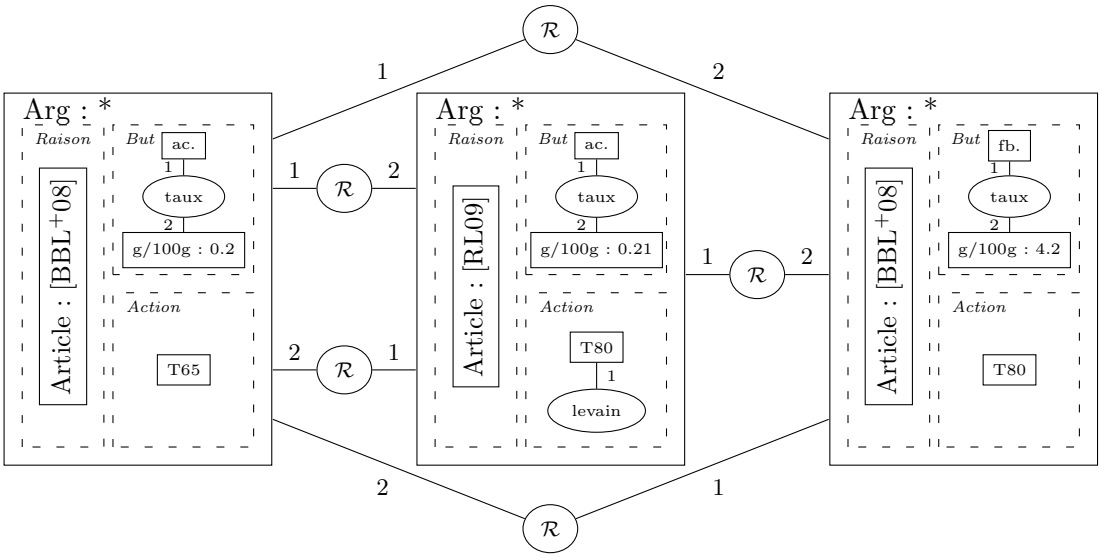



FIGURE 6.13 – Génération des attaques entre arguments

**Propriété 19.** *Pour un graphe généré par l'Algorithme 1, la relation $\mathcal{R}$ est irréflexive. Elle peut ne pas être symétrique, ni transitive.*

**Preuve 30.**
- *irréflexive : soit $G$ un graphe Action, $G$ se projette dans $G$, donc un argument ne peut être attaqué par lui même.*
- *peut ne pas être symétrique : soient $G_1$ et $G_2$ deux graphes Action, avec $G_2$ strictement plus spécifique que $G_1$, $G_1$ se projette dans $G_2$, $G_2$ ne se projette pas dans $G_1$, ainsi l'argument contenant une action décrite par $G_2$ attaque l'argument contenant une action décrite par $G_1$, l'inverse n'est pas vrai.*
- *peut ne pas être transitive : soient $G_1$, $G_2$ et $G_3$ trois graphes Action, avec $G_3$ strictement plus spécifique que $G_1$, et $G_2$ incomparable avec $G_1$ et $G_3$. L'argument contenant une*

*action décrite par $G_1$ attaque l'argument contenant une action décrite par $G_2$ et l'argument contenant une action décrite par $G_2$ attaque l'argument contenant une action décrite par $G_3$. Or, l'argument contenant une action décrite par $G_1$ n'attaque pas l'argument contenant une action décrite par $G_3$.*

□

Pour deux actions ou recommandations envisagées en tant que conclusion, plusieurs comparaisons sont donc possibles :

- Celles-ci sont situées dans une relation de raffinement, par exemple les arguments recommandent d'un côté un pain T80 et de l'autre un pain T80 au levain naturel. L'action raffinée peut être entreprise conjointement à l'action plus globale. Il s'agit d'une attaque en consensus.
- Celles-ci sont mutuellement exclusives, par exemple les arguments recommandent un pain issu de farine à taux de cendres 80 (T80) et un pain issu de farine à taux de cendres 65 (T65). Ces actions sont clairement dissociées car ne peuvent être entreprises conjointement. On peut appeler ce type d'attaque, "une attaque en dissensus".
- Celles-ci sont équivalentes : elles se projettent l'une dans l'autre.

### 6.2.3 Calcul des extensions avec des règles de défauts

Il s'agit dans cette section de redéfinir au sein du formalisme des graphes conceptuels les notions d'acceptabilité collective des arguments. Ainsi, vont être proposées des constructions cohérentes d'ensembles d'arguments qui répondent aux propriétés des différentes extensions introduites par Dung sous les sémantiques classiques (naïve, préférée, stable, basique). Les BG-règles par défaut seront utilisées pour générer ces ensembles cohérents d'arguments, les résultats seront donc exclusivement des ensembles maximaux comme dans certaines sémantiques classiques de Dung. Ainsi ne pourront être générés des ensembles caractéristiques non-maximaux tels que des ensembles admissibles d'arguments ou encore des extensions complètes.

Les extensions naïves sont générées de façon purement déclarative. Pour les autres, il est nécessaire de définir une stratégie d'application des règles, notre proposition sera donc seulement "semi-déclarative". Par exemple, pour les extensions préférées, est d'abord calculée une relation de non-attaque avant d'appliquer les autres règles. Pour les extensions stables, c'est la relation de non-appartenance qui est calculée en premier. Enfin, pour l'extension de base, l'application des règles est encore plus contrôlée.

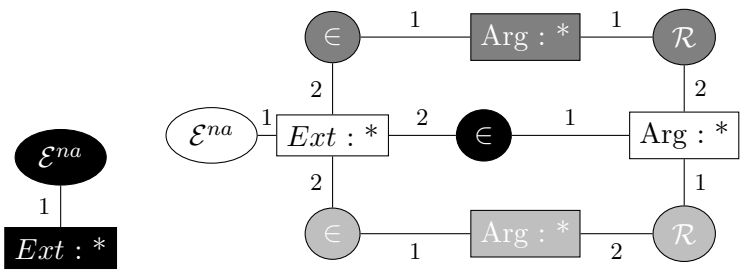
#### 6.2.3.1 Extensions naïves

Il s'agit de caractériser l'ensemble sans conflit maximal appelée extension naïve à partir de $G^{\mathtt{AF}}$. Pour cela nous nous appuierons sur deux règles : $R_{N_1}$ et $\mathcal{R}_{N_2}$.

La BG-règle (de défauts) $R_{N_1}$ a la sémantique suivante : "une extension naïve existe". La BG-règle de défauts $\mathcal{R}_{N_2}$ a la sémantique suivante : "s'il existe une extension naïve et un argument $\alpha_i$ alors $\alpha_i$ lui appartient sauf si $\alpha_i$ attaque un argument appartenant à l'extension considérée ou si un argument appartenant à cette extension attaque $\alpha_i$."

Les BG-règles de défauts $R_{N_1}$ et $R_{N_2}$ forment l'ensemble $\Delta_N$ et sont décrites dans la Figure 6.14.

Soit une base de connaissances $\mathcal{K} = (G^{\mathtt{AF}}, \Delta_N, \emptyset)$, chaque extension de défauts de l'arbre de dérivation associé à $\mathcal{K}$ correspond à une extension naïve au sens de Dung composée des arguments en relation ($\in$) avec le sous graphe $[Ext : m] \rightarrow (\mathcal{E}^{na})$ (où $m$ est un marqueur générique instancié)




(a) $R_{N_1}$ (b) $R_{N_2}$

FIGURE 6.14 – Les règles de défauts générant les extensions naïves

dans l'extension de défauts considérée. Réciproquement, toute extension naïve s'obtient ainsi à partir d'une extension de défauts.

**Propriété 20.** *Soit $E_i^{\Delta_N}$ une extension de défauts associée à l'arbre de dérivation d.d.t. de $\mathcal{K} = (G^{\mathtt{AF}}, \Delta_N, \emptyset)$. Soit $\mathcal{E}(E_i^{\Delta_N}) = \{\ c_j \mid \exists\ r_1,\ r_2 \in R_{E_i^{\Delta_N}}$ et $m \in \mathcal{I}$ t.q. $(r_1, 1, c_j)$, $(r_1, 2, v)$ et $(r_2, 1, v)$ sont des arêtes avec $\mathtt{etiq}(v) = (Ext, m)$, $\mathtt{etiq}(r_1) = \in$ et $\mathtt{etiq}(r_2) = \mathcal{E}^{na}\}$. Alors $Ext^{na} = \{\mathcal{E}(E_i^{\Delta_N}) | E_i^{\Delta_N}$ est une extension de défauts de $\mathcal{K}\}$.*

**Preuve 31.** *Dans les preuves de ce chapitre, un argument peut être considéré de manière équivalente dans le système abstrait à la Dung et dans le formalisme des GC. Ainsi, un argument $c_i$ correspond dans un système abstrait d'argumentation à un argument $i \in \mathcal{A}$ et dans le formalisme des GC à un noeud de type* `Arg` *et de marqueur individuel $i$.*

*Si $\{\mathcal{E}(E_i^{\Delta_N}) | E_i^{\Delta_N}$ est une extension de défaut de $\mathcal{K}\}$ n'est pas l'ensemble de toutes les extensions naïves du système d'argumentation représenté par $G^{\mathtt{AF}}$, il y a deux possibilités :*

*1. Soit $\exists\ \mathcal{E}_k = \mathcal{E}(E_k^{\Delta_N}) \in \{\mathcal{E}(E_i^{\Delta_N}) | E_i^{\Delta_N}$ est une extension de défaut de $\mathcal{K}\}$ et $\mathcal{E}_k$ n'est pas une extension naïve.*

*Si $\mathcal{E}_k$ n'est pas une extension naïve alors $\exists\ c_l, c_j \in \mathcal{E}_k$ (non nécessairement distincts) et $r \in R_{E_i^{\Delta_N}}$ avec $\mathtt{etiq}(r) = \mathcal{R}$ tels que $(r, 1, c_l)$ et $(r, 2, c_j)$ sont des arêtes de $G^{\mathtt{AF}}$ ou $(r, 1, c_j)$ et $(r, 2, c_l)$ sont des arêtes de $G^{\mathtt{AF}}$. Ceci est impossible puisqu'il s'agit des contraintes de la règle $R_{N_2}$ pour l'appartenance d'un argument à une extension naïve.*

*Soit il existe un argument $c_m$ t.q. $c_m \notin \mathcal{E}_k$ et $c_m$ n'attaquant pas (resp. n'étant pas attaqué par) un argument présent dans $\mathcal{E}_k$. Dans ce cas là, la règle $R_{N_2}$ pourrait être appliquée et donc $E_k^{\Delta_N}$ ne peut être considéré comme une extension de défauts.*

*2. Montrons que toute extension naïve est dans l'ensemble $\{\mathcal{E}(E_i^{\Delta_N}) | E_i^{\Delta_N}$ est une extension de défauts de $\mathcal{K}\}$. Considérons $\mathcal{E}^{na} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ une extension naïve et plus particulièrement son premier argument $c_1$. A partir de la racine du d.d.t., on peut appliquer la règle $R_{N_2}$ telle que l'application de la règle ajoute $c_1$ à l'extension en cours de construction. Ainsi, il existe $(N_1, C_1)$, un noeud (fils de la racine) de l'arbre d.d.t de $\mathcal{K}$, tel que $N_1$ contient un graphe tel que $(r, 1, c_1)$, $(r, 2, v)$ et $(t, 1, v)$ sont ses arêtes avec $\mathtt{etiq}(r) = \in$, $\mathtt{etiq}(v) = (Ext, m)$ et $\mathtt{etiq}(t) = \mathcal{E}^{na}$.*

*On peut maintenant à partir du noeud $(N_1, C_1)$ du d.d.t. ajouter l'argument $c_2$ de la même façon. Par récurrence, il existe donc un noeud $(N_n, C_n)$ du d.d.t. tel que $N_n \in \{E_i^{\Delta_N} | E_i^{\Delta_N}$ est une extension de défaut de $\mathcal{K}\}$. On est sûr que $(N_n, C_n)$ est une feuille du d.d.t. car si on pouvait appliquer de nouveau des règles, $\mathcal{E}^{na}$ ne serait pas une extension naïve. Ainsi, $\mathcal{E}(N_n) = \mathcal{E}^{na}$.* □

#### 6.2.3.2 Extensions préférées

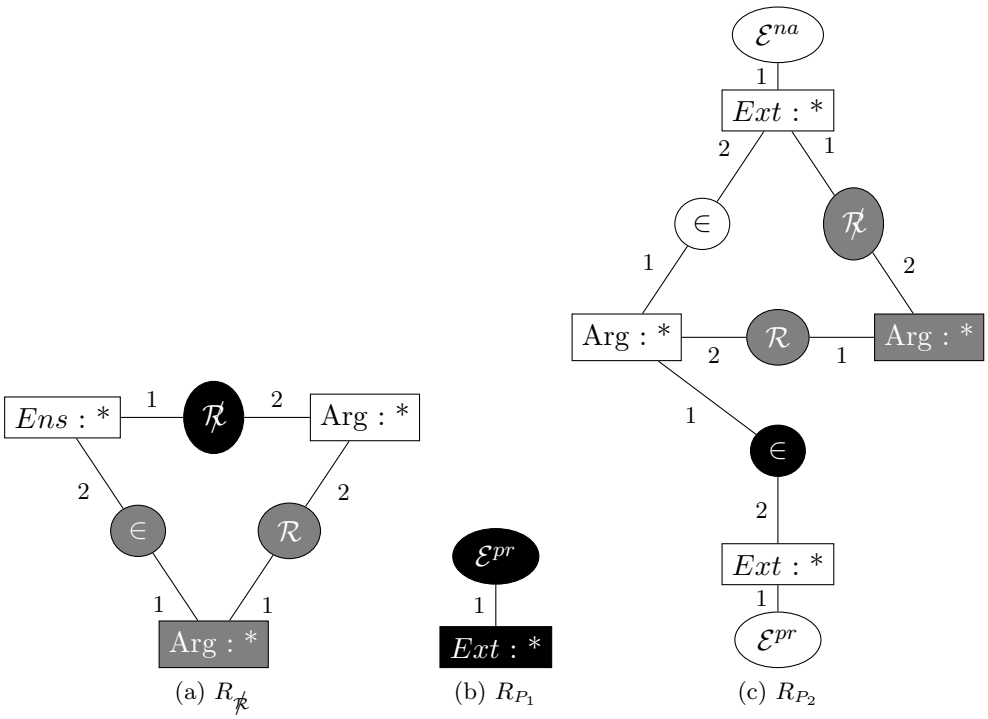
De façon à pouvoir calculer les extensions préférées qui ne sont autres que des sous-ensembles des extensions naïves, de par la condition nécessaire du caractère sans-conflit, on considère ici chaque $E_i^{\Delta_N}$, en tant qu'extension de défauts naïve. On souhaite donc dans un premier temps compléter le graphe fait de cette extension par une relation ($\not\mathcal{R}$).

Ainsi s'il existe deux arêtes ($\not\mathcal{R}$, 1, $c_i$) et ($\not\mathcal{R}$, 2, $c_j$), la sémantique dans le graphe complété sera la suivante : "l'argument $i$ n'attaque pas l'argument $j$". On complète donc le graphe fait associé à chaque extension $E_i^{\Delta_N}$ par la BG-règle de défauts $R_{\not\mathcal{R}}$ décrite dans la Figure 6.15 et ayant la sémantique suivante : "s'il existe un ensemble d'arguments et un argument $\alpha_i$ alors l'ensemble d'arguments n'attaque pas $\alpha_i$ sauf si un argument appartenant à cet ensemble attaque $\alpha_i$."

Il existe une seule extension de défauts associée à un arbre de dérivation de la base de connaissances $\mathcal{K}_i = (E_i^{\Delta_N}, \{R_{\not\mathcal{R}}\}, C_i^{\Delta_N})$. En effet, la seule relation qui peut être ajoutée est la relation ($\not\mathcal{R}$), ainsi l'application de la règle à un endroit du graphe ne peut jamais bloquer cette règle à un autre endroit. On obtient bien une seule extension de défauts associée à cet arbre de dérivation de $\mathcal{K}_i$. On la note $E_i^{R_{\not\mathcal{R}}}$ et ses contraintes résultantes $C_i^{R_{\not\mathcal{R}}}$.

La BG-règle de défauts $R_{P_1}$ a la sémantique suivante : "une extension préférée existe". La BG-règle de défauts $\mathcal{R}_{P_2}$ a la sémantique suivante : "si un argument $\alpha_i$ appartient à une extension naïve alors $\alpha_i$ appartient également à une extension préférée sauf si $\alpha_i$ se trouve être attaqué par un assaillant $\alpha_j$, cet assaillant $\alpha_j$ n'étant lui même pas attaqué par un argument de l'extension naïve."

Les BG-règle de défauts $R_{P_1}$ et $R_{P_2}$ forment l'ensemble $\Delta_P$ et sont décrites dans la Figure 6.15.




(a) $R_{\not\mathcal{R}}$ (b) $R_{P_1}$ (c) $R_{P_2}$

FIGURE 6.15 – Les règles de défauts générant les extensions préférées

Soit une base de connaissances $\mathcal{K}_i = (E_i^{R_{\not\pi}}, \Delta_P, C_i^{R_{\not\pi}})$, chaque extension de défauts associée à l'arbre de dérivation de $\mathcal{K}_i$ correspond à une extension préférée au sens de Dung composée des arguments en relation ($\in$) avec le sous graphe $[Ext : m] \rightarrow (\mathcal{E}^{pr})$ (où $m$ est un marqueur générique instancié) dans l'extension de défauts considérée. Réciproquement, toute extension préférée s'obtient ainsi à partir d'une extension de défauts.

**Propriété 21.** *Soit $E_k^{\Delta_P^i}$ une extension de défauts associée à l'arbre de dérivation d.d.t. de $\mathcal{K}_i = (E_i^{R_{\not\pi}}, \Delta_P, C_i^{R_{\not\pi}})$. Soit $\mathcal{E}(E_k^{\Delta_P^i}) = \{\ c_j \mid \exists\ r_1,\ r_2 \in R_{E_k^{\Delta_P^i}}$ et $m \in \mathcal{I}$ t.q. $(r_1, 1, c_j)$, $(r_1, 2, v)$ et $(r_2, 1, v)$ sont des arêtes avec $\texttt{etiq}(v) = (Ext, m)$, $\texttt{etiq}(r_1) = \in$ et $\texttt{etiq}(r_2) = \mathcal{E}^{pr}\}$. Alors $Ext^{pr} = \bigcup_i \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_P^i}) | E_k^{\Delta_P^i}$ est une extension de défauts de $\mathcal{K}_i\}$.*

**Preuve 32.** *Si $\bigcup_i \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_P^i}) | E_k^{\Delta_P^i}$ est une extension de défauts de $\mathcal{K}_i\}$ n'est pas l'ensemble de toutes les extensions préférées du système d'argumentation représenté par $G^{\texttt{AF}}$, il y a deux possibilités :*

*1. Soit $\exists\ \mathcal{E}_k = \mathcal{E}(E_k^{\Delta_P^j}) \in \bigcup_i \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_P^i}) | E_k^{\Delta_P^i}$ est une extension de défauts de $\mathcal{K}_i\}$ et $\mathcal{E}_k$ n'est pas une extension préférée. Si $\mathcal{E}_k$ n'est pas une extension préférée alors :*

*a) Soit $\exists\ c_l, c_j \in \mathcal{E}_k$ (non nécessairement distincts) et $r \in R_{E_k^{\Delta_P^i}}$ avec $\texttt{etiq}(r) = \mathcal{R}$ tels que $(r, 1, c_l)$ et $(r, 2, c_j)$ soient des arêtes de $G^{\texttt{AF}}$ ou $(r, 1, c_j)$ et $(r, 2, c_l)$ sont des arêtes de $G^{\texttt{AF}}$. Ceci est impossible puisqu'il s'agit des contraintes de la règle $R_{N_2}$ pour l'appartenance d'un argument à une extension naïve.*

*b) Soit il existe un argument $c_l \in \mathcal{E}_k$ et un argument $c_j \notin \mathcal{E}_k$ et $r_1 \in R_{E_k^{\Delta_P^i}}$ avec $\texttt{etiq}(r_1) = \mathcal{R}$ tels que $(r_1, 1, c_j)$ et $(r_1, 2, c_l)$ soient des arêtes de $G^{\texttt{AF}}$ et $\nexists\ c_r \in \mathcal{E}_k$ et $r_2 \in R_{E_k^{\Delta_P^i}}$ avec $\texttt{etiq}(r_2) = \mathcal{R}$ tels que $(r_2, 1, c_r)$ et $(r_2, 2, c_j)$ soient des arêtes de $G^{\texttt{AF}}$. Ceci est impossible puisqu'il s'agit de la contrainte de la règle $R_{P_2}$ pour l'appartenance d'un argument à une extension préférée.*

*c) Soit il existe un argument $c_m$ t.q. $c_m \notin \mathcal{E}_k$ et $c_m$ n'attaquant pas (resp. n'étant pas attaqué par) un argument présent dans $\mathcal{E}_k$ et étant défendu par un argument présent dans $\mathcal{E}_k$. Dans ce cas là, la règle $R_{N_2}$, puis la règle $R_{P_2}$ pourraient être appliquées et donc $E_k^{\Delta_P^j}$ ne peut être considéré comme une extension de défauts.*

*2. Montrons que toute extension préférée est dans l'ensemble $\{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_P^i}) | E_k^{\Delta_P^i}$ est une extension de défauts de $\mathcal{K}_i\}$. Considérons $\mathcal{E}^{pr} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ une extension préférée et plus particulièrement son premier argument $c_1$. A partir de la racine du d.d.t., on peut appliquer la règle $R_{P_2}$ telle que l'application de la règle ajoute $c_1$ à l'extension en cours de construction. Ainsi, il existe $(N_1, C_1)$, un noeud (fils de la racine) de l'arbre d.d.t de $\mathcal{K}_i$, tel que $N_1$ contient un graphe tel que $(r, 1, c_1)$, $(r, 2, v)$ et $(t, 1, v)$ sont ses arêtes avec $\texttt{etiq}(r) = \in$, $\texttt{etiq}(v) = (Ext, m)$ et $\texttt{etiq}(t) = \mathcal{E}^{pr}$.*

*On peut maintenant à partir du noeud $(N_1, C_1)$ du d.d.t. ajouter l'argument $c_2$ de la même façon. Par récurrence, il existe donc un noeud $(N_n, C_n)$ du d.d.t. tel que $N_n \in \{E_k^{\Delta_P^i} | E_k^{\Delta_P^i}$ est une extension de défaut de $\mathcal{K}_i\}$. On est sûr que $(N_n, C_n)$ est une feuille du d.d.t. car si on pouvait appliquer de nouveau des règles, $\mathcal{E}^{pr}$ ne serait pas une extension préférée. Ainsi, $\mathcal{E}(N_n) = \mathcal{E}^{pr}$.* □

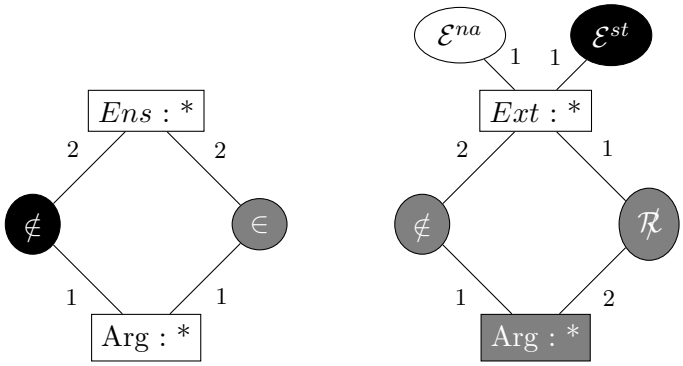
#### 6.2.3.3 Extensions stables

De façon à pouvoir calculer les extensions stables qui ne sont autres que des extensions naïves, de par la condition nécessaire du caractère sans-conflit maximal, on considère également ici chaque $E_i^{\Delta_N}$, en tant qu'extension de défauts naïve. On souhaite donc dans un premier temps compléter le graphe fait de cette extension par une relation ($\notin$). Ainsi s'il existe deux arêtes $(\notin, 1, c_i)$ et $(\notin, 2, c_j)$, la sémantique dans le graphe complété sera la suivante : "l'argument $i$ n'appartient pas à l'ensemble $j$". On complète donc le graphe fait associé à chaque extension $E_i^{\Delta_N}$ par la BG-règle de défauts $R_{\notin}$ décrite dans la Figure 6.16 et représentant la sémantique suivante : "s'il existe un ensemble d'arguments et un argument $\alpha_i$ alors $\alpha_i$ n'appartient pas à cet ensemble sauf s'il appartient à cet ensemble."

Il existe une seule extension de défauts associée à un arbre de dérivation de la base de connaissances $\mathcal{K} = (E_i^{\Delta_N}, \{R_{\notin}\}, C_i^{\Delta_N})$. En effet, la seule relation qui peut être ajoutée est la relation ($\notin$) qui n'appartient pas aux contraintes négatives de la règle, ainsi l'application de la règle à un endroit du graphe ne peut jamais bloquer cette règle à un autre endroit. On obtient bien une seule extension de défaut associé à cet arbre de dérivation. On la note $E_i^{R_{\notin}}$ et ses contraintes résultantes $C_i^{R_{\notin}}$.

La BG-règle de défauts $\mathcal{R}_{S_1}$ a la sémantique suivante : "'s'il existe une extension naïve alors celle-ci est stable sauf si elle n'attaque pas un argument ne lui appartenant pas".

La BG-règles de défauts $R_{S_1}$ forme l'ensemble $\Delta_S$ et est décrite dans la Figure 6.16.




(a) $R_{\notin}$ (b) $R_{S_1}$

FIGURE 6.16 – Les règles de défauts générant les extensions stables

Soit une base de connaissance $\mathcal{K} = (E_i^{R_{\notin}}, \Delta_S, C_i^{R_{\notin}})$, chaque extension de défauts associée à l'arbre de dérivation de $\mathcal{K}$ correspond à une extension stable au sens de Dung composée des arguments en relation ($\in$) avec le sous graphe $[Ext : m] \rightarrow (\mathcal{E}^{st})$ (où $m$ est un marqueur générique instancié) dans l'extension de défauts considérée. Réciproquement, toute extension stable s'obtient ainsi à partir d'une extension de défauts.

**Propriété 22.** *Soit $E_k^{\Delta_S^i}$ une extension de défauts associée à l'arbre de dérivation d.d.t. de $\mathcal{K}_i = (E_i^{R_{\notin}}, \Delta_S, C_i^{R_{\notin}})$. Soit $\mathcal{E}(E_k^{\Delta_S^i}) = \{\ c_j \mid \exists\ r_1,\ r_2 \in R_{E_k^{\Delta_S^i}}$ et $m \in \mathcal{I}$ t.q. $(r_1, 1, c_j)$, $(r_1, 2, v)$ et $(r_2, 1, v)$ sont des arêtes avec $\texttt{etiq}(v) = (Ext, m)$, $\texttt{etiq}(r_1) = \in$ et $\texttt{etiq}(r_2) = \mathcal{E}^{st}\}$. Alors $Ext^{st} = \bigcup_i \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_S^i}) | E_k^{\Delta_S^i}$ est une extension de défauts de $\mathcal{K}_i\}$.*

**Preuve 33.** *Si* $\bigcup_i \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_S^i}) | E_k^{\Delta_S^i}$ *est une extension de défauts de* $\mathcal{K}_i\}$ *n'est pas l'ensemble de toutes les extensions stables du système d'argumentation représenté par* $G^{\mathtt{AF}}$*, il y a deux possibilités :*

*1. Soit* $\exists\ \mathcal{E}_k = \mathcal{E}(E_k^{\Delta_S^j}) \in \bigcup_i \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_S^i}) | E_k^{\Delta_S^i}$ *est une extension de défauts de* $\mathcal{K}_i\}$ *et* $\mathcal{E}_k$ *n'est pas une extension stable. Si* $\mathcal{E}_k$ *n'est pas une extension stable alors :*

*a) Soit* $\exists\ c_l, c_j \in \mathcal{E}_k$ *(non nécessairement distincts) et* $r \in R_{E_k^{\Delta_S^i}}$ *avec* $\mathtt{etiq}(r) = \mathcal{R}$ *tels que* $(r, 1, c_l)$ *et* $(r, 2, c_j)$ *soient des arêtes de* $G^{\mathtt{AF}}$ *ou* $(r, 1, c_j)$ *et* $(r, 2, c_l)$ *sont des arêtes de* $G^{\mathtt{AF}}$*. Ceci est impossible puisqu'il s'agit des contraintes de la règle* $R_{N_2}$ *pour l'appartenance d'un argument à une extension naïve.*

*b) Soit* $\exists\ c_l \in \mathcal{E}_k$*,* $c_j \notin \mathcal{E}_k$ *tel que* $\nexists\ r \in R_{E_k^{\Delta_S^i}}$ *avec* $\mathtt{etiq}(r) = \mathcal{R}$ *tel que* $(r, 1, c_l)$ *et* $(r, 2, c_j)$ *soient des arêtes de* $G^{\mathtt{AF}}$*. Ceci est impossible puisqu'il s'agit de la contrainte de la règle* $R_{S_1}$ *pour l'appartenance d'un argument à une extension stable.*

*c) Soit il existe un argument* $c_m$ *t.q.* $c_m \notin \mathcal{E}_k$ *et* $c_m$ *n'attaquant pas (resp. n'étant pas attaqué par) un argument présent dans* $\mathcal{E}_k$*. Dans ce cas là, la règle* $R_{S_2}$ *pourrait être appliquées et donc* $E_k^{\Delta_S^j}$ *ne peut être considéré comme une extension de défauts.*

*2. Soit* $\exists\ \mathcal{E}^{st}$ *une extension stable telle que* $\mathcal{E}^{st} \notin \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_S^i}) | E_k^{\Delta_S^i}$ *est une extension de défaut de* $\mathcal{K}_i\}$*. Comme prouvé précédemment* $\mathcal{E}^{st} \in \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_N}) | E_k^{\Delta_N}$ *est une extension de défaut de* $\mathcal{K}\}$ *par son caractère sans-conflit maximal. De plus, le seul déclenchement de la règle* $R_{S_2}$ *est possible dû à la non violation de ses contraintes puisque les arguments de* $\mathcal{E}^{st}$ *attaquent tout autre argument n'appartenant pas à l'extension, ainsi,* $\mathcal{E}^{st} \in \{\mathcal{E}(E_k^{\Delta_S^i}) | E_k^{\Delta_S^i}$ *est une extension de défaut de* $\mathcal{K}_i\}$*.* □

#### 6.2.3.4 Extension de base

Contrairement aux extensions précédentes, le calcul de l'extension de base nécessite un mécanisme supplémentaire, qui sort du cadre déclaratif ou "semi-déclaratif" (priorité entre des paquets de règles). Pour s'en convaincre, essayons la modélisation suivante avec les trois règles détaillées dans la Figure 6.17 et décrites par la suite :

La BG-règle $R_B$ a la sémantique suivante : "une extension de base existe".

La BG-règle de défauts $\Delta_{B_1}$ a la sémantique suivante : "s'il existe un argument et une extension de base alors il appartient à cette extension sauf s'il existe un argument qui l'attaque."

La BG-règle de défauts $\Delta_{B_2}$ a la sémantique suivante : "s'il existe un argument qui est défendu par un argument appartenant à une extension de base alors il appartient à cette extension de base sauf si un argument qui appartient à cette extension l'attaque ou s'il attaque un argument qui appartient à cette extension."

Nous proposerions d'appliquer dans un premier temps l'ensemble de règles $\{R_B, \Delta_{B_1}\}$ à notre graphe $G^{\mathtt{AF}}$ (munissant notre base de connaissances d'un ensemble vide de contraintes), puis d'appliquer à l'extension obtenue la règle $\Delta_{B_2}$.

Cette méthode ne fonctionne pas, car la règle $\Delta_{B_2}$ n'assure pas qu'un argument "rentrant" dans l'extension de base soit défendu contre chacun de ses assaillants, (elle assure juste qu'il soit défendu contre un seul).

En fait, il faudrait :

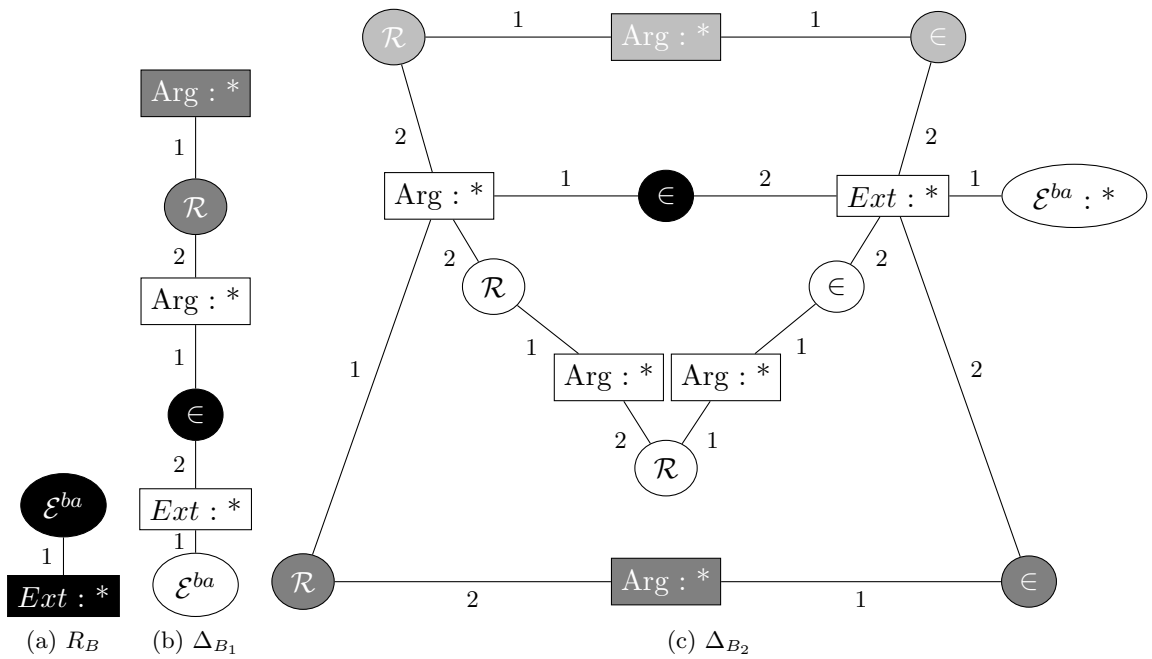



FIGURE 6.17 – Règles $R_B$, $\Delta_{B_1}$ et $\Delta_{B_1}$

- Appliquer à $G^{\mathtt{AF}}$ l'ensemble de règles $\{\mathcal{R}_B, \Delta_{B_1}\}$, puis appliquer à l'extension obtenue la règle $R_{\not\mathcal{R}}$ décrite dans la Figure 6.15 et qui informe de la non-attaque d'un argument par un ensemble.
- Puis il faudrait appliquer **une seule fois** la règle $\Delta_{B_3}$ de sémantique suivante : "un argument appartient à l'extension de base sauf s'il attaque (resp. est attaqué par) un argument de l'extension et sauf s'il est attaqué par un argument qui n'est pas attaqué par l'extension."
- Après une application de la règle $\Delta_{B_3}$, (donc à chaque entrée d'un nouvel argument dans l'extension), il faudrait réappliquer la règle $R_{\not\mathcal{R}}$ au fait obtenu.
- Puis réappliquer une seule fois la règle $\Delta_{B_3}$, et ainsi de suite jusqu'à ne plus pouvoir ajouter d'arguments dans l'extension.

Ainsi, on s'assure de savoir, avant l'application de $\Delta_{B_3}$, quels arguments l'extension en construction n'attaque pas. Ceci suggère un mécanisme de déclenchement alterné de règles qui sort du cadre "semi-déclaratif" envisagé jusqu'ici.

Dans ce chapitre, nous avons présenté un cadre à base de graphes conceptuels pour capturer certaines situations décisionnelles à base d'arguments. Il capture de ce fait certains aspects classiquement envisagés dans les courants "micro" et "macro" de l'argumentation. Il permet ainsi d'une part d'organiser et de visualiser les arguments et les graphes d'attaques, et d'autre part de définir de façon déclarative la notion d'attaque sur des actions (potentiellement spécialisées) soutenues par des arguments pro.

L'apport majeur de ce chapitre réside dans le calcul déclaratif voire semi-déclaratif de certaines extensions. En effet, la méthode proposée n'est pas totalement déclarative, puisque l'on est parfois amené à définir des "paquets" de règles avec lesquels on sature successivement des faits. Pour l'extension de base, ce contrôle concerne même le nombre d'applications d'une règle.

Si l'aspect efficacité des algorithmes pour le mécanisme des règles de défauts sort du cadre de cette thèse et pourrait constituer un frein à leur implémentation, certains autres aspects des graphes conceptuels pourraient être en outre pertinents pour capturer d'autres notions étudiées en argumentation. Par exemple, il serait envisageable de capturer d'autres types d'inconsistances sur les raisons cette fois-ci (sachant que l'inconsistance d'une base de connaissances est typiquement gérée par les contraintes négatives dans le modèle des graphes conceptuels). On pourrait aussi envisager de représenter plus finement la notion de préférences contextuelles.

En parallèle des travaux issus dans ce chapitre, nous avons réalisé deux publications [BCNT08, TBCN10], sur la représentation et le requêtage concernant la qualité d'un aliment et son évolution dans un process de transformation de la filière céréalière, qui sortent du cadre de ce manuscrit.

# Conclusion

Cette conclusion resitue les contributions et les apports des travaux de recherche détaillés dans ce manuscrit et dessine les perspectives en termes théoriques et appliqués.

## 1 Résumé des recherches

Après une synthèse du système d'argumentation abstrait fondateur de Dung et de diverses extensions proposées dans la littérature, ayant comme dénominateur commun la représentation de la préférence de manière directe ou indirecte entre arguments, nous avons mené une comparaison aussi bien syntaxique que sémantique de ces extensions. Pour cela, nous avons défini préalablement la notion d'équivalence entre systèmes d'argumentation, qui s'appuie sur l'acceptabilité collective des arguments d'un système, et qui n'avait pas été envisagée jusqu'alors.

Au vu de cette étude comparative, nous avons proposé d'intégrer ces extensions dans un cadre de travail unifié en argumentation. Ce système a soulevé une interrogation majeure concernant le calcul de l'acceptabilité globale lorsque plusieurs systèmes d'argumentation (dans ce cas contextuels) sont considérés. Pour répondre à cela, nous avons étudié le respect de la consistance des extensions d'un système en nous appuyant sur le comportement des relations d'attaque dans un système. Nous avons ainsi pu déterminer les conditions nécessaires au respect de cette consistance, en envisageant notamment de nouveaux types de relations d'attaque, dont un particulièrement prompt à représenter le comportement des arguments pratiques dans un système décisionnel argumenté.

Nous avons ainsi proposé une extension aux systèmes de décision à base d'arguments, permettant d'y inscrire deux notions : d'une part, la contextualisation des préférences et d'autre part, la spécialisation d'actions soutenues. Ce modèle étendu permettant la recommandation d'action(s) a pu être éprouvé au travers d'un cas d'étude en arbitrage argumenté appliqué à une politique de santé publique visant à changer la composition nutritionnelle de certains produits céréaliers tels que le pain.

Ceci a permis de montrer que l'action de prévention globale n'est pas la plus pertinente lorsque l'ensemble des citoyens auxquels on s'adresse a un profil segmenté, car un produit, si bénéfique soit-il pour un type de consommateurs, peut ne pas correspondre aux besoins d'autres segments de consommateurs.

Enfin, nous avons proposé de représenter une partie de notre système d'arbitrage argumenté dans une extension du formalisme des graphes conceptuels. Nous avons montré que ce type de modèle est pertinent pour traiter de tels système, car tout en garantissant un apport réprésen-

tationnel, il est à même de capturer une partie du raisonnement des systèmes d'argumentation abstraits traitant d'acceptabilité collective.

## 2 Perspectives

Si ces travaux ont comme point commun de s'intéresser à plusieurs aspects de l'argumentation en termes de comparaison, de fusion, de consistance, de représentation et d'application, de nombreux points restent à approfondir pour compléter notre démarche.

En argumentation, l'étude de la fusion peut être également enrichie par la prise en compte d'autres éléments de connaissance tels que les ontologies. La représentation de l'argument en tant qu'élément de syntaxe porteur de sémantique pourrait être envisagée plus finement dans un modèle de représentation de connaissances tel que les graphes conceptuels, par la prise en compte des vocabulaires (supports) de chaque agent.

En décision, notre approche argumentée serait à comparer à l'approche [AV09a] récemment développée. Cette approche s'appuie elle aussi sur les actions soutenues par les arguments pour définir la relation d'attaque. Notre approche pourra également être comparée avec les approches qualitatives et non argumentatives qui existent en décision dans la littérature. Un point particulièrement important serait de déterminer si une modélisation des règles d'agrégation qui y sont développées serait envisageable avec notre système de décision.

Une limite existante est le fossé indéniable entre les approches multi-critères numériques classiques et les approches qualitatives s'appuyant sur la connaissance. En multi-critères, un problème récurrent pour le décideur est de mesurer l'importance d'un critère en fonction du gain qu'il procure (e.g. significativité d'une différence entre deux teneurs en nutriments). Les approches argumentatives pourraient permettre d'établir le pont entre connaissances expertes et variables du décideur.

Enfin, dans l'objectif d'un outil d'aide à la décision, l'étape de validation des travaux de ce manuscrit sera effective à la lumière de l'implémentation d'un démonstrateur.

# A

# Annexe du Chapitre 1

Dans les premiers travaux concernant la formalisation de la notion d'argument, citons Toulmin [Tou69] lequel définit l'argument en distinguant et en articulant les différents éléments du raisonnement (données, raison, fondement, implication, restriction et conclusion).

Nous allons présenter ici une approche à mi-chemin entre l'instanciation de l'argument, la génération de la relation d'attaque et leurs répercutions dans le système abstrait de Dung. Amgoud et Besnard [AB09] se munissent pour cela de la logique abstraite de Tarski pour construire des arguments, capturant ensuite des conflits entre arguments grâce à des relations d'attaque bien connues de la littérature, afin de définir des propriétés essentielles pour celles-ci, aidant ainsi à choisir la relation d'attaque qui convient le mieux aux systèmes d'argumentation.

## A.1 Structure de l'argument

Tarski [Tar56] définit la logique abstraite comme une paire $(\mathcal{L}, \mathtt{CN})$, dans laquelle les éléments de $\mathcal{L}$ sont des formules bien formées, et $\mathtt{CN}$ est un opérateur de conséquence. $\mathtt{CN}$ est donc une fonction de $2^{\mathcal{L}}$ dans $2^{\mathcal{L}}$qui satisfait les axiomes suivants :

1. $H \subseteq \mathtt{CN}(H)$ **(Expansion)**
2. $\mathtt{CN}(\mathtt{CN}(H)) = \mathtt{CN}(H)$ **(Idempotence)**
3. $\mathtt{CN}(H) = \bigcup_{G \subseteq_f H} \mathtt{CN}(H)$ **(Finitude)**
4. $\mathtt{CN}(\{h\}) = \mathcal{L}$ pour certains $h \in \mathcal{L}$ **(Absurdité)**
5. $\mathtt{CN}(\emptyset) \neq \mathcal{L}$ **(Cohérence)**

**Notation :** $G \subseteq_f H$ signifie que $G$ est un sous-ensemble fini de $H$.

Intuitivement, $\mathtt{CN}(H)$ retourne l'ensemble des formules qui sont des conséquences logiques de $H$ en accord avec la logique en question. Ainsi la plupart des logiques monotones existantes (logique classique, intuitionniste, modale, etc.) peuvent être vues comme des cas particuliers de la logique abstraite de Tarski. Une fois la paire $(\mathcal{L}, \mathtt{CN})$ définie, il peut être défini la notion de consistance comme suit :

**Définition 95** (Consistance [AB09])**.** *Soit $H \subseteq \mathcal{L}$. $H$ est consistant au regard de $(\mathcal{L}, \mathtt{CN})$ ssi $\mathtt{CN}(H) \neq \mathcal{L}$. Sinon $H$ est inconsistant.*

Dans le cadre des problèmes concernant le traitement de l'inconsistance dans des bases de connaissances, ont été développés des systèmes d'argumentation utilisant la définition de

l'argument. Ces systèmes sont construits autour d'un langage propositionnel. Dans la littérature, [SL92] et [EGKF93] y distinguent deux types de connaissances d'une base $\Sigma$ : les connaissances sûres formant un ensemble $K$ qui représente le noyau de connaissances et les croyances regroupées dans un ensemble $E$. De ce fait, une base de connaissances est une paire $\Sigma = (K, E)$. En plus de cela, [SL92] partage l'ensemble des connaissances sûres $K$ en deux sous-ensembles : l'ensemble $F$ contenant les faits sûrs et l'ensemble $R$ contenant les règles sûres ($K = F \cup R$).

**Exemple 75.** *Soient les formules propositionnelles suivantes issues de $\mathcal{L}$ : $T_S$ = "La Terre est sphérique", $S_L$ = "Le Soleil est loin de la Terre", $O_B$ = "Au même moment le Soleil peut se refléter au fond d'un puits à Sienne et ne pas tomber verticalement sur un obélisque d'Alexandrie" et $D_T$ = "Le diamètre de la Terre est calculable". On peut construire $\Sigma = (F \cup R, E)$ la base de connaissances telle que :*
- $F = \{O_B\}$,
- $E = \{T_S, S_L\}$,
- $R = \{O_B \wedge T_S \wedge S_L \rightarrow D_T\}$.

Commme nous l'avons évoqué ci-dessus, l'argument se caractérise par une raison qui permet de justifier et à fortiori de croire en une proposition. Ainsi dans la littérature autour des systèmes d'argumentation, trois formes de base de la notion d'argument ont été distinguées : l'arbre d'inférence, la séquence d'inférence comme déduction et enfin le couple (Prémisses, Conclusion). Nous présenterons ici les éléments autour de cette dernière approche, particulièrement développée dans [EGKF93].

**Définition 96** (Définition d'un argument [EGKF93])**.** *Un argument $\alpha$ dans le contexte $K$ est une paire $(H, h)$ où $h$ est une formule de $\mathcal{L}$ et $H$ est une sous-base de $E$ qui satisfait les conditions suivantes :*
*i) $K \cup H$ est consistant,*
*ii) $h \in \mathtt{CN}(K \cup H)$, et*
*ii) $H$ est minimal (il n'existe pas de sous-ensemble de $H$ qui satisfasse i) et ii).*
*$H$ est appelé support de l'argument et $h$ sa conclusion.*

**Notations :** $Supp(\alpha)$ et $Conc(\alpha)$ renvoient respectivement au support $H$ et à la conclusion $h$ de l'argument $\alpha = (H, h)$. Pour $\mathcal{S} \subseteq \Sigma$, $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ représente l'ensemble des arguments qui peuvent être construits depuis $\mathcal{S}$ au vu de la Définition 96.

**Exemple 76** (Exemple 75 suite)**.** *Soit la base de connaissances $\Sigma = (\{O_B\} \cup \{O_B \wedge T_S \wedge S_L \rightarrow D_T\}, \{T_S, S_L\})$, l'argument $\beta$ peut se décrire de la manière suivante : $\beta = (\{T_S, S_L\}, D_T)$. On remarque que cet argument respecte bien les trois conditions d'existence. Dans la pratique on ne considère souvent aucun fait et aucune règle comme sûrs $K = \{\emptyset\}$, ce qui permet d'intégrer dans l'argument (précisément dans son support) la totalité des inférences conduisant à la conclusion, en pratique on écrira donc plutôt $\beta = (\{T_S, S_L, O_B, O_B \wedge T_S \wedge S_L \rightarrow D_T\}, D_T)$.*

Il peut être également défini la notion de sous-argument, lequel reste tout de même un argument à part entière (respectant les conditions de consistance, d'implication de la conclusion et de minimalité du support).

**Définition 97** (Définition d'un sous-argument)**.** *Soient deux arguments $(H_1, h_1)$ et $(H_2, h_2)$, $(H_1, h_1)$ est un sous-argument de $(H_2, h_2)$ ssi $H_1 \subseteq H_2$.*

**Exemple 77** (Exemple 76 suite)**.** *L'argument $\alpha = (\{T_S\}, T_S)$ est un sous-argument de $\beta$.*

## A.2 Générer une relation d'attaque

L'attaque est une composante incontournable des systèmes d'argumentation, elle caractérise les différents conflits pouvant exister entre arguments. Plusieurs relations d'attaque ont été définies dans la littérature. Nous présentons, ici, les plus connues et les plus importantes d'entre elles : la réfutation, la contrariété, la forte réfutation et la très forte réfutation. Notre contribution consistera en l'introduction de trois relations la forte contrariété, la forte contrariété inversée et l'attaque consensuelle, nous permettant d'aboutir à des systèmes vérifiant certaines propriétés souhaitables de la relation d'attaque introduites par [AB09] et détaillées dans la suite de cette annexe. La relation d'attaque consensuelle est réutilisée dans le manuscrit (Chapitres 4 à 6).

### A.2.1 La réfutation

La réfutation consiste à nier la conclusion soutenue par un argument en présentant un autre argument soutenant une conclusion contraire.

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\alpha$ | : | La terre est sphérique. |
| Conclusion de $\alpha$ | : | La terre est sphérique. |

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\gamma$ | : | 1) Rien ne peut être suspendu de bas en haut sur une sphère.<br>2) Si rien ne peut être suspendu de bas en haut sur une sphère, alors nous ne sommes pas sur une sphère. |
| Conclusion de $\gamma$ | : | La terre n'est pas sphérique. |

Les deux arguments supportent bien des conclusions contradictoires "La terre est sphérique" et "La terre n'est pas sphérique". On dit alors que l'argument $\alpha$ réfute l'argument $\gamma$ et l'argument $\gamma$ réfute l'argument $\alpha$. Cette relation est donc *symétrique* et les deux arguments $\alpha$ et $\gamma$ ont les mêmes attaquants (réfutants). Un grand nombre de systèmes d'argumentation issus de la littérature [Pol92, SL92, EGKF93, PS97] utilisent cette relation d'attaque, fluctuant selon la définition formelle de l'argument. Ici, nous introduisons la définition formelle présente dans [EGKF93].

**Définition 98** (Réfutation [EGKF93])**.** *Soient $(H_i, h_i)$, $(H_j, h_j)$ deux arguments construits à partir d'une base de connaissances $\Sigma$. $(H_i, h_i)$ réfute $(H_j, h_j)$ ssi $h_i \equiv$[16] $\neg\, h_j$. C'est à dire qu'un argument est réfuté si et seulement s'il existe un argument pour la négation de sa conclusion. On note $((H_i, h_i), (H_j, h_j)) \in \mathcal{R}_r$.*

**Exemple 78** (Exemple 76 suite)**.** *Soit la base de connaissances $\Sigma = (\{\emptyset\}, \{O_B, O'_B, T_S, S_L, O_B \wedge T_S \wedge S_L \rightarrow D_T\, O'_B \rightarrow \neg T_S\})$, avec $O'_B$ = "Rien ne peut être suspendu de bas en haut sur une sphère", les arguments $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ peuvent s'écrire de la façon suivante :*

- $\alpha = (\{T_S\}, T_S)$,
- $\beta = (\{T_S, S_L, O_B, O_B \wedge T_S \wedge S_L \rightarrow D_T\}, D_T)$,
- $\gamma = (\{O'_B, O'_B \rightarrow \neg T_S\}, \neg T_S)$.

*Soit le système d'argumentation* AF $= \langle \{\alpha, \beta, \gamma\}, \mathcal{R}_r \rangle$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.1.*

16. $\equiv$ dénote l'équivalence logique

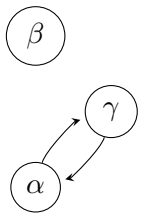



FIGURE A.1 – Le graphe orienté AF par la réfutation

Si la réfutation est une attaque efficace pour témoigner de l'inconsistance d'un ensemble formé des conclusions de deux arguments, certaines inconsistances, notamment celles présentes dans les ensembles formés d'éléments issus du support d'un argument (e.g. $\beta$ affirme que la terre est sphérique) et de la conclusion d'un autre (e.g. $\gamma$ conclut que la terre n'est pas sphérique) ne sont pas prises en charge par la réfutation.

### A.2.2 La contrariété

La deuxième façon d'attaquer un argument consiste à nier un élément du support de l'argument. En cela l'attaque n'affecte pas directement la conclusion de l'argument. Autrement dit, un argument contrarié n'est pas forcément réfuté.

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\delta$ | : | 1) Rien ne peut être suspendu de bas en haut sur une sphère<br>2) Si rien ne peut être suspendu de bas en haut sur une sphère alors nous ne sommes pas sur une sphère |
| Conclusion de $\delta$ | : | La terre n'est pas sphérique |

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\gamma$ | : | 1) La terre est sphérique<br>2) Si rien ne peut être suspendu de bas en haut sur une sphère alors nous ne sommes pas sur une sphère |
| Conclusion de $\gamma$ | : | Quelque chose peut être suspendu de bas en haut |

Les deux arguments, respectivement $\gamma$ et $\delta$, supportent bien des conclusions "La terre n'est pas sphérique" et "Quelque chose peut être suspendu de bas en haut" qui contredisent un élément du support de l'autre argument "La terre est sphérique" et "Rien ne peut être suspendu de bas en haut sur une sphère". On dit alors que l'argument $\gamma$ contrarie l'argument $\delta$ et l'argument $\delta$ contrarie l'argument $\gamma$. Cette relation n'est pas pour autant *symétrique*. Par exemple, l'argument $\delta$ contrarie l'argument $\alpha$ mais l'argument $\alpha$ ne contrarie pas l'argument $\delta$. Dans [EGKF93], la contrariété consiste donc à réfuter un élément du support de l'argument.

**Définition 99** (Contrariété [EGKF93])**.** *Soient $(H_i, h_i)$, $(H_j, h_j)$ deux arguments construits à partir d'une base de connaissances $\Sigma$. $(H_i, h_i)$ contrarie $(H_j, h_j)$ ssi $\exists\ h_k \in H_j$ tel que $h_k \equiv \neg\ h_i$. C'est à dire qu'un argument est contrarié si et seulement s'il existe un argument pour la négation d'un élément de son support. On note $((H_i, h_i), (H_j, h_j)) \in \mathcal{R}_c$.*

**Exemple 79** (Exemple 78 suite)**.** *Soit la base de connaissances $\Sigma = (\{\emptyset\}, \{O_B, O'_B, T_S, S_L, O_B \wedge T_S \wedge S_L \rightarrow D_T\, O'_B \rightarrow \neg T_S\})$, les arguments $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ peuvent s'écrire de la façon suivante :*

- $\alpha = (\{T_S\}, T_S)$,
- $\beta = (\{T_S, S_L, O_B, O_B \wedge T_S \wedge S_L \rightarrow D_T\}, D_T)$,
- $\gamma = (\{O'_B, O'_B \rightarrow \neg T_S\}, \neg T_S)$,
- $\delta = (\{T_S, O'_B \rightarrow \neg T_S\}, \neg O'_B)$,

*Soit le système d'argumentation* $\texttt{AF} = \langle\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \mathcal{R}_c\rangle$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.2.*

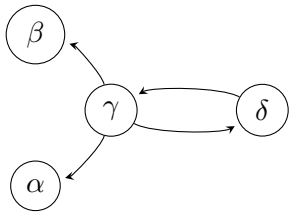



FIGURE A.2 – Le graphe orienté AF par la contrariété

Si dans l'exemple précédent la contrariété témoigne de tous les conflits entre arguments, détaillons de nouveaux arguments qui nous permettent d'affirmer que la contrariété ne témoigne pas de tous les types d'inconsistance. Un contre-exemple peut être celui concernant la non prise en charge par la contrariété de l'inconsistance des ensembles formés d'éléments issus du support d'un argument et de la conclusion d'un autre.

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\kappa$ | : | Si un bateau vient de l'horizon, le mât se voit avant la proue<br>ou à l'inverse, s'il s'éloigne, le mât disparaît en dernier.<br>alors la terre est courbée. |
| Conclusion de $\kappa$ | : | Si un bateau vient de l'horizon, le mât se voit avant la proue<br>ou à l'inverse, s'il s'éloigne, le mât disparaît en dernier.<br>alors la terre est courbée. |

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\eta$ | : | 1) Si un bateau vient de l'horizon, le mât se voit avant la proue<br>ou à l'inverse, s'il s'éloigne, le mât disparaît en dernier.<br>2) La terre n'est pas courbée. |
| Conclusion de $\eta$ | : | La terre est pentue. |

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\iota$ | : | Si le soleil vient de l'horizon, son sommet se voit avant le reste<br>ou à l'inverse, s'il s'éloigne, il disparaît en dernier. |
| Conclusion de $\iota$ | : | Le soleil tourne autour de la terre. |

Si l'argument $\iota$ ne contrarie et n'est contrarié par aucun argument de ce système, la conclusion de l'argument $\kappa$ n'est pas en mesure de former un ensemble inconsistant avec un seul élément du support de l'argument $\eta$, comme décrit dans l'Exemple 80.

**Exemple 80** (Exemple 79 suite)**.** *Soit la base de connaissances* $\Sigma = (\{\emptyset\}, \{O''_B, O'''_B, T_C, T_P, T_S\})$, *avec* $O''_B$ = *"Si un bateau vient de l'horizon, le mât se voit avant la proue"*, $O'''_B$ = *"Si le soleil*

*vient de l'horizon, son sommet supérieur se voit avant le reste", $T_C$ = "La terre est courbée", $T_P$ = "La terre est pentue" et $S_T$ = "Le soleil tourne autour de la terre", les arguments $\kappa$, $\eta$ et $\iota$ peuvent s'écrire de la façon suivante :*

- $\kappa$ $(\{O''_B \rightarrow T_C\}, O''_B \rightarrow T_C)$,
- $\eta = (\{O''_B, \neg T_C, O''_B \wedge \neg T_C \rightarrow T_P\}, T_P)$,
- $\iota = (\{O'''_B, O'''_B \rightarrow S_T\}, S_T)$,

*Soit le système d'argumentation* AF $= \langle\{\kappa, \eta, \iota\}, \mathcal{R}_c\rangle$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.3.*

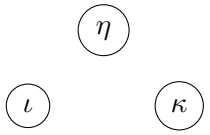



FIGURE A.3 – Le graphe orienté AF par la contrariété

### A.2.3 La forte réfutation

Une façon de généraliser la contrariété peut être de se concentrer sur les sous-arguments. En effet pour contrarier, un argument doit être en mesure d'avancer une conclusion formant avec l'élément du support d'un autre argument, un ensemble inconsistant. Lorsque l'ensemble inconsistant est celui formé par sa conclusion et par la conjonction de plusieurs éléments du support de l'autre argument, l'inconsistance n'est pas prise en charge par la relation de contrariété. Il a donc fallu raffiner la notion de réfutation, de manière à ce qu'une attaque soit générée lorsqu'un argument est en mesure de réfuter un sous-argument. Cette relation appelée la forte réfutation est définie dans [Cay95].

**Définition 100** (Forte réfutation [Cay95])**.** *Soient $(H_i, h_i)$, $(H_j, h_j)$ deux arguments construits à partir d'une base de connaissances $\Sigma$. $(H_i, h_i)$ réfute fortement $(H_j, h_j)$ ssi $\exists$ $(H_l, h_l)$ un sous-argument de $(H_j, h_j)$ tel que $(H_i, h_i)$ réfute $(H_l, h_l)$. C'est à dire qu'un argument est fortement réfuté si et seulement s'il existe un argument pour la négation de la conclusion d'un de ses sous-arguments. On note $((H_i, h_i), (H_j, h_j)) \in \mathcal{R}_{fr}$.*

**Exemple 81** (Exemple 80 suite)**.** *Soit le système d'argumentation* AF $= \langle\{\kappa, \eta, \iota\}, \mathcal{R}_{fr}\rangle$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.4.*

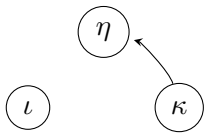



FIGURE A.4 – Le graphe orienté AF par la forte réfutation

**Propriété 23.**

- *Si $(H_1, h_1)$ réfute $(H_2, h_2)$ alors $(H_1, h_1)$ réfute fortement $(H_2, h_2)$.*
- *Si $(H_1, h_1)$ contrarie un argument alors $(H_1, h_1)$ est réfuté.*
- *Si $(H_1, h_1)$ contrarie $(H_2, h_2)$ alors $(H_1, h_1)$ réfute fortement $(H_2, h_2)$.*

On remarque qu'à l'instar de la contrariété et à l'inverse de la réfutation, la forte réfutation n'est pas symétrique.

Lorsque l'ensemble formé par des éléments issus des supports de deux arguments sont inconsistants sans que l'ensemble formé par leurs conclusions ne le soit, la forte contrariété ne témoigne pas de l'inconsistance. Détaillons un nouvel argument qui nous permet d'affirmer ce propos.

| | | |
|---|---|---|
| Support de $\lambda$ | | Si un bateau vient de l'horizon, le mât se voit avant la proue<br>ou à l'inverse, s'il s'éloigne, le mât disparaît en dernier.<br>alors la terre est courbée et<br>si le soleil tourne autour de la terre. |
| Conclusion de $\lambda$ | : | Le tour du monde est envisageable. |

**Exemple 82** (Exemple 80 suite)**.** *Soit la base de connaissances* $\Sigma = (\{\emptyset\}, \{O''_B, O'''_B, T_C, T_P, T_S, S_T, T_M\})$*, avec* $T_M$ *= "Le tour du monde est envisageable".*

– $\lambda = (\{O''_B \rightarrow T_C, S_T, (T_S \wedge (O''_B \rightarrow T_C)) \rightarrow T_M\}, T_M)$,

*Soit le système d'argumentation* $\texttt{AF} = \langle\{\kappa, \eta, \iota, \lambda\}, \mathcal{R}_{fr}\rangle$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.5.*

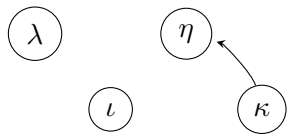



FIGURE A.5 – Le graphe orienté AF par la forte réfutation

L'argument $\lambda$ n'est pas en mesure de réfuter un quelconque sous-argument, aucun argument n'est en mesure de réfuter un sous-argument de $\lambda$. Ainsi la forte réfutation ne peut témoigner de l'inconsistance de l'ensemble formé par les éléments des supports de $\lambda$ et $\eta$.

### A.2.4 La forte contrariété

Il s'agit donc de générer une attaque en se basant sur la contrariété entre un sous-argument et un argument. Nous proposons pour cela la relation de forte contrariété.

**Définition 101** (Forte contrariété)**.** *Soient* $(H_i, h_i)$*,* $(H_j, h_j)$ *deux arguments construits à partir d'une base de connaissances* $\Sigma$*.* $(H_i, h_i)$ *contrarie fortement*$(H_j, h_j)$ *ssi* $\exists$ $(H_l, h_l)$ *un sous-argument de* $(H_i, h_i)$ *tel que* $(H_l, h_l)$ *contrarie* $(H_j, h_j)$*. C'est à dire qu'un argument est fortement contrarié si et seulement s'il existe un sous-argument pour la négation d'un élément de son support. On note* $((H_i, h_i), (H_j, h_j)) \in \mathcal{R}_{fc}$*.*

Lorsque tous les conflits minimaux engagés dans la base de connaissances sont au plus binaires, c'est à dire que les ensembles inconsistants minimaux formés par les éléments issus des supports de deux arguments ont une cardinalité de deux, la relation de forte contrariété est symétrique.

Lorsque les conflits minimaux engagés y sont au plus ternaires comme dans l'exemple illustré ci-dessous, la forte contrariété se révèle être une relation d'attaque entre arguments témoignant de toutes les inconsistances au sein des ensembles composés d'éléments issus de supports d'arguments.

**Exemple 83** (Exemple 82 suite)**.** *Soit le système d'argumentation* $\texttt{AF} = \langle\{\kappa, \eta, \iota, \lambda\}, \mathcal{R}_{fc}\rangle$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.6.*

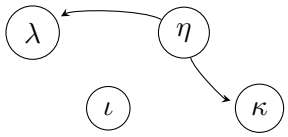



FIGURE A.6 – Le graphe orienté AF par la forte contrariété

Il se peut donc qu'on veuille qu'une telle relation capturant un conflit entre deux arguments (ou plutôt entre un argument et un sous-argument) ne soit pas nécessairement en faveur du sous-argument contrariant (par le sens donné à l'attaque). Ainsi, dans l'Exemple 83, pourquoi cela devrait être nécessairement l'argument $\eta$ qui attaque $\lambda$ et non pas l'inverse ? Nous proposons d'introduire une relation de forte contrariété qui capture le fait qu'un élément du support d'un argument forme un ensemble inconsistant avec la conclusion d'un sous-argument. Nous proposons de dire alors que l'argument formé par le sous-argument est fortement contrariée de manière inversée.

**Définition 102** (Forte contrariété inversée)**.** *Soient* $(H_i, h_i)$*,* $(H_j, h_j)$ *deux arguments construits à partir d'une base de connaissances* $\Sigma$*.* $(H_i, h_i)$ *contrarie fortement de manière inversée* $(H_j, h_j)$ *ssi* $\exists\ (H_k, h_k)$ *un sous-argument de* $(H_j, h_j)$ *tel que* $\exists\ h \in H_i$ *tel que* $h \equiv \neg\ h_k$*. C'est à dire qu'un argument est fortement contrarié de manière inversée si et seulement s'il existe un élément du support d'un argument pour la négation de la conclusion d'un de ses sous-arguments. On note* $((H_i, h_i), (H_j, h_j)) \in \mathcal{R}_{fc^{-1}}$*.*

**Exemple 84** (Exemple 82 suite)**.** *Soit le système d'argumentation* $\texttt{AF} = \langle\{\kappa, \eta, \iota, \lambda\}, \mathcal{R}_{fc^{-1}}\rangle$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.7.*

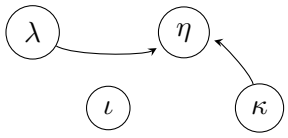



FIGURE A.7 – Le graphe orienté AF par la forte contrariété inversée

### A.2.5 La très forte réfutation

Une façon de capturer l'ensemble des conflits entre arguments par une relation d'attaque, en ne privilégiant pas par le sens de l'attaque un argument sur un autre est de construire une relation d'attaque symétrique qui tient compte de tout conflit susceptible d'apparaître à partir des supports des arguments (comprenant donc la conclusion). Cette relation appelée la forte réfutation est présentée dans [AB10].

**Définition 103** (Très forte réfutation [AB10])**.** *Soient* $(H_i, h_i)$*,* $(H_j, h_j)$ *deux arguments construits à partir d'une base de connaissances* $\Sigma$*.* $(H_i, h_i)$ *réfute très fortement* $(H_j, h_j)$ *ssi* $\exists\ x \in \mathit{CN}(H_i)$ *et* $y \in \mathit{CN}(H_j)$ *tel que* $\{x, y\}$ *est inconsistant. C'est à dire qu'un argument est très fortement réfuté si et seulement s'il existe une formule dérivée de son support formant un ensemble inconsistant avec une formule dérivée du support d'un autre argument. On note* $((H_i, h_i), (H_j, h_j)) \in \mathcal{R}_{tfr}$*.*

**Exemple 85** (Exemple 82 suite)**.** *Soit le système d'argumentation* $\texttt{AF} = \langle\{\kappa, \eta, \iota, \lambda\}, \mathcal{R}_{fr}\rangle$*. Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.8.*

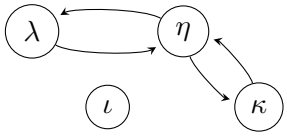



FIGURE A.8 – Le graphe orienté AF par la très forte réfutation

## A.3 Quelques propriétés pour bien choisir cette relation

L'énumération précédente des principales relations d'attaque disponibles dans la littérature et proposées dans cette annexe incite le modélisateur à se poser les bonnes questions pour retenir telle ou telle relation d'attaque. C'est l'objet de l'étude réalisée dans [AB09]. Dans ce travail, la base de connaissances contient des formules d'un langage $\mathcal{L}$, et les arguments sont construits à partir d'un opérateur de conséquence CN vérifiant les axiomes de Tarski.

### A.3.1 Notion de conflits

Il paraît pertinent que la notion de conflit minimal soit au coeur de cette démarche de choix.

**Définition 104** (Conflit minimal [AB09])**.** *Soit $\Sigma$ une base de connaissances, et $C \subseteq \Sigma$. L'ensemble $C$ est un conflit minimal ssi :*
- *$C$ est inconsistant,*
- *$\forall\ x \in C$, $C \setminus \{x\}$ est consistant.*

*$\mathcal{C}_\Sigma$ correspond à l'ensemble de tous les conflits minimaux de $\Sigma$.*

Un système d'argumentation doit donc être en mesure de par sa relation d'attaque $\mathcal{R}$ de capturer des conflits minimaux.

**Définition 105** (Capture de conflits [AB09])**.** *Soit $C \in \mathcal{C}_\Sigma$. Un couple $(\alpha_i, \alpha_j)$ dans $\mathcal{R}$ capture $C$ si $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$.*

Une fois les captures de ces conflits minimaux réalisées, [AB09] caractérisent des types de relation d'attaque correspondant à l'ensemble des captures.

### A.3.2 Propriétés primitives d'une relation d'attaque

Une relation d'attaque $\mathcal{R}$ doit donc détenir certaines propriétés "primitives", l'assurant de capturer une partie des conflits minimaux apparaissant dans la base de connaissances $\Sigma$ considérée. Une première façon de s'assurer que la relation d'attaque capture bien des conflits minimaux est de conférer le caractère nécessaire de leur présence dans l'union des supports de deux arguments s'attaquant. Cette notion a été envisagée sous le nom de dépendance.

**Définition 106** (Dépendance aux conflits [AB09])**.** *Une relation d'attaque est dépendante au conflit ssi $\forall\ \alpha_i,\ \alpha_j \in \mathcal{A}(\Sigma)$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ implique qu'il existe un conflit minimal $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$.*

**Exemple 86.** *La réfutation tout comme la contrariété sont des relations d'attaque dépendantes aux conflits.*

La dépendance aux conflits assure donc qu'aucun conflit ne sera inventé. Cependant, une telle relation peut ne pas capturer certains conflits présents dans l'union des supports de deux arguments. Il est donc nécessaire d'assurer un caractère exhaustif pour cette capture. Cette notion a été envisagée sous le nom de sensibilité.

**Définition 107** (Sensibilité aux conflits [AB09]). *Une relation d'attaque est sensible au conflit ssi* $\forall\ \alpha_i,\ \alpha_j \in \mathcal{A}(\Sigma)$ *tel que il existe un conflit minimal* $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$ *alors on a soit* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ *ou* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$.

**Exemple 87.** *La forte contrariété, la forte contrariété inversé ainsi que la très forte réfutation sont des relations d'attaque sensibles aux conflits.*

La sensibilité aux conflits assure qu'aucun conflit ne sera oublié. Cependant le fait qu'une relation d'attaque soit sensible au conflit et capture tous les conflits minimaux ne signifie pas nécessairement qu'elle soit basée strictement sur des conflits minimaux présents dans la base de connaissances. Ainsi, le fait qu'une relation d'attaque capture tous les conflits minimaux n'est pas suffisant pour assurer l'absence de conflits au sein de l'union des supports des arguments formant une extension à la Dung.

### A.3.3 Respect ou violation de la consistance des extensions

L'une des contraintes envisageables pour retenir telle ou telle relation d'attaque est donc d'étudier la consistance des extensions du système d'argumentation.

**Définition 108** (Consistance d'une extension [AB09]). *Soit* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$, *un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances* $\Sigma$. *Une extension* $\mathcal{E}$ *(sous une sémantique donnée) satisfait la consistance ssi* $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{E}} Supp(\alpha)$ *est consistant.*

Le but ici est donc d'étudier la relation d'attaque appropriée pour un système d'argumentation. Par relation appropriée, il est entendu une relation qui assure la consistance des extensions. Il va être envisagé deux cas : celui où tous les conflits minimaux contenus dans $\mathcal{C}_\Sigma$ sont binaires, et le cas où certains conflits minimaux contenus dans $\mathcal{C}_\Sigma$ peuvent être ternaires ou plus.

#### A.3.3.1 Cas particulier des conflits minimaux binaires :

Nous allons ici considérer une base de connaissances dont les conflits minimaux sont tous binaires (○). Cela signifie que tout conflit minimal contient exactement deux formules. Ainsi, il n'y a aucune formule incohérente dans la base.

Le résultat suivant est d'une grande importance car il fournit une classe de relations d'attaque qui assurent la cohérence des extensions.

**Proposition 15** ([AB09]). *Soit* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$, *un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances* $\Sigma$ *telle que tous les conflits minimaux soit binaires. Si* $\mathcal{R}$ *est sensible aux conflits, alors pour tout* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\Sigma)$ *tel que* $\mathcal{B}$ *est sans-conflit, l'ensemble* $\bigcup_{\alpha_i \in \mathcal{B}} Supp(\alpha_i)$ *est consistant.*

Le résultat ci-dessus n'est pas surprenant. Comme indiqué précédemment, pour assurer la consistance d'un ensemble sans-conflit d'arguments, la relation d'attaque doit capturer les conflits minimaux. Toutefois, il n'est pas nécessaire à la relation d'attaque qu'elle soit dépendante aux conflits.

**Corollaire 3** ([AB09]). *Soit* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$, *un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances* $\Sigma$ *telle que tous les conflits minimaux soient binaires. Si* $\mathcal{R}$ *est sensible aux conflits, alors* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$ *satisfait la consistance des extensions.*

Cependant, le fait que la relation d'attaque soit sensible et dépendante aux conflits, toujours dans le cas de conflits minimaux binaires, assure qu'un ensemble d'arguments, dont l'union des supports est consistant, soit sans-conflit.

**Corollaire 4** ([AB09]). *Soit $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$, un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances $\Sigma$ telle que tous les conflits minimaux soient binaires. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'attaque sensible et dépendante au conflit. Pour tout $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\Sigma)$, $\mathcal{B}$ est sans-conflit ssi $\bigcup_{\alpha_i \in \mathcal{B}} Supp(\alpha_i)$ est consistant.*

Il a donc été rappelé que lorsque tous les conflits minimaux d'une base sont binaires, une relation sensible et dépendante aux conflits peut être utilisée pour le système lequel satisfait bien la consistance des extensions et ne procure pas de conflits sans inconsistance d'un ensemble formé par des éléments issus de supports d'arguments.

#### A.3.3.2 Cas général des conflits minimaux ternaires ou plus :

Malheureusement, ce n'est pas le cas lorsque ces conflits minimaux sont ternaires (●) ou plus (●). Ce paragraphe montre donc qu'une relation sensible et dépendante aux conflits peut conduire à la violation de cette consistance.

**Proposition 16** ([AB09]). *Soit $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\}$ où $n > 2$ et $\mathcal{C}_\Sigma = \{\Sigma\}$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}(\Sigma)$ t.q. $Supp(\alpha_i) = \{x_i\}$. Si $\mathcal{R}$ est sensible et dépendante aux conflits, alors l'ensemble $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est une extension admissible de $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$.*

Le résultat précédent peut être généralisé comme suit :

**Corollaire 5** ([AB09]). *Soit $\mathcal{C}_\Sigma$ t.q. $\exists\ C \in \mathcal{C}_\Sigma$ et $|C| > 2$. Si $\mathcal{R}$ est sensible et dépendante aux conflits, alors le système $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$ peut violer la consistance de ses extensions.*

Le tableau suivant récapitule les propriétés de dépendance et de sensibilité aux conflits des relations d'attaque $\mathcal{R}_i$ présentées dans la section A.2 et de respect de la consistance des extensions des systèmes $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R}_i \rangle$ dans les cas particulier et général.

| | $\mathcal{R}_r$ | $\mathcal{R}_c$ | $\mathcal{R}_{fr}$ | $\mathcal{R}_{fc}$ | $\mathcal{R}_{fc^{-1}}$ | $\mathcal{R}_{tfr}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dépendance | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| Sensibilité | | | | ◍ | ◍ | ● |
| Consistance | | | | ○ | ○ | ○ |

### A.3.4 Assurance de la consistance des extensions

Comment s'assurer qu'une relation d'attaque puisse satisfaire à coup sûr la consistance des extensions pour un système d'argumentation ? La prise en compte des sous-arguments paraît être une réponse à cela, mais lorsque les éléments d'un conflit minimal forment une partition d'éléments distinctement inclus dans plus de deux arguments, pour la relation d'attaque, ni la propriété de sensibilité, et encore moins la propriété de dépendance n'assurent au système la consistance de ses extensions.

Lorsqu'une relation d'attaque $\mathcal{R}$ est à la fois sensible et dépendante aux conflits, $\mathcal{R}$ ne fait aucune différence entre arguments issus de supports équivalents :

**Proposition 17** ([AB09]). *Soit $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$, un système d'argumentation avec $\mathcal{R}$ une relation d'attaque sensible et dépendante au conflit. Pour tout $\alpha_i$, $\alpha_j \in \mathcal{A}(\Sigma)$, si $\mathtt{CN}(Supp(\alpha_i)) = \mathtt{CN}(Supp(\alpha_j))$, alors pour tout $\alpha_k \in \mathcal{A}(\Sigma)$, $(\alpha_i, \alpha_k) \in \mathcal{R}$ ou $(\alpha_k, \alpha_i) \in \mathcal{R}$ ssi $(\alpha_j, \alpha_k) \in \mathcal{R}$ ou $(\alpha_k, \alpha_j) \in \mathcal{R}$.*

Lorsqu'une relation d'attaque $\mathcal{R}$ capture un conflit minimal entre deux sous-arguments $\alpha'_i$ et $\alpha'_j$, il parait légitime qu'elle capture le conflit entre $\alpha_i$ et $\alpha'_j$ avec $\alpha'_i$ sous-argument de $\alpha_i$, ainsi qu'entre $\alpha'_i$ et $\alpha_j$ avec $\alpha'_j$ sous-argument de $\alpha_j$.

**Définition 109** (Relation homogène [AB09]). *Soient $\alpha_i$ et $\alpha_j$ deux arguments issus de $\mathcal{A}(\Sigma)$ tels que $Supp(\alpha_i) \subseteq Supp(\alpha_j)$. Pour tout $\alpha_k \in \mathcal{A}(\Sigma)$,*
*$R_1$ : $(\alpha_i, \alpha_k) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\alpha_j, \alpha_k) \in \mathcal{R}$.*
*$R_2$ : $(\alpha_k, \alpha_i) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\alpha_k, \alpha_j) \in \mathcal{R}$.*
*$\mathcal{R}$ est homogène si elle satisfait la règle $R_1$ et la règle $R_2$.*

En accord avec la notion de conflit minimal $C$, pour toute partition en deux sous-ensembles $X_1$ et $X_2$, ceux-ci sont consistants. Certains systèmes d'argumentation peuvent être en mesure de retranscrire l'ensemble de ces partitions au sein de supports d'arguments, précisément ceux dotés de relations d'attaque exhaustives.

**Définition 110** (Exhaustivité aux conflits [AB09]). *Soit $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$, un système d'argumentation où les arguments sont construits depuis une base de connaissances $\Sigma$.*

- *$\mathcal{R}$ est fortement exhaustive aux conflits ssi pour tout $C \in \mathcal{C}_\Sigma$ t.q. $|C| > 1$, pour tout sous-ensemble $X$ de $C$, il existe $\alpha_i, \alpha_j$ dans $\mathcal{A}(\Sigma)$ t.q. $Supp(\alpha_i) = X$, $Supp(\alpha_j) = C \setminus X$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ et $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$.*
- *$\mathcal{R}$ est faiblement exhaustive aux conflits ssi pour tout $C \in \mathcal{C}_\Sigma$ t.q. $|C| > 1$, pour tout sous-ensemble $X$ de $C$, il existe $\alpha_i, \alpha_j$ dans $\mathcal{A}(\Sigma)$ t.q. $Supp(\alpha_i) = X$, $Supp(\alpha_j) = C \setminus X$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}$ ou $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}$.*

La propriété suivante souligne le lien entre les différentes propriétés présentées au travers de cette annexe.

**Propriété 24** ([AB09]). *Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(\Sigma) \times \mathcal{A}(\Sigma)$.*

1. *Si $\mathcal{R}$ est fortement exhaustive aux conflits, alors $\mathcal{R}$ est faiblement exhaustive aux conflits.*
2. *Si $\mathcal{R}$ est homogène et faiblement exhaustive aux conflits, alors $\mathcal{R}$ est sensible aux conflits.*
3. *Si $\mathcal{R}$ est dépendante aux conflits, homogène et fortement exhaustive aux conflits, alors $\mathcal{R}$ est symétrique.*

Enfin, une proposition pour aboutir à un système qui satisfait la consistance de ses extensions (en tout cas) est de s'assurer du caractère homogène et faiblement exhaustif aux conflits de sa relation d'attaque.

**Proposition 18** ([AB09]). *Si $\mathcal{R}$ est homogène et faiblement exhaustive aux conflits alors le système $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R} \rangle$ satisfait la consistance de ses extensions.*

Outre l'importance de présenter le système d'argumentation abstrait à la Dung sur lequel se base la suite de nos travaux, cette annexe présente les propriétés requises pour la relation d'attaque du système et ce dans le but d'aboutir aux types de systèmes souhaités : principalement ceux satisfaisant la consistance de leurs extensions. Ainsi pour conclure cette annexe, nous proposerons une relation d'attaque dite consensuelle, laquelle sera réutilisée dans un cas où tous les conflits minimaux présents dans la base de connaissances seront binaires.

**Définition 111** (L'attaque consensuelle)**.** *Soient* $(H_i, h_i)$, $(H_j, h_j)$ *deux arguments construits à partir d'une base de connaissances* $\Sigma$. $(H_i, h_i)$ *attaque consensuellement* $(H_j, h_j)$ *sauf si* $\mathtt{CN}(H_i) \subseteq \mathtt{CN}(H_j)$. *C'est à dire qu'un argument est consensuellement attaqué si et seulement s'il existe un autre argument tel que l'ensemble des formules qui sont des conséquences logiques de son support ne forme pas un ensemble inclus dans l'ensemble des formules qui sont des conséquences logiques du support de l'argument. On note* $((H_i, h_i), (H_j, h_j)) \in \mathcal{R}_{ac}$.

**Exemple 88** (Exemple 82 suite)**.** *Soit le système d'argumentation* $\mathtt{AF} = \langle \{\kappa, \eta, \iota, \lambda\}, \mathcal{R}_{ac} \rangle$. *Le graphe d'attaque est représenté par la Figure A.9.*

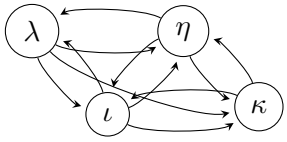



FIGURE A.9 – Le graphe orienté AF par l'attaque consensuelle

L'attaque consensuelle n'est pas dépendante aux conflits, en revanche elle est bien sensible aux conflits.

**Proposition 19.** *Soit* $\mathcal{R}_{ac}$ *une relation d'attaque consensuelle.* $\mathcal{R}_{ac}$ *est sensible aux conflits.*

**Preuve 34.** *Admettons que* $\mathcal{R}_{ac}$ *ne soit pas sensible aux conflits. Autrement dit, Soit un système d'argumentation* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}_{ac} \rangle$, $\exists\ \alpha_i,\ \alpha_j \in \mathcal{A}(\Sigma)$ *tel que il existe un conflit minimal* $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$ *avec* $(\alpha_i, \alpha_j) \notin \mathcal{R}_{ac}$ *et* $(\alpha_j, \alpha_i) \notin \mathcal{R}_{ac}$. *Si il existe un conflit minimal* $C \subseteq Supp(\alpha_i) \cup Supp(\alpha_j)$ *alors d'aprés la Définition 96,* $\mathtt{CN}(Supp(\alpha_i)) \neq \mathtt{CN}(Supp(\alpha_j))$ *puisque le support d'un argument est par définition consistant. Ainsi, il se vérifie que* $\mathtt{CN}(Supp(\alpha_i)) \nsubseteq \mathtt{CN}(Supp(\alpha_j))$ *ou* $\mathtt{CN}(Supp(\alpha_j)) \nsubseteq \mathtt{CN}(Supp(\alpha_i))$. *On a donc* $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{R}_{ac}$ *ou* $(\alpha_j, \alpha_i) \in \mathcal{R}_{ac}$. *Ceci est impossible.* □

Dans le cas particulier où tous les conflits sont minimaux binaires, le système d'argumentation comportant la relation d'attaque consensuelle est un système souhaité, il respecte bien la consistance de ses extensions.

**Proposition 20.** *Soit* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R}_{ac} \rangle$ *un système d'argumentation dans lequel la base de connaissances* $\Sigma$ *ne contient que des conflits minimaux binaires.* $\langle \mathcal{A}(\Sigma), \mathcal{R}_{ac} \rangle$ *satisfait la consistance de ses extensions.*

**Preuve 35.** *La Proposition 20 découle du Corollaire 3 et de la Proposition 19.* □

# B

# Annexe du Chapitre 2

Les démonstrations présentées dans cette annexe sont celles des propriétés issues du Chapitre 2, intitulé "Comparaison et unification des systèmes".

**Propriété 5.** *Les systèmes d'argumentation associés respectivement à* $\mathtt{PAF}_1 = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succ \rangle$ *et à* $\mathtt{PAF}_2 = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *(avec* $\succ$ *la relation stricte de* $\succeq$*) sont équivalents.*

**Preuve 1.** *Soient Ext(*$\mathtt{PAF}_1$*) et Ext(*$\mathtt{PAF}_2$*), les ensembles de toutes les extensions admissibles pour ces deux systèmes,* $\mathtt{PAF}_1$ *et* $\mathtt{PAF}_2$*. Pour prouver l'équivalence de ces deux systèmes, nous allons montrer que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext(*$\mathtt{PAF}_2$*)* $\subseteq$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_1$*) et Ext(*$\mathtt{PAF}_1$*)* $\subseteq$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_2$*) :*

1. *Ext(*$\mathtt{PAF}_2$*)* $\subseteq$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_1$*). Soit* $\mathcal{E} \in$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_1$*). Considérons que* $\mathcal{E} \notin$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_2$*). Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}_2$*. En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{PAF}_2$*.* $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}_2$ *(où* $\mathtt{Def}_2$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$*, la relation stricte de* $\succeq$*, par la Définition 19). Ceci signifie que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$*. Il se vérifie alors que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}_1$ *(où* $\mathtt{Def}_1$ *est défini à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$*). Ainsi,* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{PAF}_1$*. Ce qui contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}_1$*.*

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* $\mathtt{PAF}_2$*. Cela signifie que* $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *et* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}_2$ *et* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}_2$*. En accord avec la Définition 19, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}_2$ *on a* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$*, i.e* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}_1$*. Mais,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}_1$*, i.e* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}_1$*, i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$*, i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}_2$*. Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* $\mathtt{PAF}_2$*.*

2. *Ext(*$\mathtt{PAF}_1$*)* $\subseteq$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_2$*). Soit* $\mathcal{E} \in$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_2$*). Considérons que* $\mathcal{E} \notin$ *Ext(*$\mathtt{PAF}_1$*). Cela signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}_1$*. En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{PAF}_1$*.* $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}_1$ *(*$\mathtt{Def}_1$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$*). Cela signifie que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$*. Par la Définition 19, il se vérifie aussi que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}_2$ *(où* $\mathtt{Def}_2$ *est défini à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$*, la relation stricte de* $\succeq$*). Ainsi,* $\mathcal{E}$ *est sans-conflit pour* $\mathtt{PAF}_2$*. Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une*

*extension admissible pour* $\mathtt{PAF}_2$.

$*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* $\mathtt{PAF}_1$. *Cela signifie que* $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *et* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}_1$ *et* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}_1$. *Cependant, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}_1$ *on a* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$. *Par la Définition 19,* $\mathtt{Def}_2$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$, *la relation stricte de* $\succeq$, *i.e* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}_2$ . *Mais,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}_2$, *i.e* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}_2$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}_1$. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* $\mathtt{PAF}_1$.

□

**Propriété 6.** *Le système d'argumentation* $\mathtt{AF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *est équivalent au système d'argumentation associé à* $\mathtt{PAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \succeq \rangle$ *ssi :*

- $\nexists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \succ$.

**Preuve 2.** *Soient Ext(*AF*) et Ext(*PAF*) les ensembles de toutes les extensions admissibles pour ces deux systèmes,* AF *et* PAF. *Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext(*AF*)* $\subseteq$ *Ext(*PAF*) et Ext(*PAF*)* $\subseteq$ *Ext(*AF*) :*

1. *Ext(*AF*)* $\subseteq$ *Ext(*PAF*). Soit* $\mathcal{E} \in$ *Ext(*PAF*). Considérons que* $\mathcal{E} \notin$ *Ext(*AF*). Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* AF. *En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* AF. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$. *Mais,* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$ *puisque* $\nexists\ (\beta,\ \alpha) \in \succ$, *on a alors* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}$ *(*Def *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$ *en accord avec la Définition 19). Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit sans-conflit pour* PAF.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* AF. *Ceci signifie que* $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *et* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$. *Cependant, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$, *on a* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}$. *Mais,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* PAF, *i.e* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$ *(par propriété), i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses arguments pour* AF.

2. *Ext(*PAF*)* $\subseteq$ *Ext(*AF*). Soit* $\mathcal{E} \in$ *Ext(*AF*). Considérons que* $\mathcal{E} \notin$ *Ext(*PAF*). Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* PAF. *En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* PAF. *D'autre part,* $\mathcal{E}$ *est sans-conflit pour* AF, *i.e* $\nexists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$. *Il se vérifie donc que* $(\alpha,\ \beta) \notin \mathtt{Def}$. *(*Def *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$ *en accord avec la Définition 19). Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne soit pas sans-conflit pour* PAF.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* PAF. $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* AF, *i.e si* $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$, $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *alors* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$. *Par propriété* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$. *Ceci signifie que* $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *et* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}$ *et* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}$ *(*Def *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ$ *en accord avec la Définition 19). Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses arguments pour* PAF.

□

- $\nexists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{A}$ tel que $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\ \alpha) \in \succ$.

**Preuve 3.** *Soient Ext(*AF*) et Ext(*PAF*) les ensembles de toutes les extensions admissibles pour ces deux systèmes,* AF *et* PAF*. Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext(*AF*) $\subseteq$ Ext(*PAF*) et Ext(*PAF*) $\subseteq$ Ext(*AF*) :*

1. *Ext(*AF*) $\subseteq$ Ext(*PAF*). Soit $\mathcal{E} \in$ Ext(*PAF*). Considérons que $\mathcal{E} \notin$ Ext(*AF*). Ceci signifie que $\mathcal{E}$ n'est pas une extension admissible pour* AF*. En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 : $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour* AF*. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ tel que $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$. Mais $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$ puisque $\nexists\ (\beta,\ \alpha)$ tel que $(\beta,\ \alpha) \in \succ$ et $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$, il se vérifie ainsi que $(\alpha,\ \beta) \in$* Def *(*Def *est construit à partir de $\mathcal{R}$ et $\succ$ en accord avec la Définition 19). Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ soit sans-conflit pour* PAF*.*

   $*$*Cas 2 : $\mathcal{E}$ ne défend pas tous ses éléments pour* AF*. Ceci signifie que $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ et $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ tel que $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ et $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$. Cependant, puisque $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ et par propriété $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$, i.e $(\beta,\ \alpha) \in$* Def *(*Def *est construit à partir de $\mathcal{R}$ et $\succ$ en accord avec la Définition 19). Mais, $\mathcal{E}$ est une extension admissible pour* PAF*, i.e $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in$* Def*, i.e $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$ (en accord avec la Définition 19), i.e $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$. Cette conclusion contredit le fait que $\mathcal{E}$ ne défende pas tous ses arguments pour* AF*.*

2. *Ext(*PAF*) $\subseteq$ Ext(*AF*). Soit $\mathcal{E} \in$ Ext(*AF*). Considérons que $\mathcal{E} \notin$ Ext(*PAF*). Ceci signifie que $\mathcal{E}$ n'est pas une extension admissible pour* PAF*. En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 : $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour* PAF*. D'autre part, $\mathcal{E}$ est sans-conflit pour* AF*, i.e $\nexists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ tel que $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$. Il se vérifie alors que $(\alpha,\ \beta) \notin$* Def*. (*Def *est construit à partir de $\mathcal{R}$ et $\succ$ en accord avec la Définition 19). Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ ne soit pas sans-conflit pour* PAF*.*

   $*$*Cas 2 : $\mathcal{E}$ ne défend pas tous ses éléments pour* PAF*. $\mathcal{E}$ est une extension admissible pour* AF*, i.e si $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ et $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ tel que $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ alors $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$. Par propriété si $\exists\ \alpha,\ \beta$ tel que $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ alors $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$ est si $\exists\ \gamma,\ \beta$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ alors $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$. Ceci signifie que $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ et $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ tel que $(\beta,\ \alpha) \in$* Def *et $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in$* Def *(*Def *est construit à partir de $\mathcal{R}$ et $\succ$ en accord avec la Définition 19). Cette conclusion contredit le fait que $\mathcal{E}$ ne défende pas tous ses arguments pour* PAF*.*

□

**Propriété 7.**

– *Les deux systèmes d'argumentation $\langle \mathcal{A}, \mathtt{defeats} \rangle$ et $\langle \mathcal{A}, \mathtt{defeats}_{Bc} \rangle$ associés respectivement à* VAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathtt{val}, \mathtt{Pref} \rangle$ *et* VSAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *sont équivalents ssi* val $= \arg^{-1}$ *et* Pref $= \gg$.

**Preuve 4.** *Soient Ext(*VAF*) et Ext(*VSAF*) les ensembles de toutes les extensions admissibles pour ces deux systèmes,* VAF *et* VSAF*. Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext(*VAF*) $\subseteq$ Ext(*VSAF*) et Ext(*VSAF*) $\subseteq$ Ext(*VAF*) :*

1. *Ext(*VSAF*) $\subseteq$ Ext(*VAF*). Considérons que $\exists\ \mathcal{E} \in$ Ext(*VAF*) et $\mathcal{E} \notin$ Ext(*VSAF*). Puisque $\mathcal{E} \notin$ Ext(*VSAF*) et en accord avec la Définition 5, $\mathcal{E}$ n'est pas une extension admissible pour*

VSAF, *il y a deux possibilités :*
$*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VSAF. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$ *(*$\mathtt{defeats}_{Bc}$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_{Bc}$ *en accord avec la Définition 24), ainsi* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \mathtt{Pref}_{Bc}$. *Puisque* $(\beta,\ \alpha) \notin \mathtt{Pref}_{Bc}$, *alors par la Définition 23* $(v_\beta,\ v_\alpha) \notin \gg$ *avec* $\alpha \in \arg(v_\alpha)$, $\beta \in \arg(v_\beta)$. *Par propriété,* $(v_\beta,\ v_\alpha) \notin \mathtt{Pref}$ *avec* $\alpha = \mathtt{val}^{-1}(v_\alpha)$, $\beta = \mathtt{val}^{-1}(v_\beta)$, *il s'ensuit donc que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$ *i.e par la Définition 21* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$. $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VAF. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* VAF.

$*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* VSAF. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$, $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$ *et* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$ *(*$\mathtt{defeats}_{Bc}$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_{Bc}$ *en accord avec la Définition 24. Puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$, *alors* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \mathtt{Pref}_{Bc}$, *i.e par la Définition 23* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(v_\alpha,\ v_\beta) \notin \gg$ *avec* $\alpha \in \arg(v_\alpha)$, $\beta \in \arg(v_\beta)$. *A partir de la propriété,* $(v_\alpha,\ v_\beta) \notin \mathtt{Pref}$ *avec* $\alpha = \mathtt{val}^{-1}(v_\alpha)$, $\beta = \mathtt{val}^{-1}(v_\beta)$ *il s'ensuit que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}$ *i.e* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}$ *en accord avec la Définition 21. Puisque* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* VAF *alors* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\arg^{-1}(\beta),\ \arg^{-1}(\gamma)) \notin \gg$, *i.e* $(v_\beta,\ v_\gamma) \notin \gg$ *avec* $\gamma \in \arg(v_\gamma)$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* VSAF.

2. *Ext*(VSAF) $\subseteq$ *Ext*(VAF). *Soit* $\mathcal{E}$ *une extension admissible pour* VSAF. *Considérons que* $\mathcal{E} \in$ *Ext*(VAF). *Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* VAF. *En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VAF. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$, *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}$. *A partir de la propriété, il s'ensuit que* $(\arg^{-1}(\beta),\ \arg^{-1}(\alpha)) \notin \gg$, *i.e* $(\arg(v_\beta),\ \arg(v_\alpha)) \notin \gg$ *avec* $\alpha \in \arg(v_\alpha)$, $\beta \in \arg(v_\beta)$. *Il se vérifie alors que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$ *(*$\mathtt{defeats}_{Bc}$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_{Bc}$ *en accord avec la Définition 24), ce qui signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VSAF. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* VSAF.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* VAF. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}$ *mais* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$. *Par la Définition 21, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}$ *alors* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$. *Par propriété, puisque* $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$ *alors* $(\arg^{-1}(\alpha),\ \arg^{-1}(\beta)) \notin \gg$. *Ainsi,* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(v_\alpha,\ v_\beta) \notin \gg$ *avec* $\alpha \in \arg(v_\alpha)$, $\beta \in \arg(v_\beta)$, *par la Définition 23 et la Définition 24, il se vérifie que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$. *Cependant,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* VSAF, *ainsi* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_{Bc}$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \mathtt{Pref}_{Bc}$. *Puisque* $(\beta,\ \gamma) \notin \mathtt{Pref}_{Bc}$, *alors par la Définition 23* $(v_\beta,\ v_\gamma) \notin \gg$, *avec* $\gamma \in \arg(v_\gamma)$ *i.e* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}$ *par la Définition 21* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* VAF. □

– Les deux systèmes d'argumentation $\langle \mathcal{A}, \mathtt{defeats} \rangle$ et $\langle \mathcal{A}, \mathtt{defeats}_M \rangle$ associés respectivement à $\mathtt{VAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathtt{val}, \mathtt{Pref} \rangle$ avec $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tel que pour i>j $(v_i, v_j) \in \mathtt{Pref}$, et $\mathtt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ sont équivalents ssi $|\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(v_i))| = i$.

**Preuve 5.** *Soient Ext*(VAF) *et Ext*(VSAF) *les ensembles d'extensions admissibles pour ces deux systèmes,* VAF *et* VSAF. *Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext*(VAF) $\subseteq$ *Ext*(VSAF) *et Ext*(VSAF) $\subseteq$ *Ext*(VAF) *:*

1. *Ext*(VSAF) $\subseteq$ *Ext*(VAF). *Considérons que* $\exists\ \mathcal{E} \in$ *Ext*(VAF) *et* $\mathcal{E} \notin$ *Ext*(VSAF). *Puisque* $\mathcal{E} \notin$ *Ext*(VSAF), *en accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *est sans-conflit pour* VSAF. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_M$ *(*$\mathtt{defeats}_M$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_M$ *en accord avec la Définition 24) ainsi* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \mathtt{Pref}_M$. *Puisque* $(\beta,\ \alpha) \notin \mathtt{Pref}_M$, *alors par la Définition 23* $|\arg^{-1}(\beta)| \leq |\arg^{-1}(\alpha)|$. *Par propriété,* $|\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(v_i))| = i$, *il s'ensuit que* $(v_\beta,\ v_\alpha) \notin \mathtt{Pref}$ *avec* $v_\beta = \mathtt{val}(\beta)$, $v_\alpha = \mathtt{val}(\alpha)$ *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$ *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$. $\mathcal{E}$ *est sans-conflit pour* VAF. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* VAF.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* VSAF. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$, $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_M$ *et* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_M$ *(*$\mathtt{defeats}_M$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_M$ *en accord avec la Définition 24). Puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_M$, *alors* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \mathtt{Pref}_M$, *i.e par la Définition 23* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $|\arg^{-1}(\alpha)| \leq |\arg^{-1}(\beta)|$. *Par propriété,* $|\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(v_i))| = i$, *il s'ensuit que* $(v_\alpha,\ v_\beta) \notin \mathtt{Pref}$ *avec* $v_\beta = \mathtt{val}(\beta)$, $v_\alpha = \mathtt{val}(\alpha)$ *i.e* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$ *i.e* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}$ *en accord avec la Définition 21. Puisque* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* VAF *alors* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}$, *par propriété, il se déduit que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $|\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\gamma)))| \geq |\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\beta)))|$, *i.e* $|\arg^{-1}(\gamma)| \geq |\arg^{-1}(\beta)|$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \mathtt{Pref}_M$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_M$. *Ce qui contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* VSAF.

2. *Ext*(VSAF) $\subseteq$ *Ext*(VAF). *Soit* $\mathcal{E}$ *une extension admissible pour* VSAF. *Considérons que* $\mathcal{E} \in$ *Ext*(VAF). *Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* VAF. *En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VAF. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$, *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}$, *i.e* $|\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\alpha)))| \geq |\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\beta)))|$, $|\arg^{-1}(\alpha)| \geq |\arg^{-1}(\beta)|$, *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \mathtt{Pref}_M$, *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_M$ *(*$\mathtt{defeats}_M$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_M$ *en accord avec la Définition 24), signifiant que* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VSAF. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* VSAF.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* VAF. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}$ *mais* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$. *Par la Définition 21, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}$ *alors* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$. *Par propriété, puisque* $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$ *on a* $|\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\beta)))| \geq |\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\alpha)))|$, $|\arg^{-1}(\beta)| \geq |\arg^{-1}(\alpha)|$, *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \mathtt{Pref}_M$, *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_M$. *Cependant,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* VSAF, *ainsi* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_M$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \mathtt{Pref}_M$. *Puisque* $(\beta,\ \gamma) \notin \mathtt{Pref}_M$, *alors par la Définition 23* $|\arg^{-1}(\gamma)| \geq |\arg^{-1}(\beta)|$ *i.e* $|\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\gamma)))| \geq |\arg^{-1}(\mathtt{val}^{-1}(\mathtt{val}(\beta)))|$, *i.e* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}$, *par la Définition 21, on a* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* VAF.

□

**Propriété 8.** *La relation* $\succ^V$ *est irréflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc un ordre strict.*

**Preuve 6.**

1. *$\succ^V$ est irréflexive :*
   *Considérons que $\succ^V$ est réflexive : $\forall\ \alpha \in \mathcal{A}$, $(\alpha,\ \alpha) \in \succ^V$. Ceci signifie que $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\alpha)) \in \mathtt{Pref}$, or ceci n'est pas possible étant donné que $\mathtt{Pref}$ est irréflexive, engendrant une contradiction.*

2. *$\succ^V$ est antisymétrique :*
   *Considérons que $\alpha,\ \beta \in \mathcal{A}$ tel que $(\alpha,\ \beta) \in \succ^V$ et $(\beta,\ \alpha) \in \succ^V$ :*
   *– $(\alpha,\ \beta) \in \succ^V \Rightarrow (\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \in \mathtt{Pref}$,*
   *– $(\beta,\ \alpha) \in \succ^V \Rightarrow (\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\alpha)) \in \mathtt{Pref}$,*
   *En accord avec la Définition 21, ceci est impossible puisque $\mathtt{Pref}$ est antisymétrique, ainsi $\succ^V$ est aussi antisymétrique.*

3. *$\succ^V$ est transitive :*
   *Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathcal{A}$, considérons que $(\alpha,\ \beta) \in \succ^V$, $(\beta,\ \gamma) \in \succ^V$ et $(\alpha,\ \gamma) \notin \succ^V$ :*
   *– $(\alpha,\ \beta) \in \succ^V \Rightarrow (\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \in \mathtt{Pref}$ (1),*
   *– $(\beta,\ \gamma) \in \succ^V \Rightarrow (\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\gamma)) \in \mathtt{Pref}$ (2),*
   *Puisque $(\alpha,\ \gamma) \notin \succ^V \Rightarrow (\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}$. Cependant, puisque $\mathtt{Pref}$ est transitive, à partir de (1) et (2) il s'ensuit que $\succ^V$ est transitive, engendrant une contradiction.*

□

**Propriété 9.** *Les systèmes d'argumentation associés à $\mathtt{VAF}$ et à $\mathtt{PAF}^V$ sont équivalents.*

**Preuve 7.** *Soient $Ext(\mathtt{VAF})$ et $Ext(\mathtt{PAF}^V)$ les ensembles d'extensions admissibles pour ces deux systèmes, $\mathtt{VAF}$ et $\mathtt{PAF}^V$. Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que $Ext(\mathtt{VAF}) \subseteq Ext(\mathtt{PAF}^V)$ et $Ext(\mathtt{PAF}^V) \subseteq Ext(\mathtt{VAF})$ :*

1. *$Ext(\mathtt{PAF}^V) \subseteq Ext(\mathtt{VAF})$. Considérons $\exists\ \mathcal{E} \in Ext(\mathtt{VAF})$ et $\mathcal{E} \notin Ext(\mathtt{PAF}^V)$. Puisque $\mathcal{E} \notin Ext(\mathtt{PAF}^V)$ et en accord avec la Définition 5, $\mathcal{E}$ n'est pas une extension admissible pour $\mathtt{PAF}^V$, i.e il y a deux possibilités :*

   *∗Cas 1 : $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour $\mathtt{PAF}^V$. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ tel que $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}^V$ ($\mathtt{Def}^V$ est construit à partir de $\mathcal{R}$ et $\succ^V$ en accord avec la Définition 19 et la Définition 29) ainsi $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\ \alpha) \notin \succ^V$. Puisque $(\beta,\ \alpha) \notin \succ^V$, par la Définition 29, $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}$. En accord avec la Définition 21, il s'ensuit que $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$. $\mathcal{E}$ n'est donc pas sans-conflit pour $\mathtt{VAF}$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ soit une extension admissible pour $\mathtt{VAF}$.*

   *∗Cas 2 : $\mathcal{E}$ ne défend pas tous ses éléments pour $\mathtt{PAF}^V$. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ tel que $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$, $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}^V$ et $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}^V$ ($\mathtt{Def}^V$ est construit à partir de $\mathcal{R}$ et $\succ^V$ en accord avec la Définition 19 et la Définition 29). Puisque $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}^V$, on a $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ et $(\alpha,\ \beta) \notin \succ^V$, i.e par la Définition 29, $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ et $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin \mathtt{Pref}$, i.e en accord avec la Définition 21, $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}$. Puisque $\mathcal{E}$ est une extension admissible pour $\mathtt{VAF}$, il se verifie que $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$, i.e $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}$, i.e $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\ \gamma) \notin \succ^V$, i.e $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}^V$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ ne défende pas tous ses éléments dans $\mathtt{PAF}^V$.*

2. *$Ext(\mathtt{VAF}) \subseteq Ext(\mathtt{PAF}^V)$. Soit $\mathcal{E}$ une extension admissible pour $\mathtt{PAF}^V$. Considérons que $\mathcal{E} \notin Ext(\mathtt{VAF})$. Ce qui signifie que $\mathcal{E}$ n'est pas une extension admissible pour $\mathtt{VAF}$. En accord*

*avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

$*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VAF. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in$ defeats, *i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\alpha)) \notin$ Pref. *Par la Définition 29, il s'ensuit que* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ^V$. *Il se vérifie donc que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}^V$ *(*$\mathtt{Def}^V$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\succ^V$ *en accord avec la Définition 19 et la Définition 29), engendrant que* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{PAF}^V$. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}^V$.

$*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* VAF. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \in$ defeats *mais* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in$ defeats. *Par la Définition 21, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in$ defeats *on a* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin$ Pref. *En accord avec la Définition 29, puisque* $(\mathtt{val}(\alpha),\ \mathtt{val}(\beta)) \notin$ Pref *on a* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ^V$. *Ainsi,* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ^V$, *par la Définition 19 il se vérifie que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}^V$. *Cependant,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}^V$, *il s'ensuit que* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}^V$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ^V$. *Puisque* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ^V$, *ainsi par la Définition 29* $(\mathtt{val}(\beta),\ \mathtt{val}(\gamma)) \notin$ Pref, *i.e par la Définition 21* $(\gamma,\ \beta) \in$ defeats. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défendent pas tous ses éléments pour* VAF.

□

**Propriété 10.** *La relation* $\mathtt{Pref}_b^P$ *est irréflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc un ordre strict.*

**Preuve 8.**

1. $\mathtt{Pref}_b^P$ *est irréflexive :*
   *Considérons que* $\mathtt{Pref}_b^P$ *est réflexive, il s'ensuit que* $\exists\ v_\alpha \in \mathcal{V}_b$ *tel que* $(v_\alpha,\ v_\alpha) \in \mathtt{Pref}_b^P$, *i.e pour* $\alpha = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)$, *il se vérifie que* $(\alpha,\ \alpha) \in \succ$. *Ceci est impossible puisque* $\succ$ *est irréflexive.*
2. $\mathtt{Pref}_b^P$ *est antisymétrique :*
   *Considérons que* $\mathtt{Pref}_b^P$ *n'est pas antisymétrique, ainsi* $\exists\ v_\alpha,\ v_\beta \in \mathcal{V}$ *tel que* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_b^P$ *et* $(v_\beta,\ v_\alpha) \in \mathtt{Pref}_b^P$. *Puisque* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_b^P$ *alors* $\exists\ \alpha,\ \beta$ *tel que* $\alpha = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)$, $\beta = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)$ *et* $(\alpha,\ \beta) \in \succ$ *et puisque* $(v_\beta,\ v_\alpha) \in \mathtt{Pref}_b^P$, *il s'ensuit que* $(\beta,\ \alpha) \in \succ$. *Ceci est impossible car* $\succ$ *est antisymétrique.*
3. $\mathtt{Pref}_b^P$ *est transitive :*
   *Considérons que* $\mathtt{Pref}_b^P$ *n'est pas transitive, ainsi* $\exists\ v_\alpha,\ v_\beta,\ v_\gamma \in \mathcal{V}_b$ *tel que :* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_b^P$, $(v_\beta,\ v_\gamma) \in \mathtt{Pref}_b^P$ *et* $(v_\alpha,\ v_\gamma) \notin \mathtt{Pref}_b^P$. *Soit* $\alpha = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)$, $\beta = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)$ *et* $\gamma = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma)$, *puisque* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_b^P$ *il s'ensuit que* $(\alpha,\ \beta) \in \succ$ *et puisque* $(v_\beta,\ v_\gamma) \in \mathtt{Pref}_b^P$ *on a* $(\beta,\ \gamma) \in \succ$. *Puisque* $\succ$ *est transitive il s'en déduit que* $(\alpha,\ \gamma) \in \succ$, *i.e* $(v_\alpha,\ v_\gamma) \in \mathtt{Pref}_b^P$, *montrant une contradiction vis à vis de la considération initiale.*

□

**Propriété 11.** *Les systèmes d'argumentation associés à* PAF *et à* $\mathtt{VAF}_b^P$ *sont équivalents.*

**Preuve 9.** *Soient* $Ext(\mathtt{VAF}_b^P)$ *et* $Ext(\mathtt{PAF})$ *les ensembles d'extensions admissibles pour ces deux systèmes,* $\mathtt{VAF}_b^P$ *et* PAF. *Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que* $Ext(\mathtt{VAF}_b^P) \subseteq Ext(\mathtt{PAF})$ *et* $Ext(\mathtt{PAF}) \subseteq Ext(\mathtt{VAF}_b^P)$.

1. $Ext(\mathtt{PAF}) \subseteq Ext(\mathtt{VAF}_b^P)$. *Considérons que* $\exists\ \mathcal{E} \in Ext(\mathtt{VAF}_b^P)$ *et* $\mathcal{E} \notin Ext(\mathtt{PAF})$. *Puisque* $\mathcal{E} \notin Ext(\mathtt{PAF})$, *en accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

$*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *est sans-conflit pour* PAF. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in$ Def, *il s'ensuit que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$. *Puisque* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$, *par la Définition 30, il se vérifie que* $\nexists\ v_\alpha,\ v_\beta \in \mathcal{V}_b$ *tel que* $\alpha = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)$, $\beta = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)$ *et* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_b^P$. *Puisque* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_b(\beta),\ \mathtt{val}_b(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}_b^P$, *en accord avec la Définition 21, il s'ensuit que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_b^P$ ($\mathtt{defeats}_b^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_b^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 30).* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VAF. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* VAF.

$*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* PAF. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$, $(\beta,\ \alpha) \in$ Def *et* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in$ Def. *Puisque* $(\beta,\ \alpha) \in$ Def, *par la Définition 19, il s'ensuit que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$. *En d'autres termes, par la Définition 30,* $\nexists\ v_\alpha,\ v_\beta \in \mathcal{V}_b$ *tel que* $\alpha = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)$, $\beta = \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)$ *et* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_b^P$. *Puisque* $(\mathtt{val}_b(\alpha),\ \mathtt{val}_b(\beta)) \notin \mathtt{Pref}_b^P$ *et* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$, *par la Définition 21, il se vérifie que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_b^P$ ($\mathtt{defeats}_b^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_b^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 30). Puisque* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* $\mathtt{VAF}_b^P$, *il s'ensuit que* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_b^P$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_b(\beta),\ \mathtt{val}_b(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}_b^P$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_b^{-1}(\mathtt{val}_b(\beta)),\ val_b^{-1}(\mathtt{val}_b(\gamma))) \notin \succ$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in$ Def. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* PAF.

2. *Ext*$(\mathtt{VAF}_b^P) \subseteq$ *Ext*(PAF). *Soit* $\mathcal{E}$ *une extension admissible pour* PAF. *Considérons que* $\mathcal{E} \in$ *Ext*(PAF). *Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* $\mathtt{VAF}_b^P$. *En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

$*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{VAF}_b^P$. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta)$ $\mathtt{defeats}_b^P$ ($\mathtt{defeats}_b^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_b^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 30), i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_b(\beta),\ \mathtt{val}_b(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}_b^P$ *par la Définition 21. A partir de la Définition 30, il s'ensuit que* $(\mathtt{val}_b^{-1}(\mathtt{val}_b(\beta)),\ \mathtt{val}_b^{-1}(\mathtt{val}_b(\alpha))) \notin \succ$, *i.e* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$. *A partir de la Définition 19, il se vérifie que* $(\alpha,\ \beta) \in$ Def, *ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* PAF. *Cette assertion représente une contradiction avec le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* PAF.

$*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* $\mathtt{VAF}_b^P$. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$, $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_b^P$ *mais* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_b^P$ ($\mathtt{defeats}_b^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_b^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 30). Puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_b^P$, *il s'ensuit que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_b(\alpha),\ \mathtt{val}_b(\beta)) \notin \mathtt{Pref}_b^P$ *en accord avec la Définition 21. Puisque* $(\mathtt{val}_b(\alpha),\ \mathtt{val}_b(\beta)) \notin \mathtt{Pref}_b^P$, *il se vérifie que* $(\mathtt{val}_b^{-1}(\mathtt{val}_b(\alpha)),\ \mathtt{val}_b^{-1}(\mathtt{val}_b(\beta))) \notin \succ$ *en accord avec la Définition 30, i.e* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$. *Ainsi, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$, *par la Définition 19, on a* $(\beta,\ \alpha) \in$ Def. *Cependant,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* PAF, *ainsi* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in$ Def, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$. *Puisque* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$, *par la Définition 30, on a* $(\mathtt{val}_b(\beta),\ \mathtt{val}_b(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}_b^P$, *i.e par la Définition 21* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_b^P$. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* $\mathtt{VAF}_b^P$.

□

**Propriété 12.** *La relation* Et *est réflexive, symétrique et transitive.*

**Preuve 10.**

1. $\mathtt{Et}$ *est réflexive :*
   $\forall\ v_\alpha \in \mathcal{V}_b$, *il se vérifie que* $\forall\ v_\beta \in \mathcal{V}_b$ *tel que* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)) \in \succ$ *on a* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)) \in \succ$, *et* $\forall\ v_\gamma \in \mathcal{V}_b$ *tel que* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma)) \in \succ$ *on a* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma)) \in \succ$. *Ainsi,* $\forall\ v_\alpha \in \mathcal{V}_b$, $(v_\alpha, v_\alpha) \in \mathtt{Et}$.
2. $\mathtt{Et}$ *est symétrique :*
   *Soit* $v_\alpha, v_\beta \in \mathcal{V}_b$ *tel que* $(v_\alpha, v_\beta) \in \mathtt{Et}$. *Considérons que* $\mathtt{Et}$ *ne soit pas symétrique :* $(v_\beta, v_\alpha) \notin \mathtt{Et}$. *Ainsi par la Définition, il s'ensuit que les deux propositions ci-dessous ne sont pas satisfaites :*
   $\forall\ v_\gamma \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)) \in \succ$,
   $\forall\ v_\delta \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ$. *Ceci montre une contradiction avec les propositions engendrées par* $(v_\alpha, v_\beta) \in \mathtt{Et}$ *et la symétrie de* $\Leftrightarrow$.
3. $\mathtt{Et}$ *est transitive :*
   *Soit* $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \in \mathcal{V}_b$, *tel que* $(v_\alpha, v_\beta) \in \mathtt{Et}$ *et* $(v_\beta, v_\gamma) \in \mathtt{Et}$. *Ainsi par la Définition, les quatre propositions suivantes sont satisfaites :*
   $\forall\ v_\epsilon \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\epsilon), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\epsilon), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)) \in \succ$,*(1)*
   $\forall\ v_\delta \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ$,*(2)*
   $\forall\ v_\epsilon \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\epsilon), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\epsilon), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma)) \in \succ$,*(3)*
   $\forall\ v_\delta \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\beta), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ$,*(4)*
   *Par combinaison de ces propositions, les deux propositions suivantes se vérifie également :*
   *(1)+(3) :* $\forall\ v_\epsilon \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\epsilon), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\epsilon), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma)) \in \succ$,
   *(2)+(4) :* $\forall\ v_\delta \in \mathcal{V}_b$ *t.q.* $(\mathtt{val}_b^{-1}(v_\alpha), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ \Leftrightarrow (\mathtt{val}_b^{-1}(v_\gamma), \mathtt{val}_b^{-1}(v_\delta)) \in \succ$.
   *Ainsi,* $(v_\alpha, v_\gamma) \in \mathtt{Et}$, *démontrant la transitivité de cette relation.*

□

**Propriété 13.** *La relation* $\mathtt{Pref}_s^P$ *est irréflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc un ordre strict.*

**Preuve 11.**

1. $\mathtt{Pref}_s^P$ *est irréflexive :*
   *Considérons que* $\mathtt{Pref}_s^P$ *soit réflexive, ainsi* $\exists\ v_\alpha \in \mathcal{V}_s$ *tel que* $(v_\alpha, v_\alpha) \in \mathtt{Pref}_b^P$, *i.e* $\forall\ \alpha \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\alpha)$, $(\alpha, \alpha) \in \succ$. *Ceci est impossible puisque* $\succ$ *est irréflexive.*
2. $\mathtt{Pref}_s^P$ *est antisymétrique :*
   *Considérons que* $\mathtt{Pref}_s^P$ *ne soit pas antisymétrique, il s'ensuit que* $\exists\ v_\alpha, v_\beta \in \mathcal{V}$ *tel que* $(v_\alpha, v_\beta) \in \mathtt{Pref}_s^P$ *et* $(v_\beta, v_\alpha) \in \mathtt{Pref}_s^P$. *Puisque* $(v_\alpha, v_\beta) \in \mathtt{Pref}_s^P$ *on a* $\forall\ \alpha \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\alpha)$ *et* $\forall\ \beta \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\beta)$ : $(\alpha, \beta) \in \succ$ *et puisque* $(v_\beta, v_\alpha) \in \mathtt{Pref}_s^P$ *il se vérifie que* $\forall\ \alpha \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\alpha)$ *et* $\forall\ \beta \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\beta)$ : $(\beta, \alpha) \in \succ$. *Ceci est impossible par l'antisymétrie de la relation* $\succ$.
3. $\mathtt{Pref}_s^P$ *est transitive :*
   *Considérons que* $\mathtt{Pref}_s^P$ *ne soit pas transitive, ainsi* $\exists\ v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \in \mathcal{V}_s$ *tel que :* $(v_\alpha, v_\beta) \in \mathtt{Pref}_s^P$, $(v_\beta, v_\gamma) \in \mathtt{Pref}_s^P$ *et* $(v_\alpha, v_\gamma) \notin \mathtt{Pref}_s^P$. *Soit* $\alpha \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\alpha)$, $\beta \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\beta)$, $\gamma \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\gamma)$, *puisque* $(v_\alpha, v_\beta) \in \mathtt{Pref}_s^P$ *on a* $(\alpha, \beta) \in \succ$ *et puisque* $(v_\beta, v_\gamma) \in \mathtt{Pref}_s^P$ *on a* $(\beta, \gamma) \in \succ$. *La relation* $\succ$ *étant transitive, il s'ensuit que* $(\alpha, \gamma) \in \succ$, *i.e* $(v_\alpha, v_\gamma) \in \mathtt{Pref}_s^P$.

□

**Propriété 14.** *Les systèmes d'argumentation associés à* $\mathtt{PAF}$ *et à* $\mathtt{VAF}_s^P$ *sont équivalents.*

**Preuve 12.** *Soient* $Ext(\mathtt{VAF}_s^P)$ *et* $Ext(\mathtt{PAF})$ *les ensembles d'extensions admissibles pour ces deux systèmes,* $\mathtt{VAF}_s^P$ *et* $\mathtt{PAF}$. *Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que* $Ext(\mathtt{VAF}_s^P) \subseteq Ext(\mathtt{PAF})$ *et* $Ext(\mathtt{PAF}) \subseteq Ext(\mathtt{VAF}_s^P)$.

1. *Ext*($\mathtt{PAF}$) $\subseteq$ *Ext*($\mathtt{VAF}_s^P$). *Considérons que* $\exists\ \mathcal{E} \in$ *Ext*($\mathtt{VAF}_s^P$) *et* $\mathcal{E} \notin$ *Ext*($\mathtt{PAF}$). *Puisque* $\mathcal{E} \notin$ *Ext*($\mathtt{PAF}$), *en accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{PAF}$. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}$, *il s'ensuit que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$. *Puisque* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$, *en accord avec la Définition 34,* $\nexists$ $v_\alpha,\ v_\beta \in \mathcal{V}_s$ *tel que* $\alpha \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\alpha)$, $\beta \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\beta)$ *et* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_s^P$. *Puisque* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_s(\beta),\ \mathtt{val}_s(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}_s^P$, *à partir de la Définition 21, il se vérifie que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_s^P$ *(*$\mathtt{defeats}_s^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_s^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 34).* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{VAF}$. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* $\mathtt{VAF}$.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* $\mathtt{PAF}$. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$, $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}$ *et* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}$. *Puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}$, *par la Définition 19, il s'ensuit que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$. *En d'autres termes, par la Définition 34,* $\nexists\ v_\alpha,\ v_\beta \in \mathcal{V}_s$ *tel que* $\alpha \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\alpha)$, $\beta \in \mathtt{val}_s^{-1}(v_\beta)$ *et* $(v_\alpha,\ v_\beta) \in \mathtt{Pref}_s^P$. *Puisque* $(\mathtt{val}_s(\alpha),\ \mathtt{val}_s(\beta)) \notin \mathtt{Pref}_s^P$ *et* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$, *il se vérifie que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_s^P$ *(*$\mathtt{defeats}_s^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_s^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 34). Puisque* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* $\mathtt{VAF}_s^P$, *il s'ensuit que* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_s^P$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_s(\beta),\ \mathtt{val}_s(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}_s^P$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_s^{-1}(\mathtt{val}_s(\beta)),\ \mathtt{val}_s^{-1}(\mathtt{val}_s(\gamma))) \notin \succ$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}$. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* $\mathtt{PAF}$.

2. *Ext*($\mathtt{VAF}_b^P$) $\subseteq$ *Ext*($\mathtt{PAF}$). *Soit* $\mathcal{E}$ *une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}$, *considérons que* $\mathcal{E} \in$ *Ext*($\mathtt{PAF}$). *Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* $\mathtt{VAF}_s^P$. *En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{VAF}_s^P$. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha,\ \beta)$ $\mathtt{defeats}_s^P$ *(*$\mathtt{defeats}_s^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_s^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 34), i.e* $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_s(\beta),\ \mathtt{val}_s(\alpha)) \notin \mathtt{Pref}_s^P$ *par la Définition 21. A partir de la Définition 34, il s'ensuit que* $(\mathtt{val}_s^{-1}(\mathtt{val}_s(\beta)),\ \mathtt{val}_s^{-1}(\mathtt{val}_s(\alpha))) \notin \succ$, *i.e* $(\beta,\ \alpha) \notin \succ$. *A partir de la Définition 19, il se vérifie que* $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}$, *signifiant que* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\mathtt{PAF}$. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}$.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* $\mathtt{VAF}_s^P$. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$, $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *tel que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_s^P$ *mais* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_s^P$ *(*$\mathtt{defeats}_s^P$ *est construit à partir de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathtt{Pref}_s^P$ *en accord avec la Définition 21 et la Définition 34). Puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{defeats}_s^P$ *alors* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\mathtt{val}_s(\alpha),\ \mathtt{val}_s(\beta)) \notin \mathtt{Pref}_s^P$, *en accord avec la Définition 21. Puisque* $(\mathtt{val}_s(\alpha),\ \mathtt{val}_s(\beta)) \notin \mathtt{Pref}_s^P$ *alors* $(\mathtt{val}_s^{-1}(\mathtt{val}_s(\alpha)),\ \mathtt{val}_s^{-1}(\mathtt{val}_s(\beta))) \notin \succ$ *en accord avec la Définition 34, i.e* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$. *Ainsi, puisque* $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $(\alpha,\ \beta) \notin \succ$, *par la Définition 19, il s'ensuit que* $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}$. *Cependant,* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* $\mathtt{PAF}$, *ainsi* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}$, *i.e* $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$. *Puisque* $(\beta,\ \gamma) \notin \succ$, *par la Définition 34, il se vérifie que* $(\mathtt{val}_s(\beta),\ \mathtt{val}_s(\gamma)) \notin \mathtt{Pref}_s^P$, *i.e par la Définition 21, on a* $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{defeats}_s^P$. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* $\mathtt{VAF}_s^P$.

□

**Propriété 15.** $|\mathcal{V}_s^{min}| = |\mathcal{V}_b\ /\ \mathtt{Et}|$

**Preuve 13.** *Rappelons d'abord que $\mathcal{V}_s^{min}$ est obtenu par l'affectation d'une même valeur à un nombre maximal possible d'arguments, en tenant compte du plus petit ensemble de valeurs (en terme d'inclusion ensembliste) affectées à l'ensemble des arguments et répondant à la Définition 34. A partir de la Partie 1 de la Définition 34 et de la Définition 31, il s'ensuit que deux arguments $\alpha, \beta$ peuvent avoir la même valeur dans une construction surjective (i.e., il existe un $\mathcal{V}_s$ tel que $val_s(\alpha) = val_s(\beta)$) si et seulement si $(\alpha, \beta) \in \mathtt{Et}$.*

*Etant donné cette équivalence entre définitions, une partition sur tous les arguments de $\mathcal{A}$, précisément celle donnant le moins de valeurs dans $\mathcal{V}_s$ et où chaque partionnement est lié à une valeur distincte dans $\mathcal{V}_s$, est obtenue en considérant l'ensemble quotient induit par la relation d'équivalence $\mathtt{Et}$, d'où l'égalité suivante $|\mathcal{V}_s^{min}| = |\mathcal{V}_b \ / \ \mathtt{Et}|$.* □

**Propriété 16.** *Les systèmes d'argumentation associés à $\mathtt{CPAF}$ et à $\mathtt{MCPAF}^C$ sont équivalents.*

**Preuve 14.** *Soient Ext($\mathtt{CPAF}$) et Ext($\mathtt{MCPAF}^C$) les ensembles d'extensions admissibles pour ces deux systèmes, $\mathtt{CPAF}$ et $\mathtt{MCPAF}^C$. Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext($\mathtt{CPAF}$) $\subseteq$ Ext($\mathtt{MCPAF}^C$) et Ext($\mathtt{MCPAF}^C$) $\subseteq$ Ext($\mathtt{CPAF}$) :*

1. *Ext($\mathtt{MCPAF}^C$) $\subseteq$ Ext($\mathtt{CPAF}$). Considérons que $\exists\ \mathcal{E} \in$ Ext($\mathtt{CPAF}$) et $\mathcal{E} \notin$ Ext($\mathtt{MCPAF}^C$). Puisque $\mathcal{E} \notin$ Ext($\mathtt{MCPAF}^C$) et en accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   *$*$Cas 1 : $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour $\mathtt{MCPAF}^C$. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ tel que $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}^C$ ($\mathtt{Def}^C$ est construit à partir de $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$ en accord avec la Définition 38 et la Défintion 39) il s'ensuit que $(\alpha,\ \beta) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et $(\beta,\ \alpha) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$. Par propriété, il se vérifie que $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\ \alpha) \notin \otimes^{\triangleright}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$, i.e $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}$. $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour $\mathtt{CPAF}$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ soit une extension admissible pour $\mathtt{CPAF}$.*

   *$*$Cas 2 : $\mathcal{E}$ ne défend pas tous ses éléments pour $\mathtt{MCPAF}^C$. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ tel que $\exists\ \beta \in \mathcal{A}_1^C \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n^C$, tel que $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}^C$ et $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}^C$ ($\mathtt{Def}^C$ est construit à partir de $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$ en accord avec la Définition 38 et la Défintion 39). Puisque $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}^C$, il se vérifie que $(\beta,\ \alpha) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et $(\alpha,\ \beta) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$, i.e par propriété $(\beta,\ \alpha) \in \mathcal{R}$ et $(\alpha,\ \beta) \notin \otimes^{\triangleright}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$, i.e par la Définition 25 $(\beta,\ \alpha) \in \mathtt{Def}$. Puisque $\mathcal{E}$ est une extension admissible pour $\mathtt{CPAF}$, il s'ensuit que $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}$, i.e $(\gamma,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\ \gamma) \notin \otimes^{\triangleright}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$, i.e $(\gamma,\ \beta) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$ et $(\beta,\ \gamma) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$, i.e $(\gamma,\ \beta) \in \mathtt{Def}^C$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ ne défende pas tous ses éléments pour $\mathtt{MCPAF}^C$.*

2. *Ext($\mathtt{CPAF}$) $\subseteq$ Ext($\mathtt{MCPAF}^C$). Soit $\mathcal{E}$ une extension admissible pour $\mathtt{MCPAF}^C$, considérons que $\mathcal{E} \notin$ Ext($\mathtt{CPAF}$). Ceci signifie que $\mathcal{E}$ n'est pas une extension admissible pour $\mathtt{CPAF}$. En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   *$*$Cas 1 : $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour $\mathtt{CPAF}$. $\exists\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{E}$ tel que $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{defeats}$, i.e $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\ \alpha) \notin \otimes^{\triangleright}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$. A partir de la Définition 39, il s'ensuit que $(\alpha,\ \beta) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et $(\beta,\ \alpha) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$. Il se vérifie que $(\alpha,\ \beta) \in \mathtt{Def}^C$ ($\mathtt{Def}^C$ est construit à partir de $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$ en accord avec la Définition 38 et la Définition 39), signifiant que $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour $\mathtt{MCPAF}^C$. Cette conclusion contredit le fait que $\mathcal{E}$ soit une extension admissible pour $\mathtt{MCPAF}^C$.*

$*$*Cas 2 : $\mathcal{E}$ ne défend pas tous ses éléments pour* CPAF*. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ tel que $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ et ($\beta$, $\alpha$) $\in$* Def *mais $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que ($\gamma$, $\beta$) $\in$* Def*. A partir de la Définition 25, puisque ($\beta$, $\alpha$) $\in$* Def *alors ($\beta$, $\alpha$) $\in \mathcal{R}$ et ($\alpha$, $\beta$) $\notin \otimes^{\rhd}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$. A partir de la Définition 39, il s'ensuit que ($\beta$, $\alpha$) $\in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et ($\alpha$, $\beta$) $\notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$. Par la Définition 38, il se vérifie que ($\beta$, $\alpha$) $\in$* Def$^C$*. Cependant, $\mathcal{E}$ est une extension admissible pour* MCPAF$^C$*, ainsi $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que ($\gamma$, $\beta$) $\in$* Def$^C$*, i.e ($\gamma$, $\beta$) $\in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^C, \ldots, \mathcal{R}_n^C)$ et ($\beta$, $\gamma$) $\notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$. A partir de la Définition 39, il s'ensuit que ($\gamma$, $\beta$) $\in \mathcal{R}$ et ($\beta$, $\gamma$) $\notin \otimes^{\rhd}(\succeq_1, \cdots \succeq_n)$, i.e ($\gamma$, $\beta$) $\in$* Def *par la Définition 25. Cette conclusion contredit le fait que $\mathcal{E}$ ne défende pas tous ses éléments pour* CPAF*.*

□

**Propriété 17.**

– *Les deux systèmes d'argumentation $\langle \mathcal{A}, \texttt{Def} \rangle$ et $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats}_{Bc} \rangle$ associés respectivement à* MCPAF$^M$ $= \langle \mathcal{C}^M, \trianglerighteq^M, \langle \mathcal{A}_1^M, \ldots, \mathcal{A}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle, \langle \succeq_1^M, \ldots, \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M \rangle \rangle$ *et* VSAF $= \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ *sont équivalents ssi $\oplus^{\trianglerighteq^M}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M) = \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ et on a $(\alpha, \beta) \in \otimes^{\trianglerighteq^M}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ si $\exists$ i,j tel que $\alpha \in \mathcal{A}_i^M$, $\beta \in \mathcal{A}_j^M$ et $(c_i, c_j) \in \trianglerighteq^M$.*

**Preuve 15.** *Soient Ext(*VSAF*) et Ext(*MCPAF$^M$*) les ensembles d'extensions admissibles pour ces deux systèmes,* VSAF *et* MCPAF$^M$*. Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext(*VSAF*) $\subseteq$ Ext(*MCPAF$^M$*) et Ext(*MCPAF$^M$*) $\subseteq$ Ext(*VSAF*) :*

1. *Ext(*MCPAF$^M$*) $\subseteq$ Ext(*VSAF*). Considérons que $\exists\ \mathcal{E} \in$ Ext(*VSAF*) et $\mathcal{E} \notin$ Ext(*MCPAF$^M$*). Puisque $\mathcal{E} \notin$ Ext(*MCPAF$^M$*) et en accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 : $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour* MCPAF$^M$*. $\exists\ \alpha$, $\beta \in \mathcal{E}$ tel que ($\alpha$, $\beta$) $\in$* Def$^M$ *(*Def$^M$ *est construit à partir de $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ et $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ en accord avec la Définition 38 et la Défintion 40). Par propriété, il s'ensuit que ($\alpha$, $\beta$) $\in \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ et $\nexists$ i,j tel que $\alpha \in \mathcal{A}_i^M$, $\beta \in \mathcal{A}_j^M$ et $(c_j, c_i) \in \trianglerighteq^M$. Par la Définition 40, il se vérifie que ($\alpha$, $\beta$) $\in \mathcal{R}$ et $\nexists$ i,j tel que $(v_j, v_i) \in \gg$ avec $\texttt{val}(\alpha) = v_i$ et $\texttt{val}(\beta) = v_j$, i.e ($\alpha$, $\beta$) $\in$* defeats$_{Bc}$*. $\mathcal{E}$ n'est pas sans-conflit pour* VSAF*. Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ soit une extension admissible pour* VSAF*.*

   $*$*Cas 2 : $\mathcal{E}$ ne défend pas tous ses éléments pour* MCPAF$^M$*. $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ tel que $\exists\ \beta \in \mathcal{A}_1^M \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{|\mathcal{V}|+1}^M$, tel que ($\beta$, $\alpha$) $\in$* Def$^M$ *et $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que ($\gamma$, $\beta$) $\in$* Def$^M$ *(*Def$^M$ *est construit à partir de $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ et $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ en accord avec la Définition 38 et la Défintion 40). Puisque ($\beta$, $\alpha$) $\in$* Def$^M$*, il se vérifie que ($\beta$, $\alpha$) $\in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ et ($\alpha$, $\beta$) $\notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$, i.e par propriété ($\beta$, $\alpha$) $\in \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ et $\nexists$ i,j tel que $\alpha \in \mathcal{A}_i^M$, $\beta \in \mathcal{A}_j^M$ et $(c_i, c_j) \in \trianglerighteq^M$, i.e par la Définition 40, ($\beta$, $\alpha$) $\in \mathcal{R}$ et $\nexists$ i,j tel que $(v_i, v_j) \in \gg$ avec $\texttt{val}(\alpha) = v_i$ et $\texttt{val}(\beta) = v_j$, autrement dit d'aprés la Définition 24, ($\beta$, $\alpha$) $\in$* defeats$_{Bc}$*. Puisque $\mathcal{E}$ est une extension admissible pour* VSAF*, il s'ensuit que $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ tel que ($\gamma$, $\beta$) $\in$* defeats$_{Bc}$*, i.e ($\gamma$, $\beta$) $\in \mathcal{R}$ et $\nexists$ k,l tel que $(v_k, v_l) \in \gg$ avec $\texttt{val}(\beta) = v_k$ et $\texttt{val}(\gamma) = v_l$, i.e $\nexists$ k,l tel que $\beta \in \mathcal{A}_k^M$, $\gamma \in \mathcal{A}_l^M$ et $(c_k, c_l) \in \trianglerighteq^M$, ($\beta$, $\gamma$) $\notin \otimes^{\rhd}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$, i.e ($\gamma$, $\beta$) $\in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ et ($\beta$, $\gamma$) $\notin \otimes^{\rhd}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$, i.e ($\gamma$, $\beta$) $\in$* Def$^M$*. Ceci contredit le fait que $\mathcal{E}$ ne défende pas tous ses éléments pour* MCPAF$^M$*.*

2. *Ext(*VSAF*) $\subseteq$ Ext(*MCPAF$^M$*). Soit $\mathcal{E}$ une extension admissible pour* MCPAF$^M$*, considérons que $\mathcal{E} \notin$ Ext(*VSAF*). Ceci signifie que $\mathcal{E}$ n'est pas une extension admissible pour* VSAF*. En accord*

*avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

$*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VSAF. $\exists$ $\alpha$, $\beta \in \mathcal{E}$ *tel que* ($\alpha$, $\beta$) $\in$ $\texttt{defeats}_{Bc}$, *i.e* ($\alpha$, $\beta$) $\in \mathcal{R}$ *et* $\nexists$ *i,j tel que* $(v_j, v_i) \in \gg$ *avec* $\texttt{val}(\alpha) = v_i$ *et* $\texttt{val}(\beta) = v_j$. *A partir de la Définition 40, il s'ensuit que* ($\alpha$, $\beta$) $\in \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1}$ *et* $\nexists$ *i,j tel que* $\alpha \in \mathcal{A}^M_i$, $\beta \in \mathcal{A}^M_j$ *et* $(c_j, c_i) \in \trianglerighteq^M$, *autrement dit* ($\alpha$, $\beta$) $\in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}^M_1, \ldots, \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1})$ *et* ($\beta$, $\alpha$) $\notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq^M_1, \cdots \succeq^M_{|\mathcal{V}|+1})$. *Il se vérifie que* ($\alpha$, $\beta$) $\in \texttt{Def}^M$ *(*$\texttt{Def}^M$ *est construit à partir de* $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}^M_1, \ldots, \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1})$ *et* $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq^M_1, \cdots \succeq^M_{|\mathcal{V}|+1})$ *en accord avec la Définition 38 et la Définition 40), signifiant que* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\texttt{MCPAF}^M$. *Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* $\texttt{MCPAF}^M$.

$*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* VSAF. $\exists$ $\alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists$ $\beta \in \mathcal{A}$ *et* ($\beta$, $\alpha$) $\in$ $\texttt{defeats}_{Bc}$ *mais* $\nexists$ $\gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* ($\gamma$, $\beta$) $\in$ $\texttt{defeats}_{Bc}$. *A partir de la Définition 24, puisque* ($\beta$, $\alpha$) $\in$ $\texttt{defeats}_{Bc}$ *alors* ($\beta$, $\alpha$) $\in \mathcal{R}$ *et* $\nexists$ *i,j tel que* $(v_i, v_j) \in \gg$ *avec* $\texttt{val}(\alpha) = v_i$ *et* $\texttt{val}(\beta) = v_j$. *A partir de la Définition 40, il s'ensuit que* ($\beta$, $\alpha$) $\in \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1}$ *et* $\nexists$ *i,j tel que* $\alpha \in \mathcal{A}^M_i$, $\beta \in \mathcal{A}^M_j$ *et* $(c_i, c_j) \in \trianglerighteq^M$. *Par la propriété, il se vérifie que* ($\beta$, $\alpha$) $\in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}^M_1, \ldots, \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1})$ *et* ($\alpha$, $\beta$) $\notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq^M_1, \cdots \succeq^M_{|\mathcal{V}|+1})$, *i.e* ($\beta$, $\alpha$) $\in \texttt{Def}^M$. *Cependant,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* $\texttt{MCPAF}^M$, *ainsi* $\exists$ $\gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* ($\gamma$, $\beta$) $\in \texttt{Def}^M$, *i.e* ($\gamma$, $\beta$) $\in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}^M_1, \ldots, \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1})$ *et* ($\beta$, $\gamma$) $\notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq^M_1, \cdots \succeq^M_{|\mathcal{V}|+1})$. *A partir de la propriété, il s'ensuit que* ($\gamma$, $\beta$) $\in \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1}$ *et* $\nexists$ *k,l tel que* $\beta \in \mathcal{A}^M_k$, $\gamma \in \mathcal{A}^M_l$ *et* $(c_k, c_l) \in \trianglerighteq^M$. *D'aprés la Définition 40,* ($\gamma$, $\beta$) $\in \mathcal{R}$ *et* $\nexists$ *k,l tel que* $(v_k, v_l) \in \gg$ *avec* $\texttt{val}(\beta) = v_k$ *et* $\texttt{val}(\gamma) = v_l$, *en d'autres termes* ($\gamma$, $\beta$) $\in$ $\texttt{defeats}_{Bc}$ *en accord avec la Définition 24. Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* VSAF.

□

– Les deux systèmes d'argumentation $\langle \mathcal{A}, \texttt{Def} \rangle$ et $\langle \mathcal{A}, \texttt{defeats}_M \rangle$ associés respectivement à $\texttt{MCPAF}^M = \langle \mathcal{C}^M, \trianglerighteq^M, \langle \mathcal{A}^M_1, \ldots, \mathcal{A}^M_{|\mathcal{V}|+1} \rangle, \langle \mathcal{R}^M_1, \ldots, \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1} \rangle, \langle \succeq^M_1, \ldots, \succeq^M_{|\mathcal{V}|+1} \rangle \rangle$ et $\texttt{VSAF} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \arg, \gg \rangle$ sont équivalents ssi $\oplus^{\trianglerighteq^M}(\mathcal{R}^M_1, \ldots, \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1}) = \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1}$ et on a $(\alpha, \beta) \in \otimes^{\trianglerighteq^M}(\succeq^M_1, \cdots \succeq^M_{|\mathcal{V}|+1})$ si $|\{i | \alpha \in \mathcal{A}_i\}| > |\{i | \beta \in \mathcal{A}_i\}|$.

**Preuve 16.** *Soient Ext*(VSAF) *et Ext*($\texttt{MCPAF}^M$) *les ensembles d'extensions admissibles pour ces deux systèmes,* VSAF *et* $\texttt{MCPAF}^M$. *Démontrons que ces deux ensembles sont égaux, autrement dit que Ext*(VSAF) $\subseteq$ *Ext*($\texttt{MCPAF}^M$) *et Ext*($\texttt{MCPAF}^M$) $\subseteq$ *Ext*(VSAF) *:*

1. *Ext*($\texttt{MCPAF}^M$) $\subseteq$ *Ext*(VSAF). *Considérons que* $\exists$ $\mathcal{E} \in$ *Ext*(VSAF) *et* $\mathcal{E} \notin$ *Ext*($\texttt{MCPAF}^M$). *Puisque* $\mathcal{E} \notin$ *Ext*($\texttt{MCPAF}^M$) *et en accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\texttt{MCPAF}^M$. $\exists$ $\alpha$, $\beta \in \mathcal{E}$ *tel que* ($\alpha$, $\beta$) $\in \texttt{Def}^M$ *(*$\texttt{Def}^M$ *est construit à partir de* $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}^M_1, \ldots, \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1})$ *et* $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq^M_1, \cdots \succeq^M_{|\mathcal{V}|+1})$ *en accord avec la Définition 38 et la Défintion 40). Par propriété, il s'ensuit que* ($\alpha$, $\beta$) $\in \mathcal{R}^M_{|\mathcal{V}|+1}$ *et* $|\{i | \alpha \in \mathcal{A}^M_i\}| \geq |\{i | \beta \in \mathcal{A}^M_i\}|$. *Par la Définition 40, il se vérifie que* ($\alpha$, $\beta$) $\in \mathcal{R}$ *et* $|\arg^{-1}(\alpha)| \geq |\arg^{-1}(\beta)|$, *i.e* $(\beta, \alpha) \notin \texttt{Pref}_{Bc}$, *confirmant par la Définition 24 que* ($\alpha$, $\beta$) $\in$ $\texttt{defeats}_M$. $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VSAF. *Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* VSAF.

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* $\texttt{MCPAF}^M$. $\exists$ $\alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists$ $\beta \in \mathcal{A}^M_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}^M_{|\mathcal{V}|+1}$, *tel que* ($\beta$, $\alpha$) $\in \texttt{Def}^M$ *et* $\nexists$ $\gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* ($\gamma$, $\beta$) $\in \texttt{Def}^M$ *(*$\texttt{Def}^M$ *est construit*

*à partir de* $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *et* $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *en accord avec la Définition 38 et la Définition 40). Puisque* $(\beta, \alpha) \in \texttt{Def}^M$*, il se vérifie que* $(\beta, \alpha) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *et* $(\alpha, \beta) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$*, i.e par propriété* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ *et* $|\{i|\beta \in \mathcal{A}_i^M\}| \geq |\{i|\alpha \in \mathcal{A}_i^M\}|$*, i.e par la Définition 40,* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $|\arg^{-1}(\beta)| \geq |\arg^{-1}(\alpha)|$*, autrement dit d'après la Définition 24,* $(\beta, \alpha) \in \texttt{defeats}_M$*. Puisque* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* VSAF*, il s'ensuit que* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma, \beta) \in \texttt{defeats}_M$*, i.e* $(\gamma, \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta, \gamma) \notin \texttt{Pref}_M$*, i.e* $|\arg^{-1}(\gamma)| \geq |\arg^{-1}(\beta)|$*, i.e* $|\{i|\gamma \in \mathcal{A}_i^M\}| \geq |\{i|\beta \in \mathcal{A}_i^M\}|$*, i.e par propriété* $(\beta, \gamma) \notin \otimes^{\triangleright}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$*, soit* $(\gamma, \beta) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *et* $(\beta, \gamma) \notin \otimes^{\triangleright}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$*, i.e* $(\gamma, \beta) \in \texttt{Def}^M$*. Ceci contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* $\texttt{MCPAF}^M$*.*

2. *Ext*(VSAF) $\subseteq$ *Ext*($\texttt{MCPAF}^M$)*. Soit* $\mathcal{E}$ *une extension admissible pour* $\texttt{MCPAF}^M$*, considérons que* $\mathcal{E} \notin$ *Ext*(VSAF)*. Ceci signifie que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une extension admissible pour* VSAF*. En accord avec la Définition 5, il y a deux possibilités :*

   $*$*Cas 1 :* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* VSAF*.* $\exists\ \alpha, \beta \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\alpha, \beta) \in \texttt{defeats}_M$*, i.e* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \texttt{Pref}_M$*, i.e* $|\arg^{-1}(\alpha)| \geq |\arg^{-1}(\beta)|$*. A partir de la Définition 40, il s'ensuit que* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ *et* $|\{i|\alpha \in \mathcal{A}_i^M\}| \geq |\{i|\beta \in \mathcal{A}_i^M\}|$*, autrement dit par la propriété* $(\alpha, \beta) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *et* $(\beta, \alpha) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$*. Il se vérifie que* $(\alpha, \beta) \in \texttt{Def}^M$ *(*$\texttt{Def}^M$ *est construit à partir de* $\oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *et* $\otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *en accord avec la Définition 38 et la Définition 40), signifiant que* $\mathcal{E}$ *n'est pas sans-conflit pour* $\texttt{MCPAF}^M$*. Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *soit une extension admissible pour* $\texttt{MCPAF}^M$*.*

   $*$*Cas 2 :* $\mathcal{E}$ *ne défend pas tous ses éléments pour* VSAF*.* $\exists\ \alpha \in \mathcal{E}$ *tel que* $\exists\ \beta \in \mathcal{A}$ *et* $(\beta, \alpha) \in \texttt{defeats}_M$ *mais* $\nexists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma, \beta) \in \texttt{defeats}_M$*. A partir de la Définition 24, puisque* $(\beta, \alpha) \in \texttt{defeats}_M$ *alors* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}$ *et* $|\arg^{-1}(\beta)| \geq |\arg^{-1}(\alpha)|$*. A partir de la Définition 40, il s'ensuit que* $(\beta, \alpha) \in \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ *et* $|\{i|\beta \in \mathcal{A}_i^M\}| \geq |\{i|\alpha \in \mathcal{A}_i^M\}|$*. Par la propriété, il se vérifie que* $(\beta, \alpha) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *et* $(\alpha, \beta) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$*, i.e* $(\beta, \alpha) \in \texttt{Def}^M$*. Cependant,* $\mathcal{E}$ *est une extension admissible pour* $\texttt{MCPAF}^M$*, ainsi* $\exists\ \gamma \in \mathcal{E}$ *tel que* $(\gamma, \beta) \in \texttt{Def}^M$*, i.e* $(\gamma, \beta) \in \oplus^{\trianglerighteq}(\mathcal{R}_1^M, \ldots, \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M)$ *et* $(\beta, \gamma) \notin \otimes^{\trianglerighteq}(\succeq_1^M, \cdots \succeq_{|\mathcal{V}|+1}^M)$*. A partir de la propriété, il s'ensuit que* $(\gamma, \beta) \in \mathcal{R}_{|\mathcal{V}|+1}^M$ *et* $|\{i|\gamma \in \mathcal{A}_i^M\}| \geq |\{i|\beta \in \mathcal{A}_i^M\}|$*. D'après la Définition 40,* $(\gamma, \beta) \in \mathcal{R}$ *et* $|\arg^{-1}(\gamma)| \geq |\arg^{-1}(\beta)|$*, soit* $(\beta, \gamma) \notin \texttt{Pref}_M$*, en d'autres termes* $(\gamma, \beta) \in \texttt{defeats}_M$ *en accord avec la Définition 24. Cette conclusion contredit le fait que* $\mathcal{E}$ *ne défende pas tous ses éléments pour* VSAF*.*

□

# Bibliographie


[AB09] L. Amgoud and P. Besnard. Bridging the gap between abstract argumentation systems and logic. In *Scalable Uncertainty Management*, pages 12–27, 2009.

[AB10] Leila Amgoud and Philippe Besnard. A formal analysis of logic-based argumentation systems. In *Scalable Uncertainty Management*, pages 42–55, 2010.

[AC02] L. Amgoud and C. Cayrol. A reasoning model based on the production of acceptable arguments. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 34 :197–216, 2002.

[ACB96] L. Amgoud, C. Cayrol, and D. Le Berre. Comparing arguments using preference ordering for argument-based reasoning. In *International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, pages 400–403, 1996.

[Amg99] L. Amgoud. *Contribution à l'intégration des préférences dans le raisonnement argumentatif.* Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1999.

[AP09] L. Amgoud and H. Prade. Using arguments for making and explaining decisions. *Artificial Intelligence*, 173(3-4) :413–436, 2009.

[APP00] L. Amgoud, S. Parsons, and L. Perrussel. An argumentation framework based on contextual preferences. In *Proceedings of the International Conference on Formal and Applied and Practical Reasoning*, pages 59–67, 2000.

[AQU09] AQUANUP. `http://www.inra.fr/inra_cepia/vous_recherchez/des_projets/france/aquanup`, 2009.

[Ara10] Araucaria. @arg : Dundee. `http://araucaria.computing.dundee.ac.uk/doku.php`, 2010.

[Ash91] K. D. Ashley. *Modeling Legal Arguments : Reasoning with Cases and Hypotheticals.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1991.

[AV09a] L. Amgoud and S. Vesic. On revising argumentation-based decision systems. In *European Conference of Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, pages 71–82, 2009.

[AV09b] L. Amgoud and S. Vesic. Repairing preference-based argumentation frameworks. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 665–670, 2009.

[BAT09] J.-R. Bourguet, L. Amgoud, and R. Thomopoulos. Contribution aux comparaisons formelles des modèles de préférences en argumentation. In *Journées Francophones des Modèles formels de l'intéraction*, pages 81 – 92, 2009.

[BAT10] J.-R. Bourguet, L. Amgoud, and R. Thomopoulos. Towards a unified model of preference-based argumentation. In *International Symposium of Foundations of Information and Knowledge Systems*, pages 326–344, 2010.

[BBL+08] J-.M. Bourre, A. Bégat, M.-C. Leroux, V. Mousques-Cami, N. Pérandel, and F. Souply. Valeur nutritionnelle (macro et micro-nutriments) de farines et pains français. *Médecine et Nutrition*, 44(2) :49–76, 2008.

[BC03] T. J. M. Bench-Capon. Persuasion in practical argument using value-based argumentation frameworks. *Journal of Logic and Computation*, 13(3) :429–448, 2003.

[BCD07] T. J. M. Bench-Capon and P. E. Dunne. Argumentation in artificial intelligence. *Artificial Intelligence*, 171(10-15) :619–641, 2007.

[BCFT09] Jean-François Baget, Madalina Croitoru, Jérôme Fortin, and Rallou Thomopoulos. Default conceptual graph rules : Preliminary results for an agronomy application. In *ICCS*, pages 86–99, 2009.

[BCNT08] J.-R. Bourguet, B. Cuq, A. Ndiaye, and R. Thomopoulos. Modelling a dynamic process in the conceptual graph model : Extension needed ? In *International Conference on Conceptual Structures (Supplement)*, pages 49–56, 2008.

[BDKT97] A. Bondarenko, P. M. Dung, R. A. Kowalski, and F. Toni. An abstract, argumentation-theoretic approach to default reasoning. *Artificial Intelligence*, 93(1-2) :63–101, 1997.

[BFM80] L. Birnbaum, M. Flowers, and R. McGuire. Towards an ai model of argumentation. In *Association for the Advancement of Artificial Intelligence*, pages 313–315, 1980.

[BH08] P. Besnard and A. Hunter. *Elements of Argumentation*. The MIT Press, 2008.

[BLN06] F. Le Ber, J. Lieber, and A. Napoli. Les systèmes à base de connaissances. In J. Akoka and I. Comyn Wattiau, editors, *Encyclopédie de l'informatique et des systèmes d'information*, pages 1197–1208. Vuibert, 2006.

[BMB10] J. Bentahar, B. Moulin, and M. Bélanger. A taxonomy of argumentation models used for knowledge representation. *Artificial Intelligence Revue*, 33(3) :211–259, 2010.

[Bou90] D. Bouyssou. Building criteria : A prerequisite for mcda. In in C. Bana e Costa (ed.), editor, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, pages 58 – 80. Springer-Verlag, 1990.

[CAD08] CADINNO. Information, choix, consommateurs responsables : des leviers pour un développement durable ? `http://www.melissa.ens-cachan.fr/IMG/pdf/Colloque_CadInno_FR.pdf`, 2008.

[Car10] Carneades. Argumentation system. `http://carneades.berlios.de/`, 2010.

[Cay95] Claudette Cayrol. On the relation between argumentation and non-monotonic coherence-based entailment. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1443–1448, 1995.

[CBC05] A. Chorley and T. Bench-Capon. An empirical investigation of reasoning with legal cases through theory construction and application. *Artificial Intelligence Law*, 13(3) :323–371, 2005.

[CDLSM02] C. Cayrol, S. Doutre, M.-C. Lagasquie-Schiex, and J. Mengin. Minimal defence : a refinement of the preferred semantics for argumentation frameworks. In *9th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning*, pages 408–415, 2002.

[CM08] M. Chein and M.-L. Mugnier. *Graph-based Knowledge Representation and Reasoning, Computational Foundations of Conceptual Graphs*. Advanced Information and Knowledge Processing Series. Springer London, 2008.

[CMDK+07] S. Coste-Marquis, C. Devred, S. Konieczny, M.-C. Lagasquie-Schiex, and P. Marquis. On the merging of dung's argumentation systems. *Artificial Intelligence Journal*, 171 :730–753, 2007.

[DBC01] P. E. Dunne and T. J. M. Bench-Capon. Complexity and combinatorial properties of argument systems. Technical report, University of Liverpool, Department of Computer Science, 2001.

[DIN08] DINABIO. Proceedings of dinabio développement et innovation en agriculture biologique. `http://www.inra.fr/ciag/revue_innovations_agronomiques/volume_4_janvier_2009`, 2008.

[DMA08] Y. Dimopoulos, P. Moraitis, and L. Amgoud. Characterizing the outcomes of argumentation-based integrative negotiation. In *Intelligent Agent Technology*, pages 456–460, 2008.

[DQ06] S. Dubuisson-Quellier. De la routine à la délibération. les arbitrages des consommateurs en situation d'achat. *Réseaux*, 135/136 :253–284, 2006.

[DSA+07] M. Dean, R. Sheperd, A. Arvola, P. Lampila, L. Lahteenmaki, M. Vassalo, A. Saba, E. Claupein, and M. Winkelmann. Report on consumer expectations of health benefits of modified cereal products. Technical report, University of Surrey, UK, 2007.

[Dun95] P. M. Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and $n$-person games. *Artificial Intelligence Journal*, 77 :321–357, 1995.

[EGKF93] M. Elvang-Gøransson, P. Krause, and J. Fox. Dialectic reasoning with inconsistent information. In *Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 114–121, 1993.

[FCN09] FCN. Fibres, céréales et nutrition. `http://www.inra.fr/content/view/full/24670029`, 2009.

[Fis70] P. Fishburn. *Utility Theory for Decision Making.* Wiley, New York, 1970.

[GLM+09] E. Ginon, Y. Lohérac, C. Martin, P. Combris, and S. Issanchou. Effect of fibre information on consumer willingness to pay for french baguettes. *Food Quality and Preference*, 20 :343–352, 2009.

[Got98] J. Gottsegen. Using argumentation analysis to assess stakeholder interests in planning debates. *Computers, Environment and Urban Systems*, 22(4) :365 – 379, 1998.

[Gru93] T. R. Gruber. A translation approach to portable ontology specifications. *KNOWLEDGE ACQUISITION*, 5 :199–220, 1993.

[Gua98] N. Guarino. Formal ontology and information systems. pages 3–15. IOS Press, 1998.

[HEA09] HEALTHGRAIN. `http://www.healthgrain.org`, 2009.

[KKT92] A. C. Kakas, R. A. Kowalski, and F. Toni. Abductive logic programming. *Journal of Logic and Computation*, 2(6) :719–770, 1992.

[KvdT08] S. Kaci and L. van der Torre. Preference-based argumentation : Arguments supporting multiple values. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48(3) :730–751, 2008.

[MB94] L. A. Maguire and L. G. Boiney. Resolving environmental disputes : a framework incorporating decision analysis and dispute resolution techniques. *Journal of Environmental Management*, 42(1) :31 – 48, 1994.

[MC92] M.-L. Mugnier and M. Chein. Polynomial algorithms for projection and matching. In *Workshop on Conceptual Graphs*, pages 239–251, 1992.

[McC79] J. McCarthy. First order theories of individual concepts and propositions. In In D. Michie (Ed.), editor, *Machine Intelligence, Vol. 9*. Edinburgh : Edinburgh University Press, 1979.

[MI99] B. Moulin and H. Irandoust. Extending the conceptual graph approach to represent evaluative attitudes in discourse. In *International Conference on Conceptual Structures*, pages 140–153, 1999.

[Mou03] V. Mousseau. *Elicitation des préférences pour l'aide multicritère à la décision*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Dauphine, Paris, France, 2003.

[MPC09] A. De Moor, J. Park, and M. Croitoru. Argumentation map generation with conceptual graphs : the case for essence. In *CS-TIW at International Conference on Conceptual Structures 2009*, pages 58–69, 2009.

[OTP58] L. Olbrechts-Tyteca and C. Perelman. *Traité de l'argumentation : La nouvelle rhétorique*. Presses Universitaires de France, 1958.

[Pie79] C. S. Pierce. *Collected papers*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1979.

[PNN10a] PNNS (statutory documents). `http://www.sante.gouv.fr/htm/pointsur/nutrition/pol_nutri4.htm`, 2010.

[PNN10b] PNNS (website). `http://www.mangerbouger.fr/menu-secondaire/pnns/le-pnns`, 2010.

[Pol92] J. L. Pollock. How to reason defeasibly. *Artificial Intelligence*, 57(1) :1–42, 1992.

[Pra93] H. Prakken. A logical framework for modelling legal argument. In *International Conference on Artificial Intelligence and Law*, pages 1–9, 1993.

[Pra02] H. Prakken. An exercise in formalising teleological case-based reasoning. *Artificial Intelligence Law*, 10(1-3) :113–133, 2002.

[PS97] H. Prakken and G. Sartor. Argument-based extended logic programming with defeasible priorities. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 7 :25–75, 1997.

[RB93] B. Roy and D. Bouyssou. *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*. Economica, Paris, 1993.

[Rei80] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13 :81–132, 1980.

[RL09] C. Rémésy and F. Leenhardt. L'amélioration de la valeur nutritionnelle des pains bio. `http://www.itab.asso.fr/downloads/evenements/qualite-nutrition-cplt-remesy.pdf`, 2009.

[Ros91] E. Rosinger. Beyond preference information based multiple criteria decision making. *European Journal of Operational Research*, 53 :217 – 227, 1991.

[Roy85] B. Roy. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica, Paris, 1985.

[RS09] I. Rahwan and G. Simari. *Argumentation in Artificial Intelligence*. Springer, 2009.

[RV97] B. Roy and D. Vanderpooten. An overview on 'the european school of mcda : Emergence, basic features and current works'. *European Journal of Operational Research*, 99(1) :26 – 27, 1997.

[Sar93] G. Sartor. Defeasible arguments in a logic programming model. In *Gruppo ricercatori e Utenti di Logic Programming (GULP)*, pages 423–440, 1993.

[Sav54] L.J. Savage. *The foundation of statistics.* Dover Publications, 1972, New-York, 1954.

[SDP93] S., D. Dubois, and H. Prade. Argumentative inference in uncertain and inconsistent knowledge bases. In *Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 411–419, 1993.

[SG07] J. Slavin and H. Green. Diatery fibre and satiety. *British Nutrition Foundation*, 32(1) :32–42, 2007.

[SGCS03] F. Stolzenburg, A. J. García, C. Iván Chesñevar, and G. R. Simari. Computing generalized specificity. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 13(1) :87–113, 2003.

[Sim55] H.A. Simon. A behavourial model of rational choice. *Quaterly Journal of Economics*, 69 :99 – 118, 1955.

[SL92] G. R. Simari and R. P. Loui. A mathematical treatment of defeasible reasoning and its implementation. *Artificial Intelligence*, 53(2-3) :125–157, 1992.

[SM96] Eric Salvat and Marie-Laure Mugnier. Sound and complete forward and backward chainingd of graph rules. In *ICCS*, pages 248–262, 1996.

[Sow84] J. F. Sowa. *Conceptual Structures : Information Processing in Mind and Machine.* Addison-Wesley, 1984.

[Tar56] A. Tarski. *On Some Fundamental Concepts of Metamathematics.* Oxford, England : Oxford University Press, 1956.

[TBCN10] R Thomopoulos, J.-R. Bourguet, B. Cuq, and A. Ndiaye. Answering queries that may have results in the future : A case study in food science. *Knowledge-Based Systems*, 23(5) :491–495, 2010.

[TBS08] F. A. Tohmé, G. A. Bodanza, and G. R. Simari. Aggregation of attack relations : A social-choice theoretical analysis of defeasibility criteria. In *Foundations of Information and Knowledge Systems*, volume 4932 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 8–23. Springer, 2008.

[Tou69] S. Toulmin. *The Uses of Argument.* Cambridge, England : Cambridge University Press, 1969.

[VP00] G. A. W. Vreeswijk and H. Prakken. Credulous and sceptical argument games for preferred semantics. In *Proceedings of the 7th European Workshop on Logic for Artificial Intelligence*, number 1919 in Springer Lecture Notes in AI, pages 239–253. Springer Verlag, 2000.

[Yag08] R. R. Yager. Entropy and specificity in a mathematical theory of evidence. In *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions*, pages 291–310. 2008.