



HAL
open science

Modélisation de systèmes socio-économiques à l'aide des outils de physique statistique

Laetitia Gauvin

► **To cite this version:**

Laetitia Gauvin. Modélisation de systèmes socio-économiques à l'aide des outils de physique statistique. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. ⟨NNT:⟩. ⟨tel-00556769⟩

HAL Id: tel-00556769

<https://theses.hal.science/tel-00556769v1>

Submitted on 17 Jan 2011

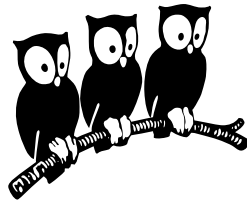
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
Département de Physique
Laboratoire de Physique Statistique



THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)
Spécialité : Physique Statistique

présentée par

Laetitia GAUVIN

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Modélisation de systèmes socio-économiques à l'aide des outils de physique statistique

Soutenue le 22 octobre 2010 devant le jury composé de :

M.	Alain BARRAT	Rapporteur
Mme	Leticia CUGLIANDOLO ..	Examinatrice
M.	Silvio FRANZ	Rapporteur
M.	Alan KIRMAN	Examineur
M.	Matteo MARSILI	Examineur
M.	Jean-Pierre NADAL	Co-directeur

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier Eric Perez qui a été le directeur du Laboratoire de Physique Statistique durant les trois années où j'ai réalisé ma thèse, ainsi que le directeur du Département de Physique, Werner Krauth.

Je voudrais également remercier Jean Vannimenus pour m'avoir donné l'opportunité de travailler dans ce cadre sur un sujet qui m'enthousiasme.

Je remercie bien entendu Jean-Pierre Nadal qui m'a encadré en me laissant suffisamment de liberté pour que je puisse développer ma propre réflexion et qui a su être, en même temps, suffisamment présent pour que je sache quelle ligne directrice adopter. Il m'a aussi aidé à consolider ma vision de la recherche.

Je tiens à exprimer également mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse : les rapporteurs, Alain Barrat et Silvio Franz, ainsi que Leticia Cugliandolo, Alan Kirman et Matteo Marsili.

Je voudrais remercier Marc Barthélémy pour les discussions que j'ai pu avoir avec lui. Elles ont constitué un élément déclencheur pour mes travaux sur la dernière partie de ma thèse. Concernant cette partie, je remercie bien sûr aussi Annick Vignes qui m'a aidé à rendre mon approche scientifique plus interdisciplinaire, en ajoutant une composante économique à mes travaux. Elle a apporté des critiques constructives par rapport à la vision "naïve de physicienne" que je pouvais avoir sur des thématiques économiques.

Je remercie Stéphane Cordier qui m'a donné l'opportunité de présenter mes travaux au Laboratoire de Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans et d'une manière générale les personnes de ce laboratoire avec qui j'ai pu discuter de mes travaux. Aussi, je suis reconnaissante à Adrien Blanchet et François Bolley de m'avoir convié à la conférence Optimal transport and Kinetics Applied to Socio-Economics.

Merci aux secrétaires du laboratoire de Physique Statistique, en particulier, Marie Gefflot et Annie Ribaudeau, qui ont rendu certaines démarches plus faciles.

J'adresse aussi mes remerciements à mes directeurs de stage durant le Master 2, Daniel Gandolfo et Jean Ruiz qui m'ont encouragé à faire de la recherche (malgré certains obstacles) et qui sont venus régulièrement aux nouvelles durant ma thèse.

Je remercie tous les thésards de la Dc21 et en particulier, Sébastien et Antoine qui ont permis que le travail se fasse dans un environnement convivial.

Enfin, merci à ma mère qui m'a poussé à toujours persévérer. Merci à Romain qui me soutient depuis 10 ans et qui m'a plus que supporté durant toutes les étapes de cette thèse.

Pour finir, d'avance, je m'excuse pour les personnes que j'aurai pu oublier. Aussi, la formulation des remerciements n'est peut-être pas la plus appropriée par endroit, mais, à mon sens, les personnes que je remercie n'auront pas besoin de lire les remerciements pour connaître ma pensée à ce sujet.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	ix
1 Investigation des systèmes sociaux par la physique statistique	1
1.1 Les systèmes sociaux vus par la physique statistique	2
1.1.1 Pluralité des thématiques	2
1.1.2 Outils et concepts	3
1.1.3 Validation des modèles et résultats	4
1.2 Cas de la modélisation urbaine	5
1.2.1 Systèmes multi-agents	5
1.2.2 Modèle de ségrégation de Schelling	6
1.2.3 Analyse du point de vue physique	6
1.2.4 Extensions vers un modèle urbain	7
1.2.5 Confrontation avec des observations empiriques	9
2 Analyse du modèle de ségrégation de Schelling	11
2.1 Modèle de proximité spatiale	12
2.2 Généralisation du modèle de proximité spatiale	13
2.3 Simulations numériques	16
2.4 Etude quantitative	21
2.4.1 Rappel des indices de ségrégation existants	21
2.4.2 Paramètre d'ordre principal : mesure de la ségrégation	24
2.4.3 Processus de renormalisation	26
2.4.4 Paramètre d'ordre secondaire : caractérisation des états désordonnés	28
2.5 Analyse qualitative	29
2.5.1 Lien avec un modèle de spins, le modèle de Blume-Capel	30
2.5.2 Analogues des quantités thermodynamiques	34
2.6 Diagramme de phase	35
2.6.1 Transition de l'état gelé vers l'état ségrégué	36
2.6.2 Transition de l'état ségrégué vers l'état désordonné	39

2.6.3	Transition de l'état ségrégué vers l'état ségrégué dilué	41
2.6.4	Lien avec le diagramme de phase du modèle de Blume-Capel	41
2.7	Robustesse des résultats	43
2.7.1	Augmentation de la taille du voisinage	43
2.7.2	Contraintes sur les distances de déplacement	45
2.7.3	Contraintes sur le nombre de tentatives de déplacement	47
2.7.4	Tolérance hétérogène	48
2.7.5	Migrations externes : vers un système ouvert	50
2.8	Conclusions	51
3	Du modèle de spins au modèle de ségrégation : modèle de ville ouverte	53
3.1	Vers un modèle de ségrégation ouvert	54
3.1.1	Correspondance modèle de ségrégation - modèle de Blume-Emery-Griffiths	54
3.1.2	Description du modèle de ségrégation en version ouverte	54
3.2	Simulations numériques	58
3.2.1	Analyse numérique : types d'interfaces	59
3.2.2	Analyse numérique : formes des interfaces	60
3.2.3	Remarques	63
3.3	Analyse théorique : interfaces	64
3.3.1	Etat saturé : absence de lacunes	64
3.3.2	Ségrégation par isolation : interface de lacunes	65
3.3.3	Exode massif : état à lacunes prédominantes	66
3.3.4	Résumé : domaine d'existence des interfaces	66
3.4	Conclusions	66
3.4.1	Modèle de ségrégation versus modèle de Blume-Emery-Griffiths	67
3.4.2	Modèle de ségrégation de Schelling : ouvert versus fermé	70
3.4.3	Interprétation et perspectives	71
4	Modèle de marché du logement urbain	73
4.1	Contexte d'étude : transactions immobilières de la ville de Paris	74
4.1.1	Des petits logements majoritaires	74
4.1.2	Une décroissance des prix centre/périphérie	75
4.1.3	Une concurrence plus intense au centre	76
4.2	Théories économiques de localisation résidentielle	77
4.2.1	Modèle monocentrique : ville centrale	77
4.2.2	Choix résidentiel : rôle de l'attractivité	78
4.2.3	Ségrégation urbaine : une dimension économique	79
4.3	Description du modèle	79
4.3.1	Paramètres du modèle : accessibilité et attractivité	79
4.3.2	Règles d'installation	81
4.4	Simulations numériques	82
4.4.1	Distribution des catégories : ségrégation socio-spatiale et mixité	82
4.4.2	Distribution des prix de transaction : une concurrence plus rude au centre	83

4.5	Analyse théorique	84
4.5.1	État stationnaire	86
4.5.2	Modèle non contraint	86
4.5.3	Modèle contraint	88
4.5.4	Distribution des prix	92
4.6	Analyse versus simulations	94
4.6.1	Distance critique d'installation	94
4.6.2	Taux d'occupation	95
4.6.3	Prix de transaction	96
4.7	Données versus simulations	97
4.8	Conclusions	98
	Conclusion et perspectives	101
	Bibliographie	105
	Publications	111
	Résumé	136

Introduction

Cette thèse se consacre à l'étude des phénomènes collectifs émergeant dans les systèmes socio-économiques à partir d'interactions entre entités élémentaires. En particulier, elle traite du phénomène de ségrégation socio-spatiale à travers les dynamiques résidentielles locales. La ségrégation étant un concept potentiellement ambigu, il convient de préciser ce que nous entendons dans ce manuscrit par ségrégation socio-spatiale, c'est-à-dire la séparation spatiale des agents en fonction de leurs caractéristiques socio-économiques. Les premières études du phénomène de ségrégation remontent à 1920 avec l'École de Chicago, qui constitue par ailleurs, la première école de sociologie urbaine. Parmi les initiateurs de cette École, E. Burgess et R. Park, introduisent le concept d'*écologie urbaine* pour décrire l'organisation de la ville (cf. [GJ79]). Ils proposent un schéma concentrique de croissance de la ville, où les zones concentriques se différencient socialement (zone habitée par les ouvriers, aire résidentielle, banlieues). Cette représentation géographique constitue une interprétation globale du phénomène de spécialisation des espaces urbains. L'économiste T. C. Schelling, dans son ouvrage "La tyrannie des petites décisions" datant de 1980, s'est également consacré à l'étude de la répartition des groupes sociaux dans les villes, mais à un niveau local. Son analyse de la ségrégation ne repose cependant pas dans le facteur géographique comme dans l'approche de Burgess. Elle est le fruit, selon lui, de 3 mécanismes, une discrimination organisée (par exemple des actions politiques), une différenciation sociale ou le résultat collectif des décisions individuelles.

Si la spécialisation spatiale dans les villes constitue une question étudiée depuis de nombreuses années, elle n'en est pas moins une problématique contemporaine. La ségrégation est, en effet, au cœur du phénomène de métropolisation. Dans le contexte actuel, elle revêt par ailleurs de multiples dimensions. La ségrégation n'est pas seulement ethnique mais aussi scolaire, économique . . . ces dimensions pouvant, de surcroît, être corrélées.

L'idée de Schelling concernant l'émergence de la ségrégation à partir de la combinaison des comportements individuels constitue le point de départ des réflexions sur la ségrégation sociale entreprises dans cette thèse. Tout d'abord, à travers le modèle multi-agent de ségrégation de Schelling, nous essaierons de comprendre certaines des dynamiques qui peuvent être à l'origine de la ségrégation. Cette compréhension de la formation de groupes sociaux débouche sur une modélisation des dynamiques urbaines, en particulier de la dynamique liée au marché du logement. Cette modélisation se fera en confrontation avec des données empiriques.

La question de la ségrégation en tant que résultat d'interactions individuelles sera abordée via l'utilisation de systèmes multi-agents et de techniques empruntées à la physique statistique. Cette approche systémique a pour but de dégager des comportements collectifs malgré la complexité des interactions entre les acteurs. La physique statistique se révèle être adaptée à cette démarche, dans le sens où le dégagement de comportements macroscopiques à partir d'entités microscopiques est l'essence même de cette discipline. L'appréhension des dynamiques ségrégatives via la physique statistique dans les groupes sociaux comportant un grand nombre d'individus se trouve ainsi justifiée. Cependant, cette approche nécessite de rester critique quant à l'interprétation que l'on peut faire des résultats. La reproduction de phénomènes empiriques via la modélisation peut résulter du choix inapproprié des caractéristiques des agents du système. Il est donc nécessaire de réaliser un arbitrage entre un ensemble de variables décrivant les entités suffisamment petit pour avoir un modèle tractable analytiquement, et suffisamment complet pour représenter les caractéristiques essentielles des agents.

Avant de continuer, une précision s'avère nécessaire. Si dans le langage courant, la ségrégation est souvent évoquée dans un contexte de différenciation des origines ethniques, dans ce manuscrit, de manière générale, ce que l'on entend par ségrégation est la séparation de groupes sociaux au sens large.

En quelques mots, le modèle de ségrégation de Schelling sera détaillé et analysé via les outils de thermodynamique, puis développé en se servant des analogies entre ce modèle socio-économique et un modèle de physique statistique. Enfin, on s'éloignera du modèle de départ de façon à approcher un modèle plus réaliste, un modèle de dynamiques de prix du foncier montrant l'émergence de ségrégation socio-spatiale. Voici plus en détail le cheminement emprunté dans le manuscrit.

Dans le chapitre 1, je tenterai d'expliquer la pertinence de l'utilisation de la physique statistique dans un contexte socio-économique et plus exactement de dynamique urbaine. Le but de cette partie est de justifier une telle approche en montrant son efficacité dans des domaines hors de son contexte traditionnel. Aussi, je mettrai en évidence le cheminement logique observé dans le cadre de l'application de la physique statistique aux sciences sociales.

Dans le chapitre 2, le modèle de ségrégation de Schelling sera introduit. La riche phénoménologie associée à ce simple modèle sera notamment dégagée à travers une étude thermodynamique du modèle. Un lien entre le modèle multi-agent et un modèle de physique statistique, le modèle de Blume-Emery-Griffiths (Blume-Capel), sera exhibé.

Dans le chapitre 3, je me servirais de la compréhension du modèle de ségrégation de Schelling et des liens avec le modèle de Blume-Emery-Griffiths issu du deuxième chapitre pour étendre le modèle. Le modèle originellement fermé sera ouvert pour intégrer des échanges d'agents avec l'extérieur de la même façon que les dynamiques résidentielles dans les villes dépendent des flux migratoires. Le développement de cette extension conduira à l'émergence d'autres phénomènes liés à la ségrégation, notamment la formation de frontières physiques entre individus.

Finalement, ayant compris les paramètres essentiels à prendre en compte, il sera temps de me détacher de ce modèle pour passer à une application plus concrète dans le chapitre 4. Un modèle de marché du logement montrant en outre l'émergence de ségrégation socio-spatiale sera élaboré. Ce travail encore en cours sera l'occasion de confronter données

empiriques sur la ville de Paris, et modélisation.

Investigation des systèmes sociaux par la physique statistique

Près de 20% de la population mondiale réside dans des villes de plus d'un million d'habitants. Cette explosion urbaine place les individus au coeur de nouvelles dynamiques quotidiennes. Une des caractéristiques de cette métropolisation est notamment la ségrégation sociale, point qui sera développé dans ce manuscrit. Parmi les autres questions liées à la métropolisation, figure également celle de la mobilité. En effet, les densités de piétons ou de voitures sur les voies de circulation (réseau routier, de transport en commun ...) peuvent atteindre des valeurs extrêmement élevées. Cette évolution pose ainsi de nouvelles questions fondamentales sur l'organisation des interactions. Aux nouvelles dimensions de l'aire urbaine (déplacement, ségrégation urbaine...), de nouvelles réflexions (développement des réseaux de transport, adaptation des politiques sociales ...) s'imposent. Ceci ne pourra se faire qu'à travers la compréhension des mécanismes sociaux et économiques impliqués. Cependant, la multitude d'interactions rend impossible la tâche de détermination du comportement des individus, de la même façon que Boltzmann et Maxwell ont échoué dans leur première approche consistant à déterminer la trajectoire d'une molécule en interaction avec un grand nombre d'autres. Leur solution a été de considérer le système dans sa globalité, ce qui a mené à la théorie cinétique des gaz. L'idée fondamentale étant que, s'il est impossible de prédire le comportement de certaines quantités microscopiques (vitesse et position d'une particule), il est en revanche possible de prédire certaines quantités macroscopiques (température, pression). En sciences sociales, l'individu est a priori considéré comme indissociable de sa composante psychologique. La détermination précise des actions individuelles est donc impossible. En revanche, des phénomènes collectifs d'organisation sociale peuvent émerger. La physique statistique apparaît donc comme un candidat naturel pour étudier les systèmes socio-économiques. Appliquer ces méthodes peut permettre, malgré la complexité des interactions, de mettre en avant certaines quantités macroscopiques qui seront, elles, prédictibles.

Le problème peut sembler néanmoins plus complexe dans un contexte socio-économique. En effet, les atomes d'un certain type sont tous identiques (rien n'est plus semblable à un atome d'hydrogène qu'un autre atome d'hydrogène), alors que les individus d'une ville

sont dans une certaine mesure tous différents. Si l'on souhaite considérer l'hétérogénéité des agents, le domaine pertinent est alors celui de la physique statistique des systèmes désordonnés [MPV87, DRS88].

Il convient alors de trouver les caractéristiques des individus qui sont les plus déterminantes quant au comportement collectif.

1.1 Les systèmes sociaux vus par la physique statistique

Cette section, corroborée par une littérature existante abondante, vise à montrer que même si les comportements sociaux individuels sont hors de portée, dégager des propriétés collectives est une tâche réalisable.

1.1.1 Pluralité des thématiques

L'application de la physique statistique hors de son contexte "traditionnel" s'est considérablement développée ces dernières années. Cette tendance récente porte notamment sur la modélisation de systèmes socio-économiques. Même en se restreignant à ce champ d'étude, l'éventail des sujets traités est large, c'est pourquoi les thèmes que je citerais en exemple ne formeront pas une liste exhaustive. Les travaux cités ont été choisis de façon à mettre l'accent sur la largeur du spectre d'étude des phénomènes sociaux-économiques.

Parmi la multitude de questions étudiées, on peut dans un premier temps citer la dynamique de mobilité [AR09, AS02, CS99]. Des travaux de D. Helbing et P. Molnàr concernent en particulier le déplacement de piétons [HM95]. Dans la modélisation en question, les piétons souhaitent atteindre une destination donnée. Cette volonté est matérialisée par une force appelée "force sociale". Leurs déplacements sont réalisés de façon à éviter les obstacles (bords de l'espace ou autres individus). Le résultat de la modélisation est la formation de files d'individus allant dans la même direction : le système s'auto-organise. Dans le même registre, D. Chowdhury *et al.* se sont intéressés au trafic routier [CSA00], dans leur revue des travaux sur le sujet, ils abordent deux approches : (i) chaque véhicule est assimilé à une particule, l'ensemble de ceux-ci se conformant à la théorie cinétique. (ii) L'ensemble des véhicules est vu comme un fluide compressible. Des situations typiques observées dans les déplacements groupés de piétons et de véhicules (embouteillages, évacuation en cas de panique) ont ainsi trouvé une explication à travers la physique statistique.

Les évolutions récentes concernent la mobilité mais également la communication. Dans une société où la communication n'a de cesse de se développer, le choix des individus est influencé par leurs interactions, l'étude de ces choix doit donc prendre en compte cette donnée : la croissance significative et la diversité des liens entre individus affectent leur prise de décision. Les dynamiques d'opinion ont concentré beaucoup d'attention (voir par exemple, [BB10, WDAN02]). Le modèle des électeurs [CS73] introduit par Clifford et Sudbury en 1973 représente de manière simplifiée la tendance des individus à orienter leur choix en accord avec leur entourage. Un électeur placé sur le noeud d'un réseau régulier a un choix de vote possible parmi deux options (représentées par des variables de spins $+1, -1$). Un individu choisi aléatoirement adopte le vote d'un de ses voisins,

le processus est répété jusqu'à un inévitable consensus. Des variantes de ce modèle sur réseaux complexes ont également été testés, en particulier une version sur un réseau de petit monde [CVV03]. Le modèle des électeurs sur des réseaux complexes diffère de celui sur des réseaux réguliers au niveau de la convergence vers le consensus, la rapidité de celle-ci dépend de la distribution du degré des noeuds.

La topologie des réseaux d'interaction est en effet parfois indissociable du sujet étudié. Par exemple, la diffusion des épidémies à l'échelle mondiale fait nécessairement intervenir les réseaux de transports aériens [CBBV06]. La topologie des réseaux d'interactions en général constitue à elle seule une branche importante de la physique statistique dans les sciences sociales.

Bien qu'en apparence peu connectées, ces thématiques sont toutes reliées par l'idée que malgré des comportements chaotiques individuels, des phénomènes émergents globaux peuvent être distingués. Une citation de Gladwell, l'auteur du livre "The tipping point" illustre bien la connexion qu'il peut y avoir entre ces sujets a priori éloignés "Ideas and products and messages and behaviors spread like viruses do." [Gla02]. J'aborderai par la suite d'autres sujets qui ont également été étudiés avec une approche de physicien statisticien.

L'étendue des thèmes abordés et la densité de la littérature associée ne peut que conforter une approche de physique statistique des systèmes socio-économiques.

1.1.2 Outils et concepts

Les concepts et outils provenant de la physique statistique utilisés pour modéliser des phénomènes sociaux sont variés. Une des idées dominantes néanmoins, consiste à assimiler les individus à des particules interagissant. Bien entendu, l'approche des problématiques sociales et économiques par les lois de la physique va bien plus loin que cette analogie.

L'approche probabiliste liée à la physique statistique est particulièrement utile pour décrire des phénomènes collectifs. Henderson [Hen71] a par exemple montré que la distribution de vitesse des individus dans une foule est décrite par la loi de Maxwell-Boltzmann sur les molécules de gaz.

L'étude des distributions de probabilité sur les réseaux sociaux a également porté ses fruits. Dans ces réseaux, on représente les interactions entre les entités par des liens. Chaque lien a une probabilité d'exister. Une revue de R. Albert et A. Barabasi [AB02] de différents réseaux complexes cite notamment plusieurs types de réseaux (citation d'un article, connexions téléphoniques ...) qui sont libres d'échelle, c'est-à-dire que les distributions du nombre d'interactions k (citations, appels ...) de chaque entité suivent une loi de puissance $P(k) \sim k^{-\alpha}$ où α est une constante. Le concept d'invariance d'échelle se retrouve aussi dans l'analyse de certaines données sociales, en particulier, les tailles des villes suivent une loi de puissance [BS00], aussi dans les indicateurs urbains comme la productivité, les salaires [BLH⁺07] ...

En physique statistique, lorsque l'on approche une transition critique certaines quantités qui décrivent le système sont invariantes d'échelle. L'exemple le plus connu étant le modèle d'Ising pour lequel au voisinage de la température de Curie, point de transition de la phase ordonnée (spins tous orientés dans le même sens) à la phase désor-

donnée, les quantités macroscopiques comme l'aimantation s'expriment de la façon suivante $\propto (T - T_c)^\alpha$ où α ne dépend pas de l'échelle à laquelle on regarde le système. Dans un autre registre, les données financières suivent elles aussi des lois d'échelle [Bou01, Sor03, Gab09]. Des transitions de phase sont par ailleurs observées : les systèmes financiers peuvent passer d'un état où le nombre de demandes le plus probable de la part des investisseurs est nul (comparable à un état désordonné) à un état considéré comme ordonné, ou soit les demandes d'investisseurs soit les offres sont en majorité [PGS01].

Les transitions de phase et phénomènes critiques figurent donc parmi les phénomènes de la physique statistique pouvant se révéler pertinents en sciences sociales [MB05, Wil08].

Quelque soit la notion empruntée à la physique statistique pour interpréter, modéliser ou analyser un système socio-économique, le niveau d'étude considéré est macroscopique. La complexité des interactions entre entités élémentaires du système n'est pas une entrave à la formation d'un ordre global. Il faut noter que cette idée apparaît également dans la synergetique introduite par H.Haken [Hak83], une science interdisciplinaire basée sur la recherche d'auto-organisation dans des systèmes loin de l'équilibre. La synergetique concerne de manière générale les systèmes où la création de structures robustes à l'échelle macroscopique est engendrée par la coopération des acteurs de celui-ci. Un exemple pertinent dans le cadre du manuscrit est l'application de cette théorie à la modélisation des flux migratoires entre villes (cf. [San92]).

Si les concepts de physique statistique pour appréhender des problématiques sociales sont nombreux et différent selon le sujet étudié, les simulations numériques restent quant à elles un outil commun. Les méthodes de Monte Carlo utilisées pour la simulation de processus stochastiques ont d'ailleurs largement fait leur preuve et été développés dans le cadre de la physique statistique. Leur application a ainsi été généralisée aux sciences sociales [Moo97].

1.1.3 Validation des modèles et résultats

Une des concrétisations de l'application des méthodes issues de la physique statistique aux sciences sociales concerne l'établissement de modèles réalistes. Bien que les modèles présentés dans ce cadre restent par définition infiniment simplifiés par rapport au degré de complexité intrinsèque des acteurs de la société, les résultats devraient à terme être plausibles dans le contexte social approprié.

La plausibilité des modèles et résultats est une étape nécessaire dans la validation de l'adaptation des méthodes de physique aux phénomènes de société. Concernant le trafic piétonnier par exemple : dans les premiers modèles, les individus adaptent leur vitesse en fonction de la densité de la foule mais sont considérés sans interaction sociale à proprement parler. Une confrontation des résultats découlant de ces modèles avec des faits réels a permis à M.Moussaïd *et al.* [MPG⁺10] de comprendre que les modèles devaient intégrer les échanges sociaux des individus à l'intérieur des foules. La plausibilité des résultats dans le contexte socio-économique n'est ainsi qu'une première étape dans la validation de l'application de lois physiques à des phénomènes sociaux.

Une confrontation approfondie avec des faits réels constitue l'étape suivante pour amé-

liorer l'étude. L'essor d'une telle science interdisciplinaire a d'ailleurs été favorisée par la croissance du nombre de données empiriques accessibles grâce au développement de l'informatique. Des comportements statistiques peuvent être dérivés à partir des données mais l'intérêt des dernières ne se limite pas à cette composante. Il réside également dans la validation des modèles introduits par les physiciens. Les données permettent de confirmer que les caractéristiques essentielles des phénomènes ont été capturés. Notons tout de même qu'il n'est pas si évident de pouvoir faire un lien entre données empiriques et résultats, en effet, même pour des problèmes où les paramètres semblent facilement mesurables comme pour le cas du trafic de piéton, il manque de données fiables et reproductibles selon A. Schadschneider et A. Seyfried [Tim09]. La comparaison de résultats avec des données empiriques est un élément important pour la validation des modèles mais elle nécessite que la prise de mesure soit sans ambiguïté (il n'existe pas de consensus sur les méthodes de mesure utilisées pour construire le diagramme fondamental flux-densité).

Enfin, si les modèles permettent de décrire des faits réels bien que stylisés et de comprendre les mécanismes sous-jacents, on peut également s'interroger quant à la prédictibilité de ceux-ci.

1.2 Cas de la modélisation urbaine

Une idée commune ressort des multiples applications des méthodes de la physique statistique aux phénomènes sociaux. Une compréhension qualitative de la dynamique ne demande pas une compréhension détaillée de toutes les interactions entre les entités du système. Cette idée peut également s'étendre à la compréhension des dynamiques urbaines dans la mesure où l'on s'intéresse aux phénomènes à grande échelle.

1.2.1 Systèmes multi-agents

Deux approches de la modélisation urbaine [Ben99] visent en particulier à comprendre des dynamiques globales à travers les actions individuelles d'entités : les automates cellulaires et les systèmes multi-agents.

Les automates cellulaires sont des réseaux de cellules auxquelles sont associé un état choisi parmi un nombre fini et qui peut varier au cours du temps en fonction du voisinage de la cellule considérée. Ils ont principalement des applications dans la recherche sur les formes d'occupation de l'espace (activité industrielle, commerciale, occupation résidentielle) tandis que les systèmes multi-agents prennent en compte les composantes individuelles. Les modèles multi-agents consistent à simuler des interactions entre agents, les agents seront dans notre cas des individus mais peuvent être des groupes, le but étant de constater des effets visibles sur le système dans sa globalité. Ce type de modélisation se base sur une représentation simplifiée où chaque agent évalue individuellement sa situation. Ainsi, des systèmes issus de domaines variés, liés à l'économie, au transport, à la démographie . . . , bien que par définition complexes, peuvent faire émerger des phénomènes alors appréhendables par des simulations multi-agents. Cette deuxième approche de la modélisation urbaine est celle qui est la plus pertinente dans notre optique de comprendre l'organisation des villes à travers les caractéristiques des individus. Ces deux

concepts sont néanmoins fortement liés historiquement.

L'idée de systèmes multi-agents apparaît dès les années 1940, grâce notamment au mathématicien et physicien Von Neumann qui introduit la notion d'automates [Neu66]. Plus tard, J.Conway propose le "jeu de la vie" qui consiste à simuler la mort et la naissance de "cellules" selon des règles prédéfinies. Avant le développement de ces jeux, une des premières simulations multi-agent est effectuée par l'économiste T.C. Schelling. Dans l'article "Dynamic Models of segregation" publié en 1971, il présente un modèle d'agents où une structure ségrégative émerge alors que les comportements individuels ne permettaient pas de l'anticiper. Ces premières "simulations" ont été réalisées manuellement avec des pions sur un échiquier. Les modèles multi-agents et en particulier le modèle de ségrégation de Schelling n'ont pu vraiment se développer qu'avec l'informatique.

1.2.2 Modèle de ségrégation de Schelling

Le modèle de ségrégation de Schelling, développé dans "Micromotives and Macrobehavior" [Sch78], a été l'une des premières tentatives de simulations multi-agents. La procédure à suivre pour réaliser cette simulation est la suivante : Placez deux types de pièces aléatoirement sur les cases d'un échiquier en limitant l'occupation des cases à une pièce et laissez des cases vacantes qui serviront pour les futurs déplacements. Supposons alors que les types de pièces sont en fait deux types d'agents qui appartiennent à deux groupes différents (homme/femme, théoricien/expérimentateur, windowsien/linuxien ...). Les membres des ces groupes sont dits *satisfaits* (ont une utilité qui vaut 1 en terme économique) s'ils sont en présence de suffisamment d'individus du même groupe. Plus précisément, pour qu'un agent soit satisfait, au moins $\frac{1}{3}$ des 8 sites qui l'entourent (si l'on met de côté les bords) doivent être occupés par des agents du même groupe, on dira que le seuil de tolérance des agents est alors de $\frac{1}{3}$. Avec une configuration de départ aléatoire, certains ne seront donc pas satisfaits (ont une utilité qui vaut 0 en terme économique). Pour y remédier, déplacez ces agents insatisfaits sur les espaces vides les plus proches où ils ont suffisamment de voisins similaires. Le déplacement des agents insatisfaits aura certainement engendré de nouveaux insatisfaits. Trouvez alors les espaces vides les plus proches qui peuvent satisfaire ces derniers. Répétez le processus jusqu'à ce que les individus soient tous satisfaits, ou bien qu'aucun agent ne puisse plus devenir satisfait en se déplaçant. Vous observerez la formation d'amas d'agents similaires : les agents sont ségrégés. Ce résultat est d'autant plus surprenant que les agents ne sont pas spécifiquement intolérants (ils ne demandent qu'un tiers d'agents similaires dans leur voisinage). La ségrégation apparaît alors que les préférences individuelles des agents sont compatibles avec une mixité des groupes. Schelling a testé d'autres règles de déplacement, modifié l'ordre des mouvements, les demandes d'un groupe par rapport à l'autre, etc ... La ségrégation a toujours été observée : ce phénomène est donc robuste.

1.2.3 Analyse du point de vue physique

La modèle de ségrégation de Schelling a suscité l'attention de chercheurs de multiples disciplines, et en particulier de physiciens, pour sa simplicité et les structures non triviales qui en émergent.

Un modèle de tension de surface

Plusieurs études de ce modèle ont d'ailleurs été conduites avec un point de vue "physique". Pour aller dans cette direction, le modèle est systématiquement étudié sur un réseau carré avec de grandes dimensions au lieu d'un échiquier, (8×8) . Citons un premier exemple [VK06] de traitement du modèle où les agents sont assimilés aux particules d'un fluide qui interagissent. L'utilité de chaque agent est interprétée comme une énergie interne. Cette analogie permet de dériver la force qui existe entre les groupes d'agents et qui influence donc la forme des amas. Afin de tester l'évolution de la forme des amas, plusieurs seuils de tolérances et densités d'espaces vides sont envisagés. Deux possibilités sont examinées pour le déplacement d'un agent : l'utilité doit augmenter strictement (dynamique contrainte) ou ne doit pas diminuer (dynamique non contrainte). Le premier cas conduit à des configurations bloquées tandis que dans le deuxième cas, l'organisation des agents rappelle celle d'un liquide. Si l'on tente de résumer cette approche du modèle de ségrégation de Schelling, il en ressort que la formation des amas peut s'expliquer par une tension de surface.

Un modèle de spins

Une façon d'aborder le modèle de ségrégation de Schelling est de traiter les types d'agents comme des spins différents. Si pour certains auteurs, il s'agit juste d'une ligne directrice pour l'étude, pour d'autres, l'analogie est totale.

Une approche purement inspirée de la physique statistique [DCM08] permet notamment de déterminer une fonction de partition relative aux configurations bloquées rencontrées dans le cas d'une dynamique contrainte (en dimension 1). L'existence d'une transition discontinue du nombre d'agents d'insatisfaits dans les configurations finales en fonction de la densité d'espaces vacants (en dimension 2) est prouvée. En ce qui concerne la dynamique non contrainte, les configurations finales n'étant pas gelées par définition, l'objectif de l'étude a été de déterminer des comportements asymptotiques. Lorsque la densité d'espaces vides est augmentée, le système passe d'une phase ordonnée où les deux types d'amas recouvrent le réseau à une phase où les lacunes percolent et empêchent la formation d'amas infinis. Cette analyse montre donc l'existence de transitions de phase qui dépendent en particulier de la densité de lacunes.

D'autres articles [MSS08, SS07] font quant à eux un rapprochement direct entre le modèle d'Ising à température nulle et le modèle de ségrégation de Schelling.

Dans le chapitre 2, j'analyse également le modèle de ségrégation de Schelling en assimilant les types d'agents à des variables de spins. Je tiens à préciser que le but de ce chapitre n'est cependant pas une comparaison entre le modèle multi-agents et des modèles de physique statistique mais consiste bien en une analyse du modèle via la recherche des différentes phases observables et des transitions associées.

1.2.4 Extensions vers un modèle urbain

Plusieurs extensions du modèle de Schelling ont été proposées de façon notamment à tester sa robustesse.

Dans un souci de réalisme, l'article [FVV07] considère, en plus de l'environnement géographique (voisinage spatial), l'environnement social (interactions sociales potentiel-

lement longue portée), stipulant que la ségrégation n'est pas seulement géographique. En particulier, le modèle de Schelling est généralisé sur un réseau de type petit monde, celui-ci étant empiriquement reconnu comme une bonne représentation des structures d'interactions. La ségrégation dépend de la dynamique et non pas de la topologie du réseau.

Pancs et Vriends [PJ07] revisitent par exemple le modèle en modifiant les préférences individuelles des agents. Ainsi, ils montrent à travers plusieurs mesures de ségrégation que même si les agents ont une préférence stricte pour l'intégration parfaite (fonction d'utilité maximale quand les différents types d'agents sont en proportion égale), la ségrégation peut émerger. Le but de leur analyse est dans un premier temps de mettre l'accent sur le caractère générique de la ségrégation. Dans un deuxième temps, ils en déduisent que l'application d'une politique qui prône l'ouverture et de la tolérance envers les cultures différentes via des taxes pour des emménagements allant dans le sens de la ségrégation et des "incitations matérielles" pour des emménagements favorisant l'intégration peut ne pas être la clé de l'intégration. Même sans politique de discrimination, des structures ségrégatives peuvent se dégager à travers les villes. Les préférences individuelles ethniques peuvent à elles seules fortement contraindre la répartition des ethnies.

D'autres extensions du modèle concernent également les fonctions d'utilité. Ces dernières ne dépendent plus seulement des préférences individuelles sur la composition ethnique du voisinage mais contiennent également une composante financière. Ce type d'approche a été emprunté par Zhang [Zha04]. Dans la variante qu'il propose, un prix est associé à chaque site. Ce prix est d'autant plus élevé que la densité (tous types d'agent confondus) du voisinage l'est. L'utilité des agents dépend alors à la fois de ce prix et la composition du voisinage. Elle est maximisée par la minimisation de ce prix et la réalisation des préférences individuelles ethniques. Dans cette version, un des groupes d'agents est indifférent quant à la présence d'agents différents tandis que l'autre a une préférence de "type Schelling" (un agent de ce groupe exige un pourcentage minimum d'agents similaires dans son voisinage). Malgré cela, les préférences d'un des deux groupes suffisent à faire naître la ségrégation. De plus, les prix payés par les agents ayant des préférences ethniques sont les plus élevés ce qui assure l'absence des agents de l'autre type dans leur voisinage. Cette extension constitue donc un modèle simplifié de marché immobilier insistant une fois de plus sur la persistance de la ségrégation.

L'article cité précédemment montre la nécessité d'introduire une composante financière dans le modèle si on veut se rapprocher d'un modèle plus réaliste. Cependant il n'introduit pas de notions d'accessibilité. Ainsi, tous les agents peuvent s'installer sans contrainte sur un site qui maximise leur utilité. Pour continuer vers un modèle plus proche des réalités économiques, les capacités d'accéder aux sites doivent être différenciées selon les agents. Autrement dit, si un site est acceptable du point de vue de l'utilité d'un agent, l'installation ne doit pas être systématique mais être en accord avec les capacités financières de l'agent. En plus d'introduire la notion d'accessibilité, il apparaît pertinent d'attribuer un niveau d'attractivité différent selon les sites (proximité des transports, services, ...).

Le modèle de simulation (multi-agent) de ségrégation résidentielle SimSeg implémenté par M. Fossett [FS03] intègre ces deux aspects. Un niveau de qualité (représenté par une variable uniformément distribuée à travers le réseau) est attribué à chaque site. Cette

quantité détermine le prix de l'emplacement. Les agents s'installent sur un site si leurs préférences individuelles sont compatibles avec ce site et si leur statut socio-économique le leur permet étant donné le prix, le statut leur ayant été attribué aléatoirement.

Un modèle plus complexe développé dans [BW07] prend également en compte la notion de distance sociale entre les agents. Selon les auteurs, l'essentiel de la dynamique urbaine peut être capturé en considérant la richesse et le statut des agents même si la dynamique d'attrait des quartiers repose sur des critères culturels complexes. L'extension proposée considère d'une part richesse et statut des agents, de l'autre accessibilité et attrait des résidences (Le "statut" n'a pas le sens de celui introduit par M. Fossett puisqu'il concerne ici la place de l'agent dans la société (popularité ...)). Le statut et la richesse sont représentés par des variables respectivement distribuées continûment de 0 à 1 et selon une loi normale. L'attrait d'un site est la moyenne des statuts des agents présents dans le voisinage. Le prix d'un site comporte une composante endogène relative à la richesse des agents du voisinage et une composante exogène attribuée aléatoirement. Concernant la dynamique, chacun des agents choisit le site le plus attrayant et s'y installe si sa capacité financière est suffisante. Parmi les hypothèses envisagées, les auteurs remarquent qu'une corrélation entre richesse et statut augmente le niveau de ségrégation par richesse et statut et que l'endogénéité des prix va de paire avec la ségrégation. Cela suggère que si le statut des agents est basé sur des critères autres que financiers (culturels ...), le niveau de ségrégation pourrait diminuer.

Il ressort de cette littérature la nécessité de ne pas trop complexifier le modèle mais d'introduire les caractéristiques les plus représentatives des agents en ayant en tête le cadre de la problématique socio-économique ciblée. Il faut pouvoir prendre en compte les caractéristiques minimales des agents et du réseau tout en capturant des phénomènes pertinents dans un contexte socio-économique.

Dans cet optique, je propose tout d'abord dans le chapitre 3 une version ouverte du modèle de Schelling donnant la possibilité de migrations externes en plus des migrations internes. Cette extension du modèle est effectuée en se servant du lien établi dans le chapitre 3 entre le modèle de Schelling et un modèle de spins existant. Les migrations se font non seulement en accord avec les préférences individuelles des agents sur la composition de leur voisinage et également en tenant compte d'un facteur d'attrait de la ville (représenté par une variable attribuée au réseau relativement à l'extérieur).

1.2.5 Confrontation avec des observations empiriques

Les études du modèle de ségrégation de Schelling et de ses variantes ont permis de comprendre les éléments essentiels, de comprendre les modifications que l'on devait apporter et les éléments à introduire. Pour approcher des modèles réalistes, il est nécessaire de s'éloigner du modèle de Schelling mais en gardant en tête ce qu'il nous a permis de comprendre dans un objectif de modélisation urbaine.

Les caractéristiques pertinentes des agents à prendre en compte se dessinent largement au vu de la littérature. L'étape suivante concerne donc la confrontation des modèles comprenant ces caractéristiques avec des faits réels, en particulier avec des données empiriques. Le contact avec les faits réels peut se faire dans le but de la modélisation ou de la validation du modèle. J'évoquerais des exemples en rapport avec ces deux approches.

Selon [KS02], la ségrégation raciale dans les résidence universitaires est un bon candidat pour une étude en confrontation avec des données réelles car il est en théorie exempt de toute politique de discrimination. Des tendances peuvent être dégagées à partir de ces données. Si l'on s'intéresse à un cadre d'étude plus large, des données sur les préférences ethniques de certaines populations américaines sont disponibles. Un article [CF08] stipule d'ailleurs que les variantes du modèle de ségrégation de Schelling devrait se baser sur ces données. Les structures seraient ainsi beaucoup plus complexes étant donné le nombre d'ethnies à prendre en considération et l'asymétrie des préférences entre ethnies.

Dans cet esprit, l'article [BOH02] utilise une base de données pour construire son modèle et pour valider ses résultats. Ce modèle explique la dynamique de distribution ethnique de Yaffo (zone de Tel Aviv) durant la période 1955-1995. Des données permettent notamment aux auteurs de connaître la zone géographique d'interactions des individus en fonction de leur localisation résidentielle. Les caractéristiques des agents sont ici la religion et l'origine ethnique. Partant de ces éléments, le modèle prétend reproduire la répartition des individus.

Une dynamique similaire à celle du modèle de ségrégation de Schelling a été traitée dans [Bru06] en se basant sur de données du "Los Angeles Family and Neighborhood Survey". Le réseau spatial est construit de façon à reproduire les secteurs de recensement. Pour que l'espace dans lequel les agents évoluent soit relié à la géographie de la ville, des données cartographiques (Geographic Information systems) sont également utilisées. Le voisinage d'un agent est alors constitué des individus présents dans son secteur de recensement et dans les secteurs contigus. Quant aux fonctions d'utilité des agents, elles sont basées sur les préférences d'habitation des individus dégagées grâce à une étude rétrospective des mobilités résidentielles. Les prix des résidences sont fixés en fonction des revenus des habitants d'un quartier et les zones plus chères sont considérées comme les plus attractives. Plusieurs cas sont traités. Dans le cas où seules les préférences ethniques sont prises en compte, le niveau de ségrégation augmente au cours des simulations. En revanche, il diminue lorsque seuls les revenus des agents sont considérés. Enfin, lorsque les deux éléments sont combinés, le comportement du niveau de ségrégation n'est pas trivial. Il peut ne pas être élevé entre certaines ethnies mais importants entre autre ethnies.

Dans le registre des dynamiques résidentielles, les modèles de choix discrets ont beaucoup été développés, pour ce qui est de la confrontation de ce type de modèle avec des données empiriques, on peut citer une étude sur le marché de l'immobilier en Ile de France [dPW07] qui traite de l'influence de la saturation des demandes par rapport aux offres sur les choix résidentiels.

Dans le chapitre 4, je me détache du modèle originel de ségrégation de Schelling tout en ayant à l'esprit les paramètres qui se sont révélés importants dans le cadre d'une étude de l'organisation urbaine et en particulier de la ségrégation socio-spatiale. Je m'attaque ainsi à un modèle multi-agent de marché de l'immobilier. Les principaux ingrédients du modèle sont l'accessibilité (en relation avec les capacités financières des agents) et l'attractivité des emplacements résidentiels. Les résultats sont confrontés à des données réelles sur les transactions immobilières de la ville de Paris.

Analyse du modèle de ségrégation de Schelling

Le but de ce chapitre est de comprendre en détail le modèle de ségrégation de Schelling. Cette compréhension se fait via l'utilisation de concepts issus de la physique statistique, en particulier les transitions de phase. Dans un premier temps, le modèle est généralisé de façon à avoir un aperçu plus large de la phénoménologie possible du modèle. Une première approche numérique du modèle, ainsi généralisé, est tout d'abord effectuée. Les simulations numériques permettent en outre de voir que l'émergence du phénomène de ségrégation n'est pas systématique. Une mesure de ségrégation est donc introduite pour quantifier le phénomène. Un lien entre le modèle de ségrégation de Schelling et un modèle de spins, le modèle de Blume-Emery-Griffiths est ensuite mis en évidence. Cette correspondance devient alors un guide pour l'analyse du modèle. Cette vision du modèle permet de conclure en l'existence de plusieurs phases en plus d'une phase ségrégée et de déterminer la localisation des transitions associées à ces phases. Un diagramme de phase résume l'ensemble de ces résultats. Enfin, la robustesse de ces résultats est testée via plusieurs variantes du modèle.

La ségrégation et en particulier la ségrégation raciale dans les villes est une problématique abondamment abordée depuis de nombreuses années. Elle peut être le résultat de politiques de discrimination au niveau global mais également être issue de la combinaison des intentions individuelles. L'économiste Schelling s'est focalisé sur ce second aspect. Un des points intéressants est qu'un comportement collectif peut ne pas être directement intuitif à partir des volontés individuelles et inversement. Le modèle dynamique de ségrégation introduit par Schelling en 1971 [Sch78], illustre particulièrement bien ce fait. Schelling a développé ce modèle en ayant pour principale préoccupation la ségrégation raciale dans les villes américaines. Cependant le modèle a l'avantage d'être suffisamment abstrait pour pouvoir être adapté à l'étude de divers types de ségrégation

(par sexe, par âge, par revenu...). Le *modèle de proximité spatiale* constitue ainsi une approche de la ségrégation au sens large. Ce modèle fait émerger des structures ségrégatives qui ne sont pas un reflet direct des préférences individuelles. Il est alors devenu un paradigme en sciences sociales mais sa portée ne s'arrête pas à ce domaine. Du fait, que ce modèle soit simple et fasse en même temps ressortir des aspects non triviaux a amené des scientifiques de divers disciplines à s'y intéresser. En particulier, le modèle a été beaucoup traité par les physiciens. L'étude des corrélations macroscopiques (ségrégation) et microscopiques (décisions individuelles) le rendent en effet pertinent dans un contexte de physique statistique.

2.1 Modèle de proximité spatiale

Le modèle de ségrégation de Schelling, introduit dans les années 1970, montre l'émergence de ségrégation spatiale sans que les individus aient un comportement ségrégatif. Dans ce système multi-agents, deux types d'agents sont considérés, chaque type appartient à un groupe homogène défini par une caractéristique socio-économique (race, niveau de revenus...). 60 agents de deux types différents cohabitent sur un échiquier, soit un réseau 8×8 , et y occupent respectivement les cases blanches et noires (sauf les 4 coins) formant ainsi une configuration complètement *intégrée*. Chacun de ces agents a un voisinage constitué des agents placés sur les sites attenants et les sites voisins diagonaux et a donc entre 0 et 8 voisins. Un agent est alors dit satisfait si au moins $\frac{1}{3}$ de ses voisins sont similaires. Ainsi, pour un agent ayant 6, 7 ou 8 voisins, au moins 3 voisins doivent être similaires, pour 3, 4 et 5 voisins, au moins 2 et pour 1, 2 et 3, au moins 1. En terme économique, un agent satisfait a une utilité de 1 et un agent insatisfait une utilité nulle 0. Si l'on omet les bords, dans la configuration intégrée, les agents sont tous satisfaits. Créons alors une perturbation par le retrait de 20 agents et le remplacement de 5 agents (d'un des deux types avec une probabilité $\frac{1}{2}$) sur un des sites vacants choisis aléatoirement. Dans ce cas, 19 sites restent vacants et certains agents sont maintenant insatisfaits. Déplaçons ces derniers sur les sites vacants les plus proches qui leur permettent de remplir la condition de satisfaction. Ces déplacements engendrent de nouveaux agents insatisfaits puisque les agents, en partant d'un site et en arrivant sur un autre modifient les voisinages des deux sites correspondants. Les agents devenus insatisfaits suite à ces mouvements doivent à leur tour être déplacés sur les sites vacants les plus proches qui sont satisfaisants. Le processus est réitéré jusqu'à ce que (i) les agents finissent par être tous satisfaits ou (ii) plus aucun mouvement ne puisse augmenter l'utilité des agents. Notons qu'à une configuration initiale peuvent être associées plusieurs configurations finales puisque les mouvements ne se font pas dans un ordre spécifique. Les configurations finales engendrées sont cependant toutes constituées de régions composées uniquement d'agents du même type. Un exemple de configuration initiale et d'une configuration finale possible est illustrée sur la figure 2.1. Comme le montre la figure 2.1 et comme Schelling l'a remarqué en testant plusieurs processus, les agents d'un même type forment des amas, faisant ainsi apparaître de la ségrégation alors que les agents n'étaient pas spécialement intolérants. Le comportement collectif s'avère donc ici plus fort que les préférences individuelles des agents, cet aspect du modèle de ségrégation de Schelling fait qu'il est

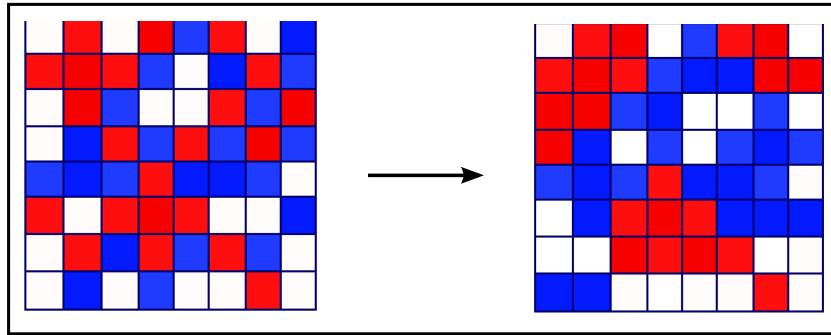


FIG. 2.1: Exemple d'une configuration initiale (considérée intégrée) d'agents et de sites vacants et d'une configuration finale possible. Les sites rouge et bleu correspondent aux deux types d'agents, les sites blancs sont vacants.

considéré en sciences sociales comme le paradigme des phénomènes globaux émergeant à partir d'interactions sociales.

2.2 Généralisation du modèle de proximité spatiale

Une généralisation du modèle de ségrégation de Schelling paraît naturelle dans la mesure où l'on souhaite explorer toute la richesse des phénomènes qui en émergent. Le réseau initial utilisé par Schelling est un échiquier, c'est-à-dire un réseau de petite taille. Cette limitation se voulait pratique car les simulations réalisées par Schelling étaient manuelles. Afin de vérifier que l'émergence de la ségrégation n'est pas un effet de taille finie, il convient d'utiliser des réseaux carrés avec de larges dimensions. Nous considérons donc dès à présent le modèle de proximité spatiale sur de grands réseaux, en se limitant toutefois à des tailles compatibles avec un temps de simulation suffisamment court.

Réseau et voisinage

Redéfinissons précisément le modèle qui va être traité. On considère un réseau carré constitué de lacunes et de sites de deux couleurs différentes, les deux couleurs peuvent par exemple représenter deux types d'individus qui diffèrent par leur race, leur richesse. . . Les lacunes peuvent s'interpréter comme des sites vides où les individus ont la possibilité de se déplacer. Pour simplifier, les sites des deux couleurs seront cités comme les agents de types A et B ou rouge et bleu. Les agents des deux types sont présents dans les mêmes proportions sur le réseau. Les densités de lacunes et d'agents sont fixés. Le système est fermé.

Un voisinage est associé à chaque agent. En particulier, le voisinage de Moore de rayon r d'un agent de coordonnées (x, y) est constitué des sites de coordonnées (x_v, y_v) qui satisfont :

$$\max(|x - x_v|, |y - y_v|) \leq r \quad (2.1)$$

La figure 2.2 montre l'exemple d'un voisinage de rayon 1. Le voisinage pris en compte par la suite est un voisinage de Moore de rayon 1 (à moins que contraire ne soit spécifié).



FIG. 2.2: Le tracé rouge délimite le voisinage de Moore de rayon 1 de l'agent B qui est encadré.

Condition de satisfaction

La composition du voisinage d'un agent détermine si ce dernier est satisfait ou non. Un agent est satisfait ou en d'autres termes, a une utilité u qui vaut 1, quand son voisinage est constitué d'un nombre d'agents différents N_d inférieur à une proportion T donnée de l'ensemble des agents constituant leur voisinage. Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \text{Si } N_d \leq T(N_d + N_s), u &= 1 \text{ agent satisfait} \\ \text{sinon } u &= 0 \text{ agent insatisfait} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où N_s est le nombre de voisins similaires. Le paramètre T est appelé la tolérance. Dans le modèle original de ségrégation introduit par Schelling, les agents exigent au moins $\frac{1}{3}$ d'agents similaires parmi leurs voisins : ceci revient à considérer une tolérance égale à $\frac{2}{3}$.

Quelques simulations numériques

Dans le but d'avoir un aperçu de la phénoménologie du modèle, quelques simulations ont tout d'abord été effectuées sur des réseaux de taille 100×100 avec des conditions aux bords libres. Les deux types d'agents sont présents en nombre égal sur le réseau et ont la même tolérance T . Sur les figures suivantes, les pixels rouges et bleus correspondent aux deux types d'agents A et B. Les pixels blancs sont les lacunes dont le nombre est donné par la valeur de C_v . Le réseau initial est construit aléatoirement. Dans une telle configuration, certains agents peuvent ne pas être satisfaits. Une dynamique régulant le déplacement des agents est donc appliquée de façon à ce que chaque agent soit entouré d'un voisinage compatible avec une utilité valant 1. La dynamique suivante est utilisée. A chaque étape :

1. Un agent est sélectionné au hasard.
2. Une position vacante est choisie aléatoirement.
3. Si l'utilité de l'agent augmente strictement avec le voisinage du site vacant, l'agent se déplace sur ce site. Dans le cas contraire, il reste à sa place. Cela traduit notamment le fait qu'aucun agent satisfait ne se déplace (impliquant une inertie sur le système).

Cette dynamique est reproduite jusqu'à ce qu'aucun individu ne puisse améliorer son utilité. On parle alors de configurations bloquées, celles-ci sont représentées sur la figure 2.3 pour 3 valeurs différentes du nombre de lacunes $C_v = 200, 1000, 3000$, et 3 valeurs

de la tolérance T . Rappelons qu'une plus grande valeur de T correspond à une plus grande tolérance vis à vis de la présence d'agents différents dans l'entourage d'un agent. Les simulations dont les configurations ont été représentées sur la figure 2.3 sont issues de mes propres programmes mais ont déjà été réalisées dans [VK06]. Elles ont servi à débiter ma réflexion sur le modèle de ségrégation de Schelling.

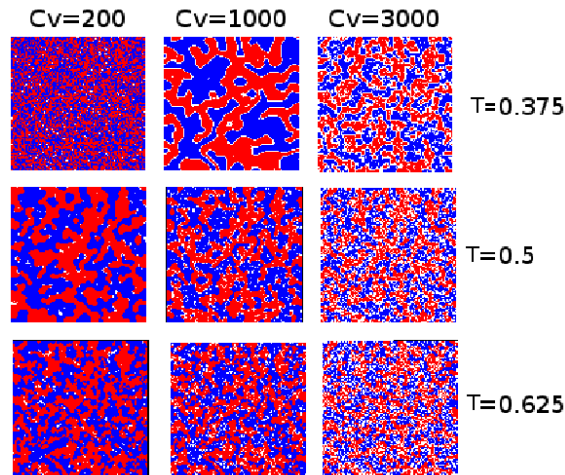


FIG. 2.3: Simulations pour différentes valeurs des paramètres C_v et T .

Le tableau 2.4 permet de comparer la densité d'agents insatisfaits présents initialement et restants à l'issue de la dynamique. Le nombre d'insatisfaits est bien entendu plus élevé initialement pour des tolérances faibles que pour des tolérances modérées ou élevées. Le nombre d'insatisfaits tend vers 0 dans l'état final sauf dans le cas $T = 0.375$ et $C_v = 200$.

T/ C_v	200		1000		3000	
	$\#_{i/f}$	$\%_{i/f}$	$\#_{i/f}$	$\%_{i/f}$	$\#_{i/f}$	$\%_{i/f}$
0.375	6577	67	6393	71	5087	73
	6052	62	104	1	195	3
0.5	3957	40	3939	44	3058	44
	79	0.8	80	0.9	98	1.4
0.625	1699	17	2042	23	2094	30
	46	0.5	46	0.5	54	0.7

FIG. 2.4: Nombres et pourcentages d'insatisfaits initiaux et finaux selon les valeurs de T et C_v

Dans le cas d'une faible tolérance, $T = \frac{3}{8}$ et d'un faible nombre de lacunes C_v , les agents peuvent difficilement obtenir une utilité de 1. Le peu de cases vides C_v associé à la forte volonté d'être en majorité parmi son entourage bloquent le réseau sur une

situation mélangée où peu d'agents sont satisfaits. En augmentant le nombre de cases vides, les agents ont plus facilement une utilité de 1. En effet, le nombre de cases vides permet de créer des frontières constituées de lacunes séparant les agents A (rouge) des agents B (bleu). De façon générale, d'après les résultats répertoriés dans le tableau 2.4, la dynamique utilisée permet de satisfaire la majorité des agents sauf dans le cas où un taux de case vide bas est conjugué à une faible tolérance.

En optant pour une dynamique sans inertie, c'est-à-dire en permettant aussi les déplacements au cours desquels l'utilité reste la même (ceci ayant pour conséquence que les agents qui ont déjà une utilité satisfaisante ont la possibilité de se déplacer), on obtient de plus gros amas d'éléments rouges et bleus. La figure 2.5 illustre ceci, des amas de plus en plus gros se forment au cours de l'évolution. Dans cette simulation, les agents

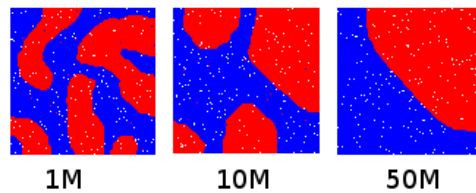


FIG. 2.5: Evolution des simulations pour $T = 0.5$ et $C_v = 200$ en fonction du nombre d'étapes dans un cas sans inertie. M désigne un nombre d'étapes de dynamique

testent les lacunes sans ordre de priorité, c'est-à-dire aléatoirement. En changeant les conditions aux bords, on constate également la formation de larges amas. Pour éviter que le système ne finisse dans un état où des amas se forment mais soit gelé rapidement (car les agents satisfaits ne se déplacent pas), le déplacement des agents satisfaits doit être pris en compte. De plus, une règle moins stricte s'avère plus réaliste. Il semble peu probable qu'une fois satisfaits, les agents ne se retrouvent pas confrontés à une situation extérieure (une mutation par exemple) qui les pousse à déménager.

2.3 Simulations numériques

La dépendance des résultats précédents vis-à-vis de la tolérance et du nombre de cases vides suggère que nous devons jouer sur les deux paramètres pour explorer le large éventail des configurations possibles. Ainsi, les deux paramètres de contrôle du modèle seront la tolérance T et la densité de lacunes ρ . Les nombres d'agents bleus et rouge sont fixés et égaux durant toute la simulation.

Le déplacement des agents satisfaits est maintenant autorisé. Les règles de dynamique sont alors les suivantes. Un agent, satisfait ou non, est choisi aléatoirement sur le réseau. Des lacunes choisies également aléatoirement sont testées comme potentielles destinations pour l'agent. Dès qu'un site vacant procure un voisinage satisfaisant à l'agent, c'est-à-dire vérifiant la condition de satisfaction 2.2, l'agent se déplace sur le site en question. La condition minimale d'arrêt de cette dynamique est alors la stabilisation du nombre d'agents satisfaits : seules de faibles variations sont tolérées.

Deux points liés à la généralisation du modèle doivent être remarqués :

(i) Ayant introduit le déplacement des agents satisfaits, l'utilité globale, c'est-à-dire la somme des utilités de tous les agents, peut décroître durant la dynamique, du fait que le gain (correspondant à la variation d'utilité au cours du déplacement : 0 ou 1) pour l'agent déplacé peut s'avérer moins important que la perte (variation de l'utilité due au départ et à l'arrivée de l'agent) nette pour ses anciens et nouveaux voisins.

(ii) De plus, étant donné que le voisinage ne comporte que 8 sites, seulement un nombre fini de valeurs de la tolérance sont pertinentes, $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}$. Elles correspondent au nombre maximal de voisins différents tolérés divisé par le nombre effectif de sites occupés dans le voisinage. N'importe quelle autre valeur de T est équivalente à la valeur directement inférieure qui est pertinente.

Evolution au cours de la dynamique

Des simulations ont été réalisées sur un réseau carré $L \times L$ avec $L = 50$ (à moins que le contraire ne soit spécifié) avec des conditions aux bords libres. Les configurations initiales où les densités d'agents et de lacunes sont fixées, ont été générées aléatoirement de façon à ce que les deux types d'agents et les lacunes forment des configurations complètement intégrées. La dynamique décrite précédemment est appliquée. Pour l'étude de ces simulations, la densité d'agents satisfaits est un bon indicateur de la convergence du système vers l'état stationnaire (pourvu qu'il existe) cependant elle ne suffit pas à elle seule à garantir que le système a atteint cet état. La figure 2.6 donne l'évolution de la

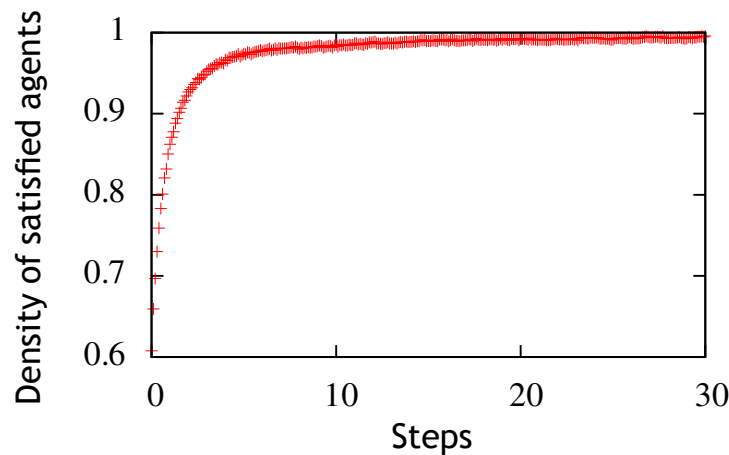


FIG. 2.6: Evolution de la densité d'agents satisfaits en fonction des étapes de dynamique pour $\rho = 5\%$ et $T = 0.5$. Environ 60% des agents sont initialement satisfaits. La majorité des agents deviennent rapidement satisfaits, après seulement 10 étapes (une étape correspond à une visite de tous les sites du réseau en moyenne). La densité des agents est très proche de 1.

densité d'agents satisfaits au cours de la dynamique dans un cas où la densité de lacunes est faible $\rho = 5\%$ et la tolérance modérée $T = 0.5$. ($T = 0.5$ signifie qu'un agent accepte au plus que la moitié de ses voisins soient différents de lui.) Les configurations associées à l'évolution dynamique pour $T = 0.5$ et $\rho = 5\%$ sont illustrées sur la figure 2.7. Des

amas se forment très rapidement et deviennent de plus en plus larges au cours du temps. D'après la courbe représentée sur la figure 2.6, l'évolution du nombre d'agents satisfaits

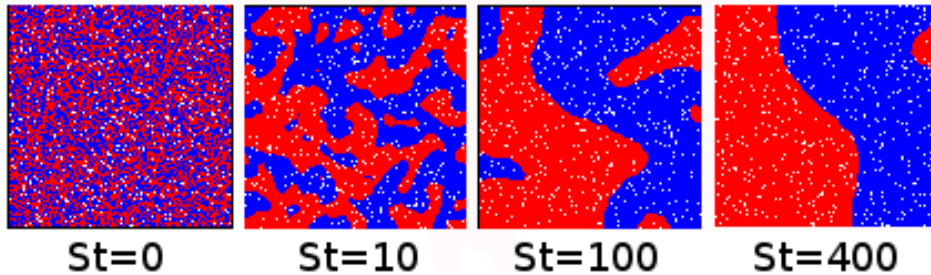


FIG. 2.7: Evolution d'une configuration pour une densité de lacunes $\rho = 5\%$ et une tolérance $T = 0.5$ avec un réseau de taille $L = 100$. St détermine le nombre de pas de temps, un pas correspondant à une tentative testée par site occupée comparable à une étape Monte-Carlo. Les pixels rouge et bleu correspondent aux deux types d'agents, les blancs aux lacunes. Le système évolue d'une configuration aléatoire – où les agents et les lacunes sont parfaitement mélangés – vers une configuration complètement ségrégée. Après seulement dix étapes, il existe des amas percolants, de chaque type, qui sont de type fractal.

est très rapide, les agents sont rapidement presque tous satisfaits. La stabilisation de la densité d'agents satisfaits autour de sa valeur maximale coïncide avec l'apparition des premiers amas. Cependant la structure des amas continue de changer après que la densité d'agents satisfaits a atteint une valeur stable. Ceci confirme que des fluctuations faibles de la densité d'agents satisfaits n'assurent pas que le système a atteint un état stationnaire. La dynamique continuant, les amas deviennent en effet de plus en plus compacts et bien distincts, leur surface devient moins ondulée, ce qui rappelle fortement les effets de "coarsening" dans les alliages [Bra94]. L'analyse rapide de l'évolution des configurations au cours de la dynamique montre donc qu'il est nécessaire d'introduire d'autres quantités que la densité d'agents insatisfaits pour détecter l'arrivée à l'équilibre. Aussi, l'émergence de la ségrégation est bien confirmée pour $\rho = 5\%$ et $T = 0.5$.

Configurations typiques

Considérons maintenant un plus large éventail des valeurs des paramètres T et ρ . la figure 2.8 montre les configurations obtenues après qu'on a laissé le système évoluer avec la dynamique décrite précédemment jusqu'à atteindre l'équilibre. Ce qui est entendu par équilibre correspond possiblement à deux cas : (i) le système n'évolue plus du tout (point fixe) ; (ii) le système atteint un état stationnaire : les fluctuations des paramètres étudiés (qui seront introduits ultérieurement) restent faibles durant un grand nombre d'étapes. Les valeurs de T et ρ auxquelles les configurations ont été représentées ont été choisies de façon à mettre en évidence les changements de régimes. Pour $\rho = 2\%$, les valeurs $T = \frac{1}{5}$ et $T = \frac{3}{7}$ sont telles qu'aucun changement notable n'est décelable pour les valeurs comprises entre ces deux tolérances. Il en est de même pour les valeurs $T = \frac{1}{2}$ et $T = \frac{5}{7}$. En revanche, il apparaît un changement significatif entre les deux valeurs consécutives

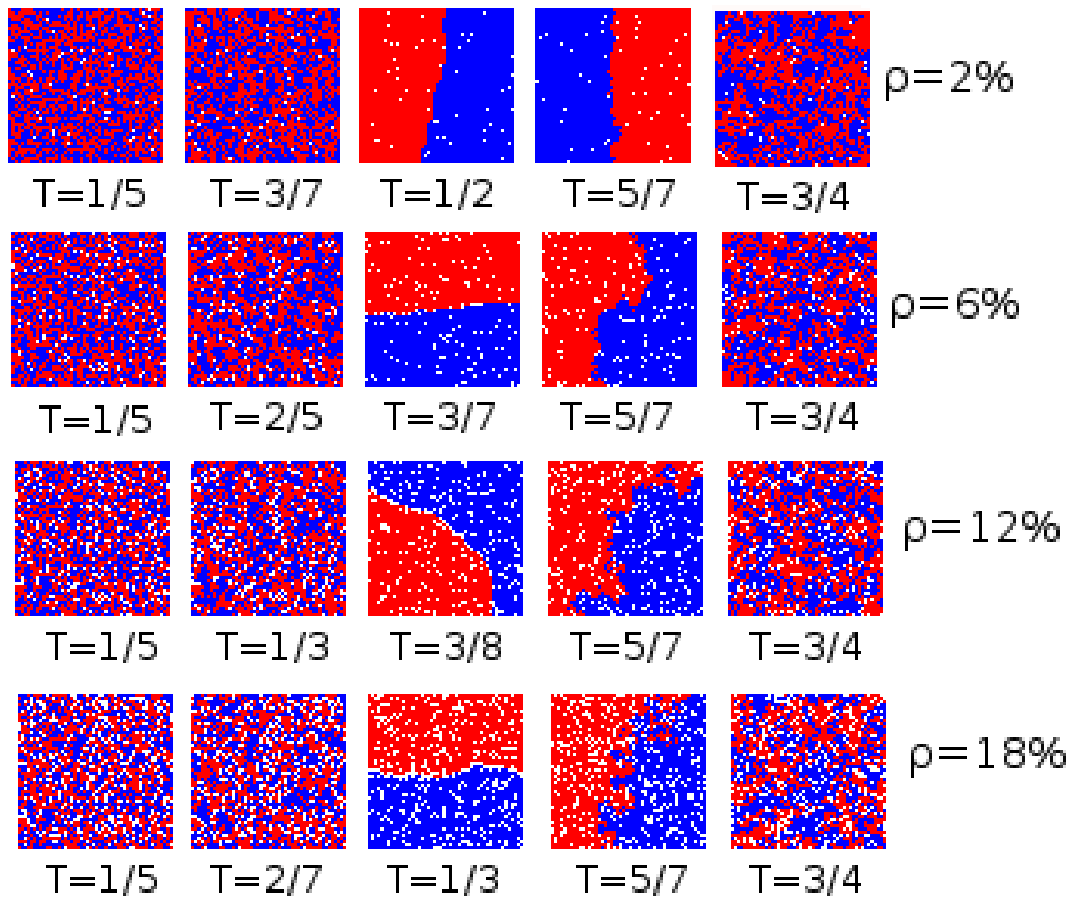


FIG. 2.8: Configurations obtenues pour des valeurs sélectionnées de ρ et T .

de la tolérance $T = \frac{3}{7}$ et $T = \frac{1}{2}$ tout comme entre les deux valeurs consécutives de la tolérance $T = \frac{5}{7}$ et $T = \frac{3}{4}$. Les valeurs pour les quelles les configurations relatives aux densités de lacunes $\rho = 6\%$, 12% , 18% ont été représentées, ont été sélectionnées de la même façon. De manière générale, les configurations de la figure 2.8 mettent en évidence l'apparition d'au moins deux régimes : l'un est ségrégé, l'autre est mélangé. Pour les valeurs de ρ qui ne sont pas trop élevées, c'est-à-dire du même ordre que celles qui sont représentées sur la figure 2.8, on observe les faits suivants :

1. Pour les basses valeurs de la tolérance, le système reste dans un état mélangé, aucun grand amas n'est formé bien que ce cas serait plus satisfaisant pour les agents. Quelque soit la configuration initiale, le système reste proche de l'état duquel il est parti : il s'agit d'un état gelé dynamiquement. Le nombre de lacunes est limitant pour la satisfaction des agents. Les possibilités de mouvement sont trop faibles pour arriver à une configuration qui satisfasse tous les agents.
2. Lorsque T augmente pour une valeur fixe de ρ , un changement brutal a lieu : les agents, précédemment mélangés, se séparent alors pour finalement former deux régions homogènes de différentes couleurs, la ségrégation émerge. Ce comportement subsiste sur un intervalle de T qui dépend de ρ .
3. En augmentant encore la valeur de la tolérance avec ρ fixe, la configuration d'équilibre devient à nouveau mélangée. La valeur de la tolérance à laquelle ce changement de régime a lieu semble ne pas dépendre de la densité de lacunes à laquelle on se place.

Des analyses quantitatives et qualitatives viendront vérifier et compléter ces observations. Dans le cas de densités de lacunes élevées, on rencontre des comportements différents de ceux observés pour des valeurs petites et modérées des densités de lacunes. La figure 2.9 est l'exemple d'une configuration typique obtenue pour $T = \frac{1}{5}$ et $\rho = 50\%$. Des structures ségrégées émergent clairement bien que le grand nombre de lacunes pourrait a priori éviter les contacts entre agents différents. Une densité de lacunes égale à 66%



FIG. 2.9: Configurations d'équilibre pour $\rho = 50\%$ et $T = \frac{1}{5}$

n'est pas encore assez importante pour limiter les contacts entre agents, de ce fait une configuration ségrégée apparaît encore quand les agents sont peu tolérants. En particulier, la configuration de gauche de la figure 2.10 où $T = \frac{1}{2}$ montre clairement que les agents

de même couleur se regroupent dans les mêmes régions. Quand la tolérance est élevée, par exemple quand T vaut $\frac{4}{5}$, les configurations typiques (cf. figure 2.10, gauche) sont intégrées, on ne remarque pas de structure particulière. Pour les densités de lacunes

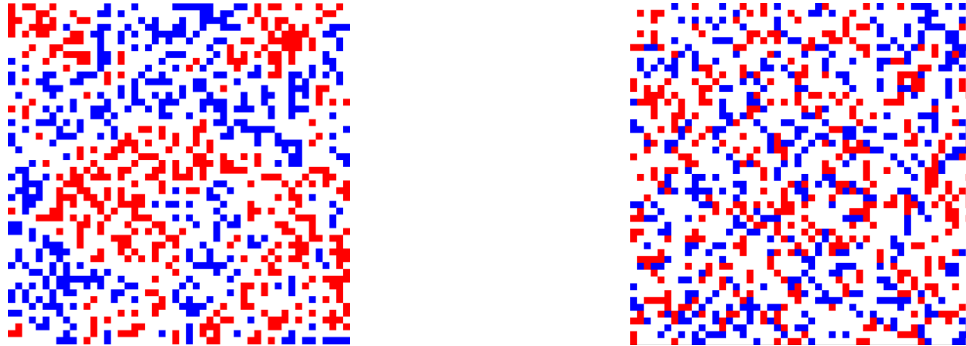


FIG. 2.10: Configurations d'équilibre pour $\rho = 66\%$: $T = \frac{1}{5}$ à gauche et $T = \frac{4}{5}$ à droite.

importantes, une transition continue de l'état ségrégué vers celui désordonné (mélangé) a lieu quand T augmente.

De manière générale, les lacunes se répartissent uniformément sur le réseau. Cette répartition est due à la condition de satisfaction qui s'exprime en fonction de la fraction d'agents différents et non pas d'un nombre, ce qui est conforme au modèle introduit par Schelling. Si le nombre de voisins différents tolérés est limité par une constante et non pas par une fraction d'agents, les amas formés d'agents, même petits sont compacts, ils ne contiennent pas de lacunes (cf. [SW09]). Les lacunes sont à l'extérieur des amas. Dans le cas traité ici, il se peut que les lacunes ne se répartissent pas uniformément et se placent notamment à la frontière entre amas rouge et bleu, mais ce phénomène reste marginal. Il n'apparaît que pour certaines tolérances et densités de lacunes bien spécifiques (cf. figure 2.8, $T = \frac{1}{3}$, $\rho = 18\%$).

Cette section nous a permis d'exhiber différents régimes selon les valeurs des paramètres. Une description plus quantitative ainsi qu'une caractérisation des différentes phases s'avèrent nécessaires.

2.4 Etude quantitative

La section qui suit fournit une étude quantitative des états d'équilibre du système et donne un aperçu de la nature des transitions de phase entre les différents états.

2.4.1 Rappel des indices de ségrégation existants

Les espaces urbains se retrouvent confrontés à des problèmes de ségrégation à plusieurs niveaux (économique, ethnique...). Dans ce contexte, de nombreuses mesures de ségrégation ont ainsi été élaborées pour quantifier le phénomène. Elles sont en fait classées selon 5 dimensions suite à une analyse comparative de celles-ci par Massey et Denton [MD88] : égalité, exposition, concentration, agrégation spatiale, centralisation. Je ne rentrerai pas dans le détail de chacune des dimensions, une des raisons étant que, selon

l'étude comparative, l'amplitude de la ségrégation est principalement exprimée à travers les dimensions égalité et exposition.

Les *indices de ségrégation et dissimilarité* introduits par O. D. Duncan et B. Duncan [DB55] en 1955 figurent parmi les premières mesures les plus développées et utilisées. Ces indices se basent sur la définition suivante de l'intégration : les proportions globales des groupes sociaux, c'est-à-dire dans toute la ville, doivent être les mêmes au niveau local, c'est-à-dire dans les quartiers. Par exemple, si une ville comporte 20% de personnes avec une caractéristique X et 80% avec une caractéristique Y (avec X et Y non compatibles), alors dans chaque quartier on doit retrouver 20% de X et 80% de Y . Si tel est le cas, on parle d'une *distribution parfaite*. Les indices de ségrégation et de dissimilarité mesurent l'éloignement par rapport à la distribution parfaite. Ces mesures nécessitent donc un découpage de la ville en n zones géographiques indexées par i . Plaçons nous dans le cas où il existe plus de deux types de populations (X, Y, Z, \dots). Soit alors x_i (y_i, z_i, \dots) la taille de la population X (Y, Z, \dots) dans la zone i . Soit t_i et $T = X + Y + Z + \dots$ respectivement les tailles des populations totales dans la zone i et dans la ville. Avec ces définitions, l'indice de ségrégation $S(X)$ définie pour une population X s'écrit :

$$S(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{X} - \frac{t_i - x_i}{T - X} \right| \quad (2.3)$$

et varie de 0, quand la ville est intégrée à 1. La valeur de l'indice de ségrégation exprime ainsi la part du groupe X qui devrait déménager afin que la distribution des X soit compatible avec une distribution L . L'indice de dissimilarité entre deux populations X et Y , largement employé par les démographes s'exprime de la manière suivante :

$$ID(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{x_i}{X} - \frac{y_i}{Y} \right) \right| \quad (2.4)$$

et varie également de 0 à 1. Sa valeur quantifie la part du groupe X (ou du groupe Y) qui devrait se déplacer afin que les populations X et Y suivent les mêmes distributions.

L'utilisation de ces indices ne peut se faire que de manière nuancée car le découpage influence fortement le résultat. En effet, il apparaît clair que ces indices diminuent avec la taille des zones. De plus, même dans le cas d'une distribution aléatoire des individus, c'est-à-dire une ville complètement intégrée, les deux indices peuvent être élevés si les zones de découpage de la ville sont trop petites. Un point à noter également est que ces indices ne permettent pas d'obtenir une mesure globale de la ségrégation, en effet, il existe un indice de ségrégation par groupe d'individus et un indice de dissimilarité par paires de groupes d'individus. Cette mesure ne semble donc que peu appropriée pour l'étude de la ségrégation du modèle de Schelling en tant que phénomène collectif.

L'indice d'exposition (isolation) introduit par Bell en 1954 [Bel54] est globalement la moyenne pour un groupe donné du nombre de voisins similaires (au sens de Moore) par agents de ce groupe. Il a ensuite été modifié par Bell lui-même de façon à tenir compte des écarts relatifs des populations de chaque groupe. Cet indice se calcule à nouveau pour chaque groupe ce qui rend la perception du phénomène de ségrégation global plus difficile.

Pour les raisons évoquées précédemment nous n'utiliserons pas ces mesures. Une critique émise par M. Fossett [Fos05] est que les mesures standards préconisées par Massey et Denton suite à leur analyse comparative sont trop peu utilisées. Les mesures employées sont en fait souvent développées pour le modèle étudié et les conclusions qui en découlent ne peuvent être en réalité que des artéfacts. Au moment de choisir une mesure de ségrégation à employer, il conviendra de définir une mesure suffisamment générale pour pouvoir être applicable à un large éventail de modèles.

Des mesures de ségrégation ont été spécifiquement développées pour les systèmes multi-agents. Pour le modèle de ségrégation, Schelling s'est intéressé à la moyenne sur tous les agents du ratio de voisins similaires et différents, et également au nombre d'agents complètement entourés par des voisins similaires. Des mesures plus poussées ont ensuite été proposées. Parmi celles-ci, figurent la taille de l'interface (somme des nombres de liens différents et des liens agents-lacunes), la taille de la plus grande composante (sachant que la taille d'un amas est prise comme la dimension du plus petit carré qui peut contenir l'amas), le nombre d'amas [SW09, PJ07].

Plusieurs des mesures développées se basent sur la densité de voisins similaires. L'indice de Freeman [Fre78] se calcule sur les graphes en général. Il compare le nombre de liens entre voisins similaires attendu au nombre de liens entre voisins similaires dans la configuration observée. Le nombre de liens attendus entre voisins similaires correspond au nombre de liens inter-groupes dans le cas où les deux types d'individus sont placés aléatoirement (indépendamment de leur type) sur le graphe. L'indice de Freeman FI est :

$$FI = \frac{E - O}{E}, \quad (2.5)$$

où E et O sont respectivement les nombre de liens inter-groupes attendus et observés dans une configuration. Cet indice peut être négatif, dans ce cas, il est considéré comme étant nul. Un indice proche de 0 indique une répartition proche de l'intégration. Un autre coefficient de ségrégation S (cf. équation (2.6)) introduit dans [LJ03] mesure également la déviation de la configuration observée par rapport à une configuration aléatoire, dite intégrée :

$$S = \frac{1}{N^2} \left[\sum_a \frac{f_a - f_{a_i}}{1 - f_{a_i}} + \sum_b \frac{f_b - f_{b_i}}{1 - f_{b_i}} \right], \quad (2.6)$$

où N^2 est le nombre d'individus., f_a et f_{a_i} sont les quotients de voisins similaires pour les agents de type a (au sens de Von Neumann, 4 plus proches voisins) sur voisins présents, respectivement dans la configuration observée et dans la configuration aléatoire. f_b et f_{b_i} sont définis de la même façon pour les agents de type b . Plus le coefficient est proche de 1, plus on se rapproche d'une ségrégation totale (le nombre de contacts entre voisins différents tend vers 0) L'indice de Freeman et le coefficient de ségrégation S introduit dans [LJ03] peuvent tous deux devenir négatifs.

La configuration aléatoire générée comme repère pour la situation intégrée peut-être biaisée car le système étant fini, on ne peut dans la plupart des cas qu'approcher une distribution complètement uniforme. Une configuration "plus intégrée" peut alors apparaître lors de simulations. Ces mesures demandent ainsi de calculer le nombre de voisins similaires pour une situation de référence de l'intégration qui n'est pas unique. L'indice de ségrégation observée peut alors varier selon les configurations aléatoires générées. De

plus, pour chaque nouveau paramètre une nouvelle situation de référence pour l'intégration doit être recalculée. Dans la mesure où l'on varie la densité de lacune dans notre cas, il semble plus approprié de définir la ségrégation de manière globale et sans avoir d'ambiguïté sur la façon dont est générée une configuration intégrée de référence.

2.4.2 Paramètre d'ordre principal : mesure de la ségrégation

Définition du coefficient de ségrégation

La ségrégation peut-être constatée visuellement dans la majeure partie des cas, certains sont en revanche ambigus, une mesure objective s'avère donc nécessaire. Définissons tout d'abord plus précisément ce qui est appelé ségrégation. Ce qui est entendu par ségrégation dans ce chapitre est le groupement d'agents du même type et l'exclusion des agents de l'autre type. Deux agents sont considérés comme appartenant au même groupe, au même amas, s'ils sont proches voisins au sens de Von Neumann. Le voisinage de Moore ne peut pas être utilisé ici, car les "amas de Moore" de différents types peuvent s'entrecroiser et être grands alors que la configuration n'est pas ségrégée. Par exemple, si l'on considère une configuration où agents rouges et bleu s'alternent et où les lacunes sont absentes, il y a seulement un amas rouge et un amas bleu au sens du voisinage de "Moore" alors que la configuration est parfaitement intégrée.

La moyenne des tailles des amas (la taille étant définie comme le nombre d'agents contenus dans l'amas) peut donner un ordre d'idée de l'amplitude de la ségrégation, toutefois elle confère la même importance aux petits et grands amas. Ainsi, si un large amas percolant et des petits amas cohabitent sur un même réseau, la moyenne des tailles d'amas peut-être faible alors même que la configuration paraît ségrégée. Afin de prendre en compte cet aspect, la mesure de ségrégation à construire doit ne donner qu'une importance mineure aux petits amas et faire ressortir la présence des amas plus larges. En suivant ces critères et en s'inspirant de la théorie de la percolation [SA92], la moyenne pondérée de la taille des amas présents sur une configuration semble une mesure naturelle de ségrégation. La moyenne pondérée S de la taille des amas s'écrit :

$$S = \sum_{\{c\}} n_c p_c \quad (2.7)$$

où la taille d'un amas c est notée n_c , $p_c = \frac{n_c}{N_{tot}}$ est le poids de l'amas c , $N_{tot} = L^2(1 - \rho)$ étant le nombre total d'agents. La taille maximale d'un amas est $N_{tot}/2$ puisque les deux types d'agents sont présents dans les mêmes proportions. La moyenne pondérée de la taille des amas est alors normalisée selon l'équation suivante en tenant compte de cette taille maximale :

$$s = \frac{2}{L^2(1 - \rho)} S = \frac{2}{(L^2(1 - \rho))^2} \sum_{\{c\}} n_c^2 \quad (2.8)$$

Sa valeur pour une ségrégation dite totale (c'est-à-dire, seuls deux amas subsistent) est 1. Elle tend vers 0 si la taille de la plus grande composante reste finie quand la dimension du système L tend vers l'infini. La moyenne de s sur plusieurs étapes après l'équilibre est par la suite appelée le coefficient de ségrégation $\langle s \rangle$. Ce coefficient s'avère être un paramètre d'ordre naturel du système pour identifier les transitions vers un état ségrégué.

Le coefficient de ségrégation comme paramètre d'ordre du système

Les variations du coefficient de ségrégation $\langle s \rangle$ avec la tolérance sont illustrées sur la figure 2.11 pour différentes densités de lacunes. La mesure du coefficient de ségrégation peut-être confronté à l'allure des configurations représentées sur la figure 2.8. Les calculs ont été faits en utilisant l'algorithme de Hoshen–Kopelman pour labéliser les amas [HK76]. Pour chaque densité de lacunes, il existe deux valeurs critiques de la tolé-

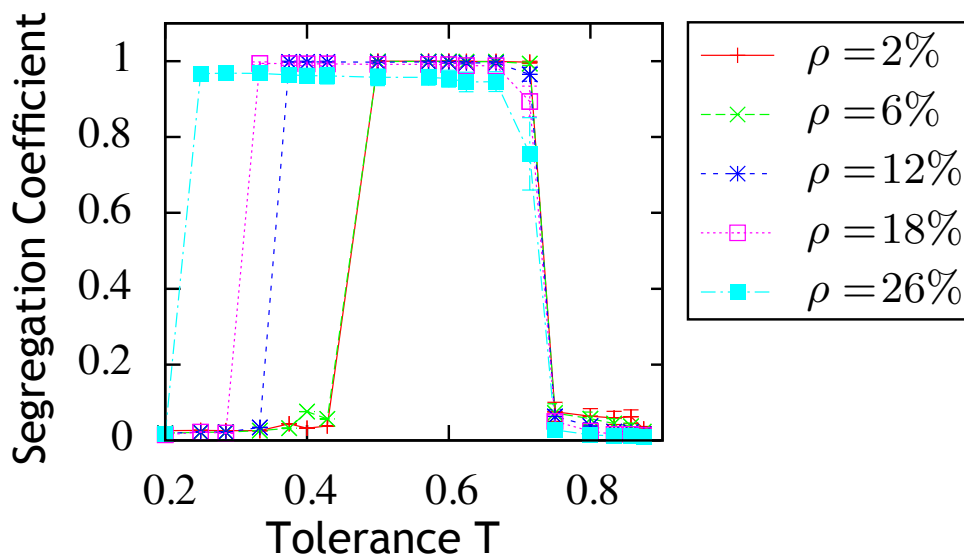


FIG. 2.11: Coefficient de ségrégation (moyenne de s , s étant défini dans l'équation (2.8)) pour différentes densités de lacunes ρ . Les lignes reliant les points sont seulement des guides visuels puisque toutes les valeurs de la tolérance ne sont pas nécessairement pertinentes étant donné la taille finie du voisinage.

rance, deux valeurs où le coefficient de ségrégation change de comportement de manière drastique. Si la densité de lacunes est fixée et qu'on part des plus basses tolérances, le système est dans un état mélangé, comme la faible valeur du coefficient de ségrégation le montre. Puis à une valeur T_f (f pour frozen (gelé)), $\langle s \rangle$ passe de cette valeur très faible à environ 1. Ceci traduit un changement abrupt d'une configuration désordonnée vers une configuration contenant seulement deux amas (un par type d'agents). Une décroissance abrupte du coefficient a lieu pour une valeur plus élevée de la tolérance T_c . Cette seconde valeur dépend faiblement de ρ , contrairement à T_f . Plus la densité de lacunes est élevée, plus la valeur de la tolérance T à laquelle le phénomène de ségrégation apparaît est basse et plus l'intervalle de tolérance sur lequel le phénomène perdure est grand. En effet une grande densité de lacunes est corrélée avec une grande possibilité de mouvements et facilite donc un réarrangement ordonné des agents.

2.4.3 Processus de renormalisation

Etant donnée la définition d'un amas, le coefficient de ségrégation peut ne pas traduire ce qui est visible sur une configuration. En effet, si les agents de même type sont localisés dans les mêmes zones du réseau mais que les lacunes sont majoritaires, beaucoup d'amas peuvent être dénombrés. Or le coefficient de ségrégation décroît très vite avec le nombre d'amas. Un ajustement sur la façon dont est mesuré le coefficient de ségrégation sur le réseau s'impose donc.

Pour une densité de lacunes légèrement supérieur à 20% le coefficient de ségrégation s'éloigne de 1 (figure 2.11), même si les agents sont visuellement ségrégés. Ceci est dû à la définition d'un amas basée seulement sur les quatre sites les plus proches. Dans certaines zones, même si seuls des agents d'un type sont présents, les lacunes peuvent séparer chacune de ces zones en plusieurs amas distincts et masquer l'existence de *ségrégation diluée*. De façon à identifier les amas à des échelles plus larges on introduit un processus de renormalisation [Bv82]. Le réseau est divisé en plaquettes de 4 sites. Sur chacune de

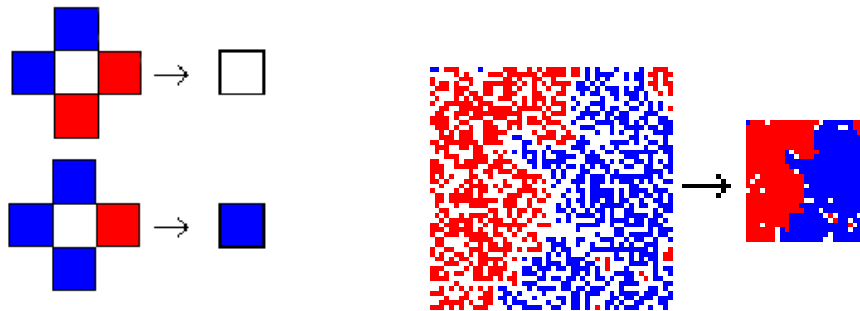


FIG. 2.12: Exemple de renormalisation. La renormalisation est réalisée sur une configuration à $T = \frac{1}{5}$ et $\rho = 50\%$.

ces zones, on s'intéresse au site en bas à droite :

1. Si le site et son voisinage comprennent une majorité d'agents bleus (resp. rouges), la plaquette de dimension 2×2 est remplacée par un unique agent bleu (resp. rouge).
2. Si le site et son voisinage contiennent une majorité de lacunes, la plaquette de dimension 2×2 est remplacée par une lacune.
3. Si aucun des types d'agents n'est en majorité, la plaquette est remplacée par un agent du même type que le site en bas à droite de la plaquette (ou par une lacune si le site est vacant, cf. figure 2.12).

Un exemple de renormalisation pour un site et son voisinage est représenté sur la gauche de la figure 2.12 : deux sites vacants et leur voisinage (au sens de Von Neumann) ont été représentés. Celui du haut est entouré d'autant d'agents rouges que bleus, donc conformément au processus de renormalisation, la plaquette dont est issu le site vacant est remplacée par une lacune. A l'inverse, la plaquette auquel appartient le site vacant de la figure 2.12 (bas, gauche) est remplacée par un agent bleu. La configuration renormalisée selon le processus décrit ici est affichée à droite de la figure 2.12.

La renormalisation a un effet significatif pour les valeurs élevées de densité de lacunes. Pour $\rho = 50\%$, les configurations sont visuellement ségréguées pour un intervalle de petites et moyennes tolérances mais le coefficient de ségrégation avant renormalisation est très petit et présente de fortes fluctuations d'une configuration à l'autre (figure 2.13, gauche), tandis qu'après renormalisation il est vraiment proche de 1 (figure 2.13, droite) dans les zones de tolérance où les configurations sont visuellement ségréguées.

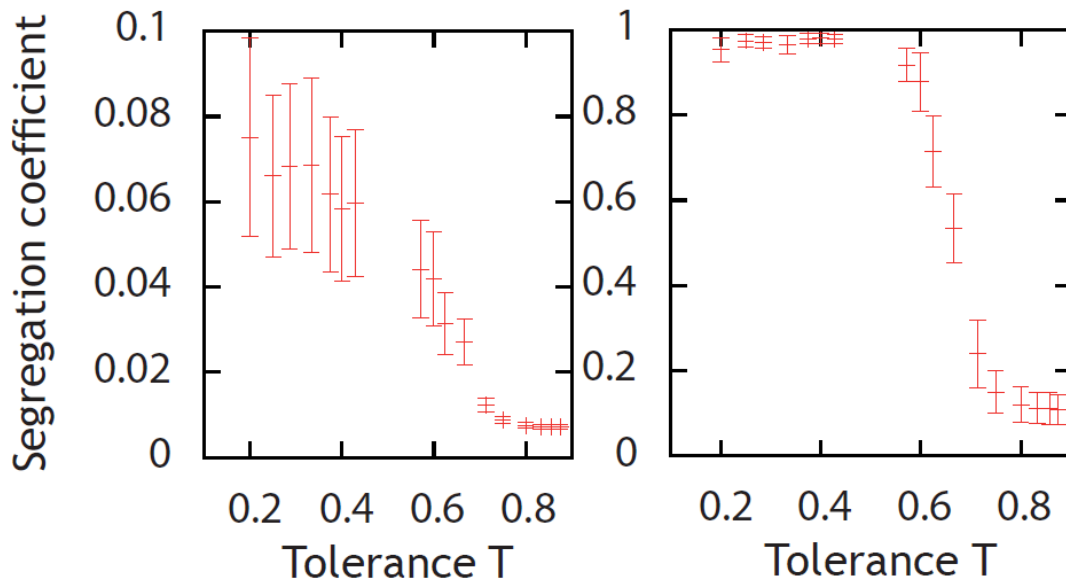


FIG. 2.13: Coefficient de ségrégation en fonction de la tolérance pour $\rho = 50\%$: données obtenues avant (gauche) et après (droite) renormalisation. Le tracé de droite suggère qu'une transition a lieu pour T proche de 0.6. Les barres d'erreur ont été obtenues en calculant la variance σ_s , $\sigma_s^2 = \langle s \rangle^2 - \langle s^2 \rangle$ (de même pour la figure 2.11).

Coefficient de ségrégation et transitions de phase

Les observations sur le coefficient de ségrégation permettent de tirer quelques conclusions sur l'existence de transitions :

1. Le saut du coefficient de ségrégation quand on s'éloigne des plus basses tolérances traduit une transition abrupte d'un état où les agents sont répartis uniformément (indépendamment de leur couleur) vers un état ségrégué, ne contenant plus que deux amas. L'état mélangé rencontré à basse tolérance avant le saut du coefficient de ségrégation, disparaît pour les valeurs intermédiaires de ρ . En effet dès que l'on considère des densités de lacunes suffisamment grandes, le système est ségrégué dès les basses tolérances (comparer la figure 2.11 avec la figure 2.13, droite).
2. La chute du coefficient de ségrégation de 1 à 0 quand la tolérance augmente annonce une transition discontinue de l'état ségrégué vers l'état désordonné. Cette observation concerne toutes les densités de lacunes strictement inférieures à 50%,

mais le tracé du coefficient de ségrégation qui permet de conclure en l'existence d'une transition abrupte n'est montré sur la figure 2.11 que pour une densité de lacunes ρ allant jusqu'à 26%).

3. Lorsque $\rho = 50\%$ la transition de l'état ségrégué vers l'état désordonné devient continue. Le paramètre d'ordre varie continûment pour $\rho = 50\%$ (figure 2.13) et plus aucune transition claire n'apparaît pour des densités au dessus de $\sim 56\%$.
4. De plus, les configurations observées pour les grandes valeurs de ρ suggèrent l'existence d'une phase de ségrégation diluée : les deux types d'agents ne sont pas mélangés mais il existe des domaines avec de multiples petits amas de la même couleur dans une mer de lacunes.

Afin d'arriver à un compromis entre un temps de simulation qui ne soit pas trop long et qui permette d'acquérir suffisamment d'informations, les simulations n'ont été effectuées que pour les pourcentages de lacunes paires. Les observations précédentes sont donc limitées à cette précision.

2.4.4 Paramètre d'ordre secondaire : caractérisation des états désordonnés

Le coefficient de ségrégation introduit précédemment permet de repérer certaines des transitions et de déterminer leur nature. En revanche, il ne fait aucune distinction entre l'état désordonné obtenu à basse tolérance et celui obtenu à haute tolérance (figure 2.11). De fait, même si la configuration d'équilibre dans les deux cas est formée d'agents répartis uniformément indépendamment de leur couleur, la nature des deux états n'est pas la même. Un paramètre additionnel s'avère donc nécessaire pour analyser les résultats de façon plus détaillée.

On introduit la densité $\tilde{\rho}_r$ de sites vides où les agents ne seraient pas satisfaits (symétriquement $\tilde{\rho}_b$ pour les agents bleus). Le tracé de $\tilde{\rho}_r$ à l'équilibre en fonction de la tolérance (figure 2.14) présente deux sauts pour chacune des densités de lacunes ρ (2%, 6%, 12%, 18%). Jusqu'à ce que la tolérance atteigne T_f , aucun espace vide de la configuration d'équilibre n'est considéré attractif pour les agents. La composition des voisinages de ces espaces vacants n'est pas satisfaisante pour les agents rouges. Entre T_f et T_c , la moitié des sites vacants sont satisfaisants pour les agents rouges. On le comprend aisément en regardant les configurations typiques obtenues pour ces valeurs de la tolérances : deux composantes, une de chaque type, occupent l'état d'équilibre ; la répartition uniforme des lacunes implique que les agents rouges ne peuvent aller dans la moitié de l'espace occupée par les agents bleus et inversement. Pour une tolérance T supérieure à T_c , la quasi-totalité des sites est acceptable. Or, une configuration représentative d'une situation où tous les mouvements sont acceptables est désordonnée, ce qui explique la présence d'une configuration mélangée à haute tolérance. La quantité $\tilde{\rho}_r$ permet donc de caractériser 3 régimes et ainsi de discriminer les états désordonnés à basse et haute tolérances. Le tracé de l'évolution des densités de lacunes ayant un voisinage insatisfaisant pour les deux types d'agents $\tilde{\rho}$ (figure 2.15) confirme le fait que le désordre présent pour les basses valeurs de T est d'origine purement dynamique. Aucun site vacant n'est une destination envisageable pour les agents (rouge et bleu). La configuration d'équilibre

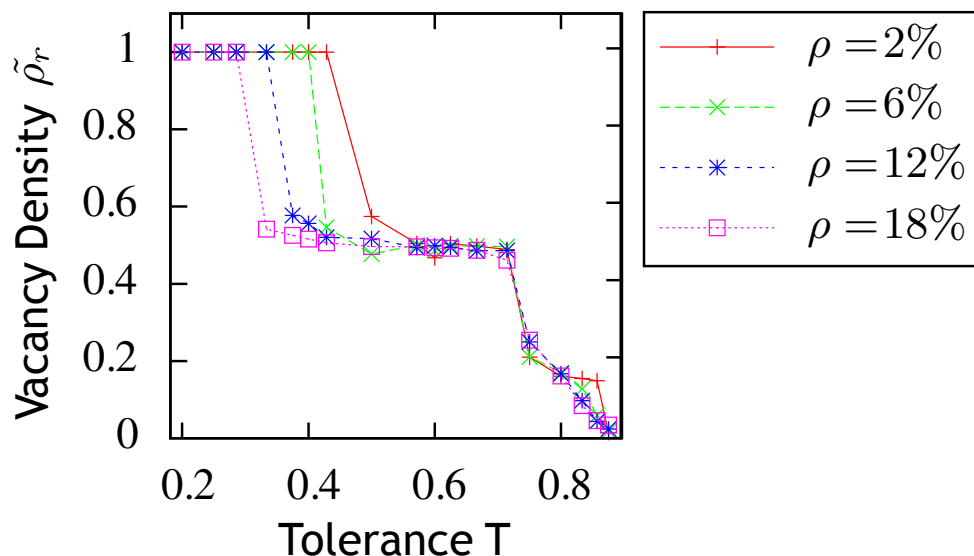


FIG. 2.14: Densité de lacunes $\tilde{\rho}_r$ où les agents rouges seraient insatisfaits, pour différents densités de lacunes données. La même allure est observée pour les agents bleus. En effet, les deux types d'agent jouent des rôles symétriques dans le modèle : ils ont la même tolérance et sont présents dans les mêmes proportions.

désordonnée à basse tolérance est donc issue d'un blocage dynamique : la configuration est gelée dynamiquement. Les agents rejettent tous les espaces vacants, en conséquence le système ne peut évoluer. Aux tolérances repérant la transition état gelé - état ségrégué, la situation s'inverse. Toutes les lacunes sont acceptables par au moins un des deux types d'agents.

Bilan de l'analyse quantitative

L'étude de l'évolution des paramètres d'ordre définis précédemment a conduit à l'identification des régions coïncidant avec l'émergence de ségrégation. Ces paramètres montrent des sauts discontinus à des valeurs données de la tolérance T , indiquant l'existence de transition de phases abruptes. Pour les valeurs modérées de la densité de lacunes, il existe deux transitions de ce type : à basse tolérance, le système passe d'un état gelé dynamiquement, à un état agrégé ; pour des tolérances plus élevées, le système se trouve à nouveau mélangé.

2.5 Analyse qualitative

Les configurations d'équilibre rencontrées rappellent celles présentes dans des modèles de spins sur réseau : l'état désordonné comme une phase paramagnétique et l'état ségrégué comme une phase ferromagnétique. De la même façon que le modèle d'Ising fait émerger un comportement collectif (aimantation spontanée) à partir d'interactions locales à tem-

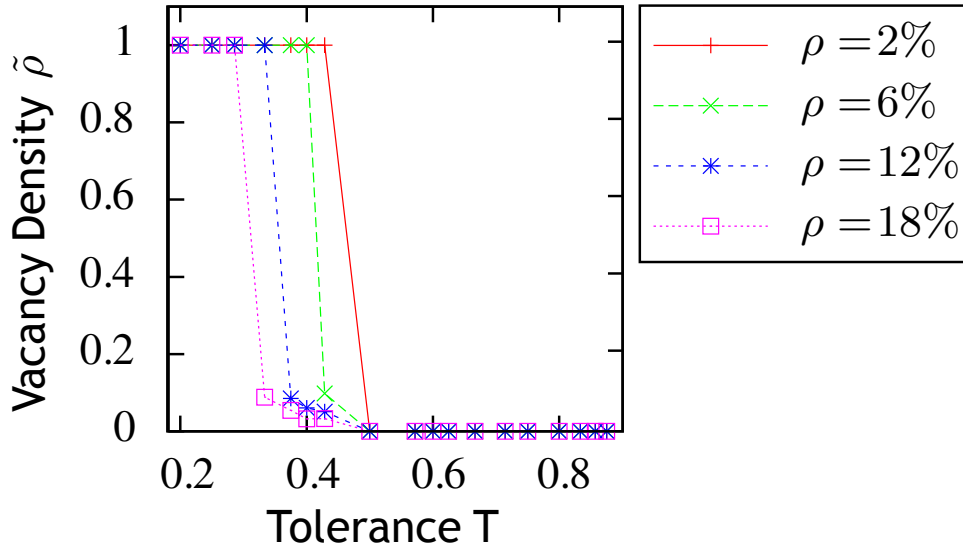


FIG. 2.15: Densité de lacunes $\tilde{\rho}$ où aucun agent ne serait satisfait, pour différentes densités de lacunes.

pérature nulle, le modèle de ségrégation de Schelling montre l'émergence de structures ségréguées issues de la dynamique d'interaction des préférences individuelles des agents. Cette analogie pousse à rechercher une correspondance entre modèle de spins et modèle de ségrégation de Schelling.

2.5.1 Lien avec un modèle de spins, le modèle de Blume-Capel

Au vu des observations issues de l'analyse quantitative du modèle, il apparaît naturel d'utiliser des variables de spins pour réécrire la condition de satisfaction 2.2. Notons c_i les variables de spin prenant les valeurs 0 si le site i est vide et 1 (resp. -1) si le site est occupé par un agent rouge (resp. bleu). Avec cette correspondance, le nombre de voisins différents N_d d'un agent présent sur un site i s'écrit :

$$\begin{aligned}
 N_d &= c_i^2 \sum_{\langle j \rangle} \frac{(c_j + 1)}{2} \frac{(1 - c_i)}{2} c_j^2 + c_i^2 \sum_{\langle j \rangle} \frac{(1 - c_j)}{2} \frac{(1 + c_i)}{2} c_j^2 \\
 N_d &= c_i^2 \frac{(1 - c_i)}{2} \sum_{\langle j \rangle} \frac{c_j + c_j^2}{2} + c_i^2 \frac{(1 + c_i)}{2} + \sum_{\langle j \rangle} \frac{c_j^2 - c_j}{2} \\
 N_d &= \left[c_i^2 \frac{(1 - c_i)}{2} + c_i^2 \frac{(1 + c_i)}{2} \right] \sum_{\langle j \rangle} \frac{c_j^2}{2} + \left[c_i^2 \frac{(1 - c_i)}{2} - c_i^2 \frac{(1 + c_i)}{2} \right] \sum_{\langle j \rangle} \frac{c_j}{2} \\
 N_d &= c_i^2 \sum_{\langle j \rangle} \frac{c_j^2}{2} - c_i \sum_{\langle j \rangle} \frac{c_j}{2}
 \end{aligned}$$

où $\sum_{\langle j \rangle}$ est une somme sur les sites voisins de i . L'écriture est adaptée de façon à ce que les quantités N_d et N_s valent 0 si le site i est vide. La somme $N_d + N_s$ correspond tout simplement au nombre d'agents présents dans le voisinage du site i si celui-ci est occupé :

$$N_d + N_s = c_i^2 \sum_{\langle j \rangle} c_j^2$$

La différence entre les nombre de voisins différents présents et tolérés de l'agent occupant le site i s'exprime en fonction de c_i :

$$N_d - T(N_d + N_s) = \frac{1}{2} [c_i^2 \sum_{\langle j \rangle} c_j^2 - \sum_{\langle j \rangle} c_i c_j - 2T c_i^2 c_j^2] \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{2} [-\sum_{\langle j \rangle} c_i c_j + (1 - 2T) \sum_{\langle j \rangle} c_i^2 c_j^2] \quad (2.10)$$

Il existe alors une quantité E_S , définie dans l'équation (2.11), qui est assimilable à une énergie si et seulement si les déplacements considérés dans la dynamique sont favorables aux individus déplacés.

$$E_S = -\sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^2 c_j^2 \quad (2.11)$$

où $K = 2T - 1$ et $\sum_{\langle i,j \rangle}$ est une somme sur toutes les paires de voisins (i, j) . Cette fonction (2.11) est identique à l'énergie du modèle de Blume-Emery-Griffiths [BEG71] sous la contrainte d'un nombre fixe de sites de chaque type $(0, \pm 1)$. La variation d'énergie $E(t+1) - E(t)$ induite par le déplacement d'un agent de type c_i occupant le site de voisinage $\langle j \rangle$ vers un site de voisinage $\langle k \rangle$ vacant s'exprime de la façon suivante :

$$E_S(t+1) - E_S(t) = \sum_{\langle j \rangle} c_i c_j + K \sum_{\langle j \rangle} c_i^2 c_j^2 - \sum_{\langle k \rangle} c_i c_k - K \sum_{\langle k \rangle} c_i^2 c_k^2 \quad (2.12)$$

$$= 2[-[N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle j \rangle} + [N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle k \rangle}]. \quad (2.13)$$

$[N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle k \rangle}$ correspond à différence entre les nombre de voisins différents présents et tolérés de l'agent c_i avec le voisinage $\langle k \rangle$. Si un agent insatisfait est déplacé vers un site qui lui procure un voisinage satisfaisant, la variation d'énergie $E_S(t+1) - E_S(t)$ est négative. En effet :

$$[N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle j \rangle} > 0 \text{ agent insatisfait dans sa position initiale} \quad (2.14)$$

$$[N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle k \rangle} \leq 0 \text{ agent satisfait dans sa position finale.} \quad (2.15)$$

Un déplacement favorable pour individu implique donc une diminution de l'énergie E_S . En revanche, les déplacements d'agents satisfaits vers des sites leur procurant un voisinage également satisfaisant ne garantissent pas une diminution d'énergie. En effet, l'énergie peut augmenter si le voisinage de destination contient plus de voisins différents que le voisinage de départ. Les situations de satisfaction ne sont pas uniques et ont pourtant toutes le même statut, c'est-à-dire une utilité égale à 1. Cela suggère une extension naturelle qui prenne en compte un degré de satisfaction plutôt qu'un statut binaire, nous

détaillerons ce point dans le chapitre suivant.

Tolérance vs température

Si le déplacement des agents satisfaits était interdit par la dynamique (comme étudié dans [Sch78, VK06, DCM08]), le système admettrait une fonction de Lyapunov donnée par 2.11. Mais les règles de dynamique de la variante utilisée tolère les déplacements des agents satisfaits. Donc les étapes de la dynamique utilisée dans notre cas ne conduisent pas nécessairement à la minimisation d’une énergie globale donnée comme l’équation (2.11). Toutefois, il est potentiellement intéressant de considérer cette quantité E_S comme un substitut de l’énergie. Les déplacements des agents satisfaits introduisent une source de bruit par rapport à la dynamique qui admettrait la fonction E_S pour fonction de Lyapunov. En effet, on vient de voir que leurs déplacements vers un autre site satisfaisant peuvent induire une augmentation de l’énergie. Ce bruit présente des similitudes avec un bruit thermique et est quantifiable via la fraction d’agents satisfaits présents sur le réseau. En effet, plus le nombre d’agents satisfaits est élevé, plus le nombre de déplacements possibles est important.

La configuration initiale est aléatoire, la fraction initiale d’agents satisfaits augmente avec la tolérance, ainsi le bruit augmente avec la tolérance. Une grande tolérance implique qu’un agent est plus facilement satisfait et donc qu’il peut trouver aisément un site satisfaisant. Par conséquent un agent satisfait a de multiples options de déplacements. Ceci motive l’utilisation de l’analogie entre la tolérance et la température T comme guide pour l’analyse du modèle.

Energie et transitions

L’évolution de la moyenne de E_s (moyenne sur plusieurs configurations à l’équilibre) est représentée sur la figure 2.16 pour différentes densités de lacunes. L’énergie E_S comprend deux termes, l’un correspond à un terme d’interaction entre voisins, l’autre est un couplage biquadratique entre voisins. Ce second terme apporte essentiellement une contribution proportionnelle à K . En effet, les lacunes sont globalement réparties uniformément sur le réseau. Donc le nombre de paires occupées intervenant dans le second terme de l’énergie est quasi-constant. En conséquence, le deuxième terme de l’énergie n’apporte rien à l’analyse des transitions de phase. Les transitions sont plus aisément localisées en traçant uniquement le premier terme de l’énergie E_S . Le premier terme de E_S correspond à l’énergie du modèle de Blume-Capel $E_{BC} = -\sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j$ [Blu66, Cap66] ($K = 0$), un modèle en particulier utilisé pour modéliser les alliages en présence de lacunes. La figure 2.17 montre l’évolution avec la tolérance de l’énergie type “Blume-Capel” pour plusieurs valeurs de la densité de lacunes. Le tracé confirme l’existence des deux transitions précédemment évoquées : à basse tolérance (pour des valeurs de ρ peu élevées) une décroissance a lieu au passage de l’état gelé à celui ségrégé ; après un plateau, une croissance notable de l’énergie annonce la transition vers l’état désordonné. Ces variations abruptes sont caractéristiques de transitions discontinues, assimilables à des transitions de type premier ordre. De plus, d’après la figure 2.16, lorsque la densité de lacunes est élevée, l’énergie croît moins abruptement : ce qui annonce un changement de la nature de la transition, de discontinue à continue (assimilable à une transition du second ordre).

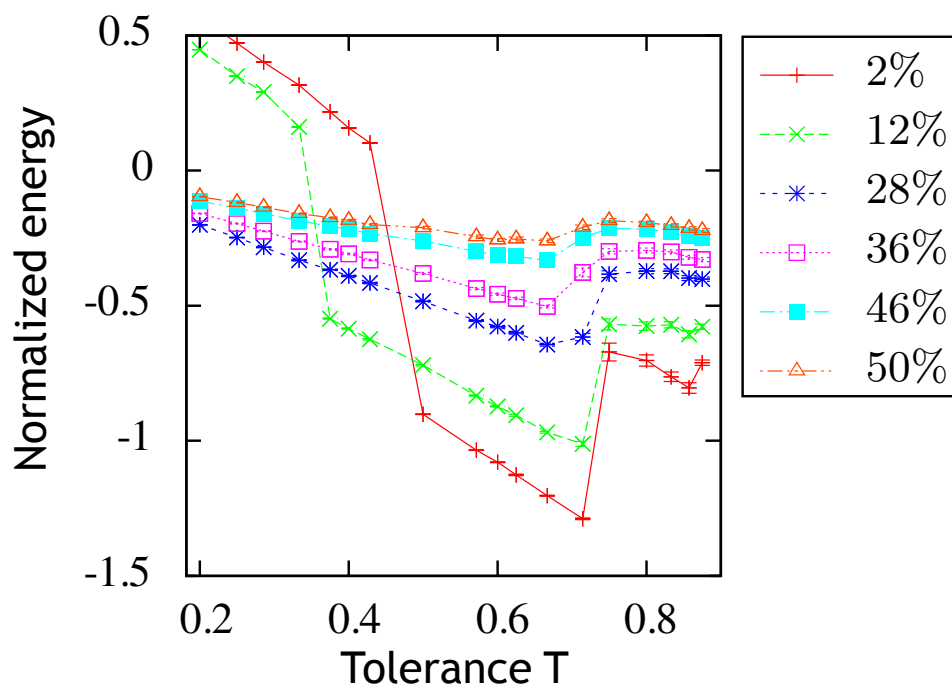


FIG. 2.16: Evolution de l'énergie moyenne E_S pour différentes densités. Les données sont normalisées par $4L^2(1 - \rho)$.

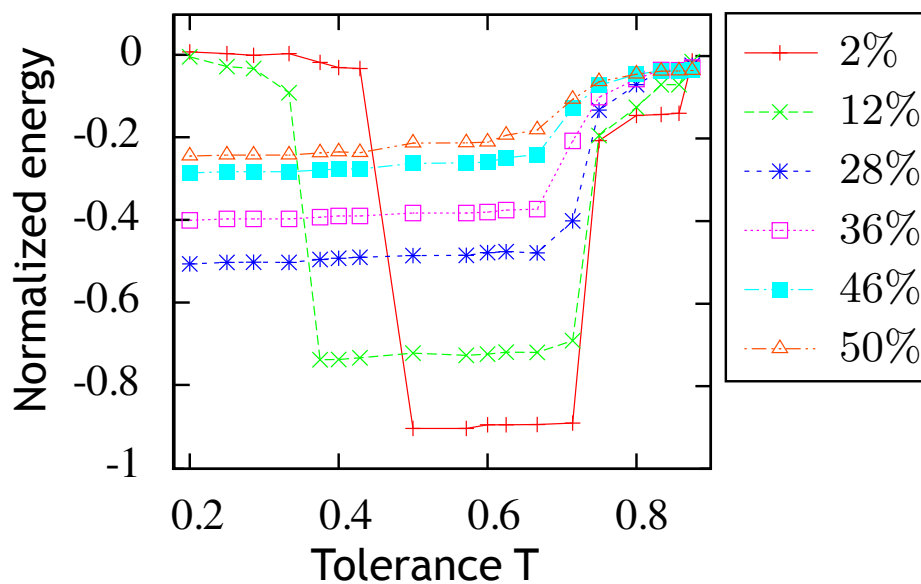


FIG. 2.17: Evolution de l'énergie moyenne de Blume-Capel E_{BC} pour différentes densités. Les données sont normalisées par $4L^2(1 - \rho)$.

2.5.2 Analogues des quantités thermodynamiques

Analogie de la chaleur spécifique

Etant donné que l'introduction d'une fonction comparable à l'énergie s'est avérée pertinente, on peut également s'attendre à ce que la chaleur spécifique C_s , qui elle-même dépend de l'énergie, apporte des informations utiles à l'analyse des résultats. La définition thermodynamique usuelle est $C_s = dE_S/dT$ où T est la température. La tolérance fait office de température ici, car comme il a été précisé, une augmentation de tolérance est comparable à un bruit thermique. Cependant, notons qu'ici on ne peut utiliser la définition thermodynamique usuelle puisque seulement un nombre fini de valeurs de la tolérance ont un sens. De façon à travailler avec une quantité bien définie pour chaque tolérance T donnée, utilisons le fait que la chaleur spécifique est reliée aux fluctuations de l'énergie à l'équilibre via le théorème de fluctuation-dissipation. Dans le contexte présent, la formulation adaptée est :

$$C_s = \frac{\langle E_S^2 \rangle - \langle E_S \rangle^2}{T^2} \quad (2.16)$$

où $\langle \rangle$ est la notation pour une moyenne sur les configurations à l'équilibre, et T est ici la tolérance.

C_s sera appelé *le coefficient de fluctuation*. Il joue un rôle analogue à l'indice de la volatilité qui mesure les fluctuations de prix dans les marchés financiers.

D'après la figure 2.18, le coefficient de fluctuation présente un pic bien marqué lorsque la transition ségrégée-désordonnée apparaît. Ce pic s'aplatit et tend à disparaître lorsque la densité de lacunes augmente, confirmant la disparition de la transition ségrégée-désordonnée. Comme il a été discuté précédemment, il existe un saut de l'énergie repérant le passage de l'état gelé à l'état ségrégué, en revanche le coefficient de fluctuation ne présente lui aucun comportement particulier au voisinage de cette transition. Ceci suggère une violation du théorème de fluctuation-dissipation, comme usuellement observée dans les transitions dynamiques des systèmes vitreux ou cinétiquement contraints [RS03].

Analogie de la susceptibilité

Dans la même veine, il est intéressant de définir un analogue de la susceptibilité, qui est au paramètre d'ordre ce que la chaleur spécifique est à l'énergie. Les variations de l'aimantation, paramètre d'ordre des modèles de spins de type Ising, sont en théorie reliées à la température via la susceptibilité. Le coefficient de ségrégation s'imposant comme un paramètre d'ordre du modèle traité dans le cas présent, on en déduit facilement un analogue de la susceptibilité en utilisant à nouveau le théorème de fluctuation-dissipation :

$$\chi_s = \frac{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2}{T} \quad (2.17)$$

où s est défini par l'équation (2.8). Comme il peut-être constaté sur la figure 2.19, cet analogue de la susceptibilité présente pour les différentes densités de lacunes un pic au voisinage de la transition ségrégué-désordonné. Dans le cas des densités de lacunes élevées, les pics observés se trouvent être plus nets que ne le sont les pics de la chaleur spécifique

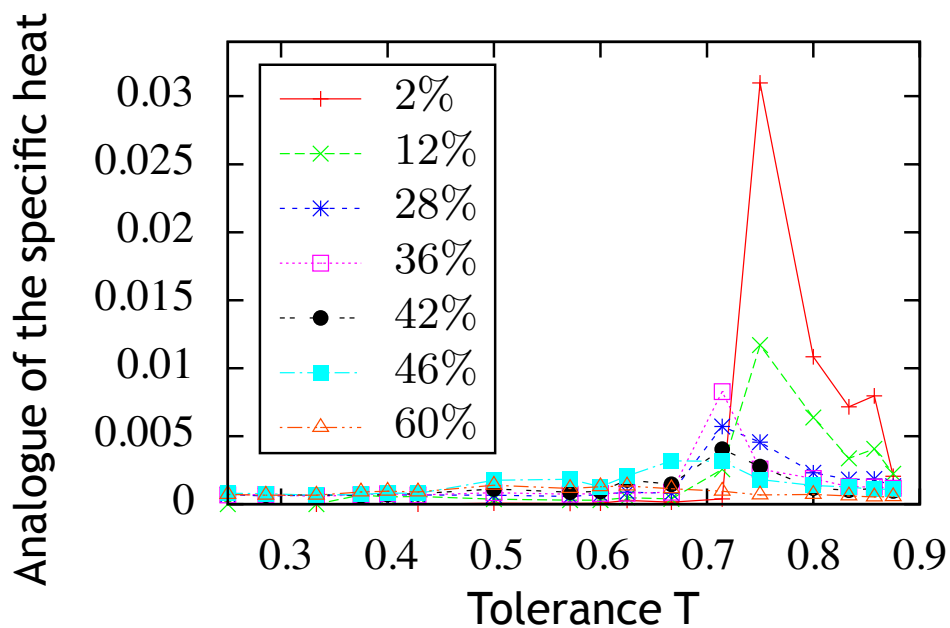


FIG. 2.18: Evolution du coefficient de fluctuation C_s (l'énergie et le carré de l'énergie ont été moyennés sur 30000 étapes après l'équilibre) avec la tolérance pour plusieurs densités de lacunes.

C_s pour les mêmes valeurs. Ainsi, l'analogie de la susceptibilité est plus appropriée pour localiser la transition ségrégué-désordonné à hautes densités de lacunes. Les pics n'existent plus pour les densités de lacunes vraiment élevées (comme 60%) confirmant la disparition de la transition évoquée dans le paragraphe précédent.

2.6 Diagramme de phase

On dispose de tous les éléments nécessaires à la construction du diagramme de phase dans l'espace des paramètres (ρ, T) . Pour rappel, la précision du diagramme de phase traduit le fait que les simulations numériques n'ont été effectuées que pour les valeurs paires des densités de lacunes. Selon les valeurs des paramètres, 4 états d'équilibre peuvent être rencontrés :

1. état ségrégué
2. état désordonné (mélangé)
3. état de ségrégation diluée
4. état gelé

Les domaines d'existence de ces phases sont représentés sur un diagramme de phase (figure 2.20). Les caractéristiques principales de ce diagramme sont résumées ainsi :

1. Pour des densités de lacunes inférieures à 46%, une ligne de transition dynamique $T_f(\rho)$ sépare l'état gelé de l'état ségrégué. Cette ligne est repérée sur le diagramme

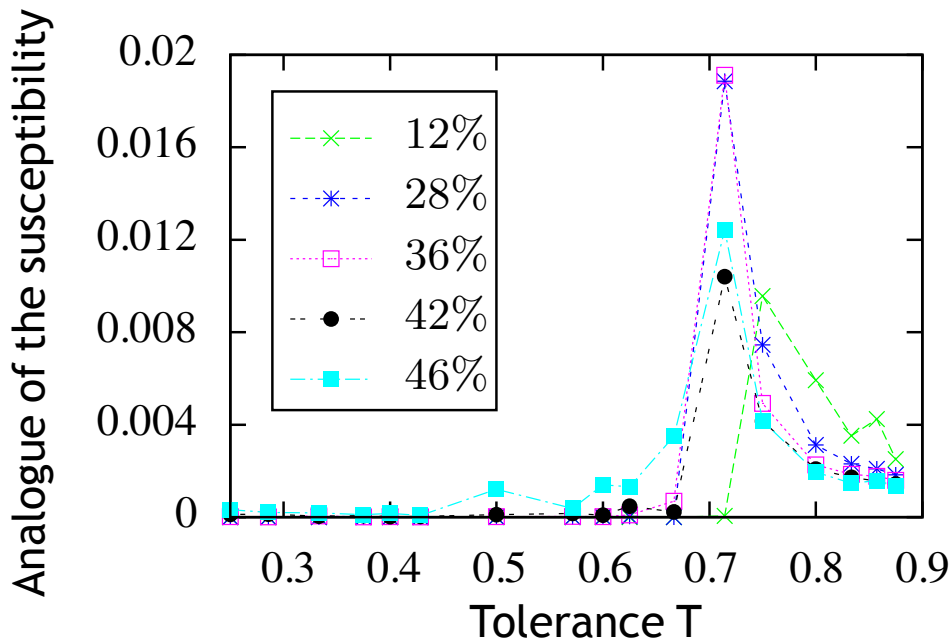


FIG. 2.19: Evolution de l'analogie de la susceptibilité χ_s pour plusieurs densités de lacunes. (L'aimantation et le carré de l'aimantation ont été moyennés sur 30000 étapes après l'équilibre)

par des triangles et des croix.

2. Au dessus de cette ligne l'état ségrégué existe dans un important domaine limité par une ligne de transition $T_c(\rho)$ (ligne rouge + croix bleues).
3. La ligne $T_c(\rho)$ (ligne rouge) se trouve presque à une valeur constante de la tolérance pour $\rho \lesssim 50\%$. Elle marque la transition "état ségrégué - état désordonné" de nature discontinue (type premier ordre) jusqu'à $\rho = 50\%$.
4. Lorsque $\rho = 50\%$, la transition repérée par la ligne $T_c(\rho)$ (croix bleues) devient continue, et la ligne se trouve presque parallèle à l'axe T . Elle sépare alors l'état ségrégué de l'état dilué.
5. A droite de $T_c(\rho)$, dans les hautes valeurs de densité de lacunes, le système passe graduellement d'un état ségrégué dilué à basse tolérance T à un état désordonné à haute tolérance.

Les sous-sections suivantes discutent des différentes transitions observées et de leur nature.

2.6.1 Transition de l'état gelé vers l'état ségrégué

Bien que le système exhibe une transition abrupte d'un état gelé à un état ségrégué, les analogues des chaleurs spécifiques et de la susceptibilité ne présentent pas de comportement particulier aux tolérances concernées (figure 2.18 and 2.19). Comme précédemment précisé, ceci s'explique par la nature dynamique de la transition, par opposition aux

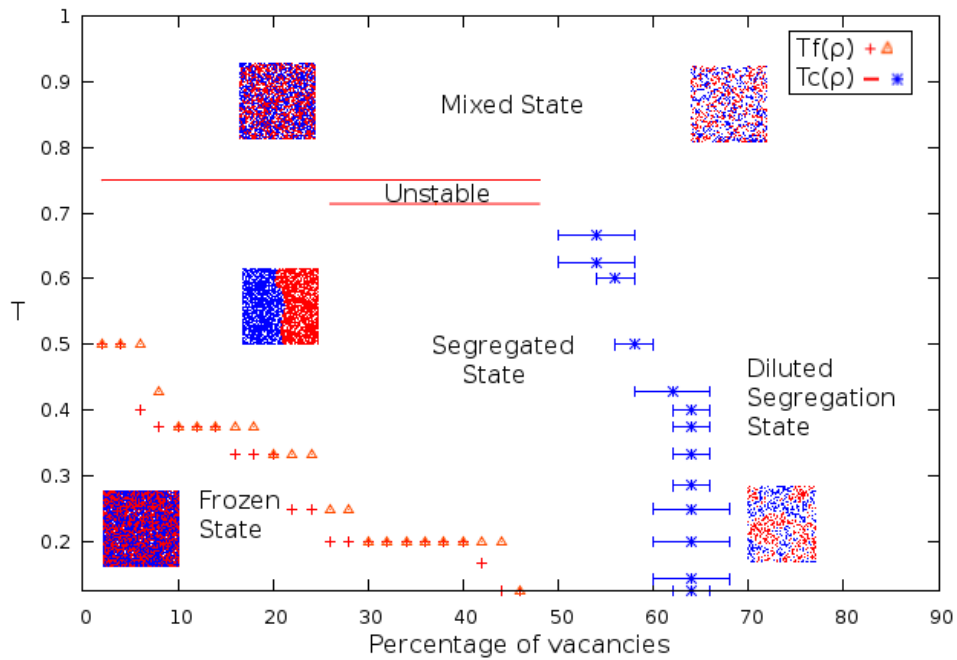


FIG. 2.20: Diagramme de phase du modèle de ségrégation type Schelling. Les croix bleues correspondent à la transition continue entre les états -ségrégué et ségrégué-dilué. Les triangles rouge et les croix (verticales) sont les limites inférieures et supérieures de la transition gelé-ségrégué. La ligne rouge sépare l'état ségrégué de l'état désordonné. Rappelons que T ne prend que des valeurs discrètes. (Une localisation plus précise des limites des phases, si nécessaire, requiererait des simulations numériques plus longues pour des réseaux aux dimensions plus larges.)

autres transitions qui sont de type thermodynamiques. La transition est alors repérée par le saut du coefficient de ségrégation rencontré soit en augmentant T avec ρ fixe (figure 2.11), soit en augmentant ρ avec T fixe (figure 2.21). Au fur et à mesure que la densité ρ augmente, la transition a lieu pour des valeurs de plus en plus basses de la tolérance. Quand cette densité dépasse 46%, la ligne de transition n'existe plus, c'est-à-dire qu'une densité de lacunes supérieure à 46% offre suffisamment de possibilités de mouvements pour que le système ne se retrouve pas bloqué dans un état gelé dynamiquement. Aussi, pour une tolérance supérieure à $\frac{1}{2}$, le système ne sera pas gelé, car étant donnée la définition du modèle, les lacunes seront toutes satisfaisantes pour au moins un type d'agents. En effet, pour de telles tolérances, une lacune, peu importe sa position sur le réseau, est nécessairement au moins satisfaisante pour un agent dont le type est en majorité dans le voisinage de celle-ci. Remarquons que pour une densité de lacunes donnée, la valeur

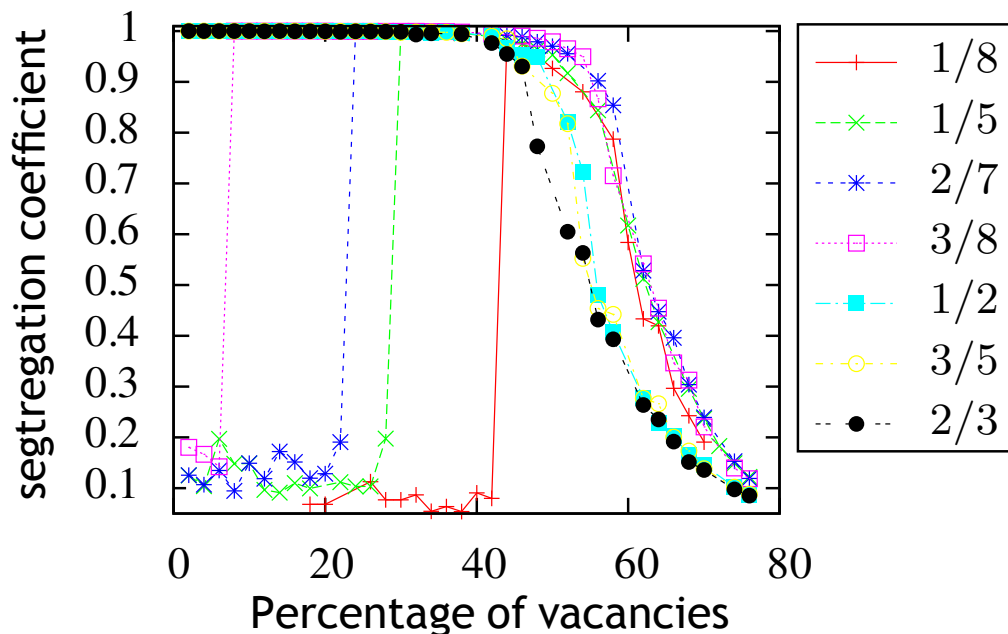


FIG. 2.21: Coefficient de ségrégation pour différentes valeurs de la tolérance en fonction de la densité de lacunes.

exacte de la tolérance à laquelle la transition gelé-ségrégé prend place peut dépendre de l'ordre de choix des agents durant la dynamique (étant donnée que la transition est dynamique). Les valeurs limites qui encadrent cette transition sont répertoriées dans le tableau 2.1. Notons aussi que pour les valeurs des paramètres d'existence de la phase gelée, toute configuration initiale gelée ou ségrégée est très proche de l'état stationnaire.

TAB. 2.1: Ligne de transition “état gelé-état ségrégué” Les limites entre lesquelles le système peut finir dans l’état gelé ou ségrégué dépendent de l’ordre de la dynamique. Elles sont obtenues en réalisant 100 simulations tests sur lesquelles le pourcentage de configurations finales gelées est enregistré. Si pour un couple donné (T, ρ) , le pourcentage de configurations finales gelées (resp. ségréguées) est très élevé ($> 95\%$), on considère que l’état d’équilibre correspondant est gelé (resp. segregué).

ρ	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%
T	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5} - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8} - \frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3} - \frac{3}{8}$
ρ	18%	20%	22%	24%	26%	28%	30%	32%
T	$\frac{1}{3} - \frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{5} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
ρ	34%	36%	38%	40%	42%	44%	46%	
T	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{5}$	$\frac{1}{8} - \frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	

2.6.2 Transition de l’état ségrégué vers l’état désordonné

La phase ségréguée est bornée par une ligne de transition (ligne rouge sur la figure 2.20) où les amas disparaissent et les deux types d’agents se mélangent. La transition évolue en fonction de la densité de lacunes considérée :

1. Cette transition est abrupte pour les densités de lacunes inférieures à 26%. En effet, les tracés du coefficient de ségrégation en fonction de la tolérance à densité ρ fixe ($< 26\%$) montrent une décroissance rapide de celui-ci de ~ 1 à ~ 0 (figure 2.11).
2. Pour des densités de lacunes comprises entre 26% et 48%, l’état désordonné est atteint après un état intermédiaire où le système n’a pas de stabilité dynamique : plus précisément le système peut osciller entre plusieurs configurations acceptables, conduisant à d’importantes fluctuations du coefficient de ségrégation.
3. Sur un intervalle étroit, [50%, 56%], de la densité de lacunes, les états ségrégués deviennent continuellement mélangés. Ensuite, la ligne de transition chute brutalement. Cette zone du diagramme de phase qui comprend tout d’abord un changement de nature de la transition puis un changement de comportement net de la ligne de transition, se révèle beaucoup plus difficile à analyser du fait que la tolérance T a des valeurs discrètes et du fait des possibles effets de taille finie.

Pour une valeur donnée de la densité de lacunes, la tolérance à laquelle la transition ségrégué-désordonné a lieu peut être déterminée de plusieurs façons. Les pics de la chaleur spécifique et de la susceptibilité (figure 2.18 et 2.19) repérables sur les tracés de leur évolution avec la tolérance T marquent la transition.

Pour préciser la nature de la transition, on s’intéresse aux distributions du coefficient de segregation dans son voisinage, à différentes densités de lacunes (figures 2.22 et 2.23). Les distributions ont été obtenues à partir de 30000 mesures du coefficient de ségrégation. Ces distributions illustrent les 3 “chemins” du système pour aller de l’état ségrégué vers

l'état mélangé. Pour les densités de lacunes inférieures à 26%, la transition est nettement marquée. La distribution du coefficient de ségrégation pour de telles densités est centrée autour de 0 à la tolérance de transition alors qu'elle est centrée en 1 pour la valeur de la tolérance juste inférieure. Par exemple, pour $\rho = 24\%$, les distributions du coefficient de ségrégation pour des tolérances successives autour de la transition sont clairement séparées (figure 2.22, gauche).

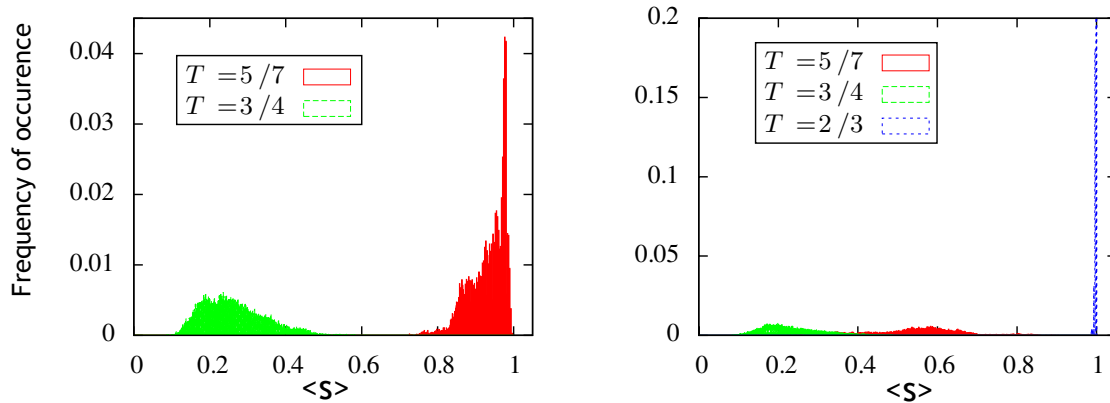


FIG. 2.22: Distributions (normalisées par le nombre de mesures) du coefficient de ségrégation pour $\rho = 24\%$ et $\rho = 28\%$.

Lorsque la densité ρ augmente (au dessus de 26%), la transition ségrégué-désordonné se fait via un état intermédiaire. Trois types de distribution (cf. figures 2.22, droite et 2.23, gauche) sont alors représentatives du comportement du système au voisinage de la transition. Elles sont centrées autour d'une valeur très faible (~ 0.2), piquée près de 1, ou centrées autour d'une valeur intermédiaire. Dans la zone intermédiaire de transition, c'est-à-dire où le système n'est ni complètement ségrégué, ni complètement intégré, la distribution du coefficient de ségrégation est plus large.

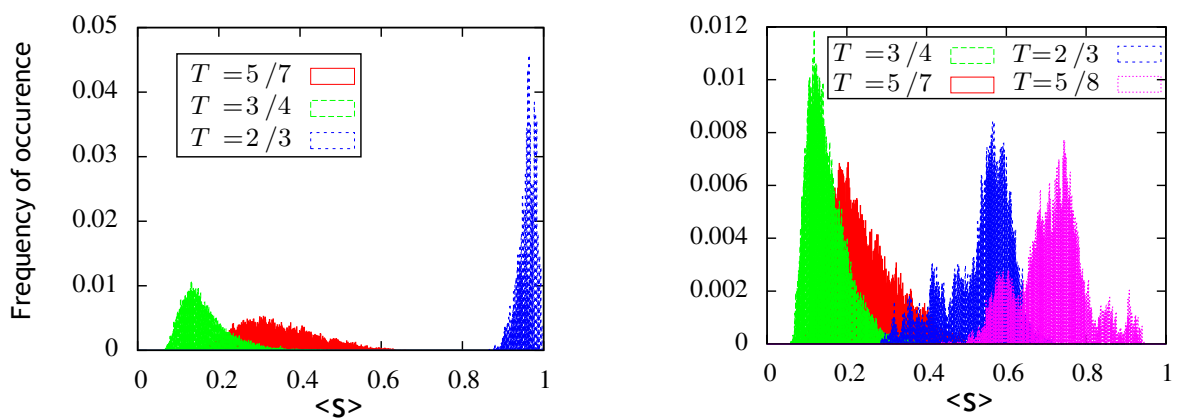


FIG. 2.23: Distributions du coefficient de ségrégation pour $\rho = 44\%$ et $\rho = 50\%$.

Enfin, dès que la densité de lacunes dépasse 50%, les distributions du coefficient de ségrégation au voisinage de la transition finissent par toutes s'entremêler (cf. figure 2.23,

droite). Ce “mélange des états” confirme que l’augmentation de la densité de lacunes est accompagnée d’un changement de la nature de la transition entre $\rho = 46\%$ et $\rho = 50\%$.

2.6.3 Transition de l’état ségrégé vers l’état ségrégé dilué

La limite supérieure $T_c(\rho)$ d’existence de la phase ségrégée devient légèrement dépendante de la densité de lacunes quand cette dernière devient légèrement supérieure à 50%. La ligne de transition est localisée grâce aux tracés du coefficient de ségrégation (figure 2.21) et de l’analogue de la susceptibilité (figure 2.24) en fonction de ρ . Pour les hautes

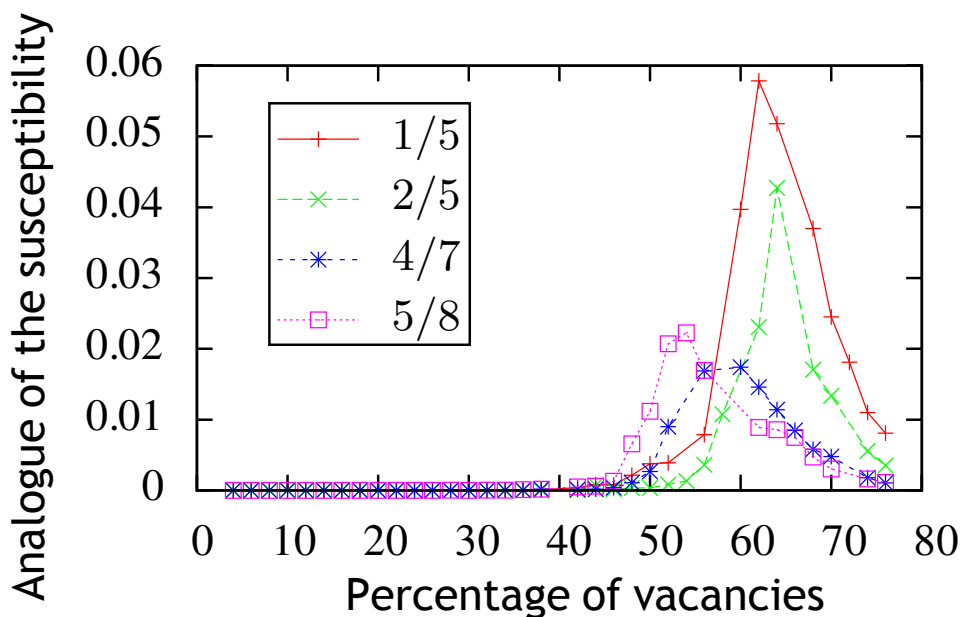


FIG. 2.24: Analogue de la susceptibilité pour différentes tolérances en fonction des densités de lacunes. Les moyennes ont été calculées sur 30000 simulations après l’équilibre.

densités de lacunes, à droite de la ligne de transition (croix bleue), la nature de la phase est différente à basse et haute tolérances. L’état est mélangé à haute tolérance, tandis qu’à basse tolérance, on observe un état de ségrégation diluée. Le passage d’un état à l’autre, quand la tolérance T augmente, se fait graduellement. Même lorsque l’état est ségrégé à basse tolérance, le coefficient de ségrégation reste très faible du fait de la dilution. En effet, pour les grandes valeurs ρ (> 0.592746 , seuil de percolation [SA92]), la grande probabilité de percolation des lacunes empêche la formation de larges amas.

2.6.4 Lien avec le diagramme de phase du modèle de Blume-Capel

Un lien étroit relie le modèle de Blume-Capel et le modèle de ségrégation traité dans ce chapitre. L’énergie du modèle de Blume-Capel et le “substitut” naturel de l’énergie introduit pour le modèle de type Schelling sont comparables, excepté que l’analogue de

l'énergie contient un terme additionnel de couplage biquadratique, mais celui-ci n'apporte essentiellement qu'une contribution linéaire en $K = 2T - 1$ (à densité de lacunes constante). Une comparaison des deux diagrammes de phase (figure 2.25 et figure 2.20) s'avère donc pertinente.

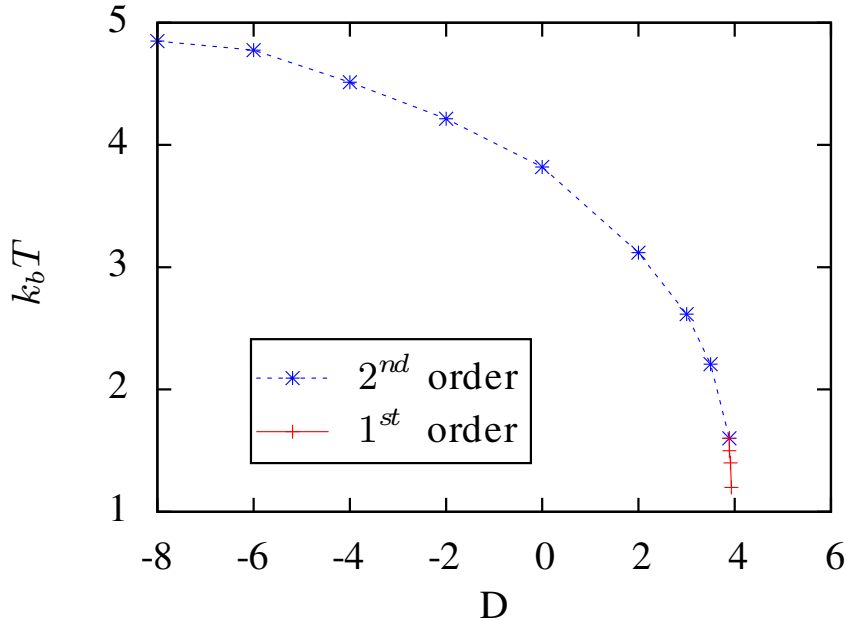


FIG. 2.25: Diagramme de phase du modèle de Blume Capel avec premiers et seconds voisins (voisinage de Moore). Les simulations ont été réalisées en utilisant l'algorithme de Heat Bath.

Le diagramme de phase de Blume-Capel a été obtenu numériquement en considérant des interactions via un voisinage de Moore. Il est tracé dans le plan (D, T) où T est la température et D le paramètre fixant en moyenne la densité de lacunes via une contribution $+D \sum_i c_i^2$ dans l'énergie. Une grande valeur de D favorise donc la présence de lacunes tandis qu'une valeur négative de D privilégie les sites occupés. L'augmentation de D et de la densité de lacunes sont corrélées, plus D augmente, plus la densité de lacunes augmente. La ligne de transition du modèle, représentée sur la figure 2.25, a été construite en traçant l'aimantation en fonction de D (resp. T) pour des valeurs fixes de la température T (resp. des valeurs de D fixes selon la zone du diagramme dans laquelle on se place) pour 3 tailles de réseau. La valeur de D (resp. T) à la transition a ensuite été déterminée par l'intersection de ces 3 courbes.

La partie rouge de la ligne de transition correspond à une transition de premier ordre, la partie bleue à une transition de second ordre. Sous la ligne de transition, le système est ordonné, soit ferromagnétique. Au dessus de la ligne de transition, pour les valeurs basses et intermédiaires de D , on trouve une phase désordonnée soit paramagnétique. A grand D et basse température, le système exhibe une phase dominée par les lacunes. En ce qui concerne le dernier cas, les configurations typiques ne sont pas strictement compa-

rables à celles rencontrées à haute densité dans le modèle de Schelling : dans le modèle de spins, les amas sont compacts tandis que dans le cas du modèle multi-agent, les amas sont dilués par les lacunes. De plus, dans le modèle de Blume-Capel, l'état gelé n'apparaît pas car la dynamique n'est pas contrainte. Pour le modèle de spins sur réseau, la ligne de transition délimite d'un côté une phase ferromagnétique (ségréguée) et de l'autre un domaine où le système passe graduellement d'une phase paramagnétique (désordonnée) à une phase où les lacunes prédominent (ségrégation diluée). Cette ligne change de nature dans le modèle de Blume-Capel comme dans le modèle de ségrégation, elle passe de discontinue à continue. Cependant, les ordres des transitions sont inversées entre le modèle de ségrégation et le modèle de spins. La transition ferromagnétique-paramagnétique est second ordre, tandis que la transition ségrégué-désordonné est de type premier ordre. La transition entre les phases ferromagnétiques et les phases prédominantes en lacunes est de premier ordre, tandis que la transition correspondante dans le modèle de type Schelling est continue.

2.7 Robustesse des résultats

Cette section vise à tester la robustesse des résultats obtenus sur le modèle de ségrégation et en particulier à s'interroger sur la généricité du phénomène de ségrégation. Les simulations suivantes n'ont pas été réalisées sur un intervalle d'étude exhaustif, le but étant uniquement de dégager une tendance sur les résultats qui en découlent.

2.7.1 Augmentation de la taille du voisinage

Lorsqu'on fixe le nombre maximum de voisins différents tolérés à une proportion T du nombre de voisins total, la valeur effective du nombre de voisins non identiques acceptés est différente de celle voulue, étant donné que le nombre de voisins est lui discret. Plus le voisinage considéré est petit, plus l'écart est important. Ainsi, en augmentant la taille du voisinage, on restreint la différence entre la proportion effective tolérée de voisins différents et la proportion maximum acceptée. Nous testons ici un voisinage de Moore de rayon 2 qui comprend donc 24 voisins. Pour un agent situé en (x, y) , le voisinage est constitué des sites qui satisfont :

$$\max(|x - x_v|, |y - y_v|) \leq 2 \quad (2.18)$$

où x_v et y_v sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un voisin de l'agent. La figure 2.26 a été obtenue en déplaçant les agents insatisfaits sur les lacunes leur apportant une utilité strictement positive. La dynamique est la même que pour le modèle développé dans ce chapitre et la configuration initiale est générée aléatoirement, la seule différence est la taille du voisinage considéré par un agent pour juger de sa satisfaction.

L'augmentation de la taille du voisinage n'a pas apporté de modifications significatives sur les simulations où T est inférieur à 0.5. En effet, initialement, les agents sont répartis uniformément sur le réseau, donc plus le voisinage qu'un agent regarde est grand, plus la probabilité d'avoir autant de voisins différents que de voisins similaires est grande. Or une tolérance inférieure à $\frac{1}{2}$ implique qu'un agent exige que moins de la moitié de ses

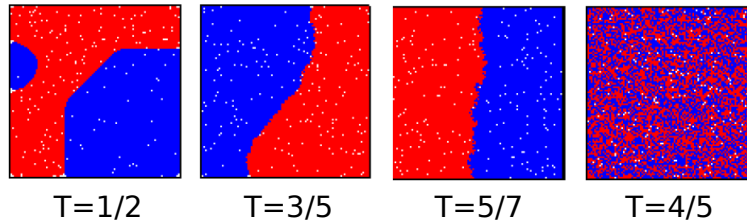


FIG. 2.26: Configurations d'équilibre pour un voisinage de rayon 2 et une densité de lacunes $\rho = 2\%$.

voisins soient différents. Les agents n'ont donc *a priori* que peu de chances de trouver une place satisfaisante. La configuration est donc gelée.

Les configurations d'équilibre obtenues pour une tolérance supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ (figure 2.26) présentent le même type de structure qu'avec un voisinage de Moore de rayon 1. En fait, une étude plus complète montre que le diagramme de phase dans le cas d'un voisinage de Moore de rayon 2 a la même allure que pour un voisinage composé des 8 agents les plus proches.

Si l'on considère un rayon r infini, les agents "voient" autant de voisins différents que de voisins similaires. Donc si la tolérance est inférieure à $\frac{1}{2}$, les agents sont nécessairement insatisfaits alors que pour une tolérance supérieure, ils seront satisfaits. Si le système part d'une configuration aléatoire où les agents des deux types sont distribués uniformément sur le réseau, les configurations d'équilibre seront a priori intégrées (deux types d'agents mélangés) : pour une tolérance inférieure à $\frac{1}{2}$, le système sera gelé alors qu'il ne le sera pas pour une tolérance supérieure (les agents continueront à se déplacer et formeront une configuration intégrée). Ainsi une extrapolation permet de voir que si l'on augmente le rayon du voisinage la ligne de transition dynamique (gelée-ségrégée) et la ligne de transition ségrégée-désordonnée se rapprocheront pour finalement se confondre ce qui conduira à la disparition de l'état ségrégé.

Une étude sur la taille du voisinage a été réalisée dans l'article [LJ03]. Les auteurs introduisent la notion de *vision*, en insistant sur le fait que l'étendue de la vision qu'on a autour de soi (la taille du voisinage) joue un rôle dans l'émergence de la ségrégation. Plusieurs cas de figures sont observées selon la tolérance testée. Si les agents sont très tolérants, la ségrégation ne fait que décroître avec la taille du voisinage, ce qui se comprend aisément en regardant la limite de rayon infini et en gardant à l'esprit que le réseau comporte autant d'agents d'un type que de l'autre. Si les agents sont un peu moins tolérants (mais toujours avec $T > 0.5$), la ségrégation va d'abord croître (légèrement) avec le rayon puis décroître. La borne supérieure de l'intervalle de croissance de la ségrégation correspond au moment où les voisinages sont suffisamment grands pour qu'une distribution compatible avec la tolérance soit réalisée (étant donnée la discrétisation de l'espace). Enfin, si les agents sont modérément tolérants (T proche de $\frac{1}{2}$), seule une croissance de la ségrégation est mise en évidence lorsque le rayon de "vision" augmente. L'explication est la même que pour le cas d'agents légèrement plus tolérants. La décroissance n'est pas observée parce que l'étude n'a pas été poussée pour des rayons assez grands. Mais celle-ci apparaîtra nécessairement en augmentant le rayon du voisinage, puisque les agents

finiront par “voir” autant de voisins similaires que de voisins différents.

2.7.2 Contraintes sur les distances de déplacement

Dans cette section, les agents testent les positions vacantes avec un ordre précis (plutôt qu'aléatoirement) jusqu'à trouver une position qui convienne du point de vue de l'utilité : les déplacements ne sont plus à longue portée.

- **Déplacement minimisant la distance**

Dans ces simulations, les agents choisissent en priorité la lacune satisfaisante la plus proche de leur position initiale. L'allure des résultats pour des valeurs de T inférieures à 0.5 est la même que dans le cas où les lacunes “testées” sont choisies aléatoirement. Les simulations correspondantes n'ont donc pas été représentées ici. La position de départ peut faire partie des positions testées ou non, nous observons ici les conséquences relatives. Les configurations d'équilibre laissent penser que la contrainte de distance introduite ici ne modifie pas les régimes rencontrés. Cependant, le fait qu'un agent considère sa position de départ comme une destination possible a une influence sur l'amplitude de la ségrégation. La figure 2.27 montre un exemple de quelques configurations d'équilibre ($\rho = 2\%$) obtenues lorsque les agents minimisent la distance parcourue entre leurs positions initiale et finale, testant en premier la position qu'ils occupent actuellement. Cette dernière règle revient à ce que les agents satisfaits ne se déplacent pas. Comme les configurations (figure 2.27) le suggèrent, des amas peuvent se former pour des valeurs modérées de la tolérance mais ils restent filiformes du fait de l'inertie consécutive à la règle de déplacement. La figure 2.28 montre un exemple de quelques configurations

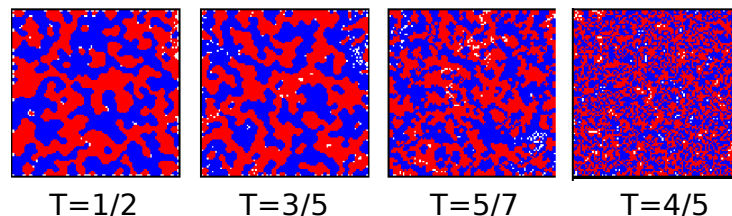


FIG. 2.27: Configurations d'équilibre dans le cas où les agents minimisent la distance parcourue entre leurs positions initiale et finale (satisfaisante). Le site de départ est considéré comme une case vide potentielle. ($\rho = 2\%$)

d'équilibre à $\rho = 2\%$ rencontrées lorsque les agents minimisent la distance parcourue entre leurs positions initiale et finale, mais lorsqu'ils ne sont pas contraints de rester sur leur position. Lorsque la ségrégation émerge, des amas peu nombreux occupent alors largement le réseau. Lorsque la position initiale n'est pas considérée comme une case vide potentielle, les amas sont ainsi plus imposants.

On comprend ici que, dans le cas où la case initiale est une destination possible, l'inertie des agents satisfaits empêche la formation d'amas de taille “infinie”.

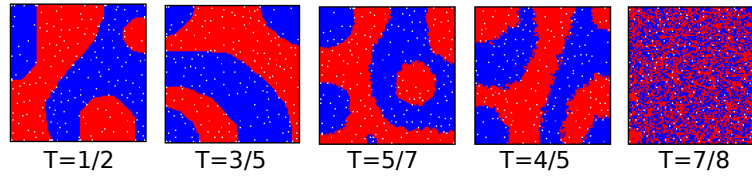


FIG. 2.28: Configurations d'équilibre dans le cas où les agents minimisent la distance parcourue entre leurs positions initiale et finale (satisfaisante). Le site de départ n'est pas considéré comme une case vide potentielle. ($\rho = 2\%$)

- **Attraction au centre**

Afin de simuler l'effet de l'attrait d'une zone (par exemple, le centre *a priori* attractif d'une ville) sur l'équilibre, on introduit une attraction au centre : les agents sont placés sur les positions vacantes les plus proches du centre qui leur apportent une utilité de 1. Pour cela, les lacunes sont testées dans l'ordre de croissance de leur distance par rapport au centre. Avec une valeur de T inférieure à 0.5, l'ordre de test des lacunes n'a pas d'influence, en effet les configurations d'équilibre pour ces valeurs de T ont la même allure que celles générées quand l'ordre de choix des positions vides à tester est aléatoire, c'est pourquoi il n'est pas utile de les afficher. Comme dans la sous-section précédente, le fait de considérer la position initiale comme une case vide potentielle ou pas a une influence considérable sur les simulations, les deux cas possibles sont donc traités. L'influence d'une attractivité centrale est en partie compréhensible via les figures 2.29 et 2.30. De manière générale, les agents se concentrent dans la partie centrale du réseau et les lacunes sont repoussées dans les coins. Les régimes observés (ségrégué, gelé...) sont conservés par rapport à la version du modèle de ségrégation traité (où les distances de déplacements sont non contraintes).

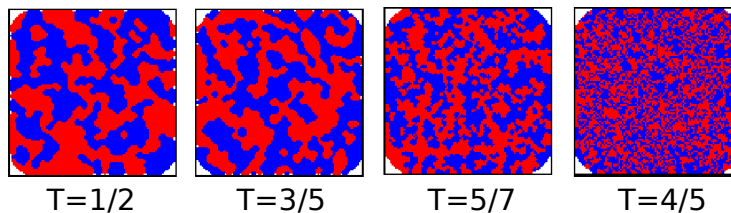


FIG. 2.29: Configurations d'équilibre dans le cas où les positions centrales sont plus attractives. Le site de départ est considéré comme une case vide potentielle.

Le second cas (figure 2.30, le site de départ n'est pas considéré comme une case vide potentielle) favorise de nouveau l'apparition d'amas plus conséquents.

Les contraintes de distance (distance par rapport au centre, par rapport à l'agent considéré) ne modifient pas drastiquement les configurations. Les régimes observés sont similaires à ceux observés sans contrainte (déplacement longue portée). En revanche, l'inertie limite l'expansion des amas : si certaines configurations obtenues avec inertie (les agents satisfaits ne bougent pas) sont globalement ségréguées, la ségrégation est moins

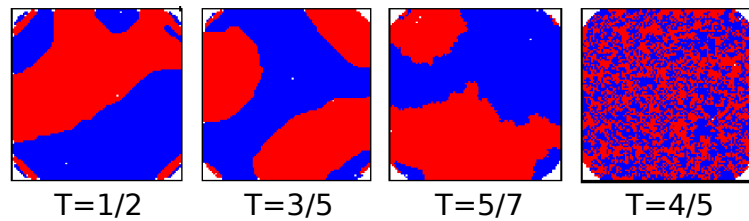


FIG. 2.30: Configurations d'équilibre dans le cas où les positions centrales sont plus attractives. Le site de départ n'est pas considéré comme une case vide potentielle.

importante.

2.7.3 Contraintes sur le nombre de tentatives de déplacement

Une critique du modèle pourrait être qu'il autorise un nombre illimité de tests pour chaque agent qui cherche un nouveau site satisfaisant. Afin de tester quelle sont les conséquences sur les configurations d'équilibre si le nombre de tests par agents est limité à chaque nouveau déplacement, une version où chaque agent tiré au hasard teste un nombre limité de positions (contrairement aux cas précédents où il pouvait tester toutes les positions vides) est proposée. Si aucun des tests n'est concluant il se positionne sur la dernière position vide testée. Dans les deux cas traités ci-dessous, les lacunes sont testées par ordre croissant des distances au centre. Comme dans le cas de l'attraction au centre

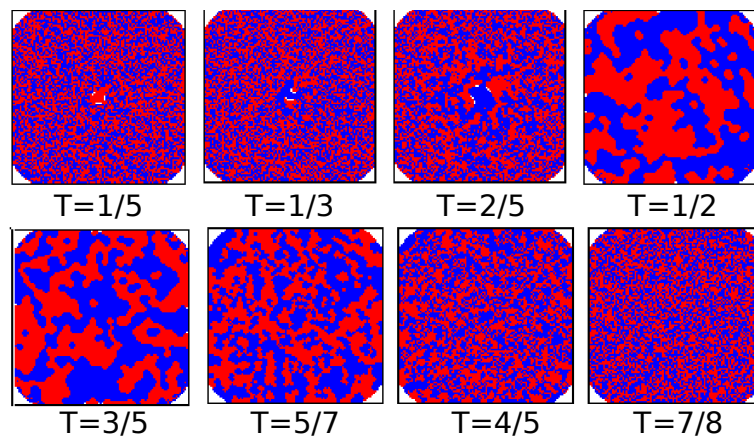


FIG. 2.31: Configurations d'équilibre dans le cas où les positions centrales sont plus attractives ($\rho = 2\%$). Le nombre de tests de positions vides est limité à 10 par agent. Le site de départ est considéré comme une destination potentielle.

sans limitation du nombre de cases vides observées, les lacunes sont rejetées sur les coins pour $T \geq 0.5$. Ce phénomène apparaît aussi maintenant pour les valeurs inférieures de T . Les configurations typiques associées restent toujours globalement intégrées (cf. la figure 2.31). Le fait de limiter et de forcer l'installation au bout d'un nombre donnée de

tests ne permet pas de débloquent la situation. Les agents ne sont toujours pas dans une configuration optimale pour être satisfaits.

Le fait de limiter le nombre de cases testées ne change rien pour les valeurs de T supérieures à 0.5 (cf. la figure 2.31). Ceci peut s'expliquer par le fait que la tolérance dans ces cas là est suffisamment importante, pour qu'un petit nombre de tests suffisent de toute façon aux agents pour trouver une position satisfaisante.

Dans le cas suivant, pour limiter le nombre de tests, on procède en s'inspirant de l'algorithme de Heat Bath : on introduit du bruit grâce à une approche probabiliste. Les agents peuvent ainsi accepter des sites qui ne leur apportent pas une utilité égale à 1. Voici la dynamique :

- On tente de placer l'agent le plus proche du centre possible :
 - si son utilité vaut 1, il accepte le déplacement,
 - sinon il l'accepte avec une probabilité :

$$P = \frac{\exp(-N_d[1] - T(N_d + N_s)[1])}{\sum_{j=1}^{10} \exp(-N_d[j] - T(N_d + N_s)[j])} \quad (2.19)$$

où j désigne la i ème case la plus proche du centre.

- si la position testée n'est pas retenue, il teste la $2i$ ème case vide la plus proche du centre
 - si l'utilité de l'agent dans cette position vaut 1, il s'y positionne,
 - sinon il accepte le déplacement avec une probabilité :

$$P = \frac{\exp(-N_d[1] - T(N_d + N_s)[1]) + \exp(-N_d[2] - T(N_d + N_s)[2])}{\sum_{j=1}^{10} \exp(-N_d[j] - T(N_d + N_s)[j])} \quad (2.20)$$

Le processus est réitéré jusqu'à ce que l'agent considéré trouve une position satisfaisante. De cette façon, la 10-ième case vide testée est forcément retenue si les autres ne l'ont pas été. En effet la probabilité d'acceptation atteint 1.

La figure 2.32 donne les motifs des réseaux obtenus pour différentes valeurs de T après $1000N^2$ itérations du processus décrit ci-dessus. Comme dans le cas précédent, cette limitation du nombre de lacunes testées n'engendre aucun changement dans l'apparence des réseaux obtenus avec la dynamique décrite ci-dessus pour $T \geq 0.5$. En effet, les agents sont "suffisamment tolérants" pour accepter une des premières cases donc ni la limitation du nombre de tests ni le bruit (possibilité pour un agent d'accepter de se déplacer sur un site non satisfaisant) n'influent sur les résultats.

En ce qui concerne les basses valeurs de T , cette dynamique apporte des modifications importantes, effectivement de grandes structures qui n'étaient pas présentes avec les règles de dynamiques précédentes se forment (cf. la figure 2.32). L'approche probabiliste qui autorise potentiellement des déplacements vers des sites insatisfaisants permet de "dégeler" la situation. L'absence du gel dynamique conduit à l'émergence de ségrégation.

2.7.4 Tolérance hétérogène

La variante envisagée ici introduit une hétérogénéité des agents : ils n'ont pas tous la même tolérance. Elle suit une distribution uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$. L'effet d'une

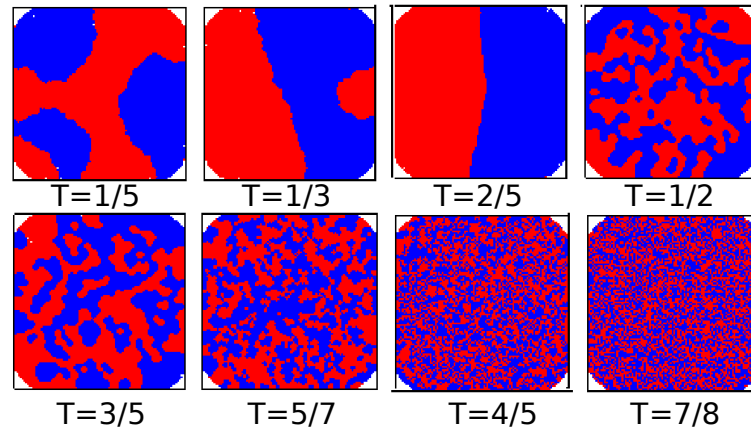


FIG. 2.32: Configurations d'équilibre dans le cas où les positions centrales sont plus attractives ($\rho = 2\%$). Le nombre de tests de positions vides est limité à 10 par agent. Le site de départ est considéré comme une destination potentielle.

distribution uniforme des tolérances est testée lorsque le réseau évolue avec la dynamique explicitée dans la section 2.3 : pour rappel, les agents se déplacent sur n'importe quelle case vide satisfaisante. Avec une population hétérogène du point de vue de la tolérance,

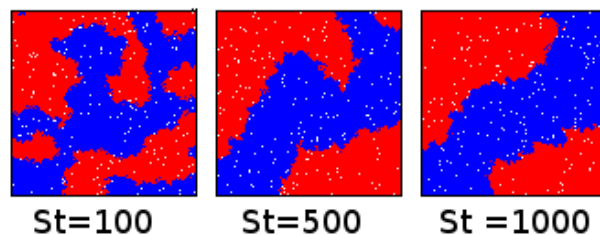


FIG. 2.33: Configurations d'équilibre ($\rho = 2\%$). Les tolérances des agents sont distribuées uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.

une ségrégation importante émerge rapidement. Ainsi, la présence d'agents très tolérants (haute valeur de T) pour éventuellement "tempérer" avec des agents plutôt intolérants (basse valeur de T) ne suffit pas à éviter le groupement compact des agents de même type.

En contraignant maintenant les déplacements, soit en minimisant la distance entre la position initiale et la position finale satisfaisante, soit en choisissant la position finale comme celle la plus proche du centre qui donne une utilité de 1 à l'agent, les amas sont moins compacts et plus nombreux (figure 2.34 et figure 2.35). On remarque également que les lacunes sont rejetées sur les bords dans le cas de l'attraction au centre. L'inertie imposée par la minimisation de distances combinée au fait que le site de départ est un site de destination possible pour l'agent empêche la formation d'amas très larges.

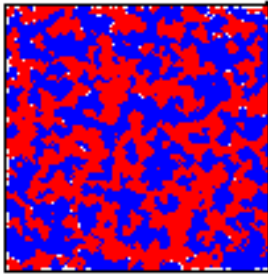


FIG. 2.34: Configurations d'équilibre ($\rho = 2\%$). Les tolérances des agents sont distribuées uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Les déplacements s'effectuent en priorité sur les positions vides les plus proches des positions initiales des agents. Le site de départ est considéré comme une destination potentielle.

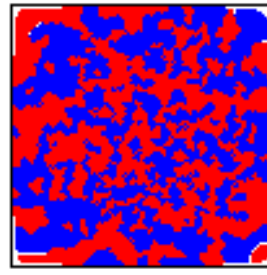


FIG. 2.35: Configurations d'équilibre ($\rho = 2\%$). Les tolérances des agents sont distribuées uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Les déplacements des agents s'effectuent en priorité sur les positions vides les plus proches du centre. Le site de départ est considéré comme une destination potentielle.

2.7.5 Migrations externes : vers un système ouvert

Dans les simulations précédentes, seuls des mouvements internes au réseau ont été réalisés. L'introduction de déplacements vers l'extérieur est une extension naturelle du modèle. D'une part, des agents insatisfaits sont retirés un à un du réseau et d'une autre, des agents sont introduits régulièrement en veillant à ne pas dépasser une certaine densité d'agents. En pratique, la dynamique est la suivante :

1. Un site est choisi aléatoirement
2. Si aucun agent n'est présent sur ce site, les densités totales des 2 types d'agents en présence sont mesurées, si l'une d'elle est inférieure à un certain seuil (qui correspond à la densité initiale d'un des 2 d'individus), on place sur le site considéré un agent du type correspondant. Si les deux densités sont inférieures au seuil, on place indifféremment un agent d'un type ou de l'autre. En revanche, si les densités des deux types d'individus dépassent le seuil donné, le site reste inoccupé.
3. Si un agent est présent et insatisfait, il est envoyé à l'extérieur du réseau. En conséquence le site traité devient inoccupé. Si l'agent est satisfait, il ne bouge pas.

L'évolution vers un état bloqué est très rapide quelque soit la valeur de T . En effet, les réseaux n'évoluent déjà plus à partir de 10^6 d'itérations, soit après avoir regardé 10^6 sites. Des frontières de lacunes séparant les 2 types d'agents apparaissent pour $T = 0.375$. Ces frontières peuvent s'interpréter comme un autre type de ségrégation que celui rencontré dans la totalité de l'étude qui précède : les agents de chaque type ne forment pas des groupes compacts mais sont isolés les uns des autres. Bien que le phénomène soit marginal dans ce cas, l'introduction de migrations externes laisse entrevoir l'émergence de nouveaux régimes. Ici, le taux de lacunes est contrôlé artificiellement, le chapitre suivant

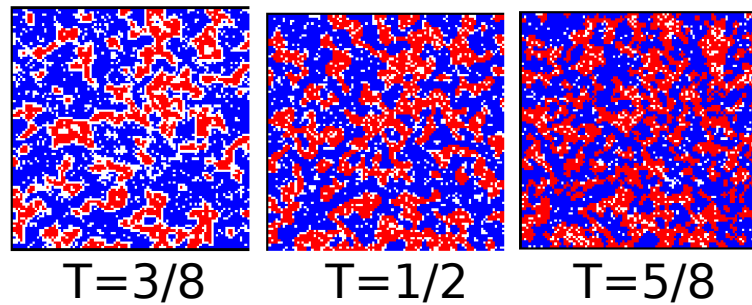


FIG. 2.36: Configurations d'équilibre obtenues avec la dynamique comprenant les déplacements internes et externes. La densité de lacunes est contrôlée de façon à ne pas trop s'éloigner de sa valeur initiale ($\rho = 2\%$).

propose un modèle adaptatif : le taux d'occupation du réseau s'adaptera de lui-même notamment en faisant intervenir la notion d'attractivité du réseau.

2.8 Conclusions

A travers ce chapitre, un lien a été mis en évidence entre un modèle de spins, le modèle de Blume-Capel et le modèle de ségrégation de Schelling. Cette correspondance a servi de guide pour analyser le modèle. Le modèle de ségrégation de Schelling a en effet été analysé en utilisant certaines notions empruntées à la physique statistique. Cette analyse a conduit à l'introduction d'une mesure de ségrégation et d'analogues de quantités physiques tels que le coefficient de fluctuation et la susceptibilité, où l'analogie entre température et tolérance s'est avérée pertinente. Ces quantités ont permis d'identifier les différentes phases du système et de caractériser les transitions entre elles (de type thermodynamique ou dynamique, discontinue ou continue). Les principaux résultats ont été résumés à travers un diagramme de phase dans le plan (ρ, T) - où ρ est la densité de lacunes et T la tolérance.

On a constaté en particulier que la phase ségrégée occupe un large domaine (jusqu'à une tolérance T de $3/4$), confirmant ainsi l'intuition de Schelling concernant l'aspect générique du phénomène de ségrégation. La ségrégation a également montré sa robustesse dans les différentes variantes abordées dans la section 2.7. De plus, la transition abrupte de l'état désordonné vers l'état ségrégé observée dans le modèle pourrait être interprété comme le "tipping point", plus précisément le rapide changement d'ethnies, observé et étudié par des sociologues [WT07]. Par ailleurs, l'état de ségrégation diluée observée à faible tolérance et haute densité pourrait être pertinent pour les zones urbaines à faibles densités. Quant à l'état gelé, le chapitre suivant nous permettra de voir, à travers un modèle autorisant un flux migratoire d'agents, qu'il peut disparaître. Les régimes observés montrent ainsi une riche phénoménologie qui trouve des interprétations plausibles dans un contexte socio-économique, nous invitant ainsi à développer le modèle.

D'autre part, les outils et méthodes présentés ici pourraient être utilisés sur d'autres modèles de type Schelling. En particulier, on utilisera la correspondance avec le modèle

de spins dans le chapitre suivant pour développer un modèle plus réaliste qui intégrera la possibilité de mouvements d'agents vers ou depuis l'extérieur, c'est-à-dire de flux migratoires.

Du modèle de spins au modèle de ségrégation : modèle de ville ouverte

Le modèle de ségrégation peut-être étendu naturellement en autorisant les migrations externes. La correspondance entre le modèle de ségrégation de Schelling et le modèle de Blume-Emery-Griffiths fournit un moyen direct d'introduire des échanges d'agents entre le réseau et l'extérieur. En effet, la correspondance à laquelle nous faisons référence dans le chapitre précédent, concerne une version contrainte du modèle de spins, dans le sens où la densité d'agents est fixée. Relâcher cette contrainte conduit à introduire un terme additionnel dans l'énergie. Ce terme peut être interprété comme une mesure de l'attractivité du réseau relativement à l'extérieur. De l'énergie est déduite la condition de satisfaction, qui comprend la possibilité d'effectuer des migrations externes. La satisfaction n'est plus binaire. Chaque agent se voit désormais attribuer un degré de satisfaction qui dépend à la fois de son voisinage mais aussi de l'attrait du réseau par rapport à l'extérieur. La nouvelle dynamique qui en découle conduit à l'émergence d'un type de ségrégation qui n'apparaît pas (ou très marginalement) dans la version fermée du modèle. Des frontières de lacunes se forment entre des amas de type différents, isolant ainsi les agents. Des liens entre les phénomènes émergents du modèle en système ouvert et des faits observés par des sociologues sont exhibés.

Si l'on veut faire du modèle de ségrégation de Schelling un outil réaliste pour la modélisation de dynamique résidentielle des villes, on ne peut concevoir l'absence de flux externes. Ceci est d'autant plus vrai que les villes sont souvent des lieux de transition dans le sens où l'échelle de temps des mobilités résidentielles est beaucoup plus courte que l'échelle de temps de développement des villes (croissance urbaine par exemple).

3.1 Vers un modèle de ségrégation ouvert

3.1.1 Correspondance modèle de ségrégation - modèle de Blume-Emery-Griffiths

Le chapitre précédent a mis en évidence un lien entre le modèle de ségrégation de Schelling et le modèle de Blume-Emery-Griffiths avec contraintes. Les échanges directs entre agents des deux types sont interdits et les nombres d'agents et lacunes sont fixés. Une extension naturelle du modèle de ségrégation de Schelling serait donc une version ouverte. La correspondance entre le modèle multi-agent et le modèle de Blume-Emery-Griffiths donne une façon simple d'introduire les migrations externes. Il suffit de relâcher la contrainte sur la densité de lacunes dans le modèle de Blume-Emery-Griffiths. Dans ce cas, l'énergie du modèle de spins s'écrit :

$$E_{BEG} = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^2 c_j^2 + D_{BEG} \sum_i c_i^2. \quad (3.1)$$

où $-\sum_{\langle i,j \rangle}$ est une somme sur les paires de plus proches voisins et \sum_i une somme sur tous les sites du réseau. Les termes c_i sont les variables de spin $+1, -1, 0$. L'énergie E_{BEG} est celle du modèle de Blume-Emery-Griffiths [BEG71] sans contrainte, initialement introduit afin d'étudier la superfluidité des mélanges He³-He⁴. Le terme D_{BEG} contrôle la densité de lacunes mais uniquement en moyenne permettant ainsi d'adapter le taux d'occupation du réseau. La limite $D_{BEG} \rightarrow -\infty$ correspond à l'absence de lacunes, c.à .d, au modèle d'Ising (si $K = 0$). De grandes valeurs positives de D_{BEG} correspondent à une densité de lacunes élevée. Le terme D_{BEG} n'apparaît pas dans l'énergie associée à la version fermée du modèle de ségrégation de Schelling, non pas parce qu'il vaut 0, mais parce que la densité de lacunes est fixée.

Ainsi la correspondance entre le modèle de ségrégation de Schelling et le modèle de Blume-Emery-Griffiths nous invite à généraliser le modèle de Schelling au cas ouvert. Dans le but de permettre les échanges avec un réservoir d'agents, l'utilité des agents doit être redéfinie de façon à comparer la satisfaction d'un agent à l'intérieur et à l'extérieur du réseau. Le modèle de Blume-Emery-Griffiths donne une façon simple de redéfinir l'utilité, avec le paramètre D_{BEG} comme perte de satisfaction (si $D_{BEG} < 0$) ou gain (si $D_{BEG} > 0$) d'un agent si il quitte la ville alors qu'il était sur un site avec un voisinage vide.

3.1.2 Description du modèle de ségrégation en version ouverte

Dans le chapitre précédent, l'écriture de la condition de satisfaction avec des variables de spins a permis de dériver une énergie. A l'inverse pour le système ouvert, l'énergie du modèle de Blume-Emery-Griffiths dicte une façon naturelle d'écrire la condition de satisfaction d'un agent. La version ouverte du modèle de ségrégation de Schelling est détaillée dans cette section. La taille du réseau est toujours finie, la ville n'est pas autorisée à s'agrandir car le phénomène sur lequel on se focalise est la dynamique des déplacements à l'intérieur d'une zone donnée et non pas la croissance de cette zone.

Le statut d'un agent n'est plus binaire (satisfait ou insatisfait), un indice quantifie

maintenant l'insatisfaction d'un agent. En ce qui concerne la dynamique, tout agent - qu'il soit satisfait ou pas- peut se déplacer sur un site choisi aléatoirement si son degré de satisfaction devient plus élevé. Un agent peut également quitter la ville si cela lui permet d'augmenter son degré de satisfaction, et de nouveaux agents peuvent entrer dans la ville. Un paramètre D contrôle le flux de ces agents qui partent ou entrent dans le réseau, il agit comme un potentiel chimique pour la densité de lacunes. Les paramètres de contrôle sont donc la tolérance T et le "potentiel chimique" D .

Définissons maintenant l'indice d'insatisfaction. Pour un agent à l'intérieur de la ville (réseau), l'indice dépend de l'hétérogénéité de son voisinage et d'une attractivité inhérente à la ville. L'indice d'insatisfaction I_{dissat} pour un voisinage composé de N_d voisins différents et N_s voisins similaires est :

$$I_{dissat} = N_d - T(N_d + N_s) + D, \quad (3.2)$$

où T est la tolérance des agents par rapport à l'hétérogénéité de leur voisinage. Plus l'indice I_{dissat} est petit, plus l'agent est satisfait. Avec les variables de spin introduites précédemment, l'indice d'insatisfaction d'un agent sur un site i s'écrit :

$$I_i^{dissat} = -\frac{1}{2}c_i \sum_{\langle j \rangle} c_j - \frac{1}{2}(2T - 1) c_i^2 \sum_{\langle j \rangle} c_j^2 + D c_i^2, \quad (3.3)$$

où, les sommes se font sur les 8 voisins les plus proches du site i . Sans perte de généralité, on peut supposer qu'un agent à l'extérieur du réseau a un indice d'insatisfaction nul. Ceci est équivalent à considérer que D est la perte de satisfaction (si $D < 0$) ou le gain (si $D > 0$) d'un agent qui quitte la ville en laissant un voisinage inoccupé - ou à l'inverse, D est le gain (si $D < 0$) ou la perte (si $D > 0$) d'un agent qui entre dans la ville avec un voisinage vide. La condition minimale de satisfaction d'un agent se traduit par un indice de d'insatisfaction I_{dissat} négatif. Ainsi D indique à quel point le réseau est accueillant. En effet, une valeur très négative de D rend l'environnement aisément satisfaisant pour les agents (I_{dissat} facilement négatif). Tandis qu'une grande valeur de D conduit à l'impossibilité de satisfaire les agents (I_{dissat} difficilement négatif), rendant en conséquence l'environnement hostile. D peut alors être vu comme l'attractivité de l'environnement urbain [Koz07], nous l'appellerons "attractivité urbaine" (bien qu'il faut rappeler qu'une valeur positive de D signifie que l'environnement est inhospitalier). Dans un contexte socio-économique, il aurait été plus approprié de prendre le signe opposé pour définir D dans l'équation (3.2) mais le signe est choisi ici de façon à avoir une correspondance directe avec le modèle de Blume-Emery-Griffiths.

Dynamique

Partons d'une configuration aléatoire, chaque agent essaie alors d'augmenter son degré de satisfaction (c.à.d. de diminuer I_{dissat}). Dans ce but, des échanges externes et internes sont envisagés avec des probabilités similaires.

Dans le cas d'un échange externe, un site est choisi aléatoirement : si il est inoccupé, l'arrivée d'un agent (un des deux types avec probabilité égale) est testée. L'occupation du site devient effective seulement si l'indice d'insatisfaction I_{dissat} du site de destination

est plus petit que 0 (la valeur de l'indice d'insatisfaction à l'extérieur du réseau). Pour cela, le nombre de voisins similaires N_s et de voisins différents N_d dans le voisinage cible doivent satisfaire l'inégalité suivante :

$$N_d - T(N_d + N_s) + D \leq 0. \quad (3.4)$$

Si le site est occupé par un agent, ce dernier reste sur le site seulement si son voisinage remplit la condition précédente (équation (3.4)); autrement l'agent se retire du réseau. Ici, la tolérance T peut être comprise comme la proportion maximale de voisins différents tolérés pour rester dans le réseau quand l'environnement est neutre (ce qui correspond à $D = 0$).

Dans le cas d'un échange interne, un site vacant et un site occupé sont choisis. L'agent se déplace sur le site vide après comparaison des indices d'insatisfaction associés aux deux sites. Si son voisinage actuel est caractérisé par le couple de voisins similaires et différents (N_s, N_d) , et le site de destination potentielle par le couple $(N_{s'}, N_{d'})$, le déplacement a lieu si :

$$[N_{d'} - T(N_{d'} + N_{s'})] - [N_d - T(N_d + N_s)] \leq 0. \quad (3.5)$$

Le paramètre D est absent dans cette différence d'indices, les échanges internes dépendent ainsi seulement de la tolérance T .

Fonction de Lyapunov du système ouvert

Ayant défini le modèle, on montre ici que l'énergie de Blume-Emery-Griffiths est une fonction de Lyapunov du modèle de ségrégation en version ouverte. Dans le cas d'un échange interne, c'est-à-dire d'un agent se déplaçant sur un site vide, la variation d'énergie induite par le déplacement d'un agent c_i occupant le site i de voisinage $\langle j \rangle$ vers un site i' de voisinage $\langle k \rangle$ vacant, s'écrit :

$$\Delta E_{BEG} = \sum_{\langle j \rangle} c_i c_j + K \sum_{\langle j \rangle} c_i^2 c_j^2 + D_{BEG} c_i^2 - \sum_{\langle k \rangle} c_i c_k - K \sum_{\langle k \rangle} c_i^2 c_k^2 - D_{BEG} c_i^2 \quad (3.6)$$

$$= 2[-[N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle j \rangle} + [N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle k \rangle}] \quad (3.7)$$

$$= 2(I_{i'}^{dissat} - I_i^{dissat}) \quad (3.8)$$

si l'on identifie K et $2T - 1$. Or, la dynamique exige que le déplacement d'un agent sur un site vide ne se fasse que si la différence entre les indices de d'insatisfaction final et initial $I_{i'}^{dissat} - I_i^{dissat}$ est négative. Par conséquent, tout déplacement interne entraîne une diminution de l'énergie. Dans le cas d'un échange externe, la variation d'énergie ΔE_{BEG} induite par l'arrivée d'un agent de type c_i occupant le site i de voisinage $\langle j \rangle$ sur le site vacant i' de voisinage $\langle k \rangle$ s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta E_{BEG} = D_{BEG} c_i^2 - \sum_{\langle k \rangle} c_i c_k - K \sum_{\langle k \rangle} c_i^2 c_k^2 - D_{BEG} c_i^2 \quad (3.9)$$

$$= 2[[N_d - T(N_d + N_s)]_{\langle k \rangle}] + D_{BEG} c_i^2 \quad (3.10)$$

$$= 2I_{i'}^{dissat} \quad (3.11)$$

si l'on identifie D_{BEG} et $2D$, et, K et $2T - 1$. Or, les règles de dynamique imposent que

l'indice de d'insatisfaction d'un agent arrivant sur le réseau soit négatif. Donc, l'arrivée d'un agent selon les règles de dynamique conduit à une diminution de l'énergie. Le même type de raisonnement montre que le départ d'un agent selon les règles de la dynamique du système ouvert engendre la baisse de l'énergie. Ainsi, une fonction de Lyapunov du modèle ouvert est l'énergie du modèle de Blume-Emery-Griffiths (équation (3.1) - avec D_{BEG} remplacé par $2D$, on notera cette énergie E_s).

Tracé de l'énergie

La façon dont a été développée la dynamique du système ouvert suggère l'équivalence entre la dynamique de température nulle du modèle de Blume-Emery-Griffiths et du modèle traité ici, à l'exception des restrictions cinétiques suivantes : ici les agents rouges ne peuvent devenir bleus et inversement. Il est alors intéressant de comparer l'énergie de Blume-Emery-Griffiths $E_{BEG}(K = 2T - 1, D_{BEG} = 2D)$ à température finie proche de 0 et l'énergie $E_s = E_{BEG}(K = 2T - 1, D_{BEG} = 2D)$ mesurée sur les configurations d'équilibre du modèle multi-agent. L'énergie du modèle de type Schelling ouvert décroît

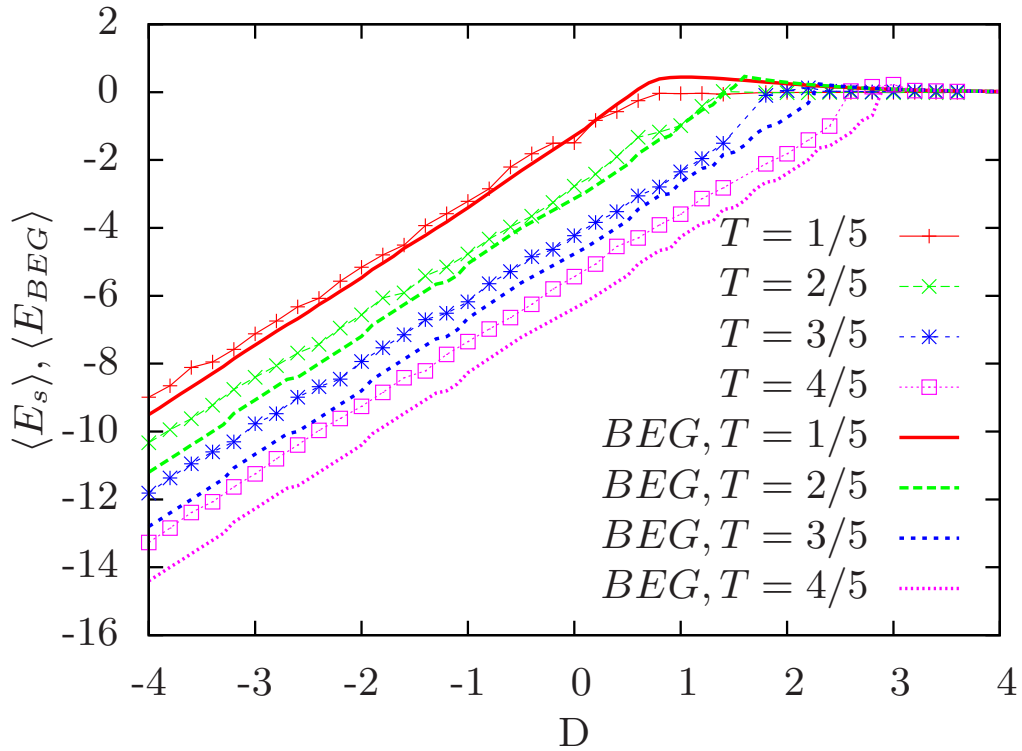


FIG. 3.1: Energies moyennes $\langle E_s \rangle$ et $\langle E_{BEG}(K = 2T - 1, D_{BEG} = 2D) \rangle$ des modèles de type Schelling et de Blume-Emery-Griffiths (à température finie) en fonction de D pour différentes valeurs de la tolérance T . Les quantités ont été moyennées sur 30000 configurations de réseau 100×100 après l'équilibre. L'énergie de Blume-Emery-Griffiths a été obtenue en utilisant l'algorithme de Heat Bath à une température proche de 0.

durant toute la dynamique, mais la dynamique contrainte crée des barrières entre des minima locaux. En conséquence, l'énergie n'atteint pas nécessairement son minimum absolu. La figure 3.1 montre la dépendance en D de cette énergie à un point fixe (ou dans le régime stationnaire), pour différentes valeurs de la tolérance T . Sur la même figure, l'énergie du modèle de BEG correspondant à la limite de température nulle est également représentée : de faibles différences sont perceptibles entre les mesures de l'énergie des deux modèles. L'analyse thermodynamique ne présentera donc pas grand intérêt ici. La faible différence est liée à la naissance d'interfaces séparant les agents des différents types, interfaces qui ne sont pas présentes dans les configurations d'équilibre du modèle de Blume-Emery-Griffiths à température nulle. Ce point sera détaillé dans la suite.

3.2 Simulations numériques

Les simulations numériques du modèle en version ouverte ont été effectuées sur des réseaux de dimension $L \times L$ ($L = 100$) avec des conditions aux bords libres. Plusieurs valeurs de la tolérance T et de l'attractivité urbaine D ont été testées. Les configurations initiales sont complètement mélangées, agents et lacunes étant réparties aléatoirement sur le réseau. La dynamique décrite précédemment est appliquée jusqu'à ce que le système atteigne l'équilibre, c'est-à-dire, quand les quantités calculées ont seulement de très faibles fluctuations ou quand le système est gelé. La figure 3.2 montre les configurations finales pour différentes valeurs de T et D . L'étendue des configurations observables pour

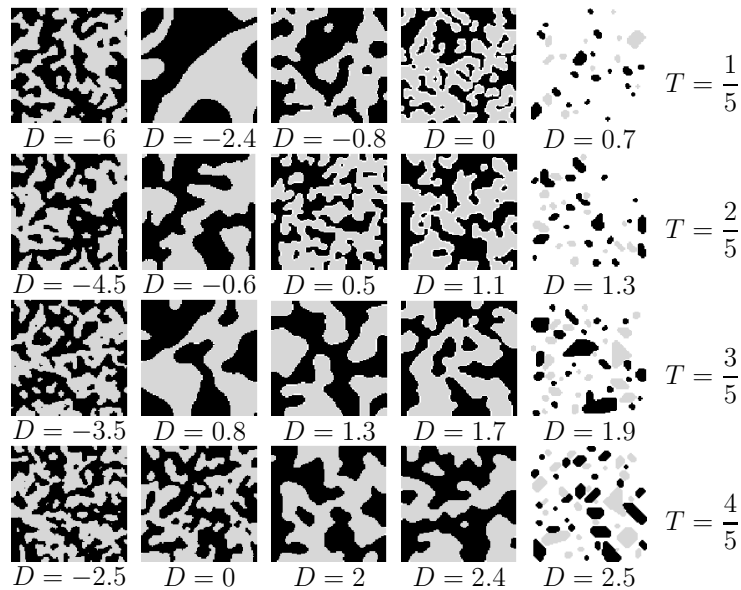


FIG. 3.2: Configurations finales obtenues pour différentes valeurs des paramètres T et D avec des réseaux 100×100 . Les pixels gris foncés et gris clairs correspondent aux deux types d'agents alors que les pixels blancs sont des sites vacants.

les différentes valeurs de l'attractivité urbaine D dépendent de la tolérance T . Cependant,

il existe deux phases extrêmes que l'on rencontre à chaque tolérance : une phase saturée et une phase dominée par les lacunes. Pour les valeurs très négatives de D , aucune lacune n'est présente quelque soit la tolérance, le système est saturé. Les agents des deux types sont en contact direct. En effet, le réseau est si accueillant (l'indice d'insatisfaction I_{dissat} est facilement négatif) que les agents préfèrent y rester même avec des voisins différents. A l'inverse, pour les hautes valeurs de D , l'environnement est si inhospitalier (les indices d'insatisfaction I_{dissat} des agents sont positifs) que les agents partent. Entre ces deux états, selon la valeur de la tolérance considérée, des lacunes peuvent apparaître et créer des interfaces qui isolent les deux types d'agents. Les interfaces entre agents rouges et bleus sont ainsi de plusieurs types : le contact peut être direct ou des lacunes peuvent séparer les agents. Les interfaces ont aussi plusieurs formes possibles : anguleuses ou lisses rendant les amas plus ou moins compacts. Une analyse quantitative donnera le domaine d'existence de ces interfaces. La formation d'interfaces constitue ainsi la principale caractéristique du modèle de ségrégation de Schelling en version ouverte. Ces interfaces n'existent pas dans le modèle de Blume-Emery-Griffiths à une température finie (proche de 0), elles sont à l'origine des faibles différences d'énergie observées sur la figure 3.1.

3.2.1 Analyse numérique : types d'interfaces

Afin de déterminer les domaines d'existence des phases rencontrées, une analyse quantitative est réalisée. Différentes quantités telles que les nombres moyens de voisins différents par site et la densité d'agents sont mesurées.

Phases de saturation et d'exode

La densité d'agents présents dans les configurations d'équilibre permet de localiser la transition vers l'état dominé par les lacunes. Cette quantité a été tracée en fonction de l'attractivité urbaine D sur la figure 3.3 pour plusieurs valeurs de la tolérance. Lorsque D augmente, le réseau devient moins attractif, la densité d'agents s'écarte alors légèrement de sa valeur maximale. Cela correspond à l'apparition des premières lacunes. Lorsque D continue à augmenter, la densité d'agents chute jusqu'à atteindre une valeur très basse. Ce changement rapide montre l'existence d'une transition discontinue vers l'état dominé par les lacunes. La décroissance brutale observée ne conduit pas à une valeur nulle de la densité car de petits amas restent dans la mer de lacunes. Ces amas ont pu survivre car les voisinages des agents contenus dans l'amas forment une configuration compatible avec une forte valeur de D . Cependant, la diminution de l'attractivité du réseau (augmentation de D) mène nécessairement à la disparition de ces amas pour laisser place à une configuration complètement vide.

Notons que pour les hautes valeurs de la tolérance, l'apparition des premières lacunes coïncide avec la transition vers l'état où les lacunes sont prédominantes.

Ségrégation par isolation

L'évolution du nombre de voisin différents (figure 3.4) permet de déterminer le type d'interface : soit des agents différents sont en contact direct, soit des lacunes les séparent. Pour des valeurs négatives de D , les contacts entre agents différents sont nombreux, le réseau étant saturé. Lorsque D augmente, le nombre de liens entre des agents différents

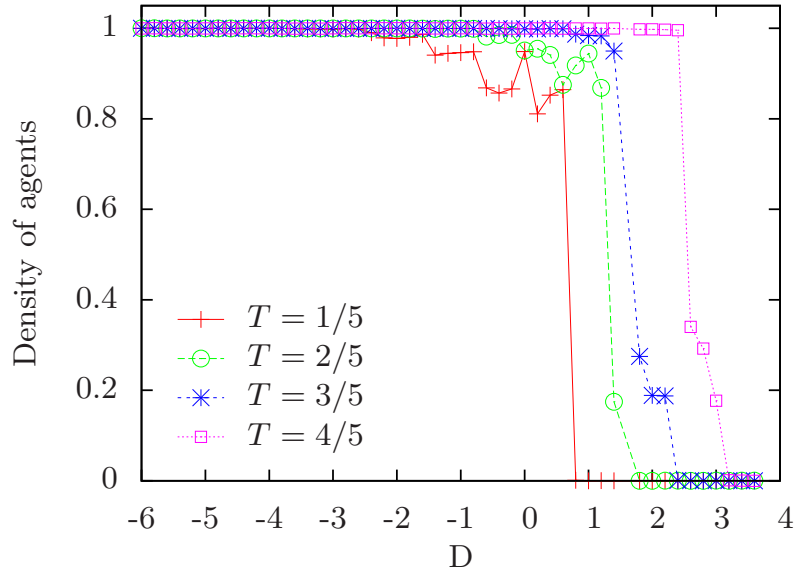


FIG. 3.3: Densité d'agents (nombre total d'agents divisé par la taille du réseau $L \times L$) en fonction de l'attractivité urbaine D pour différentes valeurs de la tolérance T calculée sur des réseaux $L \times L$ ($L = 100$). Le nombre d'agents est ici une moyenne sur 30000 configurations après l'équilibre.

décroit du fait, soit de la croissance des amas, soit du départ d'agents différents. Lorsque l'attractivité du réseau est telle que le nombre de voisins différents devient nul, une interface complète de lacunes sépare les amas. Qualifier l'interface de complète signifie qu'il n'existe plus de contacts entre des agents différents. Une interface plus fine de lacunes, c'est à dire autorisant toujours quelques contacts entre agents différents, est en réalité observée pour des valeurs de D inférieures à celles coïncidant avec l'apparition d'une interface complète de lacunes. Cette interface fine que nous qualifierons d'épaisseur 1, est telle qu'un chemin peut être suivi entre les agents en passant seulement par des lacunes voisines sans rencontrer de sites occupés. Cependant, des contacts diagonaux peuvent encore exister entre des agents différents. Ceci n'est pas le cas avec une interface complète de lacunes que nous qualifierons d'épaisseur 2. La figure 3.5 illustre les deux types d'interfaces, fines (épaisseur 1) et complètes (épaisseur 2), celles-ci ont été obtenues en agrandissant deux configurations à l'équilibre.

Les tracés des quantités introduites précédemment sur les figures 3.3 et 3.4 déterminent donc les domaines d'existence des différents types d'interfaces. En revanche, ils ne procurent que peu d'information sur la forme des interfaces.

3.2.2 Analyse numérique : formes des interfaces

Afin de déterminer l'évolution de la forme des interfaces entre les agents, on mesure la taille de l'interface. Cette mesure, représentée sur la figure 3.6, est la somme des

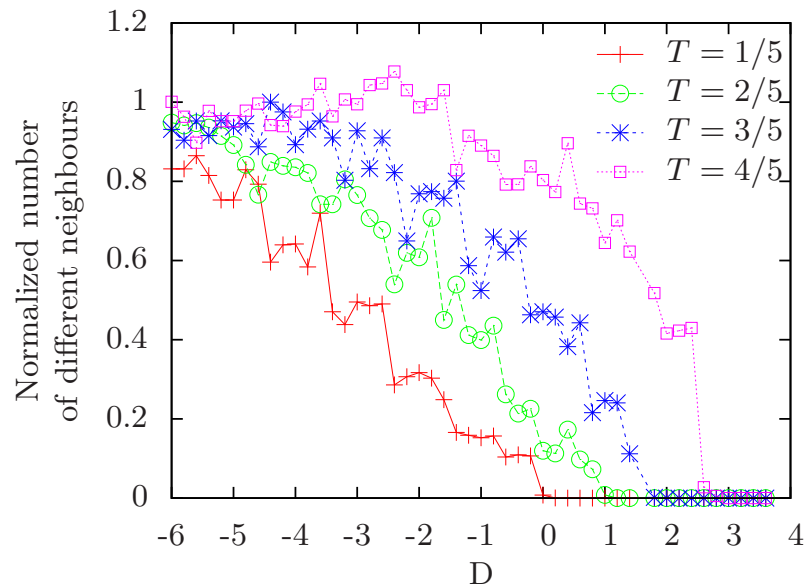


FIG. 3.4: Evolution du nombre de voisins différents normalisé en fonction de l'attractivité urbaine D pour différentes valeurs de la tolérance T calculé sur des réseaux 100×100 : le nombre de paires de voisins différents a été moyenné sur 30000 configurations après l'équilibre.



FIG. 3.5: Types d'interfaces de lacunes : interfaces d'épaisseur 1 (gauche) et d'épaisseur 2 (droite).

nombre de voisins différents (égal à 2 fois le nombre de paires de voisins différents) et des contacts entre lacunes et agents. Dans la phase dépourvue de lacunes (figure 3.6 et

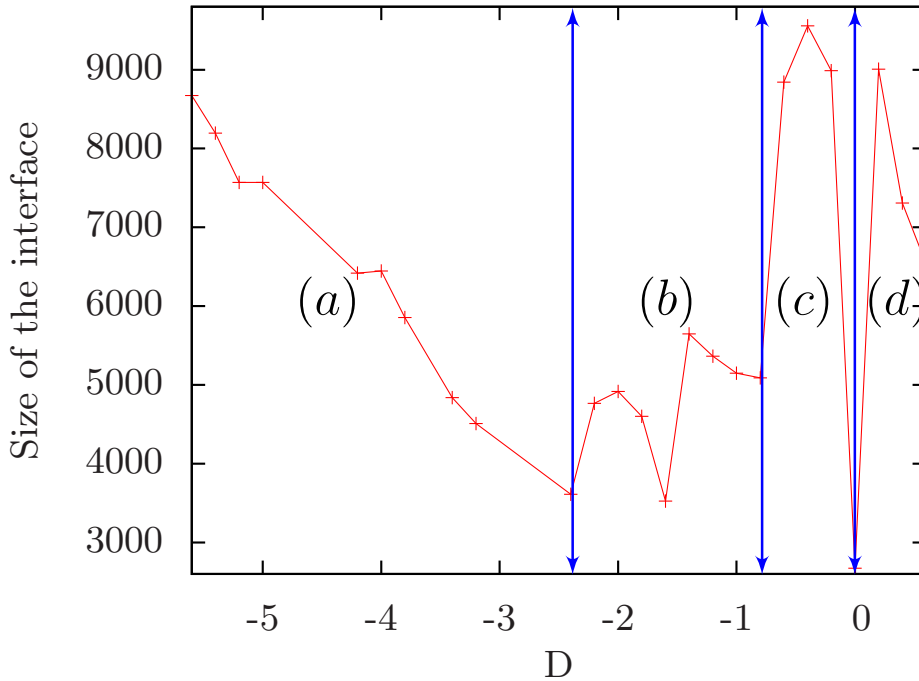


FIG. 3.6: Taille de l'interface pour $T = 1/5$. Les mêmes allures et ordres de grandeurs sont observés avec différentes conditions initiales.

figure 3.7, partie (a)), la taille de l'interface ne fait que décroître quand D augmente, signifiant que les amas deviennent de plus en plus larges de façon à limiter le nombre de contacts entre agents rouges et bleus. Le cadre (a) de la figure 3.7 permet de le confirmer la décroissance de la taille de l'interface du fait de la compactification des amas. La partie (b) dans les figures 3.6 et 3.7 concerne l'apparition des premières lacunes avec D croissant. Elle peut elle-même être décomposée en deux parties chacune comprenant une croissance de l'interface suivie d'une décroissance. Quelque soit le régime, croissance et décroissance des interfaces s'explique comme suit :

1. L'apparition des lacunes à la place d'agents différents dans le voisinage d'agents permet aux agents d'exiger moins de voisins similaires, ainsi les amas peuvent devenir plus anguleux. La frontière entre agents devient plus grande.
2. Alors que D augmente, les agents doivent à nouveau recréer des liens avec des agents similaires de façon à toujours être satisfaits ($I_{dissat} \leq 0$). La frontière (rouge-bleu + agent-lacune) se rétrécit de façon à augmenter le nombre de contacts rouge-rouge et bleu-bleu.

Dans la partie (c) (resp. (d)) des figures 3.6 et 3.7, les configurations à l'équilibre contiennent des interfaces de lacunes d'épaisseur 2 (resp. des interfaces de lacunes d'épaisseur 1). Quand D augmente, tout en restant dans le domaine d'existence (c) (resp. (d)), la taille de l'interface commence par augmenter puis décroît. Ce comportement s'explique

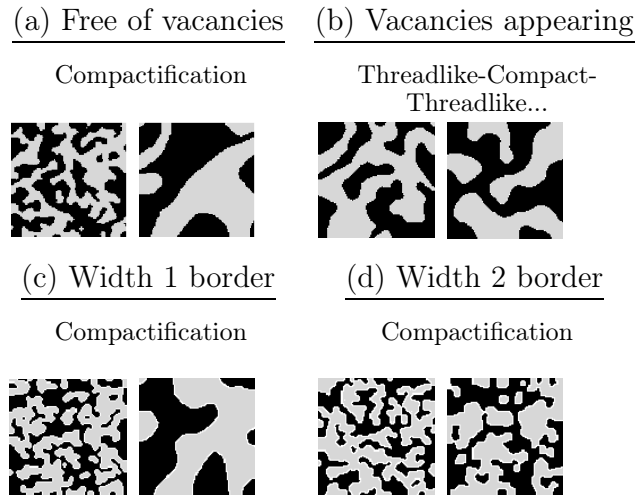


FIG. 3.7: Configurations typiques observées à l'équilibre pour chaque phase (phase sans lacune, frontière de lacunes ...) : elles sont représentées pour les plus petite et plus grande valeurs D de la phase considérée. Dans chaque phase, les amas finissent par devenir plus compacts lorsque D augmente.

de la façon suivante : pour les plus basses valeurs de D pour lesquels le régime considéré existe, l'interface est anguleuse, les agents acceptent d'avoir des lacunes (resp. des agents différents et des lacunes) dans leur voisinage au lieu de voisins similaires. Mais lorsque D augmente, l'environnement devient moins accueillant. En conséquence, les agents se réorganisent en amas compacts pour augmenter le nombre de voisins similaires tout en diminuant le nombre de lacunes (resp. agents différents et lacunes) dans leur voisinage. Cette réorganisation rend les interfaces lisses et conduit à une diminution de l'énergie.

3.2.3 Remarques

Les deux remarques suivantes concernent l'influence des conditions initiales et des taux relatifs d'échanges externes et internes.

Remarquons que les principaux résultats ne dépendent pas des conditions initiales utilisées pour les simulations numériques. Les résultats présentés ici ont été générés avec des configurations initiales aléatoires, agents rouges, bleus et lacunes étant uniformément distribués sur le réseau (dans les mêmes proportions (1/3)). Si, lorsqu'on augmente D , au lieu de générer une nouvelle configuration aléatoire à chaque nouvelle valeur de D , on utilise comme configuration initiale la configuration d'équilibre obtenue pour le valeur précédente de D testée, les domaines d'existence des phases ne sont pas modifiés. Des différences sont présentes, mais elles concernent seulement l'évolution de la taille des amas avec D : commencer les simulations avec la configuration de l'équilibre précédent conduit à des configurations d'équilibre où les amas s'agrandissent de manière régulière avec D , ce qui n'est pas le cas quand une configuration initiale aléatoire est régénérée à chaque simulation. Si l'on utilise le protocole de génération des configurations initiales

décrit précédemment mais en simulant avec D décroissant, les positions des transitions dans l'espace des paramètres sont globalement inchangées par rapport à celles relevées en commençant avec des configurations initiales aléatoires, excepté pour la transition vers l'état où les lacunes sont prédominantes. En effet, étant donné que l'état de lacunes est stable pour toute valeur positive de D , la transition a lieu en $D = 0$. De manière générale, à moins de prendre des configurations initiales extrêmes (par exemple, l'état de lacunes), les domaines d'existence des phases ne dépendent pas de l'état initial. Les différences concernent uniquement la forme des interfaces dans les différents régimes. En effet, si une simulation débute avec une configuration d'équilibre obtenue pour un ensemble de valeurs (D, T) où les agents sont moins aisément satisfaits et donc où les configurations font déjà apparaître une certaine structure, cette simulation conduira nécessairement à la formation d'amas beaucoup plus compacts que si l'on avait utilisé une configuration initiale aléatoire.

Si l'on assimile les échanges internes et externes respectivement aux déplacements internes ou externes d'une zone comme une ville, il peut ne pas sembler réaliste de considérer la même probabilité d'occurrence pour les deux types d'échange. Cependant, il faut noter, que les échanges internes n'ont qu'un impact limité sur le domaine d'existence des phases, ils induisent, en effet, seulement un niveau minimal de compactification des amas. Les configurations d'équilibre sont conditionnées par les échanges externes. Remarquons que si on utilise un faible taux d'échanges externes relativement aux échanges internes, le système converge vers l'état final après un long régime transitoire. En conclusion sur ce point, la proportion d'échanges internes influe principalement sur la forme et la taille des amas mais pas sur le type d'interface.

3.3 Analyse théorique : interfaces

L'étude des mouvements autorisés par la dynamique permet de prédire le type d'interface possible pour les différents intervalles de paramètres (D, T) .

3.3.1 Etat saturé : absence de lacunes

Considérons une configuration dépourvue de lacunes et écrivons les conditions alors requises pour l'apparition d'au moins une lacune. Les lacunes apparaissent seulement si au moins un agent a un voisinage insatisfaisant, ce qui revient à ce que son indice d'insatisfaction I_{dissat} soit positif (équation (3.2)). Puisque dans le cas présent, chaque agent a un voisinage complètement occupé, $N_s + N_d = 8$, l'arrivée d'une lacune n'est possible que si :

$$N_s \leq D + 8(1 - T). \quad (3.12)$$

Pour s'assurer de la stabilité de cette lacune, aucun agent ne doit pouvoir revenir sur ce site vacant. Plus précisément, un agent d'un autre type que celui qui est parti ne doit pas pouvoir se placer sur le site inoccupé. Ceci n'est possible que si le nombre de voisins

différents vérifie aussi l'inégalité (3.12) :

$$N_d \leq D + 8(1 - T). \quad (3.13)$$

Ainsi, en additionnant les deux inégalités précédentes, on conclut que les lacunes n'apparaîtront que si l'inégalité suivante est vérifiée par le couple de paramètres (D, T) :

$$D \geq -4 + 8T. \quad (3.14)$$

3.3.2 Ségrégation par isolation : interface de lacunes

Supposons que le système a atteint un état où une interface complète de lacunes sépare les amas composés d'agents différents, c'est-à-dire, aucun contact entre agents différents n'existe. Pour que, dans cette situation, au moins un agent, que l'on appellera A , tolère un voisin différent A' , le nombre d'agents identiques N_s dans son voisinage doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$1 - T(N_s + 1) + D \leq 0, \quad (3.15)$$

$$TN_s \geq 1 - T + D. \quad (3.16)$$

L'agent différent introduit, A' , doit également être satisfait. Pour cela le nombre de voisins similaires N'_s de cet agent A' doit également satisfaire l'inégalité :

$$TN'_s \geq 1 - T + D. \quad (3.17)$$

Les deux agents A et A' ont aux moins deux voisins en commun et sont par définition voisins l'un de l'autre. En conséquence, leurs nombres de leurs voisins similaires respectifs sont bornés :

$$N_s \leq 5, \quad (3.18)$$

$$N'_s \leq 5. \quad (3.19)$$

De plus, au moins deux voisins de A sont dans le voisinage de deux voisins de A' . Comme nous avons supposé qu'avant l'introduction de A' , aucune paire d'agents différents n'était présente, cela contraint deux d'entre eux d'être des lacunes. La somme des voisins similaires respectifs de A et A' doit donc être au plus égale à huit. Le premier lien entre les agents rouge et bleu apparaît alors seulement si :

$$8T \geq TN_s + TN'_s \geq 2(1 - T + D), \quad (3.20)$$

$$D \leq 5T - 1. \quad (3.21)$$

Par conséquent, si une interface complète de lacunes existe (c'est-à-dire qu'aucun contact entre agents différents n'existe), elle subsiste au moins pour $D \geq 5T - 1$. Le même type d'argument peut-être utilisé pour montrer qu'au moins un agent sur une configuration

d'équilibre peut accepter deux voisins différents seulement si :

$$D \leq 6T - 2. \quad (3.22)$$

En d'autres termes, si il existe une interface de lacunes d'épaisseur 1, c'est-à-dire que l'on peut parcourir en passant uniquement par des plus proches voisins (au sens du voisinage de Moore) et qui laisse des contacts diagonaux entre agents différents, cette interface de lacune subsistera pour $D \geq 6T - 2$.

3.3.3 Exode massif : état à lacunes prédominantes

Pour que les agents ne quittent pas le réseau, la condition suivante sur le nombre de voisins différents des agents est requise :

$$N_d \leq \frac{-D + TN_s}{1 - T}. \quad (3.23)$$

Cette condition exige un nombre de voisins similaires au moins supérieur à D/T . Rappelons que les agents et les lacunes sont initialement uniformément distribués. Ainsi, initialement, une large majorité d'agents n'ont pas plus de 3 voisins similaires. Si $D/T > 3$, les agents partiront massivement du réseau et ne reviendront plus, car seulement une minorité d'agents ont plus de 3 voisins similaires. Finalement, si $D/T > 3$, les lacunes sont nécessairement en majorité dans l'état stationnaire.

3.3.4 Résumé : domaine d'existence des interfaces

L'analyse précédente est résumée à travers le diagramme de phase représenté sur la figure 3.8. Celui-ci donne les domaines d'existence des différents types d'interfaces. Les limites des phases théoriques, obtenues à partir de l'étude de stabilité dynamique des interfaces, sont en bon accord avec ce que les simulations numériques ont donné, section 3.2.1, comme illustré par les points de simulations notés sur la figure 3.8. Ce diagramme de phase permet de retrouver des éléments que nous avons pu constater grâce aux configurations d'équilibre présentées sur la figure 3.2. Notamment, à haute tolérance, les lacunes apparaissent brutalement quand le réseau devient moins accueillant, on remarque en effet un passage direct de l'état saturé à l'état dominé par les lacunes que ce soit sur les configurations (figure 3.2) ou sur le diagramme de phase (figure 3.8). En revanche, pour les basses valeurs de la tolérance, si on augmente D , plusieurs états intermédiaires surviennent entre l'état saturé et l'état de lacunes.

3.4 Conclusions

On a introduit une variante du modèle de ségrégation de Schelling dans laquelle les agents sont autorisés à quitter ou entrer dans la ville (la ville étant délimitée par le réseau). La dynamique relative à ce modèle admet une fonction de Lyapunov qui la rend identique à la dynamique de température nulle du modèle de Blume-Emery-Griffiths

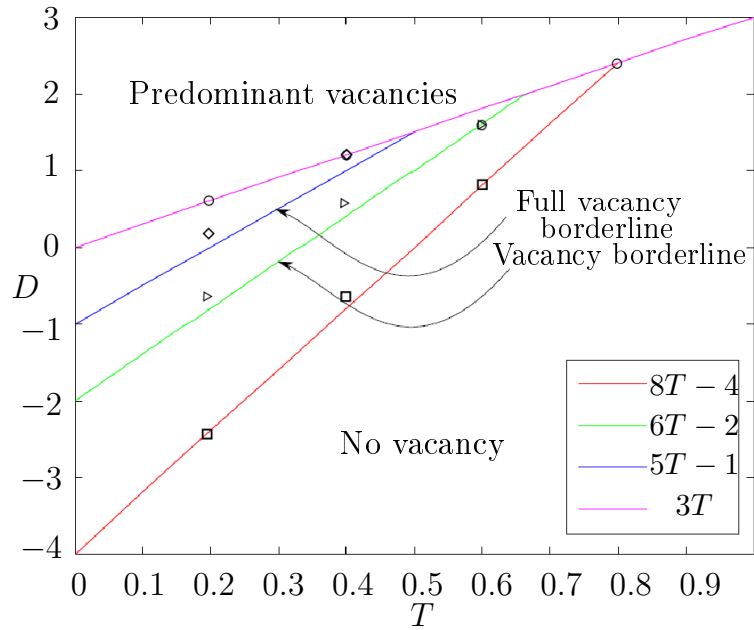


FIG. 3.8: Diagramme de phase dans l'espace des paramètres, attractivité D et tolérance T . Diagramme de phase théorique : les lignes déterminées analytiquement, délimitent les domaines d'existence des différents états – état saturé, avec lacunes prédominantes, avec interface de lacunes. Des points issus des simulations sont également marqués sur le diagramme : les carrés, les triangles et les losanges indiquent les points auxquels, respectivement, les premières lacunes, les interfaces de lacunes d'épaisseur 1 et les interfaces d'épaisseur 2 apparaissent. Les cercles correspondent aux derniers points (valeurs limites du couple (D, T)) auxquels les lacunes ne sont pas en majorité. Remarque : les simulations ont été effectuées pour des valeurs de D incrémentées par un facteur constant 0.2, ceci donne la précision numérique de la localisation des phases.

avec des restrictions cinétiques. Dans ce modèle, des phases avec des caractéristiques qui les différencient de celles du modèle de Blume-Emery-Griffiths et du modèle de Schelling fermé émergent.

3.4.1 Modèle de ségrégation versus modèle de Blume-Emery-Griffiths

Détaillons la correspondance du modèle introduit ici avec celui de Blume-Emery-Griffiths. On rappelle dans un premier temps la nature des phases de ce modèle de spins. Plusieurs études [BEG71, Bra96, WLK87] ont montré la présence de phases ferromagnétique, paramagnétique, dominée par les lacunes at anti-quadrupolaire (dont les configurations typiques sont des réseaux composés de deux sous-réseaux, un avec des spins 0, et l'autre avec des spins alternés $-1, +1$). Toutes les énergies des configurations possibles sur une plaquette (carré formé de 4 sites) ont été référencées dans le

Etat	Energie
$\langle 0000 \rangle$	0
$\langle 000+ \rangle$	$\frac{1}{4}D$
$\langle 000- \rangle$	$\frac{1}{4}D$
$\langle 00++ \rangle$	$-\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}D$
$\langle 0+0+ \rangle$	$-J - K + \frac{1}{2}D$
$\langle 00+- \rangle$	$\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}D$
$\langle 0+0- \rangle$	$J - K + \frac{1}{2}D$
$\langle 00-- \rangle$	$-\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}D$
$\langle 0-0- \rangle$	$-J - K + \frac{1}{2}D$
$\langle 0+++ \rangle$	$-2J - 2K + \frac{3}{4}D$
$\langle 0++- \rangle$	$J - 2K + \frac{3}{4}D$
$\langle 0+-+ \rangle$	$-2K + \frac{3}{4}D$
$\langle 0+-- \rangle$	$J - 2K + \frac{3}{4}D$
$\langle 0-+- \rangle$	$-2K + \frac{3}{4}D$
$\langle 0--- \rangle$	$-2J - 2K + \frac{3}{4}D$
$\langle ++++ \rangle$	$-4J - 4K + D$
$\langle +++- \rangle$	$-4K + D$
$\langle ++-- \rangle$	$2J - 4K + D$
$\langle +-+- \rangle$	$-4K + D$
$\langle +--- \rangle$	$-4K + D$
$\langle ---- \rangle$	$-4J - 4K + D$

TAB. 3.1: Energies du modèle de Blume-Emery-Griffiths pour les plaquettes (4 sites) avec des interactions sur le voisinage de Moore. Les termes de couplage entre voisins J et de couplage biquadratique K valent respectivement 1 et $2T - 1$ dans le cas présent.

tableau 3.4.1 pour le modèle de Blume-Emery-Griffiths avec interactions entre “voisins de Moore“. Ainsi, en comparant, les énergies, on peut déduire les états fondamentaux en fonction des paramètres. Dans le cas présent, les liens entre ces énergies et celles du modèle de ségrégation ouvert n’ont de sens que pour $K = 2T - 1$ et $J = 1$. Ceci restreint donc le nombre d’états fondamentaux possibles. En particulier, les configurations anti-quadrupolaires n’apparaissent pas dans l’intervalle de paramètres pour lequel nous observons une correspondance avec la variante du modèle de Schelling (cf. tableau 3.4.1). De plus, à basse température et en particulier dans la limite de température nulle, dans le modèle de Blume-Emery-Griffiths, seulement les phases ordonnées, ferromagnétiques ou dominées par les lacunes, peuvent exister dans le domaine de paramètres auquel on s’est intéressé.

Dans la version système-ouvert du modèle de Schelling discutée ici, la phase de lacunes apparaît à $D = 3T$ au lieu de $D = 2(K + 1) = 4T$ dans le modèle de Blume-Emery-Griffiths (ce qui correspond à $D_{BEG} = 8T$). Etant donné que les échanges directs entre agents différents ne sont pas tolérés par la dynamique, les agents n’ont pas d’autres possibilités que de quitter le système pour être satisfait lorsque $D > 3T$. C’est pourquoi, les configurations d’équilibre avec une haute densité de lacunes apparaissent pour des plus basses valeurs de D dans le modèle multi-agent. Dans l’intervalle de paramètres sur lequel la phase ferromagnétique existe dans le modèle de Blume-Emery-Griffiths, la dynamique déterministe avec les contraintes cinétiques donne naissance à un état stable avec des agents rouges et bleus qui coexistent. En effet, dans ce régime, les agents se réorganisent de façon à diminuer leur indice d’insatisfaction et n’ont pas besoin de quitter le réseau pour être satisfaits. En conséquence, les deux types d’agents sont présents sur le réseau et comme le système est contraint cinétiquement, les configurations saturées par seulement un type d’agent n’apparaissent pas même si elles minimiseraient l’énergie totale. De plus, une telle coexistence peut même résister à des environnements seulement modérément accueillants (D faiblement négatif), grâce à l’ajustement des interfaces. Comme précisé ci-dessus, pour le domaine de paramètres que nous considérons, l’état fondamental rencontré dans le modèle de Blume-Emery-Griffiths est, soit ferromagnétique, soit ordonné avec tous les spins égaux à zéro. Les états fondamentaux de Blume-Emery-Griffiths peuvent cependant montrer la formation d’amas avec des interfaces de lacunes (qui peuvent être lisses ou irrégulières) mais seulement si $J + K$, la somme des coefficients d’interaction bilinéaire et biquadratique, est négative [LS93, Dub05]. Puisque dans le modèle traité ici, J vaut 1, l’égalité $J + K = 2T > 0$ est toujours vraie. Ceci montre que les interfaces apparaissant dans notre étude ne correspondent pas à celles des configurations donnant les minima absolus de l’énergie de Blume-Emery-Griffiths, mais résultent de la dynamique contrainte.

Une question dans la continuité du lien entre le modèle multi-agent et le modèle de spins concerne l’influence d’un bruit thermique dans le modèle multi-agent (tout en gardant les mêmes contraintes cinétiques). On peut en effet considérer la dynamique où les agents choisis aléatoirement décident de se déplacer ou non (sur un site inoccupé ou à l’extérieur du réseau) selon une règle de choix de type Glauber avec un paramètre comparable à une température $1/\beta$: le déplacement est effectif si il est favorable à l’agent, sinon il est accepté avec une probabilité $\exp(-\beta\Delta I_{dissat})$ où ΔI_{dissat} est la variation dans l’indice d’insatisfaction. Il peut alors être montré qu’en dépit des contraintes cinétiques

interdisant un échange direct entre agents de types différents, le système atteint une distribution d'équilibre donnée par la distribution de Gibbs du modèle de Blume-Emery-Griffiths à la température $1/\beta$, avec une valeur effective de D qui est $D_{eff} = 2D + \frac{\ln 2}{\beta}$. Pour une petite valeur de la température $1/\beta$, on aurait un long état de transition durant lequel les interfaces séparant les agents de types différents apparaîtraient. L'échelle de temps sur laquelle la ségrégation de la dynamique de température nulle apparaîtra et se maintiendra, sera plus large si on augmente le taux auquel les échanges internes sont tentés.

Il est intéressant de noter que, en contraste avec le modèle de Blume-Emery-Griffiths, la dynamique du modèle présent conduit à l'émergence ségrégation, mais pas à un état ordonné (seulement constitué d'un type d'agent/spin) qui signifierait l'exclusion totale d'un type d'agent.

3.4.2 Modèle de ségrégation de Schelling : ouvert versus fermé

Dans le modèle originel de Schelling (version fermée), la ségrégation est un phénomène émergent. Cette ségrégation se définit comme le groupement d'agents du même type, tandis que les lacunes n'ont aucun rôle fonctionnel. Ces lacunes se répartissent sans dégager de structure et ne jouent de ce fait aucun rôle dans le processus de ségrégation. En effet, les lacunes sont distribués uniformément dans les configurations d'équilibre quelque soit le régime, ségrégué, mélangé, ou gelé-mélangé. Les interfaces entre les groupes ne sont pas le point pertinent. Dans la version ouverte du modèle étudié ici, une ségrégation d'un type différent est exhibée, elle consiste en l'isolement de groupes d'agents par les lacunes. Ce phénomène peut-être lié à la percolation de lacunes dans le réseau, tandis que la ségrégation observée dans le modèle de Schelling fermé est à relier à la percolation d'agents d'un type donné [GJN09].

Pour conclure, il est nécessaire de rappeler que dans cette partie du travail, la formation d'interfaces par l'apparition de lacunes est le principal point pertinent. Selon le seuil de tolérance T et l'attractivité de la ville mesurée par D , les lacunes peuvent être distribués sporadiquement le long de l'interface rouge/bleu ou former une frontière de lacune complètement connectée (épaisse ou fine) entre les agents. Les configurations d'équilibre mettent en évidence la compétition permanente entre la recherche d'un voisinage qui fournit une satisfaction suffisante relativement au niveau d'attractivité de l'environnement, et le départ du réseau. Contrairement à ce que l'on obtiendrait avec un bruit thermique, la possibilité de quitter la ville ne conduit pas à une instabilité qui donnerait une ville occupée par des agents d'un seul type. Ici, les deux types d'agent cohabitent dans la ville, mais la dynamique mène à une ségrégation en amas avec des interfaces multiples entre ces amas. On classe ces interfaces selon deux aspects :

1. leur type : agents rouges et bleus peuvent être en contact ou séparés par des lacunes,
2. leur forme : irrégulière ou lisse.

La principale conclusion est que les lacunes ont un rôle fonctionnel, elles permettent aux agents faiblement tolérants d'être satisfaits. Ceci n'est pas le cas dans le modèle initial de Schelling où les lacunes "matérialisent" seulement les mouvements. Le caractère fonctionnel des lacunes est clairement établi avec la formation des interfaces. Quand les

lacunes, à elles seules, ne permettent pas que les agents soient satisfaits en diminuant leur nombre de voisins différents, les interfaces deviennent lisses afin d'augmenter le nombre de voisins similaires.

3.4.3 Interprétation et perspectives

Dans un contexte socio-économique, plusieurs interprétations des résultats sont envisageables. La compactification des amas d'agents similaires rencontrée quand l'environnement devient hostile (grande valeur de D) peut faire penser au "renforcement" des liens entre individus via un réseau associatif que des sociologues ont observé, par exemple, dans quelques quartiers de Chicago [WT07]. Des liens forts peuvent prévenir d'un exode massif du à un manque d'attractivité de l'environnement.

En ce qui concerne les interfaces complètes de lacunes, obtenues pour certaines valeurs des paramètres de contrôle, elles séparent des groupes d'une façon qui rappelle la ségrégation socio-spatiale matérialisée par des murs, comme à Johannesburg [Esc06]. Dans le modèle, on observe la formation de frontières avec un réseau homogène sans aucune infrastructure ou autres frontières physiques. D'une manière évidente, des limites matérialisées (routes, parcs, rivières...) peuvent influencer sur la présence de ségrégation : (Ex : boulevard périphérique de Paris [Esc06]). Comment ces frontières physiques affecteraient-elles les résultats présentés ? Dans le domaine de paramètres où les frontières de lacunes apparaissent, on peut s'attendre à ce que la dynamique de ségrégation prenne avantage de telles structures préexistantes, et que ces frontières prennent part aux limites sociales. Dans d'autres régimes, même si les frontières physiques peuvent faciliter l'émergence d'une interface, elles ne conduiront pas nécessairement à des frontières sociales. Il serait par conséquent intéressant de réaliser des études empiriques afin de voir sous quelles conditions une frontière physique s'impose également en tant que frontière sociale. Nous n'aborderons pas plus ce point par la suite.

Dans le modèle présenté dans ce chapitre, deux points importants doivent être relevés. (i) L'ouverture du réseau a été réalisé via l'introduction d'une notion d'attractivité, mais celle-ci est globale et ne dépend pas de la position dans le réseau. (ii) De plus, si un agent repère un site avec une utilité satisfaisante, rien ne contraint son installation, il peut se positionner sur le site vacant sans condition supplémentaire. Si l'on souhaite approcher un modèle réaliste à partir du modèle de ségrégation de Schelling, deux notions essentielles en sont donc absentes : (i) attractivité relative des positions et (ii) accessibilité. D'une manière générale, il convient de préciser qu'il semble nécessaire de s'éloigner du modèle de ségrégation de Schelling maintenant qu'il nous a permis de comprendre les phénomènes que ce type de modèle pouvait faire émerger et de constater également quelles étaient les limites de celui-ci.

Modèle de marché du logement urbain

Dans ce chapitre, nous présentons des données sur les transactions immobilières de la ville de Paris desquelles nous tirons, dans un premier temps, quelques observations. Comme attendu, la tendance globale de l'évolution des prix de transaction est une décroissance en partant du centre. De plus, la variance des prix de transaction s'avère plus élevée au centre qu'à la périphérie, ce qui suggère une plus grande concurrence au centre. Ayant dégagé quelques tendances générales sur les transactions immobilières, un modèle multi-agent est développé afin de simuler la dynamique du marché de logement. Il permet en particulier de reproduire les faits stylisés mentionnés concernant les données. Ce modèle simule des transactions immobilières entre agents hétérogènes (par leur revenu) dans une ville où les espaces ont différents niveaux d'attractivité. L'attractivité d'une zone se décompose en un terme stationnaire intrinsèque à la zone (lié à la distance au centre, aux aménités . . .) et un terme dynamique relatif à la perception de l'agent qui regarde la zone. Les simulations numériques montrent un bon accord avec le régime stationnaire caractérisé analytiquement, rendant ainsi le modèle tractable et utilisable comme bon point de départ pour modéliser le marché du logement. Enfin les résultats du modèle sont confrontés aux données empiriques.

Les dynamiques urbaines sont régulées par les préférences de choix résidentiels, liées elles-mêmes au degré d'attractivité du lieu. Comme il a été observé dans le modèle de ségrégation de Schelling en version ouverte, l'attractivité de la ville est effectivement un facteur décisif dans la dynamique d'installation des agents. Cependant, comme la littérature abondante sur la dynamique de choix résidentiel le suggère [GA06, BOH02, Pre86], les critères d'attractivité sont multifactoriels. En ce sens, l'attractivité des lieux résidentiels est hétérogène du point de vue spatial et du point de vue des agents. De plus, la dynamique d'installation des individus repose sur une logique socio-économique, contraignant ainsi l'organisation effective des ménages à l'intérieur d'une ville. Ces contraintes

liées aux préférences et aux capacités foncières des individus, font naître des quartiers aisés ou défavorisés résultant en la spécialisation sociale des espaces urbains.

Nous proposons de développer un modèle qui prend en compte les facteurs précités tout en s'éloignant du modèle de ségrégation de Schelling. (i) Dans ce modèle, le positionnement d'un agent sur un site donné ne sera pas systématique, même si le site lui procure un voisinage satisfaisant. Les agents se distingueront par leur capacité d'achat et des prix seront associés aux sites vacants. Les agents se déplaceront alors en confrontant leur capacité d'achat et les prix des sites. Ces paramètres introduisent ainsi une notion d'*accessibilité*. (ii) L'attractivité de l'environnement urbain D est une notion globale dans le système ouvert. Mais suite aux remarques précédentes, on la considérera hétérogène sur le réseau afin de refléter la présence de plus ou moins de services dans les différentes zones. Dans cette optique, des niveaux différents d'attractivité seront attribués aux sites en fonction de leur positionnement sur le réseau. Les attractivités dépendront aussi de l'observateur, dans l'esprit de Schelling.

4.1 Contexte d'étude : transactions immobilières de la ville de Paris

Paris est une métropole au rayonnement international et constitue une plaque tournante où les flux migratoires sont intenses. Son offre universitaire, son marché de l'emploi, son dynamisme économique en font une zone à forte densité de population. Paris apparaît donc comme un bon exemple d'étude du marché immobilier et peut, par ailleurs, donner un aperçu général du fonctionnement des villes européennes. Avant de s'attaquer à la modélisation, nous nous intéressons aux principales caractéristiques des transactions réelles. Nous disposons d'un échantillon des transactions immobilières de la ville de Paris fournie par la Chambre des Notaires. Cette base de données contient des éléments sur les transactions dans Paris de 1990 à 2003 : prix, surface, situation géographique des biens, catégories socio-professionnelles des acheteurs et vendeurs . . . Nous nous concentrerons sur les données de l'année 2003 qui sont les plus récentes dont nous disposons. Nous avons pris soin de mettre de côté les données aberrantes ou ne faisant pas référence à un logement (garage . . .).

4.1.1 Des petits logements majoritaires

Dans un premier temps, nous comptabilisons le nombre d'acquisitions par surface, cette distribution est donnée sur la figure 4.1. Les surfaces les plus largement vendues se situent entre 20 et 40 mètres carrés. En supposant que des surfaces d'un tel ordre de grandeur sont uniformément réparties dans la ville de Paris, une étude comparative des prix sur un intervalle de surface compris entre 20 et 40 mètres carrés permet de considérer un échantillon de données qui couvre la totalité de l'espace géographique parisien.

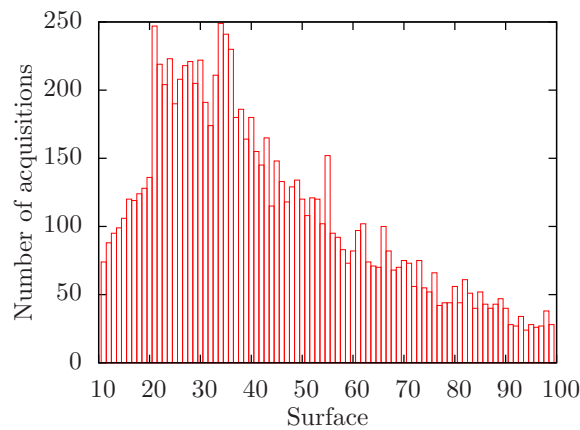


FIG. 4.1: Distribution des surfaces vendues (en mètre carré) durant l'année 2003 (recensées dans la base des notaires).

4.1.2 Une décroissance des prix centre/périphérie

Nous nous concentrons désormais sur les transactions correspondant aux surfaces comprises dans l'intervalle défini précédemment. Nous disposons des positions géographiques des biens vendus. Ceci permet de diviser les données en plusieurs ensembles formant des zones géographiques bien définies. Pour cela, l'espace recouvert par les positions des transactions est découpé en plusieurs petits rectangles contigus (zones). Les prix de transaction sont ensuite moyennés sur ces différentes zones. Une vue cartographique des prix de transaction de Paris moyennés par zone est tracée sur la figure 4.2.

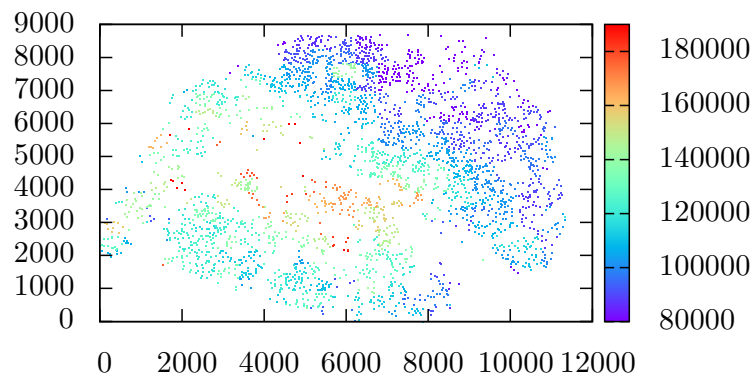


FIG. 4.2: Vue cartographique des prix de transaction. Chaque point correspond à une transaction. Le prix de transaction (en euros) associé à un point est la moyenne des prix de transaction sur la zone à laquelle appartient le point.

Sur cette vue cartographique (figure 4.2), chaque position correspond à une transaction. A chaque position est associé un prix de transaction qui est la moyenne des prix

sur la zone à laquelle le point appartient. L'organisation spatiale des prix affiche deux tendances. La première consiste en une décroissance globale des prix au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre et la deuxième montre l'opposition Est-Ouest, l'Ouest étant dominé par des prix de transaction en général plus élevés. Dans le cadre de la modélisation, nous nous focaliserons sur la tendance globale de décroissance des prix du centre vers la périphérie. Ceci est justifié par le fait que la logique qui oppose le centre à la périphérie est généralisable à d'autres agglomérations comme Rennes, Lyon ou Nantes [GN04], alors que l'opposition Est-Ouest est plus spécifique à Paris.

4.1.3 Une concurrence plus intense au centre

Après avoir localisé le centre géographique sur les données, les prix ont été moyennés entre les zones (décrites précédemment) qui sont situées à une même distance du centre. L'évolution moyenne des prix de transaction en fonction de la distance au centre est tracée sur la figure 4.3. Les barres d'erreur correspondent à l'écart type sur les moyennes des prix de transactions. Comme déjà suggéré par la carte des prix de transaction (figure

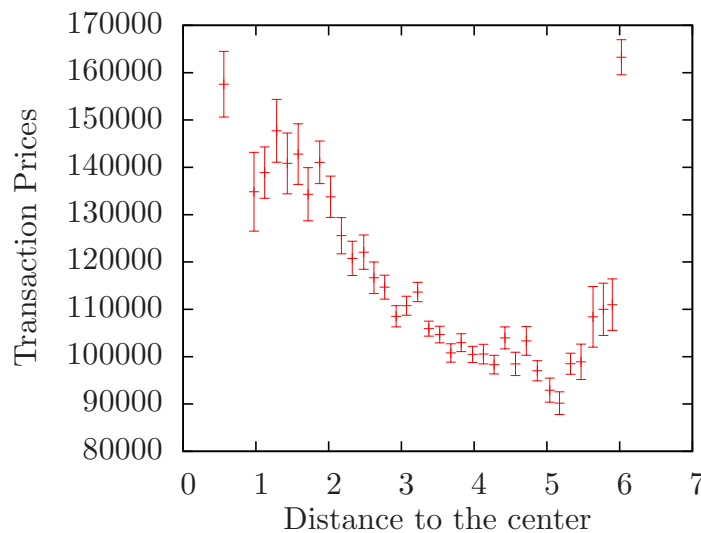


FIG. 4.3: Moyennes des prix entre zones situées (en euros) à même distance du centre. La distance au centre est la distance moyennée entre les positions des sites dans une zone donnée.

4.2), les prix décroissent lorsqu'on s'éloigne du centre, si l'on met de côté la zone la plus éloignée du centre. Cette zone affiche des prix en moyenne plus élevés en raison de la présence de transactions dans les 12ème et 16ème arrondissements. Le haut niveau des prix dans ces deux arrondissements est due à d'autres facteurs que la distance au centre, mais nous ne rentrerons pas dans les détails ici. Dans ce travail en cours, il s'agissait dans un premier temps de reproduire les tendances globales.

La variance des prix en fonction de la distance au centre a également été tracée sur la figure 4.4. Elle est plus élevée au centre qu'à la périphérie, ce qui suggère une dynamique

de prix plus intense dans la zone centrale que dans la zone périphérique. Le centre est le siège de plus de compétition sur les biens.

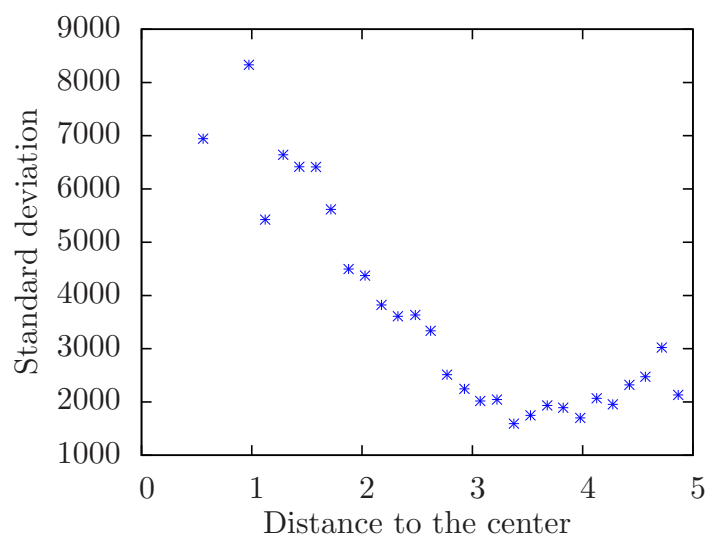


FIG. 4.4: Écart-type des prix de transaction moyennés sur les zones situés à distance similaire du centre. La distance au centre est la distance moyennée entre les différentes positions des sites appartenant à la zone considérée.

4.2 Théories économiques de localisation résidentielle

Dans cette section, nous justifions les choix faits pour construire le modèle du marché du logement en s'appuyant sur des modèles existants et des observations empiriques.

4.2.1 Modèle monocentrique : ville centrale

Une théorie largement développée concernant la localisation résidentielle est issue du modèle de ville monocentrique d'Alonso, lui-même inspiré du modèle précurseur de Von Thünen. Ce dernier modèle fournit une explication de l'organisation des cultures à la périphérie (supposée homogène) d'une ville. Des producteurs cherchent à vendre leurs produits à la ville-marché qu'on définit comme le centre. Le positionnement de leurs cultures résulte alors d'un arbitrage entre coût de transport et rente foncière. Plus le coût de transport d'une culture est élevé, plus celle-ci doit se situer près du centre, quitte à payer une rente foncière élevée. Les cultures forment ainsi des anneaux concentriques autour de la ville-marché et la rente foncière décroît avec la distance au centre.

Dans le modèle d'Alonso [Alo64] étendu ensuite par Mills [Mil67] et Muth [Mut69], la ville-marché est remplacée par un centre d'affaires (Central Business District) et les cultures par des logements où demeurent des individus travaillant au centre. La variation spatiale des prix des logements est expliquée en intégrant lieu de travail et coût de

transport (le coût peut être le temps). Les individus s'installent en partant du centre en tenant compte des coûts de transport. La rente est la somme maximale qu'un individu est prêt à payer pour s'installer à une distance donnée du centre. Pour pouvoir consommer autant de biens et donc garantir le même niveau d'utilité, un individu loin du centre sera réfractaire à payer autant qu'un individu situé directement dans le centre. En conséquence, la rente diminue avec la distance au centre. Des versions plus complètes du modèle de ville monocentrique ont ensuite été développées notamment pour considérer l'hétérogénéité de l'espace [FT03].

Ces travaux sur les modèles de villes monocentriques ont servi de base à la théorie économique urbaine et ont été une source d'inspiration pour de nombreux modèles d'organisation spatiale de la ville. Considérer les villes comme centrales en première approximation constitue donc une approche pertinente. De plus, l'extension concentrique des villes est confortée empiriquement puisque les distributions des populations autour du centre d'une ville sont bien décrites par des fonctions décroissantes de type exponentiel (cf. [Cla51]).

Le centre des villes, qu'il soit associé au Central Business District dans les villes américaines ou à la zone historique dans les villes européennes, joue en effet un rôle prépondérant dans les dynamiques d'installation. C'est pourquoi, dans le modèle développé par la suite, la distance au centre est un paramètre intervenant dans le choix résidentiel des agents.

4.2.2 Choix résidentiel : rôle de l'attractivité

Les dynamiques d'installation des ménages sont partiellement dictées par les préférences de localisation résidentielle des individus. Ces préférences dépendent de plusieurs facteurs.

Une étude de Paris Dauphine [ACJ10] relève ainsi l'importance de la notion d'attractivité dans les villes en comparant l'attractivité résidentielle de différentes agglomérations. L'attractivité repose sur plusieurs paramètres : en particulier les *aménités*. Celles-ci concernent d'une manière générale, tout ce qui rend un quartier agréable. Ces aménités peuvent aussi bien être culturelles (architecture des quartiers . . .) que naturelles (proximité de la montagne . . .) ou encore sociales (équipements sportifs . . .). Rendant les quartiers plus ou moins attrayants, elles ont un impact sur les dynamiques résidentielles. Des études [KH05] mesurent d'ailleurs l'impact de certaines aménités sur les prix de l'immobilier. L'attractivité dépend aussi de facteurs plus globaux comme la distance au centre (accessibilité au travail). La localisation géographique importe en effet indépendamment des aménités.

Les préférences résidentielles dépendent également de la composition du voisinage. Schelling avançait déjà cette hypothèse en proposant le modèle de proximité spatiale dans lequel les agents exigent une proportion minimale de voisins similaires. Empiriquement, un cas comme le phénomène de *gentrification*, caractérisé par l'embourgeoisement de quartiers populaires, illustre les notions d'entre-soi subis et choisis [BCJS09]. D'un côté la nouvelle population aisée de ces quartiers exerce une pression pour faire évoluer le quartier selon ses préférences, de l'autre cette évolution conduit à l'éjection des populations défavorisées qui ne peuvent plus suivre financièrement (augmentation des loyers

due au renouveau du quartier).

La propension à s'installer des ménages est ainsi hétérogène dans l'espace puisqu'elle dépend des services, de la qualité de vie, du voisinage ... Le modèle de marché du logement prendra donc en compte l'ensemble de ces facteurs.

4.2.3 Ségrégation urbaine : une dimension économique

Si les préférences résidentielles des individus se répercutent sur l'organisation socio-spatiale de ceux-ci, des contraintes font que ces préférences ne suffisent pas à elles seules à expliquer les dynamiques de localisation résidentielle. Les contraintes économiques des ménages, combinées à des demandes de logement localement supérieures à l'offre [dPW07] affectent la répartition des classes sociales à l'intérieur des villes. Il est par conséquent nécessaire de prendre en compte la dimension économique du phénomène de ségrégation. Plusieurs articles fondateurs [Dur92], [Ben93], [De 90]) mettent l'accent sur le lien entre ségrégation et facteur socio-économique. Ces articles traitent notamment de la ségrégation des familles par groupe homogène en niveau de revenus et s'intéresse à l'impact de la stratification économique (en classes sociales) sur la ségrégation.

Le facteur économique fera donc partie intégrante de notre modélisation. Les statuts économiques des agents et les prix des logements seront en effet intégrés au modèle.

4.3 Description du modèle

Les sections précédentes ont permis de dégager quelques tendances sur les données des transactions immobilières de Paris et de déterminer les composantes essentielles des dynamiques résidentielles d'après les théories existantes sur le sujet. Ayant établi ces bases, cette section est maintenant consacrée à la modélisation de la dynamique d'installation : des agents avec différents niveaux de revenus cherchent à s'installer en tenant compte de leurs préférences mais aussi de leurs capacités financières.

4.3.1 Paramètres du modèle : accessibilité et attractivité

Des offres de biens homogènes sont distribuées sur les noeuds d'un réseau carré. Chaque noeud X est caractérisé par un couple de coordonnées (x, y) , dans le repère dont l'origine est le centre du réseau. Les positions (x, y) sont caractérisées par un facteur d'attractivité qui influe sur la demande des agents pour les offres présentes sur ce site. Selon une dynamique donnée, les agents de différentes catégories cherchent à acheter les offres en tenant compte de l'attractivité associée aux positions sur lesquelles elles se trouvent. Dans cette sous-section, les différents paramètres du modèle sont introduits. Nous décrirons par la suite la dynamique.

Prix de réserve

Des agents hétérogènes par leurs capacités financières, cherchent à acheter des logements parmi les biens homogènes distribués sur les noeuds du réseau carré. Chacun de ces agents appartient à une catégorie k caractérisée par un prix de réserve P_{r_k} , le prix maximal qu'un agent peut payer pour un bien. Chaque catégorie peut être, par

exemple, interprétée comme une catégorie socio-professionnelle (si le nombre de catégories est peu élevé). Les K catégories sont classées par prix de réserve croissant, ($P_{r_0} < P_{r_2} < \dots < P_{r_{K-1}}$), une plus grande valeur de k correspondant à un agent avec plus de moyens.

Attractivité

A chaque site X est associée une attractivité qui est la somme de deux termes :

1. Une attractivité intrinsèque à la position $A^0(X)$ qui peut, par exemple, être reliée à la présence d'aménités. Elle est supposée, dans une première approche, indépendante du temps. En effet, si l'on regarde un quartier sur une période suffisamment courte, son degré d'attractivité intrinsèque ne change pas.
2. Une attractivité subjective, qui est l'attractivité perçue par un agent d'une catégorie k donnée. Elle est d'autant plus élevée que des agents de la même catégorie k et des catégories supérieures se sont installés sur le site X durant la précédente étape de dynamique.

L'ensemble des contributions intrinsèque et subjective de l'attractivité au temps t constitue l'attractivité totale du site X , celle-ci est notée $A_k(X, t)$ (l'indice k étant présent pour signaler la dépendance de l'attractivité en fonction de la catégorie). Cette attractivité totale est réévaluée à chaque étape de temps suivant :

$$A_k(X, t + \delta t) = A_k(X, t) + \omega \delta t (A^0(X) - A_k(X, t)) + \epsilon' v_{k>}(X, t)$$

où $v_{k>}(X, t)$ est la densité d'agents de la catégorie k et des catégories supérieures k' (avec $k' > k$) ayant acheté un bien entre les temps t et $t + \delta t$. ω indique à quel point l'attractivité actuelle est affectée par ses valeurs précédentes. L'équation se réécrit de la façon suivante :

$$\partial_t A_k(X, t) = \epsilon v_{k>}(X, t) + \omega (A^0(X) - A_k(X, t)) \quad (4.1)$$

où $\epsilon = \frac{\epsilon'}{\delta t}$.

Prix plancher

Sur chaque site X , $N(X)$ biens sont disponibles. A chaque offre i (bien disponible) présente sur un site X est associé un prix plancher $P_l(X)$, qui est le prix minimum auquel l'offre peut se vendre. L'attractivité moyenne $\bar{A}(X, t) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{A_k(X, t)}{K}$ (moyenne sur les catégories) d'un site X détermine les prix planchers des offres présentes sur ce site. Initialement, les prix planchers sont donnés par :

$$P_{l,i}(X) = P^0 + (1 - \exp(\lambda \bar{A}(X, t))) P^1 \quad (4.2)$$

où λ est une constante qui prend de faibles valeurs ($\ll 1$). P^0 est le prix minimum d'une offre et P^1 l'incrément maximum du prix par rapport à P^0 . Les prix plancher se situent par conséquent dans l'intervalle $[P^0, P^0 + P^1]$. Initialement, les offres sur un site donné sont, par définition, mises sur le marché au même prix plancher.

4.3.2 Règles d'installation

Ayant introduit les caractéristiques des agents et des offres, nous introduisons maintenant les règles qui régissent la dynamique d'installation. A chaque étape de temps (entre les temps t et $t + \delta t$) :

1. $\frac{\gamma L^2}{K}$ agents arrivent sur le réseau pour prospecter pour acheter un bien.
2. Chaque agent non déjà installé sur le réseau se positionne pour un achat potentiel sur un site X avec une probabilité :

$$p_k(X) = \frac{1 - \exp(-\lambda A_k(X, t))}{\sum'_X 1 - \exp(-\lambda A_k(X', t))}, \quad (4.3)$$

où \sum'_X est une somme sur tous les sites du réseau.

3. Les offres disponibles de chaque site sont classées par prix plancher croissant $P_{l,1}, \dots, P_{l,N(X)}$, ($P_{l,i} \leq P_{l,j}$, $i < j$).
 - a) Pour l'offre la moins chère, $P_{l,1}(X)$, nous recensons les agents qui prospectent sur le site X et qui ont un prix de réserve supérieur au prix plancher de l'offre considérée.
 - b) Un agent choisi au hasard dans cette liste achète cette offre.
 - c) Le prix de transaction $P_{tr,i}$ de l'offre i est :

$$P_{tr,i} = (1 - \beta)P_{l,i} + \beta P_{r_k,b} \quad (4.4)$$

où k est la catégorie à laquelle appartient l'acheteur, $P_{k,b}$ est son prix de réserve ; et β un coefficient constant. Pour l'offre la moins chère, i vaut 1.

On considère ensuite l'offre au prix juste supérieur et les étapes sont réitérés à partir du point b) jusqu'à que soit le nombre de candidats, soit le nombre d'acheteurs soient écoulés sur le site X .

4. Une proportion α d'agents installés de chaque catégorie quitte le système définitivement et laisse un bien à nouveau libre. Les prix plancher de ces nouvelles offres dépendent de la catégorie qui détenait le bien. Tous les biens sur un site X libérés par des agents de catégorie k possédait sont mis à un même prix plancher, $P_{l_k}(X)$, qui dépend de l'attractivité moyenne du lieu :

$$P_{l_k}(X) = P^0 + (1 - \exp(-\lambda \bar{A}(X, t + \delta t)))P_k. \quad (4.5)$$

5. Les offres i' qui n'ont pas été achetées sont réévaluées :

$$P_{l,i'}(X) = P^0 + (1 - \exp(-\lambda \bar{A}(X, t + \delta t)))P^a \quad (4.6)$$

où P^a est soit le prix de réserve de la dernière catégorie qui a acheté ce bien, ou vaut P^1 si encore aucun agent n'a acheté l'offre.

6. Les agents qui n'ont pas pu s'installer (acheter un bien) s'ajoutent aux futurs arrivants pour prospecter à nouveau.

Remarque : Quand une offre a au moins été achetée une fois, le prix de transaction P_{tr} pour cette offre s'exprime en fonction du prix plancher de l'acheteur et du prix plancher du vendeur :

$$P_{tr} = (1 - \beta)P_{l_{k,s}} + \beta P_{r_{k,b}} \quad (4.7)$$

où $P_{l_{k,s}}$ et $P_{r_{k,b}}$ sont respectivement le prix plancher du vendeur s (seller) de catégorie k' et le prix de réserve de l'acheteur b (buyer) de catégorie k .

4.4 Simulations numériques

Des simulations numériques ont été réalisées sur des réseaux $L \times L$ avec $L = 100$. Les dimensions du réseau ne représentent aucune distance réelle. Ainsi, les distances au centre dont parle dans le cadre des simulations sont des mesures qui n'ont pas une représentation directe pour la géographie d'une ville, il n'existe pas d'échelle. Le nombre d'offres $N(X)$ est le même sur chaque site L'attractivité intrinsèque $A^0(X)$ au site X (X défini par les coordonnées (x, y) relativement au centre) est prise de façon à être maximale au centre pour modéliser la forte préférence des agents pour être près du centre. Ce choix s'appuie sur les remarques de la section 4.2 concernant la place importante du centre dans les dynamiques de choix résidentiel. Nous choisissons alors d'exprimer l'attractivité intrinsèque sous la forme d'une Gaussienne

$$A^0(X) = A_{max} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{R^2}\right), \quad (4.8)$$

où A_{max} est l'attractivité intrinsèque maximale et R détermine, sur quelle distance en partant du centre, l'attractivité intrinsèque est significative.

Les catégories sont caractérisées par des prix de réserve $P_{k,k \in [0, K-1]} = P_0 + k * \frac{\Delta}{K-1}$, P_0 étant le prix de réserve minimum et Δ l'incrément de prix entre de catégories consécutives. Le même écart de prix est conservé entre chaque catégorie.

La dynamique décrite dans la section 4.3.2 a été appliquée avec les conditions citées au-dessus. Le système atteint un état stationnaire avec un nombre constant d'agents présents sur le réseau. Nous nous concentrerons sur cet état stationnaire plutôt que sur l'évolution jusqu'à cet état.

4.4.1 Distribution des catégories : ségrégation socio-spatiale et mixité

A titre indicatif, les simulations ont été effectuées avec les valeurs suivantes des paramètres : $\lambda = 0.1$, $A_{max} = 1$, $\epsilon = 0.022 * L^2$, $R = 10$, $\Delta = 225000$, $\omega = \frac{1}{15}$, $P^1 = 200000$, $\frac{\gamma}{K} = \frac{1000}{L^2}$, $\beta = 0.1$, $N(X) = 1000$. Le nombre d'offres a volontairement été fixé élevé pour être sûr que le système n'atteigne pas la saturation, c'est à dire que le nombre d'offres disponibles ne finisse pas par atteindre 0 sur certains sites.

La figure 4.5 montre le tracé des taux d'occupation pour les différentes catégories en fonction de la distance au centre dans l'état stationnaire.

Dans les premières étapes de la dynamique, la Gaussienne choisie pour représenter

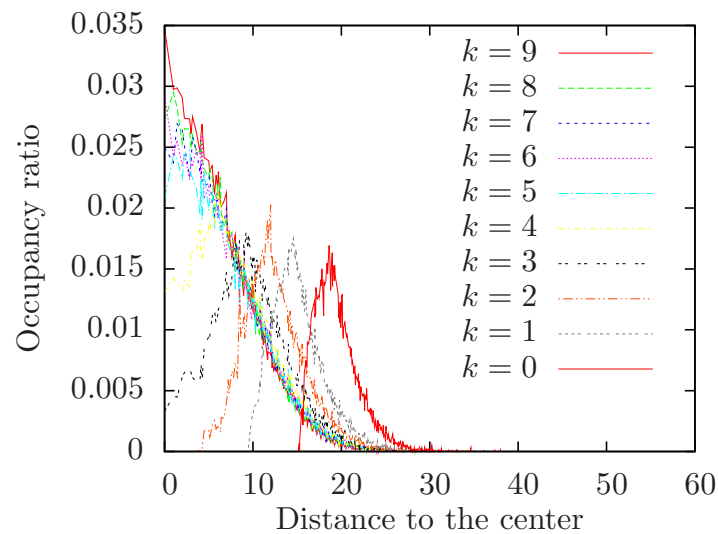


FIG. 4.5: Taux d'occupation par catégorie en fonction de la distance au centre dans l'état stationnaire. $K = 10$ catégories ont été utilisées. La distance au centre est sans unité, elle ne représente pas une échelle en particulier.

l'attractivité intrinsèque se retrouve dans la courbe donnant la population d'agents en fonction de la distance au centre. Mais, au fur et à mesure des étapes de dynamique, la distribution des agents se détache de la Gaussienne décrivant l'attractivité initiale. Les agents occupent alors un rayon plus large que celui sur lequel l'attractivité intrinsèque est significative. L'état stationnaire atteint, on peut, d'après la figure 4.5, découper l'espace partant du centre en 3 zones :

1. La zone centrale (distance au centre proche de 0) où se trouvent majoritairement les agents des catégories supérieures, c'est-à-dire avec un prix de réserve élevé.
2. La zone périphérique où se trouvent majoritairement les agents des catégories inférieures, c'est-à-dire avec un prix de réserve faible.
3. La zone intermédiaire (distance au centre proche de 20) où les agents de toutes catégories se trouvent dans des proportions comparables.

La présence de cette dernière zone de mixité sociale est non triviale dans le sens où on aurait pu s'attendre à ce que les agents soient ségrégués par catégorie sur tout le réseau.

4.4.2 Distribution des prix de transaction : une concurrence plus rude au centre

Une fois la population d'agents stable sur le réseau, les prix de transaction moyens à une distance donnée du centre et les variances associées ont été calculées. Ces moyennes sont représentées sur la figure 4.6. Une première remarque sur cette évolution concerne le fait que les prix sont plus élevés dans le centre et décroissent avec la distance au centre. Dans la zone centrale, les prix présentent une variance plus élevée qu'à la périphérie. La

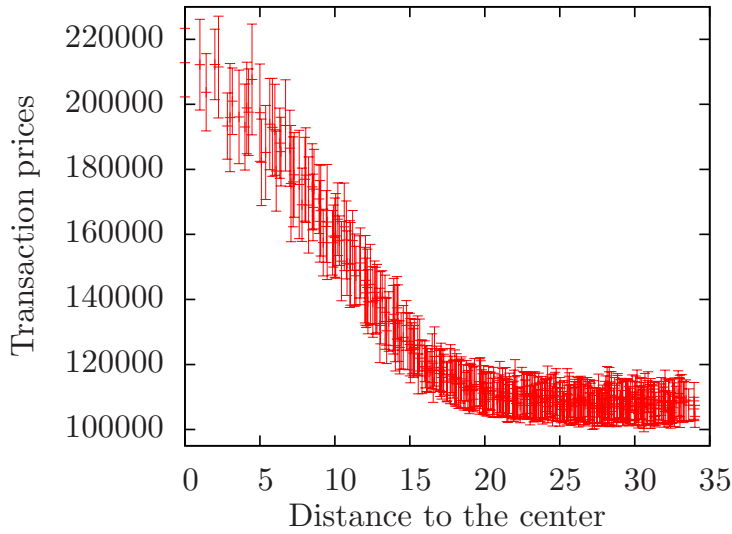


FIG. 4.6: Prix de transaction moyennés par distance en fonction de la distance au centre dans l'état stationnaire.

distribution des prix de transaction peut-être se découper en 2 parties : dans la partie centrale, une distribution large des prix montre une dynamique active tandis qu'une légère tendance à l'homogénéisation est notable sur les prix dans la zone périphérique. Cet effet sera plus visible par la suite dans le tracé de la variance des prix.

Pour les simulations qui précèdent, lorsque les agents candidatent sur un site, ils achètent en premier lieu les offres les moins onéreuses. Une variante consiste à ce que les agents achètent les offres présentes sur un site donné dans un ordre aléatoire. Le tracé de la moyenne des prix de transaction à l'état stationnaire est représenté pour ce cas sur la figure 4.7. La distribution de prix avec des offres ordonnées est finalement seulement légèrement différente de la distribution avec des offres achetées aléatoirement.

4.5 Analyse théorique

L'évolution du système peut se résumer à travers un ensemble d'équations différentielles. La densité d'agents de la catégorie k , $u_k(X, t)$ installés sur le réseau, c'est à dire ayant acheté un bien et ne l'ayant pas encore vendu, vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t u_k(X, t) = v_k(X, t) - \alpha(v_k(X, t) + u_k(X, t)) \quad (4.9)$$

où $v_k(X, t)$ est la densité d'agents de la catégorie k qui se sont installés au temps t . Cette équation correspond tout simplement au bilan entre le nombre d'installations et le nombre de départs.

Les nouveaux arrivants de chaque catégorie k (dont la quantité est donnée par $\frac{\gamma}{K}$ et les agents des catégories k qui ne sont pas installés prospectent sur un site X avec une probabilité $p_k(X)$, ils sont appelés candidats dans le sens où ils candidatent sur un

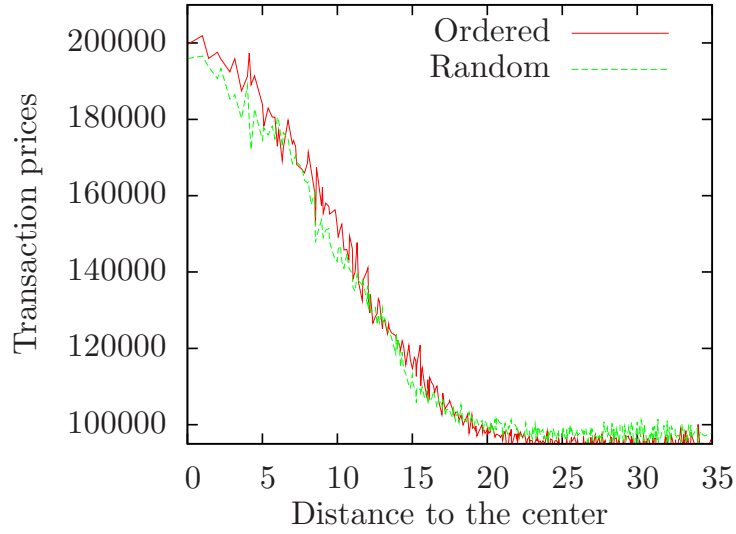


FIG. 4.7: Prix de transaction en fonction de la distance au centre : la courbe rouge représente le cas où les offres achetées sur un site sont choisies aléatoirement tandis que la courbe verte représente le cas où les offres sont achetées par prix croissant.

site X pour un potentiel achat (achat possible seulement si ils ont un prix de réserve suffisamment élevé et si suffisamment d'offres sont disponibles). Durant une étape de temps, la densité de candidats sur un site X , $\rho_k(X, t)$, est incrémenté par la densité de nouveaux arrivants sur le réseau et des agents qui n'ont pu s'installer précédemment (venant de n'importe quel site) candidatant sur le site X . Il est abaissé par la densité d'installations et la densité de tentatives d'installations non fructueuses. Donc, l'équation qui gouverne la variation de la densité de candidats s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_k(X, t) &= \frac{\gamma}{K} \frac{1 - \exp(-A_k(X, t)\lambda)}{\sum_{\{X'\}} 1 - \exp(-A_k(X', t)\lambda)} - v_k(X, t) \\ &+ \sum_{\{X'\}} \bar{v}_k(X', t) \frac{1 - \exp(-A_k(X, t)\lambda)}{\sum_{\{X''\}} 1 - \exp(-A_k(X'', t)\lambda)} - \bar{v}_k(X, t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $\bar{v}_k(X, t)$ correspond à la densité d'agents qui n'ont pas pu s'installer sur le site X durant la dernière étape de temps. $\sum_{\{X''\}}$ est la somme sur tous les sites du réseau. Remarquons que le nombre de candidats est la somme des agents qui se sont installés au temps t et de ceux qui n'y sont pas parvenus, donc :

$$\rho_k(X, t) = v_k(X, t) + \bar{v}_k(X, t) \quad (4.11)$$

4.5.1 État stationnaire

Tous les paramètres de l'état stationnaire sont notés avec une étoile * en exposant. Dans l'état stationnaire, l'attractivité pour chaque catégorie vérifie :

$$A_k^*(X) = A^0(X) + \frac{\epsilon}{\omega} v_{k>}(X, t) \quad (4.12)$$

Si le système a atteint l'état stationnaire, la densité totale de candidats de la catégorie k , $N_{c,tot}^*(k)$, est stable. Donc, le nombre de candidats de la catégorie k sur le site X est déterminé par :

$$\rho_k^*(X) = N_{c,tot}^*(k) \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X'\}} 1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))}, \quad (4.13)$$

où l'étoile représente l'état stationnaire. En réutilisant l'équation (4.11), on peut écrire la densité d'installations d'agents de la catégorie k dans l'état stationnaire :

$$v_k^*(X) = N_{c,tot}^*(k) \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X'\}} 1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))} - \bar{v}_k^*(X). \quad (4.14)$$

En reprenant l'équation (4.10) dans l'état stationnaire, on déduit alors :

$$v_k^*(X) = \frac{\gamma}{K} \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X'\}} 1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))} + \sum_{\{X'\}} \bar{v}_k^*(X') \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X''\}} 1 - \exp(-\lambda A_k^*(X''))} - \bar{v}_k^*(X) \quad (4.15)$$

Nous utiliserons cette équation dans la suite de l'analyse. Pour que le système soit dans l'état stationnaire, il faut nécessairement que le nombre de départs d'agents de la catégorie k soit égal au nombre d'installations d'agents de cette même catégorie au temps t , ce qui se résume à travers l'équation :

$$v_k^*(X) = \alpha u_k^*(X). \quad (4.16)$$

En sommant alors l'équation (4.10) sur tous les sites du réseau, on obtient :

$$\sum_{\{X'\}} v_k^*(X) = \alpha \sum_{\{X\}} u_k^*(X) = \frac{\gamma}{K}. \quad (4.17)$$

En conséquence, dans l'état stationnaire, la densité totale d'agents installés de la catégorie k est égal à $\frac{\gamma}{\alpha K}$. La densité totale d'installations d'agents de catégorie k au temps t est $\frac{\gamma}{K}$. Le même nombre total d'agents de chaque catégorie est installé à l'état stationnaire.

4.5.2 Modèle non contraint

Supposons dans un premier temps qu'aucune contrainte (manque d'offres par rapport au nombre de demandes, offres avec des prix plancher trop élevés) n'empêche l'installation d'agents, dans ce cas :

$$\forall k \bar{v}_k^*(X) = 0, \quad (4.18)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\rho_k^*(X) = v_k^*(X) = \frac{\gamma}{K} \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X'\}} [1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))]} \quad (4.19)$$

Afin que le système atteigne l'état stationnaire, le nombre de départs doit être égal au nombre d'arrivées ce qui implique que la densité d'agents installés par catégorie k sur un site X s'écrit sous la forme suivante :

$$u_k^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X'\}} [1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))]} \quad (4.20)$$

En particulier, pour la catégorie $K - 1$ avec le prix de réserve le plus haut :

$$u_{K-1}^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X'\}} [1 - \exp(-A_k^*(X')\lambda)]} \quad (4.21)$$

$$u_{K-1}^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{1 - \exp(-\lambda(A^0(X) + \frac{\epsilon\alpha}{\omega} u_{K-1}^*(X)))}{\sum_{\{X'\}} [1 - \exp(-\lambda(A^0(X') + \frac{\epsilon\alpha}{\omega} u_{K-1}^*(X')))]} \quad (4.22)$$

Supposons que l'attractivité est suffisamment basse pour pouvoir approximer l'exponentielle, dans ce cas :

$$\sum_{\{X'\}} [1 - \exp(-\lambda(A^0(X') + \frac{\epsilon\alpha}{\omega} u_{K-1}^*(X')))] = \sum_{\{X'\}} \lambda [A^0(X') + \frac{\epsilon\alpha}{\omega} u_{K-1}^*(X')] \quad (4.23)$$

$$= \lambda \left[\sum_{\{X'\}} [A^0(X')] + \frac{\epsilon}{\omega} \frac{\gamma}{K} \right] \quad (4.24)$$

En combinant les équations (4.22) et (4.24) et approximant tous les termes en exponentiel, on obtient le nombre d'agents installés sur chaque site X dans l'état stationnaire :

$$u_{K-1}^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{1 - \exp(-\lambda(A^0(X) + \frac{\epsilon\alpha}{\omega} u_{K-1}^*(X)))}{\lambda \left[\sum_{\{X'\}} [A^0(X')] + \frac{\epsilon}{\omega} \frac{\gamma}{K} \right]} \quad (4.25)$$

$$= \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{A^0(X) + \frac{\epsilon\alpha}{\omega} u_{K-1}^*(X)}{\sum_{\{X'\}} [A^0(X')] + \frac{\epsilon}{\omega} \frac{\gamma}{K}} \quad (4.26)$$

La résolution de cette équation conduit à :

$$u_{K-1}^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{A^0(X)}{\sum_{X'} A^0(X')}, \quad (4.27)$$

L'équation (4.27) donne le nombre de départs et d'arrivées pour la catégorie $K - 1$ sur chaque site. En utilisant les arguments précédents et utilisant une récurrence, on peut montrer que le nombre d'agents installés de chaque catégorie k sur chaque site X devrait, dans l'état stationnaire, satisfaire

$$\forall k \ u_k^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{A^0(X)}{\sum_{X'} A^0(X')} \quad (4.28)$$

en mettant de côté les capacités d'achat des différentes catégories. Par conséquent, l'attractivité moyenne $\bar{A}(X)$ sur un site X s'exprime de la façon suivante :

$$\bar{A}^*(X) = A^0(X) + \frac{\epsilon}{\omega} \left[\frac{(K+1)K}{2} \right] \frac{\gamma}{K^2} \frac{A^0(X)}{\sum_{X'} A^0(X')} \quad (4.29)$$

4.5.3 Modèle contraint

Capacité d'achat

Dans la version non contrainte de l'analyse de l'état stationnaire, les capacités d'achat des agents ne sont pas prises en compte. Or sur plusieurs sites, les agents de certaines catégories ne pourront pas s'installer car ils n'ont pas un prix de réserve suffisamment élevé pour acheter un bien. La présence de catégories avec de hautes capacités financières (prix de réserve élevé) sur un site donné crée une zone de haute attractivité, et, par conséquent une zone où les offres ont de hauts prix planchers. Une condition minimale pour que des agents d'une catégorie k puisse rester sur un site, est que les agents de catégorie k doivent pouvoir acheter une offre libérée par un agent de leur propre catégorie. Plus précisément, le prix de réserve d'un agent de catégorie k , $P_r(k)$, doit être supérieur au prix plancher d'une offre libérée sur le site X par un agent de catégorie k , $P_{l_k}(X)$, c'est-à-dire :

$$P_{r_k}(k) \geq P_{l_k}(X) \quad (4.30)$$

$$P_{r_k} \geq P^0 + (1 - \exp(-\lambda \bar{A}^*(X))) P_r(k) \quad (4.31)$$

Un agent de la catégorie k ne peut être installé sur un site X à l'état stationnaire que si son prix de réserve satisfait :

$$\lambda \bar{A}^*(X) \leq \ln \frac{P_{r_k}}{P^0} \quad (4.32)$$

Cherchons la distance minimale à laquelle une catégorie donnée k peut s'installer. A cette distance, k est alors par définition la catégorie la plus basse présente. Supposons que toutes les catégories supérieures ou égales à k aient atteint la densité prévue dans l'état stationnaire sans contrainte (cf. équation (4.28)). En réécrivant l'inégalité (4.32) avec cette hypothèse sur les densités, on déduit une distance critique d'installation $d_c^*(k)$ en dessous de laquelle les agents de catégorie k ne peuvent pas s'installer.

$$A^0(X) + \frac{\epsilon\gamma}{\omega K^2} \left[\frac{(K+1)K}{2} - \frac{(k+1)k}{2} \right] \frac{A^0(X)}{\sum_{X'} A^0(X')} \leq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{P_{r_k}}{P^0} \quad (4.33)$$

$$A^0(X) \leq \frac{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{P_{r_k}}{P^0}}{1 + \frac{\epsilon\gamma}{\omega K^2} \frac{[\frac{(K+1)K}{2} - \frac{(k+1)k}{2}]}{\sum_{X'} A^0(X')}} \quad (4.34)$$

$$A_{max} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) \leq \frac{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{P_{r_k}}{P^0}}{1 + \frac{\epsilon\gamma}{\omega K^2} \frac{[\frac{(K+1)K}{2} - \frac{(k+1)k}{2}]}{\sum_{X'} A^0(X')}} \quad (4.35)$$

La distance critique au centre $d_c^*(k)$ à partir de laquelle la catégorie k est sûre de pouvoir s'installer (si le système n'est pas à saturation) est donc :

$$d_c^*(k) = R \sqrt{-\ln\left[\frac{\frac{1}{\lambda A_{max}} \ln \frac{P_k}{P_0}}{1 + \frac{\epsilon\gamma}{\omega K^2} \frac{\left[\frac{(K+1)K}{2} - \frac{(k+1)k}{2}\right]}{\sum_{X'} A^0(X')}}\right]} \quad (4.36)$$

La distance calculée ici pour une catégorie k est en réalité celle à partir de laquelle cette catégorie et les catégories supérieures peuvent s'installer en conformité avec l'état stationnaire trouvée au dessus (équation (4.28)). Une catégorie basse a un poids faible dans l'attractivité stationnaire moyenne $\bar{A}(X, t)$ étant donnée la définition de l'attractivité. En conséquence, il y a peu d'écart entre la distance de début d'installation des agents et la distance d'installation avec la densité prévue par l'état stationnaire sans contrainte. En revanche, pour les catégories plus élevées, selon leur poids dans l'attractivité moyenne $\bar{A}(X, t)$, il y aura une différence entre la distance d'installation et la distance $d_c^*(k)$. Les agents des catégories concernés (avec k proche de $K - 1$) pourront réussir à s'installer à une distance du centre inférieure à $d_c^*(k)$. Notons qu'ici nous sommes intéressées par la limite infinie du nombre de catégories, or dans ce cas les distances critiques $d_c^*(k)$ pour des valeurs de k consécutives seront très proches donc les agents ne pourront pas s'installer à une distance du centre inférieure à $d_c^*(k)$. Les simulations numériques dans la section 4.4 ont été réalisées avec une valeur de K peu élevé. Donc, on constatera, lorsqu'on augmente K , un écart entre la distance d'installation réelle (donnée par les simulations) et la distance critique trouvée analytiquement. En bref, quand le nombre de catégories, K , tend vers l'infini, il est cohérent de confondre la distance critique d'installation et la distance $d_c^*(k)$. Remarquons que si :

$$\ln\left[\frac{\frac{1}{\lambda A_{max}} \ln \frac{P_k}{P_0}}{1 + \frac{\epsilon\gamma}{\omega K^2} \frac{\left[\frac{(K+1)K}{2} - \frac{(k+1)k}{2}\right]}{\sum_{X'} A^0(X')}}\right] \geq 0, \quad (4.37)$$

la distance critique est prise comme étant nulle : les agents des catégories, pour lesquelles la distance $d_c^*(k)$ est nulle, peuvent s'installer n'importe où sur le réseau (en l'absence de saturation du système : nombre d'offres toujours supérieur au nombre de demandes). Selon les valeurs des paramètres choisies, les agents de certaines catégories k (les plus basses) ne pourront pas s'installer sur une zone de rayon $d_c^*(k)$ autour du centre du réseau. Les agents de ces catégories candidateront par conséquent sur des sites où i ls ne pourront pas s'installer. Or, la densité totale d'agents d'une catégorie, peu importe laquelle, est égale à $\frac{\gamma}{\alpha K}$ dans l'état stationnaire d'après l'équation (4.17). Par conséquent, la densité totale des candidats des catégories concernées doit être plus grande que $\frac{\gamma}{K}$ de façon à compenser les installations non effectuées au centre. Le nombre de candidats de catégorie k sur un site X s'exprime toujours de la façon suivante :

$$\rho_k^*(X) = N_{c,tot}^*(k) \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{X'} [1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))]} \quad (4.38)$$

mais avec une valeur différente pour $N_{c,tot}^*(k)$ par rapport à celle du cas contrain (équation

(4.13)). Etant donnée la définition de la distance critique (dans la limite K infinie), aucune installation d'agent de catégorie k ne peut se faire à une distance inférieure à $d_c^*(k)$. Par contre, pour les distances supérieures à $d_c^*(k)$, rien n'empêche l'installation des agents de catégorie k (si il n'y a pas saturation du système) donc sur la partie du réseau où les sites sont à une distance du centre comprise dans l'intervalle $[d_c^*(k), L_c]$ (L_c étant la distance maximale au centre), $v_k^*(X) = 0$ ce qui implique l'égalité des nombres de candidats et d'installations sur cette partie du réseau sont égaux. Or, d'après l'équation (4.17), la densité d'installations sur tout le réseau vaut $\frac{\gamma}{K}$. L'ensemble de ces remarques permet d'écrire :

$$\sum_{X=d_c^*(k)}^{L_c} \rho_k^*(X) = \frac{\gamma}{K} = N_{c,tot}^*(k) \sum_{X=d_c^*(k)}^{L_c} \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{\{X'\}} [1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))]} \quad (4.39)$$

En combinant les équations (4.38) et (4.39), on obtient alors la densité de candidats dans l'état stationnaire :

$$\rho_k^*(X) = \frac{\gamma}{K} \frac{1 - \exp(-\lambda A_k^*(X))}{\sum_{X'=d_c^*(k)}^{L_c} [1 - \exp(-\lambda A_k^*(X'))]} \quad (4.40)$$

Considérons la catégorie la plus élevée k pour laquelle la distance critique $d_c^*(k)$ n'est pas nulle, c'est-à-dire les agents de la catégorie concernée ne peuvent s'installer partout sur le réseau. Dans ce cas pour toutes les catégories supérieures à celle-ci le nombre d'installés sur chaque site sera donné par l'équation (4.28). Supposons que l'attractivité $A_k(X)$ est suffisamment basse pour approximer les termes exponentiels. Si la distance entre le centre et le site X est supérieure à $d_c^*(k)$, alors :

$$\rho_k^*(X) = v_k^*(X) = \alpha u_k^*(X) = \frac{\gamma}{K} \frac{A_k^*(X)}{\sum_{X'=d_c^*(k)}^{L_c} A_k^*(X')} \quad (4.41)$$

$$u_k^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{A^0(X) + \frac{\epsilon\alpha}{\omega} [(K-k) \frac{A^0(X)}{\sum_{X'=0}^{L_c} A^0(X')} + N_{u_k}(X)]}{\sum_{X'=d_c^*(k)}^{L_c} [A^0(X')] + \frac{\epsilon}{\omega\delta t} [(K-k) \frac{\gamma}{K} \frac{\sum_{X'=d_c^*(k)}^{L_c} A^0(X')}{\sum_{X'=0}^{L_c} A^0(X')} + \frac{\gamma}{K}]} \quad (4.42)$$

L'équation (4.42) conduit :

$$u_k^*(X) = \frac{\gamma}{K\alpha} \frac{A^0(X)}{\sum_{X'=d_c^*(k)}^{L_c} A^0(X')}, \quad (4.43)$$

si la distance entre le site X et le centre est supérieure à $d_c^*(k)$. En utilisant une récurrence, on peut généraliser à toutes les catégories :

$$v_k^*(X) = \alpha u_k^*(X) = \frac{\gamma}{K} \frac{A^0(X)}{\sum_{X'=d_c^*(k)}^{L_c} A^0(X')} \text{ si } \sqrt{(x^2 + y^2)} \geq d_c^*(k) \quad (4.44)$$

$$= 0 \text{ otherwise} \quad (4.45)$$

et

$$\forall X, \rho_k^*(X) = \frac{\gamma}{K} \frac{A^0(X)}{\sum_{X'=d_c^*(k)}^{L_c} A^0(X')} \quad (4.46)$$

Offres et demandes

Sur quelques sites, même si, théoriquement les agents ont des prix de réserve suffisamment élevés, ils peuvent ne pas s'installer parce qu'il n'y pas assez de biens disponibles. Le manque d'offres peut-être absolu ou relatif, c'est à dire du au fait que les offres disponibles sont trop chères par rapport aux prix de réserve des agents. Dans ces deux cas, les offres ne s'équilibrent pas avec la demande :

1. Il y a suffisamment d'offres mais celles qui auraient pu être achetées par certaines catégories, ont déjà été prises par des agents d'autres catégories et celles qui restent ont des prix planchers trop élevés.
2. Il n'y pas assez d'offres pour que chaque catégorie puis s'installer en accord avec la densité prévue par l'état stationnaire.

1. Dans le cas où les offres sont achetées par ordre de prix croissant (et non dans un ordre aléatoire), les offres disponibles sont divisées en 2 groupes dans l'état stationnaire : un ensemble d'offres qui viennent d'être libérées et qui vont être à nouveau achetées et ensemble d'offres à un prix plancher $P_{l_{K-1}}(X)$ (offres libérées par un agent de la plus haute catégorie $K - 1$). Cette séparation des offres en deux groupes est la conséquence du classement par ordre de prix croissant des offres avant d'être vendues. Les catégories pour lesquelles le prix de réserve est supérieur à $P_{l_{K-1}}(X)$ trouveront toujours une offre satisfaisante, donc, pour ces catégories, $\bar{v}_k^*(X) = 0$. Cependant les agents de catégorie ne vérifiant pas cette condition peuvent ne pas trouver une offre satisfaisante même si leur prix de réserve est supérieur au prix plancher auquel il libère une offre (c'est-à-dire même si ils peuvent racheter une offre vendue par un agent de la même catégorie qu'eux) parce que toutes les offres du site X dans leur moyen ont pu être vendus à d'autres agents.

2. Si le nombre d'agents installés prévu par l'état stationnaire (équation (4.43)) sur un site X est supérieur au nombre d'offres de ce site, la distribution des agents doit s'ajuster. Dans ce cas, le site X sera saturé, le taux d'occupation (toute catégorie confondue) vaudra 1 A une distance d_{c_2} du centre, des sites pourront à nouveau contenir des biens vacants. La distance d_{c_2} est donnée par l'intersection entre le nombre de biens sur un site, $N(X)$ (pris constant sur le réseau), et le nombre d'agents prévu sur ce site dans l'état stationnaire.

$$N = L^2 \sum_{k_0}^{K-1} \frac{\gamma}{K \alpha} \frac{A^0(d_{c_2})}{\sum_{\{X'\}}^{L_c} A^0(X')} \quad (4.47)$$

où k_0 est la catégorie la plus basse présente sur le site X . k_0 est tel que $d_c(k_0) \leq d_{c_2}$ et $d_c(k_0 - 1) \geq d_{c_2}$, sinon $k_0 = 0$, signifiant que toutes les catégories peuvent s'installer.

Ainsi,

$$A^0(d_{c_2}) = \frac{NK\alpha}{(K - k_0)\gamma} \sum_{\{X'\}}^{L_c} A^0(X') \quad (4.48)$$

$$d_{c_2} = \sqrt{-\beta \ln \left[\frac{NK\alpha}{(K - k_0)\gamma} \sum_{\{X'\}}^{L_c} A^0(X') \right]} \quad (4.49)$$

Si

$$\ln \left[\frac{NK\alpha}{(K - k_0)\gamma} \sum_{\{X'\}}^L A^0(X') \right] \geq 0, \quad (4.50)$$

cela implique $d_{c_2} = 0$, il y a suffisamment d'offres pour qu'aucun site ne soit saturé.

4.5.4 Distribution des prix

Comme précisé précédemment, il existe une distance critique $d_c^*(k)$ pour chaque catégorie, en dessous de laquelle les agents de la catégorie concernée ne peuvent s'installer, ce qui signifie que des transactions de toutes les catégories ne sont pas possibles dans le centre. Déterminons la catégorie la plus basse k_0 présente sur chaque site X . Supposons que suffisamment de catégories ont été introduites (grande valeur de K) pour qu'il existe une catégorie k_0 pour laquelle la condition 4.32 est une égalité. L'approximation des termes exponentiels permet d'obtenir une expression pour k_0 :

$$P^0 \bar{A}^*(X) \lambda = k_0 \frac{\Delta}{K - 1} + P_0 - P^0. \quad (4.51)$$

Si l'on suppose que les catégories, qui sont présentes sur un site X , le sont dans les mêmes proportions (il s'agit bien entendu d'une approximation) et que leurs densités sont données par l'équation (4.27), on obtient :

$$P^0 \lambda \exp(-X^2/R^2) \left[1 + \frac{\epsilon \gamma}{\omega K^2 \sum_{\{X'\}} A_0(X')} \left[\frac{(K+1)K}{2} - \frac{(k_0+1)k_0}{2} \right] \right] \quad (4.52)$$

$$= k_0 \frac{\Delta}{K - 1} + P_0 - P^0 \quad (4.53)$$

L'équation (4.53) donne une équation du second degré pour k_0 :

$$k_0^2 \epsilon'' + k_0 \left[\frac{\Delta}{P^0(K-1)} \exp(X^2/R^2) + \epsilon'' \right] - [1 + \epsilon'' K(K+1)] + \frac{P^0 - P_0}{P^0} \exp(X^2/R^2) \quad (4.54)$$

où $\epsilon'' = \frac{\epsilon\gamma}{2\omega K^2 \sum_X A_0(X')}$. Finalement, la plus basse catégorie k_0 présente sur un site X est exprimée de la façon suivante :

$$k_0 = \frac{1}{2\epsilon''} \left[- \left[\frac{\Delta}{P^0(K-1)} \exp(X^2/R^2) + \epsilon'' \right] \right. \\ \left. + \sqrt{\left[\frac{\Delta}{P^0(K-1)} \exp(X^2/R^2) + \epsilon'' \right]^2 + 4\epsilon'' [1 + \epsilon'' K(K+1)] + \frac{(P^0 - P_0) \exp(X^2/R^2)}{P^0}} \right] \quad (4.55)$$

On peut en déduire l'attractivité moyenne $\bar{A}(X)$ sur un site X .

Prix de transaction moyens

Pour obtenir la moyenne des prix de transaction sur un site, il suffit de considérer les distributions d'agents installés sur ce site. En effet, les offres qui sont vendues suivent la même distribution. De plus, les prix de transaction s'expriment en fonction des catégories des agents qui vendent. Dans un premier temps, considérons la moyenne des prix planchers $\bar{P}_l(X)$ des vendeurs toutes catégories confondues sur un site X . Étant donné que l'on suppose que les agents sont présents dans les mêmes proportions sur un site donné, cela implique que la distribution des transactions parmi les catégories est elle aussi uniforme.

$$\begin{aligned} \bar{P}_l(X) - P^0 &= \sum_{k_0}^{K-1} P_{r_k}(X) (1 - \exp(-\lambda \bar{A}^*(X))) \quad (4.56) \\ &= \left[P_0 + \frac{1}{K - k_0} \left[\frac{(K-1)K}{2} - \frac{(k_0-1)k_0}{2} \right] \right] \frac{\Delta}{K-1} (1 - \exp(-\lambda \bar{A}^*(X))) \\ &= \left[P_0 + \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{k_0}{K-1} \right) \right] [1 - \exp(-\lambda \bar{A}^*(X))] \\ &= \left[P_0 + \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{k_0}{K-1} \right) \right] \left[\frac{P_0 - P^0 + k_0 \frac{\Delta}{K}}{P_0 + k_0 \frac{\Delta}{K-1}} \right] \\ &= \left[P_0 + \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{k_0}{K-1} \right) \right] \left[1 - \frac{P^0}{P_0 + k_0 \frac{\Delta}{K-1}} \right] \end{aligned}$$

La moyenne des prix de réserve $\bar{P}_r(X)$ des acheteurs sur un site X s'exprime en fonction de k_0 par la formule suivante :

$$\bar{P}_r(X) = P_0 + \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{k_0}{K-1} \right) \quad (4.57)$$

Finalement, le prix de transaction moyen $\bar{P}_{tr}(X)$ se met sous la forme :

$$\bar{P}_{tr}(X) = (1 - \beta)P^0 + \left[(1 - \beta) \left(1 - \frac{P^0}{P_0 + k_0 \frac{\Delta}{K-1}} \right) + \beta \right] \left[P_0 + \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{k_0}{K-1} \right) \right] \quad (4.58)$$

$$= (1 - \beta)P^0 + \left[-(1 - \beta) \frac{P^0}{P_0 + k_0 \frac{\Delta}{K-1}} + 1 \right] \left[P_0 + \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{k_0}{K-1} \right) \right] \quad (4.59)$$

La valeur de $k_0(X)$ est connue par l'équation (4.56), on peut donc complètement déduire le prix de transaction moyen. Les résultats analytiques sont partiellement valides pour le cas où les offres sont achetées par ordre de prix croissant. Le calcul des distances critiques $d_c^*(k)$ (à partir du centre) auxquelles les catégories k peuvent s'installer est encore valable. Cependant, les agents s'installent continûment à partir de cette distance au lieu d'atteindre directement la densité attendue (équation (4.43)). Par conséquent, la distribution des agents, pour lesquelles le prix de réserve ne leur permet pas de s'installer dans le centre, ne correspond pas à celle dans le cas où les offres ne sont pas achetées par ordre croissant. Le prix moyen de transaction en fonction du centre est cependant seulement légèrement différent de celui obtenu analytiquement.

4.6 Analyse versus simulations

4.6.1 Distance critique d'installation

Dans la section 4.5, une analyse de l'état stationnaire a été réalisée. Malgré quelques approximations, les résultats des simulations et de l'analyse sont en bon accord. En effet, le tracé de la distance d'installation en fonction des catégories k sur la figure 4.8 montre une bonne correspondance entre les simulations et la formule analytique 4.36 pour les basses valeurs de k .

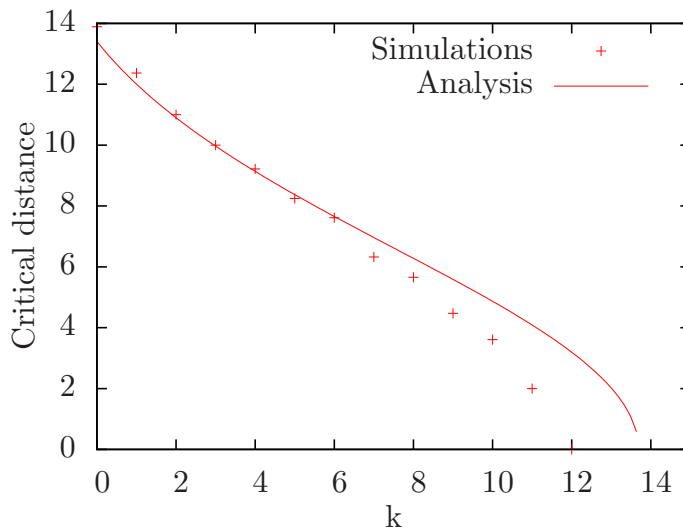


FIG. 4.8: Évolution de la distance critique en fonction des catégories ($K = 50$) : les points sont ceux générés par les simulations, la courbe pleine est issue de l'analyse.

Pour les valeurs plus élevées de k , la distance d'installation et la distance critique $d_c^*(k)$ s'éloignent l'une de l'autre. La présence de cet écart a déjà été évoquée précédemment. La distance critique calculée correspond en fait à la distance à partir de laquelle les agents de la catégorie considérée peuvent s'installer en conformité avec ce qui est prévu par l'état stationnaire 4.28. La densité d'agents, si ceux-ci ne s'installent pas dès le centre,

doit globalement suivre l'équation (4.43). Plus la catégorie est élevée, plus le poids de la densité d'agents de cette catégorie est élevée dans l'attractivité. Donc pour une catégorie élevée, un écart entre un nombre d'agents strictement supérieur à 0 et le nombre d'agent prévu par l'état stationnaire 4.28 est remarquable dans l'attractivité moyenne. Or la distance critique s'exprime en fonction de l'attractivité moyenne.

4.6.2 Taux d'occupation

La figure 4.9 représente le taux d'occupation obtenu avec $K = 10$ catégories pour $k = 9$ (la catégorie la plus grande) avec les simulations et avec la formule analytique 4.43. D'après la figure, la densité trouvée analytiquement (4.43) constitue ainsi une approximation légitime pour le taux d'occupation des catégories qui peuvent s'installer dès le centre (c'est-à-dire $d_c^*(k) = 0$).

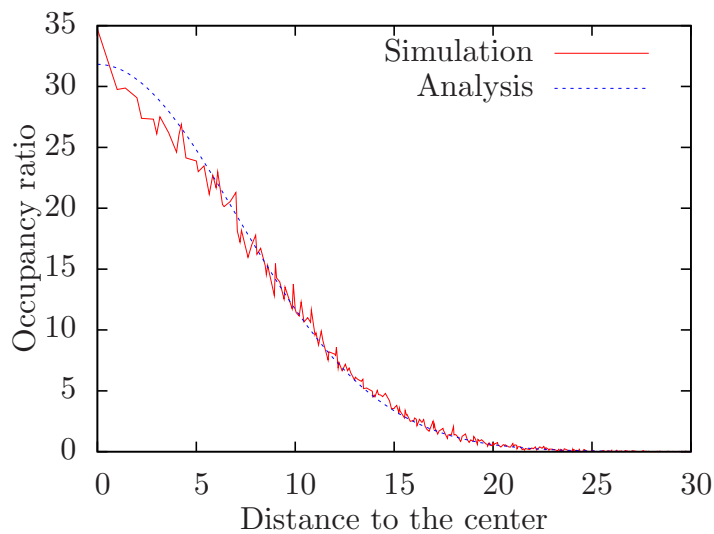


FIG. 4.9: Taux d'occupation en fonction de la distance pour la catégorie $k = 9$ ($K = 10$) : la courbe rouge est issue des simulations alors que la courbe bleue de l'analyse.

L'exemple du taux d'occupation en fonction de la distance au centre pour une catégorie qui ne s'installe pas dans le centre ($d_c^*(k) > 0$) est illustré sur la figure 4.10. La courbe rouge correspond au taux d'occupation obtenu à partir des simulations tandis que la courbe bleue est le tracé de l'expression analytique 4.43. Un bon accord entre simulation et analyse est encore observé.

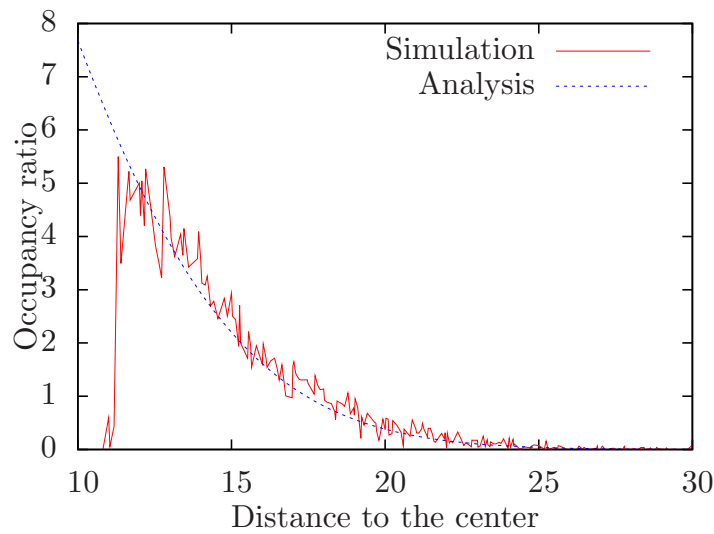


FIG. 4.10: Taux d'occupation en fonction de la distance pour la catégorie $k = 2$ ($K = 10$) : la courbe rouge est issue des simulations alors que la courbe bleue de l'analyse.

4.6.3 Prix de transaction

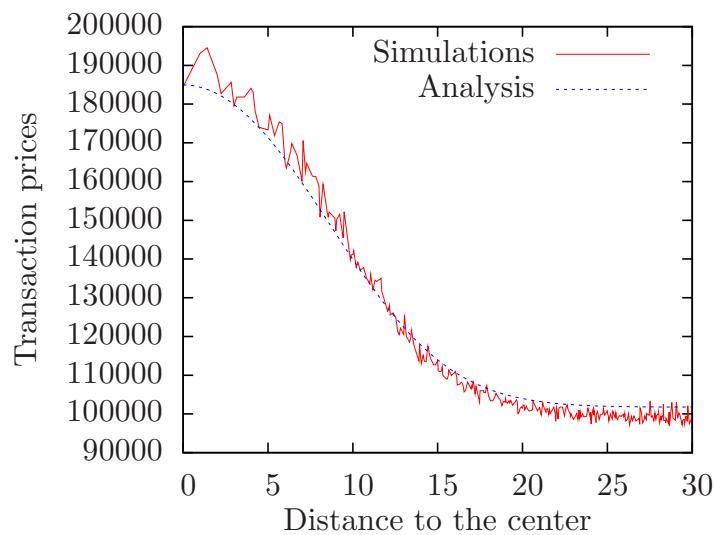


FIG. 4.11: Prix de transaction en fonction de la distance au centre (avec $K = 50$) : la courbe rouge est issue des simulations alors que la courbe bleue de l'analyse.

L'analyse effectuée, bien qu'utilisant des approximations, donne une estimation cohérente du prix de transaction issu des simulations. Les évolutions des prix de transaction

moyens obtenus par simulation et analytiquement (équation (4.59)) en fonction de la distance au centre ont également été tracées sur la figure 4.11.

Le bon accord entre simulations et analyse rend le modèle tractable et en fait donc un bon point de départ pour l'étude du marché immobilier.

4.7 Données versus simulations

Les figures 4.12 montrent respectivement les prix de transaction de la base des données des notaires et des simulations. Les écarts-types des prix de transaction sont tracés sur

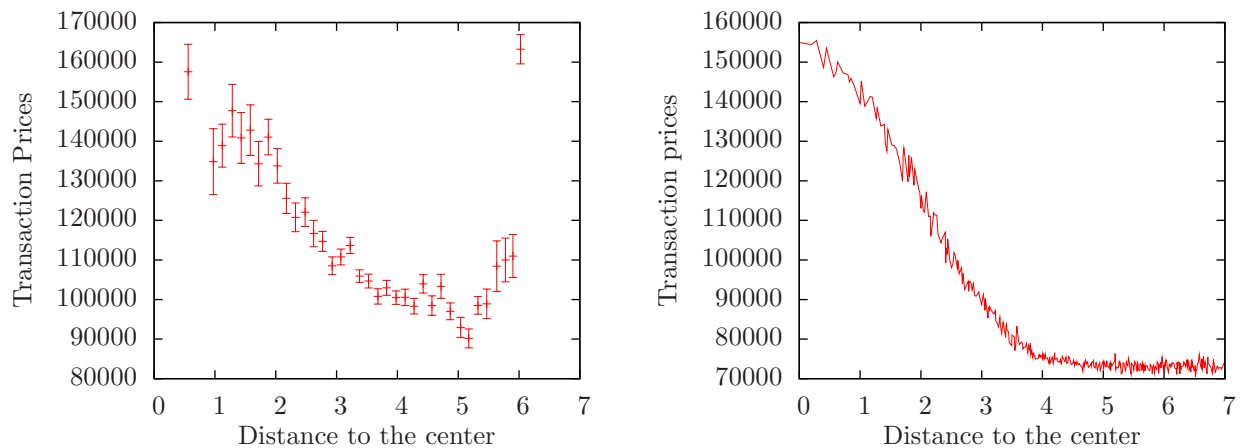


FIG. 4.12: Prix de transaction moyennés en fonction de la distance au centre (gauche : données (euros), droite : modèle).

les figures 4.13.

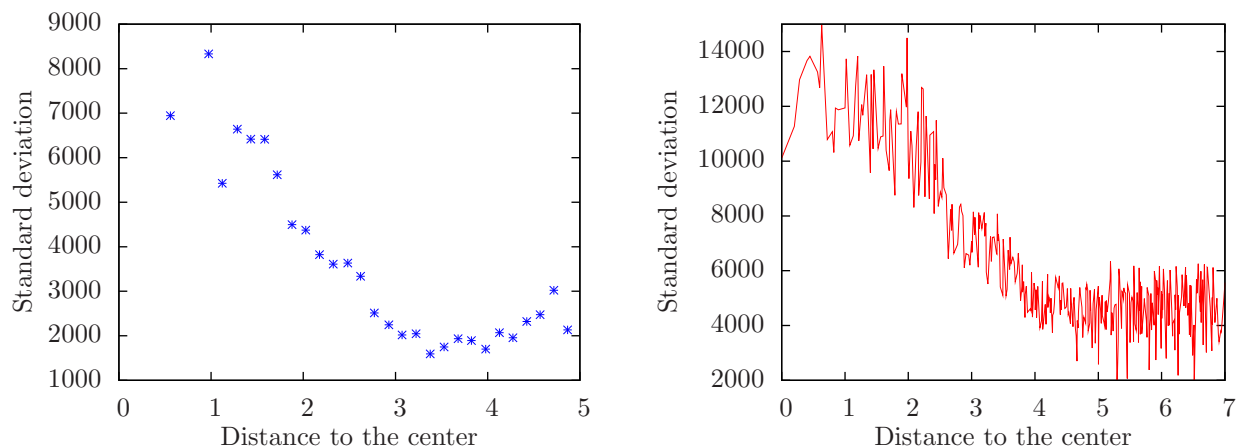


FIG. 4.13: Écart-type des prix de transaction moyennés en fonction de la distance au centre (gauche : données, droite : modèle).

Les tendances globales issues des données sont globalement reproduites par le modèle. Le choix d'une attractivité intrinsèque Gaussienne pour symboliser l'importance

du centre géographique se révèle être satisfaisant pour une première approche.

4.8 Conclusions

A travers ce chapitre, un modèle de marché du logement a été développé. Des faits stylisés observés sur les transactions immobilières de Paris ont été reproduits : un premier fait est la décroissance des prix de transaction à partir du centre. Aussi, les prix de transaction affichent de larges fluctuations au centre alors que les prix à la périphérie se tassent. De plus, une ségrégation socio-spatiale apparaît : les agents avec des prix de réserve plus élevés sont majoritairement présents dans la zone centrale tandis que la zone périphérique est occupée par les agents avec de faibles capacités financières. Enfin, un autre phénomène est l'apparition d'une zone intermédiaire de mixité sociale entre centre et périphérie. Cette dernière zone pourrait présenter un intérêt particulier dans le cas d'une politique sociale visant l'intégration. Dans ce but, il serait intéressant de relever quels sont les paramètres qui influent sur la présence de cette zone mixte économiquement pour pouvoir conduire une étude plus approfondie.

Le point pertinent concernant cette modélisation se situe dans le fait qu'elle n'a nécessité que peu d'hypothèses et peu de paramètres. En effet, la principale hypothèse se rapporte à la "centralité" de la ville. Quant aux paramètres, ils se résument à la prise en compte du facteur économique, les capacités financières de l'agent et les prix des biens, et d'un degré d'attractivité avec une composante spatiale et une composante relative à la perception des agents. Ainsi, de comportements simples ont pu émerger des faits constatables empiriquement. A travers ce modèle, nous pensons ainsi nous approcher d'observations faites dans le cadre d'une analyse sur le prix de l'immobilier par Paris Dauphine. Une des phrases issue de leur analyse illustre ce propos : "Lorsque la logique d'entre-soi électif des classes "supérieures" prédomine, le prix élevé "verrouille" le marché. Au contraire, dans l'entre-soi des couches à faible pouvoir d'achat (classes populaires, immigrés des pays du Sud), le faible prix est la conséquence d'un regroupement socio-spatial subi. Dans un cas, l'entre-soi stimule la concurrence par les prix, dans l'autre elle dissuade cette concurrence."

Les tendances globales relevées sur la base de données et les résultats de la modélisation sont ainsi en bon accord pour une première approche. De plus, les états stationnaires du système représentant les dynamiques de marché du logement peuvent être approchés analytiquement, ce qui rend le modèle tractable et extensible pour de futures études plus complètes. Jusqu'ici, seul le cas où le nombre d'offres est supérieur à la demande a été envisagé. Il est naturel de considérer le cas de la saturation où certaines zones sont tellement attractives que le nombre d'acheteurs potentiels de biens est trop important par rapport au nombre de logements effectivement disponibles. Quelques simulations de ce cas ont été effectuées pour avoir un aperçu de la répartition des agents lorsque leur choix est contraint par la densité d'occupation en plus du facteur économique. Les agents occupent alors un rayon beaucoup plus large dans le réseau. Une influence sur les prix est également à prévoir. Précisons que la simulation d'un déséquilibre offre-demande ne requiert aucun changement sur le modèle en lui-même mais nécessite simplement de simuler l'arrivée de plus d'agents sur le réseau, ces agents exerçant une pression

supplémentaire sur la dynamique des prix fonciers. En ce qui concerne l'analyse de l'effet de saturation, elle est à première vue plus complexe que dans le modèle non contraint par le nombre d'offres disponibles. L'étude du cas de saturation est pertinent dans des grandes villes comme Paris où le manque de logements se fait ressentir et a de plus un effet d'auto-renforcement sur l'accroissement des prix de l'immobilier.

Dans le prolongement de cette étude du marché du logement, il est également prévu de s'intéresser à la formation de quartiers qui deviennent très attractifs en un temps très court puis d'en déterminer les effets sur les prix fonciers ainsi que sur la composition socio-économique. Nous envisageons de traiter ce phénomène en apportant quelques modifications dans les paramètres du modèle et en réalisant une étude de stabilité de l'état stationnaire. Ce type d'approche s'inspirerait notamment d'un article sur les dynamiques de criminalité. Dans cet article, *Short et al.* élaborent un modèle statistique de cambriolages sur lequel la présence d'instabilités de l'état stationnaire génère la formation subite de zones à forte concentration de cambriolages (hotspots). Dans le même esprit, on pourrait voir comment des quartiers peuvent rapidement devenir très demandés à partir d'instabilités dans le modèle.

D'autres extensions du modèle pour le rendre plus réaliste devraient prendre en compte la présence de réseaux de transports, ceux-ci influencent bien sûr les choix résidentiels des ménages et donc le marché du logement. On pourrait également s'intéresser aux conséquences du polycentrisme, en particulier, permet-il d'éviter la polarisation de l'espace urbain et de favoriser par conséquence l'intégration? Une application du modèle pourrait également constituer à tester différents scénariis comme l'effet de la réhabilitation de quartiers sur les prix fonciers et la composition sociale. Bref, le travail étant encore en cours, les perspectives sont nombreuses . . .

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié les dynamiques d'organisation spatiale des populations à l'intérieur des villes. Nous avons plus particulièrement focalisé notre attention sur l'émergence de ségrégation entre les catégories d'individus. Ceci a été réalisé en partant des comportements individuels comme briques élémentaires de cette organisation. Une approche *bottom-up* a en effet été choisie pour tenter de mieux comprendre la ségrégation socio-spatiale en tant que résultat des décisions individuelles. Cette approche est dans l'esprit de celle de Schelling qui a étudié l'émergence de ségrégation à partir des préférences individuelles seules, et non comme conséquence d'une action organisée (comme une action politique ...). Dans un contexte de métropolisation où la ville est le lieu d'interactions fréquentes entre de nombreux individus, chaque décision individuelle se trouve être fortement affectée par les autres, rendant ainsi la détermination de ces décisions un problème à très grande dimension. Pour autant, ce désordre apparent n'empêche pas l'établissement d'un ordre global. Ce type de raisonnement est tout à fait dans l'esprit de la physique statistique puisque l'essence de celle-ci tient dans la description de phénomènes macroscopiques survenant à partir d'interactions entre particules. Elle a donc constitué un guide naturel pour étudier les systèmes urbains à partir du niveau microscopique (individus) dans cette thèse. Une compréhension des phénomènes collectifs à partir des caractéristiques des entités microscopiques constitue un intérêt en soi. Mais en plus, étant donnée l'explosion urbaine actuelle, la spécialisation sociale des espaces urbains constitue une problématique majeure. En effet, pour rester influentes, les métropoles doivent intégrer des flux importants d'individus en des temps très courts, et également se développer de manière durable.

Une première étape a été de comprendre le modèle de ségrégation de Schelling et la riche phénoménologie qui en découle. En premier lieu, il est apparu nécessaire d'introduire une mesure objective de la ségrégation (dans le sens où elle n'est pas juste évaluée visuellement) qui s'inspire de l'étude d'amas en physique statistique (comme dans le cas de la percolation). Nous avons montré que cette quantité constitue un paramètre d'ordre du modèle. En s'appuyant sur ce résultat, nous avons construit des analogues de quantités thermodynamiques qui se sont révélés pertinents pour étudier le système. En effet, ce dernier exhibe différentes phases, séparées par des transitions qui sont repérables par ces quantités. Ainsi, un diagramme de phase complet du modèle, en fonction de la tolérance des individus et de la densité d'occupation du système, a pu être tracé. Les phases et les transitions ont alors trouvé des interprétations dans un contexte socio-

économique. Nous avons d'une part retrouvé la phase de ségrégation présente dans le modèle originel de Schelling et montré qu'elle apparaissait sur une large étendue des valeurs de la tolérance et de la densité d'occupation. Mais, d'une autre, nous avons mis en évidence une transition soudaine de cette phase ségrégée vers une phase intégrée. Ce type de transition discontinue a été observée empiriquement sous la forme d'un passage rapide d'un quartier mixte (socialement, ethniquement ...) à un quartier polarisé. Le chapitre concernant l'analyse du modèle de ségrégation de Schelling a ainsi été le moyen de comprendre que de simples préférences individuelles pouvaient émerger divers régimes de comportements globaux non triviaux.

L'étape suivante a été d'ouvrir le système afin de prendre en compte les flux migratoires d'une ville. La correspondance établie dans le chapitre 2 entre le modèle de ségrégation de Schelling et le modèle de Blume-Emery-Griffiths nous a offert un moyen direct d'introduire des échanges d'agents entre le système et l'extérieur. En effet, la densité n'est normalement pas contrainte dans le modèle de Blume-Emery-Griffiths. Donc, le relâchement de cette contrainte dans le système multi-agent s'est fait naturellement en incluant l'équivalent d'un potentiel chimique. Ce dernier peut être interprété comme une mesure de l'attractivité du réseau, puisqu'il contrôle indirectement le taux d'occupation. L'ouverture du système a conduit à la formation d'un type de ségrégation qui n'est pas incluse ou seulement marginalement dans le modèle originel de ségrégation de Schelling. En effet, des régions de "no man's land" se forment pour séparer des groupes d'individus différents. Ces zones de "no man's land", tout comme les phases exhibées dans le modèle du chapitre 2, trouvent un écho dans les systèmes urbains réels : la présence de frontières inhabitées est en effet un phénomène visible dans certaines villes. En résumé, ce chapitre a consisté à étendre le modèle de Schelling, de façon à le rendre plus réaliste, par la prise en compte de flux d'agents régulés via le concept d'attractivité.

Finalement, ayant saisi ce que le modèle multi-agent de Schelling, ainsi que l'extension proposée, pouvaient apporter à la compréhension des dynamiques résidentielles, nous avons estimé qu'il était temps de se détacher de ce modèle. Dans le but d'une modélisation plus réaliste, nous avons ainsi estimé que deux notions devaient être intégrées : l'hétérogénéité des agents et celle de l'attractivité. Nous nous sommes alors concentrés sur le marché du logement parisien, en gardant à l'esprit ces remarques. A partir de données issues de la Chambre des Notaires, nous avons d'abord observé quelques tendances globales sur les prix des transactions : une décroissance en partant du centre de Paris et des écarts de prix plus larges (pour des biens comparables) au centre qu'à la périphérie. Le but a alors été de reproduire ces faits stylisés avec un modèle simple. Le modèle a été construit, d'une part, en tenant compte des enseignements de l'étude et du développement du modèle de Schelling, et d'autre part, en s'inspirant des théories économiques sur la localisation résidentielle. Nous avons alors élaboré un modèle discret de choix résidentiel dans lequel : (i) les agents se différencient par leur capacité financière et (ii) les régions du réseau ont différents niveaux d'attractivité dont l'évolution au cours du temps est contrôlée via une équation différentielle. Les simulations de ce système ont permis de reproduire les faits empiriques énoncés précédemment (décroissance des prix, variance). Elles ont également mis en évidence des zones de ségrégation socio-spatiale (à l'instar du modèle de Schelling) qui côtoient des zones de mixité sociale. Ce résultat non-trivial pourrait avoir des interprétations intéressantes en termes de politique urbaine. Enfin, le

système a été mis en équation et une approche analytique de l'état stationnaire à été conduite. Simulations et analyses ont montré un bon accord, ce qui fait du modèle un point de départ intéressant (riche et tractable à la fois) pour des études plus poussées du marché du logement.

Plusieurs pistes existent pour prolonger ce travail. En effet, j'ai pu comprendre à travers cette thèse comment partir d'un modèle relativement abstrait, et s'en détacher progressivement afin d'en construire un nouveau intégrant des caractéristiques essentielles dans le contexte étudié (tout en restant tractable). Le modèle de marché du logement présenté dans le chapitre 4 n'est, en fin de compte, que le commencement de l'application de cette compréhension sur l'investigation des sciences sociales par la modélisation. Ainsi, plusieurs développements de cette approche du marché du logement sont envisagés. A court terme, il est prévu d'analyser une base de données de la Chambre des Notaires plus complète et qui recouvre une plus longue période. Le but étant désormais, plus que de reproduire les faits réels, de tenter de dégager certains mécanismes à leur origine. Plusieurs prolongements de l'étude ont d'ailleurs été évoqués dans la conclusion du chapitre 4. Parmi eux, rappelons l'étude des effets collatéraux de la naissance de quartiers "à la mode" (fluctuations de prix), le test de scenarii comme la réhabilitation de quartiers, le cas du polycentrisme ... En ce qui concerne l'étude du phénomène de ségrégation, on pourrait s'intéresser aussi aux corrélations entre les différentes dimensions de la ségrégation : par exemple, entre la ségrégation économique résidentielle et la ségrégation scolaire.

A plus long terme, l'idée serait d'étudier l'évolution des villes tout en conservant une approche à un niveau microscopique. Nous ne nous sommes en effet concentrés ici que sur des villes de tailles fixes. Pourtant, si la métropolisation est associée au phénomène de ségrégation, elle est aussi caractérisée par l'expansion urbaine. Ce deuxième aspect de la métropolisation serait un point intéressant à étudier du point de vue des individus. Il constitue, de plus, une problématique qui a déjà suscité beaucoup d'intérêt et a notamment été étudiée via des approches liées à la physique statistique [MHS02, BL94] : percolation, modèle DLA (Diffusion-Limited Aggregation).

Les villes américaines, dont la structure est très différente (d'une manière simplifiée, la ville est organisée autour du centre d'affaire au lieu du centre historique), pourraient également être un cas d'étude intéressant pour l'évolution des systèmes urbains. Dans cette optique, de nombreuses données sont accessibles via le Census Bureau.

A mon sens, cette thèse a permis d'établir ma propre réflexion sur la façon dont les sciences sociales pouvaient être investiguées en utilisant la physique statistique et des méthodes analytiques en général. Une des principales conclusions de cette réflexion est que ce type d'approche nécessite un aller-retour permanent entre sciences sociales et physique statistique (ou plus largement, modélisation). Ainsi, cette investigation des sciences sociales doit, selon moi, constituer plus qu'une simple application de la physique statistique hors de son champ d'étude traditionnel. En effet, elle doit se traduire par un travail à l'intersection entre les deux disciplines, le tout étant de réussir à se plonger dans un contexte socio-économique tout en gardant en tête les techniques pertinentes pouvant être employées.

Bibliographie

- [AB02] R. ALBERT A.-L. BARABÁSI, *Statistical mechanics of complex networks*, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).
- [ACJ10] H. ALEXANDRE, F. CUSIN C. JUILLARD, *L'attractivité résidentielle des agglomérations françaises* (2010).
- [Alo64] W. ALONSO, *Location and Land Use* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 1964).
- [AR09] C. APPERT-ROLLAND, *Experimental study of short-range interactions in vehicular traffic*, Phys. Rev. E **80**, 036102 (2009).
- [AS02] C. APPERT L. SANTEN, *Modélisation du trafic routier par des automates cellulaires* (2002).
- [BB10] C. BORGHESI J.-P. BOUCHAUD, *Spatial correlations in vote statistics : a diffusive field model for decision-making*, Eur. Phys. J. B **75**, 395 (2010).
- [BCJS09] D. BURCKEL, F. CUSIN, C. JUILLARD A. SIMON, *Le prix de l'immobilier. L'incidence de la localisation du bien* (2009).
- [BEG71] M. BLUME, V. J. EMERY R. B. GRIFFITHS, *Ising Model for the λ Transition and Phase Separation in He^3 - He^4 Mixtures*, Phys. Rev. A **4**, 1071 (1971).
- [Bel54] W. BELL, *A Probability model for the measurement of ecological segregation*, Social Forces **32**, 357 (1954).
- [Ben93] R. BENABOU, *Workings of a City : Location, Education, and Production*, The Quarterly Journal of Economics **108**, 619 (1993).
- [Ben99] I. BENENSON, *Modeling population dynamics in the city from a regional to a multi-agent approach*, Discrete Dynamics in Nature and Society **3**, 149 (1999).
- [BL94] M. BATTY P. LONGLEY, *Fractal Cities : A Geometry of Form and Function* (Academic Press, 1994).
- [BLH⁺07] L. M. A. BETTENCOURT, J. LOBO, D. HELBING, C. KÜHNERT G. B. WEST, *Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **104**, 7301 (2007).

- [Blu66] M. BLUME, *Theory of the First-Order Magnetic Phase Change in UO₂*, Phys. Rev. **141**, 517 (1966).
- [BOH02] I. BENENSON, I. OMER E. HATNA, *Entity-based modeling of urban residential dynamics : the case of Yaffo, Tel Aviv*, Environment and Planning B : Planning and Design **29**, 491 (2002).
- [Bou01] J.-P. BOUCHAUD, *Power laws in economics and finance : some ideas from physics*, Quantitative Finance **1**, 105 (2001).
- [Bra94] A. BRAY, *Theory of Phase-ordering Kinetics*, Adv. Physics **43**, 357 (1994).
- [Bra96] N. S. BRANCO, *Blume-Emery-Griffiths model on the square lattice with repulsive biquadratic coupling*, Physica A **232**, 477 (1996).
- [Bru06] E. BRUCH, *Residential mobility, income inequality, and race/ethnic segregation in Los Angeles* (2006).
- [BS00] A. BLANK S. SOLOMON, *Power laws in cities population, financial markets and internet sites : scaling and systems with a variable number of components*, Physica A **287**, 279 (2000).
- [Bv82] T. BURKHARDT J. VAN LEEUWEN, *Real-Space Renormalization* (Springer-Verlag, 1982).
- [BW07] S. BENARD R. WILLER, *A wealth and Status Based-Model of Residential Segregation*, The Journal of Mathematical Sociology **31**, 149 (2007).
- [Cap66] H. W. CAPEL, Physica **32**, 966 (1966).
- [CBBV06] V. COLIZZA, A. BARRAT, M. BARTHÉLÉMY A. VESPIGNANI, *The role of the airline transportation network in the prediction and predictability of global epidemics*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **103**, 2015. (2006).
- [CF08] W. A. V. CLARK M. FOSSETT, *Understanding the social context of the Schelling segregation model*, Proceedings of the National Academy of Sciences **105**, 4109 (2008).
- [Cla51] C. CLARK, *Urban Population Densities*, Journal of the Royal Statistical Society. **114**, 490 (1951).
- [CS73] P. CLIFFORD A. SUDBURY, *A Model for Spatial Conflict Clifford, Peter ; Aidan Sudbury*, Biometrika **60**, 581 (1973).
- [CS99] D. CHOWDHURY A. SCHADSCHNEIDER, *Self-organization of traffic jams in cities : Effects of stochastic dynamics and signal periods*, Phys. Rev. E **59**, R1311 (1999).
- [CSA00] D. CHOWDHURY, L. SANTEN A. SCHADSCHNEIDER, *Statistical physics of vehicular traffic and some related systems*, Physics Reports **329** (2000).
- [CVV03] C. CASTELLANO, D. VILONE A. VESPIGNANI, *Incomplete ordering of the voter model on small-world networks*, EPL **63** (2003).
- [DB55] O. DUNCAN B. DUNCAN, *A methodological analysis of segregation indexes*, American Sociological Review (1955).
- [DCM08] L. DALL'ASTA, C. CASTELLANO M. MARSILI, *Statistical physics of the Schelling model of segregation*, J. Stat. Mech. **L07002** (2008).

- [De 90] C. DE BARTOLOME, *Equilibrium and Inefficiency in a Community Model with Peer Group Effects*, Journal of Political Economy **98**, 110 (1990).
- [dPW07] A. DE PALMA, N. PICARD P. WADDELL, *Discrete choice models with capacity constraints : An empirical analysis of the housing market of the greater Paris region*, Journal of Urban Economics **62**, 204 (2007).
- [DRS88] D. DHAR, M. RANDERIA J. P. SETHNA, *Sethna : Griffiths singularities in the dynamics of disordered Ising models*, Europhys. Lett pages 48–5 (1988).
- [Dub05] Y. I. DUBLENYCH, *Exact ground-state diagrams for the generalized Blume-Emery-Griffiths model*, Phys. Rev. B **71**, 012411 (2005).
- [Dur92] S. N. DURLAUF, *A Theory of Persistent Income Inequality*, NBER Working Papers 4056, National Bureau of Economic Research, Inc (1992).
- [Esc06] R. ESCALLIER, *Les frontières dans la ville, entre pratiques et représentations*, Cahiers de la Méditerranée **73** (2006).
- [Fos05] M. FOSSETT, *Measuring segregation in simulation studies : conceptual and practical considerations. Simseg Technical Paper*, Technical report (2005).
- [Fre78] L. C. FREEMAN, *Segregation in social networks*, Sociological, methods & research **6**, 411 (1978).
- [FS03] M. A. FOSSETT R. L. SENFT, *Status and Housing Systems : Rationale and Methods for Generating Status Score Distributions for Ethnic Groups and Area Stratification in Housing Quality in the SimSeg Simulation Model*, Technical report (2003).
- [FT03] M. FUJITA J.-F. THISSE, *Economie des villes et de la localisation* (De Boeck, 2003).
- [FVV07] G. FAGIOLO, M. VALENTE N. J. VRIEND, *Dynamic Models of Segregation in Small-World Networks*, Laboratory of Economics and Management (LEM), Sant'Anna School of Advanced Studies, Pisa, Italy (2007).
- [GA06] M.-M. GERVAIS-AGUER, *Residential choice and territorial attractiveness*, Cahiers du GRES Prospective Analysis **30** (2006).
- [Gab09] X. GABAY, *Power Laws in Economics and Finance*, Annual Review of Economics **1**, 255 (2009).
- [GJ79] Y. GRAFMEYER I. JOSEPH, *L'École de Chicago : naissance de l'écologie urbaine* (Armand Colin, 1979).
- [GJN09] L. GAUVIN, J.VANNIMENUS J.-P. NADAL, *Phase diagram of a Schelling segregation model*, Eur. Phys. J. B **70**, 293 (2009).
- [Gla02] M. GLADWELL, *The Tipping Point : How Little Things Can Make a Big Difference* (Little, Brown and Company, 2002).
- [GN04] C. GUILLUY C. NOYÉ, *Atlas des nouvelles fractures sociales en France* (Autrement, 2004).
- [Hak83] H. HAKEN, *Synergetics, an Introduction : Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology* (New York : Springer-Verlag, 1983).

- [Hen71] L. F. HENDERSON, *The statistic of crowd fluids*, Nature pages 381–383 (1971).
- [HK76] J. HOSHEN R. KOPELMAN, *Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm*, Phys. Rev. B **14**, 3438 (1976).
- [HM95] D. HELBING P. MOLNAR, *Social force modele for pedestrian dynamics*, Physical Review E **51**, 4282 (1995).
- [KH05] M. KOZLOWSKI S. HUSTON, *Urban Design and Boosterism of Property Sub-Markets : Mixed Evidence from Two Inner City Areas in Brisbane* (2005).
- [Koz07] M. KOZLOWSKI, Ph.D. thesis, University of Queensland (2007).
- [KS02] G. KOEHLER J. SKVORETZ, *Preferences and Residential Segregation : A Case Study of University Housing* (2002).
- [LJ03] A. J. LAURIE N. K. JAGGI, *Role of 'Vision' in Neighbourhood Racial Segregation : A Variant of the Schelling Segregation Model*, Urban Studies **40**, 2687 (2003).
- [LS93] A. LIPOWSKI M. SUZUKI, *Roughening transition in the Blume-Emery-Griffiths model*, Journal of Physics A : Mathematical and General **26**, 5695 (1993).
- [MB05] Q. MICHARD J.-P. BOUCHAUD, *Theory of collective opinion shifts : from smooth trends to abrupt swings*, The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems **47**, 151 (2005).
- [MD88] D. MASSEY N. DENTON, *The dimensions of residential segregation*, Social Forces **67**, 281 (1988).
- [MHS02] H. A. MAKSE, S. HAVLIN H. E. STANLEY, *Modelling urban growth patterns*, Nature **377**, 608 (2002).
- [Mil67] S. E. MILLS, *An Aggregative Model of Resource Allocation in a Metropolitan Area*, The American Economic Review **57**, 197 (1967).
- [Moo97] C. Z. MOONEY, *Monte Carlo Simulation (Quantitative Applications in the Social Sciences)* (SAGE Publications, 1997).
- [MPG⁺10] M. MOUSSAÏD, N. PEROZO, S. GARNIER, D. HELBING G. THERAULAZ, *The Walking Behaviour of Pedestrian Social Groups and Its Impact on Crowd Dynamics*, PLoS ONE **5** (2010).
- [MPV87] M. MEZARD, G. PARISI M. A. VIRASORO, *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific Publishing Company, 1987).
- [MSS08] K. MÜLLER, C. SCHULZE D. STAUFFER, *Inhomogeneous and self-organised temperature in Schelling-Ising model*, International Journal of Modern Physics. C pages 385–391 (2008).
- [Mut69] R. MUTH, *Cities and Housing - The Spatial Pattern of Urban Residential Land Use* (The University of Chicago Press, 1969).
- [Neu66] J. V. NEUMANN, *Theory of Self-Reproducing Automata* (University of Illinois Press, 1966).

- [PGS01] V. PLEROU, P. GOPIKRISHNAN H. E. STANLEY, *Symmetry Breaking in Stock Demand*, Quantitative finance papers, arXiv.org (2001).
- [PJ07] R. PANCS N. J.VRIEND, *Schelling's spatial proximity model of segregation revisited*, Journal of Public Economics **91**, 1 (2007).
- [Pre86] V. PRESTON, *A case study of context effects and residential area evaluation in Hamilton, Canada*, Environment and Planning A **18**, 41 (1986).
- [RS03] F. RITORT P. SOLLICH, Adv. Physics **52**, 219 (2003).
- [SA92] D. STAUFFER A. AHARONY, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1992).
- [San92] L. SANDERS, *Système de villes et synergétique* (Economica-Anthropos, 1992).
- [Sch78] T. C. SCHELLING, *Micromotives and Macrobehavior* (W. W. Norton, 1978).
- [Sor03] D. SORNETTE, *Why Stock Markets Crash : Critical Events in Complex Financial Systems* (Princeton University Press, 2003).
- [SS07] D. STAUFFER C. SCHULZE, *Urban and Scientific Segregation : The Schelling-Ising Model*, arXiv :0710.5237 (2007).
- [SW09] A. SINGH D. V. H. WEISS, *Schelling's Segregation Model : Parameters, Scaling, and Aggregation*, Demographic Research **21**, 341 (2009).
- [Tim09] H. TIMMERMANN, *Pedestrian behavior : models, data collection and applications* (Emerald Group Publishing Limited, 2009).
- [VK06] D. VINKOVIC A. KIRMAN, *A physical analogue of th Schelling model*, Proceedings of the National Academy of Science **103**, 19261 (2006).
- [WDAN02] G. WEISBUCH, G. DEFFUANT, F. AMBARD J.-P. NADAL, *Meet, discuss, and segregate !*, Complexity **7**, 55 (2002).
- [Wil08] A. WILSON, *Phase transitions in urban evolution*, Power Laws in Economics and Finance **141** (2008).
- [WLK87] Y.-L. WANG, F. LEE J. D. KIMEL, *Phase diagrams of the spin-1 Ising Blume-Emery-Griffiths model : Monte Carlo simulations*, Phys. Rev. B **36**, 8945 (1987).
- [WT07] W. WILSON R. TAUB, *There Goes the Neighborhood : Racial, Ethnic, and Class Tensions in Four Chicago Neighborhoods and Their Meaning for America* (Vintage Book, New York, 2007).
- [Zha04] J. ZHANG, *A Dynamic Model of Residential Segregation*, Journal of Mathematical Sociology **28**, 147 (2004).

Publications

Publication 1 :

L. GAUVIN, J. VANNIMENUS AND J.-P. NADAL, *Phase diagram of a Schelling segregation model*, Eur. Phys. J. B **70**, 293-304 (2009) .

Publication 2 :

L. GAUVIN, J.-P. NADAL, AND J. VANNIMENUS , *Schelling segregation in an open city : A kinetically constrained Blume-Emery-Griffiths spin-1 system* , Phys. Rev. E **81**, 066120 (2010).

Phase diagram of a Schelling segregation model

L. Gauvin^{1,a}, J. Vannimenus¹, and J.-P. Nadal^{1,2}

¹ Laboratoire de Physique Statistique (LPS, UMR 8550 CNRS-ENS-Paris 6-Paris 7), École Normale Supérieure, Paris, France

² Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales (CAMS, UMR 8557 CNRS-EHESS), École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, France

Received 12 May 2009 / Received in final form 8 June 2009

Published online 8 July 2009 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2009

Abstract. The collective behavior in a variant of Schelling's segregation model is characterized with methods borrowed from statistical physics, in a context where their relevance was not conspicuous. A measure of segregation based on cluster geometry is defined and several quantities analogous to those used to describe physical lattice models at equilibrium are introduced. This physical approach allows to distinguish quantitatively several regimes and to characterize the transitions between them, leading to the building of a phase diagram. Some of the transitions evoke empirical sudden ethnic turnovers. We also establish links with 'spin-1' models in physics. Our approach provides generic tools to analyze the dynamics of other socio-economic systems.

PACS. 89.75.-k Complex systems – 89.65.-s Social and economic systems

1 Introduction

In the course of his study of the segregation effects observed in many social situations, Thomas Schelling introduced in the 1970's [1,2] a model that has attracted a lot of attention ever since, to the point that it may now be considered an archetype in the social sciences. The success of the Schelling model is due to several factors: it was one of the first models of a complex system to show emergent behavior due to interactions among agents; it is very simple to describe, yet its main outcome – that strong segregation effects can arise from rather weak individual preferences – came as a surprise and proved robust with respect to various more realistic refinements; as a consequence, it has possibly far-reaching implications for social and economic policies aiming at fighting urban segregation, considered a major issue in many countries (for recent discussions of the social relevance of the model, see [3] and [4]).

An important recent development is the realization that there exists a striking kinship between this model and various physical models used to describe surface tension phenomena [5] or phase transitions and clustering effects, such as the Ising model [6–9]. This connection is not a rigorous correspondence, still it is more than a mere analogy. It gives novel insight into the behavior of the Schelling model, and it suggests more generally that socio-economic models may be fruitfully attacked drawing from the toolbox of statistical physics [8,10]. Indeed, physicists developed during the last decades powerful methods for situa-

tions where obtaining analytical results seems out of reach. These rely on the quantitative analysis of computer simulation results, guided by some general principles. They are well suited to complex systems such as those encountered in the social sciences and should in particular prove powerful in conjunction with agent-based modeling¹, a growingly popular approach [11].

A key physicist strategy is to characterize the system under study by the *phase diagram* which gives, in the space of control parameters, the boundaries separating domains of different qualitative behaviors. Each type of behavior is qualified by the order of magnitude of a small set of macroscopic quantities, the so-called "order parameters". The main difficulties are to correctly identify the relevant set of order parameters and the associated qualitative behaviors of the system, and to locate and characterize the boundaries, on which "phase transitions" occur in a smooth or discontinuous way. In the present paper, we show how several of the methods evoked above can be adapted and applied to the building of the phase diagram of social dynamics models, taking as paradigm the Schelling segregation model. More precisely, we illustrate our approach on a particular variant of the Schelling model, where the basic variables are the tolerance (to be defined precisely below) and the density of vacant sites. We introduce two order parameters which provide a relevant measure of global segregation, a surrogate of the energy, and ana-

¹ The 'hand-made simulations' done by Schelling by moving pawns on a chessboard can be considered as among the first agent-based simulations ever done in social science.

^a e-mail: laetitia.gauvin@lps.ens.fr

logues of the susceptibility and the specific heat. We also introduce a real-space renormalization method suited to situations with a high density of vacancies. Our analysis shows the existence in the phase diagram of the model of sharp transitions, where relevant quantities have singularities, and we discuss the nature of these transitions. They separate different types of behavior – segregated, mixed, or “frozen” –, in agreement with qualitative observations based on pictures of simulated systems [5]. In addition we make contact with the Blume-Emery-Griffiths [12] and Blume-Capel [13,14] models, which are spin-1 models much studied in relation with binary mixtures containing mobile vacancies and which show a richer behavior than the simple Ising model, with both discontinuous and continuous transitions.

One should insist that most variants of the Schelling segregation model are of kinetic nature: their dynamics cannot be described as the relaxation to an equilibrium characterized by some energy function, except for specific variants (for such exceptions, see e.g. [15] and the discussion below on the links with spin models). Nevertheless, the tools and quantities we introduce by analogy with equilibrium statistical mechanics appear to be quite efficient to characterize the model behaviors. They are sufficiently general and relatively simple to be adaptable to a large variety of social and economic models, as long as these involve interacting agents living in a discrete space or more generally on a social network.

2 Model and qualitative analysis

In Schelling’s original model [1] agents of two possible colors are located on the sites of a chessboard. Each color corresponds to members of one of two homogeneous groups which differ for example by their race, their wealth, etc. A fraction of the sites are blanks, the agents of both colors may move to these vacancies. The neighborhood of an agent comprises the eight nearest and next-nearest sites (Moore neighborhood). If less than $\frac{1}{3}$ of an agent’s neighbors belong to his group, he is discontent – in economic terms his utility is 0; otherwise he is satisfied – his utility is 1. Starting from random initial configurations Schelling displaced discontent agents onto the closest satisfactory vacant sites, if possible. He observed that the system always reached a segregated state, where large clusters of same-color agents were formed. The crucial point is that segregation appears as an emergent phenomenon, in the sense that the collective effect is much stronger than what would be naively expected, as individual agents are happy to live in a mixed neighborhood. This phenomenon proves robust: a similar outcome, with some caveats, is found in variants of the model, even when the utility function is non-monotonous with the fraction of similar neighbors [3].

The model we consider is a variant of the original Schelling model: the agents are satisfied with their neighborhood if it is constituted of a number of *unlike* agents N_d lower than (or equal to) a fixed proportion T of all the agents in the neighborhood. The parameter T is called the

tolerance [1]. The other control parameter of the model is the vacancy density ρ . The randomly chosen agents move one by one to *any* vacancy which has a satisfying neighborhood – this is equivalent to long-range diffusion in physical terms. If no vacancy fits for some agents the latter respectively move back to their initial position. This dynamics is repeated until configurations are reached where the number of satisfied agents is almost stable.

Several comments are in order. The global utility may decrease at times during the process, as the gain for the moved agent can be less than the net loss for his old plus new neighbors [2]. Note also that in the present variant satisfied agents can also move, not just discontent ones. That rule introduces some noise in the dynamics and is useful to avoid a particularity of the original Schelling model noted in [7,15], namely that the system may end up in states where the clusters are large but finite, so that strictly speaking no large-scale segregation occurs. We will see later how the intensity of this noise is actually correlated with the tolerance level T . From a different point of view, since a higher tolerance allows for a larger number of configurations of satisfied agents (higher entropy), this parameter may be thought of as a temperature-like variable. A direct analogy between the Schelling model at tolerance T and the Ising model at temperature T has been put forward in [6,7]. This introduces a probabilistic decision rule for the agents which is not in the spirit of the original model. Here, we keep the decision rules of the original model, introducing randomness only through moves of already satisfied agents. We will however be guided by the qualitative correspondence between the temperature and the tolerance but in a totally different way than in [6,7] as we will see in Section 4.

Finally, let us emphasize that only a finite number of values of T are meaningful, namely $1/8, 1/7, \dots, 6/7, 7/8$. They correspond to the maximal number of tolerated different neighbors divided by the actual number of occupied sites in the neighborhood. Any other value for T is thus equivalent to the closest inferior meaningful value.

2.1 Numerical simulations

Our simulations were performed on a $L \times L$ lattice ($L = 50$, unless otherwise specified) with free boundary conditions. The effects of boundary conditions have been studied in [5] on a slightly different model. For the present model in the large time limit, we do not expect any qualitative difference between the different boundary conditions, as far as the nature of transitions and phases are concerned. We checked this by a limited number of simulations with periodic boundary conditions.

An initial configuration was randomly generated such that the vacancies and the two types of agents were fully mixed. Then the evolution followed the rules described above. In the simulations one time step corresponds to one attempted move per occupied site on average, the usual definition of a Monte-Carlo step.

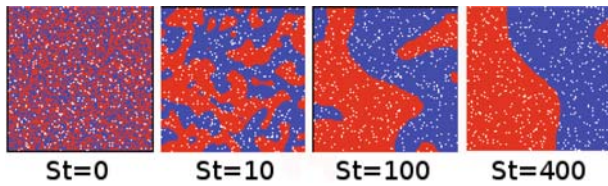


Fig. 1. Evolution of the configuration for a vacancy concentration $\rho = 5\%$ and a tolerance $T = 0.5$ with a network size $L = 100$. St stands for the number of time steps. The red and blue pixels correspond to the two types of agents, the white pixels to the vacancies. The system evolves from a random configuration – where the vacancies and the two types of agents are intimately mixed – to a completely segregated configuration. After just 10 steps there exist two percolating clusters, one of each color, which are very convoluted, fractal-like.

Figure 1 shows the time evolution of a typical configuration, for a vacancy density of 5% and a tolerance $T = 0.5$, which means that agents accept at most half of their neighbors to be different from themselves. One observes the rapid formation of large clusters. After 10 time steps, the proportion of satisfied agents is already very close to 1 (Appendix A, Fig. A.2). It increases slowly thereafter, but the structure of the clusters keeps evolving. They become more and more compact and well separated spatially, their surface gets less corrugated, in a process strongly reminiscent of coarsening effects in alloys [16]. We now consider more general values of the tolerance and the vacancy density. Figure 2 shows configurations obtained after letting the system evolve with the dynamics previously described until it reaches equilibrium. What is meant by equilibrium here may correspond to two different situations: (i) the system does not evolve at all anymore (fixed point); (ii) the system reaches some stationary state: the fluctuations of the studied parameters remain weak during a large number of time steps. In the following all averaged quantities are measured during 30 000 steps after equilibrium is reached.

At small and moderate values of ρ , one observes that:

- for low values of the tolerance the system stays in a mixed state, no large one-color clusters are formed although this would be more satisfactory for the agents. Actually, whatever the initial configuration, the system remains close to the state in which it was created: this is a dynamically frozen state;
- when T increases, at fixed ρ , a drastic qualitative change occurs at an intermediate value of T : the system separates into two homogeneous regions of different colors, segregation occurs. This behavior subsists for an interval of T which depends on ρ ;
- for T larger than a value weakly depending on ρ , the final configuration is again mixed.

For large values of ρ one observes a smooth transition as T increases from a segregated state to a mixed one. We will now give a more quantitative description and characterize the transitions between these different behaviors.

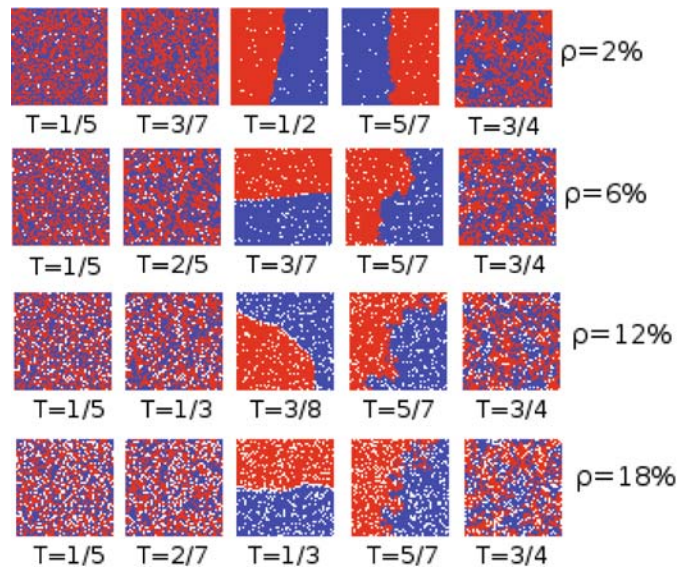


Fig. 2. Configurations obtained at large times for selected values of ρ and T .

3 Quantitative analysis: order parameters

3.1 Main order parameter: a measure of segregation

Though the presence of segregation in a system can be visually assessed, a quantitative way to measure it is necessary, in particular to discuss the nature of the transitions between different states. Different possible measures have been suggested, by Schelling himself and later by various authors [3,15,17], which capture various aspects of the phenomenon. Here we introduce a measure linked to the definition of segregation as the grouping of agents of the same type *and* the exclusion of the other type in a given area. To that effect we consider that two agents belong to the same cluster if they are nearest neighbors (the Moore neighborhood cannot be used here, since Moore clusters of different colors may overlap and be large without segregation occurring). The (mass) size of a cluster c , i.e. the number of agents it contains, will be called n_c . Taking a hint from percolation theory where it plays a central role [18], we introduce the weighted average S of the size of the clusters in one configuration

$$S = \sum_{\{c\}} n_c p_c \quad (1)$$

where $p_c = n_c/N_{tot}$ is the weight of cluster c , $N_{tot} = L^2(1 - \rho)$ being the total number of agents. The maximal size of a cluster is $N_{tot}/2$, so the normalized weighted cluster size s is given by

$$s = \frac{2}{L^2(1 - \rho)} S = \frac{2}{(L^2(1 - \rho))^2} \sum_{\{c\}} n_c^2. \quad (2)$$

The sample average of s after reaching equilibrium will be called the segregation coefficient $\langle s \rangle$. Its value for complete segregation (i.e., only two clusters survive) is 1 and

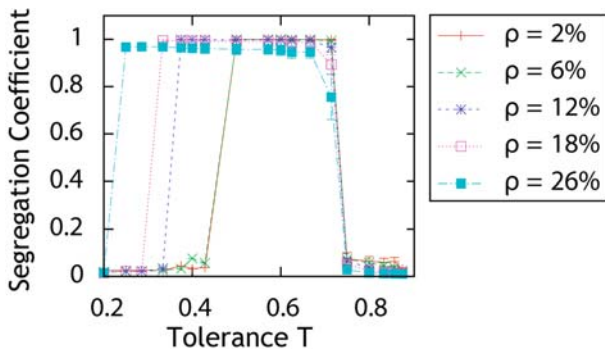


Fig. 3. Segregation coefficient (average of s defined in Eq. (2)) for several values of the vacancy density ρ . The lines linking the points are guides to the eye.

it vanishes if the size of the clusters remains finite when the system dimension L tends to infinity. It may therefore play the role of an order parameter to identify a segregation transition. The variation of the segregation coefficient $\langle s \rangle$ with respect to the tolerance is illustrated in Figure 3 for different values of the vacancy density. The calculations were done using the Hoshen-Kopelman algorithm to labelize the clusters [19].

For each density of vacancies there exist two critical values of the tolerance. At the first one T_f (f for frozen), $\langle s \rangle$ jumps from a very low value to about 1. This signals an abrupt change from a mixed configuration to one with only two clusters (one for each type of agent). A second jump, in the reverse direction, occurs for a larger tolerance T_c . This second value depends slightly on ρ , unlike T_f . The higher the density of vacancies, the smaller the value of T at which the segregation phenomenon appears and the broader the interval of T for which it exists.

For a vacancy density above about 20% the segregation coefficient departs from 1 (Fig. 3), even if the agents are visually segregated (Fig. 4). This is due to the definition of a cluster based only on the four nearest neighbors. In some regions, even if there are agents of one color only the presence of many vacancies may lead to group them into distinct clusters and to miss the existence of a “dilute segregation” situation. In order to identify clusters at a larger scale in such cases we introduce a real-space renormalization [20] procedure. An example of the renormalization process for a site and its neighborhood is illustrated on the left of Figure 4. A renormalized configuration is shown on the right part of Figure 4 (see Appendix A for details on the procedure). The renormalization has a strong effect for high values of the density of vacancies. For $\rho = 50\%$ the configurations are visually segregated for a range of small and medium values of the tolerance but the raw segregation coefficient is very small (Fig. 5, left), whereas after renormalization it is very close to 1 (Fig. 5, right).

We can conclude that, for values of the vacancy density strictly less than 50%, there is a discontinuous transition from the segregated to the mixed state (as shown in Fig. 3 for ρ up to 26%). At $\rho = 50\%$ the transition becomes continuous – as shown in Figure 5 the order parameter has a smoother variation –, and there is no longer any

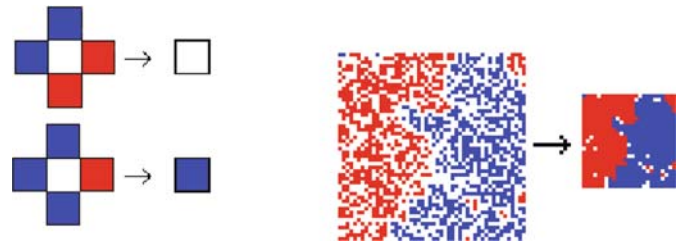


Fig. 4. Example of renormalization. The renormalization is performed on a configuration corresponding to $T = \frac{1}{5}$ and $\rho = 50\%$.

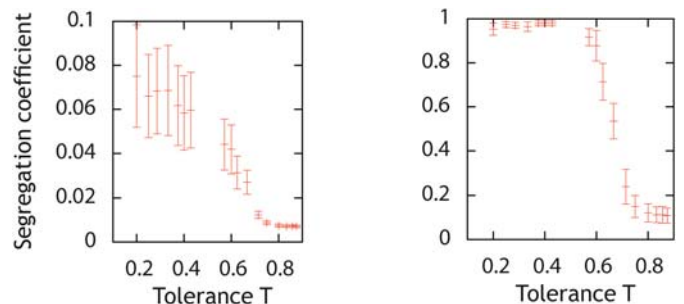


Fig. 5. Segregation coefficient as a function of the tolerance for $\rho = 50\%$: raw data (left) and results for the renormalized systems (right). These suggest that a continuous transition takes place near $T = 0.6$. The error bars were obtained by computing the variance $\sigma_s, \sigma_s^2 = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2$ (same for Fig. 3).

clear transition for vacancy densities above $\sim 56\%$ (not shown). Moreover, the configurations observed at large ρ suggest the existence of a diluted phase of segregation at high vacancy densities: the two types of agents are not mixed but there are domains with many small clusters of a same color in a sea of vacancies. As for the frozen state observed at low T for small ρ , it disappears at some medium value of ρ (compare Fig. 3 with Fig. 5, right).

3.2 A second order parameter: densities of unwanted locations

The segregation coefficient defined above does not allow to distinguish between the mixed state at low tolerance and the one at high tolerance (Fig. 3). However, even if the final configuration is a mixed configuration for both situations, the nature of the two states is not the same. An additional parameter is thus necessary to analyze the results. We introduce the density $\tilde{\rho}_r$ of empty places where the red agents do not want to move (symmetrically $\tilde{\rho}_b$ for blue agents). The plot of $\tilde{\rho}_r$ versus the tolerance (Fig. 6) shows that this quantity undergoes two jumps for each vacancy density ρ . Until the tolerance reaches T_f no empty space is considered attractive by these agents. Between T_f and T_c half of the vacant sites are satisfactory for one type of agents. For T larger than T_c almost all empty spaces are acceptable. A representative configuration for a situation where all moves are permitted is an unordered one, this explains the mixed situation observed at high tolerances. The quantity $\tilde{\rho}_r$ thus allows to characterize

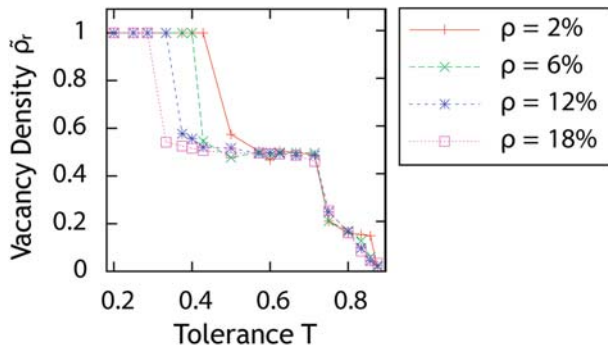


Fig. 6. Density $\tilde{\rho}_r$ of vacancies where the red agents would be unsatisfied, for several vacancy densities. The results for the blue agents are similar. Indeed, they play symmetrical roles in the present model.

the three regimes and to discriminate between the low and high tolerance mixed situations.

Thanks to the quantities defined previously we have identified the regions of segregation. Let us summarize the main results obtained so far. The final configurations are reminiscent of those encountered in spin lattice models with paramagnetic (= mixed state) and ferromagnetic (= segregated state) phases. The segregation coefficient and the density of unilaterally unwanted locations play the role of order parameters. They show discontinuous jumps at some particular values of the tolerance T , indicating the existence of sharp phase transitions. For not too large values of the vacancy density there are two such transitions: at low tolerance, the system goes from a frozen state due to the dynamics that does not allow any movement, to a segregated state. At higher tolerance the system becomes mixed again.

4 Analogues of thermodynamic quantities

4.1 Contact with spin-1 models and analogue of the energy

We now introduce several other useful quantities by analogy with thermodynamic properties studied in statistical physics. To do so, we first exhibit a link with spin-1 models.

One can show that (see Appendix A, had we forbidden the displacement of satisfied agents (as studied in [2,5,8]), the dynamics would have a Lyapunov function, that is a quantity which decreases with time, driving the system towards a fixed point. This function can be written under the form

$$E_S = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^2 c_j^2, \quad (3)$$

where $K = 2T - 1$ and the c_i s are ‘spin-1’ variables taking the value 0 if the location i is not occupied and 1 (resp. -1) if this location is occupied by a red (resp. blue) agent; the sums are performed on the nearest and

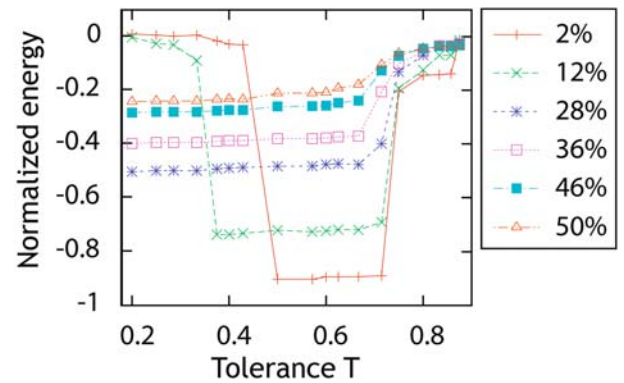


Fig. 7. Variation of the mean of the Blume Capel energy E_{BC} for different values of the vacancy density. The data are normalized by $4L^2(1 - \rho)$.

next nearest neighbors. This function (3) is identical to the energy of the Blume-Emery-Griffiths model [12] under the constraint that the number of sites of each type ($0, \pm 1$) is kept fixed. This spin-1 model, and the Blume Capel model [13,14] corresponding to the particular case $K = 0$, have been used in particular to modelize binary mixtures and alloys in the presence of vacancies. A more detailed analysis of the link between the Schelling model and the Blume-Emery-Griffiths model will be published elsewhere.

In the particular variant considered here, however, the dynamical rules do not lead to the minimization of such a global energy. Yet, it is clearly potentially interesting to consider this quantity E_S as a surrogate of the energy. Compared to the dynamics having E_S as a Lyapunov function, the moves of satisfied agents introduce a source of noise which has some similarity with a thermal noise. Its amplitude may be measured by the fraction of agents who are satisfied. When starting from a random initial configuration this is higher at higher tolerance, hence the tolerance value is an indirect measure of this noise level. This gives another motivation, different from the one already evoked, for taking the analogy between T and a temperature as a guideline for the analysis, as done in what follows.

We find that the average of the second part of the energy E_S essentially consists of a term linear with K (see Appendix A), so that the transitions are more easily located by only plotting the average of the first term of E_S , Figure 7, corresponding to the Blume-Capel part of the energy, $E_{BC} = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j$. It confirms the existence of the two transitions previously evoked: at low tolerance its decrease occurs at the transition from the frozen state to the segregated one, whereas the increase observed at high tolerances corresponds to the transition to the mixed state. Such abrupt variations are characteristic of a discontinuous – in thermodynamic language “first order” – transition. Moreover we note from Figure 7 that as the vacancy density increases the energy varies less abruptly: this signals a change in the nature of the transition, from discontinuous to continuous (‘second order’), as will be discussed below.

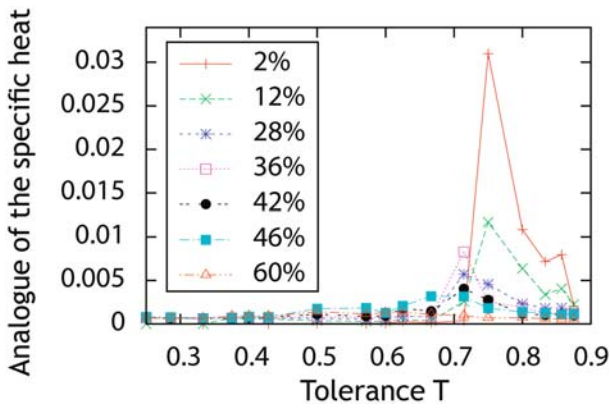


Fig. 8. Variation with the vacancy density of the fluctuation coefficient C_s .

4.2 Analogue of the specific heat

Since the energy analogue proved fruitful, an analogue of the specific heat may also be expected to give useful information. However, here we cannot make use of the thermodynamic definition $C_s = dE_S/dT$ since only a finite number of values of the tolerance have physical meaning. In order to work with a well-defined quantity at fixed tolerance T we remark that the specific heat is related to the energy fluctuations at equilibrium via the so-called fluctuation-dissipation theorem. In the present context the relevant formulation of this important theorem is:

$$C_s = \frac{\langle E_S^2 \rangle - \langle E_S \rangle^2}{T^2} \quad (4)$$

where the notation $\langle \rangle$ means an average over the configurations taken by the system after reaching equilibrium, and T is the tolerance.

We will call C_s the *fluctuation coefficient*. It plays a role analogous to the volatility index measuring price fluctuations in financial markets.

According to Figure 8 the fluctuation coefficient has a well-marked peak at the “segregated-mixed” transition. This peak flattens out and tends to disappear as the vacancy density increases, confirming the disappearance of the “segregated-mixed” transition. On the other hand this fluctuation coefficient, null at very low tolerance, has a slight increase at the “frozen-segregated” transition. The jump in the energy E_S does not show up in the fluctuation coefficient C_s , indicating that the fluctuation-dissipation theorem is strongly violated, as typically observed in dynamic transitions in glassy or kinetically constrained systems [22].

4.3 Analogue of the susceptibility

In the same vein one would like to define the susceptibility, a quantity which is to the order-parameter what the specific heat is to the energy. Here, having proposed the segregation coefficient as the main order parameter, we define the analogue of the susceptibility through the

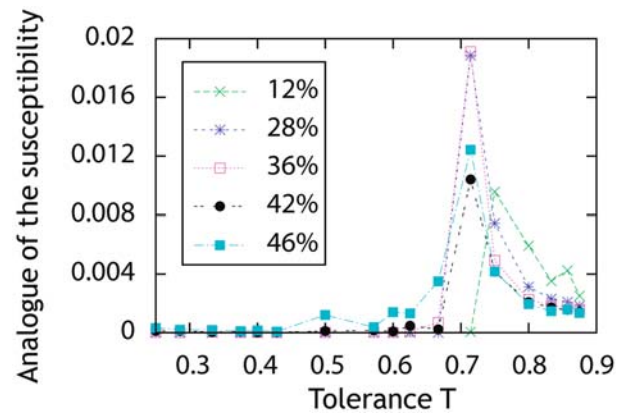


Fig. 9. Evolution with the vacancy density of χ_s , analogue of a susceptibility.

fluctuation-dissipation relation involving the order parameter fluctuations

$$\chi_s = \frac{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2}{T} \quad (5)$$

where s is defined by equation (2). As can be seen in Figure 9 this susceptibility presents a peak at the second transition which is more conspicuous for high vacancy densities than the one for C_s . This peak does not exist anymore for high vacancy densities in agreement with the disappearance of the transition evoked in the previous part.

5 Phase diagram

5.1 Representation of the phase diagram

We are now in position to build the full (ρ, T) phase diagram. We have seen that the system can end up in four possible states:

- (i) segregated state;
- (ii) mixed state;
- (iii) diluted segregation state;
- (iv) frozen state.

The domains of existence of these ‘phases’, represented in the phase diagram, Figure 10, can be briefly described as follows:

- (1) for vacancy densities below 46% a dynamical transition line $T_f(\rho)$ separates the frozen state from the segregated one;
- (2) above this line the segregated state exists in a large domain bounded by a transition line $T_c(\rho)$;
- (2a) This line is almost at a constant value of the tolerance for $\rho \lesssim 50\%$, and of a discontinuous nature (first-order like) up to $\rho = 50\%$; it separates the segregated state from the mixed state;
- (2b) at $\rho = 50\%$, the transition becomes continuous, and the line becomes almost parallel to the T axis; there it separates the segregated state from a diluted segregated one;

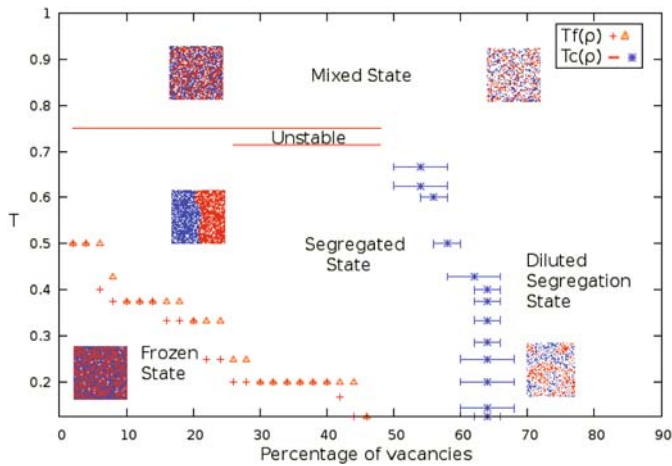


Fig. 10. Phase diagram of the studied Schelling model. The blue crosses correspond to the continuous transition between the segregated and dilute segregated states. The red triangles and pulses are the upper and lower limits of the transition between the frozen and segregated states. The red lines separate the segregated state from the mixed one. Note that the tolerance T only takes discrete values.

- (3) beyond $T_c(\rho)$, at high values of the vacancy density one goes gradually (no sharp transition) from the diluted segregated state at low T to the mixed one at high tolerance values. We now discuss in more detail the various phases and transitions involved.

5.2 Transition frozen state/segregated state

At low tolerance there is a transition where the system abruptly switches from a frozen to a segregated state. The analogues of the specific heat and of the susceptibility do not have a singular behavior in the vicinity of the transition (Figs. 8 and 9). As we have seen, this is explained by the dynamical nature of this transition – in contrast to the other transitions which are thermodynamical-like. We locate the transition by looking at the jump of the segregation coefficient, both at fixed ρ , increasing T (Fig. 3), and at fixed T , increasing ρ (Fig. 11). As the density of vacancies ρ increases, the transition occurs for lower values of the tolerance. When this density is higher than 46% this line of transition does not exist anymore.

We remark that for a given vacancy density, the exact value of the tolerance at which the frozen-segregated state transition takes place may depend on the order in which the agents are chosen during the dynamics (see Appendix A, Tab. A.1, for details). Let us notice that inside this frozen phase, any initial configuration, segregated or not, with randomly distributed vacancies is very close to a stationary state.

5.3 Transition segregated state/mixed state

The segregated phase is upper bounded by a transition line where the clusters disappear and the two types of agents become mixed.

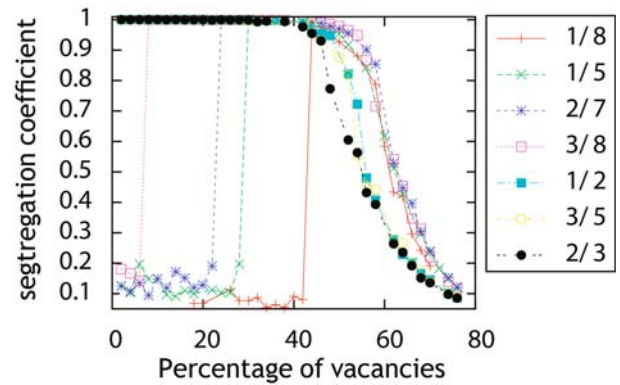


Fig. 11. Segregation coefficient for different values of the tolerance versus the vacancy density.

- This change is abrupt for vacancy densities $\rho < 26\%$. Indeed, the plots of the segregation coefficient against the tolerance for values of ρ in this range show a jump from ~ 1 to ~ 0 (Fig. 3).
- For $26\% \leq \rho \leq 48\%$, the mixed state is reached after an intermediate state where the system has no dynamical stability: it can oscillate between several acceptable configurations, leading to large fluctuations in the segregation coefficient.
- For a small range of values, $50\% \leq \rho \lesssim 56\%$, the segregated states continuously become mixed states. There, the line abruptly turns downward. This area of the phase diagram, with a change in the nature of the transition and a sudden downturn of the transition line, is more difficult to study because of the discreteness of T values and possible finite size effects.

For a given ρ the value of the tolerance at which the segregated-mixed transition occurs can be located from the position of the peak of the analogue of either the specific heat or of the susceptibility (Figs. 8 and 9). In order to complete the study of this transition, we have considered the distribution of the segregation coefficient for several values of T around the transition at different vacancy densities (see Appendix A). This illustrates the three ways to go from a segregated to a mixed state.

5.4 Transition segregated state/diluted segregation state

As just mentioned, the boundary $T_c(\rho)$ of the segregated phase becomes weakly dependent on the vacancy density ρ when ρ becomes slightly larger than 50%. To locate the transition line we plot for several values of T the variation with ρ of the segregation coefficient $\langle s \rangle$ (Fig. 11), and of the analogue of the susceptibility χ_s (see Appendix A Fig. A.4). At high vacancy densities, beyond the transition line, the nature of the phase is different at high and low tolerances. As we have seen, at high tolerance values there is a mixed state, whereas at low tolerance one finds a diluted segregation state that leads to very small segregation coefficients. Indeed, at high ρ (> 0.592746), the

percolation threshold [18]), the high probability of percolation of vacancies prevents the forming of large clusters. In this high vacancy density domain, we do not find any sharp transition from the diluted segregated state to the mixed one, but only a gradual change as the tolerance increases.

5.5 Comparison with the Blume-Capel phase diagram

It is instructive to compare the phase diagram with the one of the Blume-Capel model [13,14] evoked above (see Appendix A). For this model a transition line separates a ferromagnetic (segregated) phase from a domain where one goes gradually from a paramagnetic (mixed) phase to a phase where the vacancies predominate (diluted segregation). This line changes as well its nature from discontinuous to continuous. However, it is the ferromagnetic-paramagnetic transition which is second order, whereas the segregated-mixed transition is first order-like (the change is abrupt). Conversely, the transition between the ferromagnetic and the high vacancy density phases is first order, whereas the corresponding transition in the Schelling model is continuous.

6 Conclusion

We analyzed a variant of the Schelling model from a physical point of view. We have introduced a measure of segregation and analogues of physical quantities such that the fluctuation coefficient and the susceptibility where, remarkably, the analogy between the tolerance and the temperature proves fruitful. These quantities allowed to identify the different phases of the system and characterize the transitions between them (thermodynamical or dynamical like, discontinuous or continuous). The main results have been summarized as a phase diagram in the (ρ, T) -plane where ρ is the vacancy density and T the tolerance. Considering larger neighborhoods would allow to have a larger set of values for T and approach a continuous model. A more precise location of the phase boundaries, if needed, would require computationally costly simulations of larger network sizes.

We have seen in particular that the segregated phase occupies a large domain (up to a tolerance T as high as $3/4$), confirming Schelling's intuition on the genericity of the segregation phenomenon. The abrupt transition from a mixed to a segregated state could be interpreted as the tipping point – more precisely the rapid ethnic turnover – observed and studied by social scientists [23]. Besides, the diluted segregation state might be relevant for low-density suburban areas. The frozen state would probably be unstable in a more realistic model allowing for migratory flows of discontent agents to other cities.

The tools and methods presented here could be used to study other Schelling-like models, in particular variants with heterogeneity. The study of cases with asymmetry between the agents, which could lead to more complex dynamics, will need additional tools. Clearly future works

should focus on models grounded on empirical data and where the agent decision rules take into account relevant socio-economic factors [4]. Yet it is known from a large body of work in statistical physics that one needs also to explore more widely the space of models in order to identify what makes a particular behavior specific or generic. As already mentioned our goal here was to provide generic tools for the analysis of models of socio-dynamics. The variant of Schelling's segregation model we have studied as a test of our approach has the advantage of being identical or very close to variants already studied in the literature and to allow links with known – and non trivial – spin models.

L.G. is supported by a fellowship from the French Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, allocated by the *Ecole doctorale de Physique de l'UPMC – ED 389*. J.V. and J.P.N. are CNRS members. This work is part of the project 'DyXi' supported by the SYSCOMM program of the French National Research Agency (grant ANR-08-SYSC-008).

Appendix A

A.1 Numerical simulations

All the simulations except in Figure 1 were performed on a 50×50 lattice. We tested all the meaningful values of the tolerance T at even values of the vacancy percentage ρ . With this choice for ρ , the number of vacancies and of agents of two colors are exactly equal to the integers $\rho * L^2$ and $L^2(1 - \rho)$. To take only even values of the vacancy percentage ρ also allows to moderate the computational cost.

A.2 Real-space renormalization procedure

To identify clusters at a larger scale, we performed the following renormalization procedure. We divide the lattice into squares of 4 sites. On each of these little squares, we look at the bottom right site:

- if this site and its neighborhood comprise a majority of blue (resp. red) agents, the 2×2 square is replaced by a (single) blue (resp. red) agent;
- if this site and its neighborhood consist of a majority of vacancies, the 2×2 square is replaced by a vacancy;
- if there is no majority, the 4-site square is replaced by an agent of the same type as the bottom right site (or by a vacancy if that site is empty).

A.3 Contact with spin-1 models

A.3.1 Energy of Schelling models

For completeness we present here a correspondence, discussed elsewhere [24], between Schelling segregation models and spin-1 models.

Table A.1. “Frozen state-segregated state” transition line. The limits between which the system may end in a frozen state or segregated state depending on the order of the dynamics are obtained by performing 100 tests on which we look at the percentage of “frozen states”. If for given T and ρ , the percentage of frozen states (resp. segregated states) is very high ($>95\%$), we consider that the corresponding equilibrium configuration is a frozen one (resp. segregated).

ρ	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%
T	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5} - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8} - \frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3} - \frac{3}{8}$
ρ	18%	20%	22%	24%	26%	28%	30%	32%
T	$\frac{1}{3} - \frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{5} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
ρ	34%	36%	38%	40%	42%	44%	46%	
T	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{5}$	$\frac{1}{8} - \frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	

One can associate to each site i of the lattice a spin variable c_i , taking the value 0 if the location is not occupied, and 1, resp. -1 , for red, resp. blue, occupied sites. With these ‘spin-1’ variables the satisfaction condition for location i (including the case where i is vacant) can be written as:

$$c_i \sum_{j \in (i)} c_j + (2T - 1)c_i^2 \sum_{j \in (i)} c_j^2 \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

where $j \in (i)$ means j belonging to the neighborhood of site i . This suggests to define, as an analogue of the energy,

$$E_S = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^2 c_j^2, \quad (\text{A.2})$$

where $K = 2T - 1$ ($-1 \leq K \leq 1$), and the index S stands for “Schelling”.

For the Schelling original model, as well as for other variants where only unsatisfied agents can move, one can show [24] that the energy E_S is indeed a Lyapunov function, that is a quantity which decreases with time during the dynamics, driving the system towards a fixed point. Note that the energy is not proportional to the global utility $U = \sum_i u_i$, where u_i is 1 if agent i is satisfied, and 0 otherwise.

This function E_S , (3), is identical to the energy of the Blume-Emery-Griffiths model [12] under the constraint that the number of sites of each type ($0, \pm 1$) is kept fixed. This spin-1 model, and the Blume Capel model [13,14] corresponding to the particular case $K = 0$, have been used in particular to modelize binary mixtures and alloys in the presence of vacancies. In the standard versions of these models, the energy contains the additional term $D \sum_i c_i^2$ (the sum being over all the sites), so that the total number of vacancies is fixed only in average through the Lagrange multiplier D :

$$E_{BEG} = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^2 c_j^2 + D \sum_i c_i^2. \quad (\text{A.3})$$

The limit $D \rightarrow -\infty$ corresponds to the absence of vacancies, i.e. the Ising model. Large positive D corresponds

to high vacancy densities. The term D does not appear in the energy of the Schelling model, not because it corresponds to $D = 0$, but because the density of vacancies is fixed. The fact that E_S is a Lyapunov function for the Schelling model where only unsatisfied agents move, means that such a model is equivalent to a Blume-Emery-Griffiths model without thermal noise (zero temperature), and under kinetic constraints (e.g., no direct exchange between two agents of different colors is allowed).

The standard order parameters for these spin-1 systems are the magnetization $(1/N) \sum_i c_i$ and the quadrupole moment, $(1/N) \sum_i c_i^2$, but here these quantities which are, respectively, the difference between the total numbers of agents of different colors, and the density of occupied sites, are kept fixed by construction in the Schelling model.

A.3.2 Blume-Capel model: phase diagram

A striking similarity exists between the phase diagram in the (ρ, T) plane of the variant of the Schelling model studied here, and the one of the Blume-Capel model [13,14] in the (D, T) plane – where T is the temperature and D the parameter fixing in average the vacancy density.

The Blume-Capel phase diagram, computed for the Moore neighborhood, is shown in Figure A.1, and should be compared with the one in Figure 10. The red part of the transition line corresponds to a first-order (discontinuous) transition, and the blue part to a second-order (continuous) transition. Below the transition line the system is in an ordered, ferromagnetic, state. Above the transition line, at low and medium values of D , one finds the unordered, paramagnetic, phase, and at large D and low temperature, a vacancy dominated phase. In the latter phase, the typical configurations are not strictly comparable to the ones of the corresponding phase in the Schelling model: in the spins models, the clusters are compact whereas it is not the case in the Schelling model. In the Blume-Capel model there is no frozen phase, because there is no constraint on the dynamics.

The transition line in the Blume-Capel model, shown in Figure A.1, has been built up by plotting for fixed

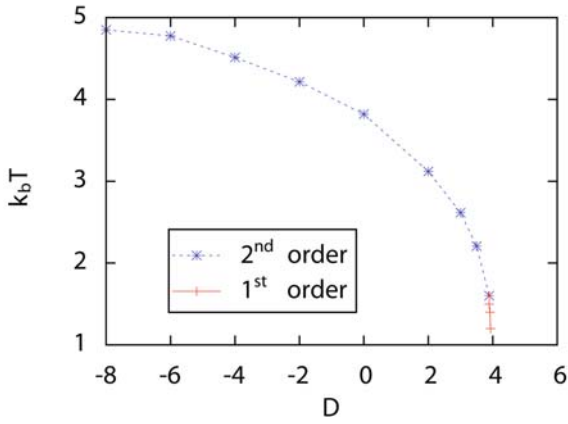


Fig. A.1. Phase Diagram of the Blume Capel model with first and second neighbours interactions (Moore neighborhood). The simulations were performed using the Heat Bath algorithm.

temperature T (resp. fixed D depending on the area of the diagram dealt with) the magnetization versus D (resp. T) for three different sizes, and by looking at the value of D (resp. T) corresponding to the intersection of the three curves.

A.4 Complementary analysis of the segregation model

A.4.1 Density of satisfied agents

The density of satisfied agents is a good indicator of the convergence of the system towards its stationary state (whenever it exists), in which the fraction of satisfied agents is constant. Figure A.2 shows the evolution of the density of satisfied agents for a case with low vacancy density $\rho = 5\%$ and moderate tolerance $T = 0.5$. We note that, in the unstable part of the phase diagram (close to T_c at $26\% \leq \rho \lesssim 50\%$), the density of satisfied agents is stationary: this shows that, more generally, the convergence of the fraction of satisfied agents does not guarantee that the system itself has reached a steady state.

A.4.2 Unwanted vacancies

The variation with the tolerance of the unilaterally unwanted density of vacancies $\tilde{\rho}$ (Fig. A.3) confirms that the mixed situation observed for low values of T is due to the dynamics. The agents reject all the empty spaces, consequently the system cannot evolve. At tolerances corresponding to the frozen state – segregated state transition, the situation reverses. All vacancies are acceptable for at least one type of agents.

A.4.3 Analogue of the susceptibility

The analogue of the susceptibility for the Schelling model is given by:

$$\chi_s = \frac{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2}{T}, \quad (\text{A.4})$$

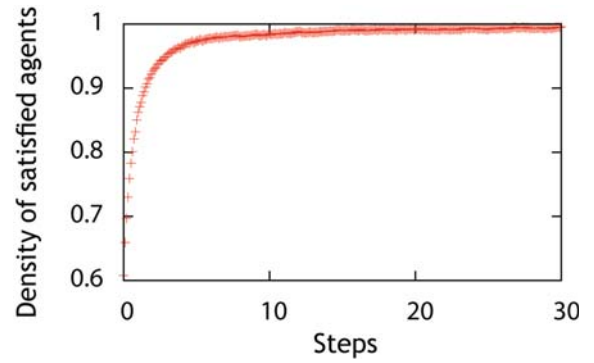


Fig. A.2. Evolution of the proportion of satisfied agents versus the number of steps for $\rho = 5\%$ and $T = 0.5$. About 60% of the agents are initially satisfied. The dynamics quickly allows the agents to be almost all satisfied, after only 10 steps the density of satisfied agents is very close to 1. It increases slowly afterwards, with small fluctuations due to the possibility for satisfied agents to keep moving.

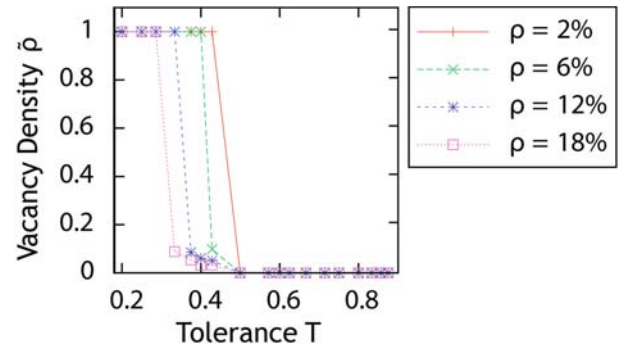


Fig. A.3. Density $\tilde{\rho}$ of vacancies where no type of agent would be satisfied, for several values of the vacancy density.

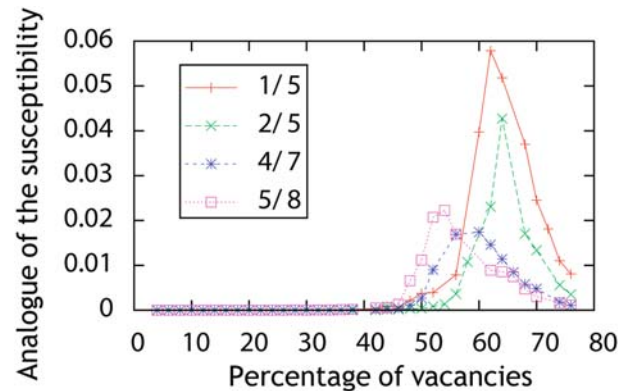


Fig. A.4. Analogue of the susceptibility for different values of the tolerance versus the vacancy density. The averages have been computed on 30 000 simulations after equilibrium.

where the notation $\langle \rangle$ means an average over the configurations taken by the system after reaching equilibrium, and T is the tolerance. These fluctuations allow to locate the transition at fixed tolerance T as the density of vacancies increases.

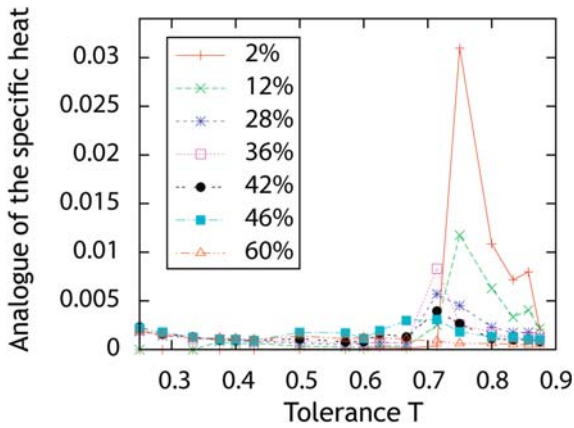


Fig. A.5. Variation of the analogue of the specific heat obtained from the Blume-Capel energy for different values of the vacancy density.

A.4.4 Blume-Emmery-Griffiths energy vs. Blume-Capel energy

We have shown that the appropriate energy related to the Schelling model is the Blume-Emmery-Griffiths energy at constant number of sites of each type (red and blue agents, and vacancies), defined by (A.2). However we find that the analysis of the transitions can be done as well from the Blume-Capel energy, that is here, since the number of sites of a given type is fixed (no D -term):

$$E_{BC} = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j. \quad (\text{A.5})$$

Note that in the absence of vacancies, $c_i = \pm 1$ so that E_{BC} would reduce to the standard Ising energy. One finds that the fluctuation coefficient obtained with the Blume-Capel energy, defined by $C'_s = \frac{\langle E_{BC}^2 \rangle - (E_{BC})^2}{T^2}$ and shown in Figure A.5, is very similar to the one obtained from the Schelling energy E_S . Actually, in the evolution of the mean of the total energy E_S , shown in Figure A.6, one recognizes the contribution from the Blume-Capel energy E_{BC} (shown in Fig. 7), simply increased by an additional term linear in $K = 2T - 1$. These observations can be explained by the fact that the difference between these two energies is proportionnal to the numbers of pairs of occupied sites of which the fluctuations are weak. Indeed, one observes that the vacancies remain approximately uniformly distributed. This comes from the fact that each agent searches for locations where the number of unlike neighbors is inferior to a given *proportion* of the number of neighbours. Note that the vacancies would not be uniformly placed if each agent wanted less than a fixed *number* of unlike neighbors, as considered in [15].

A.4.5 Segregation coefficient

In order to get more information about the segregated state-mixed state transition, it is instructive to look at the distribution of the segregation coefficient $\langle s \rangle$ in the

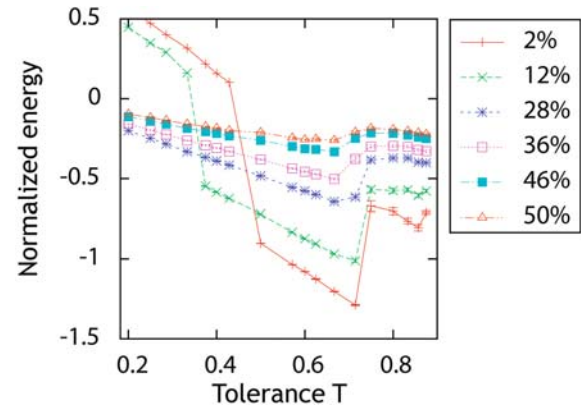


Fig. A.6. Variation of the mean of the energy E_S for different values of the vacancy density. The data are normalized by $4L^2(1 - \rho)$.

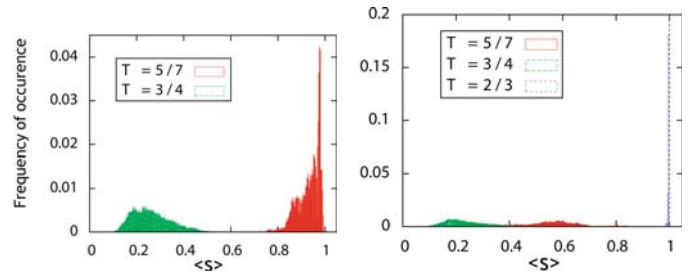


Fig. A.7. Distributions (normalized by the number of measures) of the segregation coefficient for $\rho = 24\%$ and $\rho = 28\%$.

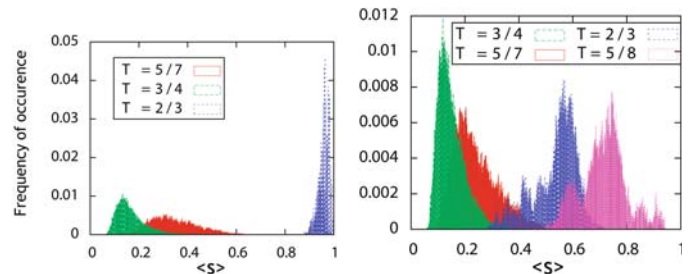


Fig. A.8. Distribution of the segregation coefficient for $\rho = 44\%$ and $\rho = 50\%$.

vicinity of the transition (Figs. A.7 and A.8). The distributions have been obtained from 30 000 calculations of the segregation coefficient.

At vacancy density ρ lower than 26%, the transition is well marked. This distribution is centered near 0 at the transition point whereas it is centered near 1 at the closest inferior value of the tolerance. Indeed, the distributions of the segregation coefficient for successive tolerances around the transition are clearly separated for the vacancy density $\rho = 24\%$ (left Fig. A.7).

As ρ increases, the transition is achieved via an intermediate state. One distinguishes three kinds of distributions (Figs. A.7, right and A.8, left) which are centered around a very small value (~ 0.2), peaked close to 1, or centered around an intermediate value. The latter case corresponds to a broader distribution.

Once the vacancy density is greater than 50%, all the distributions of the segregation coefficient begin to blend together (see Fig. A.8, right). This confirms that the increase in the vacancy density is accompanied by a change in the nature of the transition between 46% and 50%, which becomes continuous.

A.4.6 “Frozen-segregated” transition line

The transition line between the frozen and the segregated states has been determined by locating the jump of the segregation coefficient $\langle s \rangle$ from ~ 0 to ~ 1 . The initial configuration and the order of choice of the agents, when the dynamics is applied, create fluctuations on the limit between the two states. Actually, for some sets of parameters (ρ, T) , the system may end either in blocked or in segregated configurations depending on the order of choices of the agents. One cannot exclude that this unstable domain is due to finite size effects, hence disappearing in the infinite network size limit. However, it is not surprising to find such a metastability effect close to a discontinuous transition.

References

1. T. Schelling, *Math. Sociol.* **1**, 143 (1971)
2. T. Schelling, *Micromotives and Macrobehavior* (W.W. Norton, New York, 1978)
3. N. Vriend, R. Pancs, *J. Publ. Econ.* **91**, 1 (2007)
4. W. Clark, M. Fossett, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **105**, 4109 (2008)
5. D. Vinkovic, A. Kirman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **103**, 19261 (2006)
6. K. Müller, C. Schulze, D. Stauffer, *Int. J. Modern Phys. C* **19**, 385 (2008)
7. D. Stauffer, S. Solomon, *Eur. Phys. J. B* **57**, 473 (2007)
8. M. Marsili, L. Dall’Asta, C. Castellano, *J. Stat. Mech.* L07002 (2008)
9. G. Odor, *Int. J. Modern Phys. C* **19**, 393 (2008)
10. C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* (2007)
11. *Adaptive Agents, Intelligence and Emergent Human Organization: Capturing Complexity Through Agent-Based Modeling* (2002), *Proc. of the Arthur M. Sackler Colloquium*, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99** (2002) suppl. 3
12. M. Blume, V.J. Emery, R.B. Griffiths, *Phys. Rev. A* **4**, 1071 (1971)
13. M. Blume, *Phys. Rev.* **141**, 517 (1966)
14. H.W. Capel, *Physica* **32**, 966 (1966)
15. H. Weiss, A. Singh, D. Vainchtein (2007), [arXiv:0711.2212v1](https://arxiv.org/abs/0711.2212v1) [nlin.AO]
16. A.J. Bray, *Adv. Physics* **43**, 357 (1994)
17. N.J. Vriend, G. Fagiolo, M. Valente, *J. Economic Behavior and Organization* **64(3-4)**, 316 (2007)
18. D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1992)
19. J. Hoshen, R. Kopelman, *Phys. Rev. B.* **14**, 3438 (1976)
20. *Real-Space Renormalization*, edited by T.W. Burkhardt, J.M.J. Van Leeuwen (Springer-Verlag, New York, 1982)
21. H.E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1971)
22. F. Ritort, P. Sollich, *Adv. Physics* **52**, 219 (2003)
23. W. Wilson, R. Taub, *There Goes the Neighborhood: Racial, Ethnic, and Class Tensions in Four Chicago Neighborhoods and Their Meaning for America* (Vintage Book, New York, 2007)
24. L. Gauvin, J.-P. Nadal, J. Vannimenus, in preparation (2009)

Schelling segregation in an open city: A kinetically constrained Blume-Emery-Griffiths spin-1 system

Laetitia Gauvin,^{1,*} Jean-Pierre Nadal,^{1,2} and Jean Vannimenus¹

¹Laboratoire de Physique Statistique (LPS), UMR 8550 CNRS, ENS, UPMC Univ. Paris 6 and Univ. Paris Diderot Paris 7—Ecole Normale Supérieure, Paris, France

²Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales (CAMS), UMR 8557 CNRS EHESS, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris, France

(Received 23 February 2010; published 25 June 2010)

In the 70s Schelling introduced a multiagent model to describe the segregation dynamics that may occur with individuals having only weak preferences for “similar” neighbors. Recently variants of this model have been discussed, in particular, with emphasis on the links with statistical physics models. Whereas these models consider a *fixed* number of agents moving on a lattice, here, we present a version allowing for exchanges with an external reservoir of agents. The density of agents is controlled by a parameter which can be viewed as measuring the attractiveness of the city lattice. This model is directly related to the zero-temperature dynamics of the Blume-Emery-Griffiths spin-1 model, with kinetic constraints. With a varying vacancy density, the dynamics with agents making deterministic decisions leads to a variety of “phases” whose main features are the characteristics of the interfaces between clusters of agents of different types. The domains of existence of each type of interface are obtained analytically as well as numerically. These interfaces may completely isolate the agents leading to another type of segregation as compared to what is observed in the original Schelling model, and we discuss its possible socioeconomic correlates.

DOI: [10.1103/PhysRevE.81.066120](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.066120)

PACS number(s): 89.75.-k, 89.65.-s

I. INTRODUCTION

In the 1970's, Schelling [1,2] introduced a model aiming at simulating the interactive dynamics of individuals having specific requirements regarding their neighborhood. This model was based on the intuitive idea that people of a same type (e.g., White/Black) have some preference for living in a neighborhood where the fraction of residents of their own type is not too small. Empirical studies have given some support to this hypothesis [3,4], even though such preferences might be the indirect consequence of other factors (e.g., blacks may choose segregated neighborhoods because they have access to social support). In Schelling's model, agents of two groups with different socioeconomic features coexist on a chessboard-city. They individually move to maximize a utility function that depends on their tolerance to different neighbors. With such dynamics, a phenomenon of segregation emerges even when the agents are not especially intolerant. This collective behavior not foreseen in the individual choices has been considered in social science as the paradigm of global phenomena emerging from local social interactions. Moreover, this model and its outcomes present similarities to physical systems as noted, in particular, in [5–7]. The simplicity of the model combined with its wealth of results, its interdisciplinarity, are obvious reasons why it has drawn so much attention among scientists.

In the recent years, numerous variants of Schelling's segregation model have been considered. Much as for the Ising model in physics, Schelling's segregation model in social science is the basis for exploring the effect of various factors on the collective dynamics. Among the variants studied, dif-

ferent individual preferences have been dealt with. Schelling initially proposed a binary utility function to summarize the preferences of the agents, separating their neighborhoods in only two groups: satisfying or not, depending on the fraction of nearby agents of their own type. A further step was to consider other utility functions that may even be continuous. In particular, it has been shown that segregation may prevail even with agents having a strict preference for a mixed neighborhood [8,9], i.e., with an utility function which is maximal when there are equal numbers of similar and different neighbors. The influence of the vacancy density on the results has also been widely studied [10,11]. However, all these models deal with closed systems: a fixed number of agents of each type is allowed to move within the city lattice. Schelling himself [2] has discussed a case of segregation with an open city, but within a different setting: he considered a mean-field type model with a city reduced to a single global neighborhood, with a finite number of agents of two types who can only decide either to enter or leave the city, the focus being on the effect of heterogeneity—each agent having his own tolerance threshold. To our knowledge, there is no study of Schelling's segregation in an open city with local neighborhoods [12]. Adding the possibility for external moves, one has thus a non fixed vacancy density.

Recently, we have shown [13] that Schelling's model is linked to the Blume-Emery-Griffiths (BEG) spin-1 model with a fixed density of vacancies and with kinetic constraints. The BEG model [14] has been used, in particular, to modelize binary mixtures and alloys in the presence of vacancies. Starting from this correspondence, one can propose a natural generalization of Schelling's model on an open domain, with a parameter playing the role of a chemical potential for the number of vacancies. The new dynamical system then corresponds to the zero-temperature dynamics [15–17]

*laetitia.gauvin@lps.ens.fr

of a Blume-Emery-Griffiths model under kinetic constraints. The parameter controlling the vacancy density can be interpreted as measuring the attractivity or hostility of the urban environment. Let us remark that the absence of temperature keeps the model close to the spirit of the original Schelling segregation model which considers deterministic decision processes.

As we will see, a striking feature of this model is to display a variety of interfaces between clusters of agents of a same type. There may be direct contacts between agents of different types as well as lines of vacancies isolating clusters of agents (lines that we henceforth call borders). Such lines have already been observed in some variants of Schelling's model, though in a marginal way since the vacancy density was fixed and therefore could not adjust according to the control parameters to create homogeneous lines. Here, we exhaustively study the shapes and sizes of these borders and how they are related to the value of the control parameters. Among the relevant points, the absence of contacts between the two types of agents may be considered another kind of segregation, one that is not encompassed by the classical Schelling model.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we recall Schelling's original model of segregation and relate it to the BEG model. We then introduce the generalization to the case of an open city. In Sec. III, we present numerical simulations of the model, showing the existence of phases with different types of interfaces. In Sec. IV, we give the analytical expressions of the phase boundaries in parameter space. Finally in Sec. V, we discuss the results.

II. SEGREGATION MODEL

A. Contact with the Blume-Emery-Griffiths model

In Schelling's original model of segregation [1], two types of agents—to be called here and in the following “red” and “blue” agents co-exist on a regular square lattice with Moore neighborhood (eight next-nearest neighbors per site). Each lattice site can be either occupied by a single agent or vacant. The total number of agents of each type is fixed and kept constant. An agent at a site is said to be satisfied if there is at least a fraction $1-T$ of the agents in his neighborhood who are of his own type ($T=2/3$ in [1]), i.e.,

$$N_d - T(N_d + N_s) \leq 0, \quad (1)$$

where N_d and N_s are, respectively, the numbers of different and similar neighbors. The parameter T is called the tolerance. Starting with a random configuration, some agents are unsatisfied. With a random sequential dynamics, unsatisfied agents are displaced to a satisfying vacancy (to the closest one in [1]). For a wide range of tolerance T and of vacancy density, the iteration of this process yields regions composed of similar agents (see e.g., [5,13]), phenomenon usually called segregation.

From a physicist's point of view, it is interesting to see that there exists a correspondence between the Schelling segregation model and spin-1 models. Let us introduce spin-1 variables c_i taking the value 0 if the location i is vacant, and

1 (respectively, -1) if this location is occupied by a red (respectively, blue) agent. The satisfaction condition at site i can then be written:

$$-c_i \sum_{\langle j \rangle} c_j - (2T-1)c_i^2 \sum_{\langle j \rangle} c_j^2 \leq 0, \quad (2)$$

where the sums are on the eight nearest neighbors of site i . Because $c_i=0$ at an empty site, this condition is also true for a site with no agent—one can thus consider the satisfaction condition as a *site* property rather than an *agent* property. If an agent is allowed to move from a site where he is not satisfied to an empty site where he is, one can check that the Schelling dynamics admits the following Lyapunov function:

$$E_S = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^2 c_j^2, \quad (3)$$

where $K=2T-1$, and the sum $\sum_{\langle i,j \rangle}$ is on all pairs of nearest neighbors.

This function E_S Eq. (3) corresponds to the energy of the Blume-Emery-Griffiths model [14], originally introduced to study the superfluidity of He^3 - He^4 mixtures, under the constraint that the number of sites of each type ($0, \pm 1$) is kept fixed. Hence the Schelling model is equivalent to the zero-temperature dynamics of the BEG model, with kinetic constraints (no direct exchange red/blue), and with a fixed number of agents. In the full version of the BEG model, the energy contains the additional term $D_{BEG} \sum_i c_i^2$ (the sum being over all the sites), so that the total number of vacancies is fixed only in average through the Lagrange multiplier D_{BEG} :

$$E_{BEG} = - \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^2 c_j^2 + D_{BEG} \sum_i c_i^2. \quad (4)$$

The limit $D_{BEG} \rightarrow -\infty$ corresponds to the absence of vacancies, i.e., the Ising model, and large positive D_{BEG} corresponds to high vacancy densities. The term D_{BEG} does not appear in the energy E_S of the Schelling model, not because it corresponds to $D_{BEG}=0$, but because the density of vacancies is fixed. The particular case $K=0$ (that is, $T=1/2$) is known as the Blume-Capel model, much studied for its own sake [18,19].

Hence, the obvious next step is to generalize the Schelling model to the case of an open system for which the number of agents is not fixed. In order to allow for exchanges with a reservoir of agents, one has to define the agent's utility in a way allowing to compare the degree of satisfaction at different locations and between being in or out of the lattice. The full BEG model provides the simplest way to do so, with the parameter D_{BEG} giving the satisfaction loss (if $D_{BEG} < 0$) or gain (if $D_{BEG} > 0$) of an agent if he leaves the city from a site with a fully vacant neighborhood. In the next section we detail the resulting multi-agent model.

B. Schelling's model with an open city

We now specify our variant of Schelling's model for an open system—but still with a lattice of fixed size, the city being not allowed to grow. We introduce an index of dissatisfaction (instead of a “satisfied or unsatisfied” binary status). As regards to the dynamics, any agent—whether he is satis-

fied or unsatisfied—may move to a randomly chosen site if this provides him with a larger degree of satisfaction. As the system is open, we do not fix neither the total number of agents, nor the ratio of red/blue agents. We assume that there is an infinite reservoir of agents outside the city-lattice. An agent may leave the city if this increases his degree of satisfaction, and new agents may enter the city. A parameter D controls the flux of agents leaving or entering the lattice, acting as a chemical potential for the vacancy density. The control parameters of the model are, thus, the tolerance T and the vacancy “chemical potential” D .

Let us now define the index of dissatisfaction. For an agent within the city (lattice), the index depends on the heterogeneity of his neighborhood and on an intrinsic attractiveness of the city. The dissatisfaction index I_{dissat} for a neighborhood composed of N_d different and N_s similar neighbors is:

$$I_{dissat} = N_d - T(N_d + N_s) + D, \quad (5)$$

where T is the tolerance of the agents about the heterogeneity of their neighborhood. The smaller the index I_{dissat} , the more satisfied the agent. With the spin-1 notation introduced in the preceding section, one can write the dissatisfaction index at site i as

$$I_i^{dissat} = -\frac{1}{2}c_i \sum_{(j)} c_j - \frac{1}{2}(2T-1)c_i^2 \sum_{(j)} c_j^2 + Dc_i^2, \quad (6)$$

where, as in Eq. (2), the sums are on the eight nearest neighbors of site i . Without loss of generality we can assume that an agent outside the lattice has an index of dissatisfaction that is null. This is equivalent to state that D is the satisfaction loss (if $D < 0$) or gain (if $D > 0$) of an agent who leaves the city from a site with a fully vacant neighborhood or conversely, it is the gain (if $D < 0$) or loss (if $D > 0$) of an agent who enters the city at a site with a fully vacant neighborhood. Hence, D indicates how welcoming the lattice is. Indeed, a very negative value of D easily makes the environment satisfying for the agents. While a large value of D leads to the impossibility of satisfying the agents, consequently making the environment hostile. D can be seen as a measure of the (un)attractiveness of the urban environment [20], and we will call it “urban attractiveness” for short (although one should remind that a positive value of D means a hostile environment). In the present socio-economic context, it would have been more suitable to take the opposite sign to define D in Eq. (5) but we choose the sign in order to have a direct correspondence with the BEG model.

Starting from a random initial configuration, each agent tries to increase his degree of satisfaction (i.e., to decrease I_{dissat}). In order to do this, internal or external exchanges are tested with equal probability. In the case of an external exchange, a site is randomly chosen, if it is empty, the arrival of an agent (one of the two types with equal probability) is attempted. The occupancy becomes actual only if the target dissatisfaction index I_{dissat} is smaller than 0 (the value of the dissatisfaction index outside the lattice), that is, if the numbers of similar N_s and different N_d neighbors at the target site satisfy:

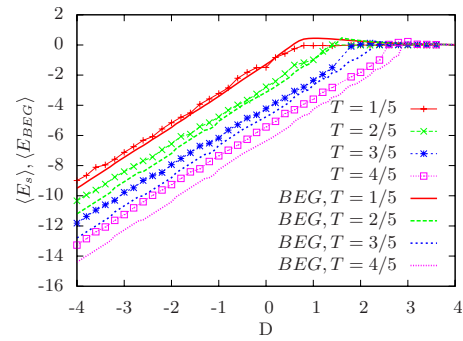


FIG. 1. (Color online) Mean energy $\langle E_s \rangle$ of Schelling-like and $\langle E_{BEG}(K=2T-1, D_{BEG}=2D) \rangle$ of Blume-Emery-Griffiths models with respect to D for different values of the tolerance T . The quantities have been averaged on 30000 configurations of 100×100 lattices after equilibrium. As for the Blume-Emery-Griffiths energy, it has been obtained by using a Heat Bath algorithm at a very low temperature.

$$N_d - T(N_d + N_s) + D \leq 0. \quad (7)$$

If the site is occupied by an agent, the latter remains at this location only if its neighborhood meets the previous condition [Eq. (7)]; otherwise the agent is removed from the lattice. Note that here the tolerance T can be understood as the maximal proportion of different neighbors tolerated in order to remain in the lattice when the environment is neutral (that is, at $D=0$).

In the case of an internal exchange, both a vacant and an occupied site are randomly chosen. The agent moves or not to the empty site on account of the difference between the dissatisfaction indexes associated with the two locations: if his current neighborhood is characterized by the set (N_s, N_d) of similar and different neighbors, and the target site by the set $(N_{s'}, N_{d'})$, the displacement occurs if:

$$[N_{d'} - T(N_{d'} + N_{s'})] - [N_d - T(N_d + N_s)] \leq 0. \quad (8)$$

Let us emphasize that the parameter D disappears in this difference of indexes, so that the internal moves only depend on the tolerance parameter T .

A Lyapunov function of this model is the energy of the Blume-Emery-Griffiths model [Eq. (4)]-with D_{BEG} replaced by $2D$ [see also the expression Eq. (6) of the dissatisfaction index]. This shows an equivalence between the zero-temperature dynamics of this spin-1 model and the present model, except for the following kinetic restrictions: here red agents cannot become blue and conversely. The energy is always decreasing during the dynamics, but the constrained dynamics create barriers between local minima. Consequently, the energy does not necessarily reach its absolute minimum. Figure 1 shows the dependency on D of the energy at the fixed point (or in the stationary regime), for different fixed values of the tolerance T . On the same figure, the energy of the corresponding BEG model at zero temperature limit is also shown: one observes only weak differences between the two models. We attribute this weak difference to the fact that the absence of thermal noise makes the inter-

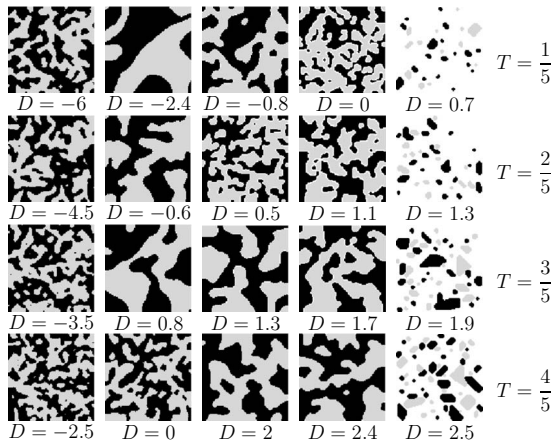


FIG. 2. Final configurations obtained for different values of the parameters T and D with 100×100 lattice. Dark and light gray pixels correspond to the two types of agents whereas white pixels represent vacant sites.

faces robust, the latter contributing to surface terms in the energy which are small compared to the dominant volume terms.

III. NUMERICAL SIMULATIONS

Numerical simulations are performed on a $L \times L$ lattice ($L=100$) with free boundary conditions for different values of the tolerance T and of urban attractiveness D . The initial configurations are fully mixed as the agents and vacancies are randomly placed on the lattice. The dynamics previously described is applied until the system reaches equilibrium, i.e., when the computed quantities only have very weak fluctuations or when the system is frozen. Figure 2 shows the final configuration for different values of T and D .

The variety of observable configurations for the different values of the urban attractiveness D depends on the tolerance T . However, there are two extreme phases that we meet at each tolerance: one without vacancies and one dominated by vacancies. Actually, at highly negative D , for any tolerance, no vacancy is present. The agents of the two types are in direct contact. Indeed, the lattice is so welcoming that agents prefer to remain in it even with different neighbors. Conversely, for the high values of D , the environment is so unwelcoming that agents massively leave. In-between, according to the value of the tolerance considered, vacancies may appear and create interfaces isolating the two types of agents. Thus, the interfaces between red and blue agents are of several types: the contact can be direct or vacancies can separate the agents. The interfaces also have several shapes: rugged or smooth giving more or less compact clusters. A quantitative analysis will give the existence domains of these interfaces.

A. Numerical analysis: Types of interfaces

To study the occurrence of the phases, we compute different quantities such as the mean numbers of different neighbors per site and the density of agents. The number of agents allows to locate the transition to the state of vacancies. This

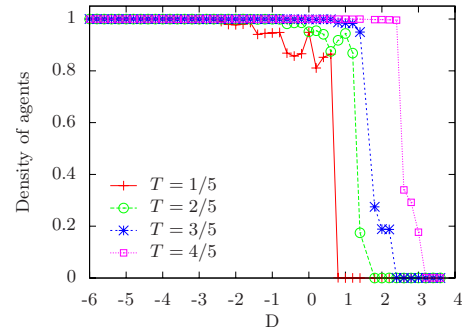


FIG. 3. (Color online) Density of agents (total number of agents divided by the size of the lattice $L \times L$) versus the urban attractiveness D for different values of the tolerance T computed on $L \times L$ ($L=100$) lattices. The number of agents is here an average over 30 000 configurations after equilibrium has been reached.

quantity has been plotted on Fig. 3 versus the urban attractiveness for several values of the tolerance.

The density of agents first slightly departs from its maximum value. This corresponds to the appearance of the first vacancies. As D increases, the density of agents abruptly falls to a very low value showing a discontinuous transition to the predominant vacancy state. This decrease does not lead to a zero value of the density because some small clusters of agents remain in a “sea of vacancies.” Note that for high T , the appearance of the first vacancies almost coincide with the sharp transition to the predominant vacancy state.

The evolution of the number of different neighbors (Fig. 4) yields the outline of the interface type. As D is increasing, the number of links between the two different types of agent decrease as a result of either the growth of the clusters or the departure of different neighbors.

When the number of different neighbors becomes null, a full vacancy interface separates the clusters. There no longer exists contact between different agents. Let us remark that before a full vacancy interface appears when D is increased, a thinner interface of vacancies is observed. This interface that we will characterize as width-1, is such that a path can be followed between agents by going only “through” neighboring vacant sites without encountering an occupied site.

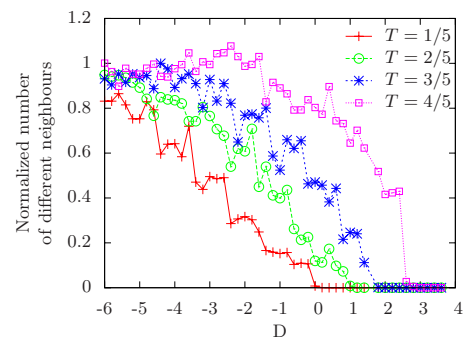


FIG. 4. (Color online) Mean normalized number of different neighbors versus the urban attractiveness D for different values of the tolerance T computed on 100×100 lattices: the number of different pairs of neighbors has been averaged over 30 000 configurations after equilibrium.



FIG. 5. Types of vacancies interface: width-1 (left) and width-2 (right) interfaces.

However diagonal contacts between different agents may still exist. This is not the case for the full vacancy interface that we will call width-2. Figure 5 illustrates both types of interfaces by zooming in two configurations.

The plots of the previous quantities on Figs. 3 and 4 give the existence domains of the different types of interfaces. However, they do not provide much information about the shapes of the interfaces.

B. Numerical analysis: shapes of interfaces

To determine the evolution of the shape of the interfaces between agents, we measure the size of the interface. This measure, plotted in Fig. 6, is the sum of the numbers of different neighbors and the number of contacts between vacancies and agents.

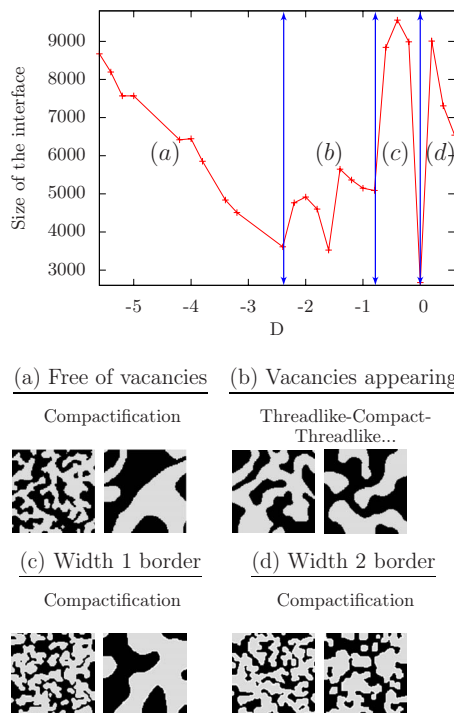


FIG. 6. (Color online) Size of the interface for $T=1/5$. The same patterns and same order of magnitude are observed with different initial conditions. Below the curve, we present the typical equilibrium configurations observed for each phase (free of vacancies, full vacancy border...) at the smallest and largest D values of the phase. In each phase, the clusters observed in the equilibrium configurations eventuate to become more compact as D increases.

In the phase free of vacancies, the size of the interface decreases when increasing D , meaning that the clusters become larger and larger to limit the number of contacts between red and blue agents. As for the phases whose equilibrium configurations comprise width-2 vacancy interface (respectively, width-1 vacancy interface), when D increases within the domain of existence of the phase considered, the size of the interface first increases then decreases. This behavior can be explained as follows: at the lowest values of D for which the considered regime exists, the interface is rugged, the agents accept vacancies (respectively, different agents and vacancies) in their neighborhood instead of similar neighbors. But as D increases, the environment becomes less welcoming. As a consequence, the agents reorganize themselves in compact clusters so as to increase the number of similar agents with respect to the number of vacancies (respectively, different agents and vacancies) in their neighborhood. This reorganization renders the interfaces smooth and yields a decrease in total energy even with a large value of D .

C. Remarks

Let us notice that the main results do not depend on the initial conditions chosen in the simulations. The results presented on all the figures have been obtained with random initial configurations, red agents, blue agents and vacancies being uniformly distributed in the same proportions (1/3) on the lattice. If, when increasing D , instead of drawing a random configuration for each new value of D , we take as initial configuration the equilibrium configuration obtained at the previous value of D , the existence domains of the phases are not modified. Differences does occur, but only concern the evolution with D of the size of the clusters: starting from the previous equilibrium configuration leads to steadily growing clusters with increasing D , which is not the case when starting each simulation with a new random initial configuration as described above. When using the same protocol but with a decreasing D , the locations of the transitions are roughly the same as those obtained by starting from random initial configurations, except for the transition to the predominant vacancy state. Indeed, given that the latter state is stable for any positive value of D , the transition only occurs at $D=0$. Basically, unless we take extreme initial configurations (for example, vacancies state), the existence domains of the phases do not depend on the initial configuration. Differences can only be seen in the shapes of the interfaces. Indeed, if we begin with an equilibrium configuration obtained for a set of values (D, T) where the agents are less easily satisfied, and therefore already presents some structure, it necessarily leads to more compact clusters than when starting with a random initial configuration.

IV. THEORETICAL ANALYSIS: INTERFACES

By studying the moves allowed by the dynamics, one can predict the type of interface for ranges of T and D .

A. State free of vacancies

Let us take a configuration free of vacancies and write the conditions for the appearance of at least one vacancy. The

vacancies appear only if at least one agent has an unsatisfying neighborhood, i.e., the dissatisfaction index I_{dissat} [Eq. (5)] is positive. Since here $N_s + N_d = 8$, this condition can be written as follows:

$$N_s \leq D + 8(1 - T). \quad (9)$$

This resulting vacancy will not be occupied by an agent of the other type only if the number of different neighbors satisfy this inequality as well:

$$N_d \leq D + 8(1 - T). \quad (10)$$

Therefore, adding the two previous inequalities, one gets that the vacancies appear only if:

$$D \geq -4 + 8T. \quad (11)$$

B. Vacancy interface

Let us assume that the system reaches a configuration with a complete vacancy interface separating the different clusters, i.e., no contact between different agents exists. For at least one agent (let us call it A) to tolerate one different neighbor, the number of identical agents N_s around him must verify the inequality:

$$1 - T(N_s + 1) + D \leq 0, \quad (12)$$

$$TN_s \geq 1 - T + D. \quad (13)$$

The number of similar neighbors N'_s of his single different neighbor (let us say A') has to satisfy this inequality as well:

$$TN'_s \geq 1 - T + D. \quad (14)$$

Both agents A and A' have at least two neighbors in common and they are neighbors with one another, which leads to:

$$N_s \leq 5, \quad (15)$$

$$N'_s \leq 5. \quad (16)$$

Moreover, at least two neighbors of A are in the neighborhood of two neighbors of A' . As we assume there is no pair of different agents, this constrains two of them to be vacancies. The sum of the similar agents of A and of A' must be lower than eight. The first link between red and blue agent appears only if:

$$8T \geq TN_s + TN'_s \geq 2(1 - T + D), \quad (17)$$

$$D \leq 5T - 1. \quad (18)$$

Consequently, if a complete vacancy interface (no contact between different agents) exists, it subsists at least for $D \geq 5T - 1$. The same kind of argument can be made to show that an agent can have two different neighbors only if:

$$D \leq 6T - 2. \quad (19)$$

In other words, if there exists a vacancy interface of width 1, i.e., such that we can travel all the way by following only nearest-neighbors (Moore neighborhood) vacancies and

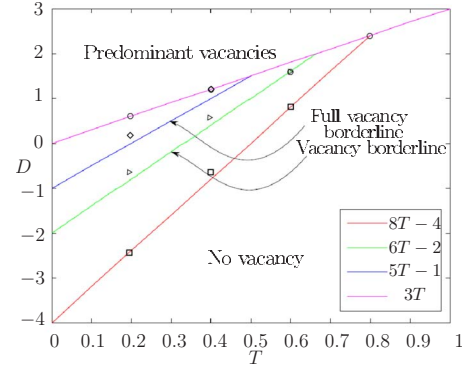


FIG. 7. (Color online) “Phase diagram” of our model in the parameter space (attractiveness D , tolerance T). Theoretical phase diagram: lines determined analytically (see text), limiting the domains of existence of the different states—free of vacancies, with predominant vacancy and with vacancy interface. Simulation points are marked on the diagram: the squares, triangles and diamonds indicate the points at which, respectively, the first vacancies, the width-1 interface and the width-2 interface appear. The circles corresponds to the last points at which the vacancies are not predominant. (Remark: the simulations have been done for values of D incremented by a constant factor 0.2: this gives the numerical precision of the location of the phases.)

which allows diagonal contacts between agents, this vacancy interface subsists at least for $D \geq 6T - 2$.

C. Predominant vacancy state

The agents do not leave the lattice if the following condition is fulfilled:

$$N_d \leq \frac{-D + TN_s}{1 - T}. \quad (20)$$

It requires a number of similar neighbors at least as great as D/T . Let us notice that the agents and vacancies are initially uniformly distributed. As a result, a large majority of agents do not have more than three similar neighbors. If $D/T > 3$, the agent will leave in massive numbers and will never come again because almost no agent have more than three similar neighbors. Consequently, if $D/T > 3$, the vacancies are predominant in the equilibrium state.

D. Summary: Domains of existence of interfaces

These analyzes are summarized on the phase diagram represented on Fig. 7, giving the domains of existence of the different types of interfaces. The theoretical phase boundaries, obtained from studying the dynamical stability of the interfaces, are in good agreement with what we found via the numerical simulations presented above, Sec. III A, as illustrated by the simulations points marked on the Fig. 7.

V. DISCUSSION

We have introduced a variant of the multiagent segregation model of Schelling in which agents are allowed to leave or enter the “city.” The dynamics of this model admits a

Lyapunov function which makes it identical to the zero-temperature dynamics of the Blume-Emery-Griffiths model with kinetic restrictions. In this model, phases with new features compared to both the BEG and Schelling's models emerge.

It is worthwhile discussing with more details the correspondence with the Blume-Emery-Griffiths model. Let us first briefly recall the nature of the phases of the latter. Several studies [14,21,22] shows the presence of ferromagnetic, paramagnetic, predominant vacancies and antiquadrupolar phases whose typical configurations are lattices with two sublattices, one with spins equal to zero, one with alternated spins -1 , $+1$. These configurations do not appear for the range of parameters for which we have a correspondence with our variant of the Schelling model. Moreover at low temperature and in particular in the zero temperature limit, in the BEG model only ordered phases—ferromagnetic or vacancies phases—may exist in the domain of parameters that we are interested in.

In the Schelling-type open model discussed here, a phase of vacancies appears at $D=3T$ instead of $D=2(K+1)=4T$ (corresponding to $D_{BEG}=8T$) in the Blume-Emery-Griffiths model. Actually, since the direct exchange between agents of different types is not allowed by the dynamics, agents do not have other choices than to leave the system to become satisfied. That is why, the equilibrium configurations with a high density of vacancies appear earlier in the multiagent model. In the range of values of the parameters at which the ferromagnetic phase exists in the BEG model, the deterministic dynamics with kinetic constraints gives rise to a stable state with red and blue agents coexisting. Indeed, in this regime, the agents reorganize themselves to reduce their dissatisfaction index but they do not need to leave the lattice to be satisfied. Consequently, both types of agents are present on the lattice and as the system is kinetically constrained, the completely red or blue configurations do not appear even if this would minimize the total energy. Moreover, such coexistence can be sustained even with moderately friendly environments (not too negative D), thanks to the adjustment of the interfaces.

As said above, for the range of parameters that we consider, the ground state of the Blume-Emery-Griffiths model is either ferromagnetically ordered or ordered with all spins equal to zero. The BEG ground states may show clustering with vacancy interfaces (which can be flat or rough) but only if $J+K$, the sum of the bilinear and biquadratic interaction coefficients, is negative [23,24]. Since in our model J is equal to 1, we have always $J+K=2T>0$. This shows that the interfaces appearing in our study do not correspond to configurations giving the absolute minima of the BEG energy, but result from the constrained dynamics.

At this point one may ask what would be the results if a thermal noise was introduced in our model while keeping the same kinetic constraints. One may consider the dynamics where the randomly chosen agent decide to move or not (to a vacant site or outside the city) according to a Glauber type choice rule with a temperature like parameter $1/\beta$: the move is accepted if it is favorable to the agent, and otherwise accepted with probability $\exp(-\beta\Delta I_{dissat})$ where ΔI_{dissat} is the increase in dissatisfaction index. One can then show that,

despite the kinetic constraints forbid a direct exchange between agents of different types, the system reaches an equilibrium distribution given by the Gibbs distribution of a BEG model at temperature $1/\beta$, with an effective value of D which is $D_{eff}=2D+\frac{\ln 2}{\beta}$ [25]. At a small value of the temperature $1/\beta$, one will have a long transient during which interfaces separating clusters of agents of different type will appear. The time scale on which the segregation of the zero-temperature dynamics will appear and be sustained will be larger if one increases the rate at which external exchanges are tried. It is interesting to note that, in contrast with the BEG model, the dynamics in the present model leads to segregation, but does not lead to an ordered state which would mean the full exclusion of one type of agent.

Let us now come back to Schelling's model and more generally to the socio-economic context. In Schelling's original model and its variants which consider a fixed number of agents and vacancies, it is known that a phenomenon of segregation appears. This segregation is defined as the grouping of agents of the same type together, while the vacancies have no functional role. They do not display patterns and thus play no major role in the process of segregation. Indeed, as shown for the variant introduced in [13], the vacancies are uniformly distributed in the equilibrium configurations whatever the phase, segregated, mixed or mixed frozen. There is no regard on the interfaces between the groups. In the open model studied here, a completely different kind of segregation consisting in the isolation of groups of agents from each other by vacancies is exhibited. This phenomenon can be linked to the percolation of vacancies in the network whereas, with a fixed vacancy density, what matters is the percolation of the agents of a given type [13].

With internal/external exchanges being assimilated to, respectively, moving in/out a given area like a city, it may not seem realistic to have the same probability for both types of exchanges. However, internal exchanges only induce a minimal level of clustering and, thus, have only a limited impact on the existence domains of the phases. The equilibrium configurations are conditioned by the external exchanges. Let us notice that if we use a weak rate of external exchanges, the system converges to the final states after a long transitory phase while the internal exchanges dominate the dynamics. As a result, the proportion of internal exchanges mainly influences the shapes and size of the clusters but not the type of the interfaces.

To conclude, we recall and stress that, in the present work, the build-up of interfaces through the appearance of vacancies is the main focus. Depending on the tolerance threshold T and the city (un)attractiveness D , the vacancies may be sporadically distributed along the interface or form complete connected vacancy borders (large or thin) between agents. The equilibrium configurations highlight the permanent competition between searching a neighborhood providing a high enough satisfaction with respect to the level of attractiveness of the environment, and leaving the city altogether. Contrarily to what would be obtained with a thermal noise, the possibility to leave the city does not lead to an unstability, which would make the city occupied by agents of a same single type. Here, both types of agents coexist in the city, but the dynamics leads to a segregation into clusters with a variety

of interfaces between the clusters. We classify these interfaces according to two features: (i) their type: blue and red agents may be in contact or separated by vacancies and (ii) their shape: rugged or smooth.

As a matter of fact, the most important conclusion is that here vacancies have a functional role, they allow weakly tolerant agents to be satisfied. This is not the case in Schelling's original model where the vacancies are only "conveyor of moves." The functional character of the vacancies is clearly established with the formation of interfaces. When vacancies do not single handedly allow the agents to be satisfied by decreasing their number of different neighbors, the interfaces become smooth to increase the number of similar ones.

Finally, one may speculate on the interpretations of the results in a socio-economic context. The compactification of clusters of similar agents encountered when the environment becomes hostile (large positive D) may be reminiscent of the strengthening of the links between people via a community network that sociologists have observed, for example, in some neighborhoods of Chicago [26]. These strong links may prevent a massive exodus due to the lack of attractiveness of the environment. As for the presence of full vacancy interfaces obtained for some range of values of the control parameters, they separate groups in a way which reminds of sociospatial segregation reinforced by walls, as in Johannesburg [27]. In the model, we observe the formation of frontiers with a homogeneous network with no infrastructure or other physical boundaries. Clearly preexisting structural borders (roads, parks, rivers...) may affect segregation (Example, Paris ring road [27]). How would these physical borders affect our results? In the range of parameters where vacancy borders appear, the segregation dynamics can be expected to take advantage of such pre-existing frontiers which would then become parts of the social borders. In

other regimes, even if the physical frontiers may facilitate the emergence of an interface, they will not necessarily lead to social frontiers. It would therefore be interesting to perform empirical studies in order to see under which conditions a physical border is at the same time a social border.

More generally, further studies should focus on variants that take into account realistic socio-economic features of the agents or infrastructures of the city. For example, one could categorize agents according to their income, associate prices to the vacant sites and move the agents according to their financial capacities. Also, the level of attractiveness of the urban environment D could be heterogeneous on the lattice in order to reflect the presence of more or less facilities in different areas. In the same vein, one could make the attractiveness depend on the type of agent who looks at a vacant place to account for various subjective criteria, and agents could be given an idiosyncratic tolerance threshold. It would be interesting to model the presence of ethnical minorities by changing the relative proportion of agents in the reservoir, that is, by modulating the proportion of attempted arrivals of each type of agent. Finally, we have considered an open system with an urban domain of a fixed size: one could deal with a completely open system by letting free the size of the urban system. This would address issues related to the urban sprawl, of different natures than the one related to segregation.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank the referees for very useful comments. L.G. thanks R.B. for helpful discussions. L.G. is supported by the French Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche allocated by the UPMC doctoral school "ED389: Physics, from Particles to Condensed Matter." J.P.N. and J.V. are CNRS members. This work is part of the project "DyXi" supported by the program SYSCOMM of the French National Research Agency (Grant No. ANR-08-SYSC-008).

-
- [1] T. C. Schelling, *J. Math. Sociol.* **1**, 143 (1971).
 [2] T. C. Schelling, *Micromotives and Macrobehavior* (W. W. Norton, New York, 1978).
 [3] W. A. V. Clark, *Demography* **29**, 451 (1992).
 [4] C. Z. Charles, *Annu. Rev. Sociol.* **29**, 167 (2003).
 [5] D. Vinkovic and A. Kirman, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **103**, 19261 (2006).
 [6] D. Stauffer and S. Solomon, *Eur. Phys. J. B* **57**, 473 (2007).
 [7] S. Gauvin, E. Bertin, R. Lemoy, and P. Jensen, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106**, 20622 (2009).
 [8] R. Pancs and N. Vriend, *J. Public Econ.* **91**, 1 (2007).
 [9] J. Zhang, *J. Econ. Behav. Organ.* **54**, 533 (2004).
 [10] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
 [11] A. Singh, D. Vainchtein, and H. Weiss, *Demogr. Res.* **21**, 341 (2009).
 [12] The only exception is a study [6] with a nonfixed fraction of agents of each type, where the Schelling model is simply replaced by the Ising model: this corresponds to a situation with no vacancies and with moves consisting in replacing an agent of a given type by an agent of the other type.
 [13] L. Gauvin, J. Vannimenus, and J.-P. Nadal, *Eur. Phys. J. B* **70**, 293 (2009).
 [14] M. Blume, V. J. Emery, and R. B. Griffiths, *Phys. Rev. A* **4**, 1071 (1971).
 [15] C. Godrèche and J. M. Luck, *J. Phys.: Condens. Matter* **17**, S2573 (2005).
 [16] B. Derrida, A. J. Bray, and C. Godrèche, *J. Phys. A* **27**, L357 (1994).
 [17] C. M. Newman and D. L. Stein, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3944 (1999).
 [18] M. Blume, *Phys. Rev.* **141**, 517 (1966).
 [19] H. W. Capel, *Physica* **32**, 966 (1966).
 [20] M. Kozłowski, Ph.D. thesis, University of Queensland, 2007.
 [21] S. Branco, *Physica A* **232**, 477 (1996).
 [22] Y.-L. Wang, F. Lee, and J. D. Kimel, *Phys. Rev. B* **36**, 8945 (1987).
 [23] A. Lipowski and M. Suzuki, *J. Phys. A* **26**, 5695 (1993).
 [24] Yu. I. Dublenych, *Phys. Rev. B* **71**, 012411 (2005).

[25] The proof is left to the reader. One shows that the considered dynamics is a Monte Carlo dynamics for a BEG model at the temperature $1/\beta$, with a transition matrix which is irreducible and satisfies the detailed-balance condition. If q_{\pm} is the fraction of agents of type ± 1 in the reservoir, for any nonzero rate of exchanges with the reservoir one gets as stationary state the Gibbs distribution associated to the energy $E_{BEG}(K=2T$

$-1, 2D) - \frac{1}{2\beta} [\ln(q_+ q_-) \sum_i c_i^2 + \ln \frac{q_+}{q_-} \sum_i c_i]$. In the present case $q_{\pm} = 1/2$.

[26] W. Wilson and R. Taub, *There Goes the Neighborhood: Racial Ethnic, and Class Tensions in Four Chicago Neighborhoods and Their Meaning for America* (Vintage Book, New York, 2007).

[27] R. Escallier, *Cahiers de la Méditerranée* **73** (2006).

Résumé

Cette thèse traite de l'étude des dynamiques résidentielles. Le travail est principalement tourné vers l'étude de l'émergence de ségrégation socio-spatiale à partir des comportements individuels. L'approche utilisée repose sur des outils de la physique statistique ainsi que la modélisation multi-agent.

Dans un premier temps, un archétype pour l'explication de la ségrégation comme résultat des décisions individuelles, le modèle de ségrégation de l'économiste Schelling, est analysé via des méthodes empruntées à la physique statistique. Le point fort du modèle résulte dans l'émergence de structures ségréгатives qui ne sont pas la traduction directe des préférences individuelles. Un diagramme de phase est construit et les phases sont interprétées dans un contexte socio-économique. De plus, un lien entre ce modèle et un modèle de spins, le modèle de Blume-Emery-Griffiths, est mis en évidence. Dans un deuxième temps, ce lien est utilisé pour étendre le modèle de ségrégation en version ouverte. L'introduction des flux migratoires externes se fait ainsi via un potentiel chimique, interprété comme une mesure de l'attractivité du réseau - assimilable à une ville. De cette ouverture du système naît une ségrégation par formation d'espaces vides entre les agents des différents types. Enfin, un modèle de marché du logement, s'éloignant du modèle de Schelling, est élaboré en utilisant les notions d'attractivité et de préférences individuelles. Une résolution analytique de l'état stationnaire du système est réalisée et montre un bon accord avec les simulations. Une zone de mixité sociale est mise en évidence dans les simulations. De plus, les simulations reproduisent quelques phénomènes observés dans les transactions immobilières de Paris : des fluctuations intenses des prix au centre contre une tendance à l'homogénéisation à la périphérie.

Mots-clef : modèle de ségrégation de Schelling – dynamiques résidentielles – marché du logement – transition de phase – ségrégation socio-spatiale

Abstract

This thesis deals with the study of residential dynamics. The work is mainly turned toward the study of the emergence of socio-spatial segregation from individual behaviors. The approach used lies on tools from statistical physics and agent-based modelling.

First, an archetype for the explanation of segregation as the result of individual decisions, the Schelling segregation model, is analysed via methods borrowed from statistical physics. The relevant point of this model is in the emergence of segregative patterns that are not the direct translation of the individual preferences. A phase diagram is built up and the phases are interpreted in a socio-economic context. Moreover, a link between this model and a spin model, the Blume-Emery-Griffiths is highlighted. Second, this link is used to extend the segregation model to an open version. The introduction of external migratory flows is achieved via a chemical potential, interpreted as a measure of the attractiveness of the lattice - assimilated to a city. Segregation under the form of vacant spaces (no man's land) between the agents of different types arises from this opening of the system. Finally, a housing market model, departing from the Schelling's model, is drawn up by using the concepts of attractiveness and individual preferences. An analytical resolution of the stationary state of the system is performed and shows a good agreement with the simulations. A zone of social mixity is pointed out in the simulations. Moreover, the simulations reproduce some phenomena observed in real estate transactions in Paris: large fluctuations in prices at the center versus a trend toward homogenization at the periphery.

Keywords: Schelling segregation model – residential dynamics – housing market – phase transition – socio-spatial segregation