

Influence des perturbations géométriques de domaines sur les solutions d'équations aux dérivées partielles

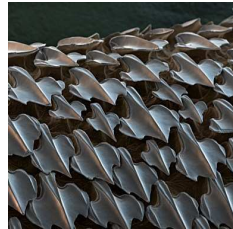
Matthieu Bonnard

30 novembre 2010



Motivation

Une paroi rugueuse peut-elle améliorer le déplacement d'un solide dans un fluide ?



Principe de la démarche

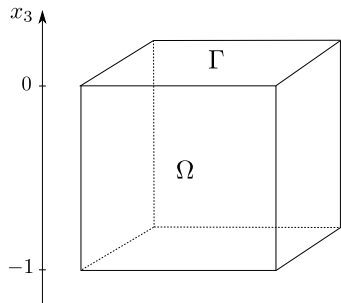
- Suite de **domaines rugueux** $(\Omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, de parois Γ_ε
- Domaine Ω régulier, de paroi Γ , t.q.

$\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega$ en un certain sens géométrique

- $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ t.q. $\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = 0$ sur Γ_ε
- $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ t.q. $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$

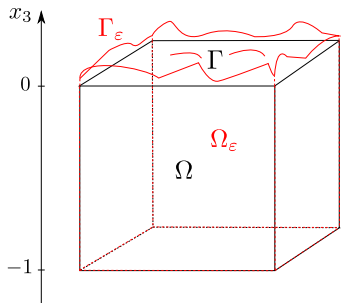
Quelle condition aux limites satisfait \mathbf{u} sur Γ ?

Configuration générale



- $\Gamma = (0, 1)^2 \times \{0\}$
- $\Omega = (0, 1)^2 \times (-1, 0)$

Configuration générale



- $\Gamma = (0, 1)^2 \times \{0\}$
- $\Omega = (0, 1)^2 \times (-1, 0)$
- $\Gamma_\varepsilon =$
 $\{(x_1, x_2, \varphi_\varepsilon(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in (0, 1)^2\}$
 $\varphi_\varepsilon : (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \|\varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$
- $\Omega_\varepsilon =$
 $\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in (0, 1)^2,$
 $-1 < x_3 < \varphi_\varepsilon(x_1, x_2)\}$

Résultat général [Bucur, Feireisl & Nečasová, 2009]

Hypothèses :

- sur les parois : ouverts Ω_ε **uniformément lipschitziens**
- sur l'écoulement :
 - ▶ \mathbf{u}_ε solution des équations de Navier-Stokes dans Ω_ε
 - ▶ avec **glissement parfait** sur Γ_ε

Conclusion :

- $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$ faiblement \mathbf{H}^1 (au sens des extensions)
 - ▶ \mathbf{u} solution des équations de Navier-Stokes dans Ω
 - ▶ avec conditions **friction-driven** sur Γ

Conditions aux limites *friction-driven*

- μ : mesure capacitaire concentrée sur Γ ,
- A : fonction matricielle symétrique et positive,
- $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(x)\}_{x \in \Gamma}$, $\mathcal{V}(x)$: sous-espace vectoriel de l'**hyperplan tangent** à Γ en x .

\mathbf{u} satisfait :

- la condition **directionnelle**

$$\mathbf{u}(x) \in \mathcal{V}(x) \text{ quasi-partout } x \in \Gamma$$

- la condition de **friction**

$$2\nu \int_{\Gamma} \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \phi \, dx + \int_{\Gamma} A\mathbf{u} \cdot \phi \, d\mu = 0$$

$$\forall \phi \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ t.q. } \phi(x) \in \mathcal{V}(x) \text{ quasi-partout } x \in \Gamma$$

Comment déterminer $\{\mu, A, \mathcal{V}\}$?

Hypothèses de **non dégénérescence** et **contraintes géométriques** sur les parois Γ_ε :

- **périodicité** : $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon^\alpha \varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{T}^2)$
 - ▶ $\alpha = 1$, φ de classe \mathcal{C}^2
 - $\mathcal{V}(x) = \{0\}$ [Casado-Díaz, Fernández-Cara & Simon, 2003]
 - ▶ $\alpha = 3/2$,
 - $\mathcal{V}(x) \cong \mathbb{R}^2$ & loi de friction matricielle
[Casado-Díaz, Luna-Laynez & Suárez-Grau, 2010]
- **invariance dans une direction** : $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon \varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$,
 $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{T}^1)$
 - $\mathcal{V}(x) = \mathbb{R}e_2$ [Bucur, Feireisl & Nečasová, 2008]

Thèmes principaux

- ① **Étude de l'effet de rugosité** : effet de rugosité uniforme et approche variationnelle
- ② **Vers un effet de rugosité dynamique** : stabilité des trajectoires d'un solide par rapport aux déformations de sa paroi
- ③ **Micro-optimisation de forme** : réduction de la traînée d'un solide à l'aide de micro-rugosités

Plan de l'exposé

- 1 Étude de l'effet de rugosité
 - L'effet de rugosité uniforme
 - Approche variationnelle de l'effet de rugosité
- 2 Vers un effet de rugosité dynamique
 - Modélisation
 - Résultats principaux
 - Simulations numériques
- 3 Micro-optimisation de forme et minimisation de la traînée
 - Présentation du problème
 - Étude numérique
- 4 Conclusion et perspectives

Objectif

- Pour des familles de parois produisant l'effet de rugosité maximal

$$\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma,$$

- Estimer le **taux de convergence**

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_\Gamma |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 ds}{\|\varphi_\varepsilon\|_\infty}$$

Parois périodiques non régulières

$$\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon\varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{T}^2), \quad \varphi > 0$$

Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists C > 0, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon \implies \int_\Gamma |\mathbf{v}|^2 ds \leq C\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx$$

(ii) φ n'a aucune direction d'invariance.

Parois cristallines (non périodiques)

- $K \subset \mathbb{R}^2$ fini, avec condition de non dégénérescence :

$$\forall d_1, d_2 \in K, \quad 0 \notin [d_1, d_2].$$

- $\varphi \in W^{1,\infty}((0,1)^2)$ admissible si $\nabla\varphi(y) \in K$ p.p. $y \in (0,1)^2$
- Ω_φ : sous-domaine associé à φ

Théorème

Il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que l'inégalité

$$\int_{\Gamma} |\mathbf{v}|^2 ds \leq C \|\varphi\|_{\infty} \int_{\Omega_\varphi} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx$$

a lieu pour tout φ admissible t.q. $0 < \|\varphi\|_{\infty} < \varepsilon_0$, et tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varphi)$ satisfaisant la condition de non pénétration sur Γ_φ .

Plan de l'exposé

- 1 Étude de l'effet de rugosité
 - L'effet de rugosité uniforme
 - Approche variationnelle de l'effet de rugosité
- 2 Vers un effet de rugosité dynamique
 - Modélisation
 - Résultats principaux
 - Simulations numériques
- 3 Micro-optimisation de forme et minimisation de la traînée
 - Présentation du problème
 - Étude numérique
- 4 Conclusion et perspectives

Principe des mesures de rugosité directionnelles

Objectif : estimer l'effet de rugosité dans une direction \mathbf{V} fixée

- Définition d'une mesure $\mu_{\mathbf{V}}$ à support dans Γ , t.q.

$\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$ faiblement $\mathbf{H}^1(D)$, $\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = 0$ sur $\Gamma_\varepsilon \Rightarrow$

$$\int_D |\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{V})|^2 dx + \int_D (\mathbf{u} \cdot \mathbf{V})^2 d\mu_{\mathbf{V}} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{V})|^2 dx$$

- Propriétés :

- ▶ $\mu_{\mathbf{V}}$ infinie sur $\Gamma \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{V} = 0$ sur Γ
- ▶ $\mu_{\mathbf{V}}$ nulle sur $\Gamma \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}$ est libre sur Γ

Interprétation de l'effet de rugosité

- Cas **périodique** : $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon\varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$, φ lipschitzienne

$$(x'_1, x'_2) \in (0, 1)^2 \text{ fixé, } \eta = \mathbf{n}(x'_1, x'_2, \varphi(x'_1, x'_2))$$

→ μ_η infinie sur Γ

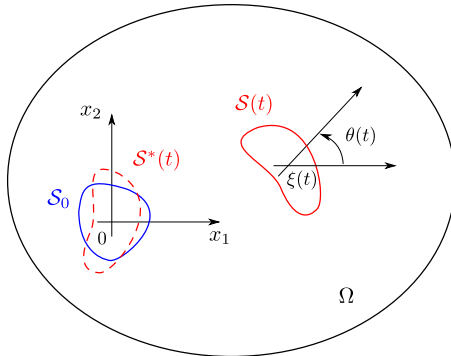
- Cas des **riblets** : $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon\varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)$, φ non constante

$$\begin{cases} \mu_{e_1} \text{ infinie sur } \Gamma \\ \mu_{e_2} \text{ nulle sur } \Gamma \end{cases} \rightarrow \mathcal{V}(x) = \mathbb{R}e_2 \text{ quasi-partout } x \in \Gamma$$

Plan de l'exposé

- 1 Étude de l'effet de rugosité
 - L'effet de rugosité uniforme
 - Approche variationnelle de l'effet de rugosité
- 2 Vers un effet de rugosité dynamique
 - Modélisation
 - Résultats principaux
 - Simulations numériques
- 3 Micro-optimisation de forme et minimisation de la traînée
 - Présentation du problème
 - Étude numérique
- 4 Conclusion et perspectives

Déformation du solide et mouvement rigide



- S_0 : configuration initiale du solide
- $S^*(t)$: solide déformé
- $S(t)$: solide après déformation, rotation d'angle $\theta(t)$ et translation de vecteur $\xi(t)$

Notations

- Déformation imposée $\Theta^*(y, t)$, $(y, t) \in \mathcal{S}_0 \times [0, \infty)$
- Vitesse eulérienne de déformation \mathbf{w}
- Vitesse eulérienne du solide :

$$\mathbf{u}^S(x, t) = \xi'(t) + \theta'(t)(x - \xi(t))^\perp + \mathbf{w}(x, t)$$

Déformations admissibles \mathcal{D}

Déformations Θ^* qui préservent :

- la **régularité** du domaine \mathcal{S}_0 :

$$\|\Theta^*(\cdot, t)\|_{C^3(\overline{\mathcal{S}_0}, \mathbb{R}^2)} \leq K < 1$$

- le **volume du solide**
- la **quantité de mouvement**
- le **moment cinétique**

Interaction fluide-structure

- Domaine $\mathcal{F}(t) = \Omega \setminus \overline{\mathcal{S}(t)}$ occupé par le fluide
- Écoulement à faible nombre de Reynolds \rightarrow fluide régi par les équations de Stokes
- Paroi $\partial\mathcal{S}(t)$: loi de Navier avec coefficient de frottement β variable

Équations du mouvement

$$m\xi''(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(t)} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, ds$$

$$(I\theta')'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(t)} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \xi)^\perp \, ds$$

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(t)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(t)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(t)$$

$$2\nu [\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}]_{tan} + \beta[\mathbf{u}]_{tan} = \beta[\mathbf{u}^S]_{tan} \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(t)$$

avec m masse, I moment d'inertie du solide

Plan de l'exposé

- 1 Étude de l'effet de rugosité
 - L'effet de rugosité uniforme
 - Approche variationnelle de l'effet de rugosité
- 2 Vers un effet de rugosité dynamique
 - Modélisation
 - Résultats principaux
 - Simulations numériques
- 3 Micro-optimisation de forme et minimisation de la traînée
 - Présentation du problème
 - Étude numérique
- 4 Conclusion et perspectives

Caractère bien posé et temps maximal d'existence

Théorème

Soit $(\dot{\xi}_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et $\Theta^* \in \mathcal{D}$. Il existe $T_{\max} > 0$ tel que

- pour tout T dans $(0, T_{\max})$, le système complété par les conditions initiales

$$\begin{aligned}\xi(0) &= 0, & \theta(0) &= 0, \\ \xi'(0) &= \dot{\xi}_0, & \theta'(0) &= \dot{\theta}_0,\end{aligned}$$

admet une **unique solution** sur l'intervalle $[0, T]$;

- si T_{\max} est fini, alors $\liminf_{t \rightarrow T_{\max}} \text{dist}(\mathcal{S}(t), \partial\Omega) = 0$.

Stabilité des trajectoires par rapport aux déformations

Théorème

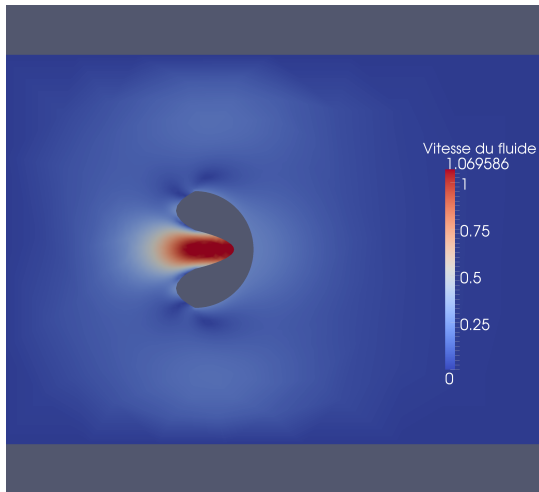
Soit $\Theta^* \in \mathcal{D}$ et (ξ, θ) la solution maximale du système associée à Θ^* , avec les conditions initiales $(\dot{\xi}_0, \dot{\theta}_0)$. Soit $(\Theta_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers Θ^* dans \mathcal{D} et (ξ_n, θ_n) la solution maximale associée à Θ_n^* avec les mêmes conditions initiales. Alors :

- il existe $T_1 > 0$ tel que $(\xi, \theta), (\xi_n, \theta_n)$ existent sur $[0, T_1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $(\xi_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers (ξ, θ) dans $\mathcal{C}^1([0, T^*], \mathbb{R}^3)$, pour tout $T^* > 0$ tel que (ξ_n, θ_n) soit bien définie sur $[0, T^*]$.

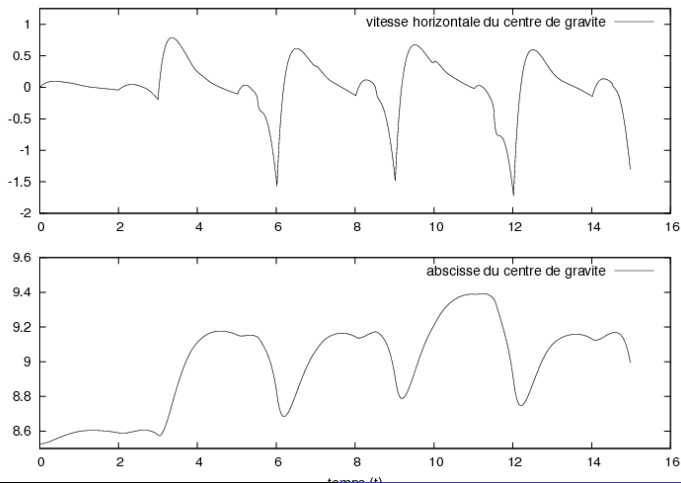
Plan de l'exposé

- 1 Étude de l'effet de rugosité
 - L'effet de rugosité uniforme
 - Approche variationnelle de l'effet de rugosité
- 2 Vers un effet de rugosité dynamique
 - Modélisation
 - Résultats principaux
 - Simulations numériques
- 3 Micro-optimisation de forme et minimisation de la traînée
 - Présentation du problème
 - Étude numérique
- 4 Conclusion et perspectives

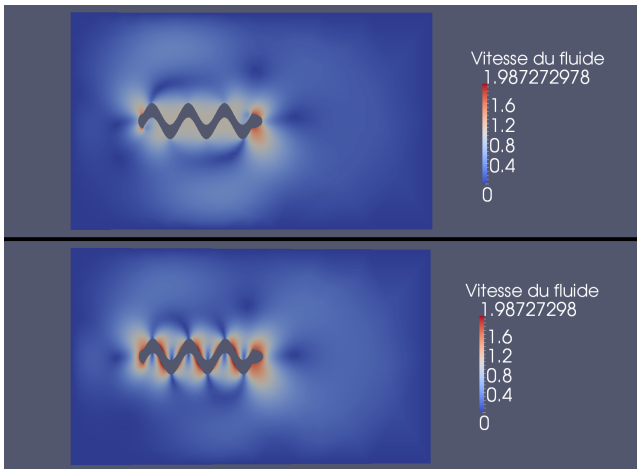
Inefficacité des mouvements réversibles à faible nombre de Reynolds



Inefficacité des mouvements réversibles à faible nombre de Reynolds



Mouvement ondulatoire efficace et effet du frottement : $\beta = 0.01$ en haut, $\beta = 100$ en bas



Plan de l'exposé

- 1 Étude de l'effet de rugosité
 - L'effet de rugosité uniforme
 - Approche variationnelle de l'effet de rugosité
- 2 Vers un effet de rugosité dynamique
 - Modélisation
 - Résultats principaux
 - Simulations numériques
- 3 Micro-optimisation de forme et minimisation de la traînée
 - Présentation du problème
 - Étude numérique
- 4 Conclusion et perspectives

Principe général de la démarche

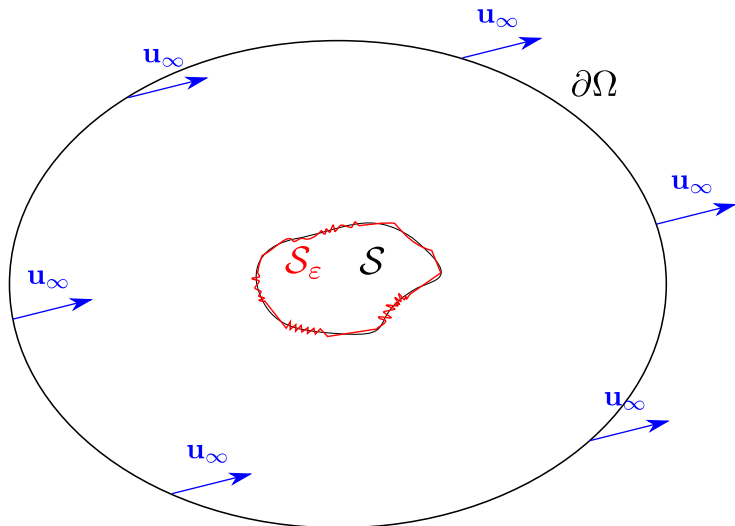
Cadre physique

Solide de forme macroscopique fixée, dont la paroi est constituée d'un **matériau glissant**

Question

Est-il possible de réduire la traînée générée par le solide dans un fluide visqueux, en créant des **micro-rugosités** en certaines zones de la paroi ?

Notations



Problème physique réel

- Coefficient de frottement β_m sur $\partial\mathcal{S}_\varepsilon$, $\beta_m =$ constante liée au matériau
- \mathbf{u}_ε solution du système de Navier-Stokes stationnaire dans $\mathcal{F}_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\mathcal{S}_\varepsilon}$
- Avec conditions aux limites de Navier

$$\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}_\varepsilon$$

$$2\nu [\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)\mathbf{n}_\varepsilon]_{tan} + \beta_m [\mathbf{u}_\varepsilon]_{tan} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}_\varepsilon$$

- Traînée $T(\beta_m, \mathcal{S}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon) = 2\nu \int_{\mathcal{F}_\varepsilon} |\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)|^2 dx + \int_{\partial\mathcal{S}_\varepsilon} \beta_m |\mathbf{u}|^2 ds$

Problème effectif [Bucur, Feireisl & Nečasová, 2009]

- \mathbf{u} solution du système de Navier-Stokes stationnaire dans $\mathcal{F} = \Omega \setminus \overline{\mathcal{S}}$
- Avec conditions aux limites *friction-driven*

$\mathbf{u}(x) \in \mathcal{V}(x)$ quasi-partout $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$2\nu \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \phi \, dx + \int_{\partial\mathcal{S}} A\mathbf{u} \cdot \phi \, d\mu = 0$$

$\forall \phi \in \mathbf{H}^1(\mathcal{F})$ t.q. $\phi(x) \in \mathcal{V}(x)$ quasi-partout $x \in \partial\mathcal{S}$

- Traînée

$$T(\{\mu, A, \mathcal{V}\}, \mathcal{S}, \mathbf{u}) = 2\nu \int_{\mathcal{F}} |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 \, dx + \int_{\partial\mathcal{S}} A\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\mu$$

Existence d'un minimiseur

- **Continuité** de la traînée :

$$T(\{\mu, A, \mathcal{V}\}, \mathcal{S}, \mathbf{u}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\beta_m, \mathcal{S}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$$

- Micro-structures admissibles

$\mathcal{U}_{\beta_m} = \{ \{ \mu, A, \mathcal{V} \} \}$ produit par l'effet des micro-rugosités }

- \mathcal{U}_{β_m} muni d'une structure d'espace métrique **compact** liée à l'effet des micro-rugosités
- Conclusion : **existence d'une micro-structure optimale**

Plan de l'exposé

- 1 Étude de l'effet de rugosité
 - L'effet de rugosité uniforme
 - Approche variationnelle de l'effet de rugosité
- 2 Vers un effet de rugosité dynamique
 - Modélisation
 - Résultats principaux
 - Simulations numériques
- 3 Micro-optimisation de forme et minimisation de la traînée
 - Présentation du problème
 - Étude numérique
- 4 Conclusion et perspectives

Paramètre d'optimisation en dimension 2

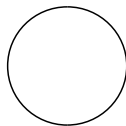
- $\mathcal{V}(x) = \{0\}$ ou $\mathcal{V}(x) \cong \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \{\mu, A, \mathcal{V}\}$ peut se réduire à $\beta : \partial\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- Conditions friction-driven \leftrightarrow conditions de type Navier :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}$$

$$2\nu [\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}]_{tan} + \beta[\mathbf{u}]_{tan} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}$$

Formes des solides, viscosité et vitesse à l'infini

$$\mathbf{u}_\infty = (1, 0), \nu = 10^{-3}$$



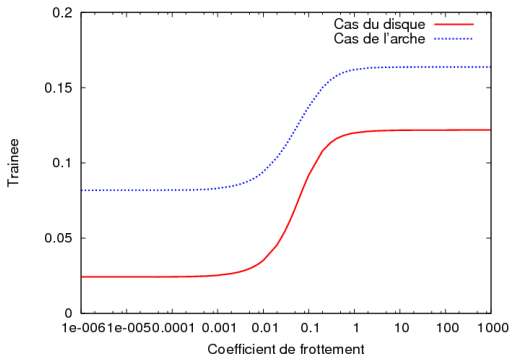
\mathcal{S}_1 (disque)



\mathcal{S}_2 (arche)

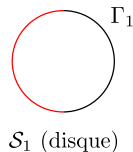
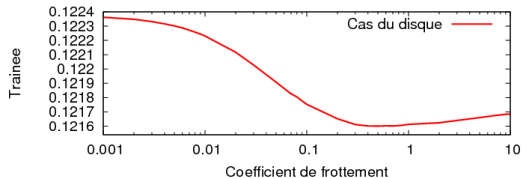
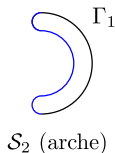
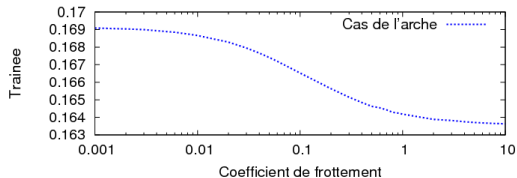
Traînée pour des β constants

- Équations de **Stokes** : minimisation de l'énergie de Stokes \Rightarrow traînée croissante par rapport à β
- Équations de **Navier-Stokes** stationnaires



Perte de monotonie pour des coefficients β non constants

β constant par morceaux : $\beta \equiv 10$ sur Γ_1 , variable sur le reste du bord



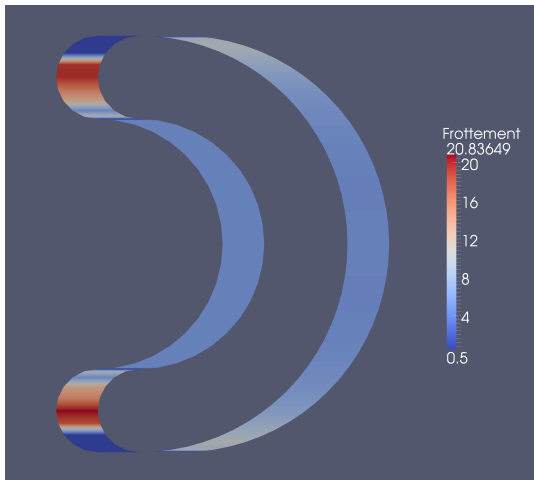
Optimisation de la traînée par rapport à β (forme de l'arche)

$\min \{T(\beta, \mathcal{S}_2, \mathbf{u}), \beta \geq \beta_m, \mathbf{u} \text{ solution Navier-Stokes stationnaire}\}$

- Calcul du gradient de T par rapport à β
- Algorithme de descente avec gradient projeté
- Frottement initial $\beta_{init} = 5$, frottement minimal $\beta_m = 0.5$

Itération	Traînée	Écart relatif (%)
0	0.163521	
1	0.160299	-1.97
2	0.158421	-3.11
3	0.158398	-3.13
4	0.158383	-3.14
$\beta \equiv \beta_m$	0.159271	

Frottement optimal



Conclusion

- Description fine de l'effet de rugosité produit par des parois périodiques **non régulières** et des parois cristallines **non périodiques**
- Construction d'un outil général permettant de modéliser l'effet de rugosité par une **approche variationnelle nouvelle**
- Étude théorique et numérique d'un modèle d'interaction fluide-structure avec **déformations complexes des parois** et **coefficient de frottement variable**
- Définition d'un **cadre mathématique** au problème de minimisation de la traînée par l'effet des micro-rugosités et **justification numérique** de la démarche

Quelques perspectives

- Problème de la réduction de la traînée en **dimension trois** :
 - ▶ **Traitement numérique** de la condition *friction-driven*
 - ▶ Dépendance de la traînée par rapport à **l'orientation des sous-espaces $\mathcal{V}(x)$**
- Effet des rugosités dans des modèles physiques complexes :
modélisation de **l'effet Leidenfrost**

Merci de votre attention !

