



HAL
open science

Inégalités de Markov-Bernstein en L2 : les outils mathématiques d'encadrement de la constante de Markov-Bernstein

Mohamed Sadik

► **To cite this version:**

Mohamed Sadik. Inégalités de Markov-Bernstein en L2 : les outils mathématiques d'encadrement de la constante de Markov-Bernstein. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Rouen, 2010. Français. NNT : 2010ISAM0017 . tel-00557914

HAL Id: tel-00557914

<https://theses.hal.science/tel-00557914v1>

Submitted on 20 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

À mes parents
À mes frères

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier André Draux qui est l'origine de ce travail. Il a dirigé mon mémoire de Master 2 avec gentillesse et ensuite accepté de me prendre en thèse. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a consacré beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible ce qui m'a énormément encouragé. Je voudrais également le remercier pour la patience avec laquelle il m'a appris beaucoup de notions et de raisonnement mathématiques.

Je suis très honoré que Claude BREZINSKI et Annie CUYT aient accepté la charge de rapporter ma thèse de doctorat.

Je remercie profondément Borane Moalla pour sa collaboration et l'intérêt qu'il a porté à mes travaux de recherches.

Je remercie également Bernhard BECKERMANN et Dominique BLANCHARD qui participent à ce jury et qui se sont également intéressés à mes travaux.

Mes remerciements vont également vers Bernard GLEYSE pour son soutien ainsi que sa participation en tant que membre du jury.

Je n'oublie évidemment pas de remercier les membres du LMI, et tout spécialement les actuels et anciens doctorants, qui ont contribué à créer une ambiance amicale. Merci en particulier à Théa pour son encouragement, ainsi que Khaled, Adel, Lamia, Rachida, Nourddine, Mamadou, Benoît et bien d'autres pour leurs soutiens et leurs présences. Enfin, je dédie ce travail à mes parents, à ma famille et à mes amis.

Table des matières

Notations	9
Introduction générale	10
1 Les inégalités de Markov Bernstein	12
1.1 Introduction	13
1.2 Les inégalités de Markov-Bernstein en norme L^2	16
1.2.1 Problème spectral	20
1.2.2 Quelques propriétés dans les cas Laguerre, Gegenbauer et Jacobi	24
2 Encadrement de la constante de Markov-Bernstein	29
2.1 Introduction	30
2.2 Obtention d'une borne inférieure	30
2.2.1 Méthode de Newton	30
2.2.2 La méthode de point fixe d'ordre $r+1$	32
2.2.3 La méthode de Laguerre	35
2.3 Obtention d'une borne supérieure	36
2.3.1 Quotient de Rayleigh	36
2.3.2 L'algorithme qd	42
3 Généralisation de l'algorithme qd	48
3.1 Introduction	49
3.2 Cas d'une matrice à largeur de bande ℓ	49
3.2.1 Application dans le cas Jacobi	55
3.2.2 Comparaison avec le cas Gegenbauer	62
3.3 Cas d'une matrice tridiagonale par blocs	64
3.3.1 L'algorithme qd par blocs	64

3.3.2	Convergence de l'algorithme qd par blocs	80
3.4	Cas d'une matrice par blocs à largeur de bande ℓ	84
3.4.1	Généralisation de l'algorithme qd par blocs	84
3.4.2	Convergence de la généralisation de l'algorithme qd par blocs.	94
4	Obtention d'une borne inférieure	97
4.1	Introduction	98
4.2	Développement d'un déterminant caractéristique d'une matrice pentadiagonale	98
4.2.1	Application à la mesure de Jacobi.	99
4.2.2	Comparaison avec le cas Gegenbauer.	101
4.3	Cas d'une matrice tridiagonale par blocs	103
4.3.1	Application à la mesure de Jacobi	105
5	Problème aux valeurs propres généralisé	108
5.1	Introduction	109
5.2	Polynômes de Gegenbauer généralisés	109
5.2.1	Définition du polynôme de Gegenbauer généralisé	109
5.2.2	La dérivée du polynôme de Gegenbauer généralisé	111
5.2.3	La norme du polynôme de Gegenbauer généralisé	112
5.3	Utilisation des polynômes quasi orthogonaux unitaires	114
5.4	L'expression matricielle de la fonctionnelle bilinéaire.	116
5.5	L'encadrement de la plus petite valeur propre	122
5.5.1	L'encadrement dans le cas pair	122
5.5.2	L'encadrement dans le cas impair	127
	Bibliographie	132

Notations

- \mathcal{P} : L'espace vectoriel des polynômes réels.
- \mathcal{P}_n : L'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus égal à n .
- $H^1(.,.)$: l'espace de Sobolev.
- Ω : Un ouvert de \mathbb{R}
- ω : La mesure de Borel.
- $L^2(.,.)$: L'espace d'Hilbert des fonctions réelles de carré intégrable.

Introduction générale

Soit P un polynôme de degré n , P' son polynôme dérivé et $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace des polynômes de degré $\leq n$.
Le problème de Markov Bernstein se pose comme suit :

Trouver la meilleure constante c_n telle que :

$$\|P'\| \leq c_n \|P\|.$$

c_n est appelée constante de Markov Bernstein.

Les travaux de recherche de cette thèse, concernent l'encadrement de la constante de Markov Bernstein pour la norme L^2 associée aux mesures de Jacobi et Gegenbauer généralisée.
Ce travail est structuré en cinq chapitres, nous les décrivons brièvement :

Dans le premier et le deuxième chapitres, nous avons rappelé tout d'abord quelques résultats classiques concernant la constante de Markov Bernstein pour la norme infinie et pour la norme L^2 associée aux mesures de Laguerre, Hermite et Gegenbauer. Ensuite, nous avons remarqué que l'étude de ce problème est lié à celle d'un problème aux valeurs propres généralisé. Draux et al. ([12], [10]) l'ont abordé à l'aide d'une formulation variationnelle. Enfin, nous avons exposé les techniques et les outils mathématiques pour l'encadrement de la constante de Markov Bernstein, qui est liée à la plus petite valeur propre de la matrice obtenue à partir de la formulation variationnelle.

Dans le troisième chapitre, nous avons développé une généralisation de l'algorithme qd pour les matrices symétriques définies positives à largeur de bande ℓ et nous avons démontré ainsi une propriété importante concernant les valeurs propres. En effet la première valeur propre de la matrice obtenue par

la décomposition donnée par cet algorithme pour différentes étapes constitue une suite strictement croissante et la dernière valeur propre constitue une suite strictement décroissante. Ensuite, nous avons construit l'algorithme qd par blocs pour les matrices de Jacobi par blocs liées aux relations de récurrence à trois termes entre les polynômes orthogonaux matriciels. Enfin, nous avons généralisé le dernier résultat aux cas des matrices par blocs à largeur de bande ℓ , et nous avons démontré la même propriété concernant les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs propres du premier bloc de la matrice obtenue par la décomposition donnée par l'algorithme qd par blocs pour différentes étapes constituent des suites strictement croissantes et celles du dernier bloc constituent des suites strictement décroissantes. Cette propriété permet d'obtenir un majorant ayant le même comportement asymptotique que la plus petite valeur propre des matrices associées.

(Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de trois articles [15], [14], [18]).

Dans le quatrième chapitre, Nous avons développé le déterminant caractéristique d'une matrice symétrique définie positive pentadiagonale, nous avons obtenu ainsi une relation de récurrence à six termes, cette relation permet d'obtenir un minorant de la plus petite valeur propre de la matrice pentadiagonale en utilisant la méthode de Newton à l'origine. Finalement nous avons utilisé encore la méthode de Newton à l'origine pour obtenir un minorant de la plus petite racine latente du polynôme matriciel associés à la matrice de Jacobi par blocs.

Le cinquième chapitre est consacré à l'application de tous les outils développés précédemment à l'encadrement de la constante de Markov Bernstein pour la norme L^2 associée à la mesure de Gegenbauer généralisée. Tout d'abord nous avons rappelé les relations de récurrence que vérifient les polynômes orthogonaux par rapport à cette mesure. Nous avons exprimé la formulation variationnelle de ce problème par une matrice, qui se décompose en deux blocs diagonaux. Le premier bloc est associé aux polynômes orthogonaux de Gegenbauer généralisés de degré pair, et le second est associé à ceux de degré impair.

La méthode de Newton et l'algorithme qd appliqués au premier bloc nous fournissent un encadrement ayant le même comportement asymptotique que la plus petite valeur propre de ce bloc. En revanche la méthode de Newton appliquée au polynôme lié au second bloc fournit un minorant de la plus petite valeur propre. En revanche nous avons obtenu un ordre en $(1/n^4)$ d'un majorant de la plus petite valeur propre par le quotient de Rayleigh. (Le résultat de ce chapitre a fait l'objet d'un article [16]).

Chapitre **1**

Les inégalités de Markov
Bernstein

1.1 Introduction

Les inégalités de Markov-Bernstein sont un outil fondamental pour la démonstration de plusieurs théorèmes inverses de la théorie d'approximation des polynômes. Par exemple, Telyakovskii ([28]) écrit : « Among those that are fundamental in approximation theory are the extremal problems connected with inequalities for the derivatives of polynomials. . . . The use of inequalities of this kind is a fundamental method in proofs of inverse problems of approximation theory. Frequently further progress in inverse theorems has depended on first obtaining a corresponding generalization or analog of Markov's and Bernstein's inequalities. »

En 1869 le chimiste russe Dimitri Mendeleïev a créé le tableau périodique des éléments également appelé le tableau de Mendeleïev. Ce tableau regroupe tous les éléments chimiques connus, classés en fonction de leur nombre de protons, ou numéro atomique. Quelques années plus tard il a effectué une étude sur la gravité spécifique d'une solution comme une fonction de pourcentage d'une substance dissoute ([27]), cette fonction a un rôle important dans la pratique : par exemple elle est utilisée pour le test du contenu alcoolique de la bière et du vin, ainsi que pour le test de la concentration d'antigel du système de refroidissement d'une automobile.

Les recherches de Mendeleïev ont mené à des problèmes mathématiques de grande importance, et continuent à inspirer la recherche mathématique actuelle.

On représente une courbe que Mendeleïev a obtenu (voir figure 1.1) : (l'alcool dans l'eau, pourcentage par poids)

Mendeleïev a remarqué que les courbes pourraient être étroitement rapprochées par des successions d'arcs quadratiques, il a voulu savoir si les endroits où les arcs se joignent existent réellement ou si elles sont dues à des erreurs de mesure.

D'un point de vue mathématique le problème de Mendeleïev se pose comme suit :

si $t \mapsto P(t)$ est un polynôme quadratique arbitraire défini sur un intervalle $[a, b]$ vérifiant,

$$\max_{t \in [a, b]} P(t) - \min_{t \in [a, b]} P(t) = L$$

alors quelle largeur peut avoir $P'(t)$ sur $[a, b]$?

Ensuite, Mendeleïev a réduit son problème en un autre plus simple :
si $t \mapsto P(t) = at^2 + bt + c$ est un polynôme quadratique arbitraire et $|P(t)| \leq 1$ sur $[-1, 1]$, quelle largeur peut avoir $P'(t)$ sur $[-1, 1]$?

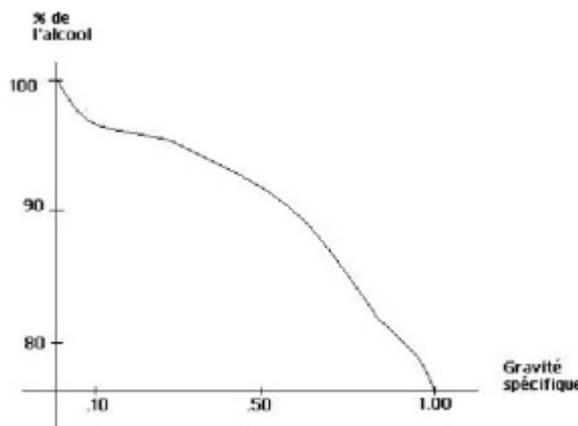


FIGURE 1.1 – courbe de Mendeleïev

Mendeleïev a résolu ce problème et montre que :

$$|P'(t)| \leq 4 \text{ sur } [-1, 1]$$

ce résultat est le meilleur car : pour $P(t) = 1 - 2t^2$ on a $P(t) \leq 1$ et $P'(\pm 1) = 4$. En utilisant ce résultat, Mendeleïev s'est convaincu que les endroits où se joignent les arcs dans sa courbe étaient véritables, puisque ces mesures étaient tout à fait précises.

Plus tard A.A.Markov (voir [26]) a traité le problème correspondant pour des polynômes de degré n , $n \geq 2$, et a démontré le théorème suivant :

Théorème 1.

Soit $P(t) \in \mathcal{P}_n$ (\mathcal{P}_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus égal à n) tel que $|P(t)| \leq 1$ sur $[-1, 1]$ alors :

$$|P'(t)| \leq n^2 \text{ pour } -1 \leq t \leq 1.$$

Le résultat est optimal et l'égalité est atteinte pour $P(t) = \pm T_n(t)$, où $T_n(t)$ est le polynôme de Tchebychev de première espèce.

En 1926 le mathématicien russe Serge Bernstein a formulé un théorème analogue à celui de Markov sur un disque unité dans le plan complexe. En effet il a voulu savoir quel est le $\max_{|z|=1} |P'(z)|$ pour $|z| = 1$ où $P(z)$ est un polynôme complexe de degré au plus égal à n , le résultat est donné dans le théorème suivant (voir [3]).

Théorème 2.

Soit $P(z)$ un polynôme complexe de degré au plus égal à n , alors

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|. \quad (1.1)$$

L'égalité est atteinte pour $P(z) = \lambda z^n$, où λ est un nombre complexe.

En 1889 A.A Markov ([26]) a traité le problème de Mendeleïev sous une forme plus générale.

Pour la norme infinie sur $[-1, 1]$ (i.e $\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$), Markov a donné le théorème suivant :

Théorème 3.

Pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ on a

$$\|P'\| \leq n^2 \|P\|. \quad (1.2)$$

L'égalité est atteinte en ± 1 , et quand $P(t) = cT_n(t)$, où T_n est le polynôme de Tchebetchev du première espèce de degré n et c est une constante arbitraire.

Maintenant nous donnons quelques versions du théorème de Bernstein :

Théorème 4.

Soit P un polynôme complexe de degré n , alors pour tout z sur le disque unité dans le plan complexe on a :

$$|P'(z)| \leq n|P(z)| \quad (1.3)$$

L'égalité est réalisée pour $P(z) = cz^n$, où $c = \text{const.}$

Pour les polynômes trigonométriques on obtient le théorème suivant :

Théorème 5.

Soit $\theta \mapsto T(\theta)$ un polynôme trigonométrique de degré n tel que $|T(\theta)| \leq M$, alors

$$|T'(\theta)| \leq nM.$$

L'égalité est réalisée pour $T(\theta) = \gamma \sin(n(\theta - \theta_0))$, où $|\gamma| = 1$.

Enfin nous donnons la forme standard du théorème de Bernstein.

Théorème 6.

Pour $P(t) \in \mathcal{P}_n$ et $|P(t)| \leq 1$ ($-1 \leq t \leq 1$), alors

$$|P'(t)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < t < 1. \quad (1.4)$$

L'égalité est atteinte aux points $t = t_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $1 \leq k \leq n$, si et seulement si $P(t) = \gamma T_n(t)$, où $|\gamma| = 1$.

Nous considérons maintenant le problème extrémal suivant : *Pour une norme $\|\cdot\|$ donnée, déterminer la meilleure constante A_n telle que :*

$$\|P'\| \leq A_n \|P\| \quad (P \in \mathcal{P}_n), \quad (1.5)$$

i.e :

$$A_n = \sup_{P \in \mathcal{P}_n} \frac{\|P'\|}{\|P\|}. \quad (1.6)$$

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons quelques résultats classiques de ce problème en norme L^2 pour certaines mesures.

1.2 Les inégalités de Markov-Bernstein en norme L^2

Soit \mathcal{P} l'espace vectoriel des polynômes réels, et \mathcal{P}_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus égal à n .

Soit $L^2(\Omega; w)$ l'espace de Hilbert des fonctions réelles de carré intégrable sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$, w est la mesure de Borel positive sur le support Ω .

Sur cet espace on définit le produit scalaire suivant :

$$(f, g)_{L^2(\Omega; w)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dw(x), \quad \forall f, g \in L^2(\Omega; w) \quad (1.7)$$

$\|f\|_{L^2(\Omega; w)}$ est la norme définie par

$$\|f\|_{L^2(\Omega; w)} = ((f, f)_{L^2(\Omega; w)})^{1/2}. \quad (1.8)$$

Maintenant on définit l'inégalité de Markov-Bernstein par rapport à cette norme

$$\|p'\|_{L^2(\Omega; w)} \leq A_n \|p\|_{L^2(\Omega; w)} \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad (1.9)$$

où A_n est la plus petite valeur possible pour un n fixé. i.e :

$$A_n = \sup_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{\|p'\|_{L^2(\Omega; w)}}{\|p\|_{L^2(\Omega; w)}}. \quad (1.10)$$

Plusieurs auteurs ont abordé ce problème extrémal concernant la constante de Markov-Bernstein en norme L^2 . Schmidt [37] et Turán [39] se sont intéressés à ce problème, lorsque les normes sont associées aux poids d'Hermite et Laguerre. Nous résumons les résultats obtenus dans le théorème suivant :

Théorème 7.

(a) Soit $\Omega =]-\infty, \infty[$ et

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t)^2 dt,$$

alors la meilleure constante (1.10) est $A_n = \sqrt{2n}$. Le polynôme d'Hermite H_n est le polynôme extrémal.

(b) Soit $\Omega = [0, \infty[$ et

$$\|f\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t)^2 dt.$$

Alors

$$A_n = \left(2 \sin \frac{\pi}{4n+2}\right)^{-1}.$$

Le polynôme extrémal est

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4n+1} L_k(t),$$

où L_k est le polynôme de Laguerre.

Quant à Mirsky [29] il a traité le cas de la norme L^2 avec une fonction poids arbitraire :

$$w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$$

pour laquelle tous les moments sont finis, et a démontré le théorème qui suit :

Théorème 8.

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré au plus égal à n . Alors il existe une constante $A_n = A_n(\Omega, w)$ telle que l'inégalité (1.9) est vérifiée. De plus A_n vérifie la majoration suivante :

$$A_n \leq \left(\sum_{k=1}^n k |\pi'_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.11)$$

où $\{\pi_k\}$ est un système des polynômes orthonormaux par rapport à la fonction poids w .

Exemples :

1. L'estimation de (1.11) pour $w(t) = \exp(-t^2)$ sur \mathbb{R} est :

$$A_n \leq \left(\sum_{k=1}^n 2k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)} = \mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}}).$$

2. Le cas asymptotique de A_n pour $w(t) = 1$ sur $[-1, 1]$ a été étudié par Schmidt [37], il a obtenu pour $n \geq 5$:

$$A_n = \frac{(2n+3)^3}{4\pi} \left(1 - \frac{\pi^2 - 3}{3(2n+3)^2} + \frac{16R}{(2n+3)^4} \right)^{-1},$$

où $-6 < R < 13$.

Maintenant nous donnons la meilleure constante possible du problème analogue pour des dérivées d'ordre supérieur, ce problème a été traité par Dörfler [8].

Théorème 9.

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré au plus égal à n . Alors la meilleure constante possible A_n telle que

$$\|P^{(k)}\| \leq A_{n,k} \|P\|,$$

est égale à la plus grande valeur singulière de la matrice $A_n^{(k)}$, où $A_n^{(k)} = (e_{i,j}^{(k)})_{\{i=0,\dots,n,j=0,\dots,n-k\}}$, $e_{l,m}^{(k)} = \int_a^b \pi_l^{(k)}(t) \pi_m(t) w(t) dt$.

De plus on a :

$$\max_{0 \leq l \leq n} \|\pi_l^{(k)}\| \leq A_{n,k} \leq \left(\sum_{l=0}^n \|\pi_l^{(k)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Milovanović [28] a traité un cas plus général en considérant la mesure positive $d\sigma(t)$ sur \mathbb{R} , avec un support compact ou infini pour lequel tous les moments $\mu_l = \int_{\mathbb{R}} t^l d\sigma(t)$, $l = 0, 1, \dots$, existent et sont finis, et $\mu_0 > 0$. Alors il existe un ensemble unique de polynômes orthonormaux

$$\pi_l^{(\cdot)} = \pi_l(\cdot, d\sigma), \quad l = 0, 1, \dots,$$

définis par :

$$\pi_l(t) = a_l t^l + \text{des termes de degrés inférieurs}, \quad a_l > 0,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_l(t) \pi_m(t) d\sigma(t) = \delta_{lm}, \quad l, m \geq 0.$$

Pour des polynômes $P \in \mathcal{P}_n$ à coefficients complexes, on définit

$$\|P\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |P(t)|^2 d\sigma(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère le problème extrémal suivant :

$$A_{n,k} = A_{n,k}(d\sigma) = \sup_{P \in \mathcal{P}_n} \frac{\|P^{(k)}\|}{\|P\|} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (1.12)$$

Théorème 10.

La meilleure constante $A_{n,k}$ définie par (1.12) est égale à la norme spectrale de la matrice triangulaire $Q_{n,k}^T$, où

$$Q_{n,k} = (q_{ij}^{(k)})_{k \leq i, j \leq n} \quad (q_{i,j}^{(k)} = 0 \iff i > j),$$

i.e.,

$$A_{n,k} = \sigma(Q_{n,k}^T) = (\lambda_{\max}(Q_{n,k}Q_{n,k}^T))^{\frac{1}{2}}. \quad (1.13)$$

Les éléments $q_{ij}^{(k)}$ sont donnés par le produit scalaire suivant :

$$q_{ij}^{(k)} = (\pi_j^{(k)}, \pi_{i-k}) \quad (k \leq i, j \leq n).$$

On écrit (1.13) sous la forme suivante :

$$A_{n,k} = (\lambda_{\min}(C_{n,k}))^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.14)$$

où $C_{n,k} = (Q_{n,k}Q_{n,k}^T)^{-1}$.

Exemples : Nous donnons quelques valeurs de $A_{n,k}$ pour différentes mesures :

1. **Le cas Hermite :** $d\sigma(t) = e^{-t^2} dt$, $-\infty < t < \infty$. On a

$$\pi_l(t) = \hat{H}_l(t) = (\sqrt{\pi}2^l l!)^{-\frac{1}{2}} H_l(t),$$

où H_l est le polynôme de Hermite de degré l .

On trouve $\lambda_{\max}(B_{n,k}) = 2^k k! \binom{n}{k}$ et $A_{n,k} = 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}}$.

On peut trouver ce résultat dans la thèse de Champine [35] et [36].

2. **Le cas Laguerre généralisé :** $d\sigma(t) = t^\alpha e^{-t} dt$, $0 < t < +\infty$, on a

$$\pi_l(t) = \hat{L}_l^\alpha(t) = \sqrt{\frac{l!}{\Gamma(l+\alpha+1)}} \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \binom{l+\alpha}{l-i} \frac{t^i}{i!},$$

où Γ est la fonction gamma.

Pour le cas simple $k = 1$ on trouve les valeurs propres $\lambda_l = -t_l$ de $C_{n,1}$ où $Q_n(t_l) = 0$ pour $l = 1, \dots, n$.

Dans le cas de Laguerre ($\alpha = 0$) on peut trouver la valeur exacte de $A_{n,1}$, en effet pour $t = 2(z - 1)$ avec $-1 \leq z \leq 1$, on a

$$Q_l(t) = \frac{\cos(2l + 1)\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}, \quad z = \cos\theta.$$

Les valeurs propres de la matrice $C_{n,1}$ sont

$$\lambda_l = -t_l = 4\sin^2\frac{(2l - 1)\pi}{2(2n + 1)}, \quad l = 1, \dots, n.$$

Puisque $\lambda_{\min}(C_{n,1}) = \lambda_1$, on obtient

$$A_{n,1} = \left(2\sin\frac{\pi}{2(2n + 1)}\right)^{-1}.$$

Dörfler [8] a donné une expression erronée d'un minorant de la plus petite valeur propre, en revanche cette constante a été corrigée par A.Draux et al qu'on trouve dans les articles [12] et [10], et on obtient :

$$A_{n,1} \geq \frac{2(1 + \alpha)}{n(n + 1)},$$

en utilisant la méthode de Newton.

1.2.1 Problème spectral

À présent nous allons aborder le problème de la constante des inégalités de Markov-Bernstein en étudiant un problème spectral. En effet nous considérons la forme bilinéaire a définie sur $H^1(\Omega; w) \times H^1(\Omega; w)$ par :

$$a(f, g) = (f, g)_{L^2(\Omega; w)} + \lambda(f', g')_{L^2(\Omega; w)}, \quad \forall f, g \in H^1(\Omega; w), \quad (1.15)$$

où $H^1(\Omega; w)$ est l'espace de Sobolev défini par :

$$H^1(\Omega; w) = \{f \mid f \in L^2(\Omega; w), f' \in L^2(\Omega; w)\}, \quad (1.16)$$

et où λ est un paramètre réel.

f' et g' sont les dérivées premières au sens des distributions des fonctions f et g .

Le but est de trouver le domaine \mathcal{D}_n de \mathbb{R}

$$\mathcal{D}_n = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid a(p, p) > 0, \forall p \in \mathcal{P}_n\}.$$

\mathcal{D}_n est en fait la demi droite $]\lambda_n, +\infty[$ où λ_n est la meilleure constante, on a $\lambda_n < 0$.

Si on considère $\bar{\mathcal{D}}_n = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid a(p, p) \geq 0, \forall p \in \mathcal{P}_n\}$ alors $\bar{\mathcal{D}}_n = [\lambda_n, +\infty[$.
 $\forall \lambda \in \bar{\mathcal{D}}_n \quad a(p, p) \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$, i.e

$$\|p\|_{L^2(\Omega; w)}^2 + \lambda \|p'\|_{L^2(\Omega; w)}^2 \geq 0$$

et donc pour $\lambda = \lambda_n$ on a

$$a(p, p) \geq 0 \iff \|p'\|_{L^2(\Omega; w)} \leq \sqrt{-\frac{1}{\lambda_n}} \|p\|_{L^2(\Omega; w)}. \quad (1.17)$$

Pour étudier ce problème nous commençons par écrire la forme bilinéaire a sous la forme matricielle en considérant une base $\{\varphi_j\}_{j \geq 0}$ de \mathcal{P} telle que $\deg \varphi_j = j, \forall j \in \mathbb{N}$.

Dans cette base, $p = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j$, alors

$$a(p, p) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \xi_i \xi_j (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega; w)} + \lambda \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \xi_i \xi_j (\varphi'_j, \varphi'_i)_{L^2(\Omega; w)} \quad (1.18)$$

$$= \xi^T K_{n,0} \xi + \lambda \xi^T K_{n,0}^{(1)} \xi \quad (1.19)$$

où ξ est un vecteur de \mathbb{R}^n de composantes ξ_i pour $i = 0, \dots, n$.

$K_{n,0}$ est une matrice symétrique définie positive de taille $(n+1) \times (n+1)$, telle que

$$K_{n,0} = ((\varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega; w)})_{i,j=0}^n.$$

$K_{n,0}^{(1)}$ est une matrice symétrique semi définie positive de taille $(n+1) \times (n+1)$, telle que

$$K_{n,0}^{(1)} = ((\varphi'_j, \varphi'_i)_{L^2(\Omega; w)})_{i,j=0}^n.$$

Remarque : Les éléments de la première ligne et de la première colonne de la deuxième matrice sont nuls, en utilisant l'élimination de Gauss, nous supprimons les éléments $K_{n,0}(i, 0)$ et $K_{n,0}(0, i)$, pour $i = 1, \dots, n$.

Nous notons maintenant $K_{n,1}$ (resp. $K_{n,1}^{(1)}$) la matrice de taille $n \times n$ (resp. $n \times n$) déduite de la matrice $K_{n,0}$ (resp. $K_{n,0}^{(1)}$) en supprimant la première ligne et la première colonne, donc la matrice $K_{n,1}^{(1)}$ est aussi symétrique définie positive.

Théorème 11. ([12])

Pour un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$\forall p \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\} \quad a(p, p) > 0 \iff K_{n,1} + \lambda K_{n,1}^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive.

Puisque $K_{n,1}^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive, donc on peut la décomposer par la décomposition de Cholesky : $G_{n,1}^{(1)}(G_{n,1}^{(1)})^T$, où $G_{n,1}^{(1)}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Alors on a

$$K_{n,1} + \lambda K_{n,1}^{(1)} = K_{n,1} + \lambda G_{n,1}^{(1)}(G_{n,1}^{(1)})^T \quad (1.20)$$

$$= G_{n,1}^{(1)} \left((G_{n,1}^{(1)})^{-1} K_{n,1} ((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1} + \lambda_n I \right) (G_{n,1}^{(1)})^T. \quad (1.21)$$

Théorème 12. ([12])

$K_{n,1} + \lambda K_{n,1}^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement si $(G_{n,1}^{(1)})^{-1} K_{n,1} ((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1} + \lambda_n I$ est une matrice symétrique définie positive.

Il en résulte que $-\lambda_n$ est égale à la plus petite valeur propre de

$$(G_{n,1}^{(1)})^{-1} K_{n,1} ((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1}.$$

Maintenant on considère $\mu_{i,n}$, $i = 1, \dots, n$, les valeurs propres de la matrice

$$(G_{n,1}^{(1)})^{-1} K_{n,1} ((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1} \text{ avec } 0 < \mu_{1,n} \leq \mu_{2,n} \leq \dots \leq \mu_{n,n}.$$

Nous avons donc les résultats suivants :

Théorème 13. ([12])

$K_{n,1} + \lambda K_{n,1}^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive $\iff \lambda > -\mu_{1,n}$.

Théorème 14. ([12])

la formulation variationnelle a est symétrique définie positive si et seulement si $\lambda > -\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{1,n}$.

Dans le cas de mesures générales, nous ne pouvons pas, en général, trouver la valeur exacte de la constante de Markov-Bernstein, car dans ce cas le système des polynômes orthogonaux n'est pas un système classique, et la suite de dérivées des polynômes n'est pas une suite des polynômes orthogonaux. Pour cela nous proposons d'employer quelques méthodes numériques et formelles, afin de trouver une borne inférieure et une borne supérieure de la constante de Markov-Bernstein. Il est clair qu'il faut chercher des bornes inférieures et des bornes supérieures ayant le même comportement asymptotique que $-\lambda_n$. D'après le théorème 12, $-\lambda_n$ est égale à la plus petite valeur

propre de $G_{n,1}^{(1)}K_{n,1}((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1}$. Donc nous cherchons la plus petite valeur propre du problème aux valeurs propres suivant :

$$C_n x = \lambda_n x \quad \text{où } C_n = G_{n,1}^{(1)}K_{n,1}((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1}.$$

Comme $G_{n,1}^{(1)}$ est une matrice triangulaire inférieure pleine, la matrice C_n est pleine, ce qui rend le problème encore plus difficile à traiter.

Par conséquent nous avons choisi de considérer la base des polynômes quasi-orthogonaux $\{\varphi_i\}$ d'ordre 1 par rapport aux polynômes orthogonaux à la mesure ω . Les polynômes φ_i vérifient :

$$\begin{cases} \deg \varphi_j = j \\ \varphi_j' = j R_j \text{ où } R_j \text{ est un polynôme orthogonal} \end{cases}$$

Soit $p \in \mathcal{P}$, donc dans cette base : $p = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i$.

Nous avons

$$a(p, p) = (p, p)_{L^2(\Omega, \omega)} + \lambda (p', p')_{L^2(\Omega, \omega)} \quad (1.22)$$

$$= \sum_{i,j=0}^n y_i y_j (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega; \omega)} + \lambda \sum_{i,j=0}^n y_i y_j (\varphi_i', \varphi_j')_{L^2(\Omega; \omega)} \quad (1.23)$$

$$= \sum_{i,j=0}^n y_i y_j \left((\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega; \omega)} + \lambda (\varphi_i', \varphi_j')_{L^2(\Omega; \omega)} \right) \quad (1.24)$$

$$= y^T \left(\tilde{K}_{n,1} + \lambda \tilde{K}_{n,1}^{(1)} \right) y, \quad (1.25)$$

avec y le vecteur de composantes y_i , $i = 1, \dots, n$, $\tilde{K}_{n,1} = (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega; \omega)}$ et $\tilde{K}_{n,1}^{(1)} = (\varphi_i', \varphi_j')_{L^2(\Omega; \omega)}$.
 y^T est la transposée de y .

Dans le cas des mesures classiques, la matrice $\tilde{K}_{n,1}^{(1)}$ est diagonale par rapport $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega; \omega)}$ puisque φ' est quasi-orthogonal, et $\tilde{K}_{n,1}$ est une matrice à largeur de bande égale à ℓ .

Nous donnons quelques exemples concernant la matrice $\tilde{K}_{n,1}$ ([12], [13]) :

- Dans le cas Hermite $\tilde{K}_{n,1}$ est diagonale.
- Dans le cas Laguerre $\tilde{K}_{n,1}$ est tridiagonale.
- Dans le cas Gegenbauer $\tilde{K}_{n,1}$ est pentadiagonale.
- Dans le cas Jacobi $\tilde{K}_{n,1}$ est pentadiagonale.

Nous résumons dans la table suivante toutes les informations utiles concernant ces quatre familles de polynômes orthogonaux unitaires :

Nom	Hermite	Laguerre	Gegenbauer	Jacobi
Ω	\mathbb{R}	$]0, +\infty[$	$] - 1, 1[$	$] - 1, 1[$
ω	e^{-x^2}	$x^\alpha e^{-x}$	$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
k_n	$\frac{\sqrt{\pi}n!}{2^n}$	$n!\Gamma(n+\alpha+1)$	$\frac{\pi 2^{1-2\alpha-2n} n! \Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha)}$	$2^{\delta_n} n! \frac{\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\beta_n)\Gamma(\delta_n-n)}{\delta_n(\Gamma(\delta_n))^2}$ avec $\alpha_n = \alpha + n + 1$ $\beta_n = \beta + n + 1$ $\delta_n = \alpha_n + \beta_n - 1$
Restrictions		$\alpha > -1$	$\alpha > \frac{1}{2}$	$\alpha > -1, \beta > -1$

TABLE 1.1 –

Dans le cas de Gegenbauer, les deux diagonales qui sont de part et d'autre de la diagonale principale sont nulles. Donc $\tilde{K}_{n,1}$ peut être transformée en une matrice semblable qui a une structure d'une matrice bloc 2×2 diagonale. En plus, les deux blocs de la diagonale sont tridiagonaux. Les matrices de la transformation utilisée sont les matrices de permutation V_{ij} ($i \neq j$) définies par

$$\begin{cases} V_{ij}(\ell, \ell) = 1, \text{ pour } \ell = 1, \dots, n, & \ell \neq i \text{ et } \ell \neq j, \\ V_{ij}(i, j) = V_{ij}(j, i) = 1, \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

telles que $V_{ij}V_{ij} = I$. Maintenant, et notamment dans ces cas, nous pouvons traiter le problème aux valeurs propres :

$$C_n x = tx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.26)$$

avec C_n une matrice tridiagonale.

Le cas où C_n est pentadiagonale sera traité dans le chapitre 3.

1.2.2 Quelques propriétés dans les cas Laguerre, Gegenbauer et Jacobi

Nous rappelons maintenant le produit scalaire et la relation de récurrence à trois termes entre les polynômes orthogonaux unitaires par rapport aux mesures de Laguerre, Gegenbauer et Jacobi, ainsi que les matrices de Jacobi obtenues dans ces cas et d'autres propriétés (voir [28], [12]).

• **Cas Laguerre**

Le produit scalaire c dans ce cas est défini par :

$$c(p, q) = \int_0^{+\infty} p(x) q(x) x^\alpha e^{-x} dx \quad \text{avec } \alpha > -1.$$

Nous notons par J_n la matrice $\tilde{K}_{n,1}$ dans le cas Laguerre, cette matrice est tridiagonale de taille $n \times n$:

$$J_n(i, j) = \begin{cases} 1 + \alpha & \text{pour } i = j = 1, \\ 2 + \frac{\alpha}{i} & \text{pour } i = j = 2, \dots, n, \\ \sqrt{1 + \frac{\alpha}{i-1}} & \text{pour } i = j + 1, \\ \text{pour } & i = j - 1, \text{ la matrice est complétée par symétrie.} \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (1.27)$$

Nous obtenons pour cette matrice de Jacobi, la suite de polynômes orthogonaux unitaires définie par la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$A_n(x) = \left(x - 2 - \frac{\alpha}{n}\right)A_{n-1}(x) - \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right)A_{n-2}(x), \quad (1.28)$$

avec $A_0(x) = 1$ et $A_1(x) = x - \alpha - 1$.

La norme k_n est donnée dans la table (2.1).

Les valeurs propres $\mu_{i,n}$, $i = 1, \dots, n$ de la matrice J_n sont les racines des polynômes orthogonaux $A_n(x)$.

La dérivée du polynôme orthogonal de Laguerre noté L_n^α est

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = n L_n^{\alpha+1}(x).$$

• **Cas de Gegenbauer**

Le produit scalaire c dans ce cas est défini par :

$$c(p, q) = \int_{-1}^{+1} p(x) q(x) (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dx \quad \text{avec } \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Nous notons $\rho_n = \left[\frac{(n+1)}{2}\right]$, $\tilde{\rho}_n = \left[\frac{n}{2}\right]$ ($[\cdot]$ est la partie entière).

Nous notons J_n la matrice $\tilde{K}_{n,1}$ dans le cas Gegenbauer. Nous multiplions J_n à droite et à gauche par les matrices de permutation V_{ij} ayant les mêmes indices. Elles permutent les lignes et les colonnes ayant le même couple de

nombres. Finalement, nous obtenons un premier bloc tridiagonal de taille $(\rho_n \times \rho_n)$, noté par \hat{J}_{ρ_n} , et un deuxième bloc tridiagonal de taille $\tilde{\rho}_n \times \tilde{\rho}_n$, noté par $\tilde{J}_{\tilde{\rho}_n}$. En fait, \hat{J}_{ρ_n} contient tous les éléments des anciennes lignes et colonnes impaires et $\tilde{J}_{\tilde{\rho}_n}$ contient ceux des anciennes lignes et colonnes paires.

$$J_n = \begin{pmatrix} \hat{J}_{\rho_n} & 0 \\ 0 & \tilde{J}_{\tilde{\rho}_n} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc

$$\hat{J}_{\rho_n}(i, j) = \begin{cases} \frac{k_1}{k_0}, & \text{pour } i = j = 1, \\ \frac{1}{(2i-1)^2} \frac{k_{2i-1}}{k_{2i-2}} + \frac{(e_{2i-2}^\alpha)^2}{(2i-3)^2} \frac{k_{2i-3}}{k_{2i-2}}, & \text{pour } i = j > 1, \\ \frac{e_{2i}^\alpha}{(2i-1)^2} \frac{k_{2i-1}}{\sqrt{k_{2i-2}k_{2i}}}, & \text{pour } i = j - 1, \\ \text{pour } i = j + 1, & \text{la matrice est complétée par symétrie,} \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

où $e_n^\alpha = -\frac{n(n-1)}{4(n+\alpha)_2}$ et k_n la norme définie dans la table (2.1).

Nous obtenons pour cette matrice de Jacobi la suite de polynômes orthogonaux unitaire définie par la relation de récurrence à trois termes suivants :

$$\hat{G}_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\hat{G}_n(x) - \delta_n\hat{G}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.29)$$

avec $\hat{G}_0 = 1$, $\hat{G}_1(x) = x - \frac{1}{2(\alpha+1)}$, et

$$\beta_n = \frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha+n)}{(2n+1)(\alpha+2n)_2} + \frac{n}{(2n+2\alpha-1)(\alpha+2n-1)_2} \right), \quad (1.30)$$

$$\delta_n = \frac{n(\alpha+n-1)}{4(2n-1)(2\alpha+2n-1)(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-2)_3}. \quad (1.31)$$

$(a)_j, j \in \mathbb{N}$ est le coefficient de Pochhammer : $(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1)$. Nous notons par $\hat{\mu}_{1, \rho_k}$ la plus petite racine du polynôme orthogonal \hat{G}_{ρ_k} .

$$\tilde{J}_{\tilde{\rho}_n}(i, j) = \begin{cases} \frac{k_2}{4k_1}, & \text{pour } i = j = 1, \\ \frac{1}{(2i)^2} \frac{k_{2i}}{k_{2i-1}} + \frac{(e_{2i-1}^\alpha)^2}{(2i-2)^2} \frac{k_{2i-2}}{k_{2i-1}}, & \text{pour } i = j > 1, \\ \frac{e_{2i+1}^\alpha}{(2i)^2} \frac{k_{2i}}{\sqrt{k_{2i+1}k_{2i-1}}}, & \text{pour } i = j - 1, \\ \text{pour } i = j + 1, & \text{la matrice est complétée par symétrie,} \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

Nous obtenons une autre suite de polynômes orthogonaux unitaires pour cette matrice de Jacobi définie par la relation de récurrence à trois termes suivants :

$$\tilde{G}_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+\frac{1}{2}})\tilde{G}_n(x) - \delta_{n+\frac{1}{2}}\tilde{G}_{n-1}(x), n \geq 1. \quad (1.32)$$

avec $\tilde{G}_0 = 1$, $\tilde{G}_1(x) = x - \frac{2\alpha+1}{8(\alpha+1)_2}$.

$\beta_{n+\frac{1}{2}}$ et $\delta_{n+\frac{1}{2}}$ sont obtenus à partir de (1.30) et (1.31) en remplaçant n par $n + \frac{1}{2}$.

Nous notons par $\hat{\mu}_{1,\rho_k}$ la plus petite racine du polynôme orthogonal $\tilde{G}_{\tilde{\rho}_k}$.

Remarquons que ces deux familles de polynômes devraient être celles trouvées par T.E. Pérez dans sa thèse de doctorat ([30] page 63), mais elle a donné une expression fautive pour δ_i . Ces deux familles de polynômes ont été aussi présentées dans le livre de G.V. Milovanović et al. ([28] page 580).

• Cas de Jacobi

Le produit scalaire c dans ce cas est défini par :

$$c(p, q) = \int_{-1}^{+1} p(x) q(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \quad \text{avec } \alpha > -1, \beta > -1.$$

Nous notons par J_n la matrice $\tilde{K}_{n,1}$ dans le cas Jacobi, cette matrice est $n \times n$ symétrique pentadiagonale :

$$J_n(i, j) = \begin{cases} \frac{k_1}{k_0}, \text{ pour } i = j = 1, \\ \frac{k_2}{4k_1} + \frac{4(\alpha - \beta)^2}{(2 + \alpha + \beta)^2(4 + \alpha + \beta)^2}, \text{ pour } i = j = 2, \\ \frac{k_{i-1}k_{i-2}}{(i-2)^2(k_{i-3}^{(\alpha+1, \beta+1)})^2} + \frac{4(\alpha - \beta)^2}{(2i-2 + \alpha + \beta)^2(2i + \alpha + \beta)^2} \\ \quad + \frac{k_i}{i^2k_{i-1}}, \text{ pour } i = j > 2, \\ \frac{2(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 4)} \sqrt{\frac{k_1}{k_0}}, \text{ pour } (i, j) = (1, 2) \text{ et } (2, 1), \\ -\frac{2(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2i - 2)} \sqrt{\frac{k_{i-1}}{k_{i-2}}} \left(\frac{k_{i-2}}{k_{i-3}^{(\alpha+1, \beta+1)}} (i-2)(\alpha + \beta + 2i - 4) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{(i-1)(\alpha + \beta + 2i)} \right), \text{ pour } i = j + 1 > 2, \\ -\frac{k_{i-2}}{(i-2)^2k_{i-3}^{(\alpha+1, \beta+1)}} \sqrt{\frac{k_{i-1}}{k_{i-3}}}, \text{ pour } i = j + 2, \\ \text{pour } i = j - 2 \text{ et } i = j - 1 > 1, \text{ la matrice est complétée par symétrie,} \\ 0 \text{ partout ailleurs.} \end{cases} \quad (1.33)$$

k_i représente $k_i^{(\alpha, \beta)}$ dans (1.33).

On note par $P_n^{(\alpha, \beta)}$ le polynôme orthogonal unitaire de Jacobi, alors on a :

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}.$$

Chapitre **2**

**Encadrement de la constante de
Markov-Bernstein**

2.1 Introduction

Dans cette partie nous rappelons les résultats concernant l'obtention d'une borne supérieure et d'une borne inférieure dans les cas Laguerre et Gegenbauer (voir [12]). Pour obtenir une borne inférieure la méthode de Newton est utilisée aussi que des méthodes de point fixe pour des ordres supérieurs et la méthode de Laguerre. En revanche, pour obtenir une borne supérieure le quotient de Rayleigh et l'algorithme qd classique ont été employés (voir [11], [12]).

2.2 Obtention d'une borne inférieure

2.2.1 Méthode de Newton

Pour chercher une borne inférieure nous utilisons la méthode de Newton ou plus généralement, la méthode de point fixe.

On considère $P_n(t)$ le polynôme caractéristique du problème (1.26) tel que :

$$P_n(t) = \det(tI - C_n), \quad (2.1)$$

qui satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$P_n(t) = (t - \alpha_n)P_{n-1}(t) - \beta_n P_{n-2}(t), \quad (2.2)$$

avec $P_{-1} = 0$ et $P_0 = 1$.

Si le coefficient β_n de P_{n-2} est strictement positif, alors d'après le théorème de Favard (voir [23] page 21), ces polynômes sont orthogonaux par rapport à une fonctionnelle linéaire définie positive. Par conséquent, les valeurs propres de la matrice symétrique définie positive C_n sont réelles, positives et distinctes. Les racines de P_n étant réelles et distinctes, celles de P'_n et P''_n sont aussi réelles, distinctes et sont localisées entre $\mu_{1,n}$ et $\mu_{n,n}$. Ainsi P''_n a un signe constant pour $x < \mu_{1,n}$. Donc,

$$\phi_n = -\frac{P_n(0)}{P'_n(0)} < \mu_{1,n}.$$

• Cas Laguerre

À partir de la relation de récurrence à trois termes (1.28), il est facile de vérifier par récurrence sur n que :

$$A_n(0) = (-1)^n \frac{(\alpha + 1)_n}{n!}. \quad (2.3)$$

Comme

$$A'_n(0) = -\left(2 + \frac{\alpha}{n}\right)A'_{n-1}(0) + A_{n-1}(0) - \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right)A'_{n-2}(0), \quad (2.4)$$

nous obtenons par récurrence sur n :

$$A'_n(0) = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)(\alpha+2)_{n-1}}{2(n-1)!}. \quad (2.5)$$

À partir de (2.3) et (2.5) nous obtenons en utilisant la méthode de Newton la borne inférieure suivante :

$$\varphi_n = -\frac{A_n(0)}{A'_n(0)} = \frac{2(\alpha+1)}{n(n+1)}. \quad (2.6)$$

• Cas Gegenbauer

Les $\hat{\mu}_{1,n}$, $n \in \mathbb{R}$ (resp. $\tilde{\mu}_{1,n}$) sont réelles, positives et distincts. Nous allons suivre la même démarche que pour le cas Laguerre. En utilisant la relation de récurrence à trois termes (1.29) (resp. (1.32)), il est facile de vérifier par récurrence sur n que

$$\hat{G}_n(0) = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+n)_n (2n)!} \quad (2.7)$$

$$\text{(resp. } \tilde{G}_n(0) = (-1)^n \frac{(2\alpha+1)_{2n}}{2^{4n}(\alpha+1)_{2n}(\alpha+1)_n}). \quad (2.8)$$

D'autre part nous avons

$$\hat{G}'_n(0) = (-1)^{n-1} \frac{n!(2n^2 + 2n\alpha - 1)}{(2n-1)!(2\alpha+1)(\alpha+n+1)_{n-1}} \quad (2.9)$$

$$\text{(resp. } \tilde{G}'_n(0) = (-1)^{n-1} \frac{(4n+2\alpha-1)_{2n}}{(2^{4n}n!(4n+\alpha-1)_{2n}(2n+\alpha-1)_n}). \quad (2.10)$$

Le rapport $-\frac{\hat{G}_n(0)}{\hat{G}'_n(0)}$ (resp. $-\frac{\tilde{G}_n(0)}{\tilde{G}'_n(0)}$) donne la borne inférieure suivante :

$$\hat{\varphi}_n = \frac{(2\alpha+1)}{2n(2n^2 + 2n\alpha - 1)(\alpha+n)} \quad (2.11)$$

$$\text{(resp. } \tilde{\varphi}_n = \frac{(\alpha+1)}{4n(n+1)(\alpha+n)\alpha+1+n}). \quad (2.12)$$

2.2.2 La méthode de point fixe d'ordre $r+1$

Soit f une fonction telle que $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$.

On considère la suite des fonctions $\{F_r\}_{r \geq 1}$ définie par :

$$F_r(x) = x + \sum_{j=1}^r b_j(x) f^j(x). \quad (2.13)$$

Les fonctions $b_j(x)$ sont telles que : si \hat{x} est un zéro simple de f , alors $F_r^{(m)}(\hat{x}) = 0$, $m = 1, \dots, r$.

Par conséquent, pour le calcul de \hat{x} , la méthode de point fixe est d'ordre $r+1$. Dans ce cas nous donnons l'expression de F_r :

$$F_r(x) = x - \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^j}{j!} f^j(x) \left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{j-1} \frac{1}{f'(x)}, \quad (2.14)$$

où

$$\left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{j-1} = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{j-2}, \quad \forall j \geq 2. \quad (2.15)$$

Nous présentons maintenant quelques propriétés :

Propriété 1. ([10])

i) $b'_j(x) = -(j+1)f'(x)b_{j+1}(x)$,

ii) $F'_r(x) = -(r+1)(f'(x))^r b_{r+1}(x) = (f(x))^r b'_r(x)$.

Dans le cas particulier où f est un polynôme de degré n , tel que toutes ses racines sont distinctes et réelles, nous donnons le théorème suivant qui nous permet d'obtenir une borne inférieure du plus petit zéro $\mu_{1,n}$.

Théorème 15. ([10])

Soit $f \in \mathcal{P}_n$, ses racines sont toutes distinctes et réelles.

On considère que f est unitaire, $f = \prod_{i=1}^n (x - \beta_i)$ avec

$$\beta_i < \beta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Alors

1) $f(x) \left(\frac{d^j}{dx^j} \right) b_{2k+1}(x) > 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ et $\forall k \geq 0$, pour tout $x < \beta_1$.

2) $\left(\frac{d^j}{dx^j} \right) b_{2k}(x) > 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ et $\forall k \geq 1$, pour tout $x < \beta_1$.

3) $F_r^{(1)}(x) > 0$, $\forall k \geq 1$, pour tout $x < \beta_1$.

4) Pour x fixé, $x < \beta_1$, alors $\beta_1 > F_{r+1}(x) > F_r(x)$, $\forall r \geq 1$.

Donc nous en déduisons que la suite $F_r(x)_{r \geq 1}$, converge vers $\beta_1, \forall x < \beta_1$.

Théorème 16. ([10])

Sous les conditions du théorème précédent, $\forall x < \beta_1$ alors $\lim_{r \rightarrow \infty} F_r(x) = \beta_1$.

La suite $F_r(x)_{r \geq 1}$ ne peut pas être utilisée dans les algorithmes numériques pour obtenir une approximation numérique de β_1 , car elle ne converge pas rapidement, en revanche on peut utiliser cette suite ou la suite extraite $\{F_r(x)\}_{r \geq 1}^k$ pour obtenir une expression formelle de la borne inférieure de β_1 . Par conséquent, si $\beta_1 > 0$ et si les dérivées d'ordre j de f en 0 sont connues pour $j = 0, \dots, k$, alors $F_k(0)$ est une borne inférieure intéressante de β_1 .

• **Dans le cas Laguerre**

D'après (6, [12]) nous avons :

$$A_n(0) = (-1)^n \frac{(\alpha + 1)_n}{n!}, \quad (2.16)$$

$$A'_n(0) = (-1)^{n-1} \frac{(\alpha + 2)_{n-1}(n+1)}{2(n-1)!}, \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (2.17)$$

Nous donnons la forme générale des dérivées $D^j A_n(0)$, $j \geq 2$ (voir [12]) :

$$D^j A_n(0) = (-1)^{n-j} \frac{(\alpha + j + 1)_{n-j}(n+1)}{(n-j)! 2^j \prod_{\ell=1}^j (2\ell - 1)(\alpha + j - 1)_{j-1}} v_j(n),$$

avec $v_j(n)$ est un polynôme de degré $j - 1$ en n .

Nous donnons ses premières expressions :

$$\begin{aligned} v_2(n) &= 2(6 + \alpha) + 3(2 + \alpha)n, \\ v_3(n) &= 36(20 + \alpha) + 3(200 + 86\alpha + 5\alpha^2)n + 15(2 + \alpha)(4 + \alpha)n^2, \\ v_4(n) &= -8(-15120 + 2244\alpha + 196\alpha^2 + 7\alpha^3) \\ &\quad - 2(-65520 - 17244\alpha + 308\alpha^2 + 35\alpha^3)n \\ &\quad + 3(15120 + 9316\alpha + 1428\alpha^2 + 35\alpha^3)n^2 + 105(2 + \alpha)(4 + \alpha)(6 + \alpha)n^3, \end{aligned}$$

...etc.

Donc les nouvelles bornes inférieures de $\mu_{1,n}$ sont :

$$\begin{aligned}
F_2(0) &= \frac{2(1+\alpha)}{n(n+1)} \left(\frac{(7+3\alpha)}{2(3+\alpha)} - \frac{(1+\alpha)(2n\alpha+6+\alpha)}{3(2+\alpha)_2 n(n+1)} \right), \\
F_3(0) &= \frac{2(1+\alpha)}{n(n+1)} \left(\frac{(327+329\alpha+109\alpha^2+11\alpha^3)}{6(3+\alpha)^2(5+\alpha)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{R_3(n)}{90(2+\alpha)_2(2+\alpha)_4 n^2(n+1)^2} \right), \\
F_4(0) &= \frac{2(1+\alpha)}{n(n+1)} \left(\frac{(13896+29887\alpha+12430\alpha^2+3600\alpha^3+490\alpha^4+25\alpha^5)}{12(3+\alpha)^2(5+\alpha)(7+\alpha)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{R_4(n)}{3780((2+\alpha)_2)^2(2+\alpha)_6 n^3(n+1)^3} \right),
\end{aligned}$$

avec $R_3(n)$ est un polynôme de degré 3 en n et $R_4(n)$ est un polynôme de degré 5 en n .

...etc.

• Cas Gegenbauer

D'après (6, [12]) on a :

$$\begin{aligned}
\hat{G}_n(0) &= (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+2n)_n} n!, \\
\hat{G}'_n(0) &= (-1)^{n-1} \frac{(\alpha+2)_{n-1}(n+1)}{2(n-1)!}, \quad \text{pour } n \geq 1.
\end{aligned}$$

On donne la forme générale des dérivées $D^j \hat{G}_n(0)$, $j \geq 2$ (voir [10]) :

$$D^j \hat{G}_n(0) = (-1)^{n-j} \frac{(\alpha+j+1)_{n-j}(n+1)}{(n-j)! 2^j \prod_{\ell=1}^j (2\ell-1)(\alpha+j-1)_{j-1}} v_j(n),$$

avec $v_j(n)$ est un polynôme de degré $j-1$ en n . Nous donnons ses premières expressions :

$$\begin{aligned}
v_2(n) &= 2(6+\alpha) + 3(2+\alpha)n, \\
v_3(n) &= 36(20+\alpha) + 3(200+86\alpha+5\alpha^2)n + 15(2+\alpha)(4+\alpha)n^2, \\
v_4(n) &= -8(-15120+2244\alpha+196\alpha^2+7\alpha^3) \\
&\quad -2(-65520-17244\alpha+308\alpha^2+35\alpha^3)n \\
&\quad +3(15120+9316\alpha+1428\alpha^2+35\alpha^3)n^2 + 105(2+\alpha)(4+\alpha)(6+\alpha)n^3,
\end{aligned}$$

...etc.

Donc les nouvelles bornes inférieures de $\hat{\mu}_{1,n}$ sont :

$$\begin{aligned}
 F_2(0) &= \frac{2(1+\alpha)}{n(n+1)} \left(\frac{(7+3\alpha)}{2(3+\alpha)} - \frac{(1+\alpha)(2n\alpha+6+\alpha)}{3(2+\alpha)_2 n(n+1)} \right), \\
 F_3(0) &= \frac{2(1+\alpha)}{n(n+1)} \left(\frac{(327+329\alpha+109\alpha^2+11\alpha^3)}{6(3+\alpha)^2(5+\alpha)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R_3(n)}{90(2+\alpha)_2(2+\alpha)_4 n^2(n+1)^2} \right), \\
 F_4(0) &= \frac{2(1+\alpha)}{n(n+1)} \left(\frac{(13896+29887\alpha+12430\alpha^2+3600\alpha^3+490\alpha^4+25\alpha^5)}{12(3+\alpha)^2(5+\alpha)(7+\alpha)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{R_4(n)}{3780((2+\alpha)_2)^2(2+\alpha)_6 n^3(n+1)^3} \right),
 \end{aligned}$$

avec $R_3(n)$ est un polynôme de degré 3 en n et $R_4(n)$ est un polynôme de degré 5 en n ,

...etc.

2.2.3 La méthode de Laguerre

Nous pouvons aussi utiliser la méthode de Laguerre pour obtenir une borne inférieure de la plus petite racine β_1 du polynôme P_n de degré n , qui a des racines toutes réelles. Cette méthode est d'ordre 3.

La méthode de Laguerre est définie par l'équation de point fixe $x = F(x)$ avec :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= x - \frac{nP_n(x)}{P_n'(x) + \varepsilon_n \sqrt{H_n(x)}}, \quad (2.18) \\
 \text{avec } H_n(x) &= (n-1)^2(P_n'(x))^2 - n(n-1)P_n(x)P_n''(x), \\
 \text{et } \varepsilon_n &= \pm 1.
 \end{aligned}$$

Pour x_0 donné tel que $x_0 < \beta_1$, alors, pour $\varepsilon_n = (-1)^{n-1}$ on a

$$x_0 < F(x_0) < \beta_1.$$

À partir de la définition de H_n et ε_n , il est clair que $F(x_0) > F_1(x_0)$, où $F_1(x_0)$ est donné par la méthode de Newton.

- **Cas Laguerre** on obtient [10] :

$$F(0) = \frac{2(\alpha + 1)}{n + 1 + (n - 1) \sqrt{\frac{(n + 1)(6n(\alpha + 2) + \alpha^2 + \alpha + 6)}{3(\alpha + 2)(\alpha + 3)}}} < \mu_{1,n}. \quad (2.19)$$

- **Cas Gegenbauer** on obtient [10] :

$$F(0) = \frac{2(\alpha + 1)}{2(n + \alpha)(2n^2 + 2n\alpha - 1 + (n - 1) \sqrt{\frac{z_n}{3(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)(\alpha + n)}})} < \hat{\mu}_{1,n}. \quad (2.20)$$

Avec

$$\begin{aligned} z_n = & -71 - 181\alpha - 116\alpha^2 + 52\alpha^3 + 64\alpha^4 + 16\alpha^5 \\ & + 2(1 + 2\alpha)(-13 + 36\alpha + 70\alpha^2 + 34\alpha^3 + 4\alpha^4)n \\ & + 4(32 + 57\alpha + 101\alpha^2 + 72\alpha^3 + 20\alpha^4)n^2 \\ & + 4(-13 + 17\alpha + 88\alpha^2 + 52\alpha^3)n^3 \\ & + 12(3 + 2\alpha)(-1 + 10\alpha)n^4 + 48(3 + 2\alpha)n^5. \end{aligned}$$

2.3 Obtention d'une borne supérieure

Pour obtenir une borne supérieure de la constante de Markov-Bernstein différentes méthodes ont été utilisées :

- La méthode du quotient de Rayleigh avec une approximation du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre, qui nous permet d'obtenir un majorant de la plus petite valeur propre du problème spectral.
- L'algorithme *qd* appliqué à une relation de récurrence à trois termes qui correspond à la matrice de Jacobi tridiagonale.

2.3.1 Quotient de Rayleigh

Nous rappelons tout d'abord que le quotient de Rayleigh est lié à un problème aux valeurs propres généralisé.

Soit le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$Au = \lambda Bu,$$

avec A une matrice symétrique et B une matrice symétrique définie positive.

On définit le quotient de Rayleigh $R_A(x)$ par :

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

(\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

La décomposition de Cholesky de B , donne $B = GG^T$ où G une matrice triangulaire inférieure et G^T est la transposée de G .

Donc

$$Au = \lambda Bu = \lambda GG^T u.$$

D'où

$$G^{-1}A(G^{-1})^T G^T u = \lambda G^T u$$

On pose $\tilde{A} = G^{-1}A(G^{-1})^T$, et $y = G^T u$, \tilde{A} est une matrice symétrique. Le problème aux valeurs propres généralisé devient :

$$\tilde{A}y = \lambda y.$$

Les valeurs propres sont réelles et elles sont ordonnées de la façon suivante :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Puisque il existe une base $\{y_i\}_{i=1}^n$ de vecteurs propres orthonormaux, et comme $y = G^T u$ alors $(Bu_i, u_j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Propriété 2.

$$\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$$

$$\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$$

Preuve :

Dans la base $\{u_i\}_{i=1}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$.

On a

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (Au_i, u_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i x_j (Bu_i, u_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\min_i(\lambda_i) \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq (Ax, x) \leq \max_i(\lambda_i) \sum_{i=1}^n x_i^2$$

et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = (Bx, x)$ d'où le résultat. \square

À présent nous utilisons le quotient de Rayleigh avec une approximation du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre, on obtient ainsi un majorant de la plus petite valeur propre du problème spectral. Nous allons donner par la suite un majorant en utilisant le quotient de Rayleigh dans le cas Laguerre, et le cas Gegenbauer.

• **Cas Laguerre** (voir [10])

Dans le cas Laguerre nous obtenons pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$

$$y^T A_n y = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sqrt{\frac{i+\alpha}{i}} y_i + y_{i+1} \right)^2 + \frac{n+\alpha}{n} y_n^2. \quad (2.21)$$

Choisissons le vecteur y tel que :

$$y_i = \begin{cases} (-1)^i i & \text{si } i < \rho_n = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \\ (-1)^i (2\rho_n - i) & \text{si } \rho_n \leq i \leq 2\rho_n. \end{cases} \quad (2.22)$$

Nous remarquons que $y_{n+1} = 0$ si n est impair.

Le quotient de Rayleigh ρ_{A_n} de A_n est donné par

$$\rho_{A_n}(y) = \frac{y^T A_n y}{y^T y}, \forall y \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \quad (2.23)$$

Pour le vecteur donné par (2.22), nous avons :

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^{\rho_n} i^2 + \sum_{i=1}^{\rho_n-1} i^2 = \frac{\rho_n(2\rho_n^2 + 1)}{3}.$$

Le numérateur correspondant à ρ_{A_n} est :

$$\begin{aligned} y^T A_n y &= \sum_{i=1}^{\rho_n-1} (\sqrt{(i+\alpha)i} - i - 1)^2 + \sum_{j=1}^{\rho_n-1} \left(\sqrt{\frac{(2\rho_n - j + \alpha)}{2\rho_n - j}} j - j - 1 \right)^2. \\ &= \sum_{i=1}^{\rho_n-1} \xi_i + \sum_{j=1}^{\rho_n} \sigma_j. \end{aligned}$$

Comme

$$\sqrt{(i+\alpha)i} = (i+\alpha/2) \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{(2i+\alpha)^2}} \geq (i+\alpha/2) \left(1 - \frac{\alpha^2}{(2i+\alpha)^2} \right),$$

nous obtenons

$$\xi_i = i(i + \alpha) + (i + 1)^2 - 2(i + 1)\sqrt{i(i + \alpha)} \leq 1 - \alpha + \alpha^2/2 + \frac{\alpha^2(2 - \alpha)}{2(2i + \alpha)}.$$

de la même façon, nous avons

$$\sigma_j = \frac{1}{2\rho_n - j}((2\rho_n - j + \alpha)j^2 + (2\rho_n - j)(j - 1)^2 - 2j(j - 1)\sqrt{(2\rho_n - j)(2\rho_n - j + \alpha)})$$

et

$$\sqrt{(2\rho_n - j)(2\rho_n - j + \alpha)} \geq (2\rho_n - j + \alpha/2) - \frac{\alpha^2}{2(4\rho_n - 2j + \alpha)}.$$

Donc

$$\sigma_j \leq 1 + \frac{\alpha(\alpha - 2)}{2} + \frac{4\rho_n^2\alpha}{2\rho_n - j} - \frac{8\rho_n^2\alpha}{4\rho_n - 2j + \alpha} - \frac{\alpha(8(\rho_n(\alpha - 1) + \alpha(\alpha - 2)))}{2(4\rho_n - 2j + \alpha)}$$

Nous utilisons maintenant les inégalités suivantes. Soit a un réel fixé. Si $a + x > 0$ pour $x \in [\ell - 1, k + 1]$, $\ell, k \in \mathbb{N}$, alors

$$\ln \frac{a + k + 1}{a + \ell} = \int_{\ell}^{k+1} \frac{dx}{a + x} \leq \sum_{i=\ell}^k \frac{1}{a + i} \leq \int_{\ell-1}^k \frac{dx}{a + x} = \ln \frac{a + k}{a + \ell - 1}.$$

Donc en utilisant ces inégalités, nous obtenons $\sum_{i=1}^{\rho_n-1} \xi_i \leq \Phi_n$ et $\sum_{j=1}^{\rho_n} \leq \Psi_n$.
Finalement

$$\mu_{1,n} = \min_{y \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \rho_{A_n}(y) \leq \frac{3(\Phi_n + \Psi_n)}{\rho_n(2\rho_n^2 + 1)}.$$

D'après [12], page 217, on remarque que $\Phi_n = O(\rho_n)$ et $\Psi_n = O(\rho_n)$. Par conséquent $\mu_{1,n} = O(\frac{1}{n^2})$.

• **Cas Gegenbauer** [10]

i) Pour obtenir la borne supérieure, nous allons utiliser le quotient de Rayleigh ρ_j de \hat{J} . Son numérateur est

$$\begin{aligned} y^T \hat{J} y &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2i-1} \sqrt{\frac{k_{2i-1}}{k_{2i-2}}} y_i + \frac{e_{2i}^\alpha}{2i-1} \sqrt{\frac{k_{2i-1}}{k_{2i}}} y_{i+1} \right)^2 + \frac{1}{(2n-1)^2} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n-2}} y_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sqrt{\frac{i-1+\alpha}{2(2i-1)(2i+\alpha-1)_2}} y_i + \sqrt{\frac{i}{2(2i+\alpha)_2(2i+2\alpha-1)}} y_{i+1} \right)^2 + \\ &\quad \frac{n-1+\alpha}{2(2n-1)(2n+\alpha-1)_2} y_n^2. \end{aligned}$$

Choisissons le vecteur y tel que

$$y_i = \begin{cases} i^2 & \text{pour } i \leq \rho_n \\ (2\rho_n - i)^2 & \text{pour } \rho_n \leq i \leq 2\rho_n. \end{cases} \quad (2.24)$$

Puisque $y_{n+1} = 0$ si n est impair, nous pouvons écrire ce numérateur comme

$$\sum_{i=1}^{\rho_n-1} \hat{\xi}_i + \sum_{i=\rho_n}^{2\rho_n-1} \hat{\sigma}_i.$$

Nous avons

$$\hat{\xi}_i \leq \frac{i^4(i + \alpha - 1)}{2(2i - 1)(2i + \alpha - 1)_2} + \frac{i(i + 1)^4}{2(2i + \alpha)_2(2i + 2\alpha - 1)} + \frac{i^2(i + 1)^2\varpi_i}{(2i - 1)(2i + \alpha)_3(2i + 2\alpha - 1)},$$

avec

$$\varpi = \frac{1}{2} \left(4i + \alpha - \frac{\alpha^2}{4i + \alpha} \right) \left(2i - 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{2i - 1 + \alpha} \right) \left(4i - 4 + 3\alpha - \frac{\alpha^2}{4i - 4 + 3\alpha} \right).$$

Et

$$\sigma_i \leq \frac{(i + \alpha - 1)(2\rho - i)^4}{2(2i - 1)(2i + \alpha - 1)_2} + \frac{i(2\rho - 1 - i)^4}{2(2i + \alpha)_2(2i + 2\alpha - 1)} + \frac{(2\rho - i)^2(2\rho - i - 1)^2\varpi_i}{(2i - 1)(2i + \alpha)_3(2i + 2\alpha - 1)}.$$

Le calcul d'une borne supérieure précise est si fastidieux que premièrement, ce travail a été fait avec l'aide de Mathematica, deuxièmement l'expression de cette borne supérieure en utilisant la même technique que celle nous avons faite précédemment est si longue qu'elle est inutilisable, nous avons préféré donc donner un équivalent en $\mathcal{O}(\cdot)$.

Le comportement de $\sum_{i=1}^{\rho_n-1} \hat{\xi}_i$ est celui de

$$\frac{32 - 32\alpha + 11\alpha^2}{128}(\rho_n - 1) + \mathcal{O}(\ln \rho_n).$$

Et le comportement de $\sum_{i=\rho_n}^{2\rho_n-1} \hat{\sigma}_i$ est celui de

$$\frac{32 - 32\alpha + 11\alpha^2}{128}\rho_n + \mathcal{O}(\rho_n).$$

Le dénominateur du quotient de Rayleigh est

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{60} \rho_n (12\rho_n^4 + 45\rho_n^3 + 70\rho_n^2 - 45\rho_n - 22)$$

Par conséquent, le résultat concernant la borne supérieure est :

$$\hat{\mu}_{1,n} \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

ii) Le numérateur du quotient de Rayleigh $\rho_{\tilde{J}}$ de \tilde{J} est

$$\begin{aligned} y^T \tilde{J} y &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{k_{2i}}{k_{2i-1}}} y_i + \frac{e_{2i+1}^\alpha}{2i} \sqrt{\frac{k_{2i}}{k_{2i+1}}} y_{i+1} \right)^2 + \frac{1}{(2n)^2} \frac{k_{2n}}{k_{2n-1}} y_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{i(2i-1+2\alpha)}{2(2i+\alpha)_2}} y_i \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{2i+1}{(2i+\alpha+1)_2} \sqrt{\frac{2(2i+\alpha)(2i+\alpha+1)}{(2i+1)(i+\alpha)}} y_{i+1} \right)^2 + \\ &\quad \frac{2n-1+2\alpha}{8n(2n+\alpha)_2} y_n^2. \end{aligned}$$

Nous faisons le même choix du vecteur y que (2.22) et le numérateur devient :

$$\sum_{i=1}^{\rho_n-1} \frac{\tilde{\xi}_i}{4} + \sum_{i=\rho_n}^{2\rho_n-1} \frac{\tilde{\sigma}_i}{4}.$$

Nous avons

$$\tilde{\xi}_i \leq \frac{i^3(2i+2\alpha-1)}{2(2i+\alpha)_2} + \frac{(2i+1)(i+1)^4}{2(2i+\alpha+1)_2(i+\alpha)} - \frac{i(i+1)^2 \varsigma_i}{(2i+\alpha+1)_3(i+\alpha)},$$

avec

$$\varsigma_i = \frac{1}{8} \left(2i+\alpha - \frac{\alpha^2}{2i+\alpha} \right) \left(4i-2+3\alpha - \frac{\alpha^2}{4i-2+3\alpha} \right) \left(4i-2+\alpha - \frac{\alpha^2}{4i+2+\alpha} \right)$$

et

$$\tilde{\sigma}_i \leq \frac{(2i+2\alpha-1)(2\rho-i)^4}{2i(2i+\alpha)_2} + \frac{(2i+1)(2\rho-1-i)^4}{2(2i+\alpha+1)_2(i+\alpha)} - \frac{(2\rho-i)^2(2\rho-i-1)^2 \varsigma_i}{i(2i+\alpha+1)_3(i+\alpha)}$$

Le comportement de $\sum_{i=1}^{\rho_n-1} \tilde{\xi}_i$ est celui de

$$\frac{32-32\alpha+11\alpha^2}{128} (\rho_n-1) + \mathcal{O}(\ln \rho_n)$$

et le comportement de $\sum_{i=\rho_n}^{2\rho_n-1} \tilde{\sigma}_i$ est celui de

$$\frac{32 - 32\alpha + 11\alpha^2}{128} \rho_n + \mathcal{O}(\rho_n).$$

Le dénominateur du quotient de Rayleigh est

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{60} \rho_n (12\rho_n^4 + 45\rho_n^3 + 70\rho_n^2 - 45\rho_n - 22).$$

Par conséquent, le résultat concernant la borne supérieure est :

$$\tilde{\mu}_{1,n} \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

2.3.2 L'algorithme qd

L'algorithme qd (quotient-difference algorithm) a été annoncé par E. Stiefel en 1953 et développé par H. Rutishauser.

L'algorithme qd est un outil efficace pour le traitement de nombreux problèmes d'analyse numérique. On utilise l'algorithme qd pour la détermination des pôles d'une fonction méromorphe à partir des coefficients de son développement de Taylor. On applique aussi cet algorithme pour divers problèmes comme le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice, la factorisation d'un polynôme, la détermination de développement d'une fraction continue d'une fonction définie par l'intégrale de Laplace et autres.

Dans ce travail nous utilisons l'algorithme *qd* pour l'obtention des racines d'un polynôme.

Soit $\{P_n^{(0)}\}_{n \geq 0}$ une suite des polynômes unitaires orthogonaux par rapport au produit scalaire $c^{(0)}$ qui satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$P_{m+1}^{(0)}(x) = (x + B_m^{(0)})P_m^{(0)}(x) - C_m^{(0)}P_{m-1}^{(0)}(x), \quad m \geq 0, \quad (2.25)$$

avec $P_{-1}^{(0)} = 0$, $P_0^{(0)} = 1$ et $C_m^{(0)} \neq 0$, $\forall m \geq 1$.

On pose :

$$B_m^{(0)} = -q_{m+1}^{(0)} - e_m^{(0)}, \quad \forall m \geq 0, \quad (2.26)$$

$$C_m^{(0)} = q_m^{(0)} e_m^{(0)}, \quad \forall m \geq 1, \quad (2.27)$$

avec $e_0^{(0)} = 0$.

Nous obtenons des suites des polynômes unitaires $\{P_n^{(r+1)}\}_{n \geq 0}$, $\forall r \in \mathbb{N}$, orthogonaux unitaires par rapport au produit scalaire $c^{(r+1)}$ déduit de $c^{(0)}$ et défini par :

$$c^{(r+1)}(\cdot) = c^{(0)}(x^{r+1}\cdot).$$

Ces polynômes satisfont la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$P_{m+1}^{(r+1)}(x) = (x + B_m^{(r+1)})P_m^{(r+1)}(x) - C_m^{(r+1)}P_{m-1}^{(r+1)}(x), \quad m \geq 0, \quad (2.28)$$

avec $P_{-1}^{(r+1)} = 0$, $P_0^{(r+1)} = 1$, et

$$B_m^{(r+1)} = -q_{m+1}^{(r)} - e_{m+1}^{(r)} = -q_{m+1}^{(r+1)} - e_m^{(r+1)} \quad \forall m \geq 0, \quad (2.29)$$

$$C_m^{(r+1)} = q_{m+1}^{(r)}e_m^{(r)} = q_m^{(r+1)}e_m^{(r+1)}, \quad \forall m \geq 1, \quad (2.30)$$

avec $e_0^{(r+1)} = 0$.

Les relations de l'algorithme qd sont :

$$\begin{aligned} q_{m+1}^{(r)} + e_{m+1}^{(r)} &= q_{m+1}^{(r+1)} + e_m^{(r+1)}, \quad \forall m \geq 0, \\ q_{m+1}^{(r)}e_m^{(r)} &= q_m^{(r+1)}e_m^{(r+1)}, \quad \forall m \geq 1, \\ \text{avec } e_0^{(r+1)} &= 0. \end{aligned}$$

Théorème 17. ([10])

Soit $\{P_m\}_{m=0}^n$ une suite des polynômes unitaires satisfaisant la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$P_{m+1}(x) = (x + B_m)P_m(x) - C_mP_{m-1}(x), \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (2.31)$$

avec $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$ et $C_m \neq 0$, $m = 0, \dots, n-1$.

On pose :

$$B_m = -q_{m+1} - e_m, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (2.32)$$

$$C_m = q_m e_m, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad (2.33)$$

avec $e_0 = 0$.

Donc les deux relations suivantes sont équivalentes :

(1) Toutes les racines de P_n sont réelles, distinctes et strictement positives et $C_m > 0$, $m = 1, \dots, n$.

(2) $q_{m+1} > 0$ pour $m = 0, \dots, n-1$ et $e_m > 0$ pour $m = 1, \dots, n-1$.

Corollaire 1. [12]

Sous les conditions du théorème précédent, et si toutes les racines de P_n sont strictement positives, distinctes, réelles et $C_m > 0$, $m = 1, \dots, n$, alors $\det M_m^{(r)} > 0$, $m = 1, \dots, n$. (M_m est la matrice de Hankel (voir [10])). De plus si les moments c_i , $i \geq 2n$, sont choisis tels que $c^{(0)}(x^\ell P_n(x)) = 0$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq n$ alors $P_n^{(1)} = P_n$.

D'après le corollaire précédent, il est clair que les fonctionnelles linéaires $c^{(r)}$ définies par :

$$c^{(r)}(\cdot) = c^{(0)}(x^r \cdot), \quad \forall r \in \mathbb{N},$$

sont telles que $P_n^{(r)} = P_n$, $\forall r \in \mathbb{N}$, et $\det M_m^{(r)} > 0$, $m = 1, \dots, n$.

Tous les polynômes satisfont la relation suivante (voir [4]) :

$$P_m^{(r+1)}(x) = P_m^{(r)}(x) - e_m^{(r)} P_m^{(r-1)}(x), \quad m = 1, \dots, n-1. \quad (2.34)$$

Pour $m = n$, $e_n^{(r)} = 0$, $\forall r \in \mathbb{N}$.

Par conséquent les relations suivantes sont satisfaites $\forall r \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{m+1}^{(r)} > 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \\ e_m^{(r)} > 0, \quad m = 1, \dots, n, \\ e_0^{(r)} = e_N^{(r)} = 0. \end{array} \right.$$

Corollaire 2. [12]

Sous les conditions du théorème 17, et si toutes les racines de P_n sont strictement positives, distinctes, réelles et $C_m > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, n$, et si les moments c_i pour $i \geq 2n$, sont choisis tels que $c^{(0)}(x^\ell P_n(x)) = 0$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq n$, alors les suites $\{q_1^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ et $\{q_n^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante.

On note β_1 (resp. β_n) la plus petite (resp. la plus grande) racine de P_n , alors :

$$\begin{aligned} \beta_1 &< q_n^{(r+1)} < q_n^{(r)} \\ \beta_n &> q_1^{(r+1)} > q_1^{(r)} \end{aligned}$$

Maintenant nous allons traiter les cas de la mesure de Laguerre et de la mesure de Gegenbauer pour obtenir une borne supérieure de la constante de Markov-Bernstein en utilisant l'algorithme qd.

- **Cas Laguerre**

À partir de la relation (1.28) nous obtenons :

$$\begin{cases} q_j^{(0)} = \frac{j+\alpha}{j}, \text{ pour } j = 1, \dots, n, \\ e_j^{(0)} = 1, \text{ pour } j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

En utilisant les relations (2.29) et (2.30) nous obtenons les coefficients $q_j^{(r+1)}$ et $e_j^{(r+1)}$ d'ordre $r+1$, $r \geq 0$ (voir [10]).

Nous donnons maintenant l'expression de $q_j^{(r)}$ et $e_j^{(r)}$ pour $1 \leq r \leq 4$:

$$q_j^{(r)} = \frac{(j + \alpha + r)P^{(r-1)}(\alpha, j-1)P^{(r)}(\alpha, j)}{(j + [\frac{r}{2}])P^{(r-1)}(\alpha, j)P^{(r)}(\alpha, j-1)}, \text{ pour } j = 1, \dots, n - [\frac{r+1}{2}],$$

$$e_j^{(r)} = \frac{jP^{(r-1)}(\alpha, j-1)P^{(r)}(\alpha, j-1)}{(j + [\frac{r+1}{2}])P^{(r-1)}(\alpha, j)P^{(r)}(\alpha, j)}, \text{ pour } j = 1, \dots, n - 1 - [\frac{r}{2}],$$

où $P^{(k)}(\alpha, i)$ est un polynôme qui dépend de k , i et α .

Les coefficients $q_j^{(r)}$, pour $j = n + 1 - [\frac{r+1}{2}], \dots, n$, et $e_j^{(r)}$, pour $j = n - [\frac{r}{2}], \dots, n - 1$, ont des expressions particulières.

Nous citons aussi les premiers polynômes de $P^{(r)}(\alpha, j)$ pour $j = 1, \dots, n$ et $1 \leq r \leq 4$.

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\alpha, j) &= 1, \\ P^{(2)}(\alpha, j) &= j(\alpha + 2) + (\alpha + 3), \\ P^{(3)}(\alpha, j) &= j^2(\alpha + 2)^2(\alpha + 4) + j(\alpha + 2)(2\alpha^2 + 17\alpha + 32) + (\alpha + 3)_3, \\ P^{(4)}(\alpha, j) &\text{ est un polynôme de degré 4 en } j. \end{aligned}$$

Donc les coefficients $q_j^{(r)}$ pour $1 \leq r \leq 4$ sont les suivants :

$$\begin{aligned} q_n^{(1)} &= \frac{(\alpha + 1)}{n}, \\ q_n^{(2)} &= \frac{(\alpha + 1)_3}{(\alpha + 1 + n)P^{(2)}(\alpha, n-1)}, \\ q_n^{(3)} &= \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 4)_2 P^{(2)}(\alpha, n-1)}{h^{(3)}(\alpha, n)}, \\ q_n^{(4)} &= \frac{(\alpha + 1)_3(\alpha + 6)_2 h^{(3)}(\alpha, n)}{h^{(4)}(\alpha, n)}, \end{aligned}$$

où $h^{(3)}(\alpha, n)$ est un polynôme de degré 3 en n , et $h^{(4)}(\alpha, n)$ est un polynôme de degré 5 en n .

On remarque donc que $q_n^{(2)}$ est équivalent à $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$, alors

$$q_n^{(2)} = \frac{(\alpha + 1)_3}{(\alpha + 1 + n)(n-1)(\alpha + 2) + (\alpha + 3)}$$

est une bonne borne supérieure de β_1 dans le cas de la mesure de Laguerre.

• **Cas de Gegenbauer**

Il est suffisant d'appliquer l'algorithme qd à la famille des polynômes \hat{G}_k , car si on remplace j par $j + \frac{1}{2}$ dans les différents coefficients $\hat{q}_j^{(r)}$ et $\hat{e}_j^{(r)}$ associés à \hat{G}_k , nous obtenons les coefficients $\tilde{q}_j^{(r)}$ et $\tilde{e}_j^{(r)}$ associés à \tilde{G}_k .

À partir de la relation de récurrence à trois termes (1.29) on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{q}_j^{(0)} &= \frac{(j + \alpha - 1)}{2(2j - 1)(2j + \alpha - 2)_2}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n, \\ \hat{e}_j^{(0)} &= \frac{j}{2(2j + 2\alpha - 1)(2j + \alpha - 1)_2}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n - 1.\end{aligned}$$

Maintenant nous donnons la forme générale de $\hat{q}_j^{(r)}$ pour $j = 1, \dots, n - [\frac{(r+1)}{2}]$, et de $\hat{e}_j^{(r)}$ pour $j = 1, \dots, n - 1 - [\frac{r}{2}]$, avec $1 \leq r \leq 4$:

$$\begin{aligned}\hat{q}_j^{(r)} &= \frac{(j + \alpha + r - 1)(2j + 2\alpha + 2r - 1)}{2(2j - 1 + [r/2])(2j + \alpha + r - 2)_2(2j - 1 + 2\alpha + 2[r/2])} \\ &\quad \times \frac{\hat{P}^{(r-1)}(\alpha, j - 1)\hat{P}^{(r)}(\alpha, j)}{\hat{P}^{(r-1)}(\alpha, j)\hat{P}^{(r)}(\alpha, j - 1)}, \\ \hat{e}_j^{(r)} &= \frac{j(2j - 1)}{2(2j + 1 + 2[(r - 1)/2])(2j + \alpha + r - 2)_2(2j + 1 + 2\alpha + 2[(r - 1)/2])} \\ &\quad \times \frac{\hat{P}^{(r-1)}(\alpha, j + 1)\hat{P}^{(r)}(\alpha, j - 1)}{\hat{P}^{(r-1)}(\alpha, j)\hat{P}^{(r)}(\alpha, j)}.\end{aligned}$$

Les premiers polynômes $\hat{P}^{(r)}(\alpha, j)$, pour $j = 1, \dots, n$, et $1 \leq r \leq 4$ sont :

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(1)}(\alpha, j) &= 1, \\ \hat{P}^{(2)}(\alpha, j) &= (2\alpha + 1)(5 + 2\alpha) + 4(2 + \alpha)(3 + 2\alpha)j + 4(3 + 2\alpha)j^2, \\ \hat{P}^{(3)}(\alpha, j) &\quad \text{est un polynôme de degré 4 en } j.\end{aligned}$$

Les coefficients $\hat{q}_j^{(r)}$ pour $1 \leq r \leq 4$ sont :

$$\begin{aligned}\hat{q}_n^{(1)} &= \frac{(2\alpha + 1)}{2(2n - 1)(\alpha - 1 + 2n)(2\alpha - 1 + 2n)}, \\ \hat{q}_n^{(2)} &= \frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)}{2(\alpha + n)(2\alpha + 2n + 1)\hat{P}^{(2)}(\alpha, n - 1)}, \\ \hat{q}_n^{(3)} &= \frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 7)(2\alpha + 9)\hat{P}^{(2)}(\alpha, n - 1)}{2h^{(3)}(\alpha, n)}, \\ \hat{q}_n^{(4)} &= \frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)(2\alpha + 11)(2\alpha + 13)\hat{h}^{(3)}(\alpha, n)}{2\hat{h}^{(4)}(\alpha, n)},\end{aligned}$$

avec $\hat{h}^{(3)}(\alpha, n)$ est un polynôme de degré 6 en n , et $\hat{h}^{(4)}(\alpha, n)$ est un polynôme de degré 10 en n .

On remarque donc que $\hat{q}_n^{(2)}$ est équivalent à $\mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$, alors

$$\hat{q}_n^{(2)} = \frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)}{2(\alpha + n)(2\alpha + 2n + 1)} \times \frac{1}{(2\alpha + 1)(5 + 2\alpha) + 4(2 + \alpha)(3 + 2\alpha)(n - 1) + 4(3 + 2\alpha)(n - 1)^2}$$

est une bonne borne supérieure de β_1 dans le cas de la mesure de Gegenbauer.

Chapitre 3

Généralisation de l'algorithme qd

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner une généralisation de l'algorithme qd liée à une matrice à largeur de bande ℓ . Tout d'abord, nous développons l'algorithme qd qui permettra de construire une borne supérieure de la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique définie positive à largeur de bande ℓ . Comme application à cet algorithme, nous cherchons une borne supérieure de la constante de Markov Bernstein dans le cas de la mesure de Jacobi.

Ensuite, nous développons l'algorithme qd par blocs appliqué aux cas des matrices tridiagonales par blocs.

Enfin, nous généralisons l'algorithme qd par blocs pour des matrices par blocs à largeur de bande ℓ .

3.2 Cas d'une matrice à largeur de bande ℓ

Nous rappelons tout d'abord qu'une matrice symétrique définie positive $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ de taille $n \times n$ à demi largeur de bande ℓ est définie par :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i - j| > \ell \text{ telle que } a_{i+\ell,i} \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

D'autre part, nous décrivons le fonctionnement de l'algorithme LR qui nous permettra dans la suite de construire une généralisation de l'algorithme qd. Nous commençons par poser $A = A_1$, où A_1 est une matrice donnée, puis nous décomposons A_1 en utilisant la décomposition LU, donc nous avons $A_1 = L_1 R_1$ où L_1 est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et R_1 est une matrice triangulaire supérieure.

Ensuite nous multiplions L_1 et R_1 dans l'ordre inverse : $A_2 = R_1 L_1$. Ceci nous donne une nouvelle matrice A_2 qui possède les mêmes valeurs propres que A_1 , car $A_2 = R_1 A_1 R_1^{-1}$ (ie. A_2 et A_1 sont semblables). Nous traitons A_2 de la même manière que A_1 . Nous obtenons une suite des matrices $A_1, A_2, A_3 \dots$. Sous certaines conditions A_k converge quand $k \rightarrow \infty$ vers une matrice triangulaire supérieure telle que ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de la matrice A . (voir [34], [43], [44])

Nous posons $A_n^{(0)} = A_n$.

Soit $J_n^{(0)} = T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1}$ une matrice à largeur de bande, ses éléments sont notés $\hat{a}_{i,j}^{(0)}$ pour $i, j = 1, \dots, n$.

$T_n^{(0)}$ est une matrice diagonale régulière, ses éléments sont notés

$$t_i^{(0)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Nous appliquons l'algorithme LR à $J_n^{(0)}$, alors

$$\begin{aligned} J_n^{(0)} &= L_n^{(0)} U_n^{(0)}, \\ U_n^{(k-1)} L_n^{(k-1)} = J_n^{(k)} &= L_n^{(k)} U_n^{(k)}, \quad \forall k \geq 1, \end{aligned}$$

où $L_n^{(k)} U_n^{(k)}$ est la décomposition LU de $J_n^{(k)}$, $\forall k \geq 0$.

Théorème 18.

Les éléments de $U_n^{(k)}$ notés par $q_{i,i}^{(k)}$ sont tous positifs, et la suite $\{q_{1,1}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $\{q_{n,n}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$) est strictement croissante (resp. décroissante).

Preuve.

Nous commençons par transformer A_n en une matrice semblable à largeur de bande notée J_n . La matrice J_n est définie par

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1},$$

telle que ses éléments sont notés $\hat{a}_{i,j}^{(0)}$, pour $i, j = 1, \dots, n$.

$T_n^{(0)}$ une matrice diagonale régulière de taille $n \times n$ telle que ses éléments diagonaux sont notés $t_i^{(0)}$. Cette matrice est choisie telle que

$$\hat{a}_{i,i+\ell}^{(0)} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

Par identification nous obtenons

$$\hat{a}_{i,j}^{(0)} = a_{i,j}^{(0)} \frac{t_i^{(0)}}{t_j^{(0)}}, \text{ pour } i, j = 1, \dots, n,$$

et

$$a_{i,i+\ell}^{(0)} \frac{t_i^{(0)}}{t_{i+\ell}^{(0)}} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

Les ℓ premiers $t_i^{(0)}$, pour $i = 1, \dots, \ell$, peuvent être arbitraires, fixés et non nuls. Et les $n - \ell$ derniers $t_i^{(0)}$, pour $i = \ell + 1, \dots, n$, sont déterminés d'une façon unique.

Les matrices $J_n^{(0)}$ et $A_n^{(0)}$ ont les mêmes mineurs principaux, qui sont non nuls. Par conséquent $J_n^{(0)}$ admet une unique décomposition LU , notée $L_n^{(0)} U_n^{(0)}$. $L_n^{(0)}$ est une matrice bande triangulaire inférieure à diagonale unité, ses éléments sont notés $e_{i,j}^{(0)}$ tels que

$$\begin{cases} e_{i,i}^{(0)} &= 1, \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\ e_{i,j}^{(0)} &= 0, \text{ pour } i - j > \ell. \end{cases}$$

$U_n^{(0)}$ est une matrice bande triangulaire supérieure, ses éléments sont notés $q_{i,j}^{(0)}$ et sont tels que

$$\begin{cases} q_{i,j}^{(0)} &= 0 \text{ pour } j - i > \ell, \\ q_{i,i+\ell}^{(0)} &= 1 \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell. \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que l'application de l'algorithme LR à $J_n^{(0)}$ est une généralisation de l'algorithme qd (voir [34]).

On pose $J_n^{(1)} = U_n^{(0)} L_n^{(0)}$.

$J_n^{(1)}$ peut être aussi transformé en une matrice bande symétrique définie positive semblable à $A_n^{(1)}$. En fait on utilise la matrice diagonale régulière $T_n^{(1)}$ dont les éléments sont notés $t_i^{(1)}$ pour $i = 1, \dots, n$. Il est suffisant de démontrer que $A_n^{(1)} = (T_n^{(1)})^{-1} J_n^{(1)} T_n^{(1)}$ est symétrique, car ses valeurs propres sont celles de $A_n^{(0)}$ qui sont positives ou égales à zéro.

On décompose $A_n^{(0)}$ par la décomposition de Cholesky, donc

$$A_n^{(0)} = G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T,$$

où $G_n^{(0)}$ est une matrice bande triangulaire inférieure, ses éléments sont notés $g_{i,j}^{(0)}$.

Par conséquent

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}.$$

Donc les éléments diagonaux de $T_n^{(0)} G_n^{(0)}$ sont $t_i^{(0)} g_{ii}^{(0)}$ pour $i = 1, \dots, n$.

On pose $t_i^{(1)} = t_i^{(0)} g_{ii}^{(0)}$ pour $i = 1, \dots, n$. On a

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1} T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}.$$

Comme $T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1}$ est une matrice bande triangulaire inférieure à diagonale unité, et d'après l'unicité de la décomposition LU , on pose

$$L_n^{(0)} = T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1},$$

et

$$U_n^{(0)} = T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}.$$

Par conséquent

$$J_n^{(1)} = U_n^{(0)} L_n^{(0)} = T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1},$$

et

$$A_n^{(1)} = (G_n^{(0)})^T G_n^{(0)}.$$

Donc $A_n^{(1)}$ est une matrice bande symétrique définie positive.

On note maintenant $\hat{a}_{i,j}^{(1)}$ les éléments de $J_n^{(1)}$, tels que

$$\hat{a}_{i,i+\ell}^{(1)} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

Soit $L_n^{(1)}U_n^{(1)}$ la décomposition LU de $J_n^{(1)}$.

On pose encore $J_n^{(2)} = U_n^{(1)}L_n^{(1)}$.

Comme précédemment la matrice diagonale régulière $T_n^{(2)}$ peut être déterminée telle que $A_n^{(2)} = (T_n^{(2)})^{-1}J_n^{(2)}T_n^{(2)}$ soit symétrique définie positive, et le processus continuera pour chaque étape k .

$$U_n^{(k-1)}L_n^{(k-1)} = J_n^{(k)} = L_n^{(k)}U_n^{(k)},$$

et $T_n^{(k)}$ est déterminée telle que $A_n^{(k)} = (T_n^{(k)})^{-1}J_n^{(k)}T_n^{(k)}$ est symétrique définie positive.

On note $e_{i,j}^{(k)}$ (resp. $q_{i,j}^{(k)}$) les éléments de $L_n^{(k)}$ (resp. $U_n^{(k)}$) et on note $\hat{a}_{i,j}^{(k)}$ les éléments de $J_n^{(k)}$.

On en déduit donc les relations de la généralisation de l'algorithme qd :

Pour $1 \leq i \leq n$ et $\max(1, i - \ell) \leq j \leq \min(i + \ell, n)$,

$$\sum_{m=\max(i-\ell, j-\ell, 1)}^{\min(i, j)} e_{i,m}^{(k)} q_{m,j}^{(k)} = \sum_{m=\max(i, j)}^{\min(i+\ell, j+\ell, n)} q_{i,m}^{(k-1)} e_{m,j}^{(k-1)}, \quad \forall k \geq 1$$

avec $e_{i,i}^{(k)} = 1$ pour $i = 1, \dots, n, \forall k \in \mathbb{N}$.

$e_{i,j}^{(k)} = 0$ pour $i - j > \ell, \forall k \in \mathbb{N}$.

$q_{i,i+\ell}^{(k)} = 1$ pour $i = 1, \dots, n - \ell, \forall k \in \mathbb{N}$.

$q_{i,j}^{(k)} = 0$ pour $j - i > \ell, \forall k \in \mathbb{N}$.

$A_n^{(k)}$ et $U_n^{(k)}$ ont les mêmes mineurs principaux du même ordre, et ils sont positifs. Alors on peut en déduire que $q_{i,i}^{(k)} > 0$, pour $i = 1, \dots, n, \forall k \in \mathbb{N}$.

Nous allons démontrer que $\hat{a}_{i+\ell, i}^{(k)} > 0$ et $e_{i+\ell, i}^{(k)} > 0$, pour $i = 1, \dots, n - \ell, \forall k \in \mathbb{N}$.

Puisque

$$\hat{a}_{i+\ell, i}^{(0)} = a_{i+\ell, i}^{(0)} \frac{t_{i+\ell}^{(0)}}{t_i^{(0)}},$$

et

$$a_{i, i+\ell}^{(0)} \frac{t_i^{(0)}}{t_{i+\ell}^{(0)}} = 1 = a_{i+\ell, i}^{(0)} \frac{t_i^{(0)}}{t_{i+\ell}^{(0)}},$$

alors

$$\hat{a}_{i+\ell,i}^{(0)} = (a_{i+\ell,i}^{(0)})^2 > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

D'où

$$\hat{a}_{i+\ell,i}^{(0)} > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

Et à partir de la relation $J_n^{(0)} = L_n^{(0)} U_n^{(0)}$ nous avons

$$\hat{a}_{i+\ell,i}^{(0)} = e_{i+\ell,i}^{(0)} q_{i,i}^{(0)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

Donc

$$e_{i+\ell,i}^{(0)} > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

À partir de la relation $J_n^{(1)} = U_n^{(0)} L_n^{(0)}$ nous avons

$$\hat{a}_{i+\ell,i}^{(1)} = q_{i+\ell,i+\ell}^{(0)} e_{i+\ell,i}^{(0)} > 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

Alors il est clair que, par récurrence sur k , nous avons

$$J_n^{(k)} = L_n^{(k)} U_n^{(k)}$$

et

$$\hat{a}_{i+\ell,i}^{(k)} = e_{i+\ell,i}^{(k)} q_{i,i}^{(k)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell,$$

et nous pouvons déduire aussi que la positivité de $e_{i+\ell,i}^{(k)}$ est une conséquence de la positivité de $\hat{a}_{i+\ell,i}^{(k)}$, pour $i = 1, \dots, n - \ell$, et la positivité de $\hat{a}_{i+\ell,i}^{(k+1)}$, pour $i = 1, \dots, n - \ell$ est obtenue de

$$J_n^{(k+1)} = U_n^{(k)} L_n^{(k)}$$

avec

$$\hat{a}_{i+\ell,i}^{(k+1)} = q_{i+\ell,i+\ell}^{(k)} e_{i+\ell,i}^{(k)} \text{ pour } i = 1, \dots, n - \ell.$$

Maintenant nous allons démontrer que la suite $\{q_{1,1}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $\{q_{n,n}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$) est strictement croissante (resp. décroissante).

Puisque nous avons, pour $1 \leq i \leq n$ et $\max(1, i - \ell) \leq j \leq \min(i + \ell, n)$,

$$\hat{a}_{i,j}^{(k)} = \sum_{m=\max(i-\ell, j-\ell, 1)}^{\min(i,j)} e_{i,m}^{(k)} q_{m,j}^{(k)} = \sum_{m=\max(i,j)}^{\min(i+\ell, j+\ell, n)} q_{i,m}^{(k-1)} e_{m,j}^{(k-1)},$$

et

$$\hat{a}_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k)} \frac{t_i^{(k)}}{t_j^{(k)}} = a_{j,i}^{(k)} \frac{t_i^{(k)}}{t_j^{(k)}} \quad (A^{(k)} \text{ est symétrique}).$$

Alors

$$\hat{a}_{i,j}^{(k)} \hat{a}_{j,i}^{(k)} = (\hat{a}_{i,j}^{(k)})^2 \geq 0, \text{ pour } 0 < |i - j| < \ell \text{ et } \hat{a}_{i,i}^{(k)} = a_{i,i}^{(k)} > 0.$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,1}^{(k)} &= e_{1,1}^{(k)} q_{1,1}^{(k)} = q_{1,1}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\ell+1} q_{1,m}^{(k-1)} e_{m,1}^{(k-1)} \\ &= q_{1,1}^{(k-1)} + e_{\ell+1,1}^{(k-1)} + \sum_{m=2}^{\ell} q_{1,m}^{(k-1)} e_{m,1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Nous démontrons que $q_{1,m}^{(k-1)} e_{m,1}^{(k-1)} \geq 0$ pour $m = 2, \dots, \ell$.

Pour $m = 2, \dots, \ell$, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,m}^{(k-1)} &= e_{1,1}^{(k-1)} q_{1,m}^{(k-1)} = q_{1,m}^{(k-1)}, \\ \hat{a}_{m,1}^{(k-1)} &= e_{m,1}^{(k-1)} q_{1,1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\hat{a}_{1,m}^{(k-1)} \hat{a}_{m,1}^{(k-1)} \geq 0 \text{ et } q_{1,1}^{(k-1)} > 0,$$

alors

$$q_{1,m}^{(k-1)} e_{m,1}^{(k-1)} \geq 0.$$

Et puisque

$$e_{\ell+1,1}^{(k-1)} > 0, \text{ donc } q_{1,1}^{(k)} = q_{1,1}^{(k-1)} + e_{\ell+1,1}^{(k-1)} + \sum_{m=2}^{\ell} q_{1,m}^{(k-1)} e_{m,1}^{(k-1)} > q_{1,1}^{(k-1)},$$

alors la suite $\{q_{1,1}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n,n}^{(k)} &= q_{n,n}^{(k-1)} e_{n,n}^{(k-1)} = q_{n,n}^{(k-1)} &= \sum_{m=n-\ell}^n e_{n,m}^{(k)} q_{m,n}^{(k)} \\ &= q_{n,n}^{(k)} + \sum_{m=n-\ell+1}^{n-1} e_{n,m}^{(k)} q_{m,n}^{(k)} + e_{n,n-\ell}^{(k)}. \end{aligned}$$

Nous démontrons maintenant que

$$e_{n,m}^{(k)} q_{m,n}^{(k)} \geq 0 \text{ pour } m = n - \ell + 1, \dots, n - 1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n,m}^{(k+1)} &= q_{n,n}^{(k)} e_{n,m}^{(k)} \\ \hat{a}_{m,n}^{(k+1)} &= q_{m,n}^{(k)} e_{n,n}^{(k)} = q_{m,n}^{(k)}. \end{aligned}$$

$\hat{a}_{n,m}^{(k+1)} \hat{a}_{m,n}^{(k+1)} \geq 0$ et $q_{n,n}^{(k)} > 0$ impliquent que $e_{n,m}^{(k)} q_{m,n}^{(k)} \geq 0$.

Et puisque $e_{n,n-\ell}^{(k)} > 0$ et $q_{n,n}^{(k-1)} > q_{n,n}^{(k)}$, alors la suite $\{q_{n,n}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. D'où le résultat \square

D'après les conditions sur A nous savons que les éléments $q_{i,i}^{(k)}$ de $U_n^{(k)}$ tendent vers les valeurs propres de $J_n^{(0)}$, ainsi vers les valeurs propres de A (voir [43]). Nous posons

$$J_n^{(0)} = X_n D_n X_n^{-1}$$

où D_n est une matrice diagonale de valeurs propres ordonnées de façon décroissante.

Alors, si tous les mineurs principaux de X_n sont non nuls, d'après Wilkinson [43] on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_{i,i}^{(k)} = r_i,$$

$r_i = i^{\text{ème}}$ valeur propre de $J_n^{(0)}$ avec

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > 0.$$

Grâce à ce résultat nous obtenons la propriété suivante :

Corollaire 3.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_{1,1}^{(k)} \leq r_1 \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} q_{n,n}^{(k)} \geq r_n$$

Les inégalités précédentes seront des égalités si tous les mineurs principaux de la matrice des vecteurs propres sont non nuls.

3.2.1 Application dans le cas Jacobi

Maintenant nous allons appliquer la généralisation de l'algorithme qd dans le cas de la mesure de Jacobi pour obtenir une borne supérieure de la constante de Markov-Bernstein. En effet nous cherchons une borne supérieure de la petite valeur propre r_n de la matrice A donnée en [12] page 214.

Nous donnons maintenant les éléments de cette matrice en considérant la notation suivante :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= a_i && \text{pour } i = 1, \dots, n, \\ a_{i+1,i} = a_{i,i+1} &= b_{i+1} && \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\ a_{i+2,i} = a_{i,i+2} &= c_{i+2} && \text{pour } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Nous rappelons le symbole de Pochhammer : $(\xi)_k = \xi(\xi + 1) \dots (\xi + k - 1)$.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 4 \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 3)}, \\
a_2 &= \frac{2(\alpha + 2)(\beta + 2)(\alpha + \beta + 2)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 4)^2(\alpha + \beta + 5)} + \frac{4(\alpha - \beta)^2}{(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 4)^2}, \\
a_k &= \frac{4(k-1)(\alpha + k - 1)(\beta + k - 1)}{(\alpha + \beta + k - 1)(\alpha + \beta + 2k - 3)(\alpha + \beta + 2k - 2)^2(\alpha + \beta + 2k - 1)} \\
&\quad + \frac{4((\alpha - \beta)^2)}{(\alpha + \beta + 2k - 2)^2(\alpha + \beta + 2k)^2} \\
&\quad + \frac{4(\alpha + k)(\beta + k)(\alpha + \beta + k)}{k(\alpha + \beta + 2k - 1)(\alpha + \beta + 2k)^2(\alpha + \beta + 2k + 1)}, \quad 3 \leq k \leq n, \\
b_2 &= \frac{4(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 4)} \left(\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{\alpha + \beta + 3} \right)^{1/2}, \\
b_k &= \frac{4(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2k - 2)} \left(\frac{(\alpha + k - 1)(\beta + k - 1)(\alpha + \beta + k - 1)}{(k - 1)(\alpha + \beta + 2k - 1)(\alpha + \beta + 2k - 3)} \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\frac{(\alpha + \beta - 2)}{(\alpha + \beta + k - 1)(\alpha + \beta + 2k - 4)(\alpha + \beta + 2k)} \right), \quad 3 \leq k \leq n, \\
c_3 &= -\frac{4}{(\alpha + \beta + 2)_3} \left(\frac{2(\alpha + 1)_2(\beta + 1)_2}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 5)} \right)^{1/2}, \\
c_k &= -\frac{4}{(\alpha + \beta + k - 1)(\alpha + \beta + 2k - 4)_3} \\
&\quad \times \left(\frac{(k - 1)(\alpha + k - 2)_2(\beta + k - 2)_2(\alpha + \beta + k - 2)_2}{(k - 2)(\alpha + \beta + 2k - 5)(\alpha + \beta + 2k - 1)} \right)^{1/2}, \quad 4 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

Nous appliquons maintenant la généralisation de l'algorithme qd :

$$\begin{aligned}
J_n^{(0)} &= L_n^{(0)} U_n^{(0)}, \\
U_n^{(k-1)} L_n^{(k-1)} &= J_n^{(k)} = L_n^{(k)} U_n^{(k)}, \quad \forall k \geq 1.
\end{aligned}$$

On note $\hat{a}_{i,j}^{(k)}$ les éléments de $J_n^{(k)}$, $q_{i,j}^{(k)}$ les éléments de $U_n^{(k)}$ et $e_{i,j}^{(k)}$ les éléments de $L_n^{(k)}$, pour $i, j = 1, \dots, n$.

Pour simplifier nous posons

$$\begin{aligned}
q_i^{(k)} &= q_{i,i}^{(k)}, & i = 1, \dots, n, \\
\hat{q}_{i+1}^{(k)} &= q_{i,i+1}^{(k)}, & i = 1, \dots, n-1, \\
\hat{e}_i^{(k)} &= e_{i+1,i}^{(k)}, & i = 1, \dots, n-1, \\
e_i^{(k)} &= e_{i+2,i}^{(k)}, & i = 1, \dots, n-2, \\
\hat{a}_i^{(k)} &= \hat{a}_{i,i}^{(k)}, & i = 1, \dots, n, \\
\hat{b}_{i+1}^{(k)} &= \hat{a}_{i+1,i}^{(k)}, & i = 1, \dots, n-1, \\
\hat{c}_{i+2}^{(k)} &= \hat{a}_{i+2,i}^{(k)}, & i = 1, \dots, n-2, \\
\hat{d}_i^{(k)} &= \hat{a}_{i,i+1}^{(k)}, & i = 1, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Alors les relations obtenues de cet algorithme sont

$$\begin{aligned}
\hat{q}_i^{(0)} + \hat{e}_{i-2}^{(0)} &= \hat{d}_{i-1}^{(0)}, \\
q_i^{(0)} + \hat{e}_{i-1}^{(0)} \hat{q}_i^{(0)} + e_{i-2}^{(0)} &= \hat{a}_i^{(0)}, \\
\hat{e}_i^{(0)} q_i^{(0)} + e_{i-1}^{(0)} \hat{q}_i^{(0)} &= \hat{b}_{i+1}^{(0)}, \\
e_i^{(0)} q_i^{(0)} &= \hat{c}_{i+2}^{(0)},
\end{aligned}$$

avec la convention que les termes contenant des indices ne figurant pas dans les éléments des matrices $L_n^{(0)}$, $U_n^{(0)}$ et J_n^0 sont nuls.

$$\begin{aligned}
\hat{q}_i^{(k+1)} + \hat{e}_{i-2}^{(k+1)} &= \hat{q}_i^{(k)} + \hat{e}_i^{(k)}, \\
q_i^{(k+1)} + \hat{e}_{i-1}^{(k+1)} \hat{q}_i^{(k+1)} + e_{i-2}^{(k+1)} &= q_i^{(k)} + \hat{e}_i^{(k)} \hat{q}_{i+1}^{(k)} + e_i^{(k)}, \\
\hat{e}_i^{(k+1)} q_i^{(k+1)} + e_{i-1}^{(k+1)} \hat{q}_i^{(k+1)} &= \hat{e}_i^{(k)} q_{i+1}^{(k)} + e_i^{(k)} \hat{q}_{i+2}^{(k)}, \\
e_i^{(k+1)} q_i^{(k+1)} &= e_i^{(k)} q_{i+2}^{(k)},
\end{aligned}$$

avec la même convention cité ci-dessus.

Pour obtenir une borne supérieure de r_n équivalent à $O(\frac{1}{n^4})$, il est suffisant de déterminer $L_n^{(k)}$ et $U_n^{(k)}$ jusqu'à l'étape $k = 2$.

Nous obtenons les relations suivantes, en désignant par $[.]$ la partie entière, vérifiées par récurrence sur i .

Pour $k = 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
q_i^{(0)} &= \frac{4(\alpha + i)(\beta + i)(\alpha + \beta + i)}{i(\alpha + \beta + 2i - 1)(\alpha + \beta + 2i)^2(\alpha + \beta + 2i + 1)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n, \\
\hat{q}_i^{(0)} &= (-1)^i \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2i)(\alpha + \beta + 2i - 2)} \left(\frac{2^{2[\frac{i}{2}]} ([\frac{i-1}{2}]!)^2}{(i-1)! \alpha + \beta + 2} \times \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \prod_{j=1}^{[\frac{i-2}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{(\alpha + \beta + 3) \prod_{j=1}^{[\frac{i-1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)}} \right)_{(-1)^i}, \text{ pour } i = 2, \dots, n, \\
\hat{e}_i^{(0)} &= (-1)^{i-1} \frac{4(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2i)(\alpha + \beta + 2i + 2)} \left(\frac{2^{2[\frac{i+1}{2}]} ([\frac{i}{2}]!)^2}{(i)! \alpha + \beta + 2} \times \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \prod_{j=1}^{[\frac{i-1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{(\alpha + \beta + 3) \prod_{j=1}^{[\frac{i}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)}} \right)_{(-1)^i}, \\
&\quad \text{pour } i = 1, \dots, n - 1, \\
e_i^{(0)} &= \frac{4(i + 1)(\alpha + i + 1)(\beta + i + 1)}{(\alpha + \beta + i + 1)(\alpha + \beta + 2i + 1)_3(\alpha + \beta + 2i + 2)}, \\
&\quad \text{pour } i = 1, \dots, n - 2.
\end{aligned}$$

Pour $k = 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
q_i^{(1)} &= \frac{4(\alpha + i + 1)(\beta + i + 1)(\alpha + \beta + i + 2)_2}{i(\alpha + \beta + i + 1)(\alpha + \beta + 2i + 1)_3(\alpha + \beta + 2i + 2)}, \\
&\quad \text{pour } i = 1, \dots, n - 2, \\
q_{n-1}^{(1)} &= \frac{4(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2)}{(n - 1)(\alpha + \beta + n)(\alpha + \beta + 2n - 1)(\alpha + \beta + 2n)^2}, \\
q_n^{(1)} &= \frac{4(\alpha + 1)(\beta + 1)}{n(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 1)}, \\
\hat{q}_i^{(1)} &= (-1)^i \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + i + 2)}{(\alpha + \beta + 2i)(\alpha + \beta + 2i + 2)} \left(\frac{2^{2[\frac{i}{2}]} ([\frac{i-1}{2}]!)^2}{(i-1)! (\alpha + \beta + 2)} \times \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \prod_{j=1}^{[\frac{i-1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{(\alpha + \beta + 3) \prod_{j=1}^{[\frac{i}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)}} \right)_{(-1)^i}, \\
&\quad \text{pour } i = 1, \dots, n - 1, \\
\hat{q}_n^{(1)} &= (-1)^n \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2n)} \left(\frac{2^{2[\frac{n}{2}]} ([\frac{n-1}{2}]!)^2}{(n-1)! (\alpha + \beta + 2)} \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 3)}} \times \right. \\
&\quad \left. \frac{\prod_{j=1}^{[\frac{n-1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{\prod_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)} \right)_{(-1)^n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^{(1)} &= (-1)^{i-1} \frac{4(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2i + 2)(\alpha + \beta + 2i + 4)} \left(\frac{2^{2[\frac{i+1}{2}]+1}}{(i)!(2[\frac{i}{2}] + 1)} \frac{[\frac{i+1}{2}]([\frac{i}{2}]!)^2}{(\alpha + \beta + 2)} \right) \times \\ &\quad \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 3)} \frac{\prod_{j=1}^{[\frac{i+1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{\prod_{j=1}^{[\frac{i+2}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)}}{(-1)^i}, \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \hat{e}_{n-1}^{(1)} &= (-1)^{n-2} \frac{4(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 2n)_2} \left(\frac{2^{2[\frac{n}{2}]+1}}{(n-1)!(2[\frac{n-1}{2}] + 1)} \frac{[\frac{n}{2}]([\frac{n-1}{2}]!)^2}{(\alpha + \beta + 2)} \right) \times \\ &\quad \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 3)} \frac{\prod_{j=1}^{[\frac{n-1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{\prod_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)}}{(-1)^{n-1}}, \\ e_i^{(1)} &= \frac{4(i)_2(\alpha + i + 2)(\beta + i + 2)}{(i + 2)(\alpha + \beta + i + 3)(\alpha + \beta + 2i + 3)_3(\alpha + \beta + 2i + 4)}, \\ &\quad \text{pour } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Pour $k = 2$ nous avons

$$q_i^{(2)} = \frac{4(\alpha + i + 2)(\beta + i + 2)(\alpha + \beta + i + 4)_2}{(i + 2)(\alpha + \beta + i + 3)(\alpha + \beta + 2i + 3)_3(\alpha + \beta + 2i + 2)} \frac{p_{1,i}^{(2)}}{p_{1,i-1}^{(2)}},$$

pour $i = 1, \dots, n-2$,

où

$$\begin{aligned} p_{1,i}^{(2)} &= 2(3 + \alpha)(3 + \beta)(2 + \alpha + \beta)_2 + \\ &\quad (6 + \alpha + \beta)(44 + 36\alpha + 7\alpha^2 + 36\beta + 23\alpha\beta + 3\alpha^2\beta + 7\beta^2 + 3\alpha\beta^2)i \\ &\quad + (188 + 156\alpha + 35\alpha^2 + 2\alpha^3 + 156\beta + 115\alpha\beta + 21\alpha^2\beta \\ &\quad + \alpha^3\beta + 35\beta^2 + 21\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^3 + \alpha\beta^3)i^2 + \\ &\quad 2(2 + \alpha)(2 + \beta)(6 + \alpha + \beta)i^3 + (2 + \alpha)(2 + \beta)i^4. \end{aligned}$$

$$q_{n-1}^{(2)} = \frac{4p_{2,n-1}^{(2)}}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + n + 1)_3 p_{1,n-2}^{(2)}}$$

où

$$\begin{aligned}
p_{2,i}^{(2)} = & (2 + \alpha)_2(2 + \beta)_2(2 + \alpha + \beta)^3 + \\
& (552 + 1166\alpha + 967\alpha^2 + 399\alpha^3 + 83\alpha^4 + 7\alpha^5 + 1166\beta + 2142\alpha\beta \\
& + 1511\alpha^2\beta + 509\alpha^3\beta + 82\alpha^4\beta + 5\alpha^5\beta + 967\beta^2 + 1511\alpha\beta^2 + 892\alpha^2\beta^2 \\
& + 239\alpha^3\beta^2 + 28\alpha^4\beta^2 + \alpha^5\beta^2 + 399\beta^3 + 509\alpha\beta^3 + 239\alpha^2\beta^3 + 46\alpha^3\beta^3 \\
& + 3\alpha^4\beta^3 + 83\beta^4 + 82\alpha\beta^4 + 28\alpha^2\beta^4 + 3\alpha^3\beta^4 + 7\beta^5 + 5\alpha\beta^5 + \alpha^2\beta^5)i \\
& + (2 + \alpha)(2 + \beta)(54 + 75\alpha + 43\alpha^2 + 11\alpha^3 + \alpha^4 + 75\beta + 60\alpha\beta + \\
& 18\alpha^2\beta + 2\alpha^3\beta + 43\beta^2 + 18\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 11\beta^3 + 2\alpha\beta^3 + \beta^4)i^2 + \\
& (2 + \alpha)(2 + \beta)(6 + 7\alpha + 5\alpha^2 + \alpha^3 + 7\beta + 5\beta^2 + \beta^3)i^3. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$q_n^{(2)} = \frac{4(\alpha + 1)_3(\beta + 1)_3(\alpha + \beta + 2)}{(\alpha + \beta + n + 2)p_{2,n-1}^{(2)}}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{q}_i^{(2)} = & (-1)^i \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + i + 4)}{(\alpha + \beta + 2i + 4)(\alpha + \beta + 2i + 2)} \left(\frac{2^{2[\frac{i+2}{2}]} ([\frac{i+1}{2}]!)^2}{(i + 1)! (\alpha + \beta + 2)} \right) \times \\
& \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \prod_{j=1}^{[\frac{i+1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{(\alpha + \beta + 3) \prod_{j=1}^{[\frac{i+2}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)}}}_{(-1)^i} \frac{p_{3,i-2}^{(2)}}{p_{1,i-2}^{(2)}}, \\
& \text{pour } i = 2, \dots, n - 2,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
p_{3,i}^{(2)} = & (3 + \alpha)(3 + \beta)(2 + \alpha + \beta)(14 + 3\alpha + 3\beta) + \\
& (7 + \alpha + \beta)(68 + 52\alpha + 9\alpha^2 + 52\beta + 32\alpha\beta + 4\alpha^2\beta + 9\beta^2 + 4\alpha\beta^2)i \\
& + (264 + 206\alpha + 41\alpha^2 + 2\alpha^3 + 206\beta + 145\alpha\beta + 24\alpha^2\beta + \alpha^3\beta + \\
& 41\beta^2 + 24\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^3 + \alpha\beta^3)i^2 + \\
& 2(2 + \alpha)(2 + \beta)(7 + \alpha + \beta)i^3 + \\
& (2 + \alpha)(2 + \beta)i^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{n-1}^{(2)} = & (-1)^{n-1} \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 2n)_2} \left(\frac{2^{2[\frac{n+1}{2}]} ([\frac{n}{2}]!)^2}{(n)! (\alpha + \beta + 2)} \right) \times \\
& \sqrt{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1) \prod_{j=1}^{[\frac{n-1}{2}]} (\alpha + \beta + 2j + 1)}{(\alpha + \beta + 3) \prod_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} (\alpha + \beta + 2j)}}}_{(-1)^{n-1}} \frac{p_{4,n-1}^{(2)}}{p_{1,n-3}^{(2)}},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
p_{4,i}^{(2)} = & -(2 + \alpha + \beta)_2(14 + 9\alpha + \alpha^2 + 9\beta + 8\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta^2 + \alpha\beta^2) + \\
& (-104 - 106\alpha - 27\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4 - 106\beta - 106\alpha\beta - 30\alpha^2\beta \\
& - 2\alpha^3\beta - 27\beta^2 - 30\alpha\beta^2 - 6\alpha^2\beta^2 + 2\beta^3 - 2\alpha\beta^3 + \beta^4)i + \\
& (2 + \alpha + \beta)(44 + 52\alpha + 19\alpha^2 + 2\alpha^3 + 52\beta + 46\alpha\beta + 13\alpha^2\beta + \\
& \alpha^3\beta + 19\beta^2 + 13\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^3 + \alpha\beta^3)i^2 + \\
& (76 + 84\alpha + 31\alpha^2 + 4\alpha^3 + 84\beta + 83\alpha\beta + 24\alpha^2\beta + 2\alpha^3\beta + 31\beta^2 \\
& + 24\alpha\beta^2 + 4\alpha^2\beta^2 + 4\beta^3 + 2\alpha\beta^3)i^3 - (2 + \alpha)(2 + \beta)i^5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{q}_n^{(2)} = & (-1)^n \frac{(n+1)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2n+1)}{(\alpha+\beta+n+1)_3} \left(\frac{2^{2\lceil \frac{n+2}{2} \rceil}}{(n+1)!} \frac{([\frac{n+1}{2}]!)^2}{(\alpha+\beta+2)} \times \right. \\
& \left. \sqrt{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)}} \frac{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j+1)}{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j)} \right)_{(-1)^n} \frac{p_{5,n}^{(2)}}{p_{1,n-2}^{(2)}},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
p_{5,i}^{(2)} = & -(3 + \alpha + \beta)(14 + 9\alpha + \alpha^2 + 9\beta + 8\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta^2 + \alpha\beta^2) + \\
& (2 + \alpha)(2 + \beta)(1 + \alpha + \beta)(4 + \alpha + \beta)i + (2 + \alpha)(2 + \beta)(4 + \alpha + \beta)i^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_i^{(2)} = & (-1)^{i-1} \frac{4(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2i+4)(\alpha+\beta+2i+6)} \left(\frac{2^{2\lceil \frac{i+1}{2} \rceil+1}}{(i)!(2\lceil \frac{i}{2} \rceil+1)} \frac{[\frac{i+1}{2}]([\frac{i}{2}]!)^2}{(\alpha+\beta+2)} \times \right. \\
& \left. \sqrt{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)}} \frac{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{i+1}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j+1)}{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{i+2}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j)} \right)_{(-1)^i} \frac{p_{3,i-1}^{(2)}}{p_{1,i}^{(2)}},
\end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, n-3$.

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{n-2}^{(2)} = & (-1)^{n-3} \frac{4(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2+n)_2(\alpha+\beta+2n)} \left(\frac{2^{2\lceil \frac{n-1}{2} \rceil+1}}{(n-2)!(2\lceil \frac{n-2}{2} \rceil+1)} \times \right. \\
& \left. \frac{[\frac{n-1}{2}]([\frac{n-2}{2}]!)^2}{(\alpha+\beta+2)} \sqrt{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)}} \frac{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j+1)}{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j)} \right)_{(-1)^{n-1}} \frac{p_{4,n-1}^{(2)}}{p_{1,n-2}^{(2)}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{n-1}^{(2)} = & (-1)^{n-2} \frac{4(\alpha-\beta)(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+2n+1)_2} \left(\frac{2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil+1}}{(n-1)!(2\lceil \frac{n-1}{2} \rceil+1)} \frac{[\frac{n}{2}]([\frac{n-1}{2}]!)^2}{\alpha+\beta+2} \times \right. \\
& \left. \sqrt{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)}} \frac{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j+1)}{\prod_{j=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (\alpha+\beta+2j)} \right)_{(-1)^{n-1}} \frac{p_{5,n}^{(2)}}{p_{2,n-1}^{(2)}}.
\end{aligned}$$

$$e_i^{(2)} = \frac{4(i)_2(\alpha + i + 3)(\beta + i + 3)}{(i + 2)(\alpha + \beta + i + 3)(\alpha + \beta + 2i + 5)_3(\alpha + \beta + 2i + 6)} \frac{p_{1,i-1}^{(2)}}{p_{1,i}^{(2)}},$$

pour $i = 1, \dots, n - 4,$

$$e_{n-3}^{(2)} = \frac{4(n-3)_2(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2)}{(n-1)(\alpha + \beta + n)_3(\alpha + \beta + 2n - 1)(\alpha + \beta + 2n)^2} \frac{p_{1,n-4}^{(2)}}{p_{1,n-3}^{(2)}}.$$

$$e_{n-2}^{(2)} = \frac{4(n-2)_2(\alpha + 1)(\beta + 1)}{n(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + n + 1)_3(\alpha + \beta + 2n + 1)} \frac{p_{1,n-3}^{(2)}}{p_{1,n-2}^{(2)}}.$$

Alors

$$r_n < q_n^{(2)} = \frac{4(\alpha + 1)_3(\beta + 1)_3(\alpha + \beta + 2)}{(\alpha + \beta + n + 2)p_{2,n-1}^{(2)}} = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

À partir de ce résultat nous annonçons le théorème suivant :

Théorème 19.

$$\| p' \| \leq \frac{1}{\sqrt{r_n}} \| p \| \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}_n,$$

où la norme associée à L^2 est notée $\| \cdot \|$.

Le produit scalaire dans le cas de la mesure de Jacobi est

$$\int_{-1}^1 \bullet (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \quad \text{avec } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1.$$

On a

$$r_n \leq \frac{4(\alpha + 1)_3(\beta + 1)_3(\alpha + \beta + 2)}{(\alpha + \beta + n + 2)p_{2,n-1}^{(2)}} \quad (3.2)$$

où $p_{2,i}^{(2)}$ est donné par (3.1).

$$r_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

3.2.2 Comparaison avec le cas Gegenbauer

Maintenant nous allons comparer le résultat obtenu dans le théorème 19 avec le résultat obtenu dans le cas Gegenbauer évoqué dans la première partie de ce travail (voir aussi [12], [10]). Pour cela nous prenons $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, et nous rappelons la mesure de Gegenbauer

$$\int_{-1}^1 \cdot (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx \quad \text{avec } \lambda > -1/2.$$

La matrice $A = (G_{n,1}^{(1)})^{-1}K_{n,1}((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1}$, comme définie dans la première partie, peut être transformée en une matrice diagonale par blocs de taille 2×2 , donc les deux blocs diagonaux sont des matrices tridiagonales. Le premier bloc diagonal correspond aux lignes et colonnes paires, en revanche le second bloc diagonal correspond aux lignes et colonnes impaires. Nous notons par $\hat{\beta}_j$ (resp. $\tilde{\beta}_i$) la borne supérieure du premier bloc de la diagonale de taille $j \times j$ (resp. le second bloc de la diagonale de taille $i \times i$), ce résultat a été donné en utilisant l'algorithme qd (voir [10]). Nous notons β_n la borne supérieure donnée dans le théorème 19.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_k &= \frac{(2\lambda + 1)(2\lambda + 3)(2\lambda + 5)}{2(k + \lambda)(2k + 2\lambda + 1)\hat{y}_{k-1}(\lambda)}, \\ \tilde{\beta}_k &= \frac{(2\lambda + 1)(2\lambda + 3)(2\lambda + 5)}{8(k + \lambda + 1)(2k + 2\lambda + 1)\tilde{y}_{k-1}(\lambda)}.\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k-1}(\lambda) &= 4(2\lambda + 3)(k - 1)^2 + 4(2 + \lambda)(2\lambda + 3)(k - 1) + (2\lambda + 1)(2\lambda + 5), \\ \tilde{y}_{k-1}(\lambda) &= (2\lambda + 3)(k - 1)^2 + (3 + \lambda)(2\lambda + 3)(k - 1) + (\lambda + 1)(2\lambda + 5).\end{aligned}$$

Alors nous avons $\hat{\beta}_k > \beta_{2k-1}$, car

$$\hat{\beta}_k - \beta_{2k-1} = \frac{3(2\lambda + 1)(2\lambda + 3)(4\lambda + 7)}{2(2\lambda + 5)(k + \lambda)(2k + 2\lambda + 1)\rho_k^{(1)}(\lambda)}$$

avec

$$\rho_k^{(1)}(\lambda) = 4(k - 1)(2k + 1) + (2k - 1)(2\lambda + 1)(2k + 2\lambda + 3).$$

Et nous avons aussi $\tilde{\beta}_k > \beta_{2k}$, car

$$\tilde{\beta}_k - \beta_{2k} = \frac{(2\lambda + 1)(2\lambda + 3)(4\lambda + 7)}{8(2\lambda + 5)\rho_k^{(2)}(\lambda)}$$

avec

$$\begin{aligned}\rho_k^{(2)}(\lambda) &= (k)_2(4k^2 - 1) + (\lambda + \frac{1}{2})(4k^4 + 16k^3 + 9k^2 - 3k - 1 + \\ &\quad (\lambda + \frac{1}{2})((3k + 2)(4k^2 + 4k - 1) + (2\lambda + 1)k(6k + 2\lambda + 5))).\end{aligned}$$

En conclusion, nous constatons que la borne supérieure β_j donnée dans le théorème 19 est meilleur par rapport à la borne correspondant $\hat{\beta}_i$ (resp. $\tilde{\beta}_i$) dans le cas particulier de la mesure de Gegenbauer.

3.3 Cas d'une matrice tridiagonale par blocs

Dans ce paragraphe nous cherchons une borne supérieure de la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique définie positive à demi-largeur de bande égale à ℓ . Précisément nous cherchons le comportement asymptotique de la plus petite valeur propre. Dans ce cas nous découpons la matrice A de taille $(k \times \ell) \times (k \times \ell)$ à demi largeur de bande égale à ℓ en blocs de taille $(\ell \times \ell)$, donc cette matrice devient une matrice de taille $(k \times k)$ tridiagonale par blocs, les blocs sont de taille $\ell \times \ell$. Cette matrice est considérée comme la matrice de Jacobi associée à la relation de récurrence à trois termes entre des polynômes orthogonaux matriciels. Donc les valeurs propres de cette matrice sont aussi les racines latentes du polynôme matriciel de degré k obtenu à partir de la relation de récurrence à trois termes (voir [22]). La racine latente est un scalaire pour laquelle le polynôme matriciel n'est pas inversible.

Les résultats que nous avons obtenu ne concernent pas que la plus petite valeur propre, mais aussi toutes les valeurs propres du premier et dernier blocs diagonaux de la décomposition donnée par l'algorithme qd par blocs.

3.3.1 L'algorithme qd par blocs

A présent nous utilisons la décomposition LU par blocs d'une matrice par blocs. Nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de cette décomposition. La décomposition LU par blocs d'une matrice par blocs existe si et seulement si toutes les matrices principales par blocs sont inversibles, (voir théorème 3.7 [31]). Si nous avons une matrice par blocs symétrique définie positive, alors cette matrice a une décomposition LU par blocs (voir [18]).

Soit A_n une matrice tridiagonale par blocs de taille $n \times n$ symétrique définie positive où ses blocs sont de taille $\ell \times \ell$.

Nous notons par a_i , $i = 1, \dots, n$ les blocs de la diagonale principale, et b_i , $i = 2, \dots, n$ les blocs de la diagonale inférieure.

Nous avons

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_2^T & & \circ \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_n^T \\ \circ & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Les blocs b_i , $i = 2, \dots, n$ sont triangulaires supérieurs et réguliers.

La matrice A_n peut être considérée comme la matrice de Jacobi d'une relation de récurrence à trois termes entre des polynômes orthogonaux matriciels de la variable x . Puisque nous utilisons plutôt des polynômes unitaires, i.e tels

que leur coefficient du terme de plus haut degré soit I , il est plus simple de lier la relation de récurrence à trois termes avec la matrice $J_n^{(0)}$ (3.4) déduite de A_n comme ci dessous.

On a alors

$$\begin{cases} P_{k+1}(x) = (Ix - \hat{a}_{k+1}^{(0)})P_k(x) - \hat{b}_{k+1}^{(0)}P_{k-1}(x) & \forall k = 0, \dots, n-2. \\ P_{-1} = 0, P_0 = I. \end{cases}$$

Maintenant nous transformons la matrice A_n en une matrice J_n semblable telle que les blocs de sa diagonale supérieure ne contiennent que des blocs identités. Nous réalisons cette transformation en utilisant la matrice diagonale par blocs régulière T_n .

Nous notons par $A_n^{(0)}$ la matrice A_n dont les blocs sont notés par

$$a_i^{(0)}, i = 1, \dots, n \text{ et } b_i^{(0)}, i = 2, \dots, n.$$

La matrice de transformation T_n est notée $T_n^{(0)}$. Ses blocs diagonaux sont notés $t_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$.

Nous obtenons donc la matrice transformés $J_n^{(0)}$ définie par :

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1} \tag{3.3}$$

Cette matrice est tridiagonale par blocs. Les blocs de la diagonale principale seront notés par $\hat{a}_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, les blocs de la diagonale inférieure seront notés par $\hat{b}_i^{(0)}$, $i = 2, \dots, n$ et les blocs de diagonale supérieure sont des blocs identités.

$$J_n^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^{(0)} & I & & \circ \\ \hat{b}_2^{(0)} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ \circ & & \hat{b}_n^{(0)} & \hat{a}_n^{(0)} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

De (3.3) nous obtenons les relations suivantes :

$$t_i^{(0)} (b_{i+1}^{(0)})^T (t_{i+1}^{(0)})^{-1} = I, \quad i = 1, \dots, n-1 \tag{3.5}$$

$$t_i^{(0)} a_i^{(0)} (t_i^{(0)})^{-1} = \hat{a}_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n \tag{3.6}$$

$$t_i^{(0)} b_i^{(0)} (t_{i-1}^{(0)})^{-1} = \hat{b}_i^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n \tag{3.7}$$

Nous déterminons les éléments $t_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, en utilisant (3.5),

$$t_{i+1}^{(0)} = t_i^{(0)} (b_{i+1}^{(0)})^T. \tag{3.8}$$

Nous utilisons maintenant la décomposition LU par blocs de $J_n^{(0)}$. Cette décomposition existe puisque tous ses mineurs principaux sont ceux de $A_n^{(0)}$. Nous avons

$$J_n^{(0)} = L_n^{(0)}U_n^{(0)} = \begin{pmatrix} I & & & \\ e_1^{(0)} & I & \circ & \\ \circ & \ddots & \ddots & \\ & & e_{n-1}^{(0)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{(0)} & I & & \\ & \ddots & \ddots & \circ \\ \circ & & \ddots & I \\ & & & q_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Donc nous obtenons les relations suivantes :

$$\hat{a}_i^{(0)} = q_i^{(0)} + e_{i-1}^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

$$\hat{b}_i^{(0)} = e_{i-1}^{(0)}q_{i-1}^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n \quad (3.11)$$

avec la convention que $e_0^{(0)} = 0$.

Nous effectuons le produit de $U_n^{(0)}$ et $L_n^{(0)}$, alors nous obtenons la nouvelle matrice $J_n^{(1)}$.

$$J_n^{(1)} = U_n^{(0)}L_n^{(0)} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^{(1)} & I & & \\ \hat{b}_2^{(1)} & \hat{a}_2^{(1)} & \ddots & \circ \\ \circ & \ddots & \ddots & I \\ & & \hat{b}_n^{(1)} & \hat{a}_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

qui nous donne les nouvelles relations suivantes :

$$\hat{a}_i^{(1)} = q_i^{(0)} + e_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

$$\hat{b}_i^{(1)} = q_i^{(0)}e_{i-1}^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n \quad (3.13)$$

avec la convention que $e_n^{(0)} = 0$.

Ensuite nous utilisons la décomposition LU de $J_n^{(1)} = L_n^{(1)}U_n^{(1)}$, alors nous obtenons $J_n^{(2)}$ avec $J_n^{(2)} = U_n^{(1)}L_n^{(1)}$, ainsi de suite.

Théorème 20.

Les blocs $q_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$ et $e_i^{(0)}$, $i = 2, \dots, n$, sont semblables à des matrices symétriques définies positives.

Preuve.

i) Nous démontrons tout d'abord que $\hat{b}_i^{(0)}$ est semblable à la matrice symétrique définie positive $b_i^{(0)}(b_i^{(0)})^T$. La relation (3.5), est écrit en remplaçant l'indice i par $i - 1$, et multipliée à gauche par (3.7). Alors

$$\hat{b}_i^{(0)} = t_{i-1}^{(0)}(b_i^{(0)})^T b_i^{(0)}(t_{i-1}^{(0)})^{-1}. \quad (3.14)$$

Donc $\hat{b}_i^{(0)}$ est semblable à $(b_i^{(0)})^T b_i^{(0)}$ qui est semblable aussi à $b_i^{(0)}(b_i^{(0)})^T$.

ii) Maintenant nous démontrons que $q_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$ est semblable à une matrice symétrique définie positive.

La matrice $A_n^{(0)}$ a une décomposition LU par blocs $\hat{L}_n^{(0)}\hat{U}_n^{(0)}$

$$\hat{L}_n^{(0)}\hat{U}_n^{(0)} = \begin{pmatrix} I & & & \\ \hat{l}_2^{(0)} & I & \circ & \\ \circ & \ddots & \ddots & \\ & & \hat{l}_n^{(0)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1^{(0)} & I & & \\ & \ddots & \ddots & \circ \\ \circ & & \ddots & I \\ & & & \hat{u}_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Nous notons $\hat{D}_n^{(0)}$ la matrice diagonale par blocs telle que ses éléments diagonaux sont les blocs notés par $\hat{u}_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$. Alors nous pouvons écrire la décomposition de Cholesky de $A_n^{(0)}$ comme suit :

$$A_n^{(0)} = \hat{L}_n^{(0)}\hat{D}_n^{(0)}(\hat{L}_n^{(0)})^T. \quad (3.15)$$

Les blocs $\hat{u}_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, de taille $\ell \times \ell$, sont symétriques définis positifs. Alors nous avons

$$\begin{aligned} J_n^{(0)} &= T_n^{(0)}A_n^{(0)}(T_n^{(0)})^{-1}. \\ &= T_n^{(0)}\hat{L}_n^{(0)}\hat{D}_n^{(0)}(\hat{L}_n^{(0)})^T(T_n^{(0)})^{-1}. \\ &= T_n^{(0)}\hat{L}_n^{(0)}(T_n^{(0)})^{-1}T_n^{(0)}\hat{D}_n^{(0)}(\hat{L}_n^{(0)})^T(T_n^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation nous donne la décomposition LU de $J_n^{(0)}$ telle que

$$\begin{aligned} L_n^{(0)} &= T_n^{(0)}\hat{L}_n^{(0)}(T_n^{(0)})^{-1}. \\ U_n^{(0)} &= T_n^{(0)}\hat{D}_n^{(0)}(\hat{L}_n^{(0)})^T(T_n^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons les blocs diagonaux de $U_n^{(0)}$:

$$q_i^{(0)} = t_i^{(0)}\hat{u}_i^{(0)}(t_i^{(0)})^{-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Alors $q_i^{(0)}$ est semblable à la matrice symétrique définie positive $\hat{u}_i^{(0)}$.

ii) Enfin nous démontrons que $e_i^{(0)}$, $i = 2, \dots, n$ est semblable à une matrice symétrique définie positive.

En utilisant les relations (3.14) et (3.16), alors la relation (3.11) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} e_{i-1}^{(0)} &= \hat{b}_i^{(0)}(q_{i-1}^{(0)})^{-1} \\ &= t_{i-1}^{(0)}(b_i^{(0)})^T b_i^{(0)}(t_{i-1}^{(0)})^{-1} t_{i-1}^{(0)}(\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{-1}(t_{i-1}^{(0)})^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$e_{i-1}^{(0)} = t_{i-1}^{(0)}(b_i^{(0)})^T b_i^{(0)}(\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{-1}(t_{i-1}^{(0)})^{-1} \quad (3.17)$$

et

$$(t_{i-1}^{(0)})^{-1} e_{i-1}^{(0)} t_{i-1}^{(0)} = (b_i^{(0)})^T b_i^{(0)}(\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{-1}. \quad (3.18)$$

Puisque $\hat{u}_{i-1}^{(0)}$ est symétrique définie positive alors on peut l'écrire comme suit

$$\hat{u}_{i-1}^{(0)} = (\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{\frac{1}{2}} (\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{\frac{1}{2}},$$

où $(\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{\frac{1}{2}}$ est une matrice symétrique définie positive.

Alors (3.18) nous donne la relation suivante :

$$(\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{-\frac{1}{2}} (t_{i-1}^{(0)})^{-1} e_{i-1}^{(0)} t_{i-1}^{(0)} (\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{\frac{1}{2}} = (\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{-\frac{1}{2}} (b_i^{(0)})^T b_i^{(0)} (\hat{u}_{i-1}^{(0)})^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

Donc $e_{i-1}^{(0)}$ est semblable à une matrice symétrique définie positive. \square

Maintenant nous généralisons le théorème 25 pour tout $q_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$ et $e_i^{(k)}$, $i = 2, \dots, n$.

Théorème 21.

Les blocs $q_i^{(k)}$, $i = 1 \dots n$, et $e_i^{(k)}$, $i = 2 \dots n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, sont semblables à des matrices symétriques définies positives.

Preuve.

Pour démontrer cela il suffit de constater que

$$J_n^{(1)} = T_n^{(1)} A_n^{(1)} (T_n^{(1)})^{-1},$$

où $A_n^{(1)}$ est une matrice tridiagonale par blocs symétrique définie positive et $T_n^{(1)}$ est une matrice diagonale par blocs.

Alors le résultat est vérifié pour $q_i^{(1)}$ et $e_i^{(1)}$ en utilisant la même preuve du théorème 25, et ainsi de suite.

Nous démontrons maintenant que $A_n^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive. A partir de (3.15) nous obtenons la décomposition de Cholesky par blocs de $A_n^{(0)}$,

$$A_n^{(0)} = G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T$$

Pour cela nous utilisons la décomposition de Cholesky pour les blocs

$\hat{u}_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$.

$G_n^{(0)}$ est une matrice triangulaire inférieure dont les blocs diagonaux sont notés par $g_{i,i}^{(0)}$.

Donc

$$\begin{aligned} J_n^{(0)} &= T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1} \\ &= T_n^{(0)} G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la matrice diagonale par blocs régulière $T_n^{(1)}$, alors nous avons :

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1} T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}. \quad (3.20)$$

$T_n^{(1)}$ est déterminé telle que les blocs $t_i^{(0)} g_{i,i}^{(0)} (t_i^{(1)})^{-1}$ de la diagonale de $T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1}$ soient égaux à I , $i = 1, \dots, n$.

Les $t_i^{(1)}$ sont déterminés d'une façon unique par

$$t_i^{(1)} = t_i^{(0)} g_{i,i}^{(0)}.$$

(3.20) est la décomposition LU de $J_n^{(0)}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} L_n^{(0)} &= T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1} \\ U_n^{(0)} &= T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$J_n^{(1)} = U_n^{(0)} L_n^{(0)} = T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1}.$$

Nous notons par $A_n^{(1)}$ la matrice $(G_n^{(0)})^T G_n^{(0)}$.

Cette matrice symétrique est semblable à $G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T = A_n^{(0)}$.

Donc $A_n^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive semblable à $J_n^{(1)}$.

Alors la décomposition de $J_n^{(1)} = L_n^{(1)} U_n^{(1)}$ existe.

En utilisant les mêmes arguments que ceux dans le théorème 25, nous obtenons le résultat de ce théorème. \square

Les relations de récurrence de l'algorithme qd par bloc sont les suivantes :

$$q_{i+1}^{(k)} + e_{i+1}^{(k)} = \hat{a}_{i+1}^{(k+1)} = q_{i+1}^{(k+1)} + e_i^{(k+1)}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (3.21)$$

$$q_{i+1}^{(k)} e_i^{(k)} = \hat{b}_{i+1}^{(k+1)} = e_i^{(k+1)} q_i^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.22)$$

$$\text{avec} \quad e_0^{(k+1)} = 0 \text{ et } e_n^{(k)} = 0.$$

Maintenant nous allons donner quelques propriétés des valeurs propres des blocs $q_1^{(k)}$ et $q_n^{(k)}$, $k \geq 0$.

Nous commençons tout d'abord par rappeler le théorème suivant (voir le livre de Wilkinson, [44] page 102).

Théorème 22.

Soient A' , A et E des matrices symétriques de taille $n \times n$ telles que $A' = A + E$. Soient λ'_i , λ_i et μ_i , $i = 1, \dots, n$, les valeurs propres respectivement de A' , A et E . Ces valeurs propres vérifient les conditions suivantes pour $i = 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} \lambda'_i &\geq \lambda'_{i+1}, \\ \lambda_i &\geq \lambda_{i+1}, \\ \mu_i &\geq \mu_{i+1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda_i + \mu_n \leq \lambda'_i \leq \lambda_i + \mu_1, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

En utilisant ce théorème nous avons le résultat suivant :

Théorème 23.

Soient $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, \ell$, les valeurs propres de $q_1^{(k)}$, et $\mu_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, \ell$, les valeurs propres de $e_1^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, telles que

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(k)} &\geq \lambda_{i+1}^{(k)}, \quad i = 1 \dots \ell - 1. \\ \mu_i^{(k)} &\geq \mu_{i+1}^{(k)}, \quad i = 1 \dots \ell - 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda_i^{(k)} + \mu_\ell^{(k)} \leq \lambda_i^{(k+1)} \leq \lambda_i^{(k)} + \mu_1^{(k)}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (3.23)$$

et

$$\lambda_i^{(k)} < \lambda_i^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, \ell \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

Preuve.

Nous écrivons la relation (3.19) comme suit

$$e_{i-1}^{(k)} = t_{i-1}^{(k)} (\hat{u}_{i-1}^{(k)})^{\frac{1}{2}} \beta_{i-1}^{(k)} (\hat{u}_{i-1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} (t_{i-1}^{(k)})^{-1} \quad (3.25)$$

avec

$$\beta_{i-1}^{(k)} = (\hat{u}_{i-1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} (b_i^{(k)})^T b_i^{(k)} (\hat{u}_{i-1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$$

qui est une matrice symétrique définie positive.

Nous écrivons la relation (3.21), et nous la multiplions à gauche par $(t_i^{(k)})^{-1}$ et à droite par $t_i^{(k)}$. Pour $i = 0$ nous obtenons

$$(t_1^{(k)})^{-1} q_1^{(k)} t_1^{(k)} + (t_1^{(k)})^{-1} e_1^{(k)} t_1^{(k)} = (t_1^{(k)})^{-1} q_1^{(k+1)} t_1^{(k)}.$$

En utilisant les relations (3.16) et (3.25), cette dernière relation devient

$$\hat{u}_1^{(k)} + (\hat{u}_1^{(k)})^{\frac{1}{2}} \beta_1^{(k)} (\hat{u}_1^{(k)})^{-\frac{1}{2}} = (t_1^{(k)})^{-1} q_1^{(k+1)} t_1^{(k)}. \quad (3.26)$$

La relation (3.26) est multipliée à gauche par $(\hat{u}_1^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$ et à droite par $(\hat{u}_1^{(k)})^{\frac{1}{2}}$. Donc

$$\hat{u}_1^{(k)} + \beta_1^{(k)} = (\hat{u}_1^{(k)})^{-\frac{1}{2}} (t_1^{(k)})^{-1} q_1^{(k+1)} t_1^{(k)} (\hat{u}_1^{(k)})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

$\hat{u}_1^{(k)}$, $\beta_1^{(k)}$, $(\hat{u}_1^{(k)})^{-\frac{1}{2}} (t_1^{(k)})^{-1} q_1^{(k+1)} t_1^{(k)} (\hat{u}_1^{(k)})^{\frac{1}{2}}$ sont des matrices symétriques définies positives semblables respectivement à $q_1^{(k)}$, $e_1^{(k)}$ et $q_1^{(k+1)}$.

En utilisant le théorème 22, alors la relation (3.23) est vérifiée.

D'après (3.23) la relation (3.24) est réalisée. \square

Théorème 24.

Soient $\lambda_{\ell(n-1)+i}^{(k)}$, $i = 1, \dots, \ell$, les valeurs propres de $q_n^{(k)}$,

et $\mu_{\ell(n-2)+i}^{(k)}$, $i = 1, \dots, \ell$, les valeurs propres de $e_{n-1}^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, telles que

$$\begin{aligned} \lambda_{\ell(n-1)+i}^{(k)} &\geq \lambda_{\ell(n-1)+i+1}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1. \\ \mu_{\ell(n-2)+i}^{(k)} &\geq \mu_{\ell(n-2)+i+1}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda_{\ell(n-1)+i}^{(k+1)} + \mu_{\ell(n-1)}^{(k+1)} \leq \lambda_{\ell(n-1)+i}^{(k)} \leq \lambda_{\ell(n-1)+i}^{(k+1)} + \mu_{\ell(n-2)+1}^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (3.28)$$

et

$$\lambda_{\ell(n-1)+i}^{(k+1)} < \lambda_{\ell(n-1)+i}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (3.29)$$

Preuve.

(3.7) est multipliée à droite par la relation (3.5) écrite en remplaçant i par $i - 1$, alors nous obtenons

$$\hat{b}_i^{(k)} = t_i^{(k)} b_i^{(k)} (b_i^{(k)})^T (t_i^{(k)})^{-1}. \quad (3.30)$$

En utilisant la relation (3.30) et la relation(3.16), alors la relation (3.11) devient

$$\begin{aligned}\hat{e}_{i-1}^{(k)} &= \hat{b}_i^{(k)}(q_{i-1}^{(k)})^{-1}. \\ &= t_i^{(k)}b_i^{(k)}(b_i^{(k)})^T(t_i^{(k)})^{-1}t_{i-1}^{(k)}(\hat{u}_{i-1}^{(k)})^{-1}(t_{i-1}^{(k)})^{-1}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Donc de la relation (3.21) nous obtenons la relation suivante

$$\begin{aligned}q_n^{(k)} &= q_n^{(k+1)} + e_{n-1}^{(k+1)} \\ &= t_n^{(k+1)}\hat{u}_n^{(k+1)}(t_n^{(k+1)})^{-1} \\ &\quad + t_n^{(k+1)}b_n^{(k+1)}(b_n^{(k+1)})^T(t_n^{(k+1)})^{-1}t_{n-1}^{(k+1)}(\hat{u}_{n-1}^{(k+1)})^{-1}(t_{n-1}^{(k+1)})^{-1}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

La relation (3.32) est multipliée à gauche par $(t_n^{(k+1)})^{-1}$ et à droite par $t_n^{(k+1)}$.

$$(t_n^{(k+1)})^{-1}q_n^{(k)}t_n^{(k+1)} = b_n^{(k+1)}(b_n^{(k+1)})^T(t_n^{(k+1)})^{-1}t_{n-1}^{(k+1)}(\hat{u}_{n-1}^{(k+1)})^{-1}(t_{n-1}^{(k+1)})^{-1}t_n^{(k+1)} + \hat{u}_n^{(k+1)}.\quad (3.33)$$

De (3.5) nous pouvons utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned}(b_n^{(k+1)})^T(t_n^{(k+1)})^{-1}t_{n-1}^{(k+1)} &= I \\ (t_{n-1}^{(k+1)})^{-1}t_n^{(k+1)} &= (b_n^{(k+1)})^T\end{aligned}$$

pour donner la nouvelle relation de (3.33) suivante :

$$(t_n^{(k+1)})^{-1}q_n^{(k)}t_n^{(k+1)} = \hat{u}_n^{(k+1)} + b_n^{(k+1)}(\hat{u}_{n-1}^{(k+1)})^{-1}(b_n^{(k+1)})^T.\quad (3.34)$$

La matrice $b_n^{(k+1)}(\hat{u}_{n-1}^{(k+1)})^{-1}(b_n^{(k+1)})^T$ est symétrique définie positive semblable à $e_{n-1}^{(k+1)}$.

$\hat{u}_{n-1}^{(k+1)}$ est une matrice symétrique définie positive semblable à $q_n^{(k+1)}$.

Alors nous pouvons appliquer le résultat du théorème 22, donc la relation (5.44) est vérifiée.

De (5.44) la relation (5.45) est vérifiée. \square

Maintenant nous appliquons l'algorithme qd par blocs à une matrice tridiagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des matrices carrées de tailles différentes.

Soit A_n une matrice tridiagonale par blocs de taille $r \times r$ symétrique définie positive.

Nous notons par a_i , $i = 1, \dots, n$, les blocs de la diagonale principale, et

b_i , $i = 2, \dots, n$, les blocs de la diagonale inférieure.

Nous avons

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_2^T & & \circ \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_n^T \\ \circ & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Les blocs a_i , $i = 1, \dots, n$, sont de taille $r_i \times r_i$.

Les blocs b_i , $i = 2, \dots, n$, sont de taille $r_i \times r_{i-1}$.

Nous avons $r = \sum_{i=1}^n r_i$.

Nous appliquons maintenant la décomposition LU à A_n .

Posons $A_n^{(0)} = A_n$. Nous avons

$$A_n^{(0)} = L_n^{(0)} U_n^{(0)} = \begin{pmatrix} I_1 & & & \\ e_2^{(0)} & I_2 & \circ & \\ \circ & \ddots & \ddots & \\ & & e_n^{(0)} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{(0)} & \tilde{q}_2^{(0)} & & \\ & \ddots & \ddots & \circ \\ \circ & & \ddots & \tilde{q}_n^{(0)} \\ & & & q_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$L_n^{(0)}$ est une matrice triangulaire inférieure par blocs à diagonale unité.

les blocs e_i , $i = 2, \dots, n$, sont de taille $r_i \times r_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$ et les I_i sont les blocs identités de taille $r_i \times r_i$, $i = 1, \dots, n$.

$U_n^{(0)}$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs.

les blocs q_i , $i = 1, \dots, n$ sont de taille $r_i \times r_i$, $i = 1, \dots, n$, et les blocs $\tilde{q}_n^{(0)}$ sont de taille $r_{i-1} \times r_i$, $i = 2, \dots, n$.

Par identification nous obtenons les relations suivantes :

$$a_1^{(0)} = q_1^{(0)}. \quad (3.36)$$

$$a_i^{(0)} = e_i^{(0)} \tilde{q}_i^{(0)} + q_i^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.37)$$

$$b_i^{(0)} = e_i^{(0)} q_{i-1}^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.38)$$

$$(b_i^{(0)})^T = \tilde{q}_i^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.39)$$

Nous appliquons l'algorithme LR :

$$U_n^{(0)} L_n^{(0)} = A_n^{(1)} = L_n^{(1)} U_n^{(1)}.$$

Nous obtenons les relations suivantes :

$$a_i^{(1)} = \tilde{q}_{i+1}^{(0)} e_{i+1}^{(0)} + q_i^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.40)$$

$$a_n^{(1)} = q_n^{(0)}. \quad (3.41)$$

$$b_i^{(1)} = q_i^{(0)} e_i^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.42)$$

$$(b_i^{(1)})^T = \tilde{q}_i^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.43)$$

Donc, nous avons

$$\tilde{q}_2^{(0)} e_2^{(0)} + q_1^{(0)} = a_1^{(1)} = q_1^{(1)}. \quad (3.44)$$

$$\tilde{q}_{i+1}^{(0)} e_{i+1}^{(0)} + q_i^{(0)} = a_i^{(1)} = e_i^{(1)} \tilde{q}_i^{(1)} + q_i^{(1)}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (3.45)$$

$$q_i^{(0)} e_i^{(0)} = b_i^{(1)} = e_i^{(1)} q_{i-1}^{(1)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.46)$$

$$\tilde{q}_i^{(0)} = (b_i^{(1)})^T = \tilde{q}_i^{(1)} \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.47)$$

$$q_n^{(0)} = a_n^{(1)} = q_n^{(1)} + e_n^{(1)} \tilde{q}_n^{(1)}. \quad (3.48)$$

Théorème 25.

Les blocs $q_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$, sont des matrices symétriques définies positives, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Preuve.

Puisque $A_n^{(0)}$ est symétrique définie positive, alors elle a une décomposition de Cholesky :

$$A_n^{(0)} = L_n^{(0)} D_n^{(0)} (L_n^{(0)})^T,$$

où $D_n^{(0)}$ est une matrice diagonale par blocs dont les éléments diagonaux sont $q_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$.

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} D_n^{(0)} &= (L_n^{(0)})^{-1} A_n^{(0)} ((L_n^{(0)})^T)^{-1}, \\ &= (L_n^{(0)})^{-1} G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T ((L_n^{(0)})^T)^{-1}, \\ &= ((L_n^{(0)})^{-1} G_n^{(0)}) ((L_n^{(0)})^{-1} G_n^{(0)})^T. \end{aligned}$$

$D_n^{(0)}$ est donc symétrique définie positive.

Par conséquent $q_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, sont symétriques définies positives.

D'autre part nous avons la décomposition de Cholesky suivante :

$$A_n^{(0)} = G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T.$$

En appliquant l'algorithme LR :

$$(G_n^{(0)})^T G_n^{(0)} = A_n^{(1)}.$$

Par conséquent $A_n^{(1)}$ est symétrique définie positive, d'où les blocs $q_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, n$, sont symétriques définis positifs.

Ensuite le processus continuera de la même manière. \square

Nous appliquons l'algorithme LR $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$U_n^{(k-1)} L_n^{(k-1)} = A_n^{(k)} = L_n^{(k)} U_n^{(k)},$$

nous obtenons les relations suivantes :

$$q_1^{(k)} = q_1^{(k-1)} + \tilde{q}_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)} \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (3.49)$$

$$q_n^{(k-1)} = q_n^{(k)} + e_n^{(k)} \tilde{q}_n^{(k)}. \quad (3.50)$$

$$\tilde{q}_{i+1}^{(k-1)} e_{i+1}^{(k-1)} + q_i^{(k-1)} = a_i^{(k)} = e_i^{(k)} \tilde{q}_i^{(k)} + q_i^{(k)}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (3.51)$$

$$q_i^{(k-1)} e_i^{(k-1)} = b_i^{(k)} = e_i^{(k)} q_{i-1}^{(k)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.52)$$

$$\tilde{q}_i^{(k-1)} = (b_i^{(k)})^T = \tilde{q}_i^{(k)} \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.53)$$

Théorème 26.

$\text{rang}(b_i^{(k)}) = \text{rang}(b_i^{(k+1)})$, $i = 2, \dots, n$, et $\forall k \in \mathbb{N}$.

Preuve.

En écrivant la relation (3.53) pour k égal à $k+1$ nous obtenons :

$$\tilde{q}_i^{(k)} = (b_i^{(k+1)})^T = \tilde{q}_i^{(k+1)} \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.54)$$

A partir de (3.53) et (3.54) nous constatons que :

$$(b_i^{(k)})^T = (b_i^{(k+1)})^T.$$

D'où le résultat.

□

Théorème 27.

Soient $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, r_1$ les valeurs propres de $q_1^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, telles que

$$\lambda_i^{(k)} \geq \lambda_{i+1}^{(k)}, \quad i = 1 \dots r_1.$$

- Dans le cas où $r_1 \leq r_2$.

Si $b_2^{(k)}$ est de rang maximum alors

$$\lambda_i^{(k)} < \lambda_i^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, r_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.55)$$

Si $b_2^{(k)}$ n'est pas de rang maximum alors

$$\lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, r_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.56)$$

- Dans le cas où $r_1 > r_2$, alors

$$\lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, r_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.57)$$

quel que soit le rang de $b_2^{(k)}$.

Preuve.

A partir de (3.52) et (3.53) nous obtenons :

$$b_2^{(k)} = q_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)}. \quad (3.58)$$

$$(b_2^{(k)})^T = \tilde{q}_2^{(k-1)}. \quad (3.59)$$

Nous multiplions (3.59) par (3.58) nous obtenons :

$$\tilde{q}_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)} = (b_2^{(k)})^T (q_2^{(k-1)})^{-1} b_2^{(k)}. \quad (3.60)$$

Puisque $q_2^{(k-1)}$ est symétrique définie positive, on peut la décomposer par Cholesky :

$$q_2^{(k-1)} = g_2^{(k-1)} (g_2^{(k-1)})^T, \quad (3.61)$$

où $g_2^{(k-1)}$ est une matrice triangulaire inférieure.

En remplaçant (3.61) dans (3.60) nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{q}_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)} &= (b_2^{(k)})^T (g_2^{(k-1)} (g_2^{(k-1)})^T)^{-1} b_2^{(k)}. \\ &= ((g_2^{(k-1)})^{-1} b_2^{(k)})^T (g_2^{(k-1)})^{-1} b_2^{(k)}. \\ &= (G_2^{(k)})^T G_2^{(k)} \end{aligned}$$

où

$$G_2^{(k)} = (g_2^{(k-1)})^{-1} b_2^{(k)},$$

les matrices $g_2^{(k-1)}$ et $b_2^{(k)}$ sont respectivement de taille $r_2 \times r_2$ et $r_2 \times r_1$, donc la matrice $G_2^{(k)}$ est de taille $r_2 \times r_1$.

Soient $\mu_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, r_1$, les valeurs propres de $\tilde{q}_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, telles que

$$\mu_i^{(k)} \geq \mu_{i+1}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_1 - 1.$$

Dans le cas où $r_1 \leq r_2$.

Si $b_2^{(k)}$ est de rang maximum, alors $G_2^{(k)}$ est aussi de rang maximum, donc $(G_2^{(k)})^T G_2^{(k)}$ est inversible.

Par conséquent $\tilde{q}_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)}$ est symétrique définie positive, donc

$$\mu_i^{(k)} > 0, \quad i = 1, \dots, r_1 - 1.$$

En appliquant le résultat du théorème 22 à la relation 3.49 nous obtenons :

$$\lambda_i^{(k-1)} + \mu_{r_1}^{(k)} \leq \lambda_i^{(k)} \leq \lambda_i^{(k)} + \mu_1^{(k)}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, r_1.$$

Donc

$$\lambda_i^{(k-1)} < \lambda_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si $b_2^{(k)}$ n'est pas de rang maximum, alors $G_2^{(k)}$ aussi n'est pas de rang maximum, donc $(G_2^{(k)})^T G_2^{(k)}$ n'est pas inversible.

Par conséquent $\tilde{q}_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)}$ est symétrique semi définie positive, donc

$$\mu_i^{(k)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r_1.$$

En appliquant le théorème 22 nous obtenons :

$$\lambda_i^{(k-1)} \leq \lambda_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas où $r_1 > r_2$

$(G_2^{(k)})^T G_2^{(k)}$ n'est pas inversible quel que soit le rang de $b_2^{(k)}$.

Par conséquent $\tilde{q}_2^{(k-1)} e_2^{(k-1)}$ est symétrique semi définie positive, donc

$$\mu_i^{(k)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r_1.$$

En appliquant le théorème 22 nous obtenons :

$$\lambda_i^{(k-1)} \leq \lambda_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

Théorème 28.

Soient $\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}$, $i = 1, \dots, r_n$, les valeurs propres de $q_n^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, telles que

$$\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)} \geq \lambda_{i+1+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1 \dots r_n - 1,$$

et $\sigma_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} r_j$.

- Dans le cas où $r_{n-1} \leq r_n$.

$$\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k-1)} \leq \lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_n, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.62)$$

quel que soit le rang de $b_n^{(k)}$.

- Dans le cas où $r_{n-1} > r_n$.

Si $b_n^{(k)}$ est de rang maximum alors

$$\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k-1)} > \lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_n, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.63)$$

Si $b_n^{(k)}$ n'est pas de rang maximum alors

$$\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k-1)} \geq \lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_n, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.64)$$

Preuve.

A partir de (3.52) et (3.53) nous obtenons :

$$b_n^{(k)} = e_n^{(k-1)} q_{n-1}^{(k)}. \quad (3.65)$$

$$(b_n^{(k)})^T = \tilde{q}_2^{(k-1)}. \quad (3.66)$$

Donc

$$b_n^{(k)} (q_{n-1}^{(k)})^{-1} = e_n^{(k-1)}. \quad (3.67)$$

$$(b_n^{(k)})^T = \tilde{q}_2^{(k-1)}. \quad (3.68)$$

En multipliant (3.67) par (3.68) nous obtenons :

$$e_n^{(k)} \tilde{q}_n^{(k)} = b_n^{(k)} (q_{n-1}^{(k)})^{-1} (b_n^{(k)})^T. \quad (3.69)$$

Puisque $(q_n^{(k)})^{-1}$ est symétrique définie positive, on peut la décomposer par Cholesky :

$$(q_n^{(k-1)})^{-1} = \tilde{g}_{n-1}^{(k)} (\tilde{g}_{n-1}^{(k)})^T, \quad (3.70)$$

où $\tilde{g}_{n-1}^{(k)}$ est une matrice triangulaire inférieure.

En remplaçant (3.70) dans (3.69) nous obtenons

$$\begin{aligned} e_n^{(k)} \tilde{q}_n^{(k)} &= b_n^{(k)} \tilde{g}_{n-1}^{(k)} (\tilde{g}_{n-1}^{(k)})^T (b_n^{(k)})^T. \\ &= b_n^{(k)} \tilde{g}_{n-1}^{(k)} (b_n^{(k)} \tilde{g}_{n-1}^{(k)})^T. \\ &= \tilde{G}_n^{(k)} (\tilde{G}_n^{(k)})^T \end{aligned}$$

où

$$\tilde{G}_n^{(k)} = b_n^{(k)} \tilde{g}_{n-1}^{(k)},$$

telle que la matrice $\tilde{g}_{n-1}^{(k)}$ est de taille $r_{n-1} \times r_{n-1}$ et la matrice $b_n^{(k)}$ est de taille $r_n \times r_{n-1}$ donc la matrice $\tilde{G}_n^{(k)}$ est de taille $r_n \times r_{n-1}$.

Soient $\tilde{\mu}_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}$, $i = 1, \dots, r_1$, les valeurs propres de $e_n^{(k)} \tilde{q}_n^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, telles que

$$\tilde{\mu}_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)} \geq \tilde{\mu}_{i+1+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_n - 1.$$

Dans le cas où $r_{n-1} < r_n$.

$\tilde{G}_n^{(k)} (\tilde{G}_n^{(k)})^T$ n'est pas inversible quel que soit le rang de $b_n^{(k)}$.

Par conséquent, $e_n^{(k)} \tilde{q}_n^{(k)}$ est symétrique semi définie positive, donc

$$\tilde{\mu}_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r_1.$$

En appliquant le résultat du théorème 22 à la relation 3.50 nous obtenons :

$$\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k-1)} \geq \lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas où $r_{n-1} \geq r_n$.

Si $b_n^{(k)}$ est de rang maximum, alors $\tilde{G}_n^{(k)}$ est aussi de rang maximum donc $\tilde{G}_n^{(k)}(\tilde{G}_n^{(k)})^T$ est inversible.

Par conséquent $e_n^{(k)}\tilde{q}_n^{(k)}$ est symétrique définie positive, donc

$$\tilde{\mu}_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)} > 0, \quad i = 1, \dots, r_1.$$

En appliquant le résultat du théorème 22 à la relation 3.50 nous obtenons :

$$\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k-1)} > \lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si $b_n^{(k)}$ n'est pas de rang maximum, alors $\tilde{G}_n^{(k)}$ n'est pas de rang maximum donc $\tilde{G}_n^{(k)}(\tilde{G}_n^{(k)})^T$ n'est pas inversible.

Par conséquent $e_n^{(k)}\tilde{q}_n^{(k)}$ est symétrique semi définie positive, donc

$$\tilde{\mu}_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r_1.$$

En appliquant le résultat du théorème 22 à la relation 3.50 nous obtenons :

$$\lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k-1)} \geq \lambda_{i+\sigma_{n-1}}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, r_1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

En conclusion nous remarquons que le cas le plus intéressant pour pouvoir obtenir une bonne borne supérieure de la plus petite valeur propre liée à la constante de Markov Bernstein, est le cas où $r_{n-1} > r_n$ et $b_n^{(k)}$ est de rang maximum. En effet nous obtenons des suites strictement décroissantes des valeurs propres du bloc $q_n^{(k)}$.

3.3.2 Convergence de l'algorithme qd par blocs

Nous allons démontrer la convergence de l'algorithme qd par blocs en suivant les démarches de la démonstration donnée par Wilkinson en [43]. Nous avons apporté des modifications à cette démonstration à cause de la structure de la matrice par blocs A_n .

Théorème 29.

Soit $A_n^{(0)}$ une matrice tridiagonale par blocs symétrique définie positive de taille $n \times n$ où ses blocs sont de taille $\ell \times \ell$.

Soit $J_n^{(0)}$ une matrice obtenue à partir de $A_n^{(0)}$ de façon que

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1}$$

soit à diagonale supérieure contenant que des blocs identités, où $T_n^{(0)}$ est une matrice diagonale par blocs.

Soit D_n une matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_i de $A_n^{(0)}$ telle que $D_n(i, i) = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n\ell$.

Soit X_n la matrice de vecteurs propres associée à D_n . Soient $\lambda_{i,j}^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, \ell$, avec $\lambda_{i,j}^{(k)} \geq \lambda_{i,j+1}^{(k)}$, $j = 1, \dots, n-1$, les valeurs propres de chaque bloc $q_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$.

i) Si

$$\lambda_i > \lambda_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n\ell - 1.$$

Et si toutes les matrices principales par blocs de X_n sont inversibles alors l'algorithme qd par blocs converge. De plus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i,j}^{(k)} = \lambda_{(i-1)\ell+j} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, \ell.$$

ii) Si η_i est l'ordre de multiplicité de λ_i avec $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, s-1$, ($s < n$), $\sum_{i=1}^s \eta_i = n\ell$, et si toutes les matrices principales par blocs de X_n et de $X_n \tilde{L}$ sont inversibles, alors l'algorithme qd par blocs converge. \tilde{L} sera donné dans la deuxième partie de la preuve.

Pour $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq s$, nous posons $\sigma_\nu = \sum_{i=1}^\nu \nu_i$ et $\tilde{\lambda}_{\sigma_{i-1}+r} = \lambda_i$, pour $r = 1, \dots, \eta_i$ et $i = 1, \dots, s$ avec la convention que $\sigma_0 = 0$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i,j}^{(k)} = \tilde{\lambda}_{(i-1)\ell+j} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, \ell.$$

Preuve.

- i) Puisque $J_n^{(0)}$ et $A_n^{(0)}$ sont semblables, alors nous avons $J_n^{(0)} = X_n D_n Y_n$ avec $Y_n = X_n^{-1}$.

$$\begin{aligned} J_n^{(k)} &= (L_n^{(k-1)})^{-1} \dots (L_n^{(0)})^{-1} J_n^{(0)} L_n^{(0)} \dots L_n^{(k-1)} \\ &= (P_n^{(k-1)})^{-1} J_n^{(0)} P_n^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Nous posons $Q_n^{(k)} = U_n^{(k)} \dots U_n^{(0)}$. Comme dans la preuve donnée par Wilkinson en [43] nous avons $(J_n^{(0)})^k = P_n^{(k)} Q_n^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

X_n a une décomposition $L_X U_X$ par blocs. Alors Y_n a aussi une décomposition $L_Y U_Y$ par blocs.

Puisque nous avons

$$\begin{aligned} J_n^{(0)} &= T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1} \\ &= T_n^{(0)} H_n^{(0)} D_n (H_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}, \end{aligned}$$

où $H_n^{(0)}$ est une matrice orthogonale de vecteurs propres de $A_n^{(0)}$ associée à D_n , tous ses mineurs principaux par blocs sont différents de 0, ainsi ceux de $(H_n^{(0)})^T$ et ceux de $(H_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}$.

Alors

$$X_n D_n^k Y_n = X_n (D_n^k L_Y D_n^{-k}) D_n^k U_Y. \quad (3.71)$$

$D_n^k L_Y D_n^{-k}$ est une matrice par blocs à diagonale unité.

On peut l'écrire comme suit :

$$D_n^k L_Y D_n^{-k} = I + F_n^{(k)}.$$

Chaque bloc $F_n^{(k)}(i, j)$ de $F_n^{(k)}$ est défini par

$$F_n^{(k)}(i, j) = \begin{cases} (D_n(i, i))^k L_Y(i, j) (D_n(j, j))^{-k} & \text{pour } i > j, \\ 0 & \text{pour } i < j. \end{cases}$$

$D_n(i, i)$ contient les valeurs propres λ_m , $1 + \ell^{i-1} \leq m \leq \ell^i$.

$D_n(j, j)$ contient les valeurs propres λ_p , $1 + \ell^{j-1} \leq p \leq \ell^j$.

Ainsi les éléments de $L_Y(i, j)$ de la ligne $m - \ell^{i-1}$ et de la colonne $p - \ell^{j-1}$

sont multipliés par $(\frac{\lambda_m}{\lambda_p})^k$.

Puisque $m > p$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_p} \right)^k = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_n^{(k)} = 0.$$

Nous avons

$$(J_n^{(0)})^k = L_X(I + U_X F_n^{(k)}(U_X)^{-1})U_X D_n^k L_Y.$$

Nous posons

$$G_n^{(k)} = U_X F_n^{(k)}(U_X)^{-1}.$$

Nous avons donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_n^{(k)} = 0.$$

Pour k suffisamment large la matrice $I + G_n^{(k)}$ est à diagonale strictement dominante (voir [42]). Par conséquent toutes ses matrices principales par blocs sont inversibles, et la décomposition LU par blocs de $I + G_n^{(k)}$ peut être écrite comme suit

$$I + G_n^{(k)} = (I + L_G^{(k)})(I + U_G^{(k)}).$$

Nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_G^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} U_G^{(k)} = 0.$$

D'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_X(I + L_G^{(k)}) = L_X.$$

Nous avons

$$(J_n^{(0)})^k = L_X(I + L_G^{(k)})(I + U_G^{(k)})U_X D_n^k U_Y$$

est la décomposition LU par blocs de $(J_n^{(0)})^k$ qui peut être identifiée à la décomposition LU de $P_n^{(k)} Q_n^{(k)}$. Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_n^{(k)} = L_X.$$

Puisque

$$J_n^{(k+1)} = (P_n^{(k)})^{-1} X_n D_n (X_n)^{-1} P_n^{(k)},$$

Alors nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_n^{(k+1)} = (L_X)^{-1} L_X U_X D_n (U_X)^{-1} (L_X)^{-1} L_X = U_X D_n (U_X)^{-1}$$

qui est une matrice triangulaire supérieure par blocs.

Les éléments du bloc diagonal de $U_X D_n (U_X)^{-1}$ sont

$$U_X(i, i) D_n(i, i) U_X^{-1}(i, i) = U_X(i, i) D_n(i, i) (U_X(i, i))^{-1}.$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_m, 1 + \ell^{i-1} \leq m \leq \ell^i$.

D'où le résultat.

ii) Nous considérons maintenant le cas où il existe quelques valeurs propres λ_i d'ordre de multiplicité $\eta_i > 1$.

Soient λ_i , $i = 1, \dots, s$, les valeurs propres de $A_n^{(0)}$ avec $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, s-1$, et η_i leurs ordres de multiplicité. Nous avons $\sum_{i=1}^s \eta_i = n\ell$. Pour $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq s$, nous posons $\sigma_\nu = \sum_{i=1}^\nu \eta_i$.

Si nous avons λ_ν tel que $\eta_\nu > 1$, alors

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_p} = 1 \quad \forall m, p \in \{\sigma_{\nu-1} + 1 \dots \sigma_\nu\}.$$

Alors nous utilisons la décomposition particulière de $D_n^k L_Y D_n^{-k}$ en (3.71). Nous posons

$$D_n^k L_Y D_n^{-k} = \tilde{L} + \tilde{F}_n^{(k)} \quad (3.72)$$

de façon que les blocs $\tilde{L}(i, i) = I$, $i = 1, \dots, n$, et que \tilde{L} ait des blocs contenant seulement les éléments scalaires de L_Y qui sont multipliés par $\frac{\lambda_m}{\lambda_p} = 1$. Par conséquent $\tilde{F}_n^{(k)}$ a seulement des blocs où ses éléments

scalaires sont multipliés par $(\frac{\lambda_m}{\lambda_p})^k$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\lambda_m}{\lambda_p})^k = 0.$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{F}_n^{(k)} = 0.$$

(3.71) devient

$$(J_n^{(0)})^k = X_n \tilde{L} (I + \tilde{L}^{-1} \tilde{F}_n^{(k)}) D_n^k U_Y.$$

où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{L}^{-1} \tilde{F}_n^{(k)} = 0.$$

Dans ce cas nous sommes obligés de poser une condition supplémentaire : $X_n \tilde{L}$ a une décomposition $\tilde{L}_X \tilde{U}_X$. Alors

$$(J_n^{(0)})^k = \tilde{L}_X (I + \tilde{U}_X \tilde{L}^{-1} \tilde{F}_n^{(k)} \tilde{U}_X^{-1}) \tilde{U}_X D_n^k U_Y.$$

Encore, pour k suffisamment large, nous avons

$$I + \tilde{U}_X \tilde{L}^{-1} \tilde{F}_n^{(k)} \tilde{U}_X^{-1} = (I + \tilde{L}_G^{(k)}) (I + \tilde{U}_G^{(k)}).$$

Nous pouvons conclure que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_n^{(k)} = \tilde{L}_X.$$

Alors

$$J_n^{(k+1)} = (P_n^{(k)})^{-1} X_n D_n (X_n)^{-1} P_n^{(k)}$$

tend vers

$$(\tilde{L}_X)^{-1} X_n D_n (X_n)^{-1} \tilde{L}_X = \tilde{U}_X (\tilde{L}^{-1} D_n \tilde{L}) (\tilde{U}_X)^{-1}.$$

Si la matrice scalaire $\tilde{L}^{-1} D_n \tilde{L}$ est découpée en blocs telle que les blocs diagonaux sont de taille $\eta_i \times \eta_i$, $i = 1, \dots, s$, alors il est clair que $\tilde{L}^{-1} D_n \tilde{L} = D_n$.

La matrice $\tilde{U}_X D_n (\tilde{U}_X)^{-1}$ est triangulaire supérieure où ses blocs contiennent les valeurs propres de $A_n^{(0)}$, d'où la convergence de l'algorithme qd par blocs. \square

Notons que dans le cas où X_n n'a pas de décomposition $L_X U_X$, nous ne pouvons pas utiliser la matrice de permutation efficacement comme nous l'avons fait dans le cas scalaire. Une matrice par blocs peut être inversible sans que ces blocs le soient. Dans ce cas nous ne pouvons pas donner une réponse au problème de convergence.

3.4 Cas d'une matrice par blocs à largeur de bande ℓ .

Dans cette partie nous appliquons la généralisation de l'algorithme qd par blocs à une matrice bande par blocs symétrique définie positive. Cette généralisation de l'algorithme qd par blocs est une extension de l'algorithme qd par blocs appliqué à une matrice tridiagonale par blocs. Les résultats que nous avons obtenu concernant le comportement des valeurs propres du premier bloc et du dernier bloc diagonaux de la matrice contenant les éléments $q^{(k)}$ obtenue dans le cas de la matrice tridiagonale par blocs, restent valable pour une matrice bande par blocs symétrique définie positive. En effet les valeurs propres du premier bloc constituent des suites strictement croissantes et celles du dernier bloc constituent des suites strictement décroissantes.

3.4.1 Généralisation de l'algorithme qd par blocs

Soit A_n une matrice par blocs symétrique définie positive à demi largeur de bande égale à ℓ de taille $n \times n$, dont les blocs sont de tailles $r \times r$. Nous notons $a_{i,j}$ pour $i, j = 1, \dots, n$, les blocs de la matrice A_n tels que $a_{i,j} = 0$ pour tout i et j tels que $|i - j| > \ell$.

Nous considérons que $a_{i,j}$ a un inverse pour tout i et j tels que $|i - j| = \ell$. Nous commençons par transformer A_n en une matrice semblable

$$J_n^{(0)} = (\hat{a}_{i,j}^{(0)})_{i,j=1}^n.$$

Nous posons $A_n^{(0)} = A_n = (a_{i,j}^{(0)})_{i,j=1}^n$.

Soit $T_n^{(0)}$ une matrice diagonale par blocs régulière dont les blocs diagonaux sont notés par $t_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, telle que

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1} \quad (3.73)$$

Donc nous avons

$$\hat{a}_{i,j}^{(0)} = t_i^{(0)} a_{i,j}^{(0)} (t_j^{(0)})^{-1} \quad (3.74)$$

$T_n^{(0)}$ est choisie de la façon suivante

$$\hat{a}_{i,i+\ell}^{(0)} = I = t_i^{(0)} a_{i,i+\ell}^{(0)} (t_{i+\ell}^{(0)})^{-1} \quad (3.75)$$

$$= t_i^{(0)} (a_{i+\ell,i}^{(0)})^T (t_{i+\ell}^{(0)})^{-1} \quad (3.76)$$

La matrice $T_n^{(0)}$ existe, mais n'est pas unique. Les ℓ premiers blocs diagonaux peuvent être choisis arbitrairement, mais réguliers. Et les autres blocs diagonaux sont déterminés d'une façon unique par la relation (3.75). Par exemple nous pouvons prendre $t_i^{(0)} = I$ pour $i = 1, \dots, \ell$.

De (3.74) nous avons

$$\hat{a}_{i,i}^{(0)} = t_i^{(0)} a_{i,i}^{(0)} (t_i^{(0)})^{-1}, \text{ pour } i = 1, \dots, n. \quad (3.77)$$

Pour tout i et j , $i \neq j$ et $|i - j| < \ell$ nous avons.

$$\begin{aligned} \hat{a}_{i,j}^{(0)} \hat{a}_{j,i}^{(0)} &= t_i^{(0)} a_{i,j}^{(0)} a_{j,i}^{(0)} (t_i^{(0)})^{-1} \\ &= t_i^{(0)} a_{i,j}^{(0)} (a_{i,j}^{(0)})^T (t_i^{(0)})^{-1} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Puisque $\hat{a}_{i,i+\ell}^{(0)} = I$, nous avons

$$\hat{a}_{i+\ell,i}^{(0)} = t_i^{(0)} a_{i,i+\ell}^{(0)} (a_{i,i+\ell}^{(0)})^T (t_i^{(0)})^{-1} \quad (3.79)$$

$$= t_{i+\ell}^{(0)} (a_{i,i+\ell}^{(0)})^T a_{i,i+\ell}^{(0)} (t_{i+\ell}^{(0)})^{-1} \quad (3.80)$$

Donc à partir des relations (3.77), (3.78), (3.79) et (3.80) nous pouvons déduire la propriété suivante.

Propriété 3.

$\hat{a}_{i,i}^{(0)}$, pour $i = 1, \dots, n$, et $\hat{a}_{i+\ell,i}^{(0)}$, pour $i = 1, \dots, n - \ell$, sont semblables à des matrices symétriques définies positives.

$\hat{a}_{i,j}^{(0)}\hat{a}_{j,i}^{(0)}$, pour tout i et j tels que $i \neq j$ et $|i - j| < \ell$, est semblable à une matrice symétrique semi définie positive.

Preuve.

$a_{i,i}^{(0)}$ est symétrique définie positive, alors le résultat est vérifié pour $\hat{a}_{i,i}^{(0)}$.

$a_{i,i+\ell}^{(0)}$ est inversible, alors le résultat est vérifié pour $\hat{a}_{i+\ell,i}^{(0)}$.

Grâce à la relation (3.78) le résultat est vérifié pour $\hat{a}_{i,j}^{(0)}\hat{a}_{j,i}^{(0)}$. \square

Maintenant nous cherchons la décomposition LU par blocs de $J_n^{(0)}$.
Tout d'abord nous rappelons le résultat par rapport à l'existence de cette décomposition.

Théorème 30. [31]

La décomposition LU d'une matrice par blocs existe si et seulement si les matrices principales par blocs de tailles $s \times s$ sont inversibles pour $s = 1, \dots, n - 1$.

Corollaire 4.

Si A_n est une matrice par blocs symétrique définie positive, alors A_n a une décomposition LU par blocs.

Par conséquent, $J_n^{(0)}$ a la décomposition LU par blocs suivante :

$$J_n^{(0)} = L_n^{(0)}U_n^{(0)}$$

Soient $e_{i,j}^{(0)}$ les blocs de $L_n^{(0)}$ et $q_{i,j}^{(0)}$ les blocs de $U_n^{(0)}$.

$e_{i,i}^{(0)} = I$, pour $i = 1, \dots, n$, et $e_{i,j}^{(0)} = 0$ pour tout i et j tels que $i > j + \ell$.

$q_{i,i+\ell}^{(0)} = I$ pour $i = 1, \dots, n - \ell$, et $q_{i,j}^{(0)} = 0$ pour tout i et j tels que $j > i + \ell$.

Ensuite nous obtenons $J_n^{(1)} = U_n^{(0)}L_n^{(0)} = (\hat{a}_{i,j}^{(1)})_{i,j=1}^n$. Nous allons démontrer que $J_n^{(1)}$ est semblable à $A_n^{(1)}$, telle que $A_n^{(1)}$ est une matrice par blocs symétrique définie positive.

Théorème 31.

$J_n^{(1)}$ et $A_n^{(1)}$ sont semblables où $A_n^{(1)}$ est une matrice bande par blocs symétrique définie positive à demi largeur de bande égale à ℓ .

Nous avons

$$J_n^{(1)} = T_n^{(1)}A_n^{(1)}(T_n^{(1)})^{-1} \quad (3.81)$$

où $T_n^{(1)}$ est une matrice diagonale par blocs et régulière.

Preuve.

$A_n^{(0)}$ a la décomposition de Cholesky par blocs suivante :

$$A_n^{(0)} = G_n^{(0)}(G_n^{(0)})^T.$$

Il y a deux façons d'écrire la matrice $G_n^{(0)}$.

En effet $A_n^{(0)}$ a la décomposition LU suivante :

$$\hat{L}_n^{(0)}\hat{U}_n^{(0)}$$

qui peut être écrite comme suit :

$$\hat{L}_n^{(0)}\hat{D}_n^{(0)}(\hat{L}_n^{(0)})^T$$

où $\hat{D}_n^{(0)}$ est une matrice diagonale par blocs contenant les blocs diagonaux de $\hat{U}_n^{(0)}$.

Chaque bloc de la diagonale de $\hat{D}_n^{(0)}$ a une décomposition de Cholesky.

Alors

$$\hat{D}_n^{(0)} = \hat{F}_n^{(0)}(\hat{F}_n^{(0)})^T,$$

où $\hat{F}_n^{(0)}$ est une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des matrices triangulaires inférieures.

Nous pouvons aussi utiliser la relation suivante :

$$\hat{D}_n^{(0)} = (\hat{D}_n^{(0)})^{\frac{1}{2}}(\hat{D}_n^{(0)})^{\frac{1}{2}}$$

où $(\hat{D}_n^{(0)})^{\frac{1}{2}}$ est une matrice diagonale par blocs symétrique définie positive.

Par conséquent nous avons deux décompositions de Cholesky de $A_n^{(0)}$

$$\begin{aligned} A_n^{(0)} &= \hat{L}_n^{(0)}\hat{F}_n^{(0)}(\hat{L}_n^{(0)}\hat{F}_n^{(0)})^T = G_n^{(0)}(G_n^{(0)})^T \\ A_n^{(0)} &= \hat{L}_n^{(0)}(\hat{D}_n^{(0)})^{\frac{1}{2}}(\hat{L}_n^{(0)}(\hat{D}_n^{(0)})^{\frac{1}{2}})^T = G_n^{(0)}(G_n^{(0)})^T. \end{aligned}$$

Elles peuvent être utilisées indifféremment.

Alors

$$\begin{aligned} J_n^{(0)} &= T_n^{(0)}G_n^{(0)}(G_n^{(0)})^T(T_n^{(0)})^{-1} \\ &= T_n^{(0)}G_n^{(0)}(T_n^{(1)})^{-1}T_n^{(1)}(G_n^{(0)})^T(T_n^{(0)})^{-1} \end{aligned} \quad (3.82)$$

où $T_n^{(1)}$ est choisie de façon que les blocs diagonaux de $T_n^{(0)}G_n^{(0)}(T_n^{(1)})^{-1}$ soient égaux à I .

Nous notons par $g_{i,i}^{(0)}$, pour $i = 1, \dots, n$, les blocs diagonaux de $G_n^{(0)}$, et nous

notons par $t_i^{(1)}$, pour $i = 1, \dots, n$, les blocs diagonaux de $T_n^{(1)}$, alors les blocs diagonaux de $T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1}$ sont les suivants :

$$t_i^{(0)} g_{ii}^{(0)} (t_i^{(1)})^{-1} = I, \text{ pour } i = 1, \dots, n. \quad (3.83)$$

D'où (3.82) est la décomposition de Cholesky par blocs de $J_n^{(0)}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} L_n^{(0)} &= T_n^{(0)} G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1} \\ U_n^{(0)} &= T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T (T_n^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$J_n^{(1)} = U_n^{(0)} L_n^{(0)} = T_n^{(1)} (G_n^{(0)})^T G_n^{(0)} (T_n^{(1)})^{-1}.$$

Nous posons $A_n^{(1)} = (G_n^{(0)})^T G_n^{(0)}$ qui est semblable à $G_n^{(0)} (G_n^{(0)})^T$. Alors $A_n^{(1)}$ est une matrice bande par blocs symétrique définie positive à demi largeur de bande égale à ℓ .

$A_n^{(1)}$ et $J_n^{(1)}$ sont semblables. \square

Nous pouvons généraliser le résultat précédent pour toute matrice $J_n^{(k)}$, $\forall k \geq 1$. À partir de la relation suivante :

$$U_n^{(k-1)} L_n^{(k-1)} = J_n^{(k)} = L_n^{(k)} U_n^{(k)}$$

nous obtenons la relation de l'algorithme qd par blocs.

Pour $1 \leq i \leq n$ et pour $\max(1, i - \ell) \leq j \leq \max(i + \ell, n)$, nous avons

$$\hat{a}_{i,j}^{(k)} = \sum_{m=\max(i-\ell, j-\ell, 1)}^{\min(i,j)} e_{i,m}^{(k)} q_{m,j}^{(k)} = \sum_{m=\max(i,j)}^{\min(i+\ell, j+\ell, n)} q_{i,m}^{(k-1)} e_{m,j}^{(k-1)}, \quad (3.84)$$

où $\hat{a}_{i,j}^{(k)}$ pour tout i et j sont les blocs de $J_n^{(k)}$.

On en déduit donc les règles de la généralisation de l'algorithme qd par blocs :

Pour $1 \leq i \leq n$ et $\max(1, i - \ell) \leq j \leq \min(i + \ell, n)$,

$$\sum_{m=\max(i-\ell, j-\ell, 1)}^{\min(i, j)} e_{i, m}^{(k)} q_{m, j}^{(k)} = \sum_{m=\max(i, j)}^{\min(i+\ell, j+\ell, n)} q_{i, m}^{(k-1)} e_{m, j}^{(k-1)}, \quad \forall k \geq 1$$

avec $e_{i, i}^{(k)} = I$ pour $i = 1, \dots, n, \forall k \in \mathbb{N}$.

$e_{i, j}^{(k)} = 0$ pour $i - j > \ell, \forall k \in \mathbb{N}$.

$q_{i, i+\ell}^{(k)} = I$ pour $i = 1, \dots, n - \ell, \forall k \in \mathbb{N}$.

$q_{i, j}^{(k)} = 0$ pour $j - i > \ell, \forall k \in \mathbb{N}$.

Nous donnons quelques propriétés de différents termes de la relation (3.84) pour $i = j = 1$ et pour $i = j = n$.

$$\begin{aligned} q_{1,1}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\ell+1} q_{1,m}^{(k-1)} e_{m,1}^{(k-1)} \\ &= q_{1,1}^{(k-1)} + \sum_{m=2}^{\ell} q_{1,m}^{(k-1)} e_{m,1}^{(k-1)} + e_{\ell+1,1}^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} q_{n,n}^{(k-1)} &= \sum_{m=n-\ell}^n e_{n,m}^{(k)} q_{m,n}^{(k)} \\ &= q_{n,n}^{(k)} + \sum_{m=n-\ell-1}^{n-1} e_{n,m}^{(k)} q_{m,n}^{(k)} + e_{n,n-\ell}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Nous voulons démontrer que chaque terme à droite de (3.85) et (3.86) est semblable à une matrice symétrique définie positive ou semi définie positive en gardant les mêmes matrices de transformation. Pour cela nous utilisons à nouveau le théorème 22.

Théorème 32.

Soit $A_n^{(k)}$ une matrice déduite de $J_n^{(k)}$ (voir théorème 31).

$$J_n^{(k)} = T_n^{(k)} A_n^{(k)} (T_n^{(k)})^{-1} \quad (3.87)$$

Nous notons la décomposition LU par blocs de $A_n^{(k)}$ par

$$\hat{L}_n^{(k)} \hat{U}_n^{(k)} = \hat{L}_n^{(k)} (\hat{D}_n^{(k)}) (\hat{L}_n^{(k)})^T = A_n^{(k)}. \quad (3.88)$$

Soient $\hat{u}_{i,i}^{(k)}$, pour $i = 1, \dots, n$, les blocs diagonaux de $\hat{U}_n^{(k)}$ qui sont symétriques définis positifs.

Alors nous avons.

$$q_{i,i}^{(k)} = t_i^{(k)} \hat{u}_{i,i}^{(k)} (t_i^{(k)})^{-1} \text{ pour } i = 1, \dots, n, \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} (\hat{u}_{ii}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} (t_i^{(k)})^{-1} e_{i+\ell,i}^{(k)} t_i^{(k)} (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{\frac{1}{2}} &= (\hat{u}_{ii}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} a_{i,i+\ell}^{(k)} (a_{i,i+\ell}^{(k)})^T (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} \\ \text{pour } i &= 1, \dots, n - \ell, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} (\hat{u}_{11}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} (t_1^{(k)})^{-1} q_{1,m}^{(k)} e_{m,1}^{(k)} t_1^{(k)} (\hat{u}_{11}^{(k)})^{\frac{1}{2}} &= (\hat{u}_{11}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} a_{1,m}^{(k)} (a_{1,m}^{(k)})^T (\hat{u}_{11}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} \\ \text{pour } m &= 2, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Preuve.

a) À partir des relations (3.87) et (3.88) nous avons

$$J_n^{(k)} = T_n^{(k)} \hat{L}_n^{(k)} (T_n^{(k)})^{-1} T_n^{(k)} \hat{D}_n^{(k)} (\hat{L}_n^{(k)})^T (T_n^{(k)})^{-1},$$

et

$$U_n^{(k)} = T_n^{(k)} \hat{D}_n^{(k)} (\hat{L}_n^{(k)})^T (T_n^{(k)})^{-1}.$$

Ainsi les blocs de la diagonale principale de $U_n^{(k)}$ sont ceux donnés en (3.89)

b) De la relation (3.84) et en utilisant (3.79) et (3.89), nous obtenons pour $i = 1, \dots, n - \ell$, la relation suivante :

$$\begin{aligned} e_{i+\ell,i}^{(k)} &= \hat{a}_{i+\ell,i}^{(k)} (q_{i,i}^{(k)})^{-1} \\ &= t_i^{(k)} a_{i,i+\ell}^{(k)} (a_{i,i+\ell}^{(k)})^T (t_i^{(k)})^{-1} t_i^{(k)} (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{-1} (t_i^{(k)})^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$e_{i+\ell,i}^{(k)} = t_i^{(k)} a_{i,i+\ell}^{(k)} (a_{i,i+\ell}^{(k)})^T (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{-1} (t_i^{(k)})^{-1}.$$

Puisque $\hat{u}_{i,i}^{(k)}$ est symétrique définie positive, alors

$$\hat{u}_{i,i}^{(k)} = (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{\frac{1}{2}} (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{\frac{1}{2}} \quad (3.92)$$

où $(\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{\frac{1}{2}}$ est aussi symétrique définie positive.

Par conséquent

$$(\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} (t_i^{(k)})^{-1} e_{i+\ell,i}^{(k)} t_i^{(k)} (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{\frac{1}{2}} = (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} a_{i,i+\ell}^{(k)} (a_{i,i+\ell}^{(k)})^T (\hat{u}_{i,i}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous constatons que le membre de droite de cette relation est une matrice symétrique définie positive.

c) De la relation (3.84) nous obtenons pour $m = 2, \dots, \ell$, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{a}_{1,m}^{(k)} &= e_{1,1}^{(k)} q_{1,m}^{(k)} = q_{1,m}^{(k)} \\ \hat{a}_{m,1}^{(k)} &= e_{m,1}^{(k)} q_{1,1}^{(k)}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\hat{a}_{1,m}^{(k)} \hat{a}_{m,1}^{(k)} = q_{1,m}^{(k)} q_{m,1}^{(k)} q_{1,1}^{(k)}.$$

En utilisant (3.78) et (3.89) nous obtenons

$$\begin{aligned}q_{1,m}^{(k)} e_{m,1}^{(k)} &= t_1^{(k)} a_{1,m}^{(k)} (a_{1,m}^{(k)})^T (t_1^{(k)})^{-1} (q_{11}^{(k)})^{-1} \\ &= t_1^{(k)} a_{1,m}^{(k)} (a_{1,m}^{(k)})^T (t_1^{(k)})^{-1} t_1^{(k)} (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-1} (t_1^{(k)})^{-1}.\end{aligned}$$

Enfin en utilisant (3.92) nous obtenons la relation (3.91) dont le membre de droite est une matrice symétrique semi définie positive. \square

Corollaire 5.

Pour $i = 1, \dots, n$, $q_{i,i}^{(k)}$ est semblable à une matrice symétrique définie positive.

Pour $i = 1, \dots, n - \ell$, $e_{i+\ell,i}^{(k)}$ est semblable à une matrice symétrique définie positive.

Pour $m = 2, \dots, \ell$, $q_{1,m}^{(k)} e_{m,1}^{(k)}$ est semblable à une matrice semi définie positive.

Théorème 33.

Pour $n - \ell \leq m \leq n - 1$ nous avons

$$e_{n,m}^{(k+1)} q_{m,n}^{(k+1)} = t_n^{(k+1)} ((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)} (((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)})^T (t_n^{(k+1)})^{-1} \quad (3.93)$$

où $g_{n,n}^{(k+1)} (g_{n,n}^{(k+1)})^T$ est la décomposition de Cholesky de $\hat{u}_{n,n}^{(k+1)}$.

Pour $m = n - \ell$, $q_{n-\ell,n}^{(k+1)} = I$.

Preuve.

A partir de (3.84) nous avons les relations suivantes pour $n - \ell \leq m \leq n$,

$$\begin{aligned}\hat{a}_{n,m}^{(k+2)} &= q_{n,n}^{(k+1)} e_{n,m}^{(k+1)}, \\ \hat{a}_{m,n}^{(k+2)} &= q_{m,n}^{(k+1)} e_{n,n}^{(k+1)} = q_{m,n}^{(k+1)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\hat{a}_{n,m}^{(k+2)} \hat{a}_{m,n}^{(k+2)} = q_{n,n}^{(k+1)} e_{n,m}^{(k+1)} q_{m,n}^{(k+1)}.$$

En utilisant (3.89) et (3.78) nous obtenons

$$\begin{aligned} e_{n,m}^{(k+1)} q_{m,n}^{(k+1)} &= t_n^{(k+1)} (\hat{u}_{n,n}^{(k+1)})^{-1} (t_n^{(k+1)})^{-1} \hat{a}_{n,m}^{(k+2)} \hat{a}_{m,n}^{(k+2)} \\ &= t_n^{(k+1)} (\hat{u}_{n,n}^{(k+1)})^{-1} (t_n^{(k+1)})^{-1} t_n^{(k+2)} a_{n,m}^{(k+2)} (a_{m,n}^{(k+2)})^T (t_n^{(k+2)})^{-1} \end{aligned}$$

A partir de (3.83) nous avons

$$g_{n,n}^{(k+1)} = (t_n^{(k+1)})^{-1} t_n^{(k+2)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} e_{n,m}^{(k+1)} q_{m,n}^{(k+1)} &= t_n^{(k+1)} (\hat{u}_{n,n}^{(k+1)})^{-1} g_{n,n}^{(k+1)} a_{n,m}^{(k+2)} (a_{n,m}^{(k+2)})^T (t_n^{(k+2)})^{-1} \\ &= t_n^{(k+1)} (\hat{u}_{n,n}^{(k+1)})^{-1} g_{n,n}^{(k+1)} a_{n,m}^{(k+2)} (a_{n,m}^{(k+2)})^T (g_{n,n}^{(k+1)})^{-1} (t_n^{(k+1)})^{-1} \\ &= t_n^{(k+1)} ((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)} (a_{n,m}^{(k+2)})^T (g_{n,n}^{(k+1)})^{-1} (t_n^{(k+1)})^{-1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Corollaire 6.

Pour $n - \ell - 1 \leq m \leq n - 1$, $e_{n,m}^{(k+1)} q_{m,n}^{(k+1)}$ est semblable à la matrice symétrique semi définie positive suivante :

$$((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)} ((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)}{}^T. \quad (3.94)$$

Pour $m = n - \ell$, $e_{n,m}^{(k+1)} q_{m,n}^{(k+1)} = e_{n,m-\ell}^{(k+1)}$ est semblable à la matrice symétrique définie positive donnée par (3.94) pour $m = n - \ell$.

Nous pouvons maintenant donner le résultat concernant le comportement des valeurs propres de $q_{11}^{(k)}$ et de $q_{n,n}^{(k)}$.

Théorème 34.

Soient $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, r$, les valeurs propres de $q_{11}^{(k)}$ telles que

$$\lambda_i^{(k)} \geq \lambda_{i+1}^{(k)}, \text{ pour } i = 1, \dots, r - 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\lambda_i^{(k)} < \lambda_i^{(k+1)}, \forall i = 1, \dots, r \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Preuve.

A partir de (3.84) nous avons

$$q_{11}^{(k+1)} = q_{11}^{(k)} + \sum_{m=2}^{\ell} q_{1,m}^{(k)} e_{m,1}^{(k)} + e_{\ell+1,1}^{(k)}.$$

Les deux membres de cette relation sont multipliés à gauche par $(\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}(t_1^{(k)})^{-1}$ et à droite par $t_1^{(k)}(\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$.

Alors en utilisant (3.89), (3.90) et (3.91) nous obtenons

$$(\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}(t_1^{(k)})^{-1} q_{11}^{(k+1)} t_1^{(k)} (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} = \hat{u}_{1,1}^{(k)} + \sum_{m=2}^{\ell+1} (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} a_{1,m}^{(k)} (a_{1,m}^{(k)})^T (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.95)$$

$q_{11}^{(k+1)}$ et $\hat{u}_{1,1}^{(k)} + \sum_{m=2}^{\ell+1} (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} a_{1,m}^{(k)} (a_{1,m}^{(k)})^T (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$ sont semblables.

Donc $q_{11}^{(k+1)}$ est égale à la somme de la matrice symétrique définie positive $\hat{u}_{1,1}^{(k)}$ et d'une autre matrice symétrique définie positive

$$\sum_{m=2}^{\ell+1} (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} a_{1,m}^{(k)} (a_{1,m}^{(k)})^T (\hat{u}_{1,1}^{(k)})^{-\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent nous pouvons appliquer le théorème 22. D'où le résultat. \square

Théorème 35.

Soit $\lambda_i^{(k)}$, $i = (n-1)r + 1, \dots, nr$, les valeurs propres de $q_{n,n}^{(k)}$ telles que

$$\lambda_i^{(k)} \geq \lambda_{i+1}^{(k)} \quad \text{pour } i = (n-1)r + 1, \dots, nr - 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\lambda_i^{(k)} > \lambda_i^{(k+1)} \quad \forall i = (n-1)r + 1, \dots, nr \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Preuve.

De (3.84) nous avons

$$q_{n,n}^{(k+1)} = q_{n,n}^{(k+1)} + \sum_{m=n-\ell+1}^{n-1} e_{n,m}^{(k+1)} q_{m,n}^{(k+1)} + e_{n,n-\ell}^{(k+1)}. \quad (3.96)$$

Les deux membres de cette relation sont multipliés à gauche par $(t_n^{(k+1)})^{-1}$ et à droite par $t_n^{(k+1)}$. Alors, en utilisant (3.89) et (3.93) nous obtenons

$$(t_n^{(k+1)})^{-1} q_{n,n}^{(k+1)} t_n^{(k+1)} = \hat{u}_{n,n}^{(k+1)} + \sum_{m=n-\ell}^{n-1} ((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)} (((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)})^T \quad (3.97)$$

$q_{n,n}^{(k)}$ est semblable à la matrice à droite de la relation (3.97).

$q_{n,n}^{(k)}$ est égale à la somme de la matrice symétrique définie positive $\hat{u}_{n,n}^{(k+1)}$ et une autre matrice symétrique définie positive

$$\sum_{m=n-\ell}^{n-1} ((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)} (((g_{n,n}^{(k+1)})^{-1})^T a_{n,m}^{(k+2)})^T.$$

Par conséquent nous pouvons appliquer le théorème 22. D'où le résultat. \square

3.4.2 Convergence de la généralisation de l'algorithme qd par blocs.

Dans la partie précédente nous avons démontré la convergence de l'algorithme qd appliqué à une matrice tridiagonale par blocs symétrique définie positive de taille $n \times n$ (voir aussi [18]). En fait nous n'avons pas utilisé dans la démonstration la condition particulière que la matrice est tridiagonale par blocs. Par conséquent le résultat reste valable pour le cas d'une matrice bande par blocs symétrique définie positive à demi largeur de bande égale à ℓ . Nous donnons le théorème suivant :

Théorème 36. ([18])

Soit $A_n^{(0)}$ une matrice de taille $n \times n$ bande par blocs symétrique définie positive à demi largeur de bande égale à ℓ où ses blocs notés par $a_{i,j}^{(0)}$, $i, j = 1, \dots, n$ sont de taille $r \times r$.

Nous assurons que les blocs $a_{i+\ell,i}^{(0)}$ sont inversibles pour $i = 1, \dots, n - \ell$.

Soit la matrice $J_n^{(0)}$ obtenue à partir de $A_n^{(0)}$ telle que

$$J_n^{(0)} = T_n^{(0)} A_n^{(0)} (T_n^{(0)})^{-1} = (\hat{a}_{i,j}^{(0)})_{i,j=1}^n$$

où $\hat{a}_{i,i+\ell}^{(0)} = I$ pour $i = 1, \dots, n - \ell$, et $T_n^{(0)}$ une matrice diagonale par blocs.

Soit D_n une matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_i de $A_n^{(0)}$ telle que

$$D_n(i, i) = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, nr.$$

Soit X_n une matrice des vecteurs propres associée à D_n .

Soient $\lambda_{i,j}^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, r$, avec $\lambda_{i,j}^{(k)} \geq \lambda_{i,j+1}^{(k)}$, $j = 1, \dots, n - 1$, les valeurs propres de chaque bloc $q_{i,i}^{(k)}$, $j = 1, \dots, n$.

1. Si

$$\lambda_i > \lambda_{i+1}, \quad i = 1, \dots, nr - 1$$

et si toutes les matrices principales par blocs de X_n sont inversibles, Alors l'algorithme qd par blocs converge.

De plus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i,j}^{(k)} = \lambda_{(i-1)r+j}, \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, r.$$

2. Si η_i est l'ordre de multiplicité de λ_i avec $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, s-1$, ($s < n$), $\sum_{i=1}^s \eta_i = nr$, et si toutes les matrices principales par blocs de X_n et de $X_n \tilde{L}$ sont inversibles, alors l'algorithme qd par blocs converge. \tilde{L} est obtenue comme suit :

Pour $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leq \nu \leq s$, nous posons $\sigma_\nu = \sum_{i=1}^{\eta_i} \nu_i$ et $\tilde{\lambda}_{\sigma_{i-1}+m} = \lambda_i$, pour $m = 1, \dots, \eta_i$ et $i = 1, \dots, s$ avec la convention que $\sigma_0 = 0$.

Soit $Y_n = X_n^{-1}$ et $L_Y U_Y$ la décomposition LU de Y_n . Si λ_ν est tel que $\eta_\nu > 1$, alors

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_p} = 1 \quad \forall m, p \in \{\sigma_{\nu-1} + 1, \dots, \sigma_\nu\}.$$

Ensuite nous utilisons la décomposition particulière de $D_n^k L_Y D_n^{-k}$:

$$D_n^k L_Y D_n^{-k} = \tilde{L} + \tilde{F}_n^{(k)}$$

de façon que $\tilde{L}(i, i) = I$, $i = 1, \dots, n$, et que les blocs de \tilde{L} contiennent seulement les éléments scalaires de L_Y qui sont multipliés par tous les $(\frac{\lambda_m}{\lambda_p})^k$ tels que $\frac{\lambda_m}{\lambda_p} = 1$. Par conséquent, seulement les blocs de $\tilde{F}_n^{(k)}$

ont des éléments scalaires multipliés par tous les $(\frac{\lambda_m}{\lambda_p})^k$ tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\lambda_m}{\lambda_p})^k = 0.$$

De plus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{i,j}^{(k)} = \tilde{\lambda}_{(i-1)r+j} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, r.$$

Nous citons une remarque concernant la convergence (voir [18]) : si nous avons quelques matrices principales par blocs de X_n qui ne sont pas inversibles, nous ne pouvons pas déduire des résultats par rapport à la convergence.

Chapitre **4**

Obtention d'une borne inférieure

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous cherchons une borne inférieure de la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique pentadiagonale d'une part et d'une matrice tridiagonale par blocs d'autre part. Dans le premier cas nous étudions les polynômes caractéristiques en établissant une relation de récurrence entre les polynômes caractéristiques des matrices d'ordres successifs.

Puis nous appliquons la méthode de Newton à l'origine pour obtenir un mineur ayant le même comportement asymptotique que la plus petite racine du polynôme caractéristique.

Dans le deuxième cas nous établissons une relation de récurrence à trois termes entre les polynômes orthogonaux matriciels, et aussi par la méthode de Newton, nous proposons un mineur de la plus petite racine latente dans le cas de la mesure de Jacobi.

4.2 Développement d'un déterminant caractéristique d'une matrice pentadiagonale

Soit A_n la matrice symétrique de taille $n \times n$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & & & & \\ b_2 & a_2 & b_3 & c_4 & & & \circ \\ c_3 & b_3 & a_3 & b_4 & c_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-1} & c_n \\ \circ & & & c_{n-1} & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & & c_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Nous notons par Q_n le déterminant de A_n et par $M_{(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k), n}$ le mineur obtenu de A_n en supprimant les lignes i_1, \dots, i_k et les colonnes j_1, \dots, j_k . $\det A_n$ est développé par rapport à la dernière ligne. Nous obtenons

$$Q_n = a_n Q_{n-1} - b_n M_{(n; n-1), n} + c_n M_{(n; n-2), n}, \quad (4.1)$$

$$M_{(n; n-1), n} = b_n Q_{n-2} - c_n M_{(n-2; n-1), n-1}, \quad (4.2)$$

$$M_{(n; n-2), n} = b_n M_{(n-1; n-2), n-1} - c_n M_{(n-2; n-2), n-1}, \quad (4.3)$$

$$M_{(n-1; n-1), n} = a_n Q_{n-2} - c_n M_{(n, n-1; n-2, n-1), n}, \quad (4.4)$$

$$M_{(n, n-1; n-2, n-1), n} = c_n Q_{n-3}. \quad (4.5)$$

(4.4) et (4.5) nous donne

$$M_{(n-1; n-1), n} = a_n Q_{n-2} - c_n^2 Q_{n-3}. \quad (4.6)$$

Ainsi (4.3) peut être écrit comme suit

$$M_{(n;n-2),n} = b_n M_{(n-1;n-2),n-1} - c_n (a_{n-1} Q_{n-3} - c_{n-1}^2 Q_{n-4}). \quad (4.7)$$

En utilisant (4.7) et (4.1) nous avons

$$b_n (M_{(n;n-1),n} - c_n M_{(n-1;n-2),n-1}) = -Q_n + a_n Q_{n-1} - c_n^2 (a_{n-1} Q_{n-3} - c_{n-1}^2 Q_{n-4}). \quad (4.8)$$

$M_{(n;n-1),n}$ est obtenue de (4.2) et (4.8).

$$2b_n (M_{(n;n-1),n} = b_n^2 Q_{n-2} - Q_n + a_n Q_{n-1} - c_n^2 (a_{n-1} Q_{n-3} - c_{n-1}^2 Q_{n-4}) \quad (4.9)$$

et nous remplaçons $M_{(n;n-1),n}$ et $M_{(n-1;n-2),n}$ en (4.2) par (4.9).

Par conséquent

$$\begin{aligned} b_{n-1} Q_n &= (b_{n-1} a_n - b_n c_n) Q_{n-1} + b_n (c_n a_{n-1} - b_n b_{n-1}) Q_{n-2} \\ &\quad - b_{n-1} c_n (c_n a_{n-1} - b_n b_{n-1}) Q_{n-3} \\ &\quad - c_n c_{n-1}^2 (b_n a_{n-2} - b_{n-1} c_n) Q_{n-4} + b_n c_n c_{n-1}^2 c_{n-2}^2 Q_{n-4}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Théorème 37.

Le déterminant d'une matrice symétrique pentadiagonale satisfait la relation de récurrence à six termes (4.10). On peut prendre comme initialisation

$$Q_0 = 1, \quad Q_{-1} = Q_{-2} = Q_{-3} = Q_{-4} = 0.$$

4.2.1 Application à la mesure de Jacobi.

Nous allons chercher une borne inférieure de la constante de l'inégalité de Markov Bernstein qui est liée à la plus petite valeur propre de la matrice A (voir page 214 [12]), en utilisant la méthode de Newton.

Les éléments de la matrice A sont indiqués dans la section 3.2.1 (voir aussi [18]).

Soit le polynôme $P_n(x) = \det(xI - A_n)$.

Les racines de ce polynôme sont notées $r_{i,n}$, pour $i = 1, \dots, n$, avec

$$r_{1,n} \geq r_{2,n} \geq \dots \geq r_{n,n} > 0.$$

Nous appliquons la méthode de Newton avec 0 comme point d'initialisation. Nous obtenons

$$-\frac{P_n(0)}{P_n'(0)} < r_{n,n}, \text{ avec } P_n(0) = (-1)^n \det(A_n).$$

Pour calculer $\det(A_n)$ nous avons constaté que la façon la plus simple, est d'utiliser la décomposition Cholesky qu'on peut déduire à partir de la formule donnée en [12] page 208-210.

Donc nous avons $A_n = G_n(G_n)^T$ avec les éléments de G_n qui sont les suivants :

$$\begin{aligned} G_n(i, i) &= \frac{2}{(\alpha + \beta + 2i)} \sqrt{\frac{(\alpha + i)(\beta + i)(\alpha + \beta + i)}{i(\alpha + \beta + 2i - 1)(\alpha + \beta + 2i + 1)}}, \\ &\text{pour } i = 1, \dots, n, \\ G_n(i + 1, i) &= \frac{2(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta + 2i)(\alpha + \beta + 2i + 2)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n - 1, \\ G_n(i + 2, i) &= -2\sqrt{\frac{(i + 1)(\alpha + i + 1)(\beta + i + 1)(\alpha + \beta + 2i + 3)}{(\alpha + \beta + i + 1)(\alpha + \beta + 2i + 1)}}, \\ &\text{pour } i = 1, \dots, n - 2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Par conséquent

$$\det A_n = (\det G_n)^2 = \prod_{i=1}^n G_n(i, i).$$

$$\begin{aligned} P_n(0) &= (-1)^n \frac{2^{2n}}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{(\alpha + i)(\beta + i)(\alpha + \beta + i)}{(\alpha + \beta + 2i - 1)(\alpha + \beta + 2i)^2(\alpha + \beta + 2i + 1)} \\ &= (-1)^n \frac{2^{2n}}{n!} \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha + i)(\beta + i)}{\prod_{i=2}^{2n+1} (\alpha + \beta + i) \prod_{i=n+1}^{2n} (\alpha + \beta + i)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En utilisant les relations données dans le paragraphe précédent, nous obtenons la relation de récurrence à six termes satisfaite par P_n , $\forall n \geq 3$,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - a_n + \frac{b_n c_n}{b_{n-1}}) P_{n-1}(x) - (\frac{b_n c_n}{b_{n-1}} (x - a_{n-1}) + b_n^2) P_{n-2}(x) \\ &\quad - (c_n^2 (x - a_{n-1}) + b_n c_n b_{n-1}) P_{n-3}(x) \\ &\quad + (\frac{b_n c_n}{b_{n-1}} c_{n-1}^2 (x - a_{n-2}) + c_n^2 c_{n-1}^2) P_{n-4}(x) \\ &\quad - \frac{b_n c_n}{b_{n-1}} c_{n-1}^2 c_{n-2}^2 P_{n-5}(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec l'initialisation

$$P_{-2}(x) = P_{-1}(x) = 0,$$

$$P_0(x) = 1,$$

$P_1(x) = x - a_1,$
 $P_2(x) = (x - a_2)P_1(x) - b_2^2 P_0(x),$
 et la convention que $c_i = 0$ si $i \leq 2$.
 $P'_n(0)$ peut être déduit par récurrence sur n par l'utilisation de la dérivation de (4.13) et la relation (4.12).
 $P'_1(0) = 1$ et

$$P'_n(0) = (-1)^{n-1}(n+1) \frac{2^{2n-3}}{(n-1)!} \frac{\prod_{i=2}^n (\alpha+i)(\beta+i)}{\prod_{i=3}^{2n+1} (\alpha+\beta+i) \prod_{i=n+3}^{2n} (\alpha+\beta+i)}, \quad \forall n \geq 2.$$

Donc

$$-\frac{P_n(0)}{P'_n(0)} = \frac{8(\alpha+1)(\beta+1)}{n(n+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+n+1)_2} < r_{n,n}.$$

Théorème 38.

$$\|p'\| \leq \frac{1}{\sqrt{r_{n,n}}} \|p\| \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}_n,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme associée à L^2 .

Le produit scalaire dans le cas de la mesure de Jacobi est

$$\int_{-1}^1 \bullet (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \quad \text{avec } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1.$$

On a

$$\frac{8(\alpha+1)(\beta+1)}{n(n+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+n+1)_2} \leq r_{n,n}. \quad (4.14)$$

4.2.2 Comparaison avec le cas Gegenbauer.

Maintenant nous allons comparer le résultat du théorème 38 avec celui donné en [12] et en [10].

Pour $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ nous rappelons la mesure de Gegenbauer :

$$\int_{-1}^1 \cdot (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx \quad \text{avec } \lambda > -1/2.$$

Comme nous avons expliqué dans le premier chapitre, dans le cas Gegenbauer, la matrice $(G_{n,1}^{(1)})^{-1} K_{n,1} ((G_{n,1}^{(1)})^T)^{-1}$ peut être transformée en une matrice diagonale par blocs de taille 2×2 , les deux blocs diagonaux sont tridiagonaux.

Le premier bloc correspond à des lignes et colonnes paires et le deuxième bloc correspond à des lignes et colonnes impaires.

La borne inférieure de la plus petite valeur propre du premier bloc de taille $j \times j$ (resp. du deuxième bloc de taille $i \times i$), donné en [12] par l'utilisation de la méthode de Newton, sera notée $\hat{\eta}_j$ (resp. $\tilde{\eta}_i$).

Tout d'abord nous avons

$$\hat{\eta}_k = \frac{2\lambda + 1}{2k(k + \lambda)(2k^2 + 2k\lambda - 1)}, \quad (4.15)$$

$$\tilde{\eta}_k = \frac{2\lambda + 1}{4(k)_2(k + \lambda)_2}. \quad (4.16)$$

À cause de la progression de la taille de la matrice $K_{n,1}$, nous devons comparer η_{2k-1} (donné par (4.14)) avec $\hat{\eta}_k$, et η_{2k} avec $\tilde{\eta}_k$.

$$\hat{\eta}_k - \eta_{2k-1} = \frac{(2\lambda + 1)}{(2k - 1)_2(4k - 1)(\lambda + k)(2k + \lambda - 1)(4k + 2\lambda - 1)} \times \frac{\hat{v}_k(\lambda)}{(k(2\lambda + 1) + (k - 1)(2k + 1))}$$

avec

$$\hat{v}_k(\lambda) = \left(\frac{1}{2}(2k - 1)(62k^3 - 95k^2 + 45k - 6) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(60k^3 - 86k^2 + 39k - 5 + (2\lambda + 1)(7k^2 - 6k + 1))\right).$$

$$\tilde{\eta}_k - \eta_{2k} = \frac{(2\lambda + 1)\tilde{v}_k(\lambda)}{4(k)_2(4k + 1)(\lambda + k)_2(2k + \lambda)(4k + 2\lambda + 1)}$$

avec

$$\tilde{v}_k(\lambda) = \frac{1}{4}(124k^3 - 4k^2 - 7k + 1) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(30k^2 + 2k - 1 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(7k + 1)).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \eta_{2k-1} &< \hat{\eta}_k, \\ \eta_{2k} &< \tilde{\eta}_k. \end{aligned}$$

En conclusion il est meilleur d'utiliser la borne inférieure $\hat{\eta}_k$ ou $\tilde{\eta}_k$ dans le cas Gegenbauer, car pour trouver une borne inférieure de la même plus petite valeur propre, nous appliquons la méthode de Newton avec comme point de départ 0 dans le théorème 19 à une matrice qui a une taille deux fois plus grande par rapport à celle de blocs diagonaux utilisé en [12].

4.3 Cas d'une matrice tridiagonale par blocs

Nous cherchons une borne inférieure de la plus petite valeur propre d'une matrice tridiagonale par blocs. Cette matrice est associée à une relation de récurrence à trois termes entre les polynômes orthogonaux matriciels. Nous rappelons que les valeurs propres de cette matrice de Jacobi sont aussi les racines latentes du polynôme matriciel obtenu à partir de la relation de récurrence à trois termes, et nous rappelons aussi que la racine latente est un scalaire pour laquelle le polynôme matriciel n'est pas inversible.

Soit le polynôme matriciel $P_k(x)$ de taille $\ell \times \ell$, définie par la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$\begin{cases} P_{k+1}(x) = (Ix + B_{k+1})P_k(x) - C_{k+1}P_{k-1}(x) \\ P_0(x) = I, P_1(x) = Ix + B_{k+1}, \end{cases}$$

les coefficients matriciels B_{k+1} et C_{k+1} sont de taille $\ell \times \ell$ et I est la matrice identité de taille $\ell \times \ell$.

Soient r_i , $i = 1, \dots, (k+1)\ell$ les racines latentes de $P_k(x)$ ordonnées de façon que :

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{(k+1)\ell} > 0.$$

Pour obtenir une borne inférieure de la plus petite racine latente, nous utilisons la méthode de Newton avec comme point de départ 0 ($x = 0$). Donc nous avons

$$x_1 = -\frac{\det(P_k(0))}{\det(\frac{d}{dx}P_k(0))} < r_{(k+1)\ell}.$$

Nous commençons par le calcul du déterminant de $P_k(x)$ en $x = 0$. Nous notons $\hat{P}_{(k+1)\ell}(x) = \det(P_{k+1}(x))$ le polynôme en x de degré $(k+1)\ell$. Nous avons pour $x = 0$

$$\hat{P}_{(k+1)\ell}(0) = \det(P_{k+1}(0))$$

Pour le calcul de $\hat{P}_{(k+1)\ell}(0)$ nous utilisons la relation de récurrence à trois termes suivante pour $x = 0$:

$$\begin{cases} P_{k+1}(0) = B_{k+1}P_k(0) - C_{k+1}P_{k-1}(0) \\ P_1(0) = B_{k+1}. \end{cases}$$

Nous notons A_{k+1} la matrice de taille $(k+1) \times (k+1)$ tridiagonale par blocs dont les blocs sont de taille $\ell \times \ell$.

A_{k+1} est symétrique définie positive, donc on peut la décomposer par la décomposition de Cholesky, nous avons donc

$$A_{k+1} = G_{k+1}G_{k+1}^T.$$

G_{k+1} est une matrice bidiagonale inférieure à blocs diagonaux, ses éléments sont donnés précédemment (voir la relation (4.11)).

Par conséquent nous pouvons calculer le déterminant de A_{k+1} comme suit :

$$\begin{aligned}\det A_{k+1} &= \det(G_{k+1}G_{k+1}^T) \\ &= \prod_{i=1}^{k+1} (\det(G_{k+1}G_{k+1}^T))^2.\end{aligned}$$

Nous pouvons le calculer aussi par la méthode suivante :

$$\det A_{k+1} = (-1)^{(k+1)\ell} \det(P_{k+1}(0)),$$

avec

$$\det(P_{k+1}(0)) = \prod_{i=1}^{(k+1)\ell} r_i (-1)^{(k+1)\ell}.$$

Maintenant nous calculons le déterminant de $\frac{d}{dx}P_k(0)$.

Nous avons

$$\det\left(\frac{d}{dx}\hat{P}_{(k+1)\ell}(0)\right) = \frac{d}{dx}P_{k+1}(x) \Big|_{x=0}$$

Nous notons

$$P_{k+1}(x) = (P_i^{(k+1)}(x))_{i=1}^\ell,$$

où $P_i^{(k+1)}(x)$ représente la $i^{\text{ème}}$ colonne de $P_{k+1}(x)$.

Et nous notons

$$P_{k+1,j}(x) = (\hat{P}_i^{(k+1)}(x))_{i=1}^\ell,$$

où $\hat{P}_i^{(k+1)}(x)$ représente la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $P_{k+1,j}(x)$ définie comme suit :

$$\hat{P}_i^{(k+1)}(x) = \begin{cases} P_i^{(k+1)}(x) & \text{si } i \neq j \\ \frac{d}{dx}P_i^{(k+1)}(x) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Nous utilisons la propriété de la dérivée du déterminant suivante :

$$\frac{d}{dx} \det(P_{k+1}(x)) = \sum_{j=1}^{\ell} \det(P_{k+1,j}(x)).$$

En $x = 0$ nous avons donc

$$\frac{d}{dx} \det(P_{k+1}(x)) \Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{\ell} \det(P_{k+1,j}(0)).$$

En conclusion la borne inférieure de la plus petite racine latente de $P_{k+1}(x)$ est :

$$x_1 = -\frac{\det(P_k(0))}{\sum_{j=1}^{\ell} \det(P_{k+1,j}(0))} < r_{(k+1)\ell}.$$

4.3.1 Application à la mesure de Jacobi

Nous cherchons une borne inférieure de la plus petite valeur propre de la matrice A_{2n} obtenue dans le cas de la mesure de Jacobi.

A_{2n} est une matrice tridiagonale par blocs symétrique définie positive de taille $(2n \times 2n)$. Nous avons

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} a_1 & b_2^T & & \circ \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_n^T \\ \circ & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Les blocs a_i et b_i pour $i = 1, \dots, n$ sont de taille (2×2) et définis comme suit :

$$a_i = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{2i-1} & \tilde{b}_{2i} \\ \tilde{b}_{2i} & \tilde{a}_{2i} \end{pmatrix} \quad \forall i \geq 1,$$

et

$$b_i = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{2i-1} & \tilde{b}_{2i+1} \\ 0 & \tilde{c}_{2i} \end{pmatrix} \quad \forall i \geq 2.$$

\tilde{a}_i , \tilde{b}_i et \tilde{c}_i , $i = 1, \dots, n$ sont les coefficients scalaires de A_{2n} obtenus dans la partie précédente (voir aussi [15]).

Soit $J_{2n} = T_{2n}A_{2n}(T_{2n})^{-1}$ une matrice tridiagonale par blocs obtenue à partir de A_{2n} et définie comme suit :

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & I & & \circ \\ \tilde{b}_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ \circ & & \tilde{b}_n & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$$

I est la matrice identité de taille (2×2) .

La matrice de transformation T_{2n} est diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont notés t_i , $i = 1, \dots, n$.

$$T_{2n} = \begin{pmatrix} t_1 & & & \circ \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & t_n \end{pmatrix}$$

Par identification nous obtenons la relation suivante :

$$t_{i+1} = t_i(b_{i+1})^T, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Cette relation permettra de déterminer les éléments des blocs t_i , $i = 1, \dots, n$ en choisissant $t_1 = I$.

Ainsi nous obtenons les relations qui permettent de déterminer les éléments des blocs \tilde{a}_i , $i = 1, \dots, n$ et \tilde{b}_i , $i = 2, \dots, n$.

Nous avons donc

$$\begin{cases} \hat{a}_{i+1} = t_{i+1}a_{i+1}(t_{i+1})^{-1}, & i = 0, \dots, n-1. \\ \hat{b}_{i+1} = t_{i+1}b_{i+1}(t_i)^{-1}, & i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

La matrice J_{2n} est associée à la relation de récurrence à trois termes entre les polynômes orthogonaux matriciels suivants :

$$\begin{cases} P_k(x) = (Ix + \hat{a}_k)P_{k-1}(x) - \hat{b}_kP_{k-2}(x) \\ P_0(x) = I, \quad P_1(x) = Ix + \hat{a}_1. \end{cases}$$

Nous utilisons cette relation de récurrence pour calculer le déterminant de $P_k(0)$. Pour $x = 0$ nous avons $\forall k \geq 1$:

$$\begin{cases} P_k(0) = -\hat{a}_kP_{k-1}(0) - \hat{b}_kP_{k-2}(0) \\ P_1(0) = -\hat{a}_1. \end{cases}$$

À l'aide du logiciel de calcul formel Maple, nous démontrons par récurrence sur n que :

$$\det(P_n(0)) = (-1)^n \frac{2^{2n} \prod_{i=1}^n (\alpha + i)(\beta + i)}{n! \prod_{i=2}^{2n+1} (\alpha + \beta + i) \prod_{i=n+1}^{2n} (\alpha + \beta + i)}, \quad \text{où } n = 2k.$$

Maintenant nous calculons la dérivée du déterminant de $P_k(x)$ en $x = 0$. Nous notons les coefficients du polynôme matriciel $P_k(x)$ par :

$$P_k(x) = \begin{pmatrix} P_k^{(1,1)}(x) & P_k^{(1,2)}(x) \\ P_k^{(2,1)}(x) & P_k^{(2,2)}(x) \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_k(x) \Big|_{x=0} &= \sum_{j=1}^2 \det(P_{k,j}(0)) \\ &= \det(P_{k,1}(0)) + \det(P_{k,2}(0)). \end{aligned}$$

D'une part nous avons

$$\det(P_{k,1}(x)) = \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} P_k^{(1,1)}(x) & P_k^{(1,2)}(x) \\ \frac{d}{dx} P_k^{(2,1)}(x) & P_k^{(2,2)}(x) \end{pmatrix}$$

et d'autre part nous avons

$$\det(P_{k,2}(x)) = \det \begin{pmatrix} P_k^{(1,1)}(x) & \frac{d}{dx} P_k^{(1,2)}(x) \\ P_k^{(2,1)}(x) & \frac{d}{dx} P_k^{(2,2)}(x) \end{pmatrix}$$

Pour $x = 0$ nous démontrons par récurrence sur n que :

$$\frac{d}{dx} \det(P_n(0)) = \frac{(-1)^{n-1} (n+1) 2^{2n-3}}{(n-1)!} \frac{\prod_{i=2}^n (\alpha+i)(\beta+i)}{\prod_{i=3}^{2n+1} (\alpha+\beta+i) \prod_{i=n+3}^{2n} (\alpha+\beta+i)},$$

où $n = 2k$.

En conclusion la borne inférieure de la plus petite valeur propre de A_{2n} est :

$$x_1 = -\frac{\det(P_k(0))}{\frac{d}{dx} \det(P_n(0))} = \frac{8(\alpha+1)(\beta+1)}{n(n+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+n+1)_2} \leq r_{2n}.$$

Nous constatons que cette borne inférieure est la même obtenue dans le cas scalaire (voir Théorème 38).

Chapitre **5**

Problème aux valeurs propres
généralisé

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous cherchons l'encadrement de la constante de Markov Bernstein pour la norme L^2 associée à la mesure de Gegenbauer généralisée. Tout d'abord nous rappelons les relations de récurrence que vérifient les polynômes orthogonaux par rapport à cette mesure. Nous exprimons la formulation variationnelle de ce problème par une matrice, qui se décompose en deux blocs diagonaux. Le premier bloc est associé aux polynômes orthogonaux de Gegenbauer généralisés de degré pair, et le second est associé à ceux de degré impair.

La méthode de Newton et l'algorithme qd appliqués au premier bloc nous fournissent un encadrement ayant le même comportement asymptotique que la plus petite valeur propre de ce bloc. En revanche la méthode de Newton appliquée au second bloc fournit un minorant de la plus petite valeur propre, et nous donnons aussi le comportement du majorant de la plus petite valeur propre par le quotient de Rayleigh.

5.2 Polynômes de Gegenbauer généralisés

5.2.1 Définition du polynôme de Gegenbauer généralisé

Soit $c^{(\lambda,\mu)}$ une fonctionnelle linéaire définie par

$$c^{(\lambda,\mu)}(.) = \int_{-1}^1 |x|^{2\mu} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx \quad \text{avec} \quad \lambda > -\frac{1}{2} \text{ et } \mu > -\frac{1}{2}. \quad (5.1)$$

(voir [6] page 156, [47]). Les polynômes orthogonaux par rapport à cette fonctionnelle linéaire sont appelés polynômes de Gegenbauer généralisés. Nous allons les noter par $G_j^{(\lambda,\mu)}$ (resp. $\tilde{G}_j^{(\lambda,\mu)}$ s'ils sont unitaires). Ils satisfont la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$\tilde{G}_{j+1}^{(\lambda,\mu)}(x) = x\tilde{G}_j^{(\lambda,\mu)}(x) - \tilde{C}_{j+1}^{(\lambda,\mu)}\tilde{G}_{j-1}^{(\lambda,\mu)}(x), \quad \forall j \geq 0 \quad (5.2)$$

avec $\tilde{G}_{-1}^{(\lambda,\mu)}(x) = 0$ et $\tilde{G}_0^{(\lambda,\mu)}(x) = 1$.

Le coefficient $\tilde{C}_{j+1}^{(\lambda,\mu)}$ est donné par

$$\tilde{C}_{2n}^{(\lambda,\mu)} = \frac{(\lambda + \mu + n - 1)(2\mu + 2n - 1)}{2(\lambda + \mu + 2n - 1)(\lambda + \mu + 2n - 2)}, \quad \forall n \geq 1, \quad (5.3)$$

$$\tilde{C}_{2n+1}^{(\lambda,\mu)} = \frac{n(2\lambda + 2n - 1)}{2(\lambda + \mu + 2n)(\lambda + \mu + 2n - 1)}, \quad \forall n \geq 0. \quad (5.4)$$

Soit $P_j^{(\alpha,\beta)}$ le polynôme orthogonal de Jacobi par rapport à la fonctionnelle linéaire suivante :

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \text{ avec } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1$$

qui satisfait la condition de normalisation suivante :

$$P_j^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha+1)}, \quad (5.5)$$

où Γ est la fonction Gamma.

Le coefficient principal de $P_j^{(\alpha,\beta)}$ est

$$\frac{1}{2^j} \frac{(j+\alpha+\beta+1)_j}{j!},$$

où $(a)_j$ le symbole de Pochhammer : $(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1)$.

Il existe deux relations entre les polynômes de Jacobi et les polynômes de Gegenbauer généralisés, (voir [6], page 156, relation (2.40)) qui sont les suivantes :

$$G_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) = P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(2x^2-1), \quad (5.6)$$

$$G_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) = xP_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2})}(2x^2-1). \quad (5.7)$$

Nous remarquons que les relations (1.3) données dans le papier de Xu [47] sont fausses pour $\lambda + \mu = 0$.

À partir de l'expression formelle de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ nous avons immédiatement

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{(\beta+1)_n}{n!}.$$

Donc, en utilisant (5.6), nous obtenons

$$G_{2n}^{(\lambda,\mu)}(0) = (-1)^n \frac{(\mu+\frac{1}{2})_n}{n!}, \quad \forall n \geq 1, \quad (5.8)$$

et le polynôme unitaire

$$\tilde{G}_n^{(\lambda,\mu)}(0) = (-1)^n \frac{(\mu+\frac{1}{2})_n}{(\lambda+\mu+n)_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

En utilisant (5.7) nous obtenons

$$\left. \frac{G_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)}{x} \right|_{x=0} = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\mu + \frac{3}{2}\right)_n, \quad \forall n \geq 0, \quad (5.9)$$

et le polynôme unitaire

$$\frac{\tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)}{x} \Big|_{x=0} = \frac{(-1)^n}{(\lambda + \mu + n + 1)_n} \left(\mu + \frac{3}{2}\right)_n, \quad \forall n \geq 0. \quad (5.10)$$

Nous donnons la relation de récurrence en escalier satisfaite par les polynômes de Gegenbauer généralisés unitaires :

$$\tilde{G}_k^{(\lambda,\mu)}(x) = \tilde{G}_k^{(\lambda+1,\mu)}(x) + \tilde{e}_k^{(\lambda,\mu)} \tilde{G}_{k-2}^{(\lambda+1,\mu)}(x), \quad \forall k > 1. \quad (5.11)$$

Nous utilisons les relations (5.9) et (5.10) pour déterminer la constante $\tilde{e}_k^{(\lambda,\mu)}$. Pour $k = 2n$, et $x = 0$ nous obtenons à partir de (5.11) la constante

$$\tilde{e}_{2n}^{(\lambda,\mu)} = -\frac{n(2n + 2\mu - 1)}{2(\lambda + \mu + 2n - 1)_2}, \quad (5.12)$$

et pour $k = 2n + 1$, Nous divisons la relation (5.11) par x , et en posant $x = 0$, nous obtenons

$$\tilde{e}_{2n+1}^{(\lambda,\mu)} = -\frac{n(2n + 2\mu + 1)}{2(\lambda + \mu + 2n)_2}. \quad (5.13)$$

5.2.2 La dérivée du polynôme de Gegenbauer généralisé

Maintenant nous donnons l'expression de la dérivée des polynômes de Gegenbauer généralisés.

Puisque

$$\frac{d}{dy} P_n^{(\alpha,\beta)}(y) = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(y), \quad (5.14)$$

en posant $y = 2x^2 - 1$, nous obtenons à partir de (5.6) la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) &= 4x \frac{d}{dy} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(y) \\ &= 2x P_{n-1}^{(\lambda+\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2})}(y) \\ &= 2(\lambda + \mu + n) G_{2n-1}^{(\lambda+1,\mu)}(x), \end{aligned} \quad (5.15)$$

et à partir de (5.7) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) &= P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2})}(2x^2 - 1) + 2x^2(\lambda + \mu + n + 1) P_{n-1}^{(\lambda+\frac{1}{2},\mu+\frac{3}{2})}(2x^2 - 1) \\ &= G_{2n}^{(\lambda,\mu+1)}(x) + 2x(\lambda + \mu + n + 1) G_{2n-1}^{(\lambda+1,\mu+1)}(x). \end{aligned} \quad (5.16)$$

De (5.15) et (5.16) nous pouvons déduire les expressions des dérivées des polynômes de Gegenbauer généralisés unitaires.

$$\frac{d}{dx} \tilde{G}_{2n}^{(\lambda, \mu)}(x) = 2n \tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda+1, \mu)}(x). \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dx} \tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda, \mu)}(x) = \tilde{G}_{2n}^{(\lambda, \mu+1)}(x) + 2nx \tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda+1, \mu+1)}(x). \quad (5.18)$$

En utilisant l'expression de $x \tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda+1, \mu+1)}(x)$ obtenue à partir de la relation à trois termes (5.2) et en écrivant $\tilde{G}_{2n}^{(\lambda, \mu+1)}(x)$ en fonction de $\tilde{G}_{2n}^{(\lambda+1, \mu+1)}(x)$ et $\tilde{G}_{2n-2}^{(\lambda+1, \mu+1)}(x)$ obtenus à partir de la relation de récurrence en escalier (2.3), nous obtenons une autre relation de la dérivée des polynômes de Gegenbauer généralisés unitaires :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda, \mu)}(x) &= (2n+1) \tilde{G}_{2n}^{(\lambda+1, \mu+1)}(x) + \\ &\frac{n(2\mu+2n+1)(2\lambda+2\mu+2n+1)}{2(\lambda+\mu+2n)(\lambda+\mu+2n+1)} \tilde{G}_{2n-2}^{(\lambda+1, \mu+1)}(x) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nous allons utiliser dans la suite, la norme des polynômes de Gegenbauer généralisés définie à partir du produit scalaire (5.1).

5.2.3 La norme du polynôme de Gegenbauer généralisé

Soit $k_r^{(\lambda, \mu)}$ la norme carrée définie par :

$$k_r^{(\lambda, \mu)} = c^{(\lambda, \mu)} ((G_r^{(\lambda, \mu)}(x))^2). \quad (5.20)$$

Nous rappelons que

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(y))^2 (1-y)^{\lambda-\frac{1}{2}} (1+y)^{\mu-\frac{1}{2}} dy = \frac{2^{\lambda+\mu} \Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2}) \Gamma(n+\mu+\frac{1}{2})}{n! (2n+\lambda+\mu) \Gamma(n+\lambda+\mu)}. \quad (5.21)$$

Pour $n=0$ nous avons

$$\int_{-1}^1 (1-y)^{\lambda-\frac{1}{2}} (1+y)^{\mu-\frac{1}{2}} dy = 2^{\lambda+\mu} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2}) \Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\lambda+\mu)}. \quad (5.22)$$

Alors

$$\begin{aligned}
k_{2n}^{(\lambda, \mu)} &= \int_{-1}^1 (G_{2n}^{(\lambda, \mu)}(x))^2 |x|^{2\mu} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 (P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(2x^2-1))^2 |x|^{2\mu} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx \\
&= 2 \int_0^1 (P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(2x^2-1))^2 (x^2)^\mu (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 (P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(y))^2 \frac{(1-y)^{\lambda-\frac{1}{2}} (1+y)^{\mu-\frac{1}{2}}}{2^{\lambda+\mu}} dy \\
&= \frac{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+\mu+\frac{1}{2})}{(2n+\lambda+\mu)n!\Gamma(n+\lambda+\mu)}, \quad \forall n \geq 1.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

et

$$k_0^{(\lambda, \mu)} = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\lambda+\mu)}. \tag{5.24}$$

Donc si $\tilde{k}_{2n}^{(\lambda, \mu)} = c^{(\lambda, \mu)}((\tilde{G}_{2n}^{(\lambda, \mu)}(x))^2)$, nous avons :

$$\tilde{k}_{2n}^{(\lambda, \mu)} = \frac{n!}{(\mu+\lambda+n)_n} \frac{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+\lambda+\mu+1)}, \tag{5.25}$$

$$\tilde{k}_0^{(\lambda, \mu)} = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+\mu+1)}. \tag{5.26}$$

De la même façon nous avons

$$\begin{aligned}
k_{2n+1}^{(\lambda, \mu)} &= \int_{-1}^1 (G_{2n+1}^{(\lambda, \mu)}(x))^2 |x|^{2\mu} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx \\
&= 2 \int_0^1 x^2 (P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2})}(2x^2-1))^2 (x^2)^\mu (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 (P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2})}(y))^2 \frac{(1-y)^{\lambda-\frac{1}{2}} (1+y)^{\mu+\frac{1}{2}}}{2^{\lambda+\mu+1}} dy \\
&= \frac{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+\mu+\frac{3}{2})}{(2n+\lambda+\mu+1)n!\Gamma(n+\lambda+\mu+1)},
\end{aligned} \tag{5.27}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{2n+1}^{(\lambda, \mu)} &= c^{(\lambda, \mu)}((\tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda, \mu)}(x))^2) \\
&= \frac{n!}{(\mu+\lambda+n+1)_n} \frac{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+\mu+\frac{3}{2})}{\Gamma(2n+\lambda+\mu+2)}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

5.3 Utilisation des polynômes quasi orthogonaux unitaires

Les polynômes unitaires $\tilde{R}_j^{(\lambda,\mu)}(x)$ sont quasi orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire $c^{(\lambda,\mu)}$. Ils sont définis comme suit :

Lorsque j est pair, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{R}_0^{(\lambda,\mu)}(x) &= 1 \\ \frac{d}{dx}\tilde{R}_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) &= 2n\tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda,\mu)}(x), \quad \forall n \geq 1.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Alors en utilisant (5.17), nous obtenons

$$\tilde{R}_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) = \tilde{G}_{2n}^{(\lambda-1,\mu)}(x), \quad \forall n \geq 1, \quad (5.30)$$

nous pouvons l'écrire en utilisant (5.11) comme suit :

$$\tilde{R}_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) = \tilde{G}_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) - \frac{n(n+\mu-\frac{1}{2})}{(\lambda+\mu+2n-2)_2}\tilde{G}_{2n-2}^{(\lambda,\mu)}(x), \quad \forall n \geq 2. \quad (5.31)$$

Pour $n = 1$, nous avons

$$\frac{d}{dx}\tilde{R}_2^{(\lambda,\mu)}(x) = 2\tilde{G}_1^{(\lambda,\mu)}(x) = 2x = 2\tilde{G}_1^{(\lambda+1,\mu)}(x),$$

et aussi

$$\tilde{R}_2^{(\lambda,\mu)}(x) = \tilde{G}_2^{(\lambda,\mu)}(x). \quad (5.32)$$

Lorsque j est impair, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tilde{R}_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) &= (2n+1)\tilde{G}_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) + \\ &\frac{n(2n+2\mu-1)(2n+2\lambda+2\mu-3)}{2(\lambda+\mu+2n-2)_2}\tilde{G}_{2n-2}^{(\lambda,\mu)}(x), \quad (5.33) \\ &\forall n \geq 2.\end{aligned}$$

Et en utilisant la relation (5.19) nous avons

$$\tilde{R}_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) = \tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda-1,\mu-1)}(x), \quad \forall n \geq 2. \quad (5.34)$$

$\tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda-1,\mu-1)}(x)$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de trois polynômes de Gegenbauer généralisés unitaires $\tilde{G}_j^{(\lambda,\mu)}(x)$, $j = 2n-3, 2n-1$

et $2n + 1$. Alors, à partir des relations en escalier des polynômes de Jacobi unitaires (voir [12]) suivantes :

$$\tilde{P}_k^{(\alpha,\beta)}(y) = \tilde{P}_k^{(\alpha+1,\beta)}(y) - \frac{2k(k+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)_2} \tilde{P}_{k-1}^{(\alpha+1,\beta)}(y), \quad (5.35)$$

$$\tilde{P}_k^{(\alpha,\beta)}(y) = \tilde{P}_k^{(\alpha,\beta+1)}(y) + \frac{2k(k+\alpha)}{(2k+\alpha+\beta)_2} \tilde{P}_{k-1}^{(\alpha,\beta+1)}(y), \quad (5.36)$$

nous obtenons des relations en escalier des polynômes de Gegenbauer généralisés unitaires.

Dans (5.36) nous posons $y = 2x^2 - 1$, $k = n - 1$, $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, $\beta = \mu - \frac{1}{2}$. Ensuite, nous multiplions cette relation par x .

Donc nous obtenons en utilisant la relation (5.7), les polynômes de Gegenbauer généralisés suivants :

$$\tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda,\mu-1)}(x) = \tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda,\mu)}(x) + \frac{(n-1)(n+\lambda-\frac{3}{2})}{(2n+\lambda+\mu-3)_2} \tilde{G}_{2n-3}^{(\lambda,\mu)}(x), \quad (5.37)$$

car

$$\tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda-1,\mu-1)}(x) = \tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda,\mu-1)}(x) + \tilde{e}_{2n+1}^{(\lambda-1,\mu-1)} \tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda,\mu-1)}(x). \quad (5.38)$$

Les relations (5.37) et (5.38) impliquent que, $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) &= \tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda-1,\mu-1)}(x) \\ &= \tilde{G}_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) + \frac{n(\lambda-\mu-1)}{(2n+\lambda+\mu-2)(2n+\lambda+\mu)} \tilde{G}_{2n-1}^{(\lambda,\mu)}(x) \\ &\quad - \frac{n(n-1)(\mu+n-\frac{1}{2})(\lambda+n-\frac{3}{2})}{(2n+\lambda+\mu-2)(2n+\lambda+\mu-3)_3} \tilde{G}_{2n-3}^{(\lambda,\mu)}(x). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$ nous avons un choix particulier pour $\tilde{R}_1^{(\lambda,\mu)}(x)$ et $\tilde{R}_2^{(\lambda,\mu)}(x)$.

Pour $n = 0$, on définit $\frac{d}{dx} \tilde{R}_1^{(\lambda,\mu)}(x) = 1 = \tilde{G}_0^{(\lambda,\mu)}(x)$, par conséquent, nous pouvons choisir

$$\tilde{R}_1^{(\lambda,\mu)}(x) = \tilde{G}_1^{(\lambda,\mu)}(x) = x. \quad (5.40)$$

Pour $n = 1$ la détermination du coefficient de $\tilde{G}_{2n-2}^{(\lambda,\mu)}(x)$ dans (5.33) devient $(\lambda+\mu)_2$ qui peut être égal à 0 quand $\lambda+\mu = 0$. Par conséquent on effectue un autre choix pour $\frac{d}{dx} \tilde{R}_3^{(\lambda,\mu)}(x)$.

Pour $n = 1$, la relation (5.18) nous donne :

$$\frac{d}{dx} \tilde{R}_3^{(\lambda,\mu)}(x) = \tilde{G}_2^{(\lambda,\mu+1)}(x) + 2x \tilde{G}_1^{(\lambda+1,\mu+1)}(x). \quad (5.41)$$

Et

$$\tilde{G}_2^{(\lambda, \mu+1)}(x) = x^2 + \tilde{G}_2^{(\lambda, \mu+1)}(0) = x^2 - \frac{\mu + \frac{3}{2}}{\lambda + \mu + 2}. \quad (5.42)$$

$$\tilde{G}_2^{(\lambda, \mu)}(x) = x^2 + \tilde{G}_2^{(\lambda, \mu)}(0) = x^2 - \frac{\mu + \frac{1}{2}}{\lambda + \mu + 1}. \quad (5.43)$$

Dans la relation (5.42), x^2 est remplacé par son expression donnée par (5.43).
Donc

$$\tilde{G}_2^{(\lambda, \mu+1)}(x) = \tilde{G}_2^{(\lambda, \mu)}(x) - \frac{2\lambda + 1}{2(\lambda + \mu + 1)_2} \tilde{G}_0^{(\lambda, \mu)}(x). \quad (5.44)$$

De plus

$$\begin{aligned} x\tilde{G}_1^{(\lambda+1, \mu+1)}(x) = x^2 &= \tilde{G}_2^{(\lambda, \mu)}(x) + \frac{2\mu + 1}{2(\lambda + \mu + 1)} \\ &= \tilde{G}_2^{(\lambda, \mu)}(x) + \frac{2\mu + 1}{2(\lambda + \mu + 1)} \tilde{G}_0^{(\lambda, \mu)}(x). \end{aligned} \quad (5.45)$$

En remplaçant $\tilde{G}_2^{(\lambda, \mu+1)}(x)$ et $x\tilde{G}_1^{(\lambda+1, \mu+1)}(x)$ dans (5.41) en utilisant (5.44) et (5.45). Donc nous obtenons l'expression de $\frac{d}{dx}\tilde{G}_3^{(\lambda, \mu)}$ dépendant de $\tilde{G}_2^{(\lambda, \mu)}(x)$ et $\tilde{G}_0^{(\lambda, \mu)}(x)$.

$$\frac{d}{dx}\tilde{G}_3^{(\lambda, \mu)}(x) = 3\tilde{G}_2^{(\lambda, \mu)}(x) + \frac{4\mu^2 + 2\mu(2\lambda + 5) + 3}{2(\lambda + \mu + 1)_2} \tilde{G}_0^{(\lambda, \mu)}(x), \quad (5.46)$$

et nous obtenons $\tilde{R}_3^{(\lambda, \mu)}(x) = \tilde{G}_3^{(\lambda, \mu)}(x)$.

Nous allons utiliser dans la suite les polynômes quasi orthogonaux unitaires $\{\tilde{R}_j^{(\lambda, \mu)}(x)\}_{j \geq 0}$ comme base de l'espace vectoriel \mathcal{P} des polynômes d'une variable.

5.4 L'expression matricielle de la fonctionnelle bilinéaire.

Soient p et q deux polynômes de degré n donnés dans la base $\{\tilde{R}_j^{(\lambda, \mu)}\}_{j=0}^n$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \tilde{R}_i^{(\lambda, \mu)}(x) \quad \text{et} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n z_i \tilde{R}_i^{(\lambda, \mu)}(x). \quad (5.47)$$

Soit a une fonctionnelle bilinéaire définie sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ par

$$a(p, q) = c^{(\lambda, \mu)}(p, q) + t c^{(\lambda, \mu)}(p', q') \quad (5.48)$$

où p' (resp. q') est la dérivée de p (resp. q) et t est un paramètre de \mathbb{R} . Alors

$$a(p, q) = \sum_{i,j=0}^n y_j z_i c^{(\lambda,\mu)}(\tilde{R}_j^{(\lambda,\mu)}(x), \tilde{R}_i^{(\lambda,\mu)}(x)) + t \sum_{i,j=0}^n y_j z_i c^{(\lambda,\mu)}\left(\frac{d}{dx} \tilde{R}_j^{(\lambda,\mu)}(x), \frac{d}{dx} \tilde{R}_i^{(\lambda,\mu)}(x)\right) \quad (5.49)$$

$$= y^T (K_{n,0}^{(0)} + t K_{n,0}^{(1)}) z \quad (5.50)$$

où y (resp. z) est un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} dont ses composantes sont notés y_i (resp. z_i) pour $i = 0, \dots, n$.

$K_{n,0}^{(0)}$ (resp. $K_{n,0}^{(1)}$) est une matrice symétrique de taille $(n+1) \times (n+1)$ telle que ses éléments sont $K_{n,0}^{(0)}(i, j)$ (resp. $K_{n,0}^{(1)}(i, j)$) qui correspond à

$$c^{(\lambda,\mu)}(\tilde{R}_j^{(\lambda,\mu)}(x), \tilde{R}_i^{(\lambda,\mu)}(x)) \\ (\text{ resp. } c^{(\lambda,\mu)}\left(\frac{d}{dx} \tilde{R}_j^{(\lambda,\mu)}(x), \frac{d}{dx} \tilde{R}_i^{(\lambda,\mu)}(x)\right))$$

pour $i, j = 0, \dots, n$.

À partir de la définition des polynômes unitaires $\tilde{R}_j^{(\lambda,\mu)}$ on peut déduire les éléments de $K_{n,0}^{(0)}$ et $K_{n,0}^{(1)}$.

$$K_{n,0}^{(0)}(i, 0) = K_{n,0}^{(0)}(0, i) = 0, \text{ pour } i \geq 1, \\ K_{n,0}^{(0)}(0, 0) = k_0^{(\lambda,\mu)}, \\ K_{n,0}^{(1)}(i, 0) = K_{n,0}^{(1)}(0, i) = 0, \text{ pour } i \geq 0.$$

Nous notons par $K_{n,1}^{(0)}$ (resp. $K_{n,1}^{(1)}$) la matrice de taille $n \times n$ déduite de $K_{n,0}^{(0)}$ (resp. $K_{n,0}^{(1)}$) en supprimant la première ligne et la première colonne.

$K_{n,1}^{(0)}$ et $K_{n,1}^{(1)}$ sont des matrices symétriques définies positives.

$K_{n,1}^{(1)}$ est une matrice tridiagonale et $K_{n,1}^{(0)}$ est une matrice pentadiagonale. De plus nous avons les éléments

$$K_{n,1}^{(1)}(i, i-1) = K_{n,1}^{(1)}(i-1, i) = 0 \quad \text{pour } i \geq 2.$$

Chaque ligne paire $2s$ ($s \geq 1$) de $K_{n,1}^{(1)}$ a un élément non nul sur la diagonale principale.

$$K_{n,1}^{(1)}(2s, 2s) = c^{(\lambda,\mu)}\left(\left(\frac{d}{dx} \tilde{R}_{2s}^{(\lambda,\mu)}\right)^2\right) = 4s^2 \tilde{k}_{2s-1}^{(\lambda,\mu)}. \quad (5.51)$$

Les lignes impaires $2s + 1$ ($s \in \mathbb{N}$) de $K_{n,1}^{(1)}$ ont les éléments suivants :

$$K_{n,1}^{(1)}(1, 1) = \tilde{k}_0^{(\lambda, \mu)}. \quad (5.52)$$

$$K_{n,1}^{(1)}(3, 3) = 9\tilde{k}_2^{(\lambda, \mu)} + \frac{(4\mu^2 + 2\mu(2\lambda + 5) + 3)^2}{4(\lambda + \mu + 1)_2^2} \tilde{k}_0^{(\lambda, \mu)}. \quad (5.53)$$

$$K_{n,1}^{(1)}(3, 1) = K_{n,1}^{(1)}(1, 3) = \frac{(4\mu^2 + 2\mu(2\lambda + 5) + 3)}{2(\lambda + \mu + 1)_2} \tilde{k}_0^{(\lambda, \mu)}. \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} K_{n,1}^{(1)}(2s + 1, 2s + 1) &= (2s + 1)^2 \tilde{k}_{2s}^{(\lambda, \mu)} \\ &+ \frac{s^2 (2s + 2\mu - 1)^2 (2s + 2\mu + 2\lambda - 3)^2}{4 ((\lambda + \mu + 2s - 2)_2)^2} \tilde{k}_{2s-2}^{(\lambda, \mu)} \\ &\text{pour } s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} K_{n,1}^{(1)}(2s + 1, 2s - 1) &= K_{n,1}^{(1)}(2s - 1, 2s + 1) \\ &= \frac{s(2s - 1) (2s + 2\mu - 1) (2s + 2\mu + 2\lambda - 3)}{2 (\lambda + \mu + 2s - 2)_2} \tilde{k}_{2s-2}^{(\lambda, \mu)}, \\ &\text{pour } s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Les éléments

$$K_{n,1}^{(0)}(i, i - 1) = K_{n,1}^{(0)}(i - 1, i) = 0 \text{ pour } i \geq 2. \quad (5.57)$$

$$K_{n,1}^{(0)}(i, i - 3) = K_{n,1}^{(0)}(i - 3, i) = 0 \text{ pour } i \geq 4. \quad (5.58)$$

Chaque ligne paire $2s$ ($s \geq 1$) de $K_{n,1}^0$ a les éléments suivants :

$$K_{n,1}^{(0)}(2, 2) = \tilde{k}_2^{(\lambda, \mu)}. \quad (5.59)$$

$$K_{n,1}^{(0)}(2s, 2s) = \tilde{k}_{2s}^{(\lambda, \mu)} + \frac{s^2 (s + \mu - \frac{1}{2})^2}{((\lambda + \mu + 2s - 2)_2)^2} \tilde{k}_{2s-2}^{(\lambda, \mu)}, \quad \forall s \geq 2. \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} K_{n,1}^{(0)}(2s, 2s - 2) &= K_{n,1}^{(0)}(2s - 2, 2s) = -\frac{s(s + \mu - \frac{1}{2})}{(\lambda + \mu + 2s - 2)_2} \tilde{k}_{2s-2}^{(\lambda, \mu)}, \\ &\forall s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Les lignes impaires $2s + 1$ ($s \in \mathbb{N}$) de $K_{n,1}^{(0)}$ ont les éléments suivants :

$$K_{n,1}^{(0)}(1, 1) = \tilde{k}_1^{(\lambda, \mu)}. \quad (5.62)$$

$$K_{n,1}^{(0)}(3, 3) = \tilde{k}_3^{(\lambda, \mu)}. \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} K_{n,1}^{(0)}(2s + 1, 2s + 1) &= \tilde{k}_{2s+1}^{(\lambda, \mu)} + \frac{s^2 (\lambda - \mu - 1)^2}{((2s + \lambda + \mu - 2)^2 (2s + \mu + \lambda)^2)} \tilde{k}_{2s-1}^{(\lambda, \mu)} \\ &+ \frac{s^2 (s - 1)^2 (2s + 2\mu - 1)^2 (2\lambda + 2s - 3)^2}{16((\lambda + \mu + 2s - 3)_3)^2 (2s + \mu + \lambda - 2)^2} \tilde{k}_{2s-3}^{(\lambda, \mu)}, \\ &\forall s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$K_{n,1}^{(0)}(3, 1) = K_{n,1}^{(0)}(1, 3) = 0. \quad (5.65)$$

$$K_{n,1}^{(0)}(5, 3) = K_{n,1}^{(0)}(3, 5) = \frac{2(\lambda - \mu - 1)}{(\lambda + \mu + 2)(\lambda + \mu + 4)} \tilde{k}_3^{(\lambda, \mu)}. \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} K_{n,1}^{(0)}(2s+1, 2s-1) &= K_{n,1}^{(0)}(2s-1, 2s+1) \\ &= \frac{s(\lambda - \mu - 1)}{(\lambda + \mu + 2s - 2)(\lambda + \mu + 2s)} \tilde{k}_{2s-1}^{(\lambda, \mu)} \\ &\quad - \frac{s(s-1)^2(\lambda - \mu - 1)(2\mu + 2s - 1)(2\lambda + 2s - 3)}{4(\lambda + \mu + 2s - 2)^2(\lambda + \mu + 2s - 4)_4} \tilde{k}_{2s-3}^{(\lambda, \mu)}, \\ &\quad \forall s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} K_{n,1}^{(0)}(2s+1, 2s-3) &= K_{n,1}^{(0)}(2s-3, 2s+1) \\ &= -\frac{s(s-1)(2\mu + 2s - 1)(2\lambda + 2s - 3)}{4(\lambda + \mu + 2s - 2)(\lambda + \mu + 2s - 3)_3} \tilde{k}_{2s-3}^{(\lambda, \mu)}, \\ &\quad \forall s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.68)$$

$a(p, p)$ est positive $\forall p \in \mathcal{P}_n$, (\mathcal{P}_n est un espace vectoriel des polynômes de degré au plus n) si et seulement si $K_{n,0}^{(0)} + t K_{n,0}^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive, ou si et seulement si $K_{n,1}^{(0)} + t K_{n,1}^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive.

Soit $D_{n,1}$ est une matrice diagonale de taille $n \times n$ où ses éléments sont

$$D_{n,1}(i, i) = i^2 \tilde{k}_{i-1}^{(\lambda, \mu)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Par conséquent $K_{n,1}^{(0)} + t K_{n,1}^{(1)}$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement si

$$(D_{n,1})^{-\frac{1}{2}} (K_{n,1}^{(0)} + t K_{n,1}^{(1)}) (D_{n,1})^{-\frac{1}{2}}$$

est une matrice symétrique définie positive.

Nous notons la matrice pentadiagonale $(D_{n,1})^{-\frac{1}{2}} K_{n,1}^{(0)} (D_{n,1})^{-\frac{1}{2}}$ par $\tilde{K}_{n,1}^{(0)}$ et la matrice tridiagonale $(D_{n,1})^{-\frac{1}{2}} K_{n,1}^{(1)} (D_{n,1})^{-\frac{1}{2}}$ par $\tilde{K}_{n,1}^{(1)}$.

Les différents éléments de ces deux matrices $\tilde{K}_{n,1}^{(0)}$ et $\tilde{K}_{n,1}^{(1)}$ sont les suivants :

$$\tilde{K}_{n,1}^{(1)}(2s, 2s) = 1, \quad \forall s \geq 1. \quad (5.69)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(1)}(2s, 2s-1) = \tilde{K}_{n,1}^{(1)}(2s-1, 2s) = 0, \quad \forall s \geq 1. \quad (5.70)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(1)}(1, 1) = 1. \quad (5.71)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(1)}(3, 3) = 1 + \frac{(4\mu^2 + 2\mu(2\lambda + 5) + 3)^2}{9(\lambda + \mu + 2)(2\lambda + 1)(2\mu + 1)}. \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,1}^{(1)}(3, 1) &= \tilde{K}_{n,1}^{(1)}(1, 3) \\ &= \frac{4\mu^2 + 2\mu(2\lambda + 5) + 3}{3\sqrt{(\lambda + \mu + 2)(2\lambda + 1)(2\mu + 1)}}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,1}^{(1)}(2s+1, 2s+1) &= 1 + \frac{(2\mu + 2s - 1)(\lambda + \mu + 2s)}{(\lambda + \mu + s - 1)(2\lambda + 2s - 1)} \times \\ &\quad \frac{s(2\lambda + 2\mu + 2s - 3)^2}{(2s + 1)^2(\lambda + \mu + 2s - 2)}, \quad \forall s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,1}^{(1)}(2s+1, 2s-1) &= \tilde{K}_{n,1}^{(1)}(2s-1, 2s+1) \\ &= \frac{(2\lambda + 2\mu + 2s - 3)}{(2s + 1)} \sqrt{\frac{s(\lambda + \mu + 2s)}{(\lambda + \mu + 2s - 2)}} \times \\ &\quad \sqrt{\frac{(2\mu + 2s - 1)}{(\lambda + \mu + s - 1)(2\lambda + 2s - 1)}}, \quad \forall s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2, 2) = \frac{2\lambda + 1}{8(\lambda + \mu + 1)_2}. \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2s, 2s) &= \frac{2\lambda + 2s - 1}{8s(\lambda + \mu + 2s - 1)_2} + \\ &\quad \frac{2\mu + 2s - 1}{8(\lambda + \mu + 2s - 2)_2(\lambda + \mu + s - 1)}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2s, 2s-2) &= \tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2s-2, 2s) \\ &= -\frac{1}{8(\lambda + \mu + 2s - 2)} \sqrt{\frac{1}{(\lambda + \mu + s - 1)}} \times \\ &\quad \sqrt{\frac{(2\lambda + 2s - 3)(2\mu + 2s - 1)}{(s - 1)(\lambda + \mu + 2s - 1)(\lambda + \mu + 2s - 3)}}, \quad \forall s \geq 2. \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(0)}(1, 1) = \frac{2\mu + 1}{2(\lambda + \mu + 1)}. \quad (5.79)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(0)}(3, 3) = \frac{(2\mu + 3)(\lambda + \mu + 1)}{18(\lambda + \mu + 2)_2}. \quad (5.80)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(0)}(3, 1) = 0. \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2s + 1, 2s + 1) &= \frac{(2\mu + 2s + 1)(\mu + \lambda + s)}{2(2s + 1)^2(\lambda + \mu + 2s)_2} + \\ &\frac{2s(\lambda - \mu - 1)^2(\lambda + \mu + 2s - 1)}{(2s + 1)^2(\lambda + \mu + 2s - 2)^2(\lambda + \mu + 2s)(2\lambda + 2s - 1)} \\ &+ \frac{s(s - 1)(\lambda + \mu + 2s)(2\mu + 2s - 1)(2\lambda + 2s - 3)}{2(2s + 1)^2(2\lambda + 2s - 1)(\lambda + \mu + s - 1)(\lambda + \mu + 2s - 2)^2(\lambda + \mu + 2s - 3)}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(0)}(5, 3) = \frac{(\lambda - \mu - 1)}{15(\lambda + \mu + 2)} \sqrt{\frac{2(\lambda + \mu + 1)(2\mu + 3)}{(\lambda + \mu + 2)(\lambda + \mu + 4)(2\lambda + 3)}}. \quad (5.83)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(0)}(5, 1) = -\frac{1}{10(\lambda + \mu + 1)_2} \sqrt{\frac{2(\lambda + \mu + 4)(2\mu + 3)(2\mu + 1)(2\lambda + 1)}{(\lambda + \mu + 1)(2\lambda + 3)}}. \quad (5.84)$$

$$\tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2s + 1, 2s - 1) = \frac{(\lambda - \mu - 1)(\lambda + \mu - 2)}{(2s + 1)(2s - 1)(\lambda + \mu + 2s - 4)} \times \quad (5.85)$$

$$\sqrt{\frac{s(2\mu + 2s - 1)}{(\lambda + \mu + 2s - 2)(2\lambda + 2s - 1)(\lambda + \mu + 2s)(\lambda + \mu + s - 1)}}, \quad \forall s \geq 3.$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2s + 1, 2s - 3) &= \tilde{K}_{n,1}^{(0)}(2s - 3, 2s + 1) \\ &= -\frac{\sqrt{s(s - 1)}}{2(2s + 1)(2s - 3)(\lambda + \mu + 2s - 3)_2} \times \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\sqrt{\frac{(2\mu + 2s - 3)(\lambda + \mu + s - 2)(\lambda + \mu + 2s)(2\lambda + 2s - 3)(2\mu + 2s - 1)}{(\lambda + \mu + 2s - 4)(\lambda + \mu + s - 1)(2\lambda + 2s - 1)}},$$

$$\forall s \geq 3.$$

Par permutation des lignes et des colonnes on réarrange $\tilde{K}_{n,1}^{(0)}$ et $\tilde{K}_{n,1}^{(1)}$ de façon que les premières nouvelles lignes (resp. colonnes) correspondent aux précédentes lignes paires (resp. colonnes) et les dernières nouvelles lignes (resp. colonnes) correspondent aux précédentes lignes impaires (resp. colonnes).

Nous notons ces nouvelles matrices par $\hat{K}_{n,1}^{(0)}$ (resp. $\hat{K}_{n,1}^{(1)}$).

La matrice $\hat{K}_{n,1}^{(0)}$ (resp. $\hat{K}_{n,1}^{(1)}$) devient diagonale de taille 2×2 par blocs .

Le premier bloc $\hat{K}_{n,1}^{(0)}$ (resp. $\hat{K}_{n,1}^{(1)}$) est une matrice tridiagonale de taille $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (resp. une matrice identité) où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Le second bloc de $\hat{K}_{n,1}^{(0)}$ (resp. $\hat{K}_{n,1}^{(1)}$) est une matrice à cinq diagonales de taille $(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \times (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ (resp. une matrice tridiagonale).

Nous notons par $\hat{K}_{n,1}^{(0,1)}$ (resp. $\hat{K}_{n,1}^{(0,2)}$) le premier bloc diagonal de $\hat{K}_{n,1}^{(0)}$ (resp. le second bloc diagonal). Nous utilisons les mêmes notations pour les blocs diagonaux de $\hat{K}_{n,1}^{(1)}$.

Puisque nous étudions que $\tilde{K}_{n,1}^{(0)} + t\tilde{K}_{n,1}^{(1)}$ est définie positive, ce problème est équivalent à $\hat{K}_{n,1}^{(0)} + t\hat{K}_{n,1}^{(1)}$ est définie positive, c'est-à-dire $\hat{K}_{n,1}^{(0,1)} + t\hat{K}_{n,1}^{(1,1)}$ et $\hat{K}_{n,1}^{(0,2)} + t\hat{K}_{n,1}^{(1,2)}$ sont définies positives.

$\hat{K}_{n,1}^{(0,1)} + t\hat{K}_{n,1}^{(1,1)} = \hat{K}_{n,1}^{(0,1)} + tI$ est définie positive si t , plus petite valeur propre de $\hat{K}_{n,1}^{(0)}$, est strictement positive.

5.5 L'encadrement de la plus petite valeur propre

5.5.1 L'encadrement dans le cas pair

- La borne inférieure

Nous cherchons dans ce paragraphe la borne inférieure de la plus petite valeur propre de $\hat{K}_{n,1}^{(0,1)}$.

Nous posons $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Puisque $\hat{K}_{n,1}^{(0,1)}$ est une matrice tridiagonale symétrique, donc le développement du déterminant de cette matrice nous donne une relation de récurrence à trois termes.

Théorème 39.

Soit $P_j(x)$ le déterminant de la matrice principale de taille $j \times j$ de $xI - \hat{K}_{n,1}^{(0,1)}$.

Alors

$$P_j(x) = \left(x - \frac{2j + 2\lambda - 1}{8j(\lambda + \mu + 2j - 1)_2} - \frac{2j + 2\mu - 1}{8(\lambda + \mu + j - 1)(\lambda + \mu + 2j - 2)_2} \right) P_{j-1}(x) - \frac{(2j + 2\lambda - 3)(2j + 2\mu - 1)}{64(j - 1)(\lambda + \mu + 2j - 2)_2(\lambda + \mu + j - 1)(\lambda + \mu + 2j - 3)_2} P_{j-2}(x) \quad (5.87)$$

pour $j = 2, \dots, m$, avec $P_0(x) = 1$, et

$$P_1(x) = x - \frac{2\lambda + 1}{8(\lambda + \mu + 1)_2}. \quad (5.88)$$

Preuve.

Le résultat est obtenu par le développement classique d'un déterminant tridiagonal. Les éléments correspondants sont ceux des relations suivantes : (5.69), (5.70), (5.76), (5.77), (5.78). \square

Propriété 4.

$$\frac{2\lambda + 1}{4(m)_2(\lambda + \mu + m)_2} < x_{1,m}^{(1)}. \quad (5.89)$$

Preuve.

$x_{1,m}^{(1)}$ est la plus petite racine de $P_m(x)$.

De plus $x_{1,m}^{(1)} > 0$ et toutes les racines de $P_m(x)$ sont réelles et distinctes. L'interprétation géométrique de la méthode de Newton nous montre que :

$$0 < -\frac{P_m(0)}{P'_m(0)} < x_{1,m}^{(1)}.$$

$\hat{K}_{n,1}^{(0,1)}$ est une matrice symétrique définie positive.

Par conséquent elle a la décomposition de Cholesky suivante $\hat{T}_{n,1}^{(0,1)}(\hat{T}_{n,1}^{(0,1)})^T$.
Donc

$$P_m(0) = \det(-\hat{K}_{n,1}^{(0,1)}) = (-1)^m (\det(\hat{T}_{n,1}^{(0,1)}))^2 = (-1)^m \prod_{j=1}^m (\hat{T}_{n,1}^{(0,1)}(j, j))^2.$$

Nous pouvons obtenir cette décomposition de Cholesky à partir des relations (5.31) et (5.32).

Maintenant nous posons $p(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_{2j} \tilde{R}_{2j}^{(\lambda, \mu)}(x)$.

Nous notons par $R^{(1)}(x)$ (resp. $G^{(1)}(x)$) un vecteur de \mathcal{P}_n^m de composantes $\tilde{R}_{2i}^{(\lambda, \mu)}(x)$ (resp. $\tilde{G}_{2j}^{(\lambda, \mu)}(x)$).

Alors en utilisant les relations (5.31) et (5.32) nous avons

$$R^{(1)}(x) = B^{(1)}(x)G^{(1)}(x)$$

où $B^{(1)}(x)$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité de taille $m \times m$, telle que

$$\begin{cases} B^{(1)}(x)(i, i) & = & 1, & i = 1, \dots, m, \\ B^{(1)}(x)(i, i-1) & = & -\frac{i(i + \mu - \frac{1}{2})}{(\lambda + \mu + 2i - 2)_2}, & i = 2, \dots, m, \\ B^{(1)}(x)(i, j) & = & 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous avons

$$c^{(\lambda, \mu)}(p, p) = (\alpha^{(1)})^T B^{(1)}(x) D^{(1)}(x) (B^{(1)}(x))^T \alpha^{(1)}$$

où $\alpha^{(1)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^m de composantes α_{2i} , $i = 1, \dots, m$.

$D^{(1)}(x)$ est une matrice diagonale de taille $m \times m$ où ses éléments sont notés $\tilde{k}_{2i}^{(\lambda, \mu)}$, $i = 1, \dots, m$.

Alors

$$\hat{K}_{n,1}^{(0,1)} = (\hat{D}^{(1)}(x))^{-\frac{1}{2}} B^{(1)}(x) (D^{(1)}(x))^{\frac{1}{2}} (D^{(1)}(x))^{\frac{1}{2}} (B^{(1)}(x))^T (\hat{D}^{(1)}(x))^{-\frac{1}{2}},$$

où $\hat{D}^{(1)}(x)$ est une matrice diagonale de taille $m \times m$ dont les éléments sont $(2j)^2 \tilde{k}_{2j-1}^{(\lambda, \mu)}$, $j = 1, \dots, m$.

Par conséquent les éléments de $\hat{T}_{n,1}^{(0,1)}$ sont les suivants

$$\hat{T}_{n,1}^{(0,1)}(j, j-1) = -\frac{(2j+2\mu-1)}{4(\lambda+\mu+2j-2)} \sqrt{\frac{\tilde{k}_{2j-2}^{(\lambda, \mu)}}{\tilde{k}_{2j-1}^{(\lambda, \mu)}}} \quad (5.90)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\mu+2j-1)(\lambda+\mu+2j-1)}{2(\lambda+\mu+j-1)(\lambda+\mu+2j-2)}}, \quad j = 2, \dots, m.$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{n,1}^{(0,1)}(j, j) &= \frac{1}{2j} \sqrt{\frac{\tilde{k}_{2j}^{(\lambda, \mu)}}{\tilde{k}_{2j-1}^{(\lambda, \mu)}}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\lambda+2j-1)}{2j(\lambda+\mu+2j-1)_2}}, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Alors

$$P_m(0) = \frac{(-1)^m}{2^{3m} m!} \prod_{j=1}^m \frac{(2j+2\lambda-1)}{(\lambda+\mu+2j-1)_2}. \quad (5.92)$$

$P'_m(0)$ est obtenue par récurrence après la dérivation de la relation de récurrence à trois termes (5.87) et l'utilisation de la relation (5.89).

$$P'_m(0) = \frac{(-1)^{m-1} (m+1)}{2^{3m-2} (m-1)!} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{(2i+2\lambda-1)}{(\lambda+\mu+i)(\lambda+\mu+i+m+1)}. \quad (5.93)$$

D'où le résultat. \square

• La borne supérieure

Propriété 5.

$$x_{1,m}^{(1)} < \frac{(\lambda + \frac{1}{2})_3}{(\lambda + \mu + m + 1)(2\lambda + 2m + 1)} \times \frac{1}{(m^2(2\lambda + 3) + m(2\lambda + 3)(\mu + \lambda + 3) + (2\lambda + 5)(\mu + \lambda + 1))}.$$

Preuve.

Nous utilisons l'algorithme qd comme décrit dans la première partie. Si une suite des polynômes orthogonaux satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$P_j^{(0)}(x) = (x + B_j^{(0)})P_{j-1}^{(0)}(x) - C_j^{(0)}P_{j-2}^{(0)}(x), \quad \forall j \geq 1, \quad (5.94)$$

avec $P_{-1}^{(0)} = 0$ et $P_0^{(0)} = 1$, nous posons

$$\begin{aligned} B_j^{(0)} &= -q_j^{(0)} - e_{j-1}^{(0)}, \quad \forall j \geq 1, \\ C_j^{(0)} &= q_{j-1}^{(0)}e_{j-1}^{(0)}, \quad \forall j \geq 2, \end{aligned}$$

avec $e_0^{(0)} = 0$.

Alors les termes $q_j^{(r)}$, $e_j^{(r)}$, $r \geq 1$, sont déterminés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_0^{(r)} = 0, \\ q_{j+1}^{(r)} + e_j^{(r)} = q_{j+1}^{(r-1)} + e_{j+1}^{(r-1)}, \quad \forall j = 0, \dots, m-2, \\ q_j^{(r)}e_j^{(r)} = q_{j+1}^{(r-1)}e_j^{(r-1)}, \quad \forall j = 1, \dots, m-1, \\ q_m^{(r)} = q_m^{(r-1)} - e_{m-1}^{(r)}, \\ e_m^{(r-1)} = 0. \end{array} \right.$$

D'après [10] nous avons

$$q_m^{(0)} > q_m^{(1)} > \dots > q_m^{(r)} > x_{1,m}^{(1)}.$$

À partir de la relation de récurrence à trois termes (5.87) nous avons

$$\begin{cases} e_0^{(0)} = 0, \\ e_j^{(0)} = \frac{2j + 2\mu + 1}{8(\lambda + \mu + j)(\lambda + \mu + 2j)_2}, & j \geq 1, \\ q_j^{(0)} = \frac{2j + 2\lambda - 1}{8j(\lambda + \mu + 2j - 1)_2}, & j \geq 1. \end{cases}$$

Ensuite les relations suivantes sont démontrées par récurrence sur j :

$$\begin{cases} e_0^{(1)} = 0, \\ e_j^{(1)} = \frac{j(2j + 2\mu + 1)}{8(j + 1)(\lambda + \mu + j + 1)(\lambda + \mu + 2j + 1)_2}, & \text{pour } 1 \leq j \leq m - 1, \\ q_j^{(1)} = \frac{(2j + 2\lambda + 1)(\lambda + \mu + j + 1)}{8j(\lambda + \mu + j)(\lambda + \mu + 2j)_2}, & \text{pour } 1 \leq j \leq m - 1, \\ q_m^{(1)} = \frac{(2\lambda + 1)}{8m(\lambda + \mu + m)(\lambda + \mu + 2m)}. \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{cases} e_0^{(2)} = 0, \\ q_j^{(2)} = \frac{(2j + 2\lambda + 3)(\lambda + \mu + j + 2)}{8(j + 1)(\lambda + \mu + j + 1)(\lambda + \mu + 2j + 1)_2} \frac{\hat{p}_j^{(2)}}{\hat{p}_{j-1}^{(2)}}, & \text{for } 1 \leq j \leq m - 1, \\ e_j^{(2)} = \frac{j(2j + 2\mu + 1)}{8(j + 1)(\lambda + \mu + j + 1)(\lambda + \mu + 2j + 2)_2} \frac{\hat{p}_{j-1}^{(2)}}{\hat{p}_j^{(2)}}, & \text{for } 1 \leq j \leq m - 2, \\ e_{m-1}^{(2)} = \frac{(2\lambda + 1)(m - 1)(2\mu + 2m - 1)}{8m(\lambda + \mu + m)_2(\lambda + \mu + 2m)(2\lambda + 2m + 1)} \frac{\hat{p}_{m-2}^{(2)}}{\hat{p}_{m-1}^{(2)}}, \\ q_m^{(2)} = \frac{(\lambda + \frac{1}{2})_3}{(\lambda + \mu + m + 1)(2\lambda + 2m + 1)} \frac{1}{\hat{p}_{m-1}^{(2)}} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{p}_0^{(2)} &= 1, \\ \hat{p}_j^{(2)} &= j^2(2\lambda + 3) + j(2\lambda + 3)(\lambda + \mu + 3) + (2\lambda + 5)(\lambda + \mu + 1), \text{ for } 1 \leq j \leq m - 1. \end{aligned}$$

Comme nous pouvons le constater, $q_m^{(2)} = \mathcal{O}(\frac{1}{m^4})$. Donc il a le même ordre que la borne inférieure de $x_{1,m}^{(1)}$ obtenu à partir de la méthode de Newton

dans la propriété 4.

D'où le résultat. \square

Corollaire 7.

$$x_{1,m}^{(1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^4}\right)$$

5.5.2 L'encadrement dans le cas impair

- **La borne inférieure**

Nous cherchons maintenant la borne inférieure de petite valeur propre de

$$(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}}(\hat{K}_{n,1}^{(0,2)})(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous posons $q = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n - m$.

Nous voulons que la matrice symétrique $\hat{K}_{n,1}^{(0,2)} + x\hat{K}_{n,1}^{(1,2)}$ soit définie positive.

Cela est équivalent à étudier le domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}$ le polynôme $P_q(x) = \det(\hat{K}_{n,1}^{(0,2)} + x\hat{K}_{n,1}^{(1,2)}) > 0$.

Nous notons par $x_{1,q}^{(2)}$ la plus petite valeur propre de $(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}}(\hat{K}_{n,1}^{(0,2)})(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}}$.

Par conséquent $P_q(x) > 0, \forall x > -x_{1,q}^{(2)}$.

Propriété 6.

$$\frac{(2\lambda + 1)(2\mu + 1)}{2q(\lambda + \mu + q)\hat{P}(q)} < x_{1,q}^{(2)},$$

où $\hat{P}(q) = 2(2\mu + 1)q^2 + 2(\mu + \lambda)(2\mu + 1)q - (4\mu^2 + 4\mu\lambda + 6\mu + 1)$.

Preuve.

Nous allons utiliser dans cette démonstration la méthode de Newton. Les racines de $P_q(x)$ et les valeurs propres de $(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}}(\hat{K}_{n,1}^{(0,2)})(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}}$ sont de signes opposés.

Donc elles sont négatives et pour $x > -x_{1,q}^{(2)}$, nous avons $P_q(x) > 0$.

Par conséquent $\frac{P_q(0)}{P_q'(0)} < x_{1,q}^{(2)}$.

Nous avons

$$P_q(0) = \det(\hat{K}_{n,1}^{(0,2)}),$$

nous utilisons la décomposition de Cholesky de $\hat{K}_{n,1}^{(0,2)}$ notée par $(\hat{T}_{n,1}^{(0,2)})(\hat{T}_{n,1}^{(0,2)})^T$.

Nous avons le polynôme $p(x) = \sum_{j=1}^q \alpha_{2j-1} \tilde{R}_{2j-1}^{(\lambda,\mu)}(x)$.

Nous notons par $R^2(x)$ (resp. $G^2(x)$) un vecteur de \mathcal{P}_n^q de composantes

$\tilde{R}_{2i-1}^{(\lambda, \mu)}(x)$, $i = 1, \dots, q$. (resp. $\tilde{G}_{2i-1}^{(\lambda, \mu)}(x)$, $i = 1, \dots, q$).

Alors, en utilisant les relations (5.39), (5.40) et (5.46) nous obtenons

$$R^{(2)}(x) = B^{(2)}(x)G^{(2)}(x)$$

où $B^{(2)}(x)$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité de taille $q \times q$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} B^{(2)}(x)(i, i) = 1, \quad i = 1, \dots, q, \\ B^{(2)}(x)(i, i-1) = \frac{(i-1)(\lambda - \mu - 1)}{(\lambda + \mu + 2i - 4)(\lambda + \mu + 2i - 2)}, \quad i = 3, \dots, q, \\ B^{(2)}(x)(i, i-2) = -\frac{(i-1)(i-2)(\lambda + i - \frac{5}{2})(\mu + i - \frac{3}{2})}{(\lambda + \mu + 2i - 4)(\lambda + \mu + 2i - 5)_3}, \quad i = 3, \dots, q, \\ B^{(2)}(x)(i, j) = 0 \quad \text{ailleurs.} \end{array} \right.$$

$c^{(\lambda, \mu)}(p, p) = (\alpha^{(2)})^T B^{(2)}(x) D^{(2)}(x) (B^{(2)}(x))^T \alpha^{(2)}$ où $\alpha^{(2)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^q de composantes α_{2i-1} , $i = 1, \dots, q$.

$D^{(2)}(x)$ est une matrice diagonale de taille $q \times q$ dont les éléments sont $\tilde{k}_{2j-1}^{(\lambda, \mu)}$, $j = 1, \dots, q$.

Donc

$$\hat{K}_{n,1}^{(0,2)} = (\hat{D}^{(2)}(x))^{-\frac{1}{2}} B^{(2)}(x) D^{(2)}(x) (B^{(2)}(x))^T (\hat{D}^{(2)}(x))^{-\frac{1}{2}},$$

où $\hat{D}^{(2)}(x)$ est une matrice diagonale de taille $q \times q$ dont les éléments sont $(2j-1)^2 \tilde{k}_{2j-2}^{(\lambda, \mu)}$, $j = 1, \dots, q$.

Par conséquent les éléments de $\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}$ sont

$$\begin{aligned} \hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(j, j) &= \frac{1}{2j-1} \sqrt{\frac{\tilde{k}_{2j-1}^{(\lambda, \mu)}}{\tilde{k}_{2j-2}^{(\lambda, \mu)}}}, \quad j = 1, \dots, q. \\ &= \frac{1}{2j-1} \sqrt{\frac{(\mu + j - \frac{1}{2})(\lambda + \mu + j - 1)}{(\lambda + \mu + 2j - 2)_2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(j, j-1) &= \frac{(j-1)(\lambda - \mu - 1)}{(\lambda + \mu + 2j - 4)(\lambda + \mu + 2j - 2)(2j-1)} \sqrt{\frac{\tilde{k}_{2j-3}^{(\lambda, \mu)}}{\tilde{k}_{2j-2}^{(\lambda, \mu)}}}. \\ &= \frac{(\lambda - \mu - 1)}{(\lambda + \mu + 2j - 4)(2j-1)} \times \\ &\quad \sqrt{\frac{2(\lambda + \mu + 2j - 3)(j-1)}{(\lambda + \mu + 2j - 2)(2j + 2\lambda - 3)}}, \quad j = 2, \dots, q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(j, j-2) &= -\frac{(j-1)(j-2)(\lambda+i-\frac{5}{2})(\mu+i-\frac{3}{2})}{(2j-1)(\lambda+\mu+2j-4)(\lambda+\mu+2j-5)_3} \sqrt{\frac{\tilde{k}_{2j-5}^{(\lambda,\mu)}}{\tilde{k}_{2j-2}^{(\lambda,\mu)}}} \\ &= -\frac{1}{2(2j-1)(\lambda+\mu+2j-4)} \times \\ &\sqrt{\frac{2(j-1)(j-2)(2\lambda+2j-5)(2\mu+2j-3)(\lambda+\mu+2j-2)}{(2\lambda+2j-3)(\lambda+\mu+j-2)(\lambda+\mu+2j-5)}}, \quad j=3, \dots, q. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P_q(0) &= \prod_{j=1}^q \frac{1}{(2j-1)^2} \frac{(\mu+j-\frac{1}{2})(\lambda+\mu+j-1)}{(\lambda+\mu+2j-2)_2} \\ &= \frac{1}{2^{2q}((\frac{1}{2})_q)^2} \frac{(\mu+\frac{1}{2})_q}{(\lambda+\mu+q)_q}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Maintenant nous développons le déterminant $\det(\hat{K}_{n,1}^{(0,2)} + x\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})$ en utilisant la relation (4.10) nous posons

$$\begin{aligned} a_i &= \hat{K}_{n,1}^{(0,2)}(i, i) + x\hat{K}_{n,1}^{(1,2)}(i, i), \quad i=1, \dots, q. \\ b_i &= \hat{K}_{n,1}^{(0,2)}(i, i-1) + x\hat{K}_{n,1}^{(1,2)}(i, i-1), \quad i=2, \dots, q. \\ c_i &= \hat{K}_{n,1}^{(0,2)}(i, i-2), \quad i=3, \dots, q, \end{aligned}$$

où le couple (i, i) (resp. $(i, i-1), (i, i-2)$) correspond au couple $(2i-1, 2i-1)$ (resp. $(2i-1, 2i-3), (2i-1, 2i-5)$) pour $\tilde{K}_{n,1}^{(0)}$ et $\tilde{K}_{n,1}^{(1)}$.

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} b_{j-1}P_j(x) &= (b_{j-1}a_j - b_jc_j)P_{j-1}(x) + b_j(c_ja_{j-1} - b_jb_{j-1})P_{j-2}(x) \\ &\quad - b_{j-1}c_j(c_ja_{j-1} - b_jb_{j-1})P_{j-3}(x) \\ &\quad - c_jc_{j-1}^2(b_ja_{j-2} - b_{j-1}c_j)P_{j-4}(x) \\ &\quad + b_jc_jc_{j-1}^2c_{j-2}^2P_{j-5}(x). \end{aligned} \quad (5.96)$$

La relation (5.96) est initialisée par

$$P_0 = 1 \text{ et } P_{-1} = P_{-2} = P_{-3} = P_{-4} = 0.$$

De la dérivation de cette relation de récurrence à six termes nous démontrons par récurrence que

$$P'_q(0) = \frac{q(\mu+\frac{3}{2})_{q-1}\hat{p}(q)}{(2\lambda+1)2^{2q}((\frac{1}{2})_q)^2(\lambda+\mu+q+1)_{q-1}}, \quad (5.97)$$

où $\hat{p}(q) = 2(2\mu + 1)q^2 + (2\lambda + \mu)(2\mu + 1)q - (4\mu^2 + 4\lambda\mu + 6\mu + 1)$.

D'où le résultat. \square

• **La borne supérieure**

Nous cherchons maintenant le comportement de la borne supérieure de la plus petite valeur propre de

$$\hat{K}_{n,1}^{(0,2)} v = t \hat{K}_{n,1}^{(1,2)} v.$$

En utilisant la décomposition de Cholesky $\hat{T}_{n,1}^{(0,2)} (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)})^T$ de $\hat{K}_{n,1}^{(0,2)}$ nous avons

$$(\hat{K}_{n,1}^{(0,2)} v, v)_{\mathbb{R}^q} = \|\hat{T}_{n,1}^{(0,2)} v\|_{\mathbb{R}^q}^2$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$ désigne la norme euclidienne en \mathbb{R}^q .

Nous faisons la même chose pour $\hat{K}_{n,1}^{(1,2)}$ en utilisant sa décomposition de Cholesky $\hat{T}_{n,1}^{(1,2)} (\hat{T}_{n,1}^{(1,2)})^T$. Nous avons donc

$$(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)} v, v)_{\mathbb{R}^q} = \|\hat{T}_{n,1}^{(1,2)} v\|_{\mathbb{R}^q}^2.$$

Les éléments de la matrice $\hat{T}_{n,1}^{(1,2)}$ sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(i, i) = 1, \quad i = 1, \dots, q. \\ \hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(2, 1) = \frac{4\mu^2 + 2\mu(2\lambda + 5) + 3}{3\sqrt{(2\lambda + 1)(2\mu + 1)(\lambda + \mu + 2)}} \\ \hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(i, i-1) = \frac{2i + 2\mu + 2\lambda - 5}{2i - 1} \times \\ \sqrt{\frac{(i-1)(2i + \mu + \lambda - 2)(2i + 2\mu - 3)}{(\lambda + \mu + 2i - 4)(2i + 2\lambda - 3)(\lambda + \mu + i - 2)}} \quad \text{pour } i = 3, \dots, q. \end{array} \right.$$

Propriété 7.

Soit $x_{1,q}^{(2)}$ la plus petite valeur propre de $(\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}} \hat{K}_{n,1}^{(0,2)} (\hat{K}_{n,1}^{(1,2)})^{-\frac{1}{2}}$, alors nous avons

$$x_{1,q}^{(2)} < \Phi_q = \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^4}\right).$$

Preuve.

Nous utilisons le théorème 7 avec le choix du vecteur $v = (v_i)_{i=1}^q$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{2j+1} = 0, & 0 \leq j \leq \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor \\ v_2 = 0, & \\ v_{2j} = 2j(4j-1)^2, & \text{pour } 2j \leq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor \\ v_{2j} = (q-2j)(4j-1)^2, & \text{pour } \lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1 \leq 2j \leq q. \end{array} \right. \quad (5.98)$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}v\|_{\mathbb{R}^q}^2 &= \sum_{i=1}^{q-2} (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(i, i)v_i + \hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(i+1, i)v_{i+1} + \hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(i+2, i)v_{i+2})^2 \\ &\quad + (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(q-1, q-1)v_{q-1} + \hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(q, q-1)v_q)^2 \\ &\quad + (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(q, q)v_q)^2. \end{aligned} \quad (5.99)$$

En utilisant $v_{2j+1} = 0$, pour $j = 0, \dots, [\frac{q-1}{2}]$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}v\|_{\mathbb{R}^q}^2 &= \sum_{r=2}^{[\frac{q-2}{2}]} ((\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r, 2r)v_{2r})^2 + \\ &\quad (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r+2, 2r)v_{2r+2})^2 + \\ &\quad 2\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r, 2r)\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r+2, 2r)v_{2r}v_{2r+2}) + \\ &\quad \sum_{r=2}^{[\frac{q}{2}]} (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r, 2r-1)v_{2r})^2 + \\ &\quad (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2+2[\frac{q-2}{2}], 2+2[\frac{q-2}{2}])v_{2+2[\frac{q-2}{2}]})^2. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Puisque $v_{2r}^2 = (q-2r)^2(4r-1)^2 = (4r^2-4qr+q^2)(4r-1)^2$ pour $2r \geq [\frac{q}{2}] + 1$, nous écrivons (5.100) en trois parties.

La première partie prend en compte la valeur de $v_{2r}^2 = 4r^2(4r-1)^2$ pour tout r . La deuxième partie prend en compte la valeur de $v_{2r}^2 = q^2(4r-1)^2$ pour $2r \geq [\frac{q}{2}] + 1$ et la troisième partie prend en compte la valeur de $v_{2r}^2 = -4qr(4r-1)^2$ pour $2r \geq [\frac{q}{2}] + 1$. Donc il est suffisant de vérifier le comportement de

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r, 2r)v_{2r})^2 + (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r+2, 2r)v_{2r+2})^2 + \\ &\quad 2\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r, 2r)\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r+2, 2r)v_{2r}v_{2r+2} \end{aligned}$$

et $\Psi_2 = (\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2r, 2r-1)v_{2r})^2$ de chaque partie par rapport r et q . Le calcul a été fait à l'aide de Mathematica 6.

Nous trouvons que le comportement de $(\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}(2+2[\frac{q-2}{2}], 2+2[\frac{q-2}{2}])v_{2+2[\frac{q-2}{2}]})^2$ est comme $\mathcal{O}(q^2)$.

La première partie de Ψ_1 (resp. Ψ_2) a comme terme principal $4r^2(\lambda + \mu - 5)^2$ (resp. $4r^2(\lambda - \mu - 1)^2$).

La deuxième partie de Ψ_1 (resp. Ψ_2) a comme terme principal $q^2(\lambda + \mu - 3)^2$ (resp. $q^2(\lambda - \mu - 1)^2$).

La troisième partie de Ψ_1 (resp. Ψ_2) a comme terme principal $4(\lambda + \mu -$

$3)(\lambda + \mu - 5)rq$ (resp. $4rq(\lambda - \mu - 1)^2$).

La contribution de la première partie de Ψ_1 (resp. Ψ_2) nous donne un comportement comme $(\lambda - \mu - 5)^2\mathcal{O}(q^3)$ (resp. $(\lambda - \mu - 1)^2\mathcal{O}(q^3)$).

La contribution de la deuxième partie de Ψ_1 (resp. Ψ_2) nous donne un comportement comme $(\lambda + \mu - 3)^2\mathcal{O}(q^3)$ (resp. $(\lambda - \mu - 1)^2\mathcal{O}(q^3)$).

La contribution de la troisième partie de Ψ_1 (resp. Ψ_2) nous donne un comportement comme $(\lambda + \mu - 3)(\lambda + \mu - 5)\mathcal{O}(q^3)$ (resp. $(\lambda - \mu - 1)^2\mathcal{O}(q^3)$).

Par conséquent le comportement de $\|\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}v\|_{\mathbb{R}^q}^2$ est comme $\mathcal{O}(q^3)$.

Maintenant nous allons étudier le comportement asymptotique du dénominateur du quotient de Rayleigh. Il correspond à $\|\hat{T}_{n,1}^{(1,2)}v\|_{\mathbb{R}^q}^2$.

$$\begin{aligned} \|\hat{T}_{n,1}^{(1,2)}v\|_{\mathbb{R}^q}^2 &= \sum_{i=1}^{q-1} (\hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(i, i)v_i + \hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(i+1, i)v_{i+1})^2 + (\hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(q, q)v_q)^2 \\ &= \sum_{r=2}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} ((\hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(2r, 2r)v_{2r})^2 + (\hat{T}_{n,1}^{(1,2)}(2r, 2r-1)v_{2r})^2). \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons aussi trois parties comme pour $\|\hat{T}_{n,1}^{(0,2)}v\|_{\mathbb{R}^q}^2$. Les trois termes généraux dans les trois parties ont respectivement les termes principaux $2^{11}r^6$, $2^9r^4q^2$ et $2^{11}r^5q$. Par conséquent le comportement asymptotique du dénominateur est comme $\mathcal{O}(q^7)$.

D'où le résultat \square

Bibliographie

- [1] A. Aptekarev, *Asymptotics of general orthogonal polynomials near the end points of the interval of orthogonality*, Math. Sb, 183 (1992) 43-61, English transl. in Math. USSR Sb, 183 (1992).
- [2] A. Aptekarev, A. Draux and V. Kaliaguine, *On asymptotics of the exact constants in the Markov-Bernshtein inequalities with classical weighted integral metrics*, Uspekhi. Mat. Nauk, 55 (2000) 173-174; English transl. in Russian Mathematical Surveys, 55 (2000) 173-174.
- [3] S. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné*, Mémoire de l'Académie Royale de Belgique (2). 4 (1912) 1-103.
- [4] C. Brezinski, *Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, ISNM vol. 50, Birkhäuser, Basel, 1980.
- [5] A. Bultheel, *Epsilon and q d algorithms for the Matrix Padé and 2-D Padé Problem*, Report TW 57, K.U. Leuven (Belgium), (1982).
- [6] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York (1978).
- [7] H. Dette, W.J. Studden, *A note on the matrix valued q - d algorithm and matrix orthogonal polynomials on $[0,1]$ and $[0,1)$* , J. Comput. Appl. Math. 148 (2002) 349-361.
- [8] P. Dörfler, *New inequalities of Markov type*, SIAM J.Math.Anal. 18 (1987) 490-494.
- [9] A. Draux, *Formal orthogonal polynomials and Padé approximants in a non commutative algebra*, in Mathematical Theory of Networks and Systems, Proceedings of the MTNS 83-International Symposium-Ber Sheva, Israël, June 20-24, 1983. Lecture Notes in Control and Information Sciences 58, Springer, Berlin, 1984, pp. 278-292.

- [10] A. Draux, *Improvement of the formal and numerical estimation of the constant in some Markov-Bernstein inequalities*, Numerical Algorithms 24 (2000) 31-58.
- [11] A. Draux, *Polynômes orthogonaux formels dans une algèbre non-commutative*, Publication ANO 92, Université de Lille, Lille, 1982.
- [12] A. Draux, C. Elhami, *On the positivity of some bilinear functionals in Sobolev spaces*, J. Comput. Appl. Math. 106 (1999) 203-243.
- [13] A. Draux and C. Elhami, *Hermite-Sobolev and closely connected orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 81 (1997) 165-179.
- [14] A. Draux, B. Moalla, *Rectangular matrix Padé approximants and square matrix orthogonal polynomials*, Numerical Algorithms 14 (1997) 321-341.
- [15] A. Draux, B. Moalla, M. Sadik, *Generalized qd algorithm and Markov-Bernstein inequalities for Jacobi weight*, Numerical Algorithms. 51 (2009) 429-447.
- [16] A. Draux, B. Moalla M. Sadik, *Markov Bernstein Inequalities For Generalized Gegenbauer Weight*, (soumis).
- [17] A. Draux and V. Kaliaguine, *Markov-Bernstein inequalities for generalized Hermite polynomials*, East Journal on Approximations. 12 (2006) 1-23.
- [18] A. Draux, M. Sadik, *QD Block Algorithm*, Applied Numer.Math. 60, (2010) 1300-1308
- [19] A. Draux, M. Sadik, *Generalized qd Block Algorithm*, Applied Numer. Math. (soumis)
- [20] E. Durand, *Solutions numériques des équations algébriques*, Masson, Paris, 1960.
- [21] A.J. Durán and P. Lopez-Rodriguez, *Orthogonal Matrix Polynomials : Zeros and Blumenthal's Theorem*, J. of Approx theory. 84 (1996) 96-118.
- [22] A.J. Durán and W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and higher-order recurrence relations*, Linear Algebra Appl. 219 (1995) 261-280.
- [23] J. Favard, *Sur les polynômes de Tchebicheff*, C. R. Acad. Sci. Paris, 200 (1935) 2052-2053.
- [24] Oeuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Tome I - Algèbre - Calcul intégral, Gauthier-Villars, Paris 1898.
- [25] E. Laguerre, *Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles*, Nouvelles annales de Mathématiques, 2e série, t. XIX (1880).

- [26] A.A. Markov, *On a problem of D.I. Mendeleev*, J.London Math.Soc.1 (1969) 57-60.
- [27] D. Mendeleev, *Investigation of Aqueous Solutions Based on Specific Gravity (Russian)*, St.Petersburg (1987).
- [28] G.V. Milovanovic, D.S. Mitrinovic and Th.M. Rassias, *Topics in Polynomials : Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong (1994).
- [29] L. Mirsky, *An inequality of the Markov-Bernstein type for polynomials*. SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) 1004-1008.
- [30] T.E. Pérez, *Polinomios ortogonales respecto a productos de Sobolev : el caso continuo*. Doctoral Dissertation, University of Granada, 1994.
- [31] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Texts in Applied Mathematics 37, Springer, New York, 2000.
- [32] H. Rutishauser, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Z. angew. Math. Physik 5 (1954) 233-251.
- [33] H. Rutishauser, *Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Z. angew. Math. Physik 7 (1956) 164-169.
- [34] H. Rutishauser, *Solution of eigenvalue problems with the LR-transformation*, NBS Appl. Math. Series 49 (1958) 47-81.
- [35] L.F. Shampine, *Asymptotic L_2 Inequalities of Markoff Type*. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, (1964).
- [36] L.F. Shampine, *An inequality of E. Schmidt*. Duke, Math.J. 33 (1966) 145-150.
- [37] E. Schmidt, *Über die nebst ihren Ableitungen orthogonalen Polynomensysteme und das zugehörige Extremum*, Math. Ann. 119 (1944) 165-204.
- [38] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, A.M.S. Colloquium publications, vol. XXIII, Providence (1939).
- [39] P. Turán, *Remark on a theorem of Erhard Schmidt*, Mathematica 2 (25) (1960) 373-378.
- [40] D.N. Tulyakov, *On the local asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials in the neighborhood of the extreme point of the support of orthogonality measure*, Math. Sb. 192 (2001), n.2, 139-160. English transl. Sb. Math. 192 (2001), n.1-2, 299-321.
- [41] J. Van Iseghem, *Vector orthogonal relations. Vector QD algorithm*, J. Comp. Appl. Math. 19 (1987) 141-150.
- [42] R.S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Springer, Berlin, 2000.

-
- [43] J.H. Wilkinson, *Convergence of the LR, QR and related algorithms*, comput. J. 8 (1965) 77-84.
 - [44] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, Oxford (1965).
 - [45] P. Wynn, *Continued fractions whose coefficients obey a non commutative law of multiplication*, Arch. Rat. Mech. Anal. 12 (1963) 273-312. 10
 - [46] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 3rd ed, Wolfram Media, Cambridge University Press 1996.
 - [47] Y. Xu, *An integral formula for generalized Gegenbauer polynomials and Jacobi Polynomials*, Adv. in Applied Math 29 (2002) 328-343.

Résumé :

Les travaux de recherche de cette thèse concernent l'encadrement de la constante de Markov Bernstein pour la norme L^2 associée aux mesures de Jacobi et Gegenbauer généralisée. Ce travail est composé de deux parties : dans la première partie, nous avons développé une généralisation de l'algorithme qd pour les matrices symétriques définies positives à largeur de bande ℓ et nous avons construit l'algorithme qd pour les matrices de Jacobi par blocs. Ensuite, nous l'avons généralisé aux cas des matrices par bloc à largeur de bande ℓ . Ces algorithmes nous permettent de trouver un majorant de la constante. Enfin, nous avons développé le déterminant caractéristique d'une matrice symétrique définie positive pentadiagonale, ce qui nous permet d'obtenir un minorant de la constante en utilisant la méthode de Newton. La deuxième partie est consacrée à l'application de tous les outils développés à l'encadrement de la constante de Markov Bernstein pour la norme L^2 associée à la mesure de Gegenbauer généralisée.

Abstract :

The aim of this thesis is to find the lower and upper bounds of the constant which appears in the Markov Bernstein inequalities in L^2 norm associated to the Jacobi and generalized Gegenbauer measures. In this work the qd algorithm is studied for obtaining some properties about the asymptotic behavior of some eigenvalues of band matrices and block band matrices. These eigenvalues are linked to the Markov Bernstein constant. The application of all the tools developed for obtaining lower and upper bounds of the Markov Bernstein constant in L^2 norm associated to the generalized Gegenbauer measure is given.

Keywords :

Markov Bernstein inequalities, Orthogonal polynomial, qd algorithm / Block qd algorithm, LR algorithm / Block LR algorithm, Block band matrices, Matrix orthogonal polynomial, Matrix three term recurrence relation, Jacobi polynomial, Gegenbauer polynomial, Generalized Gegenbauer polynomial, Generalized eigenvalue problem, Eigenvalues.