



**HAL**  
open science

**Méthode de décomposition de domaine et conditions  
aux limites artificielles en mécanique des fluides:  
méthode Optimisée d'Orde 2.**

Caroline Japhet

► **To cite this version:**

Caroline Japhet. Méthode de décomposition de domaine et conditions aux limites artificielles en mécanique des fluides: méthode Optimisée d'Orde 2.. Mathématiques [math]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 1998. Français. NNT: . tel-00558701

**HAL Id: tel-00558701**

**<https://theses.hal.science/tel-00558701>**

Submitted on 24 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





## Remerciements

Je tiens à remercier avant tout mon directeur de thèse, Laurence Halpern. Par ses conseils, ses encouragements, ses lectures attentives, ses appréciations et son expérience, elle m'a permis d'accomplir cette thèse. Je la remercie pour son soutien, sa disponibilité, sa gentillesse, son enthousiasme et sa confiance.

Je remercie infiniment Frédéric Nataf, dont l'encadrement a été essentiel pour la réussite de ce travail. La richesse de ses idées, sa gentillesse, sa passion pour la recherche, sa présence et sa confiance à chaque instant difficile m'ont été d'un grand secours.

Je tiens à remercier François Rogier pour son encadrement et tout ce qu'il m'a apporté. Il m'a permis de bien commencer ce travail.

Merci à François-Xavier Roux pour m'avoir aidée à résoudre nombre de mes problèmes grâce à sa compétence et son enthousiasme.

Je remercie Marc Brédif pour ses qualités humaines et scientifiques, son apport dans cette thèse, et pour m'avoir fait découvrir des problèmes concrets en mécanique des fluides.

Juliette Ryan m'a beaucoup aidée dans mon travail, par son entière disponibilité, sa gentillesse et ses compétences. Je lui en suis très reconnaissante.

J'associe à mes remerciements Pierre Leca pour son accueil dans son équipe, qui offre un environnement de travail unique. Merci pour sa confiance, sa gentillesse, et l'opportunité qu'il m'a offerte de participer à des congrès internationaux.

Merci à Monsieur Nedelec de m'avoir accueillie au sein de l'équipe du CMAP.

Je tiens à remercier chacun des membres du jury:

Les Professeurs Yvon Maday et Yves Achdou, qui ont eu la gentillesse de rapporter cette thèse rapidement, Monsieur Nedelec, Monsieur Guillot qui ont accepté de participer à ce jury, sans oublier Laurence Halpern, Frédéric

Nataf, François Rogier, François-Xavier Roux et Marc Brédif.

Je remercie le Professeur Jacques Rappaz qui m'a fait découvrir les méthodes de décomposition de domaine et sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour.

Merci à Yvon Maday, Charbel Farhat et Mary Wheeler pour leur invitation et l'occasion qu'ils m'ont donnée de dialoguer avec des chercheurs dans des domaines très variés.

Je n'oublie pas les conseils de Philippe d'Anfray, Alain Cosnau, et Christophe Mulard qui a résolu tous mes problèmes informatiques. Merci à Philippe B. pour nos longues conversations sur "ce qui est le mieux", Thierry, Stéphane, Adib, Frédéric pour leur aide précieuse et leur bonne humeur.

L'amitié partagée avec Catherine L. a été si enrichissante. Merci pour tes conseils "maman Catherine", ta faculté à trouver toujours une solution, et ton aide. Merci aussi à Lydie pour son écoute et son apport dans mon travail.

Aldjia, merci beaucoup pour ta gentillesse et ton aide. J'admire ta capacité à résoudre les problèmes, toujours avec le sourire. Merci également à Geo, Jeanne, Robert, Sylvie, Annalisa, Leila, Vincent M., François,... pour leur sympathie.

Sophie et Nadia, merci pour votre réconfort. Merci à Mimi, à Guy pour ses blagues et son "think positive". Merci aussi à Nathalie et Fred, Claire, Catherine C. et Alexia.

Merci à ma famille, en particulier Carl, Emmanuelle, Vanessa et Alex, pour me faire toujours rire, même dans les moments difficiles. J'admire mes grands-parents pour leur volonté d'essayer de comprendre mon travail. Merci à mes parents pour leur capacité infinie d'écoute, leur soutien et leur amour, qui me donnent tant de gaieté et de persévérance.

Enfin, merci à toi Régis, à ta grande joie de vivre qui m'a portée tout au long de mon travail et donnée du courage "à fond à fond". Merci pour ta présence auprès de moi, et celle du petit clown, qui m'a donnée encore plus de force pendant les derniers mois de cette thèse.

## Résumé

Ce travail a pour objet le développement et l'étude d'une méthode de décomposition de domaine, la méthode Optimisée d'Ordre 2 (OO2), pour la résolution de l'équation de convection-diffusion. Son atout principal est de permettre d'utiliser un découpage quelconque du domaine, sans savoir à l'avance où sont situés les phénomènes physiques tels que les couches limites ou les zones de recirculation. La méthode OO2 est une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement, itérative, parallélisable. Le domaine de calcul est divisé en sous-domaines, et on résout le problème de départ dans chaque sous-domaine, avec des conditions de raccord spécifiques sur les interfaces des sous-domaines. Ce sont des conditions différentielles d'ordre 1 dans la direction normale et d'ordre 2 dans la direction tangente à l'interface qui approchent, par une procédure d'optimisation, les Conditions aux Limites Artificielles (CLA). L'utilisation des CLA en décomposition de domaine permet de définir des algorithmes stables. Une reformulation de la méthode de Schwarz conduit à un problème d'interface. Celui-ci est résolu par une méthode itérative de type Krylov (BICG-STAB, GMRES, GCR).

La méthode est appliquée à un schéma aux différences finies décentré, puis à un schéma volumes finis. Un préconditionneur "basses fréquences" est ensuite introduit et étudié, dans le but d'avoir une convergence indépendante du nombre de sous-domaines. Ce préconditionneur est une extension aux problèmes non-symétriques d'un préconditionneur utilisé pour des problèmes symétriques. Enfin, l'utilisation de conditions différentielles d'ordre 2 le long de l'interface nécessite d'ajouter des conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines. Une étude est menée à ce sujet, qui permet de montrer que les problèmes dans chaque sous-domaine sont bien posés.

*Mots clés: Décomposition de domaine, conditions aux limites artificielles, méthode Optimisée d'Ordre 2 (OO2), problèmes de convection-diffusion, méthode de volumes finis, préconditionneur, calcul parallèle, Calcul Haute Performance.*

*Laboratoires d'accueil:*

- O.N.E.R.A., Service DTIM/CHP, 29 Avenue de la Division Leclerc, BP 72, 92322 CHATILLON Cedex.
- CMAP, Ecole Polytechnique, 91128 PALAISEAU Cedex.

## Abstract

The purpose of this work is the design and study of a domain decomposition method, the Optimized Order 2 (OO2) method, in order to solve convection-diffusion equation. Its main advantage is that it is a general domain decomposition technique, with no a priori knowledge of the boundary layers or the recirculation zones location. The OO2 Method is an iterative non overlapping domain decomposition method. The domain is divided into subdomains, and the physical problem is solved in each subdomain, with specific conditions at the interfaces. These conditions are differential equations of order 1 in the normal direction and of order 2 in the tangential direction to the interface, which are optimized approximations of Artificial Boundary Conditions (ABC). The use of ABC in domain decomposition produces stable algorithms. A reformulation of the Schwarz algorithm leads to an interface problem, solved by a Krylov type algorithm (BICG-STAB, GMRES, GCR). The OO2 Method is used with an upwind difference scheme, and a finite volume scheme. A “low wave number” preconditioner is introduced and studied in order to make the convergence independent of the number of subdomains. This preconditioner is an extension to non-symmetric problems of a preconditioner used for symmetric problems. Along with the use of differential conditions of order 2 along the interface, we need to add conditions at interface cross-points. A study of one type of cross-points conditions leads to well-posed problems in the subdomains.

*Keywords: Domain decomposition methods, artificial boundary conditions, Optimized Order 2 (OO2) method, convection-diffusion problems, finite volume methods, preconditioner, parallel computing, High Performance Computing.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Définition des conditions d'interface</b>	<b>15</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2 Outils généraux : conditions d'interface provenant des conditions aux limites artificielles (CLA)</b>	<b>21</b>
2.1 Rappel sur les CLA exactes : cas de 2 sous-domaines . . . . .	22
2.2 Ecriture de l'algorithme de Schwarz . . . . .	26
2.3 Les CLA exactes en tant que conditions d'interface . . . . .	26
2.4 Des CLA approchées en tant que conditions d'interface . . . . .	27
2.5 Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les CLA approchées . . . . .	29
2.5.1 Cas de 2 sous-domaines . . . . .	29
2.5.2 Extension à $K$ sous-domaines . . . . .	32
2.6 Remarque sur une autre approche . . . . .	33
<b>3 Conditions d'interface optimisées OO2 : étude sur le problème continu</b>	<b>35</b>
3.1 Motivation et définition . . . . .	35
3.2 Cas de 2 sous-domaines et d'un opérateur à coefficients constants : construction des conditions d'interface OO2 et étude de la convergence . . . . .	37
3.2.1 Minimisation du taux de convergence . . . . .	38
3.2.2 Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions OO2 . . . . .	49
3.2.3 Estimations du taux de convergence . . . . .	49



3.2.4	Résultats numériques sur le taux de convergence . . . .	54
3.3	Méthodologie de calcul des conditions d'interface optimisées OO2 . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Conditions d'interface optimisées <math>(OO2)_h</math> : étude sur le problème discret</b>	<b>71</b>
4.1	Décomposition du domaine et notations . . . . .	72
4.2	Algorithme de Schwarz et conditions d'interface : cas discret, sans recouvrement . . . . .	75
4.3	Définition des CLA exactes discrètes : cas de 2 sous-domaines .	77
4.4	Convergence optimale de l'algorithme de Schwarz avec les CLA exactes discrètes . . . . .	80
4.4.1	Cas de 2 sous-domaines . . . . .	80
4.4.2	Cas d'un découpage du domaine en bandes . . . . .	81
4.5	Remarque : lien entre les CLA exactes discrètes et la matrice du complément de Schur . . . . .	89
4.5.1	Rappel : méthode du complément de Schur . . . . .	89
4.5.2	Lien avec les CLA exactes discrètes . . . . .	90
4.6	Les conditions $(OO2)_h$ . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Compléments</b>	<b>97</b>
5.1	Minimisation sur deux paramètres du taux de convergence dans le cas de 2 sous-domaines . . . . .	97
 <b>II Méthode Optimisée d'Ordre 2. Formulation algébrique et résultats numériques.</b>		<b>113</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>2</b>	<b>Méthode Optimisée d'Ordre 2</b>	<b>119</b>
2.1	Formulation algébrique : écriture du problème condensé . . . .	120
2.1.1	Matrices d'interface $B^1$ et $B^2$ . . . . .	120
2.1.2	Ecriture de l'algorithme de Schwarz sous forme d'un problème condensé sur l'interface . . . . .	121
2.2	Résolution du problème condensé par un algorithme de Krylov	125

<b>3</b>	<b>Application de la méthode à un schéma aux différences finies décentré</b>	<b>129</b>
3.1	Position du problème . . . . .	129
3.2	Résultats numériques . . . . .	130
3.2.1	Découpage du domaine en bandes: comparaison des conditions OO2 discrétisées et $(OO2)_h$ . . . . .	130
3.2.2	Découpage du domaine en rectangles . . . . .	139
3.3	Conclusions . . . . .	140
<b>4</b>	<b>Application de la méthode à un schéma volumes finis</b>	<b>143</b>
4.1	Discrétisation en temps . . . . .	143
4.2	Discrétisation du domaine de calcul . . . . .	146
4.3	Discrétisation en espace: méthode de volumes finis . . . . .	146
4.3.1	Stabilité du schéma . . . . .	152
4.3.2	Discrétisation d'une condition aux limites de type Neumann . . . . .	154
4.4	Résolution par la méthode OO2 . . . . .	156
4.4.1	Discrétisation des conditions d'interface . . . . .	158
4.4.2	Discrétisation des conditions aux points de croisement des sous-domaines . . . . .	164
4.5	Résultats numériques . . . . .	169
4.5.1	Maillage cartésien à pas constant . . . . .	170
4.5.2	Ecoulement autour d'un cylindre issu d'un calcul Navier-Stokes . . . . .	183
<b>III</b>	<b>Méthodes de préconditionnement</b>	<b>189</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>193</b>
<b>2</b>	<b>Préconditionneur "basses fréquences"</b>	<b>195</b>
2.1	Introduction . . . . .	195
2.2	Le problème d'interface projeté . . . . .	196
2.2.1	Définition de la contrainte . . . . .	196
2.2.2	Le problème d'interface projeté . . . . .	199
2.3	Résolution par l'algorithme GCR projeté . . . . .	209

---

<b>3</b>	<b>Résultats numériques : l'équation de convection-diffusion</b>	<b>215</b>
3.1	Influence de la condition de raccord aux points de croisement des sous-domaines . . . . .	217
3.2	Vitesse de convection nulle : opérateur symétrique . . . . .	218
3.3	Solution constante dans le domaine global . . . . .	220
3.4	Vitesse de convection de cisaillement . . . . .	221
3.5	Vitesse de convection tournante . . . . .	225
3.6	Conclusion . . . . .	227
<b>IV</b>	<b>Etude de conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines</b>	<b>229</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>233</b>
<b>2</b>	<b>Problèmes locaux bien posés</b>	<b>235</b>
2.1	Notations . . . . .	236
2.2	Définition du problème local et étude de l'existence et de l'unicité d'une solution . . . . .	238
	<b>Conclusion</b>	<b>245</b>

# Introduction



---

Les calculateurs à architecture parallèle sont devenus un outil majeur pour le calcul scientifique, car ils offrent une grande puissance, que ce soit en terme de place mémoire ou de rapidité des calculs. Cette puissance est atteinte par la multiplication des performances d'un processeur par le nombre de processeurs. Cette percée informatique soulève de nouvelles questions : la recherche de méthodes numériques qui soient efficaces et parallélisables.

Les méthodes de décomposition de domaine permettent de définir des algorithmes performants et adaptés aux machines parallèles. Elles consistent à partager le domaine de résolution d'une équation aux dérivées partielles en sous-domaines. On peut ainsi traiter des problèmes de grande taille pour lesquels aucun ordinateur n'aurait à lui seul une place mémoire suffisante. Par une reformulation du problème, celui-ci peut être transformé en un problème équivalent dont les inconnues sont des fonctions définies sur les interfaces des sous-domaines (méthodes dites de sous-structuration ou de type Schur). La résolution du problème d'interface par une méthode itérative (de type gradient conjugué) s'effectue par des résolutions successives de problèmes locaux (par sous-domaine) indépendants, ce qui permet d'utiliser efficacement les calculateurs parallèles : chaque sous-domaine est attribué à un processeur qui résout son problème à l'aide des données contenues dans la mémoire locale. Lors de la résolution du problème d'interface, les interactions entre sous-domaines sont traitées par les phases de communication entre processeurs. Pour que la vitesse de convergence soit proche de l'optimum, il est nécessaire de choisir de "bonnes" conditions de raccord sur les interfaces des sous-domaines, ainsi que des préconditionneurs spécifiques.

On distingue deux grands types de méthodes de décomposition de domaine :

- d'abord celles avec recouvrement des sous-domaines telles la méthode de Schwarz [44] (H.A. Schwarz, 1870) dont la convergence a été étudiée par H.A. Schwarz, puis P.L. Lions [26] (P.L. Lions, 1988). Les méthodes avec recouvrement ont l'inconvénient de compliquer énormément la mise en œuvre numérique, surtout dans le cas de problèmes 3D. De plus, pour des géométries très complexes, il est difficile voire impossible de définir des zones de recouvrement. Un autre type de méthode a ainsi été développé :

- celles sans recouvrement des sous-domaines. Dans ce cas, il est impératif d'avoir des conditions d'interface spécifiques pour que la méthode converge. Par exemple, une extension de la méthode de Schwarz au cas sans recouvrement a été introduite dans [27] (P.L. Lions, 1989), puis [10] (B. Desprès, 1991), [7] (P. Charton, F. Nataf et F. Rogier, 1991), [5] (C. Carlenzoli et A. Quarteroni, 1995). L'algorithme de Schwarz est un cas particulier des méthodes de sous-structuration [25] (P. Le Tallec, 1994).

Dans ce travail, on développe des **méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, itératives, parallélisables, pour les équations de la mécanique des fluides compressibles.**

Dans ce cadre (équations non linéaires de Navier-Stokes), l'état stationnaire est calculé par linéarisation et l'utilisation d'un schéma implicite en temps. Cela permet de limiter le nombre d'itérations nécessaire. L'équation de base dans ce processus est alors l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{u}{\Delta t} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \Delta u = f$$

qu'il faut résoudre par décomposition de domaine. Le caractère non symétrique de l'opérateur en cause ici pose des problèmes spécifiques. En effet, lorsque le terme de diffusion est dominant, on peut utiliser de façon efficace les algorithmes conçus pour les systèmes linéaires symétriques, avec quelques modifications. Par exemple, on peut utiliser les méthodes de type Schur dual [38] (F.X. Roux, 1995) en remplaçant l'algorithme du gradient conjugué par un algorithme GMRES [43] (Y. Saad et H. Schultz, 1986) ou BICG-STAB [46] (H.A. Van der Vorst, 1992) pour résoudre le problème condensé. Cependant, lorsque la convection est grande, ces méthodes sont moins performantes et les résultats théoriques sont moins nombreux.

Les travaux présentés ici étendent la méthode de Schwarz additive classique, au moyen de la technique de conditions aux limites artificielles (CLA). Nous allons décrire succinctement pour un problème général le principe de la méthode de Schwarz additive classique, puis les idées développées dans ce travail.

*Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement :*

Supposons que l'on cherche à résoudre le problème :

$$\mathcal{L}(u) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$\mathcal{C}(u) = g \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{C}$  un opérateur différentiel de bord (par exemple  $\mathcal{C}(u) = u$  pour une condition de Dirichlet),  $\mathcal{L}$  un opérateur différentiel, et  $f$  et  $g$  des fonctions données. On découpe le domaine de calcul global  $\Omega$  en sous-domaines de la façon suivante :  $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^K \bar{\Omega}_i$ , avec  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ . On note  $\Gamma_{ij}$  l'interface entre les sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ ,  $i \neq j$  (voir figure 1). On note  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure à un sous-domaine  $\Omega_i$ , et  $\boldsymbol{\tau}_i$  le vecteur tangent unitaire.

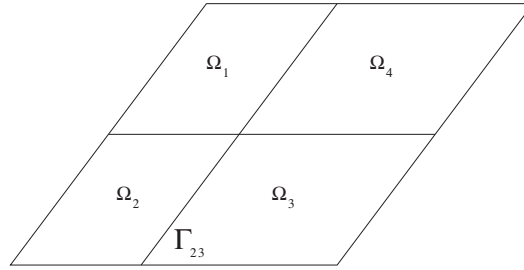


FIG. 1: *Décomposition du domaine*

Soit  $u_i^p$  l'approximation de la solution  $u$  de (1)-(2) à l'itération  $p$  dans chaque sous-domaine  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq K$ . L'algorithme de Schwarz s'écrit dans  $\Omega_i$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_i^{p+1}) &= f, \quad \text{dans } \Omega_i \\ \mathcal{B}_i(u_i^{p+1}) &= \mathcal{B}_i(u_j^p), \quad \text{sur chaque } \Gamma_{ij}, \quad j \neq i \\ \mathcal{C}(u_i^{p+1}) &= g, \quad \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

où  $\mathcal{B}_i$  est un opérateur d'interface. L'algorithme original de Schwarz additif [26] (P.L. Lions, 1988), avec des conditions d'interface de Dirichlet ( $\mathcal{B}_i = I_d$ ), ne converge que lorsque les sous-domaines se recouvrent. Dans [27] (P.L. Lions, 1989), les conditions d'interface sont des conditions plus générales de



type Fourier ou Robin ( $\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} + c_i$ , où  $c_i$  est une constante), ce qui permet d'obtenir un algorithme convergent pour un découpage du domaine sans recouvrement.

La question des conditions de raccord aux interfaces des sous-domaines est fondamentale. Diverses techniques ont été proposées (voir par exemple [19] (T. Hagstrom, R.P. Tewarson et A. Jazcilevich, 1988), [9] (B. Desprès, 1990), [7] (P. Charton, F. Nataf et F. Rogier, 1991), [5] (C. Carlenzoli et A. Quarteroni, 1995), [45] (K.H. Tan et M.J.A. Borsboom, 1994)). Il faut des conditions robustes, permettant de résoudre efficacement des équations à caractère parabolique, en particulier permettant de traiter des découpages quelconques sans savoir à l'avance où sont situés les phénomènes physiques tels que les couches limites ou les zones de recirculation. La notion de **Conditions aux Limites Artificielles (CLA)** (l'approche développée dans [11] (B. Engquist et A. Majda, 1977), puis [21] (L. Halpern, 1986)) permet de comprendre les mécanismes mathématiques en jeu aux interfaces, et ainsi de proposer des algorithmes stables et performants.

*Technique “Conditions aux Limites Artificielles (CLA)” :*

En premier lieu, il a été démontré dans [32] (F. Nataf, F. Rogier et E. de Sturler, 1995) que l'utilisation des CLA exactes en tant que conditions d'interface conduit, pour un découpage du domaine en “bandes”, à un résultat de convergence optimal. Cela justifie pleinement l'activité développée autour de l'utilisation de ces notions.

Les opérateurs intervenant dans les CLA exactes ne sont pas des opérateurs aux dérivées partielles, et sont donc d'un emploi coûteux et difficile numériquement. C'est pourquoi, afin de rester proche de la convergence optimale, on recherche des opérateurs d'interface sous la forme d'opérateurs aux dérivées partielles qui approchent ceux intervenant dans les CLA exactes. Ainsi, dans [7] (P. Charton, F. Nataf et F. Rogier, 1991), [31] (F. Nataf et F. Rogier, 1995), les conditions d'interface sont des approximations “basses fréquences” d'ordre 0, 1 ou 2 des CLA exactes (remarquons que les conditions d'interface de [9] (B. Desprès, 1990) et [5] (C. Carlenzoli et A. Quarteroni, 1995) peuvent être interprétées comme des approximations “basses fréquences” d'ordre 0 des CLA exactes).

Les approximations “basses fréquences” d'ordre 2 des conditions aux limites

artificielles exactes conduisent, dans la plupart des cas, à des gains très importants en vitesse de convergence par rapport aux conditions d'interface d'ordre 0 ou celles de Dirichlet, dans le cadre de la décomposition avec recouvrement (voir [31] (F. Nataf et F. Rogier, 1995)). Néanmoins, dans le cas d'une vitesse de convection tangente aux interfaces, la convergence est très lente, voir impossible.

Il nous a paru intéressant de chercher des **conditions d'interface d'ordre 2 en la variable tangentielle de manière à être de bonnes approximations des CLA exactes, pour un intervalle de fréquence donné, tout en restant stables**. Ces dernières seront alors moins sensibles aux différents paramètres intervenant dans l'algorithme (paramètres physiques, angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces, paramètres de discrétisation). Pour être un peu plus précis, les opérateurs d'interface  $\mathcal{B}_i$  sont cherchés sous la forme

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1^i + c_2^i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - c_3^i \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2}$$

où les coefficients  $c_1^i$ ,  $c_2^i$  et  $c_3^i$  sont calculés de manière à optimiser le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz. Pour deux sous-domaines adjacents  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , une relation entre  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{B}_j$  assure la stabilité et la convergence. Nous désignons ces conditions par "**Optimisées d'Ordre 2**" (**OO2**). L'idée d'optimisation du taux de convergence a été utilisée dans [1] (Y. Achdou et F. Nataf, 1995) pour la résolution d'un problème elliptique de type Stokes avec des maillages non coïncidents aux interfaces. Cette technique servait à minimiser le conditionnement d'une matrice de préconditionnement dans le cas de méthodes non conformes.

*Algorithme :*

Du point de vue de l'algorithme, la méthode de Schwarz peut être interprétée comme un algorithme de Jacobi appliqué à un problème condensé sur les interfaces. Pour accélérer la convergence, ce problème d'interface peut alors être résolu (suivant [32] (F. Nataf, F. Rogier et E. de Sturler, 1995)) par un algorithme de type Krylov (GMRES ou BICG-STAB, [42] (Y. Saad, 1996)), au lieu d'un algorithme de Jacobi.

Nous utiliserons ainsi la méthode suivante :

**La méthode Optimisée d'Ordre 2 (OO2)** s'inscrit dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, itératives. Cette méthode est définie de la façon suivante : le problème d'interface provenant de la reformulation de la méthode de Schwarz est résolu par un algorithme de type Krylov (BICG-STAB, GMRES ou GCR). Les conditions de raccord sur les interfaces des sous-domaines sont les conditions OO2 introduites ci-dessus.

Dans le cas de la méthode de Jacobi, la convergence se dégrade lorsque le nombre de sous-domaines augmente. En effet, lors du calcul du produit de la matrice interface par un vecteur, l'échange d'information s'effectue localement, à travers les interfaces des sous-domaines. Or la présence du terme  $-\nu\Delta$  dans l'opérateur de convection-diffusion fait que la solution dans un sous-domaine dépend de la valeur du second-membre  $f$  en chaque point du domaine global. Ainsi, il est nécessaire de transmettre une information globale entre les sous-domaines, afin d'avoir une convergence indépendante du nombre de sous-domaines. Différentes techniques de préconditionnement ont ainsi été développées (voir par exemple [6] (T. Chan et T.P. Mathew, 1994)). Celles-ci sont basés sur l'utilisation d'une grille grossière (méthodes multi-grilles). Néanmoins si la convection est grande, cette grille grossière doit être de plus en plus fine et donc de plus en plus coûteuse numériquement. Une autre approche a été développée dans [13] (C. Farhat, J. Mandel et F.X. Roux, 1994), [14] (C. Farhat et J. Mandel, 1998), [15] (C. Farhat, P.S. Chen, J. Mandel et F.X. Roux, 1998) pour les problèmes symétriques et dans le cadre de la méthode de Schur dual. Elle consiste à définir un "espace grossier" et, à chaque itération de l'algorithme, à projeter les solutions dans l'orthogonal de cet espace grossier. Nous généralisons cette technique de projection dans l'orthogonal d'un "espace grossier" aux problèmes non-symétriques. Cet espace grossier est ici choisi de sorte qu'à chaque itération on capture la partie "basses fréquences" de la solution, ceci afin d'avoir une convergence indépendante du nombre de sous-domaines.

Une étude est également menée, dans le cas de découpages généraux, sur les conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines qu'il

---

faut ajouter pour que le problème local de type (3) dans un sous-domaine soit bien posé. En effet, l'utilisation de conditions d'interface d'ordre deux dans la direction tangentielle nécessite l'ajout de telles conditions, afin d'avoir des problèmes locaux bien posés. Pour cette étude, nous utilisons les résultats de [35] (F. Nataf, 1998).

Ce travail se découpe ainsi de la manière suivante : la partie I est consacrée à l'étude des conditions d'interface, la partie II à la présentation de l'algorithme et son application à différents schémas, la partie III à l'étude de préconditionneurs, et la partie IV à l'étude de conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines.

L'étude théorique des conditions d'interface (partie I) est composée de la façon suivante :

Dans le chapitre I.2, nous faisons un rappel bibliographique des conditions d'interface utilisées en décomposition de domaine pour résoudre un problème de convection-diffusion. Ces conditions ont motivé le choix des conditions d'interface optimisées. La détermination des conditions d'interfaces optimisées fait l'objet des chapitres I.3, sur le problème continu en espace (conditions OO2), et I.4, sur le problème discret en espace (conditions  $(OO2)_h$ ). Les conditions  $(OO2)_h$  proviennent de conditions d'interface artificielles exactes discrètes et sont distinctes de la discrétisation des conditions OO2.

La deuxième partie traite de la description de l'algorithme OO2, de sa mise en œuvre, et de son application à différents schémas de discrétisation :

Le chapitre II.2 a pour objet la présentation de l'algorithme OO2, en particulier l'écriture du problème condensé à l'interface et sa résolution par un algorithme de type Krylov. Nous exposons ensuite, aux chapitres II.3 et II.4, des résultats numériques sur l'équation de convection-diffusion en 2D. Au chapitre II.3, la méthode est testée sur un code de calcul existant (avec une maille de recouvrement), dans le cas d'une discrétisation en temps par un schéma d'Euler implicite, et en espace par un schéma aux différences finies décentré. Au chapitre II.4, dans le cadre d'une collaboration avec Marc Brédif (MATRA BAe DYNAMICS France, département d'aérodynamique), nous appliquons la méthode à un schéma utilisé dans le code de calcul AEROLOG

[3] (C. Borel and M. Bredif, 1992). Le schéma en temps implicite provient du schéma de Lax-Wendroff, et la discrétisation en espace est de type volumes finis.

Pour ces deux applications, les résultats de convergence obtenus avec les conditions OO2 et  $(OO2)_h$  sont comparés à ceux donnés par les différentes conditions d'interface introduites au chapitre I.2. ("basses fréquences" d'ordre 0 ou 2). Nous mettons en évidence la réduction du nombre d'itérations de l'algorithme (BICG-STAB, GMRES, GCR) avec la méthode OO2, et donc la réduction du temps de calcul global. En effet, le temps de calcul dans une itération est le même quelle que soit la condition d'interface utilisée (Dirichlet, ordre 0, ordre 2), puisque l'utilisation de conditions d'ordre 2 n'augmente pas la largeur de bande des matrices locales.

La troisième partie a pour objet l'extension du préconditionneur développé dans [13] (C. Farhat, J. Mandel, F.X. Roux, 1994) aux problèmes non-symétriques. Au chapitre III.2, nous définissons un espace "grossier" et la projection dans l'orthogonal de cet espace. Les solutions sont alors projetées à chaque itération de l'algorithme, ce qui permet de filtrer les phénomènes basses fréquences, c'est-à-dire ceux qui se propagent à l'ensemble des sous-domaines. Au chapitre III.3 nous présentons des résultats numériques dans le cas de l'équation de convection-diffusion, discrétisée par le schéma volumes-finis du chapitre II.4.

La quatrième partie concerne l'étude de conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines afin de montrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème local dans un sous-domaine.

## Première partie

### Définition des conditions d'interface



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Outils généraux : conditions d'interface provenant des conditions aux limites artificielles (CLA)</b>	<b>21</b>
2.1	Rappel sur les CLA exactes : cas de 2 sous-domaines . . . . .	22
2.2	Ecriture de l'algorithme de Schwarz . . . . .	26
2.3	Les CLA exactes en tant que conditions d'interface . . . . .	26
2.4	Des CLA approchées en tant que conditions d'interface . . . . .	27
2.5	Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les CLA approchées . . . . .	29
2.5.1	Cas de 2 sous-domaines . . . . .	29
2.5.2	Extension à K sous-domaines . . . . .	32
2.6	Remarque sur une autre approche . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Conditions d'interface optimisées OO2 : étude sur le problème continu</b>	<b>35</b>
3.1	Motivation et définition . . . . .	35
3.2	Cas de 2 sous-domaines et d'un opérateur à coefficients constants : construction des conditions d'interface OO2 et étude de la convergence . . . . .	37
3.2.1	Minimisation du taux de convergence . . . . .	38
3.2.2	Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions OO2 . . . . .	49
3.2.3	Estimations du taux de convergence . . . . .	49
3.2.4	Résultats numériques sur le taux de convergence . . . . .	54
3.3	Méthodologie de calcul des conditions d'interface optimisées OO2 . . . . .	68



---

<b>4</b>	<b>Conditions d'interface optimisées <math>(OO2)_h</math> : étude sur le problème discret</b>	<b>71</b>
4.1	Décomposition du domaine et notations . . . . .	72
4.2	Algorithme de Schwarz et conditions d'interface: cas discret, sans recouvrement . . . . .	75
4.3	Définition des CLA exactes discrètes: cas de 2 sous-domaines .	77
4.4	Convergence optimale de l'algorithme de Schwarz avec les CLA exactes discrètes . . . . .	80
4.4.1	Cas de 2 sous-domaines . . . . .	80
4.4.2	Cas d'un découpage du domaine en bandes . . . . .	81
4.5	Remarque: lien entre les CLA exactes discrètes et la matrice du complément de Schur . . . . .	89
4.5.1	Rappel: méthode du complément de Schur . . . . .	89
4.5.2	Lien avec les CLA exactes discrètes . . . . .	90
4.6	Les conditions $(OO2)_h$ . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Compléments</b>	<b>97</b>
5.1	Minimisation sur deux paramètres du taux de convergence dans le cas de 2 sous-domaines . . . . .	97

# Chapitre 1

## Introduction

En décomposition de domaine, le choix des conditions de raccord aux interfaces des sous-domaines est fondamental pour obtenir des algorithmes stables et performants.

Aussi, cette partie a pour objet l'étude et la détermination de conditions d'interface permettant de résoudre efficacement les problèmes de type convection-diffusion. L'équation de convection-diffusion que nous considérons dans cette partie s'écrit :

$$\mathcal{L}(u) = cu + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \Delta u = f \quad (\text{I.1.1})$$

où  $\mathbf{a} = (a, b)$  est le champ de vitesses de convection,  $\nu$  la viscosité,  $f$  une fonction donnée, et  $c = \frac{1}{\Delta t}$  avec  $\Delta t$  le pas de temps d'un schéma d'Euler implicite (en particulier  $c = 0$  correspond à l'état stationnaire). L'utilisation d'un schéma implicite permet de prendre de plus grands pas de temps, et donc de limiter le nombre d'itérations en temps nécessaire.

Pour cette étude, nous faisons d'abord un rappel bibliographique des conditions d'interface utilisées en décomposition de domaine pour résoudre l'équation de convection-diffusion (chapitre I.2). Ces conditions ont motivé le choix des conditions d'interface dites "Optimisées d'Ordre 2" (OO2). La détermination de ces conditions d'interface fait l'objet des chapitres I.3 et I.4 : l'étude est réalisée d'abord sur le problème continu en espace (chapitre I.3). Une première raison est que les schémas de discrétisation sont souvent compliqués alors que l'écriture au niveau continu est simple. De plus, les algorithmes

obtenus vont rester valables pour toute discrétisation qui conserve les caractéristiques essentielles du problème physique (schémas aux différences finies décentrés, méthodes de volumes finis ou méthodes d'éléments finis de type streamline diffusion). Nous donnons une méthode de construction des conditions d'interface OO2, et étudions la convergence de l'algorithme de Schwarz avec celles-ci. Cependant, il peut être intéressant de tenir compte du schéma dans certaines situations. C'est pourquoi l'étude de l'optimisation des conditions d'interface a été ensuite étendue, au chapitre I.4, au problème discret. Nous définissons des conditions d'interface artificielles exactes discrètes, qui conduisent à une convergence optimale de l'algorithme de Schwarz. Ces conditions permettent de définir des conditions d'interface "OO2 discrètes" que nous notons  $(OO2)_h$ .

## Chapitre 2

# Outils généraux : conditions d'interface provenant des conditions aux limites artificielles (CLA)

Dans ce chapitre, nous exposons la notion de conditions aux limites artificielles et son utilisation pour l'écriture des conditions d'interface, comme dans [30], [31] (F. Nataf et F. Rogier 1994, 1995). La caractéristique fondamentale de cette démarche est qu'elle permet une convergence optimale (voir [32] (F. Nataf, F. Rogier et E. de Sturler, 1995)).

Dans tout ce qui suit, la normale extérieure à un sous-domaine  $\Omega_i$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée  $\mathbf{n}_i$ , et  $\boldsymbol{\tau}_i$  est le vecteur tangent unitaire défini comme sur la figure 2.1.

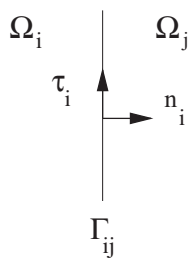


FIG. 2.1: *Interface entre 2 sous-domaines*

## 2.1 Rappel sur les CLA exactes : cas de 2 sous-domaines

Les conditions aux limites artificielles (CLA) sont utilisées en calcul scientifique pour résoudre des problèmes physiques posés dans des domaines non bornés ou si grands, qu'on ne souhaite pas les modéliser en entier (par exemple l'écoulement d'air autour d'un avion). Si l'on considère une discrétisation de type volumes finis, différences finies ou éléments finis, il n'est pas possible de prendre en compte un domaine infini ou un domaine si grand qu'il saturerait la mémoire de l'ordinateur. Il est nécessaire de tronquer le domaine de calcul par une frontière artificielle sur laquelle il faut se donner une condition aux limites dite artificielle. De manière idéale, cette condition doit être telle que la solution obtenue dans le domaine tronqué soit la restriction de la solution que l'on aurait calculée dans le domaine non tronqué. On dira qu'une telle condition aux limites est une condition aux limites artificielle exacte. En général, cette condition est intégrale en temps et en espace et serait d'un emploi très coûteux numériquement. Ceci a motivé la recherche de CLA qui approchent (en temps et en espace) les CLA exactes. Ceci a fait l'objet de nombreux travaux (voir [23] (S.I. Hariharan, 1985)). Ici, nous rappelons brièvement l'approche développée dans [11], [12] (B. Engquist et A. Majda, 1977, 1979) pour l'équation des ondes et étendue dans [21] (L. Halpern, 1986), [22] (L. Halpern et M. chatzman, 1989) en mécanique des fluides. Nous reprenons les notations de [33] (F. Nataf, 1995).

Supposons que l'on veut résoudre l'équation :

$$\mathcal{L}(u) = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

avec le support de  $f$  contenu dans le demi-plan gauche  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ .

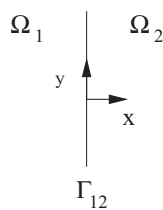


FIG. 2.2: Décomposition du domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2$

On borne le domaine dans la direction des  $x$  positifs en introduisant comme frontière artificielle la droite  $x = 0$ . On note  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , avec  $\Gamma_{12}$  l'axe  $x = 0$  (voir figure 2.2). On introduit l'opérateur de Steklov-Poincaré du demi-plan droit  $\Lambda^-$  :

$$\Lambda^- : u_0 \longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(w) = 0, \quad x > 0 \quad (\text{I.2.1})$$

$$w(0, y) = u_0(y) \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{I.2.2})$$

$$w \text{ borné à l'infini} \quad (\text{I.2.3})$$

On cherche à mettre une condition aux limites en  $x = 0$  qui soit exacte c'est-à-dire que l'on cherche un opérateur  $\mathcal{B}$  tel que la solution  $v$  du problème

$$\mathcal{L}(v) = f, \quad x < 0$$

$$\mathcal{B}(v) = 0, \quad x = 0$$

soit la restriction de  $u$  à  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ .

Comme  $u$  vérifie  $\mathcal{L}(u) = 0$  sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , d'après la définition de  $\Lambda^-$  et par unicité de (I.2.1)-(I.2.3) nous avons :

$$(\partial_x - \Lambda^-)(u) = 0 \text{ en } x = 0 \quad (\text{I.2.4})$$

si bien que la condition (I.2.4) est une condition aux limites artificielle exacte.

De façon similaire, en introduisant l'opérateur de Steklov-Poincaré du demi-plan gauche  $\Lambda^+$  :

$$\Lambda^+ : u_0 \longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(w) = 0, \quad x < 0 \quad (\text{I.2.5})$$

$$w(0, y) = u_0(y) \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{I.2.6})$$

$$w \text{ borné à l'infini} \quad (\text{I.2.7})$$

par unicité de (I.2.5)-(I.2.7), la condition

$$(\partial_x - \Lambda^+)(u) = 0 \text{ en } x = 0 \quad (\text{I.2.8})$$

est une condition aux limites artificielles exacte, si le support de  $f$  est inclus dans le demi-plan droit  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .

Lorsque  $\mathcal{L}$  est à coefficients constants, le symbole  $\lambda^-$  (resp.  $\lambda^+$ ) de  $\Lambda^-$  (resp.

$\Lambda^+$ ) peut être déterminé explicitement :

On désigne par  $\hat{w}$  la transformée de Fourier partielle par rapport à  $y$  de  $w$ , et  $k$  la variable de Fourier :

$$\hat{w}(x, k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} w(x, y) dy$$

et  $\mathcal{F}_k^{-1}$  désigne la transformée de Fourier inverse.

Prenons la transformée de Fourier partielle par rapport à  $y$  de (I.2.1) :

$$c\hat{w} + a\frac{\partial\hat{w}}{\partial x} + ibk\hat{w} - \nu\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2} + \nu k^2\hat{w} = 0, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{R} \quad (\text{I.2.9})$$

Les solutions sont cherchées sous la forme  $\sum_i \alpha_i(k) e^{\lambda_i(k)x}$ , où les  $\lambda_i(k)$  annulent le polynôme caractéristique de  $\mathcal{L}$  :

$$c + a\lambda + ibk - \nu\lambda^2 + \nu k^2$$

Ainsi, nous avons deux possibilités pour  $\lambda_i(k)$  :

$$\lambda^-(k, a, b) = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu + 4i\nu bk + 4k^2\nu^2}}{2\nu} \quad (\text{I.2.10})$$

$$\lambda^+(k, a, b) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu + 4i\nu bk + 4k^2\nu^2}}{2\nu} \quad (\text{I.2.11})$$

Lorsque  $c \neq 0$ , alors  $Re(\lambda^+) > 0$  et  $Re(\lambda^-) < 0$ . La solution  $\hat{w}$  de (I.2.9) étant bornée à l'infini, le terme en facteur de  $e^{\lambda^+(k)x}$  doit être nul. Nous avons ainsi  $\hat{w}(x, k) = \hat{u}_0(k) e^{\lambda^-(k)x}$  (d'après (I.2.2)), et

$$\Lambda^-(u_0) = \mathcal{F}_k^{-1}(\lambda^-(k)\hat{u}_0(k))$$

De même, si nous prenons la transformée de Fourier partielle par rapport à  $y$  de (I.2.5), l'équation qui en résulte a pour solution  $\hat{w}(x, k) = \hat{u}_0(k) e^{\lambda^+(k)x}$  et

$$\Lambda^+(u_0) = \mathcal{F}_k^{-1}(\lambda^+(k)\hat{u}_0(k))$$

**Remarque 2.1 (Factorisation de  $\mathcal{L}$ ).** Dans le cas où  $\mathcal{L}$  est à coefficients constants, en prenant une transformée de Fourier partielle de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $y$ , on peut le factoriser sous la forme

$$\mathcal{L} = -\nu(\partial_x - \Lambda^+)(\partial_x - \Lambda^-)$$

Les opérateurs intervenant dans les conditions aux limites artificielles exactes (I.2.4) et (I.2.8) sont les termes de la factorisation de  $\mathcal{L}$  (pour  $\mathcal{L}$  à coefficients variables, on peut aussi relier la factorisation de  $\mathcal{L}$  aux conditions aux limites artificielles exactes (voir [33] (F. Nataf, 1995))).

**Remarque 2.2 (Cas unidimensionnel).** *Considérons un cas unidimensionnel, avec*

$$\mathcal{L} = c + a \frac{\partial}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

où  $a$  est une constante,  $a \in \mathbb{R}$ .

On peut factoriser  $\mathcal{L}$  sous la forme

$$\mathcal{L} = -\nu \left( \partial_x - \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} \right) \left( \partial_x - \frac{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} \right)$$

Les opérateurs intervenant dans les conditions aux limites artificielles exactes sont donc

$$\left( \partial_x - \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} \right) \quad \text{et} \quad \left( \partial_x - \frac{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} \right)$$

c'est-à-dire  $(\partial_x - \lambda^-(0))$  et  $(\partial_x - \lambda^+(0))$  d'après (I.2.10) et (I.2.11).

Les opérateurs  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$  ne sont pas des opérateurs aux dérivées partielles. Des conditions d'interface faisant intervenir ces opérateurs seraient donc coûteuses et difficiles à mettre en œuvre. C'est pourquoi on recherche des opérateurs aux dérivées partielles qui approchent  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$ . Ceci revient à approcher  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$  par un polynôme en  $k$ . Dans [30] (F. Nataf et F. Rogier, 1994) les approximations de  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$  sont effectuées pour  $k$  petit. On obtient ainsi, par exemple pour l'approximation de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial x} - \Lambda^-$  intervenant dans la CLA exacte (I.2.4) :

$$\frac{\partial}{\partial x} - \Lambda^- \approx \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\nu}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2 + 4c\nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

pour des approximations à l'ordre 2 ( dans [21] (L. Halpern, 1986), l'approximation est faite par rapport à  $\nu$  petit, ce qui est équivalent à la faire pour  $k$  petit, dans le cas où  $c = 0$  dans (I.1.1)).

Pour les méthodes de type Schwarz ou Krylov, différentes conditions d'interface ont été développées à partir des conditions aux limites artificielles. Avant d'introduire ces conditions, nous rappelons l'algorithme de Schwarz.



## 2.2 Ecriture de l'algorithme de Schwarz

L'algorithme original de Schwarz additif [44] (H.A. Schwarz, 1870), [26] (P.L. Lions, 1988), avec des opérateurs d'interface de Dirichlet ( $\mathcal{B}_i = I_d$ ) ne converge que lorsque les sous-domaines se recouvrent. L'algorithme est étendu aux cas d'un découpage sans recouvrement dans [27] (P.L. Lions, 1989), avec des opérateurs d'interface de type Robin ( $\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} + c_i$ , où  $c_i$  est une constante). C'est cet algorithme que nous rappelons ici. Nous supposons, pour simplifier, que le domaine de calcul  $\Omega$  est découpé en deux sous-domaines disjoints  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparés par une interface  $\Gamma_{12}$ .

**Algorithme 2.1 (Schwarz, sans recouvrement).** *Soit  $(u_i^0)_{i=1,2}$  une approximation initiale de la solution  $u$  de (I.1.1) dans chaque sous-domaine, et soit  $(u_i^p)_{i=1,2}$  la valeur de l'approximation de  $u$  à l'itération  $p$ . L'algorithme de Schwarz additif présenté dans [27] (P.L. Lions, 1989) s'écrit :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_1^{p+1}) &= f, \text{ dans } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1(u_1^{p+1}) &= \mathcal{B}_1(u_2^p) \text{ sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_2^{p+1}) &= f, \text{ dans } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2(u_2^{p+1}) &= \mathcal{B}_2(u_1^p) \text{ sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont des opérateurs d'interface.

Différents opérateurs d'interface  $\mathcal{B}_i$  ont été développés à partir des conditions aux limites artificielles. Nous présentons, dans les sections suivantes, ces opérateurs d'interface.

## 2.3 Les CLA exactes en tant que conditions d'interface

L'utilisation de CLA exactes comme conditions d'interface a, semble-t-il, été faite pour la première fois dans [19] (T. Hagstrom, R.P. Tewarson et A. Jazcilevich, 1988), pour le problème de convection-diffusion.

**Remarque 2.3.** *Dans le cas où  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , si l'on prend comme opérateurs d'interface ceux intervenant dans les CLA exactes,  $\mathcal{B}_1 = \partial_x - \Lambda^-$  et  $\mathcal{B}_2 = \partial_x - \Lambda^+$ , l'algorithme de Schwarz 2.1 converge en 2*

itérations, ce qui est optimal. En effet, les équations de l'algorithme 2.1 étant linéaires, on peut considérer le cas où  $f=0$ . Alors, comme  $\mathcal{L}(u_1^1) = 0$  dans  $\Omega_1$  et  $\mathcal{L}(u_2^1) = 0$  dans  $\Omega_2$ , nous avons  $\mathcal{B}_1(u_1^1) = \mathcal{B}_2(u_2^1) = 0$  (par définition de  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$ ). Le second membre de l'algorithme 2.1 définissant  $u_i^2 = 0$  est donc nul, ce qui implique que  $u_i^2 = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Ce résultat se généralise au cas d'un découpage du domaine  $\Omega$  en bandes [32] (F. Nataf, F. Rogier et E. de Sturler, 1995).

Ce résultat justifie pleinement l'étude et l'utilisation de conditions aux limites artificielles pour la décomposition de domaine.

Néanmoins, en général, les opérateurs intervenant dans les CLA exactes ne sont pas utilisés comme opérateurs d'interface. En effet, on a vu que dans le cas où l'on a une forme explicite, ces opérateurs ne sont pas des opérateurs aux dérivées partielles, et sont donc coûteux et difficiles à utiliser dans un code de calcul. Ceci a conduit à la recherche d'opérateurs d'interface sous la forme d'opérateurs aux dérivées partielles qui approchent ceux intervenant dans les CLA exactes.

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons des opérateurs d'interface qui ont été développés dans cet esprit, et qui sont des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à 2.

## 2.4 Des CLA approchées en tant que conditions d'interface

Dans [30], [31] (F. Nataf et F. Rogier, 1994, 1995), les opérateurs d'interface ont été introduits comme des approximations "basses fréquences" d'ordre 0, 1 ou 2 des opérateurs intervenant dans les CLA exactes.

Nous expliquons brièvement la démarche qui permet d'obtenir ces opérateurs d'interface.

### Démarche

Nous supposons, dans un premier temps, que  $\Omega = \mathbb{R}^2$  est décomposé en 2 sous-domaines  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  (voir figure 2.2), et que les coefficients dans (I.1.1) sont constants.

Les opérateurs d'interface de [30], [31] (F. Nataf et F. Rogier, 1994, 1995) sont des approximations de Taylor d'ordre 0, 1 ou 2, pour les basses fréquences de Fourier, des opérateurs intervenant dans les CLA exactes (I.2.4) et (I.2.8). Ce sont les approximations que nous avons considéré à la section 2.1. Plus précisément, notons  $\lambda_l^+$  et  $\lambda_l^-$ ,  $l = 0, 1$  ou  $2$ , les développements de Taylor d'ordre  $l$  au voisinage de  $k = 0$  de  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$ . Notons ensuite  $\Lambda_l^+$  et  $\Lambda_l^-$ ,  $l = 0, 1$  ou  $2$ , les opérateurs dont  $\lambda_l^+$  et  $\lambda_l^-$  sont les symboles.

Alors, les opérateurs d'interface sont :

$$\mathcal{B}_1 = \partial_x - \Lambda_l^-, \quad \mathcal{B}_2 = -(\partial_x - \Lambda_l^+)$$

(nous ne notons pas ces opérateurs  $\mathcal{B}_{1,l}$  et  $\mathcal{B}_{2,l}$  pour des raisons de simplicité).

Par exemple pour les opérateurs d'ordre 2 :

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\nu}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \left(1 + \frac{b^2}{a^2 + 4c\nu}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\mathcal{B}_2 = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\nu}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \left(1 + \frac{b^2}{a^2 + 4c\nu}\right) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Ces expressions sont ensuite généralisées à un problème à coefficients variables et à un découpage quelconque du domaine :

Approximations de Taylor d'ordre 0 des CLA exactes

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}}{2\nu}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{I.2.12})$$

Approximations de Taylor d'ordre 2 des CLA exactes

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}}{2\nu} + \frac{\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i}{\sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}} \left(1 + \frac{(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)^2}{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}\right) \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{I.2.13})$$

**Remarque 2.4.** Dans [9], [10] (B. Desprès, 1990, 1991) pour le problème de Helmholtz, et [5] (C. Carlenzoli et A. Quarteroni, 1995) pour le problème de convection-diffusion, les opérateurs d'interface utilisés sont les approximations de Taylor d'ordre 0 des CLA exactes (opérateurs (I.2.12)).

**Remarque fondamentale 2.1.** Lorsque  $\mathcal{L}$  est à coefficients constants, pour  $l = 0, 1$  ou  $2$ ,

$$\Lambda_l^+ + \Lambda_l^- = \Lambda^+ + \Lambda^- = \frac{a}{\nu} \quad (\text{I.2.14})$$

Par conséquent,  $\mathcal{B}_2$  peut être obtenu à partir de  $\mathcal{B}_1$  en utilisant (I.2.14). De même, les opérateurs (I.2.12) et (I.2.13) s'écrivent sous la forme

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2}, \quad \mathcal{B}_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} - c_4 + c_5 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_2} - c_6 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_2^2} \quad (\text{I.2.15})$$

où les coefficients  $c_4, c_5, c_6$  sont obtenus à partir de  $c_1, c_2, c_3$  (ou réciproquement), à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_1), \quad c_2 = c_2(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_1), \quad c_3 = c_3(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_1) \\ \text{et } c_4 &= c_1 - \frac{\mathbf{a}, \mathbf{n}_1}{\nu}, \quad c_5 = c_2(\mathbf{a}, \mathbf{n}_2, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_2), \quad c_6 = c_3(\mathbf{a}, \mathbf{n}_2, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_2) \end{aligned} \quad (\text{I.2.16})$$

Le lien entre  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  fait en (I.2.16) (lien avec les CLA exactes) est crucial pour obtenir des algorithmes qui convergent, comme le montre la section suivante.

## 2.5 Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les CLA approchées

Dans cette section, nous rappelons un résultat de convergence montré dans [37] (F. Nataf et F. Nier, 1997). Nous reprenons les notations de la section 2.1.

### 2.5.1 Cas de 2 sous-domaines

Considérons de nouveau le cas où le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2$  est décomposé en deux sous-domaines  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  (voir figure 2.2), et où les coefficients dans (I.1.1) sont constants.

L'algorithme de Schwarz additif s'écrit (voir section 2.2) :

$$\mathcal{L}(u_1^{p+1}) = f, \text{ dans } \Omega_1 \quad (\text{I.2.17})$$

$$\mathcal{B}_1(u_1^{p+1}) = \mathcal{B}_1(u_2^p) \text{ sur } \Gamma_{12} \quad (\text{I.2.18})$$

$$\mathcal{L}(u_2^{p+1}) = f, \text{ dans } \Omega_2 \quad (\text{I.2.19})$$

$$\mathcal{B}_2(u_2^{p+1}) = \mathcal{B}_2(u_1^p) \text{ sur } \Gamma_{12} \quad (\text{I.2.20})$$

Nous étudions la convergence de l'algorithme de Schwarz (I.2.17)-(I.2.20) pour des opérateurs d'interface  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  définis par :

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2}, \quad \mathcal{B}_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} - c_4 + c_5 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_2} - c_6 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_2^2}$$

où

$$c_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1 - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1)^2 + 4c\nu}}{2\nu}$$

et  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_3 > 0$  ne dépendent que de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_1$  comme en (I.2.16), et  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $c_6$  qui vérifient (I.2.16).

On peut alors décomposer  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \partial_x - \Lambda_{ap}^- \\ \mathcal{B}_2 &= -(\partial_x - \Lambda_{ap}^+) \end{aligned}$$

où  $\Lambda_{ap}^-$  a pour symbole :

$$\lambda_{ap}^-(k) = \lambda^-(0) - c_2 ik - c_3 k^2 \quad (\text{I.2.21})$$

et  $\mathcal{B}_2$  est obtenu à partir de  $\mathcal{B}_1$  à l'aide de la relation

$$\Lambda_{ap}^+ + \Lambda_{ap}^- = \Lambda^+ + \Lambda^- = \frac{a}{\nu} \quad (\text{I.2.22})$$

Le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz (I.2.17)-(I.2.20) peut être calculé explicitement :

### Taux de convergence

On note  $e_i^p$  l'erreur  $u_i^p - u$  à l'interface  $\Gamma_{12}$  de  $\Omega_i$  à l'étape  $p$ ,  $i = 1, 2$ .  
On définit le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz (I.2.17)-(I.2.20) par

$$\hat{e}_1^{p+2} = \rho \hat{e}_1^p, \quad p \geq 1$$

On peut faire les calculs explicitement dans les variables  $(x, k)$ , et la relation (I.2.22) permet de simplifier  $\rho$  sous la forme :

$$\rho(k, c_2, c_3) = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \right)^2 \quad (\text{I.2.23})$$

En effet, les équations (I.2.17), (I.2.19) et (I.1.1) étant linéaires,

$$\mathcal{L}(e_1^p) = 0, \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (\text{I.2.24})$$

$$\mathcal{L}(e_2^p) = 0, \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (\text{I.2.25})$$

En prenant la transformée de Fourier partielle par rapport à  $y$  de (I.2.24) et (I.2.25), les solutions s'écrivent sous la forme  $\hat{e}_1^p(x, k) = \alpha_1^p(k) e^{\lambda^+(k)x}$  et  $\hat{e}_2^p(x, k) = \alpha_1^p(k) e^{\lambda^-(k)x}$  (voir la section 2.1).

Les conditions d'interface (I.2.18) à l'étape  $p + 2$  et (I.2.20) à l'étape  $p + 1$  donnent alors

$$\alpha_1^{p+2}(k)(\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)) = \alpha_2^{p+1}(k)(\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)) \quad (\text{I.2.26})$$

$$\alpha_2^{p+1}(k)(\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^+(k)) = \alpha_1^p(k)(\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^+(k)) \quad (\text{I.2.27})$$

Comme par définition  $\rho(k, c_2, c_3) = \frac{\alpha_1^{p+2}(k)}{\alpha_1^p(k)}$ , les relations (I.2.26) et (I.2.27) impliquent que

$$\rho(k, c_2, c_3) = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \right) \left( \frac{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^+(k)}{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^+(k)} \right)$$

La relation (I.2.22) entraîne que  $\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^+(k) = \lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)$  ainsi que  $\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^+(k) = \lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)$  et par suite

$$\rho(k, c_2, c_3) = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \right)^2$$

Alors nous avons le résultat suivant [37] (F. Nataf et F. Nier, 1997) :

**Théorème 2.1.** *Soit  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.*

*Pour tout  $\nu > 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_3 \geq 0$ , et pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ,*

$$|\rho(k, c_2, c_3)| < 1 \iff \left( \frac{\lambda_{ap}^- - \frac{a}{2\nu}}{\lambda^- - \frac{a}{2\nu}} \right) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \cup \{\infty\}$$

Notons que pour  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , nous avons la relation suivante :

$\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(z_1)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(z_2))$  et  $\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z_1)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z_2)) \implies \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) > 0$ .  
Or ici  $\operatorname{Re}\left(\lambda^- - \frac{a}{2\nu}\right) < 0$  d'après (I.2.10), et  $\operatorname{Re}\left(\lambda_{ap}^- - \frac{a}{2\nu}\right) < 0$  d'après (I.2.21) et le fait que nous avons supposé  $c_3 > 0$ . De plus,  $\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\lambda^-(k))) = -\operatorname{sgn}(bk)$ , pour  $k \in \mathbb{R}$  d'après (I.2.10) et  $\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\lambda_{ap}^-(k))) = -\operatorname{sgn}(c_2k)$ , pour  $k \in \mathbb{R}$  d'après (I.2.21). Par conséquent, d'après le théorème 2.1, nous avons :

**Corollaire 2.1.** *Supposons que  $\mathcal{L}$  est à coefficients constants.*

*Alors,  $\forall \nu > 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_3 \geq 0$ ,*

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(c_2) = \operatorname{sgn}(b) \implies |\rho(k, c_2, c_3)| < 1$$

En particulier, ceci permet de montrer la convergence de l'algorithme de Schwarz 2.1 avec les conditions d'interface de Taylor d'ordre 0 (I.2.12) où de Taylor d'ordre 2 (I.2.13).

## 2.5.2 Extension à K sous-domaines

Dans le cas de deux sous-domaines, la convergence est prouvée en calculant explicitement le taux de convergence. Dans le cas plus général d'un découpage en K sous-domaines (bandes) le taux de convergence est estimé en fonction du taux de convergence du cas à deux sous-domaines. La convergence est prouvée en utilisant des techniques issues de la théorie des langages formels dans [37] (F. Nataf et F. Nier, 1994) :

**Théorème 2.2.** *Soit le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2$  décomposé en K bandes verticales  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq K}$  de largeur au moins L sans recouvrement. On note u la solution du problème de convection-diffusion (I.1.1) et  $u_i^p$  l'estimation de u dans le domaine  $\Omega_i$  à l'itération p de l'algorithme de Schwarz. Alors, il existe un réel  $\xi_c > 0$  dépendant de  $\frac{b}{a}$  et de  $\frac{\nu}{ca^2}$  tel que si  $\frac{aL}{\nu} > \xi_c$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , l'algorithme de Schwarz converge dans le sens où*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_i^n - u\|_{H^2(\Omega_i)} = 0$$

## 2.6 Remarque sur une autre approche

Dans [45] (K.H. Tan et M.J.A. Borsboom, 1994), des opérateurs d'interface d'ordre 1 sont introduits, pour lesquels  $c_3 = c_6 = 0$  dans (I.2.15). Les coefficients  $c_1, c_2, c_4, c_5$  sont choisis de façon à minimiser le taux de convergence. Comme le problème de minimisation sur les quatre paramètres est très coûteux, un problème de minimisation approché est résolu, mais ceci conduit, dans certains cas, à une divergence de l'algorithme. Cela montre que le lien entre  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  fait en (I.2.16) (lien avec les CLA exactes) est fondamental pour obtenir des algorithmes convergents.





## Chapitre 3

# Conditions d'interface optimisées OO2 : étude sur le problème continu

### 3.1 Motivation et définition

Les conditions d'interface de Taylor d'ordre 2 (I.2.13) conduisent, dans la plupart des cas, à des gains très importants en vitesse de convergence par rapport aux conditions de Taylor d'ordre 0 (I.2.12) ou celles de Dirichlet dans le cas d'un découpage avec recouvrement (voir [31] (F. Nataf et F. Rogier, 1995)).

Cependant, dans le cas où  $c = 0$  dans (I.1.1), la convergence avec les conditions (I.2.13) se détériore lorsque la vitesse de convection devient tangente à l'interface. Ceci vient du fait que les coefficients des dérivées tangentielles première et seconde dans (I.2.13) deviennent infinis lorsque  $c = 0$  et  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i = 0$ . Rappelons que le cas  $c = 0$  est intéressant car il représente l'état stationnaire de l'équation de convection-diffusion.

C'est pourquoi, dans ce travail, nous cherchons des opérateurs d'interface sous la forme d'opérateurs différentiels d'ordre 2 comme en (I.2.15) qui soient une "bonne" approximation des opérateurs intervenant dans les CLA exactes, non seulement pour les basses fréquences, mais pour un intervalle de fréquence donné. Ceci signifie que les opérateurs d'interface sont cherchés de façon à minimiser le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz.

### Définition des conditions d'interface OO2

Cas de 2 sous-domaines :

Les opérateurs intervenant dans les conditions d'interface sont d'ordre 2 dans la direction tangente à l'interface :

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2}, \quad \mathcal{B}_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} - c_4 + c_5 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_2} - c_6 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_2^2}$$

et sont choisis de la façon suivante :

–  $c_4, c_5, c_6$  sont fixés par :

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_1), \quad c_2 = c_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_1), \quad c_3 = c_3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_1), \\ c_4 &= c_1 - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1}{\nu}, \quad c_5 = c_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_2), \quad c_6 = c_3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \end{aligned} \quad (\text{I.3.1})$$

–  $c_1$  est défini par :

$$c_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1 - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1)^2 + 4c\nu}}{2\nu}$$

de telle sorte que les conditions d'interface soit exactes pour la fréquence  $k = 0$ . Notons que dans un cas unidimensionnel, ce choix de  $c_1$  donne des opérateurs d'interface  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  qui sont ceux agissant dans les CLA exactes (voir remarque 2.2).

– Enfin, nous calculons  $c_2$  et  $c_3$  en minimisant le taux de convergence (I.2.23) de l'algorithme de Schwarz 2.1.

Extension dans le cas général :

**Définition 3.1 (Opérateurs d'interface OO2).** *Les opérateurs d'interface OO2 intervenant dans les conditions de transmission sur le bord d'un sous-domaine  $\Omega_i$  sont définis de la façon suivante :*

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}}{2\nu} + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2}$$

où  $c_2 = c_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$  et  $c_3 = c_3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$  minimisent le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz dans le cas de deux sous-domaines et d'un opérateur  $\mathcal{L}$  (défini en (I.1.1)) à coefficients constants.

**Remarque 3.1 (Avantages).** *D'après la section I.2.5, avec les conditions (I.3.1) (et en ajoutant une condition sur le signe de  $c_2$ ) la convergence de l'algorithme de Schwarz est assurée.*

**Remarque 3.2.** *Nous ne considérons pas, comme conditions d'interface, des approximations de Taylor d'ordre supérieur à 2 (ou de Padé), car les problèmes aux limites correspondants, dans chaque sous-domaine, seraient plus complexes à mettre en œuvre.*

L'étude du problème de minimisation du taux de convergence est effectuée, dans la section suivante, dans le cas de deux sous-domaines et de coefficients constants. Ceci permet d'étudier analytiquement le taux de convergence. La technique de calcul permettant d'atteindre le minimum dans ce cas est étendue, à la section 3.3, au cas de coefficients variables et d'un découpage quelconque du domaine.

## 3.2 Cas de 2 sous-domaines et d'un opérateur à coefficients constants : construction des conditions d'interface OO2 et étude de la convergence

Dans cette partie, les coefficients de l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini en (I.1.1) sont supposés constants ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ).

Le domaine de calcul  $\Omega = \mathbb{R}^2$  est découpé en 2 sous-domaines, sans recouvrement,  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  (voir figure 3.1).

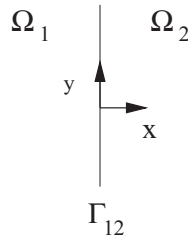


FIG. 3.1: Décomposition en 2 sous-domaines

On reprend les notations du chapitre I.2.

L'étude du problème de minimisation du taux de convergence de l'algorithme de Schwarz permet de définir une technique de calcul des conditions d'interface OO2. Nous donnons ensuite des estimations et des résultats numériques sur le taux de convergence.

### 3.2.1 Minimisation du taux de convergence

#### Algorithme de Schwarz

L'algorithme de Schwarz additif s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_1^{p+1}) &= f, \text{ dans } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1(u_1^{p+1}) &= \mathcal{B}_1(u_2^p) \text{ sur } \Gamma_{12} \end{aligned} \tag{I.3.2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_2^{p+1}) &= f, \text{ dans } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2(u_2^{p+1}) &= \mathcal{B}_2(u_1^p) \text{ sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

Les opérateurs  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  intervenant dans les conditions d'interface OO2 s'inscrivent dans le cadre des opérateurs d'interface de la section I.2.5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \partial_x - \Lambda_{ap}^- \\ \mathcal{B}_2 &= -(\partial_x - \Lambda_{ap}^+) \end{aligned}$$

où  $\Lambda_{ap}^-$  a pour symbole :

$$\lambda_{ap}^-(k) = \lambda^-(0) - c_2 ik - c_3 k^2$$

et  $\mathcal{B}_2$  est obtenu à partir de  $\mathcal{B}_1$  à l'aide de la relation

$$\Lambda_{ap}^+ + \Lambda_{ap}^- = \Lambda^+ + \Lambda^- = \frac{a}{\nu} \tag{I.3.3}$$

$c_2$  et  $c_3$  sont alors choisis de façon à minimiser le taux de convergence  $\rho$  (défini en (I.2.23)) de l'algorithme (I.3.2).

#### Problème de minimisation

Les coefficients  $c_2$  et  $c_3$  sont obtenus en minimisant le maximum de la fonction  $k \rightarrow \rho(k, c_2, c_3)$  sur l'intervalle  $|k| \leq k_{max}$  où  $k_{max}$  est une constante donnée,  $k_{max} > 0$  (dans le cas discret,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  où  $h$  est le pas du maillage

en  $y$  (voir par exemple [16] (C.A.J. Fletcher, 1991))).

Cas d'une vitesse de convection normale à l'interface  $\Gamma_{12}$  ( $b = 0$ )

Quand  $b = 0$ ,  $\lambda^-$  est paire donc  $c_2 = 0$ , et  $c_3$  est obtenu avec le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *On suppose que  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  et  $c \geq 0$  dans (I.1.1). Alors, pour  $k_{max} > 0$ , il existe un unique  $\bar{c}_3 \geq 0$  qui réalise le*

$$\min_{c_3 \geq 0} \max_{0 \leq k \leq k_{max}} |\rho(k, 0, c_3)| \quad (\text{I.3.4})$$

De plus,  $\bar{c}_3$  est l'unique solution dans  $[\frac{\lambda^-(0) - \lambda^-(k_{max})}{k_{max}^2}, \frac{\nu}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}]$  de l'équation

$$\rho(k_1(c_3), 0, c_3) = \rho(k_{max}, 0, c_3)$$

où  $k_1 = k_1(c_3)$  est la racine de la dérivée de  $k \rightarrow \rho(k, 0, c_3)$  telle que  $\rho(k_1, 0, c_3) \neq 0$  (voir figure 3.2).

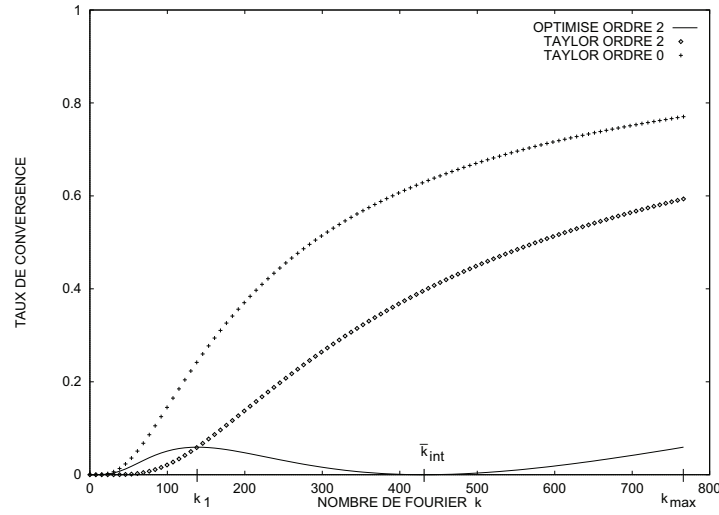


FIG. 3.2: Taux de convergence en fonction du paramètre de Fourier  $k$

$$0 \leq k \leq k_{max} = \frac{\pi}{h}$$

$$a = 1, b = 0, \nu = 0.01, c = 0, h = \frac{1}{240}$$

### Preuve du théorème 3.1.

La démonstration se fera en deux étapes, d'abord dans le cas où  $c = 0$  dans

(I.1.1) (cas stationnaire), puis dans le cas  $c \geq 0$ .

1) Cas  $c = 0$

On considère le cas de l'équation

$$a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \Delta u = f, \quad a \neq 0$$

En posant  $x = (\frac{2\nu k}{a})^2$  et  $\gamma = \frac{c_3 |a|}{2\nu}$ , le taux de convergence s'écrit :

$$\rho(x, \gamma) = \left( \frac{-1 + \sqrt{1+x} - \gamma x}{1 + \sqrt{1+x} + \gamma x} \right)^2$$

et, en posant  $x_{max} = (\frac{2\nu k_{max}}{a})^2$ , le problème de minimisation (I.3.4) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{\gamma \geq 0} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \gamma)| \quad (\text{I.3.5})$$

La fonction  $(x, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , positive, et pour  $\gamma \geq 0$  fixé,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x, \gamma) = 1$ .

*Recherche du maximum de  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$ , pour  $\gamma \geq 0$  fixé :*

Nous distinguerons trois cas sur  $\gamma$  :  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 0$ , et  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ .

•  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$

Supposons  $\gamma$  fixé avec  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ .

On pose  $x_1(\gamma) = \frac{1-2\gamma}{\gamma}$  et  $x_{int}(\gamma) = \frac{1-2\gamma}{\gamma^2}$ . Les racines positives de  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  sont 0 et  $x_{int}(\gamma)$ , et celles de  $x \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, \gamma)$  sont 0,  $x_1(\gamma)$ , et  $x_{int}(\gamma)$ . La fonction  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  est croissante sur  $[0, x_1(\gamma)] \cup [x_{int}(\gamma), x_{max}]$ , décroissante sur  $[x_1(\gamma), x_{int}(\gamma)]$  (voir figure 3.3).

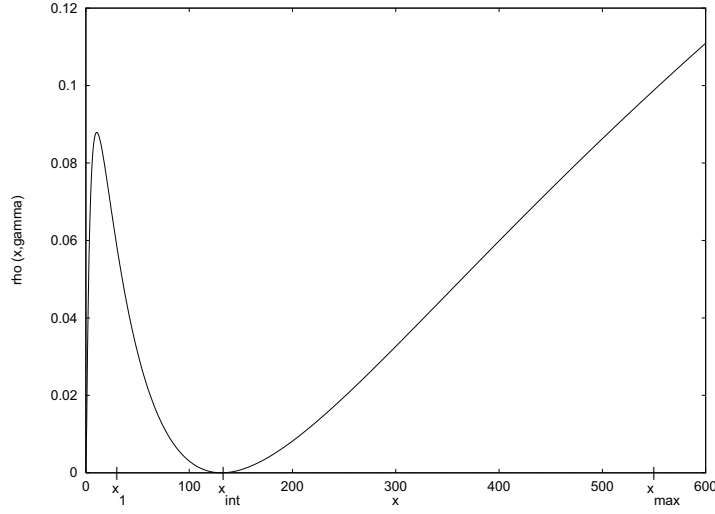


FIG. 3.3: Taux de convergence  $x \in [0, x_{max}] \longrightarrow \rho(x, \gamma)$ ,  $x_{max} = 600$  et  $\gamma = 0.08$

Nous avons ainsi trois possibilités pour le maximum de  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$ :

- Soit  $\gamma$  est tel que  $x_{max} \leq x_1(\gamma) \iff \gamma \leq f(x_{max})$ , avec  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ . Alors, le maximum de  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint en  $x_{max}$ ,
- Soit  $\gamma$  est tel que  $x_1(\gamma) \leq x_{max} \leq \frac{1-2\gamma}{\gamma^2} \iff f(x_{max}) \leq \gamma \leq g(x_{max})$ , avec  $g(x) = \frac{-1+\sqrt{1+x}}{x}$ . Alors, le maximum de  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint en  $x_1(\gamma)$ ,
- Soit  $\gamma$  est tel que  $x_{max} \geq \frac{1-2\gamma}{\gamma^2} \iff \gamma \geq g(x_{max})$ . Alors, le maximum de  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint soit en  $x_1(\gamma)$ , soit en  $x_{max}$ .

On cherche donc le

$$\min\left(\min_{0 < \gamma \leq f(x_{max})} \rho(x_{max}, \gamma), \min_{f(x_{max}) \leq \gamma \leq g(x_{max})} \rho(x_1(\gamma), \gamma), \min_{g(x_{max}) \leq \gamma < \frac{1}{2}} (\rho(x_1(\gamma), \gamma), \rho(x_{max}, \gamma))\right)$$

On note  $F_0(x, \gamma) = \frac{\partial \rho}{\partial \gamma}(x, \gamma) = -\frac{4x\sqrt{1+x}(-1+\sqrt{1+x}-\gamma x)}{(1+\sqrt{1+x}+\gamma x)^3}$ ,  $x \geq 0$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ . En particulier,  $F_0(x, \gamma) \leq 0 \iff \gamma \leq g(x)$ .



Étudions dans un premier temps le minimum sur  $]0, f(x_{max})]$  de  $\gamma \longrightarrow F(\gamma)$ , avec  $F(\gamma) = \rho(x_{max}, \gamma)$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ :

Par définition,  $F'(\gamma) = F_0(x_{max}, \gamma)$ . Donc pour  $0 < \gamma \leq f(x_{max})$ , on a  $F'(\gamma) \leq 0$  (car  $f(x_{max}) \leq g(x_{max})$ ).  $F$  étant continue, le minimum est atteint en  $\gamma = f(x_{max})$  ( $\iff x_{max} = x_1(\gamma)$ ). On est donc ramené à trouver le

$$\min_{f(x_{max}) \leq \gamma \leq g(x_{max})} \rho(x_1(\gamma), \gamma), \min_{g(x_{max}) \leq \gamma < \frac{1}{2}} (\rho(x_1(\gamma), \gamma), \rho(x_{max}, \gamma))$$

On pose  $G(\gamma) = \rho(x_1(\gamma), \gamma)$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ .

On a  $G'(\gamma) = \frac{\partial \rho}{\partial x}(x_1(\gamma), \gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma}(x_1(\gamma)) + \frac{\partial \rho}{\partial \gamma}(x_1(\gamma), \gamma)$ . Comme  $\frac{\partial \rho}{\partial x}(x_1(\gamma), \gamma) = 0$ , on obtient  $G'(\gamma) = F_0(x_1(\gamma), \gamma)$ , et  $G'(\gamma) \leq 0 \iff \gamma \leq g(x_1(\gamma))$ . Or  $\gamma \leq g(x_1(\gamma))$ ,  $\forall \gamma \in ]0, \frac{1}{2}[$ , donc  $G'(\gamma) \leq 0$ ,  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ . Comme  $G$  est continue sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , le minimum de  $G$  sur  $[f(x_{max}), g(x_{max})]$  est atteint en  $\gamma = g(x_{max})$ .

On est ainsi ramené à chercher le

$$\min_{g(x_{max}) \leq \gamma < \frac{1}{2}} (\rho(x_1(\gamma), \gamma), \rho(x_{max}, \gamma))$$

On a vu que  $F'(\gamma) \geq 0$  et  $G'(\gamma) \leq 0$  pour  $g(x_{max}) \leq \gamma < \frac{1}{2}$ . Comme  $F$  et  $G$  sont continues sur  $]0, \frac{1}{2}[$ ,  $F(\frac{1}{2}) \leq 0$  et  $G(\frac{1}{2}) = 0$ , il existe un unique  $\bar{\gamma}$ ,  $g(x_{max}) \leq \bar{\gamma} < \frac{1}{2}$ , tel que  $F(\bar{\gamma}) = G(\bar{\gamma})$ . De plus,

$$\min_{0 < \gamma < \frac{1}{2}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \gamma)| = F(\bar{\gamma}) = G(\bar{\gamma})$$

•  $\gamma = 0$

Supposons que  $\gamma = 0$ . La fonction  $x \longrightarrow \rho(x, 0)$  est croissante sur  $[0, x_{max}]$ , et son maximum est atteint en  $x_{max}$ . Un calcul simple montre alors que  $\rho(x_{max}, 0) > \rho(x_{max}, \bar{\gamma})$  (on utilise le fait que  $\bar{\gamma} < \frac{1}{2}$ ).

•  $\gamma \geq \frac{1}{2}$

Supposons que  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ . La fonction  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$  est alors croissante sur  $[0, x_{max}]$ , et son maximum est atteint en  $x_{max}$ . On étudie donc le

$$\min_{\gamma \geq \frac{1}{2}} \rho(x, \gamma) = \min_{\gamma \geq \frac{1}{2}} F(\gamma)$$

Comme  $F'(\gamma) \geq 0$  pour  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ , le minimum est atteint en  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Un calcul simple montre alors que  $\rho(x_{max}, \frac{1}{2}) > \rho(x_{max}, \bar{\gamma})$  (d'après  $\bar{\gamma} < \frac{1}{2}$ ).

Par suite, pour  $x_{max} > 0$  fixé, il existe un unique  $\bar{\gamma}$ ,  $g(x_{max}) \leq \bar{\gamma} < \frac{1}{2}$ , tel que  $\rho(x_{max}, \bar{\gamma}) = \rho(x_1(\bar{\gamma}), \bar{\gamma})$ . De plus, on a

$$\min_{\gamma \geq 0} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \gamma)| = \rho(x_{max}, \bar{\gamma}) = \rho(x_1(\bar{\gamma}), \bar{\gamma})$$

C'est-à-dire, en la variable de fourier  $k$  :

pour  $k_{max} > 0$  fixé, il existe un unique  $\bar{c}_3$ ,  $\frac{\lambda^-(0) - \lambda^-(k_{max})}{k_{max}^2} \leq \bar{c}_3 < \frac{\nu}{|a|}$ , tel que  $\rho(k_{max}, 0, \bar{c}_3) = \rho(k_1(\bar{c}_3), 0, \bar{c}_3)$ , où  $k_1 = k_1(c_3)$  est la racine de la dérivée de  $k \rightarrow \rho(k, 0, c_3)$  telle que  $\rho(k_1, 0, c_3) \neq 0$ . De plus, on a :

$$\min_{c_3 \geq 0} \max_{0 \leq k \leq k_{max}} |\rho(k, 0, c_3)| = \rho(k_{max}, 0, \bar{c}_3) = \rho(k_1(\bar{c}_3), 0, \bar{c}_3)$$

ce qui démontre le théorème 3.1 dans le cas où  $c = 0$ .

## 2) Cas $c \geq 0$

On considère le cas de l'équation

$$cu + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \Delta u = f, \quad a \neq 0, \quad c \geq 0$$

En posant  $x = (\frac{2\nu k}{a})^2$ ,  $\gamma = \frac{c_3 |a|}{2\nu}$ , et  $c' = \frac{4\nu c}{a^2}$ , le taux de convergence s'écrit :

$$\rho(x, \gamma) = \left( \frac{-\sqrt{1+c'} + \sqrt{1+c'+x} - \gamma x}{\sqrt{1+c'} + \sqrt{1+c'+x} + \gamma x} \right)^2$$

c'est-à-dire, en posant  $y = \frac{x}{1+c'}$  et  $\gamma' = \gamma \sqrt{1+c'}$  :

$$\rho(y, \gamma') = \left( \frac{-1 + \sqrt{1+y} - \gamma' y}{1 + \sqrt{1+y} + \gamma' y} \right)^2$$

et en posant  $y_{max} = \frac{x_{max}}{1+c'}$ , avec  $x_{max} = (\frac{2\nu k_{max}}{a})^2$ , le problème de minimisation (I.3.4) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{\gamma' \geq 0} \max_{0 \leq y \leq y_{max}} |\rho(y, \gamma')|$$

c'est-à-dire au problème de minimisation (I.3.5). Par suite, pour  $y_{max} > 0$  fixé, il existe un unique  $\bar{\gamma}'$ ,  $g(y_{max}) \leq \bar{\gamma}' < \frac{1}{2}$ , tel que  $\rho(y_{max}, \bar{\gamma}') = \rho(y_1(\bar{\gamma}'), \bar{\gamma}')$ . De plus,

$$\min_{\bar{\gamma}' \geq 0} \max_{0 \leq y \leq y_{max}} |\rho(y, \bar{\gamma}')| = \rho(y_{max}, \bar{\gamma}') = \rho(y_1(\bar{\gamma}'), \bar{\gamma}')$$

où  $y_1(\bar{\gamma}')$  est la racine de la dérivée de  $y \rightarrow \rho(y, \bar{\gamma}')$  telle que  $\rho(y, \bar{\gamma}') \neq 0$ .

On obtient ainsi, en la variable de fourier  $k$  :

pour  $k_{max} > 0$  fixé, il existe un unique  $\bar{c}_3$ ,  $\frac{\lambda^-(0) - \lambda^-(k_{max})}{k_{max}^2} \leq \bar{c}_3 < \frac{\nu}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}$ , tel que  $\rho(k_{max}, 0, \bar{c}_3) = \rho(k_1(\bar{c}_3), 0, \bar{c}_3)$ , où  $k_1 = k_1(\bar{c}_3)$  est la racine de la dérivée de  $k \rightarrow \rho(k, 0, \bar{c}_3)$  telle que  $\rho(k_1, 0, \bar{c}_3) \neq 0$ . De plus,

$$\min_{\bar{c}_3 \geq 0} \max_{0 \leq k \leq k_{max}} |\rho(k, 0, \bar{c}_3)| = \rho(k_{max}, 0, \bar{c}_3) = \rho(k_1(\bar{c}_3), 0, \bar{c}_3)$$

ce qui démontre le théorème 3.1.  $\square$

**Théorème 3.2.**  $\bar{c}_3$  peut être obtenu en minimisant  $\rho$  sur des fréquences intermédiaires  $k_{int}$ ,  $0 < k_{int} \leq k_{max}$  qui annulent  $\rho$ ; c'est-à-dire si  $k_{int}$  est tel que  $\rho(k_{int}, 0, c_3) = 0$ , alors  $c_3$  est une fonction de  $k_{int}$  et (I.3.4) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{0 < k_{int} \leq k_{max}} \max_{0 \leq k \leq k_{max}} |\rho(k, 0, c_3(k_{int}))| \quad (\text{I.3.6})$$

Alors, pour  $k_{max} > 0$  donné, il existe un unique  $\bar{k}_{int} \in ]0, k_{max}]$ , dépendant de  $k_{max}$ , solution du problème de minimisation (I.3.6). De plus,  $\bar{k}_{int}$  est obtenu comme étant l'unique solution dans  $]0, k_{max}]$  de l'équation

$$\rho(k_1(\bar{k}_{int}), 0, c_3(\bar{k}_{int})) = \rho(k_{max}, 0, c_3(\bar{k}_{int}))$$

où  $k_1$  est la racine dans  $]0, \bar{k}_{int}[$  de la dérivée de  $k \rightarrow \rho(k, 0, c_3(\bar{k}_{int}))$  (voir figure 3.2).

### Preuve du théorème 3.2.

Nous avons vu dans la démonstration du théorème 3.1 que le problème de minimisation (I.3.4) est équivalent au problème de minimisation :

$$\min_{g(x_{max}) \leq \gamma < \frac{1}{2}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \gamma)| \quad (\text{I.3.7})$$

Or d'après l'étude de la fonction  $x \longrightarrow \rho(x, \gamma)$ , si  $\gamma$  vérifie  $g(x_{max}) \leq \gamma < \frac{1}{2}$ , il existe un unique  $x_{int}$ ,  $0 < x_{int} \leq x_{max}$ , tel que  $\rho(x_{int}, \gamma) = 0$ , c'est-à-dire  $\gamma = \gamma(x_{int}) = \frac{-1 + \sqrt{1 + x_{int}}}{x_{int}}$ . Réciproquement, pour  $x_{int}$  fixé,  $0 < x_{int} \leq x_{max}$ , si  $\gamma$  est tel que  $\rho(x_{int}, \gamma) = 0$ , c'est-à-dire  $\gamma = \gamma(x_{int}) = \frac{-1 + \sqrt{1 + x_{int}}}{x_{int}}$ , alors on a  $g(x_{max}) \leq \gamma < \frac{1}{2}$ .

Ainsi, le problème (I.3.7) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{0 < x_{int} \leq x_{max}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \gamma(x_{int}))|$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.1, pour  $x_{max} > 0$  fixé, il existe un unique  $\bar{x}_{int} \in ]0, x_{max}]$ , tel que  $\rho(x_{max}, \bar{\gamma}(\bar{x}_{int})) = \rho(x_1(\bar{\gamma}(\bar{x}_{int})), \bar{\gamma}(\bar{x}_{int}))$ . De plus, on a :

$$\min_{0 < x_{int} \leq x_{max}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \gamma(x_{int}))| = \rho(x_{max}, \bar{\gamma}(\bar{x}_{int})) = \rho(x_1(\bar{\gamma}(\bar{x}_{int})), \bar{\gamma}(\bar{x}_{int}))$$

En repassant en variable de fourier  $k$  (voir la preuve du théorème 3.1), ceci démontre le théorème 3.2.  $\square$

**Remarque 3.3 (Choix de  $c_1$ ).** *Nous avons choisi  $c_1 = \lambda^-(0)$  pour que les conditions d'interface soit exactes pour la plus basse fréquence. Nous généralisons l'étude du taux de convergence dans le cas où  $c_1$  est quelconque. Dans ce cas, nous cherchons le*

$$\min_{c_1, c_2, c_3} \max_{|k| \leq k_{max}} |\rho(k, c_1, c_2, c_3)|$$

où  $\rho(k, c_1, c_2, c_3) = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \right)^2$  avec  $\lambda_{ap}^-(k) = c_1 - c_2 ik - c_3 k^2$ . Dans le cas où  $b = 0$ , nous avons un résultat similaire aux théorèmes 3.1 et 3.2 (voir chapitre I.5). Dans ce cas, nous avons observé numériquement que le gain sur le maximum du taux de convergence semble faible lorsque l'on minimise sur  $c_1$  et  $c_3$  au lieu de minimiser seulement sur  $c_3$  et de fixer  $c_1 = \lambda^-(0)$  (voir figure 3.4). En dehors de la complexité des calculs, c'est une autre raison pour laquelle nous avons choisi  $c_1 = \lambda^-(0)$ .

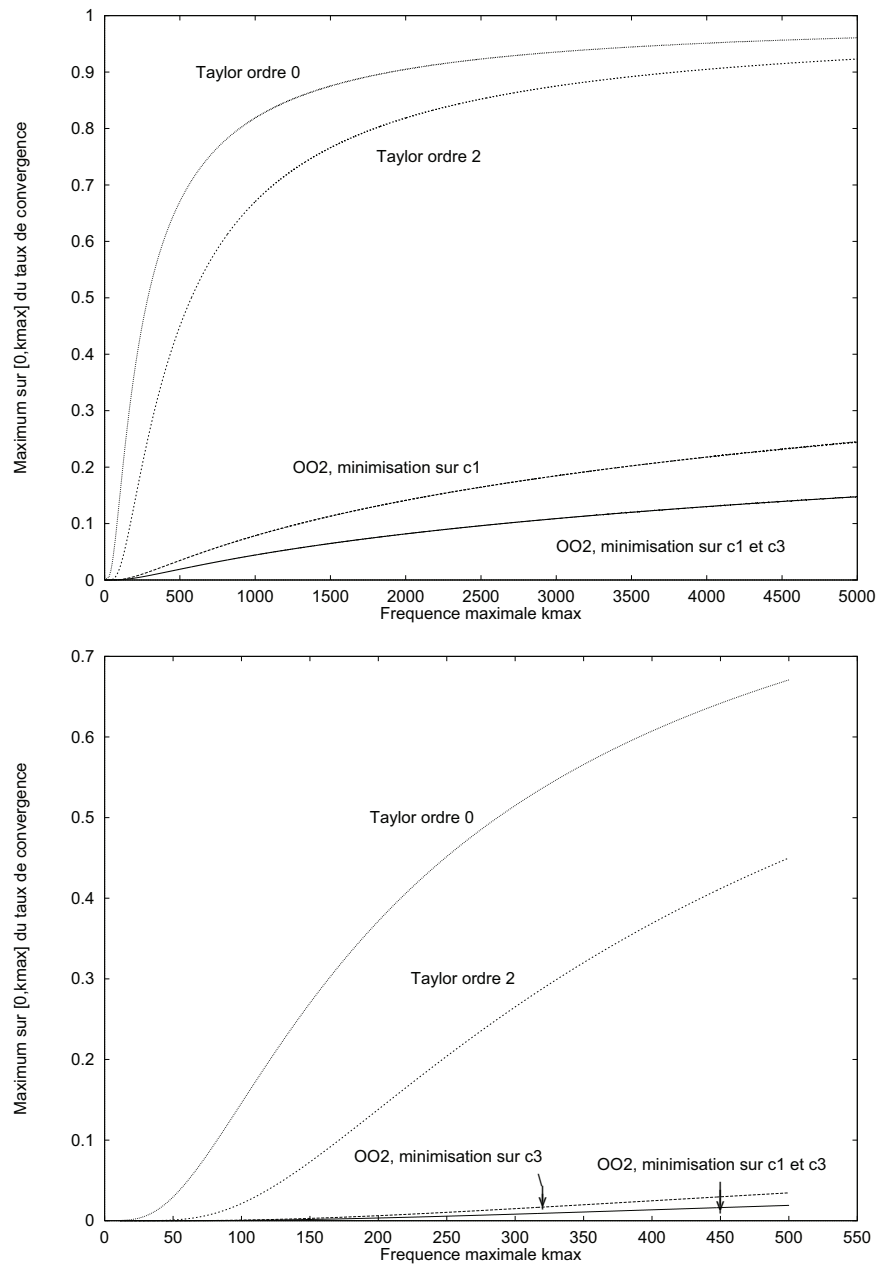


FIG. 3.4: Comportement du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence, en fonction de  $k_{max}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 0$

Cas d'une vitesse de convection quelconque ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ )

Lorsque la vitesse de convection est quelconque, d'après (I.2.10) et (I.2.11), nous avons :

$$\lambda^-(k) = \frac{a - \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4c\nu + 4k^2\nu^2)^2 + 16\nu^2 b^2 k^2} + \frac{a^2}{2} + 2c\nu + 2k^2\nu^2}}{2\nu} - i \operatorname{sgn}(bk) \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4c\nu + 4k^2\nu^2)^2 + 16\nu^2 b^2 k^2} - \frac{a^2}{2} - 2c\nu - 2k^2\nu^2}}{2\nu} \quad (\text{I.3.8})$$

$$\lambda^+(k) = \frac{a + \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4c\nu + 4k^2\nu^2)^2 + 16\nu^2 b^2 k^2} + \frac{a^2}{2} + 2c\nu + 2k^2\nu^2}}{2\nu} + i \operatorname{sgn}(bk) \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4c\nu + 4k^2\nu^2)^2 + 16\nu^2 b^2 k^2} - \frac{a^2}{2} - 2c\nu - 2k^2\nu^2}}{2\nu}$$

Aussi, l'étude du problème de minimisation sur les deux paramètres  $c_2$  et  $c_3$  est très complexe. Ceci nous a conduit à utiliser les résultats obtenus dans le cas précédent (cas  $b = 0$ ) afin de nous ramener à un problème de minimisation approché sur un seul paramètre  $k_{int}$  :

Pour un  $k_{int}$  arbitraire,  $0 \leq k_{int} \leq k_{max}$ ,  $c_2(k_{int})$  et  $c_3(k_{int})$  sont fixés par  $\rho(k_{int}, c_2, c_3) = 0$  :

$$c_2 = c_2(k_{int}) = -\frac{\operatorname{Im}(\lambda^-(k_{int}))}{k_{int}} \quad \text{et} \quad c_3 = c_3(k_{int}) = \frac{\lambda^-(0) - \operatorname{Re}(\lambda^-(k_{int}))}{k_{int}^2}$$

et on regarde le problème de minimisation suivant :

$$\min_{0 < k_{int} \leq k_{max}} \max_{0 \leq k \leq k_{max}} |\rho(k, c_2(k_{int}), c_3(k_{int}))|$$

**Proposition 3.1.** *Supposons que  $c = 0$  dans (I.1.1) (cas stationnaire). Soit  $k_{int}$ ,  $0 < k_{int} \leq k_{max}$  tel que  $\rho(k_{int}, c_2, c_3) = 0$ . Alors,*

$$\forall k \in ]0, k_{max}], \quad k \neq k_{int}, \quad \rho(k, c_2, c_3) \neq 0$$

**Preuve de la proposition 3.1.**

On suppose que  $b \neq 0$ , le cas  $b = 0$  étant montré au théorème 3.1.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe  $k_2 \in ]0, k_{max}]$ , tel que  $\rho(k_2, c_2, c_3) = 0$ . Alors,

$$c_2 = -\frac{\text{Im}(\lambda^-(k_{int}^-))}{k_{int}^-} = -\frac{\text{Im}(\lambda^-(k_2))}{k_2} \quad (\text{I.3.9})$$

Dans le cas où  $c = 0$  dans (I.1.1), une étude de la dérivée de la fonction  $k \rightarrow \frac{\text{Im}(\lambda^-(k))}{k}$  montre que cette dérivée ne s'annule pas sur  $]0, k_{max}]$ . Alors la relation (I.3.9) entraîne que  $k_2 = k_{int}^-$ .  $\square$

Alors, une approximation  $k_{int}^-$  du minimum est calculée par (voir figure 3.5):

$$|\rho(k_1, c_2(k_{int}^-), c_3(k_{int}^-))| = |\rho(k_{max}, c_2(k_{int}^-), c_3(k_{int}^-))|$$

où  $k_1$  est la racine dans  $]0, k_{int}^-]$  de la dérivée de la fonction  $k \rightarrow |\rho(k, c_2(k_{int}^-), c_3(k_{int}^-))|$ .

Avec  $k_{int}^-$  on peut calculer  $c_2 = c_2(k_{int}^-)$  et  $c_3 = c_3(k_{int}^-)$ :

$$c_2 = -\frac{\text{Im}(\lambda^-(k_{int}^-))}{k_{int}^-}, \quad c_3 = \frac{\lambda^-(0) - \text{Re}(\lambda^-(k_{int}^-))}{(k_{int}^-)^2} \quad (\text{I.3.10})$$

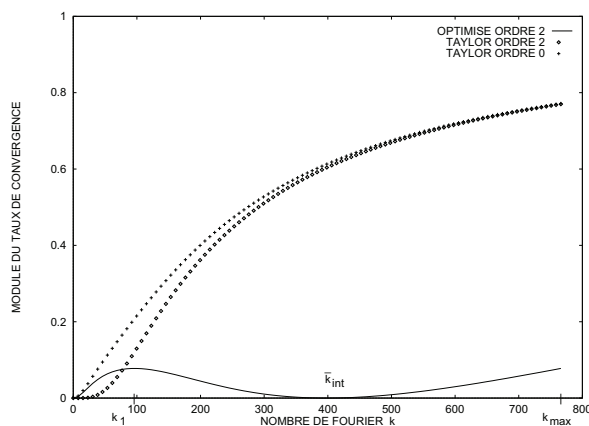


FIG. 3.5: Module du taux de convergence en fonction du nombre de Fourier  $k$

$$0 \leq k \leq k_{max} = \frac{\pi}{h}$$

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \nu = 0.01, \quad c = 0, \quad h = \frac{1}{240}$$

La partie qui suit montre l'importance des relations (I.3.1) ((I.3.3) dans l'espace de Fourier) à savoir qu'elles permettent, avec le signe de  $c_2$  défini en (I.3.10), d'obtenir des algorithmes qui convergent.

### 3.2.2 Convergence de l'algorithme de Schwarz avec les conditions OO2

**Théorème 3.3.** *Soient  $\rho$  le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz (défini en (I.2.23)) avec les conditions d'interface OO2 (dont les coefficients  $c_2$  et  $c_3$  sont définis en (I.3.10)). Alors,*

$$\forall \nu > 0, c \geq 0, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},$$

$$\forall k \in \mathbb{R}, |\rho(k, c_2, c_3)| < 1$$

#### Preuve du théorème 3.3

D'après le corollaire 2.1 (partie I, section 2.5), il suffit de vérifier que  $\text{sgn}(c_2) = \text{sgn}(b)$ . Par définition, nous avons (voir (I.3.10)) :

$$c_2 = -\frac{\text{Im}(\lambda^-(k_{int}))}{k_{int}}$$

avec  $k_{int} > 0$ . Comme  $\text{sgn}(\text{Im}(\lambda^-(k_{int}))) = -\text{sgn}(b k_{int})$  d'après (I.3.8),  $c_2$  est du même signe que  $b$ , ce qui démontre le théorème 3.3.  $\square$

### 3.2.3 Estimations du taux de convergence

Nous étudions le comportement asymptotique du taux de convergence (défini en (I.2.23)) de l'algorithme de Schwarz (I.3.2), lorsque le paramètre de discrétisation  $h$  tend vers 0.

**Théorème 3.4.** *Supposons que  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  et  $c \geq 0$  dans (I.1.1). Soit  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  où  $h$  est le paramètre de discrétisation. Soit  $\rho$  le taux de convergence, défini en (I.2.23), de l'algorithme (I.3.2). On note  $(\rho_{max})_{CI}$  le maximum de  $\rho$  sur  $0 \leq k \leq k_{max}$ , avec les conditions d'interface CI.*



Soit  $c' = 1 + \frac{4\nu c}{a^2}$ . Alors, quand  $h \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} (\rho_{max})_{Taylor \text{ ordre } 0} &\approx 1 - \frac{2}{\pi} c'^{\frac{1}{2}} \left( \frac{|a|h}{\nu} \right) \\ (\rho_{max})_{Taylor \text{ ordre } 2} &\approx 1 - \frac{4}{\pi} c'^{\frac{1}{2}} \left( \frac{|a|h}{\nu} \right) \\ (\rho_{max})_{OO2} &\approx 1 - \frac{8}{(4\pi)^{\frac{1}{3}}} c'^{\frac{1}{6}} \left( \frac{|a|h}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

#### Preuve du théorème 3.4.

Supposons que  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  et  $c \geq 0$  dans (I.1.1). Alors, à l'aide du changement de variables  $y = \frac{1}{1+c'} \left( \frac{2\nu k}{a} \right)^2$ ,  $\gamma' = \left( \frac{c_3 |a|}{2\nu} \right) \sqrt{1+c'}$  avec  $c' = \frac{4\nu c}{a^2}$ , le taux de convergence s'écrit :

$$\rho(y, \gamma') = \left( \frac{-1 + \sqrt{1+y} - \gamma' y}{1 + \sqrt{1+y} + \gamma' y} \right)^2$$

(voir la démonstration du théorème 3.1).

Estimations pour les conditions de Taylor d'ordre 0 ou 2 :

Dans le cas des conditions de Taylor d'ordre 0 ou 2, le coefficient  $c_3$  est indépendant de  $y_{max}$ .

*Conditions de Taylor d'ordre 0 :*

Pour les conditions de Taylor d'ordre 0, nous avons  $c_3 = 0$ , c'est-à-dire  $\gamma' = 0$ . La fonction  $y \rightarrow \rho(y, 0)$  est croissante sur  $[0, y_{max}]$ , et son maximum est atteint en  $y_{max}$ . Par suite,

$$(\rho_{max})_{Taylor \text{ ordre } 0} = \rho(y_{max}, 0)$$

c'est-à-dire, en posant  $\epsilon = \frac{1}{4y_{max}}$ ,

$$\begin{aligned} (\rho_{max})_{Taylor \text{ ordre } 0} &= \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\epsilon}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\epsilon}}} \right)^2 \\ &= \left( \frac{-2\sqrt{\epsilon} + \sqrt{4\epsilon + 1}}{2\sqrt{\epsilon} + \sqrt{4\epsilon + 1}} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{I.3.11})$$

En utilisant un développement limité en  $\epsilon = 0$  de (I.3.11), on obtient :

$$(\rho_{max})_{Taylor\ ordre\ 0} \approx 1 - 8\epsilon^{\frac{1}{2}}$$

C'est-à-dire, lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0 (rappelons que nous avons posé  $\epsilon = \frac{1}{4y_{max}}$ , et  $y_{max} = \frac{1}{1+c} \left(\frac{2\nu k_{max}}{a}\right)^2$ , avec  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$ ) :

$$(\rho_{max})_{Taylor\ ordre\ 0} \approx 1 - \frac{2}{\pi} c^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|a|h}{\nu}\right)$$

*Conditions de Taylor d'ordre 2 :*

Pour les conditions de Taylor d'ordre 2, nous avons  $c_3 = \frac{\nu}{|a|\sqrt{1+c}}$ , c'est-à-dire  $\gamma' = \frac{1}{2}$ . La fonction  $y \rightarrow \rho(y, \frac{1}{2})$  est croissante sur  $[0, y_{max}]$ , et son maximum est atteint en  $y_{max}$ . Par suite,

$$(\rho_{max})_{Taylor\ ordre\ 2} = \rho(y_{max}, \frac{1}{2})$$

c'est-à-dire, en posant  $\epsilon = \frac{1}{4y_{max}}$ ,

$$\begin{aligned} (\rho_{max})_{Taylor\ ordre\ 2} &= \left( \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{4\epsilon} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\epsilon} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\epsilon}}} \right)^2 \\ &= \left( \frac{8\epsilon - 4\sqrt{\epsilon} + \sqrt{4\epsilon + 1} + 1}{8\epsilon + 4\sqrt{\epsilon} + \sqrt{4\epsilon + 1} + 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (I.3.12)$$

En utilisant un développement limité en  $\epsilon = 0$  de (I.3.12), on obtient :

$$(\rho_{max})_{Taylor\ ordre\ 2} \approx 1 - 16\epsilon^{\frac{1}{2}}$$

C'est-à-dire, lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0 (rappelons que nous avons posé  $\epsilon = \frac{1}{4y_{max}}$ , et  $y_{max} = \frac{1}{1+c} \left(\frac{2\nu k_{max}}{a}\right)^2$ , avec  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$ ) :

$$(\rho_{max})_{Taylor\ ordre\ 2} \approx 1 - \frac{4}{\pi} c^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|a|h}{\nu}\right)$$

Estimation pour les conditions OO2 :

Nous utilisons dans cette partie les résultats du théorème 3.1. Nous commençons par chercher le comportement asymptotique du coefficient  $\bar{c}_3$ , intervenant dans les conditions OO2, lorsque  $y_{max} \rightarrow +\infty$  ( $\iff h \rightarrow 0$ ). Ce coefficient devient  $\bar{\gamma}'$  avec le changement de variables effectué ci-dessus.

En posant  $y_{max} = \frac{1}{1+c}(\frac{2\nu k_{max}}{a})^2$ , ( $y_{max} > 0$ ), la solution  $\bar{\gamma}'$  du problème de minimisation

$$\min_{\gamma' \geq 0} \max_{0 \leq y \leq y_{max}} |\rho(y, \gamma')|$$

est obtenue comme étant l'unique solution dans  $[\frac{-1+\sqrt{1+y_{max}}}{y_{max}}, \frac{1}{2}]$  de l'équation

$$\rho(y_{max}, \gamma') = \rho(y_1(\gamma'), \gamma') \quad (\text{I.3.13})$$

où  $y_1(\gamma')$  est la racine de la dérivée de  $y \rightarrow \rho(y, \gamma')$  telle que  $\rho(y, \gamma') \neq 0$ . (voir la démonstration du théorème 3.1).

Un calcul simple montre que l'équation (I.3.13) est équivalente à l'équation suivante :

$$4\gamma'(1-\gamma')(1+\gamma'y_{max})^2 - 1 - y_{max} = 0 \quad (\text{I.3.14})$$

**Lemme 3.1.** *Pour  $y_{max} \gg 1$  fixé, la solution  $\bar{\gamma}'_{\infty}$  de (I.3.14) correspondante vérifie :*

$$\bar{\gamma}'_{\infty} \approx \epsilon^{\frac{1}{3}} \quad \text{avec } \epsilon = \frac{1}{4y_{max}}$$

(la démonstration du lemme 3.1 est donnée ci-dessous).

D'après le théorème 3.1,

$$(\rho_{max})_{OO2} = \rho(y_{max}, \bar{\gamma}'_{\infty})$$

c'est-à-dire (en utilisant le lemme 3.1),

$$\begin{aligned} (\rho_{max})_{OO2} &\approx \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\epsilon} - \epsilon^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4\epsilon}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\epsilon} + \epsilon^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4\epsilon}}} \right)^2 \\ &\approx \left( \frac{4\epsilon^{\frac{2}{3}} - 2\epsilon^{\frac{1}{6}} \sqrt{4\epsilon + 1} + 1}{4\epsilon^{\frac{2}{3}} + 2\epsilon^{\frac{1}{6}} \sqrt{4\epsilon + 1} + 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{I.3.15})$$

En utilisant un développement limité en  $\epsilon = 0$  de (I.3.15), on obtient :

$$(\rho_{max})_{OO2} \approx 1 - 8\epsilon^{\frac{1}{6}}$$

C'est-à-dire, lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0 (rappelons que nous avons posé  $\epsilon = \frac{1}{4y_{max}}$ , et  $y_{max} = \frac{1}{1+c'} \left(\frac{2\nu k_{max}}{a}\right)^2$ , avec  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$ ) :

$$(\rho_{max})_{OO2} \approx 1 - \frac{8}{(4\pi)^{\frac{1}{3}}} c'^{\frac{1}{6}} \left(\frac{|a|h}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ce qui démontre le théorème 3.4.  $\square$

Pour démontrer le lemme 3.1, nous utiliserons le résultat suivant :

**Lemme 3.2.** La solution  $\overline{\gamma'}$  de l'équation (I.3.14) vérifie :

$$\lim_{y_{max} \rightarrow +\infty} (y_{max} \overline{\gamma'}) = +\infty$$

**Preuve du lemme 3.2.**

Soit  $\gamma' \geq 0$  vérifiant (I.3.14). Nous raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|y_{max}\gamma'| \leq M$ ,  $\forall y_{max} > 0$ . Alors,

$$4\gamma'(1 - \gamma')(1 + \gamma'y_{max})^2 \leq \frac{4M}{y_{max}} \left(1 + \frac{M}{y_{max}}\right) (1 + M)^2 \quad (\text{I.3.16})$$

Comme  $\lim_{y_{max} \rightarrow +\infty} \frac{4M}{y_{max}} \left(1 + \frac{M}{y_{max}}\right) (1 + M)^2 = 0$ , l'inégalité (I.3.16) entraîne que  $\lim_{y_{max} \rightarrow +\infty} 4\gamma'(1 - \gamma')(1 + \gamma'y_{max})^2 = 0$ , ce qui contredit l'équation (I.3.14) :

$$\lim_{y_{max} \rightarrow +\infty} 4\gamma'(1 - \gamma')(1 + \gamma'y_{max})^2 = \lim_{y_{max} \rightarrow +\infty} (1 + y_{max}) = +\infty$$

Donc,  $\lim_{y_{max} \rightarrow +\infty} (y_{max}\overline{\gamma'}) = +\infty$ .  $\square$

**Preuve du lemme 3.1.**

Supposons  $y_{max} \gg 1$  fixé, et notons  $\overline{\gamma'}$  la solution de l'équation (I.3.14)

correspondante. D'après le lemme 3.2, on peut négliger dans (I.3.14) les constantes par rapport à  $y_{max}$  et  $y_{max} \bar{\gamma}'_{\infty}$  :

$$\begin{aligned} 4 \bar{\gamma}'_{\infty} (1 - \bar{\gamma}'_{\infty}) (\bar{\gamma}'_{\infty} y_{max})^2 &\approx y_{max} \\ \iff (\bar{\gamma}'_{\infty})^3 - (\bar{\gamma}'_{\infty})^4 &\approx \frac{1}{4y_{max}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.17})$$

On pose  $\epsilon = \frac{1}{4y_{max}}$ . Comme  $0 \leq \bar{\gamma}'_{\infty} < \frac{1}{2}$ , la relation (I.3.17) entraîne que  $\bar{\gamma}'_{\infty} \approx \epsilon^{\frac{1}{3}}$ .  $\square$

Le taux de convergence est donc asymptotiquement meilleur avec les conditions OO2 qu'avec celles de Taylor d'ordre 0 ou 2.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons des résultats numériques qui confirment ces estimations.

### 3.2.4 Résultats numériques sur le taux de convergence

Nous supposons que le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2$  est découpé en 2 sous-domaines  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , séparés par une interface  $\Gamma_{12}$  (voir figure 3.1), et que les coefficients de  $\mathcal{L}$  dans (I.1.1) sont constants.

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques montrant l'influence de différents paramètres sur le maximum sur  $[0, k_{max}]$  du module du taux de convergence  $\rho$  (défini en (I.2.23)), ainsi que sur les coefficients  $c_2$  et  $c_3$  (défini en (I.3.10)). Ces paramètres sont :

- l'angle de la vitesse de convection par rapport à l'interface
- la viscosité  $\nu$
- la constante  $c$
- le pas du maillage  $h$ , lorsque la fréquence maximale vaut  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$

### Variation de l'angle de la vitesse de convection

Dans ce paragraphe, le champ de vitesse de convection est  $\mathbf{a} = (a, b)$ , avec  $a = \cos(\theta)$ ,  $b = \sin(\theta)$  (voir figure 3.6), et on regarde l'influence du paramètre  $\theta$  sur le taux de convergence.

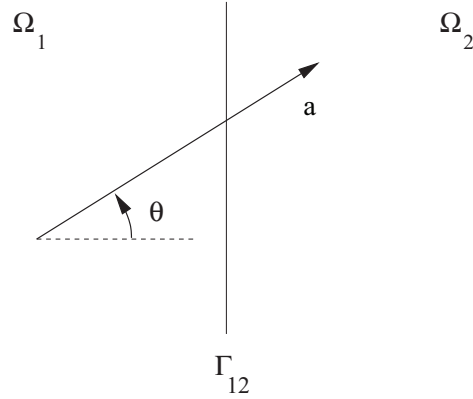


FIG. 3.6: Vitesse de convection  $a = \cos(\theta)$ ,  $b = \sin(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

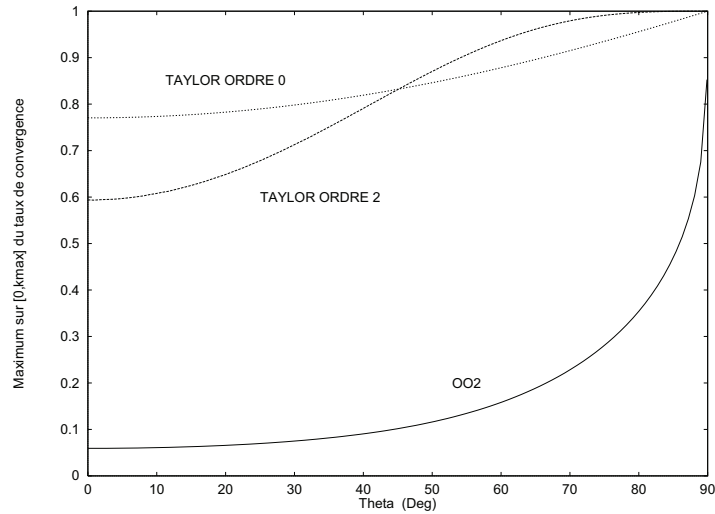


FIG. 3.7: Comportement du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence en fonction de l'angle  $\theta$  de la vitesse de convection par rapport à l'interface  $a = \cos(\theta)$ ,  $b = \sin(\theta)$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 0$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

Ainsi, on observe sur la figure 3.7 que le maximum du taux de convergence avec les conditions OO2 est inférieur à celui obtenu avec les conditions de Taylor d'ordre 0 ou d'ordre 2. De plus lorsque  $a = 0$  et  $b = 1$  (vitesse de convection tangente à l'interface), ce maximum avec les conditions OO2 est strictement inférieur à 1, ce qui n'est pas le cas de celui obtenu avec les conditions de Taylor d'ordre 2 ou 0. Ceci est lié au comportement des coefficients  $c_2$  et  $c_3$  comme le montre la figure 3.8. En effet, on remarque qu'avec les conditions OO2, les pentes des fonctions  $\theta \rightarrow c_2(\theta)$  et  $\theta \rightarrow c_3(\theta)$  sont très faibles.

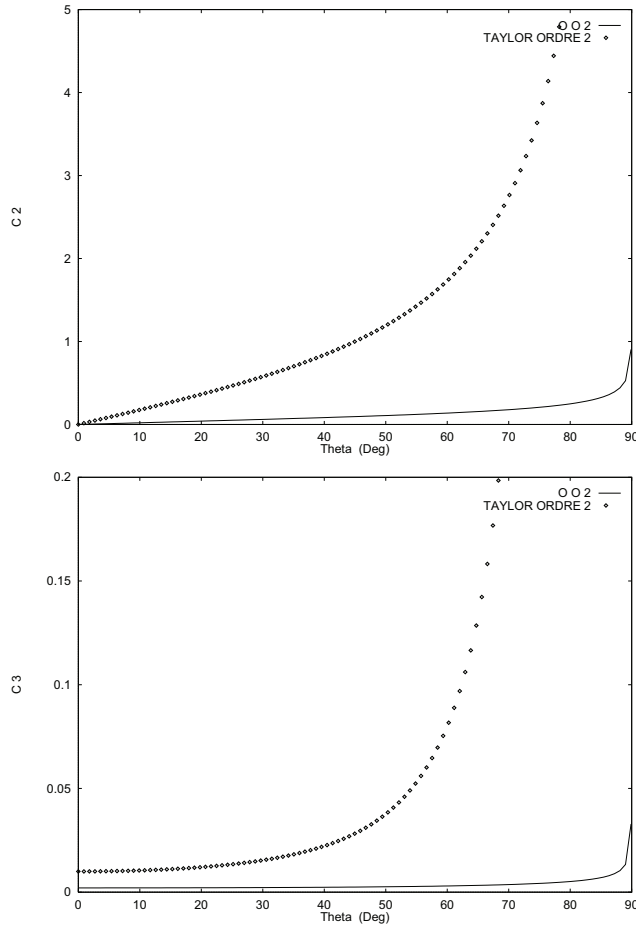


FIG. 3.8: Comportement des paramètres  $c_2$  et  $c_3$  en fonction de l'angle  $\theta$  de la vitesse de convection

$$a = \cos(\theta), \quad b = \sin(\theta), \quad \nu = 0.01, \quad c = 0, \quad k_{max} = \frac{\pi}{h} \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{240}$$

### Variation de la viscosité

On s'intéresse surtout aux viscosités faibles.

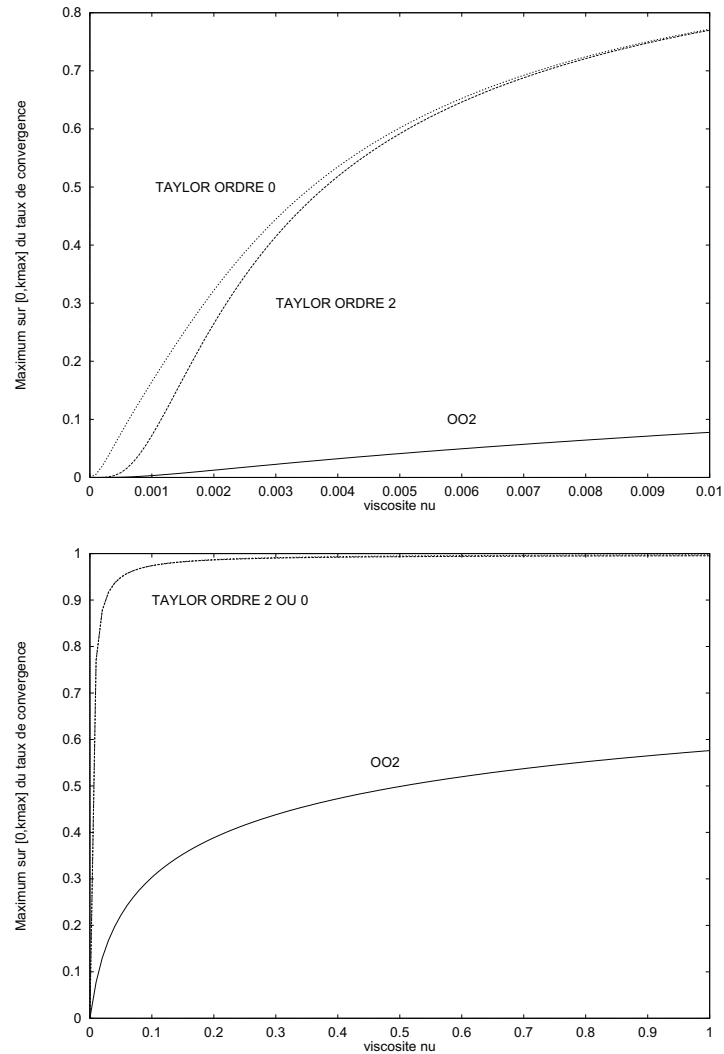


FIG. 3.9: Comportement du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence en fonction de la viscosité  $\nu$   
 $a = 1, b = 1, c = 0, k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

Le maximum du taux de convergence avec les conditions OO2 est nettement



inférieur à celui obtenu avec les conditions de Taylor d'ordre 0 ou d'ordre 2, quelle que soit la viscosité  $\nu$  (voir figure 3.9).

**Remarque 3.4.** *Le maximum du taux de convergence obtenu avec les conditions de Taylor tend très vite vers 1. Ceci vient du fait que, dans l'espace de Fourier, les approximations de Taylor d'ordre 0 ou 2 des CLA exactes au voisinage de  $k = 0$  restent valables pour  $\nu$  petit car c'est le terme  $\nu k$  qui apparaît dans (I.2.10) et (I.2.11) (bien que les développements de Taylor d'ordre 0 ou 2 au voisinage de  $k = 0$  soient différents de ceux au voisinage de  $\nu = 0$  à cause du terme  $4\nu c$  dans (I.2.10) et (I.2.11)).*

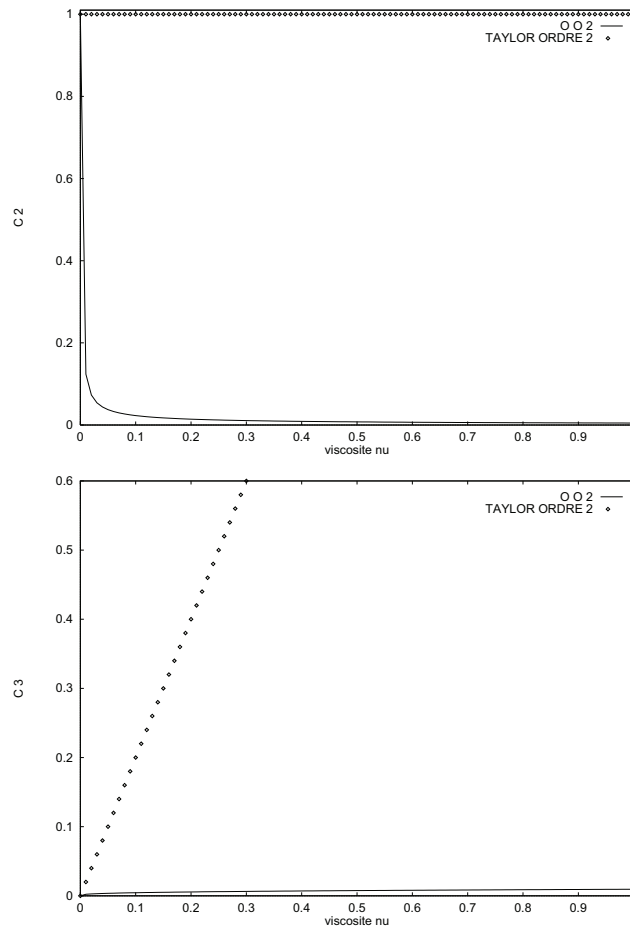


FIG. 3.10: Comportement des paramètres  $c_2$  et  $c_3$  en fonction de la viscosité  $\nu$   
 $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

Les figures 3.10 et 3.11 montrent le comportement de  $c_2$  et  $c_3$  en fonction de la viscosité  $\nu$ , d'abord dans le cas où  $c = 0$ , puis dans le cas où  $c = 1$ .

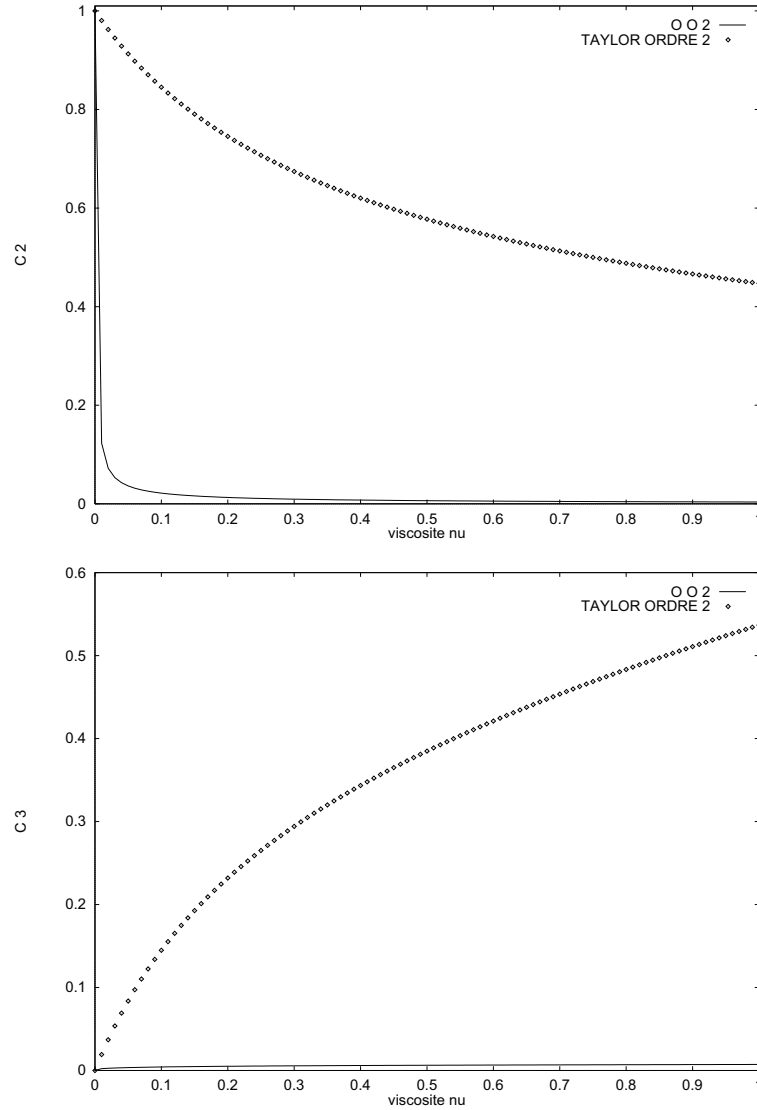


FIG. 3.11: Comportement des paramètres  $c_2$  et  $c_3$  en fonction de la viscosité  $\nu$   
 $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

### Variation du pas de temps

Dans cette partie, nous regardons l'influence de la constante  $c$  de (I.1.1) sur le taux de convergence. Rappelons que  $c$  peut être  $c = \frac{1}{\Delta t}$  où  $\Delta t$  est le pas de temps d'un schéma d'Euler implicite pour résoudre l'équation de convection-diffusion dépendante du temps. En particulier, dans ce cas,  $c = 0$  correspond à l'état stationnaire.

Le maximum du taux de convergence avec les conditions OO2 est bien inférieur à celui obtenu avec les conditions de Taylor d'ordre 0 ou d'ordre 2, quelque soit le coefficient  $c$ , comme le montre la figure 3.12.

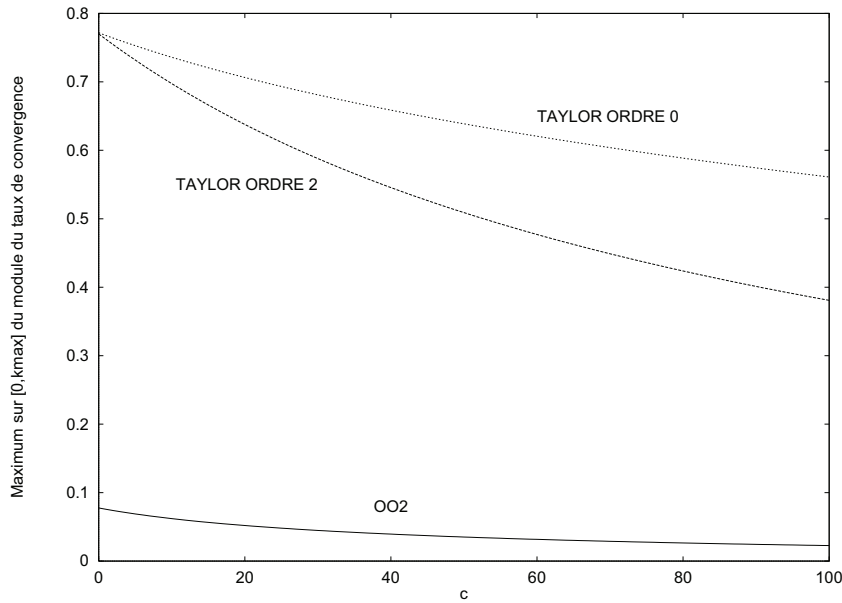


FIG. 3.12: Comportement du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence en fonction de  $c$

$$a = 1, b = 1, \nu = 0.01, k_{max} = \frac{\pi}{h} \text{ avec } h = \frac{1}{240}$$

La figure 3.13 montre que le paramètre  $c$  a une très faible influence sur les coefficients  $c_2$  et  $c_3$  intervenant dans les conditions d'interface OO2.

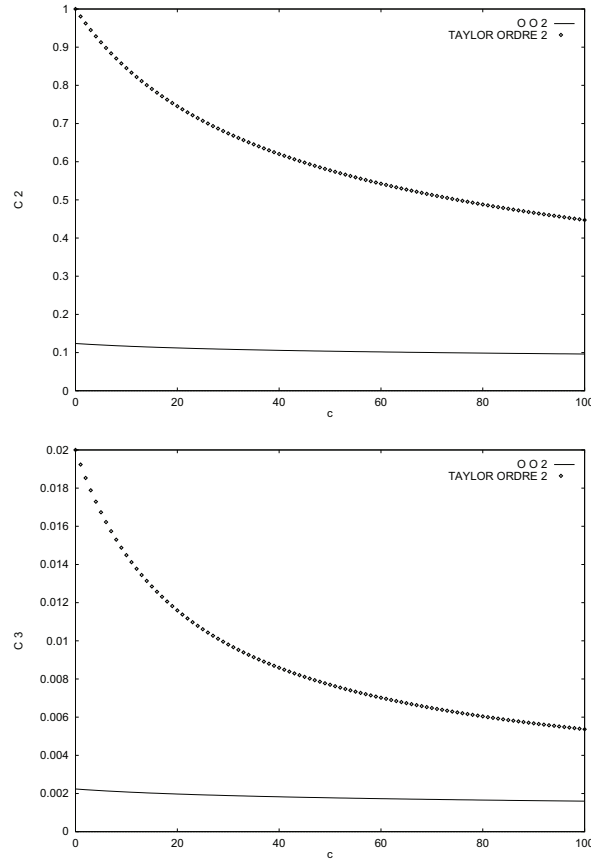


FIG. 3.13: Comportement des paramètres  $c_2$  et  $c_3$  en fonction de  $c$   
 $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

### Variation du pas du maillage

a) Vitesse de convection normale à l'interface  $\Gamma_{12}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b = 0$ )

Les figures 3.14 (pour  $c = 0$ ) et 3.15 (pour  $c = 100$ ) montrent le comportement du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence  $\rho$  en fonction du pas du maillage  $h$ , lorsque  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$ . Les conditions OO2 donnent un maximum du taux de convergence inférieur à celui obtenu avec des conditions de Taylor d'ordre 0 ou d'ordre 2, quelque soit  $h$ .

Les figures 3.16 (pour  $c = 0$ ) et 3.17 (pour  $c = 100$ ) confirment les estimations théoriques du théorème 3.4.

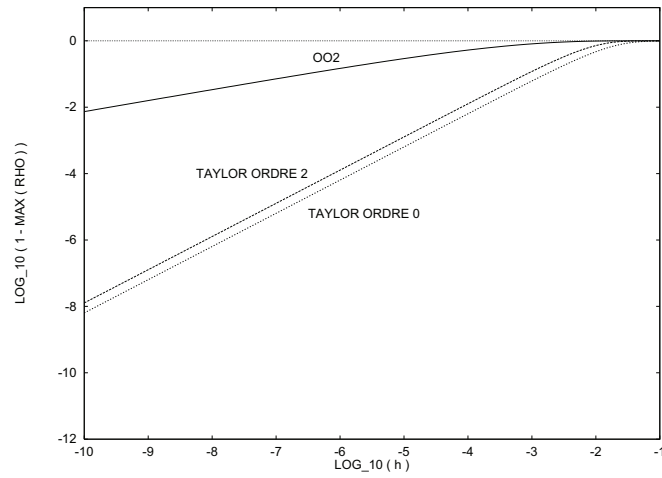


FIG. 3.14: Comportement numérique du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence  $\rho$ , lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0  
 $a = 1, b = 0, \nu = 0.01, c = 0, k_{max} = \frac{\pi}{h}$

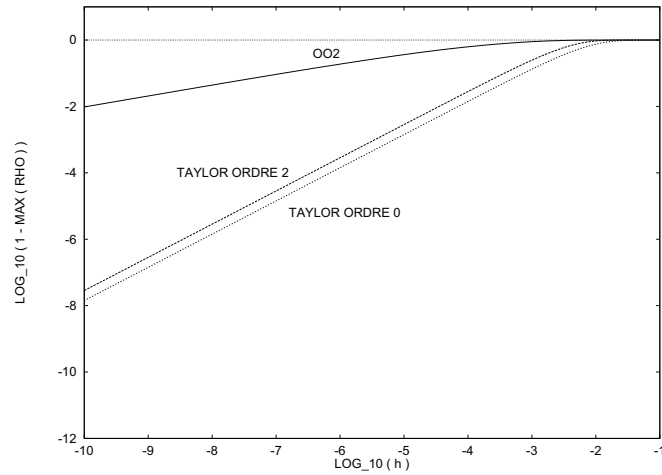


FIG. 3.15: Comportement numérique du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence  $\rho$ , lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0  
 $a = 1, b = 0, \nu = 0.01, c = 100, k_{max} = \frac{\pi}{h}$

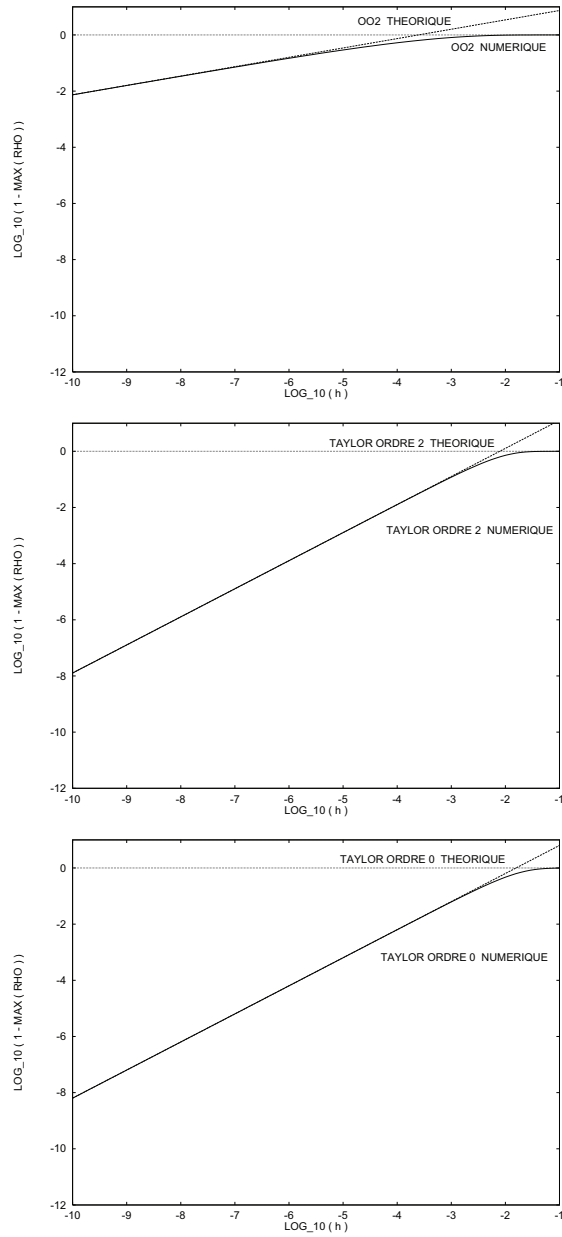


FIG. 3.16: Comparaison entre l'estimation théorique et le comportement numérique du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence  $\rho$ , lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0

$$a = 1, b = 0, \nu = 0.01, c = 0, k_{max} = \frac{\pi}{h}$$

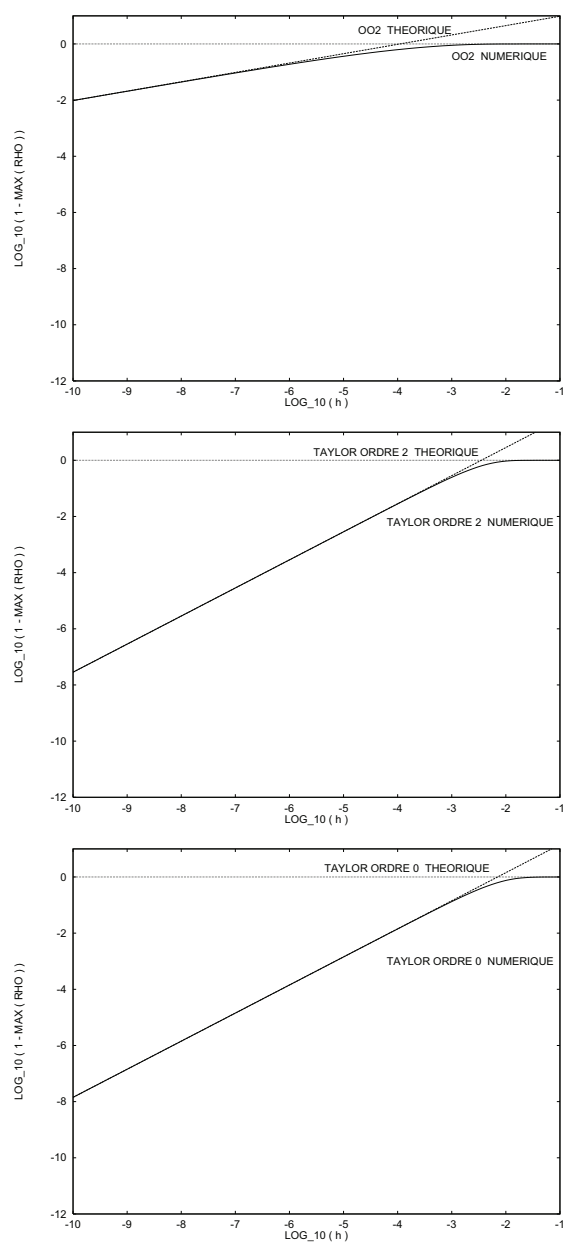


FIG. 3.17: Comparaison entre l'estimation théorique et le comportement numérique du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du taux de convergence  $\rho$ , lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0

$$a = 1, b = 0, \nu = 0.01, c = 100, k_{max} = \frac{\pi}{h}$$

b) Cas d'une vitesse de convection quelconque ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ )

Dans le cas d'une vitesse plus générale, le maximum sur  $[0, \frac{\pi}{h}]$  du module du taux de convergence avec les conditions OO2 est inférieur à celui obtenu avec des conditions de Taylor d'ordre 0 ou d'ordre 2, quelque soit  $h$  (voir figure 3.18).

Nous avons observé numériquement que, pour les conditions OO2 et Taylor ordre 0, le comportement du maximum du taux de convergence en fonction de  $h$  est celui des estimations théoriques faites dans le cas  $b = 0$  (théorème 3.4) (voir figure 3.19). Ceci est le cas également pour les conditions de Taylor d'ordre 2 (avec une constante différente devant  $h$  dans l'estimation théorique) (voir figure 3.19).

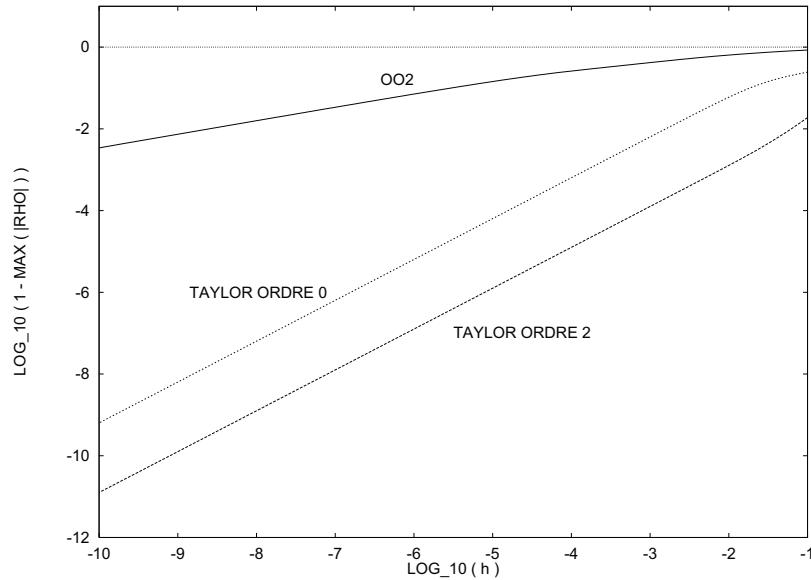


FIG. 3.18: Comportement numérique du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du module du taux de convergence  $\rho$ , lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0  
 $a = 0.1$ ,  $b = 1$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 0$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$



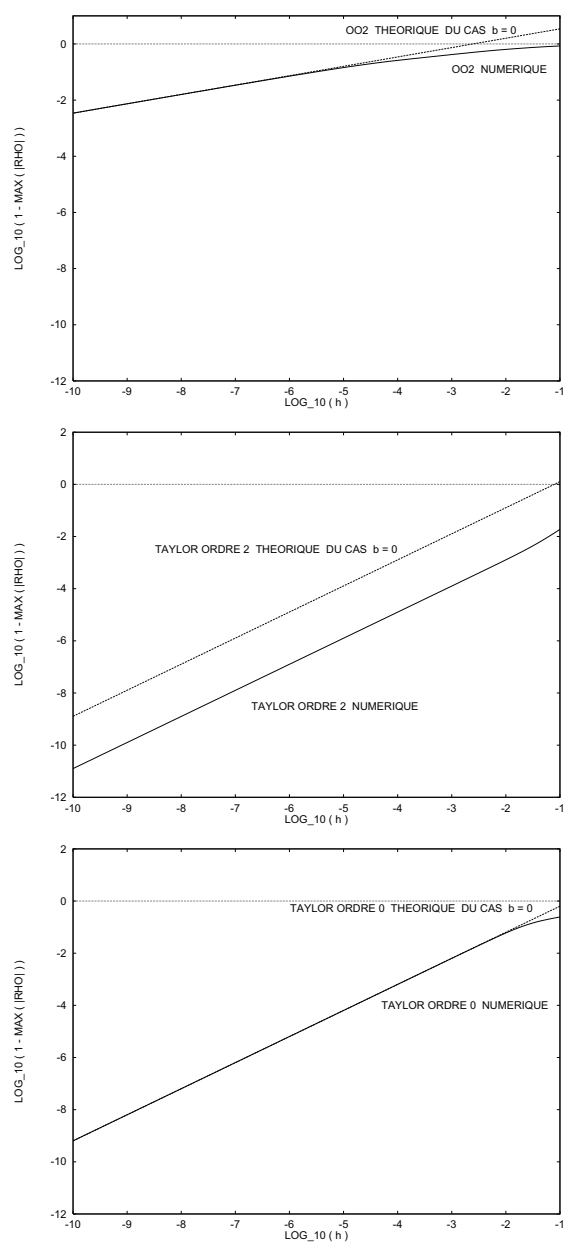


FIG. 3.19: Comparaison entre l'estimation théorique faite dans le cas où  $b = 0$  et le comportement numérique du maximum sur  $[0, k_{max}]$  du module du taux de convergence  $\rho$ , lorsque le pas du maillage  $h$  tend vers 0  
 $a = 0.1, b = 1, \nu = 0.01, c = 0, k_{max} = \frac{\pi}{h}$

La figure 3.20 montre le comportement de  $c_2$  et  $c_3$  en fonction de  $h$ .

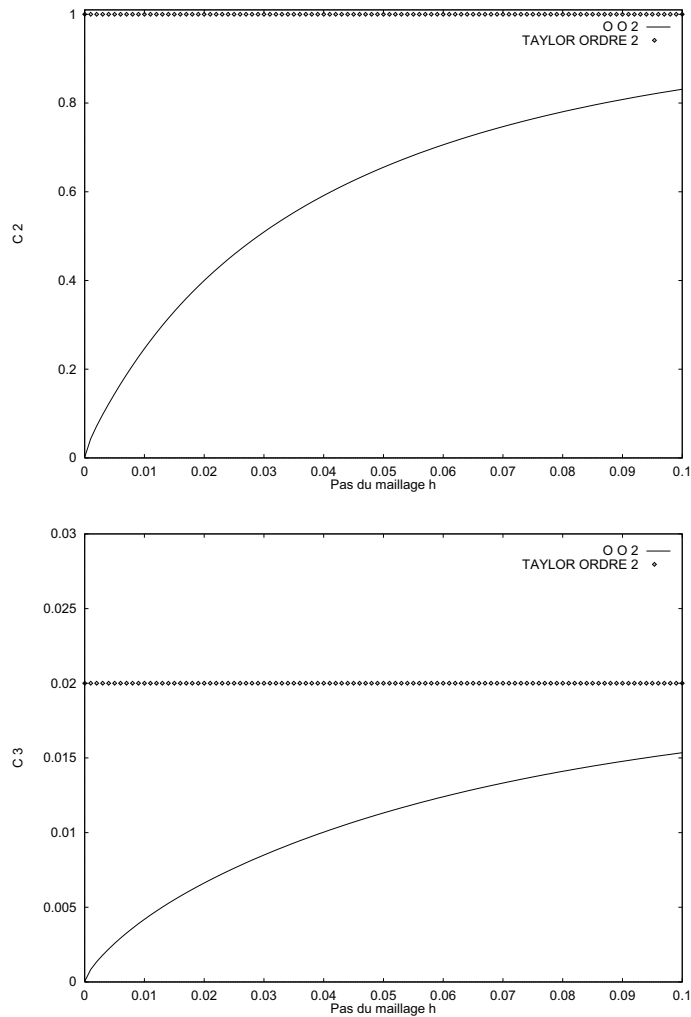


FIG. 3.20: Comportement de  $c_2$  et  $c_3$  en fonction du pas du maillage  $h$   
 $a = 1, b = 1, \nu = 0.01, c = 0, k_{max} = \frac{\pi}{h}$

Dans la partie suivante nous donnons la démarche de calcul des conditions d'interface OO2 dans le cas d'un découpage du domaine plus général.

### 3.3 Méthodologie de calcul des conditions d'interface optimisées OO2

Dans cette partie, nous explicitons le calcul des conditions d'interface OO2 dans le cas d'un opérateur  $\mathcal{L}$  à coefficients variables, et d'un découpage quelconque du domaine. Nous reprenons les notations du chapitre I.2.

#### Détermination de $\lambda^-$ et $\lambda^+$

Nous commençons par déterminer les symboles de Fourier des opérateurs de Steklov-Poincaré dans le cas de 2 sous-domaines  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  et de coefficients constants dans (I.1.1) (voir section I.2.1) :

$$\lambda^-(k, a, b) = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu + 4i\nu bk + 4k^2\nu^2}}{2\nu}$$

$$\lambda^+(k, a, b) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu + 4i\nu bk + 4k^2\nu^2}}{2\nu}$$

#### Calcul des conditions d'interface OO2

Les opérateurs intervenant dans les conditions d'interface OO2 s'écrivent par définition sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}}{2\nu} + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2} \quad (\text{I.3.18})$$

où  $c_2 = c_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$  et  $c_3 = c_3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$  sont choisis de façon à minimiser le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz.

La technique de calcul développée à la section I.3.2 et permettant d'approcher le minimum dans le cas de 2 sous-domaines et de coefficients constants est étendue, ici, de la façon suivante :

On note  $\lambda^-(k) = \lambda^-(k, \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$  et  $\lambda^+(k) = \lambda^+(k, \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$ .

On pose, pour  $0 \leq k \leq k_{max}$  et  $0 < k_{int} \leq k_{max}$  :

$$\rho(k, k_{int}) = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k, k_{int})}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k, k_{int})} \right)^2$$

avec  $\lambda_{ap}^-(k, k_{int}) = \lambda^-(0) - c_2(k_{int})ik - c_3(k_{int})k^2$ , où  $c_2 = c_2(k_{int})$  et  $c_3 = c_3(k_{int})$  sont fixés par  $\rho(k_{int}, c_2, c_3) = 0$ , soit :

$$c_2(k_{int}) = -\frac{Im(\lambda^-(k_{int}))}{k_{int}}, \quad c_3(k_{int}) = \frac{\lambda^-(0) - Re(\lambda^-(k_{int}))}{k_{int}^2}$$

On note  $k_1 = k_1(k_{int})$  la racine dans  $]0, k_{int}[$  de la dérivée de la fonction  $k \rightarrow |\rho(k, k_{int})|$ .

Alors, on calcule la solution  $\bar{k}_{int}$  dans  $]0, k_{max}]$  de l'équation :

$$|\rho(k_1, k_{int})| = |\rho(k_{max}, k_{int})|$$

à l'aide d'un algorithme de dichotomie (C'est plus simple que d'utiliser un algorithme de Newton, dans ce cas, parce que l'on a pas de dérivée à calculer).

Finalement, on obtient  $c_2$  et  $c_3$  par :

$$c_2 = c_2(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i) = -\frac{Im(\lambda^-(\bar{k}_{int}))}{\bar{k}_{int}}$$

$$c_3 = c_3(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i) = \frac{\lambda^-(0) - Re(\lambda^-(\bar{k}_{int}))}{(\bar{k}_{int})^2}$$



## Chapitre 4

# Conditions d'interface optimisées $(OO2)_h$ : étude sur le problème discret

Dans le chapitre I.3, des conditions d'interface optimisées "OO2" ont été introduites à partir d'une étude sur le problème continu. On peut ensuite discrétiser ces conditions. Néanmoins, il est naturel de définir des conditions d'interface optimisées discrètes " $(OO2)_h$ " à partir d'une étude sur le problème discret, et de comparer celles-ci avec les conditions OO2 discrétisées.

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'optimisation des conditions d'interface sur le problème discret.

Nous commençons par introduire les notations utilisées, puis nous écrivons l'algorithme de Schwarz appliqué au problème discret.

Nous définissons ensuite des CLA exactes discrètes, d'abord dans le cas de 2 sous-domaines, pour simplifier (voir [20] (L. Halpern, 1982)). Ces conditions sont étendues au cas d'un domaine décomposé en bandes, et nous montrons qu'elles conduisent à une convergence optimale de l'algorithme de Schwarz. Ces conditions vont permettre de définir des conditions d'interface optimisées "OO2 discrètes" que nous notons  $(OO2)_h$ .

### Problème discret

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .

On note  $\{(x_i, y_j) \in \Omega, 1 \leq i \leq i_{max}, 1 \leq j \leq j_{max}\}$  l'ensemble de points représentant le domaine discret.

Le système linéaire résultant d'une discrétisation du problème (I.1.1) s'écrit

$$Au = f \quad (\text{I.4.1})$$

avec  $u = (u_{i,j})$ , où  $u_{i,j}$  représente une approximation de  $u(x_i, y_j)$ .

## 4.1 Décomposition du domaine et notations

Nous supposons, pour simplifier, que  $\Omega$  est la réunion de 2 sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , avec  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Nous notons  $\Gamma_{12}$  l'interface entre les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . La normale extérieure à un sous-domaine  $\Omega_i$  est notée  $\mathbf{n}_i$ , et  $\boldsymbol{\tau}_i$  est le vecteur tangent unitaire défini comme sur la figure 4.1.

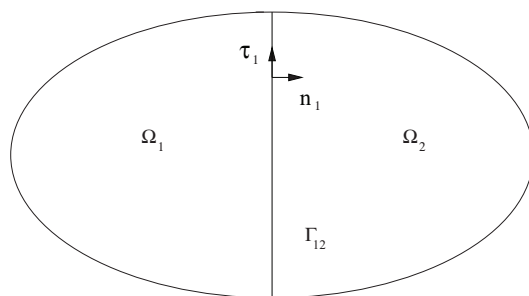


FIG. 4.1: Décomposition en 2 sous-domaines, sans recouvrement

Les matrices de rigidité locales dans chacun des sous-domaines s'écrivent, si l'on numérote les degrés de liberté en commençant par ceux qui sont associés à des points internes à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et en finissant par les nœuds situés sur l'interface  $\Gamma_{12}$  :

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{II}^1 & A_{IB}^1 \\ A_{BI}^1 & A_{BB}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{pmatrix} A_{II}^2 & A_{IB}^2 \\ A_{BI}^2 & A_{BB}^2 \end{pmatrix}$$

où les blocs  $A_{II}^1$  et  $A_{II}^2$  sont associés aux problèmes de convection-diffusion sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Les blocs  $A_{BB}^1$

et  $A_{BB}^2$  sont les matrices d'influence entre les nœuds de la frontière  $\Gamma_{12}$ . Elles sont obtenues par intégration respectivement sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Un vecteur  $u^i$  relatif au sous-domaine  $\Omega_i$  est décomposé suivant la forme  $u^i = \begin{pmatrix} u_I^i \\ u_B^i \end{pmatrix}$  avec  $u_B^i$  représentant les valeurs de  $u^i$  sur l'interface  $\Gamma_{12}$ .

### Définition de la dérivée normale discrète sur l'interface

Nous donnons cette définition dans le cadre du schéma volumes finis utilisé au chapitre 4 de la partie II. Le problème de convection-diffusion que nous considérons s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}(u) = \left[ \frac{1}{\Delta t} + \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{1}{2 CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \nu \Delta \right] (u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$\mathcal{C}(u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où  $\mathcal{C}$  est un opérateur de bord,  $\Delta t$  le pas de temps, et  $CFL$  le nombre de Courant.

Pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$ , le schéma en un nœud  $(i, j)$  de l'interface  $\Gamma_{12}$  s'obtient par une intégration de l'équation de convection-diffusion sur une cellule décalée  $C_i$  entourant le nœud  $(i, j)$ . On note  $\Gamma = \partial C_1 \cap \Gamma_{12} = \partial C_2 \cap \Gamma_{12}$  (voir figure 4.2).

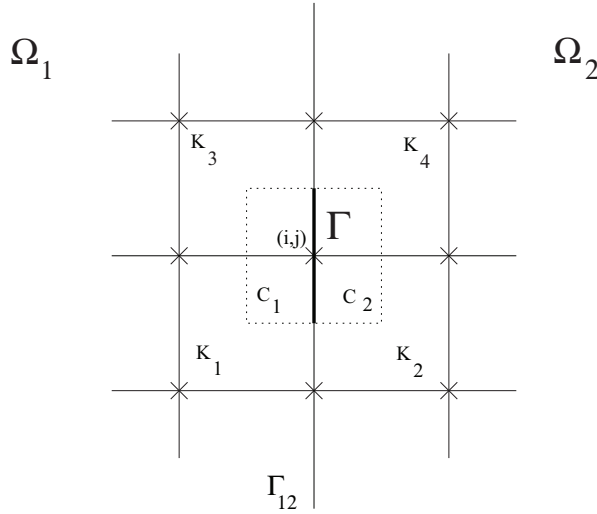


FIG. 4.2: Intégration sur les cellules décalées  $C_1$  et  $C_2$



Nous avons, d'après la section 4.4 de la partie II, la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{C_i} \mathcal{L}(u) &= \int_{C_i} \frac{u}{\Delta t} + \int_{C_i} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \int_{\partial C_i \setminus \Gamma} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) - \nu \int_{\partial C_i \setminus \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \frac{\partial u}{\boldsymbol{\tau}_i} - \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + \nu \right) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \\
&= \int_{C_i} f, \quad i = 1, 2
\end{aligned}$$

A l'aide de la relation ci-dessus, on définit la discrétisation de la dérivée normale sur l'interface  $\Gamma_{12}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \right)_h |_{\Gamma_{12}}(i, j) &\equiv \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + \nu \right) \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \\
&\equiv \int_{C_i} \frac{u}{\Delta t} + \int_{C_i} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \int_{\partial C_i \setminus \Gamma} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) - \nu \int_{\partial C_i \setminus \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \frac{\partial u}{\boldsymbol{\tau}_i} - \int_{C_i} f
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \right)_h |_{\Gamma_{12}} \equiv \begin{pmatrix} A_{BI}^i & A_{BB}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^i \\ u_B^i \end{pmatrix} - f_B^i$$

En particulier, dans le cas où le second membre  $f$  de (I.4.1) est nul, alors

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \right)_h |_{\Gamma_{12}} \equiv \begin{pmatrix} A_{BI}^i & A_{BB}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^i \\ u_B^i \end{pmatrix} \quad (\text{I.4.2})$$

### Réécriture du problème discret

La contribution  $u^i$  du sous-domaine  $\Omega_i$  à la solution  $u$  du problème (I.4.1) s'écrit  $u^i = \begin{pmatrix} u_I^i \\ u_B^i \end{pmatrix}$  avec  $u_B^1 = u_B^2 = u_B$ .

Si on numérote les degrés de liberté conformément à la décomposition du domaine, le problème (I.4.1) se décompose alors par blocs sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{II}^1 & 0 & A_{IB}^1 \\ 0 & A_{II}^2 & A_{IB}^2 \\ A_{BI}^1 & A_{BI}^2 & A_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^1 \\ u_I^2 \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^1 \\ f_I^2 \\ f_B \end{pmatrix} \quad (\text{I.4.3})$$

Le bloc  $A_{BB}$  est la somme des deux contributions locales  $A_{BB}^1$  et  $A_{BB}^2$ , et  $f_B^i$ ,  $i = 1, 2$ , sont les contributions du sous-domaine  $\Omega_i$  au vecteur  $f_B$ .

## 4.2 Algorithme de Schwarz et conditions d'interface : cas discret, sans recouvrement

### Algorithme 4.1 (Schwarz dans le cas discret, sans recouvrement).

Soit  $(u^i)^{(0)}_{i=1,2}$  une approximation initiale de la solution  $u$  de (I.4.1) dans chaque sous-domaine, et soit  $(u^i)^{(p)}_{i=1,2}$  la valeur de l'approximation de  $u$  à l'itération  $p$ . L'algorithme de Schwarz additif s'écrit :

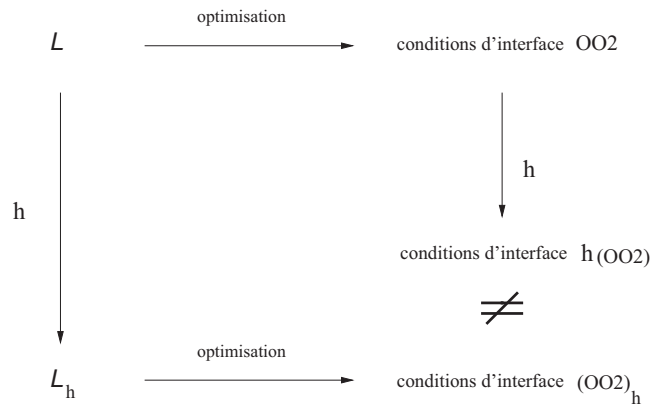
$$\begin{aligned} A_{II}^i u_I^{i(p+1)} + A_{IB}^i u_B^{i(p+1)} &= f_I^i, \quad i = 1, 2 \\ \begin{pmatrix} A_{BI}^1 & A_{BB}^1 - B^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{1(p+1)} \\ u_B^{1(p+1)} \end{pmatrix} &= \\ & f_B^1 + f_B^2 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - B^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{2(p)} \\ u_B^{2(p)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_{BI}^2 & A_{BB}^2 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{2(p+1)} \\ u_B^{2(p+1)} \end{pmatrix} &= \\ & f_B^2 + f_B^1 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{1(p)} \\ u_B^{1(p)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $B^1$  et  $B^2$  sont des matrices d'influence entre les nœuds de  $\Gamma_{12}$ , que l'on précise ci-dessous.

### Matrice d'interface $B^i$

Rappelons qu'au chapitre 2, des conditions d'interface optimisées "OO2" ont été introduites à partir d'une étude sur le problème continu. On peut ensuite discrétiser ces conditions et les utiliser comme conditions d'interface dans l'algorithme 4.1. Une autre approche consiste à définir des conditions d'interface optimisées discrètes " $(OO2)_h$ " à partir d'une étude sur le problème discret, et de comparer celles-ci avec les conditions OO2 discrétisées. Les deux approches d'optimisation sont schématisées sur la figure 4.3.

**Remarque 4.1.** *Les conditions d'interface OO2 discrétisées sont différentes des conditions d'interface  $(OO2)_h$ .*



$L$  : operateur de convection-diffusion

$h$  : discretisation

FIG. 4.3: Conditions d'interface optimisées : 2 approches différentes

Un autre choix d'opérateurs d'interface est donc d'approcher les opérateurs intervenant dans les CLA exactes discrètes. Cette démarche a été introduite dans [29] (F. Nataf, 1993), dans un cas particulier (avec recouvrement des sous-domaines). Ici, les opérateurs d'interface sont choisis de façon à minimiser le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz 4.1. Ces conditions d'interface optimisées discrètes sont désignées par " $(OO2)_h$ ".

Dans la section 4.3 nous définissons les CLA exactes discrètes. Nous montrons

ensuite, dans la section 4.4, qu'elles conduisent à une convergence optimale de l'algorithme de Schwarz appliqué au problème discret (pour un découpage du domaine en bandes). Ces conditions sont reliées, dans la section 4.5, à la matrice du complément de Schur. A partir des CLA exactes discrètes, nous construisons, dans la section 4.6, les conditions d'interface optimisées  $(OO2)_h$ .

### 4.3 Définition des CLA exactes discrètes : cas de 2 sous-domaines

Dans cette section, la définition des CLA exactes discrètes est l'équivalent discret de celle des CLA exactes de la section 2.1.

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^2$  et soit  $\{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2, i, j \in \mathbb{Z}\}$  un ensemble de points représentant le domaine discret. On suppose que  $x_0 = 0$ . On borne le domaine dans la direction des  $x$  positifs en introduisant comme frontière artificielle la droite  $x = 0$ . On note  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , avec  $\Gamma_{12}$  l'axe  $x = 0$ . L'ensemble des points de discrétisation sur  $\Gamma_{12}$  est l'ensemble  $\{(0, y_j), j \in \mathbb{Z}\}$  (voir figure 4.4).

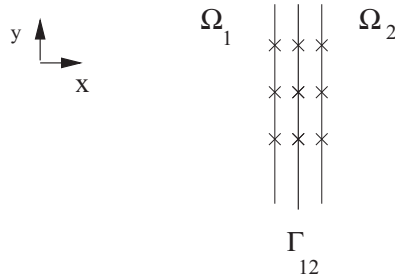


FIG. 4.4: Décomposition du domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2$

Un vecteur  $v = (v_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  est décomposé sous la forme :

$$v = \begin{pmatrix} v_I^1 \\ v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix} \quad \text{où } v_I^1 = (v_{i,j})_{i < 0, j \in \mathbb{Z}}, \quad v_I^2 = (v_{i,j})_{i > 0, j \in \mathbb{Z}}, \quad \text{et } v_B = (v_{0,j})_{j \in \mathbb{Z}}$$

Supposons que l'on veut résoudre le problème (I.4.1) (c'est-à-dire (I.4.3))

avec  $f_{i,j} = 0$ , pour  $i \geq 0$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . On note  $u$  la solution de ce problème, et  $u^i = \begin{pmatrix} u_I^i \\ u_B \end{pmatrix}$  la restriction de  $u$  à  $\Omega_i$ .

On introduit l'équivalent discret  $\Lambda_h^-$  de l'opérateur de Steklov-Poincaré du demi-plan droit  $\Lambda^-$  (voir section 2.1) par :

**Définition 4.1.** Soit  $\Lambda_h^- : v_0 = ((v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \Lambda_h^- v_0 = ((\Lambda_h^- v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , tel que

$$\Lambda_h^- v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } v^2 = (v_{i,j}^2)_{i \geq 0, j \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix} \text{ vérifie } A_{II}^2 v_I^2 + A_{IB}^2 v_B = 0 \quad (\text{I.4.4})$$

$$v_B = v_0 \quad (\text{I.4.5})$$

$$v_{i,j}^2 \text{ borné quand } i \longrightarrow \infty \quad (\text{I.4.6})$$

**Remarque 4.2.** D'après (I.4.2),  $\Lambda_h^- v_0$  correspond à la discrétisation de  $-\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_2}$  où  $v$  vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v) &= 0, \quad x > 0 \\ v(0, y) &= v_0(y) \quad \text{en } x = 0 \\ v &\text{ borné à l'infini} \end{aligned}$$

On cherche à mettre une condition aux limites discrète sur  $\Gamma_{12}$  qui soit exacte c'est-à-dire que l'on cherche une matrice  $B$  telle que la solution  $v = (v_{i,j})_{i \leq 0, j \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} v_I \\ v_B \end{pmatrix}$  du problème

$$\begin{aligned} A_{II}^1 v_I^1 + A_{IB}^1 v_B &= f^1 \\ \begin{pmatrix} A_{BI}^1 & A_{BB}^1 + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I \\ v_B \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

soit la restriction de  $u$  à  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $u^1$ .

Comme on a supposé que  $f_{i,j} = 0$  pour  $i \geq 0$  et  $j \in \mathbb{Z}$ , en particulier  $u$  vérifie :

$$A_{II}^2 u_I^2 + A_{IB}^2 u_B = 0$$

Par conséquent, par unicité de (I.4.4)-(I.4.6) et d'après la définition de  $\Lambda_h^-$ , nous avons

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - \Lambda_h^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^2 \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.7})$$

Comme  $f_{i,j} = 0$  sur  $\Gamma_{12}$ , nous avons aussi :

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^1 & A_{BB}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^1 \\ u_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{BI}^2 & A_{BB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^2 \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.8})$$

En sommant (I.4.7) et (I.4.8), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^1 & A_{BB}^1 - \Lambda_h^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^1 \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.9})$$

si bien que la condition (I.4.9) est une condition aux limites artificielle exacte discrète. C'est l'analogue discret de la CLA exacte (I.2.4).

De même, on introduit l'équivalent discret  $\Lambda_h^+$  de l'opérateur de Steklov-Poincaré du demi-plan gauche  $\Lambda^+$  :

**Définition 4.2.** Soit  $\Lambda_h^+ : v_0 = ((v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \Lambda_h^+ v_0 = ((\Lambda_h^+ v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , tel que

$$\Lambda_h^+ v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_I^1 \\ w_B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } w^1 = (w_{i,j}^1)_{i \leq 0, j \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} w_I^1 \\ w_B \end{pmatrix} \text{ vérifie } A_{II}^1 w_I^1 + A_{IB}^1 w_B = 0 \quad (\text{I.4.10})$$

$$w_B = v_0 \quad (\text{I.4.11})$$

$$w_{i,j}^1 \text{ borné quand } i \longrightarrow \infty \quad (\text{I.4.12})$$

**Remarque 4.3.** D'après (I.4.2),  $\Lambda_h^+ v_0$  correspond à la discrétisation de  $-\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_1}$  où  $v$  vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v) &= 0, \quad x < 0 \\ v(0, y) &= v_0(y) \quad \text{en } x = 0 \\ v &\text{ borné à l'infini} \end{aligned}$$

Si  $f_{i,j} = 0$ , pour  $i \leq 0$  et  $j \in \mathbb{Z}$ , par unicité de (I.4.10)-(I.4.12), la solution  $u = \begin{pmatrix} u_I^1 \\ u_I^2 \\ u_B \end{pmatrix}$  de (I.4.1) vérifie

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - \Lambda_h^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^1 \\ u_B \end{pmatrix} = 0$$

En sommant cette égalité avec (I.4.8), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^2 & A_{BB}^2 - \Lambda_h^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^2 \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.13})$$

La condition (I.4.13) est une condition aux limites artificielle exacte discrète, si  $f_{i,j} = 0$ , pour  $i \leq 0$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . C'est l'analogue discret de la CLA exacte (I.2.8).

## 4.4 Convergence optimale de l'algorithme de Schwarz avec les CLA exactes discrètes

### 4.4.1 Cas de 2 sous-domaines

Le résultat suivant montre que les opérateurs intervenant dans les conditions (I.4.9) et (I.4.13) minimisent le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz 4.1.

**Théorème 4.1.** *Soient  $B^1 = \Lambda_h^-$  et  $B^2 = \Lambda_h^+$ . Alors l'algorithme 4.1 converge en 2 itérations.*

#### Preuve du théorème 4.1

Les équations de l'algorithme 4.1 étant linéaires, on peut considérer le cas où  $f_I^i = 0$  et  $f_B^i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Montrons alors que  $u^{i(2)} = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Le vecteur  $u^{2(1)} = \begin{pmatrix} u_I^{2(1)} \\ u_B^{2(1)} \end{pmatrix}$  vérifie  $A_{II}^2 u_I^{2(1)} + A_{IB}^2 u_B^{2(1)} = 0$ .

Par unicité de (I.4.4)-(I.4.6) et d'après la définition de  $\Lambda_h^-$ , nous avons

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - B^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{2(1)} \\ u_B^{2(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.14})$$

De même,  $u^{1(1)} = \begin{pmatrix} u_I^{1(1)} \\ u_B^{1(1)} \end{pmatrix}$  vérifie  $A_{II}^1 u_I^{1(1)} + A_{IB}^1 u_B^{1(1)} = 0$ . Par unicité de (I.4.10)-(I.4.12) et d'après la définition de  $\Lambda_h^+$ ,

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{1(1)} \\ u_B^{1(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.15})$$

D'après (I.4.14) et (I.4.15), le second membre de l'algorithme 4.1 définissant  $u^{i(2)}$  est nul, et donc  $u^{i(2)} = 0$  pour  $i = 1, 2$ .  $\square$

## 4.4.2 Cas d'un découpage du domaine en bandes

### Décomposition du domaine et notations

Le domaine de calcul  $\Omega$  est décomposé en  $K$  bandes (non nécessairement rectilignes)  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq K$ , sans recouvrement et telles que l'on puisse définir une gauche et une droite (voir figure 4.5).

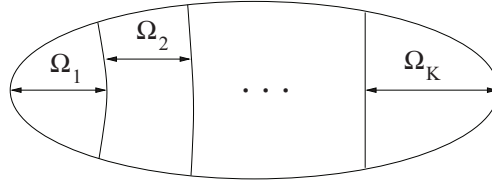


FIG. 4.5: Décomposition en bandes verticales

Pour chaque  $i$ , on écrit  $\Omega - \bar{\Omega}_i = \Omega_{(i,L)} \cup \Omega_{(i,R)}$  où  $\Omega_{(i,L)}$  (resp.  $\Omega_{(i,R)}$ ) est l'ouvert situé à gauche (resp. droite) de  $\Omega_i$ :  $\Omega_{(i,L)} = \cup_{j=1}^{i-1} \Omega_j$  (resp.  $\Omega_{(i,R)} = \cup_{j=i+1}^K \Omega_j$ )

De même, on écrit  $\partial\Omega_i - \partial\Omega = \Gamma_{i,l} \cup \Gamma_{i,r}$ , où  $\Gamma_{i,l}$  est à gauche de  $\Omega_i$  et  $\Gamma_{i,r}$  à droite de  $\Omega_i$  (voir figure 4.6).

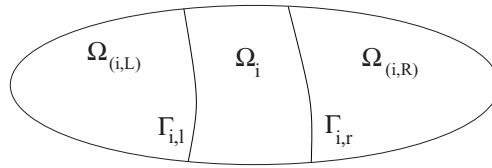


FIG. 4.6: Partition de  $\Omega - \bar{\Omega}_i$



On note  $N_{(i,L)}$  (resp.  $N_{(i,R)}$ ), le nombre de points de discrétisation dans  $\Omega_{(i,L)}$  (resp.  $\Omega_{(i,R)}$ ) et  $N_i$  celui dans  $\Omega_i$ . On note aussi  $N_{i,\ell}$  (resp.  $N_{i,r}$ ) le nombre de points de discrétisation sur  $\Gamma_{i,\ell}$  (resp.  $\Gamma_{i,r}$ ).

Pour chaque  $i$  un vecteur inconnu  $u$  peut être décomposé sous la forme, pour  $2 \leq i \leq K-1$  :

$$u = \begin{pmatrix} u_I^{(i,L)} \\ u_I^{(i,R)} \\ u^i \end{pmatrix} \text{ avec } u^i = \begin{pmatrix} u_I^i \\ u_B^i \end{pmatrix} \text{ et } u_B^i = \begin{pmatrix} u_B^{i,\ell} \\ u_B^{i,r} \end{pmatrix}$$

pour  $i = 1$  :

$$u = \begin{pmatrix} u_I^{(1,R)} \\ u^1 \end{pmatrix} \text{ avec } u^1 = \begin{pmatrix} u_I^1 \\ u_B^1 \end{pmatrix} \text{ et } u_B^1 = u_B^{1,r}$$

et pour  $i = K$  :

$$u = \begin{pmatrix} u_I^{(K,L)} \\ u^K \end{pmatrix} \text{ avec } u^K = \begin{pmatrix} u_I^K \\ u_B^K \end{pmatrix} \text{ et } u_B^K = u_B^{K,\ell}$$

En particulier, comme  $\Gamma_{i,r} = \Gamma_{i+1,\ell}$ ,  $1 \leq i \leq K-1$ , par définition, on a

$$u_B^{i,r} = u_B^{i+1,\ell}, \quad 1 \leq i \leq K-1$$

Pour chaque  $i$ , le système linéaire (I.4.1) est donc décomposé en blocs sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{II}^{(i,L)} & 0 & 0 & A_{IB}^{(i,L)} & 0 \\ 0 & A_{II}^{(i,R)} & 0 & 0 & A_{IB}^{(i,R)} \\ 0 & 0 & A_{II}^i & A_{IB}^{i,\ell} & A_{IB}^{i,r} \\ A_{BI}^{(i,L)} & 0 & A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} & 0 \\ 0 & A_{BI}^{(i,R)} & A_{BI}^{i,r} & 0 & A_{BB}^{i,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{(i,L)} \\ u_I^{(i,R)} \\ u_I^i \\ u_B^{i,\ell} \\ u_B^{i,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^{(i,L)} \\ f_I^{(i,R)} \\ f_I^i \\ f_B^{i,\ell} \\ f_B^{i,r} \end{pmatrix}$$

**Remarque 4.4.**  $f_B^{i,\ell}$  (resp.  $f_B^{i-1,r}$ ) est le second membre sur  $\Gamma_{i,\ell} = \Gamma_{i-1,r}$  obtenu par intégration sur  $\Omega_i$  (resp.  $\Omega_{i-1}$ ). De même,  $A_{BB}^{i,\ell}$  (resp.  $A_{BB}^{i-1,r}$ ) est la matrice d'influence entre les nœuds de  $\Gamma_{i,\ell} = \Gamma_{i-1,r}$ , obtenue par intégration sur  $\Omega_i$  (resp.  $\Omega_{i-1}$ ). Ceci signifie que la discrétisation de  $\mathcal{L}u = f$  aux nœuds de  $\Gamma_{i,\ell} = \Gamma_{i-1,r}$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{BI}^{i-1,r} & A_{BB}^{i-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix} = f_B^{i,\ell} + f_B^{i-1,r} \quad (\text{I.4.16})$$

### Algorithme de Schwarz

Les opérateurs intervenant dans les CLA exactes discrètes (section 4.3, cas de 2 sous-domaines) sont définis ici pour le découpage en  $K$  bandes que nous avons considéré ci-dessus. Le but est de montrer que ces opérateurs, utilisés comme conditions d'interface dans l'algorithme de Schwarz, conduisent à une convergence optimale. Afin de définir ces opérateurs, nous introduisons les opérateurs de Stecklov-Poincaré suivants :

**Définition 4.3.** Pour  $2 \leq i \leq K$ , on définit  $\Lambda^{i,\ell} : \mathbb{R}^{N_{i,\ell}} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_{i,\ell}}$  tel que

$$\Lambda^{i,\ell} v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^{i-1,r} & -A_{BB}^{i-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } v \in \mathbb{R}^{N^{(i,L)}}, v = \begin{pmatrix} v_I^{(i,L)} \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} \text{ vérifie } A_{II}^{(i,L)} v_I^{(i,L)} + A_{IB}^{(i,L)} v_B^{i,\ell} = 0$$

$$v_B^{i,\ell} = v_0$$

( $v_B^{i,\ell} = v_B^{i-1,r}$  par définition, et  $v_I^{i-1}$  est la contribution de  $\Omega_{i-1}$ , au sens strict, à  $v_I^{(i,L)}$ ).

De même, pour  $1 \leq i \leq K-1$ , soit  $\Lambda^{i,r} : \mathbb{R}^{N_{i,r}} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_{i,r}}$  tel que

$$\Lambda^{i,r} v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^{i+1,\ell} & -A_{BB}^{i+1,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_I^{i+1} \\ w_B^{i+1,\ell} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } w \in \mathbb{R}^{N^{(i,R)}}, w = \begin{pmatrix} w_I^{(i,R)} \\ w_B^{i,r} \end{pmatrix} \text{ vérifie } A_{II}^{(i,R)} w_I^{(i,R)} + A_{IB}^{(i,R)} w_B^{i,r} = 0$$

$$w_B^{i,r} = v_0$$

( $w_B^{i,r} = w_B^{i+1,\ell}$  par définition, et  $w_I^{i+1}$  est la contribution de  $\Omega_{i+1}$ , au sens strict, à  $w_I^{(i,R)}$ ).

Les opérateurs

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,r} & A_{BB}^{i,r} - \Lambda^{i,r} \end{pmatrix} \quad (\text{I.4.17})$$

sont utilisés dans les conditions d'interface de l'algorithme de Schwarz.

**Remarque 4.5.** Si  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , ces opérateurs sont ceux intervenant dans les conditions de transmission artificielles exactes discrètes (I.4.9) et (I.4.13).

**Algorithme 4.2 (Schwarz, dans le cas d'un découpage en bandes).**

Soit  $(u^i)^{i(0)}_{1 \leq i \leq K}$  une approximation initiale de la solution  $u$  de (I.4.1), et soit  $(u^i)^{i(p)}_{1 \leq i \leq K}$  la valeur de l'approximation de  $u$  à l'itération  $p$ . L'algorithme de Schwarz s'écrit :

$$A_{II}^i u_I^{i(p+1)} + A_{IB}^i u_B^{i(p+1)} = f_I^i, \quad 1 \leq i \leq K$$

$$\begin{aligned} \left( A_{BI}^{i,\ell} \quad A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \right) \begin{pmatrix} u_I^{i(p+1)} \\ u_B^{i,\ell(p+1)} \end{pmatrix} = \\ f_B^{i,\ell} + f_B^{i-1,r} + \left( -A_{BI}^{i-1,r} \quad -A_{BB}^{i-1,r} - \Lambda^{i,\ell} \right) \begin{pmatrix} u_I^{i-1(p)} \\ u_B^{i-1,r(p)} \end{pmatrix} \\ \text{(pour } 2 \leq i \leq K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( A_{BI}^{i,r} \quad A_{BB}^{i,r} - \Lambda^{i,r} \right) \begin{pmatrix} u_I^{i(p+1)} \\ u_B^{i,r(p+1)} \end{pmatrix} = \\ f_B^{i,r} + f_B^{i+1,\ell} + \left( -A_{BI}^{i+1,\ell} \quad -A_{BB}^{i+1,\ell} - \Lambda^{i,r} \right) \begin{pmatrix} u_I^{i+1(p)} \\ u_B^{i+1,\ell(p)} \end{pmatrix} \\ \text{(pour } 1 \leq i \leq K-1) \end{aligned}$$

### Convergence optimale de l'algorithme de Schwarz

**Théorème 4.2.** *L'algorithme de Schwarz 4.2 converge en  $K$  itérations, où  $K$  est le nombre de sous-domaines.*

La convergence est alors optimale. En effet, la présence du terme  $-\nu\Delta$  dans l'opérateur  $\mathcal{L}$  fait que la solution dans le domaine 1 dépend de la valeur du second-membre  $f$  dans le domaine  $K$  et réciproquement. L'échange d'information s'effectuant localement d'un sous-domaine à l'autre par les interfaces, il faut donc au moins  $K-1$  itérations pour converger. Comme l'approximation initiale  $u^i(0)$  de la solution dans chaque sous-domaine ne dépend pas a priori de  $f$  et  $g$ , il faut au moins  $K$  itérations pour converger.

### Preuve du théorème 4.2

Les équations de l'algorithme 4.2 étant linéaires, on peut considérer le cas

où l'on a  $f_I^i = 0$ ,  $f_B^{i,\ell} = 0$ ,  $f_B^{i,r} = 0$ . Il suffit alors de montrer que  $u^{i(K)} = 0$ ,  $1 \leq i \leq K$ . Pour cela, nous allons utiliser les deux propositions suivantes :

**Proposition 4.1.** (a) Soit  $u \in \mathbb{R}^{N_i}$  ( $2 \leq i \leq K-1$ ),  $u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^\ell \\ u_B^r \end{pmatrix}$  tel que

$$\begin{aligned} A_{II}^i u_I + A_{IB}^i u_B &= 0 \\ \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^\ell \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Alors,  $\begin{pmatrix} -A_{BI}^{i,r} & -A_{BB}^{i,r} - \Lambda^{i+1,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^r \end{pmatrix} = 0$

(b) Soit  $u \in \mathbb{R}^{N_1}$ ,  $u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^r \end{pmatrix}$  tel que  $A_{II}^1 u_I + A_{IB}^1 u_B^r = 0$

Alors,  $\begin{pmatrix} -A_{BI}^{1,r} & -A_{BB}^{1,r} - \Lambda^{2,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^r \end{pmatrix} = 0$

**Proposition 4.2.** (a) Soit  $u \in \mathbb{R}^{N_i}$  ( $2 \leq i \leq K-1$ )  $u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^\ell \\ u_B^r \end{pmatrix}$  tel que

$$\begin{aligned} A_{II}^i u_I + A_{IB}^i u_B &= 0 \\ \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,r} & A_{BB}^{i,r} - \Lambda^{i,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^r \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Alors,  $\begin{pmatrix} -A_{BI}^{i,\ell} & -A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^\ell \end{pmatrix} = 0$

(b) Soit  $u \in \mathbb{R}^{N_K}$ ,  $u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^\ell \end{pmatrix}$  tel que  $A_{II}^K u_I + A_{IB}^K u_B^\ell = 0$

Alors,  $\begin{pmatrix} -A_{BI}^{K,\ell} & -A_{BB}^{K,\ell} - \Lambda^{K-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^\ell \end{pmatrix} = 0$

**Preuve de la proposition 4.1**

Soit  $u$  vérifiant les hypothèses de la proposition 4.1 (a).

Nous introduisons le vecteur  $v \in \mathbb{R}^{N(i+1,L)}$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_I^{(i+1,L)} \\ v_B^{i+1,\ell} \end{pmatrix}$  tel que

$$\begin{aligned} A_{II}^{(i+1,L)} v_I^{(i+1,L)} + A_{IB}^{(i+1,L)} v_B^{i+1,\ell} &= 0 \\ v_B^{i+1,\ell} &= u_B^r \end{aligned} \quad (\text{I.4.18})$$

**Remarque 4.6.** *Le problème (I.4.18) correspond à la discrétisation du problème suivant*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v &= 0 \text{ dans } \Omega_{(i+1,L)} \\ v &= u \text{ sur } \Gamma_{i+1,\ell} (= \Gamma_{i,r}) \end{aligned}$$

En particulier, comme  $\Gamma_{i,\ell} \subset \Omega_{(i+1,L)}$ , nous avons  $\mathcal{L}v = 0$  en chaque point de  $\Gamma_{i,\ell}$ , ce qui se traduit au niveau discret (voir (I.4.16)) par :

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{BI}^{i-1,r} & A_{BB}^{i-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.19})$$

Comme  $\Omega_i \subset \Omega_{(i+1,L)}$ , nous avons aussi  $\mathcal{L}v = 0$  en chaque point de  $\Omega_i$ , ce qui se traduit au niveau discret par :

$$A_{II}^i v_I^i + A_{IB}^i v_B^i = 0 \quad (\text{I.4.20})$$

Revenons à la démonstration de la proposition 4.1.

Par définition de  $\Lambda^{i+1,\ell}$ ,

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^{i,r} & -A_{BB}^{i,r} - \Lambda^{i+1,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,r} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.21})$$

Nous allons alors montrer que  $u = v^i$ .

Du fait que  $\Omega_{(i,L)} \subset \Omega_{(i+1,L)}$ , par définition de  $v$  :

$$A_{II}^{(i,L)} v_I^{(i,L)} + A_{IB}^{(i,L)} v_B^{i,\ell} = 0$$

et donc, par définition de  $\Lambda^{i,\ell}$ ,

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^{i-1,r} & -A_{BB}^{i-1,r} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.22})$$

Ceci entraîne que

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.23})$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} A_{BI}^{i-1,r} & A_{BB}^{i-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{BI}^{i-1,r} & A_{BB}^{i-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{BI}^{i-1,r} & A_{BB}^{i-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -A_{BI}^{i-1,r} & -A_{BB}^{i-1,r} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{i-1} \\ v_B^{i-1,r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Car  $v_B^{i,\ell} = v_B^{i-1,r}$  par définition).

D'après (I.4.19) et (I.4.22),

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} = 0$$

Alors,  $u$  et  $v^i$  sont solutions du même système linéaire :

$$A_{II}^i u_I + A_{IB}^i u_B = A_{II}^i v_I^i + A_{IB}^i v_B^i = 0 \quad (\text{I.4.24})$$

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{BI}^{i,\ell} & A_{BB}^{i,\ell} - \Lambda^{i,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^{i,\ell} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.25})$$

$$u_B^r = v_B^{i,r} \quad (\text{I.4.26})$$

En effet, la relation (I.4.24) vient de la définition de  $u$  et de (I.4.20). La relation (I.4.25) vient de la définition de  $u$  et de (I.4.23). Enfin, la relation

(I.4.26) vient de la définition de  $v$  et du fait que  $v_B^{i+1,\ell} = v_B^{i,r}$ . Si on suppose que ce système linéaire admet une unique solution, alors  $u = v^i$ .

En particulier, d'après (I.4.21), on a

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^{i,r} & -A_{BB}^{i,r} - \Lambda^{i+1,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B^r \end{pmatrix} = 0$$

ce qui démontre la proposition 4.1 (a).  $\square$

Les démonstrations de la proposition 4.1 (b) et de la proposition 4.2 sont similaires.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 4.2 : La proposition 4.2 entraîne que pour tout  $1 \leq j \leq K-1$  et  $p \geq j$  :

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^{K-j+1,\ell} & -A_{BB}^{K-j+1,\ell} - \Lambda^{K-j,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{K-j+1(p)} \\ u_B^{K-j+1,r(p)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.27})$$

Montrons (I.4.27) pour  $j = 1$ . Dans l'algorithme 4.2,  $u^K(p)$  vérifie :

$$A_{II}^K u_I^K(p) + A_{IB}^K u_B^K(p) = 0$$

Donc, d'après la proposition 4.2 (b),

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^{K,\ell} & -A_{BB}^{K,\ell} - \Lambda^{K-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^K(p) \\ u_B^{K,r(p)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.4.28})$$

Montrons maintenant (I.4.27) pour  $j = 2$ . D'après l'algorithme 4.2 et (I.4.28),  $u^{K-1}(p)$  vérifie :

$$\begin{aligned} & A_{II}^{K-1} u_I^{K-1}(p) + A_{IB}^{K-1} u_B^{K-1}(p) = 0 \\ & \begin{pmatrix} A_{BI}^{K-1,r} & A_{BB}^{K-1,r} - \Lambda^{K-1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{K-1}(p) \\ u_B^{K-1,r(p)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition (4.2) (a),

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^{K-1,\ell} & -A_{BB}^{K-1,\ell} - \Lambda^{K-2,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{K-1}(p) \\ u_B^{K-1,r(p)} \end{pmatrix} = 0$$

La démonstration est similaire pour  $j = 3, \dots, K - 1$ .

De même, en utilisant la proposition 4.1, on démontre de façon similaire que :

$$\begin{pmatrix} -A_{BI}^{j,r} & -A_{BB}^{j,r} - \Lambda^{j+1,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{j(p)} \\ u_B^{j,\ell(p)} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{I.4.29})$$

pour tout  $1 \leq j \leq K - 1$  et  $p \geq j$

Ceci entraîne que  $u^{i(K)} = 0$ , pour tout  $i$ . En effet, d'après les relations (I.4.27) et (I.4.29), dans l'algorithme 4.2, le second membre du problème définissant  $u^{i(K)}$  est nul, et donc que  $u^{i(K)} = 0$ , pour tout  $i$ .  $\square$

Dans la section suivante, nous interprétons les CLA exactes discrètes en terme de matrice du complément de Schur.

## 4.5 Remarque : lien entre les CLA exactes discrètes et la matrice du complément de Schur

Dans cette partie, nous reprenons la décomposition en sous-domaines et les notations de la section 4.1.

### 4.5.1 Rappel : méthode du complément de Schur

D'après les notations de la section 4.1, la matrice  $A$  du problème (I.4.1) se décompose par blocs sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{II}^1 & 0 & A_{IB}^1 \\ 0 & A_{II}^2 & A_{IB}^2 \\ A_{BI}^1 & A_{BI}^2 & A_{BB} \end{pmatrix}$$

On peut ensuite par une élimination de Gauss appliquée à la matrice  $A$ , ramener le problème (I.4.1) à la résolution d'un problème condensé sur l'interface :

$$(A_{BB} - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}A_{IB}^1 - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}A_{IB}^2)u_B = b_B \quad (\text{I.4.30})$$



avec

$$b_B = f_B - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1 - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2$$

La matrice condensée sur l'interface

$$S = A_{BB} - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}A_{IB}^1 - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}A_{IB}^2$$

est appelée la matrice du complément de Schur.  $S$  étant une matrice dense, le problème (I.4.30) est résolu par une méthode du type gradient conjugué sans calculer explicitement la matrice du complément de Schur [38] (F.X. Roux, 1995).

La matrice du complément de Schur s'écrit comme la somme de deux matrices  $S^1$  et  $S^2$  qui sont les contributions respectives de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  à  $S$  :

$$\begin{aligned} S^1 &= A_{BB}^1 - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}A_{IB}^1 \\ S^2 &= A_{BB}^2 - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}A_{IB}^2 \end{aligned}$$

$A_{BB}^1$  et  $A_{BB}^2$  désignent respectivement les contributions des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  aux termes de la matrice associés aux degrés de liberté sur la frontière  $\Gamma_{12}$ .

On obtient deux problèmes locaux condensés sur l'interface et découplés que l'on peut calculer en parallèle.

## 4.5.2 Lien avec les CLA exactes discrètes

### CLA exactes discrètes (Rappel)

Reprenons les notations de la section 4.4.2.

Nous notons ici, dans le cas de 2 sous-domaines,  $\Lambda^1 = \Lambda^{1,r}$  et  $\Lambda^2 = \Lambda^{2,\ell}$  (si  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , on a aussi  $\Lambda^1 = \Lambda_h^-$  et  $\Lambda^2 = \Lambda_h^+$  (voir section 4.3)).

Les opérateurs intervenant dans les CLA exactes discrètes (voir (I.4.17)) sont donc :

$$\left( A_{BI}^1 \quad A_{BB}^1 - \Lambda^1 \right) \quad \text{et} \quad \left( A_{BI}^2 \quad A_{BB}^2 - \Lambda^2 \right)$$

où pour un vecteur  $v_0 \in \mathbb{R}^{N_B}$ ,

$$\Lambda^1 v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } v^2 = \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix} \text{ vérifie } \begin{aligned} A_{II}^2 v_I^2 + A_{IB}^2 v_B &= 0 \\ v_B &= v_0 \end{aligned}$$

$$\Lambda^2 v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_I^1 \\ w_B \end{pmatrix}$$

où  $w^1 = \begin{pmatrix} w_I^1 \\ w_B \end{pmatrix}$  vérifie  $A_{II}^1 w_I^1 + A_{IB}^1 w_B = 0$   
 $w_B = v_0$

### Lien entre $\Lambda^i$ et $S^i$

Par définition de  $S^1$  et  $S^2$  :

$$\begin{pmatrix} A_{II}^1 & A_{IB}^1 \\ A_{BI}^1 & A_{BB}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^1 \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S^1 v_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{II}^2 & A_{IB}^2 \\ A_{BI}^2 & A_{BB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S^2 v_B \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que pour un vecteur  $v_0 \in \mathbb{R}^{N_B}$  :

$$S^1 v_0 = \begin{pmatrix} A_{BI}^1 & A_{BB}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^1 \\ v_B \end{pmatrix}$$

où  $v^1 = \begin{pmatrix} v_I^1 \\ v_B \end{pmatrix}$  vérifie  $A_{II}^1 v_I^1 + A_{IB}^1 v_B = 0$   
 $v_B = v_0$

$$S^2 v_0 = \begin{pmatrix} A_{BI}^2 & A_{BB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_I^2 \\ w_B \end{pmatrix}$$

où  $w^2 = \begin{pmatrix} w_I^2 \\ w_B \end{pmatrix}$  vérifie  $A_{II}^2 w_I^2 + A_{IB}^2 w_B = 0$   
 $w_B = v_0$

Par conséquent,

$$S^1 = -\Lambda^2 \quad \text{et} \quad S^2 = -\Lambda^1$$

**Remarque 4.7.**  $S^1 = -\Lambda^2$  et  $S^2 = -\Lambda^1$  sont respectivement la discrétisation au sens de la définition (I.4.2) des opérateurs de Steklov-Poincaré  $\mathcal{S}_1$  et

$\mathcal{S}_2$ , qui font passer de la trace d'une fonction à sa dérivée normale (son flux) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : v_0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{où } \mathcal{L}(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ v = v_0 \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ \mathcal{C}v = g \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 : v_0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_2} \quad \text{où } \mathcal{L}(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \\ v = v_0 \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ \mathcal{C}v = g \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

## 4.6 Les conditions (OO2)<sub>h</sub>

Dans cette partie, les opérateurs d'interface sont construits de façon à approcher les opérateurs intervenant dans les CLA exactes discrètes (I.4.9) et (I.4.13). Nous désignons ces opérateurs d'interface par (OO2)<sub>h</sub>.

La définition et la démarche pour calculer les conditions d'interface (OO2)<sub>h</sub> sont similaires à celles utilisées dans le cadre continu pour les conditions d'interface OO2 (chapitre I.3). En particulier, les opérateurs d'interface (OO2)<sub>h</sub> sont de la même forme que les opérateurs d'interface OO2, seuls les coefficients intervenant devant  $Id$ ,  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2}$  changent :

**Définition 4.4 (Opérateurs d'interface (OO2)<sub>h</sub>).** *Les opérateurs d'interface (OO2)<sub>h</sub> sont définis par :*

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_{1,h} + c_{2,h} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - c_{3,h} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2}$$

avec  $c_{1,h} = c_{1,h}(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i) = \lambda_h^-(0)$ , où  $\lambda_h^-$  est le symbole de  $\Lambda_h^-$  (définition 4.1), et les coefficients  $c_{2,h} = c_{2,h}(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i)$  et  $c_{3,h} = c_{3,h}(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i)$  minimisent le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz dans le cas discret, de 2 sous-domaines (algorithme 4.1), et d'un opérateur  $\mathcal{L}$  à coefficients constants.

**Construction des conditions d'interface  $(OO2)_h$** 

C'est la même approche que dans le cas continu (chapitre I.3, section 3.3) :

Détermination de  $\lambda_h^-$  et  $\lambda_h^+$  :

Nous nous plaçons dans le cadre de 2 sous-domaines  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  et de coefficients constants dans (I.1.1), avec un maillage cartésien à pas constant  $\Delta x$  en  $x$  et  $\Delta y$  en  $y$ .

Nous déterminons alors les symboles  $\lambda_h^-$  et  $\lambda_h^+$  des opérateurs de Steklov-Poincaré discrets du demi-plan droit  $\Lambda_h^-$  et du demi-plan gauche  $\Lambda_h^+$  (voir section I.4.3) :

$\Lambda_h^- : v_0 = ((v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \Lambda_h^- v_0 = ((\Lambda_h^- v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  tel que

$$\Lambda_h^- v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } v^2 = (v_{i,j}^2)_{i \geq 0, j \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B \end{pmatrix} \text{ vérifie } A_{II}^2 v_I^2 + A_{IB}^2 v_B = 0 \quad (\text{I.4.31})$$

$$v_B = v_0 \quad (\text{I.4.32})$$

$$v_{i,j}^2 \text{ borné quand } i \longrightarrow \infty \quad (\text{I.4.33})$$

et  $\Lambda_h^+ : v_0 = ((v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \Lambda_h^+ v_0 = ((\Lambda_h^+ v_0)_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  tel que

$$\Lambda_h^+ v_0 = \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_I^1 \\ w_B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } w^1 = (w_{i,j}^1)_{i \leq 0, j \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} w_I^1 \\ w_B \end{pmatrix} \text{ vérifie } A_{II}^1 w_I^1 + A_{IB}^1 w_B = 0 \quad (\text{I.4.34})$$

$$w_B = v_0 \quad (\text{I.4.35})$$

$$w_{i,j}^1 \text{ borné quand } i \longrightarrow \infty \quad (\text{I.4.36})$$

On calcule  $\lambda_h^-$  (resp.  $\lambda_h^+$ ) en prenant une transformée de Fourier discrète de (I.4.31)-(I.4.33) (resp. (I.4.34)-(I.4.36)) par rapport à  $y$ , c'est-à-dire que l'on

écrit :

$$(v_0)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\hat{v}_0)_k e^{ikj\Delta y}$$

où  $i^2 = -1$ , et on cherche une solution de (I.4.31)-(I.4.33) (resp. (I.4.34)-(I.4.36)) sous la forme :

$$v_{\ell,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikj\Delta y} e^{z(k)\ell\Delta x}$$

où  $z(k) \in \mathbb{C}$ .

Alors,

$$\Lambda_h^-(v_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{ikj\Delta y} \lambda_h^-(k)$$

avec  $\beta_k = \beta_k(v_0)$ .

Les fonctions complexes  $k \rightarrow \lambda_h^-(k, a, b)$  et  $k \rightarrow \lambda_h^+(k, a, b)$  sont non polynomiales en les variables  $Z(k) = \frac{\sin(k\Delta y)}{\Delta y}$  et  $H(k) = \frac{1 - 2 \cos(k\Delta y)}{\Delta y^2}$ , où  $Z$  (resp.  $H$ ) provient de la discrétisation de  $\frac{\partial v}{\partial y}$  (resp.  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ ).

**Remarque 4.8.** *Considérons le cas du chapitre 3, partie II, c'est-à-dire celui d'une discrétisation par un schéma aux différences finies décentré, et d'un découpage avec une maille de recouvrement entre les sous-domaines. Nous introduisons*

$$\tilde{Z} = |b| \frac{(1 - \cos(k\Delta y))}{\Delta y} + ib \frac{\sin(k\Delta y)}{\Delta y}$$

Alors,

$$\lambda_h^- = \frac{a - \frac{\Delta x}{\Delta t} - \nu H \Delta x - \Delta x \tilde{Z} - \sqrt{(|a| + \frac{\Delta x}{\Delta t} + \nu H \Delta x + \Delta x \tilde{Z})^2 + 4\nu \tilde{Z} + 4\nu \frac{1}{\Delta t} + \nu H}}{2(\nu + \max(a, 0)\Delta x)}$$

$$\lambda_h^+ = \frac{a + \frac{\Delta x}{\Delta t} + \nu H \Delta x + \Delta x \tilde{Z} + \sqrt{(|a| + \frac{\Delta x}{\Delta t} + \nu H \Delta x + \Delta x \tilde{Z})^2 + 4\nu \tilde{Z} + 4\nu \frac{1}{\Delta t} + \nu H}}{2(\nu + \max(-a, 0)\Delta x)}$$

Calcul des conditions d'interface (OO2)<sub>h</sub> :

La technique de calcul développée au chapitre I.3, section 3.3, et permettant d'approcher le minimum dans un cadre continu, est appliquée, ici, de la façon suivante :

On note  $\lambda_h^+(k) = \lambda_h^+(k, \mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i)$ .

Les opérateurs intervenant dans les conditions d'interface (OO2)<sub>h</sub> s'écrivent sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_{1,h} + c_{2,h} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - c_{3,h} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2} \quad (\text{I.4.37})$$

où  $c_{1,h} = c_{1,h}(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i) = \lambda_h^-(0, \mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i)$ , et les coefficients  $c_{2,h} = c_{2,h}(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i)$  et  $c_{3,h} = c_{3,h}(\mathbf{a}, \mathbf{n}_i, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_i)$  sont calculés de la façon suivante :

Soit  $k_{max} = \frac{\pi}{\Delta y}$ . On pose, pour  $0 \leq k \leq k_{max}$ ,  $0 < k_{int} \leq k_{max}$  :

$$\rho_h(k, k_{int}) = \left( \frac{\lambda_h^-(k) - (\lambda_{ap}^-)_h(k, k_{int})}{\lambda_h^+(k) - (\lambda_{ap}^-)_h(k, k_{int})} \right)^2$$

avec  $(\lambda_{ap}^-)_h(k, k_{int}) = c_{1,h} - c_{2,h}(k_{int})iZ(k_{int}) - c_{3,h}(k_{int})H(k_{int})$ , où les coefficients  $c_{2,h} = c_{2,h}(k_{int})$  et  $c_{3,h} = c_{3,h}(k_{int})$  sont fixés par  $\rho_h(k_{int}, c_{2,h}, c_{3,h}) = 0$ , soit :

$$c_{2,h}(k_{int}) = -\frac{Im(\lambda_h^-(k_{int}))}{Z(k_{int})}, \quad c_{3,h}(k_{int}) = \frac{\lambda_h^-(0) - Re(\lambda_h^-(k_{int}))}{H(k_{int})}$$

On note  $k_1 = k_1(k_{int})$  la racine dans  $]0, k_{int}[$  de la dérivée de la fonction  $k \rightarrow |\rho_h(k, k_{int})|$ .

Alors, on calcule la solution  $k_{int}$  dans  $]0, k_{max}]$  de l'équation :

$$|\rho_h(k_1, k_{int})| = |\rho_h(k_{max}, k_{int})|$$

à l'aide d'un algorithme de dichotomie.

Finalement, on obtient  $c_{2,h}$  et  $c_{3,h}$  par :

$$c_{2,h} = c_{2,h}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) = -\frac{\text{Im}(\lambda_h^-(k_{int}))\Delta y}{\sin(k_{int}\Delta y)}$$

$$c_{3,h} = c_{3,h}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) = \frac{(\lambda_h^-(0) - \text{Re}(\lambda_h^-(k_{int})))\Delta y^2}{(1 - 2 \cos(k_{int}\Delta y))}$$

# Chapitre 5

## Compléments

Cette partie a pour objet l'étude du problème de minimisation du taux de convergence, lorsque le coefficient  $c_1$  (intervenant dans les conditions OO2) est quelconque.

### 5.1 Minimisation sur deux paramètres du taux de convergence dans le cas de 2 sous-domaines

Dans cette section nous étudions, pour  $a \in \mathbb{R}$  une constante et  $b = 0$  dans (I.1.1), le

$$\min_{c_1, c_2, c_3} \max_{|k| \leq k_{max}} |\rho(k, c_1, c_2, c_3)|$$

$$\text{où } \rho(k, c_1, c_2, c_3) = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \right)^2 \text{ avec } \lambda_{ap}^-(k) = c_1 - c_2 ik - c_3 k^2.$$

Quand  $b = 0$ ,  $\lambda^-$  est paire donc  $c_2 = 0$ . Etant donné que  $\lambda^-(k) \leq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$  (voir I.3.8) et que  $\lambda_{ap}^-(k)$  est cherché de façon à approcher  $\lambda^-(k)$  pour tout  $k$ , on suppose que  $\lambda_{ap}^-(k) \leq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$  et en particulier pour  $k = 0$  on a  $c_1 \leq 0$ .

Alors,  $c_1$  et  $c_3$  sont obtenus par un résultat similaire au théorème 3.1 (chapitre I.3, section 3.2.1) :



**Théorème 5.1.** *On suppose que  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  et  $c \geq 0$  dans (I.1.1). Alors, pour  $k_{max} > 0$ , il existe un unique couple  $(\bar{c}_1, \bar{c}_3)$  qui réalise le*

$$\min_{c_1 \leq 0, c_3 \geq 0} \max_{0 \leq k \leq k_{max}} |\rho(k, c_1, 0, c_3)| \quad (\text{I.5.1})$$

De plus,  $(\bar{c}_1, \bar{c}_3)$  peuvent être calculés de la façon suivante :

On pose

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}(a - 2\nu c_1)$$

On commence par fixer  $\alpha \geq 2$ , ce qui équivaut à fixer  $c_1 \leq \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu}$ , c'est-à-dire  $c_1 \leq \lambda^-(0)$ .

Alors  $\bar{c}_3$ , qui dépend de  $c_1$  et de  $k_{max}$ , est l'unique solution dans

$$\left[ \frac{\lambda^-(0) - \lambda^-(k_{max})}{k_{max}^2}, \frac{\nu}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}(\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}) \right]$$

de l'équation

$$\rho(k_1, c_1, 0, c_3) = \rho(k_{max}, c_1, 0, c_3)$$

où  $k_1 = k_1(c_1, c_3)$  est la racine de la dérivée de  $k \rightarrow \rho(k, c_1, 0, c_3)$ , telle que  $\rho(k_1, c_1, 0, c_3) \neq 0$  (voir figure 5.1).

On obtient ensuite  $\bar{c}_1$  comme étant l'unique solution dans

$$\left[ \frac{1}{2\nu} \left( a - \frac{a^2 + 4c\nu + 2\nu^2 k_{max}^2}{\sqrt{a^2 + 4c\nu + 4\nu^2 k_{max}^2}} \right), \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} \right]$$

de l'équation

$$\rho(0, c_1, \bar{c}_3) = \rho(k_{max}, c_1, \bar{c}_3) = \rho(k_1, c_1, \bar{c}_3)$$

où  $\bar{c}_3 = \bar{c}_3(c_1, k_{max})$  et  $k_1 = k_1(c_1, \bar{c}_3(c_1, k_{max}))$  (voir figure 5.2).

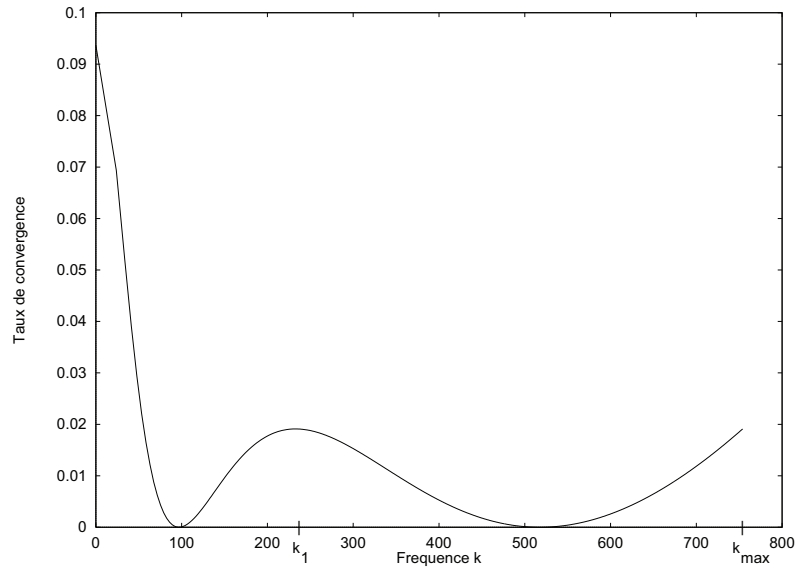


FIG. 5.1: Minimisation sur le paramètre  $c_3$  avec  $c_1$  fixé,  
 $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 0$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

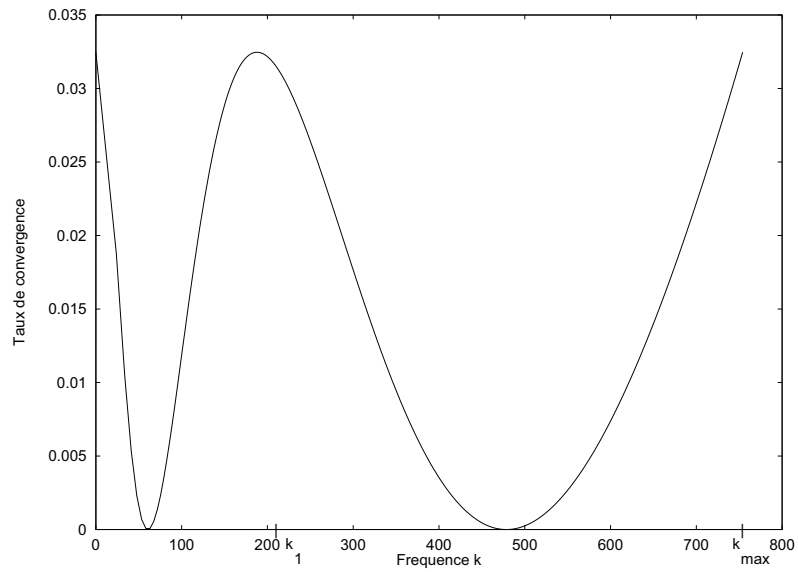


FIG. 5.2: Minimisation sur les paramètres  $c_1$  et  $c_3$ ,  
 $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 0$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

**Preuve du théorème 5.1.**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  et  $c \geq 0$  dans (I.1.1).

On pose  $x = \frac{4\nu^2 k^2}{a^2 + 4c\nu}$ ,  $\gamma = \frac{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} c_3$ , et  $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}(a - 2\nu c_1)$ . Alors, le taux de convergence devient :

$$\rho(x, \alpha, \gamma) = \left( \frac{1 + \sqrt{1+x} - \alpha - \gamma x}{1 - \sqrt{1+x} - \alpha - \gamma x} \right)^2$$

et, en posant  $x_{max} = \frac{4\nu^2 k_{max}^2}{a^2 + 4c\nu}$ , le problème de minimisation (I.5.1) est équivalent au problème suivant :

$$\min_{\alpha \geq 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}, \gamma \geq 0} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$

La fonction  $(x, \alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , positive, et pour  $\alpha > 0$ ,  $\gamma \geq 0$  fixés,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x, \alpha, \gamma) = 1$ .

*Recherche du maximum de la fonction  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$ , pour  $\alpha \geq 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}$  et  $\gamma \geq 0$  fixés :*

Regardons d'abord les zéros positifs de cette fonction et de sa dérivée :

On pose

- soit pour  $\alpha \leq 2$  et  $\gamma \neq 0$ ,
- soit pour  $\alpha \geq 2$  et  $\gamma \in ]0, \frac{\alpha-1-\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}] \cup [\frac{\alpha-1+\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}, +\infty[$ ,

$$r^- = \frac{1 - 2\gamma(\alpha - 1) - \sqrt{4\gamma^2 - 4\gamma(\alpha - 1) + 1}}{2\gamma^2}$$

$$r^+ = \frac{1 - 2\gamma(\alpha - 1) + \sqrt{4\gamma^2 - 4\gamma(\alpha - 1) + 1}}{2\gamma^2}$$

On note aussi, pour  $\gamma \neq 0$  :

$$x_1 = \frac{\alpha - 1 - 2\gamma}{\gamma}$$

Alors, les zéros positifs de  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  sont :

- si  $\alpha \leq 2$  et  $\gamma \neq 0$  :  $r^+$ ,
- si  $\alpha \geq 2$  et  $\gamma \in ]0, \frac{\alpha-1-\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}] \cup [\frac{\alpha-1+\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}, +\infty[$  :  $r^-$  et  $r^+$ .

Et les zéros positifs de sa dérivée sont :

- si  $\alpha \leq 2$  et  $\gamma \neq 0$  :
  - $r^+$ ,
  - si  $\gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}$  :  $x_1$ ,
- si  $\alpha \geq 2$  :
  - si  $\gamma \in ]0, \frac{\alpha-1-\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}] \cup [\frac{\alpha-1+\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}, +\infty[$  :  $r^-$  et  $r^+$ ,
  - si  $0 < \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}$  :  $x_1$ .

Nous allons ainsi distinguer deux cas sur  $\alpha$  :  $1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4c\nu}} \leq \alpha \leq 2$  et  $\alpha \geq 2$ .

Pour ces deux cas, nous utiliserons tout au long de la démonstration les notations et les propriétés suivantes :

On pose

$$F_\alpha(\gamma) = \rho(x_{max}, \alpha, \gamma), \quad \alpha > 0, \gamma \geq 0$$

$$H_\alpha = H(\alpha) = \rho(0, \alpha, \gamma) = \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha > 0$$

$$G_\alpha(\gamma) = \rho(x_1(\alpha, \gamma), \alpha, \gamma), \quad \text{si } 0 < \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}, \alpha \geq 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4c\nu}}$$

$$\begin{aligned} F_0(x, \alpha, \gamma) &= \frac{\partial \rho}{\partial \gamma}(x, \alpha, \gamma) \\ &= -\frac{4x\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x}-\alpha-\gamma x)}{(-1+\sqrt{1+x}+\alpha+\gamma x)^3}, \quad x \geq 0, \alpha > 0, \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

Alors, nous avons les propriétés suivantes :

$$F'_\alpha(\gamma) = F_0(x_{max}, \alpha, \gamma) \quad (\text{I.5.2})$$

$$G'_\alpha(\gamma) = F_0(x_1(\alpha, \gamma), \alpha, \gamma) \quad (\text{I.5.3})$$

$$F_0(x, \alpha, \gamma) \geq 0 \iff \gamma \geq f_1(x, \alpha), \quad (\text{I.5.4})$$

avec  $f_1(x, \alpha) = \frac{\sqrt{1+x} + 1 - \alpha}{x}$

$$\text{si } \alpha \leq 2, \quad \gamma \leq f_1(x_1(\gamma), \alpha), \quad \forall \gamma > 0 \quad (\text{I.5.5})$$

$$\text{si } \alpha \geq 2, \quad \gamma \leq f_1(x_1(\gamma), \alpha) \iff$$

$$\gamma = \alpha - 1 \text{ ou } \gamma \in ]0, \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}] \cup [\frac{\alpha - 1 + \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}, +\infty[ \quad (\text{I.5.6})$$

$$H(\alpha)' \geq 0 \iff \alpha \geq 2 \quad (\text{I.5.7})$$

$$F_\alpha\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right) \leq G_\alpha\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right) \iff \alpha \leq g_2(x_{max}) \quad (\text{I.5.8})$$

$$\text{avec } g_2(x) = 1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{1+x}}{2+x}}$$

1) Cas  $1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4cv}} \leq \alpha \leq 2$

**Lemme 5.1.**

$$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4cv}} \leq \alpha \leq 2, \gamma \geq 0 \quad \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)| = \min_{\alpha=2, \gamma \geq 0} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$

**Preuve du lemme 5.1.**

Soit  $1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4cv}} \leq \alpha \leq 2$  fixé.

Nous distinguons deux cas sur  $\gamma$  :  $\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2}$  et  $0 \leq \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}$

•  $\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2}$

Supposons  $\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2}$  fixé. Alors, nous avons vu que  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  et sa

dérivée ont un zéro positif qui est  $r^+$ . La fonction  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  est décroissante sur  $[0, r^+]$ , et croissante sur  $[r^+, x_{max}]$ . Le maximum de  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$  est donc soit en 0, soit en  $x_{max}$ . Nous avons deux possibilités :

- Soit  $\gamma$  est tel que  $F_\alpha(\gamma) \leq H_\alpha$ , ce qui équivaut à  $\gamma \leq f_2(\alpha, x_{max})$  avec  $f_2(\alpha, x) = \frac{\sqrt{1+x-(\alpha-1)^2}}{(\alpha-1)x}$ . Alors, le maximum de  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint 0,
- Soit  $\gamma \geq f_2(\alpha, x_{max})$ , alors le maximum de  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint en  $x_{max}$ .

Supposons dans un premier temps que  $\alpha$  est tel que  $f_2(\alpha, x_{max}) \geq \frac{\alpha-1}{2}$  ce qui équivaut à  $\alpha \leq g_2(x_{max})$  (avec  $g_2$  défini en (I.5.8)).

Comme  $f_2(x_{max}, \alpha) \geq f_1(x_{max}, \alpha), \forall \alpha, x_{max} > 0$ , alors d'après (I.5.2) et (I.5.4),  $F_\alpha(\gamma) \geq 0, \forall \gamma \geq f_2(x_{max}, \alpha)$ . Ainsi, si  $\gamma \geq f_2(x_{max}, \alpha)$ ,  $F_\alpha$  est continue, croissante et son minimum est atteint en  $f_2(x_{max}, \alpha)$ . On est donc ramené à étudier le

$$\min_{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4c\nu}} \leq \alpha \leq g_2(x_{max})} \min_{\frac{\alpha-1}{2} \leq \gamma \leq f_2(x_{max}, \alpha)} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$

c'est-à-dire (nous avons vu que pour  $\frac{\alpha-1}{2} \leq \gamma \leq f_2(x_{max}, \alpha)$  le maximum est atteint en 0),

$$\min_{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4c\nu}} \leq \alpha \leq g_2(x_{max})} H(\alpha)$$

$H$  étant continue, décroissante pour  $\alpha \leq 2$  d'après (I.5.7), son minimum sur  $[1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4c\nu}}, g_2(x_{max})]$  est atteint en  $g_2(x_{max})$ . On est ainsi ramené au problème

$$\min_{\alpha \geq g_2(x_{max})} \min_{\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$

c'est-à-dire, comme  $\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2} \geq f_2(x_{max}, \alpha)$ , le maximum de  $\rho$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint en  $x_{max}$ ,

$$\min_{\alpha \geq g_2(x_{max})} \min_{\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2}} F_\alpha(\gamma)$$

$F_\alpha$  étant continue, croissante, son minimum pour  $\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2}$  est atteint en  $\frac{\alpha-1}{2}$ .  
Et on recherche donc le

$$\min_{\alpha \geq g_2(x_{max})} F_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$$

Une étude de la dérivée de la fonction  $\alpha \geq g_2(x_{max}) \longrightarrow F_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$  montre que cette fonction est croissante, et donc son minimum est atteint en  $g_2(x_{max})$ .  
Finalement,

$$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4c\nu}} \leq \alpha \leq 2, \gamma \geq \frac{\alpha-1}{2} \quad \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)| = \min_{\alpha = g_2(x_{max}), \gamma = \frac{\alpha-1}{2}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$

Ce cas est inclus dans celui que nous allons traiter maintenant :

- $0 \leq \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}$

On suppose d'abord que  $\gamma \neq 0$ . Le cas  $\gamma = 0$  est traité après. Dans ce cas, nous avons vu que les racines positives de  $x \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, \alpha, \gamma)$  sont  $r^+$  et  $x_1$ . La fonction  $x \longrightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  est croissante sur  $[0, x_1]$ , décroissante sur  $[x_1, r^+]$ , et croissante sur  $[r^+, x_{max}]$ . Le maximum de cette fonction sur  $[0, x_{max}]$  est donc soit en  $x_1$ , soit en  $x_{max}$ .

Supposons, dans un premier temps, que  $\alpha$  est tel que  $f_1(x_{max}, \alpha) \geq \frac{\alpha-1}{2}$ , ce qui équivaut à  $\alpha \leq g_1(x_{max})$ , avec  $g_1(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1+x_{max}}}{2+x_{max}}$ . Alors, comme  $g_1(x_{max}) \leq g_2(x_{max})$ ,  $\forall x_{max} \geq 0$ , nous avons  $F_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) \leq G_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$  (d'après (I.5.8)). De plus, d'après (I.5.2) et (I.5.4),  $F_\alpha$  est décroissante sur  $]0, \frac{\alpha-1}{2}]$  (puisque l'on a supposé  $f_1(x_{max}, \alpha) \geq \frac{\alpha-1}{2}$ ). Et d'après (I.5.3)-(I.5.5),  $G_\alpha$  est décroissante sur  $]0, \frac{\alpha-1}{2}]$  (car  $\alpha \leq 2$ ). De plus, un calcul simple montre que  $G_\alpha$  peut s'écrire sous la forme

$$\left( \frac{2\sqrt{\gamma} + \sqrt{\alpha-1-\gamma} - 2\alpha\sqrt{\gamma} + 2\gamma\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha-1-\gamma} - 2\alpha\sqrt{\gamma} + 2\gamma\sqrt{\gamma}} \right)^2$$

Et donc  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} G_\alpha(\gamma) = 1$ . Or  $F_\alpha(0) \leq 1$  si  $\alpha \geq 1$ , ce qui est le cas ici. Donc  $F_\alpha(0) \leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} G_\alpha(\gamma)$ . Par conséquent, le maximum de  $\rho$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint en  $x_1$ . On cherche donc le

$$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4c\nu}} \leq \alpha \leq g_1(x_{max}) \quad \min_{0 < \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}} G_\alpha(\gamma)$$

Or  $G_\alpha$  est continue, décroissante sur  $]0, \frac{\alpha-1}{2}]$ , donc son minimum sur  $]0, \frac{\alpha-1}{2}]$  est atteint en  $\frac{\alpha-1}{2}$ . On est par suite ramené à étudier le

$$\min_{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4cv}} \leq \alpha \leq g_1(x_{max}), \gamma = \frac{\alpha-1}{2}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)| \quad (\text{I.5.9})$$

Ce problème va être traité par la suite.

Supposons maintenant que  $\alpha$  est tel que  $f_1(x_{max}, \alpha) \leq \frac{\alpha-1}{2}$ , ce qui équivaut à  $\alpha \geq g_1(x_{max})$ .

Alors, soit  $\gamma \leq f_1(x_{max}, \alpha)$  et dans ce cas, par un même raisonnement que ci-dessus, le maximum de  $\rho$  sur  $[0, x_{max}]$  est atteint en  $x_1$ . On cherche donc le

$$\min_{\alpha \geq g_1(x_{max})} \min_{0 < \gamma \leq f_1(x_{max}, \alpha)} G_\alpha(\gamma)$$

Comme  $G_\alpha$  est continue, décroissante sur  $]0, f_1(x_{max}, \alpha)]$ , alors son minimum sur cet intervalle est atteint en  $f_1(x_{max}, \alpha)$ . On étudie par conséquent le

$$\min_{\alpha \geq g_1(x_{max})} \min_{f_1(x_{max}, \alpha) \leq \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}} \max(F_\alpha(\gamma), G_\alpha(\gamma))$$

$F_\alpha$  est continue, croissante sur  $[f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha-1}{2}]$  (d'après (I.5.2) et (I.5.4)), et  $G_\alpha$  est continue, décroissante sur  $[f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha-1}{2}]$  (d'après (I.5.3)-(I.5.5)). De plus,  $F_\alpha(\frac{\alpha-1}{2}) \leq G_\alpha(\frac{\alpha-1}{2}) \iff \alpha \leq g_2(x_{max})$  (d'après (I.5.8)).

Par suite, si  $\alpha \leq g_2(x_{max})$ , le maximum de  $\rho$  sur  $[0, x_{max}]$  est en  $x_1$  et nous cherchons le

$$\min_{g_1(x_{max}) \leq \alpha \leq g_2(x_{max})} \min_{f_1(x_{max}, \alpha) \leq \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}} G_\alpha(\gamma) = \min_{g_1(x_{max}) \leq \alpha \leq g_2(x_{max}), \gamma = \frac{\alpha-1}{2}} G_\alpha(\gamma)$$

(car  $G_\alpha$  est continue, décroissante sur  $[f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha-1}{2}]$ ).

On est donc ramené, en incluant le cas (I.5.9) (car  $g_1(x) \leq g_2(x), \forall x \geq 0$ ) à étudier le

$$\min_{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4cv}} \leq \alpha \leq g_2(x_{max}), \gamma = \frac{\alpha-1}{2}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$



D'après l'étude effectuée dans le cas  $\gamma \geq \frac{\alpha-1}{2}$ , le minimum est atteint en  $\alpha = g_2(x_{max})$ . On est donc ramené à étudier le

$$\min_{g_2(x_{max}) \leq \alpha \leq 2} \min_{f_1(x_{max}, \alpha) \leq \gamma \leq \frac{\alpha-1}{2}} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$

Dans ce cas, nous avons vu que  $F_\alpha(\frac{\alpha-1}{2}) \geq G_\alpha(\frac{\alpha-1}{2})$  (car  $\alpha \geq g_2(x_{max})$ ). De plus,  $F_\alpha(f_1(x_{max}, \alpha)) = 0$  et  $G_\alpha(f_1(x_{max}, \alpha)) \geq 0$ . Comme  $F_\alpha$  est continue, croissante, et  $G_\alpha$  est continue, décroissante sur  $[f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha-1}{2}]$ , il existe un unique  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\alpha)$  tel que  $F_\alpha(\bar{\gamma}) = G_\alpha(\bar{\gamma})$ , et

$$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \leq \alpha \leq 2, \gamma > 0 \quad \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)| = \min_{g_2(x_{max}) \leq \alpha \leq 2} F_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha))$$

Cas  $\gamma = 0$  :

La fonction  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, 0)$  est croissante sur  $[0, x_{max}]$  et donc son maximum sur  $[0, x_{max}]$  est atteint en  $x_{max}$ . Un calcul simple montre alors que  $\rho(x_{max}, \alpha, 0) > \rho(x_{max}, \alpha, \bar{\gamma})$  (on utilise la relation  $\bar{\gamma} \leq \frac{\alpha-1}{2}$ ).

On utilise alors le résultat suivant

**Lemme 5.2.** *La fonction  $\alpha \rightarrow F_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha))$  est décroissante sur  $[1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}}, 2]$*

La démonstration de ce lemme est similaire à celle du lemme 5.3. D'où,

$$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c\nu}} \leq \alpha \leq 2, \gamma \geq 0 \quad \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)| = \min_{\alpha=2, \gamma \geq 0} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)|$$

ce qui démontre le lemme 5.1.  $\square$

2) Cas  $\alpha \geq 2$

En utilisant des techniques similaires au cas  $\alpha \leq 2$ , on montre que le cas optimal est celui où

- $x_1, r^-$  et  $r^+$  sont définies et positives, ce qui équivaut à

$$0 < \gamma \leq \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}$$

- $r^+ \leq x_{max}$ , ce qui équivaut à

$$\gamma \geq f_1(x_{max}, \alpha)$$

Pour avoir ces deux conditions, il faut que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2} &\geq f_1(x_{max}, \alpha) \\ \iff \alpha &\leq \alpha_1, \quad \text{avec } \alpha_1 = \frac{1 + \frac{x_{max}}{2}}{\sqrt{1 + x_{max}}} + 1 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'on se place dans le cas où

$$f_1(x_{max}, \alpha) \leq \gamma \leq \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha \leq \alpha_1$$

Dans ce cas, La fonction  $x \rightarrow \rho(x, \alpha, \gamma)$  est décroissante sur  $[0, r^-]$ , croissante sur  $[r^-, x_1]$ , décroissante sur  $[x_1, r^+]$ , et croissante sur  $[r^+, x_{max}]$ . Le maximum sur  $[0, x_{max}]$  de cette fonction est donc soit en 0, soit en  $x_1$ , soit en  $x_{max}$ .

On cherche donc le

$$\min_{2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \max(H_\alpha, \min_{f_1(x_{max}, \alpha) \leq \gamma \leq \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}} [F_\alpha(\gamma), G_\alpha(\gamma)])$$

1) Etude du  $\min_{f_1(x_{max}, \alpha) \leq \gamma \leq \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}} [F_\alpha(\gamma), G_\alpha(\gamma)]$  :

$F_\alpha$  est croissante, et  $G_\alpha$  décroissante sur  $[f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}]$  (d'après (I.5.2)-(I.5.6)). De plus, ces fonctions sont continues et  $F_\alpha(f_1(x_{max}, \alpha)) = 0$ ,  $G_\alpha(f_1(x_{max}, \alpha)) \geq 0$ ,  $F_\alpha(\frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}) \geq 0$  et  $G_\alpha(\frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}) = 0$ .

Donc il existe un unique  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\alpha) \in [f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2}]$  tel que

$$F_\alpha(\bar{\gamma}) = G_\alpha(\bar{\gamma})$$

On pose

$$K(\alpha) = F_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha)) = G_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha)), \quad 2 \leq \alpha \leq \alpha_1$$

2) Etude du  $\min_{2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \max(H(\alpha), K(\alpha))$  :

Pour cela, nous montrons d'abord le lemme suivant :

**Lemme 5.3.** *La fonction  $\alpha \rightarrow K(\alpha)$  est décroissante sur  $[2, \alpha_1]$*

**Preuve du lemme 5.3.**

Notons que

$$\frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2} = f_1(x_{max}, \alpha) \iff \alpha = \alpha_1$$

et donc,

$$\begin{aligned} F_\alpha(\gamma) = G_\alpha(\gamma) = 0 \\ \iff \gamma = \frac{\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{2} = f_1(x_{max}, \alpha) \\ \iff \alpha = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_1 \\ \text{avec} \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1 - 1 - \sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)}}{2} = f_1(x_{max}, \alpha_1) \end{aligned} \tag{I.5.10}$$

Par suite,  $K(\alpha) = 0 \iff \alpha = \alpha_1$  et  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\alpha_1) = \gamma_1$ . En particulier, on a  $K(2) > 0$  (en supposant  $x_{max} \neq 0$ ). Nous allons utiliser le lemme suivant :

**Lemme 5.4.** *La fonction  $\alpha \in [2, \alpha_1] \rightarrow \bar{\gamma}(\alpha)$  est décroissante.*

Nous démontrerons ce lemme par la suite.

Supposons que la fonction  $\alpha \in [2, \alpha_1[ \rightarrow \bar{\gamma}(\alpha)$  est dérivable. Alors,  $K$  est dérivable sur  $[2, \alpha_1[$  et

$$\begin{aligned} K'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(F_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha))) \\ &= -4\sqrt{F_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha))}\sqrt{1+x_{max}}(1+x_{max}\frac{d\bar{\gamma}}{d\alpha}(\alpha)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(G_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha))) \\ &= -4\sqrt{G_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha))(\alpha-1-\bar{\gamma}(\alpha))(1+(\alpha-1-2\bar{\gamma}(\alpha))\frac{d\bar{\gamma}}{d\alpha}(\alpha))} \end{aligned}$$

Montrons alors que  $K'(\alpha) \neq 0$ ,  $\forall \alpha \in [2, \alpha_1[$ . Pour cela, on raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe  $\alpha_2 < \alpha_1$  tel que  $K'(\alpha_2) = 0$ . Alors, d'après (I.5.10),  $F_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha_2)) \neq 0$  et  $G_\alpha(\bar{\gamma}(\alpha_2)) \neq 0$ , et donc d'après les expressions de  $K'$  ci-dessus :

$$\begin{aligned} 1 + x_{max} \frac{d\bar{\gamma}}{d\alpha_2}(\alpha_2) &= 0 \\ \text{et } 1 + (\alpha_2 - 1 - 2\bar{\gamma}(\alpha_2)) \frac{d\bar{\gamma}}{d\alpha_2}(\alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\alpha_2 - 1 - 2\bar{\gamma}(\alpha_2) = x_{max}$$

Un calcul simple montre que

$$\alpha_1 - 1 - 2\bar{\gamma}(\alpha_1) = x_{max} \bar{\gamma}(\alpha_1) \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}(\alpha_1) \leq 1$$

Alors,

$$\alpha_1 - 1 - 2\bar{\gamma}(\alpha_1) \leq \alpha_2 - 1 - 2\bar{\gamma}(\alpha_2)$$

Or la fonction  $\alpha \in [2, \alpha_1] \rightarrow \alpha - 1 - 2\bar{\gamma}(\alpha)$  est croissante (d'après le lemme 5.4), ce qui contredit l'hypothèse que  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Par conséquent,  $K'(\alpha) \neq 0$ ,  $\forall \alpha \in [2, \alpha_1[$ . Comme  $K(2) > 0$  et  $K(\alpha_1) = 0$ ,  $K$  est décroissante sur  $[2, \alpha_1]$ , ce qui démontre le lemme 5.3.  $\square$

Alors, comme  $H$  est continue, croissante sur  $[2, \alpha_1]$  (d'après (I.5.7)),  $K$  continue, décroissante sur  $[2, \alpha_1]$ ,  $H(2) = 0$ ,  $K(2) \geq 0$ ,  $H(\alpha_1) \geq 0$  et  $K(\alpha_1) = 0$ , il existe un unique  $\bar{\alpha} \in [2, \alpha_1]$  tel que

$$H(\bar{\alpha}) = K(\bar{\alpha})$$

et

$$\min_{2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \max(H(\alpha), K(\alpha)) = H(\bar{\alpha}) = K(\bar{\alpha})$$

D'où

$$\min_{\alpha \geq 2, \gamma \geq 0} \max_{0 \leq x \leq x_{max}} |\rho(x, \alpha, \gamma)| = H(\bar{\alpha}) = K(\bar{\alpha})$$

Avec le lemme 5.1, ceci démontre le théorème 5.1.  $\square$

Démontrons maintenant le lemme 5.4.

#### Preuve du lemme 5.4.

$\alpha \in [2, \alpha_1] \longrightarrow \bar{\gamma}(\alpha)$  est décroissante :

Soient  $\alpha_3, \alpha_4 \in [2, \alpha_1]$  tels que  $\alpha_3 \leq \alpha_4$ .

Notons  $\gamma_3 = \bar{\gamma}(\alpha_3)$  et  $\gamma_4 = \bar{\gamma}(\alpha_4)$ . Posons également

$$\begin{aligned} F_\gamma(\alpha) &= \rho(x_{max}, \alpha, \gamma), \quad \alpha \in [2, \alpha_1] \\ G_\gamma(\alpha) &= \rho(x_1, \alpha, \gamma), \quad \alpha \in [2, \alpha_1] \end{aligned}$$

Alors, un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned} F'_\gamma(\alpha) &= \frac{1}{x_{max}} F_0(x_{max}, \alpha, \gamma) \\ G'_\gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha - 1 - 2\gamma} F_0(x_{max}, \alpha, \gamma) \end{aligned}$$

D'après (I.5.2)-(I.5.6) et le fait que  $\bar{\gamma}(\alpha) \in [f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha-1-\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}]$ , pour  $2 \leq \alpha \leq \alpha_1$ , alors  $F_\gamma$  est croissante, et  $G_\gamma$  est décroissante sur  $[2, \alpha_1]$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \rho(x_{max}, \alpha_3, \gamma_4) \leq \rho(x_{max}, \alpha_4, \gamma_4) &= \rho(x_1(\alpha_4, \gamma_4), \alpha_4, \gamma_4) \\ &\leq \rho(x_1(\alpha_3, \gamma_4), \alpha_3, \gamma_4) \end{aligned} \quad (\text{I.5.11})$$

Raisonnons alors par l'absurde et supposons que  $\gamma_3 < \gamma_4$ . Alors

$$\rho(x_{max}, \alpha_3, \gamma_3) < \rho(x_{max}, \alpha_3, \gamma_4) \quad (\text{I.5.12})$$

(d'après la croissance de  $F_\alpha$  sur  $[f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha-1-\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}]$ ).

Et

$$\rho(x_1(\alpha_3, \gamma_4), \alpha_3, \gamma_4) < \rho(x_1(\alpha_3, \gamma_3), \alpha_3, \gamma_3) \quad (\text{I.5.13})$$

(d'après la décroissance de  $G_\alpha$  sur  $[f_1(x_{max}, \alpha), \frac{\alpha-1-\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}{2}]$ ). Ainsi, d'après (I.5.11), (I.5.12) et (I.5.13),

$$\rho(x_{max}, \alpha_3, \gamma_3) < \rho(x_1(\alpha_3, \gamma_3), \alpha_3, \gamma_3)$$

ce qui contredit la définition de  $\gamma_3$ .

Donc  $\gamma_4 \leq \gamma_3$  et la fonction  $\alpha \in [2, \alpha_1] \rightarrow \bar{\gamma}(\alpha)$  est décroissante, ce qui démontre le lemme 5.4.



## Deuxième partie

### Méthode Optimisée d'Ordre 2. Formulation algébrique et résultats numériques.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>2</b>	<b>Méthode Optimisée d'Ordre 2</b>	<b>119</b>
2.1	Formulation algébrique : écriture du problème condensé . . . .	120
2.1.1	Matrices d'interface $B^1$ et $B^2$ . . . . .	120
2.1.2	Ecriture de l'algorithme de Schwarz sous forme d'un problème condensé sur l'interface . . . . .	121
2.2	Résolution du problème condensé par un algorithme de Krylov	125
<b>3</b>	<b>Application de la méthode à un schéma aux différences finies décentré</b>	<b>129</b>
3.1	Position du problème . . . . .	129
3.2	Résultats numériques . . . . .	130
3.2.1	Découpage du domaine en bandes : comparaison des conditions OO2 discrétisées et $(OO2)_h$ . . . . .	130
3.2.2	Découpage du domaine en rectangles . . . . .	139
3.3	Conclusions . . . . .	140
<b>4</b>	<b>Application de la méthode à un schéma volumes finis</b>	<b>143</b>
4.1	Discrétisation en temps . . . . .	143
4.2	Discrétisation du domaine de calcul . . . . .	146
4.3	Discrétisation en espace : méthode de volumes finis . . . . .	146
4.3.1	Stabilité du schéma . . . . .	152
4.3.2	Discrétisation d'une condition aux limites de type Neu- mann . . . . .	154
4.4	Résolution par la méthode OO2 . . . . .	156
4.4.1	Discrétisation des conditions d'interface . . . . .	158

4.4.2	Discrétisation des conditions aux points de croisement des sous-domaines . . . . .	164
4.5	Résultats numériques . . . . .	169
4.5.1	Maillage cartésien à pas constant . . . . .	170
4.5.2	Ecoulement autour d'un cylindre issu d'un calcul Navier- Stokes . . . . .	183

# Chapitre 1

## Introduction

Cette partie a pour objet la description de l'algorithme OO2, sa mise en œuvre, et son application à différents schémas de discrétisation.

La présentation de l'algorithme OO2, est effectuée au chapitre II.2. Afin de simplifier les écritures, l'algorithme, et en particulier la formulation du problème condensé à l'interface, est exposé dans le cas de deux sous-domaines. Nous présentons ensuite la résolution du problème condensé par l'algorithme BICG-STAB.

Nous exposons ensuite, aux chapitres II.3 et II.4, des résultats numériques sur l'équation de convection-diffusion en 2D. Les simulations numériques sont effectuées sur le Paragon Intel de l'ONERA (calculateur parallèle à mémoire distribuée, 100 nœuds). Au chapitre II.3, la méthode est testée sur un code de calcul existant (avec recouvrement), afin de regarder l'efficacité de la méthode. La discrétisation en temps est de type Euler implicite et la discrétisation en espace est effectuée par un schéma aux différences finies décentré. Le domaine de calcul est découpé avec une maille de recouvrement entre les sous-domaines, afin d'être le plus proche possible du cas sans recouvrement. Ensuite, au chapitre II.4, nous appliquons la méthode à un schéma utilisé dans le code de calcul AEROLOG développé par le département d'aérodynamique de MATRA BAe DYNAMICS France. Le schéma en temps implicite provient du schéma de Lax-Wendroff et la discrétisation en espace est de type volumes finis. On insiste sur la technique de discrétisation des conditions d'interface, dans le cadre d'un découpage sans recouvrement. La même méthodologie peut être effectuée dans le cas d'une discrétisation de type

éléments finis. La méthode est testée sur l'équation de convection-diffusion correspondant à un cas réaliste : la vitesse de convection provient d'un écoulement Navier-Stokes autour d'un cylindre avec un maillage raffiné vers le cylindre et dans la direction de l'écoulement.

## Chapitre 2

# Méthode Optimisée d'Ordre 2

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Dans ce chapitre, la méthode Optimisée d'Ordre 2 (OO2) est exposée et appliquée à la résolution du système linéaire résultant d'une discrétisation du problème de convection-diffusion. Nous écrivons ce système linéaire sous la forme :

$$Au = f \tag{II.2.1}$$

Afin de simplifier l'écriture de la méthode, on considère le cas où le domaine de calcul  $\Omega$  est la réunion de deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , avec  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . On note  $\Gamma_{12}$  l'interface entre les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (voir figure 2.1).

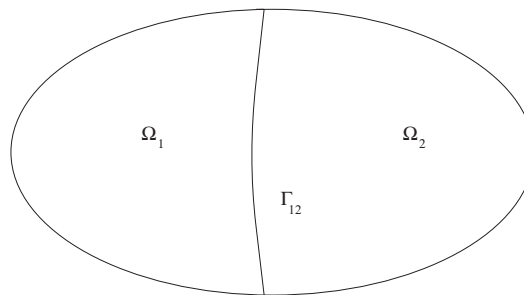


FIG. 2.1: *Décomposition en 2 sous-domaines, sans recouvrement*

Les notations sont alors celles du chapitre I.4.

Les algorithmes peuvent se généraliser au cas d'un découpage quelconque en  $K$  sous-domaines.

**La méthode Optimisée d'Ordre 2 (OO2)** s'inscrit dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement, itératives.

Cette méthode est définie de la façon suivante : l'algorithme de Schwarz est réécrit sous la forme d'un algorithme de Jacobi appliqué à un problème d'interface (ou problème condensé). Pour accélérer la convergence, l'algorithme de Jacobi est remplacé par un algorithme de type Krylov (BICG-STAB, GMRES, GCR). Les conditions de raccord sur les interfaces des sous-domaines sont les conditions OO2 (voir Chapitre I.3).

L'écriture du problème condensé, sous deux formes équivalentes, fait l'objet de la section 2.1. Nous décrivons ensuite, dans la section 2.2, la résolution de ce problème condensé par l'algorithme BICG-STAB.

## 2.1 Formulation algébrique : écriture du problème condensé

### 2.1.1 Matrices d'interface $B^1$ et $B^2$

Les matrices d'interface  $B^1$  et  $B^2$  sont obtenues par intégration sur  $\Gamma_{12}$  du terme :

$$\nu \left( c_1 - c_2 \frac{\partial u}{\partial \tau_i} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_i^2} \right)$$

où les coefficients  $c_i$  sont :

- soit ceux intervenant dans les opérateurs d'interface OO2 (voir partie I, sections 3.1 et 3.3, expression (I.3.18))
- soit ceux intervenant dans les opérateurs d'interface  $(OO2)_h$  (voir partie I, section 4.6, expression (I.4.37))

**Remarque 2.1.** *Les résultats numériques (voir partie II, chapitres 3 et 4) obtenus avec les conditions OO2 ou  $(OO2)_h$  seront comparés à ceux obtenus lorsque les coefficients  $c_i$  sont ceux des opérateurs d'interface de Taylor d'ordre 0 ou 2 (voir partie I, section 2.4, expressions (I.2.12) et (I.2.13)).*

### 2.1.2 Ecriture de l'algorithme de Schwarz sous forme d'un problème condensé sur l'interface

Afin d'écrire le problème condensé à l'interface, nous rappelons l'algorithme de Schwarz appliqué au problème discret (voir partie I, section 4.2).

**Algorithme 2.1 (Schwarz dans le cas discret, sans recouvrement).**  
Soit  $(u^i)^{i=1,2}$  une approximation initiale de la solution  $u$  de (II.2.1) par sous-domaine, et soit  $(u^i)^{i=1,2}$  la valeur de l'approximation de  $u$  à l'itération  $p$ .

L'algorithme de Schwarz additif s'écrit :

$$A_{II}^i u_I^{i(p+1)} + A_{IB}^i u_B^{i(p+1)} = f_I^i, \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.2.2})$$

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^1 & A_{BB}^1 - B^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^1(p+1) \\ u_B^1(p+1) \end{pmatrix} = \quad (\text{II.2.3})$$

$$f_B^1 + f_B^2 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - B^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^2(p) \\ u_B^2(p) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^2 & A_{BB}^2 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^2(p+1) \\ u_B^2(p+1) \end{pmatrix} = \quad (\text{II.2.4})$$

$$f_B^2 + f_B^1 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^1(p) \\ u_B^1(p) \end{pmatrix}$$

Soit  $N_i$  le nombre de points de discrétisation dans  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , et  $N_B$  le nombre de points de discrétisation sur  $\Gamma_{12}$ .

#### Première formulation du problème condensé

Dans cette partie, le problème condensé est formulé suivant [32](F. Nataf, F. Rogier et E. de Sturler, 1995). Afin d'écrire l'algorithme 2.1 sous forme d'un problème condensé, on introduit le vecteur interface  $\mu^i(p)$  et l'opérateur  $M^i$ , définis par :

Soit  $\mu^i(p) \in \mathbb{R}^{N_B}$ ,  $i = 1, 2$  tel que

$$\mu^i(p) = \begin{pmatrix} A_{BI}^i & A_{BB}^i - B^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^i(p) \\ u_B^i(p) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.2.5})$$



Soit  $M^i : \mathbb{R}^{N_i} \rightarrow \mathbb{R}^{N_i}$ ,  $i = 1, 2$  tel que

$$M^i \begin{pmatrix} f_I^i \\ \mu^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} A_{II}^i & A_{IB}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix} = f_I^i \quad (\text{II.2.6})$$

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^i & A_{BB}^i - B^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix} = \mu^i \quad (\text{II.2.7})$$

L'algorithme de Schwarz 2.1 se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mu^{1(p+1)} \\ \mu^{2(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_B^1 + f_B^2 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - B^1 \end{pmatrix} M^2 \begin{pmatrix} f_I^2 \\ \mu^{2(p)} \end{pmatrix} \\ f_B^2 + f_B^1 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - B^2 \end{pmatrix} M^1 \begin{pmatrix} f_I^1 \\ \mu^{1(p)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire,

$$\mu^{(p+1)} = T(H^{(p)}) + b$$

où pour un vecteur  $\mu \in \mathbb{R}^{N_B} \times \mathbb{R}^{N_B}$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}$ , on a :

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - B^1 \end{pmatrix} M^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - B^2 \end{pmatrix} M^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} f_B^1 + f_B^2 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - B^1 \end{pmatrix} M^2 \begin{pmatrix} f_I^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_B^2 + f_B^1 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - B^2 \end{pmatrix} M^1 \begin{pmatrix} f_I^1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La structure de  $T$  est alors ici, dans le cas de 2 sous-domaines, de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \times \\ \times & 0 \end{pmatrix}$$

où les croix représentent des matrices non nulles. L'algorithme de Schwarz correspond donc à un algorithme de Jacobi (du fait que la diagonale de  $Id - T$  est l'identité) appliqué au problème condensé

$$D\mu = b \quad (\text{II.2.8})$$

avec  $D = Id - T$ .

### Deuxième formulation du problème condensé

Remarquons que de (II.2.2) nous avons :

$$u_I^{i(p+1)} = -(A_{II}^i)^{-1} A_{IB}^i u_B^{i(p+1)} + (A_{II}^i)^{-1} f_I^i, \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.2.9})$$

En remplaçant (II.2.9) pour  $i = 1$  (resp.  $i = 2$ ) dans (II.2.3) (resp. (II.2.4)), nous nous ramenons au problème condensé sur l'interface :

#### **Algorithme 2.2.**

$$\begin{aligned} (S^1 - B^1)u_B^{1(p+1)} + A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1 &= (-S^2 - B^1)u_B^{2(p)} + f_B^1 + f_B^2 - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2 \\ (S^2 - B^2)u_B^{2(p+1)} + A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2 &= (-S^1 - B^2)u_B^{1(p)} + f_B^2 + f_B^1 - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1 \end{aligned}$$

Nous avons aussi  $\mu^i(p)$ , défini en (II.2.5), qui est égal à :

$$\mu^i(p) = (S^i - B^i)u_B^{i(p)} + A_{BI}^i(A_{II}^i)^{-1}f_I^i, \quad i = 1, 2$$

ou encore

$$(S^i - B^i)u_B^{i(p)} = \mu^i(p) - A_{BI}^i(A_{II}^i)^{-1}f_I^i, \quad i = 1, 2 \quad (\text{II.2.10})$$

Introduisons la matrice  $M_B^i : \mathbb{R}^{N_B} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_B}$ ,  $i = 1, 2$  définie par :

$$M_B^i(\mu^i) = v_B^i \quad \text{avec} \quad (S^i - B^i)v_B^i = \mu^i$$

**Remarque 2.2.** Soit  $M^i$  tel que

$$M^i \begin{pmatrix} f_I^i \\ \mu^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix}$$

où  $\begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix}$  vérifie (II.2.6)-(II.2.7). Alors,

$$v_B^i = M_B^i(\mu^i)$$

(En effet, d'après (II.2.6),  $v_I^i = -(A_{II}^i)^{-1}A_{IB}^i v_B^i$  que l'on remplace dans (II.2.7)).

D'après (II.2.10) et la définition de  $M_B^i$ , l'algorithme 2.2 peut ainsi être reformulé en

$$\begin{aligned} \mu^{1(p+1)} &= f_B^1 + f_B^2 + (-S^2 - B^1)M_B^2(\mu^{2(p)} - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2) - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2 \\ \mu^{2(p+1)} &= f_B^2 + f_B^1 + (-S^1 - B^2)M_B^1(\mu^{1(p)} - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1) - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1 \end{aligned}$$

Les opérateurs  $M_B^i$ ,  $i = 1, 2$ , étant linéaires, ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned} \mu^{1(p+1)} &= f_B^1 + f_B^2 + (-S^2 - B^1)M_B^2(\mu^{2(p)}) \\ &\quad + (-S^2 - B^1)M_B^2(-A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2) - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2 \\ \mu^{2(p+1)} &= f_B^2 + f_B^1 + (-S^1 - B^2)M_B^1(\mu^{1(p)}) \\ &\quad + (-S^1 - B^2)M_B^1(-A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1) - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1 \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\mu^{(p+1)} = T(\mu^{(p)}) + b$$

où pour un vecteur  $\mu \in R^{N_B} \times R^{N_B}$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}$ , on a :

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} (-S^2 - B^1)M_B^2(\mu^2) \\ (-S^1 - B^2)M_B^1(\mu^1) \end{pmatrix}$$

Et

$$b = \begin{pmatrix} f_B^1 + f_B^2 + (-S^2 - B^1)M_B^2(-A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2) - A_{BI}^2(A_{II}^2)^{-1}f_I^2 \\ f_B^2 + f_B^1 + (-S^1 - B^2)M_B^1(-A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1) - A_{BI}^1(A_{II}^1)^{-1}f_I^1 \end{pmatrix}$$

L'algorithme de Schwarz est donc un algorithme de Jacobi appliqué au problème condensé

$$(Id - T)\mu = b \tag{II.2.11}$$

**Remarque 2.3.** Les deux formulations (II.2.8) et (II.2.11) du problème condensé sont les mêmes. Dans la pratique, nous utilisons la première formulation (II.2.8) c'est-à-dire que nous ne calculons pas de produit matrice-vecteur du type  $S^i v$ . Nous calculons des produit matrice-vecteur du type  $M^i v$  par résolution de problèmes du type (II.2.6)-(II.2.7) (voir section II.2.2 pour le détail de la résolution).

**Remarque 2.4.** Il est facile de voir sur l'écriture de l'algorithme de Schwarz 2.2 que cet algorithme converge en 2 itérations avec les CLA exactes discrètes. En effet, les équations de l'algorithme 2.2 étant linéaires, on peut considérer le cas où  $f_I^i = 0$ ,  $f_B^i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Alors, si nous prenons les CLA exactes discrètes  $B^1 = \Lambda^1 = -S^2$  et  $B^2 = \Lambda^2 = -S^1$  (voir section I.4.5), le second membre de l'algorithme 2.2 définissant  $u^{i(2)}$  est nul, et donc  $u^{i(2)} = 0$  pour  $i = 1, 2$ .

## 2.2 Résolution du problème condensé par un algorithme de Krylov

Afin d'accélérer la convergence de la méthode, l'algorithme de Jacobi est remplacé par un algorithme de Krylov: BICG-STAB, GMRES, GCR (voir [42] (Y. Saad, 1996), [17] (G.H. Golub, R.W. Freund and N. Nachtigal, 1992)). Nous décrivons ici la résolution du problème condensé (II.2.8) par l'algorithme BICG-STAB.

La résolution du problème condensé

$$D\mu = b$$

s'effectue en différentes étapes :

### Calcul des matrices locales

On calcule, dans chaque sous-domaine  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement, les matrices correspondant à la discrétisation des problèmes de Neumann locaux :

$$\begin{pmatrix} A_{II}^1 & A_{IB}^1 \\ A_{BI}^1 & A_{BB}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A_{II}^2 & A_{IB}^2 \\ A_{BI}^2 & A_{BB}^2 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices d'interface :

$$B^1 \quad \text{et} \quad B^2$$

Les coefficients de ces matrices sont associés au degrés de liberté sur l'interface, et varient selon la condition utilisée (Taylor ordre 0, Taylor ordre 2, OO2 ou  $(OO2)_h$ ). Ces coefficients sont calculés en chaque point de l'interface. Ils ne varient pas au cours des itérations de BICG-STAB, et ne sont donc pas recalculés.

Avec ces matrices, nous pouvons calculer, par sous-domaine, le produit matrice-vecteur  $D\mu$  où  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_B}$  est un vecteur donné.

### Calcul du produit matrice-vecteur $D\mu$

On résout dans chaque sous-domaine  $\Omega_i$  le problème :

$$\begin{pmatrix} A_{II}^i & A_{IB}^i \\ A_{BI}^i & A_{BB}^i - B^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_i \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.12})$$

On calcule ensuite dans chaque sous-domaine  $\Omega_i$  le vecteur :

$$c^i = \begin{pmatrix} -A_{BI}^i & -A_{BB}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix}$$

On envoie aux sous-domaines voisins

$$c^i \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v_I^i \\ v_B^i \end{pmatrix}$$

On obtient alors, dans chaque sous-domaine, le produit matrice-vecteur  $T\mu$  :

- pour le sous-domaine  $\Omega_1$  :

$$(T\mu)_1 = c^2 - B^1 \begin{pmatrix} v_I^2 \\ v_B^2 \end{pmatrix}$$

- pour le sous-domaine  $\Omega_2$  :

$$(T\mu)_2 = c^1 - B^2 \begin{pmatrix} v_I^1 \\ v_B^1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$D\mu = (Id - T)\mu = \mu - T\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 - (T\mu)_1 \\ \mu_2 - (T\mu)_2 \end{pmatrix}$$

**Algorithme BICG-STAB****Phase d'initialisation**

$\mu^0$  vecteur initial

Calcul du produit matrice vecteur :

$$z^0 = D\mu^0$$

$$r^0 = b - z^0, \quad \rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1, \quad v^0 = q^0 = 0$$

**Phase d'itération**

On calcule les coefficients de descente et de conjugaison et les nouvelles valeurs des différents vecteurs :

$$\begin{aligned} \rho_p &= (r^0, r^{p-1}) & \beta &= \left( \frac{\rho_p}{\rho_{p-1}} \right) \left( \frac{\alpha}{\omega_{p-1}} \right) \\ q^p &= r^{p-1} + \beta(q^{p-1} - \omega_{p-1}v^{p-1}) \end{aligned}$$

Calcul du produit matrice vecteur :

$$v^p = Dq^p$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho_p}{(r^0, v^p)} \\ s &= r^{p-1} - \alpha v^i \end{aligned}$$

Calcul du produit matrice vecteur :

$$t = Ds$$

$$\omega_p = \frac{(t, s)}{(t, t)}$$

$$\mu^p = \mu^{p-1} + \alpha q^p + \omega_p s$$

$$r^p = s - \omega_p t$$

**Remarque 2.5.** La résolution du problème condensé par l'algorithme BICG-STAB s'effectue en deux étapes principales :

1) On calcule respectivement dans chaque sous-domaine les matrices locales :

$$\begin{pmatrix} A_{II}^1 & A_{IB}^1 \\ A_{BI}^1 & A_{BB}^1 - B^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A_{II}^2 & A_{IB}^2 \\ A_{BI}^2 & A_{BB}^2 - B^2 \end{pmatrix}$$

Pour les conditions optimisées, les coefficients des matrices  $B^i$  sont calculés par un algorithme de dichotomie. On calcule ensuite la factorisation LU des matrices locales. Le calcul des matrices locales et de la factorisation LU s'effectue en parallèle.

2) Ensuite, à chaque itération de l'algorithme BICG-STAB appliqué au problème condensé, on effectue différentes étapes :

- On résout en parallèle les problèmes locaux (II.2.12), en utilisant cette factorisation LU.
- On calcule les produits matrice-vecteur par un transfert de données entre sous-domaines voisins.
- On remet à jour les nouvelles valeurs des différents vecteurs en calculant les produits scalaires par sommation au travers du réseau d'interconnexion.

**Remarque 2.6.** Le temps de calcul dans une itération de BICG-STAB est le même quelle que soit la condition d'interface utilisée car l'utilisation de conditions d'ordre 2 n'augmente pas la largeur de bande des matrices locales.

**Remarque 2.7 (Convergence selon le nombre de sous-domaines).**

Quelle que soit la condition d'interface, la convergence est au moins linéaire en fonction du nombre de sous-domaines, pour l'algorithme de Schwarz. En effet, supposons que le domaine de calcul soit découpé en  $K$  sous-domaines. La présence du terme  $-\nu\Delta$  dans l'opérateur  $\mathcal{L}$  fait que la solution dans le domaine 1 dépend de la valeur du second-membre  $f$  dans le domaine  $K$  et réciproquement. Il faut donc au moins  $K - 1$  itérations pour converger. Comme l'approximation initiale  $u_i^0$  de la solution dans chaque sous-domaine ne dépend pas a priori de  $f$  et  $g$ , il faut au moins  $K$  itérations pour converger. En particulier si l'on a  $\alpha K$  sous-domaines, il faudra au moins  $\alpha K$  itérations pour converger.

## Chapitre 3

# Application de la méthode à un schéma aux différences finies décentré

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode OO2 à un problème de convection-diffusion discrétisé en temps par un schéma d'Euler implicite, et en espace par un schéma aux différences finies décentré. Nous présentons des résultats numériques obtenus avec le code multidomaine différences finies en 2D. Les simulations numériques sont effectuées sur le Paragon Intel de l'ONERA.

### 3.1 Position du problème

Nous résolvons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) = cu + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \Delta u &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) &= 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{L}$  est discrétisé par un schéma aux différences finies décentré d'ordre 1 (voir (C.A.J.Fletcher 1991)). On considère un maillage rectangulaire de pas constant  $h = \frac{1}{i_{max}} = \frac{1}{j_{max}}$  où  $i_{max}$  est le nombre de points dans



la direction des  $x$  et  $j_{max}$  le nombre de points dans la direction des  $y$  (ici  $i_{max} = j_{max}$ ). Le carré unité est décomposé en  $K$  rectangles avec un recouvrement d'une maille entre chaque rectangle. Le problème condensé est résolu par l'algorithme BICG-STAB, et les problèmes locaux sont résolus par une méthode directe (méthode de Gauss).

*Critère d'arrêt de l'algorithme BICG-STAB :*

Pour chaque simulation, on calcule, dans un premier temps, une solution de référence  $u_{ref}$  à l'aide du code multidomaine, avec un résidu inférieur à 1.d-9 défini par :

$$Residu = \max \left( \frac{\|D\mu^k - b\|_2}{\|b\|_2}, \frac{\|\mu^k - \mu^{k-1}\|_2}{\sqrt{\|\mu^{k-1}\|_2^2 + \|\mu^k\|_2^2}} \right)$$

Nous désignons par “*Erreur*” la norme  $L^\infty$  de la différence entre la solution  $u$  que l'on calcule avec le code multidomaine et cette solution de référence :

$$Erreur = \max_{1 \leq i \leq i_{max}, 1 \leq j \leq j_{max}} (u(i, j) - u_{ref}(i, j))$$

Alors, lorsqu'il n'est pas précisé, le critère d'arrêt est  $Erreur < 1.d - 6$ .

Dans la plupart des cas, nous prenons une constante  $c$  petite, afin que la solution soit proche de la solution stationnaire.

## 3.2 Résultats numériques

### 3.2.1 Découpage du domaine en bandes : comparaison des conditions OO2 discrétisées et $(OO2)_h$

Dans cette partie, nous regardons l'influence des différents paramètres intervenant dans l'algorithme, en particulier de l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces et du nombre de sous-domaines dans une direction d'espace, sur la convergence de l'algorithme avec les conditions OO2,  $(OO2)_h$ , Taylor d'ordre 0 ou 2, et Dirichlet (du fait que l'on a une maille de recouvrement entre les sous-domaines).

Ainsi, nous considérons un découpage du domaine de calcul en bandes verticales, parallèles à l'axe des  $y$ .

### Convergence de l'algorithme suivant l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces

#### Incidence normale :

Le carré unité est découpé en  $16 \times 1$  sous-domaines et on considère une vitesse de convection normale aux interfaces définie par :  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$  (voir figure 3.1). La figure 3.2 représente les isovaleurs de la solution. Sur la figure 3.3, on observe que les conditions d'ordre 2 améliorent nettement la convergence de la méthode.

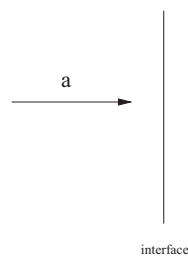


FIG. 3.1: Vitesse de convection  $\mathbf{a}$  normale aux interfaces

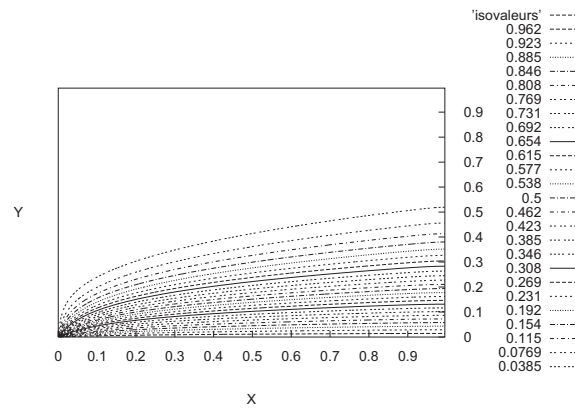


FIG. 3.2: Représentation des isovaleurs de la solution,  $16 \times 1$  sous-domaines  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 6$ ,  $h = \frac{1}{240}$

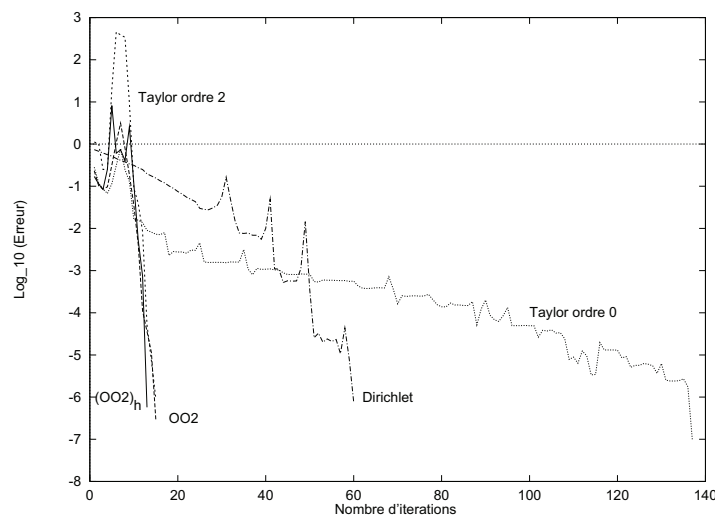


FIG. 3.3: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $16 \times 1$  sous-domaines  
**incidence normale**  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 6$ ,  $h = \frac{1}{240}$

Incidence tangentielle :

Nous reprenons le même test que le précédent, sauf que le carré unité est découpé en  $1 \times 16$  sous-domaines, c'est-à-dire que la vitesse de convection est cette fois ci tangente aux interfaces (voir figure 3.4). Les isovaleurs de la solution sont celles de la figure 3.2. On observe alors, sur la figure 3.5, que les conditions OO2 améliorent nettement la convergence de la méthode.

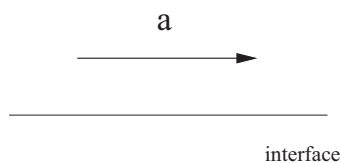


FIG. 3.4: Vitesse de convection  $a$  tangente aux interfaces

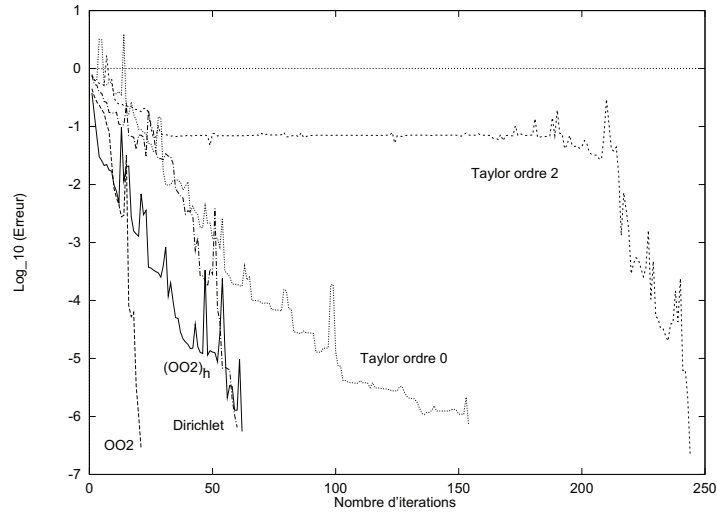


FIG. 3.5: *Erreur en fonction du nombre d'itérations  $1 \times 16$  sous-domaines incidence tangentielle*  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 6$ ,  $h = \frac{1}{240}$

Les figures 3.3 et 3.5 montrent que la convergence avec les conditions OO2 est indépendante de l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces. Par contre, ceci n'est plus vrai avec les conditions  $(OO2)_h$  ou de Taylor d'ordre 0 ou 2.

Pour les conditions de Taylor d'ordre 0, ceci vient du fait que pour  $c$  petit, celles-ci se rapprochent des conditions de Neumann lorsque la vitesse de convection devient tangente à l'interface (voir (I.2.12)).

Pour les conditions de Taylor d'ordre 2, ceci vient du fait que pour  $c$  petit, les coefficients intervenant dans ces conditions (devant les dérivées tangentielles premières et secondes) deviennent infinis lorsque la vitesse de convection devient tangente à l'interface (voir (I.2.13)). Ce comportement avait été mis en évidence dans le cas de deux sous-domaines (voir partie I, paragraphe 3.2.4).

Pour les conditions  $(OO2)_h$ , regardons le cas de 2 sous-domaines et d'un opérateur  $\mathcal{L}$  à coefficients constants: lorsque  $c$  est petit et  $a = 0$ , nous avons observé numériquement que le maximum du taux de convergence discret est bien inférieur à celui obtenu avec les autres conditions. Néanmoins, la courbe du taux de convergence, sur  $[0, k_{max}]$ , est plus "étalée" que celle obtenue avec les conditions OO2 (voir figure 3.6) (nous avons observé ce phénomène

uniquement dans le cas où  $a = 0$  et  $c$  petit). Ceci peut expliquer, ici, une moins bonne convergence de l'algorithme BICG-STAB avec les conditions  $(OO2)_h$  par rapport à celle obtenue avec les conditions OO2.

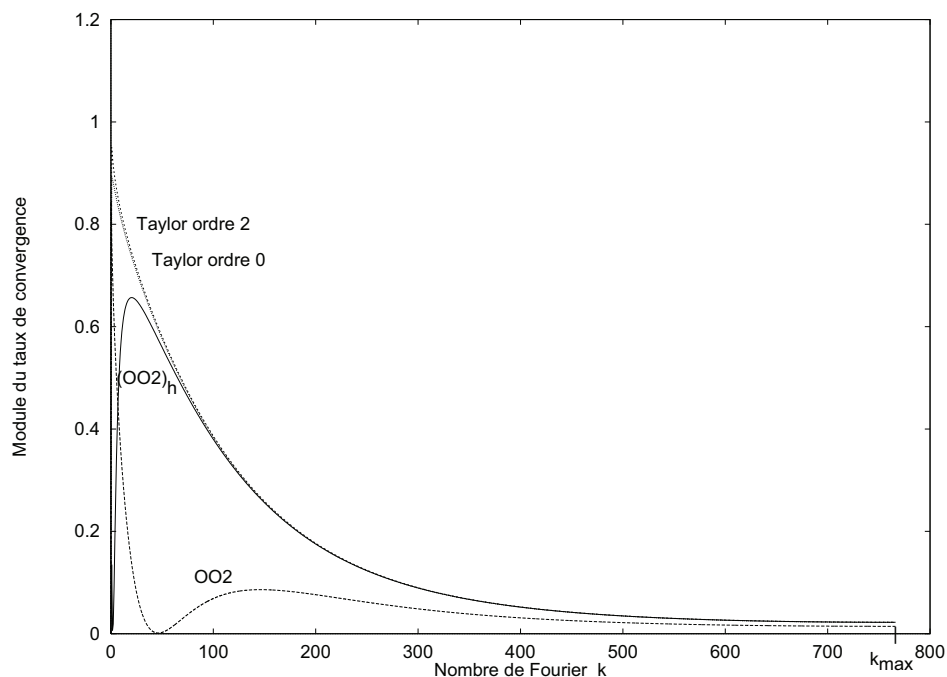


FIG. 3.6: Module du taux de convergence en fonction du nombre de Fourier  $k$   $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $c = 1.d - 4$ ,  $k_{max} = \frac{\pi}{h}$  avec  $h = \frac{1}{240}$

### Convergence de l'algorithme suivant le nombre de sous-domaines dans une direction d'espace

Dans cette partie, on regarde l'influence du nombre de sous-domaines sur la convergence de la méthode. On considère une vitesse de convection tournante:  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  où  $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$  et  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$ , avec  $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 40$  et  $h = \frac{1}{240}$ . Les isovalues de la solution sont données sur la figure 3.7.

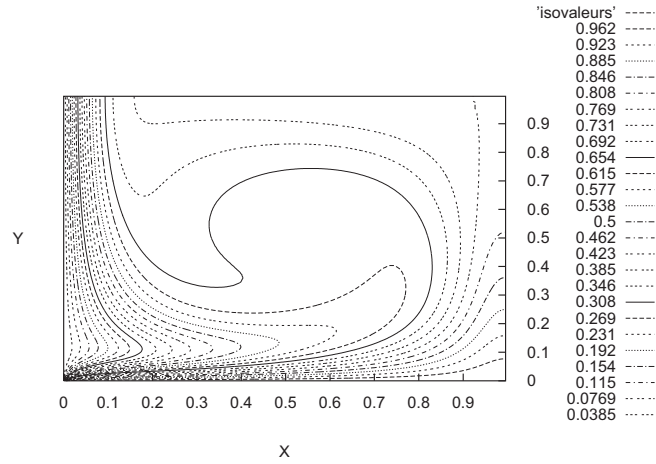


FIG. 3.7: Représentation des isovaleurs de la solution,  $16 \times 1$  sous-domaines  
 $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$   
 $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 40$ ,  $h = \frac{1}{240}$

Le tableau 3.1 représente, pour chaque condition d'interface, le nombre d'itérations en fonction du nombre de sous-domaines. On observe que la convergence est pratiquement linéaire en fonction du nombre de sous-domaines dans une direction d'espace.

	$4 \times 1$	$8 \times 1$	$16 \times 1$	$32 \times 1$
$(OO2)_h$	11	23	43	101
OO2	12	26	45	99
Taylor ordre 2	24	31	97	171
Taylor ordre 0	123	297	879	2729
Dirichlet	43	88	160	287

Tableau 3.1: Nombre d'itérations en fonction du nombre de sous-domaines  
 $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$   
 $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 40$ ,  $h = \frac{1}{240}$

### Convergence de l'algorithme suivant la viscosité

Dans cette partie, on regarde l'influence de la viscosité sur la convergence de la méthode, dans le cas d'une vitesse de convection tournante (tableau 3.2).

	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.1$	$\nu = 1$	$\nu = 10$
$(OO2)_h$	19	15	15	18
OO2	18	16	19	16
Taylor ordre 2	22	22	37	40
Taylor ordre 0	80	232	950	2573
Dirichlet	44	61	45	48

Tableau 3.2: Nombre d'itérations en fonction de la viscosité

$8 \times 1$  sous-domaines, Erreur  $\leq 1.d - 4$

$$a = -\sin\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad b = \cos\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$c = 1.d - 40, \quad h = \frac{1}{160}$$

On observe que la convergence de l'algorithme avec les conditions optimisées (OO2 ou  $(OO2)_h$ ) est peu sensible à la viscosité. Par contre, la convergence se dégrade avec les conditions Taylor, lorsque la viscosité augmente, comme nous l'avions constaté dans le cas de deux sous-domaines (voir partie I, paragraphe 3.2.4), ce qui confirme la remarque 3.4 (partie I, paragraphe 3.2.4).

### Convergence de l'algorithme suivant le pas de temps

	$c = 1.d - 40$	$c = 1.d - 2$	$c = 1$	$c = 100$
$(OO2)_h$	22	22	13	2
OO2	24	24	13	3
Taylor ordre 2	28	27	13	2
Taylor ordre 0	128	66	17	5
Dirichlet	55	57	36	5

Tableau 3.3: Nombre d'itérations en fonction de  $c$

$8 \times 1$  sous-domaines

$$a = -\sin\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad b = \cos\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\nu = 0.01, \quad h = \frac{1}{120}$$

Le tableau 3.3 montre l'influence de la constante  $c$  sur la convergence de l'algorithme, dans le cas d'une vitesse de convection tournante. Rappelons que  $c$  peut être  $c = \frac{1}{\Delta t}$  où  $\Delta t$  est le pas de temps d'un schéma d'Euler implicite pour résoudre l'équation de convection-diffusion dépendante du temps. En particulier le cas  $c = 0$  correspondrait à l'état stationnaire.

### Convergence de l'algorithme suivant le pas du maillage

Dans cette section, le pas du maillage  $h$  varie et nous regardons son influence sur la convergence de l'algorithme, d'abord dans le cas d'une vitesse de convection normale aux interfaces (figure 3.8), puis dans le cas d'une vitesse de convection tangente aux interfaces (figure 3.9), et enfin dans le cas d'une vitesse de convection tournante (figure 3.10).

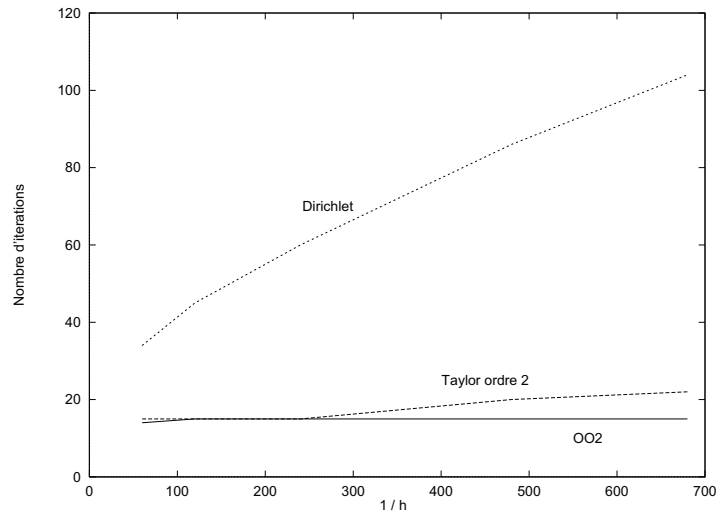


FIG. 3.8: Nombre d'itérations en fonction du pas du maillage  $h$

$16 \times 1$  sous-domaines

$a = y, b = 0, \nu = 0.01, c = 1.d - 6$



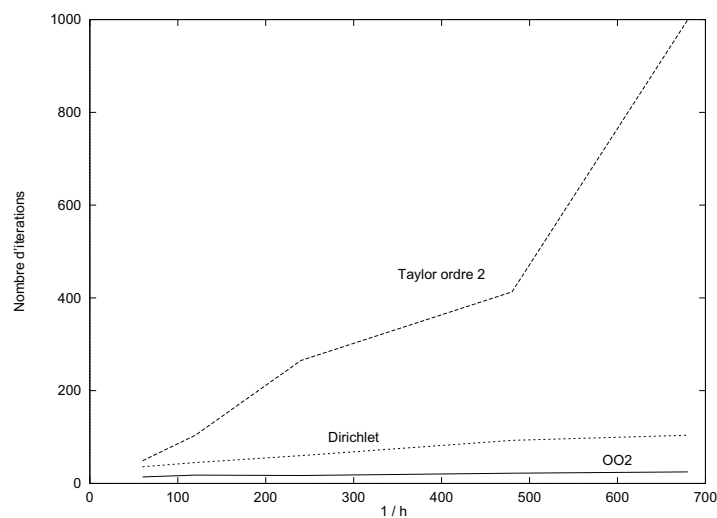


FIG. 3.9: Nombre d'itérations en fonction du pas du maillage  $h$   
 $16 \times 1$  sous-domaines  
 $a = 0, b = y, \nu = 0.01, c = 1.d - 6$

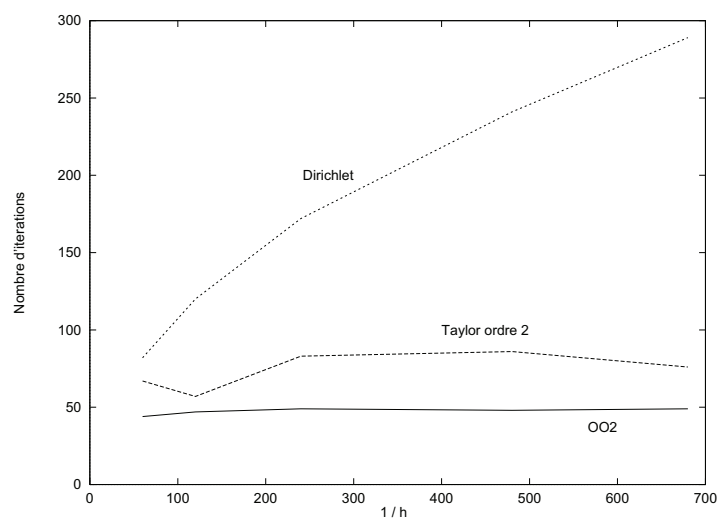


FIG. 3.10: Nombre d'itérations en fonction du pas du maillage  $h$   
 $16 \times 1$  sous-domaines  
 $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$   
 $\nu = 0.01, c = 1.d - 6$

Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 montrent que les conditions d'interface OO2 conduisent à une convergence pratiquement indépendante du pas du maillage.

### 3.2.2 Découpage du domaine en rectangles

Dans cette partie, le domaine de calcul est découpé de façon plus général, c'est-à-dire en rectangles. On considère d'abord le cas d'une vitesse de convection  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$  avec  $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 6$ ,  $h = \frac{1}{240}$ , dont les isovaleurs de la solution sont représentées sur la figure 3.2.

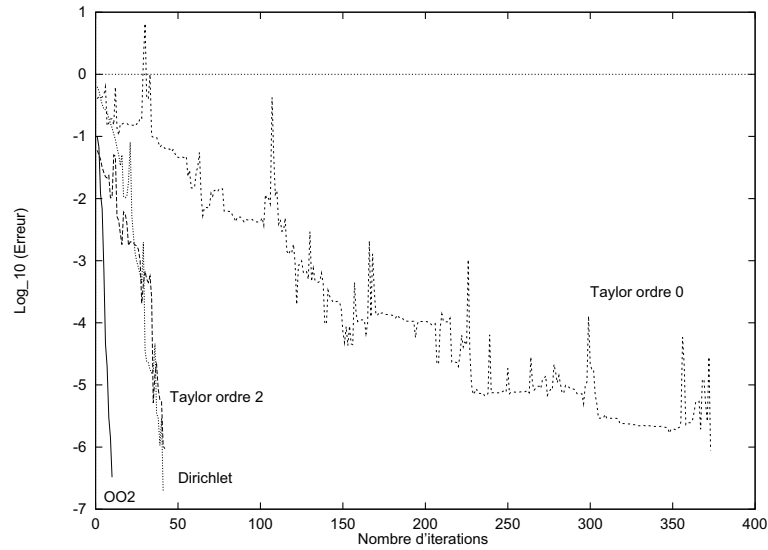


FIG. 3.11: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 4$  sous-domaines  $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 6$ ,  $h = \frac{1}{240}$

Les figures 3.3, 3.5 et 3.11 montrent l'importance d'avoir une méthode indépendante de l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces. En effet, avec les conditions OO2, pour un nombre de sous-domaines fixé (ici 16 sous-domaines), la décomposition du domaine (en bandes ou en rectangles) n'affecte pas la convergence de l'algorithme. Par contre, avec les conditions de Taylor, qui sont sensibles à l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces, la convergence varie avec le découpage du domaine. En effet, dans le cas d'un découpage en rectangles (figure 3.11) la convergence se dégrade

par rapport au cas d'un découpage en bandes (figure 3.3) du fait que la vitesse de convection devient tangente à certaines interfaces dans le premier cas. Sur la figure 3.12, on considère une vitesse de convection tournante avec un découpage en  $4 \times 8$  sous-domaines. Les isovaleurs de la solution sont représentées sur la figure 3.7.

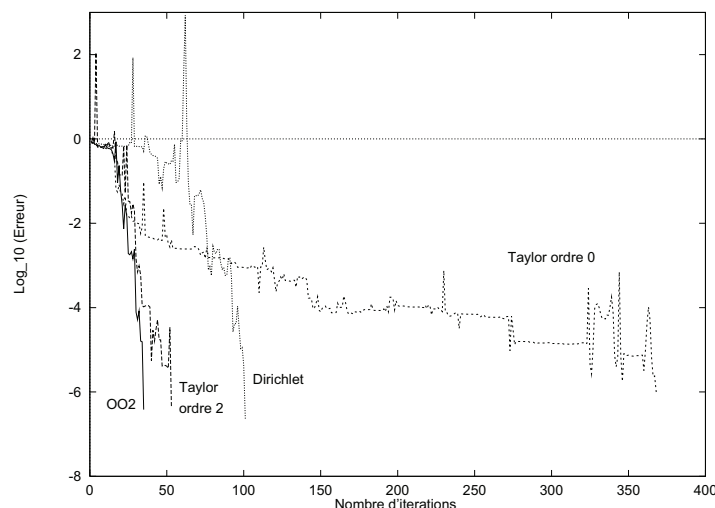


FIG. 3.12: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 8$  sous-domaines  
 $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$   
 $\nu = 0.01$ ,  $c = 1.d - 40$ ,  $h = \frac{1}{240}$

### 3.3 Conclusions

Les conditions d'ordre 2 (Taylor, OO2 et  $(OO2)_h$ ) améliorent nettement la convergence de l'algorithme par rapport aux conditions de Taylor d'ordre 0 ou celles de Dirichlet. Néanmoins, quand  $c$  est petit (c'est-à-dire  $\Delta t$  grand), la convergence avec les conditions de Taylor se dégrade lorsque la vitesse de convection devient tangente aux interfaces. L'utilisation des conditions optimisées (OO2 et  $(OO2)_h$ ) permet d'améliorer ceci. En particulier l'utilisation des conditions OO2 conduit à une convergence indépendante de l'angle entre la vitesse de convection et les interfaces. Ceci permet d'avoir, pour un nombre de sous-domaines fixé, une méthode indépendante de la façon dont on découpe le domaine.

De plus, avec les conditions de Taylor, la convergence se dégrade lorsque la viscosité  $\nu$  augmente. L'utilisation des conditions optimisées (OO2 et  $(OO2)_h$ ) conduit à une convergence pratiquement indépendante de la viscosité.

Les conditions OO2 permettent aussi d'avoir une convergence pratiquement indépendante du pas du maillage.

La convergence avec les conditions  $(OO2)_h$  se dégrade quand  $c$  est petit, lorsque la vitesse de convection devient tangente aux interfaces. De plus, les conditions  $(OO2)_h$  sont plus difficiles à calculer et dépendent du schéma de discrétisation. Pour ces raisons, nous ne considérerons, par la suite, que les conditions d'interface optimisées OO2.



## Chapitre 4

# Application de la méthode à un schéma volumes finis

Dans le cadre d'une collaboration avec Marc Brédif (MATRA BAe DYNAMICS France, département d'aérodynamique), nous appliquons la méthode à un schéma utilisé dans le code de calcul AEROLOG développé par le département d'aérodynamique de MATRA [3] (C. Borel et M. Bredif, 1992). Le schéma en temps est à deux niveaux. La phase explicite est le schéma de Lax-Wendroff à un pas et la phase implicite est une phase de lissage des résidus. La discrétisation en espace est de type volumes finis. Nous présentons la technique de discrétisation des conditions d'interface pour un découpage sans recouvrement et dans le cadre de ce schéma. La même méthodologie peut être effectuée dans le cas d'une discrétisation de type éléments finis. D'après les conclusions du chapitre précédent, la détermination des conditions d'interface optimisées est effectuée à partir du problème continu en espace (conditions d'interface OO2).

### 4.1 Discrétisation en temps

Le schéma en temps est implicite à deux phases. La phase explicite provient du schéma de Lax-Wendroff, et la phase implicite repose sur une technique de lissage des résidus.

**Schéma de Lax-Wendroff explicite dans le cas de la convection pure**

On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.4.1})$$

Soit  $u^n$  une approximation de  $u$  à l'instant  $n\Delta t$ . Le schéma de Lax-Wendroff est basé sur une représentation de  $\frac{\partial u}{\partial t}$  au second ordre provenant d'un développement en série de Taylor :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

C'est-à-dire, en utilisant (II.4.1) :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) u^n$$

Ainsi le schéma de Lax-Wendroff explicite s'écrit :

$$\frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) = - \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) u^n + \frac{\Delta t}{2} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) u^n$$

Pour plus de détails sur ce schéma, on peut se référer par exemple à [16] (C.A.J. Fletcher, 1991). Décrivons maintenant le schéma utilisé pour la résolution de l'équation de convection-diffusion.

**Schéma explicite pour l'équation de convection-diffusion**

L'équation de convection-diffusion instationnaire s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \Delta u = 0$$

La phase explicite, provenant du schéma de Lax-Wendroff pour le terme convectif, est :

$$\frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) = - \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) u^n + \frac{\Delta t}{2} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) u^n + \nu \Delta u^n$$

### Schéma implicite

On implícite ce schéma de la manière suivante : on introduit des paramètres implicites  $\beta_1$  et  $\beta_2$  et on remplace

$$\begin{aligned} u^n & \text{ par } u^n + \beta_1(u^{n+1} - u^n) & \text{ dans le terme du premier ordre} \\ u^n & \text{ par } u^n + \beta_2(u^{n+1} - u^n) & \text{ dans les termes du second ordre} \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Delta t} + \beta_1 \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\beta_2}{2} \Delta t \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \beta_2 \nu \Delta \right] (u^{n+1} - u^n) \\ & = \left[ - \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \Delta t \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) + \nu \Delta \right] (u^n) \end{aligned}$$

Comme on s'intéresse surtout à la solution stationnaire, on souhaite prendre de grands pas de temps. On introduit alors le nombre de Courant  $CFL$  (pas de temps adimensionné), dont la définition, liée au critère de stabilité, sera donnée au paragraphe suivant. Alors, dans le schéma, on divise les termes du second ordre dépendant du temps par le  $CFL$  afin d'avoir une solution indépendante du pas de temps. Le schéma s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Delta t} + \beta_1 \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \beta_2 \nu \Delta \right] (u^{n+1} - u^n) \\ & = \left[ - \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) + \nu \Delta \right] (u^n) \end{aligned}$$

Dans la suite on ne considérera que le cas où  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . On introduit l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\Delta t} + \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) - \nu \Delta \quad (\text{II.4.2})$$

On suppose que les conditions aux limites sur la frontière du domaine de calcul  $\Omega$  sont de type Dirichlet (frontière  $\Gamma_D$ ) où de type Neumann (frontière  $\Gamma_N$ ). Dans ce cas, à chaque itération en temps, on doit résoudre un problème du type :

$$\mathcal{L}(u) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.4.3})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (\text{II.4.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (\text{II.4.5})$$



où  $u = u^{n+1} - u^n$ ,  $f = [-(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y})(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) + \nu \Delta](u^n)$ , et  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\Omega$ .

**Remarque 4.1.** Nous avons choisi une écriture sous forme incrémentale. Le problème (II.4.3)-(II.4.5) peut également s'écrire sous la forme simple :

$$\mathcal{L}(v) = \frac{u^n}{\Delta t} \text{ dans } \Omega \quad (\text{II.4.6})$$

$$v = g_1 \text{ sur } \Gamma_D \quad (\text{II.4.7})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \text{ sur } \Gamma_N \quad (\text{II.4.8})$$

où  $v = u^{n+1}$ , et  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions données.

**Remarque 4.2.** En pratique, comme on s'intéresse à la solution stationnaire, on a choisi une technique de pas de temps local (le pas de temps  $\Delta t$  varie localement tel que le nombre  $CFL$  soit constant en tout point du maillage) de manière à accélérer la convergence de l'algorithme.

Le problème (II.4.3)-(II.4.5) est discrétisé en espace par une méthode de volumes finis.

## 4.2 Discrétisation du domaine de calcul

Le domaine de calcul est discrétisé suivant un maillage structuré, c'est-à-dire utilisant des mailles quadrangulaires en 2D. Ceci permet de simplifier la mise en œuvre, essentiellement dans la gestion des nœuds du maillage repérés par leur indice  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, i_{max}$ ,  $j = 1, \dots, j_{max}$ , où  $i_{max}$  est le nombre de points suivant  $x$ , et  $j_{max}$  est le nombre de points suivant  $y$ .

## 4.3 Discrétisation en espace : méthode de volumes finis

L'approximation de la solution  $u$  du problème (II.4.3)-(II.4.5) est obtenue à l'aide d'une méthode de volumes finis proposée dans [3] (C. Borel et M. Bredif, 1992). Cette méthode consiste à utiliser une représentation bilinéaire de  $u$  sur chaque cellule du maillage ( $u \in \mathcal{Q}_1$ ). Le schéma est de type "cell-vertex" c'est-à-dire que la variable  $u$  est calculée aux nœuds du maillage.

Le schéma en un nœud d'indice  $(i, j)$  s'obtient en intégrant l'équation sur une cellule décalée  $C$  entourant le nœud  $(i, j)$ , les sommets de  $C$  étant les barycentres des cellules  $K_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, 4$  (voir figure 4.1) :

$$\int_C \mathcal{L}(u) = \int_C f$$

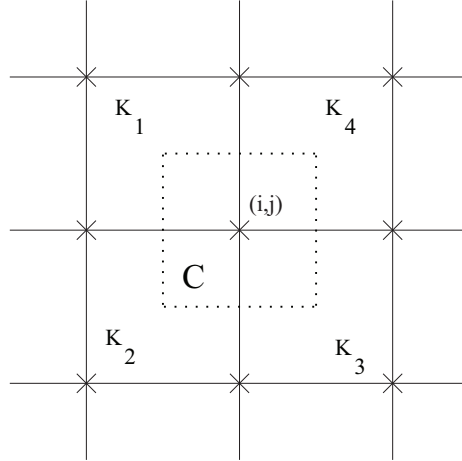


FIG. 4.1: Intégration sur une cellule décalée  $C$

Nous supposons, dans un premier temps, que le champ de vitesse de convection  $\mathbf{a} = (a, b)$  est constant.

#### Calcul du terme d'ordre 0

L'intégrale du terme d'ordre 0 est évaluée par :

$$\int_C \frac{u}{\Delta t} \approx \frac{u_{i,j}}{4} \sum_{\ell=1,4} \frac{\text{Vol}(K_\ell)}{\Delta t}$$

Discrétisation de l'opérateur d'ordre 1

Le gradient  $\nabla u$  est représenté par une constante dans chaque cellule  $K_\ell$ . Ainsi l'intégrale sur la cellule décalée  $C$  du terme d'ordre 1 est évaluée par :

$$\int_C (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) u \approx \frac{1}{4} \sum_{\ell=1,4} \int_{K_\ell} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) u$$

et

$$\int_{K_\ell} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) u = \int_{\partial K_\ell} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) u = a \int_{\partial K_\ell} u n_x + b \int_{\partial K_\ell} u n_y$$

La fonction  $u$  étant supposée bilinéaire dans  $K_\ell$ , elle est linéaire sur chaque segment de  $\partial K_\ell$ . On utilise alors la formule du point milieu pour évaluer les intégrales sur chaque segment de  $\partial K_\ell$ . Par exemple (voir figure 4.2) :

$$\int_{AB} u n_x \approx \frac{u(A) + u(B)}{2} \int_{AB} n_x$$

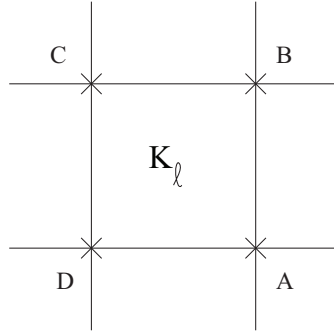


FIG. 4.2: Intégration sur le bord d'une cellule  $K_\ell$

On obtient alors pour les dérivées spatiales d'ordre 1, dans le cas d'un maillage cartésien à pas constant  $\Delta x$  en  $x$  et  $\Delta y$  en  $y$  :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{1}{8\Delta x} \{ (u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}) + 2(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}) \} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{1}{8\Delta y} \{ (u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) + 2(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) \} \end{aligned}$$

La molécule de l'opérateur discret  $\frac{\partial}{\partial x}$  est représentée sur la figure 4.3.

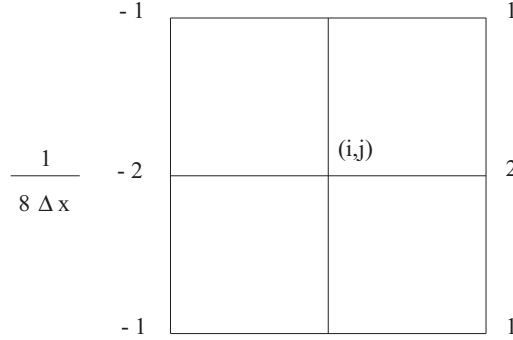


FIG. 4.3: Molécule de l'opérateur d'ordre 1:  $\frac{\partial}{\partial x}$

### Discrétisation des opérateurs d'ordre 2

Pour le terme de stabilisation au second ordre, on va utiliser le calcul du terme du premier ordre :

$$\begin{aligned} \int_C (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y})(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y})u &= \int_{\partial C} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \sum_{\ell=1,4} \int_{\partial C \cap K_\ell} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \end{aligned}$$

Le gradient  $\nabla u$  étant représenté par une constante dans  $K_\ell$ , le terme du premier ordre est représenté dans  $K_\ell$  par :

$$(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})|_{K_\ell} \approx \frac{\int_{K_\ell} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})}{|K_\ell|} = \frac{\int_{\partial K_\ell} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})u}{|K_\ell|}$$

Le terme  $\int_{\partial K_\ell} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})u$  a déjà été calculé lors du calcul du terme du premier ordre. On obtient ainsi :

$$\int_C (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y})(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y})u \approx \sum_{\ell=1,4} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})|_{K_\ell} (a \int_{\partial C \cap K_\ell} n_x + b \int_{\partial C \cap K_\ell} n_y)$$

Le calcul du laplacien de  $u$  s'effectue de la même façon :

$$\begin{aligned} \int_C \Delta u &= \int_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \\ &= \sum_{\ell=1,4} \int_{\partial C \cap K_\ell} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \\ &\approx \sum_{\ell=1,4} \frac{\int_{\partial K_\ell} u n_x}{|K_\ell|} \int_{\partial C \cap K_\ell} n_x + \frac{\int_{\partial K_\ell} u n_y}{|K_\ell|} \int_{\partial C \cap K_\ell} n_y \end{aligned}$$

Dans le cas d'un maillage cartésien à pas constant  $\Delta x$  en  $x$  et  $\Delta y$  en  $y$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{1}{4\Delta x^2} (u_{i-1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} + 2u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + 2u_{i+1,j} \\ &\quad + u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{1}{4\Delta y^2} (u_{i-1,j-1} + 2u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i-1,j} - 4u_{i,j} - 2u_{i+1,j} \\ &\quad + u_{i-1,j+1} + 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \end{aligned}$$

La molécule de l'opérateur discret de dérivée seconde est de 9 points. Elle est représentée pour l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  sur la figure 4.4.

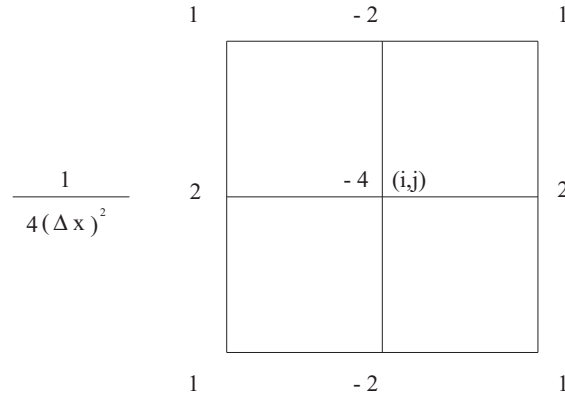


FIG. 4.4: Molécule de l'opérateur d'ordre 2:  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

**Remarque 4.3.** *Le terme du second ordre*

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u$$

peut être interprété comme un terme de décentrement en espace. En effet, plaçons nous, pour simplifier, dans un cadre unidimensionnel et considérons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

Nous avons  $CFL = \frac{|a|\Delta t}{\Delta x}$ . Le schéma en temps s'écrit :

$$\left[ \frac{1}{\Delta t} + a \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \Delta x |a| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u^{n+1} = \frac{u^n}{\Delta t}$$

La discrétisation volumes finis en un point  $i$  s'obtient en intégrant l'équation sur une cellule décalée  $C$  entourant le point  $i$  (voir figure 4.5) :

- terme d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \int_C a \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} \int_{K_\ell} a \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\approx \frac{a}{2} (u_{i+1} - u_{i-1}) \end{aligned}$$

- terme d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \int_C \left( -\frac{1}{2} \Delta x |a| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= -\frac{1}{2} \Delta x |a| \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\approx -\frac{1}{2} \Delta x |a| \left( \frac{\int_{K_2} \frac{\partial u}{\partial x}}{|K_2|} - \frac{\int_{K_1} \frac{\partial u}{\partial x}}{|K_1|} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \Delta x |a| \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x} = -\frac{|a|}{2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\left( a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \Delta x |a| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \approx \frac{a}{2} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{|a|}{2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

Ainsi, si  $a \geq 0$  (resp.  $a \leq 0$ ) le terme de droite devient  $a(u_i - u_{i-1})$  (resp.  $a(u_{i+1} - u_i)$ ) ce qui revient, en divisant par  $\Delta x$ , à discrétiser le terme de convection  $a \frac{\partial u}{\partial x}$  par des différences finies décentrées (suivant le signe de  $a$ ).

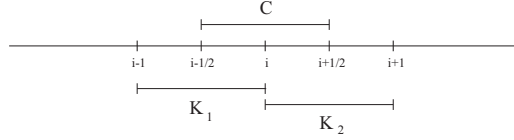


FIG. 4.5: Intégration sur une cellule décalée  $C$

**Remarque 4.4.** Dans le cas où le champ de vitesse de convection  $\mathbf{a} = (a, b)$  est variable, celui-ci est approché dans une cellule  $K_\ell$  (ayant ici pour sommets les nœuds  $(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)$ ) par une constante :

$$a|_{K_\ell} = \frac{1}{4}(a(i, j) + a(i + 1, j) + a(i, j + 1) + a(i + 1, j + 1))$$

$$b|_{K_\ell} = \frac{1}{4}(b(i, j) + b(i + 1, j) + b(i, j + 1) + b(i + 1, j + 1))$$

Ainsi le terme du premier ordre est calculé de la même façon que précédemment. Le terme de stabilisation du second ordre est remplacé par :

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( \frac{\partial}{\partial x}(a \cdot) + \frac{\partial}{\partial y}(b \cdot) \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u$$

et se calcule alors comme dans le cas où  $a$  et  $b$  sont constants.

### 4.3.1 Stabilité du schéma

On se place dans le cas d'un champ de vitesse de convection  $\mathbf{a} = (a, b)$  constant et d'un maillage cartésien à pas constant  $\Delta x$  en  $x$  et  $\Delta y$  en  $y$ .

#### Schéma Explicite

Un critère de stabilité, issu de l'analyse de Fourier (M.Bredif, à paraître) peut être obtenu pour le schéma explicite : le schéma est stable si

$$\left( \frac{\Delta t}{\Delta t_C} \right)^2 + \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_D} \right) \leq 1 \tag{II.4.9}$$

avec

$$\Delta t_C = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{\Delta x^2} + \frac{b^2}{\Delta y^2}}} \quad (\text{pas de temps caractéristique de la convection})$$

$$\Delta t_D = \frac{\min(\Delta x^2, \Delta y^2)}{2\nu} \quad (\text{pas de temps caractéristique de la diffusion})$$

Si on introduit le nombre de Courant  $CFL$  défini par :

$$CFL = \Delta t \left( \frac{\nu}{\min(\Delta x^2, \Delta y^2)} + \sqrt{\left( \frac{\nu}{\min(\Delta x^2, \Delta y^2)} \right)^2 + \frac{a^2}{\Delta x^2} + \frac{b^2}{\Delta y^2}} \right)$$

alors le critère de stabilité (II.4.9) équivaut à :

$$CFL \leq 1$$

### Schéma Implicite

Le critère de stabilité du schéma implicite s'écrit (M.Bredif, à paraître) :

- le schéma est inconditionnellement stable si  $\beta_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $\beta_2 \geq \frac{1}{2}$
- le schéma est stable si  $\beta_1 \geq \frac{1}{2}$ ,  $\beta_2 \leq \frac{1}{2}$ , et  $\left(\frac{\Delta t}{\Delta t_C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_D}\right) \leq \frac{1}{1-2\beta_2}$

**Remarque 4.5.** *L'analyse de Fourier montre qu'il existe un mode de Fourier qui n'est pas amorti. Pour amortir ce mode (ce qui permet d'éviter les oscillations de la solution) on rajoute dans le schéma le terme*

$$\frac{CFL}{\Delta t} (\Delta x \Delta y)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (\text{II.4.10})$$

(cas d'un maillage cartésien à pas constant  $\Delta x$  en  $x$  et  $\Delta y$  en  $y$ ). Ce terme étant petit devant les autres termes du schéma, on n'en tient pas compte pour la discrétisation des conditions aux limites (section 4.3.2) et des conditions d'interface (sections 4.4.1 et 4.4.2).



### 4.3.2 Discrétisation d'une condition aux limites de type Neumann

Si l'on impose une condition de Neumann (II.4.5) sur une partie  $\Gamma_N$  du bord du domaine, cette condition est discrétisée de façon à être consistante avec le schéma de discrétisation aux points intérieurs du domaine. Pour cela, la discrétisation de cette condition en un nœud d'indice  $(i, j)$  de  $\Gamma_N$  s'obtient en intégrant l'équation sur une cellule décalée  $C$  entourant le nœud  $(i, j)$ , les sommets de  $C$  étant les barycentres des cellules  $K_\ell$ ,  $\ell = 1, 2$  (voir figure 4.6) :

$$\int_C \mathcal{L}(u) = \int_C f$$

On note  $\Gamma$  le bord de  $\partial C$  situé sur  $\Gamma_N$ .

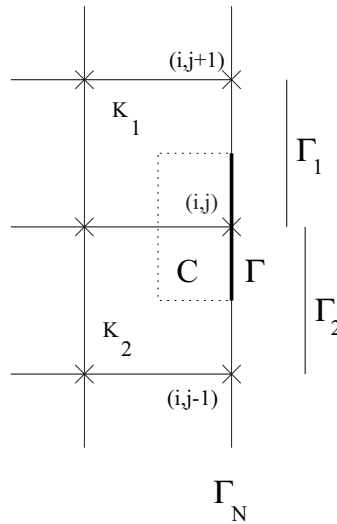


FIG. 4.6: Intégration sur une cellule décalée  $C$

#### Discrétisation de l'opérateur d'ordre 1

$$\int_C \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u \approx \frac{1}{4} \sum_{\ell=1,2} \int_{K_\ell} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u$$

Le calcul des intégrales sur  $K_\ell$  est effectué comme auparavant. La condition de Neumann intervient dans le calcul des termes du second ordre :

## Discrétisation des opérateurs d'ordre 2

$$\begin{aligned} \int_C (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y})(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y})u &= \int_{\partial C} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \int_{\partial C \setminus \Gamma} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) + \int_{\Gamma} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \end{aligned}$$

La première intégrale du membre de droite est calculée comme avant. La condition de Neumann est utilisée dans le calcul de la seconde intégrale. Remarquons d'abord qu'un calcul simple montre que sur un segment  $\Gamma$  donné (non nécessairement parallèle à l'axe des  $x$  ou des  $y$ ), si on note  $\mathbf{n}$  la normale unitaire à ce segment, et  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur tangent, nous avons la relation suivante :

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (\text{II.4.11})$$

Alors,

$$\int_{\Gamma} (a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}}$$

La condition de Neumann entraîne que la première intégrale du membre de droite est nulle. La seconde intégrale est calculée en utilisant la même technique que dans le cas 2D, ici en 1D. Pour cela, on introduit  $\Gamma_\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ , le bord de la cellule  $K_\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ , situé sur  $\Gamma_N$  (figure 4.6). Alors,

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} \approx \frac{1}{2} \sum_{\ell=1,2} \int_{\Gamma_\ell} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}}$$

Par exemple, dans le cas des indices des nœuds de la figure 4.6, nous avons :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} \approx \frac{1}{2} \{ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_1} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_2} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \}$$

De même, pour le laplacien nous avons :

$$\begin{aligned} \int_C \Delta u &= \int_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \\ &= \int_{\partial C \setminus \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned}$$

La première intégrale du membre de droite est calculée comme auparavant, et la condition de Neumann entraîne que la seconde intégrale est nulle.

## 4.4 Résolution par la méthode OO2

Le problème (II.4.3)-(II.4.5) est résolu par la méthode OO2 (voir partie II, chapitre 2). Une fois le domaine de calcul découpé en sous-domaines, cette méthode consiste à résoudre un problème d'interface de la forme

$$D\mu = b \quad (\text{II.4.12})$$

où l'inconnue  $\mu$  représente des quantités de la forme  $\mathcal{B}_i(u)$  aux interfaces des sous-domaines, avec  $\mathcal{B}_i$  l'opérateur d'interface OO2. Cet opérateur s'obtient comme à la partie I, chapitre 3, en remplaçant  $\mathcal{L}$  par (II.4.2) :

### Opérateurs d'interface OO2

L'opérateur d'interface OO2 s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2} \quad (\text{II.4.13})$$

où  $c_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i - \sqrt{(1 + \frac{2}{CFL})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + \frac{4\nu}{\Delta t}}}{\frac{\Delta t}{CFL}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 2\nu}$  et les coefficients  $c_2 = c_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$  et  $c_3 = c_3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)$  sont obtenus en minimisant le taux de convergence de l'algorithme de Schwarz dans cas de 2 sous-domaines, et dans un cadre continu en espace :

*Algorithme de Schwarz (cas continu) :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_1^{p+1}) &= f \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1(u_1^{p+1}) &= \mathcal{B}_1(u_2^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ u_1^{p+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \Gamma_D \\ \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \Gamma_N \end{aligned} \quad (\text{II.4.14})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_2^{p+1}) &= f \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2(u_2^{p+1}) &= \mathcal{B}_2(u_1^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ u_2^{p+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \Gamma_D \\ \frac{\partial u_2^{p+1}}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \Gamma_N \end{aligned} \quad (\text{II.4.15})$$

### Méthode OO2

Dans la méthode OO2, le problème d'interface (II.4.12) provient d'une réécriture de l'algorithme de Schwarz appliqué au problème discret (voir partie II, chapitre 2). Nous rappelons cet l'algorithme dans le cas de 2 sous-domaines disjoints  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , séparés par une interface  $\Gamma_{12}$ . On note  $B^i$ ,  $i = 1, 2$ , les matrices provenant de la discrétisation des termes de la forme  $-c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial \tau_i} - c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_i^2}$  intervenant dans les conditions d'interface (II.4.14) et (II.4.15), et

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{II}^1 & A_{IB}^1 \\ A_{BI}^1 & A_{BB}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{pmatrix} A_{II}^2 & A_{IB}^2 \\ A_{BI}^2 & A_{BB}^2 \end{pmatrix}$$

les matrices locales dans chacun des sous-domaines, correspondant à la discrétisation du problème de convection-diffusion avec des conditions de Neumann sur l'interface. L'algorithme de Schwarz en discret s'écrit :

*Algorithme de Schwarz (cas discret) :*

$$A_{II}^i u_I^{i(p+1)} + A_{IB}^i u_B^{i(p+1)} = f_I^i, \quad i = 1, 2$$

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^1 & A_{BB}^1 - B^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{1(p+1)} \\ u_B^{1(p+1)} \end{pmatrix} = f_B^1 + f_B^2 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^2 & -A_{BB}^2 - B^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{2(p)} \\ u_B^{2(p)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4.16})$$

$$\begin{pmatrix} A_{BI}^2 & A_{BB}^2 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{2(p+1)} \\ u_B^{2(p+1)} \end{pmatrix} = f_B^2 + f_B^1 + \begin{pmatrix} -A_{BI}^1 & -A_{BB}^1 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{1(p)} \\ u_B^{1(p)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4.17})$$

L'objet de cette partie est de présenter la technique de discrétisation des conditions d'interface OO2, dans le cadre d'un découpage sans recouvrement, c'est-à-dire la technique qui permet de passer de la condition d'interface (II.4.14) à la condition d'interface (II.4.16).

### 4.4.1 Discrétisation des conditions d'interface

Dans cette section, nous explicitons le calcul qui permet de passer de la condition d'interface (II.4.14) à la condition d'interface (II.4.16) (on obtient la condition (II.4.17) à partir de la condition (II.4.15) de la même façon). La discrétisation des conditions d'interface est effectuée de façon à être consistante avec la discrétisation aux points intérieurs des sous-domaines. Une cellule décalée  $C$  entourant un nœud  $(i, j)$  de l'interface  $\Gamma_{12}$  peut être décomposée sous la forme  $\bar{C} = \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$ , avec  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ .

On note  $\Gamma = \partial C_1 \cap \Gamma_{12} = \partial C_2 \cap \Gamma_{12}$  (voir figure 4.7). On désigne par  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure unitaire à la cellule  $C_i$  et  $\boldsymbol{\tau}_i$  le vecteur tangent unitaire.

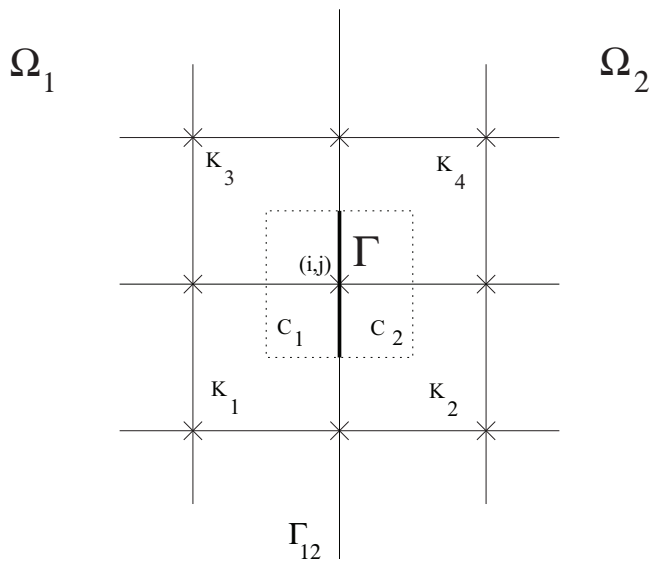


FIG. 4.7: Intégration sur les cellules décalées  $C_1$  et  $C_2$

A convergence, si  $u_i$  représente la restriction de la solution de (II.4.3)-(II.4.5) au sous-domaine  $\Omega_i$ , alors on a :

$$\int_{C_1} \mathcal{L}(u_1) + \int_{C_2} \mathcal{L}(u_2) = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$

La discrétisation de la condition d'interface (II.4.14) dans le sous-domaine  $\Omega_1$  à l'étape  $p + 1$  s'obtient de la manière suivante :

on intègre l'équation dans  $\Omega_1$  à l'étape  $p + 1$  sur la cellule décalée  $C_1$ , on intègre l'équation dans  $\Omega_2$  à l'étape  $p$  sur la cellule décalée  $C_2$ , et on somme ces deux relations :

$$\int_{C_1} \mathcal{L}(u_1^{p+1}) + \int_{C_2} \mathcal{L}(u_2^p) = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f \quad (\text{II.4.18})$$

La condition d'interface (II.4.14) est utilisée dans le calcul des termes du second ordre intervenant dans (II.4.18). Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \mathcal{L}(u) &= \int_{C_i} \frac{u}{\Delta t} + \int_{C_i} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u \\ &\quad - \int_{C_i} \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u - \nu \int_{C_i} \Delta u \end{aligned}$$

Les termes du second ordre sont calculés par :

$$\begin{aligned} &\int_{C_i} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u \\ &= \int_{\partial C_i} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) \\ &= \int_{\partial C_i \setminus \Gamma} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) + \int_{\Gamma} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) \\ &= \int_{\partial C_i \setminus \Gamma} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) + \int_{\Gamma} \left( (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} \right) \end{aligned}$$

(dans la dernière égalité on a utilisé (II.4.11)).

On a aussi :

$$\int_{C_i} \Delta u = \int_{\partial C_i \setminus \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i}$$

En remplaçant ces expressions dans la relation (II.4.18), celle-ci devient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_1} \frac{u_1^{p+1}}{\Delta t} + \int_{C_2} \frac{u_2^p}{\Delta t} + \int_{C_1} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) u_1^{p+1} + \int_{C_2} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) u_2^p \\
 & - \int_{\partial C_1 \setminus \Gamma} [\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) u_1^{p+1}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) + \nu \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1}] \\
 & - \int_{\partial C_2 \setminus \Gamma} [\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) u_2^p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2) + \nu \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_2}] \\
 & - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) (\frac{\partial u_1^{p+1}}{\boldsymbol{\tau}_1} - \frac{\partial u_2^p}{\boldsymbol{\tau}_1}) \\
 & - \int_{\Gamma} (\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1)^2 + \nu) (\frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_1}) \tag{II.4.19} \\
 & = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f
 \end{aligned}$$

La condition d'interface artificielle (II.4.14), que l'on veut vérifier, est utilisée pour calculer le terme (II.4.19). Elle permet de transformer les dérivées normales en dérivées tangentielles :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{B}_1(u_1^{p+1}) = \mathcal{B}_1(u_2^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\
 \Leftrightarrow & \quad \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_1} = (c_1 - c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} + c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2})(u_1^{p+1} - u_2^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le terme (II.4.19) est calculé par :

$$\int_{\Gamma} (\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1)^2 + \nu) (\frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_1}) = \int_{\Gamma} (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} + \tilde{c}_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2})(u_1^{p+1} - u_2^p)$$

où  $\tilde{c}_i = (\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1)^2 + \nu) c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Par conséquent, nous obtenons :

$$\int_{C_1} \frac{u_1^{p+1}}{\Delta t} + \int_{C_1} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u_1^{p+1} \quad (\text{II.4.20})$$

$$- \int_{\partial C_1 \setminus \Gamma} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u_1^{p+1} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) + \nu \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] \quad (\text{II.4.21})$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \frac{\partial u_1^{p+1}}{\boldsymbol{\tau}_1} \quad (\text{II.4.22})$$

$$- \int_{\Gamma} \left( \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} + \tilde{c}_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2} \right) (u_1^{p+1}) \quad (\text{II.4.23})$$

$$= \int_{C_1} f + \int_{C_2} f - \int_{C_2} \frac{u_2^p}{\Delta t} - \int_{C_2} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u_2^p \quad (\text{II.4.24})$$

$$+ \int_{\partial C_2 \setminus \Gamma} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u_2^p (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2) + \nu \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_2} \right] \quad (\text{II.4.25})$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) \frac{\partial u_2^p}{\boldsymbol{\tau}_1} \quad (\text{II.4.26})$$

$$- \int_{\Gamma} \left( \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} + \tilde{c}_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2} \right) (u_2^p) \quad (\text{II.4.27})$$

La discrétisation de cette relation conduit à la relation (II.4.16) : le terme  $\int_{C_i} f$  contribue au vecteur  $f_B^i$ . Les termes (II.4.20)-(II.4.22) (resp. (II.4.24)-(II.4.26)) contribuent au vecteur

$$\left( A_{BI}^1 \quad A_{BB}^1 \right) \begin{pmatrix} u_I^{1(p+1)} \\ u_B^{1(p+1)} \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad \left( -A_{BI}^2 \quad -A_{BB}^2 \right) \begin{pmatrix} u_I^{2(p)} \\ u_B^{2(p)} \end{pmatrix})$$

Enfin, le terme (II.4.23) (resp. (II.4.27)), provenant de la condition d'interface artificielle, contribue au vecteur  $-B^1 u_B^{1(p+1)}$  (resp.  $-B^1 u_B^{2(p)}$ ).

Nous donnons le calcul de chaque terme intervenant dans les relations (II.4.20)-(II.4.23) (le calcul des termes (II.4.21)-(II.4.27) est effectué de façon similaire). Le calcul des termes (II.4.20)-(II.4.21) s'effectue comme à la



section 4.3 :

– terme d'ordre 0 :

$$\int_{C_1} \frac{u}{\Delta t} \approx \frac{u_{i,j}}{4} \sum_{\ell=1,2} \frac{\text{Vol}(K_\ell)}{\Delta t} \quad (\text{II.4.28})$$

– terme du premier ordre :

$$\int_{C_1} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u \approx \frac{1}{4} \sum_{\ell=1,2} \int_{K_\ell} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u \approx \frac{1}{4} \sum_{\ell=1,2} \int_{\partial K_\ell} u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \quad (\text{II.4.29})$$

– terme provenant des opérateurs du second ordre :

$$\begin{aligned} \int_{\partial C_1 \setminus \Gamma} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) + \nu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \right] \\ = \sum_{\ell=1,2} \int_{(\partial C_1 \setminus \Gamma) \cap K_\ell} \left[ \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.4.30})$$

ce terme est ensuite calculé comme à la section 4.3.

Les intégrales sur la partie  $\Gamma$  de l'interface sont calculées en appliquant la même technique qu'en 2D, ici en 1D. Pour cela, on introduit  $\Gamma_1 = \partial K_1 \cap \Gamma_{12}$  et  $\Gamma_2 = \partial K_2 \cap \Gamma_{12}$  (voir figure 4.8).

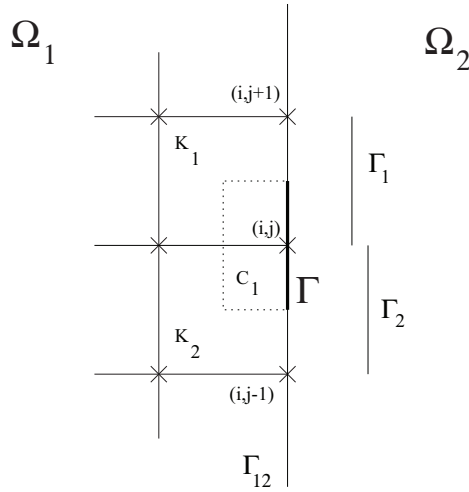


FIG. 4.8: Notations sur l'interface

Ces intégrales sont de la forme :

$$\int_{\Gamma} f u, \quad \int_{\Gamma} g \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1}, \quad \int_{\Gamma} h \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2}$$

où  $f = f(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1)$ ,  $g = g(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_1)$ , et  $h = h(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_1)$  sont des fonctions données.

**Remarque 4.6.** Comme à la remarque 4.4, dans le cas où le champ de vitesse de convection  $\mathbf{a} = (a, b)$  est variable, celui-ci est approché sur  $\Gamma_\ell$  (ayant ici pour extrémités les nœuds  $(i, j)$  et  $(i, j + 1)$ ) par une constante :

$$a|_{\Gamma_\ell} = \frac{1}{2}(a(i, j) + a(i, j + 1))$$

$$b|_{\Gamma_\ell} = \frac{1}{2}(b(i, j) + b(i, j + 1))$$

ce qui définit une valeur constante de  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sur  $\Gamma_\ell$ .

Alors, dans le cas des indices des nœuds de la figure 4.8, on a :

$$\int_{\Gamma} f u \approx u_{i,j} \int_{\Gamma} f \tag{II.4.31}$$

$$\approx u_{i,j} \left( \frac{1}{2} (f|_{\Gamma_1} |\Gamma_1| + f|_{\Gamma_2} |\Gamma_2|) \right)$$

$$\int_{\Gamma} g \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} = \frac{1}{2} \left( \int_{\Gamma_1} g \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} + \int_{\Gamma_2} g \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right) \tag{II.4.32}$$

$$\approx \frac{1}{2} (g|_{\Gamma_1} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + g|_{\Gamma_2} (u_{i,j} - u_{i,j-1}))$$

Intégrale du terme du second ordre sur l'interface : 2 possibilités

Une intégrale du type :

$$\int_{\Gamma} h \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2} \tag{II.4.33}$$

avec  $h = h(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_1)$  donné, est calculée de deux manières :

*Première possibilité*

Lorsque que le champ de convection  $\mathbf{a}$  est variable, comme à la remarque 4.4, on généralise le terme (II.4.33) par :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \left( h \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right)$$

Ce terme est alors calculé en utilisant la même technique qu'en 2D, ici en 1D :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \left( h \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right) &\approx h_{|\Gamma_1|} \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right)_{|\Gamma_1|} - h_{|\Gamma_2|} \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right)_{|\Gamma_2|} & \text{(II.4.34)} \\ &\approx h_{|\Gamma_1|} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{|\Gamma_1|} - h_{|\Gamma_2|} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{|\Gamma_2|} \end{aligned}$$

*Deuxième possibilité*

On laisse le terme sous la forme (II.4.33). Dans ce cas, il est approché par :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} h \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2} &\approx h_{i,j} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right)_{|\Gamma_1|} - \left( \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right)_{|\Gamma_2|} \right) & \text{(II.4.35)} \\ &\approx h_{i,j} \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{|\Gamma_1|} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{|\Gamma_2|} \right) \end{aligned}$$

où  $h_{i,j}$  correspond à une évaluation de  $h$  au nœud  $(i, j)$  définie par :

$$h_{i,j} = \frac{1}{2} (h_{|\Gamma_1|} + h_{|\Gamma_2|})$$

#### 4.4.2 Discrétisation des conditions aux points de croisement des sous-domaines

Nous explicitons la discrétisation des conditions en un point de croisement des sous-domaines, lorsque celui-ci est un nœud commun à 4 sous-domaines. Une cellule décalée  $C$  entourant un nœud de croisement  $(i, j)$  des 4 interfaces  $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{24}$  et  $\Gamma_{34}$  peut être décomposée sous la forme  $\bar{C} = \cup_{i=1}^4 \bar{C}_i$ , avec  $C_i \cap C_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  (voir figure 4.9). Nous allons décrire la discrétisation de la condition de raccord au nœud de croisement  $(i, j)$  pour le sous-domaine  $\Omega_1$ . Pour cela, nous notons  $\Gamma = (\partial C_1 \cap \Gamma_{12}) \cup (\partial C_1 \cap \Gamma_{13})$  (voir figure 4.9).

Nous désignons par  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure unitaire à la cellule  $C_i$  et  $\boldsymbol{\tau}_i$  le vecteur tangent unitaire.

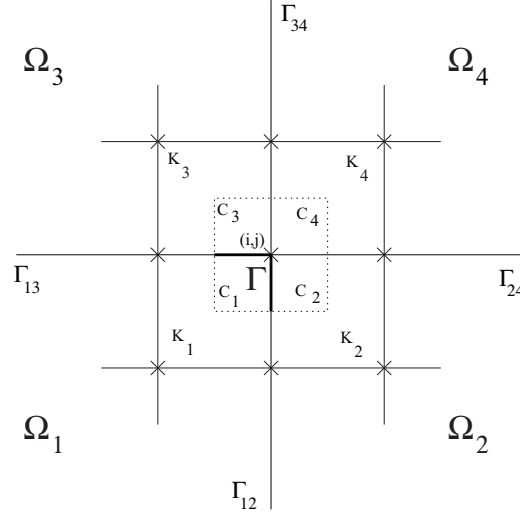


FIG. 4.9: Notations pour un découpage avec un point de croisement

A convergence, si  $u_i$  représente la restriction de la solution de (II.4.3)-(II.4.5) au sous-domaine  $\Omega_i$ , alors on a :

$$\sum_{i=1}^4 \int_{C_i} \mathcal{L}(u_i) = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} f$$

La discrétisation de la condition de raccord au nœud de croisement  $(i, j)$  pour le sous-domaine  $\Omega_1$  à l'étape  $p + 1$  s'obtient à partir de la relation suivante :

$$\int_{C_1} \mathcal{L}(u_1^{p+1}) + \int_{C_2} \mathcal{L}(u_2^p) + \int_{C_3} \mathcal{L}(u_3^p) + \int_{C_4} \mathcal{L}(u_4^{p-1}) = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} f \quad (\text{II.4.36})$$

Dans cette relation, les termes d'ordre 0 et d'ordre 1 sont calculés comme en (II.4.28) et (II.4.29), en remplaçant les sommes sur  $\ell = 1, 2$  par  $\ell = 1$ . Les conditions d'interface artificielles interviennent dans le calcul des termes du second ordre. Considérons par exemple le terme provenant des intégrales du Laplacien dans (II.4.36) :

$$-\nu \left( \int_{\partial C_1} \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} + \int_{\partial C_2} \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_2} + \int_{\partial C_3} \frac{\partial u_3^p}{\partial \mathbf{n}_3} + \int_{\partial C_4} \frac{\partial u_4^{p-1}}{\partial \mathbf{n}_4} \right)$$

On décompose chaque intégrale sur  $\partial C_\ell$ , en distinguant la partie située sur les interfaces, et celle située à l'intérieur de  $K_\ell$ . Par exemple, pour l'intégrale sur  $\partial C_1$ , nous avons :

$$\int_{\partial C_1} \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} = \int_{\partial C_1 \setminus \Gamma} \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1}$$

Le premier terme du membre de droite est calculé comme en (II.4.30), en remplaçant la somme sur  $\ell = 1, 2$  par  $\ell = 1$  (il en est de même des intégrales sur  $\partial C_2 \setminus \{(\partial C_2 \cap \Gamma_{12}) \cup (\partial C_2 \cap \Gamma_{24})\}$ ,  $\partial C_3 \setminus \{(\partial C_3 \cap \Gamma_{13}) \cup (\partial C_3 \cap \Gamma_{34})\}$ , et  $\partial C_4 \setminus \{(\partial C_4 \cap \Gamma_{24}) \cup (\partial C_4 \cap \Gamma_{34})\}$ ). Ainsi, le terme qu'il reste à calculer est celui provenant des intégrales sur les interfaces, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} -\nu & \left( \int_{\partial C_1 \cap \Gamma_{12}} \left( \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_1} \right) + \int_{\partial C_1 \cap \Gamma_{13}} \left( \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_3^p}{\partial \mathbf{n}_1} \right) \right. \\ & \left. + \int_{\partial C_2 \cap \Gamma_{24}} \left( \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial u_4^{p-1}}{\partial \mathbf{n}_2} \right) + \int_{\partial C_3 \cap \Gamma_{34}} \left( \frac{\partial u_3^p}{\partial \mathbf{n}_3} - \frac{\partial u_4^{p-1}}{\partial \mathbf{n}_3} \right) \right) \quad (\text{II.4.37}) \end{aligned}$$

Le calcul de ce terme va être effectué en utilisant les conditions d'interface OO2. La condition OO2 sur l'interface  $\Gamma_{12}$  s'écrit :

$$\mathcal{B}_1(u_1^{p+1}) = \mathcal{B}_1(u_2^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (\text{II.4.38})$$

Pour simplifier les écritures ici, on écrit l'opérateur d'interface  $\mathcal{B}_i$ , défini en (II.4.13), sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - \Lambda_i$$

avec

$$\Lambda_i = c_1 - c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} + c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2}$$

La condition (II.4.38) se réécrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_1} = \Lambda_1(u_1^{p+1}) - \Lambda_1(u_2^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12}$$

Les conditions d'interface OO2 que l'on utilise pour calculer le terme (II.4.37) sont ainsi les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_1} &= \Lambda_1(u_1^{p+1}) - \Lambda_1(u_2^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial u_3^p}{\partial \mathbf{n}_1} &= \Lambda_1(u_1^{p+1}) - \Lambda_1(u_3^p) \quad \text{sur } \Gamma_{13} \\ \frac{\partial u_2^p}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial u_4^{p-1}}{\partial \mathbf{n}_2} &= \Lambda_2(u_2^p) - \Lambda_2(u_4^{p-1}) \quad \text{sur } \Gamma_{24} \\ \frac{\partial u_3^p}{\partial \mathbf{n}_3} - \frac{\partial u_4^{p-1}}{\partial \mathbf{n}_3} &= \Lambda_3(u_3^p) - \Lambda_3(u_4^{p-1}) \quad \text{sur } \Gamma_{34}\end{aligned}$$

Ces conditions permettent de transformer les dérivées normales en dérivées tangentielles. Le terme (II.4.37) devient alors

$$- \nu \left( \int_{\partial C_1 \cap \Gamma_{12}} (\Lambda_1(u_1^{p+1}) - \Lambda_1(u_2^p)) + \int_{\partial C_1 \cap \Gamma_{13}} (\Lambda_1(u_1^{p+1}) - \Lambda_1(u_3^p)) \right) \quad (\text{II.4.39})$$

$$- \nu \left( \int_{\partial C_2 \cap \Gamma_{24}} (\Lambda_2(u_2^p) - \Lambda_2(u_4^{p-1})) + \int_{\partial C_3 \cap \Gamma_{34}} (\Lambda_3(u_3^p) - \Lambda_3(u_4^{p-1})) \right) \quad (\text{II.4.40})$$

Les termes intervenant dans le terme (II.4.40) sont nuls à convergence, et on les néglige ici pour écrire la condition au point de croisement  $(i, j)$ , ceci afin de faciliter l'implémentation. Il reste à calculer le terme (II.4.39). Dans ce terme, les intégrales des termes d'ordre 0 et d'ordre 1 sont approchées en utilisant la même méthodologie qu'en (II.4.31) et (II.4.32). Les intégrales posant problème sont celles des termes du second ordre, c'est-à-dire :

$$- \nu \left( \int_{\Gamma} c_3 \frac{\partial^2 u_1^{p+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2} \right) \quad (\text{II.4.41})$$

$$+ \nu \left( \int_{\partial C_1 \cap \Gamma_{12}} c_3 \frac{\partial^2 u_2^p}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2} + \int_{\partial C_1 \cap \Gamma_{13}} c_3 \frac{\partial^2 u_3^p}{\partial \boldsymbol{\tau}_1^2} \right) \quad (\text{II.4.42})$$

Nous allons considérer alors deux possibilités. La première est que l'on ne tient pas compte de ces termes d'ordre 2 au point de croisement (cas des opérateurs  $(\text{OO2})_1$  et  $(\text{OO2})_2$  définis ci-dessous). La seconde possibilité (opérateur  $(\text{OO2})_3$  défini ci-dessous) consiste à introduire les notations  $\Gamma_1 = \partial C_1 \cap \Gamma_{13}$  et  $\Gamma_2 = \partial C_1 \cap \Gamma_{12}$ , et à remplacer le terme (II.4.41) par

$$- \nu (c_3|_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right)|_{\Gamma_1} - c_3|_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial u_1^{p+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}_1} \right)|_{\Gamma_2}) \quad (\text{II.4.43})$$

et le terme (II.4.42) par :

$$\nu(c_{3|\Gamma_1}(\frac{\partial u_3^p}{\partial \tau_1})|_{\Gamma_1} - c_{3|\Gamma_2}(\frac{\partial u_2^p}{\partial \tau_1})|_{\Gamma_2}) \quad (\text{II.4.44})$$

Les termes de la forme  $(\frac{\partial u}{\partial \tau_1})|_{\Gamma_i}$ ,  $i = 1, 2$  sont alors évalués de la même façon qu'au paragraphe 4.4.1. Nous définissons ainsi trois opérateurs d'interface discrets de type OO2 :

**Définition 4.1 (Opérateur (OO2)<sub>1</sub>).** – en un point de l'interface qui n'est pas un point de croisement, l'opérateur (OO2)<sub>1</sub> provient de la discrétisation de l'opérateur OO2 écrit sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \tau_i} - \frac{\partial}{\partial \tau_i} (c_3 \frac{\partial}{\partial \tau_i})$$

c'est-à-dire que le terme du second ordre sur l'interface issu de cet opérateur est discrétisé suivant (II.4.34).

– en un point de croisement des sous-domaines l'opérateur (OO2)<sub>1</sub> provient de la discrétisation de l'opérateur OO2, sans le terme d'ordre 2 :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \tau_i}$$

**Définition 4.2 (Opérateur (OO2)<sub>2</sub>).** – en un point de l'interface qui n'est pas un point de croisement, l'opérateur (OO2)<sub>2</sub> provient de la discrétisation de l'opérateur OO2 écrit sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \tau_i} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \tau_i^2} \quad (\text{II.4.45})$$

c'est-à-dire que le terme du second ordre sur l'interface issu de cet opérateur est discrétisé suivant (II.4.35).

– en un point de croisement des sous-domaines l'opérateur (OO2)<sub>2</sub> provient de la discrétisation de l'opérateur OO2, sans le terme d'ordre 2 :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \tau_i}$$

**Définition 4.3 (Opérateur  $(OO2)_3$ ).** – en un point de l'interface qui n'est pas un point de croisement, l'opérateur  $(OO2)_3$  provient de la discrétisation de l'opérateur  $OO2$  écrit sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} (c_3 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i})$$

c'est-à-dire que le terme du second ordre sur l'interface issu de cet opérateur est discrétisé suivant (II.4.34).

– en un point de croisement des sous-domaines l'opérateur  $(OO2)_3$  provient de la discrétisation de l'opérateur  $OO2$  écrit sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} (c_3 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i})$$

et le terme de dérivée tangentielle seconde issu de cet opérateur est discrétisé en remplaçant le terme (II.4.41) par (II.4.43) et le terme (II.4.42) par (II.4.44). On rajoute ainsi au coin une condition sur le saut des dérivées tangentes (voir l'étude sur le problème continu à la partie IV).

**Remarque 4.7.** La technique de discrétisation des conditions d'interface que nous avons présenté ci-dessus est la même pour les conditions de Taylor d'ordre 0 ou 2 (voir partie I, section 2.4, en remplaçant  $\mathcal{L}$  par (II.4.3)). Dans le cas des conditions de Taylor d'ordre 2, on définit également trois opérateurs discrets (*Taylor ordre 2*)<sub>1</sub>, (*Taylor ordre 2*)<sub>2</sub> et (*Taylor ordre 2*)<sub>3</sub>, de la même façon que pour l'opérateur  $OO2$ .

## 4.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques obtenus avec le code multidomaine volumes finis en 2D. Les simulations numériques sont effectuées sur le Paragon Intel de l'ONERA. Les validations sont effectuées, lorsque c'est possible, par comparaison avec la solution obtenue par le code monodomaine AEROLOG de MATRA. Lorsqu'il n'y a pas assez de place mémoire pour tester le code monodomaine, on calcule une solution de référence à l'aide du code multidomaine. Dans tous les cas tests, nous effectuons une seule itération en temps. Ainsi, nous résolvons le problème (II.4.3)-(II.4.5)



avec  $u = u^1 - u^0$ , où  $u^0$  est un vecteur initial donné (nul dans le domaine et vérifiant les conditions aux limites non homogènes sur le bord du domaine de calcul). Pour permettre au lecteur de mieux voir les conditions aux limites utilisées, nous écrirons, pour chaque cas test, le problème sous sa forme simple (II.4.6)-(II.4.8). Le terme (II.4.10) est rajouté dans le schéma, afin d'enlever les oscillations de la solution. Dans la plupart des cas, nous prenons un  $CFL$  très grand afin que la solution soit proche de la solution stationnaire. La résolution du problème multi-domaine se fait par l'algorithme BICG-STAB sur le problème condensé à l'interface. La résolution de ce problème nécessite à chaque itération la résolution de problèmes locaux qui sont résolus par une méthode directe (méthode de Gauss).

### 4.5.1 Maillage cartésien à pas constant

Dans cette partie la méthode est testée sur des cas similaires à ceux effectués dans le cas du schéma aux différences finies décentré (partie II, chapitre 3). Le domaine de calcul est le carré unité. En  $y = 0$  et en  $x = 0$ , on impose une condition de Dirichlet. En  $y = 1$  et en  $x = 1$  des conditions de type sortie sont imposées, c'est-à-dire des conditions de Neumann (voir figure 4.10). On cherche ainsi à résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

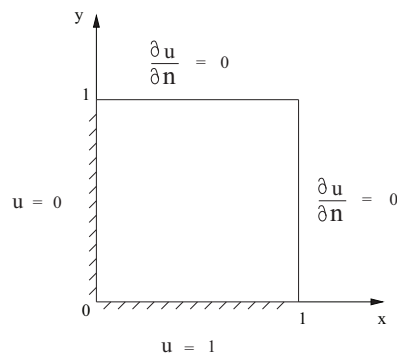


FIG. 4.10: Domaine de calcul et conditions aux limites

On considère un maillage cartésien à pas constant  $h = \frac{1}{i_{max}} = \frac{1}{j_{max}}$  où  $i_{max}$  est le nombre de points dans la direction des  $x$  et  $j_{max}$  le nombre de points dans la direction des  $y$  (ici  $i_{max} = j_{max}$ ). Le carré unité est découpé en  $K$  sous-domaines, sans recouvrement. Nous vérifions dans un premier temps que le code multidomaine donne les mêmes résultats (aux erreurs d'arrondi près) que le code monodomaine AEROLOG. Ensuite, pour les simulations numériques effectuées, on calcule une solution de référence  $u_{ref}$  en exécutant le code multidomaine avec un résidu inférieur à 1.d-9, défini par :

$$Residu = \max \left( \frac{\|D\mu^k - b\|_2}{\|b\|_2}, \frac{\|\mu^k - \mu^{k-1}\|_2}{\sqrt{\|\mu^{k-1}\|_2^2 + \|\mu^k\|_2^2}} \right)$$

On désigne par “*Erreur*” la norme  $L^\infty$  de la différence entre la solution  $u$  que l'on calcule avec le code multidomaine et cette solution de référence :

$$Erreur = \max_{1 \leq i \leq i_{max}, 1 \leq j \leq j_{max}} (u(i, j) - u_{ref}(i, j))$$

Dans toutes les simulations, le critère d'arrêt est  $Erreur < 1.d - 6$ .

On considère deux types de champ de vitesse de convection  $\mathbf{a} = (a, b)$  dans l'opérateur  $\mathcal{L}$  : l'un de cisaillement ( $a = y, b = 0$ ) et l'autre tournant ( $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ).

### Comparaison entre la solution monodomaine et la solution multi-domaine

La solution monodomaine est celle fournie par le code de calcul monodomaine, et la solution multidomaine est obtenue en exécutant le code multidomaine avec un résidu inférieur à 1.d-9. Les tableaux 4.1 et 4.2 montrent que la solution est bien représentée sur l'ensemble du domaine avec l'approche multi-domaine. Dans le cas du tableau 4.2, on remarque que les conditions d'interface OO2 conduisent à une meilleure approximation de la solution discrète que les conditions d'interface de Taylor d'ordre 0, pour le même critère d'arrêt sur le résidu (nous n'avons pas donné le résultat avec les conditions d'interface de Taylor d'ordre 2 car l'algorithme ne converge pas dans ce cas).

	nombre d'itérations	Maximum de l'Erreur sur l'ensemble des sous-domaines
OO2	11	7.18473724958E-010
Taylor ordre 2	104	1.03204211843E-009
Taylor ordre 0	113	3.30281557658E-009

Tableau 4.1: Maximum de l'Erreur sur l'ensemble des sous-domaines.

$8 \times 1$  sous-domaines, Critère d'arrêt : Residu  $< 1.d - 9$   
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{161}$

	nombre d'itérations	Maximum de l'Erreur sur l'ensemble des sous-domaines
OO2	48	2.21347751239E-009
Taylor ordre 0	283	3.99415147511E-007

Tableau 4.2: Maximum de l'erreur sur l'ensemble des sous-domaines.

$4 \times 8$  sous-domaines, Critère d'arrêt : Residu  $< 1.d - 9$   
 $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$   
 $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{161}$

Dans la suite, la solution de référence est toujours calculée avec la méthode OO2, et on regarde l'erreur par rapport à cette solution de référence.

### Convergence en fonction des opérateurs d'interface $(OO2)_1$ , $(OO2)_2$ et $(OO2)_3$

Dans cette section nous regardons l'influence de la discrétisation des conditions d'interface sur la convergence de la méthode. Pour cela nous considérons les opérateurs d'interface  $(OO2)_1$ ,  $(OO2)_2$ , et  $(OO2)_3$  (voir définitions 4.1, 4.2, et 4.3). On définit de la même façon les opérateurs (Taylor ordre 2)<sub>1</sub>, (Taylor ordre 2)<sub>2</sub>, et (Taylor ordre 2)<sub>3</sub>.

Sur les figures 4.11 et 4.12, nous avons considéré un découpage en bandes. Dans ce cas, les opérateurs  $(OO2)_1$  et  $(OO2)_3$  (resp. (Taylor ordre 2)<sub>1</sub> et (Taylor ordre 2)<sub>3</sub>) sont les mêmes. On observe que la convergence est sensiblement la même avec les opérateurs  $(OO2)_1$  et  $(OO2)_2$ . Pour les conditions de Taylor d'ordre 2, la discrétisation de type 2 (figure 4.12) donne une meilleure convergence que la discrétisation de type 1 (figure 4.11).

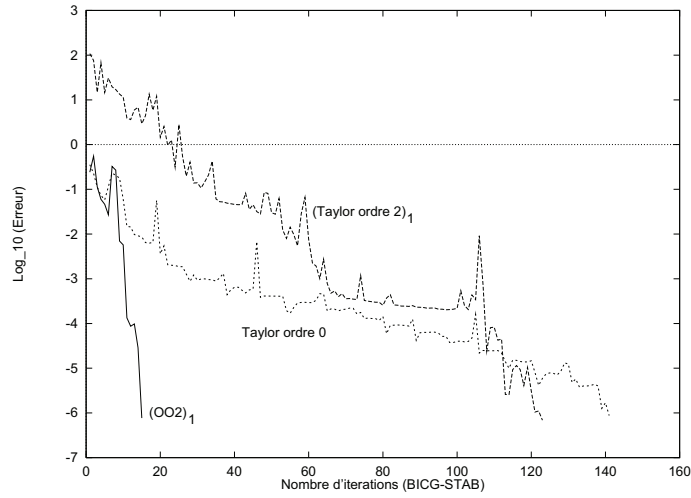


FIG. 4.11: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $16 \times 1$  sous-domaines  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$

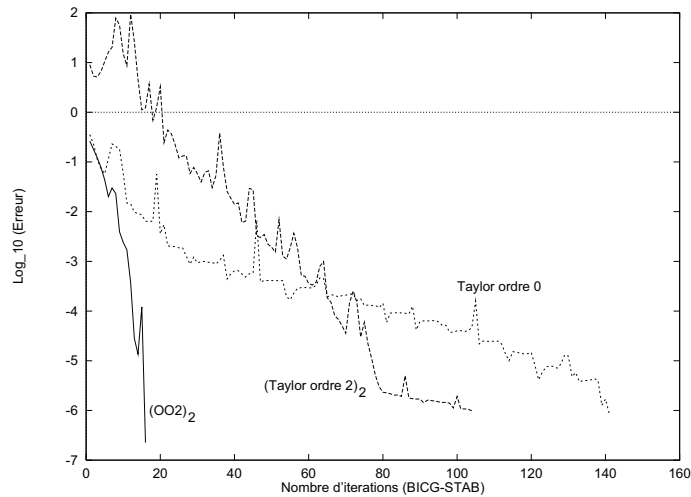


FIG. 4.12: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $16 \times 1$  sous-domaines  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$

Sur la figure 4.13 nous considérons un cas plus général avec une vitesse de convection tournante et un découpage en  $4 \times 4$  sous-domaines. Nous observons que le choix des conditions aux points de croisement des sous-domaines

a une influence sur la convergence de la méthode. En particulier ici, les opérateurs faisant intervenir le terme d'ordre 2 aux coins (opérateur  $(OO2)_3$ ) permettent de gagner pratiquement un facteur 2 par rapport aux opérateurs qui ne font intervenir que les termes d'ordre 0 et 1 aux coins (opérateur  $(OO2)_1$  et  $(OO2)_2$ ).

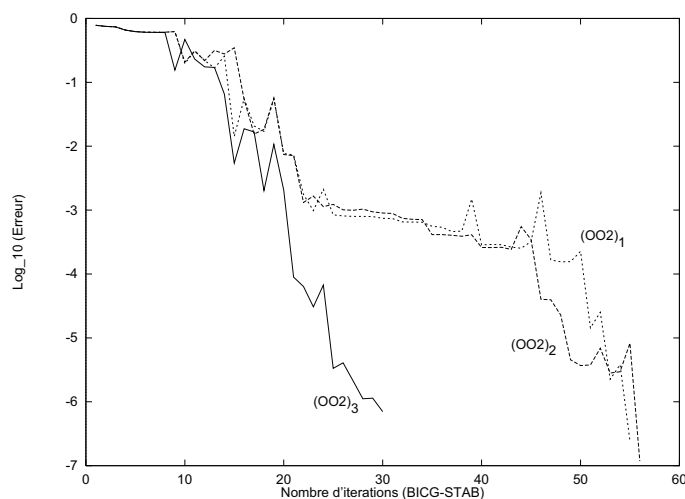


FIG. 4.13: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 4$  sous-domaines  
 $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$   
 $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$

Dans la suite, lorsque ce n'est pas précisé, les tests sont effectués avec la discrétisation de type 3.

### Convergence en fonction de l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces

Les figures 4.14 et 4.15 montrent qu'avec les conditions OO2 la convergence est indépendante de l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces.

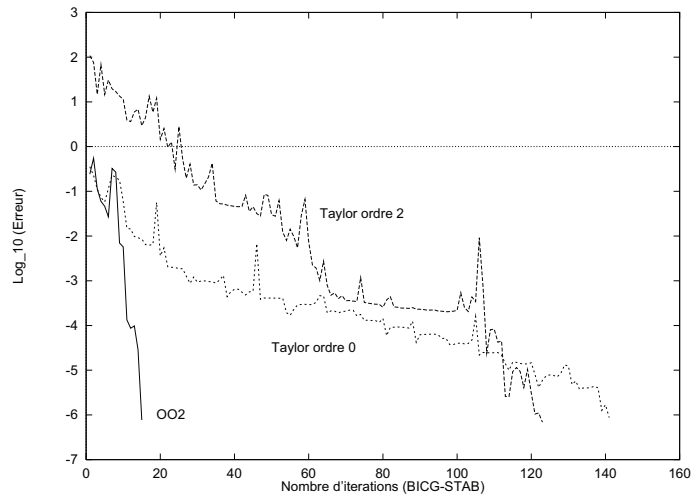


FIG. 4.14: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $16 \times 1$  sous-domaines  
**incidence normale**

$$a = y, b = 0, \nu = 1.d - 2, CFL = 1.d9, h = \frac{1}{241}$$

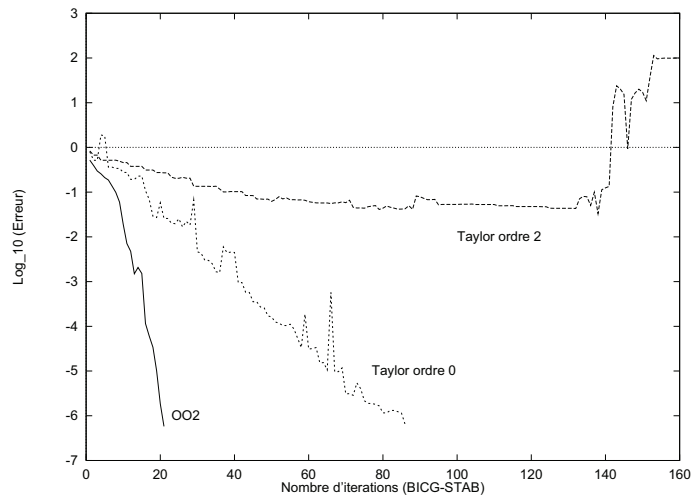


FIG. 4.15: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $1 \times 16$  sous-domaines  
**incidence tangentielle**

$$a = y, b = 0, \nu = 1.d - 2, CFL = 1.d9, h = \frac{1}{241}$$

Les figures 4.14 et 4.15 montrent aussi que les résultats obtenus avec les conditions OO2 ou de Taylor d'ordre 0 sont pratiquement les mêmes que ceux obtenus dans le cas du schéma aux différences finies décentré (partie II, Chapitre 3). Par contre, les conditions de Taylor d'ordre 2 donnent une meilleure convergence dans le cas où l'on a une maille de recouvrement (partie II, Chapitre 3), par rapport aux cas sans recouvrement considérés ici.

### Découpage et vitesse de convection plus généraux

Un des avantages d'avoir une méthode indépendante de l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces est que pour un nombre de sous-domaines fixé, la convergence de l'algorithme ne dépend pas de la façon dont on découpe le domaine. Par exemple ici, pour 16 sous-domaines, la convergence de l'algorithme avec les conditions OO2 ne dépend pas du découpage du domaine, en bandes (figure 4.14 et 4.15) ou en rectangles (figure 4.16). Par contre, avec les conditions de Taylor, qui sont très sensibles à l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces, la convergence varie avec le découpage du domaine.

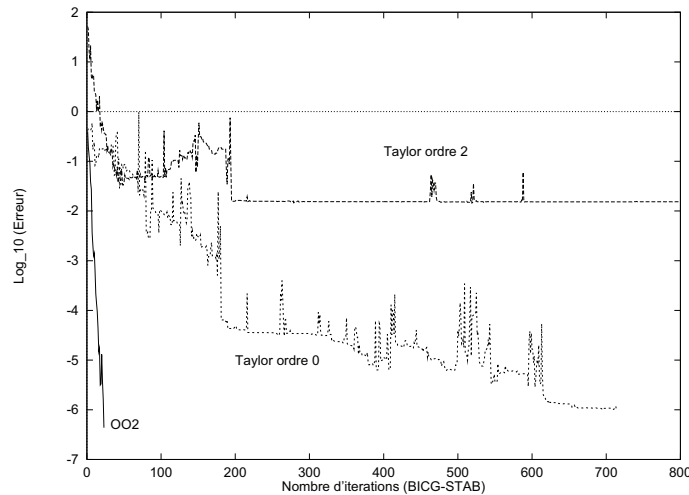


FIG. 4.16: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 4$  sous-domaines  $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$

La figure 4.17 montre la convergence pour une vitesse de convection plus générale, tournante, et un découpage en  $4 \times 8$  sous-domaines. Le fait que

les interfaces traversent des zones de recirculation pose des difficultés. Les conditions d'interface OO2 conduisent à un gain important en vitesse de convergence par rapport aux conditions de Taylor.

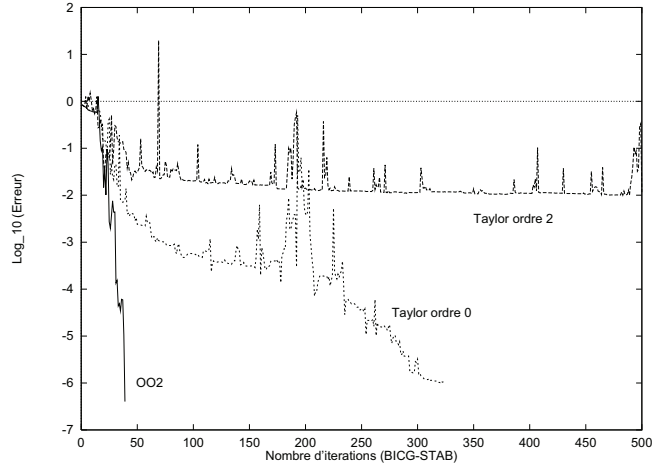


FIG. 4.17: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 8$  sous-domaines  
**convection tournante**

$$a = -\sin\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad b = \cos\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\nu = 1.d - 2, \quad CFL = 1.d9, \quad h = \frac{1}{241}$$

### Convergence en fonction de la viscosité

Le tableau 4.3 montre que la convergence avec les conditions OO2 est peu sensible aux variations de la viscosité.

	$\nu = 1.d - 5$	$\nu = 1.d - 2$	$\nu = 1.d0$
OO2	15	15	53
Taylor ordre 2	15	123	568
Taylor ordre 0	15	141	691

Tableau 4.3: Nombre d'itérations en fonction de la viscosité

$16 \times 1$  sous-domaines,  $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$

Critère d'arrêt Erreur  $< 1.d - 6$



### Convergence en fonction du CFL

La convergence avec les conditions OO2 est également très peu sensible aux variations du CFL, comme le montre le tableau 4.4.

	$CFL = 1.d0$	$CFL = 1.d3$	$CFL = 1.d5$	$CFL = 1.d9$
OO2	3	12	15	15
Taylor ordre 2	2	21	58	123
Taylor ordre 0	3	18	48	141

Tableau 4.4: Nombre d'itérations en fonction du CFL

$16 \times 1$  sous-domaines,  $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $h = \frac{1}{241}$   
Critère d'arrêt Erreur  $< 1.d - 6$

### Convergence en fonction du pas du maillage

Les simulations numériques montrent que les conditions OO2 impliquent une convergence quasiment indépendante du pas du maillage (voir tableaux 4.5 et 4.6). Par contre, avec les conditions de Taylor, la convergence se dégrade lorsque le pas du maillage  $h$  diminue, et cette dégradation est pratiquement linéaire en fonction  $h$  (voir tableaux 4.5 et 4.6; dans le tableau 4.6, nous n'avons pas mis les conditions de Taylor d'ordre 2 car la méthode ne converge pas dans ce cas). On est ainsi proche des estimations théoriques faites au chapitre I.3, section 3.2.3.

maillage	$65 \times 65$	$129 \times 129$	$241 \times 241$
OO2	15	15	15
Taylor ordre 2	49	69	123
Taylor ordre 0	49	82	141

Tableau 4.5: Nombre d'itérations en fonction du pas du maillage

$16 \times 1$  sous-domaines,  $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$   
Critère d'arrêt Erreur  $< 1.d - 6$

maillage	$65 \times 65$	$129 \times 129$	$241 \times 241$
OO2	25	26	30
Taylor ordre 0	76	130	224

Tableau 4.6: Nombre d'itérations en fonction du pas du maillage

$4 \times 4$  sous-domaines, **convection tournante**,  
 $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ ,  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$   
 $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ , Critère d'arrêt Erreur  $< 1.d - 6$

### Comparaison de différentes méthodes itératives pour résoudre le problème condensé

Rappelons que la méthode de Schwarz correspond à un algorithme de Jacobi appliqué au problème condensé sur l'interface (voir partie II, Chapitre 2). Dans cette partie, on compare les résultats obtenus avec l'algorithme de Jacobi (Schwarz) et un algorithme de Krylov.

	OO2	Taylor ordre 2	Taylor ordre 0
Schwarz	20	1834	3790
BICG-STAB	8	56	69
GMRES	14	83	98
GCR	14	83	98

Tableau 4.7: Nombre d'itérations en fonction de l'algorithme de résolution.

$8 \times 1$  sous-domaines,  $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{129}$   
Critère d'arrêt Erreur  $< 1.d - 6$

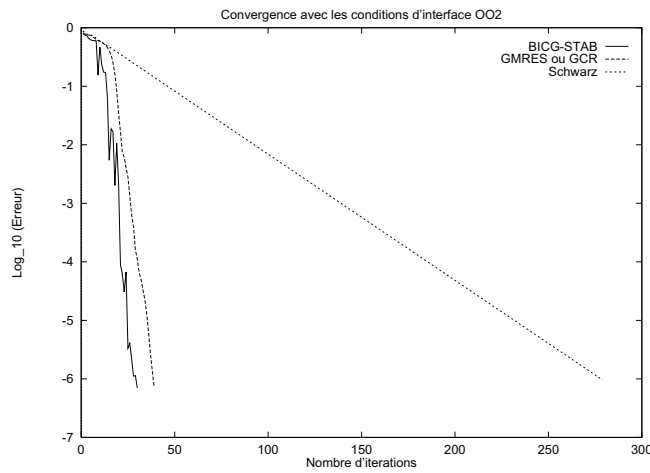


FIG. 4.18: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 4$  sous-domaines  
**convection tournante**

$$a = -\sin\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad b = \cos\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\nu = 1.d - 2, \quad CFL = 1.d9, \quad h = \frac{1}{241}$$

Dans le cas du tableau 4.7, les méthodes sont pratiquement équivalentes avec les conditions OO2 (du fait que l'on fait 2 produits matrice-vecteur à

chaque itération de BI-CGSTAB, et un seul pour les autres méthodes). Le gain obtenu lorsque l'on passe de l'algorithme de Schwarz à un algorithme de type Krylov est nettement plus important pour les conditions de Taylor. Dans le cas plus général considéré sur la figure 4.18, on observe l'importance d'utiliser un algorithme de Krylov pour résoudre le problème condensé.

### Convergence en fonction du nombre de sous-domaines

Dans cette section, nous regardons le comportement de la convergence en fonction du nombre de sous-domaines. Comme nous l'avons déjà observé au chapitre 3, partie II, pour les conditions OO2 comme pour les conditions de Taylor d'ordre 0, la convergence est quasiment linéaire en fonction du nombre de sous-domaines (voir le tableau 4.8).

	$2 \times 2$	$4 \times 2$	$4 \times 4$	$4 \times 8$	$8 \times 8$
OO2	14	23	30	39	51
Taylor ordre 0	149	189	224	324	439

Tableau 4.8: Nombre d'itérations en fonction du nombre de sous-domaines, convection tournante

$$a = -\sin\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad b = \cos\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\nu = 1.d - 2, \quad CFL = 1.d9, \quad h = \frac{1}{241}, \quad \text{Critère d'arrêt } Erreur < 1.d - 6$$

### Comparaison des temps de calcul des différentes méthodes

Dans le tableau 4.9, nous comparons les temps de calcul (en secondes) des méthodes OO2 et Taylor d'ordre 0 (nous n'avons pas mis les conditions de Taylor d'ordre 2 car la méthode ne converge pas dans ce cas). Avec les conditions OO2, il faut 41 itérations de BICG-STAB pour atteindre le critère  $Erreur < 1.d - 6$ , et 359 itérations dans le cas des conditions de Taylor d'ordre 0. On a ainsi un gain en nombre d'itérations d'un facteur 8,7. Ce gain reste le même au niveau du temps de calcul de l'algorithme BICG-STAB car l'utilisation de conditions d'ordre 2 n'augmente pas la largeur de bande des matrices locales. Néanmoins, au niveau des temps de calcul globaux, le tableau 4.9 montre que l'on a un gain d'un facteur 3.2. Ce gain est ainsi moins important que celui en nombre d'itérations. Ceci s'explique par le fait que pour les conditions OO2, un problème d'optimisation est résolu en chaque point des interfaces, ce qui fait que le calcul des matrices locales est plus

coûteux. Nous n'avons pas ici cherché à améliorer la rapidité de calcul des coefficients intervenant dans les conditions OO2.

	OO2	Taylor ordre 0
initialisation	4	4
matrice locale	12.2	0.6
second-membre local	0.07	0.07
factorisation LU	1.5	1.5
second-membre condensé	0.1	0.1
BICG-STAB	11	95
Global	32.1	103.3

Tableau 4.9: Comparaison des temps de calcul (en secondes).

**8 × 4 sous-domaines, convection tournante**

$$a = -\sin\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad b = \cos\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\nu = 1.d - 2, \quad CFL = 1.d9, \quad h = \frac{1}{241}, \quad \text{Critère d'arrêt Erreur} < 1.d - 6$$

### Temps de calcul en fonction du nombre de sous-domaines

Il est intéressant de voir comment l'augmentation du nombre de sous-domaines affecte le temps de calcul de la méthode. Nous avons choisi un maillage global fixé de  $241 \times 241$  points. Nous définissons le *speed-up* par :

$$\text{speed-up} = \frac{\text{Temps de calcul (1 domaine)}}{\text{Temps de calcul (N domaines)}} \quad (\text{II.4.46})$$

Supposons, dans un premier temps, que le domaine de calcul est découpé en  $N_x$  sous-domaines suivant la direction  $x$ . La demi-largeur de bande des matrices locales est alors de l'ordre de  $\frac{i_{max}}{N_x}$ . On note  $N_{it}$  le nombre d'itérations de l'algorithme BICG-STAB. Le nombre d'opérations (additions plus multiplications) pour chaque sous-domaine peut être estimé par :

$$\alpha_1 \left(\frac{i_{max}}{N_x}\right)^3 j_{max} + \alpha_2 N_{it} \left(\frac{i_{max}}{N_x}\right)^2 j_{max}$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes. Le premier terme provient de la factorisation LU de la matrice locale, et le second terme de la résolution par l'algorithme BICG-STAB. Le tableau 4.10 montre que pour un petit nombre de sous-domaines, c'est le premier terme, c'est-à-dire celui correspondant à la

factorisation LU de la matrice locale qui est prédominant (le nombre d'itérations de BICG-STAB n'augmente pas lorsque l'on passe de  $2 \times 1$  à  $4 \times 1$  sous-domaines). Ensuite, à partir de  $8 \times 1$  sous-domaines, c'est le second terme, celui correspondant à l'algorithme BICG-STAB qui devient prédominant. Comme le nombre d'itérations  $N_{it}$  devient proportionnel au nombre de sous-domaines, ceci explique que le *speed-up* augmente d'un facteur 2, lorsque l'on divise  $N_x$  par 2. Ceci reste valable jusqu'à 16 domaines. De 16 à 48 domaines, l'estimation n'est plus valable à cause des échanges des données entre processeurs qui deviennent prépondérants.

Nb sous-domaines	$2 \times 1$	$4 \times 1$	$8 \times 1$	$16 \times 1$	$48 \times 1$
<i>speed-up</i> (OO2)	4.3	39	90	155	164.6

Tableau 4.10: *speed-up* en fonction du nombre de sous-domaines.  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$ , Critère d'arrêt Residu  $< 1.d - 9$

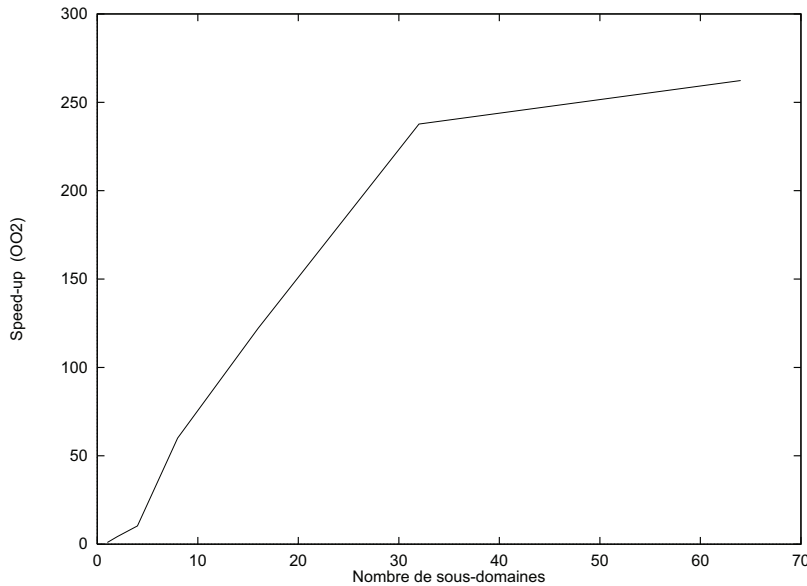


FIG. 4.19: *speed-up* en fonction du nombre de sous-domaines, pour des découpages en  $2 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $4 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 4$  et  $8 \times 8$  sous-domaines  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$ , Critère d'arrêt Residu  $< 1.d - 9$

Nous avons une estimation similaire du nombre d'opérations pour chaque sous-domaine, dans le cas où le domaine de calcul est découpé en  $N_x$  sous-domaines suivant la direction  $x$ , et  $N_y$  sous-domaines suivant la direction  $y$  :

$$\alpha_1 \left(\frac{i_{max}}{N_x}\right)^3 \frac{j_{max}}{N_y} + \alpha_2 N_{it} \left(\frac{i_{max}}{N_x}\right)^2 \frac{j_{max}}{N_y}$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes. On observe sur la figure 4.19 un comportement du *speed-up* similaire à celui du cas d'un découpage en bandes.

Pour le tableau 4.10 et la figure 4.19, nous avons pris en compte également le temps de calcul des matrices locales, et en particulier, le temps de calcul des coefficients optimisés. Le tableau 4.11 montre le *speed-up* lorsqu'on ne tient pas compte du temps de calcul des coefficients optimisés.

Nb sous-domaines	$2 \times 1$	$2 \times 2$	$4 \times 2$	$4 \times 4$	$8 \times 4$	$8 \times 8$
<i>speed-up</i> (OO2)	4.3	10.6	75.6	185	394	409

Tableau 4.11: *speed-up* en fonction du nombre de sous-domaines, lorsqu'on ne prend pas en compte le calcul des coefficients optimisés.  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$ , Critère d'arrêt Residu  $< 1.d - 9$

## 4.5.2 Écoulement autour d'un cylindre issu d'un calcul Navier-Stokes

Le champ de vitesse est celui d'un écoulement de fluide incompressible, à un nombre de Reynolds  $Re = 10000$ , à basse vitesse, autour d'un cylindre. Ce champ provient d'un calcul effectué à l'aide du logiciel AEROLOG du département d'aérodynamique de MATRA. Le domaine de calcul est défini par

$$\Omega = \{(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), 1 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

avec  $R > 0$  donné. On écrit  $\partial\Omega$  sous la forme  $\partial\Omega = \partial\Omega_{int} \cup \partial\Omega_{ext}$ , avec  $\partial\Omega_{int} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  et  $\partial\Omega_{ext} = \{(R \cos(\theta), R \sin(\theta)), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Sur le bord extérieur du domaine (c'est-à-dire  $\partial\Omega_{ext}$ ) on impose la condition de Dirichlet  $u = 0$ , et sur le bord intérieur du domaine (c'est-à-dire  $\partial\Omega_{int}$ ), on impose la condition de Dirichlet  $u = 1$  (voir figure 4.20).

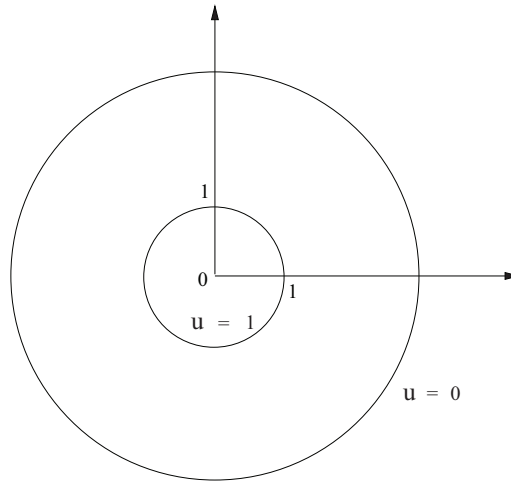


FIG. 4.20: Domaine de calcul et conditions aux limites

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\mathcal{L}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (\text{II.4.47})$$

$$u = 1 \text{ sur } \partial\Omega_{int} \quad (\text{II.4.48})$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{ext} \quad (\text{II.4.49})$$

### Discrétisation

Le domaine discret est l'ensemble  $\{(x_i, y_j) = (r_i \cos(\theta_j), r_i \sin(\theta_j))\}$ , où  $r_i$  a une progression géométrique de raison  $(raison)_i$  et  $\theta_j$  a une progression géométrique de raison  $(raison)_j$  à partir d'un axe faisant un angle  $\phi$  avec l'axe des  $x$ . Le problème (II.4.47)-(II.4.49) est discrétisé suivant la section 4.3, chapitre 4, partie II.

### Décomposition en sous-domaines

Le domaine  $\Omega$  est découpé en  $K$  sous-domaines, sans recouvrement.

### Paramètres fixés

Dans tout ce qui suit, nous prenons  $CFL = 1.d9$ , et nous considérons un maillage  $65 \times 65$  points. Le maillage est raffiné au voisinage du cylindre ainsi que dans la direction de l'écoulement :  $(raison)_i = 1.15$ , et  $(raison)_j = 1.1$ , avec  $\phi = 30$  (voir figure 4.21).

Le nombre d'itérations maximal  $N_{max}$  de l'algorithme BICG-STAB est choisi

comme étant :

$N_{max} = (\text{nb de points sur le bord d'un sous-domaine}) \times (\text{nb de sous-domaines})$ .

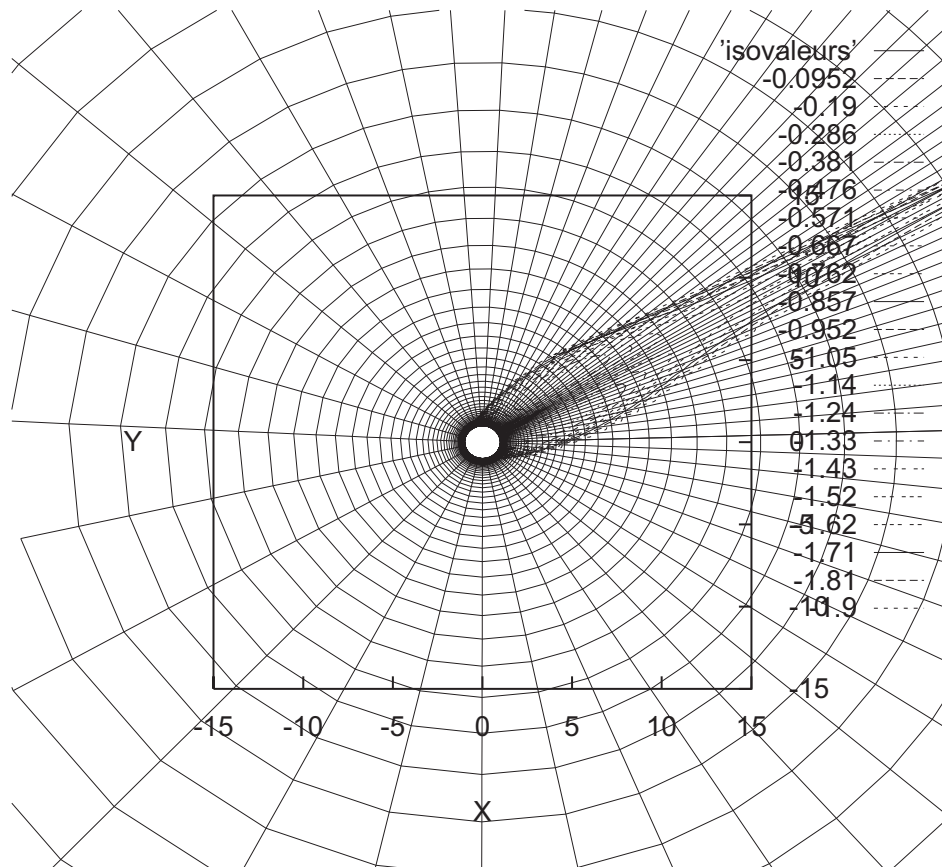


FIG. 4.21: Maillage et isovaleurs du domaine  $\Omega$ .



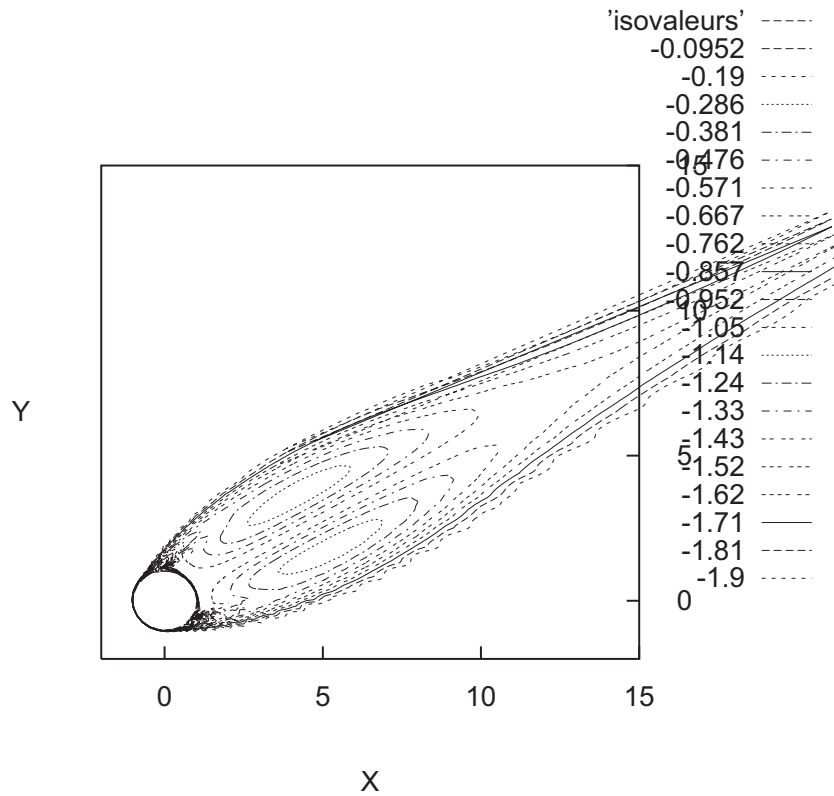


FIG. 4.22: Isovaleurs de la solution  $u$  de l'équation de convection-diffusion, avec le champ de vitesses de convection  $\mathbf{a}$  issu du calcul Navier-Stokes,  $\nu = 1.d - 4$ ,  $CFL = 1.d9$

Dans ce type d'écoulement, les interfaces coupent des zones de recirculation ce qui pose des difficultés. Le fait que les conditions OO2 entraînent une convergence indépendante de l'angle entre la vitesse de convection et les interfaces permet de lever ces difficultés, comme le montre la figure 4.23 et le tableau 4.12. Un autre avantage des conditions OO2 est qu'elles conduisent à

une convergence pratiquement indépendante de la viscosité, comme le montre le tableau 4.13.

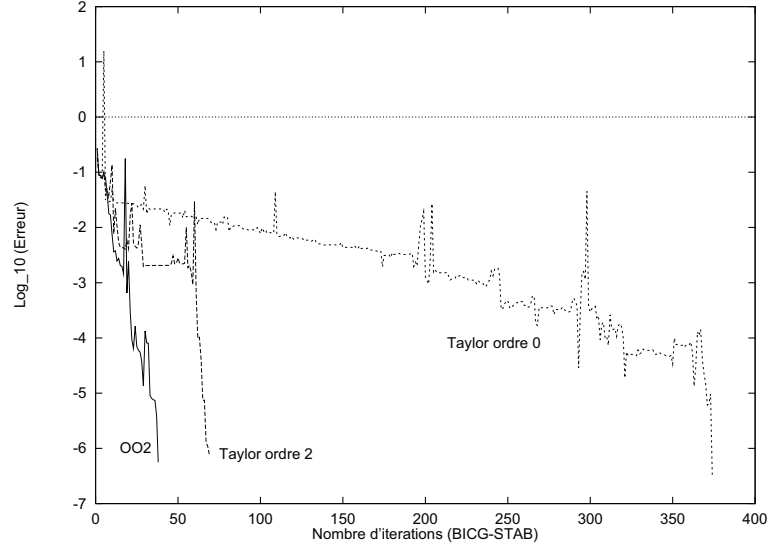


FIG. 4.23: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 2$  sous-domaines  $\nu = 1.d - 4$ ,  $CFL = 1.d9$

	OO2	Taylor ordre 2	Taylor ordre 0
$4 \times 8$ sous-domaines	128	137	1268
$8 \times 4$ sous-domaines	117	$N_{max} = 1536$ $\log_{10}(Erreur) = -2.2705$	789

Tableau 4.12: Nombre d'itérations en fonction du découpage du domaine  $\nu = 1.d - 4$ ,  $CFL = 1.d9$ , Critère d'arrêt  $Erreur < 1.d - 6$

	OO2	Taylor ordre 2	Taylor ordre 0
$\nu = 1.d - 5$	58	40	119
$\nu = 1.d - 4$	38	69	374
$\nu = 1.d - 3$	28	378	$N_{max} = 768$ $\log_{10}(Erreur) = -2.4402$

Tableau 4.13: Nombre d'itérations en fonction de la viscosité  $4 \times 2$  sous-domaines,  $CFL = 1.d9$ , Critère d'arrêt  $Erreur < 1.d - 6$

Enfin, sur la figure 4.24, on observe à nouveau l'importance du choix des conditions aux points de croisement des sous-domaines (ici dans le cas des conditions de Taylor d'ordre 2).

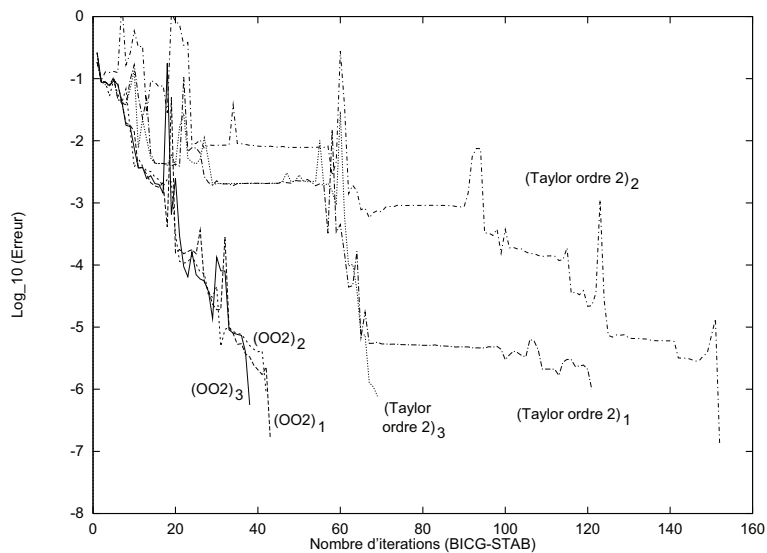


FIG. 4.24: Erreur en fonction du nombre d'itérations,  $4 \times 2$  sous-domaines  
 $\nu = 1.d - 4$ ,  $CFL = 1.d9$

## Troisième partie

# Méthodes de préconditionnement



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>193</b>
<b>2</b>	<b>Préconditionneur “basses fréquences”</b>	<b>195</b>
2.1	Introduction . . . . .	195
2.2	Le problème d’interface projeté . . . . .	196
2.2.1	Définition de la contrainte . . . . .	196
2.2.2	Le problème d’interface projeté . . . . .	199
2.3	Résolution par l’algorithme GCR projeté . . . . .	209
<b>3</b>	<b>Résultats numériques : l’équation de convection-diffusion</b>	<b>215</b>
3.1	Influence de la condition de raccord aux points de croisement des sous-domaines . . . . .	217
3.2	Vitesse de convection nulle : opérateur symétrique . . . . .	218
3.3	Solution constante dans le domaine global . . . . .	220
3.4	Vitesse de convection de cisaillement . . . . .	221
3.5	Vitesse de convection tournante . . . . .	225
3.6	Conclusion . . . . .	227



# Chapitre 1

## Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en évidence le fait que la convergence de la méthode est peu sensible aux variations des paramètres physiques intervenant dans le problème (vitesse de convection, viscosité) ainsi qu'aux paramètres de discrétisation (pas de temps, pas du maillage).

Néanmoins, la convergence de la méthode se dégrade lorsque le nombre de sous-domaines augmente. Les tests numériques de la partie II, Chapitre 3 et 4, montrent que la convergence est pratiquement linéaire en fonction du nombre de sous-domaines. Ainsi, il est nécessaire de transmettre une information globale entre les sous-domaines, afin d'avoir une convergence indépendante du nombre de sous-domaines. Des techniques "à deux niveaux" ont ainsi été développées, avec un premier niveau (fin) correspondant à des résolutions locales dans les sous-domaines, et un second niveau (grossier) correspondant à la résolution d'un problème qui couple de façon globale les sous-domaines. Une première approche, similaire aux techniques multigrilles (à deux grilles) consiste à utiliser une grille grossière (celle du découpage en sous-domaines) pour approcher la solution calculée sur le maillage fin (voir [6] (T. Chan et T.P. Mathew, 1994) pour un article de revue). Une limitation de cette méthode est que la grille grossière doit être de plus en plus fine (et donc de plus en plus coûteuse numériquement) lorsque la viscosité devient petite (voir [6]). De plus, la définition de la grille grossière devient difficile pour des géométries très complexes. Une autre approche développée pour les problèmes symétriques dans [13] (C. Farhat, J. Mandel et F.X. Roux, 1994), [14] (C. Farhat et J. Mandel, 1998), [15] (C. Farhat, P.S. Chen, J. Mandel et F.X. Roux, 1998), consiste à introduire une contrainte à chaque itération de la méthode de Schur dual. Cette contrainte revient à projeter les solutions



dans l'orthogonal d'un "espace grossier". Avec cette correction "grille grossière" les champs résultants sont continus en moyenne aux interfaces ([13]) et aux points de croisement des sous-domaines ([15]) à chaque itération de la méthode de résolution. Le conditionnement de l'opérateur de Schur dual projeté est alors indépendant du nombre de sous-domaines ([13]). La différence de cette approche par rapport aux techniques multigrilles est que l'on définit directement un espace grossier, sans utiliser une grille grossière.

L'objet de cette partie est de généraliser cette seconde approche aux problèmes non-symétriques. Ainsi, on va introduire une contrainte à chaque itération de la méthode OO2, dans le but d'avoir une convergence indépendante du nombre de sous-domaines. L'idée est de choisir la contrainte et l'espace grossier de sorte qu'à chaque itération on capture la partie "basses fréquences" de la solution.

Nous présentons dans un premier temps comment nous avons étendu cette technique aux problèmes non-symétriques. Nous montrons ensuite des résultats numériques sur l'équation de convection-diffusion.

## Chapitre 2

# Préconditionneur “basses fréquences”

Dans ce chapitre on note  $(.,.)$  le produit scalaire  $L^2$ , et  $||.||$  la norme associée.

### 2.1 Introduction

Dans le cadre des problèmes d'élasticité, l'utilisation de la méthode de Schur dual, avec un découpage quelconque, fait apparaître la résolution de problèmes de Neumann locaux mal posés. Pour remédier à cela, la technique développée dans [13] (C. Farhat, J. Mandel et F.X. Roux, 1994) consiste à introduire une contrainte dans l'algorithme, qui permet d'éliminer les mouvements rigides dans les sous-domaines. Cette technique est également utilisée dans le cas des problèmes de plaques et coques dans [14] (C. Farhat et J. Mandel, 1998), [15] (C. Farhat, P.S. Chen, J. Mandel et F.X. Roux, 1998), [24] (C. Lacour, 1997) afin d'enlever les discontinuités du saut des solutions locales aux points de croisement des interfaces. Dans ce cas la contrainte consiste à forcer l'inconnue du problème interface (le multiplicateur de Lagrange) à générer des champs de déplacement locaux continus aux points de croisement des interfaces, à chaque itération de l'algorithme (gradient conjugué). Ceci revient, à chaque itération, à projeter pour le produit scalaire  $(D.,.)$  les solutions dans l'orthogonal d'un “espace grossier”, cet espace étant constitué de fonctions qui sont les sauts des “modes de coins” (champs de déplacement qui valent 1 en un point de croisement et 0 aux autres). La convergence de

l’algorithme du gradient conjugué projeté est alors indépendante du nombre de sous-domaines [15].

Ce chapitre a pour objet l’extension de ce preconditionneur “grille grossière” aux problèmes non-symétriques.

Nous étendons ce preconditionneur à un problème d’interface de la forme :

$$D\mu = b \quad (\text{III.2.1})$$

avec  $D$  non symétrique, de dimension  $m$ , inversible. Pour cela, nous considérons une projection au sens du produit scalaire  $(D., D.)$  dans l’orthogonal d’un “espace grossier”. L’idée est de choisir un espace grossier, que l’on note  $Im(C)$ , de sorte que cette projection filtre les phénomènes basses fréquences, c’est-à-dire ceux qui se propagent à l’ensemble des sous-domaines, ceci afin d’avoir une convergence indépendante du nombre de sous-domaines.

## 2.2 Le problème d’interface projeté

### 2.2.1 Définition de la contrainte

La contrainte que l’on va imposer à chaque itération se généralise sous la forme :

$$(DC)^t(D\mu - b) = 0 \quad (\text{III.2.2})$$

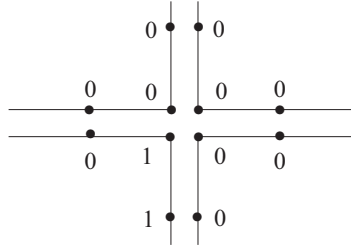
où  $C$  est une matrice  $(m \times p)$  où  $p$  est le nombre de degrés de liberté pour lesquels on impose la contrainte. Le but de cette contrainte est de filtrer les phénomènes basses fréquences. Alors, l’espace grossier  $Im(C)$  doit contenir des fonctions “basses fréquences” définies sur chaque interface. Le plus simple est de considérer les fonctions constantes par sous-domaine :

$$\begin{aligned} u_i^c &= 1 && \text{dans } \Omega_i \\ u_i^c &= 0 && \text{dans les autres sous-domaines} \end{aligned}$$

Les modes grossiers sont alors la trace de ces fonctions sur les interfaces. C’est cet espace grossier que l’on utilise dans le cas symétrique et de la méthode de Schur dual. En effet, dans ce cas la contrainte signifie bien que le saut sur l’interface des champs de déplacement locaux est orthogonal au saut des

champs constants locaux. On peut considérer l'espace un peu plus gros des fonctions valant 1 sur une interfaces et 0 sur les autres interfaces :

**Définition 2.1 (Préconditionneur  $M_1$ ).** *Les modes grossiers sont les  $v_n$  qui valent 1 sur une interface et 0 sur les autres interfaces (figure 2.1).*



$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{sur une interface de } \Omega_i \\ 0 & \text{sur les autres interfaces} \end{cases}$$

FIG. 2.1: Modes grossiers  $v_n$  du Préconditionneur  $M_1$

Regardons maintenant ce que signifie la contrainte (III.2.2), pour un ensemble de modes grossiers  $\{v_n\}_{1 \leq n \leq p}$ . Pour cela, nous considérons le problème d'interface de la forme (III.2.1) issu de la méthode OO2 appliquée à l'équation de convection-diffusion (I.1.1) (voir partie II, chapitre 2, problème (II.2.8)). Nous nous plaçons, pour simplifier, dans un cadre continu et dans le cas de 2 sous-domaines disjoints  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparés par une interface  $\Gamma_{12}$ . L'équivalent continu du produit  $Dv_n$  que l'on note  $\mathcal{D}v_n$  avec  $v_n = \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \end{pmatrix}$  est calculé de la façon suivante :

On résout dans chaque sous-domaine les problèmes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1 &= 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1 u_1 &= v_n^1 & \text{sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_2 &= 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2 u_2 &= v_n^2 & \text{sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

et  $\mathcal{D}v_n$  pour le sous-domaine  $\Omega_1$  représente le terme

$$(\mathcal{D}v_n)_1 = (\mathcal{B}_1 u_1 - \mathcal{B}_1 u_2)|_{\Gamma_{12}}$$

De même,  $\mathcal{D}v_n$  pour le sous-domaine  $\Omega_2$  vaut :

$$(\mathcal{D}v_n)_2 = (\mathcal{B}_2 u_2 - \mathcal{B}_2 u_1)|_{\Gamma_{12}}$$

Alors, si nous choisissons  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (modes grossiers du préconditionneur  $M_1$ ), le produit  $\mathcal{D}v_n$ ,  $n = 1, 2$  ne représente pas a priori un “saut” de champs de vitesse constants par sous-domaine. Prenons maintenant

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1(1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{B}_2(1) \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.3})$$

Lorsque  $c = 0$  dans  $\mathcal{L}$ , les problèmes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1 &= 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1 u_1 &= \mathcal{B}_1(1) & \text{sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_2 &= 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ \mathcal{B}_2 u_2 &= \mathcal{B}_2(1) & \text{sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

étant bien posé, les solutions sont alors les fonctions  $u_1 = 1$  dans  $\Omega_1$  et  $u_2 = 1$  dans  $\Omega_2$ . Dans ce cas,  $\mathcal{D}v_n$ ,  $n = 1, 2$  représente le saut des quantités de raccord aux interfaces  $\mathcal{B}_i(u_i) - \mathcal{B}_i(u_j)$  des champs de vitesse  $u$  qui sont constants dans un sous-domaine. En particulier, lorsque  $c = 0$  dans  $\mathcal{L}$ , la relation

$$(D\mu, \mathcal{D}v_n) = 0$$

signifie que le saut des quantités de raccord aux interfaces  $\mathcal{B}_i(u_{\mu,i}) - \mathcal{B}_i(u_{\mu,j})$  avec  $u_{\mu}$  le champ de vitesse issu de  $\mu$  est orthogonal au saut  $\mathcal{B}_i(u_i) - \mathcal{B}_i(u_j)$  des champs de vitesse  $u$  constants par sous-domaines. On peut ainsi a priori éliminer les composantes de la solution  $u$  représentables par les constantes par sous-domaine. En discret, le choix de  $v_1$  et  $v_2$  en (III.2.3) devient

$$v_1 = \begin{pmatrix} (A_{BI}^1 \quad A_{BB}^1 - B^1)(1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ (A_{BI}^2 \quad A_{BB}^2 - B^2)(1) \end{pmatrix}$$

où les matrices  $A_{BI}^i$ ,  $A_{BB}^i$  et  $B^i$ ,  $i = 1, 2$  sont celles de la partie II, chapitre 2, section 2.1.

D'une manière générale, on introduit ainsi un second choix pour l'espace grossier :

**Définition 2.2 (Préconditionneur  $M_2$ ).** *les modes "grossiers" sont les  $v_n$  définis de la façon suivante :*

soit  $u_i$  défini dans le sous-domaine  $\Omega_i$  par  $u_i = 1$  dans  $\Omega_i$ ,

$$\begin{aligned} v_n &= \left( A_{BI}^i \quad A_{BB}^i - B^i \right) u_i \quad \text{sur une interface de } \Omega_i \\ v_n &= 0 \quad \text{sur toutes les autres interfaces} \end{aligned}$$

où les matrices  $A_{BI}^i$ ,  $A_{BB}^i$  et  $B^i$  sont celles de la partie II, chapitre 2, section 2.1.

La figure 2.2 donne une représentation schématique de la définition de ces modes grossiers.

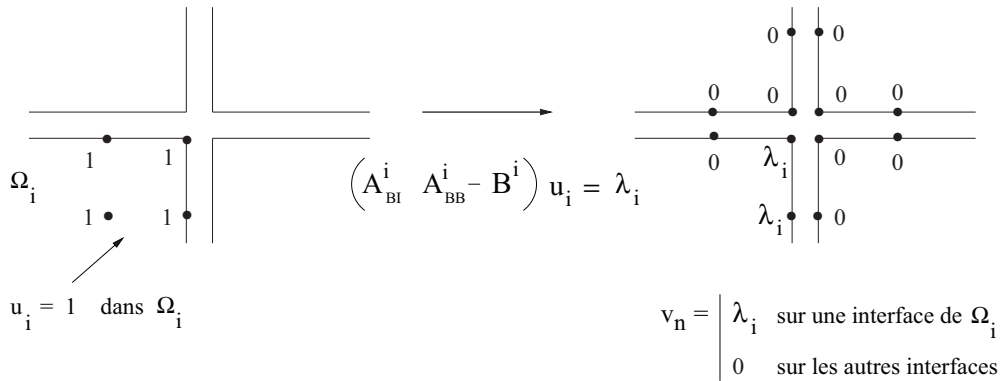


FIG. 2.2: Modes grossiers  $v_n$  du Préconditionneur  $M_2$

### 2.2.2 Le problème d'interface projeté

Le but est d'inclure la contrainte (III.2.2) dans la résolution du problème d'interface. Ainsi, l'algorithme de résolution du problème d'interface va être

modifié de sorte que chaque valeur de  $\mu$ , sur laquelle on itère, génère un champ de vitesse qui vérifie la contrainte (III.2.2), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (DC)^t(D\mu - b) &= 0 \\ \iff (D\mu - b, D\delta^0) &= 0, \quad \forall \delta^0 \in \text{Im}(C) \end{aligned} \quad (\text{III.2.4})$$

On note  $(\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  orthogonal à  $\text{Im}(C)$  pour le produit scalaire  $(D., D.)$ . En particulier, nous avons

$$\mathbb{R}^m = \text{Im}(C) \oplus (\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}}$$

On introduit  $Q$  la projection sur  $(\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}}$  parallèlement à  $\text{Im}(C)$  :

$$Q : \mu \mapsto Q\mu \in (\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(Q) &= \text{Im}(C) \\ \text{Im}(Q) &= (\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}} \end{aligned} \quad (\text{III.2.5})$$

Et par suite,

$$\mathbb{R}^m = \text{Ker}(Q) \oplus \text{Im}(Q) \quad (\text{III.2.6})$$

On a également

$$Q^2 = Q$$

Toutes ces relations seront utilisées par la suite.

On décompose alors tout  $\mu$  de  $\mathbb{R}^m$  sous la forme :

$$\mu = \mu^0 + Q\mu \quad (\text{III.2.7})$$

avec

$$\begin{aligned} \mu^0 \in \text{Im}(C) &\iff \exists \alpha^0 \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mu^0 = C\alpha^0 \\ Q\mu \in (\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}} &\iff (DQ\mu, D\delta^0) = 0, \quad \forall \delta^0 \in \text{Im}(C) \end{aligned}$$

L'idée est de calculer  $\mu^0$  tel que la contrainte (III.2.4) soit vérifiée à chaque itération, ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} (D\mu^0 + DQ\mu - b, D\delta^0) &= 0, \quad \forall \delta^0 \in \text{Im}(C) \\ \iff (D\mu^0 - b, D\delta^0) &= 0, \quad \forall \delta^0 \in \text{Im}(C) \end{aligned} \quad (\text{III.2.8})$$

Le problème (III.2.8) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{\mu^0 \in \text{Im}(C)} \|D\mu^0 - b\|$$

Ce problème est aussi équivalent, en écrivant  $\mu^0$  sous la forme  $\mu^0 = C\alpha^0$ , à chercher  $\alpha^0 \in \mathbb{R}^m$  solution de :

$$(DC)^t DC\alpha^0 = (DC)^t b$$

Revenons maintenant à la résolution du problème d'interface (III.2.1). Celui-ci est équivalent à chercher le

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}^m} \|D\mu - b\|$$

$$\iff (D\mu - b, D\delta) = 0, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^m \quad (\text{III.2.9})$$

On décompose  $\mu$  et  $\delta$  comme en (III.2.7) :

$$\begin{aligned} (D\mu^0 + DQ\mu - b, D\delta^0 + DQ\delta) &= 0, \quad \forall \delta = \delta^0 + Q\delta \in \mathbb{R}^m \\ \iff (D\mu^0 - b, D\delta^0) + (DQ\mu - b, DQ\delta) &= 0, \quad \forall \delta = \delta^0 + Q\delta \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

(par définition de  $Q$ ).

Ainsi, le problème (III.2.9) est équivalent à trouver  $\mu = \mu^0 + Q\mu$ , avec

$$\begin{aligned} (D\mu^0 - b, D\delta^0) &= 0, \quad \forall \delta^0 \in \text{Im}(C) \\ (DQ\mu - b, DQ\delta) &= 0, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

ce qui équivaut à trouver  $\mu = \mu^0 + Q\mu$ , avec

$$\begin{aligned} (D\mu^0 - b, D\delta^0) &= 0, \quad \forall \delta^0 \in \text{Im}(C) \\ DQ\mu &= b - D\mu^0 \end{aligned} \quad (\text{III.2.10})$$

Comme  $Q^2 = Q$ , le problème (III.2.10) revient à trouver  $\tilde{\mu} = Q\mu \in \text{Im}(Q)$  solution de

$$DQ\tilde{\mu} = b - D\mu^0 \quad (\text{III.2.11})$$

Ainsi, au lieu de résoudre le problème d'interface sur  $\mathbb{R}^m$ , on va résoudre un problème d'interface où l'inconnue est dans  $\text{Im}(Q)$ , la projection  $Q$  revenant à imposer la contrainte.

**Théorème 2.1.** *Le problème (III.2.11) admet une solution unique dans  $\text{Im}(Q)$ .*



**Preuve du théorème 2.1 :**

Soit  $\mu^*$  la solution du problème (III.2.1). Par définition de  $\mu^0$ , on a

$$\begin{aligned} (DC)^t(b - D\mu^0) &= 0 \\ \iff (DC)^t D(\mu^* - \mu^0) &= 0 \end{aligned}$$

Par définition de la projection  $Q$ , ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \mu^* - \mu^0 &\in \text{Im}(Q) \\ \Rightarrow b - D\mu^0 &= D(\mu^* - \mu^0) \in \text{Im}(DQ) \end{aligned} \quad (\text{III.2.12})$$

De plus, la matrice  $D$  étant supposée inversible, nous avons

$$\text{Ker}(DQ) = \text{Ker}(Q)$$

Comme  $\mathbb{R}^m = \text{Ker}(Q) \oplus \text{Im}(Q)$  (d'après (III.2.6)), le problème (III.2.11) à une solution unique dans  $\text{Im}(Q)$ .  $\square$

**Théorème 2.2.** *Supposons que la matrice  $D$  a la propriété suivante :*

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (D\mu, \mu) = 0 \Rightarrow \mu = 0 \quad (\text{III.2.13})$$

*Alors, la restriction de  $QDQ$  à  $\text{Im}(Q)$  est un isomorphisme de  $\text{Im}(Q)$  sur  $\text{Im}(QDQ)$ . En particulier, le problème*

$$QDQ\tilde{\mu} = Q(b - D\mu^0) \quad (\text{III.2.14})$$

*admet une solution unique  $\tilde{\mu}^*$  dans  $\text{Im}(Q)$ . De plus,  $\tilde{\mu}^*$  est la solution dans  $\text{Im}(Q)$  du problème (III.2.11).*

**Preuve du théorème 2.2 :**

Montrons que  $\text{Ker}(QDQ)$  et  $\text{Im}(Q)$  sont supplémentaires :

$$\mathbb{R}^m = \text{Ker}(QDQ) \oplus \text{Im}(Q)$$

$\mathbb{R}^m = \text{Ker}(QDQ) + \text{Im}(Q)$  :

Soit  $\mu$  un élément de  $\mathbb{R}^m$ . On écrit

$$\mu = \mu - Q\mu + Q\mu$$

On pose  $\mu_1 = \mu - Q\mu$  et  $\mu_2 = Q\mu$ . Alors  $\mu_2 \in \text{Im}(Q)$ , et d'autre part,

$$\begin{aligned} QDQ\mu_1 &= QDQ\mu - QDQQ\mu \\ &= QDQ\mu - QDQ\mu \quad (\text{car } Q^2 = Q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc  $\mu_1 \in \text{Ker}(QDQ)$ .

$\text{Ker}(QDQ) \cap \text{Im}(Q) = \{0\}$  :

Soit  $\mu \in \text{Im}(Q)$  tel que  $QDQ\mu = 0$ . Alors  $DQ\mu \in \text{Ker}(Q)$ , c'est-à-dire  $DQ\mu \in \text{Im}(C)$  (d'après (III.2.5)). Donc il existe  $\alpha^1 \in \mathbb{R}^m$  tel que  $DQ\mu = C\alpha^1$ . Mais par définition de  $Q$ ,

$$(DQ\mu, DC\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^m$$

En particulier, pour  $\alpha = \alpha^1$ , on a

$$(DQ\mu, DC\alpha^1) = 0$$

c'est-à-dire

$$(DQ\mu, D(DQ\mu)) = 0$$

Comme la matrice  $D$  vérifie la propriété (III.2.13), ceci entraîne que

$$DQ\mu = 0$$

La matrice  $D$  étant inversible, alors

$$Q\mu = 0$$

et ainsi,  $\mu \in \text{Ker}(Q)$ . Comme par hypothèse  $\mu \in \text{Im}(Q)$ , d'après (III.2.6) on a

$$\mu = 0$$

Par conséquent,

$$\mathbb{R}^m = \text{Ker}(QDQ) \oplus \text{Im}(Q) \quad (\text{III.2.15})$$

De plus, la restriction de  $QDQ$  à  $Im(Q)$  est un isomorphisme de  $Im(Q)$  sur  $Im(QDQ)$ .

Montrons maintenant que le problème (III.2.14) admet une unique solution dans  $Im(Q)$ .

### Unicité

Elle découle directement de la relation (III.2.15).

### Existence

D'après le théorème 2.1, le problème

$$DQ\tilde{\mu} = b - D\mu^0 \quad (\text{III.2.16})$$

admet une unique solution  $\tilde{\mu}^*$  dans  $Im(Q)$ . En multipliant (III.2.16) par  $Q$ ,  $\tilde{\mu}^*$  est aussi solution de

$$QDQ\tilde{\mu} = Q(b - D\mu^0) \quad (\text{III.2.17})$$

Par suite, la solution  $\tilde{\mu}^*$  dans  $Im(Q)$  du problème (III.2.16) est également la solution dans  $Im(Q)$  du problème (III.2.17).  $\square$

### **Le problème d'interface projeté**

Ainsi, au lieu de résoudre le problème d'interface (III.2.1), on calcule  $\mu^0 \in Im(C)$  solution de (III.2.8), c'est-à-dire  $\mu^0 = C\alpha^0$  avec  $\alpha^0 \in \mathbf{R}^m$  solution de :

$$(DC)^t DC\alpha^0 = (DC)^t b \quad (\text{III.2.18})$$

et on résout le problème projeté, pour  $\tilde{\mu} \in Im(Q)$  :

$$QDQ\tilde{\mu} = Q(b - D\mu^0)$$

Si on note  $\tilde{\mu}^*$  la solution de ce problème dans  $Im(Q)$ , la solution du problème (III.2.1) est alors

$$\mu = \mu^0 + \tilde{\mu}^*$$

Calcul de la projection d'un vecteur  $v$  sur  $Im(C)^{\perp_{D^t D}}$  :

Le calcul de la projection orthogonale par rapport au produit scalaire  $(D., D.)$  sur  $C^{\perp_{D^t D}}$  d'un vecteur  $v$  consiste à trouver un  $\alpha$  tel que :

$$v = Qv + C\alpha$$

avec

$$(DC)^t(DQv) = 0$$

ce qui équivaut à  $\alpha$  solution de :

$$(DC)^t DC\alpha = (DC)^t Dv \quad (\text{III.2.19})$$

si les colonnes de  $C$  sont linéairement indépendantes, la matrice  $(DC)^t DC$  est symétrique définie positive, ce qui nous amène à l'expression de la projection orthogonale de  $v$  au sens de  $(D., D.)$ , sur  $C^{\perp_{D^t D}}$  :

$$Q = Id - C(C^t D^t DC)^{-1} C^t D^t D$$

La matrice  $(DC)^t DC$  est de petite dimension, donc la résolution de (III.2.19) représente un coût négligeable.

### Cas de la méthode OO2

Nous allons maintenant montrer que, dans le cas de 2 sous-domaines, la matrice interface  $D$  issue de la méthode OO2 (partie II, chapitre 2) vérifie la propriété (III.2.13). Pour cela, nous nous plaçons dans le cas suivant : nous considérons l'équation de convection-diffusion de la partie I :

$$\mathcal{L}(u) = cu + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \Delta u = f$$

avec les coefficients  $a$  et  $b$  supposés constants, et  $f$  une fonction donnée. L'espace  $\Omega = \mathbb{R}^2$  est décomposé en deux sous-domaines  $\Omega_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . L'interface  $\Gamma_{12}$  entre les 2 sous-domaines est ainsi la droite  $x = 0$ . Sur cette interface, nous utilisons les conditions de transmission OO2. Les opérateurs d'interface OO2 (partie I, chapitre 3) s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} + c_2(a, b) \frac{\partial}{\partial y} - c_3(a, b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \mathcal{B}_2 &= -\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} - c_2(a, b) \frac{\partial}{\partial y} + c_3(a, b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Nous écrivons  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sous la forme

$$\mathcal{B}_1 = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^- \right), \quad \mathcal{B}_2 = - \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^+ \right)$$

avec

$$\Lambda_{ap}^- = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} - c_2(a, b) \frac{\partial}{\partial y} + c_3(a, b) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Lambda_{ap}^+ = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4c\nu}}{2\nu} + c_2(a, b) \frac{\partial}{\partial y} - c_3(a, b) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Alors, l'algorithme de Schwarz additif s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_1^{p+1}) &= f \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^- \right)(u_1^{p+1}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^- \right)(u_2^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ \mathcal{L}(u_2^{p+1}) &= f \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^+ \right)(u_2^{p+1}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^+ \right)(u_1^p) \quad \text{sur } \Gamma_{12} \end{aligned}$$

On introduit les fonctions  $\mu_1^p = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^- \right)(u_1^p)$  et  $\mu_2^p = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^+ \right)(u_2^p)$  sur  $\Gamma_{12}$ .  
On introduit également les opérateurs  $\mathcal{M}_i$ ,  $i = 1, 2$  définis par :

$$\mathcal{M}_1(f, \mu_1) = v \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{L}(v) = f \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (\text{III.2.20})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^- \right)(v) = \mu_1 \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (\text{III.2.21})$$

$$\mathcal{M}_2(f, \mu_2) = v \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{L}(v) = f \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (\text{III.2.22})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^+ \right)(v) = \mu_2 \quad \text{sur } \Gamma_{12} \quad (\text{III.2.23})$$

Alors, l'algorithme de Schwarz peut se réécrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1^{p+1} \\ \mu_2^{p+1} \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} \mu_1^p \\ \mu_2^p \end{pmatrix} + \mathcal{G}$$

où  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{G}$  sont les équivalents continus des opérateurs  $T$  et  $G$  vus à la partie II, chapitre 2. L'opérateur  $\mathcal{T}$  est défini ici par :

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^- \right) \mathcal{M}_2(0, \mu_2) \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_{ap}^+ \right) \mathcal{M}_1(0, \mu_1) \end{pmatrix}$$

Le problème d'interface que nous considérons est alors le problème

$$(Id - \mathcal{T}) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mathcal{G} \quad (\text{III.2.24})$$

Nous allons écrire l'expression de  $\mathcal{T}$  en utilisant l'analyse de Fourier. Considérons la fonction  $v = \mathcal{M}_1(0, \mu_1)$  solution du problème (III.2.20)-(III.2.21) avec  $f = 0$ . Nous avons vu à la partie I, chapitre 2, section 2.1, qu'en prenant la transformée de Fourier partielle par rapport à  $y$  de (III.2.20) (avec  $f = 0$ ), la solution s'écrit :

$$\hat{v}(x, k) = \alpha_1 e^{\lambda^+(k)x}$$

où  $\lambda^+(k)$  est défini en (I.2.11) et  $\alpha_1$  est une constante qui est déterminée par la condition aux limites (III.2.21) sur  $\Gamma_{12}$ . On note  $\lambda_{ap}^-$  (resp.  $\lambda_{ap}^+$ ) le symbole de  $\Lambda_{ap}^-$  (resp.  $\Lambda_{ap}^+$ ). La condition (III.2.21) en  $x = 0$  devient :

$$\alpha_1 (\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)) = \hat{\mu}_1$$

De même, en prenant la transformée de Fourier partielle par rapport à  $y$  de (III.2.22) (avec  $f = 0$ ), la solution s'écrit

$$\hat{v}(x, k) = \alpha_2 e^{\lambda^-(k)x}$$

où  $\lambda^-(k)$  est défini en (I.2.10) et  $\alpha_2$  est déterminé par la condition aux limites (III.2.23) en  $x = 0$  :

$$\alpha_2 (\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^+(k)) = \hat{\mu}_2$$

Alors,

$$\hat{\mathcal{T}}\mu(k) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^+(k)} \hat{\mu}_2(k) \\ \frac{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^+(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \hat{\mu}_1(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.25})$$

On introduit le taux de convergence  $\rho$  de l'algorithme de Schwarz (voir partie I, chapitre 2, section 2.5). Rappelons la relation

$$\lambda^+(k) + \lambda^-(k) = \lambda_{ap}^+(k) + \lambda_{ap}^-(k) = \frac{a}{\nu} \quad (\text{III.2.26})$$

qui permet d'écrire  $\rho$  sous la forme

$$\rho = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \right)^2$$

On pose  $r(k) = \left( \frac{\lambda^-(k) - \lambda_{ap}^-(k)}{\lambda^+(k) - \lambda_{ap}^-(k)} \right)$ . En particulier, on a  $\rho = r^2$ . La relation (III.2.26) permet aussi, avec (III.2.25), d'écrire  $\hat{\mathcal{T}}\mu$  sous la forme :

$$\hat{\mathcal{T}}\mu = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.27})$$

**Théorème 2.3.** *La matrice  $D = (Id - \mathcal{T})$  du problème d'interface (III.2.24) vérifie :  $(D\mu, \mu) = 0 \Rightarrow \mu = 0$ .*

**Preuve du théorème 2.3 :**

Soit  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$  tel que  $(D\mu, \mu) = 0$ . Alors, en utilisant (III.2.27) :

$$\hat{D}\mu = (\hat{\mu} - \hat{\mathcal{T}}\mu) = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 - r\hat{\mu}_2 \\ \hat{\mu}_2 - r\hat{\mu}_1 \end{pmatrix}$$

Nous appliquons alors la formule de Plancherel :

$$(D\mu, \mu) = (\hat{D}\mu, \tilde{\mu})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (D\mu, \mu) &= \int_{\mathbb{R}} ((\hat{D}\mu)_1 \tilde{\mu}_1 + (\hat{D}\mu)_2 \tilde{\mu}_2)(k) dk \\ &= \int_{\mathbb{R}} ((\hat{\mu}_1 - r\hat{\mu}_2) \tilde{\mu}_1 + (\hat{\mu}_2 - r\hat{\mu}_1) \tilde{\mu}_2)(k) dk \\ &= \int_{\mathbb{R}} (|\hat{\mu}_1|^2 - r\hat{\mu}_2 \tilde{\mu}_1 - r\hat{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + |\hat{\mu}_2|^2)(k) dk \end{aligned}$$

La relation  $(D\mu, \mu) = 0$  entraîne donc :

$$\int_{\mathcal{R}} (|\hat{\mu}_1|^2 - r\hat{\mu}_2\bar{\hat{\mu}}_1 - r\hat{\mu}_1\bar{\hat{\mu}}_2 + |\hat{\mu}_2|^2)(k)dk = 0$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathcal{R}} (|\hat{\mu}_1|^2 + |\hat{\mu}_2|^2)(k)dk = \int_{\mathcal{R}} (2r \operatorname{Re}(\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2))(k)dk \quad (\text{III.2.28})$$

Si  $\hat{\mu}_1 = 0$ , la relation précédente implique que  $\hat{\mu}_2 = 0$ . De même, si  $\hat{\mu}_2 = 0$ , alors  $\hat{\mu}_1 = 0$ . Supposons maintenant que  $\hat{\mu}_1$  et  $\hat{\mu}_2$  sont non nuls. D'après la relation (III.2.28), on a

$$\int_{\mathcal{R}} (|\hat{\mu}_1|^2 + |\hat{\mu}_2|^2)(k)dk \leq \int_{\mathcal{R}} (2|r||\hat{\mu}_1||\hat{\mu}_2|)(k)dk \quad (\text{III.2.29})$$

Or d'après le théorème 3.3 (partie I, chapitre 3), le taux de convergence  $\rho = r^2$  vérifie  $|\rho(k)| < 1, \forall k \in \mathcal{R}$  ce qui implique que  $|r(k)| < 1, \forall k \in \mathcal{R}$ . Par suite, avec la relation (III.2.29) on obtient

$$\int_{\mathcal{R}} (|\hat{\mu}_1|^2 + |\hat{\mu}_2|^2)(k)dk < \int_{\mathcal{R}} (2|\hat{\mu}_1||\hat{\mu}_2|)(k)dk$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathcal{R}} (|\hat{\mu}_1| - |\hat{\mu}_2|)^2(k)dk < 0$$

et donc

$$\| |\hat{\mu}_1| - |\hat{\mu}_2| \|^2 < 0$$

ce qui n'est pas possible.

Par conséquent,  $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = 0$ , et donc  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ .  $\square$

## 2.3 Résolution par l'algorithme GCR projeté

Dans cette section, nous décrivons la méthode projetée du point de vue de l'algorithme de résolution. Nous nous plaçons dans le cadre des méthodes



de Krylov telles que la méthode GCR (Generalized Conjugate Residual, [42] (Y. Saad, 1996)). L'algorithme GCR appliqué au problème d'interface

$$D\mu = b \quad (\text{III.2.30})$$

consiste à chercher, à l'itération  $p$ , une solution approchée  $\mu^p$  dans l'espace de Krylov  $\mathcal{K}_p = \{r^0, Dr^0, \dots, D^{p-1}r^0\}$  avec  $r^0$  le résidu initial, telle que  $(D\mu^p - b, Dw) = 0, \forall w \in \mathcal{K}_p$ .

Ici, au lieu de résoudre le problème (III.2.30) par l'algorithme GCR, nous le résolvons par l'algorithme GCR projeté suivant :

- La phase d'initialisation va consister à calculer  $\mu^0 = C\alpha^0$  avec  $\alpha^0$  solution du problème (III.2.18), c'est-à-dire

$$(DC)^t DC\alpha^0 = (DC)^t b \quad (\text{III.2.31})$$

- La phase d'itération consiste à calculer, à l'itération  $p$ , une solution approchée  $\mu^p$  du problème d'interface (III.2.30) sous la forme

$$\mu^p = \mu^0 + \tilde{\mu}^p$$

où  $\tilde{\mu}^p$  est une solution approchée du problème

$$QDQ\tilde{\mu} = Q(b - D\mu^0)$$

que l'on cherche dans l'espace de Krylov

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_p &= \{Qr^0, QDQr^0, \dots, (QDQ)^{p-1}r^0\} \\ \text{avec } r^0 &= D\mu^0 - b \end{aligned}$$

et telle que

$$(D\mu^p - b, D\tilde{w}) = (D\tilde{\mu}^p + r^0, D\tilde{w}) = 0, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{\mathcal{K}}_p$$

Calcul de  $\mu^{p+1}$  :

On construit une base orthonormée  $\{\tilde{w}^0, \dots, \tilde{w}^{p-1}\}$  de  $\tilde{\mathcal{K}}_p$ , avec

$$\begin{aligned}\tilde{w}^0 &= Qr^0 \\ \tilde{w}^k &= Qr^k + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{i,k-1} \tilde{w}^i, \quad 1 \leq k \leq p-1 \\ \text{avec } r^k &= D\mu^k - b \\ \text{et } \mu^k &= \mu^{k-1} + \rho_{k-1} \tilde{w}^{k-1}\end{aligned}$$

où  $\gamma_{i,k-1}$  est tel que  $\tilde{w}^k$  est orthogonal aux  $\tilde{w}^i$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , et où  $\rho_{k-1}$  est tel que  $(D\mu^k - b, D\tilde{w}^i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ .

Alors, on construit  $\mu^{p+1}$  avec la relation

$$\begin{aligned}\mu^{p+1} &= \mu^p + \rho_p \tilde{w}^p \\ \text{avec } \tilde{w}^p &= Qr^p + \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_{i,p-1} \tilde{w}^i\end{aligned}$$

où  $\gamma_{i,p-1}$  est tel que  $\tilde{w}^p$  est orthogonal à  $\{\tilde{w}^0, \dots, \tilde{w}^{p-1}\} = \tilde{\mathcal{K}}_p$ , et où  $\rho_p$  est tel que  $(D\mu^{p+1} - b, D\tilde{w}^i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq p$ . C'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{aligned}\mu^{p+1} &= \mu^0 + \tilde{\mu}^{p+1} \\ \text{avec } \tilde{\mu}^{p+1} &\in \tilde{\mathcal{K}}_{p+1} = \{\tilde{w}^0, \dots, \tilde{w}^{p-1}\} + \{\tilde{w}^p\}\end{aligned}$$

$$\text{et } (D\mu^{p+1} - b, D\tilde{w}) = (D\tilde{\mu}^{p+1} + r^0, D\tilde{w}) = 0, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{\mathcal{K}}_{p+1}$$

L'algorithme GCR projeté appliqué au problème d'interface (III.2.30) est ainsi le suivant :

**Algorithme 2.1 (Algorithme GCR projeté).**

Phase d'initialisation de  $\mu$  :

On part d'un  $\mu^0 = C\alpha^0$  vérifiant (III.2.31), c'est-à-dire

$$(DC)^t DC\alpha^0 = (DC)^t b$$

Pour le résidu et la direction de descente, on a

$$\begin{aligned} r^0 &= D\mu^0 - b \\ \tilde{w}^0 &= Qr^0 \end{aligned}$$

Phase d'itération :

On suppose connu les vecteurs  $\mu^p$ ,  $r^p$ ,  $\tilde{w}^p$

Calcul de  $D\tilde{w}^p$

$$\rho_p = -\frac{(r^p, D\tilde{w}^p)}{(D\tilde{w}^p, D\tilde{w}^p)}$$

$$\begin{aligned} \mu^{p+1} &= \mu^p + \rho_p \tilde{w}^p \\ r^{p+1} &= r^p + \rho_p D\tilde{w}^p \end{aligned}$$

et la nouvelle direction de descente  $\tilde{w}^{p+1}$  est calculée à partir de la projection de  $r^p$  sur  $(\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}}$  et est réorthogonalisée par rapport aux directions de descente précédentes  $\tilde{w}^i$ ,  $1 \leq i \leq p$  :

$$\text{Calcul de } Qr^{p+1} \quad (\text{III.2.32})$$

$$\gamma_{i,p} = -\frac{(D(Qr^{p+1}), D\tilde{w}^i)}{(D\tilde{w}^i, D\tilde{w}^i)}, \quad 0 \leq i \leq p \quad (\text{III.2.33})$$

$$\tilde{w}^{p+1} = Qr^{p+1} + \sum_{i=0}^p \gamma_{i,p} \tilde{w}^i \quad (\text{III.2.34})$$

La différence de cet algorithme par rapport à l'algorithme GCR appliqué au problème (III.2.30) est que les directions de descente engendrent l'espace de Krylov  $\tilde{\mathcal{K}}_p = \{Qr^0, QDQr^0, \dots, (QDQ)^{p-1}r^0\}$ , avec  $r^0 = b - D\mu^0$ , au lieu d'engendrer l'espace de Krylov  $\mathcal{K}_p = \{r^0, Dr^0, \dots, D^{p-1}r^0\}$ . Ainsi, à chaque itération,  $\mu^p$  est calculé à partir des directions de descente, c'est-à-dire de la projection du résidu sur  $(\text{Im}(C))^{\perp_{D^t D}}$ , et non plus seulement à partir du résidu, ce que permet que  $\mu^p$  vérifie la contrainte (III.2.2) à chaque itération.

**Lemme 2.1.** *Supposons que la matrice  $D$  vérifie la propriété (III.2.13). Alors, dans l'algorithme GCR projeté, on a*

$$Qr^p = 0 \Rightarrow r^p = 0$$

*En particulier, l'algorithme GCR projeté ne peut pas stagner.*

En effet, supposons que le résidu  $r^p$  à l'itération  $p$  vérifie  $Qr^p = 0$ . Par définition,

$$r^p = D\mu^p - b = D\tilde{\mu}^p + r^0$$

avec  $\tilde{\mu}^p \in \text{Im}(Q)$  et  $r^0 \in \text{Im}(DQ)$  d'après (III.2.12)). Donc  $r^p \in \text{Im}(DQ)$ . Ainsi, il existe  $\beta \in \mathbb{R}^m$  tel que  $r^p = DQ\beta$ . Alors,  $r^p = DQ(Q\beta)$  puisque  $Q^2 = Q$ . Comme d'après le théorème 2.2, la restriction de  $QDQ$  à  $\text{Im}(Q)$  est un isomorphisme de  $\text{Im}(Q)$  sur  $\text{Im}(QDQ)$ , alors

$$\begin{aligned} Qr^p = QDQ(Q\beta) = 0 &\Rightarrow Q\beta = 0 \\ &\Rightarrow r^p = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Le calcul du gradient projeté à chaque itération demande un produit par la matrice  $(DC)^t D$  et par  $C$ , et la résolution du problème grossier (III.2.19). La matrice  $C^t D^t DC$  étant de petite dimension, la résolution du problème grossier (III.2.19) représente un coût négligeable. C'est également le cas du produit  $DC$  car les modes grossiers qui constituent la matrice  $C$  sont non nuls seulement sur une interface. Afin de faciliter la programmation et la parallélisation de l'algorithme, on procède de la façon suivante :

#### Mise en œuvre de l'algorithme

On calcule d'abord une base orthonormale au sens de  $(D., D.)$  de  $\text{Im}(C)$ . Pour cela, la matrice  $(DC)^t DC$  étant symétrique définie positive, on calcule sa factorisation de Cholesky :

$$(DC)^t DC = LL^t$$

puis on calcule  $\tilde{C}$  solution de

$$\tilde{C}L^t = C$$

$\tilde{C}$  étant la matrice relative à cette nouvelle base.

Par suite,

$$(D\tilde{C})^t D\tilde{C} = I$$

La résolution du problème grossier (III.2.19), à chaque itération, est alors réduite à calculer

$$\alpha = (D\tilde{C})^t Dv$$

### Solveur à deux niveaux

La méthode OO2 projetée peut ainsi être vue comme une méthode de résolution à *deux niveaux* ([13]) :

- Premier niveau :  
un vecteur  $\mu^p$  est calculé à chaque itération dans le but de réduire le saut des quantités de raccord aux interfaces  $\mathcal{B}_i(u_i) - \mathcal{B}_i(u_j)$  des champs de vitesse  $u$  sur les interfaces des sous-domaines.
- Deuxième niveau :  
un problème grossier est résolu afin de renforcer la continuité de la partie liée aux basses fréquences des champs de vitesse sur les interfaces des sous-domaines.

**Remarque 2.1.** *Dans le cas du preconditionneur  $M_2$ , si la solution du problème de départ est constante dans tout le domaine, alors le vecteur interface  $\mu$  associé à  $u$  est dans  $\text{Im}(C)$  :  $\mu = \mu^0$  et l’algorithme converge en une itération.*

**Remarque 2.2.** *Une autre classe d’algorithme comme l’algorithme ORTHODIR ([42] (Y. Saad, 1996)) consiste à calculer la nouvelle direction de descente  $w_p$  à partir de  $Dw_p$  au lieu de  $r^p$ . On peut alors utiliser un algorithme ORTHODIR projeté comme l’algorithme GCR projeté, en remplaçant les relations (III.2.32), (III.2.33) et (III.2.34) par*

*Calcul de  $Q(D\tilde{w}^{p+1})$*

$$\gamma_{i,p} = -\frac{(Q(D\tilde{w}^{p+1}), D\tilde{w}^i)}{(D\tilde{w}^i, \tilde{w}^i)}, \quad 0 \leq i \leq p$$

$$\tilde{w}^{p+1} = Q(D\tilde{w}^{p+1}) + \sum_{i=0}^p \gamma_{i,p} \tilde{w}^i$$

Dans le chapitre suivant, nous présentons des résultats numériques sur la méthode OO2 preconditionnée avec  $M_1$  ou  $M_2$ , appliquée à l’équation de convection-diffusion.

## Chapitre 3

# Résultats numériques : l'équation de convection-diffusion

Dans ce chapitre nous présentons des résultats numériques sur la méthode OO2 préconditionnée avec  $M_1$  ou  $M_2$  et appliquée à l'équation de convection-diffusion. Le domaine de calcul est le carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Le schéma de discrétisation en temps est celui du chapitre 4, partie II. Pour permettre au lecteur de mieux voir les conditions aux limites utilisées, nous écrivons ici le problème sous sa forme simple :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) &= g_1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) = g_2, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{L} = \frac{1}{\Delta t} + (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{CFL} (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) (a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) - \nu \Delta$ , et  $g_1$  et  $g_2$  des fonctions données. En pratique, c'est la forme incrémentale (voir chapitre 4, partie II, problème (II.4.3)-(II.4.5)) que nous avons considérée (en effectuant une seule itération en temps).

On considère un maillage cartésien à pas constant  $h = \frac{1}{i_{max}} = \frac{1}{j_{max}}$  où  $i_{max}$  est le nombre de points dans la direction des  $x$  et  $j_{max}$  le nombre de points dans la direction des  $y$  (ici  $i_{max} = j_{max}$ ). Cette équation est discrétisée par le schéma volumes finis de la partie II, chapitre 4. Le terme (II.4.10) (chapitre 4, partie II) est rajouté dans le schéma, afin d'enlever les oscillations de la

solution. Dans la plupart des cas, nous prenons un  $CFL$  très grand afin que la solution soit proche de la solution stationnaire. Le carré unité est découpé en  $K$  sous-domaines, sans recouvrement. L'application de la méthode OO2 à cette équation conduit au problème d'interface (II.2.8) (partie II, chapitre 2). Celui-ci est résolu par l'algorithme GCR projeté, et chaque problème local par une méthode directe. Nous comparons les résultats obtenus avec les préconditionneurs  $M_1$  et  $M_2$ .

**Critère d'arrêt** Pour chaque simulation numérique, on calcule dans un premier temps une solution de référence  $u_{ref}$  en exécutant le code multidomaine avec un résidu (défini p.171) inférieur à  $1.d-9$ . On désigne par "*Erreur*" la norme  $L^\infty$  de la différence entre la solution  $u$  que l'on calcule avec le code multidomaine et cette solution de référence (voir p.171). Alors, dans tous les cas tests effectués, le critère d'arrêt est  $Erreur < 1.d - 6$ .

**Remarque 3.1.** Dans la forme incrémentale (voir chapitre 4, partie II, problème (II.4.3)-(II.4.5)), c'est-à-dire celle que nous avons mise en œuvre, nous avons toujours des conditions aux limites homogènes sur le bord du domaine global. Pour cette raison, nous prenons, dans la définition de  $M_2$  (définition 2.2),  $u_i = 1$  dans  $\Omega_i$  et  $u_i = 0$  là où l'on a imposé une condition de Dirichlet.

Nous regardons d'abord l'influence de la discrétisation des conditions d'interface (partie II, chapitre 4, section 4.4.2). Ceci permet de mettre en évidence l'importance de la discrétisation de la condition de raccord aux points de croisement des sous-domaines. Puis nous vérifions numériquement que dans le cas où la vitesse de convection est nulle (cas symétrique), la convergence est quasiment indépendante du nombre de sous-domaines. Nous considérons ensuite le cas d'une solution globalement constante, afin de vérifier que dans ce cas la méthode préconditionnée avec  $M_2$  converge en une itération. Enfin, nous montrons des résultats numériques d'abord dans le cas d'une vitesse de convection de cisaillement, puis celui d'une vitesse de convection tournante, avec une couche limite commençant au point  $(0, 0)$  dans les deux cas.

### 3.1 Influence de la condition de raccord aux points de croisement des sous-domaines

Rappelons que dans la partie II, chapitre 4, section 4.4.2, nous avons introduit trois types de discrétisation des opérateurs d'interface OO2 : les opérateurs  $(OO2)_1$  et  $(OO2)_2$  qui font intervenir seulement les termes d'ordre 0 et d'ordre 1 aux points de croisement des sous-domaines, et l'opérateur  $(OO2)_3$  qui fait intervenir les termes d'ordre 2 aux points de croisement des sous-domaines. C'est l'opérateur d'interface  $(OO2)_3$  qui donne la meilleure convergence de l'algorithme, sans préconditionnement. L'objet de cette section est de regarder le comportement des préconditionneurs  $M_1$  et  $M_2$  avec ces différents opérateurs d'interface. Pour cela, on considère le problème

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) &= 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

avec une vitesse de convection  $a = y$ ,  $b = 0$ .

Le tableau 3.1 montre que la convergence obtenue avec le préconditionneur  $M_2$  est très sensible aux choix de l'opérateur aux points de croisement des interfaces. En particulier, la convergence est meilleure uniquement dans le cas de l'opérateur d'interface  $(OO2)_3$ . Pour le préconditionneur  $M_1$ , la convergence est pratiquement indépendante du choix de l'opérateur d'interface.

	$(OO2)_1$	$(OO2)_2$	$(OO2)_3$
sans préc	52	52	39
avec préc $M_1$	50	51	55
avec préc $M_2$	128	155	35

**Tableau 3.1: Nombre d'itérations,  $4 \times 4$  sous-domaines**

$$a = y, \quad b = 0, \quad \nu = 1.d - 2, \quad CFL = 1.d9, \quad h = \frac{1}{161}$$

Critère d'arrêt :  $Erreur < 1.d - 6$

Dans les sections suivantes nous ne considérerons que le cas de l'opérateur d'interface  $(OO2)_3$ .



### 3.2 Vitesse de convection nulle : opérateur symétrique

Dans cette section nous vérifions numériquement que dans le cas où la vitesse de convection est nulle (cas symétrique), la convergence de la méthode préconditionnée (avec  $M_1$  ou  $M_2$ ) est indépendante du nombre de sous-domaines. Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) &= e^{-x+y}, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) = e^{-x+y}, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

On suppose que le champ de vitesse de convection est nul :  $a = b = 0$ .

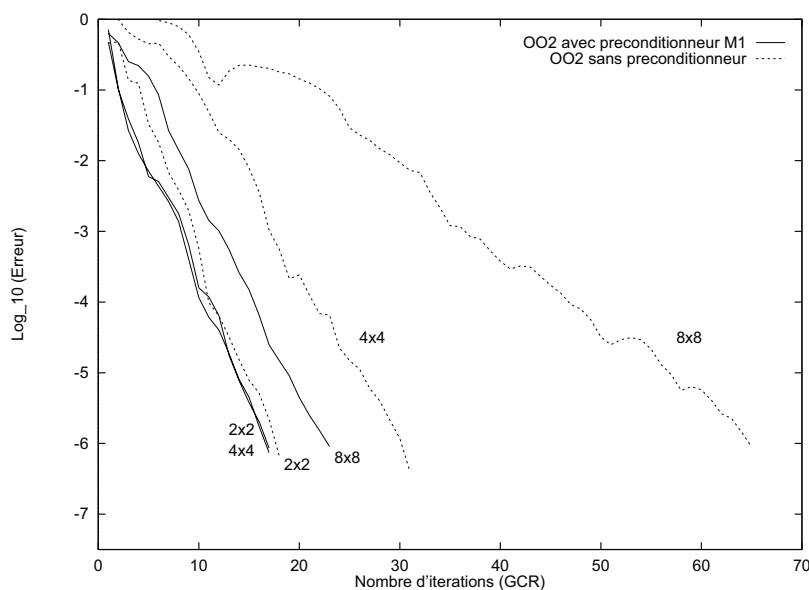


FIG. 3.1: Préconditionneur  $M_1$ ,  $N \times N$  carrés ( $N = 2, 4, 8$ )  
vitesse de convection nulle,  $\nu = 1.d0$ ,  $CFL = 1.d5$ ,  $h = \frac{1}{241}$

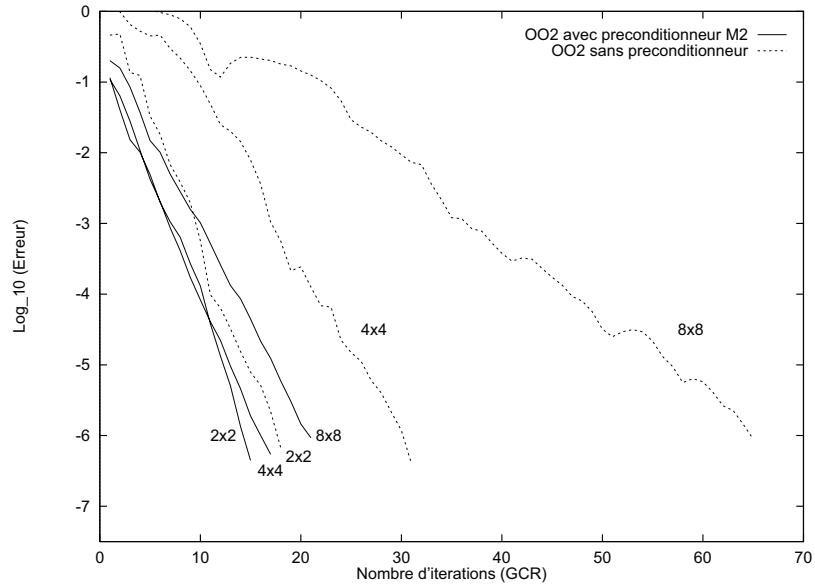


FIG. 3.2: Préconditionneur  $M_2$ ,  $N \times N$  carrés ( $N = 2, 4, 8$ )  
vitesse de convection nulle,  $\nu = 1.d0$ ,  $CFL = 1.d5$ ,  $h = \frac{1}{241}$

Les figures 3.1 et 3.2 montrent que la convergence de la méthode projetée, avec  $M_1$  ou  $M_2$ , est quasiment indépendante du nombre de sous-domaines.

**Remarque 3.2.** Pour un opérateur symétrique, les preconditionneurs  $M_1$  et  $M_2$  sont très proches.

En effet, lorsque la vitesse de convection est nulle et la constante  $\frac{1}{\Delta t}$  non nulle, les modes grossiers de  $M_2$  sont constants sur une interface sauf près des points du bord où l'on a imposé une condition de Dirichlet (à cause de la discrétisation des dérivées tangentielles) et nuls sur les autres interfaces. Ainsi ils coïncident presque tous avec les modes grossiers de  $M_1$ . Si nous ne rajoutons pas la condition de Dirichlet dans la définition de  $M_2$ , alors la convergence avec  $M_1$  et  $M_2$  est la même (figure 3.3).

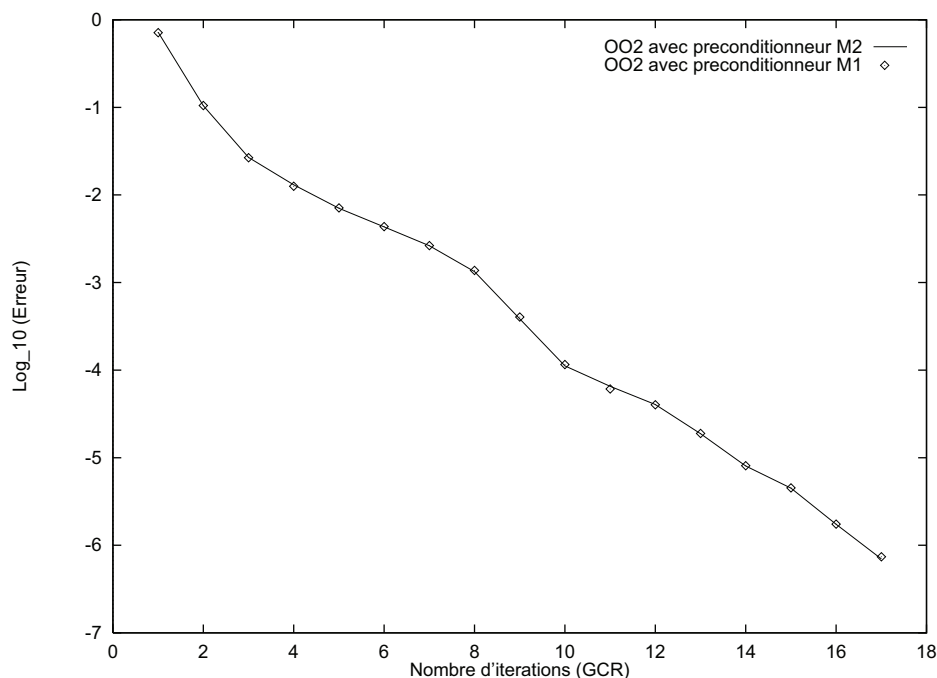


FIG. 3.3: Comparaison des préconditionneurs  $M_1$  et  $M_2$  lorsque l'on ne prend pas en compte les conditions de Dirichlet dans  $M_2$ .  $4 \times 4$  sous-domaines, vitesse de convection nulle,  $\nu = 1.d0$ ,  $CFL = 1.d5$ ,  $h = \frac{1}{241}$

### 3.3 Solution constante dans le domaine global

Dans cette section nous vérifions numériquement que la méthode préconditionnée avec  $M_2$  converge en une itération lorsque la solution est globalement constante. Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) &= 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

On suppose que le champ de vitesse de convection est  $a = y$ ,  $b = 0$ . Dans ce cas, la solution stationnaire est constante dans tout le domaine :  $u = 1$  dans  $[0, 1]^2$ . Le tableau 3.2 montre que la méthode préconditionnée par  $M_2$  converge en une itération. En effet, le vecteur interface  $\mu$  associé à  $u$  est dans l'espace grossier du préconditionneur  $M_2$  (voir la remarque 2.1).

	nombre d'itérations	$\log_{10}(Erreur)$
OO2 sans précéd	19	-8.389439
OO2 avec précéd $M_1$	21	-8.207403
OO2 avec précéd $M_2$	1	-10.867021

**Tableau 3.2: Nombre d'itérations,  $8 \times 1$  sous-domaines**

$$a = y, b = 0, \nu = 1.d - 2, CFL = 1.d40, h = \frac{1}{129}$$

Critère d'arrêt :  $Erreur < 1.d - 8$

### 3.4 Vitesse de convection de cisaillement

Dans cette section nous regardons le comportement de la méthode préconditionnée dans le cas d'un champ de vitesse de convection de cisaillement :  $a = y$ ,  $b = 0$ .

Nous considérons le problème :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) &= 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Le carré unité est d'abord découpé en bandes verticales (vitesse de convection normale aux interfaces) puis horizontales (vitesse de convection tangente aux interfaces) et ensuite en carrés.

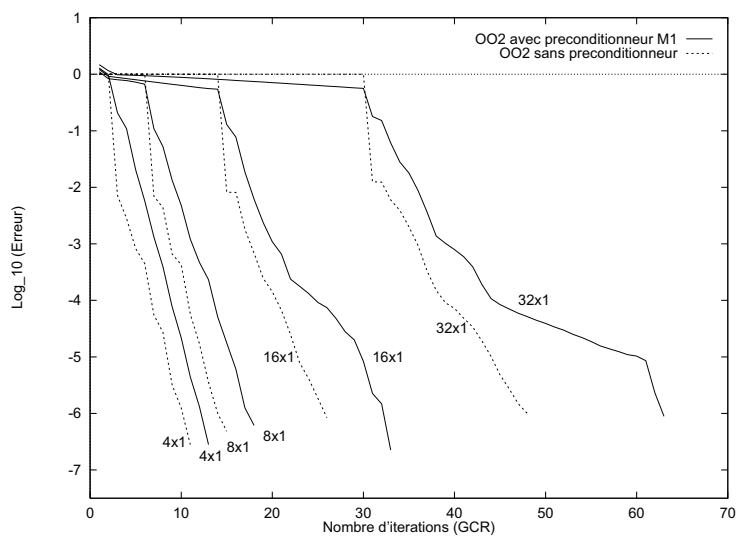


FIG. 3.4: Préconditionneur  $M_1$ ,  $N \times 1$  bandes ( $N = 4, 8, 16, 32$ )  
incidence normale

$$a = y, b = 0, \nu = 1.d - 2, CFL = 1.d9, h = \frac{1}{161}$$

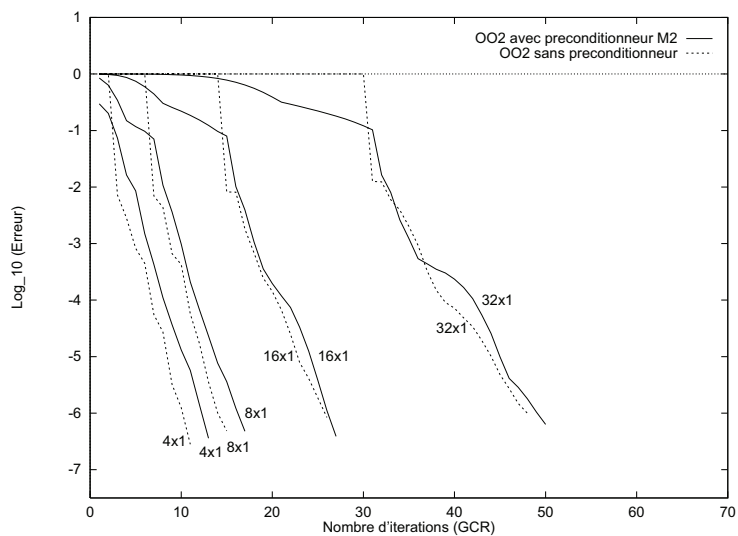


FIG. 3.5: Préconditionneur  $M_2$ ,  $N \times 1$  bandes ( $N = 4, 8, 16, 32$ )  
incidence normale

$$a = y, b = 0, \nu = 1.d - 2, CFL = 1.d9, h = \frac{1}{161}$$

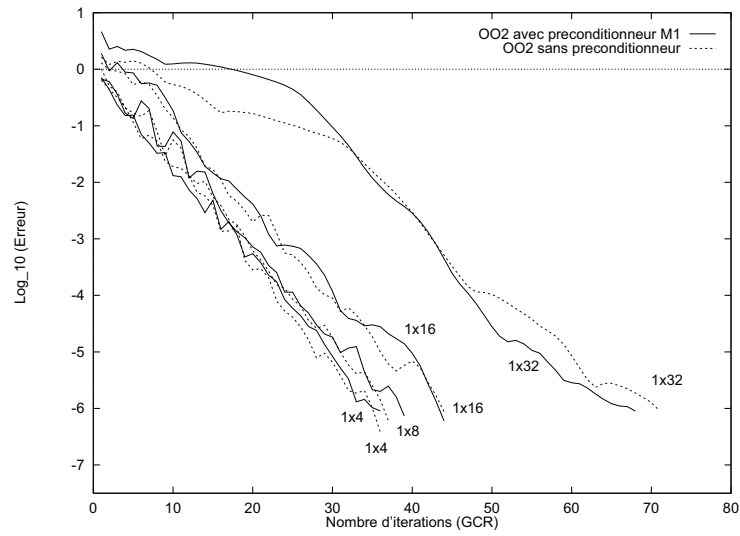


FIG. 3.6: Préconditionneur  $M_1$ ,  $1 \times N$  bandes ( $N = 4, 8, 16, 32$ )  
 incidence tangentielle  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{161}$

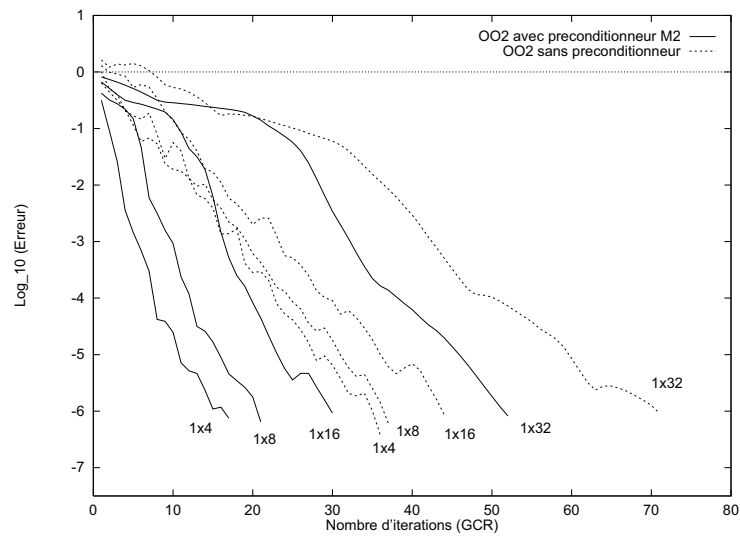


FIG. 3.7: Préconditionneur  $M_2$ ,  $1 \times N$  bandes ( $N = 4, 8, 16, 32$ )  
 incidence tangentielle  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{161}$

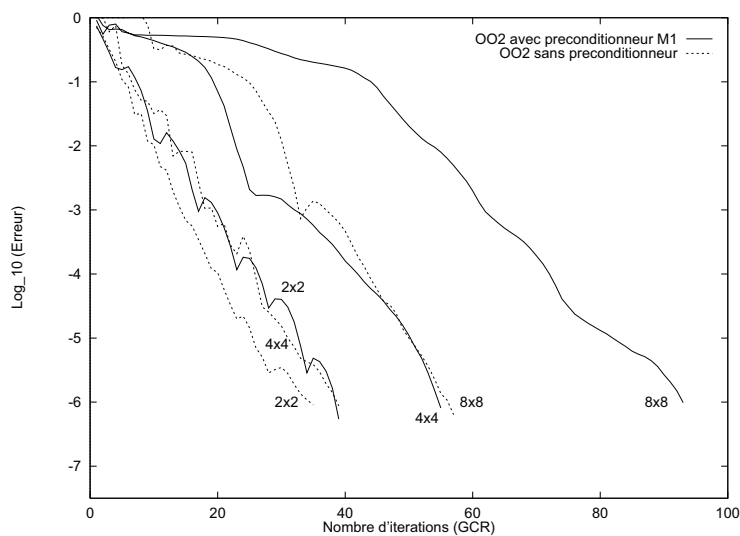


FIG. 3.8: Préconditionneur  $M_1$ ,  $N \times N$  carrés ( $N = 2, 4, 8$ )  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{161}$

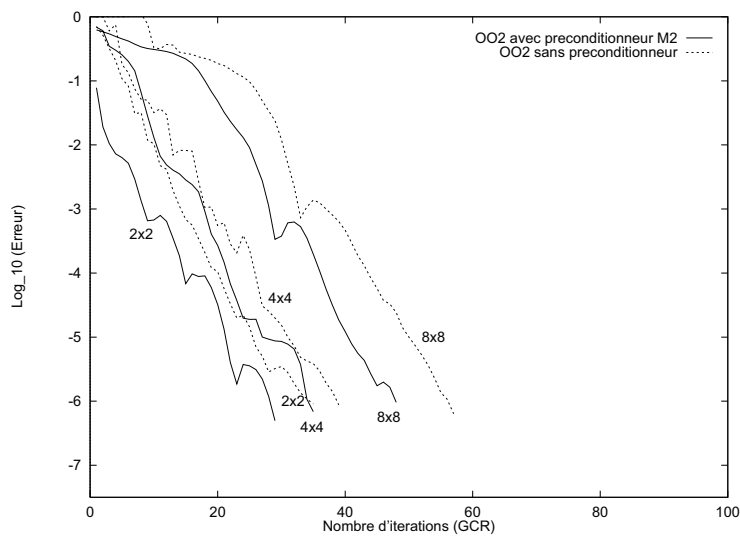


FIG. 3.9: Préconditionneur  $M_2$ ,  $N \times N$  carrés ( $N = 2, 4, 8$ )  
 $a = y$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{161}$

Dans le cas d'un découpage où la vitesse de convection est perpendiculaire aux frontières des sous-domaines, on constate que pour les deux préconditionneurs  $M_1$  et  $M_2$ , la convergence est améliorée uniquement sur les premières itérations (figures 3.4 et 3.5). Dans le cas d'un découpage où la vitesse de convection est tangente aux frontières des sous-domaines, le préconditionneur  $M_1$  n'améliore pas la convergence (figure 3.6). Par contre la convergence est améliorée avec le préconditionneur  $M_2$  (figure 3.7).

Pour un découpage plus général, le préconditionneur  $M_2$  améliore légèrement la convergence (figure 3.9) ce qui n'est pas le cas du préconditionneur  $M_1$  (figure 3.8). Le fait de changer d'espace de Krylov fait que la convergence de l'algorithme GCR projeté peut être moins bonne que celle de l'algorithme GCR initial. C'est ce qui se passe dans le cas du préconditionneur  $M_1$ , où la convergence est meilleure uniquement sur les premières itérations.

### 3.5 Vitesse de convection tournante

Dans cette section nous regardons le comportement de la méthode préconditionnée dans le cas d'un champ de vitesse de convection tournant :  $a = -\sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$  et  $b = \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$ .

Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Les figures 3.10 et 3.11 montrent que la convergence de la méthode projetée avec  $M_2$  est meilleure que celle obtenue avec  $M_1$ . La figure (3.12) permet de comparer  $M_1$  et  $M_2$ . La méthode OO2 projetée avec  $M_2$  a une convergence pratiquement indépendante du nombre de sous-domaines (figure 3.11).



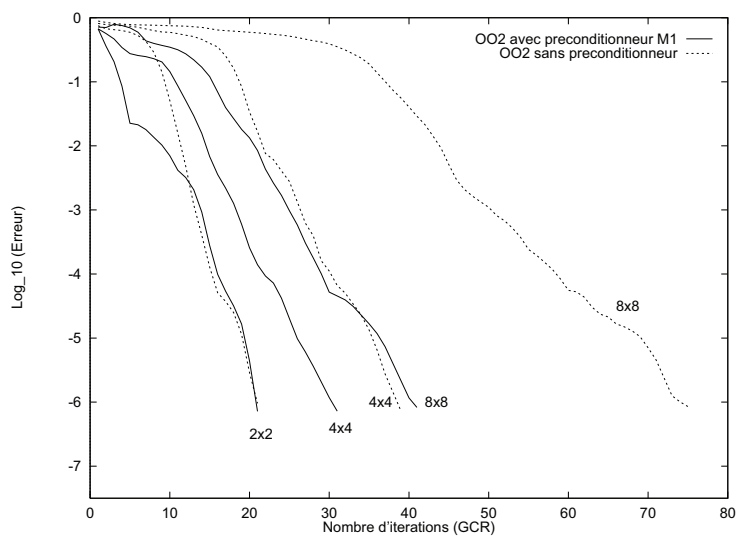


FIG. 3.10: Préconditionneur  $M_1$ ,  $N \times N$  carrés ( $N = 2, 4, 8$ )  
 vitesse de convection tournante,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$

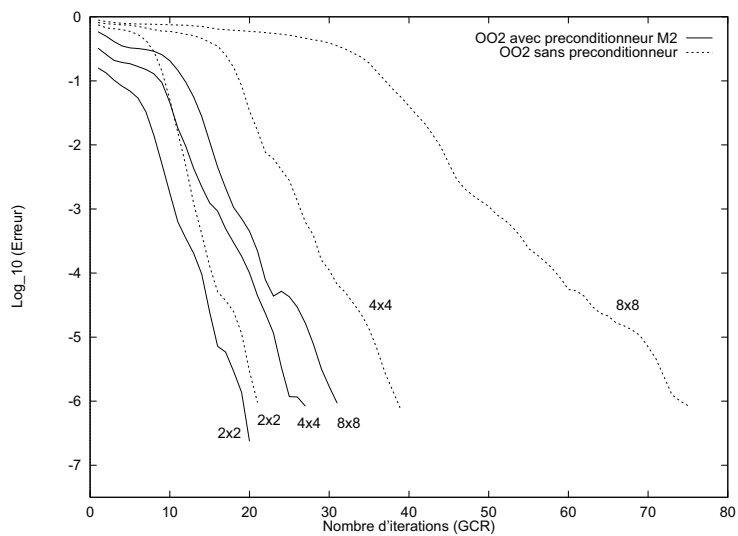


FIG. 3.11: Préconditionneur  $M_2$ ,  $N \times N$  carrés ( $N = 2, 4, 8$ )  
 vitesse de convection tournante,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$

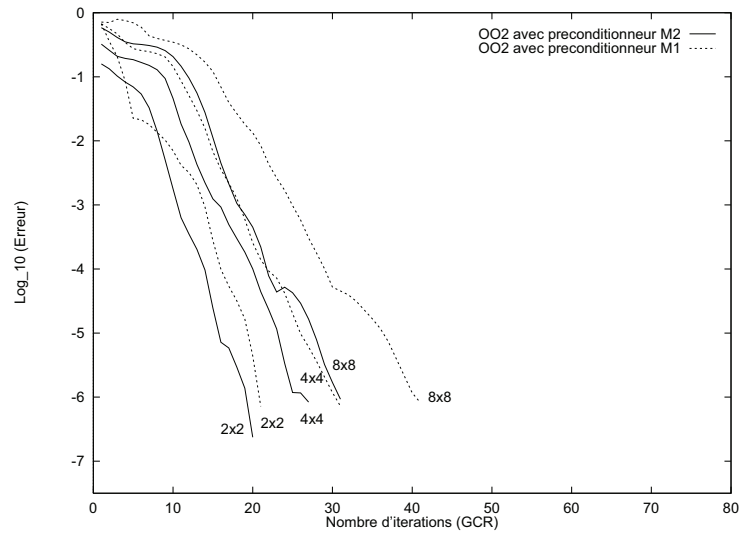


FIG. 3.12: **Comparaison de  $M_1$  et  $M_2$ ,  $N \times N$  carrés ( $N = 2, 4, 8$ )**  
*vitesse de convection tournante,  $\nu = 1.d - 2$ ,  $CFL = 1.d9$ ,  $h = \frac{1}{241}$*

### 3.6 Conclusion

La méthode OO2 préconditionnée consiste à projeter, à chaque itération, les solutions dans l'orthogonal d'un espace grossier. Ceci a pour but d'avoir une convergence indépendante du nombre de sous-domaines. Avec l'espace grossier du préconditionneur  $M_1$  (celui du cas symétrique), la convergence est pratiquement indépendante du nombre de sous-domaines pour un problème symétrique. Par contre, ce n'est plus le cas pour un problème de convection-diffusion. Dans certains cas, la convergence est moins bonne que celle de la méthode sans préconditionnement. La convergence est faiblement dépendante du nombre de sous-domaines dans le cas de la vitesse de convection tournante. L'espace grossier du préconditionneur  $M_2$  est mieux adapté à l'équation de convection-diffusion, et la convergence est améliorée de beaucoup

- dans le cas où la vitesse de convection est nulle (cas symétrique), alors la convergence est quasiment indépendante du nombre de sous-domaines.
- dans le cas de la vitesse de convection tournante. La convergence est faiblement dépendante du nombre de sous-domaines dans ce cas.

- dans le cas de la vitesse de convection de cisaillement, lorsque celle-ci est tangentielle aux frontières des sous-domaines.

La convergence est peu ou pas améliorée

- dans le cas où la vitesse de convection est de cisaillement et est perpendiculaire aux frontières des sous-domaines. Les méthodes avec et sans préconditionneur donnent quasiment la même convergence dans ce cas.
- dans le cas où la vitesse de convection est de cisaillement, et où le domaine de calcul est découpé en carrés. Dans ce cas le préconditionneur  $M_2$  améliore légèrement la convergence.

Néanmoins il faut des conditions de raccord spécifiques aux points de croisement des sous-domaines, pour avoir une bonne efficacité du préconditionneur  $M_2$ .

## Quatrième partie

Etude de conditions de raccord  
aux points de croisement des  
sous-domaines



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>233</b>
<b>2</b>	<b>Problèmes locaux bien posés</b>	<b>235</b>
2.1	Notations . . . . .	236
2.2	Définition du problème local et étude de l'existence et de l'unicité d'une solution . . . . .	238



# Chapitre 1

## Introduction

Comme nous l'avons remarqué dans le corps du travail, dans le cas d'un découpage général du domaine, l'utilisation de conditions d'interface d'ordre 2 dans la direction tangente à l'interface soulève un problème crucial, celui des conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines. Aux chapitres II.4 et III.3, nous avons imposé numériquement aux points de croisement une condition sur le saut des dérivées tangentes de la solution, ce qui permet d'améliorer nettement la convergence. C'est un problème difficile et cette partie constitue une première approche. Nous montrons, dans le cas d'un découpage en polygones convexes et pour un type de condition de raccord aux points de croisement des sous-domaines, que les problèmes locaux dans les sous-domaines admettent une unique solution.





## Chapitre 2

### Problèmes locaux bien posés

Ce chapitre a pour objet l'étude de conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines afin que les problèmes locaux, dans chaque sous-domaine, intervenant dans la méthode OO2 soient bien posés. Nous étendons la technique développée dans [35] (F. Nataf, 1998) à l'équation de convection-diffusion (de la partie I) :

$$\begin{aligned} cu + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

On cherche à résoudre ce problème par la méthode OO2 (partie II, chapitre 2). Cette méthode consiste à résoudre un problème condensé sur les interfaces des sous-domaines, avec des conditions de raccord sur les interfaces qui sont les conditions OO2 (partie I, chapitre 3). Dans un cadre continu, l'opérateur d'interface OO2 pour un sous-domaine  $\Omega_i$  s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{B}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} - c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}_i} - c_3 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\tau}_i^2}$$

avec  $c_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i)^2 + 4c\nu}}{2\nu}$ ,  $c_2$  et  $c_3$  les coefficients optimisés (voir partie I, chapitre 3),  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure à  $\Omega_i$  et  $\boldsymbol{\tau}_i$  le vecteur tangent unitaire.

Nous allons voir que l'utilisation de conditions d'interface d'ordre 2 dans la direction tangentielle nécessite d'ajouter des conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines pour que le problème local à chaque sous-domaine soit bien posé.

Nous commençons par introduire des notations suivant [35] (F. Nataf, 1998). Nous définissons ensuite le problème local et montrons, sous certaines conditions, que ce problème est bien posé.

## 2.1 Notations

Soit  $\Omega_i$  un sous-domaine de  $\Omega$ , que l'on suppose polygonal et convexe. On suppose que  $\Omega_i$  a  $n_s$  sommets  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq n_s$  qui sont numérotés tels que  $S_{j+1}$  suit  $S_j$  dans le sens direct ( $S_{n_s+1} = S_0 = S_1$ ). On note  $\Gamma_j$  le segment d'extrémités  $S_{j-1}$  et  $S_j$ , pour  $2 \leq j \leq n_s$ , et  $\Gamma_1$  le segment d'extrémités  $S_{n_s}$  et  $S_1$  (voir figure 2.1). On note  $\mathbf{n}_j$  la normale extérieure à  $\Gamma_j$  et  $\boldsymbol{\tau}_j$  le vecteur tangent unitaire.

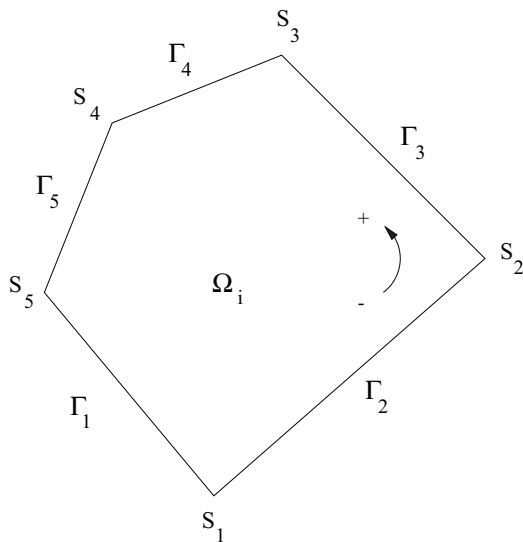


FIG. 2.1: Notations des interfaces et des sommets de  $\Omega$

On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des indices  $j$  pour lesquels on a imposé une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_j$ , et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des indices  $j$  pour lesquels  $\Gamma_j$  est une interface, c'est-à-dire où l'on a imposé une condition OO2. Pour chaque  $\Gamma_j$ ,  $j \in \mathcal{A}$ , on note  $\alpha_j = c_1(\mathbf{a}, \mathbf{n}_j)$ ,  $\beta_j = c_2(\mathbf{a}, \mathbf{n}_j, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_j)$  et  $\gamma_j = c_3(\mathbf{a}, \mathbf{n}_j, \mathbf{a}, \boldsymbol{\tau}_j)$ .

Ainsi,

- $u = 0$  sur  $\Gamma_j$  si  $j \in \mathcal{D}$
- $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_j} - \alpha_j u + \beta_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j} - \gamma_j \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^2} = g_j$  sur  $\Gamma_j$  si  $j \in \mathcal{A}$

où  $g_j$  est une fonction donnée.

On introduit, pour  $m = 1$  ou  $2$  l'espace :

$$\mathcal{H}^m(\Omega_i) = \{u \in H^m(\Omega_i) / u|_{\Gamma_j} \in H^m(\Gamma_j) \text{ pour } j \in \mathcal{A} \text{ et } u|_{\Gamma_j} = 0 \text{ pour } j \in \mathcal{D}\}$$

qui est muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega_i)} = \sqrt{\|u\|_{H^m(\Omega_i)}^2 + \sum_{j=1, n_s} \|u|_{\Gamma_j}\|_{H^m(\Gamma_j)}^2}$$

et du produit scalaire associé :

$$(u, v)_{\mathcal{H}^m(\Omega_i)} = (u, v)_{H^m(\Omega_i)} + \sum_{j=1, n_s} (u|_{\Gamma_j}, v|_{\Gamma_j})_{H^m(\Gamma_j)}$$

**Lemme 2.1.**  $(\mathcal{H}^m(\Omega_i), \|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\Omega_i)})$  est un espace de Hilbert.

En effet, montrons que  $(\mathcal{H}^m(\Omega_i), \|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\Omega_i)})$  est complet :

Soit  $(v^k)_{k=0}^\infty$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{H}^m(\Omega_i)$ . Alors  $(v^k)_{k=0}^\infty$  est une suite de Cauchy dans  $H^m(\Omega_i)$ . Comme  $H^m(\Omega_i)$  est un espace de Hilbert, il existe un élément  $v \in H^m(\Omega_i)$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (v^k) = v$  dans  $H^m(\Omega_i)$ . De même, il existe  $w \in H^m(\Gamma_j)$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (v^k|_{\Gamma_j}) = w$  dans  $H^m(\Gamma_j)$ . On utilise alors le fait que l'application trace  $\gamma_0 : u \in H^m(\Omega_i) \longrightarrow u|_{\Gamma_j} \in H^{1/2}(\Gamma_j)$  est continue, ce qui implique que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_0(v^k)) = \gamma_0(v)$  dans  $H^m(\Gamma_j)$ . Par suite,  $w = v|_{\Gamma_j}$ , et donc  $v \in \mathcal{H}^m(\Omega_i)$ .  $\square$

## 2.2 Définition du problème local et étude de l'existence et de l'unicité d'une solution

Nous écrivons le problème local au sous-domaine  $\Omega_i$  sous la forme :

$$cu + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega_i \quad (\text{IV.2.1})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j, j \in \mathcal{D} \quad (\text{IV.2.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_j} - \alpha_j u + \beta_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j} - \gamma_j \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^2} = g_j \quad \text{sur } \Gamma_j, j \in \mathcal{A} \quad (\text{IV.2.3})$$

$$(\gamma_{j+1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_{j+1}} - \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j}) - \delta_j u = h_j \quad \text{en } S_j \quad (\text{IV.2.4})$$

où  $f \in L^2(\Omega_i)$ ,  $g_j \in L^2(\Gamma_j)$ ,  $j \in \mathcal{A}$  sont des fonctions données,  $h_j \in \mathbb{R}$  est donné, et  $\delta_j$  une constante à choisir. Alors nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.1.** *On suppose que  $\mathcal{L}$  est à coefficients constants. On suppose également que :*

$$\delta_j + \frac{(\beta_j - \beta_{j+1})}{2} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n_s$$

Alors le problème (IV.2.1)-(IV.2.4) admet une unique solution  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega_i)$ .

**Preuve du théorème 2.1 :**

Soit  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega_i)$ . Alors, la relation (IV.2.3) a bien un sens dans  $L^2(\Gamma_j)$ , car  $u|_{\Gamma_j} \in H^2(\Gamma_j)$ . De même, les termes intervenant dans (IV.2.4) ont un sens car

$$u \in \mathcal{H}^2(\Omega_i) \Rightarrow u|_{\Gamma_j} \in H^2(\Gamma_j) \subset C^1(\bar{\Gamma}_j), j \in \mathcal{A}$$

Nous allons démontrer le théorème en trois étapes :

- Ecriture de la formulation faible.
- Existence et unicité d'une solution  $u$  dans  $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$  de la formulation faible, par le théorème de Lax-Milgram.
- La solution  $u$  de la formulation faible est en fait dans  $\mathcal{H}^2(\Omega_i)$ , c'est donc l'unique solution du problème (IV.2.1)-(IV.2.4).

1) Formulation faible :

Nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram (voir par exemple [4] (H. Brezis, 1992)). Pour cela, écrivons la formulation variationnelle du problème (IV.2.1)-(IV.2.4) dans  $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$  :

Soit  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$ ; en multipliant l'équation (IV.2.1) par  $v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$  et en l'intégrant sur  $\Omega_i$ , on a :

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad \int_{\Omega_i} (cuv + a \frac{\partial u}{\partial x} v + b \frac{\partial u}{\partial y} v + \nu \nabla u \cdot \nabla v) - \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_j} v = \int_{\Omega_i} f v$$

En remplaçant  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_j}$  sur  $\Gamma_j$  à l'aide de la relation (IV.2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad \int_{\Omega_i} (cuv + a \frac{\partial u}{\partial x} v + b \frac{\partial u}{\partial y} v + \nu \nabla u \cdot \nabla v) \\ - \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} (g_j + \alpha_j u - \beta_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j} + \gamma_j \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^2}) v = \int_{\Omega_i} f v \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green sur  $\Omega_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad \int_{\Omega_i} (cuv + a \frac{\partial u}{\partial x} v + b \frac{\partial u}{\partial y} v + \nu \nabla u \cdot \nabla v) \\ + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} (-\alpha_j u v + \beta_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j} v + \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\tau}_j}) - \nu \sum_{j=1, n_s} [\gamma_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j} v]_{S_{j-1}}^{S_j} \\ = \int_{\Omega_i} f v + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} g_j v \end{aligned}$$

Le terme  $v(S_j)$  a bien un sens puisque

$$v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \Rightarrow v|_{\Gamma_j} \in H^1(\Gamma_j) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Gamma}_j), \quad j \in \mathcal{A}$$

On remarque alors que

$$\sum_{j=1, n_s} [\gamma_j \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j} v]_{S_{j-1}}^{S_j} = \sum_{j=1, n_s} (\gamma_j (\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_j})|_{\Gamma_j} - \gamma_{j+1} (\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_{j+1}})|_{\Gamma_{j+1}})(S_j) v(S_j) \quad (\text{IV.2.5})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad & \int_{\Omega_i} (cuv + a \frac{\partial u}{\partial x} v + b \frac{\partial u}{\partial y} v + \nu \nabla u \cdot \nabla v) \\
& + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} (-\alpha_j uv + \beta_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} v + \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} \frac{\partial v}{\partial \tau_j}) \\
& - \nu \sum_{j=1, n_s} (\gamma_j (\frac{\partial u}{\partial \tau_j})|_{\Gamma_j} - \gamma_{j+1} (\frac{\partial u}{\partial \tau_{j+1}})|_{\Gamma_{j+1}}) (S_j) v(S_j) \\
& = \int_{\Omega_i} f v + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} g_j v
\end{aligned}$$

On utilise ensuite la condition de raccord (IV.2.4) au sommet  $S_j$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad & \int_{\Omega_i} (cuv + a \frac{\partial u}{\partial x} v + b \frac{\partial u}{\partial y} v + \nu \nabla u \cdot \nabla v) \\
& + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} (-\alpha_j uv + \beta_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} v + \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} \frac{\partial v}{\partial \tau_j}) + \nu \sum_{j=1, n_s} \delta_j u(S_j) v(S_j) \\
& = \int_{\Omega_i} f v + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} g_j v - \nu \sum_{j=1, n_s} h_j v(S_j)
\end{aligned}$$

On pose donc

$$\begin{aligned}
\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad & a(u, v) = \int_{\Omega_i} (cuv + a \frac{\partial u}{\partial x} v + b \frac{\partial u}{\partial y} v + \nu \nabla u \cdot \nabla v) \\
& + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} (-\alpha_j uv + \beta_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} v + \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} \frac{\partial v}{\partial \tau_j}) + \nu \sum_{j=1, n_s} \delta_j u(S_j) v(S_j) \\
\ell(v) & = \int_{\Omega_i} f v + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} g_j v - \nu \sum_{j=1, n_s} h_j v(S_j)
\end{aligned}$$

Et la formulation faible s'écrit :

Trouver  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad a(u, v) = \ell(v) \quad (\text{IV.2.6})$$

Notons que les fonctions  $u$  et  $v$  étant dans  $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$ ,  $u|_{\Gamma_j}$  et  $v|_{\Gamma_j}$  sont dans  $H^1(\Gamma_j) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Gamma}_j)$ , et donc les termes  $u(S_j)$  et  $v(S_j)$  ont bien un sens.

2) Existence et unicité d'une solution de la formulation faible :

Vérifions maintenant chaque hypothèse du théorème de Lax-Milgram :

- $(\mathcal{H}^1(\Omega_i), \|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(\Omega_i)})$  est un espace de Hilbert :

Cette propriété est démontrée au lemme 2.1.

- $\ell$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$

Soit  $v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$ .  $\ell$  est une forme linéaire, et

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega_i)} \|v\|_{L^2(\Omega_i)} + \nu \sum_{j=1, n_s} \|g_j\|_{L^2(\Gamma_j)} \|v\|_{L^2(\Gamma_j)} + \nu C_1 \sum_{j=1, n_s} |h_j| \|v\|_{H^1(\Gamma_j)}$$

où  $C_1 > 0$  est une constante. Le troisième terme de cette relation provient du fait que l'injection de  $H^1(\Gamma_j)$  dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Gamma}_j)$  est continue. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour les vecteurs), il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad |\ell(v)| \leq C \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega_i)}$$

ce qui montre que  $\ell$  est continue sur  $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$ .

- $a$  est une forme bilinéaire continue et coercive sur  $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$  :

La continuité de  $a$  sur  $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$  s'obtient également en utilisant le fait que l'injection de  $H^1(\Gamma_j)$  dans  $\mathcal{C}^0(\bar{\Gamma}_j)$  est continue, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrons que  $a$  est coercive :

Soit  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$ .



Alors,

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega_i} cu^2 + \int_{\Omega_i} a \frac{\partial u}{\partial x} u + b \frac{\partial u}{\partial y} u + \int_{\Omega_i} \nu (\nabla u)^2 \\
&\quad - \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \alpha_j u^2 + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \beta_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} u + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \gamma_j \left( \frac{\partial u}{\partial \tau_j} \right)^2 \\
&\quad + \nu \sum_{j=1, n_s} \delta_j u^2(S_j)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} a \frac{\partial u}{\partial x} u + b \frac{\partial u}{\partial y} u &= \int_{\Omega_i} \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2) \\
&= \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_j}{2} u^2
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \beta_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} u &= \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \frac{\beta_j}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_j} (u^2) = \nu \sum_{j=1, n_s} \left[ \frac{\beta_j}{2} u^2 \right]_{S_{j-1}}^{S_j} \\
&= \nu \sum_{j=1, n_s} \frac{(\beta_j - \beta_{j+1})}{2} u^2(S_j)
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la relation (IV.2.5), appliquée ici au terme

$$\sum_{j=1, n_s} \left[ \frac{\beta_j}{2} u^2 \right]_{S_{j-1}}^{S_j}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega_i} cu^2 + \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_j}{2} - \nu \alpha_j \right) u^2 + \nu \int_{\Omega_i} (\nabla u)^2 \\
&\quad + \nu \sum_{j=1, n_s} \int_{\Gamma_j} \gamma_j \left( \frac{\partial u}{\partial \tau_j} \right)^2 + \nu \sum_{j=1, n_s} \left( \delta_j + \frac{(\beta_j - \beta_{j+1})}{2} \right) u^2(S_j)
\end{aligned}$$

Or,

$$\alpha_j = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_j - \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_j)^2 + 4c\nu}}{2\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_j}{2} - \nu \alpha_j = \frac{\sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_j)^2 + 4c\nu}}{2}$$

Alors, si on suppose que  $\delta_j + \frac{(\beta_j - \beta_{j+1})}{2} \geq 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, n_s$ , on a :

$$a(u, u) \geq \min(c, \nu) \|u\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + \min_{j=1, n_s} \left( \min\left(\frac{\sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_j)^2 + 4c\nu}}{2}, \nu\gamma_j\right) \right) \|u\|_{H^1(\Gamma_j)}^2$$

Donc il existe  $C' > 0$  tel que

$$\forall u \in \mathcal{H}^1(\Omega_i), \quad a(u, u) \geq C' \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega_i)}^2$$

ce qui démontre la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$ .

On applique alors le théorème de Lax-Milgram, ce qui démontre l'existence et l'unicité d'une solution  $u \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$  du problème variationnel (IV.2.6).

3) Régularité  $\mathcal{H}^2(\Omega_i)$  de la solution  $u$  :

La démonstration est la même que dans [35] (F. Nataf, 1998). Nous rappelons juste les trois étapes principales de cette démonstration :

1. Soit  $u$  la solution du problème variationnel (IV.2.6). Alors, sur chaque segment  $\Gamma_j$ ,  $1 \leq j \leq n_s$ ,  $u|_{\Gamma_j} \in H^{3/2}(\Gamma_j)$ . Cette étape utilise des résultats d'interpolation de [28] (J.L. Lions et E. Magenes, 1968).
2.  $u \in H^2(\Omega_i)$ . Cette étape utilise des résultats de régularité pour les problèmes aux limites dans des polygones de [18] (P. Grisvard, 1992).
3.  $u|_{\Gamma_j} \in H^2(\Gamma_j)$ ,  $1 \leq j \leq n_s$ .

Donc la solution  $u$  du problème variationnel (IV.2.6) est dans  $\mathcal{H}^2(\Omega_i)$  et c'est la solution du problème (IV.2.1)-(IV.2.4).  $\square$



## Conclusion



---

Dans cette étude, nous avons présenté une nouvelle méthode de décomposition de domaine sans recouvrement, itérative, parallélisable, pour des équations à convection dominante. C'est une méthode de type Schwarz où les conditions d'interface, utilisant la théorie des conditions aux limites artificielles (CLA), permettent d'obtenir un algorithme convergent avec un taux de convergence optimisé. Les conditions d'interface sont d'ordre 1 dans la direction normale, et d'ordre 2 dans la direction tangente à l'interface. L'algorithme consiste en une reformulation de méthode de type Schwarz sous la forme d'un problème d'interface, celui-ci étant résolu par un algorithme de type Krylov.

Les tests numériques que nous avons présentés pour différents schémas ont prouvé que l'utilisation des conditions d'interface OO2 permet de réduire nettement le nombre d'itérations de nécessaire pour atteindre la convergence, par rapport aux conditions d'interface de Dirichlet (avec recouvrement), ou aux approximations "basses fréquences" d'ordre 0 (de type Robin) et d'ordre 2 des CLA. Comme le temps de calcul dans une itération est le même quelle que soit la condition d'interface utilisée, le temps de calcul global est nettement réduit (l'utilisation de conditions d'ordre 2 n'augmente pas la largeur de bande des matrices locales).

Les simulations numériques ont montré une vitesse de convergence indépendante de l'angle de la vitesse de convection par rapport aux interfaces. Ceci a pour conséquence, pour un nombre de sous-domaines fixé, d'avoir une convergence indépendante de la façon dont on découpe le domaine (en bandes ou en rectangles). Ainsi la méthode OO2 s'applique pour des découpages quelconques du domaine de calcul, sans avoir à tenir compte des phénomènes physiques tels que les couches limites ou les zones de recirculation. Nous avons mis aussi en évidence le fait que la convergence de la méthode est peu sensible aux variations des paramètres physiques intervenant dans le problème (vitesse de convection, viscosité) ainsi qu'aux paramètres de discrétisation (pas de temps, pas du maillage).

Néanmoins, à ce stade, la convergence se dégrade lorsque le nombre de sous-domaines augmente. Pour améliorer la convergence, nous avons introduit un préconditionneur "basses fréquences". Il s'agit d'une extension aux problèmes non symétriques d'un préconditionneur utilisé pour les problèmes symétriques. Celui-ci consiste, à chaque itération de l'algorithme, à projeter les

solutions dans l'orthogonal d'un espace contenant des fonctions spécifiques. L'originalité de ce préconditionneur réside dans le choix de cet espace, de sorte qu'à chaque itération on capture la partie "basses fréquences" de la solution. Les tests numériques ont montré que la vitesse de convergence était maintenant quasiment indépendante du nombre de sous-domaines dans le cas de la convection nulle (cas symétrique) et également dans le cas de la convection tournante.

Ceci fait de la méthode OO2 préconditionnée une méthode très efficace, peu coûteuse et robuste.

Cependant, dans le cas de découpages quelconques du domaine de calcul, l'utilisation de conditions d'interface différentielles d'ordre deux dans la direction tangente à l'interface nécessite d'ajouter des conditions de raccord aux points de croisement des sous-domaines. Nous avons montré, dans le cas d'un découpage en polygones convexes et pour un type de conditions de raccord aux points de croisement, que le problème local dans chaque sous-domaine est bien posé. L'écriture de ces conditions au niveau de l'algorithme, et pour des sous-domaines autres que des polygones reste à notre connaissance un problème ouvert.

La méthode OO2 a été appliquée à d'autres problèmes tels que ceux de type Helmholtz (Philippe Chevalier, thèse 1998). L'extension à la résolution des équations d'Euler fait aujourd'hui l'objet de la thèse de Thierry Gonzalez.

## Références bibliographiques

- [1] Y. Achdou and F. Nataf,  
*Preconditioners for the Mortar Method based on Local Approximations of the Steklov-Poincaré Operator*, M<sup>3</sup>AS, **5**, n° 7, pp. 967-997, 1995.
- [2] J.D. Benamou and B. Desprès,  
*A Domain Decomposition Method for the Helmholtz Equation and Related Optimal Control Problems*,  
Journal of Computational Physics, Vol. 136, 1997, pp. 68-82.
- [3] C. Borel and M. Bredif,  
*High Performance Parallelized Implicit Euler Solver For The Analysis Of Unsteady Aerodynamic Flows*,  
First European CFD Conference, Brussels, september 1992.
- [4] H. Brezis,  
*Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*,  
Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1992, Masson.
- [5] C. Carlenzoli and A. Quarteroni,  
*Adaptive domain decomposition methods for advection-diffusion problems*, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 75, Springer Verlag, 1995, pp. 165-186.
- [6] T. Chan and T.P. Mathew,  
*Domain decomposition algorithms*, Acta numerica, 1994, pp. 61-143.
- [7] P. Charton, F. Nataf et F. Rogier,  
*Méthode de décomposition de domaine pour l'équation d'advection-diffusion*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, 1991, pp. 623-626.



- [8] P. Chevalier et F. Nataf,  
*Une méthode de décomposition de domaine avec des conditions d'interface optimisées d'ordre 2 (OO2) pour l'équation d'Helmholtz*,  
note CRAS, 1997, à paraître.
- [9] B. Desprès,  
*Décomposition de domaine et problème de Helmholtz*,  
C.R. Acad. Sci., Paris, t. 311, Série I, 1990, pp. 313-316.
- [10] B. Desprès,  
*Domain decomposition method and the Helmholtz problem*,  
Mathematical and Numerical aspects of wave propagation phenomena,  
SIAM, 1991, pp. 44-52.
- [11] B. Engquist and A. Majda,  
*Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves*,  
Math. Comp. 31 (139), 1977, pp. 629-651.
- [12] B. Engquist and A. Majda,  
*Radiation Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Calculations*,  
Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. 32, 1979, pp. 313-357.
- [13] C. Farhat, J. Mandel and F.X. Roux,  
*Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method*,  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 115, 1994, pp. 367-388.
- [14] C. Farhat and J. Mandel,  
*The Two-Level FETI Method for Static and Dynamic Plate Problems - Part I: an Optimal Iterative Solver for Biharmonic Systems*,  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (in press).
- [15] C. Farhat, P.S. Chen, J. Mandel and F.X. Roux,  
*The Two-Level FETI Method - Part II: Extension to Shell Problems, Parallel Implementation and Performance Results*,  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (in press).
- [16] C.A.J. Fletcher,  
*Computational Techniques for Fluid Dynamics*,  
Springer Series in Computational Physics (2nd edition), Springer Verlag, 1991.

- 
- [17] G.H. Golub, R.W. Freund and N. Nachtigal,  
*Iterative solution of linear systems*,  
Acta Numerica, 1992, pp. 57-100.
- [18] P. Grisvard,  
*Singularities in boundary value problems*,  
RMA 22, Masson & Springer Verlag, 1992.
- [19] T. Hagstrom, R.P. Tewarson and A. Jazcilevich,  
*Numerical Experiments on a Domain Decomposition Algorithm for Non-linear Elliptic Boundary Value Problem*,  
Appl. Math. Lett. 1, n<sup>o</sup> 3, 1988, pp. 299-302.
- [20] L. Halpern,  
*Absorbing Boundary Conditions for the Discretization Schemes of the One-Dimensional Wave Equation*,  
Math. Comp. Vol. 38, 1982, pp. 415-429.
- [21] L. Halpern,  
*Artificial Boundary Conditions for the Advection-Diffusion Equations*,  
Math. Comp. Vol. 174, 1986, pp. 425-438.
- [22] L. Halpern and M. Schatzman,  
*Artificial Boundary Conditions for incompressible viscous flows*,  
SIAM J. Math. Anal. 20 (2), 1989, pp. 309-353.
- [23] S.I. Hariharan,  
*Absorbing Boundary Conditions for exterior problems*,  
Numerical methods for partial differential equations (Tullahoma, Tenn., 1985), Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol. 145, pp. 199-232.
- [24] C. Lacour,  
*Analyse et Résolution numérique de méthodes de sous-domaines non conformes pour des problèmes de plaques*,  
Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1997.
- [25] P. Le Tallec,  
*Domain decomposition methods in computational mechanics*,  
Computational Mechanics Advances, Vol. 1, No.2, pp.121-220, February 1994.

- [26] P.L. Lions,  
*On the Schwarz Alternating Method I*,  
First Int. Symp. on Domain Decomposition Methods (R. Glowinski,  
G.H. Golub, G.A. Meurant and J. Periaux, eds), SIAM (Philadelphia,  
PA), 1988.
- [27] P.L. Lions,  
*On the Schwarz Alternating Method III: A variant for Nonoverlapping  
Subdomains*, Third International Symposium on Domain Decomposition  
Methods for Partial Differential Equations, SIAM, 1989, pp. 202-223.
- [28] J.L. Lions et E. Magenes,  
*Problèmes aux limites non homogènes et applications*,  
Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [29] F. Nataf,  
*On the Use of Open Boundary Conditions in Block Gauss-Seidel Me-  
thods for the Convection-Diffusion Equations*,  
Rapport interne n<sup>o</sup> 284, CMAP, Ecole Polytechnique, October 1993.
- [30] F. Nataf and F. Rogier,  
*Outflow Boundary Conditions and Domain Decomposition Method*,  
Contemporary Mathematics, Vol. 180, 1994, pp. 289-293.
- [31] F. Nataf and F. Rogier,  
*Factorisation of the Convection-Diffusion Operator and the Schwarz Al-  
gorithm*, M<sup>3</sup>AS, **5**, n<sup>o</sup> 1, 1995, pp. 67-93.
- [32] F. Nataf, F. Rogier and E. de Sturler,  
*Domain decomposition methods for fluid dynamics*,  
In Sequeira A. (ed) Navier-Stokes equations on related non linear ana-  
lysis, pp. 307-377. Plenum Press Corporation, 1995.
- [33] F. Nataf,  
*Etude et utilisation algorithmique des notions de condition à la limite  
artificielle et de factorisation. Cas de l'équation de convection-diffusion*,  
Habilitation à diriger des recherches, Université Paris XIII, 1995.
- [34] F. Nataf,  
*Absorbing Boundary Conditions in Block Gauss-Seidel Methods for*

- Convection Problems*,  
Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 6, n<sup>o</sup> 4,  
1996, pp. 481-502.
- [35] F. Nataf,  
*A Schwarz additive method with high order interface conditions and nonoverlapping subdomains*, to appear.
- [36] F. Nataf and F. Nier,  
*Convergence of Domain Decomposition Methods via Semi-Classical Calculus*, R.I.N<sup>o</sup> 331, CMAP, Ecole Polytechnique, Septembre 1995.
- [37] F. Nataf and F. Nier,  
*Convergence rate of some domain decomposition methods for overlapping and nonoverlapping subdomains*, Numerische Mathematik, Vol. 75, 1997, pp. 357-377.
- [38] F.X. Roux,  
*Méthodes de décomposition de domaines pour des problèmes elliptiques*, Calculateurs Parallèles, Vol. 2 n<sup>o</sup> 3, 1995, pp. 237-254.
- [39] F.X. Roux and C. Farhat,  
*Parallel Implementation of the Two-Level FETI Method*,  
Nine International Conference on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, P. Bjorstad, M. Espedal and D. Keyes, John Wiley & Sons Ltd, (in press).
- [40] F.X. Roux, C. Lacour, C. Japhet, D. Kalfon,  
*Méthodes de résolution par sous-domaines et calcul parallèle*,  
Rapport technique RT 13/3717 CY, ONERA Direction de l'Informatique, Mars 1996.
- [41] J. Ryan,  
*Etude des solveurs par sous-domaine des équations de Navier-Stokes 2D (Cas linéarisé)*, Parallélisation de codes de calcul en aérodynamique (Roux, Thomas, Dinh, Le Tallec, Vidrascu, Ben belgacem, Joly, Ryan), Rapport technique de synthèse n<sup>o</sup> 13/3717 CY, ONERA Direction de l'Informatique, Janvier 1994, pp. 137-160.

- [42] Y. Saad,  
*Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing Company, 1996.
- [43] Y. Saad and H. Schultz,  
*GMRES: Generalized Minimal Residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*,  
SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 7, 1986, pp. 856-869.
- [44] H.A. Schwarz,  
*Gesammelte Mathematische Abhandlungen*,  
Vol. 2, Springer, Berlin, 1890, pp.133-143. First published in Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Vol. 15, 1870, pp.272-286.
- [45] K.H. Tan and M.J.A. Borsboom,  
*On Generalized Schwarz Coupling Applied to Advection-Dominated Problems*, Contemporary Mathematics, Vol. 180, 1994, pp. 125-130.
- [46] H.A. Van der Vorst,  
*Bi-CGStab: a Fast and Smoothly Converging Variant of BiCG for the solution of Nonsymmetric Linear Systems*,  
SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 13, n<sup>o</sup> 2, 1992, pp. 631-644.
- [47] V. Venkatakrisnan,  
*Viscous computations using a direct solver*,  
Comput. Fluids 18, n<sup>o</sup> 2, 1990, pp. 191-204.