



**HAL**  
open science

# Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration

Anca Maria Nagy

► **To cite this version:**

Anca Maria Nagy. Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2010. Français. NNT: . tel-00555081

**HAL Id: tel-00555081**

**<https://theses.hal.science/tel-00555081>**

Submitted on 12 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 novembre 2010

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine**  
(Automatique et Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique)

par

Anca Maria NAGY KISS

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Jean Philippe CASSAR	Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille
<i>Rapporteurs :</i>	Jean Philippe CASSAR Mohammed M'SAAD	Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille Professeur à l'Université de Caen Basse-Normandie
<i>Examineurs :</i>	Denis DOCHAIN José RAGOT Gilles MOUROT Benoît MARX Georges SCHUTZ	Professeur à l'Université catholique de Louvain, Belgique Professeur à l'INPL (Directeur de thèse) Ingénieur de Recherche à INPL (Co-directeur de thèse) Maître de conférences à l'INPL (Co-encadrant de thèse) Chercheur à CRP Henri Tudor (Co-encadrant de thèse)

Mis en page avec la classe thloria.

*Je dédie cette thèse  
à mon mari.  
En même temps, à ma mère,  
à qui je dois tout ce que je suis.*



# Table des matières

## Notations

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
1 Présentation générale . . . . .	5
2 Contributions et plan du manuscrit . . . . .	6
3 Références personnelles . . . . .	8

## Chapitre 1

### Présentation de la structure multimodèle **11**

1.1 Introduction . . . . .	12
1.2 Différentes structures de multimodèles . . . . .	14
1.2.1 Multimodèle de Takagi-Sugeno . . . . .	15
1.2.2 Obtention d'un multimodèle . . . . .	23
1.3 État de l'art sur la synthèse d'observateurs . . . . .	24
1.3.1 Généralités sur les observateurs non linéaires . . . . .	24
1.3.2 Synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires . . . . .	25
1.3.3 Observateurs basés sur la structure MM . . . . .	33
1.4 Conclusion . . . . .	35

## Chapitre 2

### Méthode générale de passage d'un système non linéaire en multimodèle **37**

2.1 Introduction . . . . .	38
2.2 Présentation de la méthode de réduction d'un SNL . . . . .	40
2.2.1 Transformation polytopique convexe (TPC) . . . . .	40
2.2.2 Exemple introductif . . . . .	46
2.2.3 Représentation d'état d'un système non linéaire . . . . .	52
2.2.4 Forme Quasi-Linéaire à Paramètres Variables . . . . .	52

2.2.5	Variables de prémisses : mesurables et non-mesurables . . . . .	55
2.2.6	Obtention des matrices et des fonctions de pondération . . . . .	56
2.2.7	Équivalence système non linéaire - multimodèle . . . . .	58
2.2.8	Critères de choix des variables de prémisses . . . . .	60
2.3	Limites de la méthodologie proposée . . . . .	68
2.3.1	Méconnaissance des bornes des variables de prémisses . . . . .	68
2.3.2	Non respect de la propriété de localité des sous-modèles . . . . .	72
2.4	Extension aux modèles à base de blocs structurés . . . . .	75
2.4.1	Introduction . . . . .	75
2.4.2	Modèles de type Hammerstein . . . . .	78
2.4.3	Modèles de type Wiener . . . . .	80
2.4.4	Systèmes dynamiques non linéaires basés sur des structures en série ou en parallèle . . . . .	80
2.4.5	Exemple illustratif . . . . .	81
2.4.6	Généralisation aux modèles à base de blocs structurés quelconques . . . . .	84
2.5	Conclusion . . . . .	86

**Chapitre 3**

**Systèmes à échelles de temps multiples**

3.1	Introduction . . . . .	90
3.2	Théorie des perturbations singulières . . . . .	92
3.2.1	Forme standard des systèmes singuliers . . . . .	92
3.3	Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières . . . . .	93
3.3.1	Positionnement du problème . . . . .	93
3.3.2	Méthode basée sur un changement de coordonnées . . . . .	94
3.3.3	Identification des échelles de temps. Méthode d'homotopie . . . . .	103
3.3.4	Généralisation . . . . .	105
3.4	Représentation multimodèle pour les systèmes singuliers . . . . .	111
3.5	Conclusion . . . . .	112

**Chapitre 4**

**Estimation d'état**

4.1	Introduction . . . . .	114
4.1.1	Généralités . . . . .	114

4.1.2	Origine des perturbations affectant le système . . . . .	116
4.2	Synthèse d'observateurs à variables de prémisses non mesurables . . . . .	118
4.2.1	Observateurs basés sur la structure multimodèle . . . . .	118
4.2.2	Approche $\mathcal{L}_2$ . . . . .	120
4.2.3	Description des systèmes non linéaires à variables de prémisses non mesurables . . . . .	122
4.2.4	Estimation d'état de MM incertains en présence d'entrées inconnues . . . . .	124
4.2.5	Estimation d'état de MM à deux échelles de temps . . . . .	135
4.2.6	Estimation d'état de MM singuliers en présence d'entrées inconnues . . . . .	145
4.3	Conclusion . . . . .	155

## Chapitre 5

### Application à une station d'épuration

157

5.1	Introduction . . . . .	158
5.2	Description du procédé d'épuration d'eaux . . . . .	159
5.2.1	Le procédé d'épuration par boues activées . . . . .	159
5.2.2	Modélisation du procédé . . . . .	163
5.2.3	Écriture du modèle ASM1 . . . . .	170
5.3	Approche MM pour l'estimation d'état et le diagnostic de fonctionnement . . . . .	171
5.3.1	Modèle ASM1 réduit . . . . .	171
5.3.2	Obtention d'un MM pour le modèle ASM1 réduit . . . . .	174
5.3.3	Synthèse d'observateur à gain proportionnel-intégral . . . . .	176
5.3.4	Synthèse d'observateur en présence d'entrées inconnues à partir d'un MM non standard . . . . .	178
5.3.5	Application de l'estimation d'état au diagnostic de fonctionnement . . . . .	182
5.4	Conclusion . . . . .	192

### Conclusion générale et perspectives

197

## Annexes

### Annexe A

#### Schémas des structures en série et en parallèle





# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés au *Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)*, au sein de l'équipe-projet *Interactions Sécurité et Diagnostic (ISD)* rattachée au groupe thématique Sécurité de fonctionnement et diagnostic des systèmes (SURF-DIAG). Ces recherches ont bénéficié du soutien financier du *Fonds National de la Recherche de Luxembourg*.

Je souhaite exprimer ma plus sincère reconnaissance à Messieurs José Ragot et Gilles Mourrot pour la confiance qu'ils ont eu en m'offrant la possibilité d'intégrer leur équipe de recherche. Je remercie également Monsieur Benoît Marx pour l'intérêt constant qu'il a porté à mes recherches ainsi que pour ses remarques pleines d'humour. Je tiens à faire part de toute ma gratitude à ce "trio" qui m'a accordé tant de confiance et de liberté. Je remercie de même Monsieur Georges Schutz du *Centre de Recherche Public "Henri Tudor"* pour ses idées et sa disponibilité. Leurs qualités humaines, leurs qualités de chercheur, leur regard bienveillant ainsi que leur patience m'ont permis de mener à terme cette thèse.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'examiner l'ensemble de ces recherches. Je remercie tout particulièrement Messieurs Jean Philippe Cassar et Mohammed M'Saad pour le temps consacré à la lecture minutieuse de ce manuscrit de thèse. J'ai pu, à la lueur des commentaires pertinents figurant dans leurs rapports, envisager mon travail sous des angles nouveaux et entrevoir d'intéressantes perspectives de recherche. Je remercie aussi Monsieur Denis Dochain -que j'ai eu le plaisir de connaître dans le cadre d'une conférence du domaine- d'avoir accepté le rôle d'examineur de ce travail de thèse ainsi que pour son analyse attentive du présent mémoire.

J'ai été très honoré de présenter mes travaux de thèse devant un tel jury. Je vous remercie infiniment.

Pour ne pas interrompre le "mythe" de l'endroit parfait du travail - la *mythique salle des machines 122 jaune* - je tiens à remercier chaleureusement mes amis qui ont constitué le cœur de cet endroit pendant ces années et qui ont chacun laissé une petite partie d'eux même. Je les remercie profondément pour leur voisinage amical et convivial, pour leur sympathie et les bons moments passés ensemble.

Je souhaite également exprimer mes remerciements à Monsieur Didier Maquin pour m'avoir permis d'intégrer cette merveilleuse équipe. Je tiens aussi à remercier Mesdames Carole Courrier et Christine Pierson qui m'ont apporté respectivement, au début et à la fin de la thèse, une aide précieuse à l'heure de régler bien des formalités administratives.

Enfin, je ne remercierai jamais assez mon mari, Laurentiu, qui a toujours été proche de moi en rendant ma vie plus belle.



# Notations

## Acronymes

LMI(s)	Inégalité(s) matricielle(s) linéaire(s)
LPV	Linéaire à paramètres variants
quasi-LPV	Quasi-linéaire à paramètres variants
LTI	Linéaire à temps invariant
MM(s)	Multimodèle(s)
MIMO	Multi-entrée multi-sortie (Multiple Input Multiple Output)
SISO	Mono-entrée mono-sortie (Single Input Single Output)
STEP	Station d'épuration
T.-S.	Takagi-Sugeno
UIO	Observateur à entrées inconnues
PIO	Observateur proportionnel-intégral

## Ensembles

$\mathbb{R}$	Ensemble de nombre réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble de nombre réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	Ensemble de nombre réels positifs non nuls

## Vecteurs et matrices

$O_{n,m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$
$X > 0$	Matrice $X$ symétrique, définie positive
$X^T$	Transposée de $X$
$X^{-1}$	Inverse de $X$
$\lambda_{\min}(X)$ ( $\lambda_{\max}(X)$ )	Valeur propre minimale (resp. maximale) de $X$
$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique dont le symbole $*$ représente $S_{12}^T$



# Introduction générale

*"Un homme est la somme de ses actes, de ce qu'il fait, de ce qu'il peut faire. Rien d'autre."*  
"La condition humaine" - André Malraux

## 1 Présentation générale

La maîtrise des processus technologiques est très souvent rendue difficile en raison d'un nombre important de perturbations difficile à caractériser et à prévoir. En dépit de ces perturbations, les performances des processus doivent être garanties ainsi que le respect des missions qui ont été assignées à ces processus. Les enjeux actuels de l'automatique sont donc essentiellement l'optimisation de performances et la surveillance des processus qui répondent respectivement aux demandes croissantes en termes de rendement d'exploitation et de sécurité des installations et des opérateurs. Ces objectifs se traduisent par le besoin de loi de commande plus efficaces et par l'intégration de modules de surveillance sophistiqués. L'un comme l'autre requièrent la collecte d'une information précise et complète quant à l'état du processus à commander et surveiller.

Les solutions apportées à ces problèmes passent par une *phase de modélisation* visant à obtenir une représentation fidèle du comportement du système considéré. Un modèle non linéaire s'avère plus adapté à offrir une bonne représentation pour la plupart des processus réels, par rapport à un modèle linéaire qui reste valable sur une zone assez restreinte de l'espace de fonctionnement. Malheureusement, l'utilisation d'un modèle non linéaire dans différents contextes (identification, estimation, commande et diagnostic) devient plus difficile et plus délicate que celle d'un modèle linéaire. Une technique de modélisation qui permet de représenter un système non linéaire et qui permet l'utilisation des techniques adaptées aux modèles linéaires est l'approche multimodèle. Son principe est basé sur la description du fonctionnement du système dans différentes parties de l'espace de fonctionnement d'un système non linéaire à l'aide de modèles simples souvent linéaires, appelés sous-modèles. Leurs contributions relatives dans la description du modèle global se réalise grâce à une interpolation qui fait appel aux fonctions de pondérations associées à chacun d'entre eux.

L'étape de modélisation est réalisée en se basant principalement sur deux catégories de techniques : la première à partir des données expérimentales et la seconde basée sur des modèles mathématiques provenant d'une description phénoménologique du système à étudier. Le processus de modélisation constitue une étape préliminaire essentielle afin de pouvoir aborder la *phase d'estimation* des variables d'état, qui fournit une connaissance de l'état de fonctionnement du système et éventuellement des perturbations (entrées inconnues, défauts, erreurs de modélisation, etc.). La *phase de surveillance* suit naturellement celle d'estimation d'état, car

cette dernière permet de générer des symptômes de défaillance du système à partir d'une comparaison entre des signaux extraits du système (donnant des informations sur le comportement réel) et des signaux estimés (donnant des informations sur le comportement attendu). Des éventuels écarts entre ces signaux soulignent la présence d'un défaut dans le système qu'il convient ensuite de localiser. Plusieurs aspects dans la phase de surveillance sont à mentionner : *détection*, qui consiste à déterminer l'apparition et l'instant de l'occurrence d'un défaut, *localisation ou isolation*, qui consiste à situer exactement le composant du système affecté par un défaut, *estimation*, qui consiste à fournir à chaque instant la valeur d'un défaut.

Généralement, la phase de modélisation et celle de synthèse d'observateur pour l'estimation d'état doivent être réalisées de façon coordonnée afin de donner une solution adaptée aux problèmes de surveillance des systèmes. Ainsi, il faut trouver le meilleur compromis entre la complexité du modèle utilisé (tenant compte d'une plage très large de fonctionnement du système) et la possibilité de l'utiliser pour l'estimation d'état (favorisant la synthèse d'un observateur), en effet plus un modèle sera fidèle et donc complexe plus la synthèse d'observateur risque d'être problématique. Cette dernière remarque met en lumière un point intéressant, à savoir que lorsqu'on parle du modèle d'un système il faudrait préciser son utilisation. Plusieurs modèles d'un même processus (de complexité différente ou pas) peuvent exister et le choix de l'un d'entre eux dépend du problème à traiter (simulation, commande, estimation, diagnostic).

## 2 Contributions et plan du manuscrit

Bien que la structure multimodèle a déjà constituée un point d'intérêt et d'étude dans de nombreuses publications récentes, il subsiste encore une multitude de problèmes ouverts concernant le procédé d'obtention d'une telle structure, les techniques de synthèse de lois de commande, les techniques d'estimation d'état et de diagnostic.

Concernant la modélisation d'un système non linéaire à l'aide d'une structure multimodèle, le problème essentiel se trouve au niveau des techniques d'obtention d'une telle structure. Deux possibilités existent : proposer directement la construction d'une forme multimodèle qui représente le comportement d'un système réel ou transformer un modèle non linéaire déjà existant sous une forme multimodèle. Nos travaux se positionnent sur la deuxième classe de techniques pour laquelle le modèle mathématique existant provient par exemple d'une description phénoménologique du système à étudier.

On peut énoncer quelques inconvénients de la majorité des techniques existantes d'obtention d'un multimodèle. Le principal inconvénient est la perte d'information due par exemple à la linéarisation, la difficulté du choix du nombre et de la position des différents points de fonctionnement utilisés pour la linéarisation. Seule la méthode utilisant l'approche par secteur non linéaire, évoquée de façon succincte dans [Tanaka et Wang \[2001\]](#), permet d'obtenir une forme multimodèle équivalente au modèle non linéaire initial, évitant ainsi une perte d'information par rapport à ce dernier. Toutefois, cette méthode est souvent appliquée sur des exemples simples et ne propose pas une façon générale de réaliser cette transformation sur un modèle non linéaire quelconque. De plus, un autre point délicat réside dans le choix des variables de prémisses représentant les non-linéarités du système. La contribution de l'étude présentée dans cette thèse

réside dans la proposition d'une méthodologie générale et systématique d'obtention d'un multimodèle équivalent au système non linéaire qui puisse s'appliquer à un système quelconque. De plus, le choix de variables de prémisses est réalisé de façon systématique en proposant quelques critères guidant cette démarche, basés sur une analyse de stabilité, de commandabilité et/ou d'observabilité.

Les études existantes concernant l'utilisation de l'approche multimodèle traitent les systèmes représentés sous la forme d'état, or un nombre important de processus sont représentés par des modèles à base de blocs structurés de type Hammerstein et/ou Wiener. Quelques études ont été proposées récemment portant sur l'identification de systèmes de type Hammerstein-Wiener [Vörös, 2007; Wang et Ding, 2008; Yeh, 2007] et sur le contrôle prédictif [Jurado, 2006] de systèmes représentés par des modèles flous de type Hammerstein. Cependant, il n'y a pas de démarche générale d'obtention d'un multimodèle pour ce type de représentation. Pour cette raison ce type de représentation a été analysé dans ce travail, en proposant une transformation sous une forme multimodèle. Une démarche de généralisation aux modèles à base de blocs structurés dynamiques ou statiques, distribués en série, en parallèle ou de façon mixte sera proposée.

Certains processus réels peuvent être caractérisés par des échelles de temps multiples. C'est le cas des processus chimiques et/ou biologiques. Les relations mathématiques liant les différentes variables d'un tel processus peuvent être soit dynamiques, soit purement statiques. Une telle représentation est couramment appelée forme à perturbations singulières. Ce type de système peut être considéré comme une généralisation des systèmes dynamiques non linéaires usuels. Les difficultés dans ce contexte sont l'identification et la séparation des échelles de temps et l'obtention de la forme à perturbations singulières. Ces points délicats, abordés jusqu'à présent seulement pour une classe particulière de systèmes (processus bio-chimiques), seront traités en détail au cours de ce mémoire pour des systèmes ayant une structure plus générale.

Parmi les études concernant l'estimation des multimodèles, la plupart de ces travaux sont dédiés à l'estimation d'état des multimodèles à variables de prémisses mesurables, et plus particulièrement représentés par les variables d'entrée et de sortie du système. Malheureusement, dans beaucoup de situations, ces variables de prémisses sont les variables d'état, dont les mesures ne sont pas toujours ou toutes disponibles. Seulement quelques résultats [Ichalal, 2009; Yoneyama, 2009] sont dédiés à l'exploitation de ces modèles pour l'estimation. Ces résultats ont été obtenus uniquement pour des systèmes non linéaires à une seule échelle de temps et non pour des systèmes à perturbations singulières. Ceci nous a motivé pour étudier ce dernier type de systèmes, quelques résultats étant proposés au cours de cette thèse. Un observateur à entrées inconnues est proposé dans le but de minimiser l'influence des entrées inconnues sur l'estimation.

De même, on propose la conception d'un observateur pour des systèmes sous forme multimodèle à variables de prémisses non mesurables affectés par des entrées inconnues, en considérant en plus la présence d'incertitudes dues aux erreurs de modélisation. L'observateur de type proportionnel-intégral utilisé permet d'opérer une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du système, l'action intégrale améliorant sensiblement l'estimation d'état. À notre connaissance, cette méthode de synthèse n'a pas encore été traitée dans la littérature et représente un intérêt d'un point de vue applicatif, comme cela sera présenté au cours de ce mémoire.



L'organisation de ce mémoire reconstitue les différentes étapes qui viennent d'être énoncées, c'est-à-dire la phase de modélisation qui comporte l'obtention et le choix d'une structure multimodèle adéquate, la phase de reconstruction d'état grâce aux différentes techniques de synthèse d'observateurs et finalement leur application à un processus réel de traitement d'eaux usées.

Le *premier chapitre* présente les principes généraux de la structure multimodèle, ainsi que les différentes structures multimodèles existantes. De plus, comme un des points essentiels abordés dans ces travaux est la reconstruction d'état, un état de l'art sur la synthèse d'observateurs est ensuite réalisé. Le *second chapitre* propose une méthodologie générale de passage d'un système non linéaire au multimodèle, abordant les deux représentations d'un système non linéaire : la représentation sous forme d'état et la représentation à base de blocs structurés. Quelques critères de choix des variables de prémisses, et implicitement de la structure multimodèle, seront proposés. Le *troisième chapitre* traite des systèmes à plusieurs échelles de temps et aborde le problème d'identification et de séparation des différentes échelles de temps, ainsi que l'obtention de la forme classiquement utilisée pour ce type de processus c'est-à-dire la forme singulière. Le passage d'un système non linéaire donné sous forme explicite en une forme singulière est réalisé. Le *quatrième chapitre* propose la synthèse de trois types d'observateurs d'état de systèmes à partir de leurs représentations multimodèles. Le premier concerne les systèmes non linéaires caractérisés par une échelle de temps, affectés par des entrées inconnues et en tenant compte de la présence d'incertitudes de modélisation. Le deuxième type d'observateur est dédié aux systèmes singuliers affectés par des entrées inconnues et le dernier s'applique aux multimodèles à deux échelles de temps en évitant la résolution du système algébrique correspondant aux dynamiques rapides. Enfin, le *cinquième chapitre* illustre l'efficacité des approches de modélisation et d'estimation d'état grâce à l'application sur un modèle de station d'épuration. Une structure multimodèle adaptée à ce processus est proposée, la synthèse des observateurs évoqués précédemment est réalisée et une application de l'estimation d'état au diagnostic de fonctionnement de ce système est ensuite achevée.

### 3 Références personnelles

#### Revue internationale avec comité de lecture

1. Nagy A.M., Mourot G., Marx B., Ragot J., and Schutz G., "Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model". *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 49(6), pp. 2790-2799, 2010.

#### Revue nationale avec comité de lecture

1. Nagy A.M., Mourot G., Schutz G., Ragot J. "Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide d'une structure multimodèle. Méthode analytique d'obtention d'un multimodèle". *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 44(4-5), pp. 423-443, 2010.

### Conférences internationales avec comité de lecture

1. Nagy Kiss A.M., Marx B., Mourot G., Schutz G., Ragot J., "State estimation of two-time scale multiple models with unmeasurable premise variables. Application to biological reactors", 49<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'2010, Atlanta, Georgia USA, December 15-17, 2010.
2. Nagy Kiss A.M., Marx B., Mourot G., Ragot J., Schutz G., "State estimation for wastewater treatment plant with slow and fast dynamics using multiple model", 18<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10, pp. 1353 - 1358, Marrakech, Morocco, June 23-25, 2010.
3. Nagy A.M., Marx B., Mourot G., Schutz G., Ragot J., "Méthode générale de sélection de multimodèles", 6<sup>ème</sup> Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2010, Nancy, France, 12-14 juin, 2010.
4. Nagy A.M., Marx B., Mourot G., Schutz G., Ragot J. "State estimation of the three-tank system using a multiple model", 48<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, CDC'09, pp 7795-7800, Shanghai, Chine, December 16-18, 2009.
5. Nagy A.M., Mourot G., Marx B., Schutz G., Ragot J., "Model structure simplification of a biological reactor", 15<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification (SYSID'09), 6-8 juillet 2009, Saint Malo, France.

### Workshops et conférences nationales avec comité de lecture

1. Nagy Kiss A.M., Marx B., Mourot G., Ragot J., "Estimation d'état des multimodèles à deux échelles de temps. Application à un réacteur biologique", 1<sup>er</sup> Colloque International Francophone, Ingénierie et Environnement, CIFIE'2010, Annaba, Algérie, 18 - 19 Octobre, 2010.
2. Nagy A.M., Mourot G., Ragot J., Schutz G., "Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide de multimodèles. Méthode analytique d'obtention d'un multimodèle", STIC & Environnement, Calais, France, 16-18 juin, 2009.
3. Nagy A.M., Mourot G., Schutz G., Ragot J., "Model structure simplification of Activate Sludge Model no.1 using Multiple Models", 1<sup>st</sup> IWA YWP Benelux Conference, Eindhoven, Pays-Bas, 30 Septembre - 2 Octobre, 2009.
4. Nagy A.M., Mourot G., Marx B., Ragot J., "Restructuration des modèles théoriques de station d'épuration", Journées Scientifiques du GEMCEA, Strasbourg, France, 8-9 Octobre, 2009.
5. Nagy A.M., Mourot G., Ragot J., Schutz G., Gillé S., "Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide de multimodèle", 3<sup>èmes</sup> Journées Doctorales en Hydrologie Urbaine, pp. 193-200, Nancy, France, 14-15 octobre, 2008.

### Travaux en cours d'évaluation

1. Nagy A.M., Marx B., Mourot G., Ragot J., Schutz G. "State estimation of two-time scale multiple models. Application to wastewater treatment plant", *Control Engineering Practice*, soumis le 30 août, 2010.



# 1

## Présentation de la structure multimodèle

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>1.2</b>	<b>Différentes structures de multimodèles</b>	<b>14</b>
1.2.1	Multimodèle de Takagi-Sugeno	15
1.2.2	Obtention d'un multimodèle	23
<b>1.3</b>	<b>État de l'art sur la synthèse d'observateurs</b>	<b>24</b>
1.3.1	Généralités sur les observateurs non linéaires	24
1.3.2	Synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires	25
1.3.3	Observateurs basés sur la structure MM	33
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>

---

“En cet Empire, l’art de la cartographie fut poussé à une telle perfection que la carte d’une seule province occupait toute une ville et la carte de l’Empire toute une province. Avec le temps, ces cartes démesurées cessèrent de donner satisfaction et les collègues de cartographes levèrent une carte de l’Empire, qui avait le format de l’Empire et qui coïncidait avec lui, point par point. Moins passionnées pour l’étude de la cartographie, les générations suivantes réfléchirent que cette carte dilatée était inutile et, non sans impiété, elles l’abandonnèrent à l’inclémence du soleil et des hivers.”<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup> Suarez Miranda, Viajes de Varones Prudentes (1658), imaginé par Jorge Luis Borges dans “Histoire universelle de l’infamie/Histoire de l’éternité”, Union générale d’éditions, collection 10/18, Paris.

## 1.1 Introduction

Le modèle d’un système est l’image d’une réalité, il ne constitue pas cette réalité, comme l’énonce un aphorisme “Il ne faut pas confondre la carte et le territoire”. Dans un sens large, le modèle synthétise les deux sens symétriques et opposés de la notion de représentation. En effet, il est utilisé : soit pour un concept ou objet qui est la représentation d’un autre à construire ou déjà existant (le *modèle réduit* ou maquette, le *modèle* du scientifique), soit pour un objet réel dont on souhaite donner une représentation et que l’on cherche à imiter (le *modèle* du peintre, le *modèle* que constitue le maître pour le disciple). Le second sens dérive de la pratique des architectes, ingénieurs et scientifiques consistant à construire d’abord un prototype, concret ou conceptuel, qui servira de modèle à une construction réelle : le modèle est ainsi devenu l’assemblage de concepts représentant de manière simplifiée une chose réelle déjà existante (objet, phénomène, etc.), en vue d’interpréter son fonctionnement, d’en prédire le comportement, etc. En sciences, le mot *modèle* est utilisé dans plusieurs contextes différents :

1. la maquette,
2. le modèle conceptuel, visant à l’interprétation du fonctionnement et au diagnostic, une “vue de l’esprit” analytique ou algorithmique représentant des phénomènes et leurs relations,
3. la simulation de nature prédictive ou diagnostic, souvent mise en œuvre par ordinateur (à l’aide des modèles statistiques, stochastiques, numériques ou analytiques, etc.).

Dans de nombreux domaines et disciplines scientifiques (sciences physiques et de la nature, économie, sciences de l’ingénieur, etc.) une étape essentielle est celle de la caractérisation du comportement dynamique d’un phénomène, qui se concrétise par un modèle mathématique. Un *modèle mathématique* est une traduction de la réalité ; à ce modèle on peut appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques. Inversement, les résultats mathématiques obtenus au moyen du modèle sont ensuite appliqués à l’objet réel. Un modèle se présente généralement sous la forme d’un ensemble de variables, d’équations et de fonctions. Une définition formelle d’un modèle mathématique dynamique est la suivante :

$$f(x^{(n)}, \dots, x, u^{(m)}, \dots, u) = 0 \quad (1.1)$$

$$g(x, u) = y \quad (1.2)$$

où  $x$  représente les variables d'état décrivant l'état interne du système,  $u$  et  $y$  sont respectivement les grandeurs d'entrée et de sortie du système et  $f$  et  $g$  représentent des fonctions linéaires et/ou non linéaires.

Quelques aspects fondamentaux sont à respecter dans la construction d'un modèle mathématique :

1. connaître ou fixer le domaine de validité du modèle, en fonction des hypothèses de travail émises et en tenant compte des aspects physiques du système à modéliser
2. assurer une certaine précision au modèle, en décrivant le plus fidèlement possible les phénomènes caractéristiques du système physique dont il est l'image
3. faciliter son utilisation, en simplifiant et en adaptant les outils théoriques impliqués dans la construction du modèle.

Les deux derniers aspects sont des objectifs de modélisation opposés, car l'obtention d'un modèle précis implique en général l'utilisation d'outils théoriques complexes. Un compromis entre ces deux aspects s'avère nécessaire tout en garantissant un domaine de validité le plus large possible.

En fonction du processus à modéliser, ce compromis se concrétise dans le choix de la structure du modèle adaptée au comportement dynamique du système. Ainsi, on peut distinguer deux types de structures :

- modèles de type linéaire
- modèles de type non linéaire

Le premier type de structure, le *modèle linéaire*, est un modèle très facile à manipuler grâce à sa structure simple. Le nombre et la maturité des nombreux travaux fondateurs dans les domaines d'identification, d'analyse et de commande des systèmes Linéaires à Temps Invariant (LTI) en sont la preuve [Kailath, 1980; Dai, 1989; Maquin et Ragot, 2000; Weinmann, 1991].

Cependant, la nécessité de réaliser une image fidèle et exhaustive de la réalité d'un phénomène réel, afin de pouvoir l'étudier complètement, conduit à la génération de modèles de plus en plus complexes. Dans ce cas, un modèle linéaire ne peut plus caractériser le processus physique sur un large domaine de fonctionnement et le recours à des *modèles non linéaires*, ayant une représentation plus sophistiquée est nécessaire. Bien sûr, la complexité mathématique n'est pas un critère suffisant pour juger si un modèle est pertinent ou non, la pertinence devrait être appréciée en fonction de l'utilisation ultérieure du modèle.

Le caractère de multiplicité de la modélisation constitue un point important. Il peut exister plusieurs modèles pour un même processus. Le choix d'un modèle ou d'un autre peut se faire en proposant un ensemble de critères pour guider ce choix. À titre d'exemple, tenant compte des aspects discutés précédemment, les critères de simplicité et de précision peuvent faire partie de cet ensemble.

Dans le domaine de l'automatique, la prévision, la commande ou la surveillance constituent des thèmes de recherche qui nécessitent l'élaboration de modèles ayant des structures particulières. Différentes structures de modèles non linéaires sont souvent utilisées, comme par exemple : les modèles à blocs structurés (Hammerstein et Wiener par exemple), les réseaux de neurones, les modèles flous, les séries temporelles, de Volterra, etc. Chacune de ces structures de modèles présente des avantages et des inconvénients. La capacité d'adapter des outils théoriques d'analyse et de synthèse afin d'obtenir une théorie unique, générale et exhaustive s'avère limitée pour chacune des structures.

Néanmoins, les outils existants pour l'étude pratique des modèles non linéaires complexes sont eux aussi limités. En conséquence, le compromis entre l'exactitude d'un modèle utilisé et sa simplicité de manipulation dans la pratique a toujours été une tâche assez difficile à accomplir. Le concept ayant le nom générique de *multimodèle* (MM) permet de répondre en large partie à cette demande. En effet, ce concept est basé sur le principe de division d'un phénomène afin de pouvoir l'utiliser et l'interpréter plus facilement. Appelé "diviser pour régner" dans [Leith et al., 2002], le principe de l'approches MM est largement répandu dans divers domaines tels que l'économie, la statistique, la physique, etc.

Dans le domaine de l'automatique, l'approche MM [Murray-Smith et Johansen, 1997; Leith et Leithead, 1999] constitue une alternative très intéressante et un outil très utilisé actuellement pour la modélisation des systèmes non linéaires. Dans la littérature sont utilisées plusieurs terminologies équivalentes pour définir ce type de modèles : multimodèle [Murray-Smith et Johansen, 1997], modèle flou de Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985], modèle linéaire polytopique (PLM) [Angelis, 2001]. Parmi les premières publications offrant une présentation complète et générale des approches MMs on peut citer le livre de Murray-Smith et Johansen [1997]. Dans le contrôle des systèmes non linéaires, l'approche multimodèle a également reçu une certaine attention [Tanaka et Wang, 2001; Boulkroune et al., 2008, 2010a].

Dans la suite on va préciser les caractéristiques de cette approche en présentant les différentes structures et approches connexes qui font référence au concept de MM.

## 1.2 Différentes structures de multimodèles

Définissons quelques notions utiles dans la description d'un MM :

- Un *espace de fonctionnement* est un espace vectoriel à l'intérieur duquel les variables d'un système évoluent (tenant éventuellement compte des bornes sur les variables).
- Une *zone de fonctionnement* est un domaine issu du partitionnement de l'espace de fonctionnement du système.
- Un *sous-modèle* (ou *sous-système*) est un modèle généralement simple de structure quelconque, mais souvent linéaire et/ou affine, qui représente le comportement du système non linéaire dans une zone de fonctionnement spécifique.
- Une autre notion liée à ces fonctions est la notion de *variable de prémisse* (ou *décision*). Ce nom est attribué à la variable  $z(t)$  intervenant dans les fonctions de pondération  $\mu_i(z(t))$ . Cette variable peut englober une ou plusieurs variables internes ou externes du système. Ces variables peuvent être soit accessibles à la mesure en temps réel (des signaux d'entrée du système ou même des variables d'état mesurables), soit inaccessibles à la mesure (des variables d'état non-mesurables). Retenons que la variable de prémisse  $z$  est une variable vectorielle :  $z \in \mathbb{R}^p$ .
- Une *fonction de pondération* est une fonction, notée en général  $\mu_i(z(t)) : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ , qui dépend des variables internes et/ou externes du système non-linéaire (variables de prémisse). Ces fonctions sont choisies en général de façon à vérifier la propriété de somme convexe :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (1.3)$$

Au cours du temps, ces fonctions ont été construites de différentes façons : en utilisant des fonctions de type booléen, des fonctions à dérivées discontinues (fonctions triangulaires) ou des fonctions à dérivées continues (fonctions gaussiennes). Dans le cas continu la loi exponentielle est souvent utilisée, et s'applique aux différentes variables de prémisse, en effectuant une normalisation afin de respecter la propriété de somme convexe (1.3). Une autre façon de construire les fonctions de pondération est d'utiliser les bornes des variables de prémisse si celle-ci sont disponibles [Wang et al., 1996; Tanaka et Wang, 2001].

Le *MM* est basé sur la décomposition du comportement dynamique du système en plusieurs zones de fonctionnement, chaque zone étant caractérisée par un sous-système. En fonction de la zone où le système évolue, chaque sous-système contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système. En général, le système présente un comportement dynamique homogène à l'intérieur d'une zone de fonctionnement. Ainsi, la contribution de chaque sous-système au modèle global, qui est une combinaison convexe des sous-systèmes, est définie par une fonction de pondération.

La représentation *MM* d'un système non linéaire peut être obtenue à partir de différentes structures. En général, la représentation d'état est utilisée car elle permet de mettre facilement en évidence les sous-modèles. Cette représentation est simple et plus générale que la présentation sous forme d'une équation de régression entrée/sortie. Concernant cette dernière représentation, plus de précisions sur la forme *MM* et le passage d'une représentation d'état à une représentation entrée/sortie (et vice versa) seront présentés plus tard dans ce chapitre. De plus, la description sous forme d'état se relève une forme bien adaptée pour la construction d'observateurs ou de lois de commande.

## 1.2.1 Multimodèle de Takagi-Sugeno

### Modèle flou de Takagi-Sugeno

Ce type de modèle (*Fuzzy T-S model*), proposé par [Takagi et Sugeno, 1985], est basé sur des règles du type :

**SI** *prémisse* **ALORS** *conséquence*

où les prémisses sont obtenues à partir des propositions linguistiques permettant l'évaluation des fonctions de pondération  $\mu_i$  et où les conséquences correspondent aux sous-modèles. Un des multiples intérêts de ce modèle est qu'il permet d'introduire des connaissances a priori sur les systèmes dans l'étape de modélisation en fournissant une partition floue initiale de l'espace de fonctionnement. Ce modèle a été largement étudié dès son apparition, faisant l'objet de nombreux développements et extensions des outils classiques de l'automatique aux modèles flous.

La représentation d'état du *MM* de Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985] est donnée par



(voir figure 1.1) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1.4a)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))C_i x(t) \quad (1.4b)$$

les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  caractérisant un fonctionnement local particulier. Avec cette structure, apparaît uniquement l'état global  $x$  et la sortie globale  $y$ . On peut faire apparaître un état local  $x_i$  en écrivant l'équation (1.4a) sous la forme :

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \quad (1.5a)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))\dot{x}_i \quad (1.5b)$$

La forme (1.5) reste une écriture non linéaire de ce type de modèle sans l'aspect flou.

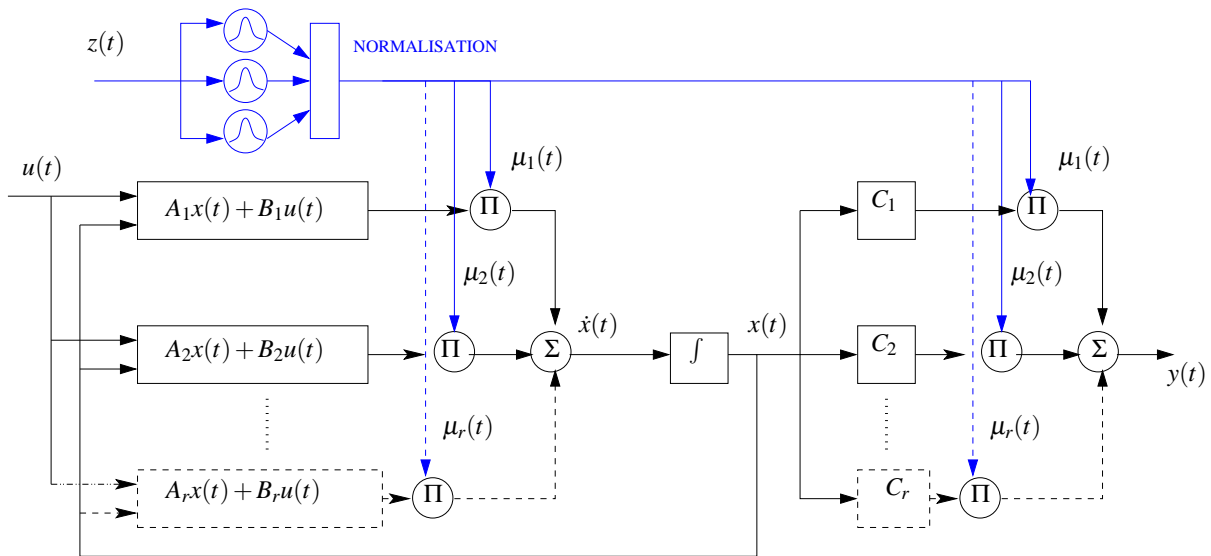


Figure 1.1 – Architecture du multimodèle Takagi-Sugeno

Présentons aussi quelques modèles qui sont apparus au cours du temps et qui ont une structure pouvant se rapprocher de celle présentée ici. Les points communs, ainsi que les différences seront énoncés brièvement pour chaque modèle évoqué.

### Modèle affine par morceaux

Ce type de modèle (*PWA - PieceWise Affine model*) est caractérisé par des fonctions de pondération de type booléen [Sontag, 1981; Rewienski, 2003]. Ce choix est une conséquence du fait que les zones de fonctionnement obtenues après le partitionnement de l'espace de fonctionnement sont disjointes, ce qui peut provoquer des phénomènes indésirables dûs aux discontinuités existantes lors des commutations.

### Modèle linéaire à paramètres variants

Ce type de modèle [Shamma et Cloutier, 1993] représente une classe assez large de systèmes non-linéaires constituant une forme intermédiaire entre une forme non linéaire générale et la forme MM :

$$\dot{x}(t) = A(z(t))x(t) + B(z(t))u(t) \quad (1.6a)$$

$$y(t) = C(z(t))x(t) + D(z(t))u(t) \quad (1.6b)$$

Ainsi, toute forme LPV (*Linear Parameter Varying*) à paramètres bornés  $z(t)$  est équivalent à une forme MM (plus de détails sur cette transformation équivalente seront donnés dans le chapitre 2). Dans l'approche LPV, les conditions de fonctionnement du système sont décrites directement par les variables de prémisse  $z(t)$ , alors que dans la structure MM celles-ci sont délivrées par les fonctions de pondération.

### Modèles linéaires à incertitudes polytopiques

Dans cette classe de modèles [Yang et al., 2005; Wang, 2008], les matrices représentant le système ne sont pas parfaitement connues, mais on possède une connaissance des bornes d'un intervalle à l'intérieur duquel ces matrices sont. Les erreurs de modélisation sont représentées par un ensemble de matrices sommets qui définissent un polytope, le comportement du système étant exprimé comme une combinaison barycentrique de ces matrices. Si les matrices sommets sont considérées comme des matrices de sous-modèles, alors le rapport avec une structure MM est évident.

Soit le système incertain  $\Sigma(\Delta)$  dont la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = A(\Delta)x(t) + B(\Delta)u(t) \quad (1.7a)$$

$$y(t) = C(\Delta)x(t) + D(\Delta)u(t) \quad (1.7b)$$

où  $M(\Delta) = \sum_{i=1}^r \mu_i M^{[i]}$  avec  $\mu_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$ . Il s'agit alors d'un cas particulier de MM où les fonctions d'activation sont constantes et où les sous-modèles sont définis par  $(A^{[i]}, B^{[i]}, C^{[i]}, D^{[i]})$  les sommets du polytope.

Les modèles incertains de type intervalle se définissent par la donnée de deux systèmes LTI extrémaux  $\bar{\Sigma}$  et  $\underline{\Sigma}$  ayant les mêmes dimensions de vecteurs sorties/entrées et d'état. Les matrices incertaines du modèle  $\Sigma(\Delta)$  sont telles que tous leurs éléments sont indépendants les uns des autres et bornés par les valeurs des éléments correspondants dans  $\bar{\Sigma}$  et  $\underline{\Sigma}$  :

$$\underline{A}_{ij} \leq A_{ij}(\Delta) \leq \bar{A}_{ij} \quad \dots \quad (1.8)$$

Cette modélisation est trivialement un sous cas de la modélisation polytopique et elle comprend  $2^{r_l}$  sommets où  $r_l$  est le nombre d'éléments distincts entre  $\bar{\Sigma}$  et  $\underline{\Sigma}$ .

## Multimodèle

La terminologie de MM (*Local Model Networks*), utilisée dans les travaux de [Murray-Smith et Johansen \[1997\]](#), et celle évoquée précédemment de modèle flous Takagi-Sugeno désignent des notions très proches. La seule différence se trouve au niveau de l'obtention des fonctions de pondération et au niveau de l'interprétation. Pour le modèle flou le partitionnement de l'espace de fonctionnement se fait à l'aide de propositions linguistiques, alors que pour le MM ce partitionnement est réalisé à l'aide de techniques d'optimisation.

## Réseaux de fonctions à base radiale

L'équivalence entre un MM de Takagi-Sugeno et les réseaux de fonctions à base radiale (*RBF Radial basis function networks*) est réalisée si les sous-modèles sont considérés d'ordre zéro, en se réduisant à une constante, et si les fonctions de pondération sont de type gaussien [[Jang et Sun, 1993](#)]. Un modèle ou réseau RBF calcule une combinaison linéaire de fonctions radiales de centres  $c_i$  :

$$y(x(t)) = \sum_{i=1}^r \mu(\|x(t) - c_i\|) a_i \quad (1.9)$$

où les fonctions sont considérées gaussiennes

$$\mu(\|x(t) - c_i\|) = \exp(-\beta \|x(t) - c_i\|^2) \quad (1.10)$$

et où la norme euclidienne est utilisée. Ce type d'approche de modélisation peut être considéré comme un approximateur universel, tout système non linéaire pouvant être représenté par cette structure. Cependant, un nombre important de sous-modèles est nécessaire pour obtenir une bonne approximation du système non linéaire, ce qui peut engendrer des difficultés ultérieures de manipulation du modèle obtenu.

## Multimodèle T-S à structure hiérarchique

Le MM à structure hiérarchique (*HFS - hierarchical fuzzy system*) [[Kikuchi et al., 1988](#); [Raju et Zhou, 1991](#); [Wang, 1998](#)] est un MM ayant une structure pyramidale et qui est constitué d'autres structures MMs. Cette structure a été créée pour faire face au nombre important de règles d'un modèle flou de Takagi-Sugeno, qui augmente de façon exponentielle avec le nombre des variables d'entrée [[Liu et Li, 2005](#)]. Dans la structure hiérarchique, le nombre de règles augmente linéairement avec le nombre des entrées. Cependant, [Kikuchi et al. \[1988\]](#) montre qu'il est impossible d'utiliser ce type de structure pour construire une expression exacte d'une fonction non linéaire quelconque. De plus, [Wang \[1998\]](#) montre l'approximation arbitrairement proche d'une fonction par le MM hiérarchique.

## Multimodèle T-S découplé

Ce type de structure apparaît dans la littérature sous différentes appellations : MMs locaux, réseaux de modèles locaux à états locaux, MMs sans état commun, réseaux des modèles locaux

par mélange de sortie. Cette structure, proposée par Filev [1991] est issue d'une interpolation de sous-modèles à états découplés. Le modèle global est réalisé par la somme pondérée des sorties de chaque sous-modèle. En conséquence, chaque sous-modèle est caractérisé par un espace d'état propre à l'intérieur duquel il évolue indépendamment des autres sous-modèles. La représentation d'état du MM découplé est donnée par :

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \quad (1.11a)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \quad (1.11b)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) y_i(t) \quad (1.11c)$$

Cette structure a fait l'objet des nombreux études [Leith et Leithead, 1999; Kanev et Verhaegen, 2006; Uppal et al., 2006; Orjuela et al., 2008]. Il faut souligner que les sorties  $y_i(t)$  des sous-modèles représentent des signaux artificiels de modélisation, utilisés seulement pour décrire le comportement non linéaire du système réel. Ces signaux ne sont pas accessibles à la mesure et n'ont pas de sens physique. Cette structure peut s'avérer très intéressante [Orjuela, 2008] dans le contexte d'identification des paramètres, car elle permet d'ajuster les dimensions des sous-modèles à la complexité des différents comportements d'un processus.

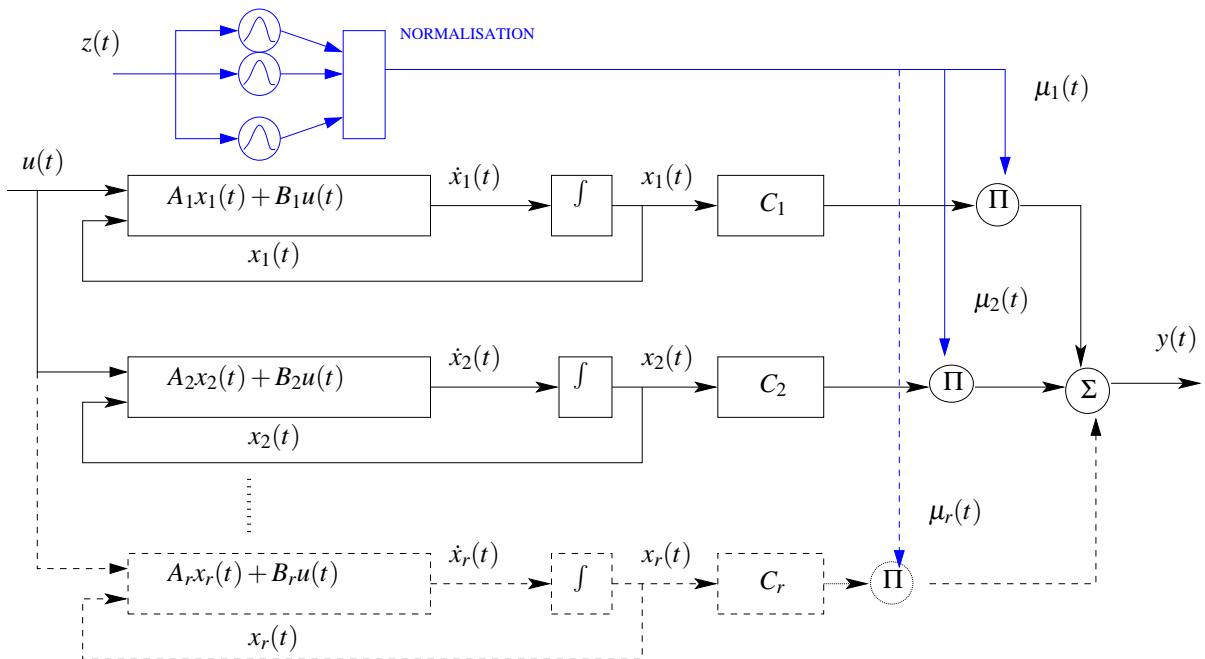


Figure 1.2 – Architecture du MM découplé

### Réseaux multimodèles à base de vitesse

Supposons que l'on dispose d'un modèle non linéaire d'un système sous forme analytique. Une des techniques d'obtention d'un MM est la linéarisation autour de différents points de fonctionnement du modèle du système. Après cette linéarisation, les sous-modèles obtenus sont

affines en l'état et en la commande et peuvent contenir un terme constant additionnel  $\gamma_i$  :

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + \gamma_i \quad (1.12)$$

De ce fait, des phénomènes indésirables peuvent apparaître à cause de ce terme pour des valeurs de  $\gamma_i$  pouvant masquer l'effet de  $A_i$  et  $B_i$  dans la dynamique du MM [Johansen et al., 2000]. Afin de prévenir cet effet, une stratégie de linéarisation basée sur la vitesse est proposée par [Leith et Leithead, 1999; McLoone, 2000], en dérivant les équations des sous-modèles pour éliminer les termes constants  $\gamma_i$ . Des réseaux MMs à base de vitesse (*Velocity-based multiple model networks*) sont obtenus.

### Multimodèle avec une structure en flèche

Les travaux de [Borne et Benrejeb, 2008] étudient la de stabilité des systèmes non linéaires de grande dimension, pouvant être ramenés sous une forme particulière caractérisée par des matrices avec une structure en flèche. Cette forme particulière permet d'isoler les éléments non linéaires de la matrice d'état dans la dernière ligne, ce qui permet d'établir des critères de stabilité pour le système non linéaire présenté sous une forme MM Takagi-Sugeno. Cette approche est basée sur un changement de coordonnées  $x(t) = T x_T(t)$  afin d'obtenir la forme particulière en flèche, caractérisée par des matrices de la forme :

$$A_T^i(\cdot) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_{i,1}(\cdot) & \cdots & \gamma_{i,n-1}(\cdot) & \gamma_{i,n}(\cdot) \end{bmatrix}$$

Le système non linéaire dans les nouvelles coordonnées est écrit sous une forme MM en utilisant ces matrices ayant une structure en flèche :

$$\dot{x}_T(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) A_T^i(\cdot) x_T(t) \quad (1.13)$$

où  $\mu_i$  est le degré d'appartenance du modèle linéaire  $A_T^i(\cdot)x_T$  au modèle global et où, pour  $i = 1, \dots, r$ , on a  $0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) = 1$ .

### Multimodèle à base de fonctions orthonormales (MM Orthonormal Basis Function)

Le concept de modèles à base de fonctions orthonormales (OBF) est largement étudié dans le cadre de l'identification et de la modélisation des systèmes LTI [Heuberger et al., 2005]. Les OBFs sont définies comme des fonctions de transfert orthonormales dans  $\mathcal{H}_2$  qui forment une base. Ces fonctions peuvent ainsi représenter de façon exacte des fonctions de transfert, en construisant une combinaison linéaire de ces fonctions.

La fonction de transfert  $F \in \mathcal{H}_2$  d'un modèle LTI associé à la paire entrée sortie  $(u, y)$  peut être

définie par :

$$F(s) = w_0 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i L_i(s) \quad (1.14)$$

où  $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$  forment une base dans  $\mathcal{H}_2$  et  $w_i$  sont des paramètres de pondération. Les fonctions  $L_i(s)$  peuvent être définies par :

$$L_i(s) = (sI - A_i)^{-1} B_i \prod_{l=0}^{i-1} G_l(s), \quad i > 0 \quad (1.15)$$

La structure des modèles à base de fonctions orthonormales est illustrée à la figure 1.3. Notons que dans cette figure les signaux  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $x_i = L_i(s)u$ , représentent les variables d'état dans l'espace d'état (SS) de  $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ .

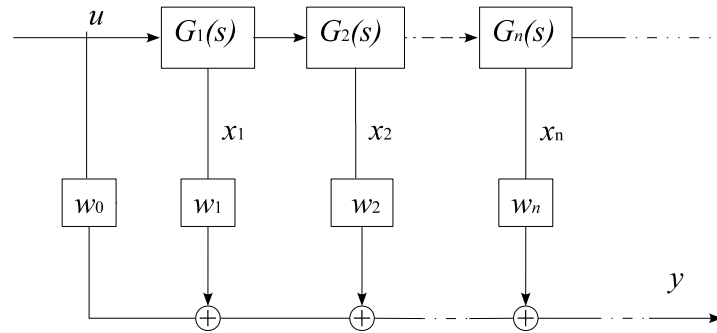


Figure 1.3 – Modèles basés sur des fonctions à base orthonormale

## Équivalence entre les représentations des systèmes

Récemment, le passage d'une représentation d'état (SS) vers une représentation entrée / sortie (IO) -et inversement- dans le cadre des structures MMs a suscité un certain nombre de développements [Toth, 2008; Toth et al., 2009a,b]. Ces travaux s'inscrivent dans une procédure d'obtention des systèmes LPV (linéaires à paramètres variants) et nécessitent la sélection d'une structure du modèle (SS, IO, etc.). Dans ces études, la structure MM est utilisée pour l'obtention des paramètres de la représentation souhaitée à travers le passage équivalent. Pour présenter cette méthode, considérons un système dynamique d'ordre trois, la technique pouvant être étendue à l'ordre  $n$ .

1. Soit le système non linéaire représenté dans l'espace d'état par un MM :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_{0,i} \\ 1 & 0 & -a_{1,i} \\ 0 & 1 & -a_{2,i} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_{0,i} \\ b_{1,i} \\ b_{2,i} \end{bmatrix} u(t) \right) \quad (1.16)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1]x(t) \quad (1.17)$$

ou sous une forme LPV :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0(t) \\ 1 & 0 & -a_1(t) \\ 0 & 1 & -a_2(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} u(t) \quad (1.18)$$

$$a_k(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) a_{k,i} \quad k = 0, 1, 2 \quad (1.19)$$

$$b_k(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) b_{k,i} \quad k = 0, 1, 2 \quad (1.20)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1] x(t) \quad (1.21)$$

Réalisant un calcul d'élimination de la variable d'état, on obtient une relation entrée/sortie de la forme :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) + a_2(t)\ddot{y}(t) + [a_1(t) + 2\dot{a}_2(t)] \dot{y}(t) + [a_0(t) + \dot{a}_1(t) + \ddot{a}_2(t)] y(t) = \\ = [b_0(t) + \dot{b}_1(t) + \ddot{b}_2(t)] u(t) + [b_1(t) + 2\dot{b}_2(t)] \dot{u}(t) + b_2(t) \ddot{u}(t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

2. En considérant l'expression entrée/sortie sous une forme MM :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \alpha_{2,i} \ddot{y}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \alpha_{1,i} \dot{y}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \alpha_{0,i} y(t) = \\ \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \beta_{2,i} \ddot{u}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \beta_{1,i} \dot{u}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \beta_{0,i} u(t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

on peut écrire plus simplement :

$$y^{(3)}(t) + \alpha_2(t)\ddot{y}(t) + \alpha_1(t)\dot{y}(t) + \alpha_0(t)y(t) = \beta_2(t)\ddot{u}(t) + \beta_1(t)\dot{u}(t) + \beta_0(t)u(t) \quad (1.24)$$

en utilisant les définitions suivantes pour les paramètres variables dans le temps :

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \alpha_{2,i}, \quad \alpha_1(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \alpha_{1,i}, \quad \alpha_0(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \alpha_{0,i} \\ \beta_2(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \beta_{2,i}, \quad \beta_1(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \beta_{1,i}, \quad \beta_0(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \beta_{0,i} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Pour que les deux formulations multimodèle IO (1.22) et SS (1.24) soient équivalentes, on doit choisir :

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) &= a_2(t) \\ \alpha_1(t) &= a_1(t) + 2\dot{a}_2(t) \\ \alpha_0(t) &= a_0(t) + \dot{a}_1(t) + \ddot{a}_2(t) \\ \beta_2(t) &= b_2(t) \\ \beta_1(t) &= b_1(t) + 2\dot{b}_2(t) \\ \beta_0(t) &= b_0(t) + \dot{b}_1(t) + \ddot{b}_2(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

ce qui entraîne la construction des fonctions de pondérations différentes de celles existantes dans la représentation (1.16). Si on considère les expressions des paramètres  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  déduits des égalités (1.26) on peut remarquer que dans le cas général ces contraintes ne sont pas facilement vérifiées et nécessitent la synthèse de fonctions de pondération particulières.

Cet exemple, quoique très particulier, montre que le passage d'une forme MM à une autre forme MM est délicat ; c'est un problème peu abordé actuellement parmi les travaux cités.

### 1.2.2 Obtention d'un multimodèle

De façon générale, il existe deux façons d'aborder la modélisation des systèmes non linéaires en utilisant l'approche MM :

1. construire directement un MM qui représente le comportement d'un système réel
2. transformer un modèle non linéaire déjà existant sous une forme MM

Différentes techniques proposées dans la littérature pour obtenir un MM correspondent à ces façons de traiter le problème de la modélisation. Ainsi, une première catégorie de méthodes d'obtention d'un MM est relative aux méthodes d'identification et d'estimation des paramètres à partir des données expérimentales [Abonyi et al., 2002], [Mourot et al., 1999]. Dans ce cas, la qualité du MM (c'est-à-dire son pouvoir de représentation) dépend fortement de la qualité des données disponibles. Quelques facteurs conditionnent la capacité du MM à représenter de façon générale le comportement du processus : le niveau du bruit affectant les mesures, le nombre de mesures disponibles et le taux de variations des données dans l'espace entrée/sortie. L'obtention de la forme MM consiste en trois étapes. La première est l'*identification* de la structure (déterminer le nombre de modèles locaux, choisir les variables de prémisses et réaliser le partitionnement de l'espace de fonctionnement). La seconde consiste dans le *calcul des paramètres inconnus* du système. La troisième concerne la *validation*, sur un autre ensemble de données, du MM obtenu.

Dans une deuxième catégorie, on trouve les techniques basées sur des modèles mathématiques existants provenant par exemple d'une description phénoménologique du système à étudier. Dans ce cas sont proposées des linéarisations autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement, ainsi que des linéarisations suivant des trajectoires arbitraires [Johansen et al., 2000; Ge, 2001; Harris et al., 1999; Jia et al., 2005; Kosko, 1994; Labiod et Guerra, 2007].

Nos études sont focalisées sur la deuxième catégorie de techniques, c'est-à-dire celles basées sur un modèle non linéaire déjà existant. Dans la plupart des travaux réalisés, la perte d'information (due par exemple à la linéarisation) constitue le principal inconvénient de ces techniques. De même, le choix du nombre et de la position des différents points de fonctionnement reste assez délicat à réaliser. Seule la méthode utilisant l'approche *par secteur non linéaire*, évoquée de façon succincte dans Tanaka et Wang [2001], permet d'obtenir une forme MM équivalente au modèle non linéaire initial, évitant ainsi une perte d'information par rapport à ce dernier. Dans la référence indiquée, cette méthode est seulement illustrée sur un exemple et ne propose pas une façon générale de réaliser cette transformation sur un modèle non linéaire quelconque. De plus, le choix des variables de prémisses, qui représentent les non-linéarités du système, n'est pas réalisé de façon systématique (ce qui est aussi le cas des méthodes d'obtention des MM à partir des mesures expérimentales). Ces points délicats seront traités en détail dans le prochain chapitre, qui propose une méthodologie générale pour transformer, de façon équivalente, un



modèle non linéaire en une forme MM. En particulier, le choix des variables de prémisse est guidé par un ensemble de critères construits suivant des objectifs d'analyse de stabilité, de commandabilité et/ou d'observabilité. Un aspect qui mérite l'attention à ce stade est le fait qu'un même système non linéaire peut être équivalent à plusieurs MMs, grâce à cette méthodologie.

## 1.3 État de l'art sur la synthèse d'observateurs

Les travaux de thèse, exposé dans le présent mémoire, concernent en grande partie la synthèse d'observateurs par MMs et leur application au diagnostic d'une station d'épuration. Il est donc utile de donner en introduction un état de l'art sur la synthèse d'observateur pour les MMs. Rappelons toutefois quelques travaux réalisés dans le contrôle des systèmes non linéaires [Isidori, 1995; M'Saad et al., 1990; M'Saad et Hejda, 1994; Isidori, 2000; Tanaka et Wang, 2001; Zinober et Owens, 2001; Guerra et al., 2006].

Dans ce qui suit, nous présentons les principaux travaux réalisés concernant la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires afin de justifier notre choix d'utiliser la structure MM.

### 1.3.1 Généralités sur les observateurs non linéaires

La nécessité d'obtenir un modèle précis du comportement d'un processus réel exige souvent l'utilisation du formalisme non linéaire. Les modèles non linéaires obtenus permettent une description exhaustive sur un large espace de fonctionnement, contrairement aux modèles linéaires qui ont un caractère local.

Dans la pratique, l'étude des systèmes réels suppose l'accès aux variables décrivant l'état du système pour la surveillance ou le contrôle des systèmes. Malheureusement, on dispose rarement de mesures directes de ces variables d'état pour des raisons techniques, financières ou autres. C'est la raison pour laquelle une estimation fiable des variables non mesurées est nécessaire, particulièrement quand ces variables sont utilisées pour la surveillance du processus réel, pour une synthèse des lois de commande ou pour un diagnostic de fautes.

Pour réaliser la tâche de reconstruction des variables non disponibles, des solutions théoriques performantes ont été développées, généralement basées sur un modèle mathématique représentant le comportement du système réel en fonctionnement sain. Ainsi, la construction d'un "capteur logiciel" souvent appelé observateur est réalisée afin de reconstruire les variables qui ne sont pas accessibles à la mesure.

D'une façon générale, les systèmes non linéaires dynamiques considérés peuvent être décrits par une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.27a)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (1.27b)$$

où  $x$  représente le vecteur d'état,  $u$  le vecteur d'entrée et  $y$  représente le vecteur de sortie du système. Les fonctions  $f$  et  $g$  sont généralement non linéaires.

Conformément aux descriptions précédentes, un observateur ou un reconstituteur d'état est un système dynamique qui permet d'obtenir une estimation de la valeur courante de l'état

non mesuré du système (1.27) à partir des informations disponibles : sorties  $y$  et entrées  $u$  du système :

$$\dot{z}(t) = \varphi(z(t), u(t), y(t)) \quad (1.28a)$$

$$\hat{x}(t) = \gamma(z(t), u(t), y(t)) \quad (1.28b)$$

$$\hat{y}(t) = g(\hat{x}(t), u(t)) \quad (1.28c)$$

L'observateur (1.28) est un observateur global si l'erreur d'estimation d'état  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  tend asymptotiquement vers zéro :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0$$

quelles que soient les conditions initiales  $x(0)$  du système non linéaire et de l'observateur  $z(0)$ .

L'objectif dans la conception d'un observateur est de déterminer les fonctions  $\varphi(z, u, y)$  et  $\gamma(z, u, y)$  qui assurent la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro.

Dans la pratique, la forme de l'observateur se résume souvent à une forme similaire à celle du système, à laquelle est rajoutée un terme de correction basé sur l'écart entre la sortie mesurée  $y$  et la sortie estimée  $\hat{y}$  du système. Donc, un observateur correspond en général à un système d'ordre supérieur ou égal à celui du système observé.

La construction d'un observateur exige la propriété d'observabilité, initialement formalisée par [Herman et Krener \[1977\]](#). Cette propriété se traduit par la capacité de reconstruire l'état à partir des entrées et des sorties du système. Cette propriété peut être définie d'une façon générale en se basant sur la notion d'indistinguabilité (ou d'indiscernabilité) d'une paire d'états, qui est présentée en détail dans [Herman et Krener \[1977\]](#), ou plus récemment dans d'autres publications qui portent sur l'observabilité des systèmes non linéaires, comme par exemple dans [Besançon \[2007\]](#).

Dans le cas linéaire, la propriété d'observabilité est une propriété de rang de la paire  $(A, C)$  et ne dépend pas de l'entrée du système. De plus, cette propriété suffit pour assurer l'existence d'un observateur, à vitesse de convergence exponentielle et arbitrairement rapide. Des résultats classiques concernant l'observabilité des systèmes linéaires, ainsi que la synthèse des principaux observateurs pour systèmes linéaires, Luenberger et de type Kalman, existent dans [\[Kailath, 1980\]](#), [\[Luenberger, 1971\]](#) et [\[Kalman et Bucy, 1960\]](#).

Dans le cas des systèmes non linéaires, les propriétés d'observabilité mentionnées précédemment ne sont plus valables. En général, les systèmes non linéaires ont des entrées singulières qui les rendent non observables. Ainsi, l'observabilité d'un système non linéaire dépend de l'entrée appliquée. Une synthèse élaborée est donnée dans [\[Bornard et al., 1993\]](#).

### 1.3.2 Synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires

Cette section a pour but de présenter une vue d'ensemble des méthodes de conception d'observateurs pour des systèmes non linéaires. La classification réalisée de ces approches n'est pas unique, la liste n'étant bien sûr pas exhaustive puisque des combinaisons des différentes approches ont aussi été réalisées.

### Le filtre de Kalman étendu

Parmi les premiers travaux réalisés dans le cadre de la synthèse d'observateur d'état pour des systèmes non linéaires se trouve l'extension des travaux basés sur des techniques linéaires. Le filtre de Kalman, conçu initialement pour les systèmes linéaires stochastiques, a constitué un point de départ dans cette direction. Ainsi, pour un système non linéaire décrit par une équation différentielle dans l'espace d'état, une linéarisation autour d'une trajectoire de référence est possible. La conception du filtre de Kalman étendu [Jazwinski, 1970] est alors basée sur cette linéarisation ayant un caractère local.

La classe des systèmes considérés est :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \eta_1(t) \quad (1.29a)$$

$$y(t) = g(x(t)) + \eta_2(t) \quad (1.29b)$$

où  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont des bruits gaussiens de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q_1(t)$  et  $Q_2(t)$ . Le filtre de Kalman est donné par :

$$\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t)) + z(t)G(\hat{x}(t))^T Q_2^{-1}(t)[y(t) - g(\hat{x}(t))] \quad (1.30a)$$

$$\dot{z}(t) = F(\hat{x}(t))z(t) + z(t)F(\hat{x}(t))^T + Q_1(t) - z(t)G(\hat{x}(t))^T Q_2^{-1}(t)G(\hat{x}(t))z(t) \quad (1.30b)$$

où  $F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$  et  $G(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x}$ .

Cette approche a suscité longtemps beaucoup d'intérêt, essentiellement en raison d'une relative simplicité (grande ressemblance avec le filtre de Kalman linéaire) de mise en œuvre même pour des systèmes de taille importante. Cette approche permet de traiter le cas des bruits dont on est capable de caractériser les propriétés statistiques. Cependant, quelques inconvénients peuvent être évoqués : le manque de preuve de convergence du filtre, la vitesse de reconstruction n'est pas garantie, le caractère local de l'approche valable autour d'une trajectoire nominale, le grand nombre de calculs en ligne dû à la mise à jour des estimations d'état et des matrices de covariance.

### Observateurs basés sur les conditions de stabilité de Lyapunov

Dans les années 1970, l'approche proposée par Lyapunov pour l'analyse de stabilité de système commence à susciter un grand intérêt. Les premiers travaux concernant la construction d'observateurs non linéaires sont réalisés par Thau [1973] qui propose l'utilisation de ces techniques pour des systèmes non linéaires de la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)) \quad (1.31a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.31b)$$

où la fonction non linéaire  $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$  satisfait la condition de Lipschitz :

$$\|f(x, u) - f(\hat{x}, u)\| < \lambda \|x - \hat{x}\| \quad (1.32)$$

L'observateur proposé par [Thau \[1973\]](#) constitue, comme l'approche proposée à la section 1.3.2, une extension du cas linéaire ; cette fois-ci l'extension est réalisée à partir de l'observateur de Luenberger [[Luenberger, 1971](#)], l'observateur du système non linéaire ayant la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t), u(t)) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \quad (1.33a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (1.33b)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état  $e = x - \hat{x}$  satisfait :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + f(x(t), u(t)) - f(x(t) - e(t), u(t)) \quad (1.34)$$

L'objectif est alors d'assurer la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation d'état. Comme les matrices  $A$  et  $C$  sont connues et fixes, il reste à déterminer la matrice  $L$  qui assure cette convergence vers zéro de  $e$ . Le résultat de [Thau \[1973\]](#) donne des conditions basées sur la résolution de l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q \quad (1.35)$$

Quelle que soit  $Q$  symétrique et définie positive, s'il existe une matrice  $L$  et une matrice symétrique et définie positive  $P$  satisfaisant la propriété suivante :

$$\lambda < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (1.36)$$

et qui vérifient l'équation de Lyapunov (1.35), alors l'erreur converge asymptotiquement vers l'origine.

Ce premier résultat donne une condition de stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état en fonction du choix de la matrice  $L$ . Un algorithme de recherche du gain  $L$  de façon plus systématique est donné dans [[Raghavan et Hedrick, 1994](#)]. Il est basé sur la recherche itérative d'un paramètre  $\varepsilon > 0$  et des matrices  $P$  et  $Q$  symétriques et définies positives qui vérifient l'équation de Riccati suivante :

$$A^T P + PA + P \left( \lambda^2 I - \frac{1}{\varepsilon} C^T C \right) P + I + Q = 0 \quad (1.37)$$

Le gain de l'observateur qui stabilise la dynamique de l'erreur  $e$  pour une fonction  $f$  avec une constante de Lipschitz  $\lambda$  est donné par  $L = \frac{1}{\varepsilon} PC^T$ .

Avec le même objectif de déterminer le gain  $L$  de l'observateur (1.28), un autre algorithme est proposé dans [[Rajamani, 1998](#)]. Il est basé sur l'évaluation des valeurs propres et du conditionnement  $K_2(T)$  de la matrice des vecteurs propres de la matrice  $A - LC$ . Le but de l'algorithme est de réduire au minimum le rapport  $\frac{\lambda_{\min}(A-LC)}{K_2(T)}$ . L'inconvénient de cet algorithme est qu'il ne produit que des minima locaux.

La liste des techniques, en vue de réduire le conservatisme lié à l'existence d'une solution des équations de type Lyapunov et Riccati est importante, citons simplement [[Rajamani et Cho, 1998](#)], [[Aboki et al., 2002](#)], [[Pertew et al., 2005](#)], [[Pertew et al., 2006](#)]. Les principaux inconvénients de ces approches résident dans la majoration de l'erreur d'estimation d'état en utilisant

la condition de Lipschitz. De plus, pour des constantes de Lipschitz très grandes il se peut que la résolution des équations de Riccati soit impossible ou conduise à des gains trop importants qui rendent l'observateur très sensible aux bruits de mesure.

Arcak et Kokotovic [2001] proposent une approche qui relaxe l'hypothèse Lipschitz et évite l'obtention de grands gains. Cependant, deux autres hypothèses sont utilisées pour que l'erreur d'estimation d'état tende vers zéro :

1. une inégalité matricielle linéaire (LMI) à respecter pour la partie linéaire de l'observateur
2. une condition de monotonie à satisfaire pour la partie non linéaire représentée par la fonction  $f$

Une extension des travaux précédents [Arcak et Kokotovic, 2001] pour le cas discret est proposée dans [Ibrir, 2007]. L'approche utilise des injections multiples de la sortie dans les non-linéarités et ne nécessite plus la condition de monotonie sur la fonction  $f$ .

Toutes les méthodes présentées précédemment cherchent à obtenir un gain d'observateur  $L$  constant. L'idée d'utiliser un gain variable dans le temps apparaît dans Tsinias [1989], qui propose de le rendre dépendant de l'entrée :  $L = L(u(t))$ . Une généralisation au cas  $L = L(\hat{x}(t), u(t))$  et ensuite proposée dans Tsinias [1990]. Cependant, la construction de la fonction de Lyapunov proposée dans ces approches reste assez difficile à réaliser.

En conclusion, ce type d'observateur a l'avantage de la simplicité de la mise en œuvre quand une matrice de gain  $L$  garantissant la stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation existe. Un des inconvénients réside dans la structure particulière du système non linéaire. Le choix du gain  $L$  satisfaisant la condition (1.36) résulte d'un processus d'essai qui peut devenir difficile, voire impossible, à réaliser pour des systèmes d'ordre élevé.

## Observateurs sous forme canonique

En parallèle avec les travaux mentionnés précédemment, de nombreuses méthodes de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires ont été proposées, beaucoup d'entre elles s'inspirant des méthodes issues des travaux sur les systèmes linéaires. C'est le cas de la technique présentée dans la suite qui se base sur un changement de coordonnées afin de transformer le système non linéaire sous une forme particulière répondant aux conditions de synthèse, appelé *forme canonique*. Cette forme est basée sur une structure linéaire modulo injection d'Entrées-Sorties et de leurs dérivées [Bestle et Zeitz, 1983; Krener et Isidori, 1983; Keller, 1987; Plestan, 1995].

Pour le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.38a)$$

$$y(t) = g(x(t)) \quad (1.38b)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}$ , cette approche vise à déterminer la transformation permettant de le mettre sous la forme canonique d'observabilité :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \Phi(y(t)) \quad (1.39a)$$

$$y(t) = Cz(t) \quad (1.39b)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0_{1,n-1} & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(y) = [\Phi_1(y) \ \cdots \ \Phi_n(y)]^T, \quad C = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \quad (1.40)$$

L'observateur s'écrit sous la forme :

$$\dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) + \Phi(y(t)) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \quad (1.41a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{z}(t) \quad (1.41b)$$

et la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (1.42)$$

Cette transformation assure l'équivalence entre les deux formes (1.38) et (1.39), et permet d'obtenir une forme linéaire de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état. Ainsi, pour une paire  $(A, C)$  observable, il est possible de placer les valeurs propres de la matrice  $(A - LC)$  afin d'assurer une stabilité asymptotique ou exponentielle du système (1.42).

Ce résultat a été étendu aux systèmes à plusieurs sorties dans [Krener et Isidori, 1983] en proposant la transformation  $z(t) = T(x(t))$ . L'état du système initial est estimé en appliquant la transformation inverse :  $\hat{x}(t) = T^{-1}(\hat{z}(t))$ .

Une extension aux systèmes non autonomes est considérée dans [Keller, 1987], pour lesquels on considère la dépendance de la dynamique du système à l'entrée  $u$  et à ses  $n$  premières dérivées par rapport au temps. Cette dépendance est présente dans la fonction  $\Phi(y(t), U(t))$ , avec  $U = [u \ \dot{u} \ \cdots \ u^{(n)}]$ .

Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une transformation ont été proposées dans le cas des systèmes mono-sortie [Glumineau et al., 1996], et pour les systèmes multi-sorties [Birk et Zeitz, 1988], ainsi que pour les systèmes autonomes [Phelps, 1991]. Toutes les approches mentionnées supposent que la sortie est linéaire par rapport à l'état. Dans [Kazantzis et Kravaris, 1998] l'observateur pour un système autonome est conçu par une transformation de coordonnées appropriée sans exigence de la linéarité de la sortie par rapport à l'état.

L'avantage de ces approches est qu'après application de la transformation, la synthèse de l'observateur est simple, ce dernier étant réduit à un simple observateur linéaire. Les inconvénients de ces méthodes résident dans le fait qu'il est difficile de caractériser les systèmes ayant la forme canonique d'observabilité demandée. En plus, il n'est pas toujours possible de trouver une telle transformation, la classe des systèmes pouvant être transformés étant limitée.

Dans le cas où les conditions d'existence de la transformation sous une forme canonique ne sont pas satisfaites, des méthodes alternatives existent, basées sur une transformation du système non linéaire initial sous une forme qui permet d'obtenir la forme canonique d'observabilité [Nicosia et al., 1989; Nam, 1997; Lynch et Bortoff, 2001].

Il existe aussi des techniques [Levine et Marino, 1986; Ticlea, 2006; Besançon, 2007] qui sont basées sur l'immersion de l'espace d'état initial dans un état de dimension supérieure.

### Observateurs “à grand gain”

Comme déjà précisé, l’observabilité des systèmes non linéaires dépend en général de l’entrée. Toutefois, il existe des systèmes qualifiés d’uniformément observables, qui sont observables quelle que soit l’entrée. Ainsi, dans [Gauthier et Bornard, 1981] est proposé un changement de coordonnées dans une forme canonique, composée d’une partie observable linéaire et d’une partie commandée non linéaire possédant une structure triangulaire, pour la classe des systèmes à une sortie et affines en la commande :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + h(x(t))u(t) \quad (1.43a)$$

$$y(t) = g(x(t)) \quad (1.43b)$$

pour lesquels est défini un difféomorphisme  $\Phi = \left[ g(x) \ L_f g(x) \ \dots \ L_f^{n-1} g(x) \right]^T$  qui transforme le système (1.43) sous la forme :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ \varphi(x(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(x_1(t)) \\ h_2(\bar{x}_2(t)) \\ \vdots \\ h_{n-1}(\bar{x}_{n-1}(t)) \\ h_n(\bar{x}_n(t)) \end{bmatrix} u(t) \quad (1.44a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.44b)$$

où  $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ ,  $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$ , où les fonctions  $h_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sont globalement Lipschitz et  $\varphi$  est une fonction globalement Lipschitz de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans [Gauthier et al., 1992], il est supposé que le système (1.44) est uniformément observable et un observateur de la forme

$$\hat{\dot{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + h(\hat{x}(t))u(t) - S_\infty^{-1}C^T(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (1.45)$$

est proposé, où  $S_\infty$  est la solution de l’équation

$$0 = -\theta S_\infty - A^T S_\infty - S_\infty A + C^T C \quad (1.46)$$

la matrice  $A$  étant définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix}$$

Le paramètre  $\theta$  permet d’ajuster la vitesse de convergence de l’erreur d’estimation vers zéro. Le gain de l’observateur est seulement basé sur la partie linéaire du système et l’effet de la non-linéarité est rendu négligeable en choisissant une valeur suffisamment importante pour  $\theta$ , d’où le nom d’observateur “à grand gain”.

Une transformation triangulaire similaire est proposée dans [Bornard et Hammouri, 1991]



pour des systèmes du type :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t), u(t)) \quad (1.47a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.47b)$$

Dans [Gauthier et Kupka, 1994], la synthèse d'un observateur à "grand gain" est présentée, pour des systèmes non linéaires de la forme générale :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.48a)$$

$$y(t) = g(x(t)) \quad (1.48b)$$

Ce type d'observateurs a l'avantage de générer une erreur d'estimation d'état à convergence exponentielle aussi rapide que souhaitée en augmentant  $\theta$ . Cependant, pour un gain choisi trop grand, la sensibilité au bruit de mesure constitue un inconvénient. De plus, l'obtention de la structure triangulaire peut s'avérer difficile, même si théoriquement une transformation de coordonnées est accessible.

### Observateurs adaptatifs

Il est souvent intéressant de combiner la connaissance a priori d'un système physique avec des données expérimentales mesurables pour fournir une évaluation en ligne des états et des paramètres du système. Cette nécessité a permis de concevoir des observateurs adaptatifs pour l'estimation simultanée des états et des paramètres.

Les premiers travaux concernant ce type d'observateur pour des systèmes linéaires à temps invariant ont été proposés dans [Kreisselmeier, 1977; Luders et Narendra, 1973]. Ensuite, un tel observateur pour des systèmes non linéaires mono-entrée et mono-sortie, basé sur une transformation sous une forme canonique a été conçu dans [Bastin et Gevers, 1988]. Des observateurs adaptatifs utilisant la forme canonique d'observabilité qui fournissent une convergence asymptotique [Marino et Tomei, 1992], exponentielle [Marino et Tomei, 1995] ou qui prennent en compte de façon explicite des perturbations [Marino et al., 2001] ont été synthétisés. Cependant, tous ces résultats sont limités aux systèmes non linéaires dont la dynamique peut être linéarisée par un changement de coordonnées avec injection de sortie.

Un résultat qui traite une classe de systèmes qui ne peuvent pas être linéarisés par changement de coordonnées et injection de sortie est présenté dans [Zhang et Xu, 2001]. La méthode proposée par l'auteur se base sur l'observateur adaptatif linéaire et les observateurs à grand gain. Tous ces travaux traitent le cas des systèmes linéairement paramétrisés. Toutefois, la plupart des systèmes réels sont représentés par des modèles dont les paramètres connus et/ou inconnus interviennent de façon non linéaire. Des observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires multi-entrées multi-sorties uniformément observables et avec paramétrisation non linéaire ont été proposés plus récemment dans [Farza et al., 2009].

Les avantages sont liés à l'estimation simultanée des états et des paramètres, ce type d'observateur offrant une robustesse vis-à-vis des variations paramétriques par rapport à un observateur d'état qui utilise des valeurs fixes des paramètres. Les inconvénients sont similaires à ceux mentionnés à la section 1.3.2 pour les observateurs canoniques.



### Observateurs basés sur une linéarisation étendue

Cette approche développée par [Baumann, 1988], utilise des techniques linéaires, et en particulier des méthodes de type séquençement des gains (“gain scheduling”). Plus précisément, les gains de l’observateur sont calculés de telle sorte que les valeurs propres de l’équation linéarisée de l’erreur soient placées à des valeurs spécifiques, localement invariantes par rapport au point de fonctionnement du système. La classe des systèmes étudiés est donnée par (1.48) avec  $f(0,0) = 0$  et  $g(0) = 0$ . L’observateur a la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + h(y(t)) - h(\hat{y}(t)) \quad (1.49a)$$

$$\hat{y}(t) = g(\hat{x}(t)) \quad (1.49b)$$

où la fonction  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est analytique et satisfait la condition  $h(0) = 0$ . La dynamique de l’erreur d’estimation d’état  $e = x - \hat{x}$  est donnée par :

$$\dot{e}(t) = f(x(t), u(t)) - f(x(t) - e(t), u(t)) - h(y(t)) + h(\hat{y}(t)) \quad (1.50)$$

En effectuant une linéarisation de (1.50) autour d’un point d’équilibre défini par  $u = \varepsilon$ ,  $x = x_\varepsilon$  du système (1.50), on obtient l’équation linéarisée de l’erreur :

$$\dot{e} = \left[ \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x_\varepsilon, \varepsilon)} - \left( \frac{\partial h(y)}{\partial y} \Big|_{y_\varepsilon} \right) \cdot \left( \frac{\partial g(y)}{\partial y} \Big|_{x_\varepsilon} \right) \right] e \quad (1.51)$$

Le but de la synthèse de cet observateur est de trouver la fonction  $h$  telle que l’équation (1.51) possède des valeurs propres invariantes par rapport à  $\varepsilon$ . Pour plus de détails sur cette procédure, le lecteur peut consulter [Baumann et Rugh, 1986] et [Baumann, 1988].

Les inconvénients de cette approche résident d’une part dans le calcul analytique assez lourd dû aux intégrations par rapport à  $\varepsilon$  qui devient encore plus compliqué dans le cas d’entrées multiples, et d’autre part dans la recherche des points d’équilibre.

### Observateurs à modes glissants

Ce type d’approche a pour but de considérer les incertitudes et les erreurs de modélisation qui n’ont pas été prises en compte dans les approches précédentes. L’approche utilise la théorie des modes glissants [Itkis, 1976; Utkin, 1977; Slotine, 1984; Walcott et al., 1987; Spurgeon, 2008]. Afin de compenser les incertitudes de modélisation, lors de la synthèse de cet observateur, on utilise un terme complémentaire dépendant de l’erreur de sortie. Ce terme se comporte comme un gain variable qui dépend de l’erreur de sortie et qui commute à la valeur zéro si cette erreur est nulle. La discontinuité qui résulte de cette commutation peut s’avérer être un inconvénient majeur car elle déclenche un phénomène d’oscillations de haute fréquence, appelé “chattering”. Des solutions ont été proposées pour éviter ce phénomène au prix de l’obtention d’une erreur d’estimation qui ne tend pas vers zéro [Dawson et al., 1992]. Cependant, une hypothèse structurelle sur la fonction non linéaire  $f(x, u)$  est nécessaire [Coreless et Leitmann, 1981], ce qui constitue une condition assez restrictive dans la plupart des cas.

### Observateurs basés sur l'optimisation de l'erreur d'estimation

Les difficultés rencontrées pour la synthèse d'observateurs dues aux structures particulières des systèmes, aux transformations de coordonnées ou autres techniques énoncées précédemment, ont invité à implémenter une autre approche d'observateurs, cette approche étant basée sur l'optimisation de la norme  $\mathcal{L}_2$  de l'erreur de prédiction de sortie. La classe des systèmes étudiés est (1.48).

Dans ce type de méthodes, une fonction coût est définie comme la norme  $\mathcal{L}_2$  de la différence entre la sortie mesurée et la sortie estimée qui se base sur l'estimation courante de l'état. L'estimation d'état est donc basée sur la minimisation en ligne de la fonction coût.

Le problème d'optimisation posé par ce type d'observateurs est souvent traité en utilisant des méthodes de gradient [Zimmer, 1994] qui malheureusement demandent un temps de calcul important surtout qu'il doit être résolu à chaque pas d'échantillonnage [Michalska et Mayne, 1995]. Cependant, l'avantage de cette approche est qu'elle peut s'appliquer à une classe très générale des systèmes non linéaires.

L'état de l'art des techniques existantes de synthèse d'observateurs a permis de donner des éléments d'appréciation des avantages et des inconvénients de chaque approche. En conclusion, certaines approches sont très liées à une structure particulière du système non linéaire, comme les observateurs à grand gain et ceux basés sur les techniques de Lyapunov. D'autres ne prennent pas en comptes les incertitudes et les erreurs de modélisation, comme le filtre de Kalman étendu, les observateurs par linéarisation étendue, à grand gain ou ceux sous forme canonique. Enfin, certaines approches, comme par exemple celles basées sur l'optimisation, à modes glissants ou les observateurs adaptatifs, nécessitent un nombre de calculs très élevé.

### 1.3.3 Observateurs basés sur la structure MM

La structure d'observateur -basée sur la structure multimodèle- la plus utilisée dans la littérature est une extension de celle de l'observateur de Luenberger proposée pour les systèmes linéaires [Luenberger, 1971]. Ce choix s'avère naturel sachant que la structure multimodèle est une combinaison linéaire de sous-modèles linéaires :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1.52a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.52b)$$

On considère ici que la sortie est une fonction linéaire de l'état, mais cela ne constitue pas une réduction majeure.

L'observateur proposé est inspiré de celui construit pour le cas linéaire et a la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \quad (1.53a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (1.53b)$$

Pour déterminer les gains  $L_i$  de l'observateur (1.53), une étude de stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  doit être réalisée. La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est gouvernée par une équation différentielle qui dépend des variables de prémisses  $z(t)$  via les fonctions de pondération  $\mu_i(z(t))$ .

Tenant compte de la définition de l'erreur d'estimation (4.6) et des dynamiques de l'état (1.52a) et de son estimé (1.53a), ce système s'écrit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i C e(t)) \quad (1.54)$$

La dynamique de l'erreur dépend de la connaissance des variables de prémisses

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]$$

intervenant dans les fonctions de pondération  $\mu_i$ . Il existe deux possibilités selon que  $z(t)$  est mesurable ou non.

**Remarque 1.1.** *Le système générant l'erreur d'estimation d'état (1.54) est obtenu dans un cadre général en considérant que les variables de prémisses  $z(t)$  ne sont pas mesurables. Dans ce cas l'observateur (1.53) contient une estimation  $\hat{z}(t)$  de ces variables.*

La plupart des travaux concernant la conception de multi-observateurs d'état suppose que les variables de prémisses sont connues ( $\hat{z}(t) = z(t)$ ) [Akhenak et al., 2004; Rodrigues, 2005]. Dans ce cas, le multi-observateur utilise les mêmes variables de prémisses que le modèle. Ainsi, une factorisation par les fonctions de pondération est possible dans l'évaluation de la dynamique de l'erreur et le système (1.54) devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i - L_i C) e(t) \quad (1.55)$$

En utilisant la méthode de Lyapunov et une fonction quadratique  $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$  avec  $P = P^T > 0$ , Patton et al. [1998] propose l'analyse de stabilité suivante :

**Théorème 1.1.** *L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  et des matrices  $K_i \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$P A_i + A_i^T P - K_i C - C^T K_i^T < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (1.56)$$

*Les gains de l'observateur sont obtenus à partir de l'équation :*

$$L_i = P^{-1} K_i \quad (1.57)$$

Cependant, pour un nombre élevé de sous-modèles  $r$ , ces conditions (1.56) peuvent être conservatrices dans le sens où il est difficile de trouver une matrice  $P$  unique respectant l'ensemble des conditions (1.56). Dans le cadre de l'analyse de stabilité, d'autres techniques ont été proposées ensuite afin de réduire le conservatisme de ce résultat et consistent à utiliser d'autres

fonctions de Lyapunov, poly-quadratiques [Chadli, 2002; Fang et al., 2006] ou non quadratiques [Boyd et al., 1994; Johansson, 1999; Kruszewski, 2006; Tanaka et al., 2003]. Ce dernier type de fonction fournit des conditions de stabilité exprimées en terme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI) qui sont en général plus difficiles à résoudre que les LMI.

Dans la suite, les travaux présentés dans ce mémoire se placent principalement dans le cadre plus général et plus complexe des variables de décision non mesurables, cette situation se retrouvant souvent dans les processus réels. Elle n'a été traitée que récemment dans les travaux de Bergsten et Palm [2000]; Bergsten et al. [2001, 2002] et de façon plus élaborée dans Ichalal, 2009].

En analysant l'équation dynamique de l'erreur d'estimation d'état (1.54) on remarque que les résultats obtenus pour les variables de prémisses mesurables ne sont plus applicables du fait que la forme de ce système est légèrement différente et contient les estimés des variables de prémisses. Les résultats de Bergsten et al. [2001] proposent des conditions de convergence d'estimation d'état vers zéro en se basant sur l'observateur de Thau-Luenberger [Thau, 1973] :

**Théorème 1.2.** *L'erreur d'estimation d'état entre le modèle Takagi-Sugeno et l'observateur converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe des matrices  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ , des matrices  $K_i \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  et un scalaire positif  $\gamma > 0$  tels que :*

$$PA_i + A_i^T P - K_i C - C^T K_i^T < Q, \quad i = 1, \dots, r \quad (1.58)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \gamma^2 I & P \\ P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.59)$$

La démonstration de ce résultat figure dans Bergsten et al. [2001]. Une extension de ce résultat, afin de prendre en compte des incertitudes de modélisation, a été réalisée dans [Bergsten et al., 2002] où un observateur à mode glissant a été conçu.

Les travaux de Ichalal [2009] traitent le problème d'estimation d'état des systèmes sous forme multimodèle avec des variables de prémisses non mesurables en cherchant de réduire le conservatisme des résultats précédents. Deux principales approches sont utilisées : l'approche Lipschitz et l'approche  $\mathcal{L}_2$ . Dans Ichalal et al. [2009c, 2010] l'approche Lipschitz est proposée prenant en compte des incertitudes de modélisation. Deux observateurs, proportionnel intégral et proportionnel multi-intégral à entrées inconnues ont été proposés dans Ichalal et al. [2009b] et représentent une extension de ce type d'observateurs du cas linéaire au cas non linéaire. Dans Ichalal et al. [2009a] l'estimation est réalisée par une approche  $\mathcal{L}_2$  par incertitudes bornées.

## 1.4 Conclusion

Le MM est une structure particulièrement bien adaptée à la modélisation des systèmes non linéaires sur une large plage de fonctionnement. Il permet d'obtenir un modèle doté d'une structure mathématiquement attractive et capable d'appréhender avec précision donnée la complexité d'un système. Le MM vient répondre aux difficultés dues à la complexité des modèles non linéaires, par des techniques proches de celles développées dans le cadre linéaire.

Grâce à la méthode de transformation proposée dans le chapitre prochain, les études d'observa-

bilité et de commandabilité développées pour les systèmes sous forme MM s'adressent à une large classe de systèmes non linéaires. La forme MM réunit les avantages :

- des modèles linéaires du point de vue de la structure, qui sont simples à utiliser, et
- des modèles non linéaires, qui permettent d'avoir une bonne représentation d'un système réel.

Ainsi, la forme MM permet de décrire un système non linéaire sur une large plage de fonctionnement, contrairement aux modèles linéaires qui ont généralement un caractère local et qui sont valides autour de points de fonctionnement particuliers.

Finalement, ce type d'approche permet de prendre en compte des incertitudes et des erreurs de modélisation, fournissant une technique de reconstruction des variables bien adaptée aux processus réels.

Il faut noter que la facilité d'utilisation d'un MM dépend du choix de la structure, cette dernière étant caractérisée par le nombre de sous-modèles, les fonctions de pondération et les sous-modèles. Des fonctions de pondération possédant des propriétés de convexité, ainsi que des sous-modèles linéaires permettent d'utiliser des propriétés mathématiques dont les qualités seront mises en évidence au cours des prochains chapitres.

Ce premier chapitre a permis la présentation de plusieurs structures MMs qui ont été développées ces dernières années. De plus, les différentes techniques existantes d'obtention des MMs ont été présentées. Un panorama des méthodes de synthèse d'observateurs pour systèmes non linéaires a été réalisé, suivi par une comparaison entre les différentes approches.

Comme nos études se focalisent sur des processus pour lesquels un modèle non linéaire existe déjà, le prochain chapitre propose une méthodologie générale et systématique d'obtention d'une forme MM à partir d'un système non linéaire. La transformation fournit un modèle équivalent, ce qui constitue un des avantages de cette méthode.

# 2

## Méthode générale de passage d'un système non linéaire en multimodèle

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>38</b>
<b>2.2</b>	<b>Présentation de la méthode de réduction d'un SNL</b>	<b>40</b>
2.2.1	Transformation polytopique convexe (TPC)	40
2.2.2	Exemple introductif	46
2.2.3	Représentation d'état d'un système non linéaire	52
2.2.4	Forme Quasi-Linéaire à Paramètres Variables	52
2.2.5	Variables de prémisses : mesurables et non-mesurables	55
2.2.6	Obtention des matrices et des fonctions de pondération	56
2.2.7	Équivalence système non linéaire - multimodèle	58
2.2.8	Critères de choix des variables de prémisses	60
<b>2.3</b>	<b>Limites de la méthodologie proposée</b>	<b>68</b>
2.3.1	Méconnaissance des bornes des variables de prémisses	68
2.3.2	Non respect de la propriété de localité des sous-modèles	72
<b>2.4</b>	<b>Extension aux modèles à base de blocs structurés</b>	<b>75</b>
2.4.1	Introduction	75
2.4.2	Modèles de type Hammerstein	78
2.4.3	Modèles de type Wiener	80
2.4.4	Systèmes dynamiques non linéaires basés sur des structures en série ou en parallèle	80
2.4.5	Exemple illustratif	81
2.4.6	Généralisation aux modèles à base de blocs structurés quelconques	84
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>86</b>

---

*“Dans le domaine de la science, on essaie d'expliquer aux gens, de façon à être compris de tout le monde, quelque chose que personne ne connaissait auparavant. Dans le domaine de la poésie, c'est exactement le contraire.”* Paul Dirac

## 2.1 Introduction

Le problème de la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires apparaît dans de nombreux domaines scientifiques et en ingénierie. De nombreuses techniques de décomposition et de simplification ont été développées au cours de ces dernières années, en vue de réduire la complexité, en fonction d'objectifs d'identification, de commande et d'analyse de stabilité.

La réduction de la complexité repose, dans la plupart des études réalisées, sur une réduction de l'ordre du système avec malheureusement une perte d'information. Cette réduction de l'ordre est réalisée de différentes manières :

- une réduction du nombre de paramètres du modèle mathématique à partir d'une analyse de sensibilité de la réponse du système vis-à-vis des paramètres et d'une comparaison du modèle réduit avec le modèle initial [Dolgin et Zeheb, 2005; Hetherington et al., 2006],
- la non prise en compte de certains phénomènes (réactions et/ou espèces dans le cas d'un mécanisme chimique complexe), dont le pouvoir explicatif est faible dans le système initial [Petzold et Zhu, 1999],
- une élimination de parties du modèle (paramètres et/ou variables) qui n'ont pas une importance significative dans la dynamique du système [Sayesel et Barlas, 2006],
- une simplification basée sur une troncature d'un développement en série ou d'un développement sur une base de fonctions et sur une approximation par perturbation singulière [Andersson et al., 1996; Steffens et al., 1997].

Une autre façon de résoudre le problème de la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires est de réécrire le système non-linéaire d'une manière plus facile à étudier, en utilisant un changement de variable ou en le décomposant en unités plus simples et maîtrisables, sans perdre d'information.

Le multimodèle [Murray-Smith et Johansen, 1997] constitue une alternative intéressante et un outil largement utilisé actuellement pour la modélisation des systèmes non-linéaires, comme déjà illustré au cours du chapitre 1.

L'intérêt de réaliser une décomposition du système en utilisant ce type de modèles est que des propriétés importantes comme la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité ayant été largement étudiées dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant (LTI), peuvent être utilisées, au moins partiellement, sur les multimodèles car les sous-systèmes qui les constituent sont de type linéaire [Akhenak et al., 2004], [Chadli, 2002], [Tanaka et Wang, 2001].

Dans la suite, on va présenter une procédure systématique de transformation d'un système non-linéaire en le réécrivant sous une forme multimodèle. Cette méthode évite les inconvénients majeurs des autres méthodes : la transformation est réalisée sans perte d'information, le choix de différents points de fonctionnement n'est plus nécessaire, le choix des variables de prémisses est réalisé d'une façon systématique.

En partant d'une forme générale du système non-linéaire, une représentation d'état quasi-linéaire à paramètres variables (quasi-LPV) est réalisée. En général, un nombre important de formes quasi-LPV peuvent être associées au système non-linéaire initial ; chaque forme est associée à un ensemble particulier de variables de prémisses. Choisir la forme quasi-LPV est équivalent à choisir l'ensemble des variables de prémisses. Cette représentation quasi-LPV constitue une forme polytopique, car les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à coefficients constants calculées à partir des sommets du polytope. Ceux-ci sont obtenus en utilisant la transformation polytopique convexe (TPC) [Wang et al., 1996]. Chaque sommet du polytope définit un sous-modèle linéaire, la non-linéarité du système global étant rejetée dans les fonctions de pondération des sous-modèles.

En conséquence, la forme multimodèle obtenue par cette méthode n'est pas unique, elle dépend du choix des variables de prémisses et du choix des grandeurs qui définissent la transformation polytopique convexe.

La plupart des travaux réalisés pour les systèmes quasi-LPV concernant l'analyse de stabilité ou la synthèse des contrôleurs / observateurs sont basés seulement sur les matrices qui définissent les sommets. En conséquence, même si les différentes formes quasi-LPV associées au système non linéaire sont formellement équivalentes, les résultats obtenus dépendent fortement du choix de la réalisation. Le choix de l'ensemble des variables de prémisses est important, car il influe sur le nombre de sous-modèles et sur la structure du modèle global. Ce degré de liberté sera utilisé pour faciliter les études de contrôlabilité, d'observabilité et d'analyse de stabilité. Il est donc possible de choisir parmi différentes structures MM celle qui assure, par exemple, l'existence d'un multi-observateur basée sur la structure MM. En général, les conditions d'existence d'un observateur pour MM sont des conditions suffisantes de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro. Ces conditions peuvent être exprimées dans le formalisme LMI (Inégalités Matricielles Linéaires) et sont issues d'une analyse de stabilité de type Lyapunov [Ichalal et al., 2009c] ; elles sont essentielles dans la définition et l'élaboration des critères de choix du multimodèle.

La méthode proposée généralise la méthode par secteur non linéaire, utilisée quand on fait référence aux modèles de type Takagi-Sugeno [Ohtake et al., 2001], [Tanaka et Wang, 2001]. La contribution de cette méthode est de donner une procédure systématique pour choisir la forme quasi-LPV, et par conséquent l'ensemble des variables de prémisses, la plus adaptée, tenant compte de l'objectif de l'étude (analyse de stabilité et performance, synthèse d'un contrôleur / observateur).

À la section 2.2 sera présentée la méthodologie générale de transformation d'un système non-linéaire sous une forme multimodèle. La section 2.3 présente quelques limites de la méthode proposée ainsi que des solutions possibles à ces inconvénients. Une extension de la méthode est de même proposée, à la section 2.4, aux modèles de systèmes à base de blocs structurés. Des discussions et conclusions sur l'ensemble de la méthode seront proposées à la section 2.5.



## 2.2 Présentation de la méthode de réduction d'un SNL

Cette section est consacrée à la méthodologie analytique générale de construction d'un multimodèle à partir d'un système non-linéaire existant, présenté sous forme générale d'équation d'état. Des sous-modèles linéaires et de dimensions réduites sont définis et des fonctions d'agrégation appropriées sont définies afin de réunir ces sous-modèles pour constituer le modèle global. Le multimodèle obtenu est strictement équivalent au système non-linéaire initial.

On commence par énoncer un lemme concernant la notion de transformation polytopique convexe, à la section 2.2.1. Ensuite, en s'appuyant sur un exemple illustratif, à la section 2.2.2, quelques caractéristiques de la méthode générale seront mises en évidence. Cela permettra, en donnant quelques points essentiels ainsi que le schéma à suivre, de faciliter la compréhension de la méthodologie générale, qui sera développée après.

Dans un premier temps, on va donner la représentation d'état d'un système non linéaire, qui constitue une forme générale pour ce type de systèmes, à la section 2.2.3. Cette forme constitue le point de départ de la méthodologie.

Dans un deuxième temps, on introduit la notion de forme quasi-linéaire à paramètres variables (quasi-LPV), à la section 2.2.4. À chaque représentation quasi-LPV correspond un ensemble particulier de variables de prémisses, qui est défini à la section 2.2.5. En général, pour un système dynamique non-linéaire, la représentation quasi-LPV n'est pas unique et, en conséquence, l'ensemble des variables de prémisses change en fonction de la représentation quasi-LPV choisie. De ce fait, il faut définir des critères de choix d'une représentation quasi-LPV, i.e. de choix de l'ensemble des variables de prémisses, correspondant aux objectifs de l'étude. Pour conclure cette présentation générale, l'équivalence entre la forme initiale du système non-linéaire et le multimodèle obtenu est réalisée à la section 2.2.7. Quelques critères de choix de ces variables de prémisses sont proposés à la section 2.2.8.

### 2.2.1 Transformation polytopique convexe (TPC)

#### Énoncé

**Lemme 2.1.** Soit  $h(x(t), u(t))$  une fonction continue et bornée sur le domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ .

Alors il existe deux fonctions ( $i = 1, 2$ )

$$F_i : \mathcal{D} \longmapsto [0, 1]$$

$$(x(t), u(t)) \longmapsto F_i(x(t), u(t))$$

avec  $F_1(x(t), u(t)) + F_2(x(t), u(t)) = 1$  telles que :

$$h(x(t), u(t)) = F_1(x(t), u(t)) \cdot h_1 + F_2(x(t), u(t)) \cdot h_2$$

pour tout  $h_1 \geq \max_{x, u \in \mathcal{D}} \{h(x, u)\}$  et  $h_2 \leq \min_{x, u \in \mathcal{D}} \{h(x, u)\}$

Les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont définies par :

$$F_1(x(t), u(t)) = \frac{h(x(t), u(t)) - h_2}{h_1 - h_2}$$

$$F_2(x(t), u(t)) = \frac{h_1 - h(x(t), u(t))}{h_1 - h_2}$$

Notons que cette décomposition n'est pas unique.

En particulier, on peut choisir :

$$h_1 = \max_{x,u} \{h(x, u)\}$$

$$h_2 = \min_{x,u} \{h(x, u)\}$$

On peut remarquer que plus on choisit  $h_1$  grand et  $h_2$  petit, plus l'ensemble des valeurs prises par les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  se restreint, à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ . Plus de détails sur cet aspect, ainsi que des moyens pour contrecarrer les effets négatifs qui peuvent survenir, seront présentés à la section 2.3.

Deux exemples présentant une réécriture équivalente sous forme MM sont donnés à la suite. Le premier traite le cas d'une fonction affine par morceaux pour laquelle la transformation polytopique convexe ne peut pas être appliquée. Le deuxième considère le cas de la fonction d'hystérésis et utilise le lemme 2.1.

---

### Exemple 2.1 (Fonction affine par morceaux)

Considérons un gain non linéaire exprimé par une fonction affine par morceaux, comme présenté à la figure 2.1 et donné par :

$$v(t) = f(u(t)) \tag{2.1}$$

où la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par :

$$f(u) = \frac{1}{2} \{ [1 - d_1(u)]f_1(u) + [d_1(u) - d_2(u)]f_2(u) + [1 + d_2(u)]f_3(u) \} \tag{2.2}$$

où

$$d_i(u) = \text{sgn}(u - a_i) \quad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

$$f_j(u) = \alpha_j u + \beta_j \quad j = 1, 2, 3 \tag{2.4}$$

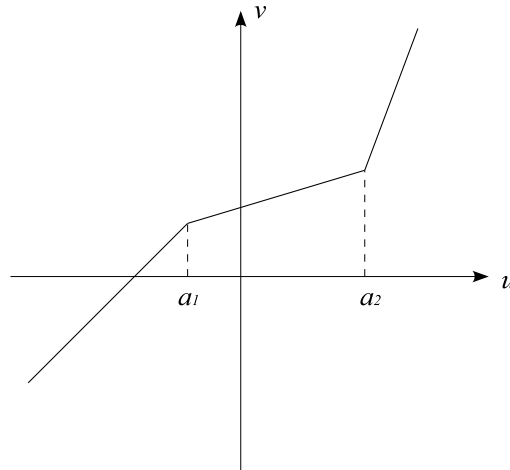


Figure 2.1 – Fonction affine par morceaux

On considère les fonctions :

$$\mu_1(u) = \frac{1 - d_1(u)}{2} \quad (2.5a)$$

$$\mu_2(u) = \frac{d_1(u) - d_2(u)}{2} \quad (2.5b)$$

$$\mu_3(u) = \frac{1 + d_2(u)}{2} \quad (2.5c)$$

Ainsi on peut déduire la forme multimodèle suivante :

$$v(t) = \sum_{j=1}^3 \mu_j(u) (\alpha_j u + \beta_j) \quad (2.6)$$

la particularité étant ici que les fonctions de pondération ne prennent que les valeurs 0 ou 1.

**Remarque 2.1.** Pour rendre les fonctions  $\mu_i$  continues, les fonctions  $d_i = \text{sgn}(u - a_i)$   $i = 1, 2$  peuvent être approximées par la fonction tangente hyperbolique :

$$d_i \cong \tanh \frac{u - a_i}{p} \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

avec le paramètre  $p$  choisi aussi petit que l'on veut.

L'expression du multimodèle (2.6) obtenue pour une fonction affine à trois morceaux, avec les fonctions de pondération définies dans (2.5), peut être aisément généralisable à une fonction continue avec un nombre de morceaux quelconque.

Pour  $n$  morceaux caractérisés par :

$$f_j(u) = \alpha_j u + \beta_j \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

la fonction  $f(u)$  est définie par :

$$f(u) = \sum_{i=1}^n \mu_i(u)(\alpha_i u + \beta_i) \quad (2.9)$$

avec

$$\mu_1(u) = \frac{1}{2}1 - d_1(u) \quad (2.10)$$

$$\mu_i(u) = \frac{1}{2}d_{i-1}(u) - d_i(u), \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (2.11)$$

$$\mu_n(u) = \frac{1}{2}1 + d_{n-1}(u) \quad (2.12)$$

et

$$d_i(u) = \operatorname{sgn}(u - a_i) \quad (2.13)$$

### Exemple 2.2 (Hystérésis)

Le phénomène d'hystérésis peut apparaître dans des domaines très divers : sciences physiques ou sociales (l'hystérésis de l'habitus présent dans une théorie développée en sociologie par Pierre Bourdieu et qui désigne le phénomène par lequel les dispositions acquises par la socialisation d'un individu dans un espace social défini perdurent dans le temps), médecine (la mesure de l'hystérèse de la cornée qui permet d'évaluer certaines propriétés biomécaniques de la cornée, dans le cadre du dépistage et le suivi des patients souffrant de glaucome), économie (l'hystérèse désigne la persistance d'un phénomène économique, comme le chômage ou l'inflation, alors que sa cause principale a disparu), théorie des jeux, mécanique à travers des phénomènes de friction [[Mihaylova et al., 2001](#)].

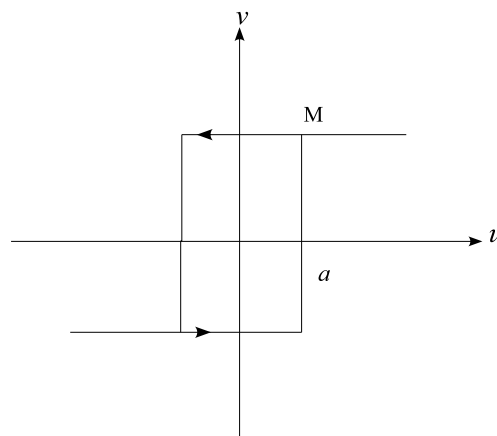


Figure 2.2 – Hystérésis

Dans sa forme la plus simple, ce phénomène d'hystérésis est habituellement présenté comme

à la figure 2.2 et formulé mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned}
 \text{Si } u < -a & \quad \text{alors } v = -M \\
 \text{Si } -a < u < a \text{ et } \dot{u} > 0 & \quad \text{alors } v = -M \\
 \text{Si } -a < u < a \text{ et } \dot{u} < 0 & \quad \text{alors } v = M \\
 \text{Si } u > a & \quad \text{alors } v = M
 \end{aligned}$$

En appliquant le résultat obtenu précédemment pour une fonction affine par morceaux, on obtient :

$$v(u) = \mu_1(u) \cdot (-M) + \mu_2(u) \cdot \frac{1}{2} [(1 - d(\dot{u}))M - (1 + d(\dot{u}))M] + \mu_3(u) \cdot M \quad (2.14)$$

où  $d(\dot{u}) = \text{sgn}(\dot{u})$  et où les fonctions de pondération sont définies par :

$$\mu_1(u) = \frac{1 - \text{sgn}(u + a)}{2} \quad (2.15a)$$

$$\mu_2(u) = \frac{\text{sgn}(u + a) - \text{sgn}(u - a)}{2} \quad (2.15b)$$

$$\mu_3(u) = \frac{1 + \text{sgn}(u - a)}{2} \quad (2.15c)$$

Dans l'équation (2.14) le deuxième terme de la somme dépend de la variable  $d(u) = \text{sgn}(\dot{u})$ , on considère cette variable comme une variable de prémisses. Sachant que la fonction  $\text{sgn}$  prend les valeurs numérique  $-1, 0$  et  $1$  on peut déduire que  $d(u)$  est bornée et on peut réaliser la transformation suivante :

$$\begin{aligned}
 d(\dot{u}) &= \frac{\text{sgn}(\dot{u}) + 1}{2} \cdot 1 + \frac{1 - \text{sgn}(\dot{u})}{2} \cdot (-1) \\
 &= \mu_{d,1}(\dot{u}) \cdot 1 + \mu_{d,2}(\dot{u}) \cdot (-1)
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

En remplaçant l'expression obtenue pour la variable  $d$  par (2.16) dans l'équation (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned}
 v_{MM} &= \mu_1(u) \cdot (-M) + \mu_2(u) \cdot [\mu_{d,1}(u) \cdot 1 + \mu_{d,2}(u) \cdot (-1)] \cdot (-M) + \mu_3(u) \cdot M \\
 &= \mu_1(u) \cdot (-M) + \mu_2(u) \mu_{d,1}(\dot{u}) \cdot (-M) + \mu_2(u) \mu_{d,2}(\dot{u}) \cdot M + \mu_3(u) \cdot M
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ce qui permet de définir les fonctions de pondération :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu}_1(u) &= \mu_1(u), & A_1 &= -M \\
 \tilde{\mu}_2(u, \dot{u}) &= \mu_2(u) \mu_{d,1}(\dot{u}), & A_2 &= -M \\
 \tilde{\mu}_3(u, \dot{u}) &= \mu_2(u) \mu_{d,2}(\dot{u}), & A_3 &= M \\
 \tilde{\mu}_4(u) &= \mu_3(u), & A_4 &= M
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ainsi, on obtient la forme multimodèle :

$$v_{MM} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mu}_i(u, \dot{u}) A_i \quad (2.19)$$

de l'hystérésis qui fournit la sortie  $v$  en fonction de l'entrée  $u$  et de sa dérivée  $\dot{u}$ .

### Application de la TPC aux opérations de base

On considère deux fonctions non linéaires bornées sur  $\mathbb{R}$  :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.20)$$

$$x \mapsto f(x) \quad x \mapsto g(x) \quad (2.21)$$

On peut appliquer la transformation polytopiques convexe, présentée au Lemme 2.1, pour les deux fonctions  $f$  et  $g$  qui s'écrivent :

$$f(x) = \mu_{f,1}(x) f_1 + \mu_{f,2}(x) f_2 \quad (2.22)$$

$$g(x) = \mu_{g,1}(x) g_1 + \mu_{g,2}(x) g_2 \quad (2.23)$$

Cette transformation polytopique peut être utilisée dans plusieurs contextes afin d'obtenir une structure de type multimodèle. Trois cas sont représentés ici :

1. Somme de deux fonctions  $S(x) = f(x) + g(x)$  :

$$\begin{aligned} S(x) &= [\mu_{f,1}(x) f_1 + \mu_{f,2}(x) f_2] [\mu_{g,1}(x) + \mu_{g,2}(x)] \\ &+ [\mu_{g,1}(x) g_1 + \mu_{g,2}(x) g_2] [\mu_{f,1}(x) + \mu_{f,2}(x)] \\ &= \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 \mu_{f,k_1}(x) \mu_{g,k_2}(x) (f_{k_1} + g_{k_2}) \\ &= \sum_{i=1}^4 \mu_i(x) h_i \end{aligned} \quad (2.24)$$

où les fonctions de pondération  $\mu_i(x) = \mu_{f,k_1}(x) \mu_{g,k_2}(x)$  ( $k_1, k_2 = 1, 2$ ) et les coefficients constants  $h_i = f_{k_1} + g_{k_2}$  ( $k_1, k_2 = 1, 2$ ) et où l'indice  $i$  est donné par :

$$i = 1 + 2^0(k_2 - 1) + 2^1(k_1 - 1) \quad (2.25)$$

2. Produit de deux fonctions  $P(x) = f(x) \cdot g(x)$  :

$$\begin{aligned} P(x) &= [\mu_{f,1}(x) f_1 + \mu_{f,2}(x) f_2] [\mu_{g,1}(x) g_1 + \mu_{g,2}(x) g_2] \\ &= \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 \mu_{f,k_1}(x) \mu_{g,k_2}(x) f_{k_1} g_{k_2} \\ &= \sum_{i=1}^4 \mu_i(x) h_i \end{aligned} \quad (2.26)$$

où les fonctions de pondération  $\mu_i(x)$  sont calculées de la même façon que pour le cas précédent et les coefficients constants  $h_i = f_{k_1} \cdot g_{k_2}$  ( $k_1, k_2 = 1, 2$  et  $i$  donné par (2.25)).

3. Vecteur  $V(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$  :

$$\begin{aligned} V(x) &= \begin{bmatrix} (\mu_{f,1}(x) f_1 + \mu_{f,2}(x) f_2) \cdot (\mu_{g,1}(x) + \mu_{g,2}(x)) \\ (\mu_{f,1}(x) + \mu_{f,2}(x)) \cdot (\mu_{g,1}(x) g_1 + \mu_{g,2}(x) g_2) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 \mu_{f,k_1}(x) \mu_{g,k_2}(x) \begin{bmatrix} f_{k_1} \\ g_{k_2} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^4 \mu_i(x) V_i \end{aligned} \quad (2.27)$$

où les fonctions de pondération sont calculées de la même manière que précédemment et les vecteurs  $V_i$  sont définis par  $V_i = \begin{bmatrix} f_{k_1} \\ g_{k_2} \end{bmatrix}$  ( $k_1, k_2 = 1, 2$  et  $i$  donné par (2.25)).

La même procédure reste valable pour des vecteurs de dimension quelconque, ainsi que pour des matrices  $A[a_{i,j}]$   $i, j \in 1, \dots, n_A$  de dimension quelconque  $n_A$  contenant parmi les composantes  $a_{i,j}$  les deux non-linéarités  $f(x)$  et  $g(x)$ .

Dans tous les cas considérés, la transformation polytopique convexe donne une somme de  $2^2$  termes. En général, pour  $p$  fonctions non linéaires  $f_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, p$ , ces transformations restent valables et la somme obtenue contient  $2^p$  termes.

Dans ce qui suit, on va appliquer les transformations présentées à un système dynamique non linéaire, de façon à mettre en évidence les points essentiels de la méthode et ses étapes principales.

## 2.2.2 Exemple introductif

Soit le système :

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1) x_2 + x_1^3 u \quad (2.28a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{x_2}} x_1 - x_1^2 x_2 \quad (2.28b)$$

Dans une première étape, on représente le système (2.28) sous forme quasi-LPV :

$$\dot{x} = A(\rho(x, u))x + B(\rho(x, u))u \quad (2.29)$$

où  $\rho(x, u) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+m})$  est formé d'une partie des états et des entrées. Dans la forme classique LPV,  $\rho = \rho(t)$  est un vecteur qui varie dans le temps. Ainsi, la différence entre la représentation quasi-LPV d'un système non linéaire et la forme classique LPV est que le vecteur des paramètres dépend dans le premier cas des variables d'état et d'entrée.

En effectuant cette transformation on peut obtenir plusieurs représentations quasi-LPV, car il existe plusieurs façons de faire apparaître une forme affine en l'état et en la commande.

Pour la première composante de l'équation d'état, cette séparation est claire dans le produit  $\cos(x_1)x_2$ , car on a un produit entre la fonction  $\cos(x_1)$  et la deuxième variable d'état  $x_2$ . Pour le deuxième terme,  $x_1^3 u$ , on peut soit affecter la non-linéarité  $x_1^3$  à la matrice de commande

(représentation (2.30)), soit dans la matrice d'état (représentation (2.31)) :

$$A(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(x_1) \\ \frac{1}{\sqrt{x_2}} & -x_1^2 \end{bmatrix} \quad B(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$A(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} x_1^2 u & \cos(x_1) \\ \frac{1}{\sqrt{x_2}} & -x_1^2 \end{bmatrix} \quad B(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

On pourrait également utiliser les deux possibilités exposées précédemment en même temps en écrivant le terme  $x_1^3 u$  comme étant égal à  $(\frac{1}{2}x_1^2 u) x_1 + (\frac{1}{2}x_1^3) u$ , en affectant les non-linéarités respectives dans les matrices d'état et de commande.

Pour la deuxième composante de l'équation d'état, on peut remarquer deux décompositions possibles. La plus évidente consiste à attribuer aux deux variables d'état des termes non-linéaires multiplicatifs (décomposition (2.30)). Plus précisément, le terme non-linéaire  $\frac{1}{\sqrt{x_2}}$  est attribué à la variable d'état  $x_1$  et le terme  $-x_1^2$  est attribué à la deuxième variable d'état  $x_2$ . Une autre possibilité est d'attribuer à la variable d'état  $x_1$  le terme non-linéaire  $\frac{1}{\sqrt{x_2}} - x_1 x_2$  (décomposition (2.32)).

$$A(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(x_1) \\ \frac{1}{\sqrt{x_2}} - x_1 x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad B(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Toute combinaison linéaire convexe de ces deux possibilités est également valable.

En choisissant une des trois formes quasi-LPV présentées ici ((2.30), (2.31) ou (2.32)), conformément à des critères de choix qui seront discutés plus en détail dans le développement de la méthodologie générale, on montre maintenant le passage à la forme multimodèle.

En retenant la représentation (2.32), on construit tout d'abord l'ensemble de variables  $V_z = \{z_1, z_2, z_3\}$  :

$$z_1(x) = \cos(x_1) \quad (2.33a)$$

$$z_2(x) = x_1^3 \quad (2.33b)$$

$$z_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} - x_1 x_2 \quad (2.33c)$$

Le choix de ces variables  $z_1, z_2, z_3$ , appelées variables de prémisse, est lié directement à la forme quasi-LPV choisie.

Dans une deuxième étape, on applique la transformation polytopique convexe, présentée à la section 2.2.1, à chaque variable de prémisse  $z_j(x(t))$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) pour  $x_1 \in [-2\pi, 2\pi]$  et  $x_2 \in [0.1; 12]$ . On réalise alors pour chaque variable de prémisse une partition en deux zones et on obtient :

$$z_1(x) = F_{1,1}(z_1(x)) z_{1,1} + F_{1,2}(z_1(x)) z_{1,2} \quad (2.34a)$$

$$z_2(x) = F_{2,1}(z_2(x)) z_{2,1} + F_{2,2}(z_2(x)) z_{2,2} \quad (2.34b)$$

$$z_3(x) = F_{3,1}(z_3(x)) z_{3,1} + F_{3,2}(z_3(x)) z_{3,2} \quad (2.34c)$$



où, compte tenu des définitions (2.33) :

$$\begin{aligned}
 F_{1,1}(z_1(x)) &= \frac{\cos(x_1) - z_{1,2}}{z_{1,1} - z_{1,2}} \\
 F_{1,2}(z_1(x)) &= \frac{z_{1,1} - \cos(x_1)}{z_{1,1} - z_{1,2}} \\
 F_{2,1}(z_2(x)) &= \frac{x_1^3 - z_{2,2}}{z_{2,1} - z_{2,2}} \\
 F_{2,2}(z_2(x)) &= \frac{z_{2,1} - x_1^3}{z_{2,1} - z_{2,2}} \\
 F_{3,1}(z_3(x)) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x_2}} - x_1 x_2 - z_{3,2}}{z_{3,1} - z_{3,2}} \\
 F_{3,2}(z_3(x)) &= \frac{z_{3,1} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} + x_1 x_2}{z_{3,1} - z_{3,2}} \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Les deux partitions  $F_{j,1}(z_j(x))$  et  $F_{j,2}(z_j(x))$  de chaque variable de prémisse  $z_j(x)$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) vont contribuer, à leur tour, à la construction de chaque fonction de pondération correspondant à un des sous-systèmes du multimodèle.

Les fonctions  $F_{j,1}(z_j(x))$  et  $F_{j,2}(z_j(x))$  représentent respectivement la première et la deuxième partition de chaque variable de prémisse. Pour des raisons de clarté, on va écrire  $F_{j,1}(x)$  et  $F_{j,2}(x)$  au lieu de  $F_{j,1}(z_j(x(t)))$  et  $F_{j,2}(z_j(x(t)))$ . Les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  ( $j=1, \dots, 3$ ) vont contribuer à la construction de chaque sous-système du multimodèle. On choisit, par exemple :

$$\begin{aligned}
 z_{j,1} &= \max_x \{z_j(x)\} \\
 z_{j,2} &= \min_x \{z_j(x)\} \quad \forall j = 1, \dots, 3 \tag{2.36}
 \end{aligned}$$

Il faut noter que  $A(\rho(x, u))$  fait intervenir les variables de prémisse  $z_1(x)$  et  $z_3(x)$ , alors que  $B(x, u)$  fait intervenir la variable de prémisse  $z_2(x)$ ; ainsi, on va évaluer les matrices  $A$  et  $B$  à partir des matrices sommets du polytope défini par les partitions des variables de prémisse intervenant dans ces matrices.

Pour cela on part de l'expression de  $A$  définie en (2.32) que l'on écrit explicitement en fonction des  $z_j(x)$  défini en (2.33) :

$$A(z_1(x), z_3(x)) = \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_3(x) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Puis, compte tenu de l'expression de  $z_3(x)$  (2.34), on peut écrire :

$$A(z_1(x), z_3(x)) = F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Puis, afin de faire apparaître les fonctions de partition  $F_{2,1}(x)$  et  $F_{2,2}(x)$ , on multiplie le résultat par la somme de ces deux fonctions, qui est égale à 1 :

$$\begin{aligned} A(z_1(x), z_3(x)) &= [F_{2,1}(x) + F_{2,2}(x)] \left\{ F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= F_{3,1}(x) F_{2,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,1}(x) F_{2,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{3,2}(x) F_{2,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,2}(x) F_{2,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, compte tenu de l'expression de  $z_1(x)$  (2.34) et multipliant le résultat par la somme des fonctions de partition  $F_{1,1}(x) + F_{1,2}(x)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} A(z_1(x), z_3(x)) &= F_{3,1}(x) F_{2,1}(x) F_{1,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,1}(x) F_{2,1}(x) F_{1,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{3,1}(x) F_{2,2}(x) F_{1,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,1}(x) F_{2,2}(x) F_{1,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{3,2}(x) F_{2,1}(x) F_{1,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,2}(x) F_{2,1}(x) F_{1,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{3,2}(x) F_{2,2}(x) F_{1,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} + F_{3,2}(x) F_{2,2}(x) F_{1,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

De façon semblable, pour la matrice de commande  $B(z_2(x))$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} B(z_2(x)) &= \begin{bmatrix} z_2(x) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= F_{2,1}(x) \begin{bmatrix} z_{2,1} \\ 0 \end{bmatrix} + F_{2,2}(x) \begin{bmatrix} z_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [F_{1,1}(x) + F_{1,2}(x)] [F_{3,1}(x) + F_{3,2}(x)] \left\{ F_{2,1}(x) \begin{bmatrix} z_{2,1} \\ 0 \end{bmatrix} + F_{2,2}(x) \begin{bmatrix} z_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

On obtient alors :

$$A(z_1(x), z_3(x)) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(x) A_i \quad (2.41)$$

$$B(z_2(x)) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(x) B_i \quad (2.42)$$

où les fonctions de pondération  $\mu_i(x)$  sont des combinaisons de fonctions  $F_{j,k}(x)$  ( $j = 1, 2, 3$  et  $k = 1, 2$ ) et où les matrices constantes  $A_i$  et  $B_i$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_3 = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= A_4 = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= A_7 = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\
 A_6 &= A_8 = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= B_2 = B_5 = B_6 = \begin{bmatrix} z_{2,1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 B_3 &= B_4 = B_7 = B_8 = \begin{bmatrix} z_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Après cette démarche manuelle, on peut noter qu'il y a seulement quatre matrices sommet  $A_i$  et deux matrices sommet  $B_i$ . C'est donc de façon artificielle que les expressions (2.41) et (2.42) en font apparaître huit et ceci afin de pouvoir factoriser dans l'équation d'état les termes  $\mu_i(x)$ .

Il est intéressant de présenter une façon systématique de construire les matrices  $A_i$  et  $B_i$ . Tout d'abord, on a regroupé dans le tableau 2.1 les différentes matrices  $A_i$  et  $B_i$  ainsi que les fonctions de pondération  $\mu_i(x)$ . Par exemple, pour déterminer les matrices à coefficients constants  $A_i$  et  $B_i$  pour le troisième sous-système ( $i = 3$ ), on procède de la manière suivante. On retient le triplet correspondant à la troisième ligne  $\sigma_3 = (1, 2, 1)$ . La valeur  $\sigma_3^j$ , qui peut prendre les valeurs 1 ou 2, représente l'indice qui se trouve à la  $j^{\text{ème}}$  position dans le troisième triplet  $\sigma_3 = (1, 2, 1)$ . Compte tenu de (2.32),  $A_3 = A(z_{1,\sigma_3^1}, z_{3,\sigma_3^3})$  et  $B_3 = B(z_{2,\sigma_3^2})$ , les scalaires  $z_{1,\sigma_3^1}$ ,  $z_{2,\sigma_3^2}$  et  $z_{3,\sigma_3^3}$  étant définis dans (2.36). De façon plus générale  $A_i$  et  $B_i$  ( $i=1, \dots, 8$ ) sont notées :

$$\begin{aligned}
 A_i &= A(z_{1,\sigma_i^1}, z_{3,\sigma_i^3}) \\
 B_i &= B(z_{2,\sigma_i^2})
 \end{aligned}$$

Ces notations sont en concordance avec les équations (2.43). Tenant compte de (2.39) et du triplet associé au troisième sous-modèle, la fonction de pondération  $\mu_3(x)$  peut être déduite :

$$\begin{aligned}
 \mu_3(x) &= F_{1,\sigma_3^1}(x)F_{2,\sigma_3^2}(x)F_{3,\sigma_3^3}(x) \\
 &= F_{1,1}(x)F_{2,2}(x)F_{3,1}(x)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Le tableau 2.1 détaille la construction des matrices des sous-modèles et des fonctions de pondération d'un multimodèle caractérisé par trois variables de prémisses  $z_j(x)$  ( $j = 1, \dots, 3$ ). Le nombre de sous-modèles est égal à  $2^3$ . À chaque sous-modèle  $i$  correspond un triplet  $\sigma_i$  qui code les partitions des variables  $z_j$  intervenant dans la fonction de pondération correspondant au sous-modèle. En multipliant les fonctions qui décrivent ces partitions on obtient la fonction

Sous-modèle $i$	$\sigma_i$	$A_i$	$B_i$	$\mu_i(x)$
1	(1,1,1)	$A(z_{1,1}, z_{3,1})$	$B(z_{2,1})$	$F_{1,1}(z_1) F_{2,1}(z_2) F_{3,1}(z_3)$
2	(1,1,2)	$A(z_{1,1}, z_{3,2})$	$B(z_{2,1})$	$F_{1,1}(z_1) F_{2,1}(z_2) F_{3,2}(z_3)$
3	(1,2,1)	$A(z_{1,1}, z_{3,1})$	$B(z_{2,2})$	$F_{1,1}(z_1) F_{2,2}(z_2) F_{3,1}(z_3)$
4	(1,2,2)	$A(z_{1,1}, z_{3,2})$	$B(z_{2,2})$	$F_{1,1}(z_1) F_{2,2}(z_2) F_{3,2}(z_3)$
5	(2,1,1)	$A(z_{1,2}, z_{3,1})$	$B(z_{2,1})$	$F_{1,2}(z_1) F_{2,1}(z_2) F_{3,1}(z_3)$
6	(2,1,2)	$A(z_{1,2}, z_{3,2})$	$B(z_{2,1})$	$F_{1,2}(z_1) F_{2,1}(z_2) F_{3,2}(z_3)$
7	(2,2,1)	$A(z_{1,2}, z_{3,1})$	$B(z_{2,2})$	$F_{1,2}(z_1) F_{2,2}(z_2) F_{3,1}(z_3)$
8	(2,2,2)	$A(z_{1,2}, z_{3,2})$	$B(z_{2,2})$	$F_{1,2}(z_1) F_{2,2}(z_2) F_{3,2}(z_3)$

Tableau 2.1 – Tableau de partitionnement des variables de prémisse pour un multimodèle à 3 variables de prémisse et deux partitions pour chaque variable

de pondération  $\mu_i(x)$  correspondant au sous-modèle  $i$ . En connaissant la valeur du vecteur d'indices  $\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \sigma_i^3)$  on peut facilement trouver la correspondance avec l'indice  $i$  indiquant le numéro du sous-modèle :

$$i = 1 + 2^2(\sigma_i^1 - 1) + 2^1(\sigma_i^2 - 1) + 2^0(\sigma_i^3 - 1) \quad (2.45)$$

Quelques fonctions de pondération  $\mu_i(x)$  -calculées conformément au tableau 2.1 et aux expressions (2.35) des fonctions  $F_{i,j}(z_i(x))$  - sont représentées à la figure 2.3.

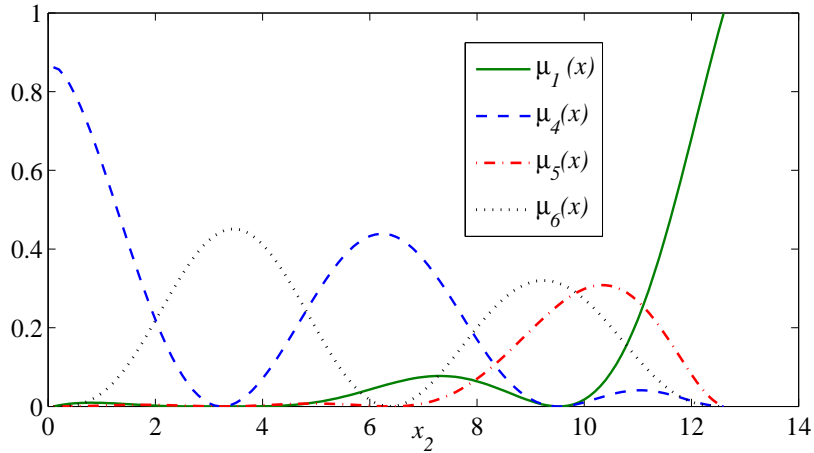


Figure 2.3 – Quelques fonctions de pondération du système présenté dans l'exemple introductif

Pour exprimer les matrices à coefficients constants  $A_i$  et  $B_i$  caractérisant chaque sous-système  $i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ), on utilise la forme quasi-LPV (2.32) du système (2.28), les matrices  $A(\rho(x, u))$  et  $B(\rho(x, u))$  ayant été définies en (2.32).

Dans ce qui suit, de 2.2.3 à 2.2.7, la méthodologie présentée dans cet exemple introductif pour réaliser le passage d'un système non linéaire à un multimodèle est généralisée à des

systèmes non linéaires de dimensions quelconques.

### 2.2.3 Représentation d'état d'un système non linéaire

Une large catégorie de systèmes non-linéaires dynamiques peut être représentée par un modèle d'état, représentant une relation entre les variables d'état et les variables d'entrée ou de commande. Ce modèle est constitué par un système d'équations différentielles ordinaires portant sur l'état (2.46a) et par une équation de sortie ou d'observation (2.46b) :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.46a)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (2.46b)$$

où les non linéarités sont exprimées par les fonctions  $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$  et  $g(x, u) \in \mathbb{R}^l$ .

Comme déjà précisé dans le chapitre 1 (section 1.2), le multimodèle est une combinaison convexe de  $r$  sous-modèles :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t), u(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (2.47a)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t), u(t)) [C_i x(t) + D_i u(t)] \quad (2.47b)$$

Les sections de 2.2.4 à 2.2.7 décrivent étape par étape comment réaliser le passage d'un système non linéaire de la forme (2.46) à la forme multimodèle (2.47). Ainsi, on cherche à trouver le nombre de modèles linéaires  $r$  constituant le multimodèle, les matrices à coefficients constants  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  et les expressions des fonctions de pondération  $\mu_i(x(t), u(t))$ , pour tout  $i = 1, \dots, r$ .

### 2.2.4 Forme Quasi-Linéaire à Paramètres Variables

La première étape consiste à transformer le modèle non linéaire sous une forme d'état initial (2.46) en un modèle "quasi-linéaire à paramètres variables" dit "quasi-LPV". Cette forme représente une forme affine en l'état et en l'entrée du système non linéaire (2.46) et elle est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(x(t), u(t))) & B(\rho(x(t), u(t))) \\ C(\rho(x(t), u(t))) & D(\rho(x(t), u(t))) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

où  $A(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$  et  $D(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ . Le vecteur  $\rho(x, u) \in C^1(\mathbb{R}^{n_1+m_1})$ , avec  $n_1 + m_1 \leq n + m$ , est une fonction de composantes d'état et d'entrée.

Il est important de noter que le vecteur des paramètres  $\rho(x, u)$  peut être différent pour chaque matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$  de la forme quasi-LPV. Ainsi, dans la forme quasi-LPV (2.32) présentée dans l'exemple introductif, la matrice  $A$  dépend des deux variables d'état  $x = (x_1, x_2)$  :  $\rho(x, u) = x$ , alors que la matrice  $B$  ne dépend que de la première variable d'état  $x_1$  :  $\rho(x, u) = x_1$ . Cependant, pour des raisons de simplicité concernant les notations, une notation unique correspondant à l'union des ensembles de paramètres est utilisée dans les quatre matrices de la forme

quasi-LPV.

La forme quasi-LPV est légèrement différente de la forme classique linéaire à paramètres variables (LPV). En effet, dans la forme classique LPV,  $\rho$  est un vecteur des paramètres qui varie en fonction du temps :

$$\rho = \rho(t) \quad (2.49)$$

alors que dans la forme quasi-LPV ce vecteur de paramètres  $\rho$  dépend des variables d'état  $x$  et d'entrée  $u$ , comme présenté dans [Huang et Jadbabaie, 1999] :

$$\rho = \rho(x(t), u(t)) \quad (2.50)$$

**Remarque 2.2.** La forme quasi-LPV (2.48) est intéressante pour notre étude, car elle contient des informations utiles sur les non-linéarités du système et leur distribution dans les matrices à paramètres variables  $A(\rho(x(t), u(t)))$ ,  $B(\rho(x(t), u(t)))$ ,  $C(\rho(x(t), u(t)))$  et  $D(\rho(x(t), u(t)))$ .

Sous l'hypothèse que les fonctions  $f(x(t), u(t))$  et  $g(x(t), u(t))$  soient continues et bornées sur un ensemble  $U \subseteq \mathbb{R}^{n_1+m_1}$  avec  $f(0, \cdot) = 0$  et  $g(0, \cdot) = 0$ , le système (2.46) peut être représenté sous la forme quasi-LPV (2.48).

Comme déjà mentionné dans l'exemple introductif, l'obtention de la forme quasi-LPV peut introduire des quotients dépendant de différentes variables du système et notamment des variables d'état. En conséquence, des conditions supplémentaires sur ces variables sont nécessaires : les variables impliquées doivent être non nulles. Afin de respecter cette condition, plusieurs solutions sont possibles :

1. Premièrement, une translation des variables impliquées peut être réalisée. Notons  $[-\alpha, \beta]$  le domaine de variation de l'une de ces variables  $x_d$ , où  $\alpha, \beta > 0$ . On peut réaliser la translation suivante :

$$\bar{x}_d = x_d + \alpha + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.51)$$

Ainsi  $\bar{x}_d \in [\varepsilon, \beta + \alpha + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ . En remplaçant  $x_d = \bar{x}_d - \alpha - \varepsilon$ , conformément à (2.51), dans le système (2.46), on peut construire la forme quasi-LPV souhaitée. Pour des raisons de simplicité on va garder la même notation pour le vecteur  $x$ , sachant qu'il contient éventuellement les translations préalablement effectuées.

2. Deuxièmement, une somme pondérée des états du système peut être utilisée pour former ces quotients. Pour obtenir une décomposition affine en état  $x$  et en entrée  $u$ , la fonction  $f(x, u)$  est décomposée comme suit :

$$f(x, u) = f^A(x, u) + f^B(x, u) \quad (2.52)$$

où  $f^A(x, u) = [f_1^A(x, u), \dots, f_n^A(x, u)]^T \in \mathbb{R}^n$  et  $f^B(x, u) = [f_1^B(x, u), \dots, f_n^B(x, u)]^T \in \mathbb{R}^n$ .

La fonction  $f^A(x, u)$  correspond au terme  $A(\rho(x, u))x$  de la forme quasi-LPV. De même, la fonction  $f^B(x, u)$  correspond au terme  $B(\rho(x, u))u$  de la forme quasi-LPV.

Il existe une infinité de possibilités d'établir cette décomposition relativement à la structure de la fonction non linéaire  $f(x, u)$ . Le choix de la décomposition sera motivé dans la section 2.2.8 dédiée à ce propos.

Pour écrire  $f^A(x, u)$  comme un produit entre  $A(\rho(x, u))$  et le vecteur d'état  $x$ , on introduit

les paramètres arbitraires  $\alpha_i = [\alpha_{i,1} \ \alpha_{i,2} \ \dots \ \alpha_{i,n}]$  pour construire la somme pondérée des  $n$  états. Le vecteur des paramètres  $\alpha_i$  est associé à l'équation dynamique de l'état  $x_i$ , i.e. à la  $i^{\text{ème}}$  composante  $f_i^A(x, u)$  de la fonction  $f^A(x, u)$ . L'idée est de multiplier et diviser chaque composante  $f_i^A(x, u)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) avec la somme  $\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} x_k$ , supposée différente de 0, comme suit :

$$f_i^A(x, u) = \frac{f_i^A(x, u)}{\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} x_k} \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} x_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.53)$$

On définit les variables de prémisses :

$$z_i(\rho(x, u)) = \frac{f_i^A(\rho(x, u))}{\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} x_k}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.54)$$

La matrice  $A$  est alors définie en utilisant les paramètres arbitraires :

$$A(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} z_1(\rho(x, u)) & \cdots & \alpha_{1,n} z_n(\rho(x, u)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} z_1(\rho(x, u)) & \cdots & \alpha_{n,n} z_n(\rho(x, u)) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

**Remarque 2.3.** Nous pouvons utiliser une transformation analogue pour la deuxième partie correspondant à l'entrée  $f^B(x, u)$ , en introduisant d'autres paramètres arbitraires  $\beta_i = [\beta_{i,1} \ \beta_{i,2} \ \dots \ \beta_{i,m}]$ , pour construire une somme pondérée des entrées :

$$f_i^B(x, u) = \frac{f_i^B(x, u)}{\sum_{k=1}^m \beta_{i,k} u_k} \cdot \sum_{k=1}^m \beta_{i,k} u_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

On applique la même procédure à la fonction non linéaire  $g(x, u)$  correspondant à l'équation de sortie du système (2.46b) en introduisant les paramètres arbitraires  $\gamma_{q,j}$  et  $\delta_{q,k}$  ( $q = 1, \dots, l$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$ ). Ainsi, on obtient la forme quasi-LPV du système non-linéaire (2.46).

Il faut remarquer que les matrices  $A(\rho(x, u))$ ,  $B(\rho(x, u))$ ,  $C(\rho(x, u))$  et  $D(\rho(x, u))$  de la forme quasi-LPV obtenue de cette façon dépendent des paramètres nouveaux introduits ( $\alpha_{i,j}$ ,  $\beta_{i,k}$ ,  $\gamma_{q,j}$  et  $\delta_{q,k}$ ). En conclusion, choisir un ensemble spécifique des paramètres revient à choisir une forme quasi-LPV particulière du système non linéaire (2.46), une infinité de solutions étant possible.

Cette technique d'obtention de la forme quasi-LPV pour un système non linéaire peut sembler difficile à mettre en œuvre, mais le point important est qu'elle met en évidence différentes formes quasi-LPV qui sont caractérisées par des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  pleines, si les paramètres introduits sont non nuls. Ces structures quasi-LPV sont très générales, mais ne seront pas nécessairement utilisées dans la pratique, car souvent les systèmes non linéaires réels sont de dimension élevée. Une simplification de structure peut être réalisée, tenant compte de l'ob-

jectif de l'étude, i.e. de la conception d'un observateur / contrôleur. Étant données les structures pleines des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , il est possible de déduire d'autres structures plus simples, en supposant tout simplement que certains des paramètres introduits  $\alpha_{i,j}$ ,  $\beta_{i,k}$ ,  $\gamma_{q,j}$ ,  $\delta_{q,k}$  puissent être fixés à zéro. De cette façon, on obtient des structures quasi-LPV plus simples qui tiennent compte en même temps des objectifs de l'étude.

Revenant aux variables données dans (2.54) on va examiner comment elles sont définies de manière générale et comment elles sont attribuées à la forme quasi-LPV.

### 2.2.5 Variables de prémisse : mesurables et non-mesurables

À partir de la représentation quasi-LPV issue du système (2.46) et donnée sous forme explicite dans (2.48), on définit un ensemble qui réunit les composantes non linéaires issues des matrices  $A(\rho)$ ,  $B(\rho)$ ,  $C(\rho)$ ,  $D(\rho)$ , qu'on appelle l'ensemble des variables de prémisse et que l'on note  $V_z$ , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V_z = & \{ a_{i,j}(\rho(x,u)) \mid a_{i,j} \neq \text{const}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n} \} \cup \\ & \cup \{ b_{i,k}(\rho(x,u)) \mid b_{i,k} \neq \text{const}, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,m} \} \cup \\ & \cup \{ c_{q,j}(\rho(x,u)) \mid c_{q,j} \neq \text{const}, q = \overline{1,l}, j = \overline{1,n} \} \cup \\ & \cup \{ d_{q,k}(\rho(x,u)) \mid d_{q,k} \neq \text{const}, q = \overline{1,l}, k = \overline{1,m} \} \end{aligned} \quad (2.57)$$

où  $a_{i,j}$  désigne la composante de  $A$  située sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  et de même pour  $b_{i,k}$ ,  $c_{i,j}$  et  $d_{i,j}$ .

Dans la suite cet ensemble est noté plus simplement :

$$V_z = \{ z_1(\rho(x,u)), \dots, z_p(\rho(x,u)) \mid p \leq (n+l)(n+m) \} \quad (2.58)$$

où  $p$  représente la dimension de l'ensemble des variables de prémisse  $V_z$  et où  $z_1(\rho(x,u)), \dots, z_p(\rho(x,u))$  sont les variables de prémisse, représentant les non-linéarités identifiées à partir de la forme quasi-LPV du système (2.46).

**Remarque 2.4.** Le nombre  $(n+l) \times (n+m)$  représente le nombre maximal de variables de prémisse. Cette situation correspond à une forme quasi-LPV ayant respectivement toutes les composantes  $a_{i,j}(\rho(x,u))$ ,  $b_{i,k}(\rho(x,u))$ ,  $c_{q,j}(\rho(x,u))$  et  $d_{q,k}(\rho(x,u))$  des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  non linéaires.

Comme on a remarqué dans l'exemple introductif, présenté à la section 2.2.2, le nombre de variables de prémisse joue un rôle important concernant la taille du multimodèle, et plus précisément en ce qui concerne le nombre des sous-modèles constituant le multimodèle. Dans cet exemple, les trois variables de prémisse considérées ont déterminé un nombre égal à  $2^3$  sous-modèles.

**Remarque 2.5.** Pour  $p$  variables de prémisse,  $r = 2^p$  sous-modèles sont obtenues.

Conformément à la définition de l'ensemble des variables de prémisse (2.58), ces variables peuvent dépendre de  $x$ , qui est généralement non mesurable, ou de  $u$  qui est mesurable. Ces deux situations engendrent des approches différentes concernant l'analyse de stabilité et la synthèse d'observateur/contrôleur et seront discutées plus en détail en chapitre 4.



## 2.2.6 Obtention des matrices et des fonctions de pondération

Les matrices à paramètres variables qui interviennent dans la forme quasi-LPV du système (2.46) sont des combinaisons linéaires de matrices à coefficients constants ( $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j$ ); par exemple, la matrice  $A(\rho(x, u))$  peut être exprimée comme suit :

$$A(\rho(x, u)) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_j(\rho(x, u)) \cdot \mathcal{A}_j \quad (2.59)$$

L'ensemble  $\mathcal{I}_A$  contient les indices correspondants aux variables de prémisse qui interviennent dans la matrice  $A$ . La matrice  $\mathcal{A}_0$ , ayant la même dimension que la matrice  $A$ , correspond aux éventuels termes constants qui peuvent intervenir dans la matrice  $A(\rho(x, u))$ . Les matrices  $\mathcal{A}_j$  sont des matrices de même dimension que  $A$  dont la composante correspondante à  $z_j(\rho(x, u))$  est fixée à 1, et toutes les autres à zéro :

$$\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \quad i \quad (2.60)$$

Les matrices  $B(\rho(x, u)), C(\rho(x, u)), D(\rho(x, u))$  sont exprimées de la même façon que  $A(\rho(x, u))$ , en introduisant respectivement les matrices  $\mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j$  et  $\mathcal{D}_j$ .

Par exemple, la forme quasi-LPV (2.32) choisie dans l'exemple introductif est caractérisée par les ensembles d'indices  $\mathcal{I}_A = \{1, 3\}$  et  $\mathcal{I}_B = \{2\}$  et les matrices  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$  et  $\mathcal{B}_2$  définies par :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

De plus, comme il n'y a pas de termes constants non nuls dans les matrices  $A(\rho(x, u))$  et  $B(\rho(x, u))$ , les matrices  $\mathcal{A}_0 = 0_{2 \times 2}$  et  $\mathcal{B}_0 = 0_{2 \times 1}$ .

En généralisant la technique présentée dans l'exemple introductif, on génère les  $2^p$  sous-modèles d'un multimodèle caractérisé par les  $p$  variables de prémisse qui sont partitionnées en deux, à l'aide de la transformation polytopique convexe :

$$z_j(\rho(x, u)) = F_{j,1}(z_j(\rho(x, u)))z_{j,1} + F_{j,2}(z_j(\rho(x, u)))z_{j,2} \quad (2.62)$$

où les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  sont définis comme dans (2.36), pour tout  $j = 1, \dots, p$  :

$$z_{j,1} = \max_{x,u} \{z_j(\rho(x, u))\} \quad (2.63a)$$

$$z_{j,2} = \min_{x,u} \{z_j(\rho(x, u))\} \quad (2.63b)$$

et où

$$F_{j,1}(z_j(\rho(x,u))) = \frac{z_j(\rho(x,u)) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (2.64a)$$

$$F_{j,2}(z_j(\rho(x,u))) = \frac{z_{j,1} - z_j(\rho(x,u))}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (2.64b)$$

À chaque sous-modèle  $i$ , représenté dans le tableau 2.2 par la ligne  $i$ , correspond un  $p$ -uplet  $\sigma_i$  qui code les partitions des variables de prémisses intervenant dans la fonction de pondération correspondant à ce sous-modèle. On peut ainsi construire, comme dans l'exemple précédent, un tableau regroupant l'ensemble des partitions des variables de prémisses. En multipliant les fonctions qui décrivent ces partitions, on obtient la fonction de pondération  $\mu_i(z)$  correspondant au sous-modèle  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) :

$$\mu_i(z) = \prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_i^j}(z_j(\rho(x,u))) \quad (2.65)$$

où  $\sigma_i^j$  représente l'indice à la  $j^{\text{ème}}$  position dans le  $p$ -uplet  $\sigma_i$ .

**Remarque 2.6.** De manière générale, le vecteur d'indices  $\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^p)$  (contenant les valeurs 1 ou 2) donne la valeur de l'indice  $i$  représentant le numéro du sous-modèle obtenu en utilisant les partitions correspondantes à ce vecteur d'indices. L'indice  $i$  est donné par :

$$\begin{aligned} i &= 1 + (\sigma_i^p - 1) \cdot 2^0 + (\sigma_i^{p-1} - 1) \cdot 2^1 + \dots + (\sigma_i^1 - 1) \cdot 2^{p-1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{p-1} (\sigma_i^{p-j} - 1) \cdot 2^j \end{aligned} \quad (2.66)$$

Compte tenu des définitions (2.64) et (2.65), les fonctions de pondérations respectent les propriétés de convexité :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z) = 1 \quad (2.67)$$

$$\mu_i(z) \geq 0 \quad (2.68)$$

pour tout  $i = 1, \dots, r$ , car :

$$F_{j,1}(z_j(\rho(x,u))) + F_{j,2}(z_j(\rho(x,u))) = 1, \quad \forall j = 1, \dots, p \quad (2.69)$$

Notons respectivement  $\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B, \mathcal{I}_C, \mathcal{I}_D$  les ensembles des indices des variables de prémisses qui interviennent dans les matrices  $A(\rho(x,u)), B(\rho(x,u)), C(\rho(x,u))$  et  $D(\rho(x,u))$ . On va ainsi évaluer les matrices  $A, B, C$  et  $D$  aux sommets du polytope définis par les partitions des variables de prémisses intervenant dans ces matrices. Cette évaluation fournit les matrices  $A_i, B_i, C_i$  et  $D_i$

Sous-modèle $i$	$\sigma_i$	$A_i$	$B_i$	$\mu_i(z)$
1	(1,1,...,1)	$A(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{p,1})$	$B(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{p,1})$	$\prod_{j=1}^p F_{j, \sigma_1^j}(z_j)$
2	(1,1,...,2)	$A(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{p,2})$	$B(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{p,2})$	$\prod_{j=1}^p F_{j, \sigma_2^j}(z_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2^{p-1}$	(1,2,...,2)	$A(z_{1,1}, z_{2,2}, \dots, z_{p,2})$	$B(z_{1,1}, z_{2,2}, \dots, z_{p,2})$	$\prod_{j=1}^p F_{j, \sigma_{2^{p-1}}^j}(z_j)$
$2^{p-1} + 1$	(2,1,...,1)	$A(z_{1,2}, z_{2,1}, \dots, z_{p,1})$	$B(z_{1,2}, z_{2,1}, \dots, z_{p,1})$	$\prod_{j=1}^p F_{j, \sigma_{2^{p-1}+1}^j}(z_j)$
	(2,1,...,2)	$A(z_{1,2}, z_{2,1}, \dots, z_{p,2})$	$B(z_{1,2}, z_{2,1}, \dots, z_{p,2})$	$\prod_{j=1}^p F_{j, \sigma_{2^{p-1}+2}^j}(z_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2^p$	(2,2,...,2)	$A(z_{1,2}, z_{2,2}, \dots, z_{p,2})$	$B(z_{1,2}, z_{2,2}, \dots, z_{p,2})$	$\prod_{j=1}^p F_{j, \sigma_{2^p}^j}(z_j)$

Tableau 2.2 – Tableau de décomposition des variables de prémisses pour un multimodèle à  $p$  variables de prémisses et deux partitions pour chaque variable

( $i = 1, \dots, r$ ) à coefficients constants et qui sont relatives à chaque sous-modèle :

$$A_i = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_{j, \sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \quad (2.70)$$

Les matrices  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  s'écrivent de façon semblable. Ces résultats sont détaillés dans la démonstration du résultat suivant.

### 2.2.7 Équivalence système non linéaire - multimodèle

**Théorème 2.1.** *Compte tenu des équations (2.65) et (2.70), le multimodèle (2.47), qui représente une combinaison convexe de sous-modèles linéaires  $\{(A_i, B_i, C_i, D_i)\}$  ( $i = 1, \dots, r$ ), est équivalent au système (2.46).*

**Démonstration.** Comme déjà précisé dans (2.59)

$$A(z) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^p z_j (\rho(x, u)) \mathcal{A}_j \quad (2.71)$$

où  $\mathcal{A}_j$  sont des matrices de même dimension que  $A$  ( $n \times n$ ) et qui contiennent des zéros sur toutes les composantes sauf celle correspondant à la variable de prémisses  $z_j$ , comme indiqué dans l'équation (2.60).

On utilise une écriture simplifiée des variables et des fonctions intervenant dans le calcul,

sans préciser leur dépendance vis-à-vis du vecteur des paramètres  $\rho(x, u)$ . On retient que pour tout  $j = 1, \dots, p$  on a :

$$\begin{aligned} z_j &= z_j(\rho(x, u)) \\ F_{j,1} &= F_{j,1}(\rho(x, u)) \\ F_{j,2} &= F_{j,2}(\rho(x, u)) \end{aligned}$$

En remplaçant  $z_p$  (2.62) dans l'égalité (2.71) et en particulierisant le terme  $A_p$ , on obtient :

$$A(z) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-1} z_j \mathcal{A}_j + (z_{p,1} F_{p,1} + z_{p,2} F_{p,2}) \mathcal{A}_p$$

En multipliant les termes d'indice différent que  $p$  par  $F_{p,1} + F_{p,2} = 1$ , on obtient :

$$A(z) = \mathcal{A}_0(F_{p,1} + F_{p,2}) + \sum_{j=1}^{p-1} z_j \mathcal{A}_j(F_{p,1} + F_{p,2}) + (z_{p,1} F_{p,1} + z_{p,2} F_{p,2}) \mathcal{A}_p$$

En regroupant les termes qui contiennent  $F_{p,1}$  et  $F_{p,2}$ , on obtient :

$$A(z) = F_{p,1} \left( \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-1} z_j \mathcal{A}_j + z_{p,1} \mathcal{A}_p \right) + F_{p,2} \left( \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-1} z_j \mathcal{A}_j + z_{p,2} \mathcal{A}_p \right)$$

On répète les transformations précédentes, en remplaçant  $z_{p-1}$  (comme donné dans (2.62) pour  $j = p - 1$ ) et en multipliant les autres termes de la somme par  $F_{p-1,1} + F_{p-1,2} = 1$  :

$$\begin{aligned} A(z) &= F_{p,1} \left[ (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_j \right. \\ &\quad \left. + (z_{p-1,1} F_{p-1,1} + z_{p-1,2} F_{p-1,2}) \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,1} (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_p \right] \\ &\quad + F_{p,2} \left[ (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_j \right. \\ &\quad \left. + (z_{p-1,1} F_{p-1,1} + z_{p-1,2} F_{p-1,2}) \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,2} (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_p \right] \end{aligned}$$

En regroupant les termes qui contiennent  $F_{p-1,1}$  et  $F_{p-1,2}$ , dans chaque expression délimitée par

des crochets, on obtient :

$$\begin{aligned}
 A(z) &= F_{p,1}F_{p-1,1} \left[ \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,1} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,1} \mathcal{A}_p \right] \\
 &+ F_{p,1}F_{p-1,2} \left[ \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,2} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,1} \mathcal{A}_p \right] \\
 &+ F_{p,2}F_{p-1,1} \left[ \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,1} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,2} \mathcal{A}_p \right] \\
 &+ F_{p,2}F_{p-1,2} \left[ \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,2} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,2} \mathcal{A}_p \right]
 \end{aligned}$$

En itérant cette factorisation, en remplaçant à chaque étape du calcul  $z_j$  grâce à l'expression (2.62), jusqu'à ce qu'on ait remplacé toutes les variables de prémisses, on obtient :

$$A(z) = \sum_{i=1}^{2^p} \left\{ \prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_i^j} \cdot \left[ \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^p z_{j,\sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \right] \right\}$$

On a réussi à exprimer les matrices  $A_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) en utilisant les matrices sommets  $\mathcal{A}_j$  du polytope définis par les partitions des variables de prémisses :

$$A_i = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^p z_{j,\sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \tag{2.72}$$

En appliquant le même raisonnement pour la partie commande et la sortie, on a ainsi démontré l'équivalence entre le système (2.46) et le multimodèle (2.47).

La méthode de passage d'un système non linéaire quelconque sous une forme multimodèle à été réalisée. Finalement, pour rendre la méthode exhaustive, on va présenter, à la section suivante, quelques critères permettant de choisir les variables de prémisses à partir de la forme quasi-LPV.

## 2.2.8 Critères de choix des variables de prémisses

Les résultats existants concernant d'une part l'analyse de stabilité et de performance et d'autre part la synthèse d'observateur / contrôleur pour les systèmes présentés sous une forme multimodèle [Wang et al., 1996; Bergsten et Palm, 2000; Bergsten et al., 2001; Chadli et al., 2001; Tanaka et Wang, 2001; Akhenak et al., 2004; Tanaka et al., 2007; Ichalal et al., 2009c; Guerra et al., 2009; Boulkroune et al., 2010b] sont basés sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Grâce à la propriété de convexité des fonctions d'interpolation des sous-modèles, les LMIs sont vérifiées pour les matrices ( $A_i, B_i$ ) associées aux sommets du polytope issu du modèle LPV, les fonctions de pondérations n'intervenant pas dans la résolution de ces LMI. Il est important de noter que la formulation LMI utilisée pour construire un observa-

teur / contrôleur à base de multimodèles traduit seulement des conditions suffisantes, mais non nécessaires. C'est une des raisons pour laquelle il est essentiel de proposer des critères de choix pour la conception de la structure multimodèle.

En général, la représentation quasi-LPV (2.48) pour un système non-linéaire de la forme (2.46) n'est pas unique. À chaque représentation quasi-LPV correspond un ensemble particulier de variables de prémisses et choisir une représentation quasi-LPV est équivalent à choisir un ensemble de variables de prémisses. Le choix de l'ensemble des variables de prémisses  $V_z$  est important, car il influe sur le nombre de sous-modèles et sur la structure du modèle global. Ce degré de liberté sera utilisé pour faciliter les études de contrôlabilité, d'observabilité, d'analyse de stabilité.

Pour assurer l'observabilité / contrôlabilité du système global, représenté sous une forme multimodèle, et par voie de conséquence pour assurer l'existence d'une solution aux LMI associées au multimodèle, l'observabilité / contrôlabilité de chaque sous-modèle est nécessaire [Guerra et al., 2009]. Ainsi, les formes quasi-LPV qui produisent des sous-modèles ne possédant pas ces propriétés ne sont pas à retenir. Il faut remarquer que ceci ne constitue pas une condition suffisante pour assurer l'observabilité / contrôlabilité du multimodèle [Murphey et Burdick, 2002]. Par exemple, les différentes formes quasi-LPV du système présenté à la section 2.2.2 dans l'exemple introductif ne partagent pas la même structure. La forme (2.31) est caractérisée par une matrice  $B(z)$  nulle, donc le système ne peut pas être contrôlé, alors que dans (2.30) et (2.32) la matrice  $B(z)$  n'est pas nulle, ce qui est une condition nécessaire pour que le système soit contrôlable.

Comme signalé précédemment, les conditions de stabilité des observateurs sont données en termes d'inégalités matricielles linéaires. Différentes techniques ont été proposées pour réduire le nombre des conditions LMI, ce qui réduit le volume de calcul [Tanaka et al., 2007] et peut faciliter l'existence d'une solution [Bergsten et al., 2001]. Comme le nombre des LMI à satisfaire est linéaire ou polynomial vis-à-vis du nombre de sous-modèles [Tanaka et Wang, 2001], un multimodèle composé d'un nombre minimal de sous-modèles doit être choisi. Ce nombre est lié au nombre de variables de prémisses, il sera donc préféré une forme quasi-LPV qui associe un ensemble minimal de variables de prémisses. Par exemple, les formes quasi-LPV (2.30) et (2.31) associent quatre variables de prémisses qui produiront 16 sous-modèles, alors que la forme (2.32) implique trois variables de prémisses qui produiront 8 sous-modèles. De plus, la complexité des conditions LMI augmente avec le nombre de variables d'état impliquées dans les variables de prémisses. En conséquence, pour assurer l'existence d'une solution, un multimodèle avec des variables de prémisses dépendant d'un nombre minimal de variables d'état est préférable [Bergsten et Palm, 2000]. Pour augmenter la probabilité d'existence d'une solution, le nombre de variables d'état intervenant dans ces variables de prémisses doit être le plus petit possible [Bergsten et al., 2001].

Tenant compte des remarques précédentes, les règles suivantes, issues d'une recherche de structure la plus simple possible, peuvent guider le choix :

- Éliminer toutes les formes quasi-LPV qui sont caractérisées par des matrices  $B$  ayant des colonnes nulles et des matrices  $C$  ayant des lignes nulles, car ces matrices ne respectent pas les conditions de rang d'observabilité / de contrôlabilité. A contrario, retenir toutes

les formes quasi-LPV ayant des matrices qui satisfont les conditions :

$$\begin{aligned} \text{rang}(\mathcal{O}_i) &= \text{rang} \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} = n \\ \text{rang}(C_i) &= \text{rang} [ B_i \ A_i B_i \ \cdots \ A_i^{n-1} B_i ] = n, \quad \forall i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (2.73)$$

- Identifier les décompositions contenant des variables de prémisses communes aux différentes équations de l'état et/ou de sortie, dans (2.48), de façon à réduire ainsi le nombre de variables de prémisses.
- Parmi les décompositions quasi-LPV pour lesquelles les variables de prémisses  $z_j(\rho(x, u))$  ( $j = 1, \dots, p$ ) dépendent du même nombre de variables d'état, choisir la décomposition quasi-LPV qui contient le nombre minimal de variables de prémisses.
- Parmi les décompositions quasi-LPV qui ont le même nombre de variables de prémisses  $z_j(\rho(x, u))$  ( $i = 1, \dots, p$ ), choisir la décomposition quasi-LPV pour laquelle les variables de prémisses  $z_j(\rho(x, u))$  dépendent du nombre minimal de variables d'état.

---

**Exemple 2.3 (Illustration des critères de choix sur le système de trois cuves)**

On considère le système de trois cuves décrit à la figure 2.4 qui est un système non linéaire multi-entrées et multi-sorties comportant deux entrées ( $Q_1$  et  $Q_2$ ) et deux sorties (les niveaux d'eau  $x_1$  et  $x_2$  dans les cuves 1 et 2). Le système comporte trois cuves cylindriques de même section  $S$ , liées entre elles par des tubes cylindriques de section  $S_n$ . Les débits  $Q_{f1}$ ,  $Q_{f2}$  et  $Q_{f3}$  représentent des débits de fuite éventuelle au niveau des cuves. Pour cet exemple on considère nuls les débits de fuite :  $Q_{f1} = Q_{f2} = Q_{f3} = 0$ . Les paramètres  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  représentent les coefficients d'écoulement et  $g = 9.82[m/s^2]$  l'accélération gravitationnelle.

Ce système est représenté par les équations suivantes [Kovács et al., 2007; Li et al., 2007] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{S} Q_1(t) - W_{1,3}(x) \sqrt{2g |x_1(t) - x_3(t)|} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{S} Q_2(t) + W_{3,2}(x) \sqrt{2g |x_3(t) - x_2(t)|} - \frac{1}{S} \alpha_2 S_n \sqrt{2g x_2(t)} \\ \dot{x}_3(t) &= W_{1,3}(x) \sqrt{2g |x_1(t) - x_3(t)|} - W_{3,2}(x) \sqrt{2g |x_3(t) - x_2(t)|} \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

où pour des raisons de simplicité des notations on définit :

$$W_{i,k}(x) = \alpha_i \frac{S_n}{S} \text{sgn}[x_i(t) - x_k(t)], \quad i \neq k \quad (2.75)$$

Définissons

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

les vecteurs respectifs d'état, d'entrée et de sortie.

**Hypothèse 2.1.** On suppose que les trois cuves ne sont jamais simultanément vides.

L'hypothèse 2.1 peut être faite car les niveaux  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont contrôlables en utilisant les débits d'entrée  $Q_1$  et  $Q_2$ . Dans ce cas, les niveaux dans les trois cuves sont bornées :  $x \in \mathbb{R}_+^3$ .

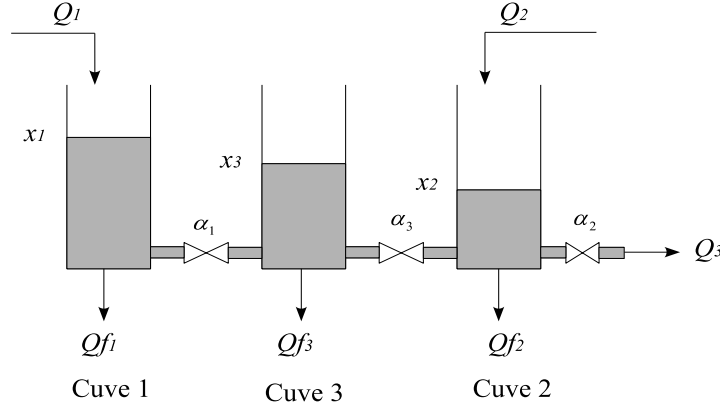


Figure 2.4 – Le système de trois cuves

### Transformation des équations sous forme multimodèle

Pour écrire le système des trois cuves sous forme multimodèle équivalente ; on utilise une somme pondérée des états, grâce aux scalaires réels  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Le choix de ces scalaires donne la possibilité de mettre en évidence plusieurs formes quasi-LPV et ainsi d'obtenir plusieurs formes multimodèles. Pour  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  non nuls et en utilisant l'hypothèse 2.1 on déduit que les sommes  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i(t)$  et  $\sum_{i=1}^3 \gamma_i x_i(t)$  sont non nulles.

Définissons, en fonction de ces sommes pondérées, les variables de prémisse suivantes :

$$z_1(x) = \frac{W_{1,3}(t)}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i(t)} \sqrt{2g |x_1(t) - x_3(t)|} \quad (2.77a)$$

$$z_2(x) = \frac{\alpha_2 S_n}{S} \sqrt{\frac{2g}{x_2(t)}} \quad (2.77b)$$

$$z_3(x) = \frac{W_{3,2}(t)}{\sum_{i=1}^3 \gamma_i x_i(t)} \sqrt{2g |x_3(t) - x_2(t)|} \quad (2.77c)$$

Le système (2.74) prend la forme quasi-LPV :

$$\dot{x}(t) = A(z_1, z_2, z_3) x(t) + B u(t) \quad (2.78)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (2.79)$$



Les matrices  $A(z_1, z_2, z_3)$ ,  $B$  et  $C$  sont définies comme suit :

$$A(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 z_1(x) & -\lambda_2 z_1(x) & -\lambda_3 z_1(x) \\ \gamma_1 z_3(x) & \gamma_2 z_3(x) - z_2(x) & \gamma_3 z_3(x) \\ \lambda_1 z_1(x) - \gamma_1 z_3(x) & \lambda_2 z_1(x) - \gamma_2 z_3(x) & \lambda_3 z_1(x) - \gamma_3 z_3(x) \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

En utilisant la transformation polytopique convexe, les variables  $z_j$  peuvent s'écrire :

$$z_j(x) = F_{j,1}(z_j(x))z_{j,1} + F_{j,2}(z_j(x))z_{j,2} \quad (2.82)$$

où les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  sont définis par :

$$\begin{aligned} z_{j,1} &= \max_x \{z_j(x)\} \\ z_{j,2} &= \min_x \{z_j(x)\} \end{aligned} \quad \forall j = 1, \dots, 3 \quad (2.83)$$

et les fonctions  $F_{j,1}$  et  $F_{j,2}$  sont données par :

$$F_{j,1}(z_j(x)) = \frac{z_{j,1} - z_j(x)}{z_{j,1} - z_{j,2}}, \quad F_{j,2}(z_j(x)) = \frac{z_j(x) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (2.84)$$

Ainsi, le multimodèle est composé de  $r = 2^3$  sous-modèles. Les fonctions de pondération sont calculées comme suit :

$$\mu_i(x) = F_{1,\sigma_i^1}(z_1(x))F_{2,\sigma_i^2}(z_2(x))F_{3,\sigma_i^3}(z_3(x)) \quad (2.85)$$

où le vecteur d'indices  $\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^3)$  (contenant les valeurs 1 ou 2) fournit la valeur de l'indice  $i$  représentant le numéro du sous-modèle obtenu en utilisant les partitions correspondantes à ce vecteur d'indices (voir la remarque 2.6). Les matrices constantes de chaque sous-modèles sont données par :

$$A_i = A(z_{1,\sigma_i^1}, z_{2,\sigma_i^2}, z_{3,\sigma_i^3}) \quad i = 1, \dots, 8 \quad (2.86)$$

où la matrice  $A(z_1, z_2, z_3)$  est donnée en (2.80). Compte tenu des définitions (2.81), on a  $B_i = B$  et  $C_i = C$  pour tout ( $i = 1, \dots, 8$ ).

Finalement, le système (2.78) est réécrit sous la forme MM :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(x(t)) [A_i x(t) + Bu(t)] \quad (2.87)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.88)$$

Il faut remarquer que conformément à (2.77) et (2.80) les fonctions de pondération  $\mu_i(x)$  et les matrices  $A_i$  dépendent des scalaires  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Pour différents choix de ces scalaires, différents MM seront obtenus. Toutes ces structures MM (excluant les cas dégénérés  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  et/ou  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ) sont analytiquement équivalentes au système de trois cuves initial (2.74).

À la suite seront discutées les conditions à respecter pour le choix des scalaires réels  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (c'est-à-dire le choix de la structure MM) afin de pouvoir synthétiser un observateur pour le système de trois cuves.

### Critères d'observabilité pour le choix de la forme multimodèle

Pour construire un observateur basé sur un multimodèle, la propriété d'observabilité doit être assurée. Comme précisé en chapitre 2, l'observabilité de chaque sous-modèle est nécessaire pour assurer l'observabilité du multimodèle global. La condition géométrique suivante est utilisée :

$$\text{rang}(\mathcal{O}_i) = \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \forall i = 1, \dots, 8 \quad (2.89)$$

Conformément à (2.86) les matrices  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) ont la même structure que celle de la matrice  $A$  donnée en (2.80), la différence au niveau numérique étant que  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sont remplacées par les constantes représentant les maxima et les minima de ces trois variables. En supposant exclus les cas dégénérés ( $x_1 = x_3$ ,  $x_2 = x_3$  et  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ), les maxima et les minima des variables de prémisses sont non nuls. En conséquence, pour que les huit conditions (2.89) soient vérifiées, il faut que la même condition le soit par la matrice  $A$ .

Compte tenu de la définition (2.81) de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  est donnée par :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda_1 z_1 & -\lambda_2 z_2 & -\lambda_3 z_3 \\ \gamma_1 z_3 & \gamma_2 z_3 - z_2 & \gamma_3 z_3 \\ \lambda_1 z_1^2 (\lambda_1 - \lambda_3) + \gamma_1 \lambda_3 z_1 z_3 & (*)_1 & (*)_2 \\ (*)_3 & (*)_4 & (*)_5 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

où les  $(*)_i$  représentent les termes non nuls suivants :

$$\begin{aligned} (*)_1 &= z_1 [\lambda_2 z_1 (\lambda_1 - \lambda_3) - \gamma_2 z_3 (\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_2 z_2] \\ (*)_2 &= \lambda_3 z_1^2 (\lambda_1 - \lambda_3) - \gamma_3 z_1 z_3 (\lambda_2 - \lambda_3) \\ (*)_3 &= \lambda_1 z_1 z_3 (\gamma_3 - \gamma_1) - \gamma_1 z_3 [z_2 - z_3 (\gamma_3 - \gamma_2)] \\ (*)_4 &= (\gamma_2 z_3 - z_2)^2 - \gamma_2 \gamma_3 z_3^2 \\ (*)_5 &= \gamma_3 z_3 [(\gamma_2 - \gamma_3) z_3 - z_2 + \lambda_3 z_1] - \lambda_3 \gamma_1 z_1 z_3 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Dans ce cas les multimodèles avec  $\lambda_3 = \gamma_3 = 0$  doivent être évitées car la condition d'observabilité (2.89) n'est pas respectée.

**Synthèse d'un observateur à base de multimodèle**

La méthode utilisée ici pour la synthèse d'un observateur est basée sur le MM (2.87).

Considérons les matrices  $A_0$  et  $\bar{A}_i$  définies par :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r A_i \\ \bar{A}_i &= A_i - A_0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

En substituant  $A_0$  et  $\bar{A}_i$  dans l'équation d'état du MM (2.87), l'observateur proposé pour le système de trois cuves a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}) [\bar{A}_i \hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.93)$$

où  $L$  est une matrice à déterminer.

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.94)$$

Sa dynamique est obtenue en utilisant (2.87) et (2.93) :

$$\dot{e}(t) = (A_0 - LC)e(t) + \Delta(x, \hat{x}) \quad (2.95)$$

où :

$$\Delta(x, \hat{x}) = \sum_{i=1}^r [\bar{A}_i(\mu_i(x(t)))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_i(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))u(t)] \quad (2.96)$$

peut être considérée comme une petite perturbation si  $\hat{x}$  tends vers  $x$ . Conformément à [Ichalal et al., 2008a] on suppose que les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{aligned} |\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))| &< \tau_i |x(t) - \hat{x}(t)| \\ |\mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)| &< \omega_i |x(t) - \hat{x}(t)| \\ |u(t)| &< \varphi \end{aligned} \quad (2.97)$$

Sachant que les fonctions de pondérations  $\mu_i(x)$  appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ , sont continues et dérivables, et que l'état  $x$  est borné, les conditions (2.97) sont facilement respectées. La première condition dans (2.97) est vérifiée, car les fonctions  $\mu_i(x)$  sont globalement Lipschitz. Pour une fonction  $f$  de classe  $C^1$  on a :

$$f(x) - f(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^x \dot{f}(t) dt, \quad (2.98)$$

En appliquant cette propriété pour les huit fonctions  $\mu_i$  on obtient :

$$\begin{aligned} |\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| &\leq \int_{\hat{x}}^x |\dot{\mu}_i(\xi)| d\xi \\ &\leq \tau_i |x - \hat{x}|, \quad i = 1, \dots, 8 \end{aligned} \quad (2.99)$$

Les scalaires  $\tau_i$  peuvent être facilement trouvés, connaissant les extréma des fonctions  $\dot{\mu}_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ). En appliquant le même principe pour  $f(x) = \mu_i(x)x$ , la deuxième condition est vérifiée de façon similaire, en utilisant le fait que  $\mu_i(x)$  est globalement Lipschitz et que  $x$  est borné et continu.

Dans ce cas, le terme  $\Delta(x, \hat{x})$  est bornée par :

$$\Delta(x, \hat{x}) < \psi |x(t) - \hat{x}(t)| \quad (2.100)$$

où

$$\psi = \sum_{i=1}^r (\bar{\sigma}(\bar{A}_i) \omega_i + \bar{\sigma}(B_i) \tau_i \varphi) \quad (2.101)$$

et où  $\bar{\sigma}(M)$  représente la plus grande valeur singulière de  $M$ .

Conformément au théorème de convergence de l'erreur d'estimation présenté dans [Ichalal et al., 2008a] (Lemme 1), l'erreur d'estimation d'état entre le MM (2.87) et l'observateur (2.93) converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$  et  $K$  telles que les conditions suivantes soient respectées :

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 - C^T K^T - K C + \psi^2 Q & P \\ P & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (2.102)$$

Le gain de l'observateur (2.93) est donné par :  $L = P^{-1}K$ .

Il faut remarquer que le nombre des LMIs ne dépend pas du nombre de sous-modèles. Il dépend seulement de  $A_0$ , la moyenne de matrices  $A_i$  des sous-modèles. Néanmoins,  $A_0$  et  $A_i$  partagent la même structure, donc le choix du MM est important afin de déterminer le gain  $L$ . Les résultats de simulation sont illustrés par la figure 2.5 pour  $\lambda_1 = -0.7$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\lambda_3 = 17$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -3$ ,  $\gamma_3 = -1$  et  $\psi = 0.506$ . Ces paramètres ont été choisis afin de respecter les conditions d'observabilité discutées au point précédent. en considérant des conditions initiales différentes pour le MM ( $x_0 = [1.8; 1.7; 5.5]$ ) et pour l'observateur ( $\hat{x}_0 = [4.8; 5; 2.1]$ ), une convergence rapide de l'erreur d'estimation d'état vers zéro est obtenue.

Les résultats d'estimation sont corrects (figure 2.5), bien qu'un bruit de mesure ait été ajouté aux deux sorties. La condition LMI (2.102) est vérifiée et le gain de l'observateur est :

$$L = \begin{bmatrix} 1.42 & 0 \\ 0 & 0.97 \\ -0.08 \cdot 10^{-2} & 0.12 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

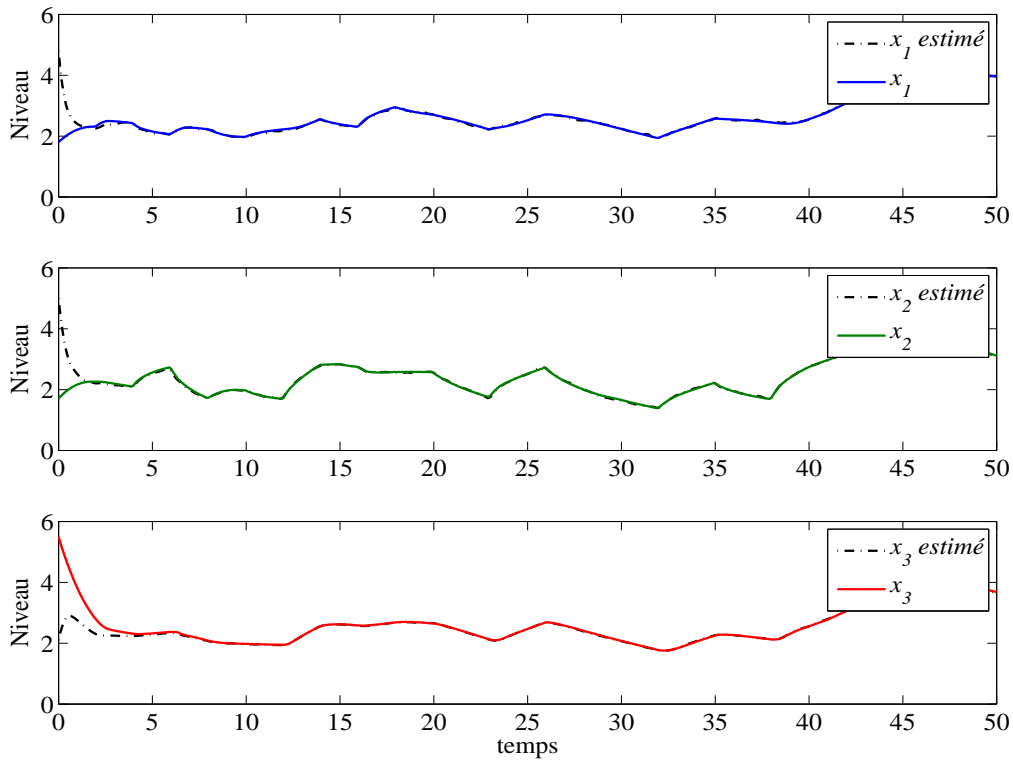


Figure 2.5 – Estimation d'état du système de trois cuves

---

## 2.3 Limites de la méthodologie proposée

Cette méthode de passage d'un système non linéaire vers un multimodèle a des limites dues aux différentes hypothèses de travail utilisées. En particulier, l'hypothèse de variables de prémisses bornées -nécessaire au calcul de leurs maxima et minima- prête à discussion. Cette limitation est discutée plus en détail dans la suite et ne restera pas sans solution.

### 2.3.1 Méconnaissance des bornes des variables de prémisses

La transformation polytopique convexe, présentée au début de la section 2.2.1 avec le lemme 2.1, assure les propriétés de convexité des fonctions de pondération de la structure multimodèle, mais soulève la question de l'existence et du calcul des bornes supérieures et inférieures des non-linéarités. Néanmoins la connaissance précise de ces bornes n'est pas toujours possible, car souvent les non-linéarités, dont dépendent les variables de prémisses sont fonction de variables inconnues a priori, comme les variables d'état, qui ne sont pas directement mesurées. Le

calcul des maxima et des minima de ces non-linéarités n'est donc pas directement réalisable. Ce problème a des solutions, qui seront discutées à l'aide d'un exemple.

Reprenons l'exemple introductif présenté à la section 2.2.2 :

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1)x_2 + x_1^3 u \quad (2.103a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{x_2}}x_1 - x_1^2 x_2 \quad (2.103b)$$

Les variables de prémisse qui ont été identifiées sont :

$$z_1(x) = \cos(x_1) \quad (2.104a)$$

$$z_2(x) = x_1^3 \quad (2.104b)$$

$$z_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} - x_1 x_2 \quad (2.104c)$$

Supposons que ces variables appartiennent aux intervalles  $[\alpha_j, \beta_j]$  ( $j = 1, \dots, 3$ ), avec

$$\alpha_j = \min_{x,u} \{z_j(x,u)\} \quad (2.105)$$

$$\beta_j = \max_{x,u} \{z_j(x,u)\} \quad (2.106)$$

dont les valeurs numériques ne peuvent pas être déterminées.

Ainsi, les fonctions de partition définies par

$$F_{j,1}(z_j(x,u)) = \frac{z_j(x,u) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (2.107a)$$

$$F_{j,2}(z_j(x,u)) = \frac{z_{j,1} - z_j(x,u)}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (2.107b)$$

sont calculées à partir des scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) dont les valeurs seront différentes des valeurs réelles des bornes  $\alpha_j$  et  $\beta_j$ . Trois possibilités existent dans le calcul des fonctions de pondération et des matrices de sous-modèles. Les scalaires considérés peuvent être :

1.  $\alpha_j < z_{j,2}$  (voir figure 2.6 (a))
2.  $z_{j,2} = \alpha_j$  (voir figure 2.6 (b))
3.  $z_{j,2} < \alpha_j$  (voir figure 2.6 (c))

D'autres cas dérivent de ces trois possibilités combinés avec les trois possibilités entre  $\beta_j$  et  $z_{j,1}$ . Neuf cas existent, mais tous ne seront pas étudiés.

En effet,  $z_{j,2} = \alpha_j$  et  $z_{j,1} < \beta_j$  produit le même effet que la première situation, et ainsi de suite. Dans le cas  $z_{j,2} > \alpha_j$ , les fonctions d'activation faisant apparaître  $F_{j,2}$  dépasseront l'intervalle  $[0; 1]$ . Dans le cas  $z_{j,2} < \alpha_j$ , les fonctions d'activation ne décriront pas tout l'intervalle  $[0; 1]$ .

Donc, tous les choix possibles de ces scalaires produisent les trois situations différentes présentées à la figure 2.6, dans laquelle sont illustrées les fonctions de pondération du multimodèle

associé à l'exemple précédent (2.103) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (2.108)$$

On remarque que la première situation (figure 2.6 (a)) correspond à une structure multimodèle avec des fonctions de pondérations  $\mu_i(x, u)$ ,  $i = 1, \dots, r$  qui ne possèdent plus la propriété suivante :

$$0 < \mu_i(x, u) < 1 \quad (2.109)$$

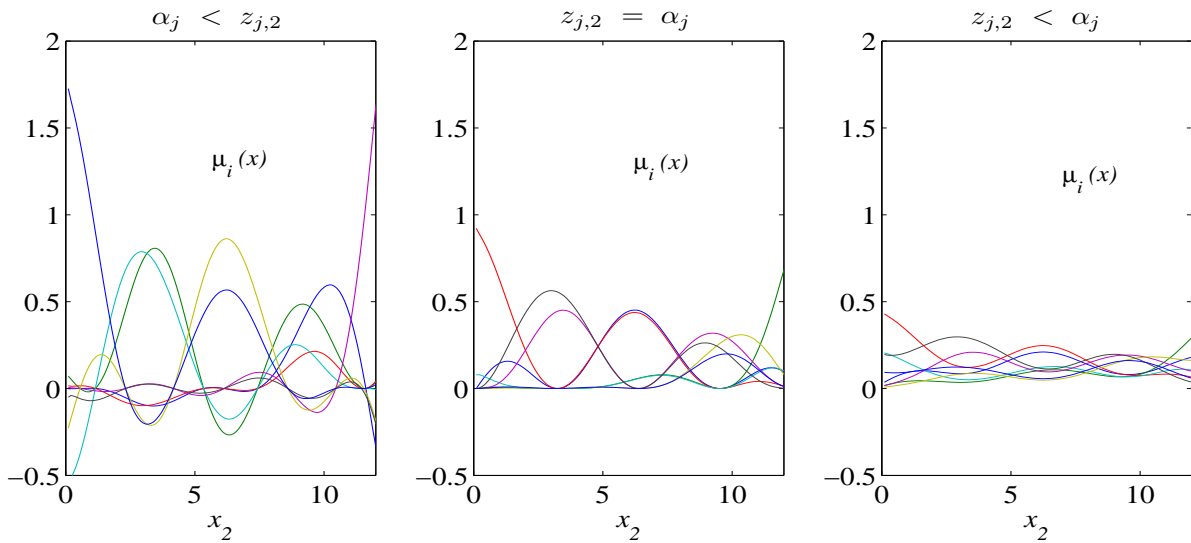


Figure 2.6 – Variations des fonctions de pondération  $\mu_i(x)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) déterminées par les bornes des variables de prémisse

Afin de retrouver cette propriété, qui est importante dans les études d'analyse et de synthèse du contrôleur / observateur, une normalisation est réalisée, en définissant les fonctions de pondération suivantes :

$$\bar{\mu}_i(x, u) = \frac{\mu_i(x, u) - \mu_i^{\min}}{\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}}, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.110)$$

Les scalaires  $\mu_i^{\min}$  et  $\mu_i^{\max}$  utilisés pour cette normalisation sont obtenus en utilisant les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  et non les valeurs  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  les maxima et les minima de  $z_j$  qu'on ne connaît pas. Ces nouvelles fonctions de pondération possèdent les propriétés de convexité souhaitées. La structure du multimodèle est modifiée conformément aux nouvelles fonctions  $\bar{\mu}_i(x, u)$  de la façon suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r [\mu_i^{\min} + \bar{\mu}_i(x, u) (\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min})] [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (2.111)$$

Notons :

$$A_i^D = (\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}) A_i \quad (2.112)$$

$$B_i^D = (\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}) B_i \quad (2.113)$$

Le multimodèle (2.111) est écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i^{\min} [A_i x(t) + B_i u(t)] + \sum_{i=1}^r \bar{\mu}_i(x, u) [A_i^D x(t) + B_i^D u(t)] \quad (2.114)$$

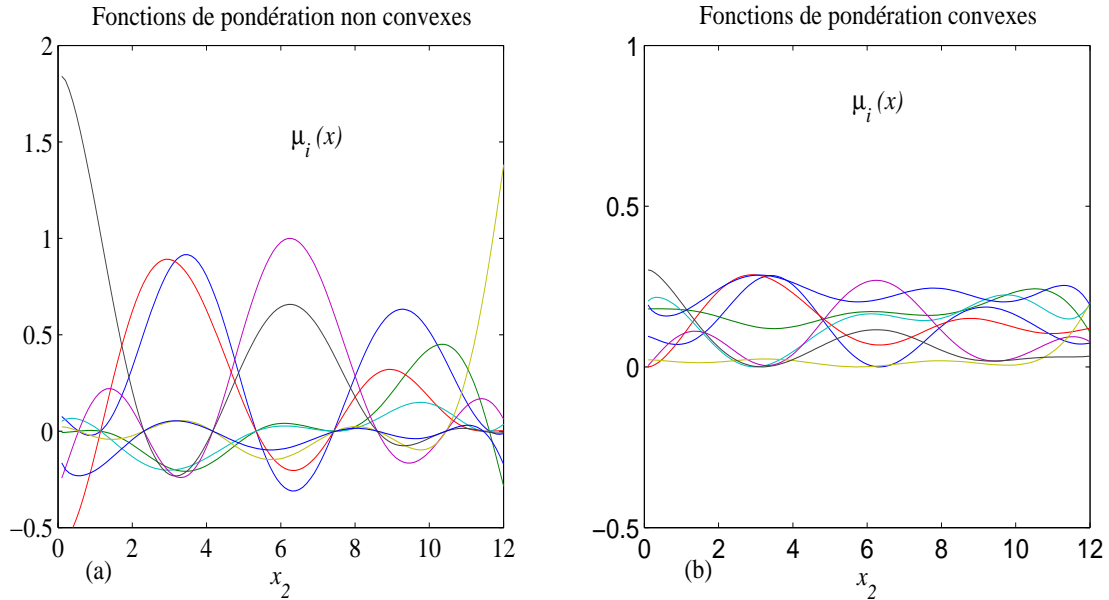


Figure 2.7 – Comparaison de fonctions de pondération avant (a) et après (b) la normalisation

En utilisant la propriété  $\sum_{i=1}^r \bar{\mu}_i(x, u) = 1$  des fonctions de pondération, on peut écrire :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \bar{\mu}_i(x, u) \cdot \sum_{j=1}^r \mu_j^{\min} [A_j x(t) + B_j u(t)] + \sum_{i=1}^r \bar{\mu}_i(x, u) [A_i^D x(t) + B_i^D u(t)] \quad (2.115)$$

Finalement, en réalisant une factorisation, on obtient la structure multimodèle suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \bar{\mu}_i(x, u) [\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)] \quad (2.116)$$



où les matrices des sous-modèles sont données par :

$$\bar{A}_i = A_i^D + \sum_{j=1}^r \mu_j^{min} A_j \quad (2.117)$$

$$\bar{B}_i = B_i^D + \sum_{j=1}^r \mu_j^{min} B_j, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.118)$$

et où les fonctions de pondération  $\bar{\mu}_i(x, u)$  respectent les propriétés de convexité souhaitées. Les fonctions de pondération du multimodèle avant et après l'opération de normalisation sont représentées à la figure 2.7.

En conclusion, la limite de la méthode concernant la méconnaissance des bornes des variables de prémisses  $z_j(x, u)$  ( $j = 1, \dots, p$ ) trouve une solution dans une opération de normalisation effectuée sur les fonctions de pondération, si celles-ci ne respectent pas la propriété de convexité en raison du mauvais choix initial de ces bornes.

### 2.3.2 Non respect de la propriété de localité des sous-modèles

Un autre inconvénient de la méthode proposée pour obtenir la forme multimodèle concerne l'interprétation physique du multimodèle. Cet inconvénient est que chaque sous-modèle perd son sens local (comme dans le cas d'un MM obtenu par linéarisation autour des points de fonctionnement). Cet effet est couramment cité comme "réactivation des modes" dans la littérature et il peut être remarqué dans l'exemple précédent (voir figures 2.6 et 2.7). Si on souhaite avoir une structure multimodèle possédant la propriété de localité des sous-modèles, alors des solutions alternatives doivent être proposées.

On va considérer un modèle statique afin de faciliter la présentation d'une solution alternative possible à la structure multimodèle non locale. Considérons le modèle suivant :

$$y(x) = x^3 - 2x - 1, \quad x \in [-2; 2.5] \quad (2.119)$$

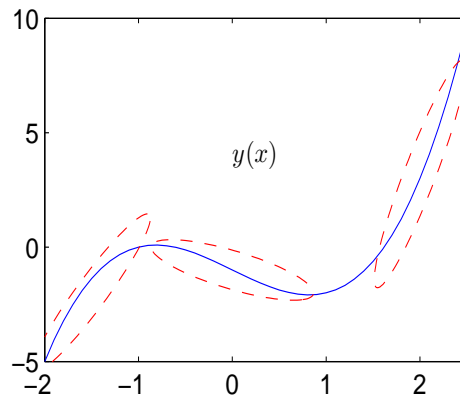


Figure 2.8 – Choix intuitive de la structure multimodèle ayant des sous-modèles locales

Ce modèle est illustré à la figure 2.8. Une première approche intuitive propose la construction d'un multimodèle à trois sous-modèles linéaires définis dans les zones délimitées par les ellipses. Cependant, en appliquant la méthode analytique proposée précédemment, la structure multimodèle est composée seulement de deux sous-modèles linéaires. En effet, ceci est réalisé en définissant la variable de prémisse :

$$z(x) = x^2 - 2 \quad (2.120)$$

On peut écrire la forme LPV :

$$y(x) = z(x)x - 1 \quad (2.121)$$

qui contient un terme constant par la suite assimilé dans la structure des sous-modèles linéaires. En utilisant la transformation polytopique convexe, on peut réaliser la décomposition suivante :

$$z(x) = \frac{z(x) - z_{min}}{z_{max} - z_{min}} z_{max} + \frac{z_{max} - z(x)}{z_{max} - z_{min}} z_{min} \quad (2.122)$$

où  $z_{min} = -2$  et  $z_{max} = 4.25$ . Les fonctions de pondération sont définies par :

$$\mu_1(x) = \frac{x^2 - 2 - z_{min}}{z_{max} - z_{min}} \quad (2.123)$$

$$\mu_2(x) = \frac{z_{max} - x^2 + 2}{z_{max} - z_{min}} \quad (2.124)$$

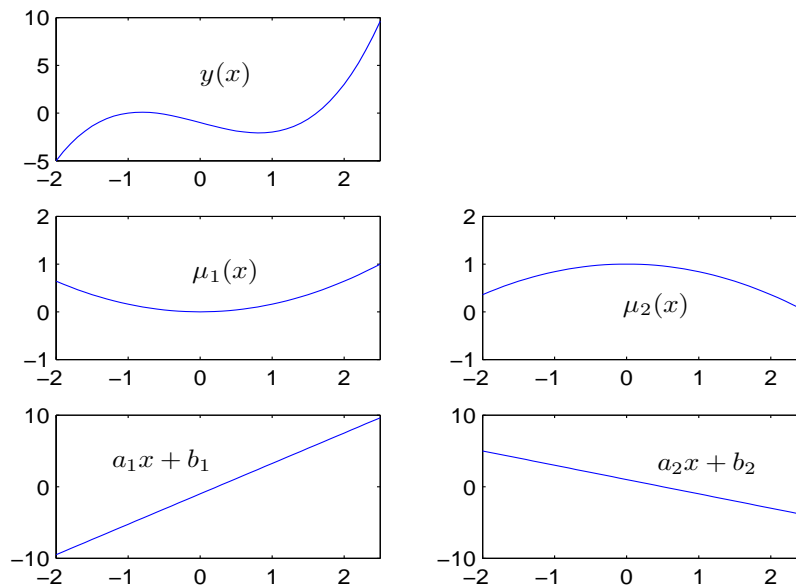


Figure 2.9 – Structure multimodèle non locale

Les fonctions de pondération construites possèdent les propriétés de convexité. On peut donc réécrire le terme constant de (2.121) comme  $1 = \mu_1(x) + \mu_2(x)$ . Le modèle est écrit comme suit :

$$y(x) = [\mu_1(x)z_{max} + \mu_2(x)z_{min}]x - [\mu_1(x) + \mu_2(x)] \quad (2.125)$$

$$= \mu_1(x)(z_{max}x - 1) + \mu_2(x)(z_{min}x - 1) \quad (2.126)$$

Finalement, la structure multimodèle équivalente au modèle linéaire statique (2.119) est donnée par :

$$y(x) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x)(a_i x + b_i) \quad (2.127)$$

où les modèles linéaires sont

$$y_i = a_i x + b_i, \quad i = 1, 2$$

avec les définitions :

$$a_1 = z_{max}, \quad a_2 = z_{min}, \quad b_1 = b_2 = -1$$

La figure 2.9 permet de visualiser la structure multimodèle équivalente au modèle statique (2.119). Il faut remarquer que cette structure est caractérisée par deux modèles linéaires de pentes opposées et que le premier modèle est majoritaire (i.e.  $\mu_1 > 0.5$ ) dans deux intervalles :  $[-2; -1.8]$  et  $[2; 2.5]$ . Ainsi, le phénomène de la réactivation de mode est présent à travers le premier modèle linéaire.

Afin d'obtenir un multimodèle qui respecte la propriété de localité des sous-modèles on va procéder de façon inverse en fixant tout d'abord les sous-modèles linéaires, et en déterminant ensuite les fonctions de pondération correspondantes. On considère toujours deux sous-modèles linéaires définis comme suit :

$$y_1^{loc}(x) = a_1^{loc}x + b_1^{loc} \quad (2.128a)$$

$$y_2^{loc}(x) = a_2^{loc}x + b_2^{loc} \quad (2.128b)$$

Les paramètres  $a_i^{loc}$ ,  $b_i^{loc}$ ,  $i = 1, 2$  sont choisis au départ de façon à ce que le modèle  $y_1(x)$  représente le modèle non linéaire statique  $y(x)$  sur l'intervalle  $[-2; 0]$  et le modèle  $y_2(x)$  sur l'intervalle  $[1; 2.5]$ . Les paramètres des deux modèles linéaires (2.128) sont déterminés localement dans les deux intervalles indiquées en utilisant l'estimateur des moindres carrés ( $a_1^{loc} = 10$ ,  $b_1^{loc} = 15$ ,  $a_2^{loc} = 14.5$ ,  $b_2^{loc} = -26.75$ ). Entre ces deux intervalles, la description du modèle est le résultat de l'interpolation des deux modèles linéaires. Sachant que la structure du multimodèle à construire est définie par :

$$y(x) = \mu_1^{loc}(x)y_1^{loc} + \mu_2^{loc}(x)y_2^{loc} \quad (2.129)$$

et que  $\mu_2^{loc}(x) = 1 - \mu_1^{loc}(x)$  on peut déduire les fonctions de pondération du multimodèle :

$$\mu_1^{loc}(x) = \frac{y(x) - a_2^{loc}x - b_2^{loc}}{(a_1^{loc} - a_2^{loc})x + b_1^{loc} - b_2^{loc}} \quad (2.130)$$

$$\mu_2^{loc}(x) = 1 - \mu_1^{loc}(x) \quad (2.131)$$

Cette nouvelle structure possède la propriété de localité des sous-modèles, comme le montre la figure 2.10. De plus, chaque fonction de pondération est active dans un intervalle particulier.

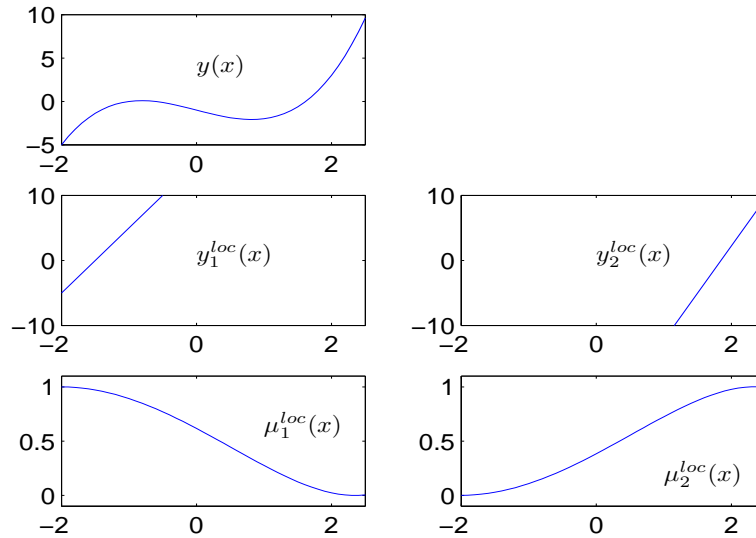


Figure 2.10 – Structure multimodèle ayant la propriété de localité

En général, pour des systèmes non linéaires quelconques, ce procédé peut être appliqué en définissant des modèles linéaires qui représentent le comportement du système dans des zones de fonctionnement choisies sur des critères physiques.

## 2.4 Extension aux modèles à base de blocs structurés

### 2.4.1 Introduction

Un nombre important de processus peuvent être représentés et approchés par des modèles de type Hammerstein (H) ou Wiener (W) [Yeh, 2007] ou un mélange de ces deux types de modèles (Hammerstein-Wiener (HW) et Wiener-Hammerstein (WH)). Des études sur l'identification des systèmes de type Hammerstein-Wiener ont été proposées récemment ([Vörös, 2007; Wang et Ding, 2008; Yeh, 2007]). De même, quelques travaux portant sur l'identification [Jia et al., 2005] ou le contrôle prédictif [Jurado, 2006] de systèmes représentés par des modèles flous de type Hammerstein ont été réalisés, la partie non-linéaire de la structure Hammerstein étant approchée par un modèle flou.

Par la suite on va traiter ce type de modèles, en essayant de les transformer sous une forme multimodèle. Ensuite, une démarche de généralisation aux modèles à base de blocs structurés dynamiques ou statiques est proposée. Tout d'abord, des formes multimodèles sont proposées pour les modèles de type Hammerstein et Wiener aux sections 2.4.2 et 2.4.3. Comme tous ces modèles représentent des structures de type série, un développement semblable pour différentes structures en parallèle est proposé ensuite à la section 2.4.4. Un exemple est présenté à la section 2.4.5 afin d'illustrer ces points théoriques.

En se basant sur les développements réalisés au cours de cette section, la généralisation présentée à la section 2.4.6 contient quelques éléments pour construire une forme multimodèle.

Afin d'englober toutes les situations possibles, on propose de traiter la situation où deux blocs, représentés chacun par un MM, sont disposés respectivement en série et en parallèle. Pour chacune de situations, une structure MM globale est obtenue.

### Structure en parallèle

Soit la structure en parallèle présentée à la figure 2.11, où deux blocs non-linéaires sont représentés par des multimodèles :

$$(MM_1) : \quad \dot{x}_1(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \mu_i^1(x_1, u) [A_i^1 x_1(t) + B_i^1 u(t)] \quad (2.132a)$$

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \mu_i^1(x_1, u) [C_i^1 x_1(t) + D_i^1 u(t)] \quad (2.132b)$$

$$(MM_2) : \quad \dot{x}_2(t) = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j^2(x_2, u) [A_j^2 x_2(t) + B_j^2 u(t)] \quad (2.133a)$$

$$y_2(t) = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j^2(x_2, u) [C_j^2 x_2(t) + D_j^2 u(t)] \quad (2.133b)$$

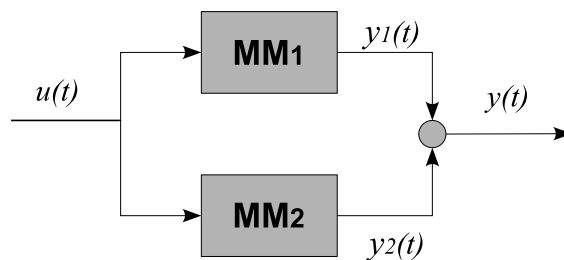


Figure 2.11 – Schéma d'une structure en parallèle

Soit l'état augmenté

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

et les matrices :

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_i^1 & 0 \\ 0 & A_j^2 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} B_i^1 \\ B_j^2 \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = [C_i^1 \quad C_j^2], \quad D_{ij} = D_i^1 + D_j^2$$

La sortie du MM global est donnée par :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (2.135)$$

Un MM unique représentant le système constitué par les deux blocs en parallèle est donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \mu_i^1(x, u) \mu_j^2(x, u) [A_{ij}x(t) + B_{ij}u(t)] \quad (2.136a)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \mu_i^1(x, u) \mu_j^2(x, u) [C_{ij}x(t) + D_{ij}u(t)] \quad (2.136b)$$

Dans le cas particulier où les variables de prémisses sont connues aux deux MM on pourra obtenir un MM global dont le nombre de sous-modèles est inférieur à  $r_1 \cdot r_2$ .

### Structure en série

Soit la structure en série présentée à la figure 2.12, où deux blocs non-linéaires sont représentés par des multimodèles comme dans (2.132) et (2.133), avec les propriétés suivantes : la sortie du ( $MM_1$ ) constitue l'entrée du ( $MM_2$ ) et la sortie  $y_2$  de ce dernier constitue la sortie  $y$  du MM global, ce qui nous permet d'écrire :

$$(MM_2) : \quad \dot{x}_2(t) = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j^2(x_2, u) [A_j^2 x_2(t) + B_j^2 y_1(t)] \quad (2.137a)$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_j^2(x_2, u) [C_j^2 x_2(t) + D_j^2 y_1(t)] \quad (2.137b)$$

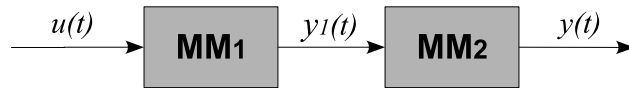


Figure 2.12 – Schéma d'une structure en série

En utilisant (2.132) et le vecteur d'état augmenté défini comme dans (2.134) on obtient la forme MM du système constitué par les deux blocs en série :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \mu_i^1(x, u) \mu_j^2(x, u) [A_{ij}x(t) + B_{ij}u(t)] \quad (2.138a)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \mu_i^1(x, u) \mu_j^2(x, u) [C_{ij}x(t) + D_{ij}u(t)] \quad (2.138b)$$

où les matrices constantes caractérisant les sous-modèles sont définies par :

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_i^1 & 0 \\ B_j^2 C_i^1 & A_j^2 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} B_i^1 \\ B_j^2 D_i^1 \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = [C_i^1 D_j^2 \quad C_j^2], \quad D_{ij} = D_i^1 D_j^2$$

### 2.4.2 Modèles de type Hammerstein

Ce type de modèle fait partie des modèles à base de blocs structurés. Il est constitué par un élément non linéaire statique suivi par un élément dynamique linéaire (figure 2.13).

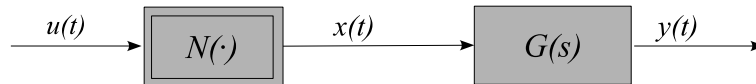


Figure 2.13 – Structure de type Hammerstein

On considère le cas des systèmes Hammerstein multi-variables (voir figure 2.14), où les vecteurs de variables sont  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^l$  et où  $N : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction matricielle non-linéaire statique. Ce modèle peut être représenté de façon générale comme suit :

$$\begin{cases} x(t) = N(u(t)) \\ Y(s) = G(s)X(s) \end{cases} \quad (2.139)$$

où  $N$  est une fonction non-linéaire statique,  $s$  l'opérateur de Laplace et où  $G(s)$  est une fonction matricielle dont la forme d'état est donné par  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ .

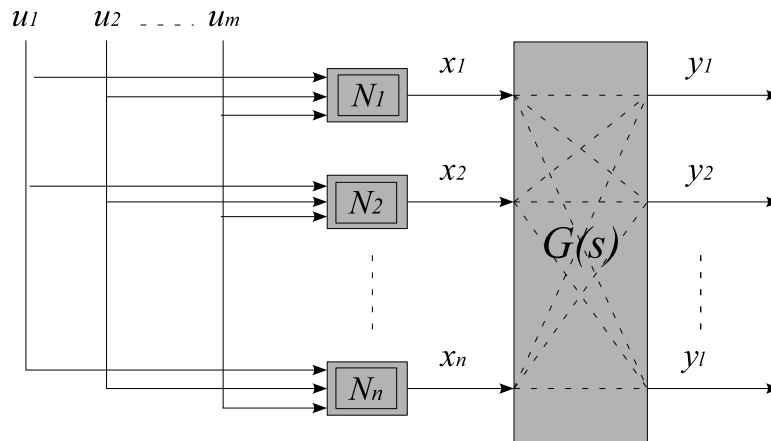


Figure 2.14 – Structure Hammerstein MIMO

En utilisant une des formes canoniques d'état, on peut réécrire le système (2.139) comme suit :

$$\begin{cases} x(t) = N(u(t)) \\ \dot{\xi}(t) = A \xi(t) + B x(t) \\ y(t) = C \xi(t) + D x(t) \end{cases} \quad (2.140)$$

On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_1(u)}{m.u_1} & \cdots & \frac{N_1(u)}{m.u_m} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{N_n(u)}{m.u_1} & \cdots & \frac{N_n(u)}{m.u_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

On définit les variables de prémisses suivantes :

$$z_{i,j}(u) = \frac{N_i(u)}{m.u_j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.142)$$

On applique la TPC pour décomposer les variables de prémisses :

$$z_{i,j}(u(t)) = \sum_{k=1}^2 \mu_{i,j}^k(u(t)) z_{i,j}^k \quad (2.143)$$

où les fonctions de pondération  $\mu_{i,j}^1(u)$  et  $\mu_{i,j}^2(u)$  ( $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, m$ ) sont définies comme suit :

$$\mu_{i,j}^1(u(t)) = \frac{z_{i,j}(u(t)) - z_{i,j}^2}{z_{i,j}^1 - z_{i,j}^2} \quad (2.144)$$

$$\mu_{i,j}^2(u(t)) = \frac{z_{i,j}^1 - z_{i,j}(u(t))}{z_{i,j}^1 - z_{i,j}^2}$$

$$z_{i,j}^1 = \max_u z_{i,j}(u) \quad (2.145)$$

$$z_{i,j}^2 = \min_u z_{i,j}(u)$$

Conformément aux définitions et transformations réalisées on peut écrire le terme  $Bx(t)$  sous une forme MM :

$$Bx(t) = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{\bar{n},1} & \cdots & b_{\bar{n},n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,1}(u) & \cdots & z_{1,m}(u) \\ \vdots & \ddots & \\ z_{n,1}(u) & \cdots & z_{n,m}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_{i,j}(u) b_{k,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n z_{i,j}(u) b_{\bar{n},i} \end{bmatrix}_{\substack{k=1, \dots, \bar{n} \\ j=1, \dots, m}} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

En substituant ce terme dans le système (2.140) on obtient la forme MM de la structure de type Hammerstein. En effet, un modèle LTI est un MM (avec  $r = 1$ ) et deux MM en série définissent un MM.



### 2.4.3 Modèles de type Wiener

Ce type de modèle est également à base de blocs structurés. Il est constitué par un élément dynamique linéaire suivi par un élément non-linéarité statique (figure 2.15).

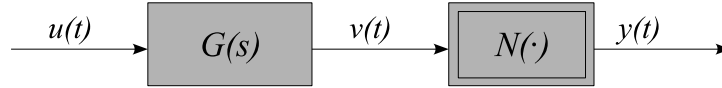


Figure 2.15 – Structure de type Wiener

Ce modèle peut être représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} V(s) = G(s)U(s) \\ y(t) = N(v(t)) \end{cases} \quad (2.148)$$

La transformation du bloc non linéaire en MM est analogue au cas Hammerstein : on réécrit la sortie  $y(t)$  sous la forme (2.145). On réécrit la sortie du système (2.148) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_1(v)}{p.v_1} & \dots & \frac{N_1(v)}{p.v_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_l(v)}{p.v_1} & \dots & \frac{N_l(v)}{p.v_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

On supposant que les non-linéarités statiques  $N_j(v)$  ( $j = 1, \dots, l$ ) sont bornées, on peut appliquer la TPC (2.143), (2.144), (2.145) pour décomposer les variables de prémisse suivantes :

$$z_{i,j}(v) = \frac{N_i(v)}{p.v_j}, \quad i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.150)$$

et obtenir finalement une représentation MM de  $y(t) = N(v(t))$ . La fonction de transfert  $G(s)$  étant un MM avec  $r = 1$ , on a bien un MM global.

### 2.4.4 Systèmes dynamiques non linéaires basés sur des structures en série ou en parallèle

Les modèles de type Wiener (W) et Hammerstein (H) représentent des systèmes non linéaires basés sur des structures en série des blocs linéaires ou non linéaires. Un MM pour ce type de modèle a pu être déduit. On a vu qu'il est possible de réaliser la même extension pour des systèmes composés de blocs linéaire et/ou non linéaires qui sont en série ou en parallèle. Par exemple, les systèmes de type Hammerstein-Wiener (H-W) (figure A.1), Wiener-Hammerstein (WH) (figure A.2) qui sont des exemples de structures dont les blocs sont disposés en série, ou bien des systèmes dynamiques non linéaires en cascade (figure A.3) dont les blocs sont disposés en parallèle. D'autres structures constituant des combinaisons en série et/ou en parallèle des modèles de type H, W, H-W, W-H peuvent exister (voir figures A.4, A.5, A.6). Toutes ces structures sont illustrées en annexe A. Tous ces cas ne seront pas traités en détail dans la suite, car le procédé d'obtention de la forme MM est similaire dans tous les cas et il est facilement déduit des structures série et parallèle présentées au début de cette section.

Dans ce qui suit on va présenter un exemple pour illustrer la démarche de généralisation de la méthode aux systèmes à base de blocs structurés.

### 2.4.5 Exemple illustratif

Soit le système à temps discret non-linéaire à deux entrées et deux sorties :

$$y_1(k) = \frac{q.b_1}{1-q.f_1}u_1(k) + K_1 \left[ \frac{q.b_2}{1-q.f_2}u_2(k) \right]^{\sin(u_1(k))} \quad (2.151a)$$

$$y_2(k) = \frac{q.b_2}{1-q.f_2}u_2(k) + K_2 \left[ \frac{q.b_1}{1-q.f_1}u_1(k) \log(y_1(k)) \right] \quad (2.151b)$$

où  $K_1, K_2, b_1, b_2, f_1, f_2$  sont constantes et  $q$  représente l'opérateur retard des systèmes à temps discret.

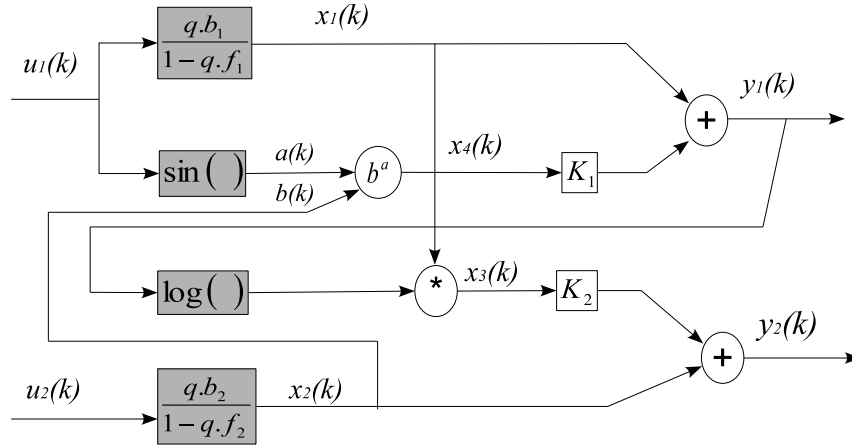


Figure 2.16 – Schéma exemple

Ce modèle peut être représenté par le schéma donné à la figure 2.16 et défini par l'ensemble des équations

$$y_1(k+1) = x_1(k+1) + K_1 x_4(k+1) \quad (2.152a)$$

$$y_2(k+1) = x_2(k+1) + K_2 x_3(k+1) \quad (2.152b)$$

$$x_1(k+1) = b_1 u_1(k) + f_1 x_1(k) \quad (2.152c)$$

$$x_2(k+1) = b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k) \quad (2.152d)$$

$$x_3(k+1) = x_1(k+1) \log(y_1(k+1)) \quad (2.152e)$$

$$x_4(k+1) = [x_2(k+1)]^{\sin(u_1(k))} \quad (2.152f)$$

En remplaçant les variables d'état dans les expressions des deux sorties (2.152a)-(2.152b) et

ensuite l'expression de  $y_1(k+1)$  de (2.152a) dans l'équation d'état (2.152e), on obtient :

$$\begin{aligned}
 y_1(k+1) &= b_1 u_1(k) + f_1 x_1(k) + K_1 [(b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k))]^{\sin(u_1(k))} \\
 y_2(k+1) &= b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k) + K_2 [(b_1 u_1(k) + f_1 x_1(k)) \log(y_1(k+1))] \\
 x_1(k+1) &= b_1 u_1(k) + f_1 x_1(k) \\
 x_2(k+1) &= b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k) \\
 x_3(k+1) &= [b_1 u_1(k) + f_1 x_1(k)] \log \left\{ b_1 u_1(k) + f_1 x_1(k) + K_1 [b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k)]^{\sin(u_1(k))} \right\} \\
 x_4(k+1) &= [b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k)] [b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k)]^{\sin(u_1(k))-1}
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

On veut écrire le système (2.153) sous une forme multimodèle, ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^r \mu_i(u, x) (A_i x(k) + B_i u(k)) \\ y(k) = C x(k) \end{cases} \tag{2.154}$$

Pour réaliser cette transformation, on réécrit le système (2.152) sous la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(u(k), x(k)) x(k) + B(u(k), x(k)) u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases} \tag{2.155}$$

où :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}, \quad u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}, \quad y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}$$

et où les matrices  $A(u, x) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $B(u, x) \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  et  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ .

L'examen des équations (2.152) permet d'identifier deux variables de prémisse :

$$z_1(u(k), x(k)) = \log \left\{ b_1 u_1(k) + f_1 x_1(k) + [b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k)]^{\sin(u_1(k))} \right\} \tag{2.156a}$$

$$z_2(u(k), x(k)) = [b_2 u_2(k) + f_2 x_2(k)]^{\sin(u_1(k))-1} \tag{2.156b}$$

Les matrices  $A(u, x)$ ,  $B(u, x)$  et  $C$  de (2.155) ont la forme :

$$A(u, x) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ f_1 z_1(u, x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 z_2(u, x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.157a}$$

$$B(u, x) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ b_1 z_1(u, x) & 0 \\ 0 & b_2 z_2(u, x) \end{bmatrix} \tag{2.157b}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & K_1 \\ 0 & 1 & K_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.157c}$$

Il faut remarquer que  $z_1$  dépend de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $x_1$  et  $x_2$ , alors que  $z_2$  dépend de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $x_2$ . En supposant que  $u_1 \in (0, a)$ ,  $u_2 \in (0, b)$ ,  $x_1 \in (0, c)$  et  $x_2 \in (0, d)$ , avec  $a \geq 2\pi$ ,  $b, c, d > 0$  des constantes, on peut calculer les maxima et les minima de  $z_1(u, x_1, x_2)$  et  $z_2(u, x_2)$ , qu'on note  $z_{i,1}$  et  $z_{i,2}$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant la transformation polytopique convexe, on construit les fonctions de partition  $F_{i,1}$  et  $F_{i,2}$  ( $i = 1, 2$ ). Le multimodèle comporte quatre sous-modèles et les fonctions de pondération (2.154) sont :

$$\begin{aligned}
 \mu_1(u, x) &= F_{1,1}(u, x)F_{2,1}(u, x) \\
 \mu_2(u, x) &= F_{1,1}(u, x)F_{2,2}(u, x) \\
 \mu_3(u, x) &= F_{1,2}(u, x)F_{2,1}(u, x) \\
 \mu_4(u, x) &= F_{1,2}(u, x)F_{2,2}(u, x)
 \end{aligned} \tag{2.158}$$

Les matrices  $A_i$  et  $B_i$  sont calculées en utilisant les maxima et les minima de  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ f_1 z_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 z_{2,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ b_1 z_{1,1} & 0 \\ 0 & b_2 z_{2,1} \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ f_1 z_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 z_{2,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ b_1 z_{1,1} & 0 \\ 0 & b_2 z_{2,2} \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ f_1 z_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 z_{2,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_3 &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ b_1 z_{1,2} & 0 \\ 0 & b_2 z_{2,1} \end{bmatrix} \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ f_1 z_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 z_{2,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_4 &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ b_1 z_{1,2} & 0 \\ 0 & b_2 z_{2,2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On peut noter que la matrice  $A(u, x)$ , dans la forme quasi-LPV choisie, contient deux colonnes nulles, ce qui peut engendrer des difficultés ultérieures dans les études d'observabilité/contrôlabilité. Comme alternative, on peut construire deux nouvelles variables de prémisses :

$$z_3(u, x) = \frac{x_1}{x_4} z_1(u, x) \tag{2.159}$$

$$z_4(u, x) = \frac{x_2}{x_3} \tag{2.160}$$

Avec ces variables de prémisses, la matrice  $A(u, x)$  a une nouvelle structure :

$$A(u, x) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 z_4(u, x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 z_3(u, x) \\ 0 & f_2 z_2(u, x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

Les matrices  $B$  et  $C$  restent identiques à celles définies en (2.157b) et (2.157c). Dans ce cas, ayant quatre variables de prémisses on obtient un multimodèle avec  $2^4$  sous-modèles.

En conclusion, si la structure initiale du multimodèle, qui est la plus évidente et qui est conçue à partir des variables de prémisses  $z_j$  ( $j = 1, 2$ ) de (2.156) est convenable, alors le choix de ces variables de prémisses se relève tout à fait adéquat. Sinon, on cherche une autre structure qui convient aux objectifs, mais qui contiendra peut être plus de sous-modèles que celle choisie initialement.

À partir de cet exemple et du formalisme de passage en multimodèle de différents types de systèmes à base de blocs structurés (Hammerstein, Wiener), présentés dans les sections de 2.4.2 à 2.4.4, on propose dans ce qui suit une généralisation aux modèles à base de blocs structurés quelconques.

## 2.4.6 Généralisation aux modèles à base de blocs structurés quelconques

On considère un système dynamique quelconque caractérisé par  $m$  entrées  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $l$  sorties  $y \in \mathbb{R}^l$ . On suppose que ce système associe  $n$  fonctions de transfert  $L_i$  ( $i \in \mathcal{I}_L$ ) aux  $q$  gains non-linéaires  $NL_j$  ( $j \in \mathcal{I}_{NL}$ ), comme présenté à la figure 2.17.

Notons  $\mathcal{I}_L$  l'ensemble de dimension  $n$  qui contient les indices correspondants aux blocs linéaires, ainsi que l'ensemble  $\mathcal{I}_{NL}$  de dimension  $q$ , qui représente l'ensemble des indices correspondants aux blocs non-linéaires. Les deux ensembles ont les propriétés suivantes :

$$\mathcal{I}_L \cup \mathcal{I}_{NL} = \{1, 2, \dots, b\} \quad (2.162)$$

$$\mathcal{I}_L \cap \mathcal{I}_{NL} = \emptyset \quad (2.163)$$

où  $b$  est le nombre total des blocs qui constituent le schéma global.

Les fonctions de transfert associées aux sous-ensembles linéaires peuvent être exprimées par :

$$(L_i) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i e_i(t) \\ s_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_L \quad (2.164)$$

où  $e_i$  et  $s_i$  ( $i \in \mathcal{I}_L$ ) sont respectivement les entrées et les sorties intermédiaires des "sous-ensembles" dynamiques qui composent le système global, et  $x_i$  ( $i \in \mathcal{I}_L$ ) les variables d'état du système. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  sont des matrices connues de dimensions appropriées.

Les non-linéarités du système sont représentées par les fonctions  $f_j$  ( $j \in \mathcal{I}_{NL}$ ) qui lient les entrées  $e_j$  aux sorties  $s_j$  intermédiaires des "sous-ensembles" statiques non-linéaires :

$$(NL_j) \quad s_j = f_j(e_j) \quad j \in \mathcal{I}_{NL} \quad (2.165)$$

La figure 2.17 présente un schéma général d'un système comportant des gains non-linéaires. Ce

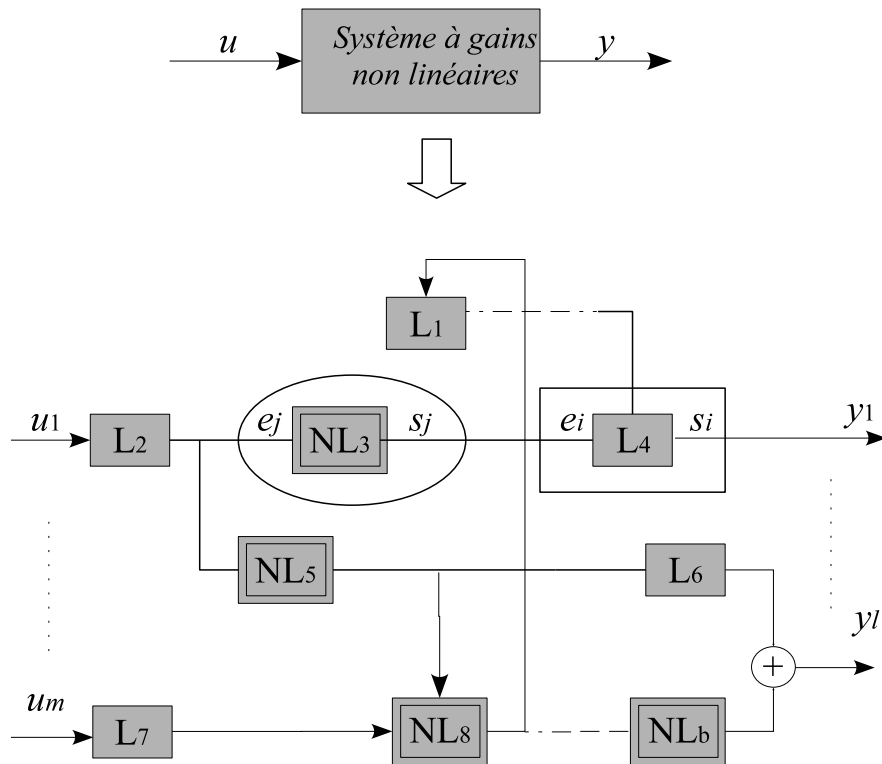


Figure 2.17 – Représentation générique d'un système dynamique à gains non-linéaires

schéma réunit quelques éléments essentiels du système à analyser.

On veut transformer ce système sous une forme multimodèle. Les  $q$  non-linéarités  $f_j$  ( $j \in \mathcal{I}_{NL}$ ) contenues dans le système à gains non-linéaires vont déterminer la structure multimodèle. Tenant compte de toutes les relations linéaires dynamiques (2.164) et non-linéaires statiques (2.165) définissant le système, il faut le réécrire en fonction des variables d'état  $x$  et des variables d'entrée et de sortie globales  $u$  et  $y$ . Si on considère la numérotation des blocs comme présentée à la figure 2.17, on a les relations suivantes :

$$(L_1) : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 s_8(t) \\ s_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$

$$(L_2) : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_1(t) \\ s_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases}$$

$$(NL_3) : s_3(t) = f_3(s_2(t))$$

$$(L_4) : \begin{cases} \dot{x}_4(t) = A_4 x_4(t) + B_4 s_3(t) \\ s_4(t) = C_4 x_4(t) \end{cases}$$

$$(NL_5) : s_5(t) = f_5(s_2(t))$$

$$\begin{aligned}
 (L_6) & : \begin{cases} \dot{x}_6(t) = A_6x_6(t) + B_6s_5(t) \\ s_6(t) = C_6x_6(t) \end{cases} \\
 (L_7) & : \begin{cases} \dot{x}_7(t) = A_7x_7(t) + B_7u_m(t) \\ s_7(t) = C_7x_7(t) \end{cases} \\
 (NL_8) & : s_8(t) = f_8(s_7(t)) \\
 (NL_b) & : \begin{aligned} s_b(t) &= f_b(s_8(t)) \\ s_1(t) &= s_4(t) \\ s_\ell(t) &= s_6(t) + s_b(t) \end{aligned} \tag{2.166}
 \end{aligned}$$

Par substitution on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= A_1x_1(t) + B_1f_8(C_7x_7(t)) \\
 \dot{x}_2(t) &= A_2x_2(t) + B_2u_1(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= A_4x_4(t) + B_4f_3(C_2x_2(t)) \\
 \dot{x}_6(t) &= A_6x_6(t) + B_6f_5(C_2x_2(t)) \\
 \dot{x}_7(t) &= A_7x_7(t) + B_7u_m(t) \\
 &\vdots \\
 y_1(t) &= C_4x_4(t) \\
 &\vdots \\
 y_\ell(t) &= C_6x_6(t) + f_{N_b}(f_8(C_7x_7(t))) \tag{2.167}
 \end{aligned}$$

De façon générale on est capable d'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \\ y(t) = G(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{2.168}$$

En conclusion, on peut obtenir l'écriture générale d'un système à gains non-linéaires quelconque, comme dans (2.168), où  $F$  et  $G$  sont déterminés en fonction des différents blocs fonctionnels constituant le système. Ainsi, on a obtenu la représentation d'état du système considéré et on peut appliquer la méthode systématique de transformation proposée précédemment afin d'obtenir une structure multimodèle.

**Remarque 2.7.** *La décomposition des variables de prémisses, en utilisant les maxima et les minima de ces variables, peut se faire seulement si tous les blocs non linéaires sont caractérisés par des non-linéarités bornées. Il existe des cas particuliers, comme l'hystérésis ou des fonctions affines par morceaux, pour lesquelles on ne peut pas proposer une telle décomposition.*

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre se veut être la présentation d'une méthode analytique et générale de décomposition d'un système non linéaire sous la forme multimodèle. La transformation proposée conduit

à un système parfaitement équivalent au système initial, ce qui était l'objectif fixé au départ. Ce n'est pas une réduction de modèle classique, qui implique en général une réduction d'ordre ou une perte de signification des différents paramètres physiques, mais une réduction de complexité de modèle. Ainsi, cette décomposition permet d'étudier des systèmes non linéaires complexes pour les études de commande et de diagnostic grâce à la représentation de ces systèmes sous forme multimodèle.

Cette méthode peut être considérée comme une généralisation de la méthode par secteur non linéaire, car elle propose de façon systématique le passage vers un multimodèle équivalent au système initial -passant par le choix de la forme quasi-LPV, l'identification des variables de prémisses, la décomposition de ces variables et finalement l'obtention des matrices et des fonctions de pondération.

Pour résumer, les points essentiels de ce chapitre sont les suivants :

- Quelques critères de choix des variables de prémisses adaptés aux études de stabilité, de stabilisation, de reconstruction d'état et de diagnostic ont été proposés.
- L'équivalence entre le système non linéaire et le multimodèle a été démontré dans le cas général des systèmes représentés sous la forme d'état.
- Comme toute méthode, quelques limitations sont apparues lors du développement et de l'utilisation de l'approche multimodèle : l'aspect physique local qui n'est pas toujours respecté par les sous-modèles linéaires du multimodèle et l'inaccessibilité des bornes des variables de prémisses. Des solutions ont été proposées pour résoudre ces difficultés.
- Finalement, afin de rendre plus complète la présentation de cette méthode, une extension aux modèles à base de blocs structurés a été proposée. Les structures de base ont été présentées en premier : la structure de type Wiener et de type Hammerstein. Par la suite il a été montré que par agrégation successives des blocs en série ou en parallèle, tout système à base de blocs linéaires et/ou non-linéaire peut se mettre sous forme MM en utilisant la méthode de passage d'un système non linéaire à un multimodèle.





# 3

## Systemes à échelles de temps multiples

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>3.2</b>	<b>Théorie des perturbations singulières</b>	<b>92</b>
3.2.1	Forme standard des systèmes singuliers	92
<b>3.3</b>	<b>Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières</b>	<b>93</b>
3.3.1	Positionnement du problème	93
3.3.2	Méthode basée sur un changement de coordonnées	94
3.3.3	Identification des échelles de temps. Méthode d'homotopie	103
3.3.4	Généralisation	105
<b>3.4</b>	<b>Représentation multimodèle pour les systèmes singuliers</b>	<b>111</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>112</b>

---

*"La science comporte des savoirs jamais définitivement acquis et des questionnements incessants sur chaque parcelle d'inconnu et de connu. Le bon sens n'est qu'un ramassis de préjugés"* Albert Einstein

### 3.1 Introduction

En général, dans l'étude des systèmes non-linéaires dynamiques, on est confronté à des problèmes très variés d'estimation d'état, d'analyse de stabilité, d'observation, de commande et de diagnostic. Pour ces problèmes, les difficultés majeures sont liées à la nature du modèle mathématique qui décrit le comportement réel du système, ce modèle pouvant devenir de plus en plus complexe si on souhaite avoir une représentation très fidèle du système réel.

Si une représentation minutieuse du système est souhaitée, on conserve la forme initiale du modèle, en la transformant sous une forme équivalente plus accessible aux études envisagées. La méthode analytique d'obtention d'un multimodèle, qui permet de modifier la forme d'un système non-linéaire dynamique en un multimodèle, peut répondre à cette demande. Si, en revanche, une représentation exhaustive n'est pas nécessaire pour les études envisagées, une réduction du modèle mathématique peut être réalisée.

La modélisation d'un processus physique complexe commence généralement par le choix des variables à utiliser pour sa description et par le choix des grandeurs permettant d'agir sur son évolution. Ces variables, appelées variables d'état et de commande, sont choisies, dans la mesure du possible, pour avoir une signification physique (position, température, pression, force, puissance etc). Une fois les variables choisies, les relations mathématiques les liant sont dictées par les lois de comportement du système considéré ou à défaut par des lois statistiques.

Dans le contexte de la modélisation d'un processus physique, différentes théories ont été développées, suivant le type et les caractéristiques des modèles. Un cas bien connu est celui des procédés contenant des échelles de temps différentes, ce qui est assez souvent rencontré lors de l'étude de processus réels. Parmi les relations mathématiques liant les différentes variables du processus considéré, certaines peuvent être dynamiques et d'autres statiques. De plus, si un système est décrit uniquement par des relations de type dynamique, ces dernières peuvent traduire des dynamiques lentes ou des dynamiques rapides. Si un système réel est décrit par les deux types de relations, alors on a ce qu'on appelle un système à échelles de temps multiples. Par exemple, dans la forme standard des systèmes à perturbations singulières à deux échelles de temps, ces variables sont explicitement séparées à l'aide d'un paramètre  $\varepsilon$ , appelé "*paramètre de perturbation singulière*", qui affecte la dérivée par rapport au temps du vecteur des états rapides. Pour des systèmes à plusieurs échelles de temps, différents paramètres  $\varepsilon_i$  définissent les échelles de temps caractérisant le système. Pourtant, il n'est pas toujours évident de modéliser un procédé sous forme singulière standard à deux ou plusieurs échelles de temps. Si pour certains processus on a des connaissances *a priori* sur les dynamiques lentes et rapides, on peut utiliser directement la forme standard, mais cette situation reste un cas particulier. En effet, de nombreux systèmes sont caractérisés par des échelles de temps multiples sans être directement modélisés sous forme singulière standard.

Un procédé chimique constitue un exemple typique pour mettre en évidence le caractère

multi-échelle. Pour étudier de tels systèmes, la théorie des perturbations singulières [O'Malley et Robert, 1991] [Kumar et al., 1998] fournit des outils souvent utilisés pour mettre en évidence la décomposition systématique d'un système en plusieurs échelles de temps. Il existe de nombreuses études sur l'application de cette théorie pour la réduction de modèles, l'analyse et le contrôle des systèmes à deux échelles de temps [Cadet et al., 2004], [Dong et al., 2007], [O'Malley et Robert, 1991], [Van Breusegem et Bastin, 1991], [Vora et al., 2006].

La première difficulté dans l'étude de ce type de systèmes est la séparation en modes lents et rapides des différentes dynamiques du système. Dans [Van Breusegem et Bastin, 1991], [Dong et al., 2007] cette séparation est réalisée en comparant les paramètres cinétiques du processus biologique étudié. Toutefois, dans le cadre plus général des systèmes non linéaires, cette comparaison n'est pas possible. Ainsi, des méthodes plus générales d'identification de différentes échelles de temps ont été proposées dans la littérature [Robertson, 1992]. Ces méthodes, principalement basées sur l'évaluation des valeurs propres du jacobien correspondant au système linéarisé, seront utilisées et adaptées à nos études dans ce chapitre.

La séparation des échelles de temps multiples permet d'obtenir la forme standard des systèmes à perturbation singulière. Dans le cas limite, quand le paramètre de perturbation singulière  $\varepsilon$  tend vers zéro, le système réduit obtenu est composé d'une partie dynamique exprimée par un système d'équations différentielles et d'une partie statique, exprimée par un système d'équations algébrique. En conséquence, un deuxième point difficile est la résolution du système algébrique. Une méthode couramment utilisée pour contrecarrer cet inconvénient est basée sur un changement de coordonnées [Van Breusegem et Bastin, 1991] et Vora et al. [2006], nécessitant de trouver une transformation linéaire pour éliminer les composantes à dynamiques rapides. Il est important de noter que les nouvelles coordonnées du système dans la forme standard obtenue peuvent ne pas conserver la signification physique des variables initiales. De plus, pour pouvoir appliquer cette technique, le système non linéaire doit respecter quelques contraintes d'ordre structurel. Cependant, comme tous les systèmes non linéaires ne peuvent pas être mis sous cette forme particulière, ces techniques ne s'appliquent pas à toutes les situations.

L'un des objectifs de ce chapitre est de proposer une méthode - en exploitant l'idée du changement de coordonnées - qui soit capable d'éliminer ces contraintes structurelles limitant son utilisation pour des systèmes ayant une structure plus générale. La séparation des échelles de temps est ainsi possible, et dans certains cas lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  la forme standard à perturbation singulière est obtenue.

Ensuite, une représentation multimodèle pour les systèmes singuliers est proposée, en se basant sur la technique développée en chapitre 2. Cette représentation sera utilisée dans le chapitre 4 pour l'estimation d'état des systèmes singuliers représentés sous forme multimodèle.

Ce chapitre est structuré comme suit. En section 3.2 sont présentés quelques éléments sur la théorie des perturbations singulières, la section 3.3 propose une technique de passage d'un système non linéaire classique à forme explicite, sous une forme à perturbations singulières, dans le cas où le système considéré est caractérisé par des échelles de temps multiples. Grâce à la méthode d'homotopie, présentée en section 3.3.3, l'identification des différentes échelles de

temps est possible. En section 3.4 est illustrée la représentation multimodèle pour les systèmes singuliers. Quelques conclusions sont présentées en section 3.5.

## 3.2 Théorie des perturbations singulières

Les relations mathématiques liant les différentes variables décrivant le comportement d'un système sont dictées par les lois de comportement du système considéré et elles peuvent être de deux types : soit dynamique, soit purement statique. Ce type de relations met en évidence des modèles comportant des échelles de temps différentes. Ce type de système est appelé *système singulier* [Dai, 1989]. Cette forme est plus générale que la forme explicite, qui a été déjà prise en compte dans le cadre de la transformation sous une forme multimodèle de manière systématique, en chapitre 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $\dot{x}(t)$  représente sa dérivée par rapport au temps,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représente le vecteur de commande et  $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$  représente le vecteur de sorties mesurées.

### 3.2.1 Forme standard des systèmes singuliers

La forme standard des systèmes singuliers à échelles de temps multiples peut être exprimée comme suit :

$$\varepsilon_j \dot{x}_{f,j}(t) = F_j^f(x_s(t), x_{f,1}(t), \dots, x_{f,P}(t), u(t), \varepsilon), \quad j = 1, \dots, P \quad (3.2a)$$

$$\dot{x}_s(t) = F^s(x_s(t), x_{f,1}(t), \dots, x_{f,P}(t), u(t), \varepsilon) \quad (3.2b)$$

où  $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$  et  $x_{f,j} \in \mathbb{R}^{n_{f,j}}$  sont respectivement les variables d'état lentes et rapides,  $u \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des entrées,  $F_j^f \in \mathbb{R}^{Pj}$ ,  $F^s \in \mathbb{R}^{n_s}$  sont des fonctions vectorielles et  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_P]$  est un vecteur de paramètres petits et positifs, connus sous la terminologie *paramètres de perturbation singulière* et  $\sum_{j=1}^P n_{f,j} + n_s = n$ .

Dans ce qui suit, on va considérer seulement les systèmes caractérisés par deux échelles de temps. Ainsi,  $P = 1$  et on a un seul paramètre  $\varepsilon$  scalaire, ainsi qu'une seule équation dynamique correspondant aux variables d'état rapides. On déduit de l'équation (3.2) la forme standard des systèmes singuliers à deux échelles de temps :

$$\varepsilon \dot{x}_f(t) = F^f(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon) \quad (3.3a)$$

$$\dot{x}_s(t) = F^s(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon) \quad (3.3b)$$

où  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ .

Dans le cas limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'ordre du système différentiel (3.3) dégénère de  $n = n_s + n_f$  à  $n_s$ ,

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

---

et le système devient :

$$0 = F(x_s(t), x_f(t), u(t), 0) \quad (3.4a)$$

$$\dot{x}_s(t) = G(x_s(t), x_f(t), u(t), 0) \quad (3.4b)$$

En résolvant l'ensemble des équations algébriques (3.4a) on obtient la solution :

$$x_f(t) = \sigma(x_s(t), u(t)) \quad (3.5)$$

En remplaçant (3.5) dans l'équation correspondante aux variables lentes (3.4b), on obtient :

$$\dot{x}_s(t) = F^s(x_s(t), \sigma(x_s(t), u(t)), u(t), 0) \quad (3.6)$$

Le système (3.6) est le modèle réduit du système (3.3), qui est représenté dans l'échelle de temps lente. Le système complet s'écrit :

$$\dot{x}_s(t) = F^s(x_s(t), x_f(t), u(t), 0) \quad (3.7a)$$

$$x_f(t) = \sigma(x_s(t), u(t)) \quad (3.7b)$$

## 3.3 Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

### 3.3.1 Positionnement du problème

De façon précise, le problème qui se pose est résumé par la question suivante :

*Comment obtenir la forme de perturbation singulière standard donnée par (3.3) à partir de la forme explicite, ou non-standard (3.1) ?*

La démarche à suivre est articulée autour des trois points suivants :

- identifier les différentes dynamiques du système
- séparer les variables dynamiques lentes de celles rapides
- trouver le paramètre de perturbation singulière

Pour des formes particulières de la fonction  $f(\dot{x}, x, u)$  différentes méthodes ont été proposées. Trois d'entre elles vont être rappelées.

1. Dans [Van Breusegem et Bastin, 1991] une forme classique pour les processus chimiques est étudiée :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= C\rho(x(t)) - Dx(t) + u(t) \\ \rho(x(t)) &= K\Phi(x(t)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $C$  est la matrice constante des coefficients stoechiométriques du processus,  $\rho(x)$  est la cinétique du processus, qui peut être écrite comme un produit entre une matrice diagonale  $K$  des paramètres de réaction et un vecteur  $\Phi(x)$  des termes dynamiques de réaction. Cette forme est intéressante parce qu'elle permet d'utiliser la partie cinétique de réaction pour

identifier les états rapides et lents, en comparant entre eux les paramètres de réaction de la matrice  $K$ .

2. Dans [Kumar et al., 1998] et [Vora et al., 2006] une forme appelée forme perturbée singulière non-standard des systèmes avec des échelles de temps multiples est étudiée :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) + \sum_{j=1}^M \frac{1}{\varepsilon_j} b_j(x(t)) k_j(x(t)) \quad (3.9)$$

où  $b_j(x(t))$  et  $k_j(x(t))$  sont respectivement des matrices et des vecteurs de dimension appropriées. Les termes  $\frac{1}{\varepsilon_j}$  dans (3.9) représentent des paramètres dans le modèle dynamique correspondant aux coefficients de transfert de chaleur/masse, aux taux de réaction, ces coefficients étant de grande amplitude.

3. Dans [Dong et al., 2007] une forme similaire de (3.9), où le terme de commande est négligé, est prise en compte pour des systèmes à deux échelles de temps.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{j=1}^M \frac{1}{\varepsilon_j} b_j(x(t)) k_j(x(t)) \quad (3.10)$$

Il est important de noter que les méthodes proposées dans [Van Breusegem et Bastin, 1991], [Kumar et al., 1998], [Vora et al., 2006], [Dong et al., 2007] sont basées sur une comparaison des constantes de réaction et sur un changement de coordonnées en vue d'obtenir la forme de perturbation singulière classique.

### 3.3.2 Méthode basée sur un changement de coordonnées

La méthode est inspirée de Van Breusegem et Bastin [1991]; Dong et al. [2007]. On peut écrire le modèle (3.8) sous la forme :

$$\dot{x}(t) = r(x(t)) + D(x(t), u(t)) \quad (3.11)$$

avec

$$r(x) = C\rho(x) \quad (3.12)$$

$$\rho(x) = K\Phi(x(t)) \quad (3.13)$$

La forme (3.11) est légèrement différente de (3.8) proposée dans Van Breusegem et Bastin [1991], mais la méthode basée sur le changement de coordonnées peut également être adaptée à ce modèle.

Brièvement, cette méthode comporte les points suivants :

- comparaison des paramètres de la matrice  $K$  permettant l'identification des dynamiques rapides et lentes
- calcul du paramètre singulier en utilisant les paramètres associées aux cinétiques rapides
- identification et séparation des cinétiques rapides et lentes à l'aide de la comparaison réalisée au premier point et réécriture du système conformément à cette séparation

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

- vérification du respect de la condition d'obtention du modèle réduit ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) afin d'expliquer les états rapides
- réalisation d'un changement de coordonnées si la condition précédente n'est pas respecté
- obtention de la forme standard à perturbations singulières et celle du modèle réduit

#### Exemple 3.1 (Illustration de la méthode)

Pour illustrer la méthode, on propose un système chimique de type CSTR (Continuous Stirred Tank Reactor) de volume  $V$  constant, alimentés avec un débit  $F^{in}$  et les réactifs  $A$  et  $E$  avec des concentrations  $C_A^{in}$  et  $C_E^{in}$  respectivement. Les réactions suivantes sont réalisées :



Les cinétiques de réaction  $\rho_1$  et  $\rho_3$  pour les réactions réversibles  $A \rightleftharpoons B$  et  $C \rightleftharpoons D$  sont respectivement données par :

$$\rho_1(t) = k_1 \left( C_A(t) - \frac{C_B(t)}{\kappa_1} \right) \quad (3.16)$$

$$\rho_3(t) = k_3 \left( C_C(t) - \frac{C_D(t)}{\kappa_3} \right) \quad (3.17)$$

où  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  et  $C_D$  sont les concentrations des espèces  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  dans le réacteur supposé homogène,  $k_1$  et  $k_3$  sont les constantes de réaction et où  $\kappa_1$  et  $\kappa_3$  sont les constantes d'équilibre. Les constantes de réaction  $\rho_2$  et  $\rho_4$  pour les réactions irréversibles  $B \rightarrow C$  et  $E \rightarrow F$  sont données par :

$$\rho_2(t) = k_2 C_B(t) \quad (3.18)$$

$$\rho_4(t) = k_4 C_E(t) \quad (3.19)$$

où  $C_E$  désigne la concentration de l'espèce  $E$ .

Le modèle dynamique de ce processus a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{C}_A(t) &= \frac{F^{in}(t)}{V} (C_A^{in}(t) - C_A(t)) - k_1 \left( C_A(t) - \frac{C_B(t)}{\kappa_1} \right) \\ \dot{C}_B(t) &= -\frac{F^{in}(t)}{V} C_B(t) + k_1 \left( C_A(t) - \frac{C_B(t)}{\kappa_1} \right) - k_2 C_B(t) \\ \dot{C}_C(t) &= -\frac{F^{in}(t)}{V} C_C(t) + k_2 C_B(t) - k_3 \left( C_C(t) - \frac{C_D(t)}{\kappa_3} \right) \\ \dot{C}_D(t) &= -\frac{F^{in}(t)}{V} C_D(t) + k_3 \left( C_C(t) - \frac{C_D(t)}{\kappa_3} \right) \\ \dot{C}_E(t) &= \frac{F^{in}(t)}{V} (C_E^{in}(t) - C_E(t)) - k_4 C_E(t) \\ \dot{C}_F(t) &= -\frac{F^{in}(t)}{V} C_F(t) + k_4 C_E(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$



où le vecteur

$$x = [C_A \ C_B \ C_C \ C_D \ C_E \ C_F]^T \quad (3.21)$$

représente le vecteur d'état du système. Le vecteur des entrées est :

$$u = [F^{in} \ C_A^{in} \ C_E^{in}]^T \quad (3.22)$$

**Mise sous la forme adaptée à la méthode (3.11)**

La matrice des coefficients stoechiométriques s'obtient en observant les occurrences des paramètres  $k_i$  dans les équations (3.20) :

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

et celle des paramètres :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Compte tenu des définitions (3.16) à (3.19), le vecteur des cinétiques du processus est :

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_4(t)]^T \quad (3.25)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= C_A(t) - \frac{C_B(t)}{\kappa_1} \\ \varphi_2(t) &= C_B(t) \\ \varphi_3(t) &= C_C(t) - \frac{C_D(t)}{\kappa_3} \\ \varphi_4(t) &= C_E(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Compte tenu de (3.20), la matrice  $D(x, u)$  s'explique :

$$D(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} \frac{F^{in}(t)}{V} (C_A^{in}(t) - C_A(t)) \\ -\frac{F^{in}(t)}{V} C_B(t) \\ -\frac{F^{in}(t)}{V} C_C(t) \\ -\frac{F^{in}(t)}{V} C_D(t) \\ \frac{F^{in}(t)}{V} (C_E^{in}(t) - C_E(t)) \\ -\frac{F^{in}(t)}{V} C_F(t) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

**Comparaison des constantes de réaction**

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

---

On suppose que les cinétiques de réaction sont telles que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$k_2 < k_4 \ll k_3 < k_1 \quad (3.28)$$

De plus, les constantes d'équilibre  $\kappa_1$  et  $\kappa_3$  sont supposés être différentes.

#### Calcul du paramètre singulier

On définit les constantes de réaction associées aux cinétiques rapides  $k_1$  et  $k_3$ . Soit  $\tilde{k}_f$  la moyenne des constantes de réaction  $k_i$  associées aux cinétiques rapides :

$$\tilde{k}_f = \frac{k_1 + k_3}{2} \quad (3.29)$$

Chacune des constantes  $k_i$  ( $i \in 1, 3$ ) peut alors s'exprimer à partir de cette moyenne grâce à deux constantes positives  $\alpha_i$  ( $i \in 1, 3$ ), comme suit :

$$k_i = \alpha_i \tilde{k}_f \quad i \in 1, 3 \quad (3.30)$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_3} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{2k_3}{k_1 + k_3} \quad (3.31)$$

On définit un petit paramètre  $\varepsilon$  comme suit :

$$\varepsilon = \frac{1}{\tilde{k}_f} \quad (3.32)$$

ce qui permettra d'indexer les constantes  $k_1$  et  $k_3$  en fonction de  $\varepsilon$  :

$$k_1 = \alpha_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.33)$$

$$k_3 = \alpha_3 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.34)$$

#### Identification et séparation des cinétiques rapides et lentes

On peut ainsi déduire que  $\rho_1(t) = k_1 \cdot \varphi_1(t)$  et  $\rho_3(t) = k_3 \cdot \varphi_3(t)$ , qui font intervenir les paramètres  $k_1$  et  $k_3$ , sont des cinétiques rapides, alors que  $\rho_2(t) = k_2 \cdot \varphi_2(t)$  et  $\rho_4(t) = k_4 \cdot \varphi_4(t)$ , qui font intervenir les paramètres  $k_2$  et  $k_4$ , sont considérées comme lentes. Pour cette raison, on définit le partitionnement de  $\Phi$  (3.25) sous la forme :

$$\Phi_f(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\Phi_s(t) = \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Cela conduit à décomposer les matrices  $C$  (3.23) et  $K$  (3.24) en deux blocs, correspondant

respectivement aux cinétiques lentes et rapides :

$$C = [C_f \ C_s] \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} K_f & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

où

$$C_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

et

$$K_f = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad K_s = \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Tenant compte de la séparation de cinétiques proposée selon les valeurs des coefficients  $k_i$ , le vecteur d'état est aussi décomposé en deux vecteurs, le premier correspondant aux variables d'état rapides  $x_f$ , et le second,  $x_s$ , correspondant aux variables d'état lentes :

$$x_f = \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \\ C_C \\ C_D \end{bmatrix} \quad x_s = \begin{bmatrix} C_E \\ C_F \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

on peut noter le caractère un peu brutal de ce partitionnement. En effet, en (3.28) nous avons mentionné l'existence uniquement de deux constantes de réaction  $k_1$  et  $k_3$  rapides ; avec (3.40) on constate la présence de quatre variables d'état rapides. Ce changement de dimension et ses conséquences seront analysés ultérieurement.

Conjointement, le modèle (3.20) peut être décrit par deux équations, qui correspondent respectivement aux états rapides et lents :

$$\dot{x}_f = C_{ff}K_f\Phi_f(x) + C_{fs}K_s\Phi_s(x) + D_f(x, u) \quad (3.41a)$$

$$\dot{x}_s = C_{sf}K_f\Phi_f(x) + C_{ss}K_s\Phi_s(x) + D_s(x, u) \quad (3.41b)$$

où  $D_f = [D_2 \ D_3 \ D_4 \ D_5]^T$  et  $D_s = [D_1 \ D_6 \ D_7]^T$ .

Les matrices  $C_{ff}$  et  $C_{fs}$  correspondent respectivement aux cinétiques rapides et lentes qui interviennent dans les états rapides  $x_f$ , alors que  $C_{sf}$  et  $C_{ss}$  correspondent respectivement aux cinétiques rapides et lentes qui interviennent dans les états lents  $x_s$ , soit à partir de (3.38) :

$$C_{ff} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_{fs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$C_{sf} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

En utilisant (3.30) et (3.32) l'équation (3.41a) s'écrit facilement :

$$\varepsilon \dot{x}_f = C_{ff}A\Phi_f(x) + \varepsilon C_{fs}K_s\Phi_s(x) + \varepsilon D_f(x,u) \quad (3.44)$$

La matrice  $A = K_f \cdot \varepsilon$  est une matrice qui contient les constantes positives  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  sur la diagonale. Pour le modèle considéré (3.20), la matrice  $A$  est :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2k_1}{k_1+k_3} & 0 \\ 0 & \frac{2k_3}{k_1+k_3} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

#### Condition à respecter pour l'obtention du modèle réduit

En posant le paramètre de perturbation  $\varepsilon = 0$  dans l'équation (3.44), on obtient l'équation algébrique suivante :

$$C_{ff}A\Phi_f(x) = 0 \quad (3.46)$$

On résout cette équation pour déterminer les variables rapides  $x_f$  qui interviennent dans les réactions rapides. Pour pouvoir résoudre cette équation de façon explicite, la condition suivante doit être respectée :

$$n_f = \text{rang}(C_{ff}) \quad (3.47)$$

Ici le nombre des états rapides est  $n_f = 4$  et  $\text{rang}(C_{ff}) = 2$ .

La condition (3.47) n'étant pas respectée, il est donc impossible d'expliciter les états rapides.

**Remarque 3.1.** Pour résoudre cet inconvénient du non-respect de la condition de rang (3.47), un changement de coordonnées est nécessaire.

#### Changement de coordonnées

Soit la transformation de coordonnées suivante :

$$\xi(t) = T x(t) \quad (3.48)$$

avec

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

à laquelle on peut associer la transformation réciproque :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Cette transformation est réalisée de façon à éliminer, par des combinaisons linéaires entre les

variables d'état, des quantités dépendant des cinétiques rapides, comme  $\varphi_1$  et  $\varphi_3$  dans (3.20). En appliquant ce changement de coordonnées au système (3.20) qui est du type  $\dot{x} = f(x, u)$  on obtient :

$$\dot{\xi}(t) = Tf(T^{-1}\xi(t), u(t)) \quad (3.51)$$

c'est-à-dire de façon explicite :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= -k_1 \left( \xi_1(t) - \frac{\xi_2(t) - \xi_1(t)}{\kappa_1} \right) + \frac{F^{in}(t)}{V} (C_A^{in}(t) - \xi_1(t)) \\ \dot{\xi}_2(t) &= -k_2(\xi_2(t) - \xi_1(t)) + \frac{F^{in}(t)}{V} (C_A^{in}(t) - \xi_2(t)) \\ \dot{\xi}_3(t) &= k_2(\xi_2(t) - \xi_1(t)) - \frac{F^{in}(t)}{V} \xi_3(t) \\ \dot{\xi}_4(t) &= k_3 \left( \xi_3(t) - \xi_4(t) - \frac{\xi_4(t)}{\kappa_3} \right) - \frac{F^{in}(t)}{V} \xi_4(t) \\ \dot{\xi}_5(t) &= -k_4 \xi_5(t) + \frac{F^{in}(t)}{V} (C_E^{in}(t) - \xi_5(t)) \\ \dot{\xi}_6(t) &= k_4 \xi_5(t) - \frac{F^{in}(t)}{V} \xi_6(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

#### Forme standard à perturbations singulières

Compte tenu de (3.33) et (3.34), le système (3.52) est réécrit de façon équivalente comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \dot{\xi}_1(t) &= -\alpha_1 \left( \xi_1(t) - \frac{\xi_2(t) - \xi_1(t)}{\kappa_1} \right) + \varepsilon \frac{F^{in}(t)}{V} (C_A^{in}(t) - \xi_1(t)) \\ \dot{\xi}_2(t) &= -k_2(\xi_2(t) - \xi_1(t)) + \frac{F^{in}(t)}{V} (C_A^{in}(t) - \xi_2(t)) \\ \dot{\xi}_3(t) &= k_2(\xi_2(t) - \xi_1(t)) - \frac{F^{in}(t)}{V} \xi_3(t) \\ \varepsilon \cdot \dot{\xi}_4(t) &= \alpha_3 \left( \xi_3(t) - \xi_4(t) - \frac{\xi_4(t)}{\kappa_3} \right) - \varepsilon \frac{F^{in}(t)}{V} \xi_4(t) \\ \dot{\xi}_5(t) &= -k_4 \xi_5(t) + \frac{F^{in}(t)}{V} (C_E^{in}(t) - \xi_5(t)) \\ \dot{\xi}_6(t) &= k_4 \xi_5(t) - \frac{F^{in}(t)}{V} \xi_6(t) \end{aligned} \quad (3.53)$$

ce qui représente la forme standard à perturbations singulières du système non linéaire (3.20). La première et la quatrième équations de ce système singulier (3.53) représentent l'évolution des dynamiques rapides. Conformément à la transformation linéaire (3.49), ces deux dynamiques correspondent aux concentrations  $C_A$  et  $C_D$ . Les concentrations  $C_B$  et  $C_C$  qui étaient initialement comprises dans l'ensemble des variables d'état rapides -conformément à la séparation réalisée par comparaison des constantes de réaction donnée dans (3.28)- ne sont plus impliquées dans l'étape de réduction. D'ailleurs, l'évolution de ces deux variables n'est plus pré-

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

sente qu'à travers une transformation linéaire définissant les nouvelles variables  $\xi_2 = C_A + C_B$  et  $\xi_3 = C_C + C_D$ .

#### Modèle réduit

Si  $\varepsilon \rightarrow 0$  alors les équations correspondantes aux dynamiques rapides  $\xi_1$  et  $\xi_4$  deviennent :

$$\begin{cases} 0 = -\alpha_1 \left( \xi_1(t) - \frac{\xi_2(t) - \xi_1(t)}{\kappa_1} \right) \\ 0 = \alpha_3 \left( \xi_3(t) - \xi_4(t) - \frac{\xi_4(t)}{\kappa_3} \right) \end{cases} \quad (3.54)$$

On a obtenu un système algébrique à deux équations, qui fait intervenir les nouvelles coordonnées. On exprime les deux variables  $\xi_1$  et  $\xi_4$  en fonction des autres :

$$\xi_1(t) = \frac{1}{\kappa_1 + 1} \xi_2(t) \quad (3.55)$$

$$\xi_4(t) = \frac{\kappa_3}{\kappa_3 + 1} \xi_3(t) \quad (3.56)$$

En remplaçant ces variables dans les quatre autres équations du système (3.52), on obtient un modèle réduit à quatre variables d'état :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2(t) &= -k_2 \left( 1 - \frac{1}{\kappa_1 + 1} \right) \xi_2(t) + \frac{F^{in}(t)}{V} (C_A^{in}(t) - \xi_2(t)) \\ \dot{\xi}_3(t) &= k_2 \left( 1 - \frac{1}{\kappa_1 + 1} \right) \xi_2(t) + \left( -\frac{F^{in}(t)}{V} \right) \xi_3(t) \\ \dot{\xi}_5(t) &= -k_4 \xi_5(t) + \frac{F^{in}(t)}{V} (C_E^{in}(t) - \xi_5(t)) \\ \dot{\xi}_6(t) &= k_4 \xi_6(t) - \frac{F^{in}(t)}{V} \xi_6(t) \end{aligned} \quad (3.57)$$

La figure 3.1 permet de comparer les états  $x$  du modèle initial (3.20) et les états  $x^r$  obtenus à partir du modèle réduit (3.57)-(3.55), en utilisant la transformation  $T^{-1}$  (3.50) inverse à celle utilisée pour réaliser le changement de coordonnées (3.49). Les paramètres utilisés pour réaliser cette simulation sont :  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 9 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_3 = 8$ ,  $k_4 = 10^{-2}$ ,  $\kappa_1 = 3.1$ ,  $\kappa_2 = 2.5$ .

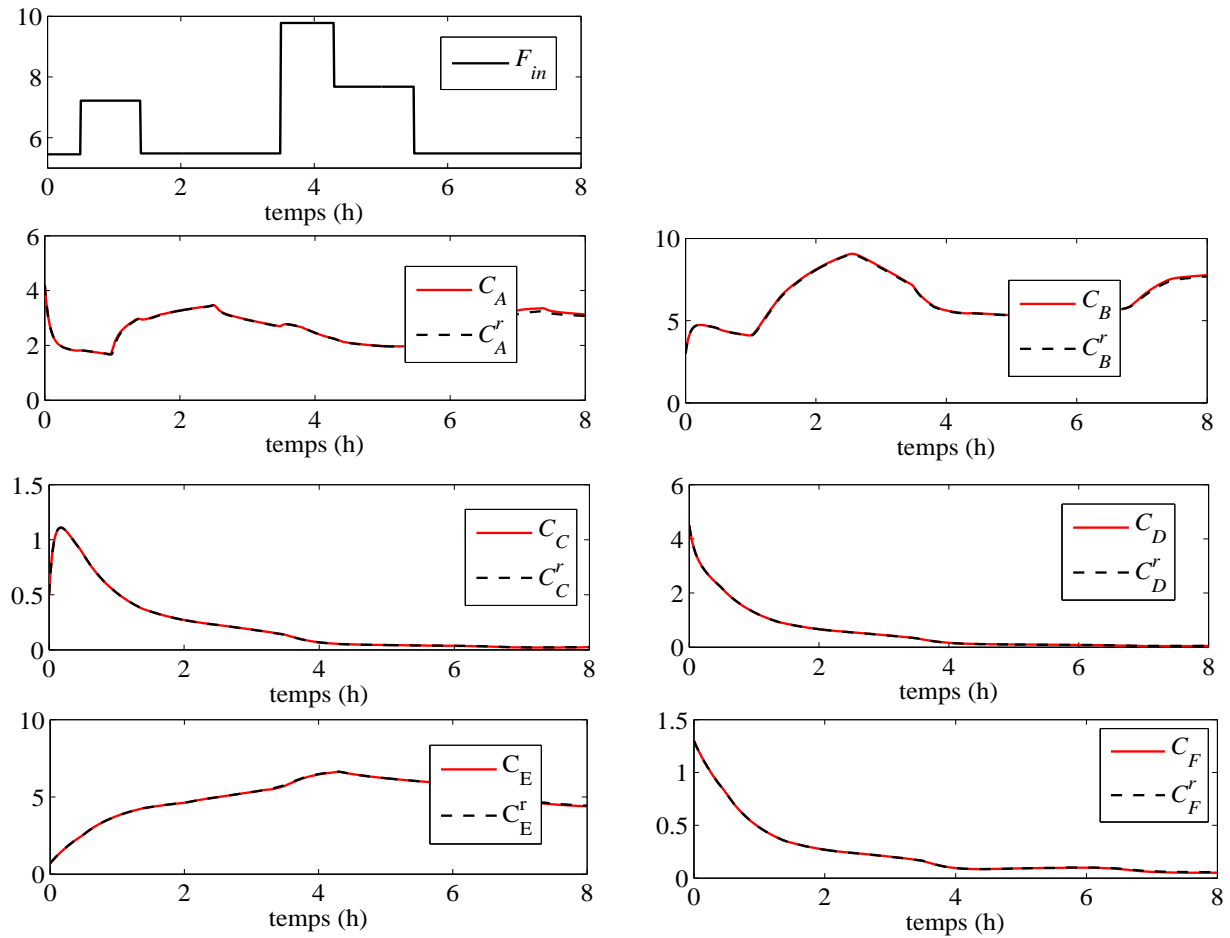


Figure 3.1 – Comparaison entre les états du modèle initial et les états obtenus à partir du modèle réduit par la transformation inverse

### Avantages et inconvénients de la méthode de changement de coordonnées

De façon synthétique, parmi les avantages de cette méthode, on peut citer en ce qui concerne l'exemple traité :

1. l'aspect systématique de la procédure de réduction d'ordre d'un système non linéaire sous forme (3.11)
2. l'existence d'une erreur de réduction faible entre le système original et son modèle réduit.

Toutefois, dans certains cas, cette méthode possède quelques inconvénients non négligeables, parmi lesquels on peut évoquer :

1. Les contraintes d'ordre structurel (3.11) que le système non linéaire à réduire doit respecter pour pouvoir appliquer cette méthode.

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

---

2. L'identification et la séparation des modes lents et rapides sont fortement liées aux contraintes structurelles du modèle, car ces évaluations sont réalisées en comparant les cinétiques de réaction à travers les constantes de réaction.
3. Le changement de coordonnées est basé sur une transformation linéaire qui n'est pas toujours facile à trouver ; pour des systèmes plus complexes, pour lesquels il n'y a pas une décomposition évidente entre les réactions rapides et lentes, ce changement de coordonnées est probablement non linéaire.
4. Les nouvelles variables obtenues après le changement de coordonnées ne possèdent plus le sens physique de celles du modèle de départ, ce qui peut constituer un inconvénient dans l'interprétation immédiate du comportement temporel du modèle.

Ces inconvénients ont motivé des améliorations dans les techniques d'obtention de systèmes à deux échelles de temps. Plus précisément, certaines méthodes visent les deux objectifs :

- éliminer les contraintes structurelles précédentes, afin de pouvoir obtenir une forme de type perturbation singulière pour des systèmes quelconques
- rendre l'identification et la séparation des échelles de temps indépendantes de la structure du modèle

On présente dans le paragraphe suivant une technique plus générale d'identification des échelles de temps qui s'affranchit d'une structure particulière du modèle.

#### 3.3.3 Identification des échelles de temps. Méthode d'homotopie

Pour pouvoir appliquer la méthode précédente il faut que le système non linéaire à étudier respecte quelques contraintes structurelles, comme celles données en (3.11). Les modèles biochimiques respectent en général ces contraintes. Cependant, tous les systèmes non linéaires ne peuvent pas être mis sous la forme particulière proposée, donc d'autres méthodes d'identification des modes lents et rapides doivent être envisagées. Ainsi, des méthodes plus générales d'identification de différentes échelles de temps ont été proposées dans la littérature, parmi lesquelles la méthode d'homotopie mentionnée ici, proposée par [Decarlo et Saeks, 1979; Wasynczuk et Decarlo, 1981] et perfectionnée plus tard par [Robertson, 1992].

Ces méthodes sont principalement basées sur l'évaluation des valeurs propres du jacobien correspondant au système linéarisé. La dynamique du système complet peut être décrite par les valeurs propres du jacobien. Si chaque valeur propre peut être liée à un état particulier, alors la dynamique de chaque état peut être évaluée quantitativement.

Une linéarisation d'un système non linéaire - sous forme (3.1) - autour de différents points d'équilibre  $(x_0, u_0)$  de l'espace de fonctionnement est réalisée pour constater une séparation éventuelle des modes lents et des modes rapides du système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) - (Ax_0 + Bu_0) \quad (3.58)$$

$$\text{avec } A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \text{ et } B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}.$$

Si on considère  $Re(\lambda_1) \leq Re(\lambda_2) \leq \dots \leq Re(\lambda_n)$  la suite ordonnée des parties réelles des valeurs



propres de la matrice  $A$ , les valeurs les plus petites correspondent aux dynamiques rapides. La séparation des modes lents et des modes rapides se fera en fixant un seuil de séparation des deux échelles de temps,  $\tau$ , tel que :

$$Re(\lambda_1) \leq \dots \leq Re(\lambda_{n_f}) \ll \tau \leq Re(\lambda_{n_f+1}) \leq \dots \leq Re(\lambda_n) \quad (3.59)$$

De façon équivalente, on peut exprimer cette séparation en termes de constantes de temps, qu'on peut définir comme suit :

$$\tau_i = \frac{1}{|Re(\lambda_i)|} \quad (3.60)$$

La séparation (3.59) écrite en terme de constantes de temps devient :

$$\tau_1 \leq \dots \leq \tau_{n_f} \ll \tau \leq \tau_{n_f+1} \leq \dots \leq \tau_n \quad (3.61)$$

où le groupe  $\tau_1, \dots, \tau_{n_f}$  correspond aux états rapides caractérisés par des parties réelles négatives des valeurs propres très petites. Les valeurs propres du deuxième groupe  $\tau_{n_f+1}, \dots, \tau_n$  sont proches de zéro et correspondent aux états lents.

Cette méthode nécessite de considérer un système dans lequel existe une relation évidente entre les valeurs propres et les états, comme par exemple la matrice du jacobien  $A$  diagonalisé. La méthode utilise l'analyse de la matrice décrite par l'équation suivante :

$$H(r) = (1 - r)A_D + rA \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.62)$$

où  $H$  est la matrice d'homotopie,  $A_D$  la matrice représentant le système découplé (la diagonale de  $A$ ),  $A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)}$  la matrice de la dynamique du système linéarisé et  $r$  un paramètre qui évolue de 0 à 1 en vue de réaliser le passage du système découplé ( $r = 0$ ) au système couplé ( $r = 1$ ).

Comme mis en évidence à la section précédente 3.3.2, la séparation des variables d'état lentes et rapides proposée dans Van Breusegem et Bastin [1991]; Dong et al. [2007] est réalisée en comparant les paramètres cinétiques du processus (3.28). Pour le modèle considéré précédemment (3.20), cette séparation est seulement partiellement confirmée par les valeurs propres de la matrice d'homotopie  $H(r)$  associée au jacobien  $A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)}$ , comme on peut le remarquer à la figure 3.2 où l'on a représenté la partie réelle de ces valeurs propres pour vingt-cinq points de fonctionnement. On constate que quatre valeurs propres sont comprises entre  $-4$  et  $-0.05$  et que les deux autres - associées aux concentrations  $C_A$  et  $C_C$  - entre  $-60$  et  $-40$ . La valeur du paramètre  $r$  est fixée à 0.5 pour réaliser cette figure, mais le même résultat est obtenu pour différentes valeurs de ce paramètre dans un voisinage de 0.5. Pour cet exemple, la méthode d'homotopie permet d'identifier les différentes échelles de temps du système non linéaire considéré.

**Remarque 3.2.** *Il est important de noter que le système linéarisé est utilisé uniquement pour réaliser l'identification des différentes échelles de temps, et non pour la synthèse d'observateurs. Une forme multimodèle équivalente sera utilisée pour cela.*

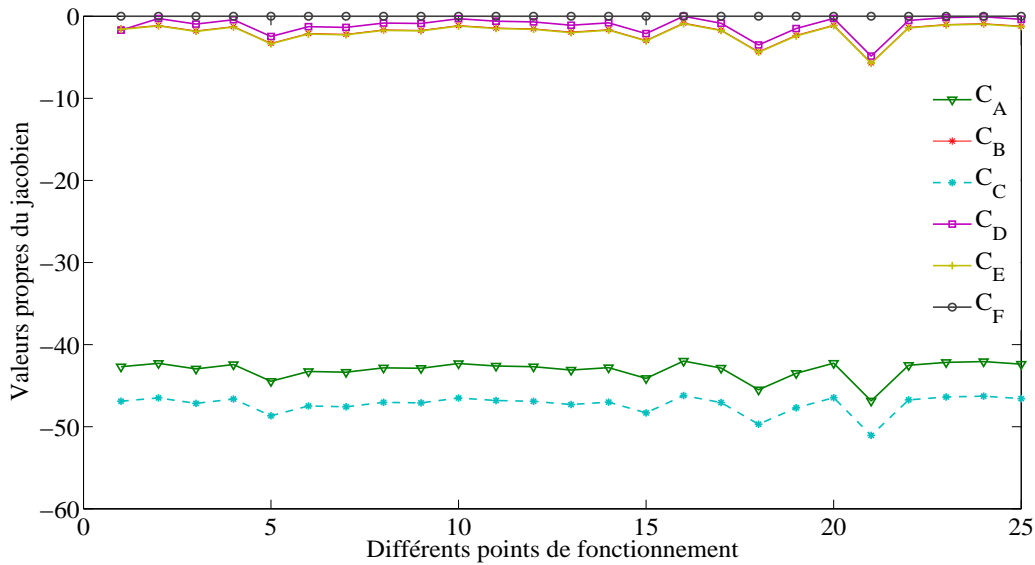


Figure 3.2 – Valeurs propres de la matrice d'homotopie associée au jacobien  $A$  pour différents points de l'espace de fonctionnement du modèle (3.20)

### 3.3.4 Généralisation

L'identification des dynamiques rapides et lentes - réalisée par la méthode illustrée précédemment - constitue un premier pas dans la démarche d'obtention de la forme à perturbations singulières d'un système non linéaire quelconque. Un autre point important est le calcul du paramètre de perturbation singulière et son importance dans l'obtention de la forme standard à perturbation singulière. On commence par discuter le cas des systèmes linéaires à deux échelles de temps et leur passage sous une forme à perturbations singulières.

#### Cas linéaire

Soit le système linéaire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.63)$$

#### Identification des échelles de temps

Supposons qu'il soit caractérisé par des échelles de temps différentes. Cette supposition peut être facilement vérifiée en réalisant une évaluation des valeurs propres de la matrice  $A$ , en utilisant la méthode d'homotopie décrite précédemment à la section 3.3.3. Les constantes de temps les plus petites (calculées à partir des parties réelles des valeurs propres petites) correspondent aux états rapides, alors que les autres (avec des parties réelles des valeurs propres grandes) sont associées aux états lents.

Ainsi, on peut définir les vecteurs contenant les états rapides et les états lents :

$$x_f = \left( x_f^1, \dots, x_f^{n_f} \right)^T \in \mathbb{R}^{n_f} \quad (3.64)$$

$$x_s = \left( x_s^1, \dots, x_s^{n_s} \right)^T \in \mathbb{R}^{n_s} \quad (3.65)$$

avec :

$$n = n_f + n_s \quad (3.66)$$

### Séparation des échelles. Influence des paramètres du modèle sur sa dynamique

On peut écrire le système linéaire (3.63) de façon explicite comme suit :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j(t) + b_i u(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.67a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.67b)$$

avec  $A[a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^m$  est la ligne  $i$  de la matrice de commande  $B$ . On construit une suite croissante des termes  $a_{i,j}$  de la matrice  $A$  en fixant un seuil de séparation  $\tau$  entre les valeurs de cette suite. On peut ensuite construire deux ensembles contenant les composantes séparées de cette suite :

$$\mathcal{A}_s = \{k_i = |a_{i_1, i_2}|, i \in I_s\} \quad (3.68a)$$

$$\mathcal{A}_f = \{k_j = |a_{j_1, j_2}|, j \in I_f\}, \quad \sup_{i \in I_s} |a_i| < \inf_{j \in I_f} |a_j| \quad (3.68b)$$

où  $I_s$  (respectivement  $I_f$ ) est l'ensemble d'indices  $i = [i_1, i_2]$  des  $a_{i_1, i_2}$  tels que  $|a_{i_1, i_2}| < \tau$  (respectivement  $|a_{i_1, i_2}| > \tau$ ) avec  $\dim(\mathcal{A}_s) = d_s$ ,  $\dim(\mathcal{A}_f) = d_f$  et  $d_s + d_f = n^2$ . Les ensembles construits ont les propriétés suivantes :

$$k_i < \tau \ll k_j, \quad \forall i \neq j, \quad k_i \in \mathcal{A}_s, \quad k_j \in \mathcal{A}_f \quad (3.69a)$$

$$\mathcal{A}_s \cap \mathcal{A}_f = \emptyset \quad (3.69b)$$

Compte tenu de la propriété (3.69a), on remarque que les paramètres de l'ensemble  $\mathcal{A}_s$  ont des valeurs numériques d'amplitude moins importantes que celles des paramètres appartenant à  $\mathcal{A}_f$ . L'intérêt de cette séparation des paramètres de la matrice  $A$  réside dans la mise en évidence de leur influence sur la dynamique des états du système (3.67). Ainsi, les paramètres ayant des valeurs numériques plus importantes, appartenant à l'ensemble  $\mathcal{A}_f$ , sont candidates pour générer une dynamique *rapide* des états dans lesquels ils interviennent. De même, les paramètres ayant des valeurs numériques plus petites et appartenant à l'ensemble  $\mathcal{A}_s$  sont candidates pour générer une dynamique *lente* aux états dans lesquels ils interviennent. Pour cette raison, on appelle  $\mathcal{A}_s$  l'ensemble des indicateurs lents et  $\mathcal{A}_f$  l'ensemble des indicateurs rapides.

Définissons :

- les matrices diagonales  $K_f \in \mathbb{R}^{d_f \times d_f}$  et  $K_s \in \mathbb{R}^{d_s \times d_s}$  contenant respectivement les para-

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

mètres  $k_j$  et  $k_i$  définis en (3.68) :

$$K_f = \text{diag}(k_j), \quad k_j \in \mathcal{A}_f \quad (3.70)$$

$$K_s = \text{diag}(k_i), \quad k_i \in \mathcal{A}_s \quad (3.71)$$

- la matrice  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dont les composants sont les signes des coefficients de la matrice  $A$  du système linéaire (3.63) :

$$S = \text{sgn}(A) \quad (3.72)$$

où  $\text{sgn}(A) = [\text{sgn}(a_{i,j})]_{i,j}$ .

En utilisant les matrices diagonales  $K_f$  et  $K_s$  définies au premier point, on peut définir les matrices  $S_s$  et  $S_f$  comme suit :

$$S_f = \left[ \text{sgn}(a_{j_k}) \otimes e_{j_k,1} \right]_{\substack{k=1,\dots,d_f \\ j_k \in I_f}} \quad (3.73)$$

$$S_s = \left[ \text{sgn}(a_{i_k}) \otimes e_{i_k,1} \right]_{\substack{k=1,\dots,d_s \\ i_k \in I_s}} \quad (3.74)$$

avec  $S_f \in \mathbb{R}^{n \times d_f}$ ,  $S_s \in \mathbb{R}^{n \times d_s}$  telles que le système (3.63) soit écrit :

$$\dot{x}(t) = S_f K_f \Phi_f(x(t)) + S_s K_s \Phi_s(x(t)) + B u(t) \quad (3.75)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (3.76)$$

où le vecteur  $\Phi_f(x) \in \mathbb{R}^{d_f}$  réunit les états multipliant les coefficients  $k_j \in \mathcal{A}_f$  le vecteur  $\Phi_s(x) \in \mathbb{R}^{d_s}$  réunit les états multipliant les coefficients  $k_i \in \mathcal{A}_s$ .

En utilisant les nouveaux paramètres introduits, ainsi que l'identification des dynamiques lentes et rapides (3.64) initialement réalisée, l'équation d'état (3.75) peut s'écrire en séparant les états rapides et les états lents comme suit :

$$\dot{x}_f(t) = S_{ff} K_f \Phi_f(x(t)) + S_{fs} K_s \Phi_s(x(t)) + B_f u(t) \quad (3.77a)$$

$$\dot{x}_s(t) = S_{sf} K_f \Phi_f(x(t)) + S_{ss} K_s \Phi_s(x(t)) + B_s u(t) \quad (3.77b)$$

où

$$S_f = \begin{bmatrix} S_{ff} \\ S_{sf} \end{bmatrix}, \quad S_s = \begin{bmatrix} S_{fs} \\ S_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

où  $S_{ff} \in \mathbb{R}^{n_f \times d_f}$ ,  $S_{sf} \in \mathbb{R}^{n_s \times d_f}$ ,  $S_{fs} \in \mathbb{R}^{n_f \times d_s}$  et  $S_{ss} \in \mathbb{R}^{n_s \times d_s}$ .

#### Calcul du paramètre de perturbation singulière

Pour obtenir la forme de perturbation singulière (3.3), on recherche le paramètre  $\varepsilon$  de perturbation singulière en utilisant une technique plus générale que celle utilisée dans l'exemple précédent et basée sur les constantes de temps du système. Ainsi on construit un paramètre  $\tilde{k}_f$  comme la moyenne arithmétique des inverses des constantes de temps, associées aux variables

d'état rapides :

$$\tilde{k}_f = \frac{\sum_{j \in I_{n_f}} |Re(\lambda_j)|}{n_f} \quad (3.79)$$

$$= \frac{\sum_{j \in I_{n_f}} \frac{1}{\tau_j}}{n_f} \quad (3.80)$$

où l'ensemble d'indices  $I_{n_f}$  est défini par :  $I_{n_f} = \{1, \dots, n_f\}$ .  
Le paramètre de perturbation singulière est défini par :

$$\varepsilon = \frac{1}{\tilde{k}_f} \quad (3.81)$$

**Remarque 3.3.**

Le paramètre  $\tilde{k}_f$  peut être aussi calculé en utilisant la technique utilisée pour les systèmes biochimiques, comme la moyenne des paramètres indicateurs rapides :

$$\tilde{k}_f = \frac{\sum_{k_j \in \mathcal{A}_f} k_j}{d_f} \quad (3.82)$$

**Obtention de la forme à perturbation singulière**

En utilisant ce paramètre  $\varepsilon$ , le système linéaire (3.77) peut être réécrit comme suit :

$$\varepsilon \dot{x}_f(t) = S_{ff} \tilde{A} \Phi_f(x(t)) + \varepsilon S_{fs} \Phi_s(x(t)) + \varepsilon B_f u(t) \quad (3.83a)$$

$$\dot{x}_s(t) = S_{sf} K_f \Phi_f(x(t)) + S_{ss} K_s \Phi_s(x(t)) + B_s u(t) \quad (3.83b)$$

où la matrice  $\tilde{A} = \frac{K_f}{\tilde{k}_f}$ .

**Remarque 3.4.** Si la condition

$$n_f = \text{rang}(S_{ff}) \quad (3.84)$$

est respectée, alors (3.83) est la forme à perturbations singulières du système linéaire (3.63) permettant l'obtention du modèle réduit (pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Le non-respect de cette condition de rang (3.84) a comme cause primaire le fait que le nombre des paramètres  $d_f = \dim(\mathcal{A}_f)$  donnant le comportement rapide aux différents états du système est plus petit que le nombre  $n_f$  des états dans lesquels ils interviennent :

$$d_f < n_f \quad (3.85)$$

Si (3.84) n'est pas vérifiée, la recherche d'une transformation linéaire inversible  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est nécessaire. Cela permet alors l'obtention d'une forme à perturbations singulières respectant la

### 3.3. Passage d'un système non linéaire en forme explicite sous forme à perturbations singulières

---

condition de rang. Le système (3.75) dans les coordonnées  $\xi = Tx(t)$  est :

$$\dot{\xi}(t) = TS_f K_f \Phi_f(T^{-1}\xi(t)) + TS_s K_s \Phi_s(T^{-1}\xi(t)) + TBu(t) \quad (3.86)$$

Il est important de noter que la transformation  $T$  est choisie afin que les  $d_f$  paramètres  $k_j \in \mathcal{A}_f$  donnant le comportement rapide interviennent dans  $d_f$  équations du système (3.88), c'est-à-dire que ce système possède  $d_f$  états rapides  $\xi_f \in \mathbb{R}^{d_f}$ .

En décomposant la matrice de transformation  $T$  en :

$$T = \begin{bmatrix} T_f & 0 \\ 0 & T_s \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

avec  $T_f \in \mathbb{R}^{d_f \times n_f}$  et  $T_s \in \mathbb{R}^{(n-d_f) \times n_s}$ , compte tenu de (3.78) on peut écrire le système (3.86) comme suit :

$$\dot{\xi}_f(t) = T_f S_{ff} K_f \Phi_f(T^{-1}\xi(t)) + T_f S_{fs} K_s \Phi_s(T^{-1}\xi(t)) + T_f B_f u(t) \quad (3.88a)$$

$$\dot{\xi}_s(t) = T_s S_{sf} K_f \Phi_f(T^{-1}\xi(t)) + T_s S_{ss} K_s \Phi_s(T^{-1}\xi(t)) + T_s B_s u(t) \quad (3.88b)$$

La condition de rang (3.89) pour le système dans les nouvelles coordonnées (3.88) est alors respectée :

$$d_f = \text{rang}(T_f S_{ff}) \quad (3.89)$$

Enfin, la forme à perturbations singulières du système (3.88) est déduite :

$$\varepsilon \dot{\xi}_f(t) = T_f S_{ff} \tilde{A} \Phi_f(T^{-1}\xi(t)) + \varepsilon T_f S_{fs} K_s \Phi_s(T^{-1}\xi(t)) + \varepsilon T_f B_f u(t) \quad (3.90a)$$

$$\dot{\xi}_s(t) = T_s S_{sf} K_f \Phi_f(T^{-1}\xi(t)) + T_s S_{ss} K_s \Phi_s(T^{-1}\xi(t)) + T_s B_s u(t) \quad (3.90b)$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient :

$$0 = T_f S_{ff} \tilde{A} \Phi_f(T^{-1}\xi(t)) \quad (3.91a)$$

$$\dot{\xi}_s(t) = T_s S_{sf} K_f \Phi_f(T^{-1}\xi(t)) + T_s S_{ss} K_s \Phi_s(T^{-1}\xi(t)) + T_s B_s u(t) \quad (3.91b)$$

Sachant que  $\xi = [\xi_f \ \xi_s]$ , le système (3.91) permet d'extraire  $\xi_f$  de l'équation (3.91a) et de l'introduire dans (3.91b). Le modèle linéaire réduit est alors obtenu.

---

#### Exemple 3.2 (Illustration de la méthode)

Soit le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + Bu(t) \quad (3.92)$$

Tenant compte des inégalités suivantes :

$$|a_{11}| < |a_{21}| < |a_{22}| \ll |a_{12}| \quad (3.93)$$

les ensembles de paramètres  $\mathcal{A}_s$  et  $\mathcal{A}_f$  et d'indices  $I_s$  et  $I_f$  sont données par :

$$\mathcal{A}_s = \{1, 2, 3\}, \quad I_s = \{[11], [21], [22]\}, \quad d_s = 3 \quad (3.94)$$

$$\mathcal{A}_f = \{5\}, \quad I_f = \{[12]\}, \quad d_f = 1 \quad (3.95)$$

Le système (3.92) peut être écrit sous la forme (3.75) en définissant les matrices suivantes :

$$K_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad S_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$K_f = [5], \quad S_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

$$\Phi_f(t) = x_2(t), \quad \Phi_s(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

En séparant l'état lent  $x_2$  et l'état rapide  $x_1$  le système (3.92) s'écrit sous la forme (3.77), en définissant les matrices suivantes :

$$S_{ff} = [1], \quad S_{sf} = [0], \quad S_{fs} = [-1 \ 0 \ 0], \quad S_{ss} = [0 \ 1 \ -1] \quad (3.99)$$

Le paramètre singulier est obtenu en utilisant (3.81) :  $\varepsilon = 0.188$ . La forme à perturbation singulière est obtenue :

$$\varepsilon \dot{x}_f(t) = S_{ff} \tilde{A} \Phi_f(x(t)) + \varepsilon S_{fs} \Phi_s(x(t)) + \varepsilon B_f u(t) \quad (3.100a)$$

$$\dot{x}_s(t) = S_{sf} K_f \Phi_f(x(t)) + S_{ss} K_s \Phi_s(x(t)) + B_s u(t) \quad (3.100b)$$

où la matrice  $\tilde{A} = \frac{K_f}{\tilde{k}_f}$ .

$$\varepsilon \dot{x}_1(t) = 1 \cdot \frac{5}{-5.317} x_2(t) + \varepsilon [-1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \varepsilon B_f u(t) \quad (3.101a)$$

$$\dot{x}_2(t) = 0 \cdot 5 \cdot x_2(t) + [0 \ 1 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + B_s u(t) \quad (3.101b)$$

où la matrice  $\tilde{A} = \frac{K_f}{\tilde{k}_f}$ . La condition de rang (3.84) est respectée. En conclusion, la forme (3.101) est la forme à perturbations singulières du système linéaire (3.92).

---

### 3.4 Représentation multimodèle pour les systèmes singuliers

On se propose de déterminer une forme multimodèle pour un système non linéaire de la forme (3.1), de manière systématique, sans perte d'information.

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont supposées continues et bornées dans  $U \subseteq \mathcal{D}$ , avec  $\mathcal{D}$  leur domaine de définition. Ce domaine dépend bien sûr du nombre de relations dynamiques et statiques existantes entre les différentes entrées, sorties et états du système. Le passage du système (3.1) vers une forme linéaire à paramètres variables constitue une première étape dans l'obtention d'un multimodèle [Marx et Ragot, 2008]. En utilisant les techniques qui ont été proposées dans le chapitre 2, on peut réécrire le système (3.1) comme suit :

$$\begin{cases} E(x(t), u(t)) \dot{x}(t) &= A(x(t), u(t))x(t) + B(x(t), u(t))u(t) \\ y(t) &= C(x(t), u(t))x(t) + D(x(t), u(t))u(t) \end{cases} \quad (3.102)$$

où les matrices  $E$ ,  $A(x, u)$ ,  $B(x, u)$ ,  $C(x, u)$  et  $D(x, u)$  ont des dimensions compatibles avec celles de  $x$ ,  $u$  et  $y$  :  $E(x, u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A(x, u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x, u) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(x, u) \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ ,  $D(x, u) \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ . Les dérivées de plusieurs variables d'état peuvent intervenir dans une même relation, de ce fait  $E(x, u)$  n'a pas nécessairement une structure diagonale. De plus,  $E(x, u)$  n'est pas nécessairement de plein rang ligne. On peut considérer sans perte de généralité, que  $E(x, u)$  et  $A(x, u)$  sont des matrices carrées ; dans le cas contraire, on complète par des lignes nulles jusqu'à obtention de matrices ou fonctions matricielles de dimension  $n \times n$ . De plus, on suppose, sans perte de généralité, que les relations statiques entre  $x$  et  $u$  seront incluses dans la première équation du système. Ainsi, ces relations statiques entre  $x$  et  $u$  vont correspondre à une ou plusieurs lignes nulles dans la matrice  $E$ .

Il n'est pas restrictif de supposer nul le terme de transfert direct de la commande vers la sortie, en effet il suffit d'augmenter le vecteur d'état pour y inclure  $u \equiv \omega$  et annuler la matrice  $D$  de transfert direct de  $u$  vers  $y$  dans l'équation (3.102). Ainsi, le système (3.102) devient :

$$\begin{cases} \tilde{E} \dot{x}_a(t) &= \tilde{A}(x, u)x_a(t) + \tilde{B}(x, u)u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}(x, u)x_a(t) \end{cases} \quad (3.103)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \begin{bmatrix} E(x, u) & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}(x, u) = \begin{bmatrix} A(x, u) & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & -I_m \end{bmatrix} \\ \tilde{B}(x, u) &= \begin{bmatrix} B(x, u) \\ I_m \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}(x, u) = [C(x, u) \quad D(x, u)], \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec  $\tilde{E}(x, u) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\tilde{A}(x, u) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\tilde{B}(x, u) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ ,  $\tilde{C}(x, u) \in \mathbb{R}^{\ell \times (n+m)}$ . Le système (3.103) représente la forme linéaire à paramètres variables du système non linéaire (3.1). Compte tenu de la démarche proposée au chapitre précédent, on peut obtenir la forme multimodèle :

$$\begin{cases} \tilde{E}(x, u) \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t)] \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) \tilde{F}_i x_a(t) \end{cases} \quad (3.104)$$



Sachant que :

$$\begin{aligned}\tilde{E}(x, u) &= (\tilde{e}_{i,j}(x, u))_{1 \leq i, j \leq n+m} \\ \tilde{A}(x, u) &= (\tilde{a}_{i,j}(x, u))_{1 \leq i, j \leq n+m} \\ \tilde{B}(x, u) &= (\tilde{b}_{i,j}(x, u))_{(1 \leq i \leq n+m), (1 \leq j \leq m)}\end{aligned}$$

on définit l'ensemble des variables de prémisse comme l'union des  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $e_{i,j}$  et  $f_{i,j}$  non constants :

$$V_z = \{a_{i,j}(x, u) \neq \text{const.}, b_{i,j}(x, u) \neq \text{const.}, f_{i,j}(x, u) \neq \text{const.}, e_{i,j}(x, u) \neq \text{const.}\}$$

On note plus simplement  $V_z = \{z_1(x, u), \dots, z_p(x, u)\}$ .

En supposant que ces variables de prémisse soient bornées dans le domaine de fonctionnement du système, on peut appliquer la transformation polytopique convexe pour décomposer les  $p$  variables de prémisse en deux parties. Conformément à la méthodologie systématique développée dans les sections précédentes, on peut définir les fonctions de pondération  $\mu_i(x, u)$  comme produits entre les partitions de chaque variable de prémisse. De même, les matrices constantes  $\tilde{E}_i$ ,  $\tilde{A}_i$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{F}_i$  du multimodèle (3.104) peuvent être déterminées à l'aide des maxima et minima de chacune de ces variables.

En conclusion, un système singulier, qui constitue un outil de modélisation adapté à décrire des processus régis à la fois par des équations dynamiques et des équations statiques, peut se transformer sous forme multimodèle.

### 3.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment obtenir la forme à perturbations singulières pour des systèmes linéaires et non linéaires caractérisés par des échelles de temps multiples.

Une méthode existante dans la littérature et basée sur un changement de coordonnées, qui permet l'obtention de la forme standard à perturbation singulière est présentée à l'aide de l'exemple d'un système chimique mettant en lumière certaines limitations. Une méthode plus générale qui permet d'éliminer une partie de ces inconvénients à été proposée ensuite.

Une forme multimodèle a été proposée pour des systèmes à perturbations singulières, en utilisant une technique similaire à celle utilisée pour les systèmes non linéaires classiques à une seule échelle de temps.

*"La vie c'est comme une bicyclette, il faut avancer pour ne pas perdre l'équilibre."*  
Albert Einstein

# 4

## Estimation d'état

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>114</b>
4.1.1	Généralités	114
4.1.2	Origine des perturbations affectant le système	116
<b>4.2</b>	<b>Synthèse d'observateurs à variables de prémisses non mesurables</b>	<b>118</b>
4.2.1	Observateurs basés sur la structure multimodèle	118
4.2.2	Approche $\mathcal{L}_2$	120
4.2.3	Description des systèmes non linéaires à variables de prémisses non mesurables	122
4.2.4	Estimation d'état de MM incertains en présence d'entrées inconnues	124
4.2.5	Estimation d'état de MM à deux échelles de temps	135
4.2.6	Estimation d'état de MM singuliers en présence d'entrées inconnues	145
<b>4.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>

---

“La chose la plus incompréhensible à propos de l'univers est qu'il soit compréhensible”  
 Albert Einstein

## 4.1 Introduction

### 4.1.1 Généralités

Les modèles non linéaires se révèlent bien adaptés pour la représentation des systèmes réels. Comme déjà présenté dans les chapitres précédents, le multimodèle répond au problème d'extension des méthodes linéaires aux systèmes non linéaires, grâce à sa structure aisément exploitable.

Le comportement dynamique d'un système réel peut être décrit par un modèle mathématique formé d'équations différentielles liant les variables internes d'état. L'évolution dans le temps de ces variables exprime l'évolution du système réel. Cette représentation d'état est très bien adaptée à la synthèse des lois de commande, dont la mise en œuvre demande la connaissance des variables d'état. Comme l'état complet du système peut s'avérer difficile voire impossible à mesurer, à cause des différentes contraintes d'ordre physique, économique ou technologique, les variables d'état non disponibles doivent être estimés. Cette reconstruction d'état se fait habituellement par le biais d'un capteur logiciel, souvent appelé *observateur*. La reconstruction d'état -dont le principe est présenté à la figure 4.1- se propose de fournir des estimations des variables d'état en utilisant des grandeurs connues, comme les entrées et les sorties du système. La structure de l'observateur est réalisée en se basant sur un modèle du système réel. Des observateurs plus sophistiqués peuvent être construits, prenant en compte la présence d'entrées inconnues ou d'incertitudes du système.

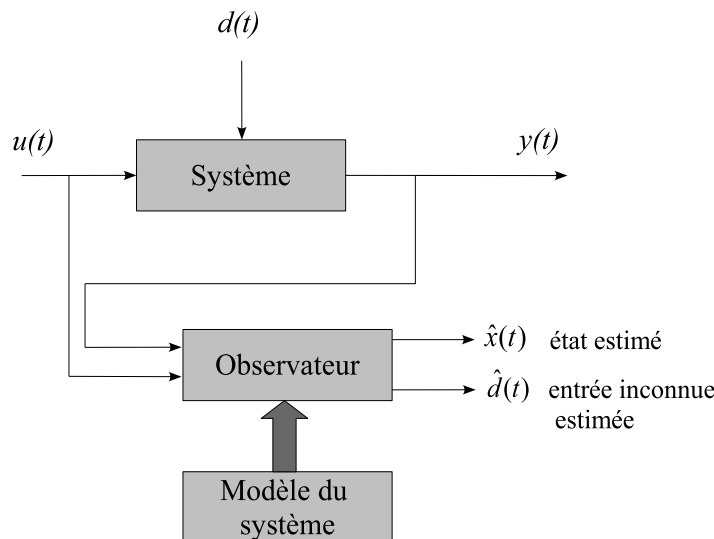


Figure 4.1 – Principe de l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues

L'estimation d'état d'un système joue un rôle important dans le contexte de la surveillance et du diagnostic des systèmes, car elle permet de générer des symptômes de défaillance du système à partir d'une comparaison entre les variables mesurées et celles estimées. En effet,

l'observateur est construit à partir d'un modèle de bon fonctionnement du système. En cas de défaillance, les données mesurées ne vérifient plus les relations du modèle. De ce fait, il y aura une incohérence entre les données mesurées et les données estimées [Gertler, 1998; Patton et Frank, 2000]. Comme les systèmes physiques présentent souvent des dynamiques complexes et non linéaires, dans un contexte de diagnostic, il est nécessaire de réaliser l'estimation d'état à partir d'un modèle permettant de représenter le système sur une large plage de fonctionnement. Dans ce cas, l'utilisation des modèles non linéaires est conseillée.

L'estimation d'état des systèmes représentés par des modèles non linéaires est un problème difficile à résoudre dans un cadre général. Un aperçu de l'ensemble des techniques existantes de construction d'observateurs pour des systèmes non linéaires a été présenté au chapitre 1. Parmi les difficultés, on rappelle que toutes ces techniques sont fortement liées à la structure du modèle utilisée. De même, la notion d'observabilité (la capacité à estimer l'état à partir des mesures disponibles) dépend fortement du signal d'excitation appliqué au système et n'est pas définie dans un contexte global unique.

La plupart des travaux existants sont dédiés à l'estimation d'état des multimodèles à variables de prémisses mesurables, et plus particulièrement représentées par les variables d'entrée et de sortie du système [Tanaka et Wang, 2001; Bergsten et al., 2002; Guerra et al., 2009]. Malheureusement, dans beaucoup de situations ces variables de prémisses sont les variables d'état, dont les mesures ne sont pas toujours disponibles. Bien que les principales méthodes pour construire un MM à partir d'un système non linéaire (à savoir la transformation par secteur non linéaire ou la linéarisation autour de points de fonctionnement) conduisent à des MM à variables de prémisses non mesurables, seuls quelques résultats [Ichalal et al., 2008b, 2009c; Bergsten et al., 2002; Yoneyama, 2009] sont dédiés à l'exploitation de ces modèles pour le diagnostic et la commande ou l'observation. Ces derniers résultats ont été obtenus uniquement pour des systèmes non linéaires à une seule échelle de temps et non pour des systèmes singuliers. Ceci nous a motivé pour étudier ce type de système et quelques résultats sont proposés dans ce chapitre.

Deux cas sont envisagés suivant que le MM singulier est affecté par des entrées inconnues ou non. La première approche proposée dans ce chapitre concerne les systèmes non linéaires incertains et affectés par des entrées inconnues. La construction d'un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues est réalisée, permettant une estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues en présence d'incertitudes de modélisation. Cette approche n'a pas encore été développée, à notre connaissance, dans la littérature.

Une deuxième approche prend en compte la forme standard des systèmes à perturbations singulières, pour laquelle une forme multimodèle équivalente est proposée. Dans [Marx et al., 2007] l'estimation d'état pour un modèle singulier de type Takagi-Sugeno avec des variables de prémisses mesurables affecté par des entrées inconnues est présentée. L'observateur proposé n'est pas sous une forme singulière, mais il est présenté sous une forme classique afin de faciliter l'implémentation. Dans la suite de ce chapitre, cette idée d'utiliser un observateur ayant une structure classique, afin d'estimer les variables d'état d'un système à perturbation singulière sera retenue. Cependant, une extension aux multimodèles singuliers à variables de prémisses non-mesurables est proposée, ce qui constitue une des contributions de ce chapitre.

En présence de perturbations et d'entrées inconnues affectant le système à étudier, l'estimation d'état ne peut pas être parfaitement réalisée car la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation d'état ne peut pas être assurée. Cependant, il est possible de quantifier et de mini-

miser l'impact des perturbations sur cette erreur, en minimisant une borne supérieure de l'erreur de reconstruction. Différentes normes peuvent être utilisées afin de fournir une estimation de l'amplitude de l'erreur de reconstruction. Une extension de la norme  $H_\infty$  - classiquement utilisée dans le cadre linéaire, mais qui ne peut pas être utilisée dans le contexte multimodèle - est réalisée à travers la norme  $\mathcal{L}_2$  [Weinmann, 1991].

Ce chapitre est structuré autour de l'estimation d'état des systèmes non linéaires classiques à forme explicite et à perturbations singulières, en section 4.2. Trois observateurs sont proposés, en sections 4.2.4, 4.2.5 et 4.2.6, un observateur pour les systèmes MM, incertains et affectés par des entrées inconnues, et deux autres pour les systèmes à deux échelles de temps affectés ou non par des entrées inconnues. Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation des variables d'état et des entrées inconnues sont exprimées à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (LMI) en utilisant la méthode de Lyapunov et l'approche  $\mathcal{L}_2$  et chaque méthode est illustrée par un exemple. Quelques conclusions sont présentées en section 4.3.

### 4.1.2 Origine des perturbations affectant le système

En général, la pertinence de l'estimation d'état dépend fortement de la qualité des mesures et de la précision du modèle utilisé. Cependant, tout modèle comporte des imprécisions, car il est une représentation abstraite plus ou moins conforme du comportement dynamique réel du système. De plus, les variables de commande du système, connues et fixées grâce au modèle du système, ne sont pas les seules à intervenir sur l'évolution du système. L'environnement du système agit dans une certaine mesure sur ce dernier, générant différents types de perturbations qui peuvent affecter la qualité de l'estimation d'état. Ces perturbations -difficiles à maîtriser dans la plupart du temps- doivent être prises en compte lors de la synthèse des observateurs afin de rendre l'estimation robuste (voir figure 4.2).

La notion de robustesse, fait référence à l'insensibilité de l'estimation d'état vis-à-vis des perturbations internes ou externes du système. L'appellation perturbation recouvre de nombreux concepts. Isermann [2006] la définit comme un phénomène difficilement maîtrisable qui agit sur le système. Les bruits dans les dispositifs de mesure ou bien les erreurs de transmission sont des exemples classiques de perturbations externes, alors que les imprécisions / erreurs de modélisation peuvent être considérées comme des perturbations internes. Comme l'estimation d'état fait appel à des mesures extraites du système, leur utilisation en présence des perturbations peut conduire à des estimés biaisées de l'état du système. La présence de signaux de commande non accessibles à la mesure agissant sur le système ou bien un défaut de capteurs ou d'actionneurs constitue un cas fréquemment rencontré dans les processus réels. Toutes ces signaux, perturbations internes et externes sont modélisés sous le nom d'*entrées inconnues*. La façon d'aborder ces variables dans les études d'estimation d'état diffère en fonction de la connaissance qu'on veut avoir sur ces variables. D'un côté, réaliser la détection, l'isolation et l'estimation des certaines des entrées inconnues et, d'un autre côté, ignorer d'autres en rendant robuste l'estimation d'état par rapport à ces entrées inconnues.

Lors de l'estimation ou du diagnostic il faut distinguer deux classes d'entrées inconnues. La première est constituée des signaux sur lesquels on cherche à obtenir des informations les plus précises possibles (défaut à détecter, localiser ou estimer si possible). La deuxième est formée des signaux vis-à-vis desquels on cherche à être robuste (bruit de mesure dont l'influence sur l'estimation ou le diagnostic sera minimisée).

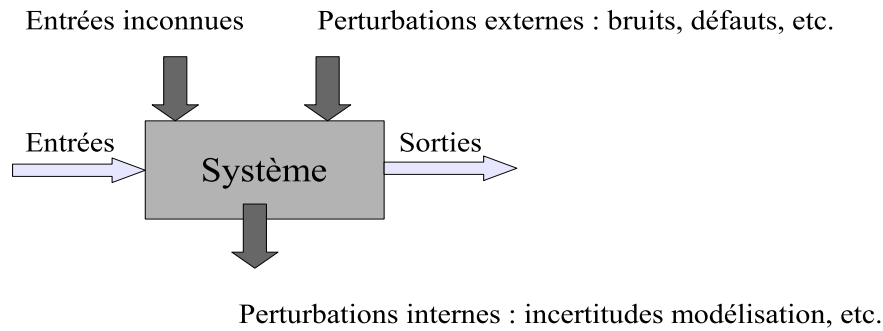


Figure 4.2 – Différentes sources de perturbations affectant un système

Les imprécisions de modélisation d'un système autonome représenté par un modèle linéaire sont prises en compte de la façon suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) \quad (4.1)$$

où  $A$  représente la matrice du modèle linéaire nominal et  $\Delta A$  les incertitudes du système. Deux classes d'incertitudes sont habituellement considérées [Dubuisson, 1990] : *incertitudes structurées* à dépendance affine ( $\Delta A = p_i A_i$  où les  $p_i$  sont de type intervalle) ou bornées en norme ( $\Delta A = M F(t) N$  où  $M$  et  $N$  sont des matrices constantes et où  $F^T(t)F(t) \leq I$ ) et *incertitudes non structurées* dont on possède seulement une majoration de type norme ( $\|\Delta A\| \leq a$ ).

**Remarque 4.1.** Dans la suite, seule la forme d'incertitudes structurées bornées en norme sera considérée.

Dans le contexte multimodèle, un système *incertain* se présente comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)] \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.2a)$$

la prise en compte d'incertitudes sur les matrices  $C$  et  $D$  pouvant également être considérée. De même, un système affecté par des *entrées inconnues* ou par des *perturbations externes*  $d(t)$  est décrit par la structure suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)] \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{aligned} \quad (4.3a)$$

où les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $E_i$ ,  $C$ ,  $D$  et  $G$  sont de dimensions appropriées.

## 4.2 Synthèse d'observateurs à variables de prémisses non mesurables

### 4.2.1 Observateurs basés sur la structure multimodèle

Avant de détailler les résultats proposés dans le cadre de l'estimation de MM (4.3)- (4.2), nous présentons sur une structure simple de MM (4.4) (sans entrée inconnue, sans incertitude, non singulière) ainsi que les difficultés posées par l'estimation de ce type de systèmes et les méthodes généralement utilisées.

La structure des systèmes à observer est de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4.4a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.4b)$$

#### Structure de l'observateur basé sur la forme multimodèle

La structure d'observateur -basée sur la structure multimodèle- la plus utilisée dans la littérature est une extension de celle de l'observateur de Luenberger proposée pour les systèmes linéaires [Luenberger, 1971]. Ce choix s'avère naturel sachant que la structure multimodèle est une combinaison linéaire de sous-modèles linéaires L'observateur proposé, inspiré de celui construit pour le cas linéaire a la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \quad (4.5a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \quad (4.5b)$$

Pour déterminer les gains  $L_i$  de l'observateur (4.5), une étude de stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état doit être réalisée, cette erreur étant définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.6)$$

#### Stabilité de l'erreur d'estimation d'état

Tenant compte de la définition de l'erreur d'estimation (4.6) et des dynamiques de l'état (4.4) et de son estimé (4.5a), ce système s'explique :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i C e(t)) \quad (4.7)$$

La dynamique de l'erreur dépend de la connaissance des variables de prémisses  $z(t)$  intervenant dans les fonctions de pondération  $\mu_i$ . Le système générant l'erreur d'estimation d'état (4.7) est obtenu dans un cadre général en considérant que les variables de prémisses  $z(t)$  ne sont pas mesurables. Dans ce cas l'observateur (4.5) contient une estimation  $\hat{z}(t)$  de ces variables.

La plupart des travaux concernant la conception de multi-observateurs d'état suppose que les

variables de prémisses sont connues ( $\hat{z}(t) = z(t)$ ) [Akhenak et al., 2004; Rodrigues, 2005]. Dans ce cas, le multi-observateur utilise les mêmes variables de prémisses que le modèle. Ainsi, une factorisation par les fonctions de pondération est possible dans l'évaluation de la dynamique de l'erreur et le système (4.7) devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i - L_i C) e(t) \quad (4.8)$$

Comme le système (4.8) est un système autonome sous forme multimodèle, dans ce cas des résultats classiques de stabilité des multimodèles à variables de prémisses non mesurables peuvent être appliqués [Tanaka et Wang, 2001; Bergsten et al., 2002; Ichalal et al., 2009c].

La méthode de Lyapunov [Liapounoff, 1907] permet d'examiner la stabilité d'un système linéaire ou non linéaire par l'analyse de la décroissance d'une fonction scalaire, sans calculer une solution explicite des équations du système. Les résultats basés sur la méthode de Lyapunov sont exprimés en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI), les LMI ayant été introduites dans le contrôle linéaire et robuste au début des années 1990 par Boyd et al. [1994], et dans la communauté intéressée par les études dans le contrôle flou, par Tanaka et al. [1996], Tanaka et Wang [2001].

Le résultat suivant, basé sur le choix d'une fonction quadratique de Lyapunov  $V(e(t)) = e(t)^T P e(t)$  où  $P = P^T > 0$ , offre des conditions suffisantes de stabilité de l'erreur d'estimation.

**Théorème 4.1.** *Le système (4.8) est quadratiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices  $L_i$  telles que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$(A_i - L_i C)^T P + P (A_i - L_i C) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.9)$$

Une formulation LMI de (4.9) est obtenue en faisant le changement de variable  $K_i = P L_i$ . La stabilité du multimodèle est donc liée, d'une part, à la stabilité des sous-modèles, et d'autre part, à l'existence d'une matrice de Lyapunov commune à tous les sous-modèles. La recherche analytique de la matrice  $P$  satisfaisant les inégalités demandées peut s'avérer difficile (même dans les cas à faible dimension) ; toutefois, il existe des algorithmes d'optimisation convexe efficaces capables d'offrir des solutions numériques à ce problème [Boyd et al., 1994]. Cependant, pour un nombre élevé de sous-modèles  $r$ , les conditions (4.9) peuvent être conservatrices dans le sens où il est difficile de trouver une matrice  $P$  unique respectant l'ensemble des conditions (4.9). D'autres techniques ont été proposées ensuite afin de réduire le conservatisme de ce résultat en utilisant d'autres fonctions de Lyapunov, poly-quadratiques [Chadli, 2002; Tanaka et al., 2003; Fang et al., 2006; Kruszewski, 2006] ou non quadratiques [Boyd et al., 1994; Johansson, 1999]. Ce dernier type de fonction fournit des conditions de stabilité exprimées en terme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI) qui sont en général plus difficiles à résoudre que les LMI.

Les résultats proposés dans [Bergsten et al., 2001] proposent des conditions de convergence d'estimation d'état vers zéro en se basant sur l'observateur de Thau-Luenberger [Thau, 1973] :

**Théorème 4.2.** *L'erreur d'estimation d'état entre le modèle Takagi-Sugeno et l'observateur converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe des matrices  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ , des matrices*



$K_i \in \mathbb{R}^{n \times l}$  et un scalaire  $\gamma > 0$  tels que :

$$PA_i + A_i^T P - K_i C - C^T K_i^T < Q, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \gamma^2 I & P \\ P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

Des incertitudes de modélisation sont prises en compte dans [Bergsten et al., 2002] où un observateur à mode glissant a été conçu. Les travaux de [Ichalal, 2009] et [Yoneyama, 2009] traitent le problème d'estimation d'état des systèmes sous forme multimodèle avec des variables de prémisses non mesurables en cherchant à réduire le conservatisme des résultats précédents. Dans Ichalal et al. [2009c, 2010] l'approche Lipschitz est améliorée, il n'y a pas de  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  dans ces articles c'est juste une réécriture. Deux observateurs, proportionnel intégral et proportionnel multi-intégral à entrées inconnues ont été proposés dans Ichalal et al. [2009b] et représentent une extension de ce type d'observateurs du cas linéaire au cas non linéaire. Dans Ichalal et al. [2009a] l'estimation est réalisée par l'approche  $\mathcal{L}_2$  en considérant un système à incertitudes bornées.

## 4.2.2 Approche $\mathcal{L}_2$

L'estimation d'état utilise de façon classique un modèle du système et des mesures collectées sur ce dernier. Cependant, si le modèle du système est imparfait et notamment si les perturbations n'ont pas été prises en compte dans la description, la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation d'état ne peut pas être assurée. À cet effet, la norme  $\mathcal{L}_2$  -extension directe de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  [Weinmann, 1991; Van der Schaft, 1992] - peut être utilisée afin d'évaluer l'erreur d'estimation et ceci en particulier pour les systèmes à paramètres variables dans le temps. Plus particulièrement, grâce à cette norme, on peut quantifier une borne supérieure du gain entre l'énergie de l'entrée et celle de la sortie pour toutes les trajectoires paramétriques admissibles du système [Bara, 2001].

**Définition 4.1.** La norme  $\mathcal{L}_2$  d'un signal  $s(t)$  de carré intégrable est notée et définie par :

$$\|s(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty s(t)^T s(t) dt} \quad (4.12)$$

**Définition 4.2.** La norme  $\mathcal{L}_2$  induite d'un système est définie par

$$\sup_{\|u(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad (4.13)$$

où  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie à énergie bornée, au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$  du système considéré. Cette norme est une mesure du plus grand taux d'amplification énergétique de  $u(t)$  sur  $y(t)$ .

En considérant un système de la forme (4.3) affecté par des perturbations notées  $d(t)$ , bornées en norme, l'observateur de type proportionnel (4.5), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dépend de l'erreur mais aussi de la perturbation  $d(t)$ . En effet, dans le cas simple où les

variables de prémisses sont mesurables (i.e.  $\mu_i = \hat{\mu}_i$ ) le système (4.8) devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) [(A_i - L_i C)e(t) + (E_i - L_i G)d(t)] \quad (4.14)$$

Ainsi, les gains  $L_i$  de l'observateur règlent directement l'impact de la perturbation  $d(t)$  sur l'erreur d'estimation  $e(t)$ .

L'objectif de la synthèse d'observateur se pose dans les termes suivants : trouver les gains  $L_i$  de l'observateur (4.5) pour

- assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$  en absence de perturbations
- atténuer l'influence de la perturbation  $d(t)$  sur l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$

Cet objectif se traduit par les contraintes de performances suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \text{avec} \quad d(t) = 0 \quad (4.15)$$

$$\|e(t)\|_2 < \gamma \|d(t)\|_2 \quad \text{avec} \quad d(t) \neq 0 \text{ et } e(0) = 0 \quad (4.16)$$

La première contrainte garantit la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro si aucune perturbation n'agit sur le système.

La seconde assure la précision de la reconstruction en présence d'une perturbation  $d(t)$  sur le système. En effet,  $\gamma$  est un scalaire positif à déterminer qui indique le niveau d'atténuation entre  $d(t)$  et l'erreur  $e(t)$ . Le but est de minimiser la norme  $\mathcal{L}_2$  entre la perturbation  $d(t)$  et l'erreur  $e(t)$ , la précision de l'estimation étant ainsi fixée au moyen de la valeur de  $\gamma$  qui doit être minimisée.

Ces objectifs sont atteints s'il existe une fonction de Lyapunov  $V(t)$  telle que  $\dot{V}(t)e^T(t)e(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) < 0$  [Boyd et al., 1994]. En choisissant  $V(t) = e^T(t)Pe(t)$  avec  $P = P^T > 0$  on obtient :

**Théorème 4.3.** *L'erreur d'estimation entre l'observateur (4.5) et le système (4.3) vérifie (4.15) et (4.16) s'il existe  $P = P^T > 0$ ,  $K_i$  et un scalaire positif  $\gamma$  tels que*

$$\begin{bmatrix} I + PA_i - K_i C + A_i^T P - C^T K_i^T & PE_i - K_i G \\ (PE_i - K_i G)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

Les gains  $L_i$  sont donnés par  $L_i = P^{-1}K_i$ .

Dans le calcul de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (4.14) on a considéré que les variables de prémisses sont mesurables.

Dans la suite, les travaux présentés dans ce mémoire se placent principalement dans le cadre plus général et plus complexe des variables de décision non mesurables, cette situation se retrouvant souvent dans les modèles des processus réels où le multimodèle est obtenu par la transformation pae secteur non linéaire. Elle n'a été traitée que récemment dans les travaux de Bergsten et Palm [2000], Bergsten et al. [2001] et de façon plus élaborée dans [Ichalal, 2009].

La synthèse d'observateurs consiste à prouver que l'erreur d'estimation converge vers zéro en absence de perturbations, ou bien, que l'influence des signaux inconnus sur l'erreur d'estima-

tion est bornée et minimisée.

### 4.2.3 Description des systèmes non linéaires à variables de prémisses non mesurables

#### Approche par isolation des perturbations

Soit le système non linéaire présenté sous forme multimodèle (4.4) avec des variables de prémisses non mesurables. Pour s'affranchir de cette méconnaissance, une approche consiste à transformer le multimodèle en isolant les variables de prémisses non mesurables dans un terme de perturbation [Ichalal, 2009]. Pour cela, l'idée est de faire intervenir les variables de prémisses estimées dans les fonctions de pondération. On peut alors écrire de façon équivalente l'état du système (4.4) comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + \omega(t)] \quad (4.18)$$

en traitant dans (4.4) le terme dépendant des variables  $z(t)$  non mesurables comme une perturbation  $\omega(t)$  :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r [\mu_i(z(t)) - \mu_i(\hat{z}(t))] [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (4.19)$$

La synthèse d'observateur pour (4.18) consistera alors à minimiser le gain  $\mathcal{L}_2$  de l'entrée  $\omega(t)$  sur l'erreur d'estimation.

#### Approche par incertitudes bornées

Une autre méthode, également basée sur l'introduction des  $\mu_i(\hat{z})$  dans l'équation du système, consiste à faire apparaître l'erreur d'estimation des variables de prémisses sous la forme d'incertitudes bornées dans les matrices d'état du système. Pour cela, on définit les matrices :

$$\Delta_A(t) = \sum_{i=1}^r \delta_i(t) A_i \quad (4.20)$$

$$\Delta_B(t) = \sum_{i=1}^r \delta_i(t) B_i \quad (4.21)$$

où

$$\delta_i(t) = \mu_i(z(t)) - \mu_i(\hat{z}(t)) \quad (4.22)$$

$$\Delta_A(t) = \mathcal{A} \delta_A(t) I_A \quad (4.23)$$

$$\Delta_B(t) = \mathcal{B} \delta_B(t) I_B \quad (4.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [A_1 \dots A_r], \quad \Gamma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t)I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_r(t)I_n \end{bmatrix}, \quad I_A = \begin{bmatrix} I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &= [B_1 \dots B_r], \quad \Gamma_B(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t)I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_r(t)I_m \end{bmatrix}, \quad I_B = \begin{bmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Grâce aux propriétés de convexité des fonctions de pondération on peut écrire  $-1 \leq \delta_i(t) \leq 1$  d'où :

$$\Gamma_A(t)^T \Gamma_A(t) \leq I \quad (4.26)$$

$$\Gamma_B(t)^T \Gamma_B(t) \leq I \quad (4.27)$$

Le système (4.4) devient un multimodèle incertain où les incertitudes sont bornées :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t)) [(A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)] \quad (4.28)$$

### Approche par incertitudes constantes

Soit le système non linéaire présenté sous forme multimodèle (4.4). Grâce à la propriété de somme convexe des fonctions de pondération on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r [\mu_i(z(t)) - \mu_i(\hat{z}(t))] A_i &= \left( \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{z}(t)) \right) \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i - \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \right) \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{z}(t)) A_j \\ &= \sum_{i,j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(\hat{z}(t)) (A_i - A_j) \end{aligned} \quad (4.29)$$

où la notation suivante est utilisée :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^r$$

Compte tenu de (4.29) le système (4.18) peut être écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i,j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(\hat{z}(t)) [(A_j + \Delta A_{i,j})x(t) + (B_j + \Delta B_{i,j})u(t)] \quad (4.30)$$

où

$$\Delta A_{i,j} = A_i - A_j \quad (4.31)$$

$$\Delta B_{i,j} = B_i - B_j \quad (4.32)$$

On a ainsi transformé un multimodèle en un système incertain dans lequel les incertitudes sont parfaitement connues et représentés par des matrices constantes [Ichalal, 2009]. Les trois écritures proposées seront exploitées dans la suite de ce chapitre. De plus, il s'agit de transformations équivalentes du multimodèle de départ.

#### 4.2.4 Estimation d'état de MM incertains en présence d'entrées inconnues

##### Positionnement du problème

Les entrées inconnues peuvent représenter une partie des commandes non accessibles à la mesure, des perturbations non mesurables ou bien un défaut affectant un système. L'estimation de ces entrées inconnues effectuée conjointement avec les états du système peut servir à la génération de signaux indicateurs de défauts, mais insensibles aux perturbations. En revanche, ne pas prendre en compte ces entrées inconnues dans la phase de synthèse d'un observateur peut générer des signaux indicateurs corrompus par ces entrées inconnues.

Un observateur à entrées inconnues (*Unknown Input Observer UIO*) fournit une estimation de l'état du système et ce, en dépit de la présence d'entrées inconnues agissant sur le système. Ces observateurs ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche et leurs propriétés sont parfaitement connues pour les systèmes linéaires.

Deux catégories principales d'observateurs à entrées inconnues sont fréquemment rencontrées :

1. Une première catégorie est basée sur l'idée de *découplage entre l'entrée inconnue et l'erreur d'estimation* afin de rendre l'erreur d'estimation insensible à ces entrées inconnues [Yang et Wilde, 1988; Hou et Muller, 1992; Gaddouna et al., 1994; Darouach et al., 1994; Corless et Tu, 1998]. Un découplage parfait nécessite des conditions structurelles pour que l'estimation soit parfaitement indépendante des entrées inconnues. Dans cette approche, l'estimation des entrées inconnues n'est pas prise en compte. Cependant, l'estimation d'état ainsi réalisée peut servir ensuite à l'*estimation* des entrées inconnues. Les dérivées temporelles des sorties du système sont souvent nécessaires à l'obtention d'une telle estimation [Hou et Patton, 1998]. Or, la sortie d'un système est inévitablement entachée de bruits de mesure. La dérivation sur un tel signal peut par conséquent s'avérer délicate et doit être évitée. L'extension de ce type d'observateur à des systèmes non linéaires caractérisés par un multimodèle a été abordée simultanément par Akhenak et al. [2004] et Rodrigues [2005]. Les approches utilisées pour la conception des observateurs à entrées inconnues s'inspirent de l'observateur initialement proposé par [Darouach et al., 1994] pour les systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI).
2. La deuxième catégorie ne cherche pas à découpler parfaitement les entrées inconnues vis-à-vis de l'erreur d'estimation, mais cherche à minimiser leur influence sur l'erreur d'estimation. Cette approche permet par conséquent de relaxer les contraintes structurelles de découplage. Cette approche permet également l'*estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues* du système souvent au moyen d'une action intégrale améliorant l'estimation d'état [Söffker, 2005; Marx et al., 2003; Ichalal et al., 2009b].

Un observateur à gain proportionnel intégral appartenant à la seconde catégorie d'observateurs sera proposé dans cette section. Il est important de remarquer que la structure de l'observateur

PI à entrées inconnues n'est pas la même que celle de l'observateur PI exploitée classiquement [Kaczorek, 1979]. Une appellation similaire est toutefois utilisée, en raison de l'action intégrale introduite dans la structure de l'observateur. Leur différence provient de la façon dont cette action intégrale est mise à profit. Ici elle est destinée à fournir une estimation des entrées inconnues agissant sur le système alors que dans le cas classique elle peut être mise à profit afin de garantir les performances dynamiques de l'observateur. À la figure 4.3 est présenté un schéma d'un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues.

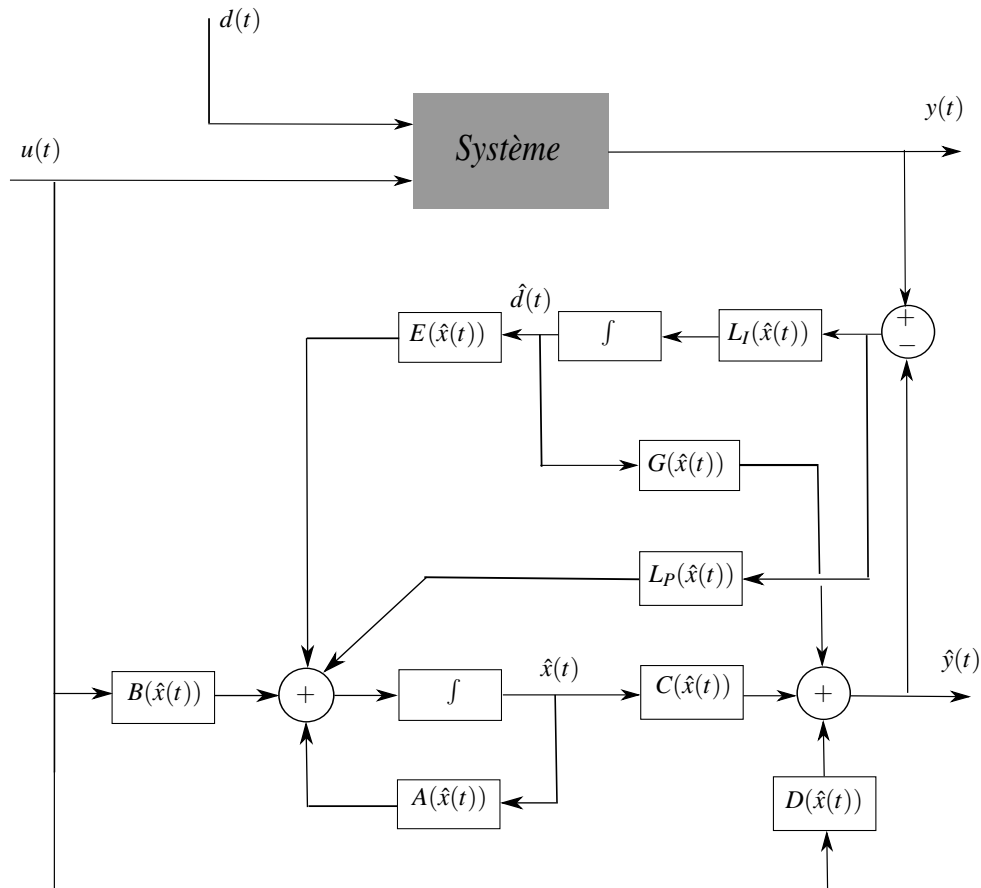


Figure 4.3 – Structure d'un observateur proportionnel-intégral (PI)

De tels observateurs fournissent une bonne estimation de l'entrée inconnue, même en présence de bruit de mesure, et l'introduction d'un gain intégral contribue à réduire le conservatisme des conditions de convergence de l'erreur d'estimation dans la mesure où il constitue un degré de liberté supplémentaire. Toutefois, l'hypothèse d'entrées inconnues constantes est nécessaire pour la démonstration de la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro. Théoriquement, cette hypothèse réduit la classe de signaux pouvant être estimés par l'observateur PI, cependant, en pratique, il est possible d'estimer des signaux ayant des dynamiques lentes en augmentant le gain de l'observateur. Dans cette optique, un observateur PI est proposé dans Xiong et Saif [2003] en ajoutant un paramètre scalaire dans le retour intégral afin de régler, le plus finement possible, l'estimation des entrées inconnues. L'inconvénient d'une telle démarche est l'augmentation de la sensibilité au bruit de mesure avec l'augmentation des gains de l'obser-

vateur [Koenig et Mammar, 2002], ce qui mène à la recherche d'un compromis entre robustesse et performances de l'observateur.

Dans le contexte multimodèle à variables de prémisses non mesurables, pour la conception d'observateurs à entrées inconnues pour un multimodèle, on peut citer les travaux de [Chen et Saif, 2007] - qui généralisent l'observateur proposé dans [Bergsten et Palm, 2000] - ainsi que ceux de Ichalal et al. [2009b]; Ichalal [2009].

Dans ce qui suit on propose la conception d'un observateur pour des systèmes sous forme multimodèle affectés par des entrées inconnues, en considérant en plus la présence d'incertitudes dues aux erreurs de modélisation. La difficulté due aux variables de prémisses non mesurables est traitée en utilisant la transformation décrite à la section 4.2.3. À notre connaissance, cette méthode de synthèse n'a pas encore été traitée dans la littérature et représente un intérêt d'un point de vue applicatif, comme cela sera présenté dans le chapitre prochain.

### Représentation multimodèle d'un système incertain

On considère le système incertain sous forme multimodèle affecté par des entrées inconnues :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + E_i d(t)] \quad (4.33a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (4.33b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représente l'entrée connue,  $d(t) \in \mathbb{R}^q$  l'entrée inconnue,  $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$  la sortie mesurée, les matrices ayant des dimensions appropriées, les incertitudes  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$  satisfont les contraintes :

$$\Delta A_i(t) = M_i^a F_a(t) N_i^a \quad (4.34a)$$

$$\Delta B_i(t) = M_i^b F_b(t) N_i^b \quad (4.34b)$$

où  $M_i^a, N_i^a, M_i^b, N_i^b$  sont des matrices connues constantes et de dimensions appropriées. Les fonctions  $F_a(t) \in \mathbb{R}^{f_1 \times f_1}$  et  $F_b(t) \in \mathbb{R}^{f_2 \times f_2}$  sont des fonctions matricielles inconnues satisfaisant les contraintes

$$F_a^T(t) F_a(t) \leq I \quad (4.35a)$$

$$F_b^T(t) F_b(t) \leq I \quad (4.35b)$$

L'espace paramétrique des éléments  $(A_i + \Delta A_i(t), B_i + \Delta B_i(t))$  constitue le domaine d'incertitude paramétrique, les incertitudes étant bornées. Plusieurs arguments en faveur de l'utilisation de cette forme d'incertitudes sont présentés dans [Kahargonekar et al., 1990].

Rappelons que les fonctions de pondération  $\mu_i$  satisfont la propriété de somme convexe suivante

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1, \quad \forall x(t), \forall t \geq 0, i = 1, \dots, r \quad (4.36)$$

et qu'elles dépendent des variables d'état qui ne sont pas nécessairement disponibles à la mesure.

### Synthèse d'un observateur proportionnel-intégral

Dans la suite, l'hypothèse suivante est faite

**Hypothèse 4.1.** *L'entrée inconnue est constante :  $\dot{d}(t) = 0$ .*

Dans la synthèse d'un observateur proportionnel intégral, même si cette hypothèse est nécessaire pour la démonstration théorique de la convergence de l'erreur d'estimation d'état, elle peut être relaxée dans les applications pratiques [Koenig et Mammar, 2002].

Afin d'estimer conjointement les états et les entrées inconnues, l'observateur proportionnel intégral (*Proportional Integral Observer* PIO) suivant est proposé :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_i^P (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (4.37a)$$

$$\dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) L_i^I (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.37b)$$

$$\hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + G \hat{d}(t) \quad (4.37c)$$

La construction de l'observateur se résume à trouver les gains  $L_i^P$  et  $L_i^I$  tels que l'erreur d'estimation de l'état et de l'entrée inconnue soient générées par un système stable. Le résultat suivant résume la procédure de synthèse de l'observateur :

**Théorème 4.4.** *L'observateur (4.37) qui estime l'état et l'entrée inconnue du système (4.33) tout en minimisant  $\gamma$  le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert des entrées connues et inconnues vers l'erreur d'estimation des états et des entrées inconnues est obtenu en recherchant des matrices définies positives et symétriques  $P_1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$  et  $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , des matrices  $\bar{P}_j \in \mathbb{R}^{(n+q) \times \ell}$  et des scalaires positifs  $\varepsilon_{1i}$  et  $\varepsilon_{2i}$  qui minimisent  $\bar{\gamma} = \gamma^2$  sous les contraintes LMI suivantes*

$$\mathcal{M}_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.38a)$$

$$\frac{2}{r-1} \mathcal{M}_{ii} + \mathcal{M}_{ij} + \mathcal{M}_{ji} < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r \quad (4.38b)$$

où  $\mathcal{M}_{ij}$  est définie par

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \Theta_{ij}^{11} & \Theta_{ij}^{12} & 0 & \Theta_{ij}^{14} & P_1 \bar{M}_i^a & P_1 \bar{M}_i^b \\ * & \Theta_{ij}^{22} & P_2 B_i & P_2 E_i & P_2 M_i^a & P_2 M_i^b \\ * & * & \Theta_{ij}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\gamma} I_q & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_{1i} I_{f_1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_{2i} I_{f_2} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^{11} &= I_{n+q} + \mathbb{S}(P_1 \bar{A}_j - \bar{P}_j \bar{C}), & \Theta_{ij}^{12} &= P_1 (\tilde{A}_i - \tilde{A}_j), & \Theta_{ij}^{14} &= P_1 (\tilde{E}_i - \tilde{E}_j) \\ \Theta_{ij}^{22} &= \varepsilon_{1i} N_i^{aT} N_i^a + \mathbb{S}(P_2 A_i), & \Theta_{ij}^{33} &= \varepsilon_{2i} N_i^{bT} N_i^b - \bar{\gamma} I_m \end{aligned}$$



et les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{C} &= [C \ G], & \bar{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{E}_i &= \begin{bmatrix} E_i \\ 0 \end{bmatrix}, & \bar{M}_i^a &= \begin{bmatrix} M_i^a(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & \bar{M}_i^b &= \begin{bmatrix} M_i^b(t) \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Les gains de l'observateur sont obtenus comme suit

$$\begin{bmatrix} L_j^P \\ L_j^I \end{bmatrix} = P_1^{-1} \bar{P}_j \quad (4.40)$$

**Notations.** Les symboles \* dans une matrice bloc indiquent les blocs induits par la symétrie. Pour toute matrice  $M$ ,  $\mathbb{S}(M)$  est définie par  $\mathbb{S}(M) = M + M^T$ .

*Démonstration.* Définissons le vecteur d'état augmenté et son estimé respectivement par

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

L'erreur d'estimation de l'état augmenté est définie par

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$$

Le système (4.33) et l'observateur (4.37) s'écrivent alors

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t)) [(\bar{A}_i + \Delta \bar{A}_i(t))x_a(t) + (\bar{B}_i + \Delta \bar{B}_i(t))u(t)] \quad (4.42a)$$

$$y(t) = \bar{C}x_a(t) \quad (4.42b)$$

et

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{j=1}^r \mu_j(\hat{x}_a(t)) [\bar{A}_j \hat{x}_a(t) + \bar{L}_j \bar{C} e_a(t) + \bar{B}_j u(t)] \quad (4.43a)$$

$$\hat{y}(t) = \bar{C} \hat{x}_a(t) \quad (4.43b)$$

avec les définitions suivantes :

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{A}_i(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_i(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{B}_i(t) = \begin{bmatrix} \Delta B_i(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_i(t) = \begin{bmatrix} L_i^P \\ L_i^I \end{bmatrix}$$

Il faut remarquer que dans l'équation (4.42) les fonctions de pondération dépendent de  $x_a(t)$ , alors que dans (4.43) elles dépendent de  $\hat{x}_a(t)$ . Pour faire face à la difficulté d'exprimer l'erreur d'estimation de l'état augmenté d'une façon exploitable, (4.42) est réécrit, en se basant sur la

propriété (4.36),

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_a(t)) \mu_j(\hat{x}_a(t)) [(\bar{A}_j + \bar{A}_i - \bar{A}_j + \bar{\Delta A}_i(t))x_a(t) \\ & + (\bar{B}_j + \bar{B}_i - \bar{B}_j + \bar{\Delta B}_i(t))u(t)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

La forme ainsi obtenue se compare plus aisément à celle de l'observateur (4.43). En conséquence, l'erreur d'estimation de l'état augmenté obéit au système non linéaire suivant

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_a(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_a(t)) \mu_j(\hat{x}_a(t)) \left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C} & \tilde{A}_i - \tilde{A}_j + \tilde{\Delta A}_i(t) \\ 0 & A_i + \Delta A_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \bar{\Delta B}_i(t) & \tilde{E}_i - \tilde{E}_j \\ B_i + \Delta B_i(t) & E_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.45a)$$

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} I_{n+q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (4.45b)$$

où  $\tilde{\Delta A}_i(t)^T = [\Delta A_i^T(t) \ 0]$ .

Soit  $V(e_a(t), x(t))$  la fonction Lyapunov candidate définie par :

$$V(x_a(t), x(t)) = \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont des matrices symétriques et définies positives. L'objectif est de trouver les gains de l'observateur qui minimisent le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert des entrées connues  $u(t)$  et inconnues  $d(t)$  vers l'erreur d'estimation de l'état et de l'entrée inconnue  $e_a(t)$ . Le gain est borné par  $\gamma$  si [Boyd et al., 1994]

$$\dot{V}(e_a(t), x(t)) + e_a^T(t)e_a(t) - \gamma^2(u^T(t)u(t) + d^T(t)d(t)) < 0 \quad (4.47)$$

En considérant la fonction de Lyapunov (4.46) et la trajectoire de  $e_a(t)$  définie par (4.45), l'inégalité (4.47) peut être écrite

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_a(t)) \mu_j(\hat{x}_a(t)) \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \\ u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{ij}^{11} & \Phi_{ij}^{12} & \Phi_{ij}^{13} & \Psi_{ij}^{14} \\ * & \Phi_{ij}^{22} & \Phi_{ij}^{23} & P_2 E_i \\ * & * & -\gamma^2 I_m & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \\ u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

où

$$\begin{aligned}
 \Psi_{ij}^{11} &= \mathbb{S}(P_1\bar{A}_j - P_1\bar{L}_j\bar{C}) + I \\
 \Phi_{ij}^{12} &= P_1(\tilde{A}_i - \tilde{A}_j + \tilde{\Delta A}_i(t)) \\
 \Phi_{ij}^{13} &= P_1\bar{\Delta B}_i(t) \\
 \Psi_{ij}^{14} &= P_1(\tilde{E}_i - \tilde{E}_j) \\
 \Phi_{ij}^{22} &= \mathbb{S}(P_2A_i + P_2\Delta A_i(t)) \\
 \Phi_{ij}^{23} &= P_2(B_i + \Delta B_i(t))
 \end{aligned}$$

La résolution de (4.48) est rendue délicate par la présence des perturbations  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$ . En séparant les termes variant avec le temps, (4.48) devient

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_a(t)) \mu_j(\hat{x}_a(t)) \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \\ u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_{ij}^{11} & \Psi_{ij}^{12} & 0 & \Psi_{ij}^{14} \\ * & \Psi_{ij}^{22} & \Psi_{ij}^{23} & P_2E_i \\ * & * & -\gamma^2 I_m & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \right. \\
 &+ \mathbb{S} \left( \begin{bmatrix} P_1\bar{M}_i^a \\ P_2M_i^a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_a(t) \begin{bmatrix} 0 \\ N_i^{aT} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} P_1\bar{M}_i^b \\ P_2M_i^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_b(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i^{bT} \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \left. \begin{bmatrix} e_a(t) \\ x(t) \\ u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \Psi_{ij}^{12} &= P_1(\tilde{A}_i - \tilde{A}_j) \\
 \Psi_{ij}^{22} &= \mathbb{S}(P_2A_i) \\
 \Psi_{ij}^{23} &= P_2B_i
 \end{aligned}$$

Rappelons que pour toutes matrices  $X$ ,  $Y$  et  $F(t)$  de dimensions appropriées et satisfaisant  $F(t)^T F(t) \leq I$  et pour tout scalaire positif  $\varepsilon$  l'inégalité suivante est respectée :

$$XF(t)Y^T + YF(t)^T X^T \leq \varepsilon XX^T + \varepsilon^{-1}YY^T \quad (4.50)$$

En utilisant l'inégalité précédente (4.50) et la propriété (4.34) des fonctions  $F_a(t)$  et  $F_b(t)$ , on

peut déduire que (4.49) est satisfaite si l'inégalité suivante est respectée :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_a(t)) \mu_j(\hat{x}_a(t)) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \Psi_{ij}^{11} & \Psi_{ij}^{12} & 0 & \Psi_{ij}^{14} \\ * & \Psi_{ij}^{22} & \Psi_{ij}^{23} & P_2 E_i \\ * & * & -\gamma^2 I_m & 0 \\ * & * & 0 & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \\ + \mathbb{S} \left( \varepsilon_{i1}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \bar{M}_i^a \\ P_2 \bar{M}_i^a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \bar{M}_i^a \\ P_2 \bar{M}_i^a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \varepsilon_{2i}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \bar{M}_i^b \\ P_2 \bar{M}_i^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \bar{M}_i^b \\ P_2 \bar{M}_i^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \right. \\ \left. + \varepsilon_{1i} \begin{bmatrix} 0 \\ N_i^{aT} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N_i^{aT} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \varepsilon_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i^{bT} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i^{bT} \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \end{array} \right\} < 0 \quad (4.51)$$

En utilisant le complément de Schur et définissant  $\bar{P}_j = P_1 \bar{L}_j$  et  $\bar{\gamma} = \gamma^2$ , l'inégalité précédente devient

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x_a(t)) \mu_j(\hat{x}_a(t)) \mathcal{M}_{ij} < 0 \quad (4.52)$$

avec  $\mathcal{M}_{ij}$  définie dans (4.39). De plus, en utilisant le résultat [Tuan et al., 2001] que pour tout  $i = 1, \dots, r$  et  $1 \leq i \neq j \leq r$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z) \mu_j(\hat{z}) \mathcal{M}_{ij} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{M}_{ii} < 0 \\ \frac{2}{r-1} \mathcal{M}_{ii} + \mathcal{M}_{ij} + \mathcal{M}_{ji} < 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

On peut déduire que (4.52) est satisfaite si (4.38) l'est, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Remarque 4.2.** Dans le cas où le système est affecté à la fois par des entrées inconnues à estimer  $d(t)$  et des perturbations qu'on ne cherche pas à reconstruire  $w(t)$ , le système (4.33) devient

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) ((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + E_i d(t) + F_i w(t)) \quad (4.54a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) + Hw(t) \quad (4.54b)$$

Le résultat précédent peut être facilement adapté afin d'estimer les deux variables  $x(t)$  et  $d(t)$  tout en minimisant l'influence de  $w(t)$  sur les erreurs d'estimation. On peut facilement voir que les matrices  $\mathcal{M}_{ij}$  de (4.38) doivent être remplacées par  $\tilde{\mathcal{M}}_{ij}$  définie par

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{ij} & \Psi_{ij} \\ * & -\bar{\gamma} I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

avec

$$\Psi_{ij}^T = [(\bar{P}_j \bar{H} - P_1 \bar{F}_i)^T F_i^T P_2 \ 0 \ 0] \quad (4.56)$$

$$\bar{H}^T = [H^T \ 0] \quad (4.57)$$

$$\bar{F}_i^T = [F_i^T \ 0] \quad (4.58)$$

Le théorème 4.4 s'applique alors avec ces nouvelles définitions.

### Exemple

On reprend le système de trois cuves décrit à la section 2.2.8, qui est un système non linéaire multi-entrées et multi-sorties comportant deux entrées ( $Q_1$  et  $Q_2$ ) et deux sorties ( $x_1$  et  $x_2$ ). Les débits  $Q_{f1}$ ,  $Q_{f2}$  et  $Q_{f3}$  représentant des débits de fuite éventuelle au niveau des cuves seront pris en compte ici, contrairement à l'étude effectuée en chapitre 2 où ils étaient considérés nuls. Plus précisément, on cherche à estimer  $Q_{f1}$  et  $Q_{f2}$  et à être robuste vis-à-vis de  $Q_{f3}$ .

Ce système est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{S} Q_1(t) - W_{1,3}(x) \sqrt{2g |x_1(t) - x_3(t)|} - \frac{1}{S} Q_{f1}(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{S} Q_2(t) + W_{3,2}(x) \sqrt{2g |x_3(t) - x_2(t)|} - \frac{1}{S} \alpha_2 S_n \sqrt{2g x_2(t)} - \frac{1}{S} Q_{f2}(t) \\ \dot{x}_3(t) &= W_{1,3}(x) \sqrt{2g |x_1(t) - x_3(t)|} - W_{3,2}(x) \sqrt{2g |x_3(t) - x_2(t)|} - \frac{1}{S} Q_{f3}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Gd(t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

où pour des raisons de simplicité des notations, on définit :

$$W_{i,k}(x) = \alpha_i \frac{S_n}{S} \text{sgn}[x_i(t) - x_k(t)], \quad i \neq k \quad (4.60)$$

Définissons

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} Q_{f1} \\ Q_{f2} \end{bmatrix}, \quad w = Q_{f3} \quad (4.61)$$

les vecteurs respectifs d'état, d'entrée, de sortie, d'entrée inconnue à estimer et d'entrée inconnue de perturbation intervenant dans (4.54).

Les matrices  $C$  et  $G$  sont données par :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = O_{2 \times 2} \quad (4.62)$$

Conformément à l'hypothèse 2.1, les niveaux dans les trois cuves sont bornés :  $x \in \mathbb{R}_+^3$ .

**Hypothèse 4.2.** Supposons que les paramètres d'écoulement du modèle  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  possèdent des

incertitudes bornées

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(t) + \delta \alpha_1(t) \quad (4.63)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(t) + \delta \alpha_2(t) \quad (4.64)$$

générant dans la matrice  $A$  une incertitude  $\Delta A(t)$  satisfaisant les contraintes (4.34).

### Transformation des équations sous forme multimodèle

Pour écrire le système des trois cuves sous forme multimodèle équivalente; on utilise une somme pondérée des états, grâce aux scalaires réels  $\lambda_i$  et  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Le choix de ces scalaires -comme précisé de façon plus détaillée en chapitre 2- donne la possibilité de mettre en évidence plusieurs formes quasi-LPV et ainsi d'obtenir plusieurs formes multimodèles.

Définissons, en fonction de ces sommes pondérées et en utilisant l'hypothèse 2.1, les variables de prémisses suivantes :

$$z_1(x) = \frac{W_{1,3}(t)}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i(t)} \sqrt{2g |x_1(t) - x_3(t)|} \quad (4.65)$$

$$z_2(x) = \frac{\alpha_2 S_n}{S} \sqrt{\frac{2g}{x_2(t)}} \quad (4.66)$$

$$z_3(x) = \frac{W_{3,2}(t)}{\sum_{i=1}^3 \gamma_i x_i(t)} \sqrt{2g |x_3(t) - x_2(t)|} \quad (4.67)$$

Avec l'hypothèse 4.2, le système (4.59) prend la forme quasi-LPV :

$$\dot{x}(t) = [A(z_1, z_2, z_3) + \Delta A(t)] x(t) + B u(t) + E d(t) + F w(t) \quad (4.68)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (4.69)$$

Cette forme met en évidence les entrées inconnues  $d$  et  $w$  séparément des entrées  $u$ . Les matrices  $A(z_1, z_2, z_3)$ ,  $\Delta A(t)$ ,  $B$ ,  $E$  et  $F$  sont définies comme suit :

$$A(z_1, z_2, z_3) + \Delta A(t) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \tilde{z}_1(x) & -\lambda_2 \tilde{z}_1(x) & -\lambda_3 \tilde{z}_1(x) \\ \gamma_1 z_3(x) & \gamma_2 z_3(x) - \tilde{z}_2(x) & \gamma_3 z_3(x) \\ \lambda_1 \tilde{z}_1(x) - \gamma_1 z_3(x) & \lambda_2 \tilde{z}_1(x) - \gamma_2 z_3(x) & \lambda_3 \tilde{z}_1(x) - \gamma_3 z_3(x) \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

où

$$\tilde{z}_1(t) = z_1(t) + \delta_1(t) \frac{S_n}{S} \operatorname{sgn}(x_1 - x_3) \frac{\sqrt{2g |x_1(t) - x_3(t)|}}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i(t)} \quad (4.71)$$

$$\tilde{z}_2(t) = z_2(t) + \delta_2(t) \frac{S_n}{S} \sqrt{\frac{2g}{x_2(t)}} \quad (4.72)$$

Notons :

$$\Delta\alpha_1(t) = \delta_1(t) \frac{S_n}{S} \operatorname{sgn}(x_1(t) - x_3(t)) \frac{\sqrt{2g|x_1(t) - x_3(t)|}}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i(t)} \quad (4.73)$$

$$\Delta\alpha_2(t) = \delta_2(t) \frac{S_n}{S} \sqrt{\frac{2g}{x_2(t)}} \quad (4.74)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{S} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \Delta\alpha_1(t) & -\lambda_2 \Delta\alpha_1(t) & -\lambda_3 \Delta\alpha_1(t) \\ 0 & -\Delta\alpha_2(t) & 0 \\ \lambda_1 \Delta\alpha_1(t) & \lambda_2 \Delta\alpha_1(t) & \lambda_3 \Delta\alpha_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

**Hypothèse 4.3.** Sachant que les niveaux dans les trois cuves sont bornés, conformément à l'hypothèse 2.1, alors on peut déduire que  $\Delta\alpha_1(t)$  et  $\Delta\alpha_2(t)$  sont bornés.

Conformément à l'hypothèse 4.2 l'incertitude s'écrit  $\Delta A(t) = M_a F_a(t) N_a$  avec les matrices :

$$M_a = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.15 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_a(t) = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_1(t) & 0 \\ 0 & \Delta\alpha_2(t) \end{bmatrix}, \quad N_a = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

En utilisant la transformation polytopique convexe, les variables  $z_j$  peuvent s'écrire comme dans (2.82) où les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  sont définis par (2.83) et les fonctions  $F_{j,1}$  et  $F_{j,2}$  sont données par (2.84).

Ainsi, le multimodèle est composé de  $8 = 2^3$  sous-modèles. Les fonctions de pondération sont calculées comme dans (2.85). Les matrices constantes de chaque sous-modèles sont données par  $A_i = A(z_1, \sigma_i^1, z_2, \sigma_i^2, z_3, \sigma_i^3)$   $i = 1, \dots, 8$  où la matrice  $A(z_1, z_2, z_3)$  est donnée en (4.70). Compte tenu des définitions (4.75), on a  $B_i = B$ ,  $E_i = E$  et  $F_i = F$  pour tout ( $i = 1, \dots, 8$ ).

Finalement, le système (4.68) est réécrit sous la forme (4.54) avec  $\Delta B_i(t) = 0$ ,  $G = 0$ ,  $H = 0$ .

#### **Critères d'observabilité pour le choix de la forme multimodèle**

Pour construire un observateur basé sur un multimodèle, la propriété d'observabilité doit être assurée. Comme précisé en chapitre 2, l'observabilité de chaque sous-modèle est nécessaire pour assurer l'observabilité du multimodèle global.

Conformément à l'étude effectuée en section 2.2.8 concernant les critères d'observabilité pour le choix du MM, les multimodèles avec  $\lambda_3 = \gamma_3 = 0$  doivent être évitées car la condition d'observabilité (2.89) n'est pas respectée.

#### **Résultats d'estimation des hauteurs et des fuites**

À partir de la forme multimodèle obtenue pour le système des trois cuves, un observateur PI

(4.37c) est construit. Le théorème 4 est utilisé pour la synthèse de l'observateur et pour expliciter les conditions de convergence de l'estimation de l'état et de l'entrée inconnue.

Les LMIs (4.38) sont résolues par rapport aux scalaires  $\varepsilon_{1i}$ ,  $\varepsilon_{2i}$  ( $i = 1, \dots, 8$ ), aux matrices  $\bar{P}_j \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$  ( $j = 1, \dots, 8$ ) et aux matrices  $P_1 \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  et  $P_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  qui ne seront pas présentés ici. Les gains  $L_j \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$  de l'observateur obtenus sont :

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \begin{bmatrix} 1.51 & -0.63 \\ -2.65 & 1.12 \\ 1.15 & -0.69 \\ 0.23 & 0.05 \\ -0.47 & 2.04 \end{bmatrix} & L_2 &= \begin{bmatrix} 1.61 & -0.50 \\ 1.46 & 1.10 \\ -3.41 & -0.35 \\ -1.03 & 2.05 \\ 0.7 & 0.04 \end{bmatrix} & L_3 &= \begin{bmatrix} 1.50 & -0.63 \\ -2.65 & 2.02 \\ 1.20 & -0.60 \\ 0 & -0.5 \\ 0.44 & 1.02 \end{bmatrix} \\
 L_4 &= \begin{bmatrix} 1.61 & -0.50 \\ 1.46 & 2.01 \\ -3.40 & -0.35 \\ 0.23 & -0.15 \\ 1.22 & 1.32 \end{bmatrix} & L_5 &= \begin{bmatrix} 2.87 & -0.65 \\ -2.52 & 1.17 \\ 1.06 & -1.35 \\ 1.42 & 1.35 \\ -2.23 & -0.23 \end{bmatrix} & L_6 &= \begin{bmatrix} 2.92 & -0.58 \\ 1.54 & 1.15 \\ -3.23 & -0.73 \\ 0.15 & 0.78 \\ -0.41 & -1.54 \end{bmatrix} \\
 L_7 &= \begin{bmatrix} 2.87 & -0.65 \\ -2.53 & 2.08 \\ 1.06 & -1.35 \\ 1.30 & 0.02 \\ 0.17 & 0.40 \end{bmatrix} & L_8 &= \begin{bmatrix} 3.11 & -0.4 \\ 1.83 & 2.32 \\ -2.79 & -0.35 \\ 2.23 & 2.5 \\ 0.56 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

qui minimisent le gain  $\mathcal{L}_2$  de transfert des entrées connues  $u$  et inconnues  $d$  vers l'erreur d'estimation d'état  $e$  :  $\bar{\gamma} = 1.14$ .

Les résultats d'estimation des variables d'état - les niveaux d'eau dans les trois cuves - sont illustrés à la figure 4.4. Une convergence rapide des états estimés par l'observateur peut être remarquée, les écarts d'estimation au voisinage de l'origine étant dûs au choix arbitraire des conditions initiales de l'observateur.

Comme on peut le remarquer à la figure 4.5, les entrées inconnues  $Q_{f1}$  et  $Q_{f2}$  ne sont pas constantes, ce qui était une hypothèse exigée dans le cadre de la construction du PIO. Toutefois, les résultats d'estimation obtenus montrent qu'il suffit d'avoir un signal de dynamique lente afin d'obtenir des bons résultats d'estimation de l'état et de l'entrée inconnue.

La figure 4.6 permet de visualiser les paramètres d'écoulement  $\alpha_1(t)$  et  $\alpha_2(t)$  générant des incertitudes bornées dans la matrice d'état  $A$ .

## 4.2.5 Estimation d'état de MM à deux échelles de temps

### Positionnement du problème

La modélisation des systèmes ayant deux échelles de temps est souvent réalisée à l'aide de la forme singulière, traitée en détail au cours du chapitre 3. En supposant que la forme standard singulière est obtenue, le cas limite où le paramètre de perturbation singulière tend vers zéro demande la résolution d'un système algébrique afin d'extraire les variables rapides et les remplacer dans l'ODE correspondant aux variables lentes. Ceci ne constitue pas un problème



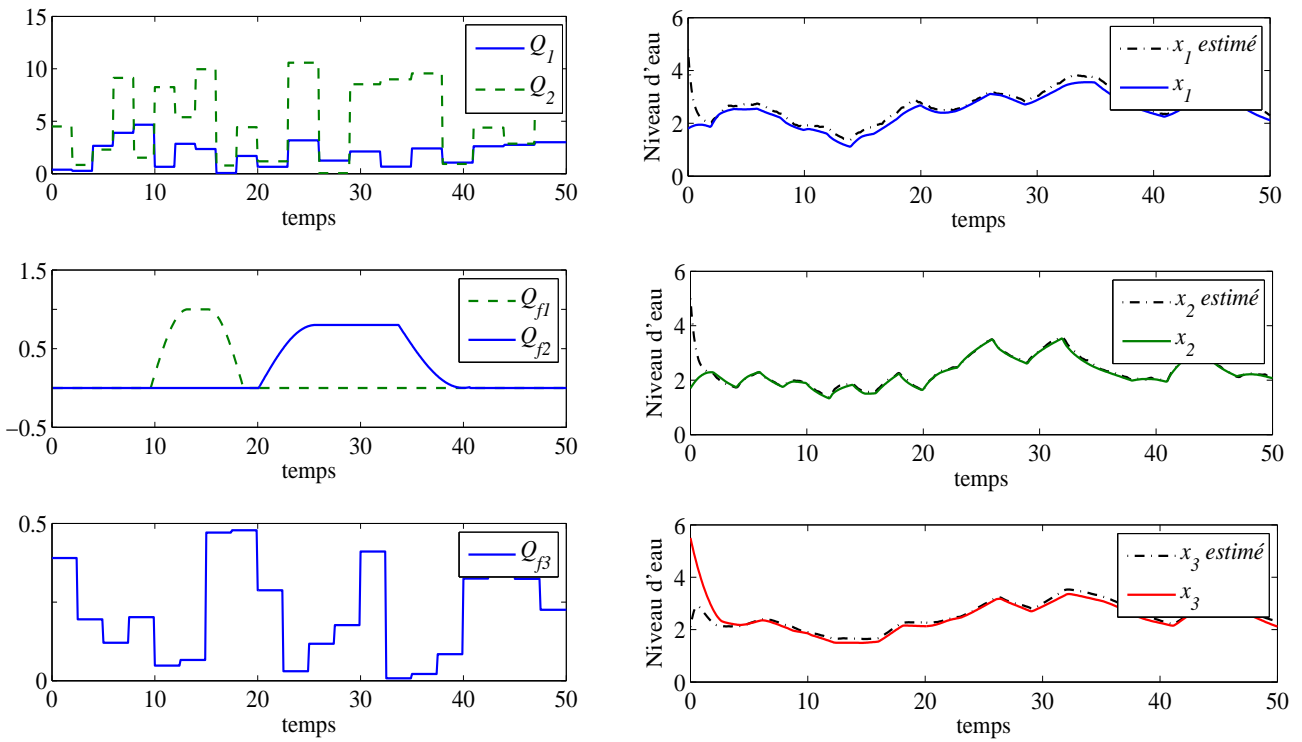


Figure 4.4 – Estimation des états du système de trois cuves

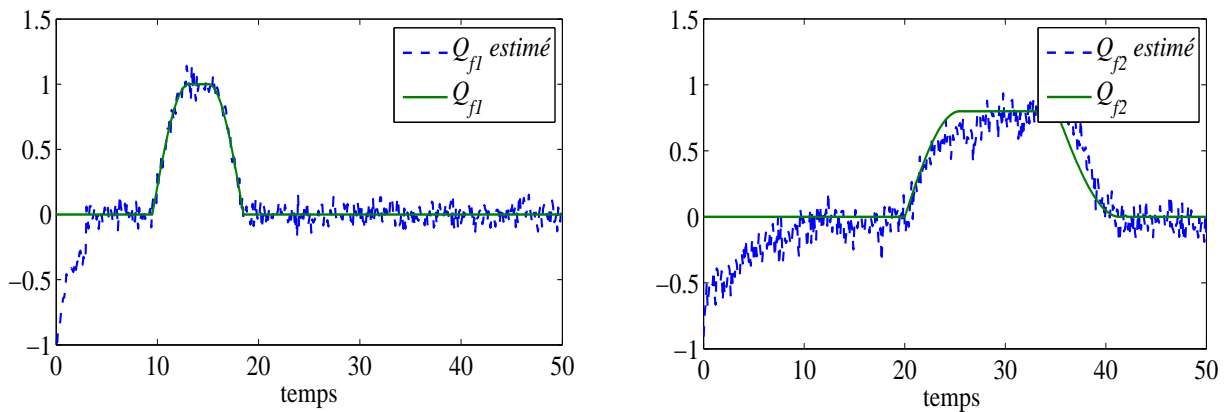


Figure 4.5 – Estimation des entrées inconnues  $Q_{f1}$  et  $Q_{f2}$  du système de trois cuves

trivial et nécessite un changement de coordonnées (section 3.3.2).

En considérant la forme “singulière standard”, un MM équivalent peut être écrit. La forme

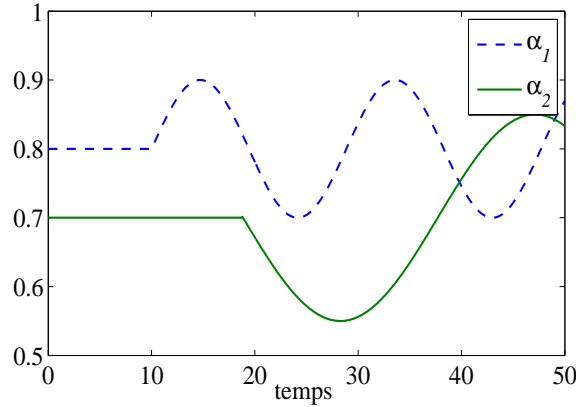


Figure 4.6 – Les paramètres d'écoulement générant des incertitudes bornées

classique du MM est légèrement modifiée afin de séparer les différentes échelles de temps.

La contribution de cette approche est d'estimer les variables d'état de systèmes non linéaires à deux échelles de temps en évitant la résolution de l'équation algébrique -statique- correspondant aux variables d'état rapides. Ceci est possible en construisant un vecteur de sortie augmenté en utilisant l'équation statique et en considérant les variables d'état rapides comme des entrées inconnues. Ainsi, un observateur proportionnel intégral (PIO) à entrées inconnues peut être construit en utilisant la forme MM à deux échelles de temps. À cause du nombre limité de capteurs, cette approche s'avère intéressante grâce au choix des variables rapides comme des entrées inconnues. Cet observateur permet de reconstruire simultanément les variables d'état lentes et rapides et donne des résultats plus précis en ce qui concerne l'influence du bruit sur la reconstruction de l'état, qu'un observateur classique à entrées inconnues [Ichalal et al. \[2009c\]](#).

### Représentation MM à deux échelles de temps

Rappelons la forme standard des systèmes singuliers à deux échelles de temps :

$$\varepsilon \dot{x}_f(t) = f_f(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon) \quad (4.79a)$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), x_f(t), u(t), \varepsilon) \quad (4.79b)$$

où  $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$  et  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$  sont respectivement les variables lentes et rapides,  $f_f(x, u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_f}$ ,  $f_s(x, u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_s}$ ,  $n = n_s + n_f$  et  $\varepsilon$  est le paramètre de perturbation singulière.

Dans le cas limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le degré du système (3.3) dégénère de  $n$  à  $n_s < n$  et le système devient :

$$0 = f_f(x_s(t), x_f(t), u(t), 0) \quad (4.80a)$$

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t), x_f(t), u(t), 0) \quad (4.80b)$$

La forme quasi-LPV équivalente au système (4.80) est :

$$0 = A_{ff}(x, u)x_f(t) + A_{fs}(x, u)x_s(t) + B_f(x, u)u(t) \quad (4.81)$$

$$\dot{x}_s(t) = A_{sf}(x, u)x_f(t) + A_{ss}(x, u)x_s(t) + B_s(x, u)u(t) \quad (4.82)$$

**Hypothèse 4.4.** La forme quasi-LPV que la matrice  $B_f$  ne dépend pas de  $x(t)$ , i.e.  $B_f(u(t))$ .

Ainsi, la forme MM est légèrement modifiée afin de mettre en évidence les variables d'état lentes et rapides :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \left[ A_{ff}^i x_f(t) + A_{fs}^i x_s(t) \right] + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\mu}_i(u) B_f^i u(t) \\ \dot{x}_s(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \left[ A_{sf}^i x_f(t) + A_{ss}^i x_s(t) + B_s^i u(t) \right] \\ y(t) &= C_f x_f(t) + C_s x_s(t) \end{aligned} \quad (4.83)$$

où  $\tilde{r} \leq r$ ,  $\mu_i(x, u)$  et  $\tilde{\mu}_i(u)$  satisfont les propriétés de somme convexe, les matrices  $A_{ff}^i, A_{fs}^i, A_{sf}^i, A_{ss}^i, B_f^i, B_s^i$  correspondent aux dynamiques lentes et rapides identifiées dans les matrices  $A_i$  et  $B_i$  :

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{ff}^i & A_{fs}^i \\ A_{sf}^i & A_{ss}^i \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} B_f^i \\ B_s^i \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Dans la première équation (4.83) on déplace le terme de commande de la partie droite vers la partie gauche de l'égalité. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \left[ A_{ss}^i x_s(t) + B_s^i u(t) + A_{sf}^i x_f(t) \right] \\ y_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) \left[ C_i x_s(t) + G_i x_f(t) \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

où le vecteur  $y_a(t)$  est une sortie augmentée mesurable définie par :

$$y_a(t) = \begin{bmatrix} - \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\mu}_i(u) B_f^i u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

et où les matrices  $C_i$  et  $G_i$  sont données par :

$$C_i = \begin{bmatrix} A_{fs}^i \\ C_s \end{bmatrix} \quad G_i = \begin{bmatrix} A_{ff}^i \\ C_f \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Comme on peut le remarquer, le nouveau vecteur de sortie  $y_a$  n'est plus linéaire par rapport à la variable d'état  $x$  (comme l'était le vecteur initial  $y(t)$ ).

On considère ainsi le système (4.85) comme un MM affecté par des entrées inconnues  $x_f$ . Notons le vecteur des entrées inconnues  $d(t) = x_f(t)$ , avec la propriété suivante :

$$\dot{d}(t) = 0 \quad (4.88)$$

La supposition que  $d(t)$  soit constante est nécessaire dans le cadre de la construction d'un PIO pour pouvoir démontrer théoriquement la convergence de l'erreur d'estimation d'état [Koenig et Mammar \[2002\]](#). Cependant, il est connu qu'en pratique il suffit d'avoir un signal de basse

fréquence. Le terme "rapide" se réfère aux dynamiques de  $x_s$ . En effet,  $x_f(t)$  est - pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  - une fonction statique de  $x_s(t)$  qui obéit à un processus dynamique lent. En conséquence, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (i.e. quand on néglige le comportement dynamique de la partie rapide du système),  $x_f(t)$  est aussi un signal à dynamique lente.

Considérons le vecteur d'état augmenté

$$x_a = \begin{bmatrix} x_s \\ d \end{bmatrix}$$

et les matrices :

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_{ss}^i & A_{sf}^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_s^i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_i = [C_i \quad G_i]$$

En utilisant les notations précédentes et la propriété des entrées inconnues (4.88), le système (4.85) est équivalent au système augmenté :

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x_a(t), u(t)) [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t)] \quad (4.89a)$$

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\mu}_i(u(t)) \tilde{C}_i x_a(t) \quad (4.89b)$$

Afin de faciliter la synthèse de l'observateur, en utilisant dans les fonctions  $\mu_i$  l'état estimé  $\hat{x}_a$ , l'équation d'état peut s'écrire :

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) [\tilde{A}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + \Gamma \omega(t)] \quad (4.90a)$$

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\mu}_i(u) \tilde{C}_i \hat{x}_a(t) \quad (4.90b)$$

où  $\Gamma = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$  et le terme  $\omega(t)$  joue le rôle d'une perturbation bornée définie par :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r [\mu_i(x_a, u) - \mu_i(\hat{x}_a, u)] [\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t)] \quad (4.91)$$

### Observateur Proportionnel Intégral

L'observateur proportionnel intégral avec une forme augmentée est donné par :

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}_a, u) [\tilde{A}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + K_i (y_a(t) - \hat{y}_a(t))] \quad (4.92a)$$

$$\hat{y}_a(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\mu}_i(\hat{x}_a, u) \tilde{C}_i \hat{x}_a(t) \quad (4.92b)$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (4.93)$$

Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état  $e_a(t)$  sont données par le résultat suivant :

**Théorème 4.5.** *L'erreur d'estimation d'état entre l'observateur proportionnel intégral (4.92) et le système (4.90) converge, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , des matrices  $M_i$  et un scalaire positif  $\lambda$  telle que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $i, j = 1, \dots, r$  :*

$$\mathcal{M}_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.94a)$$

$$\frac{2}{r-1} \mathcal{M}_{ii} + \mathcal{M}_{ij} + \mathcal{M}_{ji} < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r \quad (4.94b)$$

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T X + X \tilde{A}_i - \tilde{C}_j^T M_i^T - M_i \tilde{C}_j + I & X \Gamma - M_i \Psi \\ \Gamma^T X - \Psi^T M_i^T & -\lambda I \end{bmatrix} \quad (4.94c)$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :  $K_i = X^{-1} M_i$ .

*Démonstration.* En tenant compte de (4.90a) et (4.92a) l'erreur d'estimation de l'état augmentée est gouvernée par :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \mu_i(\hat{x}_a, u) \tilde{\mu}_j(u) [\phi_{i,j} e_a(t) + \Gamma \omega(t)] \quad (4.95)$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\phi_{i,j} = \tilde{A}_i - K_i \tilde{C}_j \quad (4.96)$$

On note que la dynamique de l'erreur d'estimation d'état  $\dot{e}_a(t)$  est seulement perturbée par  $\omega(t)$ . Rappelons quelques outils basés sur l'approche  $\mathcal{L}_2$  qui mènent au résultat final.

Conformément à [Boyd et al. \[1994\]](#), l'erreur d'estimation d'état  $e_a(t)$  converge et le gain  $\mathcal{L}_2$  de  $\omega(t)$  vers  $e_a(t)$  est borné par  $\gamma$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \phi_{i,j}^T X + X \phi_{i,j} + I & X \Gamma \\ \Gamma^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad i, j = 1, \dots, r \quad (4.97)$$

En utilisant les changements de variables suivants

$$\lambda = \gamma^2 \quad M_i = X K_i$$

et le résultat de [Tuan et al. \[2001\]](#) cité dans la preuve du théorème 4.4, on obtient les LMI données dans (4.94), ce qui conclut la preuve du théorème.  $\square$

**Corolaire 4.1.** *Afin d'augmenter la qualité de l'estimation, quelques conditions supplémen-*

taires *Chilali et Gahinet [1996]* peuvent être rajoutées aux conditions (4.94) :

$$\tilde{A}_i^T X + X \tilde{A}_i - \tilde{C}_j^T M_i^T - M_i \tilde{C}_j + 2\alpha X < 0 \quad (4.98)$$

$$\begin{bmatrix} RX & \tilde{A}_i^T X - M_i \tilde{C}_j \\ X \tilde{A}_i - \tilde{C}_j^T M_i^T & RX \end{bmatrix} < 0 \quad (4.99)$$

pour tout  $i, j = 1, \dots, r$ . Ces conditions assurent le fait que les valeurs propres du système générant l'erreur d'estimation d'état (4.95) se retrouvent dans la région du plan complexe suivante (voir figure 4.7) :

$$\mathcal{S}(\alpha, R) = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(w) < -\alpha, |w| < R\} \quad (4.100)$$

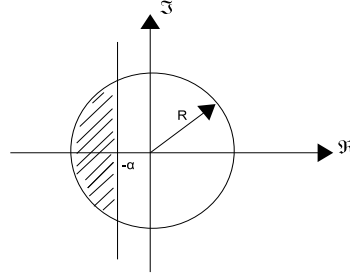


Figure 4.7 – Région du plan complexe

On présente dans la suite l'application de la procédure d'estimation d'état proposée au modèle d'une station d'épuration.

### Exemple

#### *Description du processus et du modèle non linéaire ASMI*

L'épuration des eaux usées consiste à mettre en contact par brassage les eaux usées avec un mélange riche en bactéries pour dégrader et éliminer les polluants contenus dans l'eau, en suspension ou dissous *Olsson et Newell [1999]*.

Le principe de fonctionnement du procédé est décrit brièvement dans la suite. Le schéma simplifié, donné dans la figure 4.8, inclut un bioreacteur et un décanteur. Dans cette figure,  $q_{in}$  représente le débit d'entrée,  $q_{out}$  le débit de sortie du réacteur,  $q_a$  le débit d'air,  $q_R$ ,  $q_W$  représentent respectivement le débit recyclé et rejeté. Le volume du réacteur est supposé constant :  $q_{out} = q_{in} + q_R$ . En général,  $q_R$  et  $q_W$  représentent des fractions du débit d'entrée  $q_{in}$  :

$$q_R(t) = f_R q_{in}(t), \quad 1 \leq f_R \leq 2 \quad (4.101)$$

$$q_W(t) = f_W q_{in}(t), \quad 0 < f_W < 1 \quad (4.102)$$

L'eau polluée provenant d'une source externe circule dans le bassin d'aération dans lequel la biomasse bactérienne dégrade la matière organique. Les micro-organismes s'agglomèrent en

flocs et produisent les boues. La liqueur mixte est ensuite envoyée dans le décanteur où la séparation de l'eau épurée et des flocs bactériennes est faite par gravité. Une fraction des boues décantées est recyclée vers l'aérateur pour maintenir sa capacité d'épuration. L'eau épurée est rejetée dans le milieu naturel.

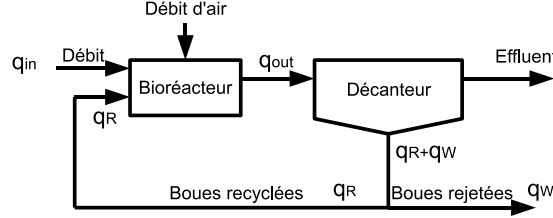


Figure 4.8 – Le schéma de fonctionnement d'un réacteur biologique

Le modèle ASM1 est souvent utilisé pour décrire ce processus. Pour des raisons de simplicité, seule la pollution carbonée au niveau du réacteur est considérée. Ainsi, la méthode d'estimation proposée est illustrée en utilisant un modèle réduit à trois états  $x = [S_S, S_O, X_{BH}]^T$  :

$$\begin{aligned} \dot{S}_S(t) &= -\frac{1}{Y_H} \mu_H \varphi_1(t) + (1 - f_P) b_H \varphi_2(t) + D_1(t) \\ \dot{S}_O(t) &= \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H \varphi_1(t) + D_2(t) \\ \dot{X}_{BH}(t) &= \mu_H \varphi_1(t) - b_H \varphi_2(t) + D_3(t) \end{aligned} \quad (4.103)$$

où :

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{S,in}(t) - S_S(t)] \\ D_2(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{O,in}(t) - S_O(t)] + K q_a(t) [S_{O,sat} - S_O(t)] \\ D_3(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \left[ X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.104)$$

Les cinétiques du processus sont :

$$\varphi_1(t) = \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \quad (4.105)$$

$$\varphi_2(t) = X_{BH}(t) \quad (4.106)$$

Les variables impliquées sont présentées dans le tableau 4.1. On suppose que la concentration d'oxygène dissous à l'entrée du réacteur est nulle :

$$S_{O,in}(t) = 0$$

Le décanteur est supposé parfait, i.e. tout ce qui entre dans le décanteur est recirculé ou rejeté. Dans ce cas, on peut écrire à chaque instant :

$$[q_{in}(t) + q_R(t)] X_{BH}(t) = [q_R(t) + q_W(t)] X_{BH,R}(t) \quad (4.107a)$$

$$S_{S,R}(t) = S_S(t) \quad (4.107b)$$

	Entrée du réacteur	Sortie du réacteur	Recyclé
$X_{BH}$	Concentration biomasse hétérotrophe		
	$X_{BH,in}$	$X_{BH,out}$	$X_{BH,R}$
$S_S$	Concentration du substrat rapidement biodégradable		
	$S_{S,in}$	$S_{S,out}$	$S_{S,R}$
$S_O$	Concentration d'oxygène dissout		
	$S_{O,in}$	$S_{O,out}$	$S_{O,R}$
$q$	Débit		
	$q_{in}$	$q_{out}$	$q_R$
$q_a$	Débit d'air		
$V$	Volume du réacteur		

Tableau 4.1 – Tableau des variables

On utilise les paramètres suivants de croissance et de décroissance [Olsson et Newell \[1999\]](#) :  $\mu_H = 3.733[1/24h]$ ,  $K_S = 20[g/m^3]$ ,  $K_{OH} = 0.2[g/m^3]$ ,  $b_H = 0.3[1/24h]$ . Les paramètres stoechiométriques sont  $Y_H = 0.6$ ,  $f_P = 0.1$  et la concentration de saturation de l'oxygène est  $S_{O,sat} = 10[g/m^3]$ . Les valeurs numériques considérées pour les fractions  $f_R$  et  $f_W$  sont :  $f_R = 1.1$  et  $f_W = 0.04$ .

#### ***Dynamiques rapides et lentes***

Pour le modèle ASM1 réduit (4.103), la séparation des dynamiques lentes et rapides est confirmée par les valeurs propres du jacobien  $A_0$  (section 3.3.3), comme on peut le remarquer à la figure 4.9 qui présente la partie réelle des valeurs propres pour quarante points de fonctionnement. Deux valeurs propres ( $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ ) sont incluses entre  $-50$  et  $-0.4$  et l'autre ( $\lambda_1$ ) autour de  $-250$ . En fixant un seuil à  $\tau = 70$ , on peut déduire que le système a une dynamique rapide ( $x_f = S_S$ ) et deux dynamiques lentes ( $x_s = [S_O \ X_{BH}]^T$ ).

#### ***Le multimodèle***

Un multimodèle équivalent est construit pour concevoir un observateur qui permet d'estimer les variables d'état rapides et lentes. En considérant les équations du processus (4.103) et (4.104), il est naturel de définir les variables de prémisses suivantes :

$$z_1(u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V} \quad (4.108a)$$

$$z_2(x(t)) = \frac{1}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \quad (4.108b)$$

$$z_3(u(t)) = q_a(t) \quad (4.108c)$$

On considère le vecteur d'entrée défini par :

$$u(t) = [S_{S,in}(t) \ q_a(t) \ X_{BH,in}(t)]^T \quad (4.109)$$

On construit la forme quasi-LPV du modèle (4.103) caractérisée par les matrices  $A(t) = A(x(t), u(t))$



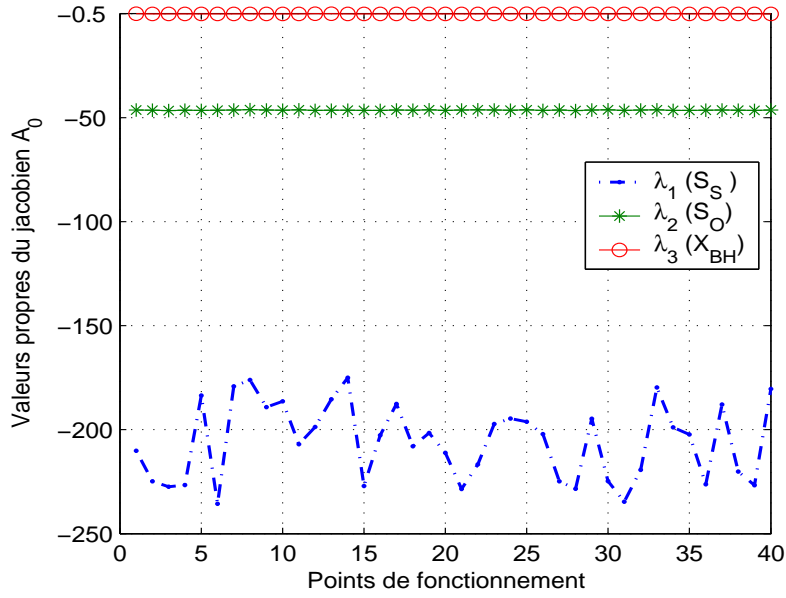


Figure 4.9 – Les valeurs propres du jacobien  $A_0$  calculées dans plusieurs points de l'espace de fonctionnement

et  $B(t) = B(u(t))$  décomposées de la façon suivante :

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{ff}(t) & A_{fs}(t) \\ A_{sf}(t) & A_{ss}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_f(t) \\ B_s(t) \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

où

$$A_{ff}(t) = -z_1(t) - \frac{1}{Y_H} \mu_H z_2(t) \quad (4.111)$$

$$A_{fs}(t) = [ 0 \quad (1 - f_P) b_H ] \quad (4.112)$$

$$B_f(t) = [ z_1(t) \quad 0 \quad 0 ] \quad (4.113)$$

$$A_{sf}(t) = \begin{bmatrix} \frac{Y_H - 1}{Y_H} \mu_H z_2(t) \\ \mu_H z_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$A_{ss}(t) = \begin{bmatrix} -K z_3(t) - z_1(t) & 0 \\ 0 & \left[ \frac{f_R(1-f_W)}{f_W+f_R} - 1 \right] z_1(t) - b_H \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$B_s(t) = \begin{bmatrix} 0 & K S o_{sat} & 0 \\ 0 & 0 & z_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

La décomposition des variables de prémisses (4.108) est réalisée en utilisant la transformation polytopique convexe, comme dans (2.62), (2.63) et (2.64). En multipliant les fonctions  $F_{..}$ , les

$r = 8$  fonctions de pondérations  $\mu_i(z(x, u))$  sont obtenues :

$$\mu_i(z(x, u)) = F_{1, \sigma_i^1}(x, u) F_{2, \sigma_i^2}(x, u) F_{3, \sigma_i^3}(x, u)$$

Les matrices constantes  $A_i$  et  $B_i$  représentant les 8 sous-modèles sont définies comme dans (4.84) en utilisant les matrices  $A$  et  $B$  et les scalaires (2.36) :

$$\begin{aligned} A_{ff}^i &= A_{ff}(z_{1, \sigma_i^1}, z_{2, \sigma_i^2}) \\ A_{fs}^i &= [0 \ (1 - f_P) b_H] \\ A_{sf}^i &= A_{sf}(z_{2, \sigma_i^2}) \\ A_{ss}^i &= A_{ss}(z_{1, \sigma_i^1}, z_{3, \sigma_i^3}) \\ B_f^i &= B_f(z_{1, \sigma_i^1}) \\ B_s^i &= B_s(z_{1, \sigma_i^1}) \quad i = 1, \dots, 8 \end{aligned} \quad (4.117)$$

Le modèle (4.103) est ainsi écrit de façon équivalente sous la forme MM en utilisant la séparation en variables d'état lentes et rapides.

Considérons la sortie  $y(t) = C_f x_f(t) + C_s x_s(t) + v(t)$  où  $v(t)$  est un bruit de mesure et où les matrices  $C_f$  et  $C_s$  sont données par :

$$C_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

En appliquant le théorème 4.5 au modèle ASM1 réduit (4.103), représenté sous une forme MM équivalente, les résultats d'estimation d'état présentés à la figure 4.10 sont tout à fait pertinents. Le gain  $\mathcal{L}_2$  de  $\omega(t)$  vers  $e_a(t)$  est bornée par  $\gamma = 1.203$ .

L'estimation de l'état rapide  $S_S$ , considéré comme entrée inconnue dans le multimodèle, est présentée en premier, étant suivie par les résultats d'estimation des états lents  $S_O$  et  $X_{BH}$ . Malgré la présence du bruit  $v(t)$ , l'observateur proposé dans cet article permet d'assurer une convergence rapide vers zéro de l'erreur d'estimation d'état. De plus, comme on peut le remarquer à la figure 4.10, l'état  $S_S$  considéré comme entrée inconnue n'est pas constant, ce qui est une hypothèse demandée dans le cadre de la construction du PIO. Toutefois, les résultats d'estimation obtenus dans la pratique pour le modèle d'un réacteur biologique montrent qu'il suffit d'avoir un signal de base fréquence afin d'obtenir des bons résultats d'estimation.

## 4.2.6 Estimation d'état de MM singuliers en présence d'entrées inconnues

### Positionnement du problème

L'étude des systèmes à deux échelles de temps suscite un intérêt dans le contexte de l'approche multimodèle. Dans cette section le cas des systèmes singuliers sous forme multimodèle et affecté par des entrées inconnues est traité. Dans [Marx et al., 2007] un observateur à entrées inconnues pour des multimodèles singuliers à variables de prémisse mesurables à été traité ainsi

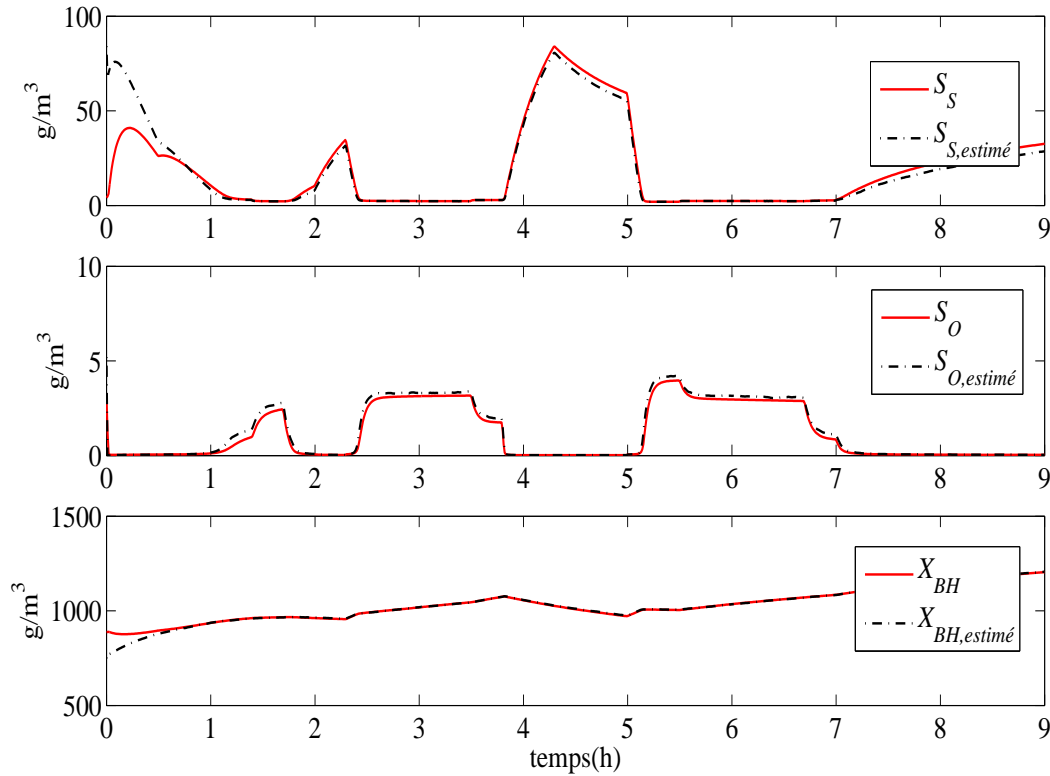


Figure 4.10 – Estimation d'état en utilisant l'observateur proportionnel intégral

que l'application à la détection et l'isolation des défauts. Ici, le cas de variables de prémisses non ou partiellement mesurées est considéré.

L'observateur proposé fait partie de la première catégorie d'observateurs, décrite en début de section précédente et il est basé sur le découplage des entrées inconnues vis-à-vis de l'erreur d'estimation, afin d'annuler l'effet des entrées inconnues sur l'estimation d'état (section 4.2.3).

### Représentation du système

Considérons le système singulier multimodèle avec des variables de prémisses partiellement non mesurables, décrit par :

$$\bar{E} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t), u(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)] \quad (4.119)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (4.120)$$

où les fonctions de pondération  $\mu_i(x, u)$  dépendent de variables de prémisses non mesurables - variables d'état  $x \in \mathbb{R}^n$  - et des variables d'entrées  $u \in \mathbb{R}^m$ . Les variables  $d \in \mathbb{R}^q$  sont les entrées inconnues et  $y \in \mathbb{R}^l$  les variables de sortie. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $E_i$ ,  $C$  et  $G$  sont supposées connues, réelles et de dimensions appropriées. La matrice  $\bar{E}$  peut être une matrice singulière. Les fonctions de pondération  $\mu_i$  respectent les conditions de convexité spécifiques aux multi-

modèles. L'équation de sortie est ici linéaire invariant dans le temps par rapport aux variables, en effet, la nature, la position et les caractéristiques des capteurs ne changent pas selon le point de fonctionnement du système.

Le système (4.119) peut se ramener à un multimodèle perturbé à variables de prémisses mesurables, comme suit :

$$\bar{E} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t), u(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + \omega(t)] \quad (4.121a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (4.121b)$$

où la perturbation a la forme suivante :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r (\mu_i(x(t), u(t)) - \mu_i(\hat{x}(t), u(t))) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)]$$

Les multimodèles (4.119) et (4.121) sont équivalents bien qu'on ait introduit l'estimation de l'état  $\hat{x}(t)$ . Pour la conception d'un observateur on va utiliser la deuxième forme multimodèle, qui offre l'avantage d'explicitement les fonctions de pondération par rapport à des variables connues, i.e. l'état estimé  $\hat{x}(t)$  et l'entrée  $u(t)$ .

### Synthèse d'un observateur à entrées inconnues

L'observateur est pris sous la forme :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t), u(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)] \quad (4.122a)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \quad (4.122b)$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.123)$$

La construction de l'observateur se réduit à trouver les gains  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $L_i$  et  $T_2$  tels que l'erreur d'estimation d'état est générée par un système stable. Le résultat suivant résume la procédure de synthèse de l'observateur.

**Théorème 4.6.** *L'erreur d'estimation d'état entre l'observateur (4.122) et le modèle (4.121) converge vers zéro si (4.121) vérifie*

$$\text{rang}(W) = \text{rang} \begin{bmatrix} W \\ Y \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

*et s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , une matrice  $\tilde{Z} \in$*

$\mathbb{R}^{n \times (n+l(r+1))}$  et un scalaire positif  $\bar{\gamma}$ , qui vérifient les inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & (XYW^+ + \tilde{Z}W^\perp)\Omega \\ \Omega^T (XYW^+ + \tilde{Z}W^\perp)^T & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (4.125)$$

où

$$\Omega = [I_n \ 0 \mid 0 \ \dots \ 0]^T \quad (4.126)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma^2 \quad (4.127)$$

et où la matrice  $\Phi_i$  est définie par :

$$\Phi_i = (YW^+Y_i)^T X + X(YW^+Y_i) + (W^\perp Y_i)^T \tilde{Z}^T + \tilde{Z}(W^\perp Y_i) + I \quad (4.128)$$

Les matrices  $W^+$  et  $W^\perp$  représentent respectivement la pseudo-inverse (l'inverse généralisée) et la projection orthogonale de la matrice  $W \in \mathbb{R}^{(n+l(r+1)) \times (n+q(r+1))}$  définie par :

$$W = \left[ \begin{array}{cc|ccc} \bar{E} & 0_{n \times q} & E_1 & \dots & E_r \\ C & G & 0_{l \times q} & \dots & 0_{l \times q} \\ \hline 0_{rl \times n} & 0_{rl \times q} & & I_r \otimes G & \end{array} \right] \quad (4.129)$$

et où les définitions suivantes sont utilisées pour les matrices  $Y_i \in \mathbb{R}^{(n+l(r+1)) \times n}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{n \times (n+q(r+1))}$  :

$$Y = \left[ \begin{array}{cc|c} I_n & 0_{n \times q} & 0_{n \times rq} \end{array} \right] \quad (4.130)$$

$$Y_i = \left[ \begin{array}{c} A_i \\ 0_{l \times n} \\ \hline v_i \otimes C \end{array} \right], \quad i = 1, \dots, r \quad (4.131)$$

Le vecteur  $v_i \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  est un vecteur colonne contenant 1 sur la position  $i$  et zéro sur toutes les autres colonnes,  $\otimes$  est le produit de Kronecker.

Après l'obtention des matrices  $X$  et  $\tilde{Z}$  issues de la résolution des LMI (4.125), les matrices  $Z$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) se déduisent de la façon équivalente :

$$Z = X^{-1} \tilde{Z} \quad (4.132)$$

$$[T_1 \ T_2 \mid K_1 \ \dots \ K_r] = YW^+ + ZW^\perp \quad (4.133)$$

Finalement, les gains de l'observateur sont donnés par :

$$N_i = T_1 A_i + K_i C \quad (4.134)$$

$$G_i = T_1 B_i \quad (4.135)$$

$$L_i = N_i T_2 - K_i \quad (4.136)$$

*Démonstration.* On commence par expliciter l'erreur d'estimation d'état (4.123) :

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - z(t) - T_2 y(t) \\ &= x(t) - z(t) - T_2 (Cx(t) + Gd(t)) \\ &= (I_n - T_2 C)x(t) - z(t) - T_2 Gd(t) \end{aligned} \quad (4.137)$$

On suppose qu'il existe deux matrices  $T_1$  et  $T_2$  telle que les conditions suivantes soient respectées :

$$I_n - T_2 C = T_1 \bar{E} \quad (4.138)$$

$$T_2 G = 0 \quad (4.139)$$

Tenant compte de (4.138) et (4.139), l'erreur d'estimation d'état (4.137) devient  $e(t) = T_1 \bar{E}x(t) - z(t)$ . Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= T_1 \bar{E}\dot{x}(t) - \dot{z}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}, u) [T_1 (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + \omega(t)) \\ &\quad - N_i z(t) - G_i u(t) - L_i (Cx(t) + Gd(t))] \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}, u) [N_i e(t) + (T_1 A_i - N_i T_1 \bar{E} - L_i C)x(t) \\ &\quad + (T_1 B_i - G_i)u(t) + (T_1 E_i - L_i G)d(t) + T_1 \omega(t)] \end{aligned} \quad (4.140)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état se réduit à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}, u) [N_i e(t) + T_1 \omega(t)] \quad (4.141)$$

si les conditions suivantes sont respectées pour tout  $i = 1, \dots, r$  :

$$I_n - T_2 C = T_1 \bar{E} \quad (4.142)$$

$$T_2 G = 0 \quad (4.143)$$

$$0 = T_1 A_i - N_i T_1 \bar{E} - L_i C \quad (4.144)$$

$$0 = T_1 B_i - G_i \quad (4.145)$$

$$0 = T_1 E_i - L_i G \quad (4.146)$$

Compte tenu de l'expression (4.141) et du rôle de l'observateur, il convient donc, d'une part, de garantir la convergence asymptotique de l'erreur d'observation en l'absence des perturbation ( $\omega = 0$ ) et d'autre part, en présence des perturbations, de limiter leur influence sur l'erreur d'observation.

Pour synthétiser les matrices de l'observateur (4.122), on utilise une méthode basée sur l'approche  $\mathcal{L}_2$ . En utilisant le lemme borné réel ([Boyd et al., 1994]), l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$  converge vers zéro en absence de perturbation et le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\omega(t)$  vers  $e(t)$  est borné par  $\gamma$  s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$  telle que les inégalités

suivantes soit vérifiées :

$$\begin{bmatrix} N_i^T X + X N_i + I & X T_1 \\ T_1^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (4.147)$$

En conséquence, afin d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état (4.141) vers zéro en absence de perturbation et minimiser le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\omega(t)$  vers  $e(t)$ , il faut respecter les égalités (4.142) - (4.146) et les inégalités (4.147).

Pour respecter les inégalités (4.147), notons que si on utilise les égalités (4.142) et (4.144), la forme suivante peut être déduite pour la matrice  $N_i$  :

$$\begin{aligned} N_i &= N_i T_2 C + N_i T_1 \bar{E} \\ &= N_i T_2 C + T_1 A_i - L_i C \\ &= T_1 A_i + (N_i T_2 - L_i) C \end{aligned} \quad (4.148)$$

En définissant  $K_i = -L_i + N_i T_2$  les conditions (4.142) - (4.146) deviennent :

$$N_i = T_1 A_i + K_i C \quad (4.149)$$

$$I_n - T_2 C = T_1 \bar{E} \quad (4.150)$$

$$T_2 G = 0 \quad (4.151)$$

$$0 = T_1 E_i + K_i G \quad (4.152)$$

$$G_i = T_1 B_i \quad (4.153)$$

$$L_i = N_i T_2 - K_i \quad (4.154)$$

Donc, pour assurer la convergence vers zéro en absence de perturbation de l'erreur d'estimation  $e(t)$ , il est suffisant de trouver les matrices  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $L_i$ ,  $T_1$  et  $T_2$  telles que les conditions (4.149) - (4.152) et (4.147) soient respectées.

**Remarque 4.3.** Notons que les matrices  $N_i$ ,  $G_i$  et  $L_i$  de l'observateur sont déduites des matrices  $T_1$ ,  $T_2$  et  $K_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) en utilisant (4.149), (4.153) et (4.154).

Compte tenu de cette remarque 4.3, les matrices recherchées sont réunies dans une matrice bloc  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times (n+l(r+1))}$  définie comme suit :

$$\Psi = [T_1 \ T_2 \ | \ K_1 \ \dots \ K_r] \quad (4.155)$$

Les conditions (4.149) et (4.150) - (4.152) peuvent être réécrites respectivement sous les formes (4.156) et (4.157) :

$$N_i = \Psi Y_i \quad (4.156)$$

$$\Psi W = Y \quad (4.157)$$

où les matrices  $Y_i \in \mathbb{R}^{(n+l(r+1)) \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{(n+l(r+1)) \times (n+q(r+1))}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{n \times (n+q(r+1))}$  ont été définies en (4.129) et (4.130).

Comme les matrices  $N_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) sont également à déterminer, l'équation (4.157) sera utilisée en premier afin d'exprimer  $\Psi$ . Si la condition de rang (4.124) est vérifiée alors la solution

de l'équation (4.157) est donnée par :

$$\Psi = YW^+ + ZW^\perp \quad (4.158)$$

où  $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n+l(r+1))}$  est une matrice arbitraire, “+” indique la matrice inverse généralisée et “ $\perp$ ” indique la projection orthogonale telle que  $W^\perp W = 0$ .

L'équation (4.156) est ensuite utilisée pour écrire  $N_i$  en remplaçant la matrice  $\Psi$  par son expression (4.158) :

$$\begin{aligned} N_i &= \Psi Y_i \\ &= YW^+ Y_i + ZW^\perp Y_i \end{aligned} \quad (4.159)$$

Notons le bloc (1,1) de (4.147) par :

$$\Phi_i = N_i^T X + X N_i + I, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.160)$$

En développant l'expression de  $\Phi_i$  compte tenu de (4.159), on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_i &= (YW^+ Y_i + ZW^\perp Y_i)^T X + X (YW^+ Y_i + ZW^\perp Y_i) + I \\ &= (YW^+ Y_i)^T X + X (YW^+ Y_i) + (Y_i^T W^{\perp T}) Z^T X + X Z (W^\perp Y_i) + I \end{aligned}$$

Il faut remarquer que  $\Phi_i$  contient le terme non linéaire  $XZ$ . On se ramène aisément à une expression linéaire, en définissant la matrice suivante :

$$\tilde{Z} = XZ \quad (4.161)$$

Notons que le bloc (1,2) de (4.147) fait intervenir également une expression non linéaire  $X T_1$  et que  $T_1$  fait partie des inconnues apparaissant dans la définition de  $\Psi$  (4.155).

Pour mettre en évidence cette dépendance, le terme  $X T_1$  est écrit de la manière suivante :

$$X T_1 = X \left[ \begin{array}{cc|ccc} T_1 & T_2 & K_1 & \dots & K_r \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la notation  $\Omega = [I_n \ 0 \mid 0 \ \dots \ 0]^T$  et (4.158), le terme non linéaire devient :

$$\begin{aligned} X T_1 &= X \Psi \Omega \\ &= (X Y W^+ + \tilde{Z} W^\perp) \Omega \end{aligned} \quad (4.162)$$

où  $\tilde{Z}$  a été défini en (4.161). En reportant (4.160) et (4.162) dans l'inégalité (4.147), on obtient la formulation LMI (4.125), ce qui achève la preuve.  $\square$



### Exemple

Soit le système non linéaire :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{-6x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - \frac{x_1x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} + u_1(u_2 - x_1) \\
 \dot{x}_2 &= \frac{-2.5x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - 9\frac{x_2x_5}{0.4+x_2} + 4(10-x_2) + u_1(u_3 - x_2) \\
 \dot{x}_3 &= \frac{4x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - 0.3x_3 + u_1(u_4 + x_3) + d_1 \\
 \dot{x}_4 &= 0.25x_3 + 0.05x_5 + u_1(u_5 + x_4) + d_2 \\
 \dot{x}_5 &= \frac{x_2x_5}{0.8+2x_2} - 0.05x_5 + u_1(u_6 + x_5) \\
 y_1 &= x_1 \\
 y_2 &= x_2 + d_2 \\
 y_3 &= x_4 + d_1
 \end{aligned} \tag{4.163}$$

où  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$ ,  $d = [d_1 \ d_2]^T$ . Une étude concernant l'identification des échelles de temps est réalisée, comme présentée à la section 3.3 du chapitre 3. Les résultats de cette étude apparaissent à la figure 4.11, où les constantes de temps (inverse des valeurs propres du jacobien) du système linéarisé ont été évaluées pour quarante points de fonctionnement. Le calcul du paramètre de perturbation singulière est effectué en utilisant une moyenne arithmétique des quarante constantes de temps :

$$\tau_i = \frac{\sum_{j=1}^{40} \tau_i^j}{40}, \quad i = 1, \dots, 5 \tag{4.164}$$

où  $\tau_i^j$  est la constante de temps associée à la  $i^{\text{ème}}$  variable d'état ( $i = 1, \dots, 5$ ), calculée en utilisant le  $j^{\text{ème}}$  point de fonctionnement ( $j = 1, \dots, 40$ ).

On obtient les valeurs numériques :  $\tau_1 = 0.0051$ ,  $\tau_2 = 0.0250$ ,  $\tau_3 = 1.7288$ ,  $\tau_4 = 2.6330$ ,  $\tau_5 = 6.6421$ , ce qui met en évidence deux états rapides  $x_1$  et  $x_2$  associés aux deux plus petites constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Le paramètre de perturbation singulière est calculé comme suit :

$$\varepsilon = \frac{2}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}} \tag{4.165}$$

soit numériquement :  $\varepsilon = 0.0085$ .

La partie dynamique de système non linéaire (4.163) est transformé sous forme à perturba-

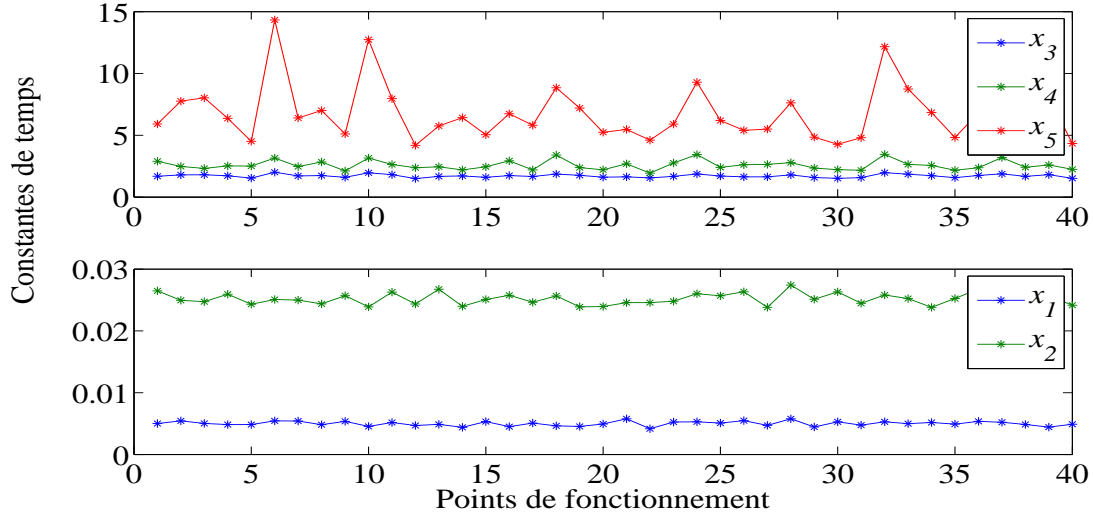


Figure 4.11 – Constantes de temps du système linéarisé

tion singulière comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \dot{x}_1 &= \frac{-0.05x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - \frac{0.0085x_1x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} + \varepsilon u_1(u_2 - x_1) \\
 \varepsilon \dot{x}_2 &= \frac{-0.0213x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - \frac{0.077x_2x_5}{0.4+x_2} + 4\varepsilon(10-x_2) + \varepsilon u_1(u_3 - x_2) \\
 \dot{x}_3 &= \frac{4x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - 0.3x_3 + u_1(u_4 + x_3) + d_1 \\
 \dot{x}_4 &= 0.25x_3 + 0.05x_5 + u_1(u_5 + x_4) + d_2 \\
 \dot{x}_5 &= \frac{x_2x_5}{0.8+2x_2} - 0.05x_5 + u_1(u_6 + x_5)
 \end{aligned} \tag{4.166}$$

Dans le cas limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\bar{E}\dot{x} = f(x, u, d) \tag{4.167}$$

où  $\bar{E} = \text{diag}([0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1])$  et où :

$$f(x, u, d) = \begin{bmatrix} \frac{-0.05x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - \frac{0.0085x_1x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} \\ \frac{-0.0213x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - \frac{0.077x_2x_5}{0.4+x_2} \\ \frac{4x_1x_2x_3}{(20+x_1)(0.2+x_2)} - 0.3x_3 + u_1(u_4 + x_3) + d_1 \\ 0.25x_3 + 0.05x_5 + u_1(u_5 + x_4) + d_2 \\ \frac{x_2x_5}{0.8+2x_2} - 0.05x_5 + u_1(u_6 + x_5) \end{bmatrix} \tag{4.168}$$

Compte tenu de non-linéarités apparaissant dans (4.168), le multimodèle est obtenu à partir des variables de prémisses suivantes :

$$\begin{aligned}
 z_1(x, u) &= u_1 \\
 z_2(x, u) &= \frac{x_1 x_2}{(20 + x_1)(0.2 + x_2)} \\
 z_3(x, u) &= \frac{x_3}{(20 + x_1)(0.2 + x_2)} \\
 z_4(x, u) &= \frac{x_5}{0.4 + x_2}
 \end{aligned} \tag{4.169}$$

La forme quasi-LPV du système singulier

$$\bar{E}\dot{x} = A(x, u)x + B(x, u)u + E(x, u)d \tag{4.170}$$

est explicitée par les matrices suivantes :

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} -0.0085z_3 & 0 & -0.05z_2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.077z_4 & -0.0213z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 + 4z_2 - 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & z_1 & 0.05 \\ 0 & 0.5z_4 & 0 & 0 & -0.05 + z_1 \end{bmatrix} \tag{4.171}$$

$$B(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \end{bmatrix}, \quad E(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.172}$$

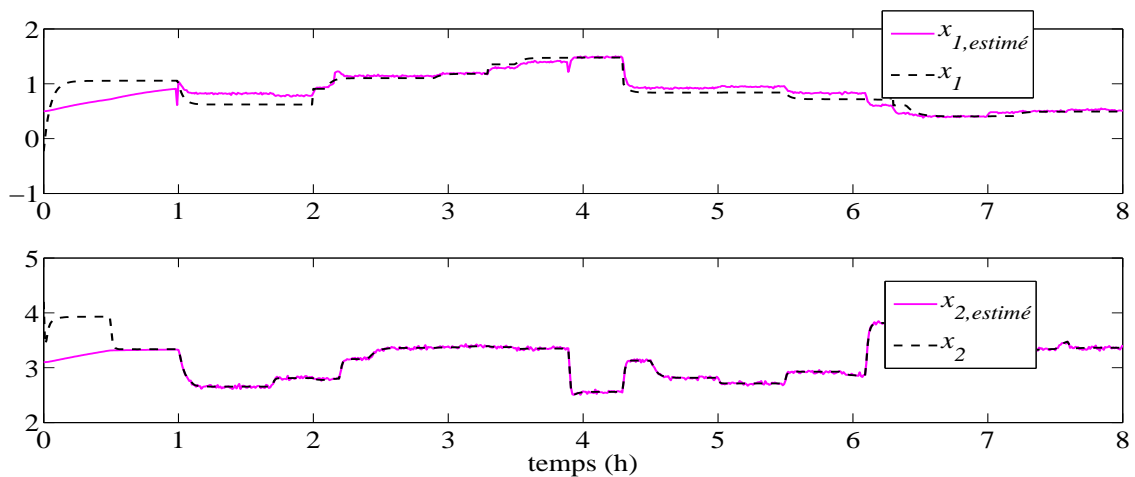


Figure 4.12 – Estimation des états rapides

Le système non linéaire (4.163), mis sous la forme quasi-LPV (4.170) peut ensuite être

ramené sous la forme multimodèle (4.119). Un observateur de type (4.122) est alors construit afin d'estimer les variables d'état. Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro sont données par les conditions LMIs présentées au théorème 4.6. La résolution de ces LMIs permet d'obtenir les gains  $N_i$ ,  $L_i$  et  $G_i$  ( $i = 1, \dots, 16$ ) de l'observateur (4.122) et avec le scalaire  $\bar{\gamma} = 3.27$  et la matrice  $X \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  :

$$X = \begin{bmatrix} 8.98 & 0 & -0.10 & -0.02 & 0.01 \\ 0 & 9.01 & 0 & 0 & 0 \\ -0.10 & 0 & 0.21 & -0.01 & 0 \\ -0.02 & 0 & -0.01 & 0.22 & -0.01 \\ 0.01 & 0 & 0 & -0.01 & 0.20 \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

La matrice  $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{5 \times 56}$  n'est pas fournie ici à cause de sa dimension élevée.

Les résultats de simulation présentés aux figures 4.12 et 4.13 permettent de visualiser les estimés des états rapides et lents. Les performances de l'observateur proposé peuvent facilement être analysées à travers ces résultats de simulation. Les entrées inconnues  $d_1$  et  $d_2$  affectant le système sont illustrées à la figure 4.14.

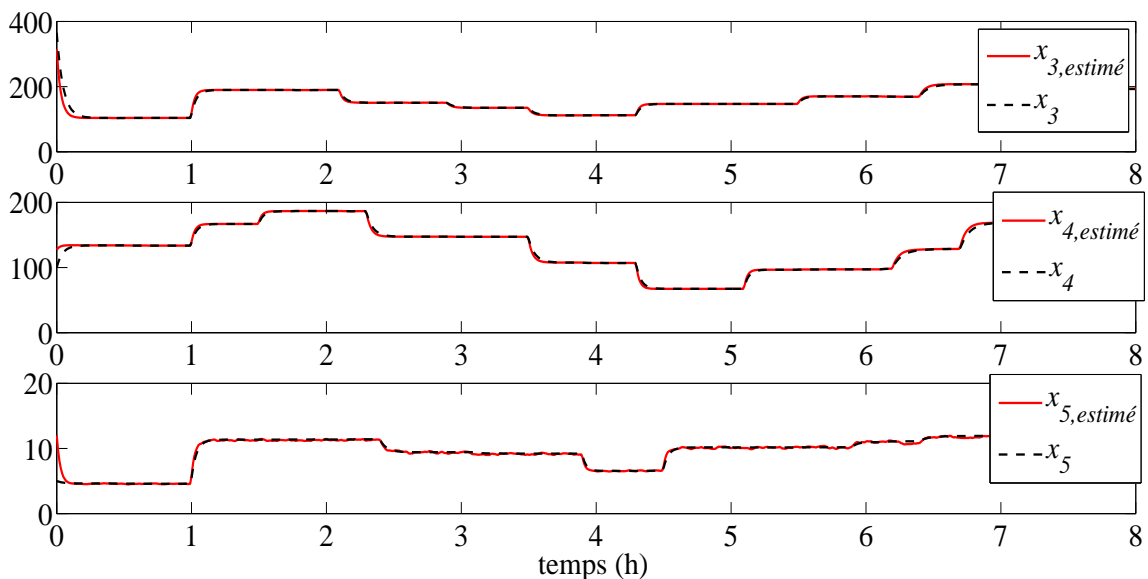


Figure 4.13 – Estimation des états rapides et des états lents du système non linéaire

## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé l'estimation d'état robuste (reconstruction d'état avec un certain degré de précision en dépit de la présence de perturbations, d'imprécisions de modélisation ou d'entrées inconnues) des systèmes non linéaires sous une forme multimodèle et à variables de prémisse non mesurables.

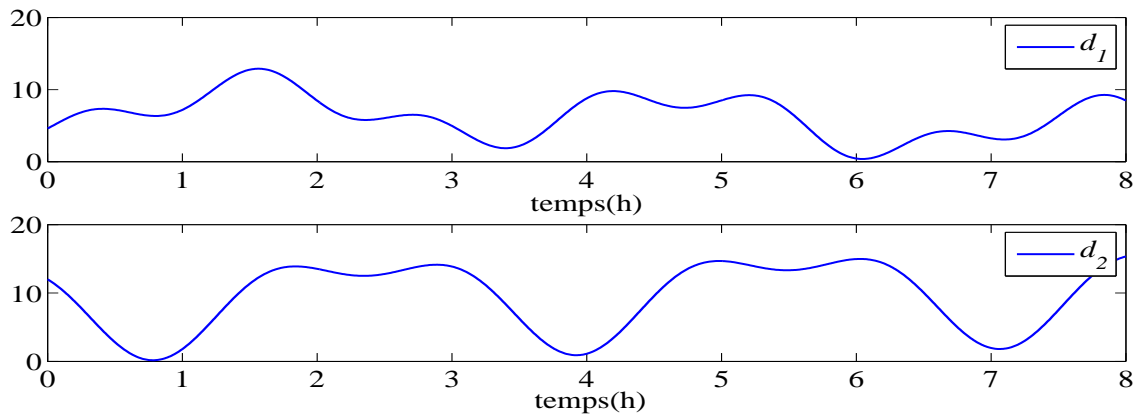


Figure 4.14 – Entrées inconnues  $d_1$  et  $d_2$

Trois approches de reconstruction d'état ont été proposées. La première approche traite les systèmes classiques à une échelle de temps, caractérisés par des incertitudes de modélisation et affectés par des entrées inconnues. Une représentation multimodèle est proposée pour ce type de systèmes, en se basant sur la méthode proposée au chapitre 2. La deuxième approche traite le cas des systèmes non linéaires à deux échelles de temps, en considérant les variables d'état rapides comme des entrées inconnues afin d'éviter la résolution du système algébrique correspondant aux états rapides obtenu dans le cas limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La troisième approche traite le cas des systèmes non linéaires à deux échelles de temps affectés par des entrées inconnues et représentées sous la forme singulière. Des exemples illustrent chaque approche afin d'en présenter les performances.

# 5

## Application à une station d'épuration

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>158</b>
<b>5.2</b>	<b>Description du procédé d'épuration d'eaux</b>	<b>159</b>
5.2.1	Le procédé d'épuration par boues activées	159
5.2.2	Modélisation du procédé	163
5.2.3	Écriture du modèle ASM1	170
<b>5.3</b>	<b>Approche MM pour l'estimation d'état et le diagnostic de fonctionnement</b>	<b>171</b>
5.3.1	Modèle ASM1 réduit	171
5.3.2	Obtention d'un MM pour le modèle ASM1 réduit	174
5.3.3	Synthèse d'observateur à gain proportionnel-intégral	176
5.3.4	Synthèse d'observateur en présence d'entrées inconnues à partir d'un MM non standard	178
5.3.5	Application de l'estimation d'état au diagnostic de fonctionnement	182
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>192</b>

---

"Si une idée ne paraît pas d'abord absurde, alors il n'y a aucun espoir qu'elle devienne quelque chose." Albert Einstein

## 5.1 Introduction

L'épuration des eaux usées au moyen de boues activées est un procédé largement utilisé depuis les deux derniers siècles [Van Haandel et al., 1981], [Henze et al., 1987], [Gujer et al., 1999], [Olsson et Newell, 1999], [Dochain et Vanrolleghem, 2001]. Ce procédé chimique et biologique consiste à mettre en contact par brassage les eaux usées avec un mélange riche en bactéries pour dégrader et éliminer les composants polluants contenus dans l'eau, en suspension ou dissouts. L'activité des bactéries peut être liée à la présence d'oxygène ou d'autres sources d'oxydation, formant des boues activées où la pollution sert de nourriture.

Si la plupart des stations éliminent bien les composés carbonés, l'azote et le phosphore ne sont traités que dans les plus performantes. Initialement, les traitements utilisés étaient basés sur l'injection d'oxygène dans le milieu polluant, pour enlever des matières organiques. Aujourd'hui, la rapidité d'expansion de la population et le développement industriel imposent de mettre au point de méthodes de dépollution plus efficaces. Durant les quatre dernières décennies, des méthodes pour éliminer des composants bio-chimiques, comme l'azote et le phosphore, ont été mises en œuvre, afin de respecter la réglementation établie pour la protection de l'environnement. Il existe différents processus, de nature biologique ou de nature physico-chimique, pour réaliser cette élimination. Dans le cas des processus par boues activées, si l'élimination de l'azote est souhaitée, différentes configurations sont possibles : bassins séparés ou bassin unique, différents types de réactions (aérée et non-aérée). Pour des considérations de nature économique, une configuration avec un seul bassin -où les deux phases aérobie et anaérobie alternent- a été développée. Au long des quarante dernières années, un grand nombre de modèles pour le traitement des eaux usées par boues activées ont été développés. Parmi les premiers travaux de recherche qui ont traité des problèmes bio-technologiques, on peut citer [Thomann, 1963] et [Andrews, 1969]. Plus tard, un modèle aérobie en régime permanent pour l'élimination des composants azotés et carbonés a été développé par [Marais et Ekama, 1976] ; ce modèle exprime déjà les taux de croissance de micro-organismes par en utilisant la cinétique de Monod [Monod, 1942]. Quelques années plus tard, un modèle utilisant conjointement les processus de nitrification et de dénitrification a été présenté [Van Haandel et al., 1981]. En 1983, l'IAWPRC (*International Association on Water Pollution Research and Control*) créait un groupe de recherche international afin de développer un modèle général intégrant les concepts d'oxydation du carbone, de nitrification et de dénitrification [Henze et al., 1987].

D'autres apports ont été proposés dans la littérature scientifique comme : pour approfondir des aspects plus spécifiques liés à ce type de procédés la prise en compte de relations biologiques pour l'élimination du phosphore [Henze et al., 1994], la consommation d'oxygène et l'accumulation de boues [Gujer et al., 1999].

Dans ce chapitre, l'application pratique sur le processus biologique d'une station d'épuration conclut et confirme la contribution des résultats présentés dans les chapitres 2, 3 et 4. En effet, on s'attachera à décrire une STEP par un MM avant d'appliquer les techniques d'estimation d'état proposées au chapitre 4 et de les appliquer au diagnostic de fonctionnement d'une STEP.

Le traitement des eaux usées par le procédé à boues activées représente un processus bio-

chimique complexe. Les variations du débit d'eaux usées et de sa composition, combinées avec des réactions variant dans le temps dans une culture mélangée de micro-organismes, font que ce processus est non linéaire. En raison de la complexité de plusieurs modèles proposés (ASM1 - Activated Sludge Model no. 1 [Olsson et Newell, 1999], ASM2 [Henze et al., 1999], ASM3 [Gujer et al., 1999]), différents modèles réduits ont été développés [Chachuat et al., 2003; Mulas et al., 2007; Smets et al., 2003; Steffens et al., 1997]. Dans ce mémoire, un modèle non linéaire réduit, inspiré de Weijers [2000] et contenant six variables d'état est utilisé. Il est présenté en début de ce chapitre, en section 5.3.1.

L'approche multimodèle peut être utilisée pour réduire la complexité du modèle ASM1 décrivant le processus de biodégradation d'un réacteur à boues activées. Différentes techniques de linéarisation ont été proposées dans la littérature pour simplifier ce modèle, parmi lesquelles une linéarisation autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement [Smets et al., 2006; Steffens et al., 1997], en vue d'obtenir un multimodèle. La perte d'information constitue un premier inconvénient de ces techniques. Le choix des variables de prémisses exprimant différentes non-linéarités du système, ainsi que le choix des différents points de fonctionnement restent encore très délicats, car il faut anticiper différents modes de fonctionnement du processus réactionnel de dégradation. Grâce à la méthode proposée en chapitre 2 [Nagy et al., 2009b, 2010b], une partie de ces inconvénients est évitée. Un multimodèle pour le modèle réduit utilisé sera construit à la section 5.3.2. D'autres méthodes basées sur l'identification d'un multimodèle pour un processus de biodégradation d'un réacteur ont été proposées dans la littérature [Ragot et al., 2001; Pekpe et al., 2007], mais ces méthodes d'identification ne font pas l'objet de nos études.

Ce chapitre est organisé comme suit : la description du procédé d'épuration d'eaux usées est réalisée en section 5.2, l'obtention d'un multimodèle pour le modèle ASM1 réduit à six états est réalisée en section 5.3.2, les résultats d'estimation d'état proposés dans le chapitre précédent sont appliqués au modèle ASM1 réduit, en sections 5.3.3 et 5.3.4. De plus, le diagnostic de fonctionnement est réalisé en détectant des défauts de capteur à l'aide des bancs d'observateurs. Enfin, quelques conclusions seront présentées concernant les résultats obtenus lors de l'application sur le modèle d'une station d'épuration.

## 5.2 Description du procédé d'épuration d'eaux

### 5.2.1 Le procédé d'épuration par boues activées

#### Lexique

La **biomasse** représente l'ensemble des êtres vivants, animaux et végétaux, qui sont présents dans le milieu considéré. Les bactéries sont les actrices principales du traitement mais les autres formes biologiques gravitant autour d'elles sont indispensables au bon équilibre de l'écosystème. Les espèces varient suivant le type de station de traitement et sont caractéristiques du fonctionnement d'une station [Canler et al., 1999]. Entre toutes ces espèces se créent alors des relations de compétition, certaines vont se développer plus facilement au détriment d'autres qui resteront minoritaires ou tendront à disparaître.

Les **bactéries** utilisées dans les procédés à boues activées sont classées en deux catégories :

1. les bactéries hétérotrophes pouvant se développer en milieu aéré (aérobie) ou non aéré



(anoxique) : elles utilisent du carbone organique comme substrat et, selon leur type et le milieu considéré, peuvent dégrader la matière carbonée ou les nitrates-nitrites.

2. les bactéries autotrophes ne se développant qu'en milieu aéré (aérobie) : elles utilisent du carbone minéral ( $CO_2$ ) comme substrat, elles ne dégradent pas les matières carbonées mais permettent d'éliminer les composés azotés.

Le terme **substrat** désigne les substances constituant la nourriture nécessaire au développement des micro-organismes. Les composés organiques à dégrader représentent la majorité de ces substances. Si le substrat n'est pas sous une forme directement assimilable par la bactérie, il sera hydrolysé à l'extérieur de la cellule bactérienne par des exoenzymes.

L'**azote ammoniacal** et les **phosphates** sont utilisés en tant que nutriments car ils entrent dans la composition des composés cellulaires (protéines, membrane cellulaire, ADN). L'oxygène dissous est également indispensable au développement des bactéries aérobies. Suivant la composition de l'effluent à traiter, il sera nécessaire de rajouter un ou plusieurs de ces composants afin de favoriser le métabolisme des bactéries.

### Classification des types de pollution

La plupart des effluents pollués sont des mélanges très complexes dont la composition varie suivant leur provenance : industrielle, agricole ou urbaine. L'évaluation de la pollution est donc basée sur des classifications selon les propriétés globales de l'effluent.

La pollution se définit comme l'introduction dans un milieu naturel de substances provoquant sa dégradation. Les effets néfastes peuvent avoir lieu à tous les niveaux (sanitaire, écologique et économique). Ainsi, les polluants sous forme particulaire provoquent entre autre une augmentation de la turbidité de l'eau et un envasement. La classification de ces composés et un recensement en fonction de leur taille sont réalisés dans [Sperandio, 1998].

Une autre classification importante est fondée sur la capacité des polluants à être dégradés. On distingue deux classes principales :

1. Matières biodégradables : elles sont dégradées par les micro-organismes, et peuvent être structurées en deux groupes :
  - matières rapidement biodégradables : elles sont dégradées par les micro-organismes, elles sont directement assimilées par les bactéries
  - matières lentement biodégradables : composées de substrats particuliers formés par un mélange de substances organiques solides, colloïdales et solubles. Ces matières sont soumises à certains processus intermédiaires avant d'être assimilées par les populations bactériennes.
2. Matières non biodégradables : ces substances inertes ne subissent aucun phénomène biologique de transformation. Elles peuvent être de nature aussi variée que des métaux lourds ou des composés issus de la mortalité des micro-organismes par exemple.

Les polluants nécessitant un traitement biologique sont d'une part les matières carbonées ou organiques biodégradables qui constituent de loin la première cause de pollution des ressources en eau et, d'autre part, les matières azotées qui sont principalement présentes dans les eaux usées urbaines ou industrielles de type agro-alimentaire. Leurs conséquences sur le milieu naturel sont les suivantes :

- les matières carbonées ou organiques sont polluantes lorsque leur quantité dépasse la capacité d'auto-épuration naturelle du milieu récepteur. En effet, la dégradation de ces substances (oxydation par des micro-organismes) provoque une consommation d'oxygène au détriment des organismes aquatiques. Nous noterons également l'existence de matières inorganiques carbonées pouvant être dégradées
- les matières azotées qui sont des éléments nutritifs entraînent la prolifération d'algues et de végétaux aquatiques, ce qui génère un phénomène d'eutrophisation. La présence de phosphates accélère ce phénomène d'eutrophisation.

La structure chimique des polluants permet de distinguer les matières organiques (hydrates de carbone, protéines, matières grasses, huiles, pesticides, phénols, azote organique, ...) des matières inorganiques (métaux lourds, azote ammoniacal, nitrates et nitrites, phosphates, sulfates, chlorures, ...). La caractérisation de ces composés au sein de l'effluent s'effectue grâce à des mesures globales de pollution [Boudrant et al., 1994] : les matières en suspension (l'ensemble des matières solides et colloïdales floculées, organiques ou minérales, contenues dans une eau usée et pouvant être retenues par filtration ou centrifugation), les matières organiques (*Demande Chimique en Oxygène* DCO) et les composés azotés (l'azote est présent dans les effluents sous différentes formes : azote organique ( $N_{org}$ ), azote ammoniacal (ammoniac  $NH_3$ , ion ammonium  $NH_4^+$ ), nitrates ( $NO_3^-$ ), nitrites ( $NO_2^-$ )).

### Description du processus

La composition d'une eau usée peut donc être très variée suivant son origine et chaque installation est par conséquent conçue pour répondre à un besoin spécifique. Les technologies utilisées se développent et se perfectionnent constamment par la recherche de technologies ou de procédés nouveaux et par la mise en place de nombreux automatismes.

1. Le *pré-traitement* a pour objectif l'extraction des matières les plus grossières (brindilles, feuilles, tissus, ...) et des éléments susceptibles de gêner les étapes ultérieures du traitement. Il comprend : le dégrillage (en capturant les déchets volumineux à l'aide d'une succession de grilles), le dessablage (pour prévenir les dépôts dans les canalisations, protéger les mécaniques -pompes- contre l'abrasion), le dégraissage-déshuilage (pour éviter l'encrassement de la station par des corps gras)
2. Le *traitement primaire* s'effectue par voie physico-chimique avec pour but d'extraire le maximum de matières en suspension et de matières organiques facilement décantables
3. Le *traitement biologique* a pour objectif principal l'élimination des composés solubles d'origine organique. Parallèlement, la floculation de la biomasse permet de piéger les matières en suspension restant à l'issue du traitement primaire. Le principe de ce traitement est de mettre en contact la matière organique contenue dans les eaux usées avec une population bactérienne. Cette phase est essentielle dans le processus d'épuration et elle sera présentée plus en détail à la section suivante.

Le procédé de traitement biologique est dit "à boues activées" car l'ensemble des conditions favorables à une activité maximale des bactéries est mis en œuvre : un apport en oxygène suffisant, un apport en nutriment si l'effluent ne contient pas tous les composés nécessaires au

développement des bactéries, une agitation permanente afin de favoriser le contact entre les bactéries et la matière polluée, une concentration élevée en bactéries pour augmenter l'efficacité du traitement. La chaîne de traitement est composée d'un bioréacteur, d'un carificateur / décanteur et d'une boucle de recyclage des boues (voir figure 5.1).

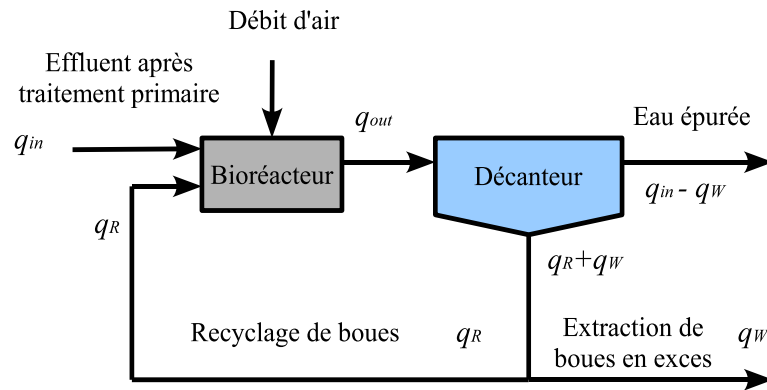


Figure 5.1 – Schéma du procédé d'épuration par boues activées

### *Le bioréacteur*

L'eau polluée -soumise préalablement à un traitement primaire- provenant d'une source externe, circule dans le bassin d'aération -bioréacteur- dans lequel la biomasse bactérienne dégrade la matière organique. Les micro-organismes s'agglomèrent en flocons et produisent les boues.

Le mélange, appelé "liqueur mixte", se compose d'une phase solide (micro-organismes, débris organiques, matières minérales) et d'une phase liquide contenant les matières dissoutes. Pour éliminer la matière azotée, le réacteur biologique peut être séparé en deux zones distinctes : aérobie et anoxique (voir figure 5.2). Dans la majorité des cas, la zone anoxique est placée en amont de la zone aérobie, juste à l'entrée de l'effluent dans le réacteur, pour que les bactéries aient suffisamment de matière organique biodégradable pour effectuer la réaction de dénitrification. Le recyclage de la liqueur mixte de la zone aérobie vers la zone anoxie permet l'élimination des polluants azotés oxydés.

### *Le clarificateur ou décanteur*

En sortie de réacteur, est obtenue une liqueur mixte composée de boues flocculées et d'eau épurée prête à être rejetée dans le milieu naturel. Cette liqueur alimente un clarificateur qui a une fonction de séparation de phase et une fonction d'épaississement afin de ramener la boue la plus concentrée possible dans le réacteur biologique. Du fait de l'absence d'oxygène, le temps de passage des boues doit être le plus faible possible pour éviter qu'elles ne se trouvent en phase anaérobie. Ceci aurait pour conséquence l'apparition d'odeurs désagréables ainsi qu'une détérioration de la qualité mécanique de la boue perturbant tant le traitement biologique de l'eau

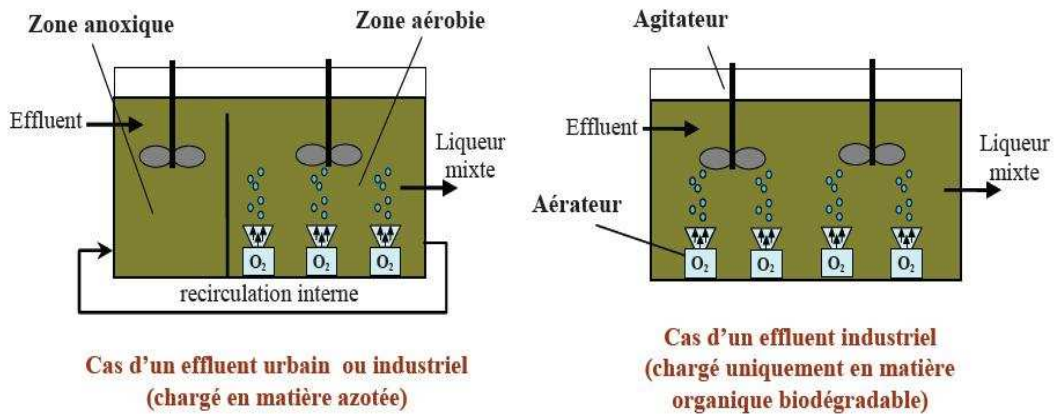


Figure 5.2 – Schéma du bioréacteur dans le cadre de processus d'épuration par boues activées

que le traitement ultérieur des boues.

#### *Le recyclage de boues*

La croissance de la biomasse au sein du bioréacteur n'est pas suffisante pour compenser la perte engendrée par le débit de sortie de la liquueur mixte. Pour conserver une concentration en biomasse constante dans le réacteur, une partie des boues du clarificateur est recyclée vers le réacteur. Des purges ont également lieu afin d'extraire la quantité de boues en excès dans le procédé. Les taux de recyclage et de purge permettent également de maîtriser l'*âge des boues* c'est-à-dire le temps au bout duquel la biomasse est entièrement renouvelée. Ce temps caractérise la forme physiologique de la biomasse dans le réacteur mais aussi la composition de celle-ci. Prenons l'exemple du traitement de la matière azotée : les bactéries autotrophes responsables de la réaction de nitrification ne seront absentes que si l'âge des boues est supérieur à 6 jours, leur temps de duplication étant de 4 jours.

## 5.2.2 Modélisation du procédé

### Bilan de matière

Le modèle se présente sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles non linéaires obtenues à partir des équations dynamiques de bilan du bioréacteur. Entre deux instants, un bilan de matière définit la variation de la quantité d'un composé comme étant la somme de ce qui est apporté ou produit, diminué de ce qui est soutiré ou consommé, soit :

$$(\text{Entrée} + \text{Production}) - (\text{Sortie} + \text{Consommation}) = \text{Accumulation}$$

ou de façon équivalente la partie traduisant les réactions biologiques étant représentée par les termes Production et Consommation :

**Entrée - Sortie + Réaction = Accumulation**

L'écriture d'un bilan pour chaque composé conduit au modèle global du procédé.

**Variables du système**

*Variables d'état*

Les substances carbonées considérées dans le modèle peuvent être décomposées en trois groupes, la DCO biodégradable, la DCO non biodégradable (les matières inertes) et la biomasse. La DCO biodégradable est constituée à la fois par la concentration en substrat rapidement biodégradable ( $S_S$ ), consistant en des molécules pouvant être facilement absorbées par les micro-organismes comme source d'énergie, et en substrat lentement biodégradable ( $X_S$ ). La DCO non biodégradable est constituée des matières organiques inertes ( $S_I$ ) et particulières ( $X_I$ ). Il est considéré que l'activité biologique du processus n'affecte pas ces deux concentrations.

La biomasse active est composée de la biomasse hétérotrophe ( $X_{BH}$ ) et de la biomasse autotrophe ( $X_{BA}$ ). La biomasse hétérotrophe est responsable de la dégradation de matières organiques et de la transformation du nitrate en azote gazeux ( $N_2$ ). Elle augmente en présence de substrat facilement biodégradable et d'une source d'oxygène (en aérobie) ou de nitrate (en anoxie). Sa croissance est modélisée par une relation de Monod. La biomasse autotrophe est responsable de l'étape de nitrification et se développe uniquement en conditions d'aérobie. Son augmentation est aussi décrite par une relation de Monod.

Comme précisé à la section concernant la classification de la pollution, les composants azotés contenus dans l'eau polluée comportent : une partie constituée de l'azote sous forme d'ammoniac ( $S_{NH}$ ) et une partie correspondant à l'azote organique et aux concentrations associées à la biomasse active. L'azote organique se décompose en une fraction particulaire et une fraction soluble qui peuvent être biodégradables ou non-biodégradables. Seules les fractions biodégradables sont explicitement incluses dans le modèle (azote organique soluble  $S_{ND}$  et azote organique particulaire  $X_{ND}$ ). La biomasse active intervient dans le modèle dans le sens où le décès de la biomasse produit de l'azote organique biodégradable particulaire. Finalement, les concentrations d'azote sous forme de nitrite et de nitrate sont réunies dans une seule variable ( $S_{NO}$ ) afin de simplifier les expressions mathématiques du modèle.

L'oxydation de l'ammoniac en nitrate est faite en deux temps :

1. azote ammoniacal + oxygène  $\rightarrow$  nitrites + eau + ions d'hydrogène
2. nitrites + oxygène  $\rightarrow$  nitrates

Si les conditions d'aération sont adéquates, la deuxième réaction est très rapide ce qui simplifie la modélisation de l'oxydation en ne prenant en compte que la dynamique du nitrate  $S_{NO}$ .

Les deux derniers composants sont la concentration d'oxygène dissous ( $S_O$ ) et l'alcalinité ( $S_{ALK}$ ). L'alcalinité  $S_{ALK}$  est une variable qui n'intervient pas dans les cinétiques des autres composants et n'est pas mesurée, donc elle sera omise. De plus, la concentration  $X_P$  en produits particuliers inertes résultant du décès de la biomasse sera amalgamée dans la définition de la matière organique particulaire inerte  $X_I$ . En conséquence, le modèle comporte au total onze variables d'état réunies dans le vecteur  $x$  :

$$x = [S_I \ S_S \ X_I \ X_S \ X_{BH} \ X_{BA} \ S_{NO} \ S_{NH} \ S_{ND} \ X_{ND} \ S_O]^T \quad (5.1)$$

*Variables d'entrée*

Les concentrations en composants solubles  $S_{\bullet,in}$  et particulières  $X_{\bullet,in}$  dans l'eau polluée qui rentrent dans le bassin de réaction sont considérées comme variables d'entrée du modèle. Les débits d'entrée  $q_{in}$ , de recyclage  $q_R$  et d'extraction  $q_W$  font aussi partie de cet ensemble de variables, dont les éléments forment le vecteur d'entrée  $u$  défini par :

$$u = [S_{I,in} \ S_{S,in} \ X_{I,in} \ X_{S,in} \ X_{BH,in} \ X_{BA,in} \ S_{NO,in} \ S_{NH,in} \ S_{ND,in} \ X_{ND,in} \ S_{O,in} \ q_{in} \ q_R \ q_W]^T \quad (5.2)$$

*Variables de sortie*

Les concentrations en composants solubles  $S_{\bullet,out}$  et particulières  $X_{\bullet,out}$  de l'eau qui sortent du bassin de réaction sont considérées comme variables de sortie du modèle. Le débit de sortie  $q_{out}$  fait partie aussi de cet ensemble de variables mesurables ; le vecteur  $x_{out}$  réunit les variables de sortie qui viennent d'être mentionnées :

$$y = [S_{I,out} \ S_{S,out} \ X_{I,out} \ X_{S,out} \ X_{BH,out} \ X_{BA,out} \ S_{NO,out} \ S_{NH,out} \ S_{ND,out} \ X_{ND,out} \ S_{O,out} \ q_{out}]^T \quad (5.3)$$

**Description des cinétiques**

Les réactions biologiques ayant lieu dans le bioréacteur sont décrites sous la forme d'une matrice (figure 5.3), suggérée par Petersen [1965]. Ce tableau permet une lecture facile des cinétiques modélisées : pour chaque composant soluble  $S$  ou particulière  $X$  qui apparaît dans le haut du tableau, les processus  $\rho_i$  intervenant sont signalés dans la première colonne. Le terme de cinétique pour chaque composant  $j$  du modèle est obtenu en sommant les produits des coefficients stoechiométriques  $k_{i,j}$  par la cinétique du processus  $\rho_i$ .

Quatre types de processus sont considérés :

1. la croissance de la biomasse
  - **Croissance aérobie des hétérotrophes** ( $\rho_1$ ) : une fraction du substrat facilement biodégradable est utilisée. Donc, la consommation d'oxygène augmente, l'ammonium étant utilisé comme source d'azote pour la synthèse, il est incorporé à la biomasse. Les concentrations  $S_S$  et  $S_O$  peuvent agir en limitant ce processus, qui contribue plus que les autres processus à la production de la biomasse et à la consommation de DCO.
  - **Croissance anoxie des hétérotrophes** ( $\rho_2$ ) : en l'absence d'oxygène, les organismes hétérotrophes utilisent le nitrate et le substrat  $S_S$  pour produire de la biomasse et de l'azote gazeux (dénitrification). Un changement de l'alcalinité est associé à la réaction. L'ammoniac constitue une source d'azote pour la synthèse des micro-organismes.
  - **Croissance aérobie des autotrophes** ( $\rho_3$ ) : l'ammoniac est oxydé en nitrate (nitrification) ce qui a comme résultat une production de biomasse autotrophe et une augmentation de la DCO. Il est aussi utilisé comme source d'énergie pour la synthèse de micro-organismes. L'effet sur la quantité de biomasse produite est très faible. Par contre, l'alcalinité et la consommation d'oxygène sont fortement affectées.
2. la mortalité de la biomasse
  - **Mortalité des hétérotrophes / autotrophes** ( $\rho_4/\rho_5$ ) : les micro-organismes meurent à un taux déterminé, et cette biomasse devient une combinaison des produits particuliers





et du substrat lentement biodégradable. L'azote organique associé à  $X_S$  est disponible comme azote organique particulaire. La DCO n'est pas modifiée. Les taux de mortalité sont supposés invariants en conditions d'aérobie et d'anoxie.

3. l'ammonification de l'azote organique soluble
  - **Ammonification de l'azote organique soluble ( $\rho_6$ )** : l'azote organique biodégradable est transformé en ammonium par l'action de la biomasse hétérotrophe active. L'alcalinité est aussi modifiée.
4. l'hydrolyse des composants organiques absorbés
  - **Hydrolyse de la matière organique absorbée ( $\rho_7$ )** : le substrat lentement biodégradable correspondant aux substances polluantes est décomposé par un mécanisme extracellulaire en produisant du substrat facilement biodégradable utilisable par la biomasse. Ce processus a lieu en aérobie et en anoxie. Le taux d'hydrolyse en anoxie est diminué par un facteur  $\eta_h (< 1)$  par rapport aux conditions d'aérobie. Il est lié à la biomasse hétérotrophe par une fonction de premier ordre et sature quand la concentration de substrat absorbé devient grande par rapport à la biomasse.
  - **Hydrolyse de l'azote organique absorbé ( $\rho_8$ )** : l'azote organique particulaire biodégradable est décomposé en azote organique soluble à un certain taux défini par la réaction d'hydrolyse précédemment décrite.

La figure 5.4 permet de visualiser l'évolution des composants modélisés au cours du temps à travers les différents processus qui interviennent dans le système. Comme les conditions environnementales changent (l'alimentation en air par exemple) il est nécessaire d'introduire des fonctions de différents types d'amplitude pour gérer l'intervention des processus dans les dynamiques du système.

- les cinétiques ayant lieu uniquement en phase anoxique comporteront le terme  $\frac{K_{OH}}{S_O + K_{OH}}$  inhibant la réaction en phase aérobie
- les cinétiques ayant lieu uniquement en phase aérobie comporteront le terme  $\frac{S_O}{S_O + K_{OH}}$  ou le terme  $\frac{S_O}{S_O + K_{OA}}$  inhibant la réaction en phase anoxique.

### Valeurs typiques des paramètres

Dans le tableau 5.1 sont rassemblées les valeurs des paramètres du modèle ASM1 conformément à Henze et al. [1987]. Ces valeurs correspondent à des caractéristiques d'eaux résiduelles de provenance domestique, à une température de 20°C et pour un pH neutre.



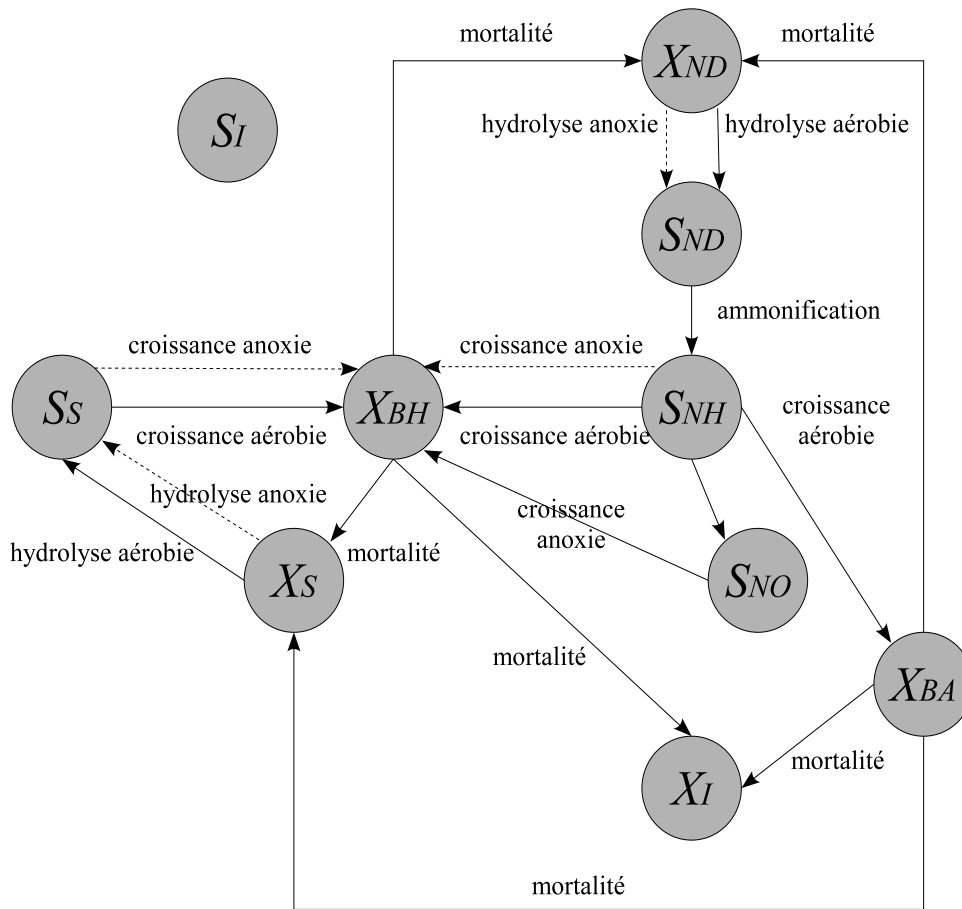


Figure 5.4 – Évolution des composants au cours du temps

### Hypothèses, restrictions et contraintes du modèle ASM1

Certaines hypothèses ont été faites pour que le modèle soit utilisable en pratique :

- le bioréacteur et le décanteur sont parfaitement mélangés. Cette hypothèse se traduit par :

$$y(t) = x(t) \quad (5.4)$$

- les réactions biologiques ont lieu seulement dans le bioréacteur.
- le décanteur est parfait : l'eau épurée ne comporte pas de substances particulières et les concentrations des composants solubles sont les mêmes en entrée et en sortie du décanteur :

$$S(t) = S_R(t) \quad (5.5)$$

$$(q_{in}(t) + q_R(t))X(t) = (q_R(t) + q_W(t))X_R(t) \quad (5.6)$$

où  $X$  et  $S$  sont les concentrations respectives de particules et de substrat dans le bioréacteur et  $X_R$  et  $S_R$  les concentrations de particules et de substrat dans le circuit de re-circulation des boues [Julien, 1997].

- le système opère à température constante. Si des fluctuations importantes de température

Paramètres	Signification	Valeurs par défaut
$Y_A$	Taux de conversion substrat/biomasse autotrophe	0.24
$Y_H$	Taux de conversion substrat/biomasse hétérotrophe	0.67
$f_{XI}$	Fraction de DCO inertes générés par la biomasse morte	0.08
$f_P$	Taux de conversion biomasse/matière organique inerte	0.08
$i_{XP}$	Fraction d'azote dans la matière organique inerte	0.06
$i_{XB}$	Fraction d'azote dans la biomasse hétérotrophe	0.08
$\mu_H$	Taux de croissance maximal de la biomasse hétérotrophe	4
$\mu_A$	Taux de croissance maximal de la biomasse autotrophe	0.5
$b_H$	Coefficient de mortalité de la biomasse hétérotrophe	0.3
$b_A$	Coefficient de mortalité de la biomasse autotrophe	0.05
$K_S$	Coefficient de demi-saturation en substrat rapidement biodégradable	20
$K_{OH}$	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse hétérotrophe	0.2
$K_{NO}$	Coefficient de demi-saturation du nitrate pour la biomasse hétérotrophe	0.5
$K_{NH}$	Coefficient de demi-saturation de l'azote ammoniacal pour la biomasse autotrophe	1
$K_{OA}$	Coefficient de demi-saturation de l'oxygène pour la biomasse autotrophe	0.4
$K_X$	Coefficient de demi-saturation pour l'hydrolyse du substrat lentement biodégradable	0.1
$\eta_g$	Facteur de correction pour $\mu_H$ sous condition anoxie	0.8
$\eta_h$	Facteur de correction pour l'hydrolyse sous condition anoxie	0.8
$k_h$	Taux maximal pour l'hydrolyse	3
$k_a$	Taux d'ammonification	0.05

Tableau 5.1 – Valeurs des paramètres du modèle ASM1 (à 20 ° C)

sont considérées, les processus  $\rho_i$  doivent être réécrits.

- le pH varie très peu, et surtout reste dans la zone où il n'affecte pas le taux de croissance. Il n'est donc pas nécessaire d'exprimer son influence dans les coefficients stoechiométriques.
- les facteurs de correction en dénitrification,  $\eta_g$  et  $\eta_h$ , fixés et constants, sont spécifiques de l'eau résiduelle traitée.
- la biomasse hétérotrophe est supposée homogène.

### 5.2.3 Écriture du modèle ASM1

Compte tenu de toutes les hypothèses précédentes, le modèle est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_I(t) &= D_{in}(t)[S_{I,in}(t) - S_I(t)] \\
 \dot{S}_S(t) &= D_{in}(t)[S_{S,in}(t) - S_S(t)] - \frac{1}{Y_H}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] + \rho_7(t) \\
 \dot{X}_I(t) &= D_{in}(t)X_{I,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_I(t) + f_{XI}[\rho_4(t) + \rho_5(t)] \\
 \dot{X}_S(t) &= D_{in}(t)X_{S,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_S(t) \\
 &\quad + (1 - f_{XI})[\rho_4(t) + \rho_5(t)] - \rho_7(t) \\
 \dot{X}_{BH}(t) &= D_{in}(t)X_{BH,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_{BH}(t) \\
 &\quad + \rho_1(t) + \rho_2(t) - \rho_4(t) \\
 \dot{X}_{BA}(t) &= D_{in}(t)X_{BA,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_{BA}(t) + \rho_3(t) - \rho_5(t) \\
 \\
 \dot{S}_{NO}(t) &= D_{in}(t)[S_{NO,in}(t) - S_{NO}(t)] - \frac{1 - Y_H}{2.86Y_H}\rho_2(t) + \frac{1}{Y_A}\rho_3(t) \\
 \dot{S}_{NH}(t) &= D_{in}(t)[S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] - i_{XB}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] - (i_{XB} + \frac{1}{Y_A})\rho_3(t) + \rho_6(t) \\
 \dot{S}_{ND}(t) &= D_{in}(t)[S_{ND,in}(t) - S_{ND}(t)] - \rho_6(t) + \rho_8(t) \\
 \dot{X}_{ND}(t) &= D_{in}(t)X_{ND,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_{ND}(t) \\
 &\quad + (i_{XB} - f_{XI}i_{XP})[\rho_4(t) + \rho_5(t)] - \rho_8(t) \\
 \dot{S}_O(t) &= D_{in}(t)[S_{O,in}(t) - S_O(t)] + Kq_a(t)[S_{O,sat} - S_O(t)] \\
 &\quad - \frac{1 - Y_H}{Y_H}\rho_1(t) - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A}\rho_3(t)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Les termes  $\rho_i$   $i = 1, \dots, 8$  représentent les processus définis dans la matrice de cinétiques :

$$\begin{aligned}
 \rho_1(t) &= \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\
 \rho_2(t) &= \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{NO} + S_O(t)} \eta_g X_{BH}(t) \\
 \rho_3(t) &= \mu_A \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t) \\
 \rho_4(t) &= b_H X_{BH}(t) \\
 \rho_5(t) &= b_A X_{BA}(t) \\
 \rho_6(t) &= k_a S_{ND}(t) X_{BH}(t) \\
 \rho_7(t) &= k_h \frac{X_S(t)/X_{BH}(t)}{K_S + X_S(t)/X_{BH}(t)} \left( \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) X_{BH}(t) \\
 \rho_8(t) &= k_h \frac{X_{ND}(t)/X_{BH}(t)}{K_S + X_S(t)/X_{BH}(t)} \left( \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) X_{BH}(t)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Les termes avec l'indice *in* correspondent à l'alimentation des différents composés formant le vecteur de commande. Les termes  $D_{in} = \frac{Q_{in}}{V}$ ,  $D_R = \frac{Q_R}{V}$  et  $D_W = \frac{Q_W}{V}$  représentent les taux de dilution relatifs à l'entrée, à la boue recyclée et à la purge de boues,  $V$  étant le volume du bioréacteur. L'alcalinité  $S_{alk}$  est omise puisqu'elle n'intervient pas dans les dynamiques des autres variables du modèle.

## 5.3 Approche MM pour l'estimation d'état et le diagnostic de fonctionnement

### 5.3.1 Modèle ASM1 réduit

Plusieurs hypothèses simplificatrices peuvent être appliquées pour la réduction du modèle ASM1, ici on considère une simplification concernant les composants du modèle, proposée par Weijers [2000]. Ainsi, pour des raisons de concision, nous considérons seulement la dégradation biologique du carbone et de l'azote présents dans les eaux usées, impliquant les six composants suivants : substrat rapidement biodégradable  $S_S$ , substrat lentement biodégradable  $X_S$ , oxygène dissous  $S_O$ , biomasse hétérotrophe  $X_{BH}$ , ammoniac  $S_{NH}$ , nitrate  $S_{NO}$  et biomasse autotrophe  $X_{BA}$ . D'autre part, les deux autres fractions azotées (l'azote organique particulaire  $X_{ND}$  et l'azote organique soluble  $S_{ND}$ ) décrivant la transformation interne de  $S_{NH}$  dans les processus d'hydrolyse et d'ammonification, peuvent être simplifiées puisqu'elles représentent seulement une petite partie des décharges de l'azote. L'approximation utilisée consiste à séparer la dynamique de  $S_{NH}$  de celle de  $S_{ND}$  en négligeant le processus d'ammonification interne.

Les composants suivants ne sont pas considérés : les composants inertes ( $S_I$ ,  $X_I$ ,  $X_P$ ), l'alcalinité ( $S_{alk}$ ). Comme dans la pratique le processus de mesure de la Demande Chimique en Oxygène (DCO) ne permet pas de distinguer la partie soluble  $S_S$  de la partie particulaire  $X_S$  [Weijers, 2000; Smets et al., 2003], un seul composant organique, noté  $X_{DCO}$ , est considéré, en ajoutant les deux concentrations soluble et particulaire. Le vecteur d'état suivant est alors

considéré :

$$x(t) = [X_{DCO}(t), S_O(t), S_{NH}(t), S_{NO}(t), X_{BH}(t), X_{BA}(t)]^T \quad (5.9)$$

Le vecteur réunissant les entrées du processus est :

$$u(t) = [X_{DCO,in}(t), q_a(t), S_{O,in}(t), S_{NH,in}(t), S_{NO,in}(t), X_{BH,in}(t), X_{BA,in}(t)]^T \quad (5.10)$$

L'équation de conservation de la masse pour ces composants contient une partie réaction ( $r$ ) et une partie de bilan entrée/sortie (voir section 5.2.2). La partie réaction est donnée par :

$$r(x(t)) = C \Phi(x(t))$$

La matrice  $C \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$  associée au vecteur d'état (5.9) est :

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_H} & -\frac{1}{Y_H} & 0 & 1 - f_P & 1 - f_P \\ \frac{Y_H - 1}{Y_H} & 0 & \frac{Y_A - 4.57}{Y_A} & 0 & 0 \\ -i_{XB} & -i_{XB} & -i_{XB} - \frac{1}{Y_A} & i_{XB} - f_P i_{XP} & i_{XB} - f_P i_{XP} \\ 0 & \frac{Y_H - 1}{2.86 Y_H} & \frac{1}{Y_A} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

et le vecteur  $\Phi(x(t)) = [\rho_1(t), \dots, \rho_5(t)]^T \in \mathbb{R}^5$  est donné par :

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \mu_H \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\ \rho_2(t) &= \mu_H \eta_{NOg} \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\ \rho_3(t) &= \mu_A \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t) \\ \rho_4(t) &= b_H X_{BH}(t) \\ \rho_5(t) &= b_A X_{BA}(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

où

$$K_{DCO} = K_S \frac{X_{DCO}}{S_S} = \frac{K_S}{f_{SS}}$$

Le volume du bioréacteur est supposé constant. On peut alors écrire (figure 5.1) :

$$q_{out}(t) = q_{in}(t) + q_R(t) \quad (5.13)$$

En général,  $q_R(t)$  et  $q_W(t)$  représentent des fractions du débit d'entrée  $q_{in}(t)$  :

$$q_R(t) = f_R q_{in}(t), \quad 1 \leq f_R \leq 2 \quad (5.14)$$

$$q_W(t) = f_W q_{in}(t), \quad 0 < f_W < 1 \quad (5.15)$$

Considérons la forme explicite du modèle ASM1 caractérisée par le vecteur d'état réduit (5.9) et la matrice des coefficients stoechiométriques (5.11) :

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{DCO}(t) &= -\frac{1}{Y_H}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] + (1 - f_P)(\rho_4(t) + \rho_5(t)) + D_1(t) \\
 \dot{S}_O(t) &= \frac{Y_H - 1}{Y_H}\rho_1(t) + \frac{Y_A - 4.57}{Y_A}\rho_3(t) + D_2(t) \\
 \dot{S}_{NH}(t) &= -i_{XB}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] - \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A}\right)\rho_3(t) \\
 &\quad + (i_{XB} - f_P i_{XP})[\rho_4(t) + \rho_5(t)] + D_3(t) \\
 \dot{S}_{NO}(t) &= \frac{Y_H - 1}{2.86Y_H}\rho_2(t) + \frac{1}{Y_A}\rho_3(t) + D_4(t) \\
 \dot{X}_{BH}(t) &= \rho_1(t) + \rho_2(t) - \rho_4(t) + D_5(t) \\
 \dot{X}_{BA}(t) &= \rho_3(t) - \rho_5(t) + D_6(t)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Le vecteur  $D(x(t), u(t))$  exprimant le bilan entrée/sortie est défini par :

$$\begin{aligned}
 D_1(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} [X_{DCO,in}(t) - X_{DCO}(t)] \\
 D_2(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} (-S_O(t)) + Kq_a(t) [S_{O,sat} - S_O(t)] \\
 D_3(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] \\
 D_4(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} [-S_{NO}(t)] \\
 D_5(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \left[ X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t) \right] \\
 D_6(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \left[ -X_{BA}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BA}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Pour l'application numérique, les paramètres définis dans le tableau 5.1 sont utilisés. Les valeurs des fractions  $f_R$  et  $f_W$  prises en compte dans cette application sont :  $f_R = 1.1$  et  $f_W = 0.04$ . Le volume du bioréacteur  $V$  considéré est  $1333[m^3]$ .

Définissons tout d'abord le vecteur de mesures, le vecteur de commande et le vecteur d'entrées inconnues afin de pouvoir construire une structure multimodèle adaptée au processus d'épuration et à l'application des méthodes d'estimation proposées dans ce mémoire.

**Hypothèse 5.1.** *On suppose nulle la concentration d'oxygène dissous à l'entrée du réacteur ( $S_{O,in}$ ). On peut aussi supposer que  $S_{NO,in} \cong 0$  et  $X_{BA,in} \cong 0$ , ce qui est en conformité avec le benchmark du programme européen Cost 624 [Alex et al., 1999].*

*En pratique, et en particulier pour la station d'épuration Blesbruck de Luxembourg, les concentrations  $X_{DCO,in}$ ,  $S_{NH,in}$  et  $X_{BH,in}$  ne sont pas mesurées en temps réel. Le système devient non observable si ces concentrations sont considérées comme non mesurables. Ainsi une approximation souvent faite en pratique est de remplacer ces concentrations par leurs moyennes journalières respectives. Une moyenne journalière de la concentration  $X_{DCO,in}$  sera considérée, par contre les autres concentrations ( $S_{NH,in}$  et  $X_{BH,in}$ ) seront considérées comme entrées inconnues.*

Les mesures des quatre concentrations en sortie du réacteur ( $X_{DCO}$ ,  $S_O$ ,  $S_{NH}$ ,  $S_{NO}$ ) sont disponibles en temps réel.

En conséquence, le vecteur de mesures est :

$$y(t) = [X_{DCO}(t), S_O(t), S_{NH}(t), S_{NO}(t)]^T \quad (5.18)$$

le vecteur des entrées connues se réduit à :

$$u(t) = [X_{DCO,in}(t), q_a(t)]^T \quad (5.19)$$

et celui des entrées inconnues est :

$$d(t) = [S_{NH,in}(t), X_{BH,in}(t)]^T \quad (5.20)$$

### 5.3.2 Obtention d'un MM pour le modèle ASM1 réduit

On cherche à construire un multimodèle afin de l'utiliser pour la synthèse d'un observateur permettant l'estimation des états du modèle ASM1 réduit. Comme le système est à deux échelles de temps, l'approche singulière s'avère être intéressante et utile dans le but d'estimer l'état à l'aide d'un observateur adapté aux multimodèles singuliers affectés par des entrées inconnues (4.119). La forme multimodèle classique est légèrement modifiée afin de mettre en évidence les deux échelles de temps du système.

En considérant les équations du processus d'épuration (5.16), il est naturel de définir les variables de prémisses suivantes :

$$z_1(x(t), u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V} \quad (5.21a)$$

$$z_2(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} \quad (5.21b)$$

$$z_3(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \quad (5.21c)$$

$$z_4(x(t), u(t)) = \frac{1}{K_{OA} + S_O(t)} \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} X_{BA}(t) \quad (5.21d)$$

Les matrices de la forme quasi-LPV ayant une forme similaire à celle donnée dans (2.48)

$$\dot{x}(t) = A(x, u)x(t) + B(x, u)u(t) + E(x, u)d(t) \quad (5.22)$$

sont exprimées en utilisant les variables de prémisses définies précédemment (5.21) :

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & a_{32} & -z_1(u) & 0 & a_{35} & a_{36} \\ 0 & a_{42} & 0 & -z_1(u) & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

et

$$B(u) = \begin{bmatrix} z_1(u) & 0 \\ 0 & K S_{O,sat} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ z_1(u) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & z_1(u) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{11}(x, u) &= -z_1(x, u) \\ a_{15}(x, u) &= -\frac{\mu_H}{Y_H} z_2(x, u) + (1 - f_P) b_H - \frac{\mu_H \eta_{NOg}}{Y_H} z_3(x, u) \\ a_{16}(x, u) &= (1 - f_P) b_A \\ a_{22}(x, u) &= -z_1(x, u) - K q_a - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \mu_A z_4(x, u) \\ a_{25}(x, u) &= \frac{(Y_H - 1) \mu_H}{Y_H} z_2(x, u) \\ a_{32}(x, u) &= -(i_{XB} + \frac{1}{Y_A}) \mu_A z_4(x, u) \\ a_{35}(x, u) &= (i_{XB} - f_P i_{XP}) b_H - i_{XB} \mu_H z_2(x, u) - i_{XB} \mu_H \eta_{NOg} z_3(x, u) \\ a_{36}(x, u) &= (i_{XB} - f_P i_{XP}) b_A \\ a_{42}(x, u) &= \frac{1}{Y_A} \mu_A z_4(x, u) \\ a_{45}(x, u) &= \frac{Y_H - 1}{2.86 Y_H} \mu_H \eta_{NOg} z_3(x, u) \\ a_{55}(x, u) &= \mu_H z_2(x, u) - b_H + z_1(x, u) \left[ \frac{f_W (1 + f_R)}{f_R + f_W} - 1 \right] + \mu_H \eta_{NOg} z_3(x, u) \\ a_{62}(x, u) &= \mu_A z_4(x, u) \\ a_{66}(x, u) &= z_1(x, u) \left[ \frac{f_W (1 + f_R)}{f_R + f_W} - 1 \right] - b_A \end{aligned} \quad (5.25)$$

La décomposition des quatre variables de prémisse (5.21) est réalisée en utilisant la transformation polytopique convexe (2.62). Les scalaires  $z_{j,1}$  et  $z_{j,2}$  sont définis comme dans (2.63) et les fonctions  $F_{j,1}(z_j(x, u))$  et  $F_{j,2}(z_j(x, u))$  sont données par (2.64) pour  $j = 1, \dots, 4$ .

Par exemple :

$$z_{1,1} = \max_{x,u} z(x, u), \quad z_{1,2} = \min_{x,u} z(x, u) \quad (5.26)$$

et

$$F_{1,1}(z_1(x, u)) = \frac{z(x, u) - z_{1,2}}{z_{1,1} - z_{1,2}}, \quad F_{1,2}(z_1(x, u)) = \frac{z_{1,1} - z(x, u)}{z_{1,1} - z_{1,2}} \quad (5.27)$$



En multipliant les fonctions  $F_{j,\sigma_i^j}(z_j(x,u))$ , les  $r = 16$  fonctions de pondération  $\mu_i(z(x,u))$  sont obtenues :

$$\mu_i(z(x,u)) = F_{1,\sigma_i^1}(z_1(u))F_{2,\sigma_i^2}(z_2(x,u))F_{3,\sigma_i^3}(z_3(x,u))F_{4,\sigma_i^4}(z_4(x,u)) \quad (5.28)$$

Les matrices constantes  $A_i$ ,  $B_i$  et  $E_i$  associées aux 16 sous-modèles, sont déterminées en utilisant les matrices  $A$ ,  $B$  et  $E$  (5.23)-(5.24) et les scalaires  $z_{j,\sigma_i^j}$  ( $i = 1, \dots, 16$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ) :

$$A_i = A(z_{1,\sigma_i^1}, z_{2,\sigma_i^2}, z_{3,\sigma_i^3}, z_{4,\sigma_i^4}) \quad (5.29a)$$

$$B_i = B(z_{1,\sigma_i^1}) \quad (5.29b)$$

$$E_i = E(z_{1,\sigma_i^1}) \quad (5.29c)$$

Finalement, le modèle non linéaire (5.16) est écrit de façon équivalente sous une forme multi-modèle :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x,u) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)] \quad (5.30a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (5.30b)$$

avec

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = O_{4 \times 2} \quad (5.31)$$

### 5.3.3 Synthèse d'observateur à gain proportionnel-intégral

Une vue d'ensemble des résultats disponibles concernant l'estimation d'état et des paramètres de modèle pour des processus bio-chimiques a été présentée dans [Dochain, 2003]. Dans cet article, une évaluation des performances des observateurs classiques (Luenberger et Kalman étendus, observateurs à grand gain) en présence d'incertitudes de modèle a été réalisée. Cette évaluation permet de motiver la synthèse d'observateurs asymptotiques (considérant les cinétiques du processus comme entrées inconnues) et d'observateurs par intervalles (fournissant des bornes d'estimation d'état en connaissant les bornes des incertitudes) qui prennent en compte des incertitudes de modélisation. Ce dernier type d'observateurs -par intervalles- a aussi été abordé en [Rapaport et Dochain, 2005].

Récemment, la construction d'un observateur pour le modèle du processus de traitement des eaux usées a été proposée dans [Boukroune, 2009], où un modèle réduit à 6 états a été considéré. Dans cet article, un observateur est proposé pour une classe de systèmes non linéaires discrets et Lipschitz en utilisant l'approche linéaire à paramètres variables. Cette approche nécessite le respect de la propriété de Lipschitz pour la partie non linéaire du système, ce qui peut représenter une contrainte assez conservatrice. Les approches à base d'observateurs proposées en chapitre 4 évitent cette contrainte. De plus, certains paramètres variables dans le temps sont considérés constants dans [Boukroune, 2009] alors que ces hypothèses ne sont pas nécessaires à l'étude faite dans ce chapitre.

Les résultats d'estimation d'état des multimodèles incertains affectés par des entrées inconnues (section 4.2.4) sont appliqués ici au modèle ASM1 réduit (5.16) ou de façon plus aisée au modèle équivalent (5.30).

### Représentation sous forme de multimodèle incertain du modèle ASM1

La structure multimodèle utilisée pour le modèle ASM1 réduit est celle construite en section précédente 5.3.2. Les matrices constantes et les fonctions de pondération correspondant à la structure multimodèle initiale sont fixées et données par les équations (5.23)-(5.24) et (5.28). Cette structure est légèrement modifiée afin de prendre en compte d'éventuelles incertitudes pouvant intervenir sur les paramètres :  $b_H$  et  $b_A$ . Ces paramètres interviennent dans les coefficients  $a_{1,5}$ ,  $a_{1,6}$ ,  $a_{3,5}$ ,  $a_{3,6}$ ,  $a_{5,5}$  et  $a_{6,6}$  (5.25), ce qui peut donc dans (5.23) de séparer la partie incertaine  $\Delta A(t)$ . La plage de variation de ces paramètres est : pour  $b_H$  de 20% de la valeur nominale, pour  $b_A$  de 25% de la valeur nominale. L'effet des incertitudes est pris en compte au niveau de la matrice  $A + \Delta A(t)$ , on peut alors écrire :

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta b_H(t) & \Delta b_A(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta b_H(t) & \Delta b_A(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta b_H(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta b_A(t) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

où le terme incertain est écrit sous la forme  $\Delta A(t) = M^a F_a(t) N^a$  avec les matrices :

$$F_a(t) = \begin{bmatrix} \Delta b_H(t) & 0 \\ 0 & \Delta b_A(t) \end{bmatrix}, M^a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

où  $F_a(t)$  a la propriété  $F_a^T(t) F_a(t) \leq I$ .

Donc, les nouvelles équations sont :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [(A_i + \Delta A(t))x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)] \quad (5.33a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (5.33b)$$

### Synthèse d'observateur et résultats d'estimation d'état

Pour le processus d'épuration décrit par le modèle ASM1 réduit on considère que les concentrations disponibles à la mesure à la sortie de la station sont la DCO  $X_{DCO}$ , l'oxygène dissous  $S_O$ , l'ammoniac  $S_{NH}$  et le nitrate  $S_{NO}$ . La matrice de sortie  $C$  est donnée dans (5.31). Afin de prendre en compte les imperfections des chaînes d'acquisition de mesure, un bruit  $\delta(t)$  est

considéré sur la sortie du système qui est donc définie par :

$$y(t) = Cx(t) + \delta(t) \quad (5.34)$$

où  $\delta(t)$  est un signal normalement distribué de moyenne nulle.

Dans ce qui suit on applique la procédure d'estimation d'état et d'entrées inconnues obtenues présentée au théorème 4.4. En appliquant ce théorème, l'observateur (4.37) est construit. On rappelle la structure de l'observateur :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_i^P (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (5.35a)$$

$$\dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) L_i^I (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (5.35b)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + G\hat{d}(t) \quad (5.35c)$$

La valeur numérique du taux d'atténuation des entrées connues  $u(t)$  et inconnues  $d(t)$  vers l'erreur d'estimation  $e_a(t)$  des états  $x(t)$  et des entrées inconnues  $d(t)$  est  $\gamma = 1.64$ . Une comparaison entre les variables d'état, les entrées inconnues et leurs estimées est illustrée aux figures 5.5 et 5.6.

Au vu de ces figures, l'observateur proportionnel-intégral proposé donne des bons résultats d'estimation (figure 5.5) même pour des entrées inconnues pour lesquelles la condition théorique  $\dot{d} = 0$  n'est pas vérifiée puisque les entrées inconnues ne sont pas constantes.

**Remarque 5.1.** *Il faut noter que les données d'entrée et de sortie sont générées par le modèle ASM1 complet (5.7), alors que le modèle utilisée pour obtenir la structure multimodèle -et implicitement l'estimation d'état- est celui réduit à six états (5.16).*

### 5.3.4 Synthèse d'observateur en présence d'entrées inconnues à partir d'un MM non standard

Dans cette section l'application de la procédure proposée au chapitre 4 (section 4.2.6) est réalisée. Tout d'abord, il est nécessaire de mettre le modèle ASM1 réduit (5.16) (ayant une forme multimodèle à entrées inconnues classique construite en section 5.3.2) sous forme d'un multimodèle singulier affecté par des entrées inconnues. Pour effectuer cette réécriture du modèle, il faut identifier et séparer les deux échelles de temps du système ASM1 réduit.

#### Séparation des variables d'état lentes et rapides

On commence par l'identification des dynamiques lentes et rapides du modèle ASM1 réduit en utilisant la méthode d'homotopie Robertson [1992]. Cette méthode (section 3.3.3) est essentiellement basée sur l'analyse des valeurs propres du jacobien associé au système linéarisé.

Considérons la linéarisation du système non linéaire (5.16) autour de différents points d'équilibre  $(x_0, u_0)$  :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) \quad (5.36)$$

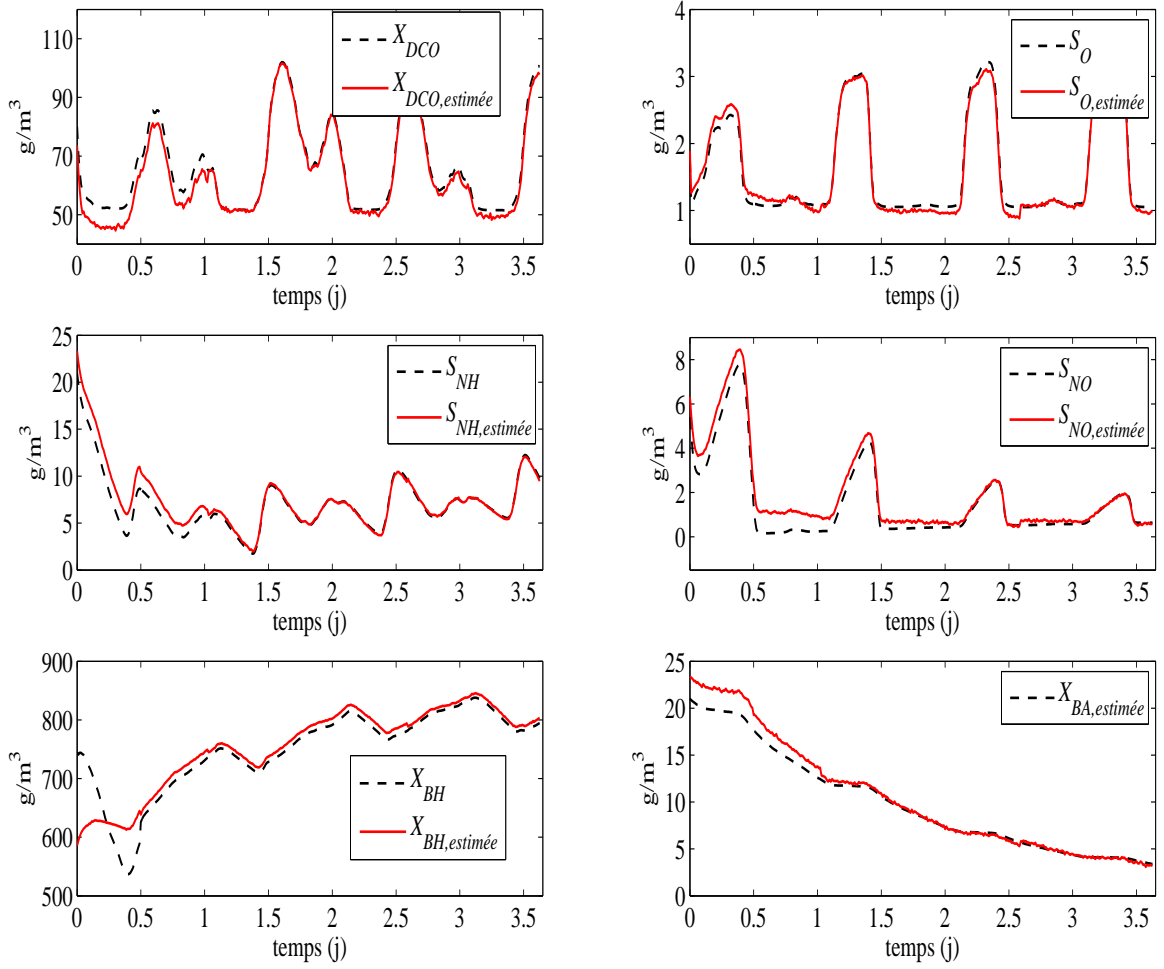


Figure 5.5 – Estimation des états en utilisant un observateur proportionnel-intégral

où  $A_0 = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)}$  et  $B_0 = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)}$ .

Les parties réelles des valeurs propres de  $A_0$  sont ordonnées  $Re(\lambda_1) \leq Re(\lambda_2) \leq \dots \leq Re(\lambda_n)$ ; la plus grande (respectivement la plus petite) partie réelle correspond à la dynamique la plus lente (respectivement rapide). La séparation en parties lente et rapide est réalisée en fixant un seuil entre les deux échelles de temps,  $\tau$ , tel que :  $Re(\lambda_1) \leq \dots \leq Re(\lambda_{n_f}) \ll \tau \leq Re(\lambda_{n_f+1}) \leq \dots \leq Re(\lambda_n)$ .

Pour le modèle ASM1 réduit considéré (5.16), cette séparation en deux échelles de temps est confirmée par les valeurs propres du jacobien  $A_0$ , en utilisant la méthode d'homotopie, comme on peut le remarquer à la figure 5.7 où quarante points de fonctionnement sont considérés. Les parties réelles de cinq valeurs propres sont incluses entre  $-65$  et  $-1$ , alors que l'autre se situe autour de  $-250$ . En fixant le seuil à  $\tau = -90$ , on peut déduire que le système est caractérisé par

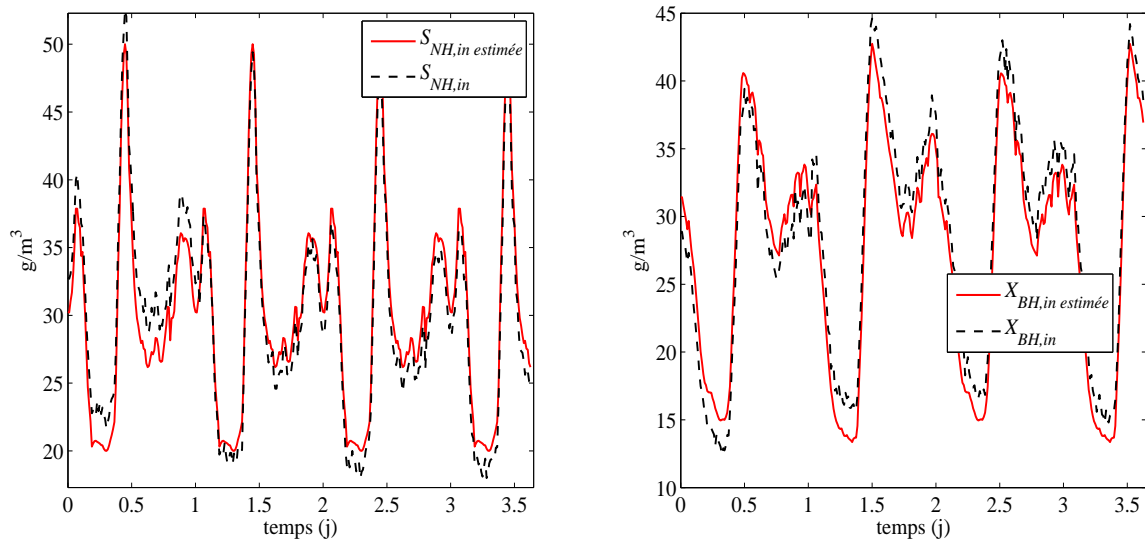


Figure 5.6 – Estimation des entrées inconnues en utilisant un observateur proportionnel-intégral

une variable d'état rapide et cinq variables d'état lentes :

$$x_F(t) = X_{DCO}(t) \quad (5.37a)$$

$$x_S(t) = [S_O(t) \ S_{NH}(t) \ S_{NO}(t) \ X_{BH}(t) \ X_{BA}(t)]^T \quad (5.37b)$$

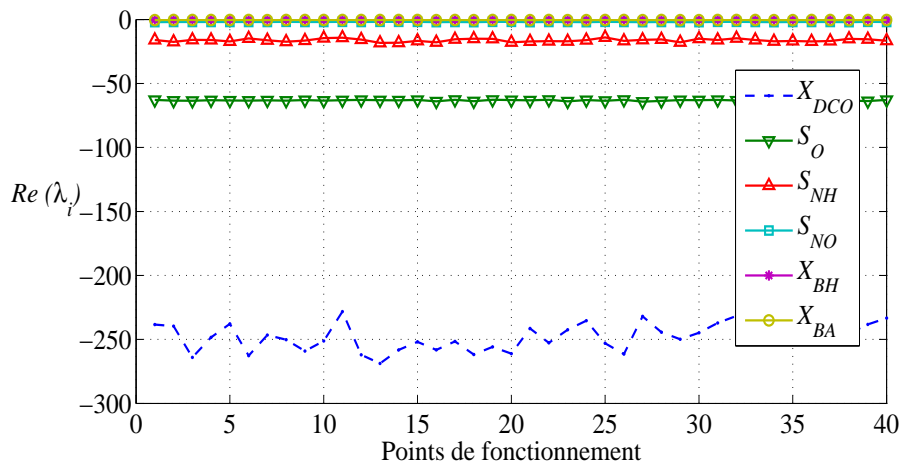


Figure 5.7 – Parties réelles des valeurs propres du système linéarisé

Cette séparation sera utilisée pour écrire le modèle ASM1 réduit sous forme de multimodèle singulier.

### Représentation singulière du modèle ASM1 réduit

On applique la méthode d'estimation d'état proposée au chapitre 4 (section 4.2.4) au modèle ASM1 réduit à six variables d'état (5.16). Pour pouvoir réaliser cette tâche, il faut construire un observateur à entrées inconnues pour des systèmes singuliers et à variables de prémisses non mesurables. Le multimodèle qui sera utilisé pour ce propos est similaire à celui exprimé en (4.119).

Compte tenu de la séparation des états lents et rapides réalisée en section 5.3.4, la matrice  $\bar{E}$  est définie par :

$$\bar{E} = \mathbf{diag}(0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad (5.38)$$

La sortie  $y(t) = Cx(t) + Gd(t)$  est définie par les matrices (5.31). Un bruit de mesure est présent sur les variables de sortie  $y_1 = X_{DCO}$ ,  $y_2 = S_O$ ,  $y_3 = S_{NH}$  et  $y_4 = S_{NO}$ .

En conclusion, le modèle ASM1 réduit ayant la forme initiale (5.16) est réécrit sous forme d'un MM singulier à variables de prémisses partiellement non mesurables, comme décrit aux équations (4.119)-(4.120). Ce système peut se ramener à un MM perturbé à variables de prémisses mesurables, comme suit :

$$\bar{E} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t), u(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + \omega(t)] \quad (5.39a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (5.39b)$$

où la perturbation a la forme suivante :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r (\mu_i(x(t), u(t)) - \mu_i(\hat{x}(t), u(t))) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)] \quad (5.40)$$

et avec les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $E_i$  définies en (5.29).

On peut maintenant appliquer la méthode d'estimation d'état proposée en section 4.2.4.

### Synthèse d'observateur à entrées inconnues

La synthèse de l'observateur suivant :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t), u(t)) [N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)] \quad (5.41a)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \quad (5.41b)$$

est faite en appliquant le théorème 4.6 qui permet de déterminer les gains  $N_i$ ,  $G_i$ ,  $L_i$  ( $i = 1, \dots, 16$ ) et  $T_2$  et de minimiser  $\gamma$ .

À la figure 5.8 sont représentées les variables d'état lentes ( $X_{DCO}$ ) et rapides ( $S_O$ ,  $S_{NH}$ ,  $S_{NO}$ ,  $X_{BH}$  et  $X_{BA}$ ) et leurs estimées. Le gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert de  $\omega(t)$  (5.40) vers  $e(t)$  est borné par  $\gamma = 1.5$ . On peut remarquer que même si un bruit de mesure a été ajouté aux mesures des sorties, l'estimation de l'état est de bonne qualité. Les résultats présentés ont été obtenus en générant les données entrée/sortie avec le modèle ASM1 complet (5.7) à onze états tandis que

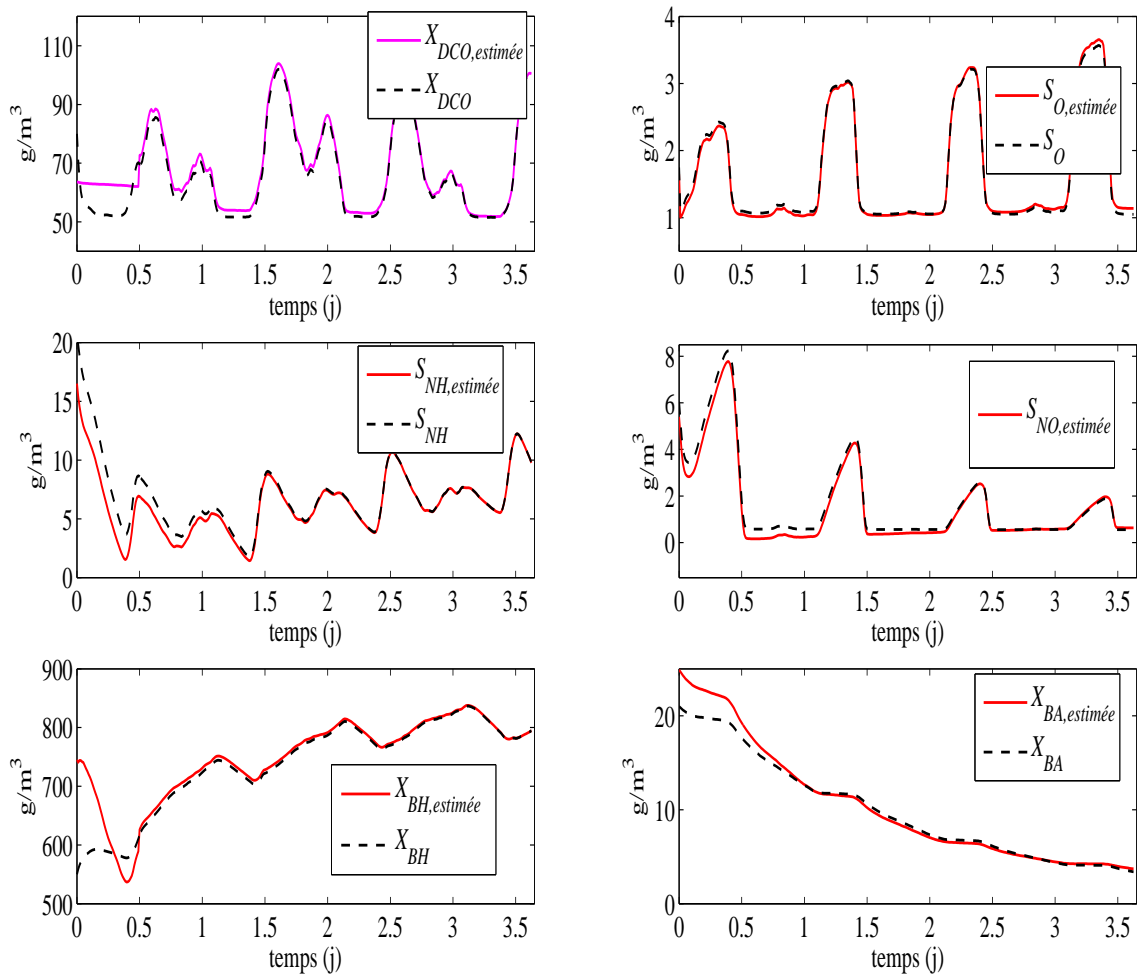


Figure 5.8 – Estimation d'état du modèle ASM1 réduit en utilisant l'observateur (4.122)

la synthèse de l'observateur utilise le modèle réduit à six états.

### 5.3.5 Application de l'estimation d'état au diagnostic de fonctionnement

Des travaux importants ont été réalisés dans le domaine du diagnostic de systèmes. Deux grandes catégories de méthodes de diagnostic ont été développées.

La première catégorie n'utilise pas de modèle mathématique a priori [Korbitz et al., 2004]. Dans ce cas des approches basées sur les méthodes d'analyse en composantes principales (ACP) permettent de modéliser les relations entre les variables d'entrée et de sortie du processus en fonctionnement normal du système, les défauts étant détectés en comparant le comportement observé et celui donné par le modèle ACP [Tharault, 2008]. Des méthodes basées sur un raisonnement logique existent, proposant un arbre de défaillance capable de guider dans la phase de diagnostic [Gertler, 1998]. D'autres techniques de traitement de signal basées sur la trans-

formée de Fourier permettent de détecter des variations brusques de signal dans un système. La deuxième catégorie de méthodes est basée sur la disponibilité d'un modèle mathématique du système. Parmi les approches de diagnostic appartenant à cette dernière catégorie on peut énoncer l'approche par l'espace de parité [Cassar et al., 1992; Maquin et Ragot, 2000], l'approche par identification paramétrique [Isermann, 2006], l'approche à base d'observateurs d'état [Patton et al., 1998; Patton et Frank, 2000; Gertler, 1998; Blanke et al., 2006] et l'approche basée sur des observateurs de sortie [Chen et Saif, 2006].

En général, le diagnostic de fonctionnement de systèmes repose sur l'utilisation de modèles pour synthétiser des indicateurs de dysfonctionnement. Si ces modèles se révèlent trop complexes, il devient difficile, voir impossible, de générer ces indicateurs. Pour cette raison, il convient d'utiliser des modèles adaptés à cette génération ou de simplifier les modèles existants.

La nécessité d'améliorer les performances des systèmes et la qualité des produits, ainsi que les enjeux écologiques et la réduction de coût amènent à considérer le fonctionnement des systèmes sur un large domaine de fonctionnement nécessitant, d'une part, la prise en compte de comportements non linéaires et d'autre part l'amélioration de la sécurité par la mise en place de systèmes de diagnostic. Cela justifie le recours à des modules de diagnostic basés sur des multimodèles.

La surveillance d'un système et le diagnostic des systèmes non linéaires à base d'observateurs d'état sont des applications directes des algorithmes d'estimation d'état proposés dans le chapitre précédent. La surveillance d'un système est souvent confiée à un module de diagnostic, qui exploite toute information livrée par les mesures du système et / ou par le comportement attendu du système fourni par un modèle en vue de détecter tout comportement anormal du système dû, par exemple, à l'apparition soudaine d'un défaut. Un défaut désigne tout écart non permis de la valeur acceptable ou nominale d'au moins un composant (paramètre ou propriété) caractéristique du système. La tâche de diagnostic consiste à déterminer le plus rapidement possible l'instant d'apparition d'un défaut et son intervalle de durée. Pour réaliser cette tâche, des symptômes ou des indicateurs de défauts sont générés grâce au principe de redondance. À l'issue de l'étape de détection vient l'étape de localisation ou d'isolation qui détermine à partir de l'analyse des indicateurs de défauts l'origine et la nature du défaut. Une étape additionnelle de reconfiguration peut être envisagée dans le but d'adapter la commande afin de réduire l'impact du défaut sur le fonctionnement du système.

Le principe de redondance a une importance fondamentale pour le diagnostic de système. Ce principe consiste dans la capacité à disposer de plusieurs moyens de détermination d'une grandeur caractéristique du système (variable, paramètre, signal). L'incohérence entre les différentes déterminations est révélatrice d'un dysfonctionnement du système. Parmi les nombreuses méthodes de diagnostic faisant appel au principe de redondance, on peut citer les techniques d'estimation d'état à base d'observateurs. Dans ce contexte, le diagnostic du système est réalisé en comparant les signaux de sortie mesurés et les signaux de sortie estimés par un observateur. Le test de cohérence entre ces mesures et leurs estimées permet d'établir un indicateur de défaut appelé *résidu*. Théoriquement, le résidu est nul en conditions normales de fonctionnement (les sorties mesurées du système et leurs estimées par l'observateur doivent correspondre); étant donné que l'observateur utilise les mêmes signaux d'entrée que ceux appliqués au système, il est capable de fournir les mêmes signaux de sortie à condition que le modèle employé représente bien le système à surveiller. Dans ce contexte, on pourra citer l'avantage de l'approche multimodèle qui permet une réécriture d'un SNL. De ce fait le modèle est exact sur toute la



plage de fonctionnement et, de plus, permet la synthèse d'observateurs, donc de module de diagnostic.

### Génération des résidus à l'aide d'un banc d'observateurs

L'étape de génération des résidus, c'est-à-dire des indicateurs de défauts, est une étape fondamentale dans la conception d'un module de diagnostic à base de modèle. La génération des résidus à base d'observateurs d'état consiste à reconstruire les sorties du système à partir des mesures et du modèle du système, puis à comparer les signaux mesurés et leurs reconstructions. Les résidus sont alors obtenus par différence. Théoriquement, un résidu doit être nul en absence de défaut et significativement différent de zéro dans le cas contraire. Cependant, en pratique cette condition n'est pas tout à fait satisfaite car des bruits de mesures, ainsi que des perturbations peuvent intervenir. L'introduction de seuils de détection afin d'éviter de fausses alarmes est nécessaire, ces seuils étant généralement fixés compte tenu des incertitudes de modélisation.

Une structuration des résidus est souvent nécessaire pour effectuer de façon efficace les tâches de localisation et d'isolation des défauts. La structuration consiste à construire les résidus de façon à ce que chacun soit sensible à un sous-ensemble connu de défauts et insensible aux autres, la bonne conduite de la tâche de localisation dépendant du choix de ces sous-ensembles. Un moyen de réaliser cette structuration est de remplacer l'utilisation d'un seul observateur par celle d'un ensemble d'observateurs (banc d'observateurs), chacun d'entre eux étant piloté par une partie des informations disponibles.

### Détection de défauts de capteurs

Dans un premier temps on étudie le diagnostic de défauts de capteur. La sortie du système est alors donnée par :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + \delta(t) \quad (5.42)$$

où  $\delta(t)$  est un vecteur de défauts.

On commence par décrire une structuration des résidus en vue de détecter les défauts de capteurs. Cette structuration se fait à l'aide d'observateurs dédiés (*Dedicated Observer Scheme - DOS*) pour lesquels le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par la  $i^{\text{ème}}$  sortie du système et toutes les entrées. Un schéma DOS est illustré à la figure 5.9.

On notera par la suite  $r_{i,j}$  le signal indicateur de défaut (résidu) calculé à partir de la différence entre la  $i^{\text{ème}}$  sortie du système et la  $i^{\text{ème}}$  sortie estimée avec l'observateur  $j$ .

En général, les résidus peuvent être définis comme suit :

$$r_{i,j} = y_i(t) - \hat{y}_{i,j}(t) \quad i, j = 1, \dots, \ell \quad (5.43)$$

La phase de localisation ou d'isolation d'un défaut est réalisée par le biais d'une analyse de l'évolution des différents résidus basée sur une logique de décision préalablement établie. Un tableau des signatures théoriques (tableau 5.2) est réalisé afin de caractériser l'évolution des résidus  $r_{i,j}$  en présence d'un défaut  $\delta_i$  affectant la  $i^{\text{ème}}$  sortie du système. Sur ce tableau, un "1" traduit qu'il est certain que le défaut  $\delta_i$  affecte le résidu  $r_{i,j}$ , un "0" qu'il est certain que le défaut  $\delta_i$  n'affecte pas le résidu  $r_{i,j}$  et un "?" qu'il est impossible de se prononcer. Ce tableau

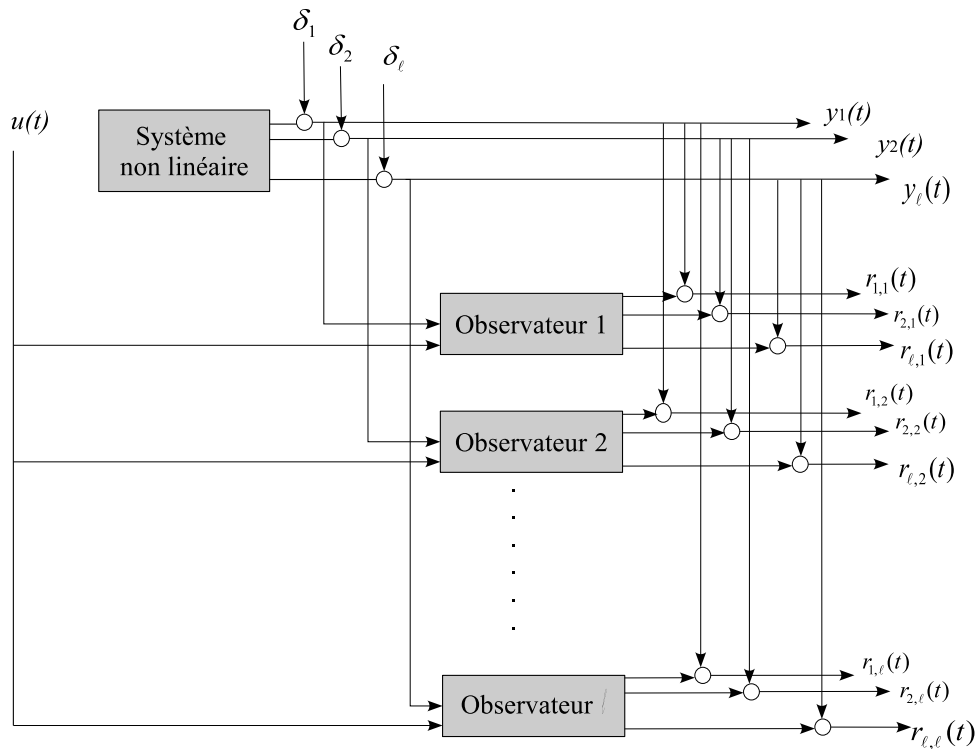


Figure 5.9 – Banc d'observateurs suivant un schéma DOS

de signatures permet de prendre la meilleure décision.

	Observateur 1				Observateur 2				...	Observateur $\ell$			
	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	...	$r_{\ell,1}$	$r_{1,2}$	$r_{2,2}$	...	$r_{\ell,2}$		...	$r_{1,\ell}$	$r_{2,\ell}$	...
$\delta_1$	?	?	...	?	1	0	...	0	...	1	0	...	0
$\delta_2$	0	1	0 ...	0	?	?	...	?	...	0	1	0 ...	0
$\vdots$			$\ddots$				$\ddots$		$\ddots$			$\ddots$	
$\delta_\ell$	0	0	0 ...	1	0	0	0 ...	1	...	?	?	...	?

Tableau 5.2 – Tableau de signatures théoriques pour la détection de défauts de capteurs avec le schéma DOS

Pour construire le tableau de signatures on considère dans un premier temps l'influence du défaut  $\delta_1$  sur les différents résidus créés :

1. L'observateur 1 reconstruit la sortie du multimodèle en utilisant seulement la sortie  $y_1$  et toutes les entrées du système. Si la sortie  $y_1(t)$  est affectée par un défaut  $\delta_1$  (les autres sorties  $y_2(t), \dots, y_l(t)$  n'étant pas affectées par ce défaut) alors l'estimation des variables d'état et des sorties sont influencées et les résidus  $r_{i,1} = y_i(t) - \hat{y}_{i,1}(t)$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ) sont donc en principe affectés par ce défaut (différents de zéro). Il convient cependant de

souligner qu'il est difficile de prédire l'évolution de l'estimation d'état en présence d'un défaut sur la sortie  $y_1$ . En effet, la sortie  $y_1$  est corrompue par le défaut mais  $\hat{y}_{1,1}$  est mal reconstruit ; une compensation peut apparaître dans la différence  $y_1 - \hat{y}_{1,1}$  et le défaut s'en trouve masqué (le résidu  $r_{1,1}$  pouvant rester nul). Par conséquent, il est dangereux de se prononcer sur l'absence de défaut sur la sortie  $y_1$  en analysant la nullité des résidus (un "?" apparaît sur la table des signatures).

2. Toujours en présence d'un défaut sur  $y_1$ , l'estimation d'état fournie par les observateurs 2,  $\dots$ ,  $\ell$  est correctement réalisée car ces observateurs sont pilotés par les sorties  $y_2(t)$ ,  $\dots$ ,  $y_\ell(t)$  qui ne sont pas affectées par le défaut sur  $y_1$ . Ainsi, les signaux de résidu  $r_{1,j}$  pour  $j = 2, \dots, \ell$  sont sans aucun doute sensibles au défaut  $\delta_1$ , alors que  $r_{2,j} \dots r_{\ell,j}$  pour  $j = 2, \dots, \ell$  ne le sont pas. Par conséquent, cette configuration doit être exploitée pour conclure de la présence d'un défaut sur la sortie  $y_1$ .

Les autres lignes du tableau d'incidence peuvent être construites de la même manière.

Une logique de décision simple permet d'associer des alarmes  $a_i(t)$  aux défauts  $\delta_i(t)$  sous forme booléenne :

$$r_{bi,j}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |r_{i,j}(t)| \leq \text{seuil} \\ 1, & \text{si } |r_{i,j}(t)| > \text{seuil} \end{cases} \quad (5.44a)$$

$$a_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \left( r_{bi,j}(t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\ell} \bar{r}_{bk,j}(t) \right), \quad i = 1, \dots, \ell \quad (5.44b)$$

Dans le cas de défauts de capteurs simultanés la méthode par banc d'observateurs DOS est capable de détecter et isoler ces défauts. Dans le cas de deux défauts simultanés, la table de signature se déduit de la même manière et la logique de décision suivante permet d'associer une alarme  $a_{ij}(t)$  à l'occurrence de  $\delta_i(t)$  et  $\delta_j(t)$  :

$$a_{ij}(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{\ell} r_{bik}(t) r_{bjk}(t) \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i \\ k \neq j}}^{\ell} \bar{r}_{bnk}(t) \quad (5.45)$$

Il faut mentionner que le schéma DOS (voir figure 5.9) est très exigeant concernant la propriété d'observabilité du système par rapport à chaque sortie. En effet, du fait que chaque observateur du banc est piloté par une seule sortie, le système doit être observable avec juste une sortie, et ce pour chaque sortie. Une alternative à ce problème est le schéma GOS (*Generalised Observer Scheme*) qui utilise pour chaque observateur du banc toutes les sorties sauf une, ou bien on peut utiliser un schéma intermédiaire qui utilise deux sorties parmi  $\ell = 4$  pour chaque observateur du banc (voir figure 5.10). Le dernier type de banc d'observateurs sera utilisé car le schéma GOS possède des difficultés dues aux multiples compensations qui rendent quasiment tous les résidus inutilisables. Un tableau de signatures théoriques 5.3 peut être réalisé, de manière similaire au tableau 5.2, en utilisant deux sorties parmi  $\ell = 4$  pour chaque observateur. En général, pour ce schéma les résidus peuvent être définis comme suit :

$$r_{i,j}(t) = y_i(t) - \hat{y}_{i,j}(t), \quad i = 1, \dots, 4, \quad j \in I_{obs} \quad (5.46)$$

où  $I_{obs} = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$  est l'ensemble d'indices d'observateurs.

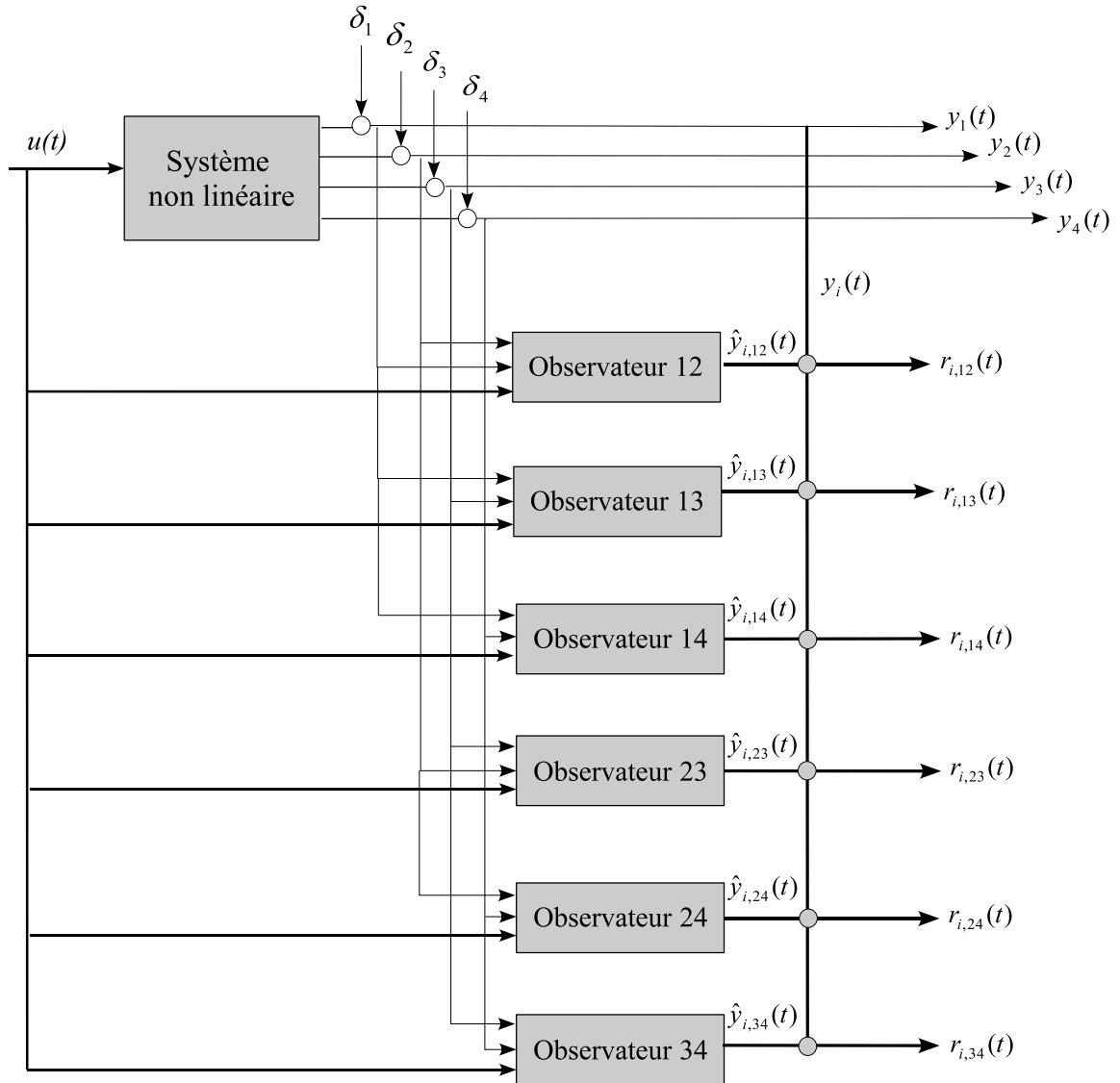


Figure 5.10 – Banc d'observateurs utilisant 2 sorties parmi  $\ell = 4$

Soit :

- $I_i$  l'ensemble d'indices d'observateurs construits avec  $y_i$  (e.g.  $I_1 = \{12, 13, 14\}$ )
- $I_{\bar{i}}$  l'ensemble d'indices d'observateurs construits sans  $y_i$  (e.g.  $I_{\bar{1}} = \{23, 24, 34\}$ )

Dans ce cas, on peut proposer une logique de décision en définissant des alarmes  $a_i(t)$  associées

aux défauts  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ), comme suit :

$$r_{bi,j}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |r_{i,j}(t)| \leq \text{seuil} \\ 1, & \text{si } |r_{i,j}(t)| > \text{seuil} \end{cases} \quad (5.47a)$$

$$a_i(t) = \prod_{j \in I_i} \left( r_{bi,j}(t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\ell} \bar{r}_{bk,j}(t) \right), \quad i = 1, \dots, \ell \quad (5.47b)$$

La détection de défauts simultanés est encore possible. En définissant  $I_i$  l'ensemble des indices d'observateurs construits sans  $y_i$  et  $y_j$  on peut proposer la logique de décision suivante pour isoler des défauts simultanés  $\delta_i$  et  $\delta_j$  :

$$a_{ij}(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \in I_{ij}}}^{\ell} r_{bi,k}(t) r_{bj,k}(t) \left( \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i \\ n \neq j}}^{\ell} \bar{r}_{bn,k}(t) \right) \quad (5.48)$$

### Détection de défauts d'actionneurs

Dans ce qui suit on étudie le diagnostic de défauts d'actionneur. L'état du système est alors donnée par

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t), u(t) + \eta(t)) [A_i x(t) + B_i (u(t) + \eta(t))] \quad (5.49)$$

où  $\eta(t)$  est un vecteur de défauts.

Le même principe d'analyse de résidus par banc d'observateurs permet la détection et l'isolation de défauts d'actionneurs. En utilisant un observateur dédié (schéma DOS figure 5.11), le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par la  $i^{\text{ème}}$  entrée et toutes les sorties. Les entrées restantes seront considérées comme entrées inconnues et la sortie de ce  $i^{\text{ème}}$  observateur est insensible aux défauts des entrées  $\eta_j$  ( $j = 1, \dots, m, j \neq i$ ) non utilisées pour sa synthèse. Un tableau de signatures correspondant à ce schéma peut être construit tenant compte des caractéristiques du schéma, comme dans le tableau 5.4. La signification des "0" et "1" dans ce tableau est équivalente à celle présentée dans le cas de détection de défauts de capteurs.

Comme dans le cas du diagnostic de capteurs ce schéma est rarement utilisable car il faut que les contraintes structurelles de découplages soient satisfaites pour un grand nombre d'entrées inconnues. Le schéma GOS permet de pallier cet inconvénient.

Le schéma GOS pour la détection de défauts d'actionneurs, présenté à la figure 5.12, correspond à une structure où le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par toutes les entrées sauf la  $i^{\text{ème}}$  et toutes les sorties. Cet observateur fournit une sortie sensible aux défauts des toutes les entrées sauf ceux de la  $i^{\text{ème}}$ . La table de signatures théoriques associée à ce schéma de détection est présentée dans le tableau 5.5.

On peut définir des alarmes correspondant à chaque défaut d'actionneur  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) de manière simple.

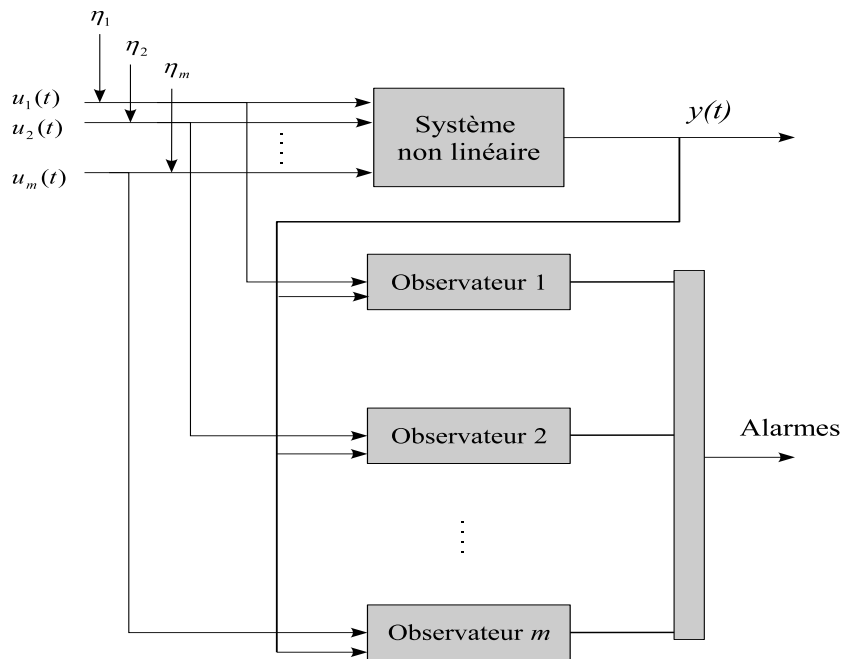


Figure 5.11 – Observateurs à entrées inconnues (DOS) pour la détection de défauts d'actionneurs

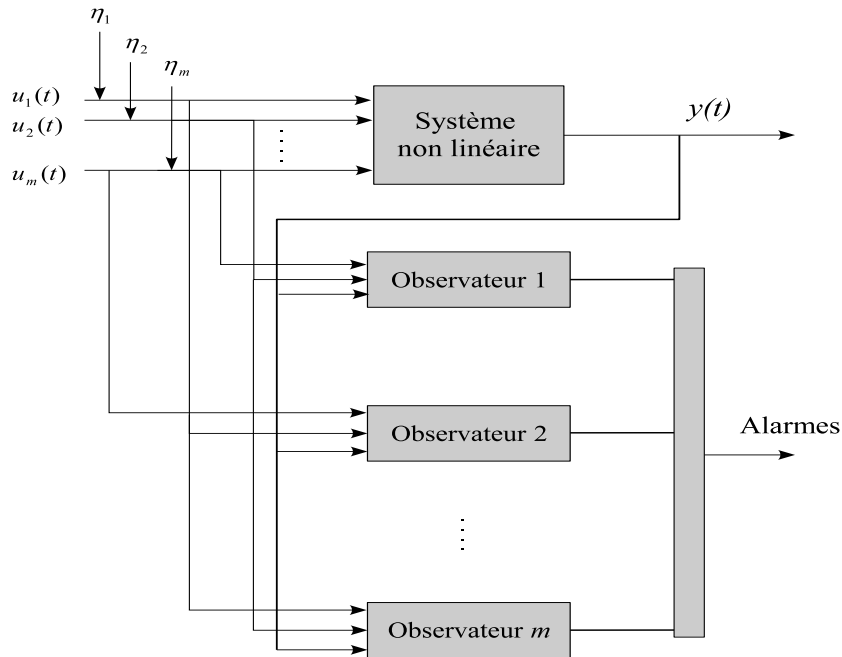


Figure 5.12 – Observateurs à entrées inconnues (GOS) pour la détection de défauts d'actionneurs

### Diagnostic de défauts de capteurs d'un réacteur biologique

Pour effectuer le diagnostic d'une STEP on utilise le modèle réduit (5.9) pour construire les observateurs en supposant que les grandeurs mesurées sont  $y(t) = [X_{DCO}(t) \ S_O(t) \ S_{NH}(t)]$

$S_{NO}(t)]^T$ , dans ce cas le vecteur de sortie est donné en (5.34) avec  $C$  explicitée en (5.31). Un banc comportant quatre observateurs selon le schéma DOS est conçu. Le multimodèle utilisé pour concevoir ces observateurs a été établi au cours de la section 5.3.2. Des défauts sont injectés, au cours du temps exprimé en  $[j]$ , sur les sorties du bioréacteur de la façon suivante :

- un défaut  $\delta_1$  sur la première sortie  $y_1 = X_{DCO}$  apparaît dans l'intervalle  $(0.25; 0.75)[j]$
- un défaut  $\delta_2$  sur la deuxième sortie  $y_2 = S_O$  intervient dans l'intervalle  $(2.25; 2.75)[j]$
- un défaut  $\delta_3$  est injecté dans l'intervalle  $(1; 1.5)[j]$  sur la troisième sortie  $y_3 = S_{NH}$
- un défaut est injecté sur la sortie  $y_4 = S_{NO}$  pendant l'intervalle  $(3; 3.25)[j]$

Dans tous les cas, ces défauts ont une amplitude constante approximativement égale à 10% de l'amplitude maximale de chaque sortie. Les résidus générés par le banc d'observateurs sont illustrés à la figure 5.13.

L'analyse de la configuration des résidus  $r_{i,1}$ ,  $r_{i,2}$ ,  $r_{i,3}$  et  $r_{i,4}$  permet la détection et la localisation des défauts de capteur. Ces résidus sont nuls en absence d'un défaut et de bruit de mesure. Entre  $t = 0.25[j]$  et  $t = 0.75[j]$ , les résidus  $r_{j,1}$  pour  $j = 1, \dots, 4$  correspondent à l'absence de défaut sur les sorties  $y_2$ ,  $y_3$  et  $y_4$ . Cette information est confirmée par les résidus générés avec les trois autres observateurs qui permettent de localiser un défaut sur  $y_1$ . En appliquant un raisonnement similaire aux résidus  $r_{j,2}$ ,  $r_{j,3}$  et  $r_{j,4}$  pour  $j = 1, \dots, 4$ , il est possible de conclure qu'un défaut sur les sorties  $y_k$  (respectivement  $k \neq 2$ ,  $k \neq 3$  et  $k \neq 4$ ) apparaît dans les intervalles respectifs  $(2.25; 2.75)[j]$ ,  $(1; 1.5)[j]$  et  $(3; 3.25)[j]$ . Les résidus évoluent conformément à la table des signatures qui permet d'accomplir correctement les tâches de détection et d'isolation de défauts de capteurs de la station d'épuration.

Les alarmes (5.47b) (construites pour le schéma DOS intermédiaire utilisant 2 sorties parmi 4) associées aux défauts  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ) sont illustrées à la figure 5.14. L'évolution des résidus obtenus avec le schéma DOS intermédiaire (tableau 5.3) est présentée à la figure 5.15.

### Diagnostic de défauts actionneurs

On applique maintenant la technique de diagnostic pour la détection de défauts actionneurs en considérant le même système. Rappelons le vecteur de commande  $u(t) = [X_{DCO,in}(t), q_a(t)]^T$  et considérons les deux défauts  $\eta_1$  et  $\eta_2$  affectant les deux actionneurs respectivement. Considérons ces défauts sous forme de biais sur  $X_{DCO,in}$  et  $q_a$  :

$$\eta_1(t) = \begin{cases} 0.3 X_{DCO,in}(t), & 0.5 < t[j] < 1.0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.50)$$

$$\eta_2(t) = \begin{cases} 0.3 q_a(t), & 2.5 < t[j] < 3.0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.51)$$

Les résidus sont construits à partir de la comparaison entre les sorties réelles et les sorties estimées pour chaque observateur :

$$r_{i,j} = y_j - \hat{y}_{i,j}, \quad i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, \ell \quad (5.52)$$

où  $i$  désigne le numéro de l'observateur et  $j$  le numéro de la sortie. À la figure 5.16, les résidus  $r_{1,1}$ ,  $r_{2,1}$ ,  $r_{3,1}$  et  $r_{4,1}$  générés avec le premier observateur indiquent qu'il y a un défaut entre les instants  $0.5[j]$  et  $1.0[j]$  qui correspond à un défaut sur l'actionneur piloté par la commande

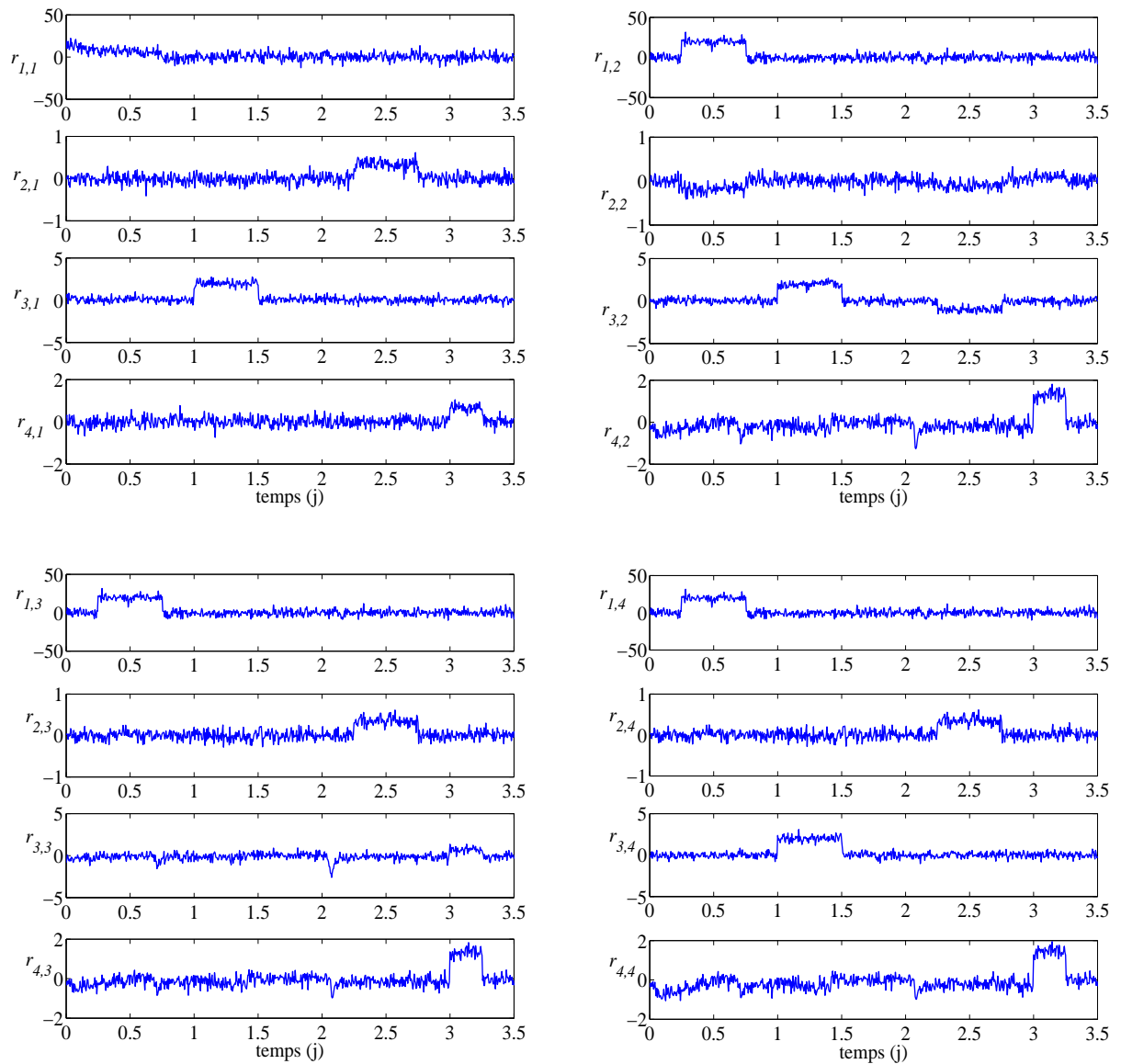


Figure 5.13 – Évolution des résidus  $r_{i,j}$  en utilisant le schéma DOS (figure 5.9) pour la détection de défauts de capteurs

$X_{DCO,in}$ . Le défaut  $\eta_2$  affectant  $q_a$  peut être localisé par l'analyse des résidus  $r_{1,2}$ ,  $r_{2,2}$ ,  $r_{3,2}$  et  $r_{4,2}$  générés par le deuxième observateur. Les résultats de simulation correspondent au tableau de signatures théoriques 5.4.



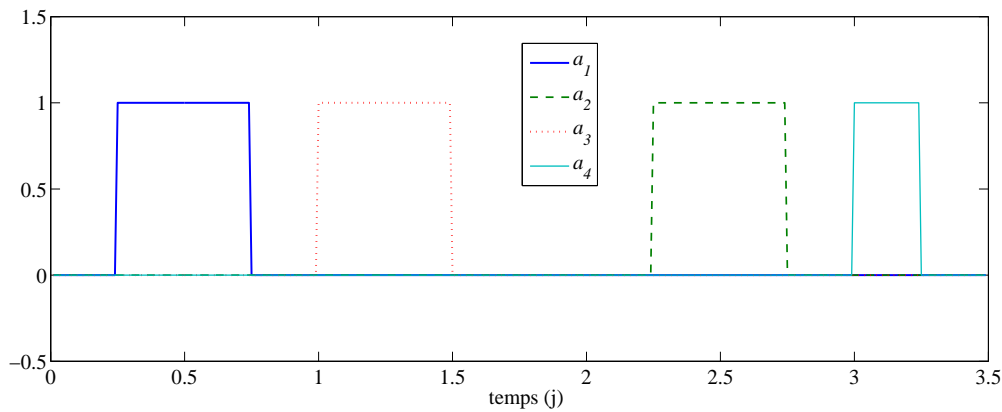


Figure 5.14 – Alarmes associées aux défauts de capteurs pas DOS utilisant deux sorties parmi quatre

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre a permis la mise en œuvre des différentes méthodes de modélisation et d'estimation d'état proposées au cours des chapitre 2, 3 et 4 à travers une application sur un modèle réduit à six états du modèle ASM1.

La méthode, proposée en chapitre 2, d'écriture équivalente d'un modèle non linéaire sous forme multimodèle a été mis en œuvre avec succès pour le modèle ASM1 considéré. Le multimodèle obtenu a permis la mise en évidence de différentes représentations afin de réaliser la synthèse d'observateurs d'état proposés en chapitre 4. Premièrement, la représentation d'un multimodèle incertain a permis la synthèse d'un observateur proportionnel-intégral capable de reconstruire l'état et l'entrée inconnue en présence d'incertitudes paramétriques. Deuxièmement, la représentation d'un multimodèle singulier affecté par des entrées inconnues a permis la mise en évidence des deux échelles de temps du système et la synthèse d'un observateur à entrées inconnues capable de reconstruire l'état en annulant l'effet des entrées inconnues sur l'erreur d'estimation. L'exploitation de ces algorithmes d'estimation d'état dans un contexte de diagnostic de défauts de capteurs et d'actionneurs a été ensuite réalisée.

	Observateur 12				Observateur 13				Observateur 14				Observateur 23				Observateur 24				Observateur 34			
	$r_{1,12}$	$r_{2,12}$	$r_{3,12}$	$r_{4,12}$	$r_{1,13}$	$r_{2,13}$	$r_{3,13}$	$r_{4,13}$	$r_{1,14}$	$r_{2,14}$	$r_{3,14}$	$r_{4,14}$	$r_{1,23}$	$r_{2,23}$	$r_{3,23}$	$r_{4,23}$	$r_{1,24}$	$r_{2,24}$	$r_{3,24}$	$r_{4,24}$	$r_{1,34}$	$r_{2,34}$	$r_{3,34}$	$r_{4,34}$
$\delta_1$	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
$\delta_2$	?	?	?	?	0	1	0	0	0	1	0	0	?	?	?	?	?	?	?	?	0	1	0	0
$\delta_3$	0	0	1	0	?	?	?	?	0	0	1	0	?	?	?	?	0	0	1	0	?	?	?	?
$\delta_4$	0	0	0	1	0	0	0	1	?	?	?	?	0	0	0	1	?	?	?	?	?	?	?	?

Tableau 5.3 – Tableau de signatures théoriques pour la détection de défauts de capteurs avec un schéma DOS utilisant 2 sorties parmi 4

	Observateur 1				Observateur 2				...	Observateur $m$			
	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{3,1}$	$r_{4,1}$	$r_{1,2}$	$r_{2,2}$	$r_{3,2}$	$r_{4,2}$	...	$r_{1,m}$	$r_{2,m}$	$r_{3,m}$	$r_{4,m}$
$\eta_1$	1	1	1	1	0	0	0	0	...	0	0	0	0
$\eta_2$	0	0	0	0	1	1	1	1	...	0	0	0	0
$\vdots$			$\vdots$				$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$	
$\eta_m$	0	0	0	0	0	0	0	0	...	1	1	1	1

Tableau 5.4 – Tableau de signatures théoriques pour la détection de défauts d'actionneurs avec le schéma DOS

	Observateur 1				Observateur 2				...	Observateur $m$			
	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{3,1}$	$r_{4,1}$	$r_{1,2}$	$r_{2,2}$	$r_{3,2}$	$r_{4,2}$	...	$r_{1,m}$	$r_{2,m}$	$r_{3,m}$	$r_{4,m}$
$\eta_1$	0	0	0	0	1	1	1	1	...	1	1	1	1
$\eta_2$	1	1	1	1	0	0	0	0	...	1	1	1	1
$\vdots$			$\vdots$				$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$	
$\eta_m$	1	1	1	1	1	1	1	1	...	0	0	0	0

Tableau 5.5 – Tableau de signatures théoriques pour la détection de défauts d'actionneurs avec le schéma GOS

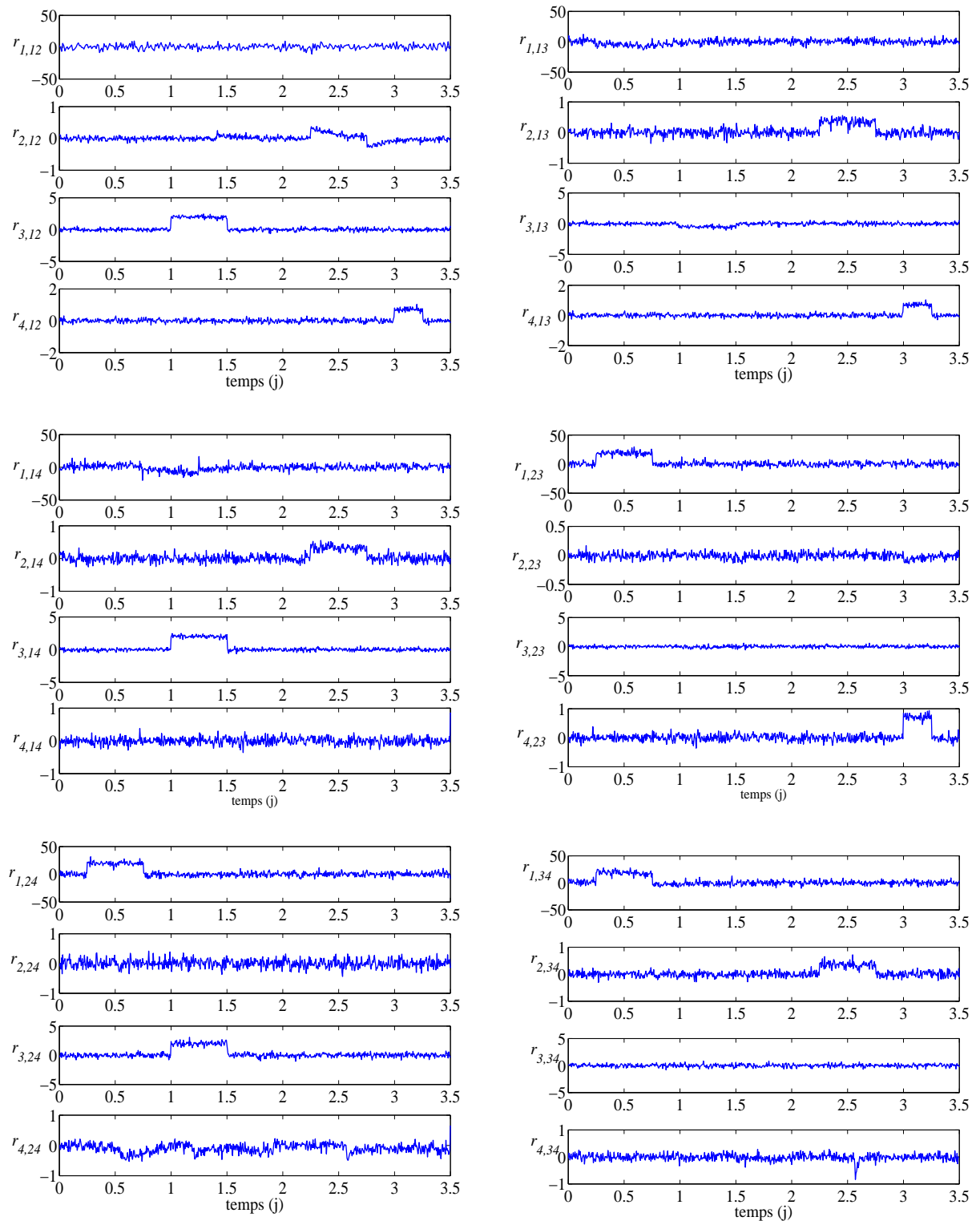


Figure 5.15 – Évolution des résidus en utilisant le schéma DOS (figure 5.10) pour la détection de défauts de capteurs

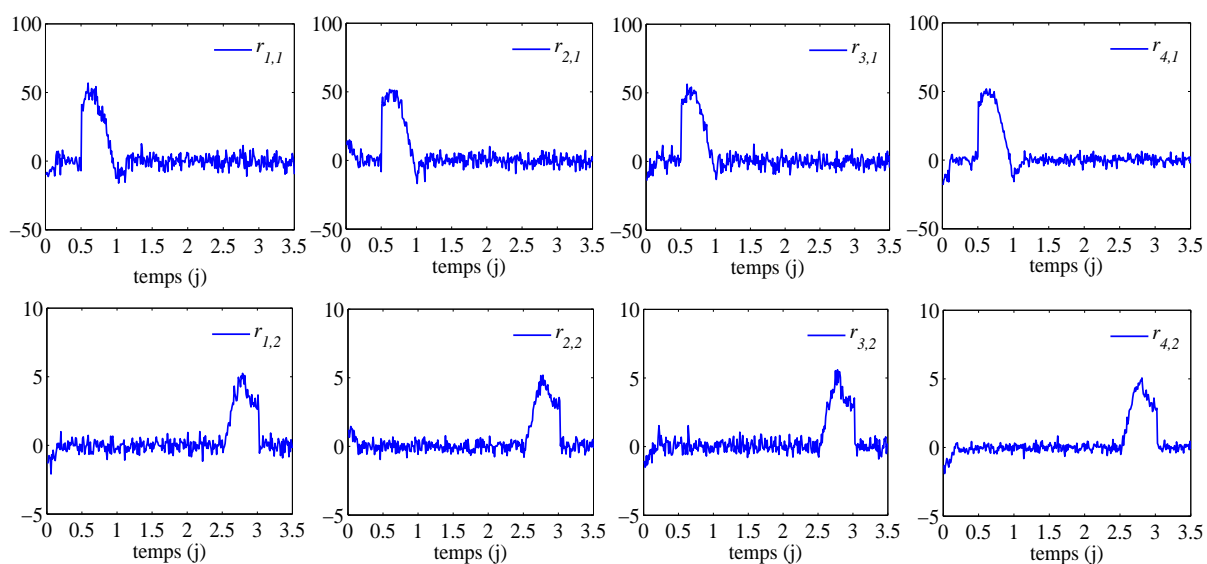


Figure 5.16 – Évolution des résidus en utilisant le schéma DOS (figure 5.11) pour la détection de défauts d'actionneurs

# Conclusion générale et perspectives

*"Il faut toujours faire ce que l'on ne croit pas pouvoir faire."* F.D. Roosevelt

Les résultats proposés à l'issue de ce travail de recherche apportent une contribution relative aux techniques de modélisation et d'estimation d'état et leur application au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles. Dans le contexte de la modélisation, l'approche multimodèle a été choisie pour les nombreux avantages qu'elle apporte au niveau de l'analyse de stabilité et de la synthèse de contrôleurs/observateurs. Cette structure a fait l'objet de nombreuses études dans différents domaines comme l'identification, la commande ou l'estimation d'état. En revanche, le choix de la structure multimodèle la plus adaptée aux études d'observabilité/commandabilité en particulier représente un point peu évoqué dans la littérature. De même, l'aspect concernant son obtention de façon équivalente (sans perte d'information) à partir d'un modèle non linéaire existant est souvent traité de façon succincte et pour des exemples particuliers. Cette méthode permet d'éviter les inconvénients des approches par linéarisation couramment utilisées (choix des points de fonctionnement, choix des variables de prémisses) ont été peu abordés. Ces constats nous ont motivé à accorder plus d'attention à ces problèmes. Le lien qui existe entre le choix des variables de prémisses et le choix de la structure multimodèle, mis en valeur à travers la méthodologie proposée au chapitre 2, nous a permis d'extraire quelques critères de choix d'une forme multimodèle adaptée aux études d'analyse de stabilité et de synthèse d'observateurs performants. Ce résultat représente une des contributions de ce travail [Nagy et al., 2010b,a]. L'application aux modèles des processus réels et en particulier au modèle d'un réacteur biologique a été aussi réalisée [Nagy et al., 2009b].

Dans le contexte de la modélisation d'un processus physique, différentes théories ont été développées, suivant le type et les caractéristiques des modèles. Dans le cas des procédés comportant des échelles de temps différentes, la représentation standard est la forme à perturbations singulières. Cependant, la disponibilité d'une telle représentation est réservée aux cas particuliers, car de nombreux systèmes caractérisés par des échelles de temps différentes ne sont pas modélisés sous la forme singulière standard. Différentes démarches générales ont été proposées, mais elles présentent certains inconvénients tels que : la résolution d'un système algébrique linéaire qui ne constitue pas un point trivial, le respect de certaines contraintes d'ordre structurel qui limite l'application aux systèmes de structure quelconque, l'identification et la séparation des différentes échelles de temps qui sont fortement liées aux contraintes structurelles et qui ne sont pas réalisées de façon systématique, etc. Notre contribution à ce stade a été d'éliminer certains inconvénients en proposant une démarche plus générale d'obtention de la forme singulière standard.

Dans le contexte de l'estimation d'état, la synthèse de trois structures d'observateurs d'état de systèmes représentés par un multimodèle a été réalisée. Les systèmes non linéaires à une seule et également à plusieurs échelles de temps ont fait l'objet de la synthèse d'un observateur d'état [Nagy et al., 2009a; Nagy Kiss et al., 2010]. Le premier observateur, à gain proportionnel-intégral, concerne les systèmes non linéaires caractérisés par une seule échelle de temps, affectés par des entrées inconnues et tient en compte la présence d'incertitudes de modélisation. Il permet d'opérer une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du système au moyen d'une action intégrale améliorant l'estimation d'état. Le deuxième observateur à entrées inconnues est dédié aux systèmes singuliers affectés par des entrées inconnues/perturbations. Il est basé sur la minimisation de l'influence des entrées inconnues sur l'erreur d'estimation. Ces travaux se situent dans le cadre de multimodèles à variables de prémisses non mesurables.

Le chapitre 5 illustre l'application des résultats évoqués dans ce mémoire au modèle ASM1 d'une station d'épuration : la construction d'un multimodèle équivalent au modèle initial choisi en respectant les principes de choix d'une structure adaptée à la synthèse d'un observateur (chapitre 2), étude concluant sur l'existence de deux échelles de temps, leur identification et l'obtention de la forme singulière standard (chapitre 3), la synthèse de deux observateurs exposés en chapitre 4, et finalement la phase de diagnostic à base d'observateurs.

Cette étude basée sur des données générées par un simulateur communément utilisé dans la communauté de traitement des eaux (modèle ASM1, de dimension 11) montre des résultats encourageants quant à l'application des méthodes proposées pour le diagnostic de STEP en vue de détecter et localiser des défaillances capteurs ou actionneurs.

Les résultats proposés dans cette thèse ouvrent un certain nombre de perspectives :

- la simplification de modèles a été réalisée dans ce mémoire par une réécriture exacte du modèle non linéaire sous forme multimodèle sans réduction d'ordre du multimodèle. Une autre approche pouvant être envisagée consiste à réduire l'ordre du système en utilisant l'approche  $\mathcal{L}_2$  ; cela consiste à chercher un multimodèle d'ordre réduit pour un modèle initial en minimisant l'erreur de sortie entre les deux modèles. Cette méthode ne fournirait pas d'information a priori concernant le gain  $\mathcal{L}_2$  de l'erreur d'approximation mais ce gain serait obtenu simultanément avec les matrices définissant le modèle d'ordre réduit, comme résultat du processus d'optimisation. Avec cet indicateur quantitatif, on pourrait apprécier a posteriori si l'ordre du système réduit est suffisant pour avoir une approximation précise du système original.
- la construction d'un observateur à gain proportionnel multi-intégral (en remplaçant la seule action intégrale par une chaîne d'actions intégrales) permettant de prendre en compte des formes plus générales d'entrées inconnues.
- les résultats obtenus pour l'estimation d'état s'appuient sur ceux existants pour la stabilité puisque la synthèse d'un observateur se réduit à prouver la stabilité (ou la bornitude) du système générateur de l'erreur d'estimation. De ce fait, il serait intéressant d'utiliser les résultats les plus récents concernant la stabilité des MMs (plutôt que la recherche de fonctions de Lyapunov quadratiques). Par exemple, le résultat proposé par [Sala et Arino, 2007] basé sur le théorème de Polya conduit à des conditions asymptotiquement

---

nécessaires et suffisantes. Une autre approche consiste à utiliser l'idée des fonctions de Lyapunov non-monotones qui autorisent une décroissance non uniforme de ces fonctions [Kruszewski et al., 2009].

- l'extension des résultats obtenus dans le cadre de l'application de l'estimation et du diagnostic de STEP avec le modèle ASM1 à six états au modèle complet.





# Annexes





## Schémas des structures en série et en parallèle

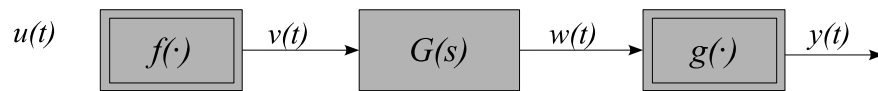


Figure A.1 – Structure de type Hammerstein-Wiener

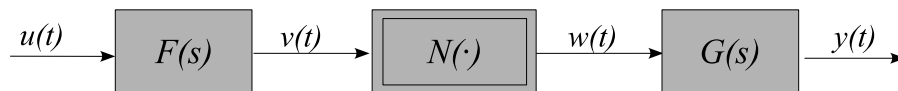


Figure A.2 – Structure de type Wiener-Hammerstein

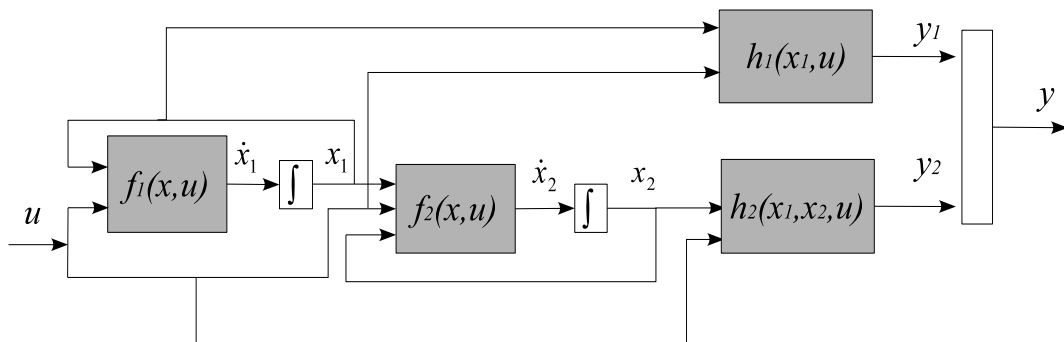


Figure A.3 – Systèmes dynamiques non linéaires avec structure en cascade

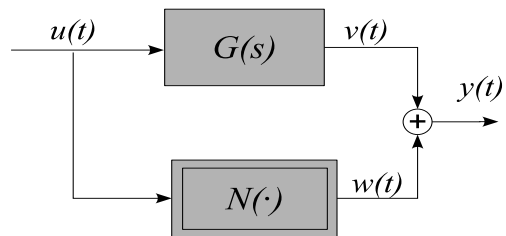


Figure A.4 – Schéma structure en parallèle

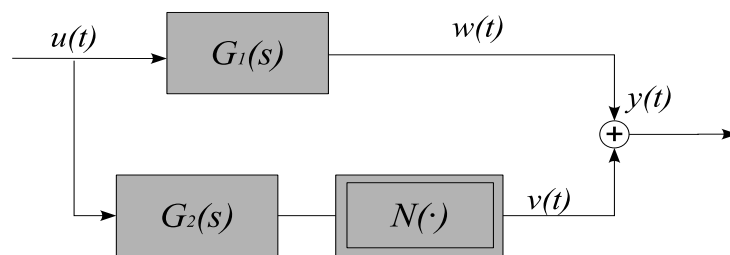


Figure A.5 – Schéma d'une structure parallèle : bloc linéaire et modèle Wiener

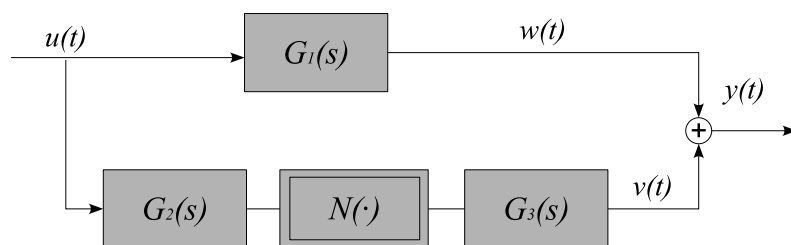


Figure A.6 – Schéma d'une structure parallèle : bloc linéaire et modèle Wiener-Hammerstein

# Bibliographie

- Aboki, C., Sallet, G., et Vivalda, J.-C. (2002). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *International Journal of Control*, 75 :204–212.
- Abonyi, J., Babuska, R., et Szeifert, F. (2002). Modified Gath-Geva fuzzy clustering for identification of Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 32(5) :612–621.
- Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., et Maquin, D. (2004). Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model. In *11<sup>th</sup> IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM*, Nancy, France.
- Alex, J., Beteau, J. F., Copp, J. B., Hellinga, C., Jeppsson, U., Marsili-Libelli, S., Pons, M. N., Spanjers, H., et Vanhooren, H. (1999). Benchmark for evaluating control strategies in wastewater treatment plants. In *European Control Conference*, Karlsruhe, Germany.
- Andersson, L., Rantzer, A., et Beck, C. (1996). Model comparison and simplification. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(3) :157–181.
- Andrews, J. F. (1969). Dynamic model of the anaerobic digestion process. *Journal of the Sanitary Engineering Division, American Society of Civil Engineers*, 95(1) :95–116.
- Angelis, G. Z. (2001). *System Analysis, Modeling and Control with Polytopic Linear Models*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Pays Bas.
- Arcak, M. et Kokotovic, P. (2001). Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12) :1923–1930.
- Bara, G. I. (2001). *Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- Bastin, G. et Gevers, M. R. (1988). Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 :650–658.
- Baumann, W. T. (1988). Feedback control of multi-input nonlinear systems by extended linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 193–197 :33.
- Baumann, W. T. et Rugh, W. J. (1986). Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40–45 :31.

- Bergsten, P. et Palm, R. (2000). Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems. In *9<sup>th</sup> IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Antonio, Texas, USA.
- Bergsten, P., Palm, R., et Driankov, D. (2001). Fuzzy observers. In *10<sup>th</sup> IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pages 700–703, Melbourne, Australia.
- Bergsten, P., Palm, R., et Driankov, D. (2002). Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 32 :114–121.
- Besançon, G. (2007). *Nonlinear observers and Applications*. Springer.
- Bestle, D. et Zeitz, M. (1983). Canonical form observer design for nonlinear time variable systems. *International Journal of Control*, 38 :419–425.
- Birk, D. et Zeitz, M. (1988). Extended Luenberger observer for nonlinear multi-variable systems. *International Journal of Control*, 47 :1823–1836.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., Staroswiecki, M., et Schröder, J. (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Bornard, G., Celle-Couenne, F., et Gilles, G. (1993). *Systèmes non linéaires, Tome 1*, chapter Observabilité et observateurs, pages 177–221. Masson.
- Bornard, G. et Hammouri, H. (1991). A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Brighton, Great Britain.
- Borne, P. et Benrejeb, M. (2008). On the representation and the stability study of large scale systems. *International Journal of Computers, Communications & Control*, 3 :55–66.
- Boudrant, J., Corrieu, G., et Coulet, P. (1994). *Capteurs et mesures en biotechnologie*. Lavoisier, Paris.
- Boukroune, A., M'Saad, M., et Farza, M. (2010a). Adaptive fuzzy controller for multivariable nonlinear state time-varying delay systems subject to input nonlinearities. *Fuzzy Sets and Systems*, In Press.
- Boukroune, A., Tadjine, M., M'Saad, M., et Farza, M. (2008). How to design a fuzzy adaptive controller based on observers for uncertain affine nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(8) :926–948. Theme : Fuzzy and Non-Linear Control.
- Boukroune, A., Tadjine, M., M'Saad, M., et Farza, M. (2010b). Fuzzy adaptive controller for MIMO nonlinear systems with known and unknown control direction. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(6) :797–820. Theme : Fuzzy Control.
- Boukroune, B. (2009). A nonlinear observer design for an activated sludge wastewater treatment process. *Journal of Process Control*, 19 :1558–1565.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*. Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia.

- 
- Cadet, C., Béteau, J. F., et Carlos Hernandez, S. (2004). Multicriteria control strategy for cost/quality compromise in wastewater treatment plants. *Control Engineering Practice*, 12(3) :335–347.
- Canler, J. P., Perret, J. M., Duchene, P., et Cotteux, E. (1999). Aide au diagnostic des stations d'épuration par l'observation microscopique des boues activées. Technical report, Cemagref, France.
- Cassar, J. P., Staroswiecki, M., et Ferhati, R. (1992). Multivalued logic voting scheme for residual evaluation in failure detection and isolation systems. *Annual Review in Automatic Programming*, 17 :267–272. Artificial Intelligence in Real-time Control 1992, Selected Papers from the IFAC/IFIP/IMACS Symposium.
- Chachuat, B., Roche, N., et Latifi, R. (2003). Reduction of the ASM1 Model for Optimal Control of Small-Size Activated Sludge Treatment Plants. *Revue des Sciences de l'Eau*, 16(1) :5–26. In french.
- Chadli, M. (2002). *Stabilité et commande des Systèmes décrits par des Multimodèles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- Chadli, M., Maquin, D., et Ragot, J. (2001). On the stability analysis of multiple model systems. In *European Conference Control*, pages 1894–1899, Porto, Portugal.
- Chen, W. et Saif, M. (2006). Output estimator based fault detection, isolation and estimation for systems with unmatched unknown inputs. In *IEEE Joint CCA/CACSD/ISIC*, Munich, Germany.
- Chen, W. et Saif, M. (2007). Design of a TS based fuzzy nonlinear unknown observer with fault diagnosis applications. In *American Control Conference*, New York, USA.
- Chilali, M. et Gahinet, P. (1996).  $H_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367.
- Coreless, M. et Leitmann, G. (1981). Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 :1139–1143.
- Corless, M. et Tu, J. (1998). State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica*, 34(6) :757–764.
- Dai, L. (1989). *Singular Control Systems*. Number 118 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag.
- Darouach, M., Zasadzinski, M., et Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3) :606–609.
- Dawson, D. M., Qu, Z., et Carroll, J. C. (1992). On the state estimation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamic systems. *Systems & Control Letters*, 18 :217–222.



- Decarlo, R. et Saeks, R. (1979). A root locus technique for interconnected systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 9(1) :53–55.
- Dochain, D. (2003). State and parameter estimation in chemical and biochemical processes : a tutorial. *Journal of Process Control*, 13 :801–818.
- Dochain, D. et Vanrolleghem, P. A. (2001). *Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes*. IWA Publishing, Alliance House, 12 Caxton Street, London SW1H 0QS, England, 1<sup>st</sup> edition.
- Dolgin, Y. et Zeheb, E. (2005). Model reduction of uncertain systems retaining the uncertainty structure. *Systems & Control Letters*, 54 :771–779.
- Dong, G. Q., Jakobowski, L., Iafolla, M. A. J., et McMillen, D. R. (2007). Simplification of stochastic chemical reaction models with fast and slow dynamics. *Journal of Biological Physics*, 33(1) :67–95.
- Dubuisson, B. (1990). *Diagnostic et reconnaissance des formes*. Hermès, Paris.
- Fang, C.-H., Liu, Y.-S., Kau, S.-W., Hong, L., et Lee, C.-H. (2006). A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3) :386–397.
- Farza, M., M'Saad, M., Maatoug, T., et Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10) :2292–2299.
- Filev, D. (1991). Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3) :281–290.
- Gaddouna, B., Maquin, D., et Ragot, J. (1994). Fault detection observers for systems with unknown inputs. In *2<sup>th</sup> IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Espoo, Finland.
- Gauthier, J. P. et Bornard, G. (1981). Observability for any  $u(t)$  of a class of bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 :922–926.
- Gauthier, J. P., Hammouri, H., et Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :875–880.
- Gauthier, J. P. et Kupka, I. A. K. (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 32 :975–994.
- Ge, S. S. (2001). *Stable Adaptive Neural Network Control*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA.
- Gertler, J. (1998). *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker, New York.

- 
- Glumineau, A., Moog, C., et Plestan, F. (1996). New algebro-geometric conditions for the linearization by input-output injection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(4) :598–603.
- Guerra, T. M., Kruszewski, A., et Bernal, M. (2009). Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(3) :724–731.
- Guerra, T. M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., et Tirmant, H. (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the takagi-sugeno's form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1248–1259. Fuzzy Concepts Applied to Food Control Quality Control.
- Gujer, W., Henze, M., Loosdrecht, M., et Mino, T. (1999). Activated Sludge Model no.3. *Water Science and Technology*, 39(1) :183–193.
- Harris, C. J., Wu, Z. Q., et Gan, Q. (1999). Neurofuzzy state estimators and their applications. *Annual Reviews in Control*, 23 :149–158.
- Henze, M., Gujer, W., Mino, T., Matsuo, T., Wentzel, M., et Marais, G. v. R. (1994). Activated sludge model no. 2. Technical Report 1, I.A.W.Q., London, U.K.
- Henze, M., Gujer, W., Mino, T., Matsuo, T., Wetzels, M. C., Marais, G., et Van Loosdrecht, M. C. (1999). Activated sludge process model no. 2d. *Water Science and Technology*, 39(1) :165–182.
- Henze, M., Leslie Grady Jr, C. P., Gujer, W., Marais, G. v. R., et Matsuo, T. (1987). Activated Sludge Model no.1. Technical Report 1, I.A.W.Q., London, UK.
- Herman, R. et Krener, A. J. (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :728–740.
- Hetherington, J. P. J., Warner, A., et Seymour, R. M. (2006). Simplification and its consequences in biological modelling : conclusions from a study of calcium oscillations in hepatocytes. *Journal of the Royal Society Interface*, 3(7) :319–331.
- Heuberger, P. S. C., Van den Hof, P. M. J., et Wahlberg, B. (2005). *Modeling and Identification with Rational Orthonormal Basis Functions*. Springer Verlag.
- Hou, M. et Muller, P. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :871–875.
- Hou, M. et Patton, R. J. (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34(6) :789–794.
- Huang, Y. et Jadbabaie, A. (1999). Nonlinear  $H_\infty$  control : An enhanced quasi-LPV approach. In *IFAC World Congress*, pages 85–90, Beijing, Chine.
- Ibrir, S. (2007). Circle-criterion approach to discrete-time nonlinear observer design. *Automatica*, 43(8) :1432–1441.

- Ichalal, D. (2009). *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2008a). Design of observers for Takagi-Sugeno systems with immeasurable premise variables : an  $\mathcal{L}_2$  approach. In *17<sup>th</sup> World Congress. The International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2008b). Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. In *5<sup>ème</sup> Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bucarest, Roumanie.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2009a). An approach for the state estimation of Takagi-Sugeno models and application to sensor fault diagnosis. In *48<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2009b). Simultaneous state and unknown inputs estimation with PI and PMI observers for Takagi-Sugeno model with unmeasurable premise variables. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*, Thessalonique, Grèce.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2009c). State estimation of nonlinear systems using multiple model approach. In *American Control Conference*, St. Louis, Missouri, USA.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2010). State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables. *IET Control Theory & Applications*, 4(5) :897–908.
- Isermann, R. (2006). *Fault-Diagnosis Systems. An introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, London, 3<sup>ème</sup> édition.
- Isidori, A. (2000). *Nonlinear Control Systems II*. Springer-Verlag, London, UK.
- Itkis, V. (1976). *Control Systems of Variable Structure*. John Wiley, New York, USA.
- Jang, J.-S. et Sun, C.-T. (1993). Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 4(1) :156–159.
- Jazwinski, A. H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, volume 64. Mathematics in Science and Engineering.
- Jia, L., Chiu, M.-S., et Ge, S. S. (2005). A noniterative neuro-fuzzy based identification method for Hammerstein processes. *Journal of Process Control*, 15(7) :749–761.
- Johansen, T., Shorten, R., et Murray-Smith, R. (2000). On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3) :297–313.
- Johansson, M. (1999). *Piecewise linear control systems*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, Sweden.

- 
- Julien, S. (1997). *Modélisation et estimation pour le contrôle d'un procédé boues activées éliminant l'azote des eaux résiduaires urbaines*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France.
- Jurado, F. (2006). Predictive control of solid oxide fuel cells using fuzzy Hammerstein models. *Journal of Power Sources*, 158(1) :245–253.
- Kaczorek, T. (1979). Proportional integral observers for linear multivariable time-varying systems. *Regelungstechnik*, 27 :359–362.
- Kahargonekar, P., Petersen, I. A., et Zhou, K. (1990). Robust stabilisation of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3) :356–361.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice-Hall, Inc.
- Kalman, R. E. et Bucy, R. (1960). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering D*, 82 :35–40.
- Kanev, S. et Verhaegen, M. (2006). Multiple model weight estimation for models with no common state. In *6<sup>th</sup> IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, pages 637–642, Beijing, China.
- Kazantzis, N. et Kravaris, C. (1998). Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34 :241–247.
- Keller, H. (1987). Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. *International Journal of Control*, 46(6) :1915–1930.
- Kikuchi, H., Otake, A., et Nakanishi, S. (1988). Functional completeness of hierarchical fuzzy modeling. *Information Sciences*, 110 :51–61.
- Koenig, D. et Mammar, S. (2002). Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12) :2057–2062.
- Korbitz, J., Koscielny, J., Kowalczyk, Z., et Cholewa, W. (2004). *Fault diagnosis : Models, Artificial Intelligence, Applications*. Springer.
- Kosko, B. (1994). Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*, 43 :1329–1333.
- Kovács, L., Borbély, E., et Benyó, Z. (2007). Optimal control of the three tank system in  $H_2/H_\infty$  space. In *5<sup>th</sup> Slovakian-Hungarian Joint Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics*, Poprad, Slovakia.
- Kreisselmeier, G. (1977). Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :2–8.
- Krener, A. et Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3 :47–52.

- Kruszewski, A. (2006). *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. PhD thesis, L'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.
- Kruszewski, A., Sala, A., Guerra, T. M., et Arino, C. V. (2009). A triangulation approach to asymptotically exact conditions for fuzzy summations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(5) :985–994.
- Kumar, A., Christofides, P. D., et Daoutidis, P. (1998). Singular perturbation modeling of nonlinear processes with nonexplicit time-scale multiplicity. *Chemical Engineering Science*, 53(8) :1491–1504.
- Labiod, S. et Guerra, T. M. (2007). Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(10) :1126–1137.
- Leith, D. J. et Leithead, W. E. (1999). Analytic framework for blended multiple model systems using linear local models. *International Journal of Control*, 72(7) :605–619.
- Leith, D. J., Leithead, W. E., Solak, E., et Murray-Smith, R. (2002). Divide & conquer identification using gaussian process priors. In *4<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 624–629, Las Vegas, Nevada, USA.
- Levine, J. et Marino, R. (1986). Nonlinear system immersion, observers and finite dimensional filters. *Systems & Control Letters*, 7 :133–142.
- Li, L.-L., Zhou, D.-H., et Wang, L. (2007). Fault diagnosis of nonlinear systems based on hybrid PSOSA optimization algorithm. *International Journal of Automation and Computing*, 2 :183–188.
- Liapounoff, A. (1907). Problème général de la stabilité du mouvement. In *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, number 9, pages 203–474. Traduction en français du mémoire Russe.
- Liu, P. et Li, H. (2005). Hierarchical TS fuzzy system and its universal approximation. *Information Sciences*, 169 :279–303.
- Luders, G. et Narendra, K. S. (1973). An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18 :496–499.
- Luenberger, D. G. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 :592–602.
- Lynch, A. et Bortoff, S. (2001). Nonlinear observers with approximately linear error dynamics. the multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(6) :927–932.
- Maquin, D. et Ragot, J. (2000). *Diagnostic des systèmes linéaires. Collection Pédagogique d'Automatique*. Hermès Science Publications, Paris.
- Marais, G. v. R. et Ekama, G. (1976). The activated sludge process : Part I - steady state behaviour. *Water SA*, 2 :163–200.

- 
- Marino, R., Santosuosso, L., et Tomei, P. (2001). Robust adaptive for nonlinear systems with bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46 :967–972.
- Marino, R. et Tomei, P. (1992). Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1239–1245.
- Marino, R. et Tomei, P. (1995). Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40 :1300–1304.
- Marx, B., Koenig, D., et Georges, D. (2003). Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers. In *42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, Etats Unis.
- Marx, B., Koenig, D., et Ragot, J. (2007). Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis. *IET Control Theory and Applications*, 1(5) :1487–1495.
- Marx, B. et Ragot, J. (2008). Stability and  $\mathcal{L}_2$ -Norm bound conditions for Takagi-Sugeno Descriptor Systems. In *IFAC World Congress*, Seoul, Korea.
- McLoone, S. (2000). *Nonlinear identification using local model networks*. PhD thesis, Queen's University Belfast, Royaume-Uni.
- Michalska, H. et Mayne, D. Q. (1995). Moving horizon observers and observer-based control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40 :995–1006.
- Mihaylova, L., Lampaert, V., Bruyninckx, H., et Swevers, J. (2001). Identification of hysteresis functions using a multiple model approach. In *International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, pages 153–158, Germany.
- Monod, J. (1942). The growth of bacterial cultures. *Annual Review of Microbiology*, 3 :371–394.
- Mourot, G., Gasso, K., et Ragot, J. (1999). Modelling of ozone concentrations using a Takagi-Sugeno model. *Control Engineering Practice*, 7(6) :707–715.
- M'Saad, M. et Hejda, I. (1994). Partial state reference model (adaptive) control of a benchmark example. *Automatica*, 30(4) :605–613.
- M'Saad, M., Landau, I. D., et Samaan, M. (1990). Further evaluation of partial, state model reference adaptive design. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 4(2) :133–148.
- Mulas, M., Tronci, S., et Baratti, R. (2007). Development of a 4-measurable states activated sludge process model deduced from the ASM1. In *8<sup>th</sup> International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, volume 1, pages 213–218, Cancun, Mexico.
- Murphey, T. D. et Burdick, J. W. (2002). Nonsmooth controllability theory and an example. In *4<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 370–376, Las Vegas, Nevada, USA.

- Murray-Smith, R. et Johansen, T. A. (1997). *Multiple model approaches to modeling and control*. Taylor & Francis, London.
- Nagy, A. M., Marx, B., Mourot, G., Ragot, J., et G., S. (2009a). State estimation of the three-tank system using a multiple model. In *48<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pages 7795–7800, Shanghai, China.
- Nagy, A. M., Mourot, G., Marx, B., Ragot, J., et G., S. (2010a). Modélisation d'un réacteur biologique à l'aide d'une structure multimodèle. méthode analytique d'obtention d'un multimodèle. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 44(4-5) :423–443.
- Nagy, A. M., Mourot, G., Marx, B., Schutz, G., et Ragot, J. (2010b). Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(6) :2790–2799.
- Nagy, A. M., Mourot, G., Ragot, J., Schutz, G., et Gillé, S. (2009b). Model structure simplification of a biological reactor. In *15<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification, SYSID*, Saint Malo, France.
- Nagy Kiss, A. M., Marx, B., Mourot, G., Schutz, G., et Ragot, J. (2010). State estimation of two-time scale multiple models with unmeasurable premise variables. application to biological reactors. In *49<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, Georgia USA.
- Nam, K. (1997). An approximate nonlinear observer with polynomial coordinate transformation maps. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :522–527.
- Nicosia, S., Tomei, P., et Tornambè, A. (1989). A nonlinear observer for elastic robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(1) :45–52.
- Ohtake, H., Tanaka, K., et Wang, H. O. (2001). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. In *Joint 9<sup>th</sup> IFSA World Congress and 20<sup>th</sup> NAFIPS International Conference*, Vancouver, Canada.
- Olsson, G. et Newell, B. (1999). *Wastewater Treatment Systems. Modelling, Diagnosis and Control*. IWA Publishing.
- O'Malley, J. et Robert, E. (1991). *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, USA.
- Orjuela, R. (2008). *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2008). State estimation for nonlinear systems using decoupled multiple model. *International Journal of Modelling Identification and Control*, 4(1) :59–67.
- Patton, R. J., Chen, J., et Lopez-Toribio, C. (1998). Fuzzy observers for non-linear dynamic systems fault diagnosis. In *37<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA.

- 
- Patton, R. J. et Frank, P. M. (2000). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer.
- Pekpe, K. M., Cassar, J.-P., et Cheniker, S. (2007). Identification of Takagi-Sugeno model of a bioreactor. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, London, UK. Imperial College.
- Pertew, A. M., Marquez, H. J., et Zhao, Q. (2005).  $H_\infty$  synthesis of unknown input observers for nonlinear Lipschitz systems. *International Journal of Control*, 78(15) :1155–1165.
- Pertew, A. M., Marquez, H. J., et Zhao, Q. (2006).  $H_\infty$  observer design for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51 :1211–1216.
- Petersen, E. E. (1965). *Chemical Reaction Analysis*. Prentice Hall Inc., New Jersey (USA).
- Petzold, L. et Zhu, W. (1999). Model reduction for chemical kinetics : An optimization approach. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 45(4) :869–886.
- Phelps, A. (1991). On constructioning nonlinear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 29(3) :516–534.
- Plestan, F. (1995). *Linéarisation par injection d'Entrée-Sortie Généralisée et synthèse d'observateurs*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, France.
- Raghavan, S. et Hedrick, K. (1994). Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59 :515–528.
- Ragot, J., Grapin, G., Chatellier, P., et Colin, F. (2001). Modelling of a water treatment plant. a multi-model representation. *Environmetrics*, 12(7) :599–611.
- Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3) :397–401.
- Rajamani, R. et Cho, Y. M. (1998). Existence and design of observers for nonlinear systems : relation to distance to unobservability. *International Journal of Control*, 69 :717–731.
- Raju, G. V. S. et Zhou, J. and Kisner, R. A. (1991). Hierarchical fuzzy control. *International Journal of Control*, 54 :1201–1216.
- Rapaport, A. et Dochain, D. (2005). Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs. *Mathematical Biosciences*, 193 :235–253.
- Rewienski, M. J. (2003). *A trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction of Nonlinear Dynamical Systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA.
- Robertson, G. A. (1992). *Mathematical Modelling of Startup and Shutdown Operation of Process Plants*. PhD thesis, The University of Queensland, Brisbane, QLD, Australia.
- Rodrigues, M. (2005). *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy, France.



- Sala, A. et Arino, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(4) :2671–2686.
- Sayesel, A. K. et Barlas, Y. (2006). Model simplification and validation with indirect structure validity tests. *System Dynamics Reviews*, 22(3) :241–262.
- Söffker, D. (2005). *New results of the development and application of robust observers to elastic mechanical structure*, volume 130, pages 319–330. Springer, Berlin edition.
- Shamma, J. S. et Cloutier, J. R. (1993). Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 16(2) :256–263.
- Slotine, J.-J. E. (1984). Sliding controller design for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 40 :421–434.
- Smets, I. Y., Haegebaert, J. V., Carrette, R., et Van Impe, J. F. (2003). Linearization of the activated sludge model ASM1 for fast and reliable predictions. *Water Research*, 37 :1831–1851.
- Smets, I. Y., Verdickt, L., et Van Impe, J. (2006). A linear ASM1 based multi-model for activated sludge systems. *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems*, 12(5) :489–503.
- Sontag, E. (1981). Nonlinear regulation : The piecewise linear approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :346–358.
- Sperandio, M. (1998). *Développement d'une procédure de compartimentation d'une eau résiduaire urbaine et application à la modélisation dynamique de procédés à boues activées*. PhD thesis, INSA Toulouse, France.
- Spurgeon, S. K. (2008). Sliding mode observers : a survey. *International Journal of Systems Science*, 39(8) :751–764.
- Steffens, M. A., Lant, P. A., et Newell, R. B. (1997). A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment models. *Water Research*, 31(3) :590–606.
- Takagi, T. et Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15 :166–172.
- Tanaka, K., Hori, T., et Wang, H. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4) :582–589.
- Tanaka, K., Ikeda, T., et Wang, H. O. (1996). Robust stabilisation of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : Quadratic stability,  $H_\infty$  control theory and LMIs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :1–12.

- 
- Tanaka, K., Ohtake, H., et Wang, H. O. (2007). A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15 :333–341.
- Tanaka, K. et Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control System Design and analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons Inc.
- Tharault, Y. (2008). *Diagnostic de fonctionnement par analyse en composantes principales : Application à une station de traitement des eaux usées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- Thau, F. E. (1973). Observing the state of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 17 :471–479.
- Thomann, R. V. (1963). Mathematical model for dissolved oxygen. *Journal of the Sanitary Engineering Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 89(5) :1–30.
- Ticlea, A. (2006). *Techniques d’immersion pour l’estimation non linéaire : Application aux systèmes de puissance*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France.
- Toth, R. (2008). *Modeling and identification of linear parameter-varying systems. An Orthogonal Basis Function approach*. PhD thesis, Technisch Universiteit Delft, Pays Bas.
- Toth, R., Heuberger, P. S. C., et Van der Hof, P. M. J. (2009a). Asymptotically optimal orthogonal basis functions for LPV systems. *Automatica*, 45 :1359–1370.
- Toth, R., Lovera, M., Heuberger, P. S. C., et Van den Hof, P. M. J. (2009b). Discretization of linear fractional representations of LPV systems. In *48<sup>th</sup> Conference on Decision and Control and 28<sup>th</sup> Chinese Control Conference*, Shanghai, China.
- Tsinias, J. (1989). Observer design for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 13(2) :135–142.
- Tsinias, J. (1990). Further results on the observer design problem. *Systems & Control Letters*, 14(5) :411–418.
- Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., et Yamamoto, Y. (2001). Parametrized linear matrix inequalities techniques in fuzzy control design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2) :324–332.
- Uppal, F. J., Patton, R. J., et Witczak, M. (2006). A neuro-fuzzy multiple-model observer approach to robust fault diagnosis based on the DAMADICS benchmark problem. *Control Engineering Practice*, 14(6) :699–717.
- Utkin, V. I. (1977). Variable structure systems with sliding mode : a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :212–222.
- Van Breusegem, V. et Bastin, G. (1991). Reduced order dynamical modelling of reaction systems : a singular perturbation approach. In *30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1049–1054, Brighton, UK.

- Van der Schaft, A. (1992).  $\mathcal{L}_2$  - gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :770–784.
- Van Haandel, A. C., Ekama, G. A., et Marais, G. v. R. (1981). The activated sludge process : Part 3 - single sludge denitrification. *Water Research*, 15 :1135–1152.
- Vora, N. P., Contou-Carrere, M.-N., et Daoutidis, P. (2006). *Model Reduction and Coarse-Graining Approaches for Multiscale Phenomena*, chapter Model Reduction of Multiple Time Scale Processes in Non-standard Singularly Perturbed Form, pages 99–113. Springer Berlin Heidelberg.
- Vörös, J. (2007). Parameter identification of Wiener systems with multisegment piecewise-linear nonlinearities. *Systems & Control Letters*, 56(2) :99–105.
- Walcott, B., Coreless, M., et Zak, S. (1987). Comparative study of nonlinear observation techniques. *International Journal of Control*, 45 :2109–2132.
- Wang, D. et Ding, F. (2008). Extended stochastic gradient identification algorithms for Hammerstein-Wiener ARMAX systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(12) :3157–3164.
- Wang, H. and Yang, G.-H. (2008). Fault estimations for linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Systems, Control and Communications*, 1(1) :53–71.
- Wang, H. O., Tanaka, K., et Griffin, M. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :14–23.
- Wang, L. X. (1998). Universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Fuzzy Sets Systems*, 93 :223–230.
- Wasynczuk, O. et Decarlo, R. A. (1981). The component connection model and structure preserving model order reduction. *Automatica*, 17(4) :619–626.
- Weijers, S. R. (2000). *Modelling, identification and control of activated sludge plants for nitrogen removal*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Pays Bas.
- Weinmann, A. (1991). *Uncertain models and Robust Control*. Springer-Verlag Wien, New York.
- Xiong, Y. et Saif, M. (2003). Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 39(8) :1389–1398.
- Yang, F. et Wilde, R. (1988). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(2) :677–681.
- Yang, R., Lu, L., et Xie, L. (2005). Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time systems with polytopic uncertainties via dynamic output feedback. *International Journal of Control*, 78(16) :1285–1294.

- 
- Yeh, J.-P. (2007). Identifying chaotic systems using a fuzzy model coupled with a linear plant. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(3) :1178–1187.
- Yoneyama, J. (2009).  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables : An uncertain system approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(12) :1738–1748.
- Zhang, Q. et Xu, A. (2001). Global adaptive observers for a class of nonlinear systems. In *40<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, pages 3360–3366, Orlando, Florida, USA.
- Zimmer, G. (1994). State observation by on-line minimization. *International Journal of Control*, 60 :595–606.
- Zinober, A. et Owens, D. (2001). *Nonlinear and adaptive control*. Springer.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur Jean-Philippe CASSAR, Professeur, USTL, IAAL, Villeneuve d'Ascq**

**Monsieur Mohammed M'SAAD, Professeur, ENSICAEN, Caen**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur NAGY Anca Maria épouse KISS**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station  
d'épuration"**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

en "Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique"

Fait à Vandoeuvre, le 10 novembre 2010

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT



NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET-DE-HAYE  
BOITE POSTALE 3  
F - 5 4 5 0 1  
VANDŒUVRE CEDEX

## Résumé

Cette thèse traite de l'analyse et de la synthèse de multimodèles pour la simplification de modèles, l'estimation d'état et le diagnostic des systèmes non linéaires caractérisés par une ou plusieurs échelles de temps. Ces travaux visent, dans un premier temps, à développer une procédure systématique de transformation d'un système non-linéaire en le réécrivant sous une forme multimodèle, en évitant quelques inconvénients majeurs : la transformation est réalisée sans perte d'information, le choix de différents points de fonctionnement n'est plus nécessaire, le choix de variables de prémisses est réalisé d'une façon systématique. De plus, la méthode offre le choix entre différents multimodèles. Ce degré de liberté sera utilisé pour faciliter les études de contrôlabilité, d'observabilité et d'analyse de stabilité. Dans un deuxième temps, l'obtention de la forme à perturbations singulières d'un système non linéaire est proposée, en éliminant quelques contraintes structurelles et en rendant l'identification et la séparation des échelles de temps indépendante de la structure du modèle. Dans un troisième temps, la synthèse de plusieurs observateurs robustes vis-à-vis des perturbations, des erreurs de modélisation et des entrées inconnues a été réalisée afin de reconstruire l'état et l'entrée inconnue du système. La difficulté de cette étude provient du fait que le multimodèle utilisé dépend de variables de prémisses non mesurables, situation qui n'est pas intensivement étudiée, alors qu'elle est naturellement issue de l'approche par transformation *système non linéaire* → *multimodèle*. Ensuite, le diagnostic de défauts de systèmes est réalisé au moyen de bancs d'observateur à entrées inconnues permettant la génération et la structuration de résidus indicateurs de défauts. Finalement, tous les travaux proposés sont appliqués au modèle d'une station d'épuration, Activated Sludge Model No.1, qui est largement utilisé dans le domaine du traitement des eaux usées.

**Mots-clés** . Diagnostic, multimodèle, estimation d'état, système non linéaire, modélisation, système à perturbations singulières, station d'épuration.

## Abstract

This thesis deals with analysis and synthesis of multiple model structures for model simplification, state estimation and diagnosis of nonlinear systems represented by one or several time-scales. This work aims, at first, to develop a systematic procedure to transform a nonlinear system into a multiple model form, by avoiding some major drawbacks : the transformation causes no information loss, the choice of the different operating points is no more necessary, the choice of the premise variables is realized in a more systematic way. Furthermore, the method gives the possibility of choosing between different multiple model structures. This degree of freedom will be used to ease the controllability, observability, stability analysis studies. Secondly, the derivation of a singularly perturbed form for a multiple time scale non linear system is proposed, by eliminating some structural constraints and by making the identification and the separation of the time-scales independent to the model structure. Thirdly, the robust observer synthesis with respect to perturbations, modeling errors and unknown inputs are presented for state and unknown input estimation. The difficulty of these studies comes from the fact that the multiple model depends on unmeasurable premise variables, this case being not intensively studied, whereas it results naturally from the method of transformation *nonlinear system - multiple model*. Afterward, fault diagnosis is performed using banks of observer to generate and structure residual signals. Finally, this works are applied to a model of wastewater treatment plant, Activated Sludge Model No.1 (ASM1) that is largely used in the concerned field.

**Keywords** . diagnosis, multiple model, state estimation, nonlinear system, modeling, singularly perturbed system, wastewater treatment plant.