



HAL
open science

Fonctions zêta réelles et équivalence de Nash après éclatements

Goulwen Fichou

► **To cite this version:**

Goulwen Fichou. Fonctions zêta réelles et équivalence de Nash après éclatements. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2010. tel-00554877

HAL Id: tel-00554877

<https://theses.hal.science/tel-00554877>

Submitted on 11 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Goulwen FICHOU

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DU MÉMOIRE :

Fonctions zêta réelles et équivalence de Nash après éclatements

Soutenue le 26 novembre 2010 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Fabrizio BROGLIA	Università di Pisa
M. Antoine CHAMBERT-LOIR	Université de Rennes 1
M. Michel COSTE	Université de Rennes 1
M. Johannes HUISMAN	Université de Bretagne Occidentale
M. François LOESER	Université Pierre et Marie Curie
M. Adam PARUSIŃSKI	Université de Nice Sophia Antipolis

au vu des rapports de Fabrizio BROGLIA , Satoshi KOIKE (Hyogo University of Teacher Education) et François LOESER.

Table des matières

Introduction	5
Chapitre 1. Fonctions zêta motiviques	9
1. Mesurer les arcs	9
2. En géométrie réelle	10
3. Que contient la fonction zêta ?	12
Chapitre 2. Mesures motiviques équivariantes	25
1. Ensembles symétriques par arcs	25
2. Homologie équivariante de Borel-Moore	26
3. Cas virtuel	28
Chapitre 3. Équivalence de Nash après éclatements	33
1. Équivalences après éclatements	33
2. Nash versus analytique	36
3. Fonctions à croisements normaux	40
Bibliographie	43

Introduction

Ce manuscrit présente une synthèse de mes travaux de recherche effectués au sein de l'IRMAR depuis mon arrivée à l'université de Rennes 1 en 2004. Il tente de dégager les idées directrices qui sous-tendent cette recherche, portant sur l'étude des singularités des germes de fonctions réelles à travers des relations d'équivalence après résolution des singularités, tout en se permettant à l'occasion de rentrer dans quelques détails en vue d'illustrer les méthodes utilisées.

Dans l'optique d'étudier les singularités de germes de fonctions, on cherche à distinguer ces germes entre différentes classes de singularités. Dans son fameux livre [3], V. Arnold a lancé les bases de la classification des singularités de germes analytiques pour l'équivalence analytique (par exemple à droite : f et g sont équivalents s'il existe un difféomorphisme analytique h tel que $f = g \circ h$). D'un point de vue plus géométrique, l'équivalence topologique entre germes de fonctions analytiques complexes se révèlent être une relation très riche et pleine de mystère. Il s'agit en effet de relier des propriétés analytiques des germes à des conditions topologiques sur l'équivalence. La conjecture de Zariski prédit ainsi que la multiplicité doit être un invariant topologique...

Pour les germes de fonctions analytiques réelles, l'équivalence topologique perd tout son sens du fait que des germes lisses puissent être équivalents à des germes singuliers, par exemple l'identité et le passage au cube en dimension un (ou encore une droite et un point de rebroussement). On cherche alors à imposer des conditions plus fortes pour obtenir des propriétés géométriquement acceptables. Avec une régularité de classe C^1 , une famille de droites aussi régulière que celle de Whitney, donnée par $f_t(x, y) = xy(y - x)(y - tx)$ avec la pente t de la dernière droite appartenant à $]0, 1[$, possèdent une infinité de classes d'équivalence différentes (penser au birapport !). Affaiblissant un peu la relation, si on demande seulement le caractère bi-Lipschitz (ce qui reste géométriquement intéressant car cela préserve l'ordre des arcs analytiques), on se retrouve dans une situation similaire au cadre C^1 : il existe une famille à singularités isolées pour laquelle on ait localement une infinité de classes d'équivalence différentes [30].

Les équivalences entre germes de fonctions réelles qui vont nous intéresser présentent un renforcement de l'équivalence topologique, mais d'une nature

différente. Le point de départ est une remarque de T.-C. Kuo à propos de la famille de Whitney [37] : après éclatements de l'origine, les quatre droites sont séparées et les germes de la famille sont alors tous équivalents entre eux analytiquement. T.-C. Kuo a formalisé dans [39] l'équivalence analytique après éclatements en demandant que des germes soient topologiquement équivalents via un homéomorphisme entre les espaces sources qui se remonte en un isomorphisme analytique après des modifications des espaces sources. On peut penser à ces modifications, qui permettent d'obtenir effectivement une relation d'équivalence, comme à des résolutions des singularités des germes de fonctions analytiques, que l'on sait réaliser par une composition d'éclatements le long de centres analytiques lisses grâce à H. Hironaka [31]. Le résultat principal de [39] est alors que l'équivalence analytique après éclatements est une bonne notion pour une théorie de l'équisingularité réelle, en ceci que pour une famille à singularités isolées, le nombre de classes d'équivalence est localement fini [39].

Il existe des variantes de la relation d'équivalence après éclatements qui diffèrent plus ou moins de celle originale définie par T.-C. Kuo, en imposant des restrictions à l'isomorphisme analytique ou au lieu d'indétermination des modifications. Citons aussi une version plus faible introduite par T.-C. Kuo et J. N. Ward [38] où on ne demande plus d'homéomorphisme entre les espaces sources, mais seulement un isomorphisme après éclatements. Pour notre part, on s'intéressera plus particulièrement au cas des germes de fonctions dits de Nash, c'est-à-dire les fonctions analytiques qui sont algébriques (solutions d'équations polynomiales). Ces fonctions de Nash, que l'on peut aussi définir comme étant les fonctions analytiques réelles dont le graphe est semi-algébrique, i.e. définie par des égalités et inégalités entre polynômes à coefficients réels, tirent leur nom des travaux de J. Nash [45] qui a réalisé toute variété lisse compacte comme une réunion de composantes connexes d'une variété algébrique réelle. On dispose aussi de la résolution des singularités dans ce cadre [5].

Considérons deux germes de fonctions réelles, analytiques ou de classe Nash. Ces germes sont-ils équivalents au sens d'une relation d'équivalence après éclatements ?

Dans l'optique d'apporter une réponse positive à cette question, la méthode classique tend à placer ces germes dans une famille et à utiliser des résultats d'équisingularité. À la suite du travail fondateur de T.-C. Kuo [39], de nombreux résultats d'équisingularité ont été démontrés via des résolutions simultanées des singularités d'une famille et l'intégration le long de champs de vecteurs pour construire l'isomorphisme analytique après modifications, essentiellement sous des hypothèses de singularités isolées pour garantir que l'isomorphisme construit redescende en un homéomorphisme entre les espaces sources (voir [24, 26] pour des articles de synthèse). Dans le contexte des germes de

classe Nash, des résultats d'approximation [49, 25] permettent de remplacer l'intégration le long de champs de vecteurs qui fait sortir de la classe Nash.

Dans l'optique d'apporter une réponse négative à la question, il est nécessaire de disposer d'invariants suffisamment fins pour distinguer les classes d'équivalence. À la suite des premiers invariants introduits par T. Fukui [23], qui considère les ordres des séries obtenus en composant un germe de fonctions donné avec tous les arcs analytiques passant par la singularité, une certaine mesure de l'ensemble de ces espaces d'arcs réalisant un ordre fixé permet aussi de définir des invariants grâce à la théorie de l'intégration motivique. Cette théorie, introduite par M. Kontsevich [36] puis développée par J. Denef et F. Loeser [13], permet de calculer la mesure de ces espaces d'arcs après résolution des singularités, ce qui convient tout-à-fait aux relations d'équivalence étudiées.

Dans ce manuscrit, on définit dans le premier chapitre ces invariants, appelés fonctions zêta motiviques, et on décrit ce qu'elles mesurent dans le contexte des germes de fonctions de classe Nash. On rappelle pour cela les nombres de Betti virtuels définis par B. Totaro [53] et C. McCrory et A. Parusiński [43], qui joueront le rôle de mesure pour les espaces d'arcs évoqués. On montre alors que les fonctions zêta adaptées à ce contexte réel permettent de distinguer le corang et l'indice des germes de fonctions de classe Nash, d'établir la classification complète pour les singularités simples (de type ADE), mais également de retrouver des informations sur les poids dans le cas de polynômes homogènes par poids à singularité isolée.

Le second chapitre revient sur la question des mesures d'espaces d'arcs, en introduisant des nombres de Betti virtuels pour des variétés réelles munies d'une action d'une groupe fini. Le but de ce travail est de comprendre, dans le cas réel, la fonction zêta monodromique définie par J. Denef et F. Loeser, qui permet en particulier de définir la fibre de Milnor motivique d'un polynôme complexe [13].

Enfin dans le dernier chapitre, où l'on donne les définitions précises des équivalences après éclatements, on s'intéresse à des questions d'approximation, pour un germe de classe Nash, d'une résolution des singularités analytiques par une résolution dans la classe Nash. On en déduit que des germes de classe Nash équivalent faiblement après éclatements analytiques sont encore équivalent faiblement après éclatements dans la classe Nash. De plus, dans le but de mieux comprendre cette relation affaiblie, on étudie l'équivalence analytique entre fonctions analytiques, sur une variété analytique, admettant uniquement comme singularités des croisements normaux (et une relation analogue dans la classe Nash). Une telle relation fait sens grâce au théorème de résolution des singularités de Hironaka [31] qui permet de se ramener à cette situation après une succession d'éclatements le long de centres lisses. On montre alors que le cardinal des classes d'équivalence est dénombrable ou nul dans le cadre Nash, mais également dans le cadre analytique lorsque la variété est compacte.

CHAPITRE 1

Fonctions zêta motiviques

On commence par présenter les fonctions zêta motiviques définies par J. Denef et F. Loeser [13], puis on étudie le cas particulier de la géométrie réelle.

1. Mesurer les arcs

Dans cette partie on note k le corps des nombres complexes ou celui des nombres réels. Soit $f : (\mathbb{A}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{A}, 0)$ un germe de fonctions analytiques. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n(f)$ l'espace des arcs tronqués à l'ordre n associé à f :

$$A_n(f) = \{\gamma(t) = a_1 t + \cdots + a_n t^n; \quad a_i \in k \quad \text{ord}_t f \circ \gamma(t) = n\}.$$

C'est un sous-ensemble constructible au sens de Zariski de \mathbb{A}^{nd} . On définit également des espaces d'arcs $A_n^1(f) \subset A_n(f)$ en gardant les arcs $\gamma \in A_n(f)$ tel que le coefficient dominant de $f \circ \gamma(t)$ vaut 1. Ces espaces d'arcs sont munis d'une action des racines n -ièmes de l'unité par multiplication sur la variable t .

On souhaite comprendre les singularités du germe f à partir de ses espaces d'arcs. Pour cela, on va mesurer ces espaces d'arcs de sorte à pouvoir estimer comment ils se transforment par une résolution des singularités de f [13]. L'ensemble des valeurs de cette mesure est un anneau universel par rapport à l'additivité et la multiplicativité des ensembles constructibles. Cet anneau, l'anneau de Grothendieck des variétés sur k , est défini en quotientant le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes $[X]$ de variétés X sur k par le sous-groupe engendré par les relations $[X] - [Y] - [X \setminus Y]$ où $Y \subset X$ est une sous-variété fermée de X . On le note $K^0(\text{Var}_k)$, et on note \mathbb{L} la classe de la droite \mathbb{A}^1 . Le groupe de Grothendieck des variétés est naturellement muni d'une structure d'anneau. L'universalité de $K^0(\text{Var}_k)$ se traduit par le fait que tout invariant additif et multiplicatif des variétés (par exemple la caractéristique d'Euler à supports compacts sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , le polynôme de Hodge-Deligne ou les structures de Hodge mixtes sur \mathbb{C}) se factorise par cet anneau.

On définit la fonction zêta naive de f comme étant la série formelle à coefficients dans $K^0(\text{Var}_k)[\mathbb{L}^{-1}]$ définie par :

$$Z_f(T) = \sum_{n>0} [A_n(f)] \left(\frac{T}{\mathbb{L}^d}\right)^n.$$

On définit de manière similaire la fonction zêta monodromique $Z_f^1(T)$, à valeurs dans un groupe de Grothendieck où l'on tient compte de l'action des racines de l'unité.

L'intégration motivique permet de contrôler la manière dont les arcs se relèvent par éclatements [13]. En particulier, on sait en déduire que ces fonctions zêta sont rationnelles. Par exemple, dans le cas de la fonction naïve, on obtient :

THÉORÈME 1.1. [13] *Soit $f : (\mathbb{A}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{A}, 0)$ un germe de fonctions analytiques. Soit $h : (M, h^{-1}(0)) \longrightarrow (\mathbb{A}^d, 0)$ une application propre birationnelle qui est un isomorphisme en dehors du lieu des zéros de f . Supposons que $f \circ h$ et le déterminant jacobien $\text{jac } h$ de h sont à croisements normaux simultanément.*

Notons par $\cup_{j \in J} E_j$ la décomposition en composantes irréductibles de $(f \circ h)^{-1}(0)$, et soit $K \subset J$ tel que $h^{-1}(0) = \cup_{k \in K} E_k$. Notons encore par E_I^0 , pour $I \subset J$, l'ensemble $(\cap_{i \in I} E_i) \setminus (\cup_{j \in J \setminus I} E_j)$.

Posons $N_i = \text{mult}_{E_i} f \circ h$ et $\nu_i = 1 + \text{mult}_{E_i} \text{jac } h$. Alors

$$Z_f(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (\mathbb{L} - 1)^{|I|} [E_I^0 \cap h^{-1}(0)] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - \mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}.$$

Pour $k = \mathbb{C}$, on sait que ces fonctions zêta contiennent beaucoup d'informations sur la singularité du germe f . On dispose pour cela de nombreuses réalisations possibles de l'anneau de Grothendieck, via les structures de Hodge mixtes ou le polynôme de Hodge-Deligne notamment.

J. Denef et F. Loeser définissent en particulier une fibre de Milnor motivique en prenant la limite quand T tend vers l'infini de la fonction zêta monodromique (qui est une fonction rationnelle). Cette fibre de Milnor motivique est un invariant très intéressant pour la singularité. On retrouve en particulier les invariants classiques de la fibre de Milnor de f en prenant pour mesure l'anneau de Grothendieck des structures de Hodge mixtes. La conjecture de la monodromie prédit de plus que les pôles de la fonction zêta sont reliés aux valeurs propres de la monodromie [13]. On dispose également d'une formule de Thom-Sebastiani pour calculer la fibre de Milnor motivique de la somme de deux fonctions à variables séparées en fonction de la fibre de Milnor motivique de chacune des fonctions [11]. G. Guibert montre qu'on retrouve aussi en dimension deux les paires de Puiseux [29].

Tous ces résultats sont une motivation pour étudier les fonctions zêta dans le contexte des singularités réelles.

2. En géométrie réelle

Lorsqu'on travaille avec $k = \mathbb{R}$, plusieurs problèmes se posent pour étudier ces fonctions zêta. Tout d'abord, on manque de mesures motiviques ! En utilisant la caractéristique d'Euler à supports compacts, R. Quarez a étudié l'espace des germes d'arcs réels et la série de Poincaré d'un ensemble semi-algébrique [47], et S. Koike et A. Parusiński ont développé les fonctions zêta dans le cadre analytique réel [35]. Mais une théorie de l'intégration avec la mesure d'un cercle ou de la droite projective qui s'annule bride l'étude dans ce contexte.

Mise à part la caractéristique d'Euler à supports compacts, la seule autre mesure motivique connue est le polynôme de Poincaré virtuel introduit en 2003 par C. McCrory et A. Parusiński [43]. Mon travail de thèse a consisté à relier les fonctions zêta réelles, définies avec le polynôme de Poincaré virtuel [43], à l'équivalence de Nash après éclatements [14].

Par ailleurs, concernant la fonction zêta monodromique et donc les relations avec la fibre de Milnor, on manque à la fois d'une compréhension des fibres de Milnor réelles et d'invariants tenant compte des actions des racines de l'unité... Ces notions ont été remplacées par celles de fonctions zêta avec signes, à la suite des invariants de Fukui avec signes [23], et une avancée dans cette direction est l'introduction des nombres de Betti virtuels équivariants (cf. chapitre 2).

Dans cette partie, on va utiliser comme mesure le polynôme de Poincaré virtuel. On définit les espaces d'arcs avec signes $A_n^\pm(f) \subset A_n(f)$, en conservant les arcs $\gamma \in A_n(f)$ dont le coefficient dominant de $f \circ \gamma(t)$ vaut ± 1 . On en déduit les fonctions zêta avec signes.

Notons que les fonctions zêta étudiées dans [35], définies avec la caractéristique d'Euler à supports compacts à la place du polynôme de Poincaré virtuel, se retrouvent également en évaluant ce polynôme en -1 .

2.1. Polynôme de Poincaré virtuel. Le polynôme de Poincaré virtuel est l'analogie en géométrie algébrique réelle du polynôme de Hodge-Deligne en géométrie algébrique complexe. Il s'obtient à partir de la filtration par le poids sur l'homologie des variétés algébriques réelles définies par C. McCrory et A. Parusiński [44] via les hyperrésolutions cubiques [46]. On en donne ici une présentation plus élémentaire (en suivant plutôt [43]) reposant sur le théorème de factorisation faible des applications birationnelles [55].

Étant intéressé par les points réels, on comprend dans tout le manuscrit ensemble algébrique réel au sens de [7].

THÉORÈME 1.2. [43] *Soit $i \in \mathbb{N}$. Le i -ème nombre de Betti $b_i(\cdot) = \dim H_i(\cdot, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, vu sur les ensembles algébriques réels lisses et compacts, admet une extension unique en une application β_i additive, i.e.*

$$\beta_i(X) = \beta_i(Y) + \beta_i(X \setminus Y)$$

pour un sous-ensemble fermé $Y \subset X$ de X , définie sur la catégorie des ensembles constructibles au sens de Zariski. Le polynôme $\beta(\cdot) = \sum_{i \geq 0} \beta_i(\cdot) u^i$ à coefficients dans \mathbb{Z} est de plus multiplicatif : $\beta(X \times Y) = \beta(X)\beta(Y)$ pour des ensembles X, Y constructibles.

Le nombre β_i est appelé le i -ème nombre de Betti virtuel et le polynôme β le polynôme de Poincaré virtuel. Évalué en $u = -1$, ce polynôme redonne la caractéristique d'Euler à supports compacts.

La démonstration du théorème se fait par récurrence sur la dimension des espaces. On définit le polynôme de Poincaré virtuel d'un ensemble lisse X non compact par additivité à partir d'une compactification lisse $\bar{X} = X \cup D$ (où on a ajouté un ensemble D de dimension strictement plus petite) par

$\beta(x) := \beta(\overline{X}) - \beta(D)$. Pour un ensemble singulier, on utilise une résolution des singularités [31, 5] (qui est un isomorphisme en dehors d'un sous-ensemble de dimension strictement plus petite) et l'additivité pour exprimer le polynôme de Poincaré de l'ensemble singulier en fonction d'ensembles lisses ou de dimension strictement plus petite. Il reste à vérifier que ces constructions ne dépendent pas des choix de compactifications et de résolutions des singularités. Le théorème de factorisation faible permet de se concentrer sur le cas d'un seul éclatement à centre lisse compact, pour lequel on utilise la dualité de Poincaré (d'où les coefficients $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ pour l'homologie) pour conclure.

REMARQUE 1.3. C. McCrory et A. Parusiński montrent de plus que les polynômes de Poincaré virtuels de X et Y coïncident lorsque qu'il existe un homéomorphisme régulier entre X et Y [44].

On donne ci-dessous un exemple de calcul de polynômes de Poincaré virtuels.

EXEMPLE 1.4. Notons par \mathbb{P}^k l'espace projectif réel de dimension k . Il est compact et lisse, donc $\beta(\mathbb{P}^k) = 1 + u + \dots + u^k$ puisque $\dim H_i(\mathbb{P}^k, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = 1$ pour $i \in \{0, \dots, k\}$ et $\dim H_i(\mathbb{P}^k, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = 0$ autrement. On en déduit le polynôme de Poincaré virtuel pour les espaces affines par compactification. En effet, compactifiant \mathbb{R}^n en \mathbb{P}^n en ajoutant un hyperplan \mathbb{P}^{n-1} à l'infini, on obtient par additivité

$$\beta(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n) = \beta(\mathbb{P}^n) - \beta(\mathbb{P}^{n-1}) = u^n.$$

Un fait important est que le polynôme de Poincaré virtuel, contrairement à la caractéristique d'Euler à supports compacts, conserve la dimension.

PROPOSITION 1.5. [43] *Soit X un ensemble constructible. Alors le degré du polynôme de Poincaré virtuel de X est égal à la dimension de X .*

Rappelons que la caractéristique d'Euler à supports compacts d'un cercle (par exemple) est nulle. Par contre :

COROLLAIRE 1.6. *Soit X un ensemble constructible. Alors $\beta(X) \neq 0$ si et seulement si X est non vide.*

3. Que contient la fonction zêta ?

La toute première information donnée par la fonction zêta définie avec le polynôme de Poincaré virtuel est la multiplicité. Plus précisément l'ordre p de la fonction zêta d'un germe de fonction analytique est égal à la multiplicité du germe. En effet, cette multiplicité est le plus petit entier dans l'ensemble de Fukui du germe, il existe donc un arc qui, composé avec le germe, produise une série d'ordre p . En particulier l'espace d'arcs $A_p(f)$ est non vide, et sa mesure est non nulle d'après le corollaire 1.6.

Mais les fonctions zêta révèlent bien d'autres informations...

3.1. Préservation du corang et de l'indice. La première étape dans l'optique d'une classification des singularités réelles est de s'intéresser au corang et à l'indice d'un germe. En effet, tout germe singulier s'écrit, après inversion locale, comme une somme (éventuellement nulle si le germe est trop singulier) de carrés affectés d'un signe. Plus précisément, soit $f : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonctions de classe Nash dont la matrice jacobienne s'annule en 0. On note $x = (x_1, \dots, x_d)$ les variables de \mathbb{R}^d . Notons r le rang de sa matrice hessienne en 0. A un isomorphisme de classe Nash près, f est du type

$$\sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + F(x)$$

avec F un germe de classe Nash d'ordre au moins trois. Le nombre r de carrés est le rang de f , et le nombre $r - s$ de signe "-" son indice.

THÉORÈME 1.7. [16] *Des germes de Nash partageant les mêmes fonctions zêta ont les mêmes corang et indice.*

Si f est effectivement singulier, les premiers espaces d'arcs $A_1(f)$ et $A_1^\pm(f)$ sont vides. Dans le cas où des carrés apparaissent dans l'expression de f , l'espace d'arc d'ordre deux $A_2(f)$ n'est alors pas vide et donc l'ordre de la fonction zêta naïve est égal à deux. Un des espaces d'arcs avec signes $A_2^\pm(f)$ peut par contre être vide si s ou $r - s$ est nul.

On retrouve alors le corang et l'indice de f avec les coefficients $\beta(A_2)$ et $\beta(A_2^\pm)$ des fonctions zêta de f .

Pour comprendre la mesure des seconds espaces d'arcs de f dans l'optique de retrouver ses corang et indice, on est amené à calculer le polynôme de Poincaré virtuel d'ensembles algébriques réels définis par les polynômes de la forme

$$Q_{p,q}(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=1}^q y_j^2$$

avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Soient $Y_{p,q}$ et $Y_{p,q}^1$ les sous-variétés algébriques de \mathbb{R}^{p+q} définies respectivement par $Q_{p,q}(x, y) = 0$ et par $Q_{p,q}(x, y) = 1$. En choisissant une stratification de $Y_{p,q}$ bien adaptée [17] on détermine leur polynôme de Poincaré virtuel.

LEMME 1.8. (1) $\beta(Y_{p,q}) = u^{p+q-1} - u^{\max\{p,q\}-1} + u^{\min\{p,q\}}$.

(2) Si $p \leq q$, alors $\beta(Y_{p,q}^1) = u^{q-1}(u^p - 1)$.

(3) Si $p > q$, alors $\beta(Y_{p,q}^1) = u^q(u^{p-1} + 1)$.

Démonstration. On suppose $p \leq q$. On effectue le changement de variables suivant : $u_i = x_i + y_i$ et $v_i = x_i - y_i$ pour $i = 1, \dots, p$. La nouvelle expression de $Q_{p,q}$ est donc

$$\sum_{i=1}^p u_i v_i - \sum_{j=p+1}^q y_j^2.$$

Pour calculer le polynôme de Poincaré virtuel de $Y_{p,q}$, on stratifie alors $Y_{p,q}$ en fonction de l'annulation des variables u_i pour $i = 1, \dots, p$. Supposons $u_1 \neq 0$. La valeur de v_1 est déterminée par la formule

$$v_1 = \frac{-1}{u_1} \left(\sum_{i=2}^p u_i v_i - \sum_{j=p+1}^q y_j^2 \right)$$

et donc $Y_{p,q} \cup \{u_1 \neq 0\}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{p+q-2}$, de telle sorte que

$$\beta(Y_{p,q} \cup \{u_1 \neq 0\}) = (u-1)u^{p+q-2}.$$

Supposons maintenant que $u_1 = 0$. Alors la variable v_1 est libre, et on procède de manière similaire avec u_2 : plus précisément, si $u_2 \neq 0$ alors la valeur de v_2 est fixée et la contribution au polynôme de Poincaré virtuel correspondante est de

$$\beta(Y_{p,q} \cup \{u_1 = 0, u_2 \neq 0\}) = (u-1)u^{p+q-3}.$$

Continuant ainsi, à la dernière étape on se trouve dans la situation où $u_1 = \dots = u_{p-1} = 0$, et alors $u_p \neq 0$ et $Y_{p,q} \cup \{u_1 = \dots = u_{p-1} = 0, u_p \neq 0\}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{q-1}$. Si $u_p = 0$ la dernière équation

$$- \sum_{j=p+1}^q y_j^2 = 0$$

admet pour solution unique la solution nulle et donc

$$\beta(Y_{p,q} \cup \{u_1 = \dots = u_p = 0\}) = u^p$$

puisque les variables v_1, \dots, v_p sont libres.

Finalement

$$\beta(Y_{p,q}) = (u-1) \sum_{i=1}^p u^{p+q-1-i} + u^p = u^{p+q-1} - u^{q-1} + u^p.$$

On procède de manière similaire dans le cas de $Y_{p,q}^1$. Si $p \leq q$ la dernière équation

$$- \sum_{j=p+1}^q y_j^2 = 1$$

n'admet plus de solution et donc

$$\beta(Y_{p,q}^1) = (u-1) \sum_{i=1}^p u^{p+q-1-i} = u^{q-1}(u^p - 1).$$

Si par contre $p > q$ cette dernière équation définit une sphère de dimension $p - q - 1$. Son polynôme de Poincaré virtuel vaut alors $1 + u^{p-q-1}$ d'où

$$\beta(Y_{p,q}^1) = (u-1) \sum_{j=1}^q u^{p+q-1-j} + u^q(1 + u^{p-q-1})$$

où le terme supplémentaire u^q devant $1 + u^{p-q-1}$ provient des variables libres v_1, \dots, v_q . Par conséquent

$$\beta(Y_{p,q}^1) = u^{p+q-1} - u^{p-1} + u^q + u^{p-1} = u^q(u^{p-1} + 1).$$

□

Montrons maintenant comment on retrouve le corang et l'indice du germe à partir du polynôme de Poincaré virtuel des espaces d'arcs d'ordre deux. Après changement de variables, on peut supposer que la partie d'ordre deux du germe $f : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ est égale à

$$\sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=1}^t y_j^2.$$

Alors

$$\beta(A_2^+(f)) = u^{2d-(s+t)}\beta(Y_{s,t}^1).$$

D'après le lemme 1.8, l'expression de $\beta(A_2^+(f))$, après division par la puissance maximale de l'indéterminée u , est de la forme $u^k + 1$ ou $u^k - 1$. Par conséquent s est égal à $k + 1$ dans le premier cas et à k dans le second. On raisonne de manière symétrique avec

$$\beta(A_2^-(f)) = u^{2d-(s+t)}\beta(Y_{s,t}^{-1})$$

pour retrouver l'entier t .

REMARQUE 1.9. Notons qu'on utilise de manière essentielle le polynôme de Poincaré virtuel. En particulier le théorème 3.5 n'est pas connu si on ne considère que les fonctions zêta définies avec la caractéristique d'Euler à supports compacts. On a également besoin des fonctions zêta avec signes, la fonction naïve n'étant pas suffisante avec cette démarche.

3.2. Singularités simples. Après le corang et l'indice, l'étape suivante consiste à étudier la classification des singularités dites simples. Si le but n'est pas d'envisager une classification exhaustive des singularités réelles (on peut après s'intéresser aux singularités unimodales, bimodales, etc...), il semble néanmoins précieux d'être capable de déterminer les classes des singularités classiques, notamment en vue de l'application à l'équivalence de Nash après éclatements (cf. chapitre 3).

Les singularités simples sont définies par le fait qu'après perturbation, on ne fait apparaître qu'un nombre fini de classes d'équivalence différentes. Un tel germe est analytiquement équivalent à un germe de type ADE [3] :

$$\begin{aligned} A_k &: \pm x^{k+1} + Q_{p,q}(y) \text{ pour } k \geq 2, \\ D_k &: x_1(\pm x_2^2 \pm x_1^{k-2}) + Q_{p,q}(y) \text{ pour } k \geq 4, \\ E_6 &: x_1^3 \pm x_2^4 + Q_{p,q}(y), \\ E_7 &: x_1^3 + x_1x_2^3 + Q_{p,q}(y), \\ E_8 &: x_1^3 + x_2^5 + Q_{p,q}(y), \end{aligned}$$

où $Q_{p,q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}$, est la partie quadratique entrevue dans la partie 3.1.

Cette classification est aussi valable dans le cadre Nash. En effet, si f et g sont deux germes de classe Nash qui sont analytiquement équivalents, il existe un isomorphisme analytique ϕ tel que $f = g \circ \phi$. Par le théorème d'approximation de Nash [49], il existe alors un isomorphisme de classe Nash $\tilde{\phi}$ tel que $f = g \circ \tilde{\phi}$. Ainsi f et g sont équivalents au sens de Nash.

THÉORÈME 1.10. [18] *Deux germes de classe Nash admettant des singularités simples ont les mêmes fonctions zêta si et seulement s'ils sont analytiquement équivalents.*

REMARQUE 1.11.

- (1) Ils sont alors aussi équivalents au sens Nash par approximation de Nash [49].
- (2) On montre aussi dans [18] qu'un germe de fonction de type Nash admettant une singularité simple ne peut avoir les mêmes fonctions zêta qu'un germe avec une singularité plus compliquée.

La démonstration du théorème 1.10 consiste en une analyse des informations que contiennent les fonctions zêta construites à partir du polynôme de Poincaré virtuel. Cependant, on ne peut plus se contenter de considérer les espaces d'arcs d'ordre deux, et la difficulté est alors de réussir à isoler les informations pertinentes contenues dans les fonctions zêta.

On va illustrer ci-dessous la méthode utilisée, d'une part sur les singularités de type A , d'autre part sur celles de type E .

3.2.1. *Singularités de type A_k .* La méthode est proche de celle utilisée précédemment pour retrouver le corang et l'indice d'un germe. Il s'agit principalement de calculer les polynômes de Poincaré virtuels de variétés définies par les polynômes

$$P_k^\pm(x, y) = \pm x^{k+1} + Q_{p,q}(y)$$

pour $k \geq 2$ et $p, q \in \mathbb{N}$. On remarque que pour k pair $P_k^+(x, y)$ est égal à $P_k^-(-x, y)$. Ainsi P_k^+ et P_k^- sont linéairement équivalents, et par suite équivalents au sens de Nash. On s'intéresse donc plus particulièrement au cas k impair.

LEMME 1.12.

$$(1) \beta(\{P_{2n-1}^+ = 0\}) = \beta(Y_{p+1,q}) \text{ et } \beta(\{P_{2n-1}^- = 0\}) = \beta(Y_{p,q+1}).$$

(2) Si $p \leq q$, alors

$$\beta(\{P_{2n-1}^+ = 1\}) \neq \beta(\{P_{2n-1}^- = 1\}) = u\beta(Y_{p,q}^1),$$

alors que lorsque $p \geq q$ on obtient

$$u\beta(Y_{p,q}^{-1}) = \beta(\{P_{2n-1}^+ = -1\}) \neq \beta(\{P_{2n-1}^- = -1\}).$$

Démonstration. On effectue l'éclatement de l'origine pour la variété définie par l'équation

$$P_{2n-1}^\pm(x, y) = 0.$$

Dans la carte $x = u, y_i = v_i u$ avec $i = 1, \dots, p+q$, l'éclatement est donnée par

$$u^2 P_{2n-3}^\pm(u, v) = 0$$

où $v = (v_1, \dots, v_{p+q})$. L'éclatement étant, en dehors de l'origine, un isomorphisme entre la transformée stricte $P_{2n-3}^\pm = 0$ et $P_{2n-1}^\pm = 0$, l'invariance du polynôme de Poincaré virtuel entraîne alors

$$\beta(\{P_{2n-1}^\pm = 0\} \setminus \{0\}) = \beta(\{P_{2n-3}^\pm = 0\} \setminus \{0\}).$$

Par conséquent

$$\beta(\{P_{2n-1}^\pm = 0\}) = \beta(\{P_{2n-3}^\pm = 0\})$$

par additivité du polynôme de Poincaré virtuel. On répète $n-2$ fois l'opération pour obtenir le premier résultat.

Pour le second, supposons $p \leq q$. Par le changement de variables $u_i = y_i + y_{i+p}$, $v_i = y_i - y_{i+p}$ pour $i = 1, \dots, p$, l'équation $P_{2n-1}^\pm = 1$ devient

$$\pm x^{2n} + \sum_{i=1}^p u_i v_i - \sum_{j=p+1}^q y_{j+p}^2 = 1.$$

On décompose maintenant cette variété selon l'annulation des variables u_i pour $i = 1, \dots, p$. Si $u_1 \neq 0$, on choisit la valeur de v_1 de telle sorte que l'égalité soit satisfaite. Cette contribution vaut $(u-1)u^{p+q-1}$. Si $u_1 = 0$, on répète l'argument avec $u_2 \neq 0$, pour une contribution de $(u-1)u^{p+q-2}$. On réitère cet argument jusqu'au moment où $u_1 = \dots = u_p = 0$. Ainsi $\beta(\{P_{2n-1}^\pm = 1\})$ est égal à

$$\begin{aligned} & (u-1) \sum_{i=1}^p u^{p+q-i} + u^p \beta(\{\pm x^{2n} - \sum_{j=p+1}^q y_j^2 = 1\}) \\ & = u \beta(Y_{p,q}^1) + u^p \beta(\{\pm x^{2n} - \sum_{j=p+1}^q y_j^2 = 1\}). \end{aligned}$$

Pour finir, on remarque que la variété $\{x^{2n} - \sum_{j=p+1}^q y_{j+p}^2 = 1\}$ n'étant pas vide, elle admet un polynôme de Poincaré non nul, contrairement à la variété définie par

$$-x^{2n} - \sum_{j=p+1}^q y_{j+p}^2 = 1.$$

□

3.2.2. *Singularités de type E*. En dimension deux, les singularités de type E_6, E_7, E_8 sont données par

$$\begin{aligned} h_6^\pm(x, y) &= x^3 \pm y^4, \\ h_7(x, y) &= x^3 + xy^3, \\ h_8(x, y) &= x^3 + y^5. \end{aligned}$$

On va montrer que les germes de fonctions h_6^+, h_6^-, h_7, h_8 ont des fonctions zêta différentes. Pour cela, on calcule le polynôme de Poincaré virtuel de certains espaces d'arcs de ces singularités.

LEMME 1.13. Soit $\epsilon \in \{-, +\}$.

(1) $\beta(A_4^\epsilon(h_6^\epsilon)) = 2u^6$ alors que $\beta(A_4^{-\epsilon}(h_6^\epsilon)) = \beta(A_4(h_7)) = \beta(A_4(h_8)) = 0$.

(2) $\beta(A_5^\epsilon(h_7)) = (u-1)u^7$ alors que $\beta(A_5^\epsilon(h_8)) = u^8$.

DÉMONSTRATION. On va s'intéresser plus particulièrement au point (1). On considère pour cela des arcs de la forme

$$\gamma(t) = (a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4, b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4)$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. Alors

$$h_6^\epsilon(\gamma(t)) = a_1^3t^3 + (3a_1^2a_2 + \epsilon b_1^4)t^4 + \dots$$

Ainsi, un tel arc appartient à $A_4^\epsilon(h_6^\epsilon)$ si et seulement si les conditions $a_1 = 0$ et $b_1^4 = 1$ sont satisfaites. Alors $A_4^\epsilon(h_6^\epsilon)$ est isomorphe à la réunion de deux espaces affines de dimension six et donc

$$\beta(A_4^\epsilon(h_6^\epsilon)) = 2u^6.$$

Par ailleurs l'espace d'arcs $A_4^{-\epsilon}(h_6^\epsilon)$ est vide puisque $b_1^4 = -1$ n'admet pas de solutions réelles, et donc $\beta(A_4^{-\epsilon}(h_6^\epsilon)) = 0$.

Pour ce qui est des germes h_7 et h_8 l'argument est encore plus élémentaire du fait que la nullité du coefficient d'ordre trois des séries $h_7(\gamma(t))$ et $h_8(\gamma(t))$ implique la nullité du coefficient d'ordre quatre, et ainsi

$$\beta(A_4(h_7)) = \beta(A_4(h_8)) = 0.$$

La démonstration du point (2) est du même acabit. On considère des arcs de la forme

$$\gamma(t) = (a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5, b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4 + b_5t^5)$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \in \mathbb{R}$. Un tel arc γ appartient à $A_5^\epsilon(h_7)$ si et seulement si $a_1 = 0$ and $a_2b_1^3 = \epsilon$. L'ensemble $\{(a_2, b_1) \in \mathbb{R}^2 : a_2b_1^3 = \epsilon\}$ étant isomorphe à \mathbb{R}^* , on obtient alors que $A_5^\epsilon(h_7)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^7$.

Finalement un tel arc γ appartient à $A_5^\epsilon(h_8)$ si et seulement si $a_1 = 0$ et $b_1^5 = \epsilon$, et donc $A_5^\epsilon(h_8)$ est isomorphe à \mathbb{R}^8 . \square

On est maintenant en mesure de démontrer que les germes de fonctions h_6^+, h_6^-, h_7, h_8 ont des fonctions zêta différentes. Tout d'abord, remarquons que le coefficient de T^4 de la fonction zêta positive de h_6^+ est non nul contrairement à ceux de h_6^-, h_7, h_8 d'après le lemme 1.13.(1). On a le même résultat pour h_6^- vis à vis de h_7 et h_8 en regardant les fonctions zêta négatives. Enfin, les coefficients de T^5 des fonctions zêta avec signe de h_7 et h_8 sont différents d'après le lemme 1.13.(2).

REMARQUE 1.14. Par cette méthode, on peut aussi montrer que les fonctions zêta définies avec la caractéristiques d'Euler à supports compacts [35] permettent déjà de différencier les singularités de type E . Ce n'est cependant pas suffisant pour conclure pour le théorème 1.10.

3.3. Poids. Soient $f, g : (\mathbb{C}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ des polynômes homogènes par poids à singularités isolées. On dit que f et g sont topologiquement équivalents à l'origine si $(\mathbb{C}^d, f^{-1}(0))$ est homéomorphe à $(\mathbb{C}^d, g^{-1}(0))$ en tant que germes à l'origine. Pour $d = 2, 3$, il est connu que f et g ont les mêmes poids s'ils sont topologiquement équivalents.

Une conjecture de T. Fukui [23] annonce un comportement similaire pour les polynômes homogènes par poids réels par rapport à l'équivalence analytique après éclatements. Y. Ould Abderrahmane [1] démontre ce résultat en dimension deux dans le cas de fonctions homogènes par poids. Avec T. Fukui, nous nous sommes intéressés aux informations sur les poids contenues dans les fonctions zêta. On montre que dans le cas de fonctions non dégénérées par rapport à leur polyèdre de Newton, la croissance du degré des polynômes $\beta(A_n(f))$ permet presque toujours de retrouver la somme des poids 1.19. Combiné avec une analyse des premiers termes significatifs de la fonction zêta, on montre ainsi qu'on retrouve les poids en dimension trois lorsque le polyèdre de Newton est commode.

Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. On considère son développement de Taylor en zéro :

$$f(x) = \sum_{\nu} c_{\nu} x^{\nu}, \quad a_{\nu} \in \mathbb{R}$$

où $x^{\nu} = x_1^{\nu_1} \cdots x_d^{\nu_d}$ avec $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, et $c_{\nu} \in \mathbb{R}$. Soit Γ_f le polyèdre de Newton de f , c'est-à-dire l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\cup_{\nu \in \mathbb{N}^d} \{\nu + \mathbb{R}_{\geq}^d : c_{\nu} \neq 0\}.$$

Pour $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\nu \in \mathbb{N}^d$, on pose $\langle a, \nu \rangle = a_1 \nu_1 + \cdots + a_d \nu_d$ et $s(a) = a_1 + \cdots + a_d$, puis on définit

$$m_f(a) = \min\{\langle a, \nu \rangle : \nu \in \Gamma_f\},$$

$$\gamma_f(a) = \{\nu \in \Gamma_f : \langle a, \nu \rangle = m_f(a)\}.$$

On note $f_{\gamma}(x) = \sum_{\nu \in \gamma} c_{\nu} x^{\nu}$ pour un sous-ensemble γ de \mathbb{R}^d .

On dit que f est non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton si les singularités de f sont concentrées sur les axes de coordonnée :

$$\left(\frac{\delta f_{\gamma}}{\delta x_1}(b), \dots, \frac{\delta f_{\gamma}}{\delta x_n}(b) \right) \neq 0$$

pour tout $b \in (\mathbb{R}^*)^d$ tel que $f_{\gamma}(b) = 0$, où γ parcourt l'ensemble des faces compactes de Γ_f . Si f est non dégénérée, les ensembles $X_{\gamma} = \{f_{\gamma} = 0\} \cap (\mathbb{R}^*)^d$ sont alors des sous-variétés lisses de $(\mathbb{R}^*)^d$ dès qu'ils ne sont pas vides.

La proposition suivante donne la mesure des espaces d'arcs en fonction du polyèdre de Newton de f . On peut trouver des résultats similaires dans [9, 10, 29].

À une face γ de Γ_f on associe les séries $P_n(\gamma)$ et $Q_n(\gamma)$ définies par

$$P_n(\gamma) = \sum_{a > 0: \gamma(a) = \gamma, m_f(a) = n} \mathbb{L}^{-s(a)},$$

et

$$Q_n(\gamma) = \sum_{a>0: \gamma(a)=\gamma, m_f(a)<n} \mathbb{L}^{-n+m_f(a)-s(a)}.$$

PROPOSITION 1.15. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton, alors*

$$\mathbb{L}^{-nd}[A_n(f)] = \sum_{\gamma \text{ face de } \Gamma_f} ((\mathbb{L} - 1)^d - [X_\gamma])P_n(\gamma) + (\mathbb{L} - 1) \sum_{\gamma \text{ face de } \Gamma_f} [X_\gamma]Q_n(\gamma).$$

Notons que les degrés intervenant dans la définition de $P_n(\gamma)$ sont très similaire à ceux intervenant dans $Q_n(\gamma)$ puisque $-s(a) = -n + m_f(a) - s(a)$ du fait que $m_f(a) = n$. On est alors amené à étudier les niveaux des fonctions linéaires par morceaux m_f, s et $h := m_f - s$ sur le dual du polyèdre de Newton.

3.3.1. *Bornes sur le degré.* On pose

$$L_e(f) = \sup \left\{ 0, 1 - \frac{s(a)}{m_f(a)} : a \in \Gamma^{(1)}(f); m_f(a) > 0 \right\}.$$

où $\Gamma^{(1)}(f)$ représente les vecteurs primitifs qui engendrent les cônes de dimension un du dual de Γ_f . On notera de plus

$$\Gamma_{\max}^{(1)}(f) = \{a \in \Gamma^{(1)}(f) : 1 - \frac{s(a)}{m_f(a)} = L_e(f)\}$$

Cet exposant $L_e(f)$ permet de majorer le degré du polynôme de Poincaré virtuel des espaces d'arcs de la façon suivante.

THÉORÈME 1.16. [20] *L'inégalité suivante est satisfaite :*

$$(1) \quad \deg \beta(\mathcal{A}_k(f)) \leq d - n + nL_e(f).$$

Cette inégalité découle directement de la proposition 1.15. Elle donne une très bonne approximation du degré de $\beta(\mathcal{A}_n(f))$, en tout cas lorsque $h(v) \geq 0$. Dans ce cas en effet, cette inégalité est une égalité pour une infinité d'entiers n . Si $h(v) < 0$, des questions combinatoires entrent alors en jeu :

PROPOSITION 1.17. (1) *Si $(1, \dots, 1) \notin \text{Int } \Gamma(f)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand tel que l'inégalité (1) deviennent une égalité. Plus précisément, s'il existe $a^j \in \Gamma^{(1)}(f) \cap \{m_f > 0\}$ et $b_j > 0$ pour $j = 1, \dots, p$ tels que*

$$\gamma(a^1) \cap \dots \cap \gamma(a^p) \neq \emptyset, \quad a = \sum_{j=1}^p b_j a^j \in \mathbb{Z}^d, \quad n = \sum_{j=1}^p b_j m_f(a^j),$$

alors on a égalité dans (1).

(2) *Si $(1, \dots, 1) \in \text{Int } \Gamma_+(f)$, alors $h(a) < 0$ pour tout $a \in \Gamma^{(1)}(f) \cap \{m_f > 0\}$ et l'inégalité dans (1) est stricte. Le degré de $[\mathcal{A}_n(f)]$ est alors égal à*

$$d - n + \sup \{h(a) : a \in \{m_f(a) \leq n\} \cap \mathbb{Z}^d, a > 0\}.$$

L'intérêt de l'exposant $L_e(f)$ est qu'on peut le lire directement sur la fonction zêta. En effet, définissons $\alpha_0(f)$ par

$$\alpha_0(f) = \sup \left\{ \alpha : \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_f(u^\alpha T)}{u^d} = 0 \right\}.$$

PROPOSITION 1.18. (1) L'exposant $L_e(f)$ est lié à $\alpha_0(f)$ par la formule $L_e(f) = 1 - \alpha_0(f)$.

(2) Si de plus $\Gamma_{\max}^{(1)}(f) = \{v\}$ avec $h(v) > 0$, alors

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_f(u^{\alpha_0(f)} T)}{u^d} = \frac{T^{m_f(a)}}{1 - T^{m_f(a)}}$$

Ainsi, on retrouve l'exposant $L_e(f)$ directement à partir de la fonction zêta. On retrouve même plus sous l'hypothèse $\Gamma_{\max}^{(1)}(f) = \{v\}$, ce qui nous sera très utile par la suite pour étudier le cas commode. On explique ci-dessous comment on peut démontrer ce résultat.

Démonstration. Tout d'abord on remarque qu'en modifiant la variable de la fonction zêta on obtient

$$\frac{Z_f(u^\alpha T)}{u^d} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\deg[\mathcal{A}_n(f)] u^{\alpha n}}{u^d} T^n.$$

De l'inégalité $\deg \beta(\mathcal{A}_n(f)) \leq d - n + nL_e(f)$, on déduit alors

$$\frac{\beta(\mathcal{A}_n(f))}{u^d} = c_n u^{(L_e(f)-1)n} + (\text{termes de plus grand degré})$$

où c_n compte le nombre de $a \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $m_f(a) = n$. Par passage à la limite on obtient alors

$$\frac{\deg \beta(\mathcal{A}_n(f)) u^{\alpha n}}{u^d} = c_n u^{(L_e(f)-1+\alpha)n} + (\text{termes de plus grands degrés})$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 - L_e(f), \\ c_n & \text{si } \alpha = 1 - L_e(f), \\ \infty & \text{si } \alpha > 1 - L_e(f), \end{cases} \quad (u \rightarrow \infty)$$

ce qui démontre la première partie de la proposition. Si de plus $\Gamma_{\max}^{(1)}(f) = \{a\}$ et $h(a) > 0$, alors $c_n = 1$ dès que $m_f(a) \mid n$. On obtient donc

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Z_f(u^{\alpha_0(f)} t)}{u^d} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{nm_f(a)} = \frac{t^{m_f(a)}}{1 - t^{m_f(a)}}.$$

□

3.3.2. *Le cas homogène par poids et commode.* On se donne un polynôme homogène par poids $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $w_1, \dots, w_d \in \mathbb{N}$ premiers entre eux et un entier $l \in \mathbb{N}$ tels que $f(x_1^{w_1}, \dots, x_d^{w_d})$ soit un polynôme homogène de degré l . Les entiers w_1, \dots, w_d sont appelés les poids.

Dans ce cas $\Gamma(f)$ admet alors une unique face compacte, notée γ_f , et on note $v = \text{ppcm}(w_1, \dots, w_d)(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_d})$ son vecteur primitif associé. Dans cette situation, on trouve alors

$$m_f(v) = \text{ppcm}(w_1, \dots, w_d)$$

et

$$h(v) = \text{ppcm}(w_1, \dots, w_d)(1 - \sum_{i=1}^d \frac{1}{w_i}).$$

De plus $L_e(f) = \sup\{0, 1 - \sum_{i=1}^d \frac{1}{w_i}\}$. En particulier, si on est capable de retrouver à la fois $h(v)$ et $m_f(v)$ à partir de la fonction zêta, on est en mesure de connaître la somme des inverses des poids.

On suppose de plus que le polyèdre de Newton de f est commode, c'est-à-dire que les monômes de type $x_i^{\frac{1}{w_i}}$ apparaissent effectivement dans le développement de f avec un coefficient non nul, et que f est non-dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton. On pose alors $p_i = \frac{1}{w_i}$ pour $i = 1, \dots, d$.

On s'intéresse tout d'abord au nombre $h(v)$ qui permet de retrouver la somme des poids. En effet ici

$$v = (\frac{m_f(v)}{p_1}, \dots, \frac{m_f(v)}{p_d})$$

avec

$$m_f(v) = \text{ppcm}(p_1, \dots, p_d)$$

donc $h(v) = m_f(v)(1 - \sum_{i=1}^d \frac{1}{p_i})$.

PROPOSITION 1.19. (1) $h(v) > 0$ si et seulement si $L_e(f) > 0$, et de plus $h(v) = m_f(v)L_e(f)$.

(2) $h(v) = 0$ si et seulement si $\deg \beta(\mathcal{A}_n(f)) \leq d - n$, avec égalité pour une infinité de n .

(3) $h(v) < 0$ si et seulement si $\deg \beta(\mathcal{A}_n(f)) < d - n$.

En particulier on retrouve la valeur exacte de $h(v)$ dès que $h(v) \geq 0$.

On est maintenant en mesure de retrouver les poids à partir de la fonction zêta dans le cas de la dimension 3. Les sommets du polyèdre de Newton de f sont ici les points $(p_1, 0, 0)$, $(0, p_2, 0)$ et $(0, 0, p_3)$. De plus

$$v = (\frac{m_f(v)}{p_1}, \frac{m_f(v)}{p_2}, \frac{m_f(v)}{p_3})$$

avec $m_f(v) = \text{ppcm}(p_1, p_2, p_3)$ donc

$$h(v) = m_f(v)(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}).$$

Notons déjà que p_1 est l'ordre de la fonction zêta.

Par ailleurs, on peut mettre à part le cas $h(v) < 0$ qui correspond aux singularités simples, déjà traitée. Maintenant, pour $h(v) \geq 0$, la proposition 1.19 permet de retrouver $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$. Il ne reste plus qu'à retrouver p_2 pour

obtenir les poids. Cela est possible par des considérations de même ordre que celles faites dans le cas des singularités simples, que l'on ne va pas détaillées à nouveau ici.

On obtient alors l'invariance des poids dans cette situation :

THÉORÈME 1.20. [20] *En dimension trois, la fonction zêta d'un polynôme homogène par poids non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton commode permet de retrouver les poids.*

REMARQUE 1.21. En dimension supérieure, il semble peu probable de pouvoir poursuivre cette approche. On pourrait par contre s'intéresser aux racines des polynômes de Poincaré virtuels...

CHAPITRE 2

Mesures motiviques équivariantes

J. Denef et F. Loeser associent à un polynôme complexe une fibre de Milnor motivique, définie à partir de la fonction zêta motivique monodromique [13]. Cette fibre de Milnor motivique contient les invariants classiques de la fibre de Milnor, tel que le spectre de Hodge de la singularités. Pour tenir compte de la monodromie, la mesure motivique est à valeurs dans le groupe de Grothendieck des variétés complexes munies d’une action d’un groupe de racines de l’unité.

Dans le cadre réel, la fonction zêta monodromique est remplacée par les fonctions zêta avec signes, et l’action sur les espaces d’arcs est donnée par la multiplication par -1 sur la variable de paramétrisation des arcs. Pour tenter de comprendre ces fonctions zêta avec action, il est nécessaire de disposer d’invariants additifs des variétés algébriques réelles munies d’une action de groupe. Dans [19], on définit les nombres de Betti virtuels équivariants, pour une action d’un groupe fini sur les ensembles algébriques réels, et cela de manière similaire au nombre de Betti virtuel [43]. Dans le cas des variétés lisses et compactes, on remplace l’homologie classique à coefficients dans \mathbb{Z}_2 par l’homologie équivariante telle que définie par J. van Hamel [54]. Cette théorie homologique satisfait en particulier la dualité de Poincaré, qui est un ingrédient essentiel, via le théorème de factorisation faible des applications birationnelles [2, 55], de la définition des nombres virtuels.

On se place ci-dessous dans le cadre des ensembles symétriques par arcs, introduits par K. Kurdyka [40], qui sont une généralisation des ensembles algébriques réels. Ce cadre plus général est motivé par l’action de groupe. En effet le quotient d’une variété algébrique réelle par une action ne donne pas une variété algébrique en général, mais seulement un ensemble semi-algébrique (le quotient d’une sphère dans laquelle on échange des hémisphères opposés est un disque). Les ensembles symétriques par arcs sont des ensembles semi-algébriques qui, grâce à des propriétés de stabilité le long d’arcs analytiques, possèdent de jolies propriétés géométriques (cf. [40]).

Dans ce manuscrit, on s’intéressera principalement au cas d’ensembles munis d’une action du groupe à deux éléments. Le corps des coefficients est le corps à deux éléments pour des raisons d’orientation, et il sera noté \mathbb{F}_2 pour ne pas le confondre avec le groupe.

1. Ensembles symétriques par arcs

Les ensembles symétriques par arcs ont été introduits par K. Kurdyka [40] dans l’optique d’étudier les “composantes rigides” des variétés algébriques

réelles. Par exemple, un ensemble algébrique réel est symétrique par arcs, et plus généralement toute composante connexe d'un ensemble algébrique réel compact est symétrique par arcs. On rappelle la définition des ensembles symétriques par arcs ci-dessous. Pour un traitement plus détaillé, on peut consulter [40, 41].

On fixe une compactification de \mathbb{R}^n , par exemple $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

DÉFINITION 2.1. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ un ensemble semi-algébrique (i.e. donné par des égalités et inégalités polynomiales). On dit que X est symétrique par arcs si, pour tout arc analytique réel $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^n$ tel que $\gamma(]-1, 0]) \subset X$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma(]0, \epsilon]) \subset X$.

On peut penser aux ensembles symétriques par arcs comme à la plus petite catégorie, notée \mathcal{AS} , stable sous les opérations bouliennes et contenant les ensembles algébriques réels compacts ainsi que leurs composantes connexes. Par la dimension d'un ensemble symétrique par arcs on entendra sa dimension en tant que semi-algébrique (et donc la dimension de son adhérence de Zariski) [7].

Le résultat suivant montre que la notion d'ensemble symétrique par arcs est très reliée à celle de composante connexe d'ensembles algébriques réels, en tout cas après résolution des singularités. On définit les composantes irréductibles d'un ensemble symétrique par arcs de la manière habituelle.

PROPOSITION 2.2. [40] *Soit $X \in \mathcal{AS}$ irréductible. Soit Z un ensemble algébrique compact contenant X avec $\dim Z = \dim X$, et $\pi : \tilde{Z} \rightarrow Z$ une résolution des singularités de Z . Notons $\text{Reg}(X)$ le complémentaire dans X des points singuliers de Z . Il existe alors une unique composante connexe \tilde{X} de \tilde{Z} telle que $\pi(\tilde{X})$ soit égal à l'adhérence topologique $\overline{\text{Reg}(X)}$ de $\text{Reg}(X)$.*

En particulier, les ensembles symétriques par arcs lisses et compacts sont isomorphes (au sens restriction d'isomorphismes birationnels entre les adhérences de Zariski, sans indétermination sur les ensembles considérés) à des composantes connexes d'ensembles algébriques réels lisses et compacts.

2. Homologie équivariante de Borel-Moore

L'homologie équivariante définie par J. van Hamel est un mélange de cohomologie des groupes et d'homologie à supports compacts des variétés [54]. On rappelle tout d'abord la cohomologie des groupes.

Soit G un groupe. On associe à G l'anneau

$$\mathbb{Z}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} n_g \cdot g \mid n_g \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Un groupe M muni d'une action de G est naturellement un $\mathbb{Z}[G]$ -module. Choissant une résolution projective (F, ∂) de \mathbb{Z} par des $\mathbb{Z}[G]$ -modules, on définit alors la cohomologie de G à valeurs dans M par

$$H^n(G, M) = H^n(K, \delta),$$

où K^\cdot est le complexe défini par $K^i = \text{Hom}_G(F_i, M)$ et $\delta^i(u) = (-1)^i(u \circ \partial_i)$.

En particulier, pour le groupe à deux éléments $G = \{1, \sigma\}$ et M un $\mathbb{F}_2[G]$ -module on peut choisir comme résolution

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{F}_2[G] \xrightarrow{1+\sigma} \mathbb{F}_2[G] \xrightarrow{1+\sigma} \mathbb{F}_2[G] \xrightarrow{1+\sigma} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0$$

et

$$H^n(G, M) = \begin{cases} M^G & \text{if } n = 0, \\ \frac{M^G}{\text{im}(1+\sigma)} & \text{if } n > 0. \end{cases}$$

Soit maintenant X un espace topologique muni d'une action de G . L'homologie équivariante à valeurs dans \mathbb{F}_2 de X muni de l'action de G est définie par

$$H_n(X; G, \mathbb{F}_2) = R^{-n} \text{Hom}_G(R\Gamma_c(X, \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2)$$

où Γ_c désigne le foncteur des sections globales à supports compacts. Cette définition par composition de foncteurs dérivés donne lieu naturellement à des suites spectrales qui convergent vers l'homologie équivariante [28].

Notons que pour un espace réduit à un singleton \mathbf{pt} , on retrouve la cohomologie du groupe :

$$H_n(\mathbf{pt}; G, \mathbb{F}_2) = H^{-n}(G, \mathbb{F}_2).$$

Par ailleurs, et de manière équivalente, si $C_\cdot(X)$ est un complexe cellulaire de X muni d'une action de G et F_\cdot une résolution projective de \mathbb{F}_2 par des $\mathbb{F}_2[G]$ -modules, alors

$$H_n(X; G, \mathbb{F}_2) = H^{-n}(\text{Hom}_G(F_\cdot, C_\cdot \otimes \mathbb{F}_2)).$$

REMARQUE 2.3.

- (1) Pour une sphère munie d'une action avec un point fixe, l'action de G est triviale sur le complexe composé d'un point fixe en dimension zéro et du reste de la sphère en dimension deux.
- (2) Pour le groupe trivial, l'homologie équivariante à supports compacts est égale à l'homologie de Borel-Moore.
- (3) Notons que l'homologie équivariante de rang n est nulle pour $n > \dim X$. Ce n'est par contre plus le cas en général pour $n < 0$. Par exemple, si G est le groupe à deux éléments, l'homologie équivariante est liée à l'homologie des points fixes par [54]

$$H_n(X; G, \mathbb{F}_2) \simeq \bigoplus_{i \geq 0} H_i(X^G; \mathbb{F}_2).$$

- (4) Lorsque l'action de G n'admet pas de point fixe, l'homologie équivariante est isomorphe à l'homologie de la variété quotient. En particulier $H_n(X; G, \mathbb{F}_2) = 0$ pour $n < 0$.

On renvoie à [54] pour une étude détaillée des propriétés de l'homologie équivariante de Borel-Moore. Notons que l'on dispose de la suite exacte longue d'une paire, de la formule de Künneth et de la dualité de Poincaré. Notons aussi que dans le cas d'une action triviale, on obtient par produit un isomorphisme

$$\bigoplus_{p-q=n} (H_p(X, \mathbb{F}_2) \otimes H^q(G, \mathbb{F}_2)) \longrightarrow H_n(X; G, \mathbb{F}_2).$$

EXEMPLE 2.4. L'homologie équivariante d'une sphère munie d'une action triviale du groupe à deux éléments est

$$H_n(S^d, G, \mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{if } 1 \leq n \leq d, \\ (\mathbb{F}_2)^2 & \text{if } n \leq 0, \\ 0 & \text{if } n > d. \end{cases}$$

D'après la remarque 2.3.(1), ce résultat est encore valable pour une sphère munie d'une action avec point fixe.

3. Cas virtuel

Tout comme les nombres de Betti virtuels, leurs analogues équivariants ne calculent pas la dimension d'espaces d'homologie (d'où la terminologie "virtuelle", voir aussi [27]). Ils sont définis par additivité à partir des ensembles lisses compacts pour lesquels ils coïncident avec la dimension des espaces d'homologie équivariante.

Le groupe de Grothendieck équivariant $K^0(\mathcal{AS}, G)$ des ensembles symétriques par arcs est défini comme le groupe libre engendré par les classes d'équivalence $[X, G]$ des ensembles symétriques par arcs munis d'une action de G (équivalence au sens des isomorphismes algébriques équivariants par rapport à l'action de G ; action au sens de la restriction d'une action algébrique sur l'adhérence de Zariski de X) modulo la relation d'additivité

$$[X, G] = [Y, G] - [X \setminus Y, G]$$

si Y est un sous-ensemble symétrique par arcs de X stable sous l'action de G , et la relation

$$[V, G] = [\mathbb{A}^n \times X, G]$$

si $V \rightarrow X$ est la restriction à l'ensemble symétrique par arcs X d'un fibré vectoriel sur l'adhérence de Zariski \overline{X}^Z de X , muni d'une action de G sur \overline{X}^Z . Ici, l'action sur le membre de droite est triviale. Notons que le produit des variétés, muni de l'action diagonale, induit une structure d'anneau sur $K^0(\mathcal{AS}, G)$.

On note b_i^G , pour $i \in \mathbb{Z}$, la dimension du i -ème groupe d'homologie équivariante.

THÉORÈME 2.5. [19] *Pour $i \in \mathbb{Z}$, il existe un unique morphisme de groupes $\beta_i^G : K^0(\mathcal{AS}, G) \rightarrow \mathbb{Z}$ tel que $\beta_i^G(X) = b_i^G(X)$ pour X lisse et compact.*

La construction de $\beta_i^G(\cdot)$, son invariance sous isomorphismes équivariants et l'additivité se démontrent de manière tout à fait similaire au cas des nombres de Betti virtuels. On rappelle brièvement la méthode utilisée.

On définit tout d'abord $\beta_i^G(A)$ pour un ensemble symétrique par arcs lisse A muni d'une action de G en choisissant une compactification équivariante lisse X de A (qui existe d'après la version équivariante du théorème de résolution des singularités de Hironaka [31]) en posant

$$\beta_i^G(A) = b_i^G(X) - \beta_i^G(X \setminus A)$$

le nombre de Betti virtuel équivariant de droite étant défini par récurrence sur la dimension. Pour un ensemble symétrique par arcs singulier, on définit ses nombres de Betti virtuels équivariants par additivité à partir de sa stratification par les sous-espaces singuliers.

On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de la compactification et de la résolution des singularités à l'aide de la version équivariante du théorème de factorisation faible des applications birationnelles [55]. En effet, on se ramène ainsi au cas particulier d'un éclatement à centre lisse, et la suite exacte longue d'une paire combinée à la dualité de Poincaré permet alors de conclure. L'additivité se démontre de manière similaire.

On montre enfin que tout fibré vectoriel est identifié au fibré trivial dans $K^0(\mathcal{AS}, G)$ en se ramenant au cas lisse et compact par additivité, puis en utilisant la formule de Künneth. On montre ainsi :

PROPOSITION 2.6. *Soit X un ensemble symétrique par arcs muni d'une action de G . Alors*

$$\beta^G(X \times \mathbb{A}^d) = u^d \beta^G(X)$$

où $X \times \mathbb{A}^d$ est muni de l'action diagonale.

On définit alors la série de Poincaré virtuelle équivariante d'un ensemble symétrique par arcs X muni d'une action de G comme étant la série formelle

$$\beta^G(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \beta_i^G(X) u^i \in \mathbb{Z}[[u, u^{-1}]].$$

Lorsque G est le groupe trivial, cette série n'est rien d'autre que le polynôme de Poincaré virtuel. En général, cette série garde aussi en mémoire la dimension des espaces considérés.

PROPOSITION 2.7. *La série de Poincaré virtuelle équivariante d'un ensemble symétrique par arcs X muni d'une action de G est un élément de $\mathbb{Z}[[u^{-1}]][[u]]$ dont le degré est égal à la dimension de X .*

On fixe désormais pour G le groupe à deux éléments. Après quelques exemples de calculs de séries de Poincaré virtuelles équivariantes, on s'intéresse aux relations entre les nombres de Betti virtuels équivariants et les nombres de Betti virtuels du quotient, lorsque ces derniers sont bien définis.

EXEMPLE 2.8.

- (1) La série de Poincaré virtuelle de l'ensemble $\{p, q\}$, constitué de deux points échangés par l'action de G , est

$$\beta^G(\{p, q\}) = b^G(\{p, q\}) = 1.$$

En effet, cet ensemble est lisse et compact donc sa série virtuelle est égale à sa série de Poincaré pour l'homologie équivariante.

- (2) De même, pour une sphère de dimension d munie de la symétrie centrale on obtient l'homologie du quotient

$$\beta^G(S^d) = b^G(S^d) = b(\mathbb{P}^d) = 1 + u + \cdots + u^d.$$

Par contre, munie d'une action avec un point fixe, l'exemple 2.4 implique que la série de Poincaré virtuelle vaut alors

$$\beta^G(S^d) = b^G(S^d) = u^d + \cdots + u + 2\frac{u}{u-1}.$$

- (3) On calcule la série de Poincaré virtuelle équivariante de la droite affine avec l'action triviale par additivité :

$$\beta^G(\mathbb{A}^1) = \beta^G(S^1) - \beta^G(\mathbf{pt}) = \sum_{i \leq 1} u^i = \frac{u^2}{u-1}.$$

On trouve le même résultat pour la symétrie centrale d'après la remarque 2.3.(1).

Tout comme dans le cas non virtuel, on sait relier β_i^G aux points fixes lorsque $i < 0$.

PROPOSITION 2.9. *Soit X un ensemble symétrique par arcs muni d'une action de G . Pour $i < 0$ on obtient*

$$\beta_i^G(X) = \sum_{j \geq 0} \beta_j(X^G).$$

En particulier $\beta_i^G(X) = 0$ si l'action est libre.

On a déjà remarqué que le quotient d'un ensemble algébrique réel n'est pas algébrique en général.

PROPOSITION 2.10. *Soit X un ensemble symétrique par arcs lisse et compact, muni d'une action de G . Alors le quotient X/G est symétrique par arcs si et seulement si l'action de G est triviale sur toute composante irréductible de X contenant un point fixe.*

Dans le cas où X n'est plus compacte, on obtient une caractérisation similaire en considérant une compactification équivariante lisse.

On obtient alors la relation suivante.

PROPOSITION 2.11. *Soit X un ensemble symétrique par arcs lisse muni d'une action de G telle que le quotient X/G soit symétrique par arcs. Si de plus l'action est triviale sur aucune composante irréductible de X , alors $\beta^G(X) = \beta(X/G)$.*

EXEMPLE 2.12. Soit C la courbe d'équation $Y^2 = X^2 - X^4$ dans \mathbb{R}^2 . On calcule la série de Poincaré équivariante de C munie de différentes actions de G . Notons qu'on peut résoudre la singularité de C par l'éclatement de l'origine $p = (0, 0)$. La courbe résolue est topologiquement un cercle, et l'image réciproque de p est constituée de deux points $\{p_1, p_2\}$ qui seront soit fixés, soit échangés par l'action de G . Par additivité on obtient alors

$$\beta^G(C) = \beta^G(S^1) - \beta^G(\{p_1, p_2\}) + \beta^G(\{p\}).$$

On étudie différentes actions de G :

- $(X, Y) \mapsto (-X, -Y)$. Les points fixes de la résolution sont exactement p_1 et p_2 , donc :

$$\beta^G(C) = u + 1 + \frac{1}{u - 1}.$$

- $(X, Y) \mapsto (X, -Y)$. Les points p_1 et p_2 sont inversés par l'action, mais l'action de G n'est pas libre sur la résolution. Alors

$$\beta^G(C) = u + 2 + \frac{3}{u - 1}.$$

- $(X, Y) \mapsto (-X, Y)$. Les points p_1 et p_2 sont inversés et l'action est ici libre sur la résolution, d'où

$$\beta^G(C) = u + 1 + \frac{1}{u - 1}.$$

Remarquons dans cet exemple que le quotient algébrique de C existe bien, il est donné par le cercle $Y^2 = X - X^2$ dans \mathbb{R}^2 . Cependant $\beta^G(C) \neq \beta(C/G)$.

Avec cette série de Poincaré virtuelle équivariante, on peut maintenant considérer des fonctions zêta qui tiennent compte de l'action sur les arcs. Plus précisément, pour f un germe de fonctions de classe Nash, on munit $A_n^\pm(f)$ des actions de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par

- $t \mapsto t$ si n est impair,
- $t \mapsto -t$ si n est pair.

et on définit les fonctions zêta équivariantes par

$$Z_{f,+}^G(T) = \sum_{n \geq 1} \beta^G(A_n^+) u^{-nd} T^n$$

et

$$Z_{f,-}^G(T) = \sum_{n \geq 1} \beta^G(A_n^-) u^{-nd} T^n.$$

Reprenant les notations du théorème 1.1 du chapitre 1, on définit maintenant des recouvrements $\widetilde{E}_I^{0,\pm}$ de E_I^0 en vue d'établir la rationalité des fonctions zêta équivariantes. Pour U un ouvert affine de M tel que $f \circ h = u \prod_{i \in I} y_i^{N_i}$ sur U , où u est une unité, on pose

$$R_U^\pm = \left\{ (x, s) \in (E_I^0 \cap U) \times \mathbb{R}; s^{m_I} = \pm \frac{1}{u(x)} \right\}$$

avec $m_I = \gcd(N_i)$. Les ensembles R_U^\pm se recollent alors le long de $E_I^0 \cap U$ pour donner $\widetilde{E}_I^{0,\pm}$.

Le recouvrement $\widetilde{E}_I^{0,\pm}$ est muni de l'action triviale de G si m_I est impair, et de l'action induite par la multiplication par -1 sur la variable s si m_I est pair.

On démontre alors, de manière similaire au cas sans action, la rationalité de ces fonctions zêta.

PROPOSITION 2.13. *Les fonctions zêta équivariantes sont rationnelles :*

$$Z_{f,\pm}^G(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (u-1)^{|I|-1} \beta^G(\widetilde{E_I^{0,\pm}} \cap h^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{u^{-\nu_i} T^{N_i}}{1 - u^{-\nu_i} T^{N_i}}.$$

Notons que les relations entre la fonction zêta naïve et les fonctions zêta avec signes ne sont pas très bien comprises, même dans le cas de fonctions de signe constant. Par contre, en tenant compte de l'action, on peut résoudre ce problème.

PROPOSITION 2.14. *Soit $f : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonctions de classe Nash positif. Alors*

$$Z_f(T) = (u-1)Z_{f,+}^G(T).$$

Équivalence de Nash après éclatements

1. Équivalences après éclatements

1.1. Définition. Le choix d'une relation d'équivalence entre germes de fonctions réelles, disons analytiques, est un problème délicat. Il a abouti à l'introduction de relations d'équivalence après éclatements de la manière suivante. Le point de départ est la recherche d'une classification des singularités à travers des relations du type “ f est équivalente à g s'il existe h dans une certaine classe tel que $f = g \circ h$ ”. Dans le cas complexe par exemple, l'équivalence topologique, où l'on demande à h d'être un homéomorphisme, est particulièrement intéressante. Elle est par contre tout à fait grossière dans le cas réel où des germes tels que $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont équivalents, le second germe étant singulier tandis que le premier est lisse... On se doit donc de demander plus qu'un simple homéomorphisme, mais dès que h est C^1 , sur un exemple aussi simple que la famille des quatre droites de Whitney $f_t(x, y) = xy(y - x)(y - tx)$ avec $t \in]0, 1[$, il existe une infinité de classes d'équivalence !

Par contre, après éclatement de l'origine, cette famille devient analytiquement triviale. Cette remarque de T.-C. Kuo l'a amené à la définition de l'équivalence analytique après éclatements [39]. Dans l'esprit, deux germes de fonctions analytiques réelles sont équivalents en ce sens s'ils sont topologiquement équivalents, en demandant de plus que l'homéomorphisme se relève en un isomorphisme analytique après des résolutions des singularités des germes de départ obtenues via des compositions d'éclatements à centres analytiques lisses. Présentée ainsi, l'équivalence analytique après éclatements n'est pas à proprement parlé une relation d'équivalence. Dans la pratique, la définition fait appel à la notion de modifications réelles afin que l'équivalence analytique après éclatements deviennent effectivement une relation d'équivalence.

Je me suis intéressé plus particulièrement à l'analogue analytique réel et semi-algébrique, appelée équivalence de Nash après éclatements. Les germes de classe Nash sont intermédiaires entre les germes analytiques et les germes polynomiaux. L'intérêt est qu'on dispose alors de méthodes plus algébriques pour les étudier, et on verra en particulier que les fonctions zêta du chapitre 1 donnent des invariants.

Rappelons tout d'abord la définition de l'équivalence analytique après éclatements. Une application $\mu : M \rightarrow N$ entre espaces analytiques réels est appelée une modification si sa complexification est un isomorphisme analytique complexe en dehors d'un sous-espace de codimension réelle au moins deux (typiquement un éclatement à centre lisse).

Deux germes de fonctions analytiques réelles $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ sont équivalents analytiquement après éclatements s'il existe un homéomorphisme local $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$, deux modifications réelles

$$\mu_f : (M_f, \mu_f^{-1}(0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$$

et

$$\mu_g : (M_g, \mu_g^{-1}(0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$$

ainsi qu'un isomorphisme analytique au niveau des espaces modifiés

$$\Phi : (M_f, \mu_f^{-1}(0)) \longrightarrow (M_g, \mu_g^{-1}(0))$$

tels que $\phi \circ \mu_f = \mu_g \circ \Phi$ et $g \circ \phi = f$.

Voici maintenant la définition de l'alternative pour les germes de fonctions de classe Nash.

- DÉFINITION 3.1.** (1) Une application de classe Nash propre et surjective $\pi : M \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une modification de classe Nash si sa complexification est un isomorphisme analytique en dehors de $\pi^{-1}(N)$, où $N \subset \mathbb{R}^d$ est un sous ensemble de codimension au moins un.
- (2) Deux germes de fonctions Nash $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ sont équivalents au sens de Nash après éclatements s'il existe un homéomorphisme

$$h : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0),$$

des modifications de classe Nash

$$\pi_f : (M_f, E_f) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0), \quad \pi_g : (M_g, E_g) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$$

et un isomorphisme de classe Nash

$$H : (M_f, E_f) \longrightarrow (M_g, E_g)$$

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (M_f, \pi_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{H} & (M_g, \pi_g^{-1}(0)) \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi_g \\ (\mathbb{R}^d, 0) & \xrightarrow{h} & (\mathbb{R}^d, 0) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & (\mathbb{R}, 0) & \end{array}$$

REMARQUE 3.2. On s'intéressera dans la partie 2.3 au cas où les modifications sont réalisées par des compositions d'éclatements à centres lisses, comme dans la résolution des singularités [31, 5], ainsi qu'à la relation obtenue en ne demandant plus un homéomorphisme h entre les espaces sources [38].

L'équivalence de Nash après éclatements jouit de propriétés similaires à celles de l'équivalence analytique après éclatements. En particulier, il est connu que ces équivalences n'acceptent pas de module continu dans le cas d'une famille de germes à singularités isolées ([39] dans le cas analytique et [14]

dans le cas Nash). Il est en particulier pratique de montrer qu'une famille est triviale au sens d'une telle équivalence lorsqu'il existe une résolution des singularités commune à toute la famille (cf. [24, 25, 33, 34]).

On s'intéresse dans la suite aux invariants connus pour ces relations, ainsi qu'aux relations entre les versions analytiques et Nash de ces équivalences.

1.2. Des invariants. On dispose de méthodes pour établir l'équivalence de deux germes donnés, via l'intégration le long de champs de vecteurs dans le cadre analytique [39] ou des résultats de trivialité dans le cadre Nash [25]. Inversement, pour démontrer que des germes ne sont pas équivalents, il est nécessaire de disposer d'invariants. On rappelle la définition des premiers invariants connus, invariants dits de Fukui [23].

Soit $f : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonctions analytiques. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n(f)$ son espace des arcs tronqués à l'ordre n :

$$A_n(f) = \{\gamma(t) = a_1t + \cdots + a_nt^n; \text{ ord}_t f \circ \gamma(t) = n\}$$

et $A_n^\pm(f) \subset A_n(f)$ les espaces d'arcs avec signes comme dans le chapitre 1.

L'ensemble de Fukui de f est l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $A_n(f)$ n'est pas vide. On définit aussi des ensembles de Fukui avec signes [32]. L'ensemble de Fukui est aussi l'ensemble des puissances intervenant dans $Z_f(T)$, le polynôme de Poincaré virtuel étant nul uniquement dans le cas de l'ensemble vide. Par ailleurs les fonctions zêta étudiées dans [35], définies avec la caractéristique d'Euler à supports compacts à la place du polynôme de Poincaré virtuel, se retrouvent également en évaluant ce polynôme en -1 .

Fukui montre l'invariance de $A(f)$ sous l'équivalence analytique après éclatements en utilisant la propriété de relèvement des arcs pour une modification réelle [23]. Avec la théorie de l'intégration motivique [13], on généralise ce procédé pour montrer que les mesures des espaces d'arcs de germes équivalents, calculés après modifications réelles, coïncident.

- THÉORÈME 3.3.** – [35] *Des germes analytiques réels équivalents au sens de l'équivalence analytique après éclatements partagent les mêmes fonctions zêta calculées avec la caractéristique d'Euler à supports compacts.*
– [14] *Des germes de Nash équivalents au sens Nash après éclatements partagent les mêmes fonctions zêta calculées avec le polynôme de Poincaré virtuel.*

REMARQUE 3.4. Bien que l'équivalence analytique après éclatements puisse être considérée comme un analogue réel de l'équivalence topologique complexe, il convient de remarquer que, dans le cadre complexe, les fonctions zêta ne sont pas invariantes pour l'équivalence topologique [4].

Le polynôme de Poincaré virtuel étant plus fin que la caractéristique d'Euler à supports compacts, il s'avère plus aisé d'étudier la classification dans le cadre des germes de classe Nash.

1.3. Applications. Les résultats de la partie 3 du chapitre 1 permettent alors un début de classification des germes de fonctions de Nash pour l'équivalence de Nash après éclatements.

Tout d'abord, on obtient comme conséquence du théorème 3.5 l'invariance du corang et de l'indice.

THÉORÈME 3.5. [16] *Des germes de Nash équivalents au sens de l'équivalence de Nash après éclatements partagent les mêmes corang et indice.*

Le théorème 3.5 est un premier pas essentiel en vue de la classification des singularités des germes de fonctions Nash au sens de l'équivalence de Nash après éclatements. Il garantit que les invariants classiques des singularités restent encore invariants au sens de cette relation.

Dans l'optique de poursuivre la classification, l'étape suivante consiste à considérer les singularités les plus élémentaires possibles, à savoir les singularités *simples*. Ce résultat est une conséquence du théorème 1.10 du chapitre 1.

THÉORÈME 3.6. [18] *La classification des singularités simples sous l'équivalence de Nash après éclatements coïncide avec celle sous l'équivalence de Nash.*

Ce résultat n'est en aucun cas surprenant. Par contre, son intérêt est qu'il garantit que la relation d'équivalence de Nash après éclatements est une relation intéressante à étudier.

Enfin, dans la direction de la conjecture de Fukui sur l'invariance des poids sous l'équivalence analytique après éclatements, le théorème 1.20 du chapitre 1 implique le résultat suivant.

THÉORÈME 3.7. [20] *En dimension trois, deux germes de classe Nash non dégénérés par rapport à leur polyèdre de Newton commode et homogène par poids partagent les mêmes poids s'ils sont équivalents au sens de l'équivalence de Nash après éclatements.*

REMARQUE 3.8. En dimension deux, le résultat est encore vrai sans demander au polygone de Newton d'être commode [1].

2. Nash versus analytique

Cette partie décrit des travaux réalisés en collaboration avec Masahiro Shiota [21, 22].

2.1. Approximations de Nash. Le cadre des applications de classe Nash est un intermédiaire entre le cadre algébrique et le cadre analytique. C'est un cadre plus souple que le monde algébrique (par exemple le théorème d'inversion locale y est valide), mais pas aussi souple que le monde analytique (l'intégration le long d'un champ de vecteurs sort du cadre). Il est alors important de pouvoir approcher des données analytiques avec des données de classe Nash.

Il existe deux résultats principaux dans cette direction, dits théorèmes d'approximation de Nash. Le premier concerne l'approximation de fonctions semi-algébriques par des fonctions de classe Nash (penser à l'approximation de fonctions continues par des polynômes). Le second est une version globale du théorème d'approximation de Artin sur une variété de Nash compacte.

Revenons au premier. Il s'agit d'approcher des applications semi-algébriques de classe C^r par des applications de classe Nash [49] au sens de la topologie semi-algébrique de classe C^r sur l'espace des applications semi-algébriques de classe C^r .

THÉORÈME 3.9. [49] *Toute application semi-algébrique de classe C^r entre variétés de Nash peut être approchée par une application de Nash au sens de la topologie semi-algébrique de classe C^r .*

Le second résultat se place dans le cadre de la topologie C^∞ .

THÉORÈME 3.10. [8] *Soient M_1 et M_2 des variétés de classe Nash avec M_1 compacte. Soient F une fonction de Nash définie sur $M_1 \times M_2$ et $f : M_1 \rightarrow M_2$ une application analytique avec $F(x, f(x)) = 0$ pour $x \in M_1$.*

Il existe une approximation de f par une application de Nash $\tilde{f} : M_1 \rightarrow M_2$, au sens de la topologie C^∞ , telle que $F(x, \tilde{f}(x)) = 0$ pour $x \in M_1$.

On n'insistera pas tant sur l'aspect *approximation* et sur les différentes topologies employées (bien que ce soit important, cf. section 2.3 dans [22]) que sur l'existence de solutions de classe Nash dès lors qu'on dispose de solutions analytiques.

Ce second théorème d'approximation repose sur l'approximation de morphismes en algèbre commutative [51, 52]. En vue de l'application à l'équivalence de Nash après éclatements, on a besoin d'une version plus générale qui permet d'approcher les solutions d'un système d'équations polynomiales en conservant l'indépendance de certaines solutions par rapport à des variables données. On utilise pour cela le théorème d'approximations emboîtées [51], qui est un raffinement du théorème d'approximation de Artin. Pour $X \subset M$ un sous-ensemble semi-algébrique compact d'une variété de Nash M , on désigne par $\mathcal{N}(X)$ les germes sur X de fonctions de Nash et par $\mathcal{O}(X)$ les germes sur X de fonctions analytiques.

PROPOSITION 3.11. [21] *Soient M_1, \dots, M_m des variétés de Nash et $X_1 \subset M_1, \dots, X_m \subset M_m$ des sous-ensembles semi-algébriques compacts. On se donne $l_1, \dots, l_m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. Soient $F_i \in \mathcal{N}(X_1 \times \dots \times X_i \times \mathbb{R}^{l_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{l_i})^{n_i}$ et $f_i \in \mathcal{O}(X_1 \times \dots \times X_i)^{l_i}$, pour $i = 1, \dots, m$, telles que*

$$F_i(x_1, \dots, x_i, f_1(x_1), \dots, f_i(x_1, \dots, x_i)) = 0$$

pour (x_1, \dots, x_i) dans un voisinage de $X_1 \times \dots \times X_i$. Il existe alors $\tilde{f}_i \in \mathcal{N}(X_1 \times \dots \times X_i)^{l_i}$ proche de f_i au sens de la topologie C^∞ , pour $i = 1, \dots, m$, telle que

$$F_i(x_1, \dots, x_i, \tilde{f}_1(x_1), \dots, \tilde{f}_i(x_1, \dots, x_i)) = 0$$

pour (x_1, \dots, x_i) dans un voisinage de $X_1 \times \dots \times X_i$.

En particulier, la solution de classe Nash \tilde{f}_i dépend des mêmes variables x_1, \dots, x_i que la solution analytique f_i .

On profite de cette proposition pour établir un nouveau théorème d'approximation, qui généralise au cas des germes un résultat de [8] qui correspond au cas où M est compacte et $X = M$.

COROLLAIRE 3.12. [21] *Soient M une variété de Nash, $X \subset M$ un sous-ensemble semi-algébrique compact, et f, g des germes sur X de fonctions de Nash. Si f et g sont équivalents à droite analytiquement, alors f et g sont équivalents à droite au sens Nash. Le difféomorphisme de l'équivalence au sens Nash peut de plus être choisi proche de celui de l'équivalence analytique au sens de la topologie C^∞ .*

2.2. Approcher une résolution. En vue d'étudier les relations entre équivalence analytique après éclatements et équivalence de Nash après éclatements pour des germes de fonctions de classe Nash, une première étape importante est d'approcher par une résolution de classe Nash une résolution des singularités analytique d'un germe de classe Nash. Par le théorème de résolution des singularités de Hironaka [31], on sait qu'on peut résoudre les singularités d'un germe de fonctions analytiques réelles par une succession d'éclatements à centres analytiques lisses.

En utilisant le théorème d'approximations emboîtées, on montre que dans le cas où le germe est de classe Nash, on peut approcher chaque centre analytique lisse par un centre lisse de classe Nash, de sorte à obtenir une résolution des singularités de classe Nash. On redémontre ainsi l'existence d'une résolution des singularités pour les fonctions de classe Nash [5].

Avant d'énoncer le résultat, on rappelle la notion de fonctions à croisements normaux. Soit M une variété analytique réelle lisse. Une fonction analytique admettant uniquement des croisements normaux en un point x de M est une fonction dont le germe en x est de la forme $\pm \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, à une constante additive près, dans un certain système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) en x et pour un certain $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 \in \mathbb{N}^n$. Si la fonction admet des croisements normaux en tout point de M , on la dit simplement à croisements normaux.

Soit f une fonction de classe Nash sur une variété de Nash M . Soit

$$M_m \xrightarrow{\pi_m} M_{m-1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\pi_1} M_0 = M$$

une suite d'éclatements le long de centres analytiques lisses C_i dans M_i , pour $i = 0, \dots, m-1$, telle que $f \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_m$ admette uniquement des croisements normaux (une telle suite existe d'après [31, 5]). Soit X un sous-ensemble semi-algébrique compact de M .

THÉORÈME 3.13. [21] *Il existe un voisinage semi-algébrique ouvert U de X dans M , une suite d'éclatements $U_m \xrightarrow{\tau_m} U_{m-1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\tau_1} U_0 = U$ le long de centres lisses de classe Nash D_{m-1} dans U_{m-1}, \dots, D_0 dans U_0 , respectivement, et un plongement analytique $\psi : U_m \rightarrow M_m$ tels que*

$$\psi(\tau_m^{-1}(D_{m-1})) \subset \pi_m^{-1}(C_{m-1}), \dots,$$

$$\psi((\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m)^{-1}(D_0)) \subset (\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_m)^{-1}(C_0)$$

et

$$f \circ \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_m \circ \psi = f \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m.$$

REMARQUE 3.14. Supposons de plus que les espaces éclatés M_1, \dots, M_m soient réalisés dans $M \times \mathbb{P}(k_0), \dots, M \times \mathbb{P}(k_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(k_{m-1})$ respectivement, pour certains $k_0, \dots, k_{m-1} \in \mathbb{N}$. On peut alors réaliser les ouverts U_1, \dots, U_m dans $U \times \mathbb{P}(k_0), \dots, U \times \mathbb{P}(k_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(k_{m-1})$ respectivement, de telle sorte que chaque paire $D_i \subset U_i$ soit proche de $C_i \subset M_i$ sur $((\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{i-1})^{-1}(X))$, et ψ soit proche de l'application identité sur $(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m)^{-1}(X)$ au sens de la topologie C^∞ .

2.3. Application. S'intéressant aux relations entre fonctions de classe Nash et fonctions analytiques réelles, il est naturel de se demander si des fonctions de Nash équivalentes après éclatements au sens analytique sont encore équivalentes après éclatements, mais au sens Nash. Si on ne sait pas répondre à cette question en général, elle admet cependant une réponse affirmative pour les germes de fonctions à singularité isolée à condition de remplacer les modifications réelles par des résolutions des singularités à la Hironaka. Plus généralement, on sait répondre à cette question lorsque que l'on demande aux germes d'être équivalents (au sens analytique ou Nash) *après* éclatements, sans demander comme dans la définition 3.1 dans le cas des germes en un point que l'isomorphisme H (analytique ou de Nash) après éclatements redescende en un homéomorphisme entre les espaces sources. Plus précisément, on demande qu'il existe des compositions d'éclatements à centres lisses π_f et π_g et un isomorphisme analytique H tels que

$$\begin{array}{ccc} (M_f, \pi_f^{-1}(0)) & \xrightarrow{H} & (M_g, \pi_g^{-1}(0)) \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi_g \\ (\mathbb{R}^d, 0) & & (\mathbb{R}^d, 0) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & (\mathbb{R}, 0) & \end{array}$$

On qualifiera cette équivalence après éclatements de *faible*. Notons que cette nouvelle relation est bien différente, en particulier on sait construire un exemple de germes qui sont faiblement équivalents après éclatements sans être équivalents après éclatements [21].

Dans cette situation, le résultat d'approximation est le suivant :

THÉORÈME 3.15. [21] *Soient M une variété de Nash, $X \subset M$ un sous-ensemble semi-algébrique compact et f, g des germes de fonctions de Nash sur X tels que $X = M$ ou $X \subset \text{Sing } f$. Si f et g sont équivalents faiblement après éclatements analytiques, alors f et g sont équivalents faiblement après éclatements de classe Nash.*

- REMARQUE 3.16. (1) La démonstration de ce résultat repose sur les mêmes principes que l’approximation d’une résolution des singularités analytiques du théorème 3.13. La difficulté supplémentaire vient du fait que l’on doit approcher les deux résolutions (pour f et g) simultanément, ce qui entraîne des difficultés techniques dans l’utilisation de la proposition 3.11. On doit alors imposer éventuellement des éclatements additionnels en vue d’obtenir le même nombre de centres d’éclatements, mais aussi un même nombre de générateurs des différents idéaux de fonctions en jeu, etc...
- (2) Dans le cas de germes de fonctions avec une singularité isolée, notons que l’isomorphisme entre les résolutions redescend automatiquement en un homéomorphisme entre les espaces sources, homéomorphisme qui échange alors les deux points singuliers. On peut donc supprimer l’adverbe “faiblement” dans l’énoncé du théorème 3.15 pour des germes à singularité isolée (mais en conservant tout de même les compositions d’éclatements à la place des modifications).

3. Fonctions à croisements normaux

Motivé par le théorème 3.15, nous nous sommes intéressés à l’équivalence analytique de fonctions à croisements normaux [22]. Si l’étude générale de l’équivalence analytique de fonctions analytiques réelles est un sujet difficile, le cas particulier des fonctions à croisements normaux nous paraît intéressant du fait que ces fonctions apparaissent naturellement après résolution des singularités.

On montre dans [22] que le cardinal des classes d’équivalence pour de tels fonctions sur une variété analytique compact est dénombrable. On montre un résultat analogue pour les fonctions de classe Nash à croisements normaux sur une variété de Nash, non nécessairement compacte elle. Pour démontrer cela, on s’intéresse d’abord à l’approximation par des données analytiques d’équivalence C^∞ entre des fonctions analytiques.

3.1. Équivalence analytique et C^∞ . Dans l’optique de l’étude du cardinal des relations d’équivalence après éclatements, le résultat suivant permet de se concentrer sur le cas des fonctions de classe Nash.

THÉORÈME 3.17. [22]

- (1) *Soit M une variété analytique lisse et soient f et g des fonctions analytiques sur M . On suppose que f et g sont deux fonctions à croisements normaux. Si f et g sont équivalentes à droite au sens de l’équivalence C^∞ , alors elles le sont encore au sens de l’équivalence analytique.*
- (2) *Soient f et g des fonctions de classe C^∞ propres sur une variété lisse M de classe C^∞ n’admettant que des croisements normaux. Si f et g sont équivalentes à droite au sens de l’équivalence semi-algébrique*

de classe C^2 , alors f et g sont aussi équivalentes à droite au sens de l'équivalence C^∞ .

- (3) Si des fonctions f et g de classe Nash sur une variété de Nash n'admettent que des croisements normaux et sont équivalentes à droite au sens de l'équivalence semi-algébrique de classe C^2 , alors elles sont équivalentes au sens de l'équivalence de Nash.

La première partie du théorème est la partie la plus importante. L'équivalence analytique est produite par l'intégration le long d'un champ de vecteurs. On construit ce champ de vecteurs grâce aux théorèmes de Cartan A et B ainsi qu'au théorème d'Oka qui permettent de recoller des constructions locales. Cette méthode est inspirée par des travaux antérieurs de M. Shiota [48].

- REMARQUE 3.18. (1) Le théorème 3.17 reste vrai dans le cas de variétés à coins, ce qui est important pour l'application aux questions de cardinalité dans le théorème 3.19.
- (2) Remarquons par contre que l'équivalence de classe C^∞ n'implique pas l'équivalence de Nash (on peut trouver un contre-exemple dans la remarque 3.1.(ii) de [22]).

3.2. Cardinalité. La dénombrabilité du cardinal de l'ensemble des classes d'équivalence permet de garantir que la relation d'équivalence étudiée est raisonnable. Avoir trop de classes signifierait que la relation est trop forte, alors que s'il n'y en avait pas assez, elle serait par trop faible...

THÉORÈME 3.19. [22] *Soit M une variété analytique compacte de dimension au moins un. Le cardinal des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence analytique à droite et à gauche des fonctions analytiques sur M qui n'admettent que des croisements normaux est ou bien nul, ou bien dénombrable.*

Dans le cas Nash, l'hypothèse de compacité n'est plus nécessaire, et si effectivement M n'est pas compacte, le cardinal des classes d'équivalence est alors dénombrable.

On se sert du théorème 3.17 pour ne démontrer ce résultat que dans le cas Nash. On se ramène alors au cas où la variété de Nash est compacte grâce à la résolution des singularités pour les fonctions de classe Nash et une étude plus poussée des fonctions de classe Nash à croisements normaux sur des variétés de Nash à coins. On s'en sort alors par des arguments classiques dans le cadre Nash (trivialité de Hardt, théorème d'Artin-Mazur, théorèmes d'approximation de Nash).

- REMARQUE 3.20. (1) Le cas où le cardinal est nul peut effectivement arriver, par exemple pour $M = S^2$.
- (2) Par contre dans le cas analytique, si M n'est pas compacte le cardinal n'est alors plus dénombrable.

Bibliographie

- [1] Abderrahmane, Ould M., *Weighted homogeneous polynomials and blow-analytic equivalence*. Singularity theory and its applications, 333–345, Adv. Stud. Pure Math., 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006
- [2] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki and J. Włodarczyk, *Torification and factorization of birational maps*, J. Amer. Math. Soc. 15, no. 3, 531–572, (2002)
- [3] V. Arnold, S. Goussein-Zadé, A. Varchenko, *Singularity of differentiable maps*, Birkhauser, Boston, 1985
- [4] Artal Bartolo, E., Cassou-Noguès, P., Luengo, I., Melle Hernández, A., *The Denef-Loeser zeta function is not a topological invariant*, J. London Math. Soc. (2) 65 (2002), no. 1, 45–54
- [5] E. Bierstone, P.D. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. math. 128, 207-302 (1997)
- [6] F. Bittner, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*, Compositio Math. 140 (2004) 1011-1032
- [7] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1998
- [8] M. Coste, J.M. Ruiz and M. Shiota, *Approximation in compact Nash manifolds*, Amer. J. Math., 117 (1995) 905-927
- [9] J. Denef, K. Hoornaert, *Newton polyhedra and Igusa’s local zeta function*, J. Number Theory 89 (2001), no. 1, 31–64
- [10] J. Denef, F. Loeser, *Caractéristiques d’Euler-Poincaré, fonctions zêta locales et modifications analytiques*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1995), 705–720
- [11] J. Denef, F. Loeser, *Motivic exponential integrals and a motivic Thom-Sebastiani theorem*, Duke Math. J. 99 (1999), no. 2, 285–309
- [12] J. Denef, F. Loeser, *Germes of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. math. 135 (1999), 201-232
- [13] J. Denef, F. Loeser, *Geometry on arc spaces of algebraic varieties* European Congress of Math. (Barcelona, July 10-14, 2000) 1 (2001) 325-348
- [14] G. Fichou, *Motivic invariants of Arc-Symmetric sets and Blow-Nash Equivalence*, Compositio Math. 141 (2005) 655-688
- [15] G. Fichou, *Zeta functions and Blow-Nash equivalence*, Annales Polonici Math., 87 (2005) 111-126
- [16] G. Fichou, *The corank and the index are blow-Nash invariants*, Kodai Math. J. 29, no. 1 (2006), 31-40
- [17] G. Fichou, *Toward a classification of blow-Nash types*, (RIMS, Kyoto 2006), RIMS Kôkyûroku 1540, 145-151, 2007
- [18] G. Fichou, *Blow-Nash types of simple singularities*, J. Math. Soc. Japan, 60 no. 2 (2008), 445-470

- [19] G. Fichou, *Equivariant virtual Betti numbers*, Ann. Inst. Fourier, 58 no. 1 (2008), p. 1-27
- [20] G. Fichou, T. Fukui, *Motivic invariant of real polynomial functions and Newton polyhedron*, arXiv :1009.1611
- [21] G. Fichou, M. Shiota, *On almost blow-analytic equivalence*, Proceedings of the London Mathematical Society, à paraître
- [22] G. Fichou, M. Shiota, *Analytic equivalence of normal crossing functions on a real analytic manifold*, prépublication arXiv :0811.4569
- [23] T. Fukui, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence*, Compositio Math. 105 (1997), 95-107
- [24] T. Fukui, S. Koike, T.-C. Kuo, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, Real Analytic and Algebraic Singularities (T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike, ed), Pitman Research Notes in Mathematics Series, 381 (1998), pp. 8-29
- [25] T. Fukui, S. Koike, M. Shiota, *Modified Nash triviality of a family of zero-sets of real polynomial mappings*, Ann. Inst. Fourier 48 (1998), 1395-1440
- [26] T. Fukui, L. Paunescu, *On blow-analytic equivalence*, Arc spaces and additive invariants in real algebraic geometry, Panoramas et Synthèses, SMF 26 (2008) 87-125
- [27] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Math. Studies 131, Princeton 1993
- [28] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) 9 (1970) 143-162
- [29] G. Guibert, *Espaces d'arcs et invariants d'Alexander*, Comment. Math. Helv. 77 (2002), no. 4, 783-820
- [30] J.-P. Henry, A. Parusiński, *Existence of moduli for bi-Lipschitz equivalence of analytic functions*, Compositio Math. 136 (2003), no. 2, 217-235
- [31] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. 79, 109-326 (1964)
- [32] S. Izumi, S. Koike, T.-C. Kuo, *Computations and stability of the Fukui Invariant*, Compositio Math. 130 (2002), 49-73
- [33] S. Koike, *Modified Nash triviality theorem for a family of zero-sets of weighted homogeneous polynomial mappings*, J. Math. Soc. Japan 49 (1997), 617-631
- [34] S. Koike, *Nash trivial simultaneous resolution for a family of zero-sets of Nash mappings*, Math. Zeitschrift 234 (2000), 313-338
- [35] S. Koike, A. Parusiński, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, Ann. Inst. Fourier 53, (2003) 2061-2104
- [36] M. Kontsevich, *Lecture at Orsay (December 7, 1995)*
- [37] T.-C. Kuo, *The modified analytic trivialization of singularities*, J. Math. Soc. Japan, 32 (1980), no. 4, 605-614
- [38] T.-C. Kuo, J. N. Ward, *A theorem on almost analytic equisingularity*, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), no. 3, 471-484
- [39] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities*, Invent. Math. 82 (1985), 257-262
- [40] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. 282, 445-462 (1988)
- [41] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings*, Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry, 33-67, Panor. Synthèses, 24, Soc. Math. France, Paris, (2007)

- [42] E. Looijenga, *Motivic Measures*, in Séminaire Bourbaki, exposé 874, Mars 2000
- [43] C. McCrory, A. Parusiński, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003), 763-768
- [44] C. McCrory, A. Parusiński, *The weight filtration for real algebraic varieties*, to appear in the proceedings of the MSRI workshop "Topology of Stratified Spaces"
- [45] J. Nash, *Real algebraic manifolds*, Ann. of Math., 56 (1952) 405-421
- [46] F. Guillén, V. Navarro Aznar, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95 (2002), 1-91
- [47] R. Quarez, *Espace des germes d'arcs réels et série de Poincaré d'un ensemble semi-algébrique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001), no. 1, 43-68.
- [48] M. Shiota, *Equivalence of differentiable mappings and analytic mappings*, Publ. Math. IHES, 54 (1981) 237-322
- [49] M. Shiota, *Nash manifolds*, Lecture Notes in Math. 1269, Springer (1987)
- [50] M. Shiota, *Relation between equivalence relations of maps and functions*, Real Analytic and Algebraic Singularities (T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike, ed), Pitman Research Notes in Mathematics Series, 381 (1998), pp. 114-144
- [51] M. Spivakovsky, *A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms*, J. Amer. Math. Soc. 12, no. 2, (1999), 381-444
- [52] B. Teissier, *Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative (d'après André, Artin, Popescu et Spivakovsky)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque No. 227 (1995), Exp. No. 784, 4, 259-282.
- [53] B. Totaro, *Topology of singular algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. Math. Beijing, vol. 1 (2002), 533-541
- [54] J. Van Hamel, *Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties*, CWI Tract 129, Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1997
- [55] J. Włodarczyk, *Toroidal varieties and the weak factorization theorem*, Invent. Math. 154 (2003), no. 2, 223-331