



**HAL**  
open science

## Qualification de la prédiction du comportement vibratoire d'un sous-système sur véhicule

Saül Mapagha

► **To cite this version:**

Saül Mapagha. Qualification de la prédiction du comportement vibratoire d'un sous-système sur véhicule. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Rouen; Université Pierre et Marie Curie, 2010. Français. NNT : 2010ISAM0011 . tel-00557906

**HAL Id: tel-00557906**

**<https://theses.hal.science/tel-00557906>**

Submitted on 20 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Académie de Rouen*

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN  
ROUEN, FRANCE

**THÈSE DE DOCTORAT**  
*Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES EN MÉCANIQUE*

présentée par

**Saül MAPAGHA**

pour obtenir le titre de Docteur de l'INSA de ROUEN

---

**QUALIFICATION DE LA PRÉDICTION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE  
D'UN SOUS-SYSTÈME SUR VÉHICULE**

---

Soutenue le 5 mars 2010

devant le jury composé de

<b>F. GAUTIER</b>	Professeur (LAUM) Université du Maine	rapporteur
<b>A. MOORHOUSE</b>	Professeur (AAV) University of Salford, UK	rapporteur
<b>J. POUGET</b>	Directeur de recherche, CNRS (d'Alembert) Paris	président de jury
<b>L. GAGLIARDINI</b>	Dr Ingénieur PSA Peugeot Citroën	examineur
<b>E. LANDEL</b>	Dr Ingénieur Renault	examineur
<b>M.-H MOULET</b>	Docteur (CTTM), Le Mans	examineur
<b>W. RESPONDEK</b>	Professeur (LMI) INSA Rouen	co-directeur de thèse
<b>V. MARTIN</b>	Directeur de recherche, CNRS (d'Alembert) Paris	directeur de thèse



## Résumé

Le présent travail de thèse porte sur la prédiction des efforts vibratoires transmis à l'interface entre deux structures mécaniques. L'étude relève de la dynamique des structures en basses fréquences et concerne des aspects relatifs à la modélisation de couplages structuraux, notamment en présence de paramètres incertains et d'aspects expérimentaux.

Les équipements automobiles actifs sont des sources vibratoires qui agissent sur la structure d'accueil (souvent le châssis) sur laquelle ils sont montés. La maîtrise, a priori, du champ vibratoire (et donc acoustique) de l'assemblage, suppose la prédiction des efforts vibratoires à l'interface équipement/structure d'accueil.

Le formalisme utilisé pour décrire le couplage entre sous-systèmes permet d'établir que la recherche, dans des situations pratiques, des efforts appliqués à l'accueil est un problème inverse. Une méthode prédictive des efforts est construite et validée par une mise en oeuvre expérimentale.

Pour que les efforts vibratoires transmis respectent un gabarit imposé a priori, un problème d'optimisation numérique de l'interface est proposé et résolu.

Il sera montré que pour l'interface ainsi optimisée, la dispersion de la norme des efforts transmis est systématiquement plus faible que pour l'interface nominale.

**Mots clés** : prédiction, comportement vibratoire, efforts vibratoires, dynamique des structures, modélisation, sous-système, véhicule, sous-structuration, couplage de structures, paramètres incertains, optimisation, gabarit, norme, dispersion.

## **Abstract**

The present doctoral thesis aims to predict vibratory forces transmitted at the interface between two mechanical structures. The study concerns structural dynamics in low frequency range and consists in modelling structural coupling in presence of uncertain parameters and experiments.

Active automotive equipments are vibratory sources that cause vibrations on receiving structures (e.g a chassis) to which they are mounted. The control a priori of the vibratory field, and therefore acoustic field, of the assembled system supposes the prediction of vibratory forces at the interface.

Practical situations show that the coupling strategy, used to predict forces acting on the receiver, leads to an inverse problem. In order to validate the predictions, they are compared with measurements.

To comply with specifications regarding force magnitude, the interface between the two structures is optimized.

It will be shown that in presence of the optimized interface, the dispersion of force magnitude is systematically lower than the dispersion in presence of the nominal interface.

**Keywords** : prediction, vibratory behaviour, vibratory forces, structural dynamics, modelling, subsystem, vehicle, substructuring, structural coupling, uncertain parameters, optimization, norm, dispersion, attenuation.

## Remerciements

Il est certainement dérisoire et frustrant de témoigner ici, brièvement et derrière un clavier, de sa reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens néanmoins à remercier Vincent Martin qui a tenu un rôle fondamental et toujours enrichissant durant ces années de thèse, qu'il a accepté de diriger.

Je veux aussi souligner et remercier Marie-Hélène Moulet de m'avoir donné accès aux démarches expérimentales très présentes au sein de ce mémoire.

Je tiens à remercier mon co-directeur de thèse Witold Respondek qui m'a formé lors de mon master.

Je suis également très reconnaissant à Andy Moorhouse et François Gauthier d'avoir accepté de rapporter cette thèse ; aussi, à Laurent Gagliardini, examinateur extérieur et à Jean-Philippe Roux, invité de ce jury de thèse.

Aussi, cette recherche n'aurait pu voir le jour sans le Centre d'Etudes Vibro acoustiques pour l'Automobile qui a rassemblé le soutien financier de la Région Haute Normandie et des industriels qui ont suivi le projet (PSA Peugeot Citroën, Renault, Bosch, Valeo, Faurecia, Hutchinson, Delphi). Dans ce centre, je ne manquerai donc pas de remercier Jean-Marc Guerinot (M. Guerinot travaille aujourd'hui avec d'autres sociétés) et Martial Belhache, tout autant que le reste de l'équipe avec laquelle j'ai passé de bons moments.

Mes pensées vont enfin, mais avant tout, à ceux qui ont toujours été auprès de moi, quelle que soit la distance : mes parents au Gabon ; et à celle sans qui rien n'en serait ainsi. Merci infiniment mademoiselle Léa Mboumba.



«Que chacun raisonne en son âme et conscience, qu'il se fasse une idée fondée sur ses propres lectures et non d'après les racontars des autres.»

Albert EINSTEIN, *Comment je vois le monde.*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte général : le bruit, un enjeu majeur . . . . .	1
1.2	Cadre d'étude . . . . .	1
1.3	Objectif et structure du document . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Couplage de structures</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	5
2.2	Prédiction des efforts générés par une structure vibrante couplée à une structure d'accueil	7
2.2.1	Approche élémentaire issue de la mécanique du point . . . . .	7
2.2.2	Approche générale par des techniques de sous-structuration . . . . .	10
2.3	Prédiction des efforts en présence d'au moins trois structures couplées . . . . .	13
2.3.1	Synthèse de deux structures liées rigidement . . . . .	14
2.3.2	Prédiction des efforts . . . . .	17
2.3.3	Synthèse de structures liées rigidement : cadre général . . . . .	18
2.4	Prise en compte des degrés de liberté de rotation pour compléter la matrice des fonctions de transfert d'une structure . . . . .	21
2.5	Conclusion . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Validation de l'emploi du modèle dans un contexte industriel : intégration d'un groupe moto ventilateur sur un véhicule</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Présentation des essais réalisés . . . . .	28
3.2.1	Préliminaire : mesures d'efforts vibratoires par capteur d'effort . . . . .	28
3.2.2	Descriptif des systèmes et conditions opératoires . . . . .	32
3.2.3	Mesure des efforts lorsque le GMV est en fonctionnement . . . . .	37
3.2.4	Mesures d'inertance . . . . .	40

3.2.5	Estimation de la raideur dynamique des plots . . . . .	41
3.3	Validation expérimentale de l'emploi du modèle . . . . .	44
3.3.1	Architecture de calcul . . . . .	44
3.3.2	Etude de la matrice inertance du châssis . . . . .	44
3.3.3	Déduction des efforts appliqués à la structure d'accueil . . . . .	48
3.3.4	Prédiction de la force en service $\mathbf{f}^C$ à partir de la force mesurée sur le marbre $\mathbf{f}_\infty^B$ . . . . .	53
3.4	Conclusion . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Limitation des efforts vibratoires et réglage de paramètres en situation nominale</b> . . . . .	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Problème initial : respect d'une consigne sur les efforts vibratoires . . . . .	65
4.2.1	Rappel du modèle et formulation mathématique du problème initial . . . . .	65
4.2.2	Résolution graphique sur un exemple élémentaire . . . . .	66
4.3	Problème modifié : minimisation des efforts vibratoires transmis à l'accueil . . . . .	69
4.3.1	Complément sur l'écriture du problème de minimisation . . . . .	69
4.3.2	Introduction des méthodes des multiplicateurs de Lagrange à partir de l'exemple choisi . . . . .	70
4.3.3	Introduction sur la méthode de Nelder-Mead . . . . .	76
4.3.4	Généralisations . . . . .	78
4.4	Application du problème modifié dans un cadre technologique . . . . .	78
4.4.1	Présentation du cas d'étude . . . . .	78
4.4.2	Mise en œuvre de l'algorithme de Nelder-Mead . . . . .	79
4.4.3	Minimisation des efforts avec <i>NMinimize</i> . . . . .	81
4.4.4	Influence d'un réglage à fréquence donnée sur les autres fréquences . . . . .	83
4.5	Conclusion . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Gestion des erreurs de mesure et de données</b> . . . . .	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	89
5.2	Erreurs de mesure et de données . . . . .	92
5.2.1	Rappel du modèle prédictif . . . . .	92
5.2.2	Erreur sur le vecteur descripteur de source et sur le modèle . . . . .	92
5.3	Simulation des efforts prédits . . . . .	93
5.3.1	Principe de la simulation . . . . .	93

5.3.2	Nuage de dispersion de la norme des efforts simulés . . . . .	94
5.4	Lecture de l'effort maximal prédit . . . . .	95
5.4.1	Algorithme d'extraction de l'effort maximal . . . . .	95
5.4.2	Lecture de la valeur maximale de la norme des efforts par deux méthodes . . . . .	97
5.5	Réglage des caractéristiques des plots en présence d'erreurs sur la matrice inertance du véhicule . . . . .	99
5.5.1	Réglage des caractéristiques des plots en présence de la matrice inertance nominale du véhicule . . . . .	99
5.5.2	Minimisation de la norme des efforts en présence d'une surtension . . . . .	100
5.5.3	Lien entre minimisation de la norme des efforts et atténuation de leur dispersion . . . . .	101
5.6	Protocole de réglage des paramètres d'interface . . . . .	111
5.7	Conclusion . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>115</b>
6.1	Résultats . . . . .	115
6.2	Perspectives et problématiques futures . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>119</b>
7.1	Couplage de structures . . . . .	119
7.2	Résultats des prédictions des efforts vibratoires . . . . .	123
7.2.1	Mesures indirectes des efforts en service sur véhicule . . . . .	123
7.2.2	Prédiction des efforts appliqués au véhicule à partir des mesures sur le banc . . . . .	124
7.3	Détails sur le calcul de gradient donné au chapitre 4 . . . . .	126
7.3.1	Calcul du gradient du carré de la fonction norme des efforts prédits . . . . .	126
7.3.2	A Nelder-Mead algorithm with bounded variables . . . . .	128
7.4	Données réelles utilisées pour simuler des d'efforts à partir de simulations de matrices. . . . .	130
7.4.1	Données relatives à la fréquence 32.5 Hz . . . . .	130
7.4.2	Données relatives à la fréquence 47 Hz . . . . .	132
	<b>Bibliographie</b>	<b>135</b>



# Liste des principales notations

## Lettres latines

$c_0$	coefficient d'amortissement initial
$c$	coefficient d'amortissement quelconque
$\mathbf{C}^p$	matrice d'amortissement
$f_x$	force scalaire appliquée dans la direction $x$
$f^{Cmax}$	valeur maximale de la norme euclidienne des efforts pour une structure (C)
$\mathbf{f}_{(X,Y,Z)}$	vecteur force mesuré dans le repère $(X, Y, Z)$
$\mathbf{f}_{capt}^C$	vecteur force mesuré par un capteur d'effort, sur une structure (C)
$\mathbf{f}_{excit}^C$	vecteur force calculé sur la structure (C) aux points de contact avec le sous-système
$\mathbf{f}_e^C$	vecteur des efforts appliquées à une structure (C) au niveau des ddl notés $e$
$\mathbf{f}^C$	vecteur des forces appliquées à la structure (C)
$\mathbf{f}_{b\infty}^B$	vecteur des forces de blocage mesurées sur une structure (B) d'impédance infinie
$g_\omega^i$	fonction contrainte $n^\circ i$ , pour une pulsation $\omega$ donnée
$g_\alpha(\mathbf{y})$	fonction norme des efforts lorsque $\alpha$ est fixée
$h(\alpha, \mathbf{y})$	fonction norme des efforts lorsque $\alpha$ et $\mathbf{y}$ varient
$\mathbf{H}^{p0}$	matrice d'interface initiale
$\mathbf{H}^p$	matrice d'interface quelconque
$J_\alpha$	moment d'inertie associé au ddl de rotation $\alpha$
$J_\omega$	fonctionnelle définie pour une pulsation $\omega$ donnée
$J$	fonctionnelle définie sur une plage de fréquences
$\mathbf{J}_f^C(\alpha, \beta)$	matrice jacobienne de $\mathbf{f}^C$ par rapport à $\alpha$ et $\beta$
$k_0$	coefficient de raideur initial

$k$	coefficient de raideur quelconque
$\mathbf{K}^p$	matrice de raideur
$L_\omega$	Lagrangien calculé pour une pulsation $\omega$
$m_i$	masse dans la direction $i = x, y, z$
$M_\alpha$	moment associé à une rotation d'angle $\alpha$
$\mathbf{M}$	matrice de mapping du système assemblé
$m_i$	$i$ -ième vecteur colonne de la matrice $\mathbf{M}$
$\mathbf{R}$	matrice de changement de repère
$\mathbf{T}^C$	matrice (pleine) des fonctions de transfert d'effort en fonction de la fréquence
$\mathbf{U}^C$	matrice des fonctions de transfert d'effort diagonale et indépendante de la fréquence
$\mathbf{X}_0$	matrice d'initialisation de l'algorithme de Nelder-Mead
$y_i^{nom}$	coefficient d'une matrice $\mathbf{Y}^{nom}$ déroulée ligne par ligne
$\mathbf{y}^{nom}$	vecteur de composantes $y_i^{nom}$
$\mathbf{Y}^C$	matrice inertance totale d'une structure (C)
$\mathbf{Y}^{AB}$	matrice inertance totale, issue de l'assemblage des structures (B) et (C)
$\mathbf{Y}_{er}^C$	matrice inertance de transfert d'une structure (C), entre les ddl $e$ et $r$
$\mathbf{Y}^{max}$	matrice inertance aléatoire, à l'origine d'une dispersion maximale de la norme des efforts
$\mathbf{Y}^{nom}$	matrice inertance nominale
$\mathbf{Z}^p$	matrice des raideurs dynamiques des plots

### Lettres grecques

$\alpha$	tantôt angle de rotation, tantôt coefficient multiplicatif d'une matrice $\mathbf{K}^p$
$\alpha_{min}$	borne inférieure du coefficient multiplicatif $\alpha$
$\alpha_{max}$	borne supérieure du coefficient multiplicatif $\alpha$
$\alpha_{opt}$	valeur optimale du coefficient multiplicatif $\alpha$
$\beta$	tantôt angle de rotation, tantôt coefficient multiplicatif d'une matrice $\mathbf{C}^p$
$\beta_{min}$	borne inférieure du coefficient multiplicatif $\beta$
$\beta_{max}$	borne supérieure du coefficient multiplicatif $\beta$
$\beta_{opt}$	valeur optimale du coefficient multiplicatif $\beta$

$\gamma_e^C$	vecteur des accélération sur la structure (C), aux ddl notés $e$
$\gamma^M$	vecteur descripteur de source de la structure source (M)
$\rho$	coefficient de réflexion de l'algorithme de Nelder-Mead
$\chi$	coefficient de contraction de l'algorithme de Nelder-Mead
$\varepsilon$	coefficient d'extension de l'algorithme de Nelder-Mead

### Symboles

$\ \cdot\ _2$	norme euclidienne d'un vecteur ou norme induite sur une matrice
$t$	opérateur transposée d'une matrice
$*$	opérateur transposée conjuguée d'une matrice
$\textcircled{H}$	opérateur multiplication de matrices terme à terme, ou produit de Hadamard
$\nabla$	opérateur gradient
$\partial$	opérateur dérivée partielle

### Abréviations

<b>BD</b>	point de mesure bas droit
<b>BG</b>	point de mesure bas gauche
<b>ddl</b>	degré de liberté
<b>frf</b>	frequency response functions
<b>GMV</b>	groupe moto ventilateur
<b>HD</b>	point de mesure haut droit
<b>HG</b>	point de mesure haut gauche



# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Contexte général : le bruit, un enjeu majeur

La première loi globale sur le bruit en droit français date du 31 décembre 1992<sup>1</sup>. Elle instaure des mesures de prévention des émissions sonores et réglemente certaines activités bruyantes. Elle fixe également de nouvelles règles pour l'urbanisme et la construction au voisinage d'infrastructures de transport et met en place des mesures de protection des riverains des aéroports. Enfin, elle renforce le dispositif de surveillance et de contrôle ainsi que les sanctions prévues.

Pour une large majorité de français, les transports routier, ferroviaire et aérien sont la première cause de gêne subie dans leur vie quotidienne. Mais le bruit produit par certaines activités économiques, industrielles ou de loisirs, de même que les bruits de comportements, communément appelés bruits de voisinage, sont également très gênants pour de nombreux citoyens.

Au niveau européen, la protection contre le bruit fait l'objet d'une série de directives. Les émissions de bruit sont notamment définies pour les automobiles, les motos, les machines agricoles et sylvicoles automotrices, les appareils ménagers, les décapeuses, les machines et appareils de chantier, les tondeuses à gazon et les avions subsoniques civils. Une attention particulière est accordée aux transports routiers et aériens, dont le bruit représente une nuisance considérable<sup>2</sup>.

### 1.2 Cadre d'étude

Dans de nombreuses situations de l'ingénierie, des équipements sont installés sur une structure d'accueil telle que le châssis d'une voiture, le pont d'un bateau, la carlingue d'un avion, les plateformes

---

1. Source : ademe.fr au 09 octobre 2009

2. Source : bruit.fr au 09 octobre 2009

pétrolières... Ces équipements peuvent être des systèmes vibrants déformables comme les groupes moto-propulseurs, les mâts d'un navire, les ailes attachées au fuselage, les systèmes de forages... Les efforts vibratoires dus aux équipements - dits structures sources - et appliqués à la structure d'accueil peuvent engendrer des vibrations, des ruptures, du bruit. Pour les maîtriser *avant* l'installation des équipements sur la structure d'accueil, voire en *l'absence matérielle de celle-ci* mais avec la donnée de sa matrice de réponse en fréquences, il faut prédire les efforts en question. Notons que la boîte à musique posée sur une table pour rayonner une onde sonore est aussi un exemple parmi tant d'autres ; ici la prédiction des efforts vibratoires vise un rayonnement maximal.

Dans le cadre des vibrations linéaires et avec beaucoup de simplifications, les méthodes de sous-structuration et des mesures sur des bancs d'essais permettent, en théorie, la prédiction des efforts issus de l'équipement et qui sont appliqués à une structure d'accueil.

La maîtrise des efforts vibratoires appliqués à l'accueil vise à respecter des limites fixées. Pour respecter ces limites, on peut intervenir au niveau de l'interface entre les deux sous-structures pour modifier ses caractéristiques.

Lorsque les limites sont respectées à configuration donnée, rien n'indique qu'elles le seront en présence d'une modification d'une des structures par exemple. Or, à cause de diverses sources d'erreurs, les sous-structures réelles ne sont jamais parfaitement connues. Il est donc indispensable d'étudier, en complément de la prédiction des efforts, leur dispersion en présence de variations d'un paramètre du modèle.

Ici, le sous-système vibrant est un groupe moto-ventilateur monté sur une façade. L'ensemble est monté sur un véhicule ou sur un banc d'essais, les deux structures d'accueil. L'interface entre la structure d'accueil et le sous-système vibrant est constituée de plots élastiques. Les caractéristiques de ces plots seront modifiées numériquement pour simuler une réduction des efforts appliqués à l'accueil.

Il sera montré qu'en minimisant la norme des efforts vibratoires, leur dispersion est atténuée.

### 1.3 Objectif et structure du document

Au vu des informations apportées depuis le début de ce chapitre, l'articulation retenue est la suivante :

Dans le second chapitre, le formalisme général du couplage de structures est abordé. L'objectif du chapitre est de prédire le comportement vibratoire d'une source vibratoire installée sur un composant passif aussi appelé récepteur. La grandeur pertinente choisie pour décrire le comportement vibratoire

du récepteur est la force qui est appliquée. Le chapitre débute par le développement de la démarche à partir d'un modèle élémentaire masse-ressort. Ensuite, la formulation matricielle est obtenue grâce aux techniques de sous-structuration par fonctions de réponse en fréquences. Après avoir étudié le cas de deux sous-structures raccordées par des jonctions mécaniques flexibles et/ou rigides, on s'intéresse à la généralisation à plusieurs sous-structures. En fin de chapitre, une parenthèse est ouverte sur la prise en compte des rotations et des moments.

Le troisième chapitre concerne la mise en œuvre expérimentale dans un cadre technologique ; cadre qui a motivé cette étude. Son contenu permet de valider le modèle établi au chapitre 2. La validation consiste à comparer les résultats prédits par le modèle aux résultats de mesures prises sur le système complet. Pour prédire correctement le comportement vibratoire du récepteur, il est indispensable de disposer d'une caractéristique de la source. Cela n'est possible ici qu'à partir d'une mesure préliminaire de la grandeur pertinente sur un récepteur connu : un banc d'essais. La configuration particulière des données mesurées permet de quasiment valider le modèle. En fait l'expérience révélera que les données obtenues sur le banc d'essais et celles obtenues sur le véhicule sont proches. Il sera de fait suggéré une autre configuration où les données issues du banc d'essais et du récepteur final seraient suffisamment différentes pour exclure l'hypothèse d'un cas trivial.

Le quatrième chapitre concerne la prise en compte d'une contrainte portant sur les efforts appliqués au récepteur. Les caractéristiques dynamiques des joints à l'interface entre deux sous-structures servent de paramètres dans cette opération. Les limitations quant à l'obtention d'une solution générale conduisent à modifier le problème initial. Désormais, les paramètres servent à minimiser les efforts prédits.

Une série d'algorithmes sont présentés pour résoudre le problème, et une discussion sur leur efficacité est conduite.

Le cinquième chapitre concerne la robustesse du modèle, c'est-à-dire l'aptitude à respecter la limite imposée aux efforts vibratoires, même en présence d'erreurs sur certains paramètres. Dans ce chapitre, on traite du cas où seule la matrice des fonctions de transfert de la structure d'accueil est entachée d'incertitudes de mesure. La démarche retenue est de se donner un indicateur de la dispersion des efforts. Ici, il s'agit d'un nuage de points comportant en abscisse la norme de la matrice des fonctions

de transfert du récepteur, et en ordonnée la norme des efforts prédits. Il apparaîtra que le nuage de points «rétrécit» lorsque la norme des efforts prédits est minimale. Autrement dit, la minimisation des efforts implique l'atténuation de la dispersion de ceux-ci.

## Chapitre 2

# Couplage de structures

### 2.1 Introduction

La prédiction des vibrations et/ou du rayonnement acoustique des machines est une préoccupation ancienne qui a trouvé des réponses dans le cadre des vibrations linéaires. Dans ce cadre, des équipements installés sur une structure d'accueil sont à l'origine des vibrations et du rayonnement de cette dernière. L'équipement est dit actif ou source (moteur électrique, groupe de ventilation, boîte à musique, turbine d'un hélicoptère,...) et le support est dit passif (support du moteur, bâtiment d'accueil du groupe de ventilation, table de rayonnement, fuselage d'un hélicoptère,...). Le mécanisme d'excitation interne de la structure source est mal connu, de même que les voies de transmission depuis le lieu de l'excitation jusqu'aux points d'attache avec la structure d'accueil [1].

Dans le domaine du design acoustique, il y a un avantage certain à développer des prototypes acoustiques virtuels. En effet, l'approche est moins coûteuse que de développer des prototypes réels. Un prototype acoustique virtuel est formé de plusieurs composants. Chaque composant possède des propriétés vibro-acoustiques sous forme de données. Les différentes données sont combinées sur ordinateur pour réaliser l'assemblage des différents composants du prototype [2]. Il est alors possible de faire des ajustements, avant de concevoir réellement le système complet.

En particulier, il sera possible de prédire les vibrations et/ou le rayonnement acoustique du composant passif (il est admis ici que le composant actif ne rayonne pas).

Dès les années 70 et 80, le contrôle acoustique ou vibratoire du support passait par l'étude du flux de puissance qu'il recevait, au travers d'un seul point d'attache, avec l'argument que la vitesse vibratoire du support ou la force qui lui est injectée ne sont pas des grandeurs pertinentes vu la finalité [3, 4]. Malgré tout, la vitesse vibratoire du support ou la force injectée restent un passage obligé [5].

Lorsque la source et la structure d'accueil sont connectées en un seul point, la puissance transmise

à la structure d'accueil peut être calculée à partir du produit de deux quantités : le descripteur de source et la fonction de couplage [1]. Le descripteur de source est homogène à une puissance et ne dépend que des caractéristiques de la source. Il peut être vu comme la puissance équivalente qu'il faut fournir au point d'attache de la source dépourvue de sa sollicitation et déconnectée de l'accueil, pour produire la même vitesse au point d'attache lorsqu'il y a la sollicitation [1]. La fonction de couplage est sans dimension. Elle dépend des caractéristiques de la source et de la structure d'accueil.

En présence de plusieurs points d'attache, la puissance transmise de la source vers le support reste la grandeur recherchée [6, 7]. Cette question de la grandeur pertinente, reliée aussi aux aspects perceptifs des bruits et vibrations, n'a pas encore reçu de réponse définitive et il semblerait aujourd'hui que le contrôle acoustique et vibratoire du support puisse se satisfaire de la norme des efforts entrants sur le support. Toutefois, lorsque les points d'attache ne sont pas découplés, l'usage du descripteur de source pour prédire la puissance transmise pose des problèmes conceptuels. En revanche, si les points étaient découplés, il serait alors possible de définir un descripteur de source en chaque point. Comme ce n'est pas toujours le cas, une adaptation s'impose [8].

À propos de la propagation des erreurs lors de la prédiction de la puissance acoustique, il a été montré récemment que l'ordre de grandeur de l'erreur relative commise sur le module des efforts appliqués à la structure d'accueil se transmet immédiatement au module de la pression rayonnée [2] (résultat attendu tant que l'impédance de rayonnement de l'accueil est parfaitement définie).

Dans le champ de travail décrit ici, les prédictions reposent sur des modèles de structures et de rayonnement acoustique. En ce qui concerne la dynamique des structures, les lois de comportement sont établies soit à partir d'une étude théorique de la structure, soit à partir de l'expérience. L'étude théorique commence par l'analyse physique qui conduit à des équations. Ces équations sont traitées par voie analytique, numérique (par exemple par éléments finis) ou par voie semi numérique (méthode modale). L'observation expérimentale porte quant à elle par exemple sur l'analyse des fonctions de réponse en fréquences du système. Il est vrai que cette observation peut conduire ensuite à une analyse modale ; d'où le terme semi numérique.

Du côté des démarches analytiques, les travaux visent à une meilleure compréhension des raisons d'être des phénomènes de couplages ayant en vue une justification ou une critique des simplifications imposées la plupart du temps par les mesures nécessaires à la prédiction des efforts entrant dans la structure d'accueil [9, 10, 11].

Les méthodes numériques ou semi-numériques ont donné lieu à des techniques de sous-structuration. Ces techniques se sont développées depuis les années 60, en particulier dans le monde de l'aéronautique [12]. En présence de liaisons rigides entre équipement et support, la formulation générale souvent citée provient ici aussi du monde de l'aéronautique [13]. Cette formulation a été étendue pour tenir compte explicitement de liaisons élastiques [14]. Précisons que le concept de flux de puissance vibratoire entre sous-structures, issu du choix de la grandeur pertinente, est devenu une approche numérique au même titre que la méthode des éléments finis ou que la méthode SEA (Statistical Energy Analysis) [15].

Le couplage à l'aide d'un modèle modal présente des inconvénients liés à l'identification des paramètres modaux et à la troncature des modes.

Quant au couplage qui utilise un modèle expérimental par fonctions de réponse en fréquences, il est limité à cause de la difficulté de mesurer les degrés de liberté de rotation souvent importants. Faute de mieux, la pratique compose avec ce manque d'information.

Il existe aujourd'hui des modèles hybrides, qui couplent les modèles expérimentaux ou modaux à des modèles numériques (EF) [16]. Lorsque le modèle numérique est couplé avec un modèle expérimental, la problématique des ddl de rotation subsiste.

La grandeur pertinente choisie ici est la force appliquée à l'accueil. Pour prédire cette force, un vecteur source est construit. Ce vecteur représente une accélération. Le chapitre présente le fil conducteur dans un exemple tout à fait élémentaire de la mécanique du point avec deux structures dont l'une possède deux masses pour les besoins de la cause. L'exemple élémentaire est suivi du problème de couplage de deux structures déformables en faisant usage de techniques de sous-structuration. Le chapitre propose ensuite la généralisation du modèle au couplage de plus de deux structures, et à la prise en compte des rotations.

## **2.2 Prédiction des efforts générés par une structure vibrante couplée à une structure d'accueil**

### **2.2.1 Approche élémentaire issue de la mécanique du point**

La prédiction des efforts appliqués à une structure passive couplée à une structure source vibrante est conduite à partir d'un exemple élémentaire issu de la mécanique du point. La structure source, formée de deux masses  $m_{s1}$  et  $m_{s2}$ , est soumise à une sollicitation ponctuelle  $f_s$ . Le choix de deux masses s'est imposé pour distinguer le point d'application de la sollicitation du point de couplage

avec l'accueil. Le schéma d'ensemble est présenté sur la figure 2.1. Les notations  $m_i$  se rapportent à des masses,  $c_i$  à des amortissements visqueux,  $k_i$  à des raideurs de ressort et  $x_i$  représentent des déplacements.

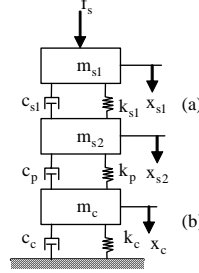


FIGURE 2.1 – Modèle élémentaire de couplage de deux structures; (a) le sous-système source, (b) le récepteur

La prédiction consiste à écrire la force  $f_c$  appliquée à la masse  $m_c$  sous l'action de la sollicitation  $f_s$ . La seconde Loi de Newton appliquée à chaque masse donne le système d'équations :

$$\begin{cases} m_{s1}\ddot{x}_{s1} - c_s(\dot{x}_{s2}(t) - \dot{x}_{s1}(t)) - k_s(x_{s2}(t) - x_{s1}(t)) & = f_s(t) \\ m_{s2}\ddot{x}_{s2} + c_s(\dot{x}_{s2}(t) - \dot{x}_{s1}(t)) + k_s(x_{s2}(t) - x_{s1}(t)) - c_p(\dot{x}_c(t) - \dot{x}_{s2}(t)) - k_p(x_c(t) - x_{s2}(t)) & = 0 \\ m_c\ddot{x}_c + c_p(\dot{x}_c(t) - \dot{x}_{s2}(t)) + c_c\dot{x}_c(t) + k_p(x_c(t) - x_{s2}(t)) + k_cx_c(t) & = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

En régime harmonique le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} -\omega^2 m_{s1} x_{s1} - i\omega c_s (x_{s2} - x_{s1}) - k_s (x_{s2} - x_{s1}) & = f_s \\ -\omega^2 m_{s2} x_{s2} + i\omega c_s (x_{s2} - x_{s1}) + k_s (x_{s2} - x_{s1}) - i\omega c_p (x_c - x_{s2}) - k_p (x_c - x_{s2}) & = 0 \\ -\omega^2 m_c x_c + i\omega c_p (x_c - x_{s2}) + i\omega c_c x_c + k_p (x_c - x_{s2}) + k_c x_c & = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

ou encore

$$\begin{cases} (-\omega^2 m_{s1} + i\omega c_s + k_s) x_{s1} - (i\omega c_s + k_s) x_{s2} & = f_s \\ -(i\omega c_s + k_s) x_{s1} + (-\omega^2 m_{s2} + i\omega c_s + k_s) x_{s2} - (i\omega c_p + k_p) (x_c - x_{s2}) & = 0 \\ (-\omega^2 m_c + i\omega c_c + k_c) x_c + (i\omega c_p + k_p) (x_c - x_{s2}) & = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

La première ligne de (2.3) conduit à l'égalité :

$$x_{s1} = \frac{1}{-\omega^2 m_{s1} + i\omega c_s + k_s} [f_s + (i\omega c_s + k_s) x_{s2}] \quad (2.4)$$



L'insertion de l'égalité (2.4) dans la seconde équation de (2.3) permet d'éliminer la première équation :

$$\begin{cases} -\frac{i\omega c_s + k_s}{-\omega^2 m_{s1} + i\omega c_s + k_s} [f_s + (i\omega c_s + k_s)x_{s2}] + (-\omega^2 m_{s2} + i\omega c_s + k_s)x_{s2} - (i\omega c_p + k_p)(x_c - x_{s2}) & = 0 \\ (-\omega^2 m_c + i\omega c_c + k_c)x_c + (i\omega c_p + k_p)(x_c - x_{s2}) & = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ou encore

$$\begin{cases} \left( -\frac{(i\omega c_s + k_s)^2}{-\omega^2 m_{s1} + i\omega c_s + k_s} + (-\omega^2 m_{s2} + i\omega c_s + k_s) \right) x_{s2} - (i\omega c_p + k_p)(x_c - x_{s2}) & = \frac{i\omega c_s + k_s}{-\omega^2 m_{s1} + i\omega c_s + k_s} f_s \\ (-\omega^2 m_c + i\omega c_c + k_c)x_c + (i\omega c_p + k_p)(x_c - x_{s2}) & = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Le système (2.6) est réécrit comme suit :

$$\begin{cases} a_s x_{s2} - a_p (x_c - x_{s2}) & = \tilde{f}_s \\ a_c x_c - a_p (x_c - x_{s2}) & = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où les nouvelles notations de (2.7) sont connues grâce à (2.6). Comme les inconnues sont les déplacements, ils sont mis en évidence ici :

$$\begin{cases} (a_s + a_p)x_{s2} - a_p x_c & = \tilde{f}_s \\ -a_p x_{s2} + (a_p + a_c)x_c & = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

La résolution de ce système se fait par substitution de la première équation dans la seconde :

$$x_{s2} = \frac{1}{a_s + a_p} (a_p x_c + \tilde{f}_s) \quad (2.9)$$

L'expression de  $x_{s2}$  dans (2.9) insérée dans (2.8) donne :

$$-\frac{a_p}{a_s + a_p} (a_p x_c + \tilde{f}_s) + (a_p + a_c)x_c = 0 \quad (2.10)$$

La force  $f_c = a_c x_c$  que subit la masse  $m_c$  à cause de la force imposée  $\tilde{f}_s$  vaut :

$$f_c = \frac{1}{a_c^{-1} + a_p^{-1} + a_s^{-1}} a_s^{-1} \tilde{f}_s \quad (2.11)$$

L'écriture (2.11) en termes d'inertance requiert la transformation  $a_i^{-1} = -\frac{1}{\omega^2} y_i$  ; sauf pour la raideur et l'amortissement de l'interface. Tenant compte de ces remarques, (2.11) devient :

$$f_c = \frac{1}{-\omega^2 a_p^{-1} + y_c + y_s} y_s \tilde{f}_s \quad (2.12)$$

Notant

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_s &= y_s \tilde{f}_s \\ y_c &= \frac{-\omega^2}{-\omega^2 m_c + i\omega c_c + k_c} \\ y_s &= \frac{-\omega^2 m_{s1} + i\omega c_s + k_s}{-\omega^2 m_{s1} m_{s2} + (m_{s1} + m_{s2})(i\omega c_s + k_s)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

La prédiction se traduit par la relation

$$f_c = \frac{1}{-\omega^2 a_p^{-1} + y_c + y_s} \tilde{\gamma}_s \quad (2.14)$$

La relation (2.14) est une équation linéaire par rapport à  $\tilde{\gamma}_s$ . Ici sont présentes les caractéristiques de chaque structure au niveau de l'interface et un terme source  $\tilde{\gamma}_s$  qui ne dépend pas du récepteur. Une façon de caractériser ce terme source est de disposer d'un autre montage comportant la structure vibrante installée sur une structure d'accueil connue et où l'on mesure la force  $f_b$  appliquée à cette dernière.

### 2.2.2 Approche générale par des techniques de sous-structuration

Suite à la configuration élémentaire décrite ci-dessus, soient maintenant deux structures déformables (figure 2.2) : (F) la source et (C) la structure d'accueil qui est passive. Chaque structure possède des degrés de liberté internes, et des degrés de liberté à l'interface. L'interface I permet de raccorder (F) et (C) en des points appelés points d'interface. Elle est dite mixte car ici certains liens entre les points d'interface sont rigides et d'autres sont élastiques. La source (F) et les liens existent matériellement et pourront être soumis à des mesures. En revanche la structure d'accueil n'est pas toujours disponible. Mais on dispose alors de données souvent issues de modèles numériques.

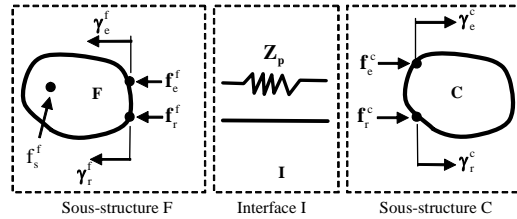


FIGURE 2.2 – Schéma élémentaire de couplage de deux structures déformables.

La structure (F) possède des points d'interface et d'autres points appelés points internes. Les notations d'efforts  $\mathbf{f}$  et d'accélération  $\gamma$  qui portent sur des points internes ont un indice  $s$ , celles qui portent sur un point d'interface ont un indice  $r$  si le lien est rigide, et un indice  $e$  si le lien est élastique. Les notations comportent un exposant pour indiquer la structure à laquelle elles font référence. L'écriture des fonctions de transfert  $\mathbf{Y}$  entre les efforts et les accélérations comporte deux indices qui désignent le point d'excitation et le point de réponse, et un exposant qui désigne la structure. Avec cette notation, le comportement vibratoire de la source est donné par le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ee}^F & \mathbf{Y}_{er}^F & \mathbf{Y}_{es}^F \\ \mathbf{Y}_{re}^F & \mathbf{Y}_{rr}^F & \mathbf{Y}_{rs}^F \\ \mathbf{Y}_{se}^F & \mathbf{Y}_{sr}^F & \mathbf{Y}_{ss}^F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^F \\ \mathbf{f}_r^F \\ \mathbf{f}_s^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e^F \\ \gamma_r^F \\ \gamma_s^F \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Les notations précédentes servent aussi pour la structure d'accueil (C). Ici, seuls les points d'interface sont considérés. Le comportement vibratoire de l'accueil est décrit par le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ee}^C & \mathbf{Y}_{er}^C \\ \mathbf{Y}_{re}^C & \mathbf{Y}_{rr}^C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e^C \\ \gamma_r^C \end{pmatrix}, \text{ou encore } \mathbf{Y}_e^C \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e^C \\ \gamma_r^C \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Les inconnues sont les efforts  $\mathbf{f}_e^C$  et  $\mathbf{f}_r^C$  qu'il faut prédire à partir de la sollicitation  $\mathbf{f}_s^F$ .

Les liaisons élastiques seront représentées sous la forme d'impédance (par abus de langage puisqu'une impédance est un rapport force/vitesse et non force/déplacement). En négligeant l'effet de la masse des joints [14], on a, pour une pulsation  $\omega$  donnée :

$$-\frac{1}{\omega^2} \times \begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p \\ \mathbf{Z}_p & -\mathbf{Z}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_e^F \\ \gamma_e^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{f}_e^F \\ -\mathbf{f}_e^C \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Les conditions de compatibilité et d'équilibre [14] permettent de traduire les liaisons rigides par les équations :

$$\gamma_r^F = \gamma_r^C, \mathbf{f}_r^F = -\mathbf{f}_r^C \quad (2.18)$$

En vue d'établir le modèle prédictif, l'élimination des accélérations présentes dans les relations (2.15), (2.16) et (2.17) est un passage obligé. Le processus d'élimination n'est pas direct car l'équation (2.17) ne peut s'écrire en termes d'inertance (la matrice n'est pas inversible) et on est en présence d'un mélange d'écritures. La deuxième ligne de l'équation (2.17) donne :

$$\gamma_e^F = \gamma_e^C + \omega \mathbf{Z}_p^{-1} \mathbf{f}_e^C \quad (2.19)$$

Regroupant la relation (2.19) et la première égalité de la relation (2.18), il vient :

$$\begin{pmatrix} \gamma_e^F \\ \gamma_r^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e^C \\ \gamma_r^C \end{pmatrix} + \omega^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_p^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}^p} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Les deux premières lignes de la relation (2.15) s'écrivent :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ee}^F & \mathbf{Y}_{er}^F \\ \mathbf{Y}_{re}^F & \mathbf{Y}_{rr}^F \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}^F} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^F \\ \mathbf{f}_r^F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{es}^F \\ \mathbf{f}_{rs}^F \end{pmatrix} \mathbf{f}_s^F = \begin{pmatrix} \gamma_e^F \\ \gamma_r^F \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Par ailleurs, les efforts aux interfaces des joints sont de sens contraires [14] :

$$\mathbf{f}_e^F = -\mathbf{f}_e^C \quad (2.22)$$

La deuxième égalité de la relation (2.18), prise conjointement avec 2.22, se regroupent ainsi :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^F \\ \mathbf{f}_r^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Les relations (2.20), (2.21) et (2.23) donnent :

$$(\mathbf{Y}^C + \mathbf{Y}^F - \omega^2 \mathbf{H}^p) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{es}^F \\ \mathbf{Y}_{rs}^F \end{pmatrix} \mathbf{f}_s^F \quad (2.24)$$

La relation (2.24) est de la forme (2.14) à une inversion près, et le membre de droite est homogène à une accélération. Cette accélération ne dépend ni de la structure d'accueil (C), ni des caractéristiques des liens qui sont à l'interface des deux structures. Par ailleurs, la relation (2.24) se présente sous la forme d'un système d'équations :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} = \mathbf{z} \quad (2.25)$$

L'objectif  $\mathbf{z}$  ne dépend que des caractéristiques internes de la structure source. Comme la sollicitation  $\mathbf{f}_s^F$  et la matrice rectangulaire  $\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{es}^F \\ \mathbf{Y}_{rs}^F \end{pmatrix}$  ne sont pas toujours connues, le calcul de  $\mathbf{z}$  s'opère par un problème inverse qui consiste à mesurer la force  $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^B \\ \mathbf{f}_r^B \end{pmatrix}$  appliquée à une structure d'accueil connue (B).

Précisément, le système d'équations suivant est résolu :

$$(\mathbf{Y}^B + \mathbf{Y}^F - \omega^2 \mathbf{H}^p)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{es}^F \\ \mathbf{Y}_{rs}^F \end{pmatrix} \mathbf{f}_s^F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^B \\ \mathbf{f}_r^B \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Ainsi, les efforts appliqués à l'interface de la structure d'accueil (C) seront prédits à l'aide du système :

$$(\mathbf{Y}^C + \mathbf{Y}^F - \omega^2 \mathbf{H}^p) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} = (\mathbf{Y}^B + \mathbf{Y}^F - \omega^2 \mathbf{H}^p) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^B \\ \mathbf{f}_r^B \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Si la matrice somme, présente au membre de gauche de (2.27) est inversible, il vient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix} = (\mathbf{Y}^C + \mathbf{Y}^F - \omega^2 \mathbf{H}^p)^{-1} (\mathbf{Y}^B + \mathbf{Y}^F - \omega^2 \mathbf{H}^p) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^B \\ \mathbf{f}_r^B \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

## 2.3 Prédiction des efforts en présence d'au moins trois structures couplées

Le présent paragraphe traite de la prédiction des efforts en présence d'au moins trois structures couplées. La prédiction repose sur le formalisme précédent et nécessite, quel que soit le nombre de structures en présence, de se ramener au couplage de deux structures équivalentes dont une active et une passive. À cet effet, l'assemblage de plusieurs structures par des techniques de sous-structuration est étudié en préliminaire.

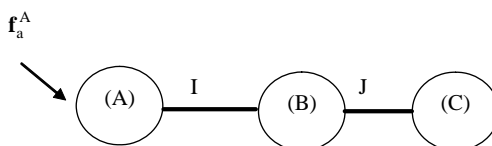


FIGURE 2.3 – Schéma élémentaire de couplage de trois structures

L'assemblage de deux structures par des techniques de sous-structuration a été étudié entre autre par Jetmundsen et al. [13]. Les auteurs proposent également une formule de synthèse de structures générale qui est utilisée ici. Une démonstration de la formule de synthèse de deux structures est proposée en annexe 7.1. Liu et Ewins [14] ont aussi abordé la question de l'assemblage de deux structures, en apportant des traitements numériques au niveau des interfaces.

Pour la mise en œuvre, l'exemple de la prédiction des efforts en présence de trois structures (A), (B) et (C) est présenté figure 2.3. La structure (A) est connectée à (B) au niveau de l'interface I et

(B) est connectée à (C) au niveau de l'interface J. Les structures (B) et (C) sont passives, la structure (A) est active. D'abord la structure active (A) est couplée avec (B) pour obtenir une structure active équivalente (AB). Puis, la structure (AB) est couplée avec la structure (C); ce qui permet d'exploiter l'idée qui a conduit à la relation (2.24) et ainsi de prédire les efforts appliqués à la structure passive (C).

### 2.3.1 Synthèse de deux structures liées rigidement

En préliminaire, la synthèse de deux structures (G) et (H) raccordées au niveau d'une interface I (figure 2.4) est effectuée. Les matrices des fonctions de transfert des structures (G) et (H) s'écrivent

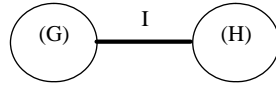


FIGURE 2.4 – Schéma de couplage de deux structures

respectivement :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{gg}^G & \mathbf{Y}_{gi}^G \\ \mathbf{Y}_{ig}^G & \mathbf{Y}_{ii}^G \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{hh}^H & \mathbf{Y}_{hi}^H \\ \mathbf{Y}_{ih}^H & \mathbf{Y}_{ii}^H \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

La formule de synthèse des structures (G) et (H) donnée ci-après est démontrée en annexe 7.1 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{gg}^{GH} & \mathbf{Y}_{gi}^{GH} & \mathbf{Y}_{gh}^{GH} \\ \mathbf{Y}_{ig}^{GH} & \mathbf{Y}_{ii}^{GH} & \mathbf{Y}_{ih}^{GH} \\ \mathbf{Y}_{hg}^{GH} & \mathbf{Y}_{hi}^{GH} & \mathbf{Y}_{hh}^{GH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{gg}^G & \mathbf{Y}_{gi}^G & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{ig}^G & \mathbf{Y}_{ii}^G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{hh}^H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{gi}^G \\ \mathbf{Y}_{ii}^G \\ -\mathbf{Y}_{hi}^H \end{pmatrix} (\mathbf{Y}_{ii}^G + \mathbf{Y}_{ii}^H)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{gi}^G \\ \mathbf{Y}_{ii}^G \\ -\mathbf{Y}_{hi}^H \end{pmatrix}^t \quad (2.30)$$

En fait les liens des degrés de liberté notés «gh»(ou «hg») signifient «gi» puis «ii» puis «ih» (ou «hi» suivi de «ii» suivi de «ig»).

Pour aboutir à la relation (2.30), il a été fait choix que l'interface I est portée par la structure (G). Si l'interface est portée par (H), alors une expression équivalente est obtenue.

Reprenant la configuration de la figure 2.3, les matrices des fonctions de transfert des structures (A) et (B) s'écrivent respectivement :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{bb}^B & \mathbf{Y}_{bj}^B & \mathbf{Y}_{bi}^B \\ \mathbf{Y}_{jb}^B & \mathbf{Y}_{jj}^B & \mathbf{Y}_{ji}^B \\ \mathbf{Y}_{ib}^B & \mathbf{Y}_{ij}^B & \mathbf{Y}_{ii}^B \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Si seules les structures (A) et (B) sont reliées, alors les degrés de liberté aux interfaces indicés  $j$  dans (2.31) appartiennent en fait aux ddl intérieurs (c'est-à-dire autres que ceux mentionnés par l'indice  $i$ ). Dans ces conditions, posant  $\tilde{b} = b \cup j$ , il s'ensuit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{bb}^B & \mathbf{Y}_{bj}^B & \mathbf{Y}_{bi}^B \\ \mathbf{Y}_{jb}^B & \mathbf{Y}_{jj}^B & \mathbf{Y}_{ji}^B \\ \mathbf{Y}_{ib}^B & \mathbf{Y}_{ij}^B & \mathbf{Y}_{ii}^B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\tilde{b}\tilde{b}}^B & \mathbf{Y}_{\tilde{b}i}^B \\ \mathbf{Y}_{i\tilde{b}}^B & \mathbf{Y}_{ii}^B \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Puis, suite à (2.30)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^{AB} & \mathbf{Y}_{ai}^{AB} & \mathbf{Y}_{ab}^{AB} \\ \mathbf{Y}_{ia}^{AB} & \mathbf{Y}_{ii}^{AB} & \mathbf{Y}_{ib}^{AB} \\ \mathbf{Y}_{ba}^{AB} & \mathbf{Y}_{bi}^{AB} & \mathbf{Y}_{bb}^{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\tilde{b}\tilde{b}}^B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{ii}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^A \end{pmatrix} (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{ii}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^A \end{pmatrix}^t \quad (2.33)$$

### 2.3.1.1 Extraction du cas particulier à partir d'une formule générale

On propose de retrouver la formule (2.33) à partir d'une formule générale de synthèse de structures indiquée dans l'article de Jetmundsen et al. [13]. La formule en question s'écrit :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{\alpha\alpha} - \mathbf{M}_{(\mathbb{H})} \mathbf{Y}_{\alpha\gamma} \left( \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^t)_{(\mathbb{H})} \mathbf{Y}_{\gamma\gamma}^i \right)^{-1} (\mathbf{M}_{(\mathbb{H})} \mathbf{Y}_{\alpha\gamma})^t \quad (2.34)$$

Elle fournit la matrice  $\mathbf{Y}$  d'une structure formée de l'assemblage de  $n$  sous-structures. Plus précisément :

$\alpha$  représente l'ensemble des degrés de liberté internes d'une structure ;

$\gamma$ , l'ensemble des ddl d'interface d'une structure ;

$\mathbf{Y}$ , la matrice de mobilité du système assemblé ;

$\mathbf{Y}_{\alpha\alpha}$ , une matrice diagonale par blocs. Chaque sous matrice est associée à une structure donnée et représente l'ensemble des fonctions de transfert entre ddl internes ;

$\mathbf{M}$ , la matrice de mapping de l'assemblage ;

$m_i$ , le  $i$  ième vecteur colonne de la matrice  $\mathbf{M}$  (voir plus loin) ;

$(\mathbb{H})$ , un opérateur particulier de multiplication de matrices, appelé «produit de Hadamard» (voir plus loin) ;

$\mathbf{Y}_{\alpha\gamma}$ , la matrice dont chaque ligne est associée à une structure et dont les sous matrices représentent les fonctions de transfert entre ddl internes et ddl d'interface ;

$\mathbf{Y}_{\gamma\gamma}^i$ , la matrice des fonctions de transfert entre ddl internes pour la structure  $i$  ;

$n$ , le nombre de structures à assembler.

La mise œuvre nécessite de choisir un sens de lecture de l'assemblage des structures. Ce sens est indiqué par des flèches et par une convention arbitraire de signes. Ici, la queue d'une flèche est affectée d'un signe «+» tandis que la pointe est affectée d'un signe «-» (figure 2.5).

L'étape de deux structures sera suivie, après avoir prédit les efforts, d'une généralisation à un nombre quelconque de structures et pour des configurations autres que le couplage en cascade.

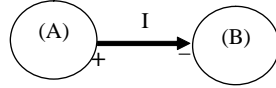


FIGURE 2.5 – Schéma de couplage de deux structures

Les matrices des fonctions de transfert de (A) et (B) sont respectivement notées :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{bb}^B & \mathbf{Y}_{bi}^B \\ \mathbf{Y}_{ib}^B & \mathbf{Y}_{ii}^B \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

L'usage de la formule (2.34) nécessite entre autre de construire l'ensemble des ddl internes  $\alpha$  et externes  $\gamma$  pour chaque structure. Pour la structure (A) ces ensembles sont respectivement  $\alpha = \{a\}$  et  $\gamma = \{i\}$  ; pour la structure (B), ils sont :  $\alpha = \{b\}$  et  $\gamma = \{i\}$ . Les matrices des fonctions de transfert définies dans la formule (2.34) valent ici :

$$\mathbf{Y}_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_{bb}^B \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_{\alpha\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{bi}^B \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_{\gamma\gamma}^1 = \mathbf{Y}_{ii}^A \text{ et } \mathbf{Y}_{\gamma\gamma}^2 = \mathbf{Y}_{ii}^B \quad (2.36)$$

La matrice de mapping  $\mathbf{M}$  indique la répartition des interfaces pour chaque structure qui participe à l'assemblage. C'est une matrice booléenne. Chaque colonne de  $\mathbf{M}$  correspond à une interface, et chaque ligne à une structure. Ici, il y a une interface et deux structures : la matrice de mapping est donc un vecteur colonne à deux composantes. Cependant, pour rester au plus près du cadre général, le terme de *matrice* sera conservé. La matrice  $\mathbf{M}$  s'écrit :



$$\mathbf{M} = \begin{matrix} I \\ \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \quad (2.37)$$

Cette colonne de deux lignes pourrait aussi être notée  $[\mathbf{I}, -\mathbf{I}]^t$ , une matrice permettant la multiplication de matrices terme à terme avec une matrice de même dimension.

Les signes proviennent de la convention arbitraire choisie. Notant  $\mathbf{m}_1^t$  et  $\mathbf{m}_2^t$  respectivement les première et deuxième de ligne  $\mathbf{M}$ , il vient :

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_1^t = 1 \text{ et } \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2^t = 1 \quad (2.38)$$

Soit une matrice  $\mathbf{U}$ , «produit» de  $\mathbf{M}$  avec  $\mathbf{Y}_{\alpha\gamma}$  :

$$\mathbf{U} = \mathbf{M} \circledast \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{bi}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^B \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

Suite à (2.34), la matrice de synthèse des fonctions de transfert du système assemblé  $\mathbf{Y}^{AB}$  vaut :

$$\mathbf{Y}^{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{bb}^B \end{pmatrix} - \mathbf{U} \cdot \left( \sum_{i=1}^2 \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_i^t \circledast \mathbf{Y}_{\gamma\gamma}^i \right)^{-1} \cdot \mathbf{U}^t, \quad (2.40)$$

soit

$$\mathbf{Y}^{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{bb}^B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^B \end{pmatrix} (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^B \end{pmatrix}^t \quad (2.41)$$

Dans l'écriture (2.41), l'interface I est déjà portée par la structure (A). En fait l'indice  $a$  représente ici  $a \cup i$ . Compte tenu de cette remarque, l'écriture (2.41) correspond à (2.33).

### 2.3.2 Prédiction des efforts

La prédiction des efforts appliquée à la structure (C) raccordée à la structure vibrante (AB) (figure 2.6) s'effectue à l'aide du développement (2.24). La différence est qu'ici l'interface est entièrement rigide. Il est supposé que la sollicitation notée  $\mathbf{f}_f^{AB}$  s'applique aux ddl d'indice  $f$ . Utilisant (2.24), il vient :

$$(\mathbf{Y}_{kk}^{AB} + \mathbf{Y}_{kk}^C) \mathbf{Y}_k^C = \mathbf{Y}_{kf}^{AB} \mathbf{f}_f^{AB} \quad (2.42)$$

La matrice  $\mathbf{Y}_{kk}^C$  désigne la matrice des fonctions de transfert de la structure (C) au niveau de l'interface K.

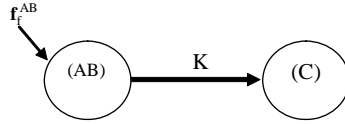


FIGURE 2.6 – Couplage d'une structure active et d'une structure passive

### 2.3.3 Synthèse de structures liées rigidement : cadre général

La formule de synthèse de structures proposée par Jetmundsen et al. [13] est mise en œuvre ici sur un modèle simplifié d'hélicoptère, constitué de quatre structures notées (A), (B), (C) et (D) (figures 2.6.a). Ces structures représentent respectivement le fuselage avant, le fuselage arrière, la turbine et la boîte de transmission. Le fuselage avant (A) est relié au fuselage arrière (B) par l'interface I, à la turbine (C) par l'interface M et à la boîte de transmission (D) par l'interface L. La turbine (C) est reliée au fuselage arrière (B) par l'interface J, et à la boîte de transmission (D) par l'interface K.

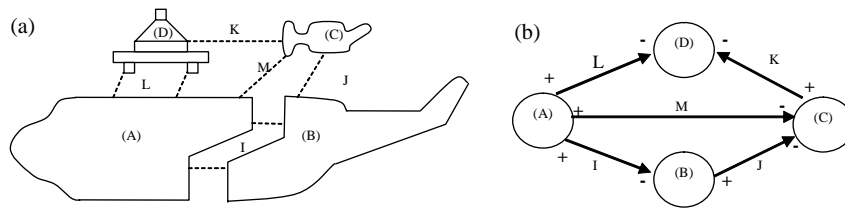


FIGURE 2.7 – (a) Schéma simplifié du fuselage d'un hélicoptère ; (b) représentation symbolique des sous-ensembles

#### 2.3.3.1 Choix d'un sens de lecture de l'assemblage des structures et construction d'une matrice de mapping

Le sens de lecture de l'assemblage des structures est indiqué par des flèches (figure 2.7.b), et par une convention arbitraire de signes. La matrice de mapping  $\mathbf{M}$  s'écrit :

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & I & J & K & L & M \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & A \\ & B \\ & C \\ & D \end{matrix} \quad (2.43)$$

La matrice de synthèse des quatre éléments ne sera pas calculée. Pour alléger les notations et rester malgré tout au plus près du cadre général, il est fait choix de synthétiser les structures (A), (B) et (C) uniquement. La mise en œuvre qui va suivre concerne donc cet assemblage.

### 2.3.3.2 Synthèse de trois sous-structures

Les structures (A), (B) et (C) et leurs interfaces sont présentées sur la figure 2.8.a. La convention de lecture est présentée sur la figure 2.8.b.

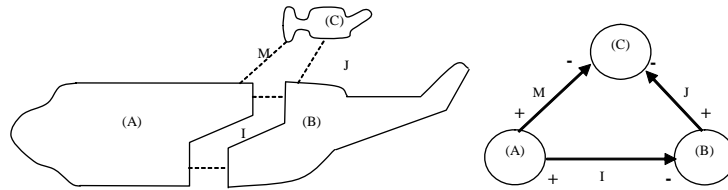


FIGURE 2.8 – (a) Couplage de 3 éléments du fuselage; (b) représentation symbolique

Les matrices des fonctions de transfert des structures (A), (B) et (C) s'écrivent respectivement :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A & \mathbf{Y}_{am}^A \\ \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A & \mathbf{Y}_{im}^A \\ \mathbf{Y}_{ma}^A & \mathbf{Y}_{mi}^A & \mathbf{Y}_{mm}^A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{bb}^B & \mathbf{Y}_{bi}^B & \mathbf{Y}_{bj}^B \\ \mathbf{Y}_{ib}^B & \mathbf{Y}_{ii}^B & \mathbf{Y}_{ij}^B \\ \mathbf{Y}_{jb}^B & \mathbf{Y}_{ji}^B & \mathbf{Y}_{jj}^B \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{cc}^C & \mathbf{Y}_{cj}^C & \mathbf{Y}_{cm}^C \\ \mathbf{Y}_{jc}^C & \mathbf{Y}_{jj}^C & \mathbf{Y}_{jm}^C \\ \mathbf{Y}_{mc}^C & \mathbf{Y}_{mj}^C & \mathbf{Y}_{mm}^C \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Suivant la convention de signes choisie pour l'assemblage, la matrice de mapping vaut :

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & I & J & M \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & A \\ & B \\ & C \end{matrix} \quad (2.45)$$

Notant  $m_1^t$ ,  $m_2^t$  et  $m_3^t$  respectivement les première, deuxième et troisième lignes de  $\mathbf{M}$ , les matrices d'interaction entre interface valent pour les structures (A), (B) et (C) respectivement :

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_1^t = \begin{matrix} & I & J & M \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} & I \\ & J \\ & M \end{matrix} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_2^t = \begin{matrix} & I & J & M \\ \begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & I \\ & J \\ & M \end{matrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{m}_3^t = \begin{matrix} & I & J & M \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \end{pmatrix} & I \\ & J \\ & M \end{matrix} \quad (2.48)$$

La matrice  $\mathbf{U}$  définie précédemment vaut ici :

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{\oplus} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{am}^A \\ \mathbf{Y}_{bi}^B & \mathbf{Y}_{bj}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{cj}^C & \mathbf{Y}_{cm}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{am}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^B & \mathbf{Y}_{bj}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_{cj}^C & -\mathbf{Y}_{cm}^C \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Les matrices  $\mathbf{Y}^1$ ,  $\mathbf{Y}^2$  et  $\mathbf{Y}^3$  valent ici :

$$\mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ii}^A & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{im}^A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{mi}^A & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{mm}^A \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ii}^B & \mathbf{Y}_{ij}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{ji}^B & \mathbf{Y}_{jj}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{jj}^C & \mathbf{Y}_{jm}^C \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{mj}^C & \mathbf{Y}_{mm}^C \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

La matrice  $\mathbf{Y}^{ABC}$  du système assemblé (ABC) vaut :

$$\mathbf{Y}^{ABC} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{bb}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{cc}^C \end{pmatrix} - \mathbf{V} \quad (2.51)$$

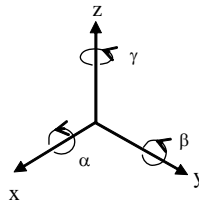
où

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{am}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^B & \mathbf{Y}_{bj}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_{cj}^C & -\mathbf{Y}_{cm}^C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B & -\mathbf{Y}_{ij}^B & \mathbf{Y}_{im}^A \\ -\mathbf{Y}_{ji}^B & \mathbf{Y}_{jj}^B + \mathbf{Y}_{jj}^C & \mathbf{Y}_{jm}^C \\ \mathbf{Y}_{mi}^A & \mathbf{Y}_{mj}^C & \mathbf{Y}_{mm}^A + \mathbf{Y}_{mm}^C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{ai}^A & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{am}^A \\ -\mathbf{Y}_{bi}^B & \mathbf{Y}_{bj}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_{cj}^C & -\mathbf{Y}_{cm}^C \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

L'interface I est portée par la structure (A), l'interface J par (B) et l'interface M par (C).

## 2.4 Prise en compte des degrés de liberté de rotation pour compléter la matrice des fonctions de transfert d'une structure

Le mouvement d'un point quelconque d'une structure est représenté par les six degrés de liberté (ddl) associés au mouvement : trois ddl de translation  $(x, y, z)$  et trois ddl de rotation  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . La figure 2.9 représente un repère dont l'origine coïncide avec le point en question.



**FIGURE 2.9 – Système de coordonnées ; les flèches définissent les ddl de translation et de rotation**

Le présent paragraphe a pour objectif de présenter une manière d'exciter une structure par un moment. L'approche souvent adoptée pour générer un moment excitant une structure est l'usage d'un couple de forces. Le développement présenté dans ce paragraphe a été conduit par Sanderson et Fredö [17]. Les forces en question sont appliquées sur un bloc rigide, appelé ici bloc d'excitation. Sur la figure 2.10.a le bloc d'excitation a la forme d'un «T», et le couple de forces est appliqué dans la direction  $x$ . Sur la figure 2.10.b le bloc d'excitation a la forme d'un «I», et le couple de forces est appliqué dans la direction  $y$ . Les schémas simplifiés de chaque configuration sont donnés respectivement sur les figures 2.10.c et 2.10.d. Il est supposé que le point d'application de l'effort coïncide avec l'origine du repère. Pour chaque configuration un point d'excitation E et un point de réponse R sont considérés sur la structure. Les efforts appliqués pour générer le moment sont notés  $f_1^T$  et  $f_2^T$  pour la configuration en 2.10.a et  $f_1^I$  et  $f_2^I$  pour la T I configuration 2.10.b. L'exposant représente la forme du bloc d'excitation. La force résultante au point d'excitation E est notée  $f_x, f_y, f_z$  selon qu'elle s'applique dans la direction  $x, y$  ou  $z$ . Le moment résultant est noté  $M_\alpha, M_\beta$  ou  $M_\gamma$  selon que la rotation est d'angle  $\alpha, \beta$  ou  $\gamma$ . Les deux blocs d'excitation ont même masse et même moment d'inertie. Les masses sont notées  $m_x, m_y$  et  $m_z$ , les moments d'inertie  $J_\alpha, J_\beta$  et  $J_\gamma$ . Le (les) capteur(s) utilisé(s) pour mesurer les déplacements et les rotations au point de réponse ont une masse totale notée  $m_x^{capt}, m_y^{capt}$  et  $m_z^{capt}$ , et un moment d'inertie noté suivant l'axe  $J_\alpha^{capt}, J_\beta^{capt}$  et  $J_\gamma^{capt}$ . Pour distinguer les déplacements et rotations aux points d'excitation E de ceux au point de réponse R, un exposant «E» ou «R» est ajouté à ces quantités.

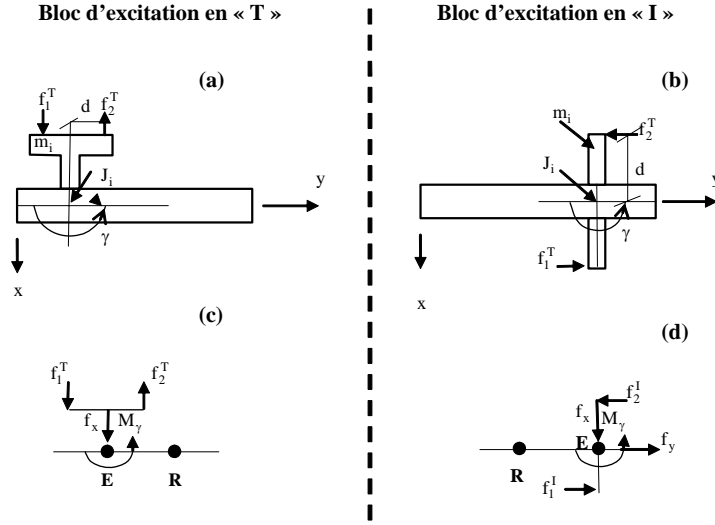


FIGURE 2.10 – Différentes manières d'exciter une structure en moments.(a) Bloc d'excitation en forme de «T» ;(b) bloc d'excitation en forme de «I» ; (c) schéma simplifié de (a) ; schéma simplifié de (b)

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué pour les translations et pour les rotations, donne au point d'excitation E, pour la configuration de type «T» :

$$\begin{aligned}
 f_x &= (f_1^T - f_2^T) - m_x \ddot{x}^E \\
 f_y &= -m_y \ddot{y}^E \\
 f_z &= -m_z \ddot{z}^E \\
 M_\alpha &= -J_\alpha \ddot{\alpha}^E \\
 M_\beta &= -J_\beta \ddot{\beta}^E \\
 M_\gamma &= (f_1^T + f_2^T) d - J_\alpha \ddot{\gamma}^E
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

au même point pour la configuration de type «I»

$$\begin{aligned}
 f_x &= -m_x \ddot{x}^E \\
 f_y &= (f_1^I + f_2^I) d - m_y \ddot{y}^E \\
 f_z &= -m_z \ddot{z}^E \\
 M_\alpha &= -J_\alpha \ddot{\alpha}^E \\
 M_\beta &= -J_\beta \ddot{\beta}^E \\
 M_\gamma &= (f_1^I + f_2^I) d - J_\gamma \ddot{\gamma}^E
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Au point de réponse R, aucun couple de forces n'est appliqué. Les équations du mouvement en

ce point diffèrent de (2.52) et (2.53) par l'absence des termes  $(f_1^T - f_2^T)$ ,  $(f_1^T + f_2^T)$ ,  $(f_1^I - f_2^I)$  et  $(f_1^I + f_2^I)$ .

## 2.5 Conclusion

Le présent chapitre a porté sur le couplage de structures en régime linéaire. L'objectif est de prédire les efforts appliqués à une structure d'accueil passive, lorsque raccordée à une structure source active. Pour prédire les efforts, il a fallu construire un modèle. Pour construire le modèle, le cas de deux structures a été traité en premier lieu. Lorsque les deux structures sont assimilées à des masses, les équations de base de la mécanique du point conduisent au modèle. En présence de deux structures déformables, des techniques de sous-structuration sont employées pour aboutir au modèle, dont les équations sont matricielles. Les équations matricielles obtenues généralisent l'écriture scalaire.

Lorsque la prédiction concerne plusieurs structures en cascade, il a été fait choix d'exploiter la formulation et les équations obtenues lors du couplage de deux structures. C'est pourquoi le problème général a été vu comme un problème équivalent à deux structures dont une active et une passive. Pour plusieurs structures couplées en étoile (dont la cascade est un cas particulier) l'écriture du problème nécessite de synthétiser plusieurs structures pour se ramener ici aussi à deux sous-structures. Pour effectuer cette synthèse, une autre formulation a été introduite. Pour la mettre en œuvre il faut définir, comme en théorie des graphes, une orientation du sens de lecture de l'assemblage et une convention arbitraire de signes. Lorsque ramenée au problème de seulement deux structures, la formule en question est équivalente aux équations obtenues par l'usage de techniques de sous-structuration.

Le modèle prédictif établi dans ce travail ne prend pas en compte les degrés de liberté de rotation. Toutefois, une manière d'exciter les structures en moment, à partir d'un couple de forces, a été présentée.

Une des suites à donner à ce chapitre serait de démontrer la formulation générale, par exemple à partir d'une méthode par récurrence. La vérification en présence de deux structures a déjà été faite.

Le couplage traité dans ce manuscrit portera sur un groupe moto ventilateur (GMV) monté sur une façade. L'ensemble est monté sur le véhicule. On est donc en présence de trois sous-structures installées en cascade et il ne sera pas utile présentement de faire appel à la formule générale pour des structures couplées en étoile. Malgré tout, lorsqu'un GMV possédera deux ventilateurs sur une même façade installée sur le châssis, on sera en même de faire appel à la formulation générale décrite plus haut.





## Chapitre 3

# Validation de l'emploi du modèle dans un contexte industriel : intégration d'un groupe moto ventilateur sur un véhicule

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de valider, dans un contexte expérimental, l'emploi du modèle établi au chapitre 2. La démarche consiste à comparer les efforts prédits aux efforts mesurés. Dans un premier temps, les paramètres du modèle seront rappelés. Chaque paramètre est une matrice ou un vecteur.

Dans un second temps, des techniques de mesure ou de calcul qui permettent de disposer de ces matrices ou vecteurs seront présentées. Les mesures sont faites sur des objets technologiques qui seront également présentés.

Dans le chapitre 2, un modèle de prédiction des efforts vibratoires transmis à une structure d'accueil raccordée à une structure source vibrante a été construit. Les paramètres de ce modèle sont la matrice inertance de la structure source, celle de la structure d'accueil, une matrice de raideur décrivant l'interface et un vecteur descripteur de source. Les inertances proviennent d'un rapport entre une accélération et un effort. La matrice de raideur décrivant l'interface s'obtient par calcul, à partir de la mesure d'accélérations (qui sont converties en déplacements) et d'efforts vibratoires au niveau de chaque extrémité de la jonction mécanique.

La structure source est un groupe moto ventilateur (GMV) monté sur une façade. L'ensemble est monté sur un véhicule. Le GMV et la façade assemblés forment le composant actif ; le véhicule est la structure d'accueil. Le composant actif est relié à la structure d'accueil par une interface comprenant des liaisons élastiques aussi appelées plots, et des liaisons rigides. La configuration décrite ici est celle qui a motivé le choix d'une interface dite «mixte» lors de l'écriture du modèle.

À cause de la complexité technologique du composant actif, ses mécanismes de fonctionnement internes sont mal connus. En conséquence, l'obtention du paramètre descripteur de source passe par un montage préliminaire où le composant actif est fixé sur une autre structure d'accueil. Cette autre structure d'accueil est un banc d'essais rigide appelé marbre. Dans le montage préliminaire, les efforts appliqués au marbre sont mesurés. Ces efforts mesurés permettent de calculer le vecteur descripteur de source (cf. chapitre 2) en résolvant un problème inverse.

À présent que les paramètres du modèle ainsi que la configuration choisie pour l'expérience sont présentés, les questions liées à l'obtention de ces paramètres peuvent être abordées.

La mesure d'une inertance nécessite un marteau d'impact et un accéléromètre. L'excitation ponctuelle de la structure se fait à l'aide du marteau d'impact ; la mesure de la réponse vibratoire se fait à l'aide de l'accéléromètre. Des travaux ont cherché à améliorer la manière d'acquérir les matrices d'inertance [18] tout autant qu'à les analyser, en particulier pour savoir si des simplifications de mesure ont ou non des conséquences notables sur la prédiction [2].

Parmi les mesures d'efforts, celles par des capteurs d'efforts, dites mesures directes d'efforts, peuvent s'avérer délicates. Des procédés d'accès par des mesures de déplacements à distance et par des mesures de transferts existent (détermination indirecte des efforts). Mais la qualité de la détermination des efforts est étroitement liée aux lieux où se font les mesures de déplacements ; il en résulte des avancées vers l'optimisation de ces positions [19].

L'accès aux efforts aux points de jonction entre l'interface et la structure d'accueil est un grand thème d'actualité aussi bien aux niveaux de la formulation, de la métrologie et de l'expérience qu'aux niveaux analytique et numérique. Beaucoup de publications vérifient les approches du problème à l'aide de simulations numériques ou de configurations expérimentales avec des structures bien décrites par des modélisations (poutres, plaques). Des études de cas réels sont aussi décrites dans la littérature [2, 3].

L'obtention des caractéristiques dynamiques des jonctions élastiques passe par la mesure des efforts et des accélérations en leurs extrémités. Les jonctions mécaniques sont en général des écrous, des rivets, de la colle ou des soudures. Mais ici, il est question uniquement de jonctions élastiques appelée plots.

Le comportement dynamique des structures mécaniques qui possèdent des jonctions dépend grandement des propriétés de ces dernières [20]. Ainsi, certaines études [21] analysent l'écart entre la prédiction et la mesure du comportement vibratoire d'un système mécanique dû à une mauvaise estimation des caractéristiques dynamiques des jonctions.

Les caractéristiques dynamiques des jonctions sont décrites par des matrices de masse, de raideur et d'amortissement visqueux et/ou structural. Celles-ci peuvent être identifiées si les jonctions relient deux structures parfaitement connues.

Lorsque le modèle de la structure est modal, il peut être difficile d'estimer les caractéristiques des jonctions si les modes de la structure sont proches et couplés.

En présence d'un modèle numérique de type éléments finis, si les non-linéarités des jonctions ne sont pas bien maîtrisées physiquement, il est difficile d'obtenir une bonne estimation des caractéristiques recherchées.

Finalement, l'approche expérimentale est le moyen le plus couramment employé. Dans ce sens, différentes pistes de réflexion ont été investiguées. Ainsi, en présence d'une seule jonction mécanique Tsai et Chou [22] ont proposé une méthode permettant d'estimer les caractéristiques de raideur et amortissement. La méthode utilisée est de type moindres carrés et s'appuie sur l'hypothèse que la masse de la jonction est négligeable devant la masse locale de la structure. De plus, si la plage de fréquences n'est pas très grande alors les principaux effets qui influencent sur les propriétés de la structure sont l'amortissement et la raideur. Ren et Beards [23] proposent une généralisation de la technique d'identification des caractéristiques des jonctions par fonctions de réponse en fréquence à des systèmes comportant à la fois des jonctions flexibles et des jonctions rigides. Les caractéristiques des jonctions sont extraites à partir de données expérimentales, après avoir établi un modèle théorique de la jonction mécanique.

L'approche expérimentale a aussi des désavantages, par exemple la difficulté de mesurer les fonctions de réponse en fréquence des degrés de liberté qui sont reliés aux jonctions [20] (les degrés de liberté d'interface). Pour contourner cette difficulté, Yang et Park [20] mesurent les fonctions de transfert du système complet qui concernent les degrés de liberté autres que ceux situés au niveau des jonctions. Disposant du modèle éléments finis du système complet sans les jonctions, ils peuvent alors estimer les fonctions de transfert non mesurées à partir de celles mesurées et du modèle numérique. Finalement, disposant d'un modèle de jonction, les paramètres sont estimés à partir des fonctions de réponse en fréquence mi-estimées, mi-mesurées.

La question des degrés de liberté de rotation intervient dans l'estimation des paramètres des jonctions. Pour prendre en compte ces degrés de liberté, des travaux [22, 23, 24] utilisent une méthode de type différences finies, et remplacent chaque ddl de rotation par deux ddl de translation très proches. Mais cette méthode n'est valable que jusqu'à certaines fréquences [21]. Dans d'autres cas, le modèle

de joint est un ensemble de ressorts en translation et en rotation [20, 25]. Mais les termes croisés entre ddl de translation et ddl de rotation ne sont pas estimés. Yang et al. [26] estiment la matrice des raideurs complète à partir d'un modèle éléments finis de la structure en libre-libre et d'une technique de sous-structuration. Enfin Celic et Boltezar [27] estiment également une matrice de raideur complète en s'inspirant des travaux de Ren et Beards [23, 24, 25].

Le présent chapitre s'articule comme suit : la première partie présente les essais réalisés, la seconde concerne la validation expérimentale.

Dans la première partie, les mesures d'efforts, d'inertances et d'accélération sont présentées. Des mesures traditionnelles d'efforts (mesures directes) ont été effectuées. Les raideurs des jonctions ont été estimées à l'aide d'une méthode inspirée des travaux de Tsai et Chou [22]. Les données requises pour cette méthode sont les efforts et accélérations (rigoureusement les déplacements) aux deux extrémités de chaque jonction.

Dans la seconde partie, les résultats de mesure d'efforts sont comparés aux résultats de calcul.

## 3.2 Présentation des essais réalisés

La première partie s'articule autour d'une description assez générale des modes opératoires des mesures<sup>3</sup>. Dans le cas particulier du sous-système choisi, les instrumentations sur les structures d'accueil seront présentées.

Les mesures portent sur les efforts, les accélérations et les inertances comme cela a été mentionné en introduction. Ces mesures concernent le sous-système en fonctionnement sur le banc (pour valider la prédiction le sous-système sera également mis en fonctionnement sur le véhicule), le sous-système isolé et les structures d'accueil isolées.

### 3.2.1 Préliminaire : mesures d'efforts vibratoires par capteur d'effort

La mesure directe d'effort vibratoire par capteur d'effort sert de référence. Afin de valider ce type de mesure, un certain nombre d'essais de principe ont été réalisés en préliminaire.

La mesure des efforts vibratoires transmis au marbre et à la carrosserie se fait à l'aide de capteur d'effort. Afin de mesurer correctement les efforts dans les trois directions, le constructeur préconise d'exercer une précontrainte sur le capteur. Cette précontrainte est obtenue en serrant le capteur d'effort

---

3. Cette partie doit beaucoup à M-H. Moulet, Docteur en acoustique et Ingénieur au C.E.V.A.A. Ma contribution a été de participer à la campagne de mesure, de prendre conscience des difficultés liées à la mesure, et de préparer le transfert de données vers le logiciel matlab pour la mise en forme et les calculs. Les résultats de calculs seront discutés dans la seconde partie de ce chapitre.

entre la structure d'accueil (marbre ou véhicule) et une entretoise, le sous-système étudié étant lui-même fixé, indépendamment, de l'autre côté de l'entretoise.

Afin de connaître l'influence de l'entretoise ainsi que de son montage sur le transfert effort/effort de part et d'autre de l'entretoise, une étude préliminaire est menée. L'étude en question concerne l'influence de certains paramètres tels que le couple de serrage de la vis et le type de matériau dans lequel le capteur d'effort est serré. Le montage utilisé est représenté sur la figure 3.1.

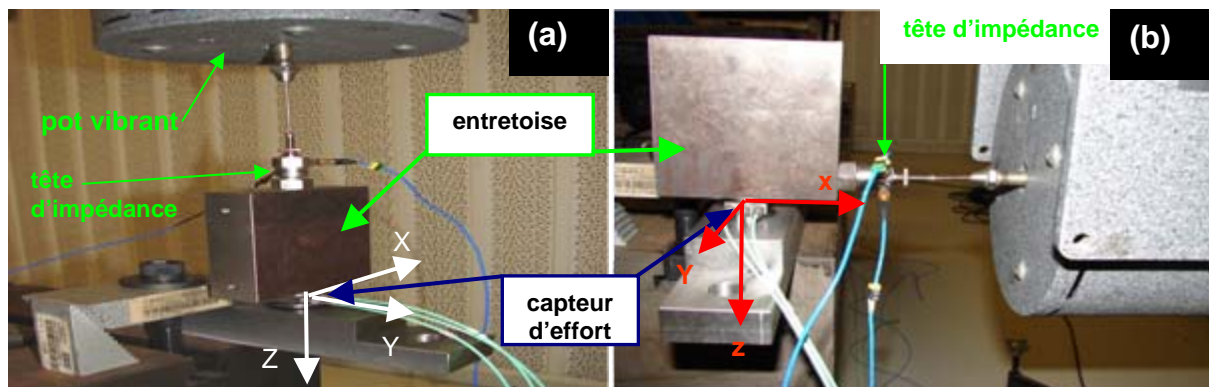


FIGURE 3.1 – montage utilisé pour l'étude préliminaire sur le capteur d'effort.(a) excitation  $+Z$  ; (b) excitation  $-X$ .

Le capteur d'effort est serré entre une platine vissée sur le marbre et une entretoise en acier. Un effort, noté  $f_{exc}$ , est appliqué à l'aide d'un pot vibrant sur l'entretoise. Pour générer cet effort, un signal de type bruit blanc est envoyé au pot vibrant. L'expérience est conduite successivement dans deux directions d'excitation :  $-X$  et  $+Z$ . Le capteur d'effort, situé à l'autre extrémité de l'entretoise, mesure un effort noté  $f_{capt}$ . Une tête d'impédance mesure l'effort  $f_{exc}$ . Le transfert d'effort au passage de l'entretoise est calculé dans un logiciel d'acquisition et pour différentes configurations.

### 3.2.1.1 Influence de la précontrainte et du niveau d'effort injecté

Afin de comprendre l'effet du couple de serrage ainsi que du niveau d'excitation, trois niveaux d'excitation sont injectés (1, 10 et 100 N, valeur RMS) pour trois couples de serrage différents (10, 20 et 30 Nm). Les transferts directs  $f_{capt}/f_{exc}$  mesurés dans la direction  $Z$  (respectivement  $X$ ) sont représentés figure 3.3 ( respectivement figure 3.3).

Les mesures dans la direction  $Z$  montrent que le transfert  $f_{capt}/f_{exc}$  est constant jusqu'à 160 Hz environ puis apparaissent différents modes du système, dont le comportement vibratoire de l'entretoise. Il en est de même pour la direction  $X$  avec une zone constante plus réduite (jusqu'à 80Hz) et l'apparition

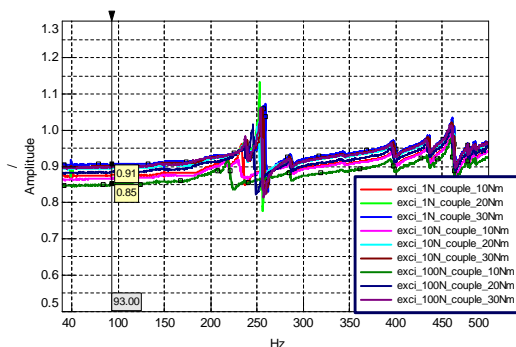


FIGURE 3.2 – transfert direct  $f_{capt}/f_{exc}$  en fonction de la fréquence dans la direction  $Z$  pour différents couples de serrage et différents niveaux d'excitation.

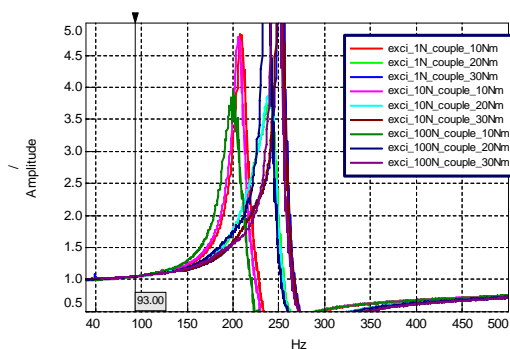


FIGURE 3.3 – transfert direct  $f_{capt}/f_{exc}$  en fonction de la fréquence dans la direction  $X$  pour différents couples de serrage et différents niveaux d'excitation.

d'un mode de basculement de la masse par rapport à la platine à partir de 150 Hz. Dans les deux cas, le transfert augmente avec le couple de serrage donc avec la précontrainte. De plus, ce transfert est plus grand pour des niveaux d'excitation de 1N que de 100N.

### 3.2.1.2 Influence du matériau et de l'état de surface

Afin de comprendre l'effet du matériau ainsi que l'influence de son état de surface en contact avec le capteur d'effort sur le transfert  $f_{capt}/f_{exc}$ , les mesures sont effectuées en serrant le capteur d'effort sur différents matériaux et supports : entretoise en acier, entretoise en aluminium, rondelle en plastique et rondelles rectifiées en acier. Le couple de serrage est égal à  $20Nm$  et l'excitation est égale à  $10N$ . Les résultats obtenus dans la direction  $Z$ , respectivement  $X$ , sont représentés figure 3.4, respectivement figure 3.5.

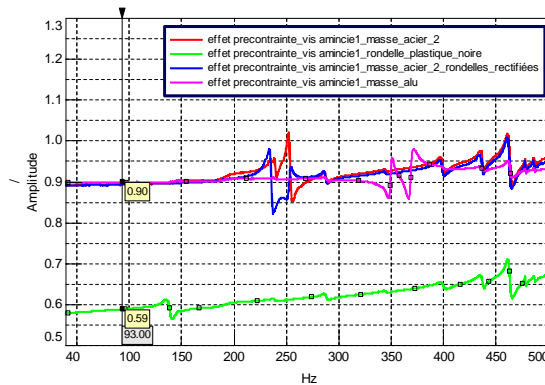


FIGURE 3.4 – transfert direct  $f_{capt}/f_{exc}$  en fonction de la fréquence dans la direction  $Z$  pour différents matériaux et états de surface.

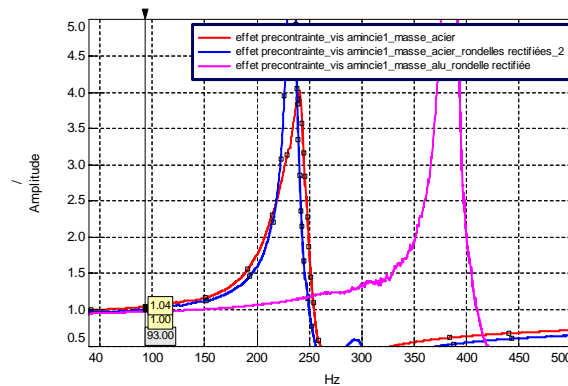


FIGURE 3.5 – transfert direct  $f_{capt}/f_{exc}$  en fonction de la fréquence dans la direction  $X$  pour différents matériaux et états de surface.

Les résultats montrent que le matériau dans lequel on serre le capteur d'effort a une très grande importance : le transfert  $f_{capt}/f_{exc}$  dans la direction  $Z$  est réduit de 40 en intercalant entre l'entretoise en acier et le capteur d'effort une rondelle en plastique. Par contre, l'influence de l'état de surface du matériau n'est pas très importante dans les deux directions. Il n'apparaît donc pas nécessaire d'utiliser des rondelles rectifiées pour le montage du capteur d'effort.

Au vu des résultats présentés dans les paragraphes précédents, il apparaît important d'utiliser une entretoise en acier ou en aluminium pour pré contraindre le capteur d'effort. L'effort n'est pas intégralement transmis par cette entretoise, c'est pourquoi il faudra prendre en compte un transfert effort sur effort entre le point d'application réel de l'effort et le point de mesure par capteur d'effort. On verra dans la suite que ce transfert dépend à la fois de l'entretoise et de la structure d'accueil.

Dans la pratique, afin d'avoir un transfert effort/effort constant et proche de l'unité, il est donc

recommandé d'avoir un bon couple de serrage, d'utiliser des interfaces en aluminium ou acier, et de rester dans le domaine des fréquences inférieures à l'ensemble des fréquences de résonance du système.

### 3.2.2 Descriptif des systèmes et conditions opératoires

Le sous-système source (ou composant actif) choisi pour valider le modèle a été fourni par un équipementier automobile pour répondre à trois exigences majeures. La première exigence est de disposer d'un support d'étude suffisamment générique pour illustrer les problématiques rencontrées par les équipementiers et les constructeurs. La deuxième exigence est que le support d'étude soit facile à mettre en œuvre sur le marbre et sur le véhicule. La troisième exigence est que le support d'étude fonctionne en basses fréquences afin de pouvoir utiliser les techniques de sous-structuration par des fonctions de réponse en fréquences.

Le fonctionnement du composant actif installé sur le banc d'essais, première structure d'accueil, fournit des efforts et des accélérations au niveau des points de raccordement des deux structures. Les efforts permettent de calculer un vecteur source, de type accélération, qui ne dépend pas de l'inertance du banc d'essais. Ce vecteur est utilisé pour la prédiction des efforts sur le véhicule. Les accélérations et les efforts permettent aussi de calculer les caractéristiques de l'interface.

La seconde structure d'accueil est un véhicule mis à disposition par un constructeur automobile. Le montage du composant actif sur le véhicule est représenté sur la figure 3.6.



**FIGURE 3.6 – implantation du composant actif sur le véhicule (photo A2MAC1).**

#### 3.2.2.1 Descriptif du composant actif

##### Généralités sur le composant actif

Le composant actif est représenté sur la figure 3.7. Il est composé du GMV, raccordé à une façade en quatre points. L'interface entre le GMV et la façade comporte quatre plots de filtration. Le GMV quant à lui est formé d'un moteur électrique et d'une hélice de 7 pales. Le balourd statique (déséquilibre d'une pièce dont le centre de gravité n'est pas dans l'axe) du GMV est égal à 55 g.mm et son balourd



dynamique à 1038 g.mm. La sollicitation du sous-système est l'effort de balourd engendré par la mise en rotation du GMV.

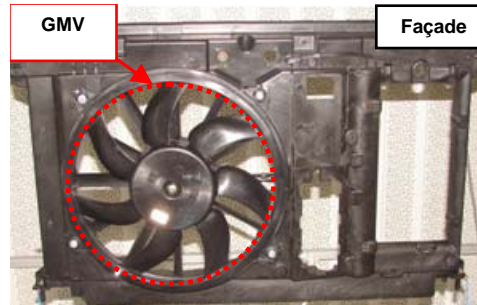


FIGURE 3.7 – fixation du GMV sur la façade.

#### Description des conditions de montage du composant actif sur le véhicule

La façade est fixée au véhicule en quatre points, appelés dans toute la suite «points d'attache» : deux points supérieurs et deux points inférieurs. Les points inférieurs permettent le raccordement de la façade à une traverse inférieure par le biais de plots oblongs de guidage (figure 3.9.b). Les points supérieurs permettent un raccordement rigide de la façade à la carrosserie. Les deux plots oblongs du bas sont insérés dans la traverse inférieure (figure 3.8). Le prolongement du point inférieur de la façade est un pion, qui se loge dans le plot oblong comme indiqué sur les figures 3.9.a-c.

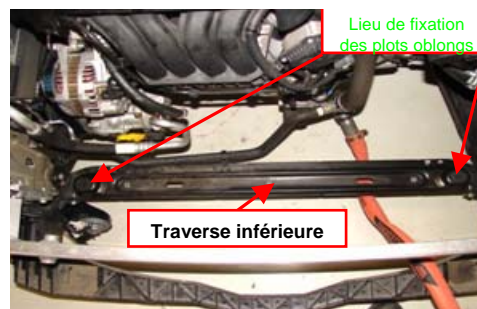


FIGURE 3.8 – traverse inférieure du véhicule.

Afin d'éviter des charges aérauliques qui seraient différentes entre le montage du sous-système sur le banc et celui sur le véhicule, on a préféré retirer les échangeurs. La figure 3.7 présente effectivement la façade sans échangeur. Les deux plots oblongs de guidage sont remplacés par deux plots filtrants ronds afin d'assurer un couplage linéaire (autant que faire se peut) entre le sous-système et la carrosserie. En effet, les plots oblongs de guidage ne sont filtrants que lorsque le pion s'appuie contre le plot et la description d'un tel phénomène est très difficile.

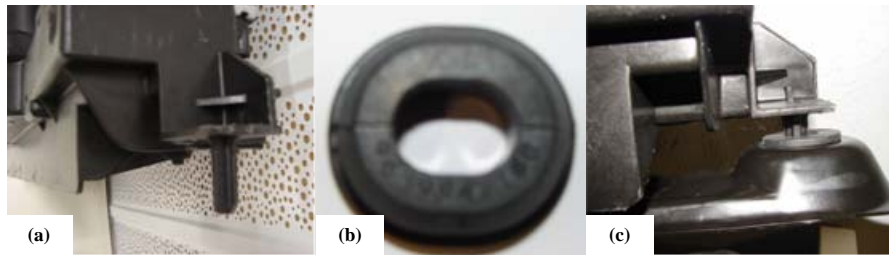


FIGURE 3.9 – (a) pion de la façade ; (b) plot oblong (b) ; (c) pion inséré dans le plot.

### Définition des référentiels de mesure pour l'acquisition de données.

Pour procéder à l'acquisition des données, un référentiel de mesure est indispensable. Ici, le repère dit «repère véhicule» d'axes  $(X, Y, Z)$ , est défini comme suit :

Longitudinal  $X$  = Longitudinal véhicule orienté positif vers l'arrière ;

Transversal  $Y$  = Transversal véhicule orienté positif vers le passager ;

Vertical  $Z$  = Vertical véhicule orienté positif vers le haut.

Lors du montage de la façade sur le véhicule, il est apparu une inclinaison de  $10^\circ$  environ entre le plan horizontal et celui de la façade portant les points supérieurs. Comme il était prévu de coller des capteurs sur ce second plan de la façade, un deuxième repère  $(x', y', z')$ , dit repère capteur, a été défini.

Disposant d'un vecteur mesuré dans le repère capteur il est possible de déduire ses composantes dans le repère véhicule. Pour cela, il suffit d'utiliser la relation matricielle suivante :

$$\mathbf{f}_{(X,Y,Z)} = \mathbf{R}\mathbf{f}_{(x',y',z')} \quad (3.1)$$

où, pour une inclinaison d'angle  $\alpha$ , la matrice  $\mathbf{R}$  de changement de repère vaut :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

#### 3.2.2.2 Installation du composant actif sur un banc d'essais

La figure 3.10 présente le montage du sous-système sur le marbre. Les 4 points d'attache sont désignés dans la suite par les noms suivants :

BD : point bas à droite ;

BG : point bas à gauche ;

HD : point haut à droite ;

HG : point haut à gauche.

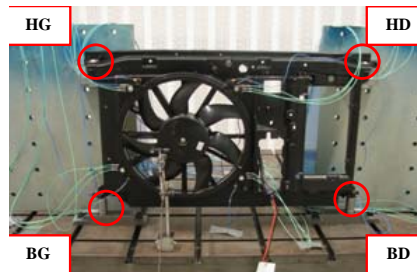


FIGURE 3.10 – installation du sous-système sur le marbre et mise en évidence des point d'attache

Les efforts sont mesurés à l'aide de capteurs d'effort ; le montage est représenté sur la figure 3.11 pour les points du bas et sur la figure 3.12 pour les points du haut. Pour appliquer la précontrainte nécessaire au bon fonctionnement du capteur d'effort, une vis traverse la platine fixée sur le marbre et le capteur d'effort et est ensuite insérée dans l'entretoise en acier. Le couple appliqué pour le serrage de cette vis est égal à  $20Nm$ .

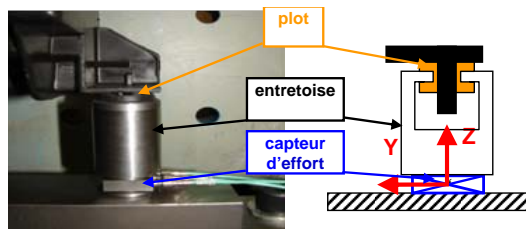


FIGURE 3.11 – montage du capteur d'effort sur le marbre pour les points BD et BG .

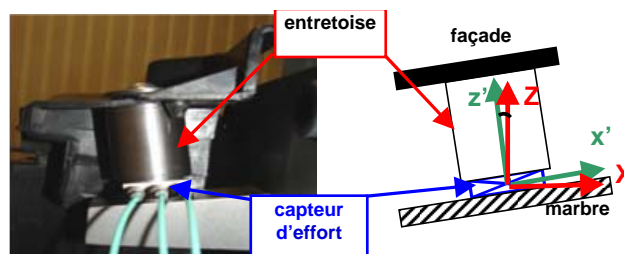


FIGURE 3.12 – montage du capteur d'effort sur le marbre pour les points HD et HG.

### 3.2.2.3 Installation du composant actif sur le véhicule

Pour valider l'usage du modèle dans ce contexte technologique, les efforts prédits seront comparés aux efforts mesurés directement sur le véhicule. Pour effectuer ces mesures d'efforts sur le véhicule, il est fait choix d'utiliser des capteurs d'effort. Conformément aux préconisations du fabricant des capteurs, une entretoise est également insérée entre dans ce montage.

Le montage qui concerne les points du bas est représenté sur la figure 3.13.a, et celui qui concerne les points du haut est représenté sur la figure 3.13.b.

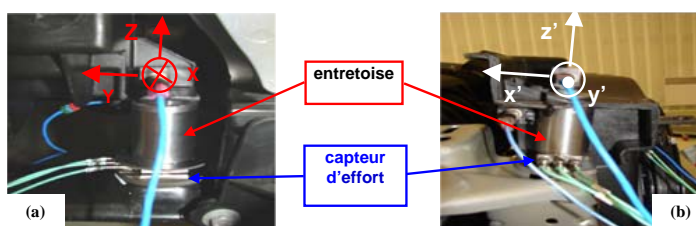


FIGURE 3.13 – montage du capteur d'effort sur le véhicule pour les points bas (a) et haut (b).

### 3.2.2.4 Pilotage et conditions de fonctionnement du GMV

Dans les conditions réelles d'utilisation, le régime de fonctionnement du GMV est égal à 3000 rpm. Pour les conditions d'essais, une montée en régime comprise entre 200 et 3200 rpm est réalisée en faisant varier la tension aux bornes d'entrée du GMV à l'aide d'un générateur. Une sonde tachymétrique par moyen optique visant une cible réfléchissante positionnée sur le GMV (figure 3.14) permet d'obtenir le régime de rotation du GMV à chaque instant.

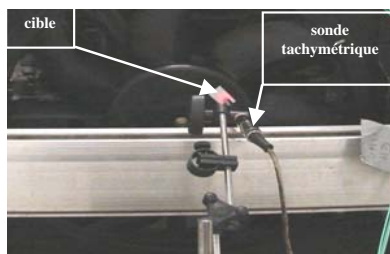


FIGURE 3.14 – positionnement de la cible et de la sonde tachymétrique.

Les amplitudes des efforts ou celles des accélérations mesurées peuvent être représentées en fonction de la vitesse de rotation du GMV et de la durée des acquisitions qui est traduite en fréquence (figure

3.15). Cette représentation met en évidence les différentes harmoniques d'excitation (raies obliques) et les fréquences de résonances (raies verticales) du véhicule. Les résultats obtenus montrent que l'ordre 1 des harmoniques (c'est-à-dire la première harmonique) est l'ordre principal (effort de balourd). L'analyse concerne cet ordre, et la plage de fréquences est 10Hz-50Hz.

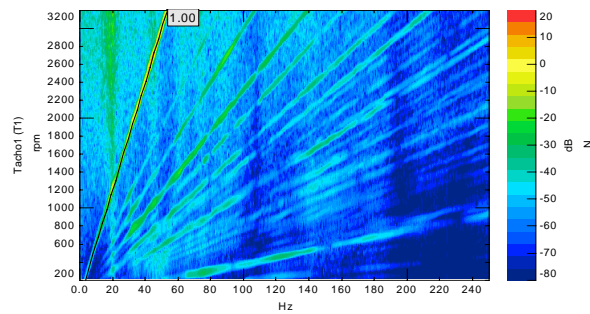


FIGURE 3.15 – représentation de l'effort transmis au véhicule en BG X en fonction de la fréquence et du régime de rotation du GMV.

### 3.2.3 Mesure des efforts lorsque le GMV est en fonctionnement

#### 3.2.3.1 Mesures préliminaires des transferts d'efforts

##### Définition de la structure d'accueil

La présence de l'entretoise empêche un contact direct entre le sous-système et le capteur d'effort. Le capteur mesure l'effort de contact  $\mathbf{f}_{capt}$  avec l'entretoise, lequel n'est pas l'effort de contact  $\mathbf{f}_{exc}$  entre l'entretoise et la façade (voir par exemple le schéma de la figure 3.12).

On décide que l'entretoise et le capteur d'effort font partie de la structure d'accueil. Le point de contact de la structure d'accueil devient le point de contact de l'entretoise avec la façade, où l'effort vaut  $\mathbf{f}_{exc}$ .

Pour connaître l'effort  $\mathbf{f}_{exc}$  à partir de l'effort mesuré  $\mathbf{f}_{capt}$ , il est nécessaire de mesurer le transfert d'efforts entre les deux points de contact mentionnés plus haut.

##### Principe de mesure du transfert d'efforts

Le terme «transfert direct local» désigne la réponse dans une direction en un point lorsque la sollicitation est au même point et dans la même direction. Le «transfert croisé local» concerne toujours le même point, mais lorsque les directions d'excitation et de mesure de la réponse sont différentes. Le terme «local» devient «lointain» lorsque la sollicitation n'est plus au même point que la réponse.

La configuration de mesure du transfert est la suivante : le sous-système n'est pas attaché à la structure d'accueil. L'excitation, noté  $\mathbf{f}_{exc}$ , est réalisée à l'aide d'un marteau d'impact au plus proche

du point d'attache sous-système/structure d'accueil (figure 3.16). Pour les points du haut, l'excitation est réalisée dans le repère capteur ( $x', y', z'$ ) et pour les points du bas, cette excitation est faite dans le repère véhicule ( $X, Y, Z$ ).

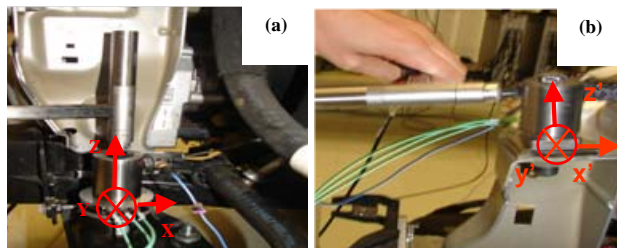


FIGURE 3.16 – (a) excitation  $-Z$  au point BG. (b) excitation  $+X$  au point HG.

### Résultats

Les mesures des transferts directs obtenus sur le marbre et sur la véhicule sont présentés figure 3.17.a pour le point BD en Z, figure 3.17.b pour le HD en Z. Sur la bande de fréquences considérée, les transferts sur le marbre sont toujours constants quelle que soit la direction d'excitation. En revanche pour les mesures sur carrosserie, seul le transfert en haut dans la direction Z est constant. Les mesures en Y et en Z pour le point bas font apparaître une résonance à 32.7 Hz.

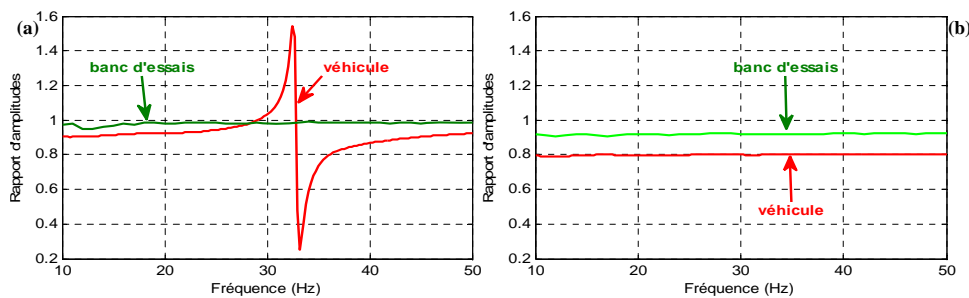


FIGURE 3.17 – transfert direct  $f_{capt}/f_{exc}$  en fonction de la fréquence. (a) : BD en Z; (b) : HD en Z.

Les transferts croisés locaux (par exemple excitation en X et réponse en Y au même point) ainsi que les transferts entre deux points différents (i.e. excitation en HD et réponse en BG, par exemple) ont également été mesurés mais ne sont pas représentés ici. Ces résultats montrent qu'il existe bien un transfert d'efforts dont on se doit de tenir compte. Lorsqu'il s'agira d'exploiter les mesures d'effort dans la seconde partie de ce chapitre, une correction d'efforts par une matrice de transfert sera systématiquement apportée.

### 3.2.3.2 Mesures des efforts transmis au marbre et à la carrosserie

#### Mesures sur marbre

Les efforts appliqués à la structure d'accueil qui comporte le marbre ont été mesurés. La figure 3.18 contient les résultats de ces mesures aux points BD et HG. Plusieurs remarques résultent de l'observation de ces courbes ainsi que celles qui ne sont pas présentées ici.

Les efforts mesurés aux points HD et HG ont des amplitudes globalement plus élevées que celles des efforts mesurés aux points BD et BG. Cela s'explique par le fait qu'aux points BD et BG les efforts sont filtrés par des plots contrairement aux points HD et HG.

Les amplitudes des efforts mesurés aux points HG et BG sont plus élevées que celles des efforts mesurés aux points HD et BD respectivement. Cela s'explique par le fait que le GMV est déporté à gauche sur la façade. Aux points à gauche, l'effort dû au balourd est donc plus important qu'aux points à droite qui sont un peu plus éloignés.

Les efforts dans la direction Z sont les plus élevés aux points hauts HD et HG. Cela s'explique par le fait que le GMV tourne dans le plan vertical. En revanche ces efforts sont les plus faibles aux points bas BD et BG, car les plots de filtration utilisés sont plus souples en compression, c'est-à-dire dans la direction Z. Les plots sont donc plus filtrants dans cette direction.

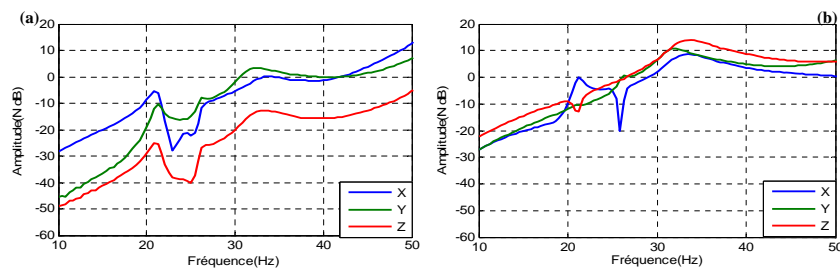


FIGURE 3.18 – ordre 1 des efforts sur banc  $f_{bcapt}$  dans les trois directions : (a) BD, (b) HG.

#### Mesures sur véhicule

Ici, le sous-système est installé sur le véhicule. Les mesures concernent les efforts appliqués au véhicule lorsque le sous-système est en fonctionnement. La figure 3.19 présente les résultats pour l'ordre 1 des harmoniques aux points BD et HG. Il apparaît ainsi que les points bas, les efforts en Z ont la plus faible amplitude.

L'analyse effectuée sur le marbre vaut pour le véhicule. On note aussi que les ordres de grandeurs des amplitudes des efforts sont les mêmes sur le marbre et sur le véhicule. Tout se passe comme si la

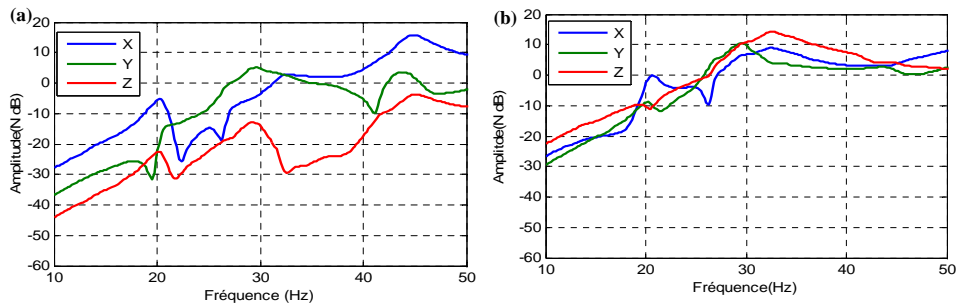


FIGURE 3.19 – ordre 1 des efforts sur véhicule  $f_{ccapt}$  dans les trois directions : (a) BD, (b) HG.

structure d'accueil était toujours la même (du point de vue comportement vibratoire).

Les mesures d'inertance qui suivent apportent des éléments de réponses quant à cette similitude de résultats.

### 3.2.4 Mesures d'inertance

On rappelle qu'une inertance est définie par un rapport entre une accélération et un effort, les deux grandeurs étant mesurées dans le système international de mesure (S.I.). On parle d'inertance ponctuelle lorsque la sollicitation et la réponse sont au même point, et d'inertance de transfert lorsque les points diffèrent. Les mesures d'inertance concernent les 4 points de fixation BD, BG, HD et HG, afin de construire les matrices complètes du composant actif seul, du véhicule seul et du marbre seul.

Pour les mesures d'inertance, on a considéré comme dans le paragraphe précédent que l'entretoise fait partie intégrante de la structure d'accueil. Les caractéristiques locales du marbre et du véhicule sont donc modifiées et les niveaux d'efforts transmis au véhicule ne sont pas exactement ceux que l'on obtiendrait en absence d'entretoises.

#### 3.2.4.1 Mesure de la matrice d'inertance $Y^M$ du sous-système libre

##### Principe de mesure

Le sous-système est suspendu par des suspensions très élastiques (sandows) pour s'approcher au mieux des conditions aux limites libres. Les accélérations aux points HD et HG sont mesurées dans le repère capteur (figure 3.20.b) alors que les accélérations aux points BD et BG sont mesurées dans le repère véhicule (figure 3.20.a). Les excitations au marteau sont dans les deux cas réalisées dans le repère véhicule.

Dans les calculs, le changement de repère ne s'appliquera donc qu'au seul vecteur accélération.



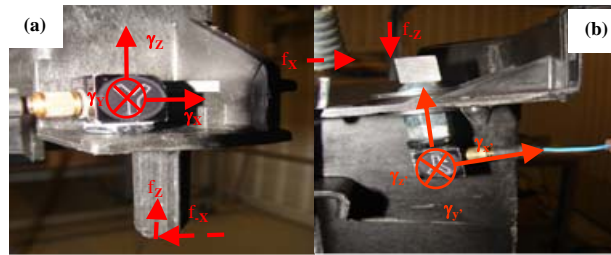


FIGURE 3.20 – position des accéléromètres et des excitations pour les mesures d'inertance du sous-système seul : (a) point BD ; (b) point HD.

### 3.2.4.2 Mesure des matrices d'inertance de la carrosserie $\mathbf{Y}^C$ et du marbre $\mathbf{Y}^B$

Les méthodes de mesure des matrices d'inertance  $\mathbf{Y}^C$  et  $\mathbf{Y}^B$  sont similaires. Dans ces conditions seules les mesures faites sur la carrosserie sont détaillées dans la suite. En fait, les mesures de  $\mathbf{Y}^B$  sont réalisées pour vérifier la grande rigidité du marbre.

#### Principe de mesure

Comme évoqué précédemment, les entretoises permettant de pré-contraindre le capteur d'effort font partie intégrante de la structure d'accueil (marbre ou carrosserie). C'est pourquoi, les accéléromètres sont placés sur ces entretoises au plus près du point de raccordement avec le sous-système. Les excitations aux points hauts sont faites dans le repère capteur (figure 3.21.a) alors que les excitations aux deux points bas sont réalisées dans le repère véhicule (figure 3.21.b).

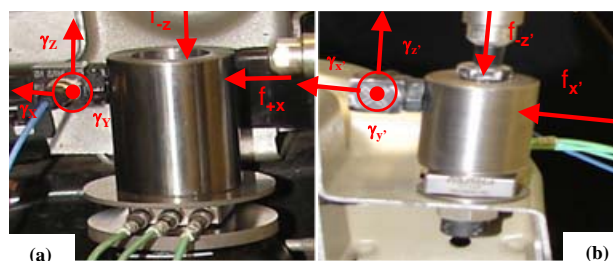


FIGURE 3.21 – position des accéléromètres et des excitations pour les mesures d'inertance de la caisse seule. (a) point BD ; (b) point HD.

### 3.2.5 Estimation de la raideur dynamique des plots.

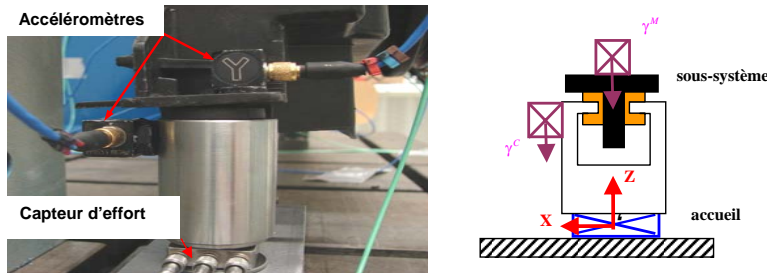
Les matrices des raideurs des plots sont calculées en utilisant deux méthodes. Pour chaque méthode, les effets de la masse du plot sont négligés.

Dans la première méthode, dite «méthode scalaire», on suppose en plus que les directions sont

découplées. Cela se traduit par une matrice des raideurs de plots diagonale. Cette méthode requiert la mesure des déplacements/accélérations aux deux extrémités de chaque plot, ainsi que les efforts appliqués à la structure d'accueil.

L'autre méthode permet de calculer tous les coefficients des matrices de raideur et amortissement, avec les mêmes données.

La figure 3.22 met en évidence les deux accéléromètres et le capteur d'effort.



**FIGURE 3.22 – position des accéléromètres pour déterminer la raideur dynamique des plots.**

Les efforts  $\mathbf{f}^C$  appliqués à la structure d'accueil se calculent à partir de la raideur des plots en utilisant, pour chaque pulsation  $\omega$ , la relation :

$$\mathbf{f}^C = -\frac{1}{\omega^2} (\mathbf{K}^p + i\omega\mathbf{C}^p) \underbrace{(\gamma^M - \gamma^C)}_{\Delta\gamma} \quad (3.3)$$

Des mesures d'accélération avec le GMV en fonctionnement sont réalisées en amont  $\gamma^M$  et en aval  $\gamma^C$  des plots. La force  $\mathbf{f}^C$  est la force de contact entre l'entretoise et la structure d'accueil, elle a été introduite dans le paragraphe 3.2.3.1. Les matrices à coefficients réels  $\mathbf{K}^p$  et  $\mathbf{C}^p$  désignent respectivement les matrices raideur et amortissement des plots.

### Estimation des coefficients de raideur par une méthode scalaire

Notant  $k_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $d_i$  et  $f_i^C$  respectivement les composantes des matrices/vecteurs  $\mathbf{K}^p$ ,  $\mathbf{C}^p$ ,  $\Delta\gamma$  et  $\mathbf{f}^C$ , la méthode scalaire (où l'on suppose implicitement que les matrices sont diagonales) s'écrit aussi :

$$k_{ij} + i\omega c_{ij} = -\omega^2 \frac{f_i^C}{d_i} \quad (3.4)$$

### Estimation des coefficients de raideur par une méthode matricielle

Partant de (3.3), il est supposé que les paramètres sont constants car la plage de fréquences 10Hz-50Hz est réduite. Ensuite, les plots sont supposés découplés.

Pour calculer les coefficients des matrices de raideur, les parties réelles sont dissociées des parties imaginaires :

$$\Re(\mathbf{f}^C) + i\Im(\mathbf{f}^C) = -\frac{1}{\omega^2} (\mathbf{K}^p + i\omega\mathbf{C}^p) (\Re(\Delta\gamma) + i\Im(\Delta\gamma)) \quad (3.5)$$

soit, après séparation des parties réelles et des parties imaginaires :

$$\begin{cases} \Re(\mathbf{f}^C) &= -\frac{1}{\omega^2} (\mathbf{K}^p\Re(\Delta\gamma) - \omega\mathbf{C}^p\Im(\Delta\gamma)) \\ \Im(\mathbf{f}^C) &= -\frac{1}{\omega^2} (\omega\mathbf{C}^p\Re(\Delta\gamma) + \mathbf{K}^p\Im(\Delta\gamma)) \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans la configuration d'un plot, la relation (3.6) s'écrit :

$$\begin{cases} \Re(f_i^C) &= -\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^3 (k_{ij}\Re(d_j) - \omega c_{ij}\Im(d_j)) \\ \Im(f_i^C) &= -\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^3 (k_{ij}\Im(d_j) + \omega c_{ij}\Re(d_j)) \end{cases} \quad (3.7)$$

ici, les notations des composantes des matrices/vecteurs sont les mêmes que pour la méthode scalaire.

Notant :

$$\mathbf{a}_i^t = \langle k_{i1}, k_{i2}, k_{i3} \rangle \text{ et } \mathbf{b}_i^t = \langle c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} \rangle \quad (3.8)$$

d'une part,

$$\mathbf{m}^t = \langle \Re(d_1), \dots, \Re(d_3), -\omega\Im(d_1), \dots, -\omega\Im(d_3) \rangle \quad (3.9)$$

et

$$\mathbf{n}^t = \langle \Im(d_1), \dots, \Im(d_3), \omega\Re(d_1), \dots, \omega\Re(d_3) \rangle \quad (3.10)$$

d'autre part, on aboutit au systèmes d'équations suivants

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{m}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}^t \\ \mathbf{n}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{n}^t \end{pmatrix}}_{\Gamma(\omega)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = -\omega^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \Re(\mathbf{f}^C) \\ \Im(\mathbf{f}^C) \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(\omega)} \quad (3.11)$$

En rassemblant les données obtenues pour toutes les fréquences (on suppose qu'il y a  $p$  fréquences), on obtient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}(\omega_1) \\ \mathbf{\Gamma}(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}(\omega_p) \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}^{TOT}} \mathbf{x} = -\omega^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}(\omega_1) \\ \mathbf{y}(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(\omega_p) \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}} \quad (3.12)$$

Ainsi, par une méthode de moindres carrés, on obtient les coefficients de raideur et amortissement, constants sur la plage de fréquences considérées :

$$\mathbf{x} = -\omega^2 \left( (\mathbf{\Gamma}^{TOT})^t \mathbf{\Gamma}^{TOT} \right)^{-1} (\mathbf{\Gamma}^{TOT})^t \mathbf{e} \quad (3.13)$$

L'exposant  $^t$  désigne la transposée d'une matrice.

Les graphes de raideurs ne peuvent être obtenus qu'après calcul à l'aide de la formule ci-dessus et, à ce titre, seront présentés dans la partie dédiée aux analyses et calculs. Plus précisément, il s'agira du paragraphe 3.3.4.3, figure 3.34 pour les courbes.

### 3.3 Validation expérimentale de l'emploi du modèle

#### 3.3.1 Architecture de calcul

Nous avons construit une architecture de calcul qui résume les grandes étapes de la validation de l'emploi du modèle dans un contexte technologique.

L'acquisition des mesures est effectuée à l'aide du logiciel Testlab, version 8A. Les données sont ensuite exportées vers le logiciel Matlab où elles sont converties au format «.mat». Un programme permet alors de ranger ces données dans des matrices et vecteurs pour effectuer des calculs qui seront précisés ultérieurement. L'affichage des résultats a également lieu dans le logiciel Matlab.

#### 3.3.2 Etude de la matrice inertance du châssis

##### 3.3.2.1 Etude fréquentielle des composantes

L'étude est conduite dans le but de remplacer par des zéros toutes les composantes de la matrice inertance  $\mathbf{Y}^C$  du châssis jugées trop petites. On pense ainsi diminuer le risque de voir s'amplifier des erreurs de mesure contenues dans  $\mathbf{Y}^C$  lors de son inversion.

Cette méthode permet de garder un contrôle sur la matrice (c'est-à-dire que l'on sait quels coefficients sont supprimés), ce qui n'est pas nécessairement le cas lorsqu'une régularisation mathématique est effectuée.

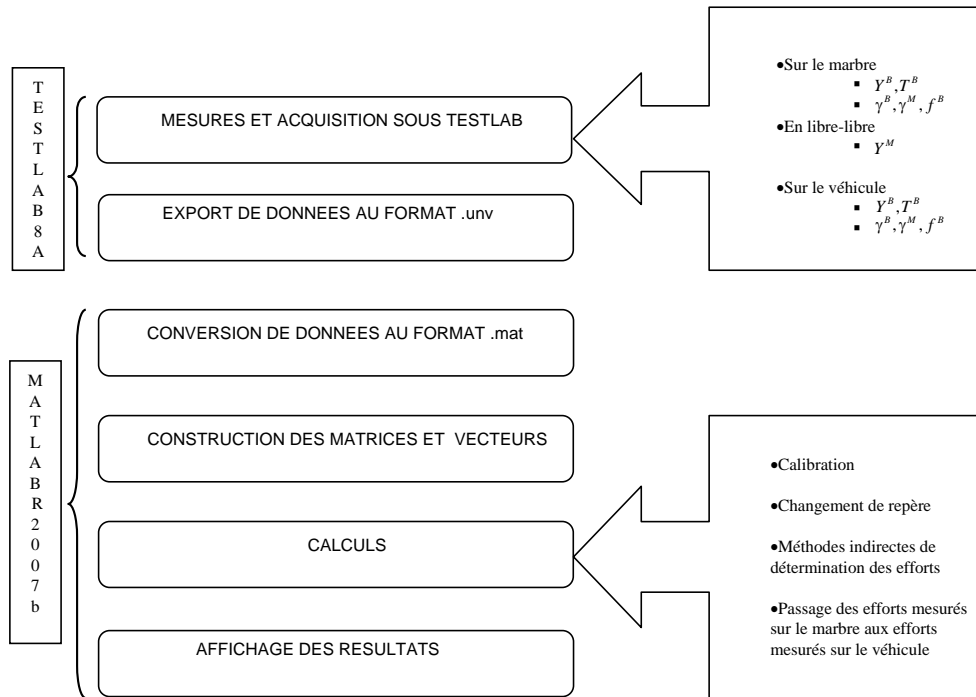


FIGURE 3.23 – architecture de calcul générale.

Pour comprendre l'importance relative des termes entre eux, une approche visuelle est choisie. Pour une fréquence, les modules des termes de la matrice sont visualisés. La figure 3.24 présente l'approche en question pour les fréquences 14Hz et 50Hz.

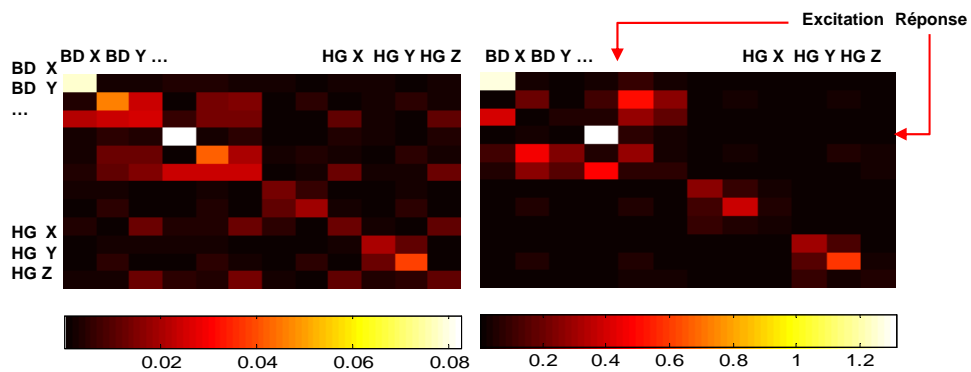


FIGURE 3.24 – visualisation des modules (en  $m/s^2/N$ ) des composantes de la matrice inertance  $Y^C$ . (a) 14 Hz; (b) 50 Hz.

### Interprétation physique

En observant le bloc supérieur gauche des images (a) et (b) de la 3.24, il apparaît que les points BD et BG interagissent. Par ailleurs, à 14Hz, il y a interaction entre les points hauts (HD et HG) et les points bas. En effet, sur l'image (a), une excitation en HG Z génère un déplacement en BD Z. En revanche, à 50Hz, sur l'image (b) de la même figure, le mouvement des points bas est découplé de celui des points hauts. Pour cette fréquence, on pourrait presque substituer à la matrice complète une matrice diagonale par blocs 6x6.

L'observation des deux images laisse apparaître que les inertances ponctuelles BD X et BG X sont les plus importantes. Les autres composantes de ces lignes peuvent être mises à zéro.

En mettant à zéro les autres composantes des lignes 1 et 4, les mêmes composantes de l'effort résultant de l'inversion de  $\mathbf{Y}^C$  ne changeront pas, que la matrice soit pleine ou bien diagonale. En effet, si  $y_{ii}$  est le seul élément non nul de la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{Y}^C$ , alors  $1/y_{ii}$  est le seul élément non nul de la ligne  $i$  de la matrice  $(\mathbf{Y}^C)^{-1}$ .

Les images suggèrent d'autres formes de la matrice  $\mathbf{Y}^C$  que la matrice pleine, en vue d'une inversion pour prédire les efforts : une matrice par blocs 6x6, diagonale.

#### 3.3.2.2 Etude de la symétrie

En théorie, les mesures d'inertance doivent vérifier la propriété de réciprocité : les inertances mesurées comme étant la réponse au point A sur l'effort au point B ou la réponse au point B sur l'effort au point A sont identiques.

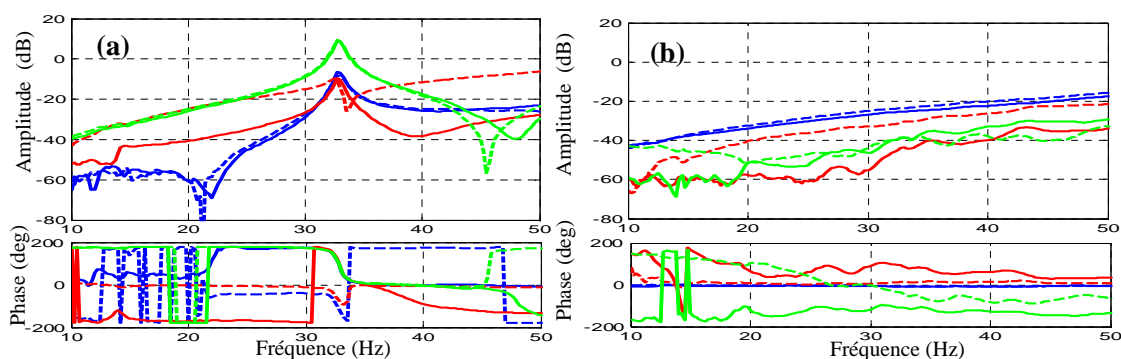
La réciprocité des mesures d'inertance se traduit par la symétrie des matrices  $\mathbf{Y}^C$  et  $\mathbf{Y}^M$ . Il est donc important de voir si ces matrices possèdent ici cette propriété. Dans le paragraphe qui suit, la matrice  $\mathbf{Y}^C$  est étudiée ; la matrice  $\mathbf{Y}^M$  le sera plus loin.

#### Cas d'une fréquence

La réciprocité peut être étudiée à une fréquence donnée. Par exemple, l'analyse des niveaux des termes de  $\mathbf{Y}^C$  aux fréquences 14Hz et 50Hz (figure 3.24) révèle que les transferts locaux au point BG entre les directions X et Z ne sont pas rigoureusement réciproques, même si des tendances de réciprocité existent bien. En fait un regard macroscopique des images de la figure 3.24 montre une forte tendance de réciprocité. Une analyse sur une plage de fréquences permet d'aller plus loin dans l'analyse.

### Cas d'une plage de fréquences

Les inertances de transfert local portant sur les points BG et HG sont représentées sur la figure 3.25. Les résultats montrent que pour ces deux points, les inertances de transfert local sont réciproques entre les directions  $X$  et  $Y$  ( $\gamma_X/f_Y$ ) et entre les directions  $Y$  et  $Z$  ( $\gamma_Y/f_Z$ ) mais pas entre les directions  $X$  et  $Z$  ( $\gamma_X/f_Z$ ). Les inertances du type  $\gamma_Z/f_X$  sont très supérieures, en amplitude, aux inertances du type  $\gamma_X/f_Z$ . Des résultats similaires sont obtenus pour les points BD et HD. Cela peut s'expliquer par l'effet de la hauteur de l'entretoise. En effet, quand on applique une force sur l'entretoise dans la direction  $X$ , comme la liaison entre l'entretoise et le véhicule n'est pas seulement une raideur en translation suivant  $X$  mais également une raideur de torsion dans la direction  $Y$ , une rotation s'ajoute à la translation. Les niveaux mesurés dans la direction  $Z$  sont supérieurs aux niveaux des accélérations qui seraient mesurées dans le cas d'une translation pure. En revanche, quand on excite dans la direction  $Z$ , la liaison entre l'entretoise et le véhicule peut être modélisée en première approche par une simple raideur en translation : l'accélération mesurée dans la direction  $X$  résulte bien d'une seule force d'excitation en  $Z$ .



**FIGURE 3.25** – inertance de transfert local de la carrosserie aux points BG (a) et HG (b). trait plein rouge :  $\gamma_x/f_z$ ; pointillés rouges :  $\gamma_z/f_x$ ; trait plein bleu :  $\gamma_x/f_y$ ; pointillés bleus  $\gamma_y/f_x$ ; trait plein vert  $\gamma_y/f_z$ , pointillés verts  $\gamma_z/f_y$ .

Au vu de ces résultats et d'une étude approfondie des autres termes de la matrice  $\mathbf{Y}^C$ , il apparaît que les problèmes de non-réciprocité sont importants dès lors qu'entre en jeu dans l'inertance considérée une excitation ou une réponse dans la direction  $X$  (en particulier aux points BD et BG).

### Symétrisation de $\mathbf{Y}^C$

Afin de symétriser la matrice inertance qui pourra être utilisée dans la suite des calculs, quatre

méthodes pour forcer la symétrie de la matrice sont envisagées. La première, dite «méthode de la moyenne», consiste à calculer la moyenne arithmétique entre la matrice  $\mathbf{Y}^C$  et sa transposée, pour chaque fréquence. La deuxième, dite «méthode supérieure», consiste à ne garder que les composantes rangées dans le triangle supérieur droit de la matrice et à les mettre à la place des composantes situées dans le triangle inférieur gauche. De la même façon, la troisième méthode, dite «méthode inférieure», consiste à ne garder que les composantes situées dans le triangle inférieur gauche et à les mettre à la place des composantes situées dans le triangle supérieur droit. Enfin dans la quatrième méthode, dite «méthode de symétrisation des inertances de transfert local», seules les mesures de transfert local entre les directions  $X$  et  $Z$  sont modifiées : on utilise à la place des mesures  $\gamma_Z/f_X$  les mesures  $\gamma_X/f_Z$  afin de s'affranchir de l'éventuelle excitation en moment et des probables conséquences dues aux rotations (voir paragraphe précédent).

La comparaison des résultats obtenus à partir de ces différentes symétrisations sera effectuée plus loin.

### 3.3.3 Déduction des efforts appliqués à la structure d'accueil

Le problème inverse concerne la détermination de la force en service  $\mathbf{f}^C$  (ou force appliquée à la structure d'accueil) à partir la matrice  $\mathbf{Y}^C$  et de l'accélération en service  $\boldsymbol{\gamma}^C$  (ou accélération mesurée aux points d'attache de la structure d'accueil). La formule de calcul est la suivante :

$$\mathbf{f}^C = (\mathbf{Y}^C)^{-1} \boldsymbol{\gamma}^C \quad (3.14)$$

Comme cela a été mentionné au paragraphe 3.2.2.1, les efforts mesurés doivent être avant tout corrigés par des transferts d'efforts.

#### 3.3.3.1 Correction de la force $\mathbf{f}^C$ par une matrice $\mathbf{U}^C$

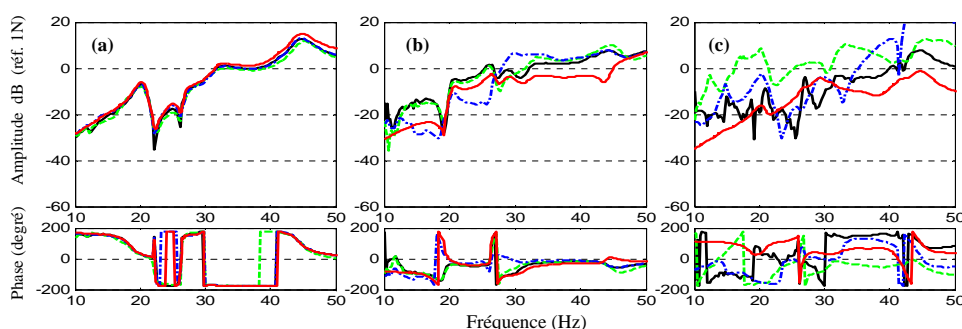
Dans le paragraphe 3.2.3.1, il a été montré qu'en général la fonction de transfert d'efforts dépend de la structure d'accueil. Puisque l'étude est restreinte aux basses fréquences, les fonctions de transfert sont, en première approximation, constantes (Cf. figure 3.17.a,b). De plus, il est admis que les transferts directs (excitation au marteau et mesure au capteur d'effort au même point et dans la même direction) sont les plus importants. Cela conduit à considérer une matrice des fonctions de transfert diagonale, constante, obtenue en prenant la valeur moyenne de chaque courbe de fonctions de transfert dans chaque direction principale.

Notant  $\mathbf{U}^C$  cette matrice, il vient :



$$\mathbf{f}^C = (\mathbf{U}^C)^{-1} \mathbf{f}_{capt.mes}^C \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{f}^C$  désigne les efforts vrais injectés aux points d'attache, à partir des efforts  $\mathbf{f}_{capt.mes}^C$  mesurés par le capteur d'effort. Sur la figure 3.26, les résultats de calcul  $(\mathbf{Y}^C)^{-1} \gamma^C$ , pour différentes formes de  $\mathbf{Y}^C$ , sont comparés à la force en service mesurée et corrigée par  $\mathbf{U}^C$ . En (a) et (b), les résultats obtenus présentent le même niveau de satisfaction que lors du problème direct. En revanche, en (c), aucune des configurations ne parvient à reconstruire la force en service mesurée.



**FIGURE 3.26** – force en service du véhicule. trait plein rouge : Mesure ; trait plein noir :  $\mathbf{Y}^C$  complète ; pointillés bleus :  $\mathbf{Y}^C$  diagonale ; pointillés verts :  $\mathbf{Y}^C$  diagonale par blocs. (a) BD X ; (b) HD X ; (c) BG Z.

### 3.3.3.2 Correction de la force $\mathbf{f}^C$ par une matrice $\mathbf{T}^C$

Ici, la matrice des fonctions de transfert d'efforts notée  $\mathbf{T}^C$  est complète (pleine), et dépend de la fréquence. À nouveau, on apporte une correction aux efforts mesurés et cette fois la correction se fait par la matrice  $\mathbf{T}^C$ .

La figure 3.27 montre quelques courbes (cf. annexe 7.2 pour toutes les courbes) obtenues en corrigeant la force en service à l'aide de la matrice  $\mathbf{T}^C$ . Les courbes (a) et (b) sont légèrement plus proches de la force en service que le sont celles de la 3.26. Cependant, la courbe (c) est toujours mal reconstruite.

La difficulté de reconstruire la composante BG Z (idem pour BD Z) ne provient pas du transfert d'efforts. Dans toute la suite de ce mémoire, les efforts mesurés sont corrigés par la matrice  $\mathbf{T}^C$ .

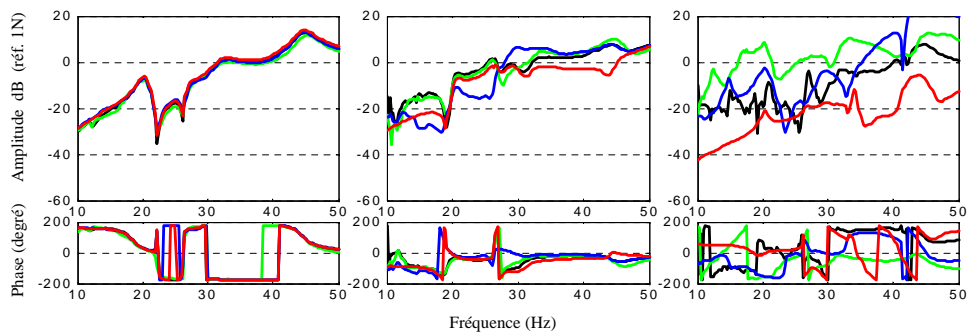


FIGURE 3.27 – force en service du véhicule. trait plein rouge : Mesure ; trait plein noir :  $Y^C$  complète ; trait plein bleu :  $Y^C$  diagonale ; trait plein vert :  $Y^C$  diagonale par blocs. (a) BD X ; (b) HD X ; (c) BG Z.

### Effet de la symétrisation

Les résultats de calculs de  $f^C$  obtenus à partir des quatre méthodes de symétrisation de la matrice  $Y^C$  définies au paragraphe 3.3.2.2 sont comparés aux mesures de  $f^C$  quand le GMV est en fonctionnement ainsi qu'au calcul de  $f^C$  avec la matrice  $Y^C$  non symétrisée. L'ensemble des courbes de résultats sont représentées sur la figure 3.28. Comme précédemment, seuls les efforts portant sur les points BD dans la direction X, sur le point BG dans la direction Z et sur le point HD dans la direction X sont représentés.

Pour le point BD dans la direction X, les résultats du calcul de l'effort dépendent de la matrice  $Y^C$ . Les résultats obtenus avec les méthodes moyenne et inférieure sont beaucoup moins bons que ceux obtenus avec les autres méthodes qui sont en bonne cohérence avec la mesure.

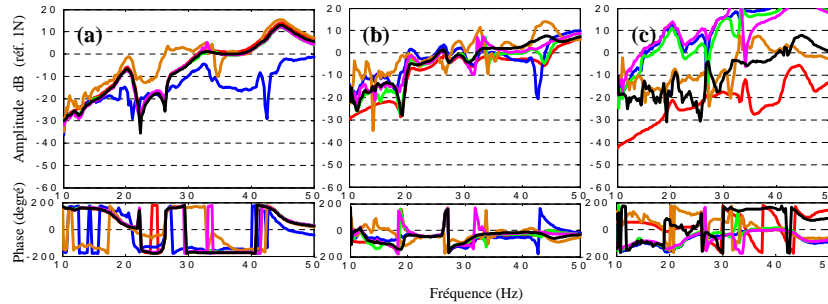
Pour le point HD dans la direction X, le résultat le plus proche de la mesure est obtenu avec la méthode supérieure.

Enfin pour le point BG dans la direction Z, aucune méthode ne permet de retrouver le résultat de la mesure. Comme il a déjà été noté, dans cette direction pour les points BD et BG, le niveau des efforts mesurés est beaucoup plus faible que le niveau des dix autres efforts. Les erreurs de mesure sur les inertances, supposées du même ordre de grandeur dans toutes les directions, ont donc plus d'effet sur ces deux efforts que sur les 10 autres.

L'observation des résultats pour les 12 efforts laisse apparaître que globalement les meilleurs résultats s'obtiennent lorsque la matrice n'est pas symétrisée. La méthode supérieure peut donner de bons résultats pour certains points tels que le point HD mais des résultats très mauvais pour d'autres, ce qui ne permet pas de conclure sur une méthode de symétrisation meilleure qu'une autre.

D'autres méthodes de symétrisation pourraient être envisagées mais on s'est limité pour l'instant

aux 4 méthodes présentées. Finalement la méthode qui semble la plus stable quel que soit le point observé est la méthode de la matrice pleine non symétrisée.



**FIGURE 3.28** – influence de la symétrisation de  $Y^C$  sur les efforts  $f^C$ . (a) BD X ; (b) HD X ; (c) BG Z. trait plein rouge : Mesure ; trait plein noir :  $Y^C$  calcul avec brute ; trait plein bleu :  $Y^C$  moyenne ; pointillés verts : méthode «supérieure» ; pointillés marron «méthode inférieure» ; pointillés mauves : «méthode inertance de transfert local»

### 3.3.3.3 Calcul de la force en service en utilisant une décomposition en valeurs singulières de la matrice $Y^C$

Une décomposition en valeurs singulières (voir par exemple Golub [28], Strang [29]) a été effectuée sur la matrice  $Y^C$  complète, en gardant 11 valeurs singulières au lieu de 12. L'objectif est l'étude de l'influence de la coupure de valeurs singulières sur la reconstruction de la force en service mesurée puis corrigée par  $T^C$ . Il s'agissait en particulier d'améliorer les composantes BG Z et BD Z. Des résultats de calculs effectués avec et sans décomposition en valeurs singulières sont présentés sur la figure 3.29.

Sur les figures 3.29.a et 3.29.b, le calcul avec ou sans décomposition en valeurs singulières donne le même résultat. Sur la figure 3.29.c en revanche, on note une forte dispersion de résultats. Les deux calculs diffèrent et aucun ne permet de reconstruire la force en service mesurée. Cependant, le calcul effectué sans décomposition en valeurs singulières se rapproche le plus de la mesure.

### 3.3.3.4 Calcul de la force en service en supprimant les colonnes de la matrice $Y^C$ correspondant aux excitations en BD Z et BG Z

Les méthodes de calcul des efforts ont montré entre autre qu'il est difficile de reconstruire la composante BG Z de la force en service. Ceci peut s'expliquer par le faible niveau de cette composante sur la plage de fréquence concernée.

Estimant qu'il n'est pas utile de reconstruire cette composante, car étant de faible niveau, un

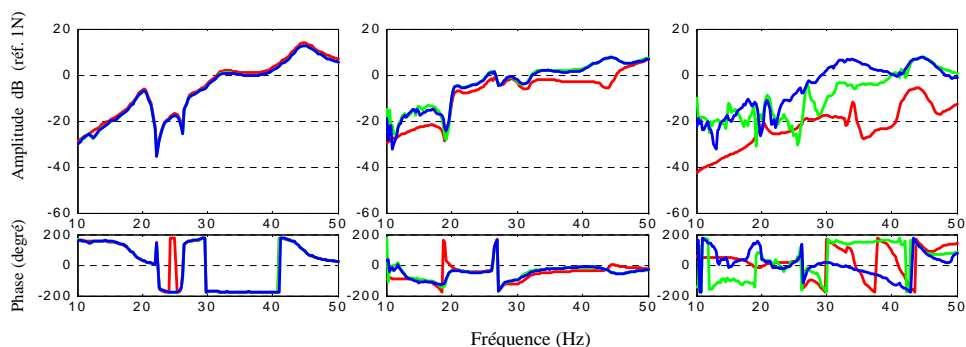


FIGURE 3.29 – force en service du véhicule. trait plein rouge : Mesure ; pointillés bleus : svd sur  $Y^C$  (11 valeurs singulières) ; pointillés verts : sans svd sur  $Y^C$  ; (a) BD X ; (b) HD X ; (c) BG Z.

nouveau calcul est effectué en supprimant la colonne de la matrice  $Y^C$  correspondant à une excitation en BG Z ; et les mêmes raisons conduisent à supprimer également la colonne correspondant à une excitation en BD Z. La matrice résultant de cette opération n'est plus carrée et requiert une méthode des moindres carrés [28, 29], pour procéder à son inversion afin de reconstruire les 10 composantes significatives de la force en service. Les résultats sont présentés sur la figure 3.30.

Ce calcul ne dégrade pas les résultats antérieurs, comme le montrent les figures 3.30.a et 3.30.b. On constate même une meilleure reconstruction de la phase sur la figure 3.30.c.

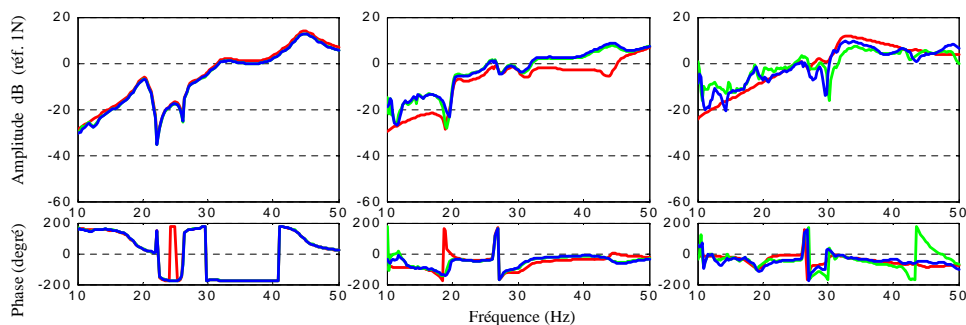


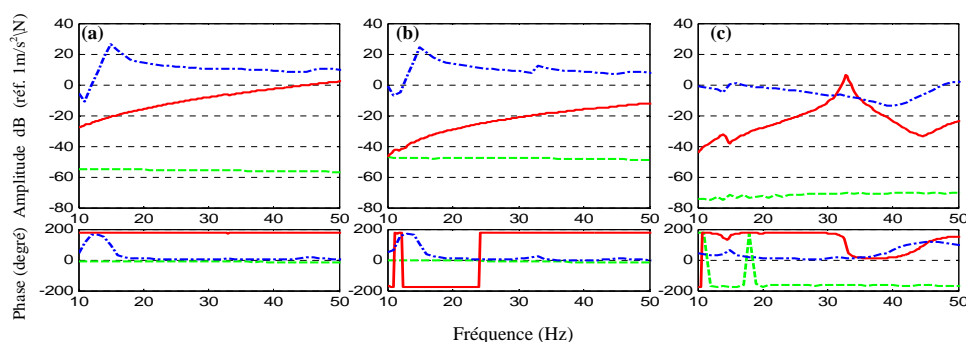
FIGURE 3.30 – force en service du véhicule. trait plein rouge : Mesure ; pointillés bleus :  $Y^C 12 \times 10$  ; pointillés verts :  $Y^C 12 \times 12$ . (a) BD X ; (b) HD X ; (c) HD Z.

### 3.3.4 Prédiction de la force en service $f^C$ à partir de la force mesurée sur le marbre $f_\infty^B$

L'objectif général consiste à prédire la force en service sur le véhicule, à partir entre autres de la force (dite de blocage) mesurée sur le marbre. Avant la prédiction proprement dite, il est utile de prendre connaissance de l'importance relative des différentes matrices.

#### 3.3.4.1 Importance relative des matrices d'inertance $\mathbf{Y}^M$ , $\mathbf{Y}^C$ et $\mathbf{Y}^B$

Dans la relation de passage (2.28) des efforts sur marbre aux efforts sur véhicule, l'hypothèse de rigidité infinie du marbre est faite. Afin de vérifier que cette hypothèse est bien valide dans le présent cas d'étude, la matrice d'inertance du marbre a été mesurée et certains termes sont comparés aux termes des matrices  $\mathbf{Y}^C$  et  $\mathbf{Y}^M$  sur la figure 3.31.



**FIGURE 3.31 – inertances ponctuelles. trait plein rouge :  $\mathbf{Y}^C$  ; pointillés bleus :  $\mathbf{Y}^M$  ; pointillés verts :  $\mathbf{Y}^B$ . (a) BD X ; (b) HD X ; (c) BG Z.**

Globalement, les composantes de la matrice inertance du marbre sont bien plus petites (45 dB d'écart au moins) que celles du sous-système. L'hypothèse de rigidité infinie du marbre n'est pas forcément vérifiée *stricto-senso* mais il est légitime de négliger l'inertance du marbre devant celle du sous-système dans la relation (2.28).

On constate également que le plus souvent, l'inertance du sous-système seul est beaucoup plus grande que l'inertance de la carrosserie. Sur la figure 3.32 sont comparés des termes de  $\mathbf{Y}^M$  à des termes de  $\mathbf{Y}^C + \mathbf{Y}^M$ . Il apparaît que l'influence de  $\mathbf{Y}^C$  sur la somme est en général minimale, le terme prépondérant restant le terme  $\mathbf{Y}^M$ .

Bien que l'inertance  $\mathbf{Y}^C$  a peu d'influence devant  $\mathbf{Y}^M$  on décide malgré tout de garder cette matrice.

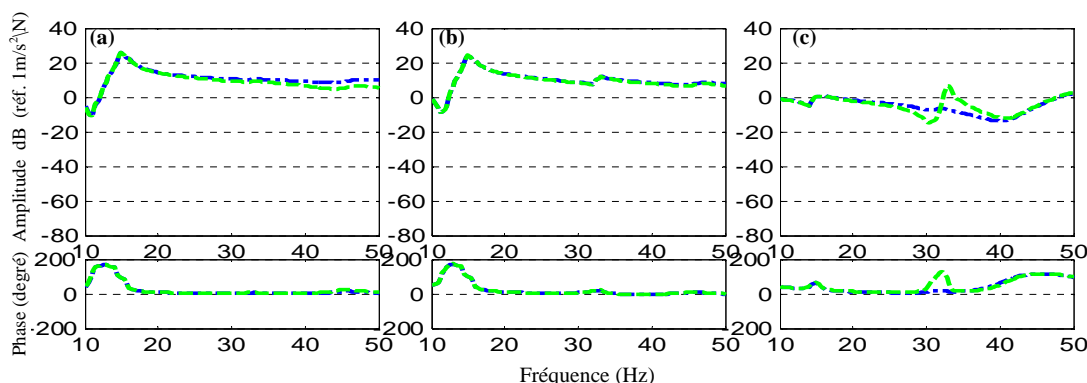


FIGURE 3.32 – comparaison entre  $Y^M$  (pointillés bleus) et  $Y^C + Y^M$  (pointillés verts). (a) BD X; (b) HD X; (c) BG Z.

### 3.3.4.2 Etude de la symétrie de la matrice $Y^M$

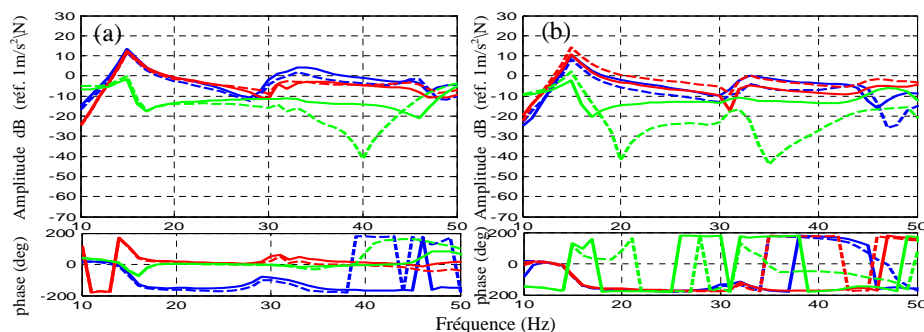
En théorie, comme pour les mesures d'inertance faites sur le véhicule, les mesures d'inertance du sous-système sont réciproques, ce qui se traduit par la symétrie de la matrice  $Y^M$ . De plus, comme le montre le paragraphe précédent, les inertances du sous-système sont, dans certaines directions, très grandes par rapport aux inertances du véhicule. La matrice des inertances du sous-système joue donc un rôle important.

#### Résultats de mesure

Les inertances de transfert local sont représentées sur la figure 3.33 pour les points BG et HG. Pour ces deux points, elles sont réciproques dans un tuyau de 4 dB environ entre les directions  $X$  et  $Z$  ( $\gamma_X/f_Z$ ) et entre les directions  $X$  et  $Y$  ( $\gamma_X/f_Y$ ) mais pas entre les directions  $Y$  et  $Z$  ( $\gamma_Y/f_Z$ ). De plus, les écarts sont plus importants pour les mesures au point HG qu'au point BG. Les mêmes types de résultats sont obtenus pour les points BD et HD.

Au vu de ces résultats et d'une étude approfondie des autres termes de la matrice  $Y^M$ , il apparaît que les problèmes de non-réciprocité sont importants dès lors qu'entre en jeu dans l'inertance considérée une excitation ou une réponse dans la direction  $Y$  (en particulier aux points HD et HG).

Pour ces différentes mesures, les accéléromètres n'étaient pas rigoureusement à l'endroit de la sollicitation (figure 3.20). Les mesures d'inertance de transfert, de transfert local ou les mesures d'inertance ponctuelle sont des mesures où intervient donc un transfert supplémentaire. Il se peut que cette erreur de mesure apporte des erreurs importantes dans la matrice  $Y^M$ , particulièrement sur les termes diagonaux qui sont de niveau notable et, partant, dans la prédiction finale.



**FIGURE 3.33** – inertance de transfert local du sous-système aux points **BG** (a) et **HG** (b). trait plein rouge :  $\gamma_x/f_z$ ; pointillés rouges :  $\gamma_z/f_x$ ; trait plein bleu :  $\gamma_x/f_y$ ; pointillés bleus  $\gamma_y/f_x$ ; trait plein vert  $\gamma_y/f_z$ , pointillés verts  $\gamma_z/f_y$ .

### 3.3.4.3 Calcul des matrices raideur des plots : résultats de l'estimation à partir de mesures prises sur le marbre

Au paragraphe 3.2.5, deux méthodes de calcul des matrices de raideurs de plots ont été présentées. Ici, l'on s'intéresse à leur mise en œuvre. Les mesures d'accélération et d'efforts ont été faites sur le marbre.

La méthode scalaire repose sur la relation (3.4), tandis que la méthode matricielle repose sur la relation (3.13).

La comparaison des résultats se limite aux directions principales à cause de la méthode scalaire qui ne fournit pas d'autres informations. Ces résultats sont présentés sur la figure 3.34.

Les deux méthodes fournissent des résultats très proches en ce qui concerne la direction  $X$ , pour les deux plots et la direction  $Y$  pour le plot  $BD$ . En revanche les résultats sont très différents pour la direction  $Z$  quel que soit le plot. Ils sont également différents dans la direction  $Y$  pour le plot  $BG$ .

En dehors de l'allure des courbes de raideur dans la direction  $Z$ , pour la méthode scalaire, on constate que la constante fournie par la méthode matricielle ne correspond pas à une valeur moyenne calculée sur les résultats de l'autre méthode. Pour ces directions, la plage de fréquences aurait probablement dû être restreinte à 30Hz-50Hz. Cela aurait certainement permis de trouver des valeurs comparables. À nouveau, on note la difficulté d'obtenir des résultats satisfaisants lorsque l'on a de petits niveaux d'effort.

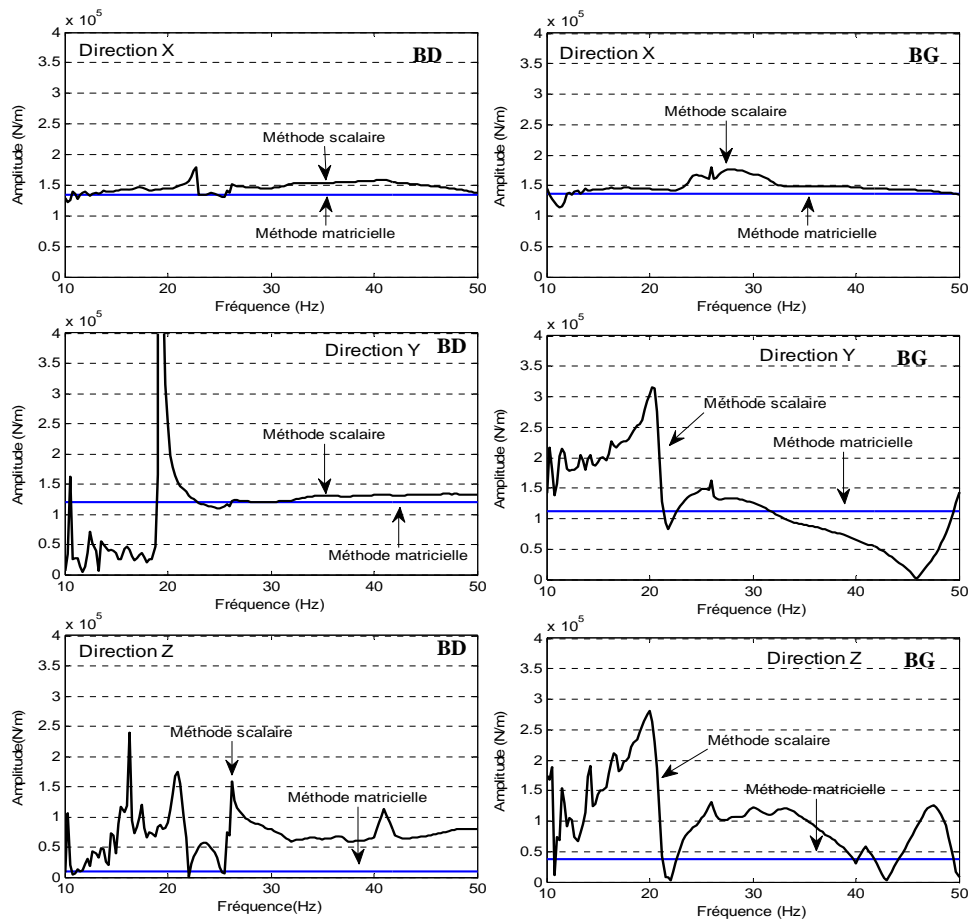


FIGURE 3.34 – raideurs dynamiques de plots : comparaison de deux méthodes de calcul.

### 3.3.4.4 Prédiction de la force en service sur véhicule : influence des matrices de raideur de plot

La comparaison des méthodes d'estimation des coefficients de raideur de plots a porté sur des données provenant du montage sur le marbre. La même démarche peut être conduite sur le véhicule pour obtenir deux autres matrices de raideurs de plots. En théorie les matrices obtenues sont identiques aux deux précédentes. Mais à cause des difficultés de montage, il y a des différences. On se propose d'évaluer l'impact de ces différences sur la prédiction des efforts appliqués au véhicule. Cette évaluation porte ici sur la méthode scalaire utilisée dans deux configurations. Dans la première configuration il est supposé que la matrice  $\mathbf{K}^{PB}$  estimée sur le marbre est la même que la matrice  $\mathbf{K}^{PC}$  estimée sur le véhicule. La formule de prédiction (2.28) s'écrit dans ce cas :

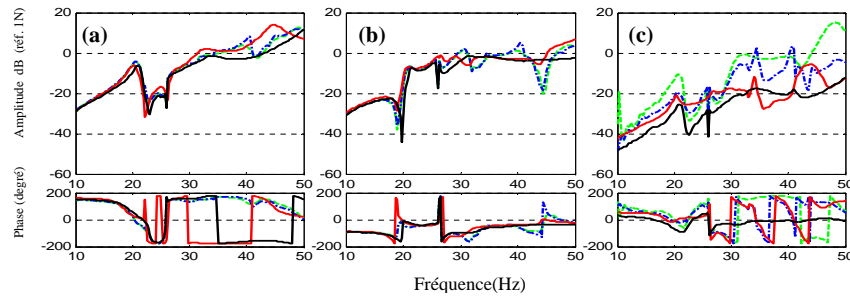


$$(-\omega^2 \mathbf{H}^{PB} + \mathbf{Y}^M + \mathbf{Y}^C) \mathbf{f}^C = (-\omega^2 \mathbf{H}^{PB} + \mathbf{Y}^M) \mathbf{f}_\infty^B \quad (3.16)$$

Dans la seconde configuration, la matrice  $\mathbf{K}^{PB}$  estimée sur le marbre n'est pas la matrice  $\mathbf{K}^{PC}$ . Les efforts sont prédits en utilisant la relation :

$$(-\omega^2 \mathbf{H}^{PC} + \mathbf{Y}^M + \mathbf{Y}^C) \mathbf{f}^C = (-\omega^2 \mathbf{H}^{PB} + \mathbf{Y}^M) \mathbf{f}_\infty^B \quad (3.17)$$

Les résultats portant sur trois directions sont présentés sur la figure 3.35. La comparaison des résultats obtenus à partir de l'usage de la seule matrice  $\mathbf{K}^{PB}$  ou des deux matrices  $\mathbf{K}^{PB}$  et  $\mathbf{K}^{PC}$  montre que la matrice de raideur de plot utilisée n'a pas une grande influence sur la prédiction finale excepté au point BG Z où de grosses différences apparaissent entre les deux prédictions. Pour ce point BG Z, lorsque les matrices  $\mathbf{K}^{PB}$  et  $\mathbf{K}^{PC}$  sont utilisées, la courbe obtenue présente des pics que l'on retrouve sur la courbe de mesure.



**FIGURE 3.35** – force en service du véhicule calculée à partir de la force de blocage mesurée sur le marbre. trait plein rouge :  $f^C$  mesurée ; trait plein noir :  $f_{b_\infty}^C$  mesurée ; pointillés verts :  $f^C$  calculée avec  $\mathbf{K}^{PB}$  seulement ; pointillés bleus :  $f^C$  calculée avec  $\mathbf{K}^{PB}$  et  $\mathbf{K}^{PC}$ . (a) BD X ; (b) HD X ; (c) BG Z.

Le fait que les résultats des configurations diffèrent significativement en BG Z peut s'expliquer par le niveau plus faible du terme d'inertance  $\mathbf{Y}^M$  et  $\mathbf{Y}^C$  en ce point et dans cette direction par rapport aux inertances aux points BD X ou HD X : le terme de raideur de plot  $\mathbf{K}^{PC}$  peut alors être du même ordre de grandeur que le terme d'inertance (figure 3.36) et donc jouer un rôle important dans le calcul.

Les deux configurations étudiées ne permettent pas d'améliorer qualitativement la prédiction. Toutefois, on peut noter que dans les cas où les résultats de calculs d'efforts à partir de la matrice d'inertance du véhicule et de l'accélération étaient satisfaisants (BD X et HD X), la prédiction est meilleure que dans les cas où ces relations n'étaient pas bien vérifiées (BG Z).

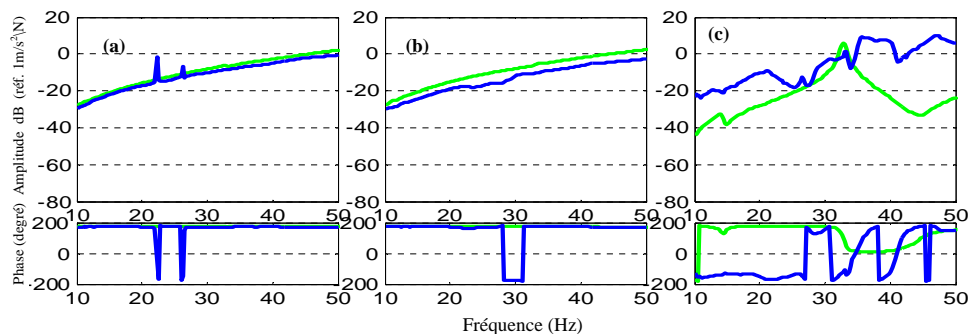


FIGURE 3.36 – comparaison de l'inertance ponctuelle de  $\mathbf{Y}^C$  et du terme diagonal  $-\omega^2 (\mathbf{K}^{PC})^{-1}$ . (a) BD X; (b) BG X; (c) BG Z. (trait bleu  $\mathbf{K}^{PC}$ ; trait vert  $\mathbf{Y}^C$ )

D'autres opérations sont appliquées aux matrices d'inertance du sous-système et du véhicule en vue d'améliorer la qualité de la prédiction. Pour les prédictions qui portent sur les opérations en question, la configuration avec deux matrices de raideur estimées par la méthode scalaire est retenue.

### 3.3.4.5 Prédiction de la force en service sur véhicule : influence de la symétrisation des matrices $\mathbf{Y}^M$ et $\mathbf{Y}^C$

Dans le paragraphe précédent, il a été vu que les matrices de raideurs de plot n'avaient pas une grande influence sur la prédiction finale. Cela laisse supposer que les termes principaux dans la relation (2.28) sont les termes  $\mathbf{Y}^M + \mathbf{Y}^C$ . Des résultats montrant l'influence de la symétrisation par méthode moyenne (i.e. moyenne arithmétique entre un matrice et sa transposée) de ces deux matrices sur la prédiction finale sont représentés figure 3.37).

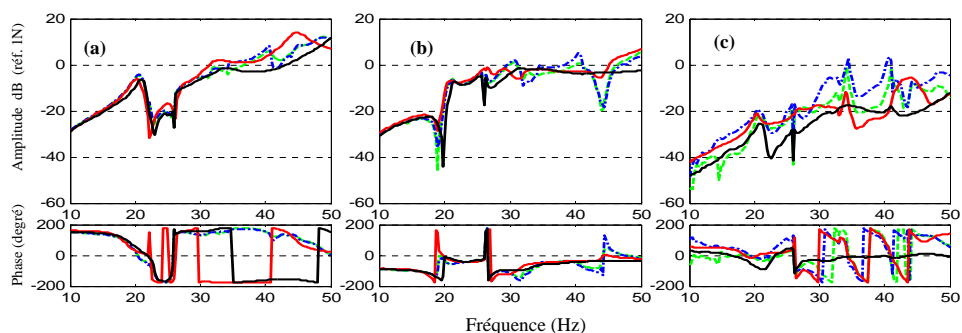


FIGURE 3.37 –  $f^C$  calculée à partir de  $f_{\infty}^B$ . trait plein rouge :  $f^C$  mesurée ; trait plein noir :  $f_{b_{\infty}}^C$  mesurée ; pointillés bleus :  $f^C$  calculée sans symétrisation des matrices ; pointillés verts :  $f^C$  calculée avec symétrisation des matrices. (a) BD X; (b) HD X; (c) BG Z.

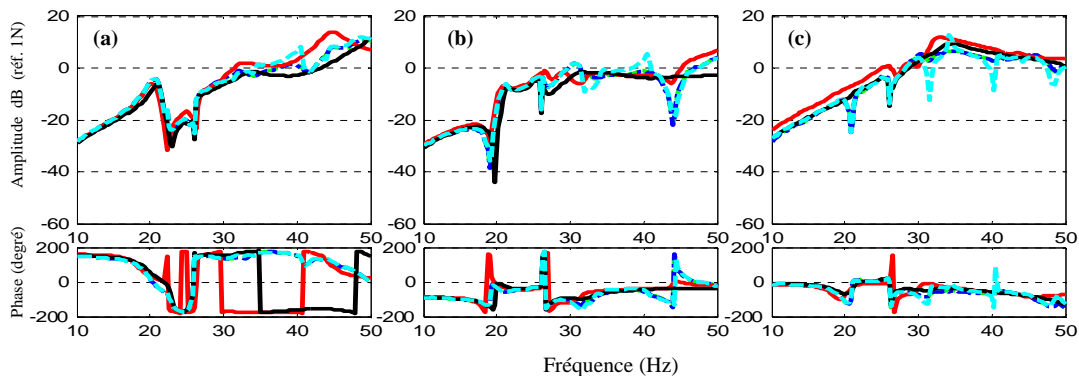
L'effet de la symétrisation permet d'obtenir des résultats plus proches de la mesure pour le point BG Z. En revanche pour les deux autres points, son effet est négligeable.

### 3.3.4.6 Prédiction de la force en service sur véhicule : réduction de la taille des matrices

Comme il a été vu précédemment, les niveaux des efforts mesurés sur le véhicule aux points BD Z et BG Z sont très faibles et donc difficiles à atteindre. Afin de s'affranchir de leur détermination, deux calculs différents sont proposés : dans le premier, chaque matrice carrée du membre de gauche de la relation (3.15), est réduite à une matrice de dimensions  $12 \times 10$ . Cette opération est conduite en enlevant les deux colonnes de ces matrices correspondant aux excitations en BD Z et BG Z.

Dans le deuxième calcul, toutes les matrices carrées des membres de droite et de gauche sont réduites à des matrices de dimensions  $12 \times 10$ , car les niveaux des efforts mesurés sur le marbre aux points BD Z et BG Z sont également faibles.

Pour ces deux calculs, il s'ensuit que seules dix composantes de  $\mathbf{f}^C$  peuvent être déterminées : trois d'entre elles sont représentées sur la figure 3.38.



**FIGURE 3.38** –  $f^C$  calculée à partir de  $f_\infty^B$ . trait plein rouge :  $f^C$  mesurée ; trait plein noir :  $f_{b_\infty}^C$  mesurée ; trait plein vert :  $f^C$  1<sup>er</sup> calcul ; pointillés bleus :  $f^C$  2<sup>ème</sup> calcul ; pointillés cyan :  $f^C$  calculée avec  $Y^C$   $12 \times 12$ . (a) BD X ; (b) HD X ; (c) HD Z.

Contrairement aux figures 3.35 à 3.37, la figure 3.38.c représente la composante de la force en HD Z et non pas BG Z qui ne peut être déterminée. Les différences entre les résultats des calculs 1 et 2 sont très petites : on note donc que la suppression des colonnes des matrices du membre de droite n'a pas d'influence sur le résultat. Cela signifie qu'il n'est pas nécessaire de mesurer les composantes BD Z et BG Z sur le marbre pour prédire les 10 composantes de la force sur le véhicule.

Par ailleurs, la réduction de la taille des matrices améliore légèrement les résultats notamment pour

les termes HD X et HD Z pour lesquels les pics d'antirésonance visibles sur la courbe d'amplitude du résultat du calcul  $12 \times 12$  sont atténués.

Concernant les phases, il n'y a pas de changement notable par rapport au calcul  $12 \times 12$  si ce n'est des atténuations de pics au point HD Z.

### 3.4 Conclusion

Le contenu de ce chapitre, qui a fait l'objet de deux communications [30, 31] est axé sur la validation expérimentale de l'emploi du modèle prédictif établi dans le chapitre 2.

En premier lieu, les conclusions d'ordre métrologique, non nécessairement spécifiques au sous-système GMV, sont énumérées.

La mesure directe d'efforts par capteur est une mesure intrusive qui nécessite la mise en place d'entretoises (pas forcément aussi importante que celles réalisées lors des montages décrits ici). Il est indispensable de prendre en compte les transferts, entre le point d'application de l'effort et la position réelle du capteur, inhérents à ce type de montage.

À configuration donnée, les déductions d'efforts par méthode inverse (à partir des inertances et accélérations mesurées sur le véhicule) donnent des résultats équivalents à la mesure directe par capteur d'effort pour la plupart des degrés de liberté.

En acceptant une légère marge d'erreur, nous avons considéré que les mesures d'inertances étaient répétables (les résultats portant sur la répétabilité ne sont pas présentés dans ce mémoire). Malgré tout, l'incertitude observée augmente en présence d'amplitude peu élevée de certains termes, ceux-ci étant probablement de peu d'influence sur la prédiction finale.

Des observations plus spécifiques concernent le sous-système et sa fixation sur le véhicule (ou le marbre).

La réciprocité des mesures d'inertance est partiellement vérifiée. Il reste cependant à améliorer ces mesures dans certaines directions : les inertances entre les directions X et Z sur le véhicule et entre les directions Y et Z sur le sous-système seul.

Du côté des calculs et de la prédiction plusieurs remarques peuvent être faites. La symétrie des matrices, corollaire de la réciprocité des mesures d'inertance, n'est pas si facile à obtenir. Des prédictions ont été faites en forçant la symétrie des matrices. Cela n'a pas donné de meilleurs résultats que la matrice brute. Il faut peut être voir ici que la matrice non-symétrique possède des informations utiles à la description de l'expérience, dont la suppression détériore les résultats. Ce constat a été fait lors

de l'identification des efforts.

L'analyse de la matrice d'inertance du véhicule rappelle que l'existence d'un terme diagonal de particulièrement grande amplitude sur une ligne détermine la composante du vecteur force qui sera insensible aux autres termes de la matrice. C'est précisément dans ce cas que les composantes en jeu sont bien identifiées.

Lors des calculs, il apparaît qu'une matrice de transfert des efforts peut être simplifiée sans grand dommage pour les résultats finaux.

Lors de l'inversion des matrices, la décomposition en valeurs singulières n'a pas donné d'amélioration sensible des résultats.

Parmi les différentes techniques d'identification de la matrice des raideurs dynamiques des jonctions, seule celle qui donne la matrice diagonale a été utilisée pour la prédiction. Des irrégularités dans les termes non diagonaux et leur faible amplitude ont conduit à ce choix.

La relation d'ordre entre le module de l'inertance du sous-système seul et le module de l'inertance du véhicule et/ou du marbre est telle qu'il n'est pas vraiment étonnant que les efforts prédits sur véhicule soient peu différents, lorsque ceux-ci sont d'amplitude non négligeable, des efforts mesurés sur marbre. En fait la matrice qui multiplie les efforts mesurés sur le marbre pour donner les efforts prédits sur le véhicule est sensiblement égale à l'identité.

Une des conséquences de cette configuration est que la prédiction à l'issue de ces travaux est peu convaincante.

Une autre situation non décrite ici a permis de prendre confiance dans la prédiction. Il s'agit de la situation où le GMV devient la structure source, et où la façade est en cascade avec le véhicule. Dans cette configuration, il a été constaté que les efforts mesurés au niveau du GMV ne sont pas ceux mesurés au niveau du véhicule. Pourtant la prédiction des efforts appliqués au véhicule allait dans le sens de la mesure. Cela a permis de prendre confiance dans la prédiction.

Au chapitre 4 nous aborderons la question relative à la prise en compte de contraintes sur les efforts prédits. Il s'agira de voir comment régler les raideurs de plots pour respecter les contraintes en question.



## Chapitre 4

# Limitation des efforts vibratoires et réglage de paramètres en situation nominale

### 4.1 Introduction

Lorsqu'un sous-système est mis en fonctionnement sur une structure d'accueil, celle-ci vibre et/ou rayonne à cause des efforts vibratoires qu'elle subit.

Le système complet peut être soumis à une limitation des vibrations et/ou du rayonnement acoustique. Ces contraintes peuvent se ramener, comme dans ce chapitre, aux efforts vibratoires appliqués à la structure d'accueil et qui sont prédits à partir du modèle établi dans le chapitre 2.

Les caractéristiques des jonctions à l'interface entre le sous-système et la structure d'accueil sont les variables utilisées pour limiter ces efforts.

Souvent ce problème de contraintes voulant limiter, par exemple, les vibrations se traduit en un problème d'optimisation qui cherche à minimiser ces vibrations.

La stratégie qui consiste à modifier les caractéristiques de l'interface plutôt que celles des sous-structures à assembler est assez courante dans l'industrie. En effet, beaucoup de travaux portent sur l'optimisation du système de suspension d'un moteur [32, 33, 34, 35]. Le système de suspension d'un moteur est constitué entre autres de supports élastiques appelés plots. En modifiant les caractéristiques de ces plots et/ou leur position, le comportement du système de suspension est modifié de même que celui du système complet. Cette modification résulte, dans bien des cas, d'un problème d'optimisation formulé par des équations.

Les grandes étapes lors de la formulation d'un problème d'optimisation sont la sélection de la fonction objectif, le choix des variables et la définition des contraintes.

Lorsque l'optimisation porte sur le système de suspension d'un moteur, un objectif peut consister à déplacer les fréquences propres de l'ensemble moteur-système de suspension dans une plage souhaitée, pour éviter des résonances de l'accueil [36, 37, 38]. Pour déplacer les fréquences de résonance de l'ensemble moteur-système de suspension, la position des plots et leur orientation peuvent être optimisées [39].

Certains auteurs [40, 41] préfèrent minimiser la force transmise du moteur à l'accueil au lieu de déplacer explicitement les fréquences de résonance de l'ensemble moteur-système de suspension.

Bretl [42] choisit comme fonction objectif les vibrations perçues par les passagers sans considérer les modes de suspension du moteur.

La puissance vibratoire transmise peut également être une fonction objectif. Ainsi, Royston et Singh [43] minimisent le flux de puissance transmis du système de suspension à la structure d'accueil sur une plage de fréquences donnée.

Rappelons que les variables du problème d'optimisation sont les caractéristiques des plots, plus précisément la raideur et l'amortissement, ainsi que leur position et/ou leur orientation dans le système de suspension du moteur.

La définition des contraintes fait partie de l'écriture du problème d'optimisation. Deux types de contraintes ont été considérées dans la littérature : les contraintes qui portent sur les bornes des plages de valeurs des variables [44] et celles qui sont associées à certaines quantités comme les déplacements du moteur [33].

Il existe en outre des formulations sans contrainte. Ainsi le problème d'isolation vibratoire d'un moteur fixé sur des plots formulé par Snyman et al. [43] est sans contrainte. Suresh et al. [42] proposent une procédure d'optimisation non-linéaire sans contrainte pour une conception optimale des suspensions du moteur, dans le but de minimiser la force transmise au châssis.

Lorsque le problème d'optimisation est formulé, il faut ensuite choisir ou inventer une méthode de résolution. Dans les travaux de Tao et al. [33], le système d'isolation d'un moteur est optimisé en utilisant la technique de la programmation quadratique séquentielle (sequential quadratic programming, SQP), laquelle est une méthode de type gradient [45]. Swanson et al. [46] utilisent aussi des méthodes de programmation quadratique pour concevoir de manière optimale le système d'isolation d'un moteur d'avion. Dans Alkhatib et al. [32], un algorithme génétique est utilisé pour optimiser le système de suspension-moteur d'un modèle analytique simplifié (masse-ressort) de véhicule. L'algorithme génétique est une méthode de recherche directe (sans calcul de gradient) inspirée des mécanismes de



sélection naturelle et de reproduction des systèmes biologiques [47].

L'objectif est de minimiser la norme (euclidienne) des efforts vibratoires transmis à la structure d'accueil à cause du fonctionnement d'un composant actif. De plus, on souhaite que cette norme reste inférieure à une limite donnée.

Ces contraintes peuvent dépendre de la fréquence, auquel cas le problème est traité pour chaque fréquence prise en compte.

Pour atteindre l'objectif et respecter la contrainte, les caractéristiques vibratoires (raideur et amortissement) des jonctions à l'interface servent de levier. Précisément, les variables du problème de minimisation sont des coefficients multiplicatifs appliqués aux matrices de raideur et amortissement des jonctions. Notons que si l'on cherchait seulement à respecter la contrainte, on aurait un ensemble de solutions possibles. Mais trouver toutes les solutions est difficile voire impossible lorsque le nombre de variables est élevé. C'est pourquoi la stratégie retenue est de minimiser les efforts appliqués à la structure d'accueil et à satisfaire la contrainte [48].

Le chapitre s'articule de la manière suivante : traitement du problème de limitation des efforts appliqués à une structure d'accueil. Après avoir traité un exemple élémentaire, le besoin d'apporter des solutions dans un cadre général conduit à remplacer la limitation par une minimisation des efforts. Différentes méthodes de résolution seront introduites, sur l'exemple élémentaire et sur des données issues d'un exemple technologique. Finalement, une synthèse de la démarche globale est donnée.

## 4.2 Problème initial : respect d'une consigne sur les efforts vibratoires

### 4.2.1 Rappel du modèle et formulation mathématique du problème initial

Le présent paragraphe commence par un rappel d'une équation établie au chapitre 2 et qui sert à prédire les efforts appliqués à une structure d'accueil, notée C (comme «chassis»), raccordée à une structure source notée M (comme «mécanisme»). L'équation en question, décrite dans la relation (2.24) du chapitre 2, est réécrite pour nos besoins sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{f}_e^C \\ \mathbf{f}_r^C \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}^C} = (\mathbf{Y}^C + \mathbf{Y}^M - \omega^2 \mathbf{H}^p)^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{es}^M \\ \mathbf{Y}_{rs}^M \end{pmatrix} \mathbf{f}_s^M}_{\boldsymbol{\gamma}^M} \quad (4.1)$$

ou encore

$$\mathbf{f}^C(\omega) = (\mathbf{Y}^C(\omega) + \mathbf{Y}^M(\omega) - \omega^2 \mathbf{H}^p)^{-1} \boldsymbol{\gamma}^M(\omega) \quad (4.2)$$

$\mathbf{f}^C$  est un vecteur force dont les composantes sont les forces scalaires appliquées à la structure d'accueil, aux points de jonction avec l'interface. L'égalité (4.2) vaut pour chaque pulsation  $\omega$ .

La problématique traitée dans ce chapitre se résume en une contrainte sur les efforts appliqués à une structure d'accueil. Cette contrainte se traduit par l'inéquation :

$$\|\mathbf{f}^C(\omega)\|_2 \leq f^{Cmax}(\omega) \quad (4.3)$$

Le scalaire positif  $f^{Cmax}$  représente l'amplitude maximale de la norme des efforts, et  $\omega$  désigne la norme euclidienne d'un vecteur (pour un vecteur  $\mathbf{x}$  de composantes  $x_i$  et de taille  $n$ , cette norme est définie à partir du produit scalaire hermitien :  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ . L'exposant \* désigne la transposée conjuguée d'un vecteur (ou d'une matrice). On retrouve cette norme par exemple dans l'ouvrage de Golub et Loan [28].

Dans l'écriture (4.3), l'inconnue n'est pas la pulsation  $\omega$  mais ce sont les caractéristiques dynamiques des liaisons élastiques, contenues dans la matrice d'interface  $\mathbf{H}^p$ . C'est pourquoi l'inégalité est réécrite pour mettre en évidence la matrice d'interface :

$$\|\mathbf{f}^C(\mathbf{H}^p, \omega)\|_2 \leq f^{Cmax}(\omega) \quad (4.4)$$

Il faut alors trouver toutes les matrices  $\mathbf{H}^p$  qui satisfont l'inéquation non linéaire (4.3), lorsque  $\omega$  est fixée. En fait, dans la matrice d'interface, seule la matrice d'impédance des jonctions peut varier (car les autres sont nulles à cause des liaisons rigides). Cette matrice est la somme d'une matrice de raideur pure et d'une matrice d'amortissement :

$$\mathbf{Z}^p = \mathbf{K}^p + i\omega\mathbf{C}^p \quad (4.5)$$

Suite à (4.5), l'inéquation (4.4) s'écrit en fait :

$$\|\mathbf{f}^C(\mathbf{Z}^p, \omega)\|_2 \leq f^{Cmax}(\omega) \quad (4.6)$$

La matrice  $\mathbf{Z}^p$  est l'inconnue de l'inéquation (4.6). En fait les véritables inconnues sont les matrices  $\mathbf{Z}^p$  et  $\mathbf{C}^p$  définissant  $\mathbf{Z}^p$  par la relation (4.5).

### 4.2.2 Résolution graphique sur un exemple élémentaire

Un exemple élémentaire a été construit dans le but de résoudre graphiquement l'inéquation (4.6). Les données de l'exemple sont choisies pour avoir au moins une solution et pour que la norme des

efforts dépassent la limite  $f^{Cmax}(\omega)$  avant le réglage. Ces données sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^M &= \begin{pmatrix} 2.9 + 1.2i & 1.7 - 1.4i \\ 0.7 + 3.4i & 0.9 - 0.9i \end{pmatrix} & \omega &= 20\pi \text{rad/s} & f^{Cmax} &= 11N \\ \mathbf{Y}^C &= \begin{pmatrix} 0.1 - 0.2i & 1.3 + 0.4i \\ 0.3 - 1.4i & 0.1 - 0.1i \end{pmatrix} & k_0 &= 500N/m \\ \gamma^M &= \begin{pmatrix} 10 + 1.5i \\ 15 - 5i \end{pmatrix} & c_0 &= 4N/ms^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

La matrice d'interface s'écrit :

$$\mathbf{H}^{p0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_0 + i\omega c_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Avec ces données, la norme des efforts prédits vaut :

$$\|\mathbf{f}^C(\mathbf{H}^{p0}, \omega)\|_2 = 12.22N \quad (4.9)$$

Cette valeur ne satisfait pas la contrainte de 11N. On décide de rechercher les solutions graphiquement, d'abord en fixant une variable.

#### 4.2.2.1 Approche avec une variable

La figure 4.1 comporte deux graphes qui représentent l'évolution de la norme des efforts prédits en fonction d'une inconnue de l'inéquation (4.6). Sur le graphe 4.1.a, le coefficient d'amortissement est fixé à sa valeur initiale, et l'on fait varier le coefficient de raideur.

Sur le graphe de droite 4.1.b, le coefficient de raideur est fixé, c'est l'amortissement qui varie.

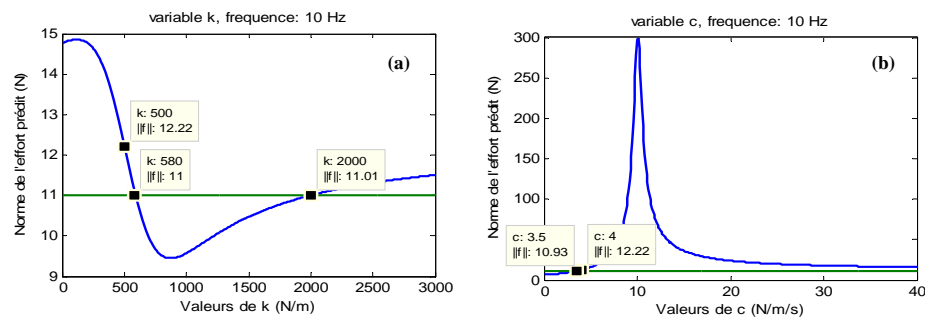


FIGURE 4.1 – résolution de l'inéquation (4.6) à un paramètre. (a) raideur, (b) amortissement.

Les solutions lues sur ces graphes sont  $(k, c) \in [580, 2000] \times \{4\}$  pour le graphe 4.1.a, et  $(k, c) \in \{500\} \times [0, 3.5]$ , pour le graphe 4.1.b.

Ces résultats suggèrent que le choix de paramétrer uniquement la raideur offre une plus grande marge de manoeuvre que celui de paramétrer l'amortissement uniquement.

#### 4.2.2.2 Approche graphique à deux variables

Ici les variables  $k$  et  $c$ , solutions de l'inéquation (4.6), sont recherchées simultanément. Dans l'exemple choisi, la solution graphique a la forme d'une demi-ellipse (figure 4.2). L'analyse graphique révèle que pour satisfaire la contrainte l'amortissement doit être le plus faible possible (en dessous de  $6N/m.s^{-1}$ ).

Lorsque c'est le cas, la marge de manoeuvre sur la raideur est plus importante : entre 500 et 2500N/m. En revanche si la raideur est faible, il est très difficile de modifier l'amortissement pour satisfaire la contrainte. Enfin, en choisissant une raideur autour de 1500N/m et un amortissement autour de  $2N/m.s^{-2}$ , on obtient une solution stable car localement, autour de cette valeur, on reste dans le domaine des solutions. La voie graphique permet donc, en plus d'aboutir éventuellement à des solutions, d'observer leur stabilité.

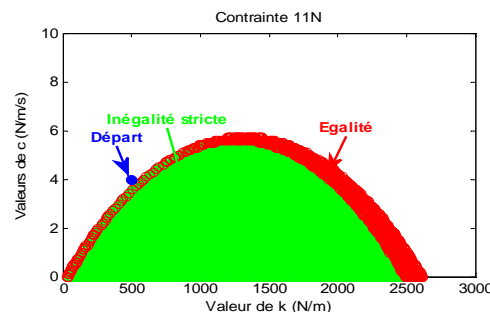


FIGURE 4.2 – résolution de l'inéquation (4.6) à deux variables.

#### 4.2.2.3 Généralisation et modification du problème

Lorsque l'interface entre les structures comporte un seul point et qu'un seul degré de liberté est considéré, l'inéquation (4.6) comporte deux inconnues que sont le coefficient de raideur et le coefficient d'amortissement. Dans ce cas, la solution est obtenue par voie graphique.

Lorsqu'il y a plus de deux points d'attache entre les structures et/ou plusieurs degrés de liberté considérés, le nombre d'inconnues de l'inéquation (4.6) est supérieur à trois et une solution graphique devient alors impossible.

En vue d'obtenir des solutions par une approche autre que graphique, on recherche désormais les solutions qui minimisent la norme des efforts prédits et qui satisfont la contrainte (4.6). Le problème de minimisation considéré s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Z}^p} & \|\mathbf{f}^C(\mathbf{Z}^p, \omega)\|_2 \\ & \|\mathbf{f}^C(\mathbf{Z}^p, \omega)\|_2 \leq f^{Cmax}(\omega) \end{cases} \quad (4.10)$$

### 4.3 Problème modifié : minimisation des efforts vibratoires transmis à l'accueil

#### 4.3.1 Complément sur l'écriture du problème de minimisation

Plutôt que d'identifier tous les termes des matrices de raideur et d'amortissement formant l'impédance des jonctions définie par la relation (4.5), on fait choix d'identifier deux coefficients multiplicatifs  $\alpha$  et  $\beta$  qui jouent ici le rôle des variables. La matrice impédance des jonctions s'écrit :

$$\mathbf{Z}^p(\alpha, \beta, \omega) = \alpha \mathbf{K}^p + i\omega\beta \mathbf{C}^p \quad (4.11)$$

Les efforts  $\mathbf{f}^C$  appliqués à la structure d'accueil C, fonction de ces coefficients, s'écrivent donc  $\mathbf{f}^C(\alpha, \beta, \omega)$ .

Cette approche permet de rechercher les deux inconnues  $\alpha$  et  $\beta$ , quelle que soit la dimension des matrices de raideur et amortissement. Il faut disposer de matrices initiales  $\mathbf{K}^p$  et  $\mathbf{C}^p$  pour que l'égalité (4.11) soit complètement définie. Par ailleurs, les coefficients multiplicatifs attendus doivent avoir un sens physique car dans le monde industriel les solutions obtenues ne doivent pas conduire à des objets irréalisables. Dans ces conditions, les coefficients sont encadrés par des bornes inférieure et supérieure et le problème de minimisation (4.10) devient :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Z}^p} & \|\mathbf{f}^C(\mathbf{Z}^p, \omega)\|_2 \\ & \|\mathbf{f}^C(\mathbf{Z}^p, \omega)\|_2 \leq f^{Cmax}(\omega) \\ & \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \\ & \beta_{min} \leq \beta \leq \beta_{max} \end{cases} \quad (4.12)$$

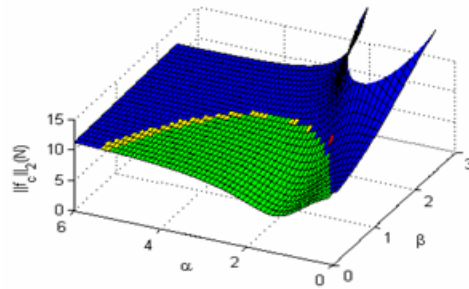
Les données de l'exemple élémentaire (4.7) sont complétées ici pour les besoins du problème de minimisation (4.12). Ce complément porte sur les bornes  $\alpha_{min}$ ,  $\alpha_{max}$ ,  $\beta_{min}$  et  $\beta_{max}$  des coefficients multiplicatifs et se traduit par :

$$\alpha_{min} = 0, \alpha_{max} = 6, \beta_{min} = 0, \beta_{max} = 2.5 \quad (4.13)$$

La matrice d'interface définie jusqu'ici par la relation (4.8) devient :

$$\mathbf{H}^{p0}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha k_0 + i\omega\beta c_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

où  $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  et  $\beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$ . Le minimum global de l'inéquation (4.12) peut être localisé sur un graphe. La figure 4.3 contient une surface obtenue en représentant la norme des efforts prédits, par le modèle (4.2) en utilisant les données (4.7) et (4.13), en fonction des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .



**FIGURE 4.3** – localisation du minimum global (en rouge) et variations de la norme des efforts. en vert : la contrainte est respectée; en bleu : la contrainte n'est pas respectée; en jaune : égalité.

Les coordonnées  $(\alpha_{glob}, \beta_{glob})$  du minimum global sont  $(1.4, 0)$ , donc  $k = 700N/m$  et  $c = 0/N/m.s^{-1}$ . Ce point peut être localisé sur la figure 4.2. La norme du vecteur effort en ce point vaut  $6.1N$ . La contrainte est satisfaite en ce point, donc le minimum global est la solution optimale  $(\alpha_{opt}, \beta_{opt})$  du problème (4.12).

### 4.3.2 Introduction des méthodes des multiplicateurs de Lagrange à partir de l'exemple choisi

Les méthodes des multiplicateurs de Lagrange sont des méthodes de type gradient qui permettent de transformer un problème de minimisation avec contraintes en un problème sans contrainte. Pour cela, la fonctionnelle du problème est modifiée en lui ajoutant les contraintes multipliées par des scalaires appelés *multiplicateurs de Lagrange*.

Deux grandes familles d'algorithmes reposent sur ces méthodes : la famille des algorithmes qui utilisent les fonctions pénalité ou les fonctions barrières, et celle qui porte sur la résolution de systèmes

d'équations ou d'inéquations construits à partir des conditions nécessaires d'optimalité.

Les méthodes qui appartiennent à la première famille sont itératives. À chaque nouvelle itération, les composantes du vecteur candidat tendent vers un minimum local. Les fonctions pénalité ou les fonctions barrière empêchent chacune à leur manière que ce candidat sorte du domaine admissible (ensemble des vecteurs qui satisfont les contraintes du problème sans nécessairement être des minima). Nous aborderons une de ces méthodes au paragraphe 4.3.2.4. Dans la deuxième famille, les conditions nécessaires d'optimalité sont vues comme un système d'équations ou d'inéquations dont les inconnues sont les variables du problème ainsi que les multiplicateurs de Lagrange.

#### 4.3.2.1 Ecriture d'une forme standard

La fonctionnelle du problème de minimisation (4.12) se note :

$$J_\omega(\alpha, \beta) = \|\mathbf{f}^C(\alpha, \beta, \omega)\|_2^2 \quad (4.15)$$

et les contraintes se notent :

$$\begin{aligned} g_\omega^1(\alpha, \beta) &= \|\mathbf{f}^C(\alpha, \beta, \omega)\|_2^2 - (f^{Cmax}(\omega))^2 \\ g_\omega^2(\alpha, \beta) &= \alpha_{min}(\omega) - \alpha(\omega) \\ g_\omega^3(\alpha, \beta) &= \alpha(\omega) - \alpha_{max}(\omega) \\ g_\omega^4(\alpha, \beta) &= \beta_{min}(\omega) - \beta(\omega) \\ g_\omega^5(\alpha, \beta) &= \beta(\omega) - \beta_{max}(\omega) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ici, les exposants ne sont en rien des puissances. Suite à (4.15) et à (4.16), le problème de minimisation (4.12) s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{\alpha, \beta} J_\omega(\alpha, \beta) \\ g_\omega^j \leq 0, \quad j = 1, \dots, 5 \end{cases} \quad (4.17)$$

Le lagrangien est définie comme suit :

$$L_\omega(\alpha, \beta, \mu_1, \dots, \mu_5) = J_\omega(\alpha, \beta) + \sum_{j=1}^5 \mu_j g_\omega^j(\alpha, \beta) \quad (4.18)$$

Les scalaires  $\mu_j$  sont appelés *multiplicateurs de Lagrange*. Les solutions admissibles vérifient les conditions nécessaires d'optimalité, exprimées au premier ordre par les zéros du gradient du lagrangien [49].

En appliquant l'opérateur gradient à chaque membre de l'égalité (4.18), on obtient par linéarité :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} L_{\omega}(\alpha, \beta, \mu_1, \dots, \mu_5) = \nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} J_{\omega}(\alpha, \beta) + \sum_{j=1}^5 \mu_j \nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} g_{\omega}^j(\alpha, \beta) \quad (4.19)$$

Le second terme du membre de droite est simple à calculer. En revanche, le calcul de gradient de la fonctionnelle nécessite des calculs intermédiaires et l'usage de la formule :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} J_{\omega}(\alpha, \beta) = 2\Re \left( \mathbf{J}_{\mathbf{f}^C(\alpha, \beta)}(\alpha, \beta)^* \cdot \mathbf{f}^C(\alpha, \beta) \right) \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{f}^C(\alpha, \beta)}(\alpha, \beta)$  désigne la matrice jacobienne de la fonction vectorielle  $\mathbf{f}^C(\alpha, \beta)$  et \* la transposée conjuguée d'une matrice. La matrice jacobienne en question est formée de deux colonnes :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}^C(\alpha, \beta)}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}^C(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathbf{f}^C(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Notant  $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^C + \mathbf{Y}^M$ , le calcul de chaque colonne du membre de droite de la relation (4.21) donne :

$$\frac{\partial \mathbf{f}^C}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = -\omega^2 (-\omega^2 \mathbf{H}^p + \mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha \mathbf{K}^p + \beta i\omega \mathbf{C}^p)^{-1} \mathbf{K}^p (\alpha \mathbf{K}^p + \beta i\omega \mathbf{C}^p)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} (-\omega^2 \mathbf{H}^p + \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\gamma}_s^M \quad (4.22)$$

et,

$$\frac{\partial \mathbf{f}^C}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = -i\omega^3 (-\omega^2 \mathbf{H}^p + \mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha \mathbf{K}^p + \beta i\omega \mathbf{C}^p)^{-1} \mathbf{C}^p (\alpha \mathbf{K}^p + \beta i\omega \mathbf{C}^p)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} (-\omega^2 \mathbf{H}^p + \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\gamma}_s^M \quad (4.23)$$

Le calcul du gradient et celui de la matrice jacobienne sont donnés en annexe 7.3.1.

Il vient d'être vu qu'une solution du problème (4.12) est nécessairement un zéro du lagrangien. Par conséquent, les candidats sont recherchés en résolvant l'équation :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} L_{\omega}(\alpha, \beta, \mu_1, \dots, \mu_5) = 0 \quad (4.24)$$

Ce qui revient à résoudre, suite à (4.19), l'équation :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} J_{\omega}(\alpha, \beta) + \sum_{j=1}^5 \mu_j \nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} g_{\omega}^j(\alpha, \beta) = 0 \quad (4.25)$$

#### 4.3.2.2 Tentative de résolution par une méthode exhaustive de discussion des contraintes

La relation (4.25) est un système de 2 équations à 7 inconnues. Pour résoudre ce système, il faut lui apporter des équations supplémentaires ou bien supprimer des inconnues. Dans tous les cas, le nombre



d'équations doit être égal au nombre d'inconnues. Pour aboutir à cet équilibre, on procède à une discussion exhaustive des 5 contraintes, en s'appuyant sur le théorème de Karush Kahn Tucker, énoncé dans l'ouvrage de D. Bertsekas [49]. Cette discussion repose sur le fait que pour toute solution admissible de (4.12), chaque contrainte  $g_{\omega}^j$  est soit active,  $g_{\omega}^j(\alpha, \omega) = 0$ , soit active soit inactive  $g_{\omega}^j(\alpha, \omega) < 0$ . Si la contrainte est active, alors c'est une équation qui vient s'ajouter au système (4.18) car possédant les mêmes inconnues. Si la contrainte est inactive, d'après le théorème cité plus haut, le multiplicateur de Lagrange associé est nul,  $\mu_j = 0$ . Dans ce cas, cela fait une inconnue en moins.

La discussion exhaustive conduit ainsi à  $2^5$  possibilités. Pour obtenir tous les candidats, il faut donc résoudre les  $2^5$  systèmes d'équations non linéaires. Cette démarche est longue et coûteuse. Malgré tout, pour mettre en œuvre la démarche, la discussion porte sur le cas qui conduit au minimum identifié sur la figure 4.3. Les coordonnées  $(\alpha_{opt}, \beta_{opt})$  de ce minimum sont telles que  $\alpha_{opt} \in ]\alpha_{min}, \alpha_{max}[$  et  $\beta_{opt} = 0$ .

Le développement qui suit concerne cette discussion, dite cas favorable.

### 4.3.2.3 Discussion du cas favorable

Le cas de discussion qui donne le minimum identifié sur la figure 4.3 se traduit au niveau des contraintes comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{f}^C(\alpha, \beta, \omega)\|_2 \leq f^{Cmax}(\omega) \\ \alpha_{opt} \in ]\alpha_{min}, \alpha_{max}[ \\ \beta_{opt} = \beta_{min} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} g_{\omega}^1(\alpha, \beta) < 0 \\ g_{\omega}^2(\alpha, \beta) < 0 \\ g_{\omega}^3(\alpha, \beta) < 0 \\ g_{\omega}^4(\alpha, \beta) = 0 \\ g_{\omega}^5(\alpha, \beta) < 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \\ \mu_4 \geq 0 \\ \mu_5 = 0 \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Les informations extraites de (4.26) aident à réduire les inconnues présentes dans (4.25). En effet, le précédent système d'équations devient :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} J_{\omega}(\alpha, \beta) + \mu_4 \nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} g_{\omega}^4(\alpha, \beta) = 0 \quad (4.27)$$

On a bien un système de deux équations à deux inconnues  $\alpha$  et  $\mu_4$  car  $\beta = \beta_{min} = 0$ . Par ailleurs, le calcul du gradient de la contrainte donne :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} g_{\omega}^4(\alpha, \beta) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Ainsi, l'équation au gradient nul (4.25) s'écrit :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} J_{\omega}(\alpha, \beta) - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Les composantes de  $\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} J_{\omega}(\alpha, \beta)$  sont connues d'après (4.21), (4.22) et (4.23). Mais la solution analytique de (4.29) n'est pas facile à obtenir.

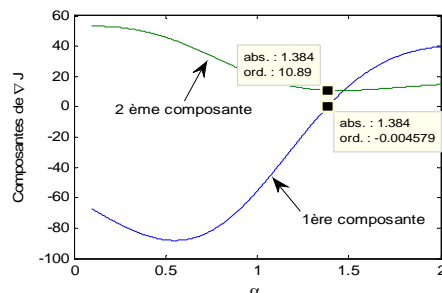
Les inconnues  $\alpha$  et  $\mu_4$  sont telles que la première composante du gradient est nulle, et la seconde composante est positive (pour que la différence avec le multiplicateur de Lagrange soit nulle). À nouveau la solution graphique est sollicitée pour rechercher les solutions de l'équation (4.29).

La figure 4.4 représente les composantes du gradient de la fonctionnelle en fonction du coefficient multiplicatif  $\alpha$ . On peut lire sur cette figure que la 1<sup>ère</sup> composante s'annule une seule fois, en  $\alpha \approx 1.384$ , soit  $\alpha k_0 \approx 692 N/m$ . La 2<sup>ème</sup> composante vaut alors 10.89 et la seconde équation de (4.29) devient  $10.89 - \mu_4 = 0$ . Elle fournit une valeur positive du multiplicateur de Lagrange  $\mu_4$  recherché. Ainsi, la discussion fournit comme solution :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.384 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Cette valeur correspond à un couple  $(\alpha k_0, \beta c_0) \approx (692, 0)$ . La valeur 692 est proche de la valeur 700 identifiée au paragraphe 4.3.3.1.

En théorie, il faut utiliser les conditions de second ordre [49], pour vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum.



**FIGURE 4.4 – représentation graphique des composantes du gradient de la fonctionnelle.**

Il est vrai que si l'on a recours à une méthode graphique lors de la discussion, alors autant résoudre tout le problème par ce biais. La raison est que l'on a souhaité mettre en évidence les difficultés

rencontrées tout au long de la mise en œuvre de cette méthode. En pratique, les algorithmes qui portent sur les méthodes de Lagrange utilisent des méthodes itératives et des fonctions pénalité ou des fonctions barrières [49].

Par ailleurs, les conditions de second ordre n'ont pas été exploitées. Elles auraient permis de vérifier que les candidats obtenus sont bien des minima. La suite de la démarche n'a pas été conduite car il aurait fallu soit calculer explicitement la matrice hessienne, soit implémenter un algorithme d'approximation de cette matrice. Dans les deux cas il n'a pas été jugé utile de poursuivre dans cette voie.

#### 4.3.2.4 Autre approche : introduction du lagrangien augmenté

Il vient d'être souligné que les méthodes des multiplicateurs de Lagrange reposent sur l'écriture du lagrangien du problème, définie par la somme de la fonction objectif et des fonctions contraintes. Réécrivons le problème (4.12) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, l \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = l+1, \dots, m \\ & x_{l_i} \leq x_i \leq x_{u_i} \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Lors de l'implémentation, d'autres fonctions dites de pénalité sont ajoutées au lagrangien, lequel devient le lagrangien augmenté :

$$\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i (g_i + \theta_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^m r_i (g_i + \theta_i)_+^2 \quad (4.32)$$

où  $r_i \theta_i (\equiv u_i)$  sont les multiplicateurs de Lagrange et  $(h)_+ = \max(0, h)$ . Les variantes des méthodes de multiplicateurs de Lagrange sont dues au choix des fonctions pénalités. Ici, l'écriture proposée par Powell, reprise dans [50], a été choisie.

Pour minimiser le lagrangien augmenté, réécrit à chaque itération, la méthode BFGS, de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, est employée [51]. Cette méthode itérative permet de résoudre des problèmes de minimisation sans contrainte. La matrice hessienne exacte n'est pas requise (pour vérifier les conditions d'optimalité de second ordre), encore moins son inverse. Des approximations de la matrice inverse sont construites à chaque itération. Par ailleurs, comme la méthode BFGS est une méthode de descente, à chaque itération, il lui faut un pas et une direction de descente. Le pas de descente est calculé à l'aide de la méthode de recherche linéaire de WOLFE [51].

Le paragraphe qui suit présente une méthode dite de recherche directe car elle le gradient de la fonctionnelle n'est pas sollicité.

### 4.3.3 Introduction sur la méthode de Nelder-Mead

#### 4.3.3.1 Présentation de la méthode

La méthode de Nelder-Mead est une méthode de minimisation de fonctionnelle dans laquelle le gradient n'est pas requis. Pour minimiser une fonction numérique  $f$  de  $n$  variables, la méthode utilise un ensemble de  $n + 1$  points formant les sommets d'un polytope (vu ici comme une généralisation à toute dimension d'un polygone) dans un espace vectoriel de dimension  $n$ . Les points sont classifiés en fonction de la valeur que prend  $f$  en chacun d'eux. Le point pour lequel la fonction  $f$  prend sa plus petite valeur est dit «meilleur» et celui où elle prend sa plus grande valeur est dit «pire».

La méthode est itérative et, à chaque itération, les points du polytope sont mis à jour par trois procédés nommés «contraction», «extension» et «réflexion». En fin d'algorithme et s'il y a convergence, la distance entre le meilleur et le pire des points est inférieure à une tolérance fixée au départ.

En toute rigueur, il ne s'agit pas d'une méthode d'optimisation globale. Cependant elle suffit pour des problèmes ayant peu de minima locaux.

La version initiale fut publiée par Nelder et Mead en 1965 [52]. Nous l'appelons version 1. Elle concerne les problèmes de minimisation sans contrainte. Une adaptation de l'algorithme est donnée dans [53], lorsque les variables sont bornées (ici, les bornes correspondent aux contraintes de type  $g_{\omega}^i(\alpha, \beta)$ ,  $j = 2, \dots, 5$  relation (4.16)) : c'est la version 2. Dans l'article [53], les auteurs établissent une version plus générale, traitant de problèmes de minimisation avec d'autres contraintes que celles liées aux bornes des variables. En plus, le minimum est global : c'est la version 3.

Pour la mise en œuvre sur l'exemple élémentaire, la version 2 de l'algorithme a été choisie car ne disposant pas d'une architecture informatique de la version 3. Ce choix suppose que le problème est sans contrainte (de type  $g_{\omega}^i(\alpha, \beta)$ ,  $j = 2, \dots, 5$ , relation (4.16)).

En fait, comme la fonctionnelle et la première contrainte sont égales, on suppose que la minimisation l'emporte sur la contrainte. En effet, si la première contrainte est satisfaite, alors nécessairement le minimum global la satisfait aussi.

Par ailleurs, les 4 autres contraintes du problème (4.12) sont les bornes des variables. Ainsi, en s'appuyant sur l'hypothèse précédente, le problème élémentaire est vue comme sans contrainte, autres que celles liées aux bornes des variables. La version 2 de l'algorithme, donnée en annexe 7.3.2, est donc la plus adaptée pour cet exemple.

### 4.3.3.2 Mise en œuvre d'algorithme sur l'exemple choisi

Les données supplémentaires nécessaires au lancement de l'algorithme sont les coordonnées des 3 points qui forment les sommets du polytope initial, les bornes des coefficients multiplicatifs  $\alpha$  et  $\beta$  et les valeurs des coefficients de réflexion, d'extension et de contraction du polytope. Ces données valent ici :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_{min} = 0, \alpha_{max} = 3, \beta_{min} = 0, \beta_{max} = 4, \rho = 1, \chi = 1/2, \varepsilon = 2 \quad (4.33)$$

Les coefficients de réflexion  $\rho$ , d'extension  $\varepsilon$  et de contraction  $\chi$  sont fixés à leur valeur par défaut [51]. Dans l'annexe 3.2 on montre comment ces coefficients modifient le polytope. De manière général, ces coefficients sont tels que  $\rho > 0$ ,  $\varepsilon > 1$  et  $\chi \in ]0, 1[$ . La matrice  $\mathbf{X}_0$  contient trois vecteurs colonne qui correspondent aux coordonnées des trois points du polytope initial. Dans chaque vecteur colonne, la première composante est liée au coefficient  $\alpha$  et la deuxième composante est liée au coefficient  $\beta$ . On rappelle que les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  multiplient les matrices de raideur et amortissement respectivement. Les valeurs initiales contenues dans la relation (4.33) sont utilisées dans l'algorithme de Nelder-Mead, version 2. Le résultat obtenu est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{opt} \\ \beta_{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Ce résultat est différent de celui obtenu en (4.30). Pour tenter de comprendre l'origine des écarts, l'algorithme est lancé plusieurs fois, avec différents réglages des coefficients de réflexion, d'extension et de contraction, sans changer la matrice initiale. Les différents réglages testés sont consignés dans le tableau suivant :

$\rho$	$\chi$	$\varepsilon$	solution $(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t$
1	1/2	2	$(2.6, 0)^t$
0.8	1/2	2	$(1.41, 0)^t$
1	1/3	2	$(2.6, 0)^t$
1	1/2	1.9	$(2.6, 0)^t$
0.8	1/3	1.9	$(1.33, 0)^t$

**TABLE 4.1 – réglage des paramètres de l'algorithme de Nelder-Mead.**

Différentes valeurs des coefficients d'initialisation de l'algorithme conduisent dans certains cas à différents résultats. Le coefficient de réflexion est celui qui influence le plus la valeur de la solution. Le

résultat le plus proche de (4.30) est  $(1.33, 0)^t$  avec les conditions initiales indiquées dans la dernière ligne du tableau 4.1.

L'algorithme est très rapide, car le temps de calcul est de l'ordre de la milliseconde pour chaque cas étudié.

En définitive, quelle que soit la méthode utilisée pour résoudre le problème de minimisation, il y a toujours des réglages à faire.

### 4.3.4 Généralisations

#### 4.3.4.1 Cas de plusieurs fréquences

Pour régler les paramètres sur un ensemble de  $n$  pulsations notées  $\omega_k$ , la fonctionnelle devient la somme des fonctionnelles écrites pour chaque fréquence :

$$J(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^n \left\| (-\omega_k^2 \mathbf{H}^p + \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\gamma}_s^M \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^n J_{\omega_k}(\alpha, \beta) \quad (4.35)$$

Ainsi, le réglage sur un ensemble de  $n$  fréquences est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \min_{\alpha, \beta} & J(\alpha, \beta) \\ & g_{\omega_k}^j(\alpha, \beta) \leq 0, \quad j = 1, \dots, 5, k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.36)$$

Notons qu'ainsi écrit, le nombre de contraintes du problème (4.36) est cinq fois le nombre de fréquences.

#### 4.3.4.2 Autres algorithmes

En plus des algorithmes présentés ici, il existe une multitude d'autres algorithmes. La plupart sont disponibles dans des logiciels de calcul numérique comme le logiciel Mathematica (pour des problèmes de taille raisonnable). Dans ce cas, une seule commande suffit, c'est alors le logiciel qui «choisit» selon la configuration du problème la méthode à utiliser. Par exemple, la commande *NMinimize* de Mathematica permet de résoudre des problèmes non linéaires d'optimisation globale. Dans la documentation, il est indiqué que l'algorithme de Nelder-Mead est codé dans cette commande.

## 4.4 Application du problème modifié dans un cadre technologique

### 4.4.1 Présentation du cas d'étude

Le cas d'étude retenu est celui présenté au chapitre 3. Les algorithmes utilisés sont la méthode de Nelder-Mead (version 2, sans contrainte de type  $g_{\omega}^1(\alpha, \beta)$ ) et la commande *NMinimize* du logiciel

mathematica. Le problème (4.12) est résolu lorsqu'une seule fréquence est considérée, et le problème (4.36) lorsque plusieurs fréquences sont traitées simultanément. Dans chaque cas les bornes des coefficients multiplicatifs sont :

$$\alpha_{min} = 0.5, \alpha_{max} = 5, \beta_{min} = 0.5, \beta_{max} = 10 \quad (4.37)$$

La figure 4.5 représente la norme des efforts prédits en fonction des coefficients de réglage des jonctions. Il apparaît que la variation de la norme des efforts atteint près de  $6N$  à  $47Hz$ . Trouver un réglage optimal n'est donc pas sans intérêt.

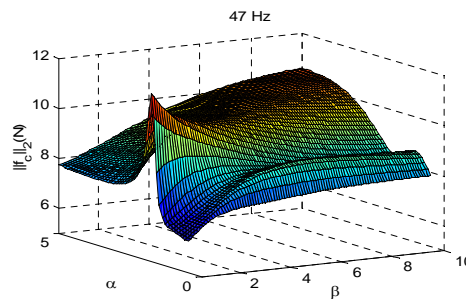


FIGURE 4.5 – norme des efforts vibratoires prédits en fonction des caractéristiques des plots.

#### 4.4.2 Mise en œuvre de l'algorithme de Nelder-Mead

Les coefficients d'initialisation de l'algorithme sont réglés de façon unique pour toute la mise en œuvre. Le tableau ci-dessous contient les valeurs choisies. Le cas de minimisation sans la première contrainte est traité, pour les raisons évoquées au paragraphe précédent.

réflexion $\rho$	contraction $\chi$	extension $\varepsilon$
0.8	1/2	2

TABLE 4.2 – initialisation des coefficients de l'algorithme de Nelder-Mead.

##### 4.4.2.1 Cas d'une fréquence

###### Fréquence 32.5 Hz

La norme des efforts prédits vaut avant réglage  $8.56N$  à  $32.5Hz$ . Pour cette fréquence, deux matrices de conditions initiales, données dans le tableau 4.3, ont été considérées. Les résultats sont aussi inscrits dans ce tableau.

matrice initiale	solution obtenue	norme des efforts prédits
$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t = (2.37, 0.5)^t$	$\ \mathbf{f}^C\ _2 = 8.05N$
$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	$(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t = (0.5, 9.9)^t$	$\ \mathbf{f}^C\ _2 = 7.42N$

TABLE 4.3 – réglage des matrices initiales et résultat obtenues à 32.5Hz.

**Fréquence 40Hz**

La norme des efforts prédits vaut, avant tout réglage,  $6.87N$ . Le tableau des résultats obtenus pour cette fréquence est le suivant :

matrice initiale	solution obtenue	norme des efforts prédits
$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 8.5 \end{pmatrix}$	$(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t = (1.34, 9.53)^t$	$\ \mathbf{f}^C\ _2 = 5.64N$
$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t = (5, 0.5)^t$	$\ \mathbf{f}^C\ _2 = 5.02N$

TABLE 4.4 – réglage des matrices initiales et résultat obtenues à 40Hz.

**Fréquence 47Hz**

La norme des efforts prédits vaut  $6.75N$  en situation nominale. Le tableau des résultats obtenus pour cette fréquence est le suivant :

matrice initiale	solution obtenue	norme des efforts prédits
$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t = (0.5, 0.5)^t$	$\ \mathbf{f}^C\ _2 = 6.24N$

TABLE 4.5 – réglage des matrices initiales et résultat obtenues à 47Hz.

**4.4.2.2 Cas de plusieurs fréquences**

Ici, l'objectif est de minimiser la norme des efforts prédits en trois fréquences, 32.5Hz, 40Hz et 47Hz. Les valeurs prises par la fonctionnelle, donnée par la relation (4.35), sont représentées en fonction des variables  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les données et résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Le premier réglage conduit à une diminution de la norme des efforts prédits à  $8.00N$  contre  $8.56N$  à 32.5Hz ;  $5.00N$  contre  $8.3N$  à 40Hz et  $7.62N$  contre  $6.75N$  à 47Hz. Ce réglage diminue la norme des efforts prédits à 32.5Hz et à 40Hz, mais augmente la norme des efforts prédits à 47Hz.



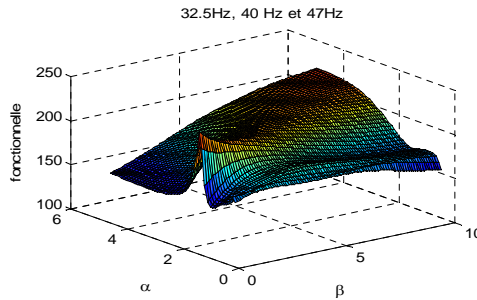


FIGURE 4.6 – fonctionnelle construite pour les fréquences 32.5Hz,40Hz,47Hz.

matrice initiale	solution obtenue	valeur de la fonctionnelle
$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4.1 & 3.2 \\ 0.6 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$	$(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t = (3.68, 0.5)^t$	$J(\alpha_{opt}, \beta_{opt}) = 147.16N$
$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 8.5 \end{pmatrix}$	$(\alpha_{opt}, \beta_{opt})^t = (0.5, 10)^t$	$J(\alpha_{opt}, \beta_{opt}) = 154.78N$

TABLE 4.6 – mise en œuvre de l’algorithme de Nelder-Mead aux fréquences 32.5Hz, 40Hz et 47Hz.

Le second réglage conduit à une norme des efforts prédits de 7.42N à 32.5Hz, 6.18N à 40Hz et 7.84N à 47Hz. Ce réglage augmente également la norme des efforts prédits à 47Hz contrairement à ce qui est observé aux deux autres fréquences.

### 4.4.3 Minimisation des efforts avec *NMinimize*

#### 4.4.3.1 Réglage à une fréquence

La commande *NMinimize* a été utilisée pour résoudre les problèmes (4.12) et (4.36) afin d’en trouver des minima globaux. Ici, la première contrainte est prise en compte. Ainsi, à 32.5Hz, la limite des efforts est fixée à 8N. Cette limite vaut 6.5N à 40Hz et 6.3N à 47Hz. Le constat est que les minima globaux sont ceux inscrits dans les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 et issus de la version 2 de l’algorithme de Nelder-Mead (cf. 4.3.3.1). Lorsque deux solutions sont inscrites dans ces tableaux, il est fait allusion à celle qui donne les efforts de norme la plus faible.

#### 4.4.3.2 Réglage à plusieurs fréquences

L'hypothèse que la minimisation l'emporte sur la première contrainte, formulée au paragraphe 4.3.3.1, a permis d'utiliser la version 2 de l'algorithme de Nelder-Mead. Cette hypothèse a été formulée car, dans le paragraphe en question, la fonctionnelle et la première contrainte sont égales. Ce n'est plus le cas lorsque l'on traite de plusieurs fréquences car la fonctionnelle, définie dans la relation (4.35), est différente des contraintes de type  $g_{\omega_k}^1(\alpha, \beta)$ .

Etant donné que l'hypothèse n'est plus valide, rigoureusement, il faut résoudre le problème de minimisation (4.36) avec toutes ses contraintes. Pour cela, on se sert de la commande *NMinimize*.

L'application numérique est restreinte à trois fréquences, à savoir 32.5Hz, 40Hz et 47Hz comme précédemment. Les contraintes sont elles aussi inchangées. Le tableau 4.7 présente les résultats.

fréquence	1 <sup>ère</sup> contrainte	solution obtenue	$\ \mathbf{f}^C(\alpha_{opt}, \beta_{opt})\ _2$
32.5Hz	8N	$\begin{pmatrix} \alpha_{opt} \\ \beta_{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.23 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	8.31N
40Hz	6.5N		6.35N
47Hz	6.3N		6.58N

**TABLE 4.7 – mise en œuvre de la commande *Nminimize* aux fréquences 32.5Hz, 40Hz et 47Hz.**

La contrainte de type  $g_{\omega_k}^1(\alpha, \beta)$  est satisfaisante à 40Hz. En revanche elle ne l'est pas à 32.5Hz et à 47Hz. Cependant, les valeurs obtenues après réglage ne sont pas très différentes des limites et demeurent inférieures aux valeurs initiales.

Un second réglage est effectué. Il concerne les fréquences 41Hz, 47Hz et 50Hz pour lesquelles la norme des efforts vaut en situation initiale 6.01N, 6.75N et 6.5N respectivement. La limite des efforts tolérée est fixée à 6.3N pour chacune de ces fréquences. Le tableau 4.8 contient les résultats.

fréquence	1 <sup>ère</sup> contrainte	solution obtenue	$\ \mathbf{f}^C(\alpha_{opt}, \beta_{opt})\ _2$
41Hz	6.3N	$\begin{pmatrix} \alpha_{opt} \\ \beta_{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.23 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	5.82N
47Hz	6.3N		6.24N
50Hz	6.3N		5.61N

**TABLE 4.8 – mise en œuvre de la commande *Nminimize* aux fréquences 41Hz, 47Hz et 50Hz.**

Avec ce réglage, les efforts satisfont toutes les contraintes aux trois fréquences. Dans la suite deux nouveaux points sont abordés. Le premier consiste à observer ce que devient la norme des efforts prédits lorsque les réglages optimaux obtenus pour une fréquence sont employés à toutes les fréquences. Le

second point concerne l'obtention d'un réglage optimal adapté à plusieurs fréquences.

#### 4.4.4 Influence d'un réglage à fréquence donnée sur les autres fréquences

##### 4.4.4.1 Réglage à une fréquence

Les solutions optimales globales, inscrites respectivement dans les tableaux 4.3 et 4.4, sont multipliées aux matrices de raideur et amortissement à chaque fréquence. Il en résulte de nouveaux efforts dont les normes sont tracées sur les figures 4.7.a. et 4.7.b.

Sur la figure 4.7.a, le réglage des caractéristiques des plots se fait à 32.5Hz. La modification n'a presque aucun effet jusqu'à 30Hz car la courbe qui fait suite au réglage est presque confondue à la courbe initiale. À 38Hz, le réglage cause une amplification de la norme des efforts d'un peu plus que  $5N$ . Enfin, entre 43Hz et 50Hz, l'amplification est quasi constante et vaut  $1N$ .

Sur la figure 4.7.b, le réglage se fait à 40Hz. On observe que jusqu'à 47Hz environ, la norme des efforts est soit inchangée (jusqu'à 33Hz environ) soit atténuée (autour de 40Hz). À 47Hz, on note une amplification de près de  $3N$ .

Cette disparité des résultats entre deux réglages ne surprend pas car sans loi qui relie les coefficients multiplicatifs aux fréquences, il n'est pas possible de déduire du réglage optimal à une fréquence celui qui vaut pour les autres fréquences.

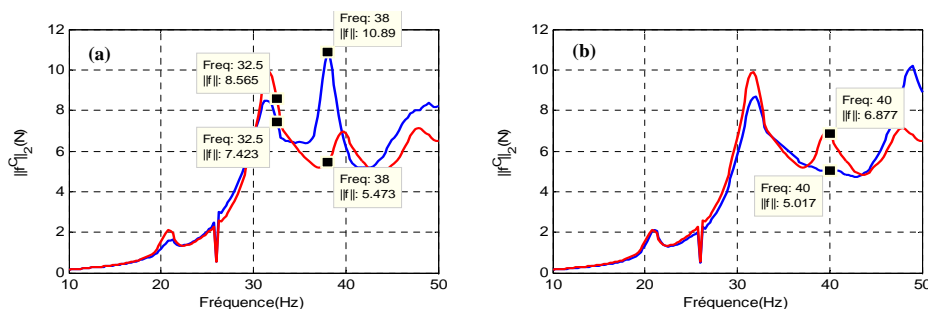


FIGURE 4.7 – réglage des plots à une fréquence et impact sur les autres fréquences. rouge : avant réglage ; bleu : après réglage. (a) : 32.5Hz ; (b) : 40Hz.

La figure 4.8 contient le résultat de la prédiction des efforts lorsque le réglage optimal est effectué à chaque fréquence. La courbe ainsi obtenue (en bleu) est dite courbe minimale. Jusqu'à 31Hz environ, les courbes initiale et minimale sont presque confondues. Donc il est inutile de régler les caractéristiques des plots en dessous de cette fréquence, car il n'est pas possible de faire mieux que les caractéristiques initiales.

Par ailleurs, cette courbe minimale apporte un renseignement sur la possibilité d'atténuer les pics d'efforts localisés aux fréquences 20.75Hz, 31.75Hz, 39.75Hz et 48Hz. Elle indique jusqu'à quels niveaux cette réduction est possible. Ainsi, à 31.75Hz par exemple, il n'est pas possible de faire mieux que de réduire de 1.22N le pic d'efforts.

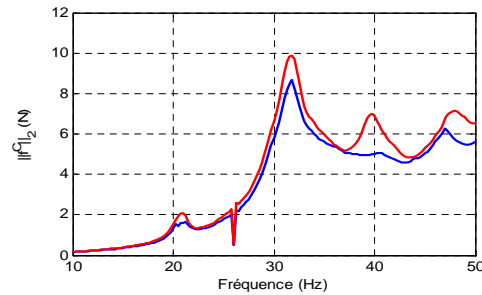


FIGURE 4.8 – norme des efforts vibratoires prédits. trait rouge : avant réglage ; trait bleu : après réglage.

Pour poursuivre la recherche d'un réglage unique pour plusieurs les fréquences, les coefficients multiplicatifs à l'origine de la courbe minimale sont représentés sur la figure 4.9. Le graphe 4.9.a concerne les coefficients multiplicatifs  $\alpha$  de la matrice des raideurs et le graphe 4.9.b concerne ceux de la matrice des amortissements. Il apparaît que l'allure des courbes empêche l'extraction d'une valeur moyenne. En effet, entre les fréquences 10Hz et 20Hz environ, puis entre 23Hz et 33Hz, un réglage unique du coefficient multiplicatif de la matrice de raideur pourrait convenir. Parallèlement, entre 13Hz et 20Hz la valeur de  $\beta$  est constante. Finalement, entre 13Hz et 20Hz on aurait un couple de coefficients unique. Mais ailleurs, on note beaucoup de variations du coefficient multiplicatif de la matrice d'amortissement.

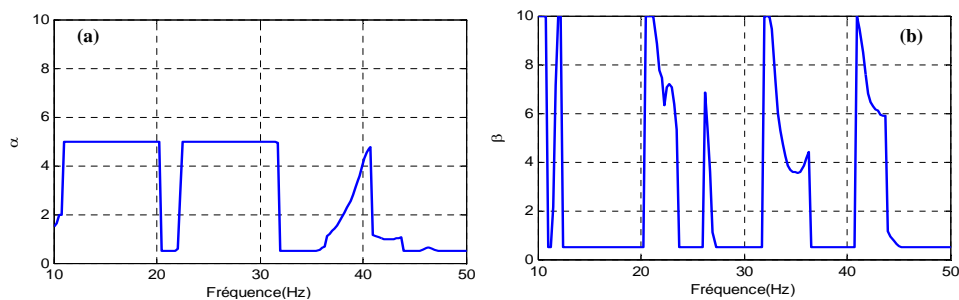


FIGURE 4.9 – coefficients multiplicatifs optimaux en fonction de la fréquence. (a) : raideur ; (b) amortissement.

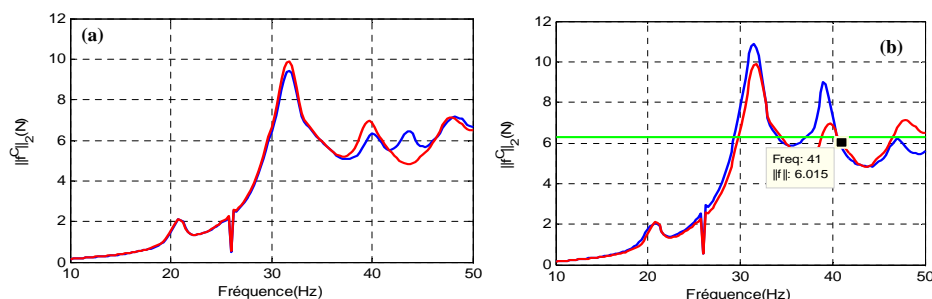
On note qu'en moyenne la valeur optimale du coefficient  $\beta$  est fixée à sa valeur minimale. Cela correspond à l'observation faite aux paragraphes 4.2.2.1 et 4.2.2.2. Les données provenaient alors d'un exemple élémentaire. On peut donc conjecturer que ces résultats ne dépendent pas des données, mais sont au contraire une conséquence du modèle.

Pour obtenir un coefficient adapté à plusieurs fréquences, l'approche suivante repose sur le problème (4.36).

#### 4.4.4.2 Réglage simultané en trois fréquences

À défaut d'extraire une valeur moyenne des coefficients multiplicatifs par voie graphique, on exploite les formules (4.35) et (4.36) pour régler les plots. En guise d'application, deux groupes de trois fréquences sont choisis : 32.5 Hz, 40Hz et 47Hz, d'une part, 40Hz, 47Hz et 50Hz d'autre part. Le réglage optimal souhaité sera, comme précédemment, exploité pour toutes les fréquences.

Pour le premier groupe de fréquences, le réglage est celui donné dans le tableau 4.7. Il a été vu que ce réglage ne permet pas de satisfaire les contraintes aux trois fréquences simultanément. Malgré tout, ce réglage est utilisé à toutes les fréquences. Il n'a presque aucun effet, sauf au voisinage des fréquences 32.5Hz, 40Hz et 47Hz (figure 4.10.a).



**FIGURE 4.10 – réglage à plusieurs fréquences. (a) 32.5Hz ; 40Hz et 47Hz. (b) 41Hz ; 47Hz et 50Hz et une contrainte de 6.3N. trait rouge : avant réglage ; trait bleu : après réglage ; trait vert : contrainte 6.3N.**

Pour le deuxième groupe de fréquences, la fonction *NMinimize* est utilisée. La limite d'efforts est fixée à 6.2N pour les trois fréquences. Les résultats sont présentés sur la figure 4.10.b.

Avant réglage, la limite d'effort est déjà respectée à 41Hz. Après modification, cette limite est respectée aux trois fréquences, et même entre celles-ci. On note par ailleurs qu'entre ces fréquences la courbe issue de la modification est presque identique à la courbe minimale. Ceci n'est pas étonnant car comme le montrent les figures 4.9.a et 4.9.b, la solution est quasi constante dans ces zones. Et

vraisemblablement, il s'agit de la valeur donnée par ce réglage.

Il est donc possible d'obtenir des réglages conjoints à plusieurs fréquences. Mais il est vrai que le réglage unique pour toutes les fréquences reste difficile à atteindre.

## 4.5 Conclusion

Le chapitre qui vient d'être présenté a porté sur le réglage des caractéristiques des jonctions à l'interface entre un sous-système et une structure d'accueil. Ce réglage est effectué en situation nominale.

Les caractéristiques des jonctions sont ici la matrice des raideurs et la matrice d'amortissement. Le problème initial était de trouver toutes les caractéristiques qui permettaient de satisfaire une contrainte sur les efforts appliqués à la structure d'accueil. Il s'agissait en fait d'une inéquation non-linéaire.

Si les matrices de raideur et amortissement sont en fait des scalaires (lorsque par exemple un seul point d'attache dans une direction), la solution du problème initial s'obtient par voie graphique. En revanche si on a effectivement des matrices (plusieurs points d'attache et/ou plusieurs directions) alors l'inéquation est difficile à résoudre et elle possède, si solution il y a, une infinité de solutions. Au lieu de trouver toutes les solutions de l'inéquation en question, on recherche uniquement celles qui minimisent la norme des efforts. Pour cela, le problème initial est modifié et devient un problème de minimisation des efforts appliqués à la structure d'accueil.

Pour résoudre le problème modifié, il a été fait choix de rechercher des coefficients multiplicatifs appliqués aux matrices de raideur et amortissement, au lieu de chaque coefficient des matrices. Une commande a aussi été utilisée pour rechercher un minimum global. Deux méthodes de résolution ont été présentées : une méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode de Nelder-Mead. La première méthode part d'une discussion des contraintes et nécessite le calcul du gradient et l'application de conditions de second ordre. La recherche des zéros du gradient de la fonctionnelle et les conditions de second ordre rendent cette méthode difficile à mettre en œuvre dans un cadre général. En pratique, au lieu de discuter les contraintes, les méthodes de pénalité sont utilisées. Dans ces méthodes, le lagrangien augmenté est minimisé en utilisant par exemple l'algorithme BFGS.

La méthode de Nelder-Mead est plus simple à mettre en œuvre. Mais la difficulté au niveau du choix des paramètres d'initialisation de l'algorithme. La version de l'algorithme qui été mise en œuvre est celle qui ne prend pas en charge la contrainte sur la limite des efforts. Cela ne pose pas de problème conceptuel tant que le réglage ne concerne qu'une fréquence. Lorsque plusieurs fréquences entrent en

jeu, cette version n'est plus appropriée. C'est pourquoi une commande d'un logiciel de calcul numérique a été employée en complément.

L'analyse des résultats de la mise en œuvre de la méthode de recherche directe sur un exemple technologique conduit à plusieurs remarques. Tout d'abord et de façon attendue, le réglage des coefficients à une fréquence donnée ne garantit pas l'efficacité aux autres fréquences. De fait, des surtensions apparaissent ailleurs. Sans loi reliant les coefficients multiplicatifs aux fréquences, on ne peut envisager une extension de la démarche.

Ensuite, régler indépendamment les coefficients à chaque fréquence ne fournira pas des coefficients constants. Mais cette démarche fournit la courbe minimale qui donne une information sur la possibilité de satisfaire ou non la contrainte sur les efforts. L'exemple traité l'a montré.

Finalement, un réglage unique pour un ensemble de fréquences demande de traiter le problème à toutes les fréquences sélectionnées. La fonctionnelle devient ici la somme des fonctionnelles à chacune des fréquences.

Dans l'exemple traité il est apparu des réglages qui ne modifiait la prédiction que localement autour de la (des) fréquence(s) considérée(s). Ces réglages peuvent être un atout si justement on souhaite changer le comportement local d'un plot sans modifier son comportement à d'autres fréquences.

L'efficacité locale obtenue lors de l'exemple traité reste un cas particulier. En effet, le nombre de contraintes augmentant avec le nombre de fréquences, le risque de n'avoir pas de solution augmente aussi.

On est donc face au choix des fréquences et de leur nombre pour une solution satisfaisante.

Avec ce chapitre on a extrait une façon d'œuvrer pour optimiser les raideurs et amortissements des plots. On a préféré des coefficients multiplicatifs devant des matrices de raideur et d'amortissement pleines. Lorsque le réglage ne concerne qu'une fréquence, nous avons montré qu'il suffisait de garder les contraintes liées aux bornes des coefficients multiplicatifs. Puis d'utiliser la version 2 de l'algorithme de Nelder-Mead. Et de vérifier a posteriori que la contrainte qui limite les efforts est vérifiée.

Lorsque le réglage concerne plusieurs fréquences toutes les fréquences doivent être prises en compte. Dans ce cas nous avons utilisé la commande *NMinimize* pour obtenir un réglage optimal.

Le choix de deux coefficients multiplicatifs n'est pas fortuit. À première vue, en effet, gérer tous les coefficients des matrices de raideur et amortissement peut conduire à des temps de calcul très élevés. Mais il n'est pas déraisonnable d'envisager deux coefficients par plot donc quatre pour les deux plots.

Le chapitre 5 traite du réglage des caractéristiques des jonctions en présence d'incertitudes de

mesure et de données.



## Chapitre 5

# Gestion des erreurs de mesure et de données

### 5.1 Introduction

Les problèmes de conception des systèmes mécaniques s'accompagnent de la maîtrise de leur comportement vibratoire. Les quantités à maîtriser sont par exemple les amplitudes des déplacements, les fréquences vibratoires, ou les modes.

Le comportement vibratoire d'un système mécanique est anticipé à partir de l'étude du comportement d'un prototype, d'abord virtuel. Lorsque le prototype est connu par un modèle numérique de type éléments finis, les matrices de masse, de raideur et d'amortissement servent à prédire et à contrôler son comportement vibratoire.

Mais il n'est pas toujours possible de modéliser le prototype entier car, dans bien des situations, il résulte d'un assemblage de sous-systèmes dont certains sont trop complexes. Si le sous-système se prête à la mesure, un modèle expérimental, reposant sur des fonctions de réponse en fréquences (FRF), peut décrire son comportement.

Il existe une troisième voie, ni purement numérique, ni issue d'un modèle expérimental/numérique, mais qui tient compte d'une description des sous-systèmes en jeu. Dans [54], on traite d'un problème de couplage fluide-structure. Le fluide est modélisable, en revanche la structure est formée de sous-structures dont certaines sont non modélisables. Il est question de prédire l'effet des sous-systèmes non-modélisables sur l'ensemble des systèmes modélisables. Le système complet est donc divisé en deux parties. Celle qui regroupe l'ensemble des sous-systèmes modélisables est appelée structure maître. L'autre partie, appelée structure floue, est formée de l'ensemble des sous-systèmes non-modélisables. Le modèle de la structure maître est déterministe tandis que celui de la structure floue est probabiliste.

Ces modèles utilisent des matrices d'impédances, lesquelles sont de fait déterministes dans le premier cas et probabilistes dans le second. Cette manière d'approcher le système complet est connue sous le nom de flou structural [55, 56, 57].

Après avoir modélisé le comportement dynamique du système à l'étude, l'expérience nous enseigne qu'il existe des décalages entre la prédiction de ce comportement et la réalité, souvent appréhendée par la mesure. Les décalages proviennent des erreurs de fabrication, mais aussi des erreurs de modèle et/ou de données. Les erreurs de modèle proviennent des hypothèses formulées pour l'obtenir. Les erreurs de données sont les erreurs contenues dans les paramètres du modèle que sont par exemple les matrices des fonctions de transfert des sous-systèmes en présence.

Les différentes sources d'erreurs sont responsables d'incertitudes sur le comportement vibratoire prédit. Pour tenir compte des incertitudes, on fait appel à des approches probabilistes. Cela passe par exemple par la simulation de valeurs du paramètre incertain pour extraire un comportement moyen. C. Soize [58] construit un modèle d'incertitude aléatoire des matrices généralisées de masse, raideur et amortissement. Les matrices aléatoires sont générées à partir des matrices dites moyennes fournies par le modèle éléments finis. La particularité de sa méthode de simulation est de conserver certaines propriétés physiques dont avoir des matrices de masse symétriques définies positives, et des matrices de raideur et amortissement semi-définies positives [59, 60].

De plus on souhaite souvent une conception optimale des systèmes mécaniques au regard de certains objectifs tels qu'une limitation des vibrations et/ou du rayonnement acoustique. Par exemple, lors de l'installation d'une structure vibrante sur une structure passive, il est possible d'optimiser les paramètres raideur et amortissement de l'interface entre les deux structures, pour minimiser les efforts appliqués à l'accueil. Les paramètres à partir desquels le système est optimisé sont appelés des variables de conception et les autres gardent le nom de paramètre.

Pour éviter que les variables de conception ne soient valides qu'en l'absence d'erreurs sur le modèle ou sur les paramètres, il est préférable d'essayer d'utiliser une méthode qui gère conjointement les incertitudes et le problème d'optimisation.

Le traitement conjoint des incertitudes et d'une conception optimisée peut se faire par une méthode probabiliste qui traite chaque paramètre du problème d'optimisation comme une variable aléatoire munie d'une fonction densité de probabilité. L'exigence d'une méthode probabiliste est de disposer de suffisamment de données expérimentales pour valider la fonction densité de probabilité. Cela peut être un inconvénient pour des systèmes mécaniques difficiles à caractériser expérimentalement.

Ces approches trouvent des applications industrielles, comme dans l'industrie aérospatiale [61], et automobile [62].

À présent que des façons de gérer les incertitudes de données et de modèle ont été présentées, les grandes lignes du présent chapitre sont données. Ce chapitre a fait l'objet d'une communication [63].

Les paramètres du modèle prédictif établi au chapitre 2 restent les mêmes :

les matrices d'inertance du composant actif seul et de la structure d'accueil seule ;

la matrice des raideurs dynamiques des joints à l'interface entre les deux sous-structures ;

et le vecteur descripteur de source. Et les variables de conception sont les coefficients multiplicatifs associés aux matrices de raideur et amortissement initiales.

Pour filtrer les efforts appliqués aux points de contact de la structure d'accueil avec le sous-système, un problème d'optimisation a été formulé et résolu en situation nominale. Ici, il est envisagé de filtrer les efforts prédits en présence d'incertitudes sur la matrice d'inertance de la structure d'accueil.

Après avoir estimé les erreurs contenues dans cette matrice, une simulation permet d'observer sous forme d'un nuage de points la dispersion des efforts prédits. Deux approches sont présentées, pour concilier filtrage optimal et dispersion. La première approche consiste à observer l'influence du filtrage en situation nominale sur la dispersion. Pour la seconde approche, une hypothèse est formulée : si la valeur maximale de la norme des efforts simulés satisfait la contrainte alors presque tous les efforts simulés la satisferont. La matrice inertance aléatoire qui conduit à la prédiction de l'effort maximal remplace la matrice inertance nominale dans le problème d'optimisation. Si l'hypothèse est avérée, alors le nouveau réglage optimal permet que presque tous les points simulés satisfassent la contrainte. L'application numérique concerne tant l'exemple technologique du chapitre 3 qu'un exemple élémentaire.

Le chapitre s'articule de la manière suivante : le premier paragraphe porte sur l'étude générale des erreurs de données et de modèle dans les systèmes d'équations linéaires, le second paragraphe présente la méthode de simulation des efforts prédits. Le troisième paragraphe traite de la lecture de l'effort maximal, et le dernier présente un schéma général de résolution.

## 5.2 Erreurs de mesure et de données

### 5.2.1 Rappel du modèle prédictif

Le modèle de prédiction des efforts appliqués à une structure d'accueil, établi au chapitre 2 en (2.24) est noté :

$$\mathbf{f}^C = (-\omega^2 \mathbf{H}^p + \mathbf{Y}^M + \mathbf{Y}^C)^{-1} \boldsymbol{\gamma}^M$$

C'est à dire, sous réserve que les matrices sont inversibles :

$$\mathbf{M} \mathbf{f}^C = \boldsymbol{\gamma}^M \quad (5.1)$$

où

$$\mathbf{M} = -\omega^2 \mathbf{H}^p + \mathbf{Y}^M + \mathbf{Y}^C \quad (5.2)$$

on rappelle que le vecteur  $\mathbf{f}^C$  rassemble les efforts appliqués à la structure d'accueil. Le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}^M$  est désigné par le terme de *vecteur descripteur de source*. La matrice  $\mathbf{M}$  est désignée par le terme de *modèle*.

### 5.2.2 Erreur sur le vecteur descripteur de source et sur le modèle

Le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}^M$  est construit entre autres à partir de la matrice inertance de la structure source. La matrice inertance de la structure source fait aussi partie du modèle. Or cette matrice peut contenir des erreurs de mesure. Il s'ensuit une modification du descripteur de source qui conduit à une autre solution du système linéaire (5.1). En effet, si le membre de droite  $\boldsymbol{\gamma}^M$  devient  $\boldsymbol{\gamma}^M + \delta\boldsymbol{\gamma}^M$ , alors la solution initiale  $\mathbf{f}^C$  devient  $\mathbf{f}^C + \delta\mathbf{f}^C$  :

$$\mathbf{M}(\mathbf{f}^C + \delta\mathbf{f}^C) = \boldsymbol{\gamma}^M + \delta\boldsymbol{\gamma}^M \quad (5.3)$$

et

$$\mathbf{M}(\delta\mathbf{f}^C) = \delta\boldsymbol{\gamma}^M \quad (5.4)$$

Toujours sous réserve que le modèle  $\mathbf{M}$  est inversible, il suffit alors de simuler des perturbations  $\delta\boldsymbol{\gamma}^M$ , et d'estimer les perturbations sur les efforts :

$$\delta\mathbf{f}^C = \mathbf{M}^{-1} \delta\boldsymbol{\gamma}^M \quad (5.5)$$

Si maintenant le modèle seul contient des erreurs, alors le système initial (5.1) devient :

$$(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})(\mathbf{f}^C + \delta\mathbf{f}^C) = \boldsymbol{\gamma}^M \quad (5.6)$$

Une soustraction membre à membre des systèmes d'équations (5.1) et (5.6) donne :

$$\mathbf{M}\delta\mathbf{f}^C + \delta\mathbf{M}(\mathbf{f}^C + \delta\mathbf{f}^C) = 0 \quad (5.7)$$

soit

$$\delta\mathbf{f}^C = -(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})^{-1}\delta\mathbf{M}\mathbf{f}^C \quad (5.8)$$

ou encore

$$\delta\mathbf{f}^C = -(\mathbf{M} + \delta\mathbf{M})^{-1}(\delta\mathbf{M})\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}^M \quad (5.9)$$

Les erreurs contenues dans la matrice inertance de la structure source ont diverses origines. Elles peuvent provenir soit des mesures, soit de simplifications comme lorsque les rotations et les moments sont négligés, soit de modifications du composant lors des expériences servant aux prédictions. Il a été mentionné que des erreurs contenues dans cette matrice engendrent des erreurs sur le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}^M$ .

Les erreurs contenues dans la matrice inertance de la structure d'accueil n'affectent que les efforts prédits, pas le vecteur descripteur de source. Il est donc naturel de commencer par étudier la propagation des erreurs contenues dans cette matrice.

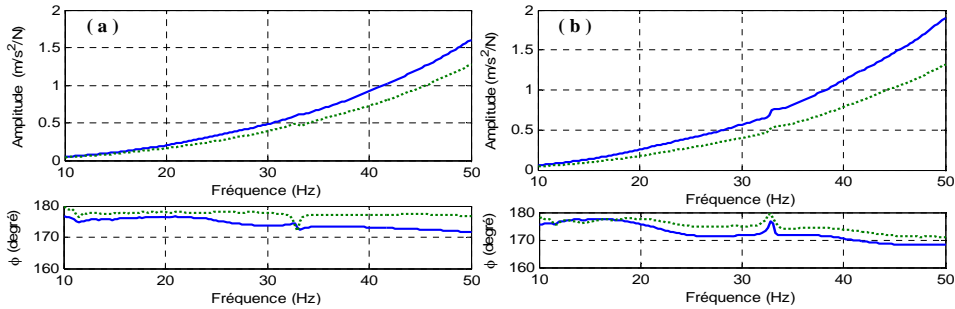
À l'issue de la campagne d'essais réalisée pour valider le modèle (voir le chapitre 3), plusieurs mesures étaient disponibles. En particulier, deux mesures de la matrice inertance du véhicule sont effectuées par deux expérimentateurs différents. Ces deux matrices sont le point de départ de l'étude de la dispersion (statistique) des données. Les résultats ne sauraient être généralisés à cause de la taille de l'échantillon.

Les graphes 5.1.a et 5.1.b ci-dessous représentent chacun deux mesures de la même inertance. Les courbes ont même allure, mais ne sont pas confondues. Sans modèle numérique, ni analytique, il n'y a pas de moyen a priori de sélectionner «la bonne courbe». Cependant, sous l'hypothèse que la courbe vraie se trouve entre ces deux courbes, il est possible de calculer une moyenne et un écart type pour simuler diverses courbes dans ce tuyau d'erreur.

## 5.3 Simulation des efforts prédits

### 5.3.1 Principe de la simulation

On se propose ici d'étudier la dispersion de la norme des efforts due à des erreurs contenues dans la matrice inertance  $\mathbf{Y}^C$  du véhicule. Cela suppose que les autres paramètres du modèle  $\mathbf{H}^p$  et  $\mathbf{Y}^M$ , de même que le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}^M$  sont fixés à leur valeur dite nominale. La simulation est effectuée à fréquence donnée. Pour étudier cette dispersion, différentes matrices inertance du véhicule sont simulées. Pour



**FIGURE 5.1 – dispersion de deux mesures d’inertance du véhicule. (a) BD X; (b) BG X (cf. chapitre 3).**

effectuer cette simulation, on a besoin de la matrice d’inertance nominale (obtenue en prenant la moyenne, terme à terme, des matrices mesurées) du véhicule et d’une matrice d’écart type. Ces deux matrices sont construites à partir des matrices mesurées par les deux expérimentateurs. Chaque matrice simulée conduit à une prédiction des efforts.

Pour simuler les matrices aléatoires, il faut disposer d’une loi de probabilité. Lorsque, comme dans la présente étude, les matrices sont de petites tailles, une loi uniforme (toutes les réalisations ont la même chance d’apparaître) suffit pour générer les matrices et vecteurs aléatoires. Si les matrices sont de grandes tailles, par exemple les matrices de masse, de raideur et d’amortissement issues d’un modèle éléments finis d’un satellite à 120000ddl [61], il serait très coûteux d’utiliser une loi uniforme. Dans ce dernier cas, pour réduire le temps de calcul et rester dans un cadre réaliste, des matrices symétriques définies positives sont simulées. Il existe des travaux dédiés aux simulations de ces matrices [59, 60].

### 5.3.2 Nuage de dispersion de la norme des efforts simulés

Pour chaque matrice d’inertance  $\mathbf{Y}^C$  simulée, une prédiction des efforts est réalisée. Les données requises pour cette simulation sont en annexe 7.4. Sur un graphique, on se propose de représenter la norme du vecteur des efforts vibratoires prédits en fonction de la norme de la matrice d’inertance simulée qui lui a donné naissance. Le graphe en question est en fait un nuage de points.

On rappelle ici que la norme vectorielle utilisée dans cette étude est la norme euclidienne, et la norme matricielle est induite de la norme vectorielle euclidienne (voir par exemple Golub [28]).

Les figures 5.2.a et 5.2.b représentent les nuages de points, respectivement aux fréquences 32.5Hz et 47Hz. L’échelle des axes n’est pas la même pour les deux graphes car les ordres de grandeur des normes en jeu diffèrent considérablement entre ces deux fréquences.

Sur la figure 5.2.a, il apparaît qu’en s’éloignant de la valeur nominale, mise en évidence par un

point rouge, la norme des efforts prédits diminue. Par ailleurs, la présence de points isolés indique que le modèle est très sensible aux erreurs de mesure pour cette fréquence.

Sur la figure 5.2.b, il y a peu de points isolés. L'écart entre la valeur maximale de l'ordonnée et la valeur nominale est inférieur à  $0.6N$ . Pourtant, si l'on s'en tient aux graphes de la figure 5.1, les incertitudes de mesure sont plus importantes à 47Hz qu'à 32.5Hz. Pourtant la dispersion de la norme des efforts est moins grande. Cela voudrait dire que le modèle est plus robuste pour cette fréquence. D'autres aspects que ceux liés aux erreurs de mesure contenues dans la matrice d'inertance du véhicule entrent en jeu pour expliquer le niveau de dispersion des prédictions.

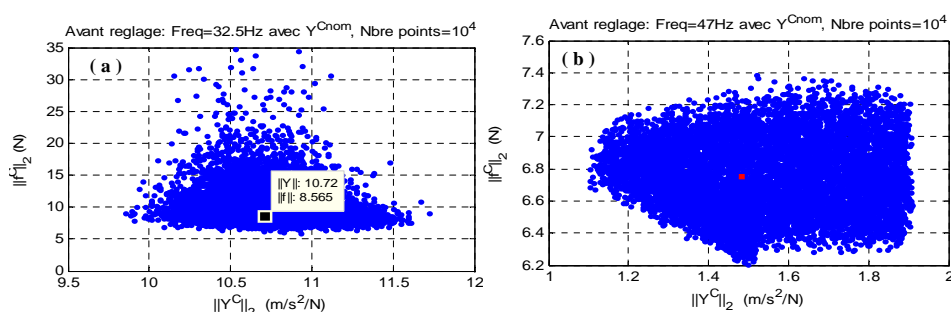


FIGURE 5.2 – norme des efforts en fonction de la norme de la matrice inertance du châssis. (a) 32.5Hz; (b) 47Hz.

## 5.4 Lecture de l'effort maximal prédit

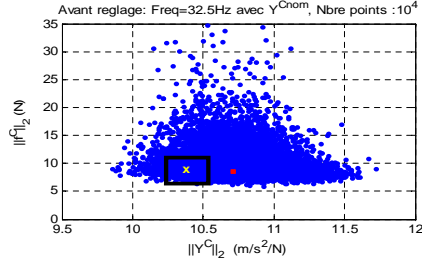
### 5.4.1 Algorithme d'extraction de l'effort maximal

La présence d'erreurs de mesure dans le paramètre  $Y^C$  induit une dispersion des efforts prédits. Au chapitre 4, les matrices de raideur et amortissement ont été réglées pour satisfaire des contraintes dont une associée à la valeur limite de la norme des efforts prédits. Ici, à cause de la dispersion des efforts, le réglage obtenu en situation nominale ne garantit plus de satisfaire cette contrainte.

Pour tenir compte de la dispersion, un intérêt particulier est accordé à la valeur maximale de la norme des efforts prédits. Les raisons de ce choix seront données au paragraphe 5.5 où il s'agira de traiter de cette limite d'efforts en présence d'incertitude de mesure. Pour le moment, l'algorithme d'extraction de la valeur maximale est présenté.

Le principe de la méthode est de construire par récurrence un rectangle qui sépare les points amassés des points isolés. La valeur recherchée est la valeur maximale à l'intérieur du rectangle obtenu à la fin de la récurrence. L'initialisation porte sur le choix au hasard d'un point dans le nuage, et d'un

rectangle élémentaire centré en ce point (figure 5.3).



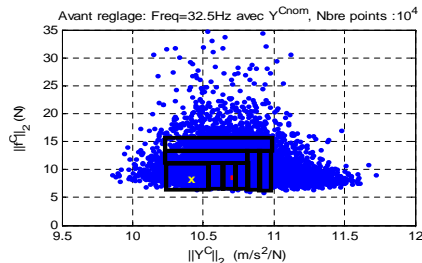
**FIGURE 5.3** – initialisation de l’algorithme d’extraction de la valeur maximale de l’effort simulé.

Notons  $(x_{min}, y_{min})$ ,  $(x_{max}, y_{min})$ ,  $(x_{max}, y_{max})$  et  $(x_{min}, y_{max})$  les coordonnées des quatre sommets du rectangle construit à l’itération  $i - 1$ . À l’itération  $i$ , on procède aux incréments ou décréments suivants :

$$\begin{aligned} & (x_{min} - dx, y_{min}), (x_{max}, y_{min}), (x_{max}, y_{max}) \text{ et } (x_{min} - dx, y_{max}); \\ & (x_{min}, y_{min}), (x_{max} + dx, y_{min}), (x_{max} + dx, y_{max}) \text{ et } (x_{min}, y_{max}); \\ & (x_{min}, y_{min} - dy), (x_{max}, y_{min} - dy), (x_{max}, y_{max}) \text{ et } (x_{min}, y_{max}); \\ & (x_{min}, y_{min}), (x_{max}, y_{min}), (x_{max}, y_{max} + dy) \text{ et } (x_{min}, y_{max} + dy); \end{aligned}$$

Les pas  $dx$  et  $dy$  sont constants au cours des itérations. Chaque cas correspond à une nouvelle aire du rectangle, donc à une modification du nombre de point à l’intérieur de celui-ci. On appelle densité, le rapport du nombre de points à l’intérieur du rectangle au nombre total de points simulés. Le rectangle à l’itération  $i$  est celui parmi les quatre testés qui donne la plus grande densité.

L’algorithme s’arrête lorsque la densité obtenue est supérieure ou égale à la densité attendue (figure 5.4).



**FIGURE 5.4** – progression de l’algorithme jusqu’à l’arrêt.

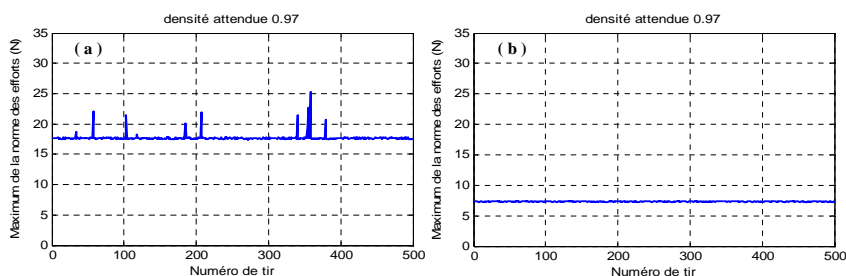
Comme le point de démarrage est pris au hasard, il peut arriver que ce soit un point isolé. Pour ne



pas garder ce résultat, plusieurs démarrages aléatoires sont effectués et la valeur moyenne est calculée, idéalement sans prendre en compte les démarrages en des points isolés.

Pour la fréquence de 32.5 Hz, la figure 5.5.a montre les valeurs maximales de la norme des efforts en fin d'algorithme, pour divers points de démarrage, lorsque la limite du rapport de points intérieurs est fixée à 0.97. Pour un point de démarrage, et pour atteindre la densité donnée, l'algorithme a effectué plusieurs étapes, chacune d'elles travaillant sur une aire issue de l'aire précédente incrémentée (cf. plus haut). En fin d'algorithme la densité est en fait proche de celle demandée mais pas exactement. Pour certains démarrages des pics sont observés, mais ils sont rares.

Pour la fréquence 47Hz il n'y a pas de pic (figure 5.5.b), ce qui veut dire que les points de démarrage ne sont pas des points isolés.



**FIGURE 5.5** – maximum de la norme des efforts simulés en fonction de l'indice du tir. (a) 32.5Hz; (b) 47Hz.

#### 5.4.2 Lecture de la valeur maximale de la norme des efforts par deux méthodes

Nous venons de voir que le résultat fourni par l'algorithme d'extraction de l'effort maximal dépend du point de démarrage et du critère d'arrêt.

La figure 5.6.a. représente la valeur maximale de la norme de l'effort simulé en fonction de la densité obtenue. La fréquence de travail est 32.5Hz. Au préalable, une moyenne de 500 démarrages est prise pour amoindrir l'impact du point de démarrage. La courbe présente quatre droites de pente croissante dans le sens des densités croissantes. L'effort maximal est lu au point de raccordement des deux dernières droites. En effet, les valeurs situées sur la dernière droite correspondent probablement à des points isolés, car une petite augmentation de l'abscisse entraîne une très forte augmentation de la valeur de l'effort maximal. Au point de raccordement des deux dernières droites la densité obtenue vaut approximativement 0.97 et l'effort maximal environ 18N (là où la valeur nominale est de 8.56N sur la figure 5.2.a). Cette valeur de 18N est nettement inférieure à l'amplitude maximale simulée, qui

vaut  $35N$  si l'on s'en tient au nuage de la figure 5.2.a. Cependant elle est proche des  $22N$  que donnerait une lecture grossière sur le nuage.

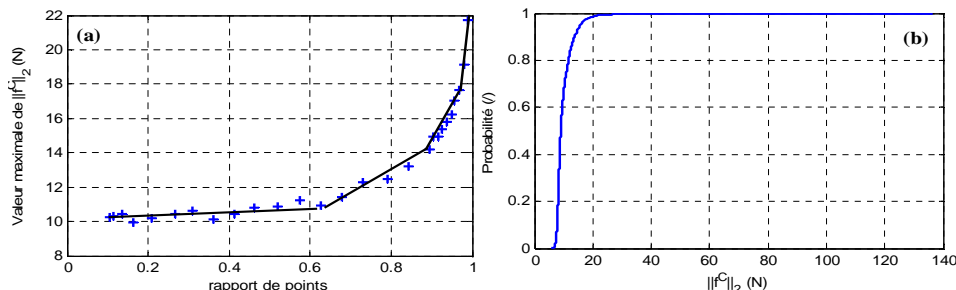


FIGURE 5.6 – fréquence 32.5Hz. (a) valeur maximale de la norme des efforts prédits. (b) fonction  $p(\|f^C\|_2)$ .

À présent, le résultat précédent est comparé à celui que donne une autre méthode qui repose sur une fonction probabilité. Notant  $\mathcal{E}$  l'ensemble des normes des efforts simulés, on définit la fonction :

$$p(x) = \frac{\text{card}(\{y \in \mathcal{E} / y \leq x\})}{\text{card}(\mathcal{E})} \quad (5.10)$$

où *card* désigne le cardinal d'un ensemble dénombrable, c'est-à-dire ici le nombre d'éléments qu'il contient. Sur la figure 5.6.b est tracée la courbe représentative de cette fonction probabilité. Sur l'axe des abscisses se trouvent la norme des efforts simulés. En lisant cette courbe, les valeurs d'efforts prédits supérieures à  $20N$  correspondent à des points isolés car la fonction vaut presque 1. Les résultats des deux méthodes sont comparables assez proches. Ils diffèrent ainsi des  $35N$  lus comme valeur maximale sur la figure 5.2. L'étude conduite pour la fréquence 32.5Hz est à présent conduite pour la fréquence

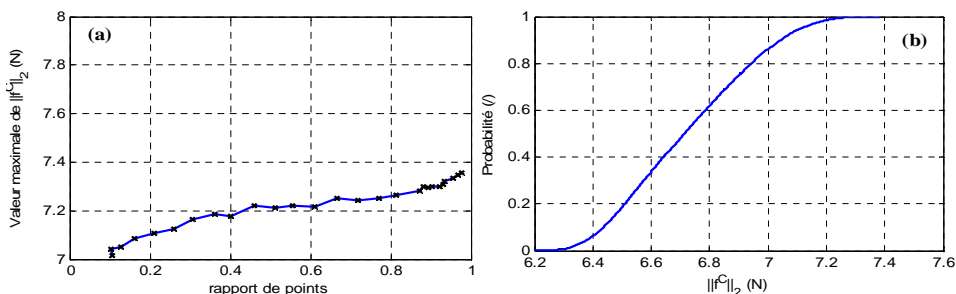


FIGURE 5.7 – fréquence 47Hz. (a) valeur maximale de la norme des efforts prédits. (b) fonction  $p(\|f^C\|_2)$ .

47Hz, fréquence où il y a peu de points isolés. Les figures 5.7.a et 5.7.b présentent les courbes de

résultats. Une seule droite permet de relier presque tous les points du graphe (figure 5.7.a). Comme il n'y a pas de point isolé, la valeur de l'effort maximal est la plus élevée, ici environ  $7.4N$ . Pour cette fréquence aussi, les deux modes de lectures donnent des résultats similaires.

## **5.5 Réglage des caractéristiques des plots en présence d'erreurs sur la matrice inertance du véhicule**

Au chapitre 4, nous avons œuvré pour que les efforts ne dépassent pas une limite fixée. Or ici, la matrice inertance  $\mathbf{Y}^C$  du véhicule est soumise à une dispersion de ses composantes, à l'origine d'une dispersion des efforts.

Le nuage de points de la figure 5.2 illustre cette dispersion. La lecture de ce nuage nous apprend qu'il est peu probable que toutes les valeurs prédites soient en dessous de la limite d'efforts. Par conséquent, on se propose de diminuer, en mettant en œuvre deux méthodes, la norme de chaque vecteur des efforts prédits.

La première méthode consiste à diminuer la valeur nominale de la norme des efforts prédits, avec l'espoir que le nuage (tracé autour de ce point) soit abaissé. Cette manière de procéder complète tout simplement ce qui a été fait dans le chapitre 4 (diminution de la norme des efforts en situation nominale).

Dans la deuxième méthode, on identifie une valeur maximale de la norme des efforts prédits ainsi que la matrice inertance aléatoire à l'origine de cette prédiction. Puis, de diminuer cette valeur maximale en utilisant toujours les stratégies du chapitre 4, mais cette fois en présence de la matrice aléatoire qui remplace la matrice nominale.

### **5.5.1 Réglage des caractéristiques des plots en présence de la matrice inertance nominale du véhicule**

Ici, la première méthode est mise en œuvre. Les figures 5.8.a et 5.8.b représentent les nuages de dispersion de la norme des efforts prédits après réglage des caractéristiques des plots, respectivement aux fréquences 32.5Hz et 47Hz. Un problème d'optimisation a été résolu. Les notations sont celles du chapitre 4. Les bornes des coefficients multiplicatifs sont les suivantes :

$$\alpha_{min} = 10^{-3}, \alpha_{max} = 5, \beta_{min} = 10^{-3}, \beta_{max} = 10 \quad (5.11)$$

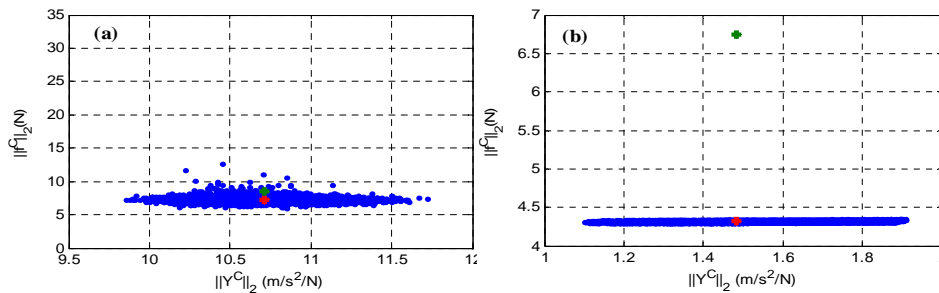
Avant réglage, la norme des efforts prédits vaut  $8.56N$ . La limite d'efforts et les réglages optimaux obtenus sont consignés dans le tableau 5.1. Les solutions optimales sont différentes de celles obtenues

au chapitre 4 car la plage des valeurs des coefficients multiplicatifs a été agrandie au niveau des bornes inférieures.

fréquence	1 <sup>ère</sup> contrainte	solution obtenue	norme des efforts prédits
32.5Hz	7.4N	$\begin{pmatrix} \alpha_{opt} \\ \beta_{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.44 \end{pmatrix}$	7.27N
47Hz	4.7N	$\begin{pmatrix} \alpha_{opt} \\ \beta_{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-3} \\ 0.72 \end{pmatrix}$	4.32N

**TABLE 5.1** – mise en œuvre de la commande *NMinimize* aux fréquences 32.5Hz et 47Hz

Lorsque ces solutions sont utilisées et que les efforts sont simulés, on obtient les graphes 5.8.a et 5.8.b. Il apparaît qu'en diminuant la valeur nominale de la norme des efforts, le modèle est largement moins sensible aux erreurs de mesure contenues dans la matrice inertance du châssis.



**FIGURE 5.8** – nuage de points obtenus après filtrage optimal. (a) 32.5Hz; (b) 47Hz. point vert : avant réglage; point rouge : après réglage

### 5.5.2 Minimisation de la norme des efforts en présence d'une surtension

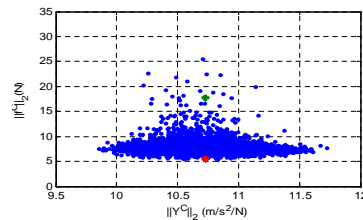
Ici, la seconde méthode est mise en œuvre. Le nuage de points de la figure 5.2.a montre qu'il existe des matrices inertance simulées dont l'usage dans le modèle entraîne des efforts de norme élevée. Dans ce paragraphe, une matrice de ce type est prélevée. En présence de cette matrice, dite matrice particulière, les caractéristiques des plots sont réglées pour minimiser ces efforts de norme maximale. La commande *NMinimize* du logiciel mathematica est utilisée pour résoudre le problème de minimisation. Les bornes des coefficients multiplicatifs sont celles qui sont données dans la relation (5.11).

Avant le réglage, et en présence de la matrice particulière, la norme des efforts vaut 17.51N. Après le réglage des plots, en présence de la matrice particulière, la norme des efforts vaut 5.48N et en présence de la matrice nominale elle vaut 7.44N. Les résultats sont inscrits dans le tableau 5.2.

fréquence	1 <sup>ère</sup> contrainte	solution obtenue	norme des efforts prédits
32.5Hz	7.4N	$\begin{pmatrix} \alpha_{opt} \\ \beta_{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.19 \\ 1.95 \end{pmatrix}$	7.44N

**TABLE 5.2 – minimisation de la norme des efforts en présence d'une matrice particulière**

Le réglage donné dans le tableau 5.2 conduit au nuage points représenté sur la figure 5.9. Ce nuage est légèrement moins aplati que celui de la figure 5.8.a. Cependant, comme sur la figure 5.8.a, la dispersion de la norme des efforts est moindre qu'en situation initiale.



**FIGURE 5.9 – nuage de points à 32.5Hz après minimisation en présence d'une surtension.**

Les résultats obtenus dans les deux derniers paragraphes se résument ainsi : minimiser les efforts à partir d'un filtrage optimal des plots conduit à atténuer la dispersion de la norme de ces efforts. Et ceci semble ne pas dépendre de la matrice inertance du véhicule utilisée. Une preuve de ces conjectures sera donnée plus loin. Pour faciliter la compréhension de la démarche, un exemple élémentaire sert de support.

### 5.5.3 Lien entre minimisation de la norme des efforts et atténuation de leur dispersion

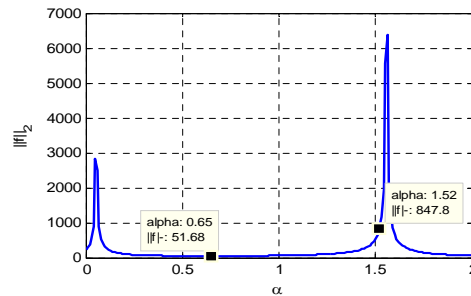
L'exemple choisi est construit sur une version simplifiée du modèle prédictif rappelé en (5.1). Cette écriture laisse apparaître uniquement les paramètres qui interviennent explicitement dans la simulation :

$$\mathbf{f}(\alpha) = (-\alpha\mathbf{K} + \mathbf{Y}^{nom})^{-1} \mathbf{b} \quad (5.12)$$

Les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{Y}^{nom}$ , le vecteur  $\mathbf{b}$  et la plage des valeurs de la variables  $\alpha$  sont arbitraires. Les données numériques sont les suivantes :

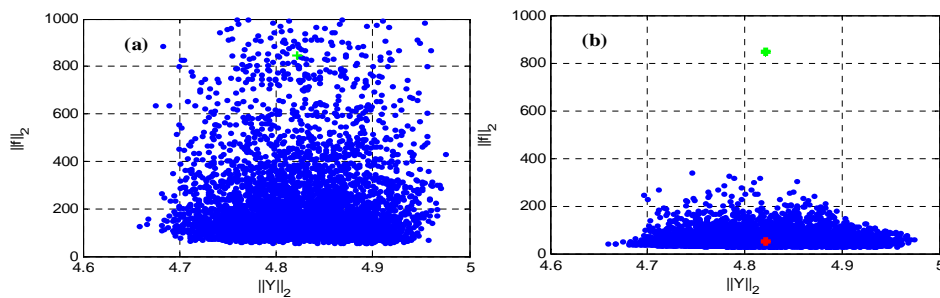
$$\mathbf{Y}^{nom} = \begin{pmatrix} 0.7 & -1 \\ 2.56 & -3.9 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7.9 \\ -1.8 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 2] \quad (5.13)$$

Pour simuler une matrice, chaque composante est la somme de la composante de la matrice initiale et d'un nombre aléatoire généré entre  $-0.1$  et  $0.1$  à l'aide d'une loi uniforme. La figure 5.10 représente la norme du vecteur calculé en fonction du coefficient multiplicatif  $\alpha$  appliqué à la matrice  $\mathbf{K}$ . La valeur nominale du coefficient est  $\alpha = 1.52$ . Pour cette valeur, la norme des efforts prédits est 847.8.



**FIGURE 5.10** – norme de l'effort en fonction du coefficient multiplicatif. mise en évidence de la norme des efforts prédits en situation initiale.

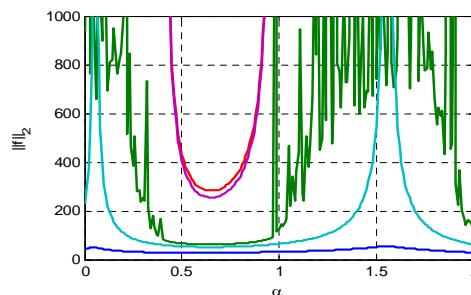
Les graphes des nuages de points obtenus avant et après réglage du coefficient multiplicatif sont représentés sur la figure 5.11. Ici aussi, on observe que la minimisation de la norme du vecteur prédit, par le biais d'un réglage optimal du coefficient multiplicatif de la matrice  $\mathbf{K}$ , atténue sa dispersion. Ce résultat semble donc généraliser ce qui a été obtenu aux paragraphes 5.5.1 et 5.5.2 : la minimisation de la norme des efforts conduit à l'atténuation de leur dispersion.



**FIGURE 5.11** – nuage de dispersion de la norme des efforts. (a) avant réglage ; (b) après réglage. point vert : prédiction avant réglage ; point rouge : prédiction après réglage.

Pour essayer de comprendre la relation entre minimisation de la norme des efforts et atténuation de leur dispersion, plusieurs matrices  $\mathbf{Y}$  sont simulées. Elles sont utilisées à la place de la matrice  $\mathbf{Y}^{nom}$  dans le modèle (5.12). L'intervalle  $[0, 2]$  des valeurs de  $\alpha$ , est discrétisé avec un pas de 0.01. Pour chaque  $\alpha_i$  dans l'intervalle discrétisé, on calcule des normes des vecteurs  $\mathbf{f}(\alpha_i)$  en présence de chaque

matrice  $\mathbf{Y}$  aléatoire. À partir de l'échantillon ainsi construit on calcule la valeur minimale, la valeur moyenne et la valeur maximale. Ces valeurs sont représentées en fonction des  $\alpha_i$  sur la figure 5.12. Sur cette figure se trouvent aussi la courbe de la norme des efforts en situation nominale et la courbe d'écart entre la courbe maximale et la courbe minimale. Cette courbe d'écart est ici l'indicateur de la dispersion de la norme des vecteurs prédits.



**FIGURE 5.12** – variables statistiques extraites du nuage de points simulé pour chaque valeur  $\alpha_i$ . trait bleu : effort minimal; trait cyan : effort nominal; trait vert : effort moyen; trait mauve : écart min max; trait rouge : maximum.

Hormis la courbe des valeurs moyennes, les courbes représentées sont lisses et ont globalement l'allure de paraboles.

En prédisant les efforts avec la matrice nominale  $\mathbf{Y}^{nom}$ , la norme de ces efforts est minimale en  $\alpha = 0.65$ . Sur la figure 5.12, il apparaît que la dispersion est minimale en  $\alpha = 0.66$ . Vu le pas des  $\alpha_i$  qui vaut 0.01, les valeurs sont les mêmes. À stade, on confirme ainsi que la dispersion observée sur la figure 5.11.b est atténuée après que la matrice de raideur a été réglée à l'aide d'un coefficient optimal.

### 5.5.3.1 Digression vers une préoccupation issue de l'acoustique musicale

Souvent, en acoustique musicale, on souhaite concevoir des instruments (violon, harpe, etc) qui maximisent l'énergie qu'ils reçoivent au cours du jeu. Dans ce problème, la corde fait office de structure source, le chevalet d'interface et la table d'harmonie de structure d'accueil.

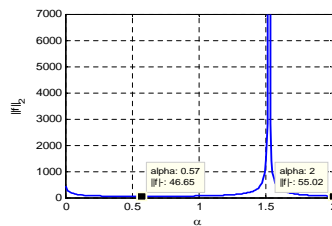
En admettant que le problème se traduise en une maximisation des efforts reçus sur l'accueil, la question naturelle qui se pose est celle de la dispersion de ces efforts. Sur la figure 5.12, la courbe d'écart et la courbe de l'effort maximal sont confondues dès qu'on s'éloigne de la valeur optimale du coefficient de réglage. Donc si la norme des efforts est maximisée, il en est de même pour la dispersion.

### 5.5.3.2 Minimisation de la norme des efforts à partir d'une matrice particulière

La matrice simulée à l'origine des efforts de norme maximale, notée  $\mathbf{Y}^{max1}$ , vaut :

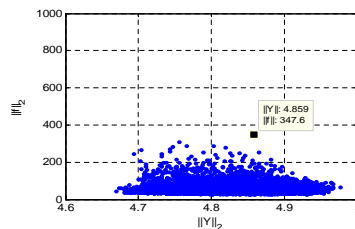
$$\mathbf{Y}^{max1} = \begin{pmatrix} 0.6871 & -1.08 \\ 2.5472 & -3.8766 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Comme sur la figure 5.10, la norme des efforts prédits en fonction du coefficient  $\alpha$  est tracée sur la figure 5.13.



**FIGURE 5.13** – norme des efforts en fonction du coefficient multiplicatif et en présence de  $\mathbf{Y}^{max1}$ .

Ici, la matrice nominale est remplacée par celle à l'origine des efforts de norme maximale. Sur cette courbe, la valeur  $\alpha = 0.57$  est celle pour laquelle la norme des efforts prédits est minimale. La valeur ainsi obtenue n'est pas tout à fait celle qui minimise la dispersion. Malgré tout, elle est prise pour modifier la matrice  $\mathbf{K}$  en présence de la matrice nominale. Le nuage de point qui s'ensuit est donné sur la figure 5.14. Ce nuage de points révèle une atténuation de la dispersion des efforts, comme sur



**FIGURE 5.14** – nuage de dispersion après un réglage du coefficient  $\alpha = 0.57$  appliqué à la matrice nominale.

la figure 5.11.b. En fait ces résultats ne sont pas surprenants car si on reporte ces deux réglages sur l'axe des abscisses du graphe de la figure 5.12, on s'aperçoit qu'ils sont à proximité de l'endroit où la dispersion est minimale.



### 5.5.3.3 Lien entre minimisation des efforts et atténuation de la dispersion

#### Préliminaires

Reprenons le modèle élémentaire de la relation (5.12), et notons

$$\mathbf{Y}^{nom} = \begin{pmatrix} y_1^{nom} & y_2^{nom} \\ y_3^{nom} & y_4^{nom} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Alors la fonction  $h$  définie comme suit :

$$h(\alpha, y_1^{nom}, \dots, y_4^{nom}) = \left\| \left( -\alpha \mathbf{K} + y_1^{nom} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^t + y_2^{nom} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^t + y_3^{nom} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^t + y_4^{nom} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^t \right)^{-1} \mathbf{b} \right\|_2 \quad (5.16)$$

est  $\|\mathbf{f}(\alpha)\|$  mais avec  $\mathbf{Y}^{nom}$  qui devient explicitement une variable :

$$h(\alpha, y_1^{nom}, \dots, y_4^{nom}) = \|\mathbf{f}(\alpha)\| \quad (5.17)$$

Dans toute la suite, le changement de notations suivant est adopté :

$$\mathbf{y}^{nom} = (\alpha, y_1^{nom}, \dots, y_4^{nom})^t \text{ et } h(\alpha, y_1^{nom}, \dots, y_4^{nom}) = h(\alpha, \mathbf{y}^{nom}) \quad (5.18)$$

L'exposant  $^t$  représente la transposée d'un vecteur. Le modèle (5.12) est ainsi défini à partir de la fonction  $h$ .

#### Lien avec la dispersion

Pour étudier la dispersion de la norme des efforts prédits, différentes matrices  $\mathbf{Y}$  sont simulées à partir de la matrice nominale  $\mathbf{Y}^{nom}$  et d'une estimation de la dispersion des composantes de cette matrice.

On considère des intervalles fixés et fermés  $[a_i, b_i]$  tels que  $y_i, y_i^{nom} \in [a_i, b_i]$ , où  $y_i$  est un nombre aléatoire généré autour de  $y_i^{nom}$ , à partir d'une loi uniforme. Ces intervalles permettent de construire un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\mathbf{y}^{nom}$  défini comme suit :

$$\mathcal{V} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_4, b_4] \quad (5.19)$$

Le voisinage  $\mathcal{V}$  contient l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_4)^t$  simulés. Soit la fonction  $g_{\alpha_{nom}}$  définie sur  $\mathcal{V}$  par

$$g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{y}) = h(\alpha, \mathbf{y}^{nom}) \quad (5.20)$$

La fonction  $g_{\alpha_{nom}}$  est continue sur  $\mathcal{V}$  si on prend pour hypothèse que la fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}$  (même si ce n'était pas le cas, alors ce serait en des points où de toute manière la fonction

$h$  ne serait pas définie, donc en des lieux où le problème ne présenterait aucun intérêt vis-à-vis de la minimisation). Or toute fonction continue sur un ensemble fermé est bornée et atteint ses bornes. Donc il existe un vecteur  $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$  tel que :

$$g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{z}) = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}} g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{y}) = \max\{h(\alpha_{nom}, \mathbf{y}) \text{ tels que } \mathbf{y} \in \mathcal{V}\} \quad (5.21)$$

Les composantes du vecteur  $\mathbf{z}$  sont en fait les coefficients d'une matrice simulée, pour laquelle la norme des efforts prédits est la plus grande (dans le voisinage  $\mathcal{V}$ ). Ainsi, le problème de dispersion est défini. En fait, la dispersion fait plutôt appel à la différence  $\left| \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}} g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{y}) - \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}} g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{y}) \right|$ . Mais, vu l'application à la réduction de la norme des efforts, la dispersion qui nous intéresse est celle associée à la valeur maximale de  $g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{z})$ . Ainsi la dispersion est d'autant plus grande que la valeur  $g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{z})$  est élevée.

#### Atténuation de la dispersion de la norme des efforts au départ d'une matrice nominale

Notant  $\alpha_{opt}$  le réglage optimal en situation nominale, et notant  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  respectivement les bornes inférieure et supérieure encadrant ce coefficient, on a par définition de  $\alpha_{opt}$  :

$$h(\alpha_{opt}, \mathbf{y}^{nom}) \leq h(\alpha, \mathbf{y}^{nom}), \text{ pour tout } \alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \quad (5.22)$$

Comme dans la relation (5.20), on définit la fonction  $g_{\alpha_{opt}}$  comme suit :

$$g_{\alpha_{opt}}(\mathbf{y}) = h(\alpha_{opt}, \mathbf{y}) \quad (5.23)$$

On définit  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  tel que :

$$g_{\alpha_{opt}}(\mathbf{w}) = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}} h(\alpha_{opt}, \mathbf{y}) \quad (5.24)$$

L'existence de  $\mathbf{w}$  est établie en s'appuyant sur les mêmes raisons (hypothèse et conséquences) que celles qui conduisent à prouver l'existence de  $\mathbf{z}$ .

Les composantes de  $\mathbf{w}$  sont les coefficients d'une matrice  $\mathbf{Y}$  à l'origine d'une dispersion maximale de la norme des efforts et en présence d'un réglage optimal. On suppose que la minimisation conduit bien à un réglage meilleur, au sens de la norme des efforts prédits, que le réglage initial (voir relation (5.26) plus loin).

Apporter la preuve que la dispersion est moindre lorsque le réglage du coefficient multiplicatif  $\alpha$  est optimal lorsque ce coefficient multiplicatif est à sa valeur initiale revient prouver l'inégalité :

$$g_{\alpha_{opt}}(\mathbf{w}) \leq g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{z}) \quad (5.25)$$

L'inégalité (5.21) est vraie en particulier en  $\alpha = \alpha_{nom}$ . De plus, comme on suppose que la minimisation conduit bien à un effort de norme strictement inférieure à celle de départ, on a :

$$h(\alpha_{opt}, \mathbf{y}^{nom}) < h(\alpha_{nom}, \mathbf{y}^{nom}) \quad (5.26)$$

La fonction  $h$  étant continue, il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\mathbf{y}^{nom}$  dans lequel l'inégalité reste vraie :

$$h(\alpha_{opt}, \mathbf{y}) \leq h(\alpha_{nom}, \mathbf{y}), \text{ pour tout } \mathbf{y} \in \mathcal{U} \quad (5.27)$$

Une illustration de cette propriété est donnée plus loin sur la figure 5.15. Le voisinage  $\mathcal{U}$  est supposé fermé. Si la dispersion est très faible, alors on peut raisonner dans le cas  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ , car tous deux voisinages de  $\mathbf{y}^{nom}$ . Dans ces conditions, l'inégalité précédente devient :

$$h(\alpha_{opt}, \mathbf{y}) \leq h(\alpha_{nom}, \mathbf{y}), \text{ pour tout } \mathbf{y} \in \mathcal{V} \quad (5.28)$$

en particulier pour  $\mathbf{w}$  :

$$h(\alpha_{opt}, \mathbf{w}) \leq h(\alpha_{nom}, \mathbf{w}) \quad (5.29)$$

or

$$h(\alpha_{nom}, \mathbf{w}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}} h(\alpha_{nom}, \mathbf{y}) = h(\alpha_{nom}, \mathbf{z}) \quad (5.30)$$

Ainsi (5.29) et (5.30) conduisent à :

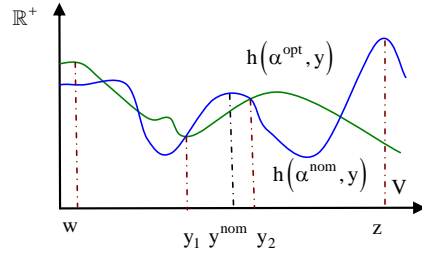
$$h(\alpha_{opt}, \mathbf{w}) \leq h(\alpha_{nom}, \mathbf{z}) \quad (5.31)$$

c'est-à-dire

$$g_{\alpha_{opt}}(\mathbf{w}) \leq g_{\alpha_{nom}}(\mathbf{z}) \quad (5.32)$$

Ainsi la dispersion, telle qu'elle a été définie, est atténuée lorsque le coefficient multiplicatif est réglé pour minimiser la norme des efforts prédits. De fait on observe, sur les figures 5.8 et 5.11.b, une atténuation de la norme des efforts prédits.

Dans le cheminement précédent, les passages de (5.25) à (5.26) et (5.28) à (5.29) méritent une attention toute particulière. Le premier passage concerne l'existence d'un voisinage  $\mathcal{U}$  dans lequel l'inégalité (5.26) est vraie en tout point. Pour appréhender cette propriété, une illustration en est donnée sur la figure 5.15. Le voisinage  $\mathcal{V}$  est ici grossièrement représenté. Sur cette figure,  $y_1$ ,  $y^{nom}$  et  $y_2$  sont des scalaires. Sur cette figure, on a  $h(\alpha_{opt}, y^{nom}) < h(\alpha_{nom}, y^{nom})$ . La continuité des fonctions  $h(\alpha_{opt}, y)$  et  $h(\alpha_{nom}, y)$  entraîne l'existence du voisinage  $[y_1, y_2]$  de  $y^{nom}$  dans lequel  $h(\alpha_{opt}, y) \leq h(\alpha_{nom}, y)$ .



**FIGURE 5.15** – illustration du comportement local d'une fonction arbitraire mais continue  $h$ . trait vert  $h(\alpha_{opt}, y)$ ; trait bleu  $h(\alpha_{nom}, y)$ .

Le second passage concerne le remplacement du voisinage  $\mathcal{U}$  par  $\mathcal{V}$ . En fait, comme on peut le voir sur la figure 5.15, ceci ne vaut que dans un voisinage immédiat de  $y^{nom}$ . Autrement dit, pour une faible dispersion des matrices.

#### Atténuation de la dispersion des efforts au départ d'une matrice particulière

Sur les figures 5.9 et 5.14, il a été observé que la dispersion de la norme des efforts est également atténuée lorsque le coefficient multiplicatif optimal provient d'un réglage en présence d'une matrice à l'origine d'une norme des efforts maximale. Les lignes qui suivent apportent une justification à ce résultat.

On rappelle que les composantes du vecteur  $\mathbf{z}$  forment une matrice  $\mathbf{Y}^{max}$  à l'origine des efforts prédits de norme maximale.

Le couple  $(\alpha_{nom}, \mathbf{z})$  est le point de départ du réglage optimal du coefficient multiplicatif. Le point d'arrivée est noté  $(\alpha_{opt2}, \mathbf{z})$ . Ici, il s'agit de montrer que le coefficient  $\alpha_{opt2}$ , lorsque utilisé pour régler la matrice de raideur en présence de la matrice nominale  $\mathbf{Y}^{nom}$ , permet d'atténuer la dispersion qui accompagne  $\alpha_{nom}$ . Cela se traduit par l'inégalité :

$$\max\{h(\alpha_{opt2}, \mathbf{y}) \text{ tel que } \mathbf{y} \in \mathcal{V}\} h(\alpha_{nom}, \mathbf{z}) \quad (5.33)$$

on peut supposer que :

$$h(\alpha_{opt2}, \mathbf{z}) < h(\alpha_{nom}, \mathbf{z}) \quad (5.34)$$

car  $\alpha_{opt2}$  est une solution du problème de minimisation de la norme des efforts  $h(\alpha_{nom}, \mathbf{z})$ . On a simplement admis, comme en (5.25), que l'inégalité est stricte. Donc, localement autour de  $\mathbf{z}$ , l'inégalité

reste vraie : il existe donc un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\mathbf{z}$  tel que :

$$h(\alpha_{opt2}, \mathbf{y}) < h(\alpha_{nom}, \mathbf{z}), \text{ pour tout vecteur } \mathbf{y} \text{ dans } \mathcal{W} \quad (5.35)$$

comme  $\mathbf{z}$  est dans un voisinage de  $\mathbf{y}^{nom}$  et nous supposons que la dispersion est faible, alors  $\mathcal{W}$  est aussi un voisinage de  $\mathbf{y}^{nom}$  (l'intersection de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{W}$  est alors non vide). Soit  $\mathcal{V}$  est inclus dans  $\mathcal{W}$  auquel cas (5.35) est vraie dans  $\mathcal{V}$ , soit on peut simplement supposer qu'elle est vraie presque partout dans  $\mathcal{V}$  (la partie  $\mathcal{V}$  qui n'est pas dans  $\mathcal{W}$  est négligeable devant  $\mathcal{W}$ ). Donc en particulier on a :

$$h(\alpha_{opt2}, \mathbf{y}) < h(\alpha_{nom}, \mathbf{z}) \text{ pour tout } \mathbf{y} \text{ dans } \mathcal{V} \quad (5.36)$$

prenant la valeur maximale on obtient :

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}} h(\alpha_{opt2}, \mathbf{y}) \leq h(\alpha_{nom}, \mathbf{z}) \text{ CQFD, cf. (5.33)} \quad (5.37)$$

Donc en présence d'une matrice  $\mathbf{Y}^{max}$  suffisamment «proche» de  $\mathbf{Y}^{nom}$ , le réglage du coefficient multiplicatif atténue la dispersion de la norme de ces efforts, que le coefficient en question soit utilisé ensuite en présence de  $\mathbf{Y}^{max}$  ou bien de  $\mathbf{Y}^{nom}$ . Ces remarques expliquent les atténuations constatées sur les figures 5.9 et 5.14, tout du moins localement.

En résumé, en présence d'une faible dispersion des composantes de la matrice nominale  $\mathbf{Y}^{nom}$ , des hypothèses de continuité permettent d'établir le lien entre la minimisation de la norme des efforts et l'atténuation de leur dispersion. Le raisonnement qui a été conduit fait appel à la forme particulière de l'équation (5.12). Donc, ne sachant rien sur  $\mathcal{U}$  et sur  $\mathcal{V}$ , la démonstration garde un caractère local.

À présent, on se propose de construire les voisinages  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  définis respectivement en (5.27) et en (5.19), à l'aide des données du modèle (5.12). Ces voisinages sont construits dans le cas 2D où les composantes  $y_1^{nom}$  et  $y_3^{nom}$  sont fixées et les composantes  $y_2$  et  $y_4$  sont soumises à dispersion de 10% puis de 50% autour des valeurs nominales  $y_2^{nom}$  et  $y_4^{nom}$ . Le voisinage  $\mathcal{V}$  défini jusqu'ici est  $\mathcal{V}_2$  et le voisinage  $\mathcal{U}$  associé est noté  $\mathcal{U}_2$ .

Les points de  $\mathcal{U}_2$  sont ceux de  $\mathcal{V}_2$  qui satisfont l'inégalité (5.27). Les résultats sont donnés sous forme de nuages de points sur la figure 5.16, d'où l'on note que pour une dispersion de 10% (celle considérée jusqu'ici), les voisinages  $\mathcal{U}_2$  et  $\mathcal{V}_2$  sont presque identiques. Lorsque maintenant la dispersion vaut 50%, le voisinage  $\mathcal{U}_2$  diffère légèrement de  $\mathcal{V}_2$ . Ainsi, dans cette configuration où la dispersion est introduite au niveau de deux composantes, l'approximation  $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$  n'est pas invraisemblable.

À présent, la dispersion sur toutes les composantes de la matrice  $\mathbf{Y}^{nom}$  est envisagée. L'approche par nuage de points n'étant plus adaptée, le nouvel indicateur de l'importance relative de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{V}$

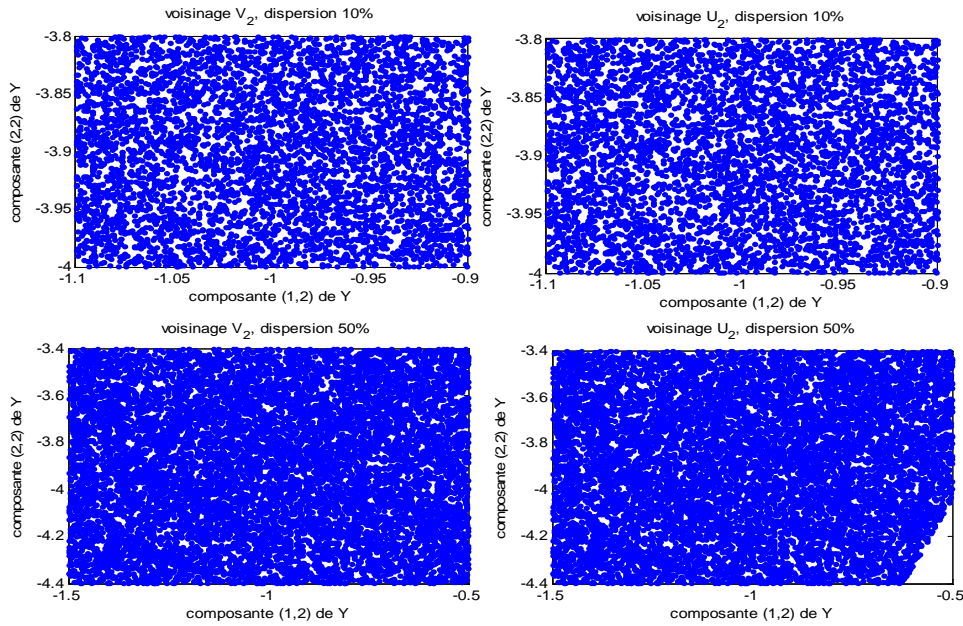


FIGURE 5.16 – nuage de points illustrant les voisinages  $\mathcal{U}_2$  et  $\mathcal{V}_2$ .

est le rapport  $r$  entre le nombre de points contenus dans  $\mathcal{U}$  et le nombre de points contenus dans  $\mathcal{V}$ . La construction de  $\mathcal{U}$  se fait toujours par acceptation rejet des points de  $\mathcal{V}$ . Nous avons simulé, à l'aide d'une loi uniforme, 10000 points dans  $\mathcal{V}$ . Différents pourcentages d'erreurs sont considérés, et pour chacun d'eux, trois tirs sont effectués. Les résultats sont donnés dans le tableau 5.3. En lisant

% erreur/N° tir	tir 1	tir 2	tir 3
10%	0.9238	0.921	0.922
20%	0.7278	0.7119	0.7245
30%	0.6429	0.6428	0.6491
40%	0.6115	0.6154	0.6117
50%	0.5858	0.5826	0.5929
60%	0.5676	0.5557	0.5727

TABLE 5.3 – rapport du nombre de points contenus dans  $\mathcal{U}$  au nombre de points contenus dans  $\mathcal{V}$ .

ce tableau, il apparaît que les résultats sont sensiblement les mêmes d'un tir à l'autre. Par ailleurs, on note qu'avec 10% d'erreur sur la matrice nominale  $\mathbf{Y}^{nom}$ , 92% des points de  $\mathcal{V}$  sont dans  $\mathcal{U}$ , et le passage à 20% d'erreurs entraîne une baisse d'environ 20% des points de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{U}$ . C'est la baisse la plus significative, car à partir de 30% d'erreur sur  $\mathbf{Y}^{nom}$  une augmentation de 10% d'erreur n'entraîne qu'une baisse d'environ 3% des points de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{U}$ . Ce fait est observé jusqu'à 60% d'erreur sur  $\mathbf{Y}^{nom}$ .

Donc encore une fois, il n'est pas invraisemblable de prendre  $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ , lorsque la dispersion est peu importante.

En utilisant les données du GMV, à 32.5Hz, nous avons obtenu un rapport  $r \simeq 0.9841$ . Ce qui veut dire qu'avec une dispersion statistique calculée sur la matrice inertance du véhicule  $\mathbf{Y}^{Cnom}$ , 98% des points de  $\mathcal{V}$  sont dans  $\mathcal{U}$ . Dans ces conditions, il n'est pas étonnant que la minimisation de la norme des efforts conduise à l'atténuation de leur dispersion. Et le caractère local de la démonstration suffit pour expliquer cette observation, compte tenu du comportement des fonctions en jeu.

## 5.6 Protocole de réglage des paramètres d'interface

Le schéma global de filtrage des efforts en présence d'incertitudes de mesure est présenté sur la figure 5.17. Le point de départ est la simulation des efforts vibratoires. Pour le paramètre incertain, il faut soit disposer d'une valeur nominale, d'un écart type et d'une fonction densité de probabilité, soit de suffisamment d'informations (mesures, données) pour estimer ces quantités. Alors la simulation peut avoir lieu.

L'analyse graphique des résultats permet de décider d'optimiser ou non les coefficients multiplicatifs des matrices de raideur et amortissement de l'interface.

Le filtrage optimal a lieu lorsqu'il y a doute sur l'éventualité de respecter la limite d'efforts fixée. Lorsque la décision d'optimiser est prise, l'analyse présentée ici est conduite. Si le niveau de satisfaction n'est pas atteint, alors il faut envisager d'autres approches.

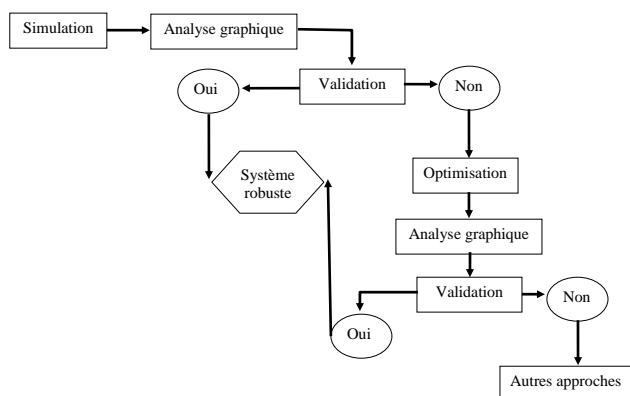


FIGURE 5.17 – protocole général d'optimisation de l'interface, en présence d'incertitudes sur les mesures.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé la dispersion de la norme des efforts prédits. Cette dispersion est ici une conséquence des erreurs de mesure contenues dans les fonctions de réponse en fréquences du véhicule. La relation entre la dispersion des fonctions de réponse en fréquence et celle des efforts vibratoires prédits a été construite sur une méthode de simulation dont le résultat est un nuage de points à fréquence donnée. Précisément, des matrices d'inertance du véhicule sont simulées, chacune donnant une prédiction des efforts, puis de leur norme. La génération d'une matrice aléatoire nécessite, entre autres, la matrice nominale à fréquence donnée. L'ensemble des couples, norme de la matrice simulée-norme des efforts prédits, forment un nuage points (une étude préliminaire portant sur la matrice inertance du GMV a fait l'objet d'une communication [64]).

Pour que la norme des efforts prédits ne dépasse pas une limite donnée, deux façons d'œuvrer ont été choisies. La première consiste à minimiser la norme des efforts vibratoires prédits en situation nominale. L'autre consiste à réduire la valeur maximale de la norme de ces mêmes efforts.

Pour extraire la valeur maximale de la norme des efforts, tout en s'affranchissant des points isolés de forte amplitude, un algorithme a été développé. La valeur de l'effort ainsi lue est comparée d'une part à celle donnée par une lecture directe sur le nuage de points, d'autre part au résultat d'une méthode inspirée d'une définition élémentaire d'une probabilité. La méthode inspirée d'une définition élémentaire d'une probabilité donne, pour les fréquences étudiées, des valeurs légèrement plus grandes que les résultats obtenus avec l'algorithme. Quant à la lecture directe sur le nuage de points, elle reste tributaire d'une bonne appréciation de l'endroit où commencent les points isolés. Pour les fréquences étudiées, la lecture directe donne une valeur maximale inférieure à celles données par les deux autres méthodes de lecture.

Après avoir pris confiance aux différentes méthodes d'extraction des efforts de norme maximale, leur norme a été minimisée en modifiant les matrices raideur et amortissement des plots. Pour cela, une matrice d'inertance du véhicule, à l'origine de cette norme maximale, a été identifiée. La matrice en question a été utilisée dans le modèle à la place de la matrice nominale. Enfin la stratégie de réglage des caractéristiques a été utilisée.

En ce qui concerne la minimisation des efforts prédits en situation nominale, elle a été décrite au chapitre 4.

Les deux méthodes ont conduit au même constat : l'atténuation la dispersion de la norme des efforts simulés. Et l'aspect des nuages atténués est presque le même.



Pour tenter d'écarter l'hypothèse d'un cas particulier, la même série d'opérations a été conduite sur un modèle simplifié alimenté par des données arbitraires. Les conclusions tirées du cas particulier sont identiques à celles tirées de l'exemple technologique. L'exemple élémentaire a aussi révélé, par voie graphique, le lien étroit entre le minimum global de la norme des efforts prédits, et l'atténuation maximale de la dispersion de la norme de ces efforts.

Il a été montré que ce résultat transcende, dans une certaine mesure, la nature du modèle. Une preuve mathématique a été apportée, dans un contexte bien précis. Ce contexte est celui d'une faible dispersion de la matrice inertance du véhicule. Toutefois, il est apparu que même pour une dispersion relativement importante, les outils utilisés pour construire la démonstration restent adaptés. La preuve évoquée ici ne concerne que l'atténuation et non le fait qu'elle est maximale.

Finalement, il n'était pas nécessaire d'extraire un effort maximal en évitant les points isolés. Car, comme l'a montré l'exemple élémentaire, le résultat est le même qu'en partant de l'effort maximal. De même qu'il n'est peut-être pas nécessaire de travailler sur la valeur maximale en lieu et place de la valeur nominale du paramètre considéré. Mais cela n'a pas été prouvé. En fait, le lien entre l'atténuation obtenue à partir de la valeur nominale et celle obtenue à partir de la valeur maximale n'a pas été établi.

L'étude pourrait se poursuivre vers la construction d'une méthode itérative pour atténuer, de façon optimale, la dispersion des efforts. Ceci est motivé par le fait qu'il n'a pas été établi que l'atténuation obtenue par les deux méthodes est maximale.



# Chapitre 6

## Conclusion générale

### 6.1 Résultats

La présente étude a concerné la qualification de la prédiction du comportement vibratoire d'un sous-système installé sur un véhicule. Il a été fait choix de prédire les efforts vibratoires appliqués au véhicule. À travers l'étude bibliographique conduite, il est apparu que l'on prédit assez souvent aujourd'hui la puissance mécanique injectée dans la structure d'accueil. Mais la prédiction de l'effort reste un passage obligé. C'est pourquoi l'étude s'y est limitée.

Pour qualifier la prédiction, un modèle robuste a été construit. Ici, il fallait respecter des limites fixées sur les efforts vibratoires appliqués au véhicule, même en présence d'incertitudes sur certains paramètres. Face à ces exigences nous avons choisi, dans un premier temps, de formuler le problème de couplage de structures. Cette formulation exige un modèle. Pour s'assurer de l'emploi de ce modèle dans un contexte industriel, les prédictions sont confrontées aux mesures. Le dernier point traité est le filtrage des efforts vibratoires et leur dispersion.

La formulation repose sur un modèle expérimental dans le cadre des vibrations linéaires de structures déformables. Les concepts sont désormais acquis et les difficultés sont surtout d'ordre métrologique. L'écriture du modèle a fait appel à des techniques de sous-structuration à partir de fonctions de réponse en fréquences de chaque structure isolée (non-couplée).

Les rotations ne sont pas intervenues dans le modèle et lors des mesures faites pour la validation. L'état de l'art dressé sur la question des rotations a permis de prendre connaissance des avancées récentes. Il en ressort que les concepts sont assimilés, mais la mise en œuvre présente certaines difficultés comme pour exciter deux efforts vibratoires parfaitement colinéaires et en opposition de phase. C'est dans ce contexte que l'étude s'est limitée aux seules difficultés déjà présentes lors du traitement des translations.

Pour valider l'usage du modèle dans un contexte technologique, nous avons étudié le problème d'intégration d'un groupe moto-ventilateur sur un véhicule. Plusieurs mesures ont été faites, et celles-ci ont été rangées dans des matrices et vecteurs. Des traitements ont été apportés à ces matrices et vecteurs, dans l'optique de recalibrer les prédictions et les mesures. Mais ces traitements n'ont rien apporté de plus que la prédiction avec les données brutes.

La mesure d'inertance, bien que délicate, est considérée aujourd'hui comme acquise. Le protocole expérimental donné dans cette étude devrait permettre d'obtenir des mesures de qualité satisfaisante.

La mesure indirecte des rotations et moments, c'est-à-dire à partir d'un couple de forces, est possible pour des applications académiques. Malgré tout, il faut encore vaincre certaines difficultés de traitement de signal pour exciter un couple de forces parfaitement colinéaires et en opposition de phases.

Le filtrage des efforts appliqués au véhicule, pour respecter une limitation donnée, a été rendu possible en ajustant les caractéristiques des plots situés à l'interface entre le sous-système et le véhicule. Pour réaliser cet ajustement, on recherche deux coefficients multiplicatifs appliqués aux matrices initiales de raideur et amortissement des plots. Ce choix simplifie la résolution du problème. Outre cette première simplification, les efforts appliqués au véhicule sont minimisés, et doivent en plus respecter la limite donnée. Le choix de coefficients multiplicatifs appliqués aux matrices de raideur et amortissement a réduit ce qu'aurait été le temps de calcul si tous les coefficients de ces matrices avaient été recherchés. Finalement, le problème initial a subi deux simplifications : son écriture en un problème de minimisation et le passage à deux coefficients multiplicatifs. Les solutions obtenues sont vraisemblablement une infime partie de toutes celles qui vérifient le problème initial.

Pour étudier la robustesse du modèle, celui-ci a été soumis à une dispersion de la matrice d'inertance du véhicule. Il s'en est suivi une dispersion des efforts prédits. La dispersion de la norme de la matrice d'inertance du véhicule et la dispersion de la norme des efforts ont été visualisées simultanément sur un nuage de points. La valeur maximale de la norme des efforts prédits, correspondant au point du nuage dont l'ordonnée est la plus élevée, a été vue comme l'indicateur de leur dispersion. Deux façons d'ajuster ont été choisies pour atténuer cette dispersion de la norme des efforts. Une, en diminuant leur valeur nominale. Une autre en diminuant un effort de norme très élevée. Le niveau d'atténuation constaté est sensiblement le même. Cette atténuation a été expliquée lorsqu'en présence d'une faible dispersion de la matrice d'inertance du véhicule.

## 6.2 Perspectives et problématiques futures

Au terme de ce travail, plusieurs perspectives sont proposées.

Concernant les formulations, on pourrait envisager un modèle hybride : mi-expérimental, mi-numérique. Le modèle expérimental concernerait le sous-système source, tandis que le modèle numérique décrirait le comportement vibratoire de l'accueil. L'étude exploratoire se positionnerait dans un contexte académique où des plaques et des systèmes masse-ressort seraient au centre des expériences.

Au sujet des problématiques vibratoires de demain, le monde de l'automobile en particulier aura entre autre à résoudre celles issues de l'intégration de composants dans les véhicules électriques. Commençons par une genèse de ces véhicules. Historiquement, les premières voitures électriques apparaissent au XIXe siècle. En 1899, c'est également avec une voiture de ce type, «La jamais contente», que les 100 km/h sont dépassés pour la première fois. Si au début du XXe siècle, des voitures électriques et l'équipement pour les charger sont commercialisés, l'absence d'énergie électrique disponible en quantité, ainsi que le poids des accumulateurs, sonnent le glas de cette solution à la faveur d'un moteur essence qui bénéficie d'un pétrole peu onéreux, disponible en grande quantité et facile à stocker<sup>4</sup>.

La voiture électrique est souvent associée à l'absence de bruit et de pollution, mais la réalité est un peu moins simple.

Le bruit des véhicules est pour l'essentiel dû au roulement. Dès que l'on dépasse 60 à 70 km/h sur une motorisation «classique», le bruit du moteur devient secondaire et est en grande partie couvert par les bruits aérodynamiques et de roulement des pneus. L'avantage sonore du véhicule électrique n'est donc valable qu'à faible vitesse, néanmoins cela en fait déjà un argument important au sein des villes. Mais l'absence de bruit n'a pas que des avantages.

Une étude menée aux Etats-Unis montre que les véhicules hybrides (dans lesquels sont présentes conjointement et complémentaires les énergies électrique et thermique) auraient tendance à être plus souvent impliqués dans les accidents de la route avec des piétons et des cyclistes que les autres. Même si les données ne sont pas précises, on peut toutefois s'imaginer que le faible bruit extérieur de ces automobiles, une fois passées en mode électrique, n'est pas étranger à ces malencontreuses rencontres.

Le bruit intérieur, ou plutôt l'absence de bruit, des véhicules électriques, peut également constituer un frein à l'achat ; pollution sonore pour certains, le bruit du moteur reste pour d'autres un élément essentiel qui contribue largement au plaisir de la conduite. Pour recréer virtuellement des sensations

---

4. Source : Echo Nature N°5 décembre 2005/janvier 2006

acoustiques, certains constructeurs n'hésitent pas à faire intervenir la synthèse sonore. Ainsi, pour satisfaire les plus exigeants, le constructeur nippon Lotus s'est lancé dans le développement d'un gadget qui devrait permettre aux conducteurs de véhicules de «customiser» le bruit de leur auto. En analysant les informations relatives à la vitesse, l'*ESS*<sup>5</sup> (*Electronic Sound Synthesis*) transforme les données en bruit de moteur restitué ensuite via les hauts parleurs ainsi qu'à travers les passages de roue. L'objectif selon Lotus : renforcer la sécurité, notamment celle des déficients visuels qui comptent beaucoup sur leur ouïe pour se frayer un chemin à travers la ville.

Les perspectives sont donc nombreuses, et les lendemains de la vibro-acoustique continueront encore de chanter.

---

5. <http://www.autoblog.com/2009/04/16/lotus-and-harman-partner-on-noise-cancelling-noise-creating-tec/>

# Chapitre 7

## Annexes

### 7.1 Couplage de structures

L'objectif du présent paragraphe est l'établissement de la formule (7) de l'article de Jetmundsen et al. [13]. La figure 7.1 illustre le principe de raccordement de deux structures, notées (A) et (B), au niveau d'une interface notée I.

Pour rester homogène avec les notations de l'article, les matrices seront écrites en termes de réceptance (rapport d'un déplacement à une force). Le comportement vibratoire de la sous-structure (A) et celui de la sous-structure (B) sont donnés respectivement par les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^A \\ \mathbf{f}_i^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a^A \\ \mathbf{q}_i^A \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

et,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{bb}^B & \mathbf{Y}_{bi}^B \\ \mathbf{Y}_{ib}^B & \mathbf{Y}_{ii}^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b^B \\ \mathbf{f}_i^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b^B \\ \mathbf{q}_i^B \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Le comportement vibratoire du système assemblé est décrit par le système linéaire suivant :

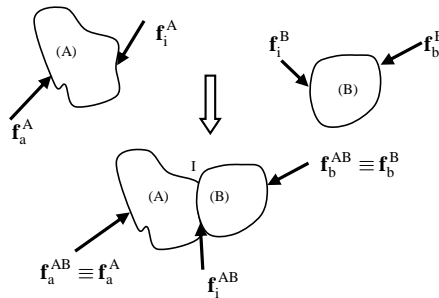


FIGURE 7.1 – couplage de deux structures.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^{AB} & \mathbf{Y}_{ai}^{AB} & \mathbf{Y}_{ab}^{AB} \\ \mathbf{Y}_{ia}^{AB} & \mathbf{Y}_{ii}^{AB} & \mathbf{Y}_{ib}^{AB} \\ \mathbf{Y}_{ba}^{AB} & \mathbf{Y}_{bi}^{AB} & \mathbf{Y}_{bb}^{AB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^{AB} \\ \mathbf{f}_i^{AB} \\ \mathbf{f}_b^{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a^{AB} \\ \mathbf{q}_i^{AB} \\ \mathbf{q}_b^{AB} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Nous allons identifier les coefficients de la matrice du système assemblé à partir de ceux provenant des matrices de chaque sous-structure. Pour aboutir à l'identification, on exploite la linéarité des systèmes (7.1) et (7.2). La linéarité en question sert à écrire les égalités suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A \\ \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^{AB} \\ \mathbf{f}_i^{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a^{AB} \\ \mathbf{q}_i^{AB} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

et,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{bb}^B & \mathbf{Y}_{bi}^B \\ \mathbf{Y}_{ib}^B & \mathbf{Y}_{ii}^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b^{AB} \\ \mathbf{f}_i^{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b^{AB} \\ \mathbf{q}_i^{AB} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Par ailleurs les équations d'équilibre des efforts au niveau de l'interface se traduisent ainsi :

$$\mathbf{f}_i^{AB} = \mathbf{f}_i^A + \mathbf{f}_i^B \quad (7.6)$$

En écrivant l'égalité des déplacements  $\mathbf{b}_i^{AB}$  au niveau de l'interface, on obtient à partir de (7.5) :

$$\mathbf{Y}_{ia}^A \mathbf{f}_a^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^A \mathbf{f}_i^A = \mathbf{Y}_{ib}^B \mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^B \mathbf{f}_i^B \quad (7.7)$$

En éliminant  $\mathbf{f}_i^B$  entre (7.6) et (7.7), on arrive, après factorisation, à l'expression :

$$(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B) \mathbf{f}_i^A = \mathbf{Y}_{ib}^B \mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^B \mathbf{f}_i^{AB} - \mathbf{Y}_{ia}^A \mathbf{f}_a^{AB} \quad (7.8)$$

L'écriture équivalente, sous réserve que l'inversion est possible, est la suivante :

$$\mathbf{f}_i^A = (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} (\mathbf{Y}_{ib}^B \mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^B \mathbf{f}_i^{AB} - \mathbf{Y}_{ia}^A \mathbf{f}_a^{AB}) \quad (7.9)$$

Ainsi la première ligne de (7.4) s'écrit :

$$\mathbf{Y}_{aa}^A \mathbf{f}_a^{AB} + \mathbf{Y}_{ai}^A (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} (\mathbf{Y}_{ib}^B \mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^B \mathbf{f}_i^{AB} - \mathbf{Y}_{ia}^A \mathbf{f}_a^{AB}) = \mathbf{q}_a^{AB} \quad (7.10)$$

soit après factorisation :

$$(\mathbf{Y}_{aa}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ia}^A) \mathbf{f}_a^{AB} + \mathbf{Y}_{ai}^A (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^B \mathbf{f}_i^{AB} + \mathbf{Y}_{ai}^A (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ib}^B \mathbf{f}_b^{AB} = \mathbf{q}_a^{AB} \quad (7.11)$$



En identifiant (5.11) à la première ligne du système d'équations (7.3), on obtient :

$$\mathbf{Y}_{aa}^{AB} = \mathbf{Y}_{aa}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ia}^A \quad (7.12)$$

Puis,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{ai}^{AB} &= \mathbf{Y}_{ai}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^B \\ &= \mathbf{Y}_{ai}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A + \mathbf{Y}_{ai}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^B \\ &= \mathbf{Y}_{ai}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A(\mathbf{I} - (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^B) \\ &= \mathbf{Y}_{ai}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B - \mathbf{Y}_{ii}^B) \end{aligned} \quad (7.13)$$

donc

$$\mathbf{Y}_{ai}^{AB} = \mathbf{Y}_{ai}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^A \quad (7.14)$$

enfin, pour cette ligne, on identifie la matrice :

$$\mathbf{Y}_{ab}^{AB} = \mathbf{Y}_{ai}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ib}^B \quad (7.15)$$

Le même cheminement est utilisé pour identifier la deuxième ligne de la matrice du système assemblé. D'abord, le vecteur déplacement à l'interface du système assemblé est extrait. Pour cela, la deuxième ligne de (7.4) permet, compte tenu de (7.9), d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^{AB} &= \mathbf{Y}_{ia}^A\mathbf{f}_a^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}(\mathbf{Y}_{ib}^B\mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^B\mathbf{f}_i^{AB} - \mathbf{Y}_{ia}^A\mathbf{f}_a^{AB}) \\ &= (\mathbf{Y}_{ia}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ia}^A)\mathbf{f}_a^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^B\mathbf{f}_i^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ib}^B\mathbf{f}_b^{AB} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Par identification de (7.16) à la deuxième ligne de (7.3) on a :

$$\mathbf{Y}_{ia}^{AB} = \mathbf{Y}_{ia}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ia}^A \quad (7.17)$$

La deuxième composante de la deuxième ligne s'obtient après quelques simplifications d'écriture :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{ii}^{AB} &= \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^B \\ &= \mathbf{Y}_{ii}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^B \\ &= \mathbf{Y}_{ii}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{I} - (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^B) \\ &= \mathbf{Y}_{ii}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B - \mathbf{Y}_{ii}^B) \end{aligned} \quad (7.18)$$

ce qui donne :

$$\mathbf{Y}_{ii}^{AB} = \mathbf{Y}_{ii}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ii}^A \quad (7.19)$$

et on a en particulier :

$$\mathbf{Y}_{ib}^{AB} = \mathbf{Y}_{ii}^A(\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{ib}^B \quad (7.20)$$

Pour terminer cette phase d'identification, on attaque la troisième ligne de la matrice du système couplé. La première ligne de (7.5) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_b^{AB} &= \mathbf{Y}_{bb}^B \mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{f}_i^{AB} - \mathbf{f}_i^A) \\
&= \mathbf{Y}_{bb}^B \mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{bi}^B \mathbf{f}_i^{AB} - \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} (\mathbf{Y}_{ib}^B \mathbf{f}_b^{AB} + \mathbf{Y}_{ii}^B \mathbf{f}_i^{AB} - \mathbf{Y}_{ia}^A \mathbf{f}_a^{AB}) \\
&= \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ia}^A \mathbf{f}_a^{AB} + (\mathbf{Y}_{bi}^B - \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^B) \mathbf{f}_i^{AB} + (\mathbf{Y}_{bb}^B - \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ib}^B) \mathbf{f}_b^{AB}
\end{aligned} \tag{7.21}$$

L'identification de (7.21) à la troisième ligne (7.3) conduit à :

$$\mathbf{Y}_{ba}^{AB} = \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ia}^A \tag{7.22}$$

La deuxième composante de la troisième ligne de la matrice du système assemblé s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{bi}^{AB} &= \mathbf{Y}_{bi}^B - \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^B \\
&= \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{I} - (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^B) \\
&= \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B - \mathbf{Y}_{ii}^B)
\end{aligned} \tag{7.23}$$

soit

$$\mathbf{Y}_{bi}^{AB} = \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^A \tag{7.24}$$

pour finir, la troisième composante de la troisième ligne vaut :

$$\mathbf{Y}_{bb}^{AB} = \mathbf{Y}_{bb}^B - \mathbf{Y}_{bi}^B (\mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B)^{-1} \mathbf{Y}_{ib}^B \tag{7.25}$$

posant  $\mathbf{C} = \mathbf{Y}_{ii}^A + \mathbf{Y}_{ii}^B$ , la matrice décrivant le comportement vibratoire du système assemblé s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{Y}_{aa}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A - \mathbf{Y}_{ai}^A \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ib}^B \\
\mathbf{Y}_{ia}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A - \mathbf{Y}_{ii}^A \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^B & \mathbf{Y}_{ii}^A \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ib}^B \\
\mathbf{Y}_{bi}^B \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{bi}^B \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ii}^A & \mathbf{Y}_{bb}^B - \mathbf{Y}_{bi}^B \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}_{ib}^B
\end{pmatrix} \tag{7.26}$$

compte tenu des symétries  $\mathbf{Y}_{ia}^A = (\mathbf{Y}_{ai}^A)^t$ ,  $\mathbf{Y}_{ii}^A = (\mathbf{Y}_{ii}^A)^t$ ,  $\mathbf{Y}_{ib}^B = (\mathbf{Y}_{bi}^B)^t$  et  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^t$  devient :

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{Y}_{aa}^A & \mathbf{Y}_{ai}^A & \mathbf{0} \\
\mathbf{Y}_{ia}^A & \mathbf{Y}_{ii}^A & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{bb}^B
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}
\mathbf{Y}_{ai}^A \\
\mathbf{Y}_{ii}^A \\
-\mathbf{Y}_{bi}^B
\end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix}
\mathbf{Y}_{ai}^A \\
\mathbf{Y}_{ii}^A \\
-\mathbf{Y}_{bi}^B
\end{pmatrix}^t \tag{7.27}$$

ainsi, l'écriture proposée dans l'article de Jetmundsen [13] est démontrée.

## 7.2 Résultats des prédictions des efforts vibratoires

### 7.2.1 Mesures indirectes des efforts en service sur véhicule

Dans ce paragraphe, les composantes du vecteur des efforts  $\mathbf{f}^C$  appliqués au véhicule sont représentées. La comparaison des résultats issus de la mesure directe par capteur d'effort, et ceux issus de la mesure indirecte, à partir de la relation :  $\mathbf{f}^C = (\mathbf{Y}^C)^{-1} \boldsymbol{\gamma}^C$ . Les différentes courbes sont tracées sur les figure 7.2 et 7.3.

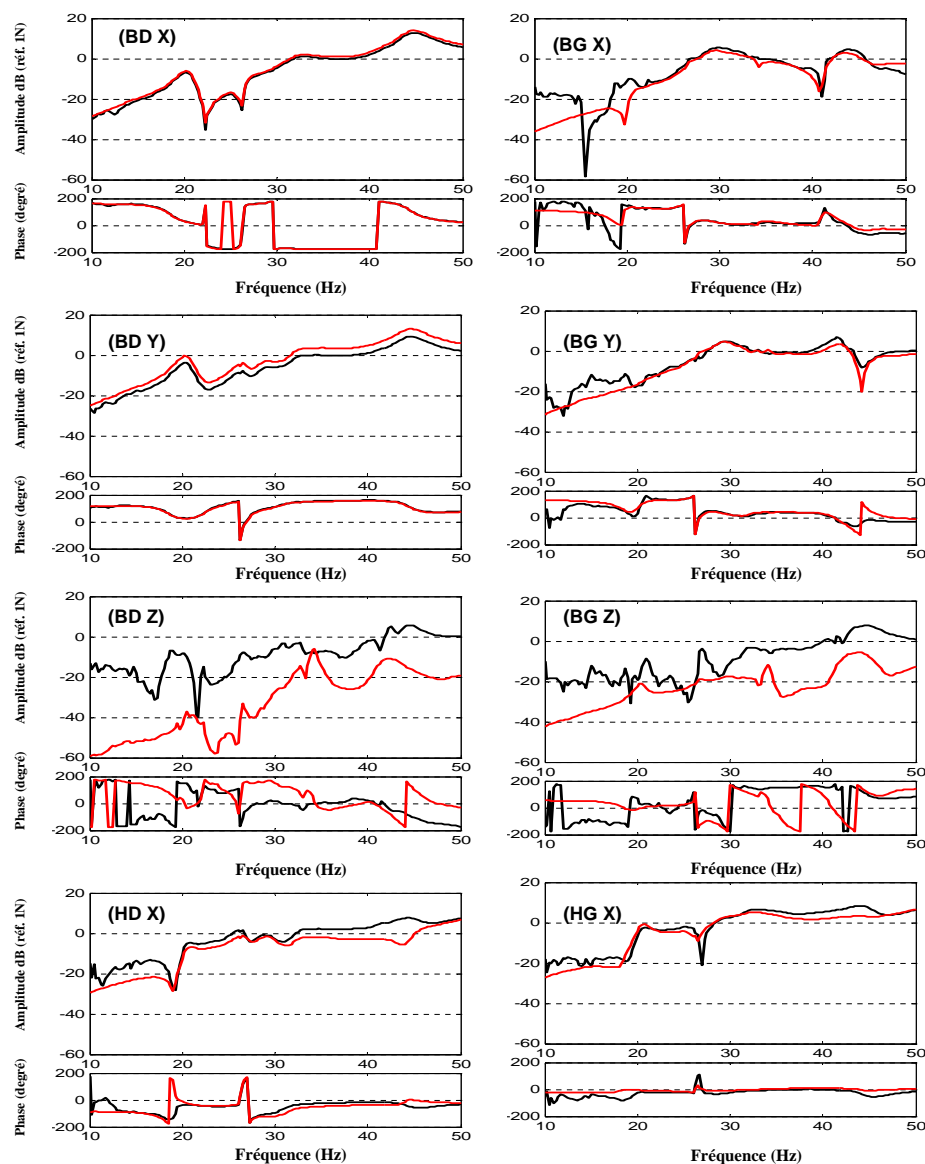


FIGURE 7.2 – norme des efforts prédits. trait rouge : mesure ; trait noir : calcul.

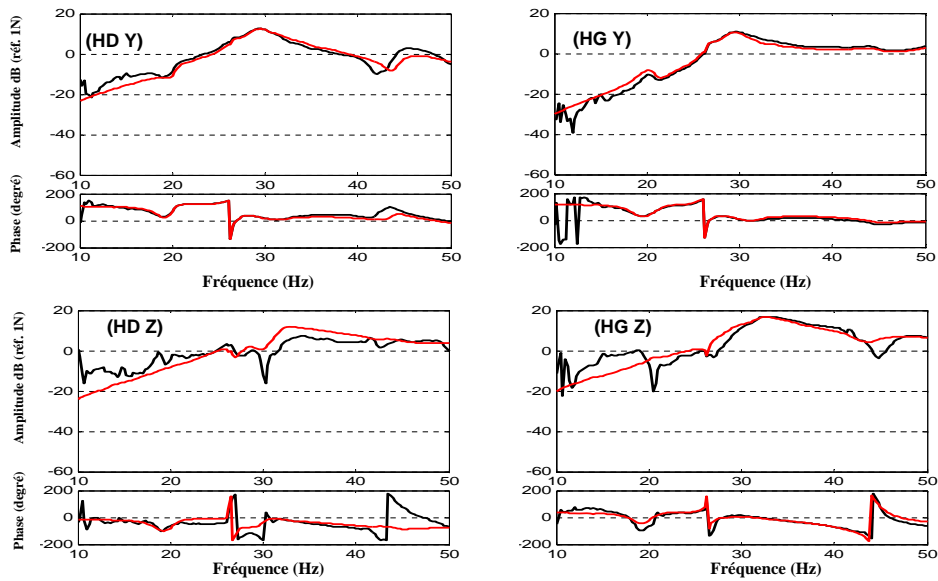


FIGURE 7.3 – norme des efforts prédits. trait rouge : mesure ; trait noir : calcul.

### 7.2.2 Prédiction des efforts appliqués au véhicule à partir des mesures sur le banc

Ici, on présente les courbes issues de la prédiction des efforts  $f^C$  appliqués au véhicule. Ces efforts sont prédits à partir, entre autres, de ceux mesurés sur le banc d'essais. Les prédictions sont comparées aux mesures, sur les figures 7.4, 7.5 et 7.6.

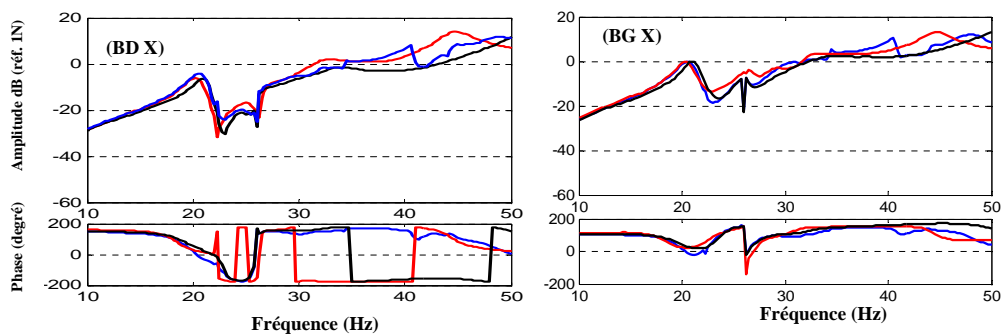


FIGURE 7.4 – norme des efforts prédits. trait rouge :  $f^C$  mesurée ; trait noir :  $f^C$  calculée ; trait bleu :  $f^B_{b\infty}$  mesurée.

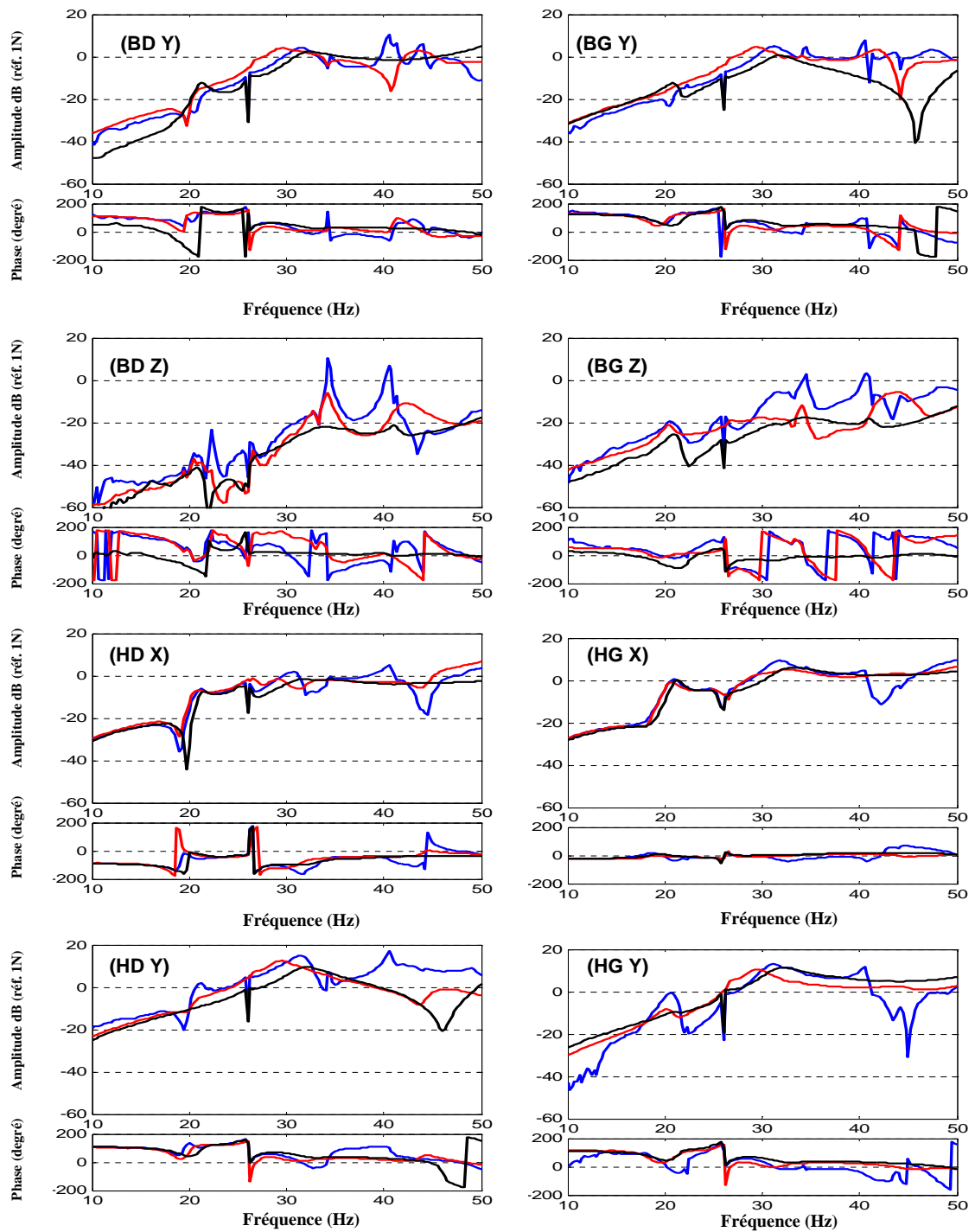


FIGURE 7.5 – norme des efforts prédits. trait rouge :  $f^C$  mesurée; trait noir :  $f^C$  calculée; trait noir :  $f^B_{b\infty}$  mesurée.

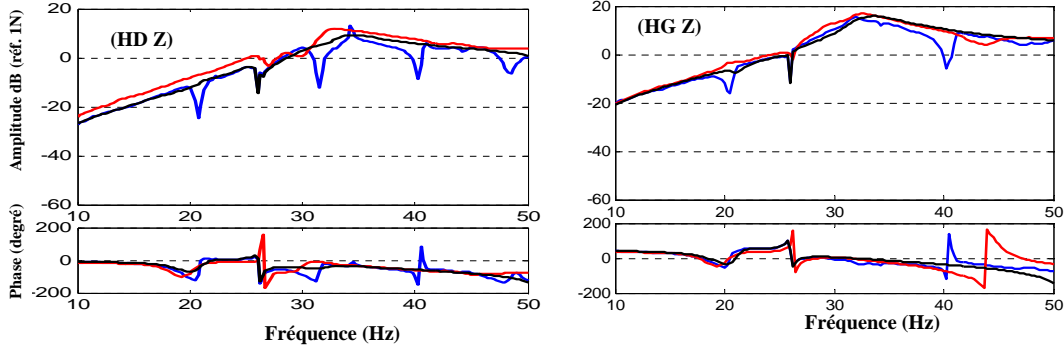


FIGURE 7.6 – norme des efforts prédits. trait rouge :  $f^C$  mesurée ; trait noir :  $f^C$  calculée ; trait noir :  $f_{b\infty}^B$  mesurée.

## 7.3 Détails sur le calcul de gradient donné au chapitre 4

### 7.3.1 Calcul du gradient du carré de la fonction norme des efforts prédits

Soient  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  respectivement les matrices de raideur et amortissement introduite dans le chapitre 4. Soit  $\mathbf{A}$ , la matrice définie par la somme des matrices inertance du véhicule du GMV (Cf. chapitre 4). Le vecteur descripteur de source  $\gamma^M$  est au chapitre 2. Considérons les applications suivantes :

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \left( -\omega^2 \begin{pmatrix} (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{A} \right)^{-1} \gamma^M \text{ et } h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto g(\alpha, \beta)^* g(\alpha, \beta)$$

$\mathbb{R}^2$  désigne l'ensemble des vecteurs de taille 2, à coefficients réels.  $\mathbb{C}^n$  désigne l'ensemble des vecteurs de taille  $n$ , dont les composantes sont des nombres complexes. \* désigne le conjugué d'un vecteur. L'application  $h$  représente le carré de la norme du vecteur effort prédit (Cf. chapitre 2). Le calcul de  $h$  se calcule de la manière suivante :

$$\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} h(\alpha, \beta) = 2\Re(\mathbf{J}_g(\alpha, \beta)^* \cdot g(\alpha, \beta)) \quad (7.28)$$

où  $\mathbf{J}_g(\alpha, \beta)$  désigne la matrice jacobienne de  $g$  (matrice formée des dérivées partielles de  $g$ , au premier ordre). L'application  $g$  étant définie de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{C}^n$ , la matrice jacobienne comporte  $n$  lignes et 2 colonnes. Plus précisément, cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{J}_g(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \alpha} & \frac{\partial g}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Pour obtenir la première colonne, on effectue une petite perturbation de la première composante, et on calcule la variation  $g(x + \varepsilon, y) - g(x, y)$ , laquelle vaut

$$\left( \left( \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 \left( \begin{pmatrix} ((\alpha + \varepsilon)\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{A} \end{pmatrix}}_{\Lambda_\varepsilon} \right)^{-1} - \left( \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 \left( \begin{pmatrix} (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{A} \end{pmatrix}}_{\Lambda} \right)^{-1} \right) \gamma_m \right) \quad (7.30)$$

Pour simplifier les développements, l'écriture suivante est adoptée :

$$\Lambda_\varepsilon^{-1}(\Lambda - \Lambda_\varepsilon)\Lambda_\varepsilon^{-1}\gamma^M \quad (7.31)$$

donc,

$$\Lambda - \Lambda_\varepsilon = -\omega^2 \begin{pmatrix} (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} ((\alpha + \varepsilon)\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

ou encore

$$\Lambda - \Lambda_\varepsilon = -\omega^2 \begin{pmatrix} (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} - ((\alpha + \varepsilon)\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

Dans le cas différentiable, la composante non nulle de la matrice s'écrit :

$$(\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1}((\alpha + \varepsilon)\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C}) - (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C}) \quad (7.34)$$

Après simplification, on obtient :

$$(\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} - ((\alpha + \varepsilon)\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} = (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1}(\varepsilon\mathbf{K})((\alpha + \varepsilon)\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} \quad (7.35)$$

La mise en facteur du scalaire  $\varepsilon$  avait pour objectif de faciliter l'opération suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Lambda - \Lambda_\varepsilon}{\varepsilon} = -\omega^2 \begin{pmatrix} (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1}\mathbf{K}(\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha} \quad (7.36)$$

La première colonne de la matrice jacobienne vaut :

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha} = -\omega^2 \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1}\mathbf{K}(\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}\gamma^M \quad (7.37)$$

Le même cheminement conduit au calcul de la deuxième colonne de la matrice :

$$\frac{\partial g}{\partial\beta} = -i\omega^3 \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}(\alpha\mathbf{K} + i\beta\omega\mathbf{C})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Lambda^{-1}\gamma^M \quad (7.38)$$

Pour rappel, la matrice jacobienne est donnée par l'égalité :

$$\mathbf{J}_g(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial\alpha} & \frac{\partial g}{\partial\beta} \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

si  $h(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta)^*g(\alpha, \beta)$ , alors il vient  $\nabla_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} h(\alpha, \beta) = 2\Re(\mathbf{J}_g(\alpha, \beta)^* \cdot g(\alpha, \beta))$ .

### 7.3.2 A Nelder-Mead algorithm with bounded variables

Le présent algorithme a été pris dans l'article [53], appendice A. Le texte qui suit est reproduit dans sa version originale.

The Nelder-Mead method [52] (Nelder and Mead 1965) is the most popular direct search method for minimizing unconstrained real functions. It is based on the comparison of function values at the  $n + 1$  vertices  $x_i$  of a simplex. A simplex of size  $a$  is initialized at  $x_0$  based on the rule

$$x_i = x_0 + pe_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n qe_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.40)$$

where  $e_i$  are the unit base vector and

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} + n - 1), \quad q = \frac{a}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} - 1) \quad (7.41)$$

The simplex vertices are changed through *reflexion*, *expansion*, and *contraction* operations in order to find an improving point. The algorithm terminates when the vertices function values become similar, which is measured with the inequality,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (f_i - \bar{f})^2 / n} < \varepsilon, \quad \bar{f} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f_i \quad (7.42)$$

where  $\varepsilon$  is a small positive scalar. The cumulative effect of the operation on the simplex is, roughly speaking, to stretch the shape along the descent directions, and to zoom around local optima. Two comments on the properties of the algorithm are added. Firstly, the Nelder-Mead algorithm may fail to converge to a local optimum, which happens in particular when the simplex collapses into a subspace. Secondly, the method may escape a region that would be a basin of attraction for a pointwise descent search if the simplex were large enough. Ultimately, as the size of the simplex decreases, the algorithm becomes local.

The original Nelder-Mead algorithm was conceived for unbounded domain problems. With bounded variables, the points can leave the domain after either the reflexion or the expansion operation. It is straightforward to account for variable bounds by projection :

$$\begin{cases} if & (x_i < x_i^{min}), & x_i = x_i^{min} \\ if & (x_i > x_i^{max}), & x_i = x_i^{max} \end{cases} \quad (7.43)$$

The flowchart of the Nelder-Mead method shown in figure 7.7 differs from the original method only in the initialization and in the bounded variables. An important side effect of accounting for bounded



variables through projection is that it tends to make the simplex collapse into the subspace of the saturated variables. A specific convergence test, based on a small simplex reinitialization at the point of convergence, is then required (see «small test» in Sect. 2.2, [53]).

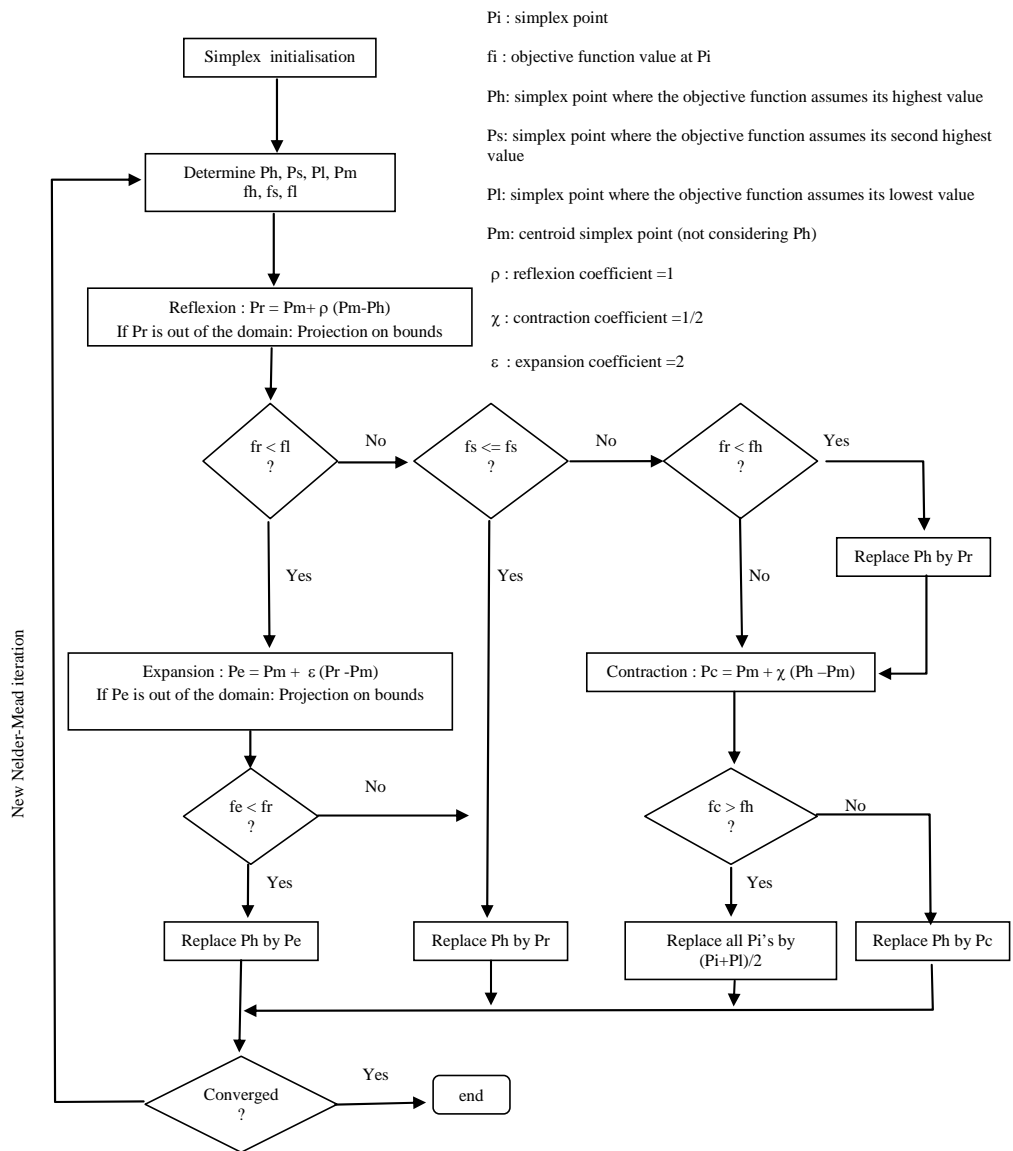


FIGURE 7.7 – nelder-Mead algorithm with bounded variables.

## 7.4 Données réelles utilisées pour simuler des d'efforts à partir de simulations de matrices.

Ici, nous donnons les valeurs des matrices et vecteurs utilisées dans le chapitre 5.

### 7.4.1 Données relatives à la fréquence 32.5 Hz

	$\text{Re}(\mathbf{f}_e^B)$				$\text{Im}(\mathbf{f}_e^B)$				$\text{Re}(\boldsymbol{\gamma}^M)$				$\text{Im}(\boldsymbol{\gamma}^M)$			
BD X	-0,72275966				0,12326854				BD X	-0,23892206				-1,74075337		
BD Y	1,17816681				0,58127452				BD Y	0,08460021				0,69425676		
BD Z	0,06580463				0,01587837				BD Z	0,26733286				-0,36165608		
BG X	-0,63223699				0,78418997				BG X	0,00621669				-0,14436495		
BG Y	0,74384609				0,68460095				BG Y	0,12621239				0,6231818		
BG Z	0,09149053				-0,03730174				BG Z	0,5920827				0,76922919		
HD X	-0,01374941				-0,80067737				HD X	-0,44941289				0,417111093		
HD Y	2,43487581				1,63000208				HD Y	0,4632829				0,79279592		
HD Z	1,69314895				-1,32904246				HD Z	0,11058873				-0,43840561		
HG X	1,92294741				0,07479155				HG X	0,08176976				-2,89929435		
HG Y	3,16599626				1,8913843				HG Y	-0,25218629				0,92267225		
HG Z	5,62206145				-0,31210799				HG Z	0,54009151				1,36993563		

$\text{Re}(\mathbf{Y}^{\text{Chom}})$															
-0,5270865	-0,114942	0,07645065	-0,00768065	0,0944036	0,0734937	0,00477998	0,00287565	0,00298051	0,00417874	-0,00406344	0,00358954				
-0,2771525	-3,27296	2,111125	-0,07913145	2,56893	1,893315	0,01778601	0,0037022	0,0266323	0,04700055	-0,06843965	0,0622957				
0,3430195	2,184695	-1,50314	0,0702993	-1,81962	-1,304355	-0,0289133	-0,01672564	-0,04393195	-0,02573565	0,04287475	-0,03670445				
0,032809	0,327039	-0,208248	-0,56374	-0,260145	-0,207145	0,00042445	0,00092897	-0,00184316	0,00017939	0,00453614	-0,00396074				
0,222342	2,621495	-1,822485	0,07998005	-2,510845	-1,725165	-0,0359718	-0,01819061	-0,0511774	-0,0258801	0,0492604	-0,0386335				
0,16327595	1,83521	-1,23529	0,2663075	-1,650515	-1,208805	-0,01683225	-0,00477443	-0,02544831	-0,0331723	0,04979195	-0,04796665				
0,00801772	0,02675795	-0,03987445	0,00475157	-0,0448154	-0,02232945	-0,09665475	-0,04031895	0,00418893	0,00363172	-0,00207487	0,00153634				
0,00439208	0,00576997	-0,02643385	0,00382924	-0,025443	-0,00797464	-0,05220685	-0,1630015	0,00541229	0,00469038	-0,00077235	0,00370795				
0,00942941	0,0464993	-0,0616095	0,00245149	-0,06164575	-0,03585915	0,03921005	0,01700015	-0,0333743	0,00092636	-0,00028152	0,00033004				
0,00823	0,0617795	-0,03164195	0,00619082	-0,033102	-0,04372845	0,00388064	0,00458841	0,00165188	-0,1186025	0,06196025	0,00899246				
-0,00532986	-0,06008595	0,03084725	-0,00480514	0,0405868	0,0431503	-0,00190983	-0,0007794	-0,00156861	0,05696865	-0,224598	-0,01199141				
0,00929852	0,07849915	-0,0448886	0,00315125	-0,04647745	-0,0590369	0,00140295	0,00344596	0,00105638	0,04417365	-0,00171672	-0,03366935				

$\text{Im}(\mathbf{Y}^{\text{Chom}})$															
0,0453507	0,119826	-0,08601025	0,00963313	-0,10836455	-0,0786329	-0,00146713	-0,00018616	-0,00608472	-0,00320489	0,00287833	-0,00550416				
0,0148505	2,53549	-1,641775	0,369951	-2,42059	-1,73865	-0,03556655	-0,01029483	-0,113004	-0,0541788	0,0481905	-0,0894514				
-0,0121135	-1,78473	1,198865	-0,2705825	1,77233	1,243365	0,0354957	0,0345998	0,0960835	0,0319666	-0,013506	0,05900105				
-0,01538347	-0,2255565	0,140338	0,03532068	0,2275155	0,15182	0,00275453	-0,00053525	0,00992257	0,00566759	-0,00494471	0,00838215				
-0,007278	-2,1068	1,443645	-0,3321555	2,17229	1,490725	0,0500172	0,0660203	0,1197185	0,0291886	0,00466214	0,06038425				
-0,006578	-1,52647	1,0205035	-0,255658	1,50482	1,06762	0,02779365	0,0220049	0,07804365	0,02989	-0,01790625	0,05491175				
-0,00141512	-0,0516624	0,0461458	-0,00928241	0,0675315	0,0407139	0,000614	0,00845428	0,00762493	-0,00071301	0,0036456	0,00044434				
0,00112657	-0,0190904	0,03928885	-0,0089729	0,0687299	0,02312255	0,00912607	0,0317519	0,01068595	-0,00650435	0,02046375	-0,00677173				
-0,005165	-0,11771	0,0951979	-0,0167692	0,1321035	0,0875644	0,00674928	0,00877291	0,01447895	0,00098166	0,00453552	0,00446554				
-0,00179176	-0,05511925	0,0321682	-0,00742215	0,041726	0,03965285	-0,00104939	-0,00623634	0,00137993	0,00584614	-0,00853472	0,00618266				
0,00076247	0,02920725	0,00018952	0,00198615	0,00796695	-0,0150053	0,00404218	0,0198889	0,00525963	-0,00893661	0,02858165	-0,00751023				
-0,00347538	-0,0927474	0,058783	-0,01252645	0,07750245	0,06746345	-0,00026341	-0,00699204	0,00454608	0,0068987	-0,00399884	0,01102565				

$\sigma(\text{Re}(\mathbf{Y}^{\text{Chom}}))$															
0,06832278	0,018785	0,01879978	0,0047036	0,00629099	0,00938953	0,00043481	0,00062486	0,0016259	0,00023552	0,00082097	0,00112504				
0,2177104	0,10685798	0,01617153	0,04591322	0,1602304	0,25920413	0,01333263	0,01965219	0,03839109	0,00325927	0,01430215	0,02315959				
0,13693194	0,07241481	0,02228801	0,03532847	0,1214668	0,18064457	0,00908236	0,01696415	0,02850708	0,00302479	0,0076958	0,01535221				
0,02247072	0,00628618	0,00458205	0,12793966	0,02699309	0,02204052	0,00165334	0,00196193	0,00405167	0,00052013	0,00092525	0,0020389				
0,18212214	0,10385277	0,01890096	0,03633108	0,14560036	0,23052388	0,01101115	0,02267266	0,03425084	0,00369548	0,00581256	0,01765278				
0,12233661	0,06257895	0,01414214	0,07212843	0,09669685	0,16153854	0,00784528	0,01342566	0,02312733	0,00066129	0,00917803	0,01435321				
0,00209106	0,00098267	0,00290289	0,00138402	0,00488356	0,00367533	0,00033467	0,00382934	0,01205302	0,00067488	0,00066722	4,4703E-05				
0,00088117	0,00344258	0,00180786	0,00138824	0,00668386	0,00184165	0,00034811	0,0088947	0,00727558	0,0003303	0,00255852	0,00096492				
0,00261982	4,3699E-05	0,00482346	0,00281501	0,01269349	0,00904623	0,0022341	0,00039647	0,00345224	0,00083789	6,3605E-05	0,00068365				
0,00307069	0,00048592	0,00044809	0,00068603	0,00253625	0,00531539	0,00053978	0,00047421	0,00058174	0,00166806	0,001197591	0,00918113				
0,00427962	0,00075979	9,7651E-05	8,0723E-05	0,00490393	0,00288712	0,00030627	0,00090169	0,00042132	0,000896435	0,01108885	0,0034989				
0,00380067	0,0016547	0,00249326	0,00110041	0,00664603	0,00787561	0,00074461	0,00023745	0,00116398	0,00307259	0,00172028	0,00147495				

## 7.4 Données réelles utilisées pour simuler des d'efforts à partir de simulations de matrices.

$$\sigma(\text{Im}(Y^{\text{Cnom}}))$$

0,0150321	0,00850932	0,00181097	0,00533041	0,01395751	2,5739E-05	5,9694E-05	0,00057507	0,00018941	0,00117689	0,0001353	0,00073181
0,32339882	0,4670016	0,2043185	0,02204193	0,31017946	0,02824184	0,0008107	0,01312599	0,0011243	0,0173705	0,00031127	0,01398742
0,23000982	0,31371499	0,13099153	0,01349513	0,22515694	0,02293147	0,00234491	0,00774947	0,00033955	0,00924952	0,00138975	0,00975319
0,01873852	0,03845459	0,01097571	0,04074451	0,03020831	0,01423972	0,00027531	0,00157002	8,0306E-05	0,00200534	0,00051744	0,0017519
0,28017833	0,38277104	0,16610645	0,02104703	0,29097444	0,03305724	0,00577848	0,00786826	0,00256892	0,0078865	0,0009671	0,01254542
0,20107713	0,27980215	0,12648231	0,00143684	0,19738179	0,01260064	0,00201108	0,00691904	0,0013068	0,00911588	0,00031799	0,00835114
0,00758723	0,00600956	0,00104609	1,4248E-05	0,00726835	0,00049596	0,00586322	0,00125451	0,00122807	0,00055457	0,00059362	7,5123E-06
0,00482458	0,00262563	0,00237383	0,00037443	0,00569857	0,00172668	0,00423208	0,00657638	0,00191944	0,00278087	1,3364E-05	0,00059209
0,0148747	0,01059812	0,00154036	0,0001229	0,01377232	0,00051209	0,00108136	0,00343766	0,00012763	0,00021917	0,00115879	0,00010005
0,00610176	0,01048562	0,00514335	0,00032653	0,00571455	0,00088466	0,00071066	0,00082009	0,00019706	0,00293066	0,00052842	0,00068109
0,00219416	0,00860542	0,00725862	0,00059181	0,00189119	0,00130376	0,00151672	5,4164E-05	0,00018804	0,00138114	0,0006516	0,00133214
0,01014277	0,01308232	0,00569405	0,00068851	0,01099459	0,00083036	0,00070953	0,00124289	0,000125	0,0006638	0,00166471	4,575E-05

$$\text{Re}(Y^{\text{Mnom}})$$

3,24672	-0,0433171	0,59541975	-1,94404	0,64884075	-0,25282325	-1,10430425	-0,14938625	0,54315125	0,749182	-0,182368	-0,1976575
0,27012275	0,32497	-0,45502525	-0,585663	0,32239325	0,23124575	-0,10311553	-0,11209878	-0,40891875	-0,0813625	-0,10746865	0,219406
0,47649725	-0,36230075	0,93413925	-0,2548235	-0,43858125	-0,525599	-0,3818315	0,37859925	1,052095	0,210648	0,34804675	-0,541623
-1,995275	-0,2778943	-0,41984225	4,8981975	-0,3139367	0,44595025	0,99836425	0,05548633	-0,403228	-0,1795325	0,14774558	0,63670275
0,496566	0,2507415	-0,2903125	-0,773417	0,37607925	0,265147	-0,203137	-0,1053993	-0,30575575	-0,040876	-0,10408743	0,171389
-0,25164225	0,227473	-0,51509375	0,665956	0,15926225	0,438929	0,232928	-0,21234575	-0,5363535	-0,360077	-0,169987	0,55402325
-0,701286	-0,10162205	-0,19556775	0,9410735	-0,14645375	0,05426258	2,92488	0,5140245	-0,43260725	-1,3556975	0,58868775	0,13473
-0,16798575	-0,04939818	0,284922	0,08077825	-0,139875	-0,12797525	0,46918375	0,37143475	0,359968	-0,574371	0,3264875	-0,12189328
0,6643415	-0,42123375	1,104485	-0,49004625	-0,40503875	-0,5670625	-0,9020635	0,25521175	1,09926	0,47427825	0,25468325	-0,5948555
0,39768958	-0,09158385	0,180968	0,37960475	0,2293615	-0,37290375	-1,3604175	-0,41357325	0,30006775	2,713175	-0,56746275	-0,33488625
-0,1047161	-0,05227218	0,29174425	-0,06026815	-0,12059665	-0,17757725	0,41325975	0,2843985	0,26046325	-0,41520225	0,372252	-0,271981
-0,2859	0,2545335	-0,54965	0,56312325	0,21487475	0,609669	0,422778	-0,15581975	-0,59041075	-0,73674775	-0,05017137	0,5478095

$$\text{Im}(Y^{\text{Mnom}})$$

0,339239	-0,0401543	0,13247038	0,63348475	0,00665643	-0,08670415	-0,220249	-0,13780018	0,1024684	0,7081775	-0,18710275	-0,1052036
-0,07803468	0,1227345	0,02758505	-0,61182325	0,17967425	-0,0096574	-0,129446	0,06660015	0,02208937	-0,44028375	0,12014175	0,05034303
0,10298533	-0,00591598	0,051264	-0,08970333	0,03277116	-0,03691888	-0,1936175	-0,03663734	0,06187133	0,12327078	-0,04033475	-0,03831903
0,62309275	-0,68654525	-0,10888424	5,5388775	-1,19531575	0,29404575	1,31259075	-0,2620175	-0,23711865	3,60723	-0,6658755	-0,20365675
-0,1030107	0,14219325	0,02795394	-0,744326	0,2031225	-0,03054526	-0,178333	0,0656863	0,03381639	-0,486991	0,12589575	0,0460347
-0,0433252	0,00576827	-0,0187778	0,15220385	-0,04073845	0,11154835	0,1630675	0,00458514	-0,03892343	-0,0261321	0,00666819	0,09738428
-0,2498176	-0,09952988	-0,19711898	1,2913465	-0,23842525	0,18408	1,00439725	0,12493343	-0,31083225	0,12054095	0,04406439	0,12101248
-0,11130235	0,07808448	-0,0405278	-0,36164675	0,0887837	0,00431113	0,00987639	0,08125468	-0,05238678	-0,35107925	0,1261	0,03617515
0,12371668	0,0114584	0,07482398	-0,27761803	0,07062835	-0,06991018	-0,348182	-0,05418992	0,12313875	0,13947888	-0,05408953	-0,06432689
0,78687575	-0,4822075	0,15399478	3,6735125	-0,61821775	-0,01213485	0,15994025	-0,34557475	0,126464	3,159665	-0,67509725	-0,3585595
-0,1085585	0,06764308	-0,02953098	-0,279897	0,08350633	-0,00127895	0,02399923	0,08638915	-0,03170063	-0,27064075	0,10548428	0,03113778
-0,167105	0,07774135	-0,03804304	-0,3809765	0,04553403	0,10246968	0,142662	0,05508595	-0,05633153	-0,45508175	0,0993531	0,15271275

$$\sigma(\text{Re}(Y^{\text{Mnom}}))$$

0,34395795	0,15423328	0,17560537	0,00366988	0,09580696	0,04300447	0,02116689	0,01189601	0,0163727	0,01722088	0,00267145	1,4142E-05
0,01873727	0,00528017	0,02081828	0,00669701	0,02797633	0,00177236	0,01577057	0,00581415	0,00494232	0,00397465	0,00340613	0,0021489
0,01532689	0,0189989	0,01529507	0,04014882	0,01490829	0,00051336	0,03774819	0,0207603	0,00901561	0,01495036	0,00186146	0,00072478
0,15463011	0,11111716	0,10843235	0,13008997	0,23459512	0,02344377	0,02572561	0,02251255	0,0039004	0,05814893	0,01269002	0,02238665
0,05035307	0,02154342	0,03078389	0,00237729	0,02896274	0,00158463	0,01107824	0,00306863	0,00454634	0,00678328	0,00436352	0,00298894
0,01371045	0,01922199	0,00707001	0,03321634	0,02515356	0,01094177	0,02012497	0,01049382	0,00548644	0,00676772	0,00430769	0,00199227
0,04195477	0,0311197	0,00851675	0,00159665	0,04297406	0,00253784	0,03342494	0,02022113	0,03765308	0,0536588	0,02345367	0,00790475
0,01335831	0,00141333	0,00763605	0,01377663	0,00458488	0,00871474	0,02194117	0,00879181	0,02117643	0,00541856	0,00449084	0,00177516
0,0483456	0,04142479	0,01813729	0,0418837	0,02634503	0,0029352	0,03188698	0,02197016	0,00111016	0,02302304	0,00163731	0,00151745
0,04213377	0,0156924	0,00687379	0,05493477	0,01423158	0,06326237	0,01150109	0,00546346	0,03021008	0,01958686	0,00073645	0,00744336
0,01137077	0,00073196	0,00354225	0,01469927	0,00364351	0,00615501	0,01866609	0,00238719	0,01254301	0,00251836	0,00379363	0,0003083
0,01665236	0,0208144	0,00664185	0,02410633	0,02906103	0,015323	0,01874823	0,01193985	0,00159417	0,00547336	0,00411831	0,00298965

$$\sigma(\text{Im}(Y^{\text{Mnom}}))$$

0,01173585	0,03140869	0,05196333	0,17826127	0,0504135	0,02965231	0,0005671	0,01530932	0,01307914	0,00752715	0,01489839	0,01939481
0,03196063	0,00086055	0,00012459	0,00670938	0,02168025	0,01526573	0,01093258	0,00317844	0,00087744	0,00659907	0,00137002	0,00058481
0,02111446	0,00376785	0,00675153	0,052545	0,00559073	0,00252292	0,00130815	0,01087885	0,02087927	0,01127881	0,00993273	0,0007193
0,14231761	0,01526891	0,00150775	0,1499031	0,22649938	0,11395556	0,06209706	0,04039065	0,04393375	0,08972478	0,02401476	0,00797935
0,02257799	1,3789E-05	0,0032159	0,02363363	0,02648115	0,02095418	0,01237578	0,00535358	0,00203865	0,00965201	0,00329547	0,00042631
0,00348653	0,00100581	0,00408125	0,05424803	0,00368601	0,01038549	2,8284E-05	0,00769387	0,01140673	0,00936485	0,00525454	0,00350495
0,0109871	0,00878131	0,0315406	0,3243124	0,0376446	0,02218194	0,05378714	0,04944575	0,04021493	0,04311831	0,04122184	0,03190172
0,01094877	0,00632921	0,00999085	0,05043333	0,00206997	0,00076219	3,4669E-05	0,00447496	0,00484669	0,00344114	0,0020796	0,01096716
0,00571869	0,00413396	0,01398053	0,11061551	0,000918291	0,00698703	0,00563564	0,01958988	0,026601	0,01795567	0,01622121	0,00661604
0,10987061	0,03059792	0,04169416	0,22598072	0,18132304	0,02698723	0,02728053	0,01324446	0,00416627	0,0371726	0,01687263	0,05009498
0,01387237	0,00563801	0,00861519	0,04984608	0,01564541	0,00238726	0,00475236	0,00318948	0,00249015	0,00284434	0,00354045	0,01085857
0,01572323	0,00536072	0,00942412	0,08257381	0,02189432	0,0038153	0,00377383	0,00952232	0,01131671	0,00425784	0,00822782	0,00989914

7.4.2 Données relatives à la fréquence 47 Hz

	$Re(\mathbf{f}_c^B)$	$Im(\mathbf{f}_c^B)$	$Re(\boldsymbol{\gamma}^M)$	$Im(\boldsymbol{\gamma}^M)$
BD X	-1,91248131	-0,33384232	BD X	-0,01424366
BD Y	1,14709323	0,20168653	BD Y	0,91641182
BD Z	0,07727036	0,0107303	BD Z	0,73037281
BG X	-2,43953753	0,45637424	BG X	-7,159033
BG Y	-0,08673872	-0,01307918	BG Y	1,16058458
BG Z	0,128314	0,01888071	BG Z	0,54436378
HD X	0,56041996	-0,41428142	HD X	1,32688536
HD Y	-0,18754501	-0,10307683	HD Y	-0,98665846
HD Z	-0,10431919	-1,39156401	HD Z	0,65208354
HG X	1,36231064	0,41932837	HG X	4,44387324
HG Y	1,81944603	0,36170507	HG Y	0,06076128
HG Z	0,21582629	-2,19888686	HG Z	0,24095124

$Re(\mathbf{Y}^{Cnom})$

-1,217965	0,01226572	-0,02420678	-0,0241501	-0,06582285	-0,027665	0,00888983	0,00710341	0,00392978	0,00039663	-1,028E-06	-0,00087117
0,00819277	-0,06703765	-0,0185843	0,09101055	-0,449455	-0,2564835	0,01001415	0,0292451	0,0155057	-0,0153471	0,0243874	-0,0113488
0,371023	-0,0311067	-0,01243387	-0,0442279	0,268445	0,1718555	-0,00362203	-3,3877E-05	-0,00657371	0,00420097	0,00142968	0,01091645
-0,0230073	0,00389203	-0,00182524	-1,3559	0,04086605	-0,0180824	-0,00141656	-0,00823382	-0,00526825	0,0139751	-0,01466335	0,00851124
-0,0847018	-0,422976	0,2297585	-0,06773875	-0,1533585	0,00997832	0,01287285	0,02357125	0,01766575	-0,005722	0,00115605	0,00244185
-0,03093935	-0,2539465	0,1548505	0,4876725	-0,01270045	-0,0284357	0,00336418	0,00566941	0,00911731	-0,00875187	0,01422015	-0,01674255
0,00907243	0,01007684	-0,00134321	-0,00247524	0,0104097	0,00178713	-0,2025505	-0,06939655	0,0347852	-0,00011744	0,00583441	0,00047315
0,01041527	0,04231465	0,0044837	-0,01117065	0,03469585	0,00049713	-0,09167205	-0,322397	0,0431645	-0,00348389	0,0156032	-0,0006795
0,00388808	0,0162321	-0,00385254	-0,00691015	0,01802815	0,00496991	0,108845	0,0640515	-0,03830515	-0,00212478	0,01087455	0,00353459
0,00109514	-0,0105793	0,00304007	0,015868	-0,00081351	-0,00912706	-0,00051452	-0,00230732	-0,0014685	-0,245496	1,125147	0,03849155
0,00154979	0,02001135	0,00612592	-0,01160265	0,00408019	0,00546474	0,00727842	0,01506485	0,01085578	0,11447395	-0,507644	-0,0449048
-0,00136297	-0,00812943	0,00928182	0,007917	0,0033725	-0,01692555	-0,00085147	0,00074041	0,00364226	0,118191	-0,0173155	-0,0525816

$Im(\mathbf{Y}^{Cnom})$

0,11864805	-0,02002645	-0,01312185	0,00272777	0,02158475	-0,00562208	-0,00221035	-0,00380753	-0,0069387	-0,00206565	0,00225189	-0,00472909
-0,00220611	0,114808	0,01953505	-0,0609062	0,0913075	0,0014465	0,01313115	0,02686785	0,03230165	0,00020702	0,0140027	0,00966218
-0,02467925	0,01075877	0,0172035	0,00955263	-0,00674647	-0,00157028	0,00912928	0,013106	0,0186434	-0,0019489	-0,00229401	0,00074085
0,00559142	-0,04260505	-0,02392665	0,2517135	-0,00479834	-0,02871765	-0,00665886	-0,00928176	-0,0151294	-0,00161904	0,00262921	-0,00821514
0,00578903	0,091907	0,00671245	0,00608578	0,1107065	-0,00774495	0,00070004	0,01214952	0,0013673	-0,00939612	0,0267616	-0,0143998
-0,01098247	0,0267629	0,01059174	-0,10262465	0,00473202	0,02716545	0,00122096	-0,00097346	0,00629848	0,0096505	-0,00695252	0,01802635
-0,00280571	0,01858765	0,0118866	-0,00954865	0,00792858	-0,00170364	0,00704619	0,01559375	0,01399355	-0,00173526	-0,00186111	0,00160808
-0,00146346	0,03703585	0,0135932	-0,01433155	0,02962105	-0,00322663	0,01565918	0,03964655	0,01854685	-0,00342006	0,00142255	-0,00130802
-0,0065856	0,03009285	0,0198693	-0,0159129	0,00684636	0,00132913	0,01323365	0,0154823	0,03191945	0,00062901	-0,00259018	0,0086429
-0,00376214	-0,0056204	-0,00126519	-0,00220783	-0,01696205	0,01204805	-0,00060959	-0,00421299	0,00261249	0,014921	-0,01033797	0,0117922
0,00414907	0,0214916	-0,00401184	0,00213815	0,03373925	-0,00646541	-0,00475114	-0,00019906	-0,00461394	-0,01356485	0,0466289	-0,01157885
-0,00589102	0,0021677	0,0031859	-0,00877375	-0,01992305	0,01693285	0,00315079	5,9E-06	0,0114456	0,01193105	-0,00915101	0,02578615

$\sigma(Re(\mathbf{Y}^{Cnom}))$

0,18806919	0,02081804	0,02613597	0,00822365	0,00212252	0,00237263	0,00024094	0,00090976	0,00102916	0,00073705	0,00055519	6,9267E-05
0,003001	0,0003351	0,00630711	0,0111172	0,0119996	0,01522047	0,00151597	0,00330926	0,00271784	0,00226783	0,00505581	0,00250881
0,04044509	0,003982	0,00621537	0,00421323	0,00740906	0,00925956	0,0004134	0,00110763	0,00024489	0,00147232	0,00197538	0,00030399
0,00838346	0,00996606	0,01114197	0,32792784	0,0267833	0,00330516	0,00062387	0,00059917	3,6833E-05	0,00083368	0,00353518	0,00170921
0,02582524	0,01272509	0,00102601	0,02232202	3,3234E-05	0,00221392	0,00082555	0,00408347	0,00336632	0,00186328	0,00143838	0,0007953
0,02425369	0,01732199	0,00819325	0,11761378	0,00962068	0,00211199	0,00090595	0,000589	0,00013131	0,00183626	0,00355724	0,00060609
0,00072445	0,00076391	7,0555E-05	0,00086041	0,00021312	0,00040772	0,00838275	0,00174747	0,02322181	0,00025006	1,6808E-05	0,00060914
0,00083358	0,00306255	0,00011954	0,00193203	0,00048062	0,00089823	0,00013598	0,00565827	0,01139884	0,00052802	1,2021E-05	0,00165033
2,1425E-05	0,00219557	0,00012814	0,0012652	0,00078043	9,7461E-05	0,00627345	0,00042002	0,01295837	0,00054619	0,00051654	0,00070207
0,00065511	0,00019233	0,00115219	0,00163398	0,00135558	4,978E-05	0,00038383	0,00066477	0,00054887	0,00521562	0,02181566	0,01775312
0,00056028	0,00112182	0,00139132	0,00076742	0,00112429	0,00041775	0,00012369	0,00286315	0,00211003	0,02215514	0,01724209	0,00520643
0,0009758	0,00058727	0,00087556	0,0009348	0,0018946	0,00033114	0,0007262	0,00058095	0,00059631	0,00674014	0,00682415	0,0079442

$$\sigma(\text{Im}(Y^{\text{Cnom}}))$$

0,09323196	0,00640038	0,00328402	0,00937077	0,00215194	0,00205294	0,00052859	0,00142182	0,0001095	0,00025944	0,00103023	0,00108142
0,00076438	0,00821658	0,00243054	0,0012035	0,00190933	0,00239544	0,00057396	0,0070413	0,00326591	0,00487057	0,00039471	0,00397977
0,01564382	0,00597425	0,00224591	0,0018472	0,00185422	0,00308415	0,00104224	0,00046655	0,00059751	0,00046151	0,00037982	0,00084251
0,00973486	0,01066706	0,01380888	0,10975924	0,00047925	0,00610339	0,00015332	0,0025373	0,00143288	0,00171111	0,00079455	0,00064599
0,00393922	0,01167999	5,6236E-05	0,00935859	0,00030052	0,0009353	0,00155639	0,00646279	0,00084954	0,00352717	0,0031998	0,00565134
0,0103091	0,00881974	0,00613282	0,04048519	0,00141916	0,0031252	0,00037044	0,00318411	0,00107356	0,00262252	0,00177989	0,00015705
0,00024125	0,00025053	0,00051774	0,00020335	0,00062576	0,0004168	0,0070322	0,00218164	0,00331824	0,00046497	8,1982E-05	0,00021219
0,00045704	0,00076417	0,00058506	0,0006878	0,00086529	0,00073188	0,00903134	0,0070816	0,00557688	0,00064343	0,00084387	0,00036016
0,00019838	0,00090022	0,00083071	0,00038905	0,00029508	0,00116431	0,00163815	0,00045693	0,00046464	0,00094692	0,00132993	4,9752E-05
0,00074342	0,00127375	0,0004341	8,7497E-05	0,00102835	0,00011307	8,9912E-05	0,00041506	0,00040995	0,00103209	0,00372495	4,8083E-05
0,00029087	0,00182137	0,00056852	0,00026508	0,00062289	0,00054492	0,00097354	0,00012156	0,00101939	0,00026198	0,00406289	0,00396001
0,00090049	0,00124157	0,00080437	0,00018181	0,00110599	0,00021192	0,0002776	0,00116395	0,00101767	0,00085228	0,00128367	0,00205917

$$\text{Re}(Y^{\text{Mnom}})$$

3,13204	-0,609457	0,6470655	-2,271295	0,02419755	-0,0819469	-0,311003	-0,7043595	0,5681245	0,3583015	-0,7363785	0,01149303
-0,307024	0,566297	-0,624346	-0,1736155	0,517772	-0,1063717	-0,4268025	0,244953	-0,434785	0,490889	0,2134635	-0,1628635
0,527024	-0,372015	0,5273485	-0,459403	-0,490276	-0,597025	-0,141396	0,199164	0,6896935	0,130719	0,1707005	-0,5925125
-2,062365	0,16608555	-0,6782465	4,39453	-0,22393675	0,2543075	0,1103595	0,582987	-0,5467375	-0,7228355	0,631015	0,1972675
-0,05175135	0,4319625	-0,4035225	-0,320373	0,5982295	0,03238395	-0,4765425	0,2200615	-0,327682	0,5178035	0,1893655	-0,1692835
-0,1036259	-0,120453	-0,579162	0,378575	-0,293592	-0,33363	0,2393405	-0,206369	-0,6119495	-0,3581085	-0,17055	-0,09861305
-0,1751535	-0,505652	-0,00889282	-0,02557519	-0,5676665	0,1571055	2,61198	0,0365445	-0,2963165	-1,0049745	0,041434	0,264714
-0,659046	0,3394795	0,12425495	0,603822	0,2716485	-0,1551505	-0,1077035	0,649119	0,4084645	-0,168488	0,525424	-0,1881785
0,607186	-0,44052	0,727907	-0,5381775	-0,4134035	-0,6538685	-0,554112	0,09827645	0,6297565	0,329334	0,147707	-0,6666235
0,09873545	0,4674185	0,09436095	-0,452994	0,4728685	-0,2800375	-1,002411	0,01722975	0,2237	3,162865	-0,235911	-0,5517185
-0,637702	0,3392945	0,0633758	0,461433	0,277652	-0,24162	-0,00754048	0,5296635	0,1176895	0,06293475	0,64459	-0,478406
-0,126425	-0,1706975	-0,621024	0,4194485	-0,215168	-0,10601385	0,3725685	-0,1940475	-0,6701365	-0,7714755	-0,04559865	-0,1645135

$$\text{Im}(Y^{\text{Mnom}})$$

0,665951	-0,3381245	0,145228	-0,450849	-0,06889765	-0,190937	0,4702145	-0,2883745	0,04998405	-0,260284	-0,2685205	-0,0319895
-0,361106	0,742316	-0,0421855	0,4521465	0,7022655	0,1994705	-0,34223	0,591649	-0,04477235	0,151907	0,5640965	0,10298195
0,11150765	-0,0736912	0,1179975	-0,258713	0,021792	0,220835	0,224598	-0,1990195	0,0651371	0,0726722	-0,147057	0,2715985
-0,5662955	0,4831315	-0,286214	1,558275	-0,09647405	-0,08522747	-0,7807825	0,6792735	-0,1743145	-0,404175	0,7555295	-0,300468
-0,364718	0,7195285	-0,0625939	0,383205	0,671621	0,173187	-0,2978895	0,5533545	-0,04296325	0,1580055	0,5284665	0,1016468
-0,0316034	0,1960355	0,2282835	-0,3525745	0,232566	0,7381885	0,058823	-0,1362915	0,2032125	0,2545	-0,1962455	0,775084
0,462024	-0,312672	0,1616455	-0,7307505	-0,161831	0,09349605	0,337791	-0,30947	0,03147425	0,1205755	-0,326945	0,1931975
-0,3734505	0,6247465	-0,2054325	0,682988	0,4939255	-0,07349205	-0,3580375	0,6373355	-0,2000375	-0,02292615	0,7279765	-0,192677
0,03169435	-0,02301025	0,0621387	-0,160148	0,04807955	0,208318	0,1747805	-0,150235	0,0824509	0,0463861	-0,10802905	0,2469625
-0,3399465	0,279938	0,00438195	-0,1991625	0,2885775	0,1957155	0,08123605	0,04669625	0,03356175	0,54367	-0,104765	0,0331364
-0,3802155	0,634902	-0,186241	0,671685	0,5169865	-0,03632995	-0,393615	0,6459755	-0,1532855	-0,01026877	0,691571	-0,138206
-0,01095677	0,210438	0,227241	-0,3037815	0,2240825	0,7204375	0,02990865	-0,108907	0,1985655	0,1879695	-0,152694	0,810503

$$\sigma(\text{Re}(Y^{\text{Mnom}}))$$

0,15314519	0,12128437	0,1762895	0,06542859	0,13184211	0,02656614	0,01457771	0,00275418	0,01040649	0,0091634	0,00412597	0,00411745
0,06450228	0,04868996	0,00820244	0,03381738	0,01492844	0,01467713	0,02602365	0,005811	0,00646296	0,01071408	0,00443285	0,00369322
0,02414628	0,00758301	0,03034407	0,03605255	0,03093168	0,0048451	0,0174118	0,01512926	0,00552604	0,00119642	0,00774635	0,00451063
0,07836864	0,11010423	0,13048454	0,01598061	0,23144065	0,04665278	0,01135967	0,00602314	0,0063576	0,0178396	0,0033531	0,00951836
0,016569	0,00905167	0,00412314	0,03582627	0,02157312	0,02132981	0,02324048	0,00429002	0,00648558	0,01004445	0,00475812	0,00367766
0,01848391	0,01130098	0,00026022	0,05786255	0,00355816	0,02812729	0,0155811	0,01253276	0,00617799	0,00735745	0,00071559	0,01270381
0,01570131	0,00488187	0,02129492	0,03838304	0,0236506	0,02393486	0,01309562	0,01067802	0,03861157	0,01721876	0,00720782	0,00267145
0,03559717	0,02660065	0,04081852	0,0329936	0,0511514	0,00538886	0,00752574	0,01949918	0,02103289	0,01241821	0,00331209	0,01202435
0,01927149	0,03538928	0,03149595	0,02955353	0,03190961	0,00038962	0,01096016	0,00951278	0,00683419	0,00137462	0,00635123	0,00468317
0,00999644	0,01274984	0,01792806	0,00018243	0,01750301	0,01119421	0,01248609	0,00797454	0,01353827	0,00187383	0,01242952	0,01576353
0,03758697	0,02770515	0,03869175	0,03064601	0,04441055	0,00754766	0,00463921	0,00896541	0,00914501	0,01646081	0,0014623	0,00671469
0,01801001	0,01364504	0,00205909	0,05803862	0,0222074	0,02068591	0,01571686	0,01369312	0,00399869	0,00585555	0,00185509	0,01748887

$$\sigma(\text{Im}(Y^{\text{Mnom}}))$$

0,11493172	0,04177799	0,07634773	0,03534261	0,0110769	0,05319564	0,01565605	0,00583575	0,00482975	0,00607546	0,0013131	0,00186096
0,00489742	0,01073954	0,0170813	0,00971353	0,03334928	0,01284884	0,00904672	0,00245932	0,00519617	0,00368968	0,00217577	0,00824352
0,05875824	0,00429214	0,01199041	0,01442639	0,00588765	0,01062499	0,00986131	0,00119855	0,00363113	0,01237083	0,01376454	0,0013527
0,04489633	0,02450196	0,04666622	0,03418861	0,01801277	0,11596626	0,00187737	0,00679035	0,00934724	0,00332199	0,001183909	0,01147351
0,01757726	0,01443134	0,01246361	0,00733977	0,02934069	0,02094592	0,00856236	0,00200606	0,00475282	0,00367483	0,00125229	0,00765259
0,00664396	0,00036557	0,00080964	0,01668136	0,01310693	0,00377949	0,00535167	0,006796	0,00199758	0,00094611	0,00427587	0,00548432
0,00662418	0,02128533	0,02527129	0,05045419	0,03786981	0,00722373	0,01422699	0,00211284	0,01918317	0,00179676	0,0115117	0,00517814
0,02934281	0,02205112	0,0198195	0,01400213	0,03117563	0,01703102	0,000057	0,00485853	0,00457569	0,00331414	0,00302571	0,00284116
0,02750341	0,00220766	0,00987828	0,00601748	0,00120979	0,01029123	0,00732916	0,00275347	0,00257557	0,01157887	0,01140839	0,00275984
0,01892006	0,01196	0,02105403	0,02320229	0,00729239	0,03094087	0,00191152	0,0076125	0,00497146	0,00165463	0,00527643	0,0337116
0,02690612	0,022148	0,01993617	0,01571757	0,03266197	0,01329707	0,0016023	0,00177837	0,0025972	0,00621537	0,00272519	0,00128693
0,00695373	0,00075519	0,00215102	0,02147978	0,01160857	0,00662206	0,00527	0,00846124	0,0022988	0,0009355	0,00439538	0,00134633

C						
68,2524234	1,94941351	-59,2712218	0	0	0	0
-15,3871912	15,4354156	125,947938	0	0	0	0
-6,74074283	-12,5467088	60,7915678	0	0	0	0
0	0	0	77,1982865	28,8681841	-244,625272	0
0	0	0	26,4316591	60,7711484	13,8703522	0
0	0	0	-15,3083184	-16,5718506	177,145033	0
K						
133884,402	-9734,64312	-19130,0691	0	0	0	0
-6761,94815	120496,599	-9840,23097	0	0	0	0
-2071,2316	3742,95975	9589,90133	0	0	0	0
0	0	0	137365,778	10893,6638	-55399,4515	0
0	0	0	24822,0703	112204,596	-28999,4155	0
0	0	0	-4559,04237	404,629409	37525,7671	0

# Bibliographie

- [1] J. M. Mondot and B. Petersson. Characterisation of structure-borne sound sources : the source descriptor and the coupling function. *Journal of Sound and Vibration*, 114(3) :507–518, 1987.
- [2] A. T. Moorhouse. calculation of structure-borne sound from an active machine component on a supporting substructure. *Journal of Sound and Vibration*, 302 :67–87, 2007.
- [3] A. T. Moorhouse. structure-borne sound power emission from resiliently mounted fans : case studies and diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, 186(5) :781–803, 1995.
- [4] H. G. D. Goyder and R. G. White. Vibrational power flow from machines into build-up structures, part iii : power flow through isolation systems. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1) :97–117, 1980.
- [5] L. Cremer and M. Heck. *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [6] R. J. Pinnington. Vibrational power transmission to a seating of a vibration isolated motor. *Journal of Sound and Vibration*, 118(3) :515–530, 1987.
- [7] B. Petersson and B. M. Gibbs. Towards a structure-borne sound source characterization. *Applied Acoustics*, 61 :325–343, 2000.
- [8] B. Petersson and B. M. Gibbs. Use of the source descriptor concept in studies of multi-point and multi-directional vibrational sources. *Journal of Sound and Vibration*, 168(1) :157–176, 1993.
- [9] F. Bessac, L. Gagliardini, and J. L. Guyader. Coupling eigenvalues and eigenvectors : a tool for investigating the vibroacoustic behaviour of coupled vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 195(5) :881–899, 1980.
- [10] C. Kauffmann. Input mobilities and power flows for edge-excited semi-infinite plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(4) :1874–1884, 1998.
- [11] A. T. Moorhouse. A dimensionless mobility formulation for evaluation of force and moment excitation of structures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3) :972–143, 2002.

- [12] J. S. Przemieniecki. *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, 1968.
- [13] B. Jetmundsen, R. L. Bielawa, and W. G. Flannelly. Generalized frequency domain substructure synthesis. *Journal of the American Helicopter Society*, pages 56–64, 1998.
- [14] W. Liu and D. J. Ewins. Substructure synthesis via elastic media. *Journal of Sound and Vibration*, 257(2) :361–379, 2002.
- [15] J. M. Cushiery. Structural power-flow analysis using a mobility approach of an l-shaped plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87 :1159–1165, 1990.
- [16] W. D’Ambrogio and A. Sestieri. A unified approach to substructuring and structural modification problems. *Shock and Vibration*, 11 :295–309, 2004.
- [17] M. A. Sanderson and C.R. Fredö. Direct measurement of moment mobility, part i : a theoretical study. *Journal of Sound and Vibration*, 179(4) :669–684, 1995.
- [18] S. A. Sands, P. Camilleri, R. E. Breuer, G. K. Cambrell, R. J. Alfredson, E. M. Skuza, P.J Berger, and M. H. Wilkinson. A novel method for measurement of mechanical mobility. *Journal of Sound and Vibration*, 320 :559–575, 2009.
- [19] A. N. Thite and D. J. Thompson. Selection of response measurement locations to improve inverse force determination. *Applied Acoustics*, 67 :797–818, 2006.
- [20] K. T. Yang and Y. S. Park. Joint structural parameter identification using a subset of frequency response function measurement. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7 :509–530, 1993.
- [21] R. A. Ibrahim and C. L. Pettit. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *Journal of Sound and Vibration*, 279 :857–936, 2005.
- [22] J. S. Tsai and Y. F. Chou. The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint. *Journal of Sound and Vibration*, 125 :487–502, 1988.
- [23] Y. Ren and C. F. Beards. Identification of joint properties of a structure using frf data. *Journal of Sound and Vibration*, 186 :567–587, 1995.
- [24] Y. Ren and C. F. Beards. Identification of of effective linear joints using coupling and joint identification techniques. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120 :331–338, 1998.
- [25] Y. Ren and C. F. Beards. On the nature of frf joint identification technique. In *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference*, pages 473–478, Florida, USA, 1993.
- [26] T. Yang, H. S. Fan, and S. C. Lin. Joint stiffness identification using frf measurements. *Computers and Structures*, 81 :2549–2556, 2003.



- [27] D. Celic and M. Boltezar. Identification of the dynamic properties of joints using frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 317 :158–174, 2008.
- [28] G. H. Golub and C. F. V. Loan. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [29] G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, Inc, 1988.
- [30] V. Martin and S. Mapagha. Integration of sub-systems on vehicles. In *Proceedings of the 14th International Congress on Sound and Vibration (ICSV14)*, Cairns, Australia, 9-12 July 2007.
- [31] M-H. Moulet, S. Mapagha, and V. Martin. Metrology and prediction for integrating a subsystem on a vehicle ; application to a fan system attached to the front end of a car. In *Proceedings of the ICA08*, 29 June-4 July 2008.
- [32] R. Alkhatib, G. N. Jazar, and M. F. Golnaraghi. Optimal design of passive linear suspension using genetic algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 275 :665–691, 2004.
- [33] M. S. Foumani, A. Khajepour, and M. Durali. Optimization of engine mount characteristics using experimental/numerical analysis. *Journal of Vibration and Control*, 9 :1121, 2003.
- [34] D. H. Lee and C. M. Hwang, W. S. and Kim. Design sensitivity analysis and optimization of an engine mount system using an frf-based substructuring method. *Journal of Sound and Vibration*, 255(2) :383–397, 2002.
- [35] Y. Yu and R. V. Naganathan, N. G. and Dukkipati. A literature review of automotive vehicle engine mounting system. *Journal of Sound and Vibration*, 36 :123–142, 2001.
- [36] R. M. Brach. Automotive powerplant isolation. *SAE Technical paper series*, (971942), 1997.
- [37] T. Arai, T. Kubozuka, and S. Gray. Development of engine mount optimization method using modal parameters. *SAE Technical paper series*, (932898), 1993.
- [38] P. E. Geck and R. D. Patton. Front wheel drive engine mount optimization. *SAE Technical paper series*, (840736), 1984.
- [39] J. E. Bornard and J. M. Starkey. Engine mount optimization. *SAE Technical paper series*, (830257), 1983.
- [40] H. Ashrafioun. Design optimization of aircraft engine mount. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115 :463–467, 1993.

- [41] T. Oh, J. Lim, and S.C. Lee. Engineering practice in optimal design of powertrain mounting system for 2.0l ff engine. In *Proceedings of the 6th International Pacific Conference for Automotive Engineering*, 1991.
- [42] J. Bretl. Otimization of engine mounting system to minimize vehicle vibration. *SAE Technical paper series*, (931322), 1993.
- [43] T. Royston and R. Singh. Otimization of passive and active non-linear vibration mounting systems based on vibratory power transmission. *Journal of Sound and Vibration*, 194(3) :295–316, 1996.
- [44] N. Suresh, S. Shankar, and V. Bokil. Development of idealistic hydromount characterisites to minimize engine induced vibrations using unconstrained minimization. *SAE Technical paper series*, (941741), 1994.
- [45] J. A. Snyman, P. S. Heuns, and P. J. Vermeulen. Vibration isolation of a mounted engine through optimization. *Mechanical and Machine theory*, 30 :109–118, 1995.
- [46] D. A. Swanson, H. T. Wu, and H. Ashrafioun. Optimization of aircraft engine suspension systems. *Journal of Aircraft*, 30 :979–984, 1983.
- [47] J. H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial System*. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- [48] S. Mapagha and V. Martin. Optimization on interface parameters for filtering vibrations between a subsystem and its host structure. In *Proceeding of NOVEM*, 5-8th April 2009.
- [49] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 2nd edition edition, 1999.
- [50] A. I. Chahande and J. S. Arora. Development of a multiplier method for dynamic response optimization problems. *Structural Optimization*, 6 :69–78, 1993.
- [51] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research, 2nd edition edition, 1991.
- [52] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex for function minimization. *Comput. J.*, 7 :308–313, 1965.
- [53] M.A. Luersen, R. Le Riche, and F. Guyon. A constrained, globalized, and bounded nelder-mead method for engineering optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 27 :43–54, 2004.
- [54] C. Soize. A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2) :849–865, 1993.
- [55] C. Soize. Probabilistic structural modeling in linear dynamic analysis of complex mechanical systems. i theoretical elements. *Recherches Aéropatiale (English edition)*, 5 :23–48, 1986.

- [56] C. Soize. Theoretical study of probabilistic fuzzy. *Technical Report ONERA 45-345RY053R (in French) ONERA, Chatillon, France*, 1985.
- [57] F. Chabas and C. Soize. Modelling mechanical subsystems by boundary impedance in the finite element method. *Recherche Aéronautique (English edition)*, 5 :59–75, 1987.
- [58] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *probabilistic engineering mechanics*, 15 :277–294, 2000.
- [59] C. Soize. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 263 :893–916, 2003.
- [60] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, New York, 2nd edition, revised and enlarged edition, 1991.
- [61] E. Capiez-Lernout, M. Pellissetti, H. Pradlwalter, G.I. Schueller, and C. Soize. Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems. *Journal of Sound and Vibration*, 295 :923–938, 2006.
- [62] J-F. Durand, C. Soize, and L. Gagliardini. Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation. *J. Acoust. S. ac. Am.*, 43 :1513–1525, 2008.
- [63] S. Mapagha and V. Martin. Prediction of forces acting on the chassis of a vehicle : comparison of two methods for estimating the dispersion of the results. In *Proceedings of INTERNOISE*, Ottawa, Canada, 23-26th August 2009.
- [64] V. Martin, S. Mapagha, and M-H. Moulet. Parametric study of forces applied to a host structure by a vibratory component. In *Proceedings of ISMA*, Leuven, Belgium, 29 June-4 July 2008.