



**HAL**  
open science

# Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient

Kim Pham

► **To cite this version:**

Kim Pham. Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT : . tel-00559405

**HAL Id: tel-00559405**

**<https://theses.hal.science/tel-00559405>**

Submitted on 25 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

de l'Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale des Sciences Mécaniques, Acoustique et Électronique de Paris

**Mention : Mécanique**

Présentée et soutenue par

Kim PHAM

## Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient

soutenue le 12 Novembre 2010

### Jury :

|              |                       |   |                                   |
|--------------|-----------------------|---|-----------------------------------|
| Président :  | Jean-Baptiste LEBLOND | - | Université Pierre et Marie Curie  |
| Rapporteur : | Marc GEERS            | - | Technische Universiteit Eindhoven |
| Rapporteur : | Eric LORENTZ          | - | EDF R&D                           |
| Examineur :  | Ahmed BENALLAL        | - | LMT Cachan                        |
| Examineur :  | Claudia COMI          | - | Politecnico di Milano             |
| Examineur :  | Antonio DESIMONE      | - | SISSA Trieste                     |
| Examineur :  | Jean-Jacques MARIGO   | - | École Polytechnique               |
| Examineur :  | Corrado MAURINI       | - | Université Pierre et Marie Curie  |



## Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à mes directeurs de thèse, Jean-Jacques Marigo et Corrado Maurini, auprès desquels j'ai passé 3 merveilleuses années.

Je remercie en premier lieu Jean-Jacques de m'avoir donné la possibilité de travailler sur un sujet passionnant et profond. Tout étudiant imagine un jour rencontrer un Professeur dont les connaissances et la pédagogie exceptionnelles n'ont d'égales que la disponibilité et la gentillesse : *JJM* est une de ces rares personnes. Au moment où s'achève cette thèse, je mesure donc toute ma chance de m'être formé auprès d'un *modèle* qui, contrairement aux lois de comportement usuelles, est très loin d'être *standard*.

Je remercie Corrado pour sa présence réconfortante et importante dans les moments de rédaction et de doute. Je lui suis également reconnaissant de m'avoir permis de profiter rapidement des avantages du numérique sans les inconvénients des débogages et autres *segmentation errors* ! Son dynamisme aura largement contribué au succès de cette thèse.

Je remercie Marc Geers et Eric Lorentz d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Mes remerciements vont également à tous les membres du jury : Ahmed Benallal, Claudia Comi, Antonio De Simone et Jean-Baptiste Leblond.

Cette thèse n'aurait sans doute pas eu la même saveur si elle avait eu lieu dans d'autres locaux que ceux de l'Institut d'Alembert. Je remercie tout particulièrement mes collègues et amis de bureaux qui ont été de merveilleux compagnons de route.

Je remercie mes amis de toujours. Vous m'êtes d'autant plus cher que vous êtes peu nombreux. Votre présence à ma soutenance m'a beaucoup touché.

Enfin je tiens enfin à remercier mes parents, ma soeur et mes grand-parents. Votre chaleur et votre amour m'ont porté à chaque instant. Cette thèse vous est dédiée.



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Approche variationnelle de l'endommagement</b>                              | <b>5</b>  |
| 1.1 La construction du modèle local sous-jacent . . . . .                        | 5         |
| 1.1.1 Les hypothèses de départ . . . . .   | 5         |
| 1.1.2 Les lois d'évolution locales . . . . .                                     | 8         |
| 1.1.3 Les propriétés d'écrouissage et de convexité . . . . .                     | 13        |
| 1.1.4 L'évolution de l'endommagement dans une structure . . . . .                | 18        |
| 1.1.5 Application aux états homogènes : existence et stabilité . . . . .         | 24        |
| 1.2 La régularisation du modèle par gradient d'endommagement . . . . .           | 50        |
| 1.2.1 Pourquoi régulariser ? . . . . .   | 50        |
| 1.2.2 La construction du modèle régularisé . . . . .                             | 53        |
| 1.2.3 Le problème d'évolution . . . . .  | 55        |
| 1.2.4 Application aux états homogènes : effets d'échelle . . . . .               | 60        |
| <b>2 Étude d'une barre sous traction simple</b>                                  | <b>67</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .   | 67        |
| 2.1.1 Généralités . . . . .  | 67        |
| 2.1.2 Problème d'évolution . . . . .   | 68        |
| 2.1.3 Les conditions suffisantes de stabilité et de non-bifurcation . . . . .    | 69        |
| 2.2 Les états homogènes d'endommagement . . . . .                                | 72        |
| 2.2.1 Rappel sur leur caractérisation . . . . .                                  | 73        |
| 2.2.2 Critère de stabilité et de non-bifurcation . . . . .                       | 74        |
| 2.3 Construction des états endommagés localisés . . . . .                        | 77        |
| 2.3.1 La méthode . . . . .   | 77        |
| 2.3.2 Profil d'endommagement . . . . .   | 78        |
| 2.3.3 Réponse globale et régularité en temps . . . . .                           | 83        |
| 2.3.4 La condition d'irréversibilité . . . . .                                   | 85        |
| 2.3.5 Liens avec les critères de non-bifurcation et de stabilité . . . . .       | 86        |
| 2.3.6 Exemples . . . . .   | 87        |
| 2.4 Stabilité des états localisés . . . . .                                      | 95        |
| 2.4.1 Des propriétés préliminaires . . . . .                                     | 95        |
| 2.4.2 Stabilité des localisations au voisinage du point de bifurcation . . . . . | 97        |
| 2.4.3 Exemples . . . . .   | 98        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>3 Méthodes pour l'identification des lois d'endommagement</b>          | <b>101</b> |
| 3.1 Quel choix pour la longueur interne? . . . . .                        | 102        |
| 3.1.1 Le lien énergétique avec la rupture . . . . .                       | 102        |
| 3.1.2 Applications . . . . .  | 104        |
| 3.2 Utilisation du diagramme de stabilité pour l'identification . . . . . | 105        |
| 3.3 L'essai PIED . . . . .  | 108        |
| 3.3.1 Modélisation . . . . .  | 108        |
| 3.3.2 Étude du cas à faibles épaisseurs . . . . .                         | 114        |
| <br>  |            |
| <b>Conclusion</b>   | <b>131</b> |
| <br>  |            |
| <b>A Annexe</b>   | <b>137</b> |
| <br>  |            |
| <b>B Annexe</b>   | <b>143</b> |
| <br>  |            |
| <b>Bibliographie</b>  | <b>155</b> |

# Introduction générale

Les matériaux de construction tels que les roches ou le béton font l'objet d'une modélisation intensive depuis de nombreuses années. La complexité de ces matériaux dits "fragiles" est essentiellement liée aux mécanismes de dégradation (fissures, microfissures, vides) qui à la différence de la plasticité dans les métaux peuvent apparaître dès le régime des petites déformations. La mécanique de l'endommagement a pour but de modéliser ces phénomènes de dégradation à l'échelle de la structure dans l'optique d'une utilisation industrielle. Cette théorie trouve ses racines dans les travaux fondateurs de Kachanov [30] qui ont donné naissance à une vaste série de travaux sur le sujet. L'endommagement était considéré à ses débuts d'un point de vue purement phénoménologique : une variable interne  $D$  définie en termes de surfaces résistantes effectives venait diminuer la rigidité du matériau en la pondérant d'un facteur  $(1 - D)$ , voir (Lemaître et Chaboche [32]). Ces travaux prometteurs étaient cependant entravés par l'absence d'une loi d'évolution de cette variable d'endommagement. Parallèlement à cela est apparu vers la fin des années 70 le formalisme dit des matériaux standards généralisés (Halphen et Nguyen [28]) qui avaient pour objectifs d'offrir un cadre séduisant pour bâtir automatiquement des lois d'évolution dans le cadre de processus irréversibles : en supposant l'existence d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation, ces lois étaient obtenues alors par dérivation de ces potentiels. Les avantages majeurs étaient d'une part de satisfaire automatiquement les premier et second principes de la thermodynamique et d'autre part de fournir en outre une écriture variationnelle du problème d'évolution quasi-statique adaptée à la résolution numérique.

Cette formulation du problème d'évolution en termes de taux de restitution d'énergie fut précisément écrite et établie pour les lois d'endommagement par Marigo [36] en y introduisant la notion d'irréversibilité et en justifiant le modèle de dégradation à partir d'une approche micro-mécanique. Ce modèle d'évolution de l'endommagement fut alors progressivement enrichi : un des axes de recherche a été d'améliorer la description de l'état de dégradation du matériau en prenant des tenseurs d'ordre supérieurs pour la variable interne (Chaboche [9], Chaboche et al. [10]). Le but était de rendre compte plus finement de l'anisotropie induite par l'orientation des fissures à l'échelle inférieures. Néanmoins ces modifications ne résolvaient en rien les principales difficultés rencontrées lors de la modélisation de matériaux adoucissants. En effet, les premières simulations numériques à l'aide de ces modèles locaux pour ce type de matériaux ont montré de fortes dépendances des résultats au maillage. Ces modèles cessaient en effet d'offrir une réponse pertinente dès l'apparition d'une localisation de l'endommagement à l'échelle de la structure : l'épaisseur transverse de la localisation était fixée par la taille de la maille ce qui avait pour conséquence que l'énergie dissipée pour créer la localisation tendait vers zéro à mesure que le maillage était raffiné. Par ailleurs ces modèles étaient aussi incapables de rendre compte des effets d'échelle constatés expérimentalement sur différents matériaux du



à l'absence d'échelle de longueur [43, 54].

Une régularisation du modèle fut alors nécessaire et différentes techniques furent mises en œuvre telle que l'approche non-locale développée par Pijaudier-Cabot et Bazant [51] basée sur l'intégration des variables sur un volume représentatif ou l'approche du gradient basé l'introduction de termes d'ordre supérieur (Triantafyllidis et Aifantis [55]). Cette dernière fut d'abord développée dans le cadre de la plasticité (Aifantis [1], Mühlhlaus et Aifantis [42], de Borst and Mühlhlaus [17], Fleck et al. [21]) avant d'être adaptée à l'endommagement (Geers et al. [26, 25], Comi [14], Frémond et Nédjar [24]). Ces méthodes ont ceci en commun qu'elles supposent toutes l'existence d'une longueur intrinsèque au matériau. Néanmoins du fait des différentes techniques de régularisation employées, plusieurs études comparatives furent menées pour comprendre les liens et les différences entre les modèles régularisés (Lorentz et Andrieux [34], Peerlings et al. [46]). L'influence de la régularisation sur le phénomène de localisation a aussi été mesurée à partir des équations linéarisées du système (Linear Comparison Solid) et exprimée en termes de perte d'ellipticité et de propagation d'onde (Hill [29], Benallal et al. [4], Pijaudier-Cabot et Benallal [52],).

Néanmoins ces études théoriques du modèle sont essentiellement d'ordre "local" (la propagation des ondes se faisant sous l'hypothèse d'un domaine de taille infinie) dans le sens où elles ne tiennent pas compte des effets d'échelle voire du type de chargement qui sont quant à eux d'ordre "globals". Enfin d'un point de vue plus conceptuel, les problèmes liés au traitement de la non-unicité des solutions ou des discontinuités temporelles qui sont intrinsèques à la nature des matériaux adoucissants n'ont pas trouvé de réponses convaincantes. Les formulations du problème d'évolution de l'endommagement s'arrêtent à des conditions du premier ordre tels que l'équilibre mécanique et le critère d'endommagement. Or la non-unicité de la solution pouvant être plus souvent la règle que l'exception (prendre une barre adoucissante de grande taille sans défaut), il faut introduire des critères de selection de solutions. Par ailleurs, les instabilités dus à des snap-backs dans la réponse globale doivent pouvoir être gérées sans à avoir à faire de la continuation. De nouveau les formulations écrites en vitesse ne le permettent pas car elles supposent une continuité temporelles des champs d'évolution. Au delà donc du simple fait de régulariser, il faut remonter en amont et introduire des outils permettant de gérer toutes ces dégénérescences du problème.

Les méthodes énergétiques basées sur le calcul des variations apportent précisément une réponse à ce type d'obstacles. D'abord initiées par Nguyen Q.S. [44], celles-ci sont adaptées aux lois d'évolution admettant une formulation variationelle telles que les matériaux standards généralisés. Ce type d'approche qui présente de grands avantages sur le plan mathématique a été justifié rigoureusement à partir d'arguments thermodynamiques par Marigo [38] pour une large classe de matériaux indépendants du taux de vitesse (rupture, plasticité, endommagement). Elles ont été alors étendues et approfondies au début des années 90 en mécanique de la rupture.

En effet certains défauts inhérents à la théorie de Griffith tels que l'impossibilité d'initier une fissure ou de prédire le trajet suivi lors de la propagation d'une fissure instable étaient autant de lacunes auxquelles il fallait apporter une réponse. Franfort et Marigo [22, 23] ont alors pris le parti de suivre une approche énergétique "globale" consistant à chercher à chaque instant les états de moindre énergie de la structure sous des conditions d'irréversibilité du chemin de fissuration et de conservation de l'énergie. Ce choix s'est avéré riche en résultats théoriques sur les problèmes d'initiation et de branchements (Chambolle et al. [11, 12]) ou d'existence de solutions (Bourdin et al. [8], Dal Maso et al. [16]). Sur le plan numérique, des méthodes s'appuyant sur l'approche variationnelle pour résoudre les problèmes de rupture se sont montrées très prometteuses (Bourdin et al. [7], Del Piero et al. [18]) avec l'introduction de nouvelles méthodes non conventionnelles de résolution (Bourdin et al. [8]). Cette approche globale en parfaite adéquation avec le calcul des variations a aussi permis un traitement mathématique rigoureux du problème. Des résultats précis d'existence de solutions à l'aide d'outils avancés du calcul des variations furent alors obtenus. Au delà des résultats propres à la mécanique de la rupture on retient donc avant tout les principes "physiques" tels que la notion d'irréversibilité, la recherche de minima de l'énergie et de conservation de l'énergie qui forment le socle de cette approche. Ayant à faire face en mécanique de l'endommagement au même type de difficultés qu'en mécanique de la rupture, l'objectif est de "transposer" ce cadre conceptuel à la mécanique de l'endommagement en prenant garde aux spécificités de cette dernière puis d'en examiner les conséquences sur plusieurs exemples (Marigo [40]). Le manuscrit s'organise comme suit.

Dans le premier chapitre, on rappelle d'abord la construction du modèle local d'endommagement basé sur une variable scalaire. À partir d'arguments thermodynamiques, le caractère standard de l'évolution de l'endommagement apparaît alors comme une condition nécessaire et justifie par conséquent le choix de l'approche variationnelle. Par ailleurs, dans l'optique d'une modélisation des matériaux adoucissants, le problème d'évolution doit donc être formulé de telle façon à pallier aux difficultés qui sont inhérentes à ce type de matériaux (évolution brutale, multiplicité de solutions). On choisit alors d'introduire d'une part un critère de sélection qui permet de retenir les solutions stables du système *dans un sens énergétique* et d'autre part de relâcher la régularité temporelle des champs solutions en les autorisant à "sauter" à condition de respecter un principe de conservation de l'énergie totale. L'étude des états homogènes d'endommagement dans un cadre général permet alors d'illustrer la pertinence de tous ces choix.

Dans un deuxième temps, après avoir expliqué la nécessité d'introduire une échelle de longueur dans le cas des matériaux adoucissants et donc de régulariser le modèle local, on formule le modèle d'endommagement à gradient directement dans le cadre variationnel. Le problème d'évolution pour ce modèle régularisé s'écrit formellement de façon identique à celui du modèle local à l'aide des trois principes d'irréversibilité, de stabilité et de conservation d'énergie. En passant de la formulation variationnelle (faible) à celle écrite au point matériel (forte), on compare

alors le nouveau modèle au modèle local sous-jacent. Pour illustrer les apports du non-local, on revient sur l'étude de la stabilité des états homogènes en mettant en évidence les effets d'échelle dans les résultats.

Le second chapitre étudie l'exemple de la barre unidimensionnelle en traction. Cette structure est souvent étudiée dans la littérature pour mettre en avant les vertus régularisantes des modèles à travers des études de propagation d'onde et de perte d'ellipticité. En effet elle permet de mener de front des calculs analytiques et de montrer la richesse et la complexité du modèle régularisé. Elle sera pour notre part l'occasion de mieux comprendre la pertinence des critères de sélection de solution puisqu'on peut étudier analytiquement la stabilité des états homogènes pour le modèle régularisé. D'autre part elle permet d'illustrer en détail le phénomène de localisation. On présente tout d'abord une construction explicite des états localisés qui respecte les principes d'irréversibilité, de stabilité et de conservation d'énergie. Ceci fait on examine alors l'influence des effets d'échelle sur l'aspect des réponses globales associées. Dans le cas d'une discontinuité temporelle (*snap-back*) dans la réponse globale, on montre les avantages et les limites du principe de conservation d'énergie pour gérer ce type de difficulté. On termine en montrant comment le critère de stabilité permet d'éliminer un certain nombre de ces solutions localisées.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'identification des paramètres des modèles d'endommagement. L'analogie entre les fissures en mécanique de la rupture et les localisations en mécanique de l'endommagement permet de relier la longueur interne à la ténacité du matériau. Pour mesurer les lois d'endommagement telles que la fonction de rigidité, l'essai PIED proposé par Bazant et Pijaudier-Cabot [3] est une méthode intéressante qui vise à délocaliser l'endommagement dans un essai classique de traction simple. L'objectif est d'exploiter l'homogénéité des champs de déformation et d'endommagement pour remonter directement aux informations locales et identifier les lois de rigidité et dissipation. On se propose de modéliser cet essai en montrant dans un premier temps qu'il est possible sous certaines conditions de construire des états homogènes. Dans le cadre d'un modèle réduit obtenu pour des barres de faible épaisseur, on étudie la stabilité des états homogènes puis on regarde sous quelles conditions structurelles on peut réellement observer ces états. Enfin on explore numériquement en modifiant par les paramètres de l'essai la possibilité de rendre compte d'autres régimes de dégradation possibles tels que de la fissuration transverse ou de la délamination.

# Approche variationnelle de l'endommagement

---

## Objectifs du Chapitre

On présente dans ce Chapitre la construction du modèle d'endommagement. On formule dans un premier temps le modèle local sous-jacent, voir [49]. On justifie à partir d'arguments thermodynamiques sa forme nécessairement standard. On définit les différents types d'érouissage en déformation ou en contrainte puis on établit des équivalences entre ces dernières et des propriétés de convexité sur l'énergie. On introduit alors le problème d'évolution qui se résume à trois principes physiques d'irréversibilité de l'endommagement, de stabilité et de bilan d'énergie. On illustre à l'aide des états homogènes la pertinence des notions introduites et des propriétés établies.

Dans un deuxième temps, dans l'optique d'une modélisation des matériaux adoucissants, on régularise le modèle local en introduisant directement dans l'énergie du système des termes en gradient d'endommagement, voir [50]. L'approche variationnelle permet alors d'obtenir directement les équations non-locales d'évolution postulées le plus souvent dans la littérature. L'étude de la stabilité des états homogènes permet de mettre en évidence l'influence des effets d'échelle sur les résultats de stabilité.

## 1.1 La construction du modèle local sous-jacent

### 1.1.1 Les hypothèses de départ

On suppose tout d'abord que les dégradations que subit le matériau ne proviennent uniquement que de l'endommagement. On ne tient donc pas compte des mécanismes dissipatifs auxiliaires tels que la plasticité. Cette hypothèse est raisonnable dans le cadre de la modélisation de matériaux fragiles tels que le béton. On suppose donc dorénavant être dans le domaine des petites déformations. On néglige en outre les effets thermiques en supposant que les structures étudiées sont enfermées dans un "grand" thermostat qui maintienne à température constante tout le domaine d'intérêt.

La formulation d'un modèle d'endommagement se résume formellement à trois ingrédients :

1. une variable interne qui représente l'état d'endommagement du matériau
2. la dépendance de la relation contrainte-déformation vis-à-vis de ce paramètre
3. une loi d'évolution du paramètre d'endommagement

### 1.1.1.1 Le paramètre d'endommagement

On suppose que l'endommagement qui représente l'état de dégradation au sein de la microstructure (microdéfauts, microfissures, etc) dans le matériau puisse être paramétré par un scalaire positif qu'on appellera  $\alpha$  pour fixer les idées dans un premier temps. On suppose qu'il existe par ailleurs un endommagement "ultime"  $\alpha_m$  strictement positif tel que la variable d'endommagement vérifie l'inégalité

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_m. \quad (1.1)$$

Les deux valeurs extrémales 0 et  $\alpha_m$  correspondent respectivement à l'état sain et l'état "ultime" atteint dans le processus d'endommagement. L'endommagement ultime  $\alpha_m$  peut selon les lois d'endommagement être fini ou infini. Il existe dans la littérature des modèles d'endommagement où l'on complexifie le choix de la variable d'endommagement en la prenant de nature tensorielle (d'ordre 2 ou 4) de sorte à rendre compte d'une certaine anisotropie des mécanismes de fissuration tels que l'orientation des microfissures ou des cavités à l'échelle de la microstructure [33]. Ici nous prenons le parti de ne pas complexifier plus qu'il ne faut la construction du modèle tout en faisant remarquer que n'importe quelle orientation d'une fissure à l'échelle de la structure vue comme une localisation de l'endommagement peut être décrite par le seul biais de variations de la variable scalaire d'endommagement dans la direction normale à la fissure.

### 1.1.1.2 La relation contrainte-déformation

On postule l'existence d'une relation de comportement "locale" qu'on appelle  $f : \mathbb{M}_s^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{M}_s^n$  ( $\mathbb{M}_s^n$  étant l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille  $n$ ) reliant l'état de contrainte à l'état de déformation et d'endommagement en un point matériel,

$$\sigma = f(\varepsilon, \alpha). \quad (1.2)$$

On suppose par ailleurs que l'unique déformation pour laquelle le matériau soit libre de contrainte est la déformation nulle,

$$f(\varepsilon, \alpha) = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0. \quad (1.3)$$

Aucune hypothèse n'est faite pour le moment sur la dépendance de cette relation à endommagement fixé ou sur la régularité de la fonction  $f$ . On introduira au fur et à mesure de la construction du modèle les conditions sur  $f$  qu'on jugera nécessaires à l'établissement de ces propriétés.

### 1.1.1.3 La loi d'évolution

Dans le cadre des matériaux ayant des lois indépendantes des vitesses dits *rate independent materials* (voir [41]), les lois d'évolutions des variables internes peuvent se mettre sous la forme générique d'un système de Kuhn-Tucker faisant intervenir une fonction  $\phi : \mathbb{M}_s^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  et pouvant s'écrire dans le cas de l'endommagement

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \geq 0 \\ \phi(\varepsilon, \alpha) \leq 0 \\ \dot{\alpha} \phi(\varepsilon, \alpha) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\dot{\alpha}$  désigne la vitesse d'endommagement.

La première inégalité de (1.4) stipule l'irréversibilité de l'évolution de l'endommagement. La deuxième inégalité constitue le *critère d'endommagement* tandis que la dernière égalité n'autorise la croissance de l'endommagement uniquement lorsque les déformations se situent au seuil de la fonction  $\phi$  (défini par  $\phi = 0$ ). Ce type de loi à seuil où les déformations sont contraintes par un critère conduit à l'existence d'un domaine de déformation admissible défini par

$$\mathcal{E}(\alpha) = \{\varepsilon \in \mathbb{M}_s^n \mid \phi(\varepsilon, \alpha) \leq 0\} \quad (1.5)$$

et qui dépend donc de l'endommagement du fait du critère. On supposera que la fonction  $\phi$  soit telle que ce domaine soit un ensemble simplement connexe et fermé de  $\mathbb{M}_s^n$ . En outre on supposera enfin que l'état de déformation nul est toujours un point intérieur au domaine *i.e.*  $\phi(0, \alpha) < 0$ , de sorte qu'il soit toujours possible d'y effectuer des trajets de déformation à l'intérieur du domaine en partant de ce point.

Le choix de la fonction  $\phi$  est bien entendu décisif quant à l'évolution de la variable interne. Dans le cas où le matériau est hyperélastique et qu'il existe donc une énergie libre, on distingue les modèles dits *associés* où la fonction seuil est définie à l'aide de la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement et dérivant du potentiel élastique. Les lois *standards généralisées* [28] qui supposent en outre l'existence d'un potentiel de dissipation appartiennent à cette catégorie de lois. Elles sont idéales pour le traitement variationnel ou *approches énergétiques* développés [44]. Néanmoins elles restent une construction purement formelle puisqu'elles reposent sur l'existence *a priori* d'un potentiel de dissipation. Dans [38] et [39], en partant d'un principe de stabilité matérielle de nature thermodynamique dit de Drucker-Ilyushin, J-J Marigo justifie le caractère *nécessairement standard* de l'évolution pour une classe variée de matériaux (élastique, plastique ou endommageable). La forme de la loi satisfait en outre pleinement le second principe et la positivité de la dissipation intrinsèque. Ce résultat important étant une justification de l'approche variationnelle sur laquelle repose tout ce manuscrit, on en rappelle les étapes clés dans la section qui suit.

## 1.1.2 Les lois d'évolution locales

### 1.1.2.1 Le postulat de stabilité matérielle

Le postulat de Drucker-Ilyushin est un postulat de stabilité matérielle pour des matériaux. Il stipule que le travail  $W$  produit en un point matériel au cours de tout cycle fermé de déformation  $\mathcal{C}$  partant d'un point d'équilibre est positif,

$$W = \oint_{\mathcal{C}} \sigma \cdot d\varepsilon = \oint_{\mathcal{C}} f(\varepsilon, \alpha) \cdot d\varepsilon \geq 0, \quad (1.6)$$

où  $\sigma = f(\varepsilon, \alpha)$  est la contrainte associée à la déformation via la relation de comportement (1.2). Un état est dit à l'équilibre si celui-ci n'évolue que lorsque la déformation évolue. On analyse à présent les restrictions qu'engendre le postulat de Drucker-Ilyushin sur le comportement du matériau élasto-endommageable.

### 1.1.2.2 Comportement hyperélastique à endommagement fixé

On se restreint pour le moment à des cycles  $\mathcal{C}$  intérieurs au domaine de déformations admissibles  $\mathcal{E}(\alpha)$  (tels que  $\phi(\varepsilon, \alpha) < 0$ ). Les mécanismes dissipatifs sont supposés être issus uniquement des fluctuations de la variable interne  $\alpha$  et non des déformations : ce type de trajet où l'endommagement est constant ne dissipe donc aucune énergie. L'utilisation du postulat de stabilité nous permet alors d'aboutir à la

**Propriété 1.1.** *À endommagement fixé, il existe un potentiel élastique continûment différentiable  $\psi(\cdot, \alpha)$  défini sur  $\mathcal{E}(\alpha)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et nul en 0. La relation de comportement  $\sigma = f(\varepsilon, \alpha)$  dérive alors de ce potentiel,*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{M}_s^n, \quad f(\varepsilon, \alpha) = \partial_{\varepsilon} \psi(\varepsilon, \alpha). \quad (1.7)$$

*Démonstration.* On se donne un point matériel à l'équilibre dans un état d'endommagement  $\alpha$ . On sollicite cet élément au travers d'un cycle de déformations  $\mathcal{C}$  intérieur à l'espace des déformations admissibles  $\mathcal{E}(\alpha)$ . Soit  $W$  le travail de déformation généré par le parcours de ce cycle. En considérant le cycle "renversé"  $\mathcal{C}_r$ , celui-ci engendre un travail de déformation  $-W$ . Puisque le postulat de Drucker-Ilyushin impose la positivité du travail de déformation quel que soit le sens de parcours du cycle, on en déduit que  $W \geq 0$  et  $-W \geq 0$ , d'où

$$W = \oint_{\mathcal{C}} \sigma \cdot d\varepsilon = \oint_{\mathcal{C}} f(\varepsilon, \alpha) \cdot d\varepsilon = 0.$$

Cette égalité étant vraie pour tout cycle  $\mathcal{C}$  à valeur dans  $\mathcal{E}(\alpha)$ , par un argument de calcul différentiel il existe donc un potentiel  $\psi(\cdot, \alpha)$  tel que  $f(\cdot, \alpha)$  dérive de ce potentiel et défini sur

$\mathcal{E}(\alpha)$  et connu à une constante près. Pour fixer cette constante on suppose que le potentiel est nul lorsque la déformation est nulle dans le matériau *i.e.*  $\psi(0, \alpha) = 0$ .  $\square$

Il a été donc montré qu'un matériau élasto-endommageable respectant le postulat de Drucker-Ilyushin était nécessairement *hyperélastique* à endommagement fixé. Bien que cela ne nous renseigne pas encore sur l'évolution du paramètre d'endommagement, cette étape est clé dans la justification de l'approche variationnelle puisqu'elle nous permet de raisonner directement à présent sur le potentiel élastique et de définir des forces thermodynamiques associés à celui-ci. Pour décrire correctement la dégradation des propriétés mécaniques du à l'endommagement et pouvoir rendre compte du comportement unilatéral de matériaux fragiles comme le béton (comportement différent en traction et en compression correspondant à la refermeture des microfissures sous l'effet de la compression), on fait les

**Hypothèses 1.2.** *On suppose dorénavant que le potentiel élastique est d'une part une fonction strictement convexe de  $\varepsilon$  à  $\alpha$  fixé,  $\alpha \neq \alpha_m$  et d'autre part une fonction positivement homogène de degré 2 en  $\varepsilon$ ,*

$$\psi(k\varepsilon, \alpha) = k^2\psi(\varepsilon, \alpha), \quad \forall k \geq 0, \quad \forall (\varepsilon, \alpha) \in \mathbb{M}_s^n \times [0, \alpha_m]. \quad (1.8)$$

*On traduit en outre l'assouplissement du matériau lorsque l'endommagement augmente en demandant que*

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) \leq 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{M}_s^n, \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m]. \quad (1.9)$$

Sous cette hypothèse de convexité, la relation de comportement  $\varepsilon \mapsto \sigma = \partial_{,\varepsilon}\psi$  est strictement monotone et donc inversible. Concernant la propriété d'homogénéité, celle-ci peut se démontrer dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation pour un endommagement d'un matériau linéairement élastique par microfissuration en supposant que le contact entre les lèvres des fissures est de type unilatéral et s'effectue sans frottement. Elle est perdue si le glissement entre les lèvres se fait avec frottement, on quitte alors le cadre élastique fragile proprement dit, il faut ajouter des variables internes traduisant les déformations résiduelles induites par le frottement.

### 1.1.2.3 Une évolution standard de l'endommagement

**La forme de la loi d'évolution :** L'obtention de la loi d'évolution du paramètre d'endommagement s'appuie sur l'inégalité (1.13) et s'énonce comme suit

**Proposition 1.3 (Loi d'évolution standard).** *Le travail de déformation est non négatif quel que soit l'état d'endommagement initial et dans tout cycle en déformation compatible seulement si l'endommagement est croissant et que le critère d'endommagement est un critère portant sur*



le taux de restitution d'énergie élastique, i.e. seulement s'il existe  $\kappa(\alpha) > 0$  tel que  $\phi(\varepsilon, \alpha)$  puisse s'écrire

$$\phi(\varepsilon, \alpha) = -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\varepsilon, \alpha) - \kappa(\alpha), \quad (1.10)$$

le système de Kuhn et Tucker régissant l'évolution devenant

$$\dot{\alpha} \geq 0, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\varepsilon, \alpha) - \kappa(\alpha) \leq 0, \quad \dot{\alpha} \left( -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\varepsilon, \alpha) - \kappa(\alpha) \right) = 0. \quad (1.11)$$

*Démonstration.* La preuve repose de nouveau sur la construction de cycles de déformations particuliers puis le calcul du travail de déformations en exigeant la positivité de celui-ci en vertu du postulat de Drucker-Ilyushin. Puisque l'objectif est d'obtenir les lois d'évolution du paramètre d'endommagement, il va falloir considérer par analogie avec la plasticité des chemins inélastiques venant toucher la surface seuil de  $\mathcal{E}(\alpha)$  – seul endroit où l'endommagement est autorisé à varier. On considère que le point de départ du cycle se trouve dans un état de déformation  $\varepsilon_0$  (intérieur au domaine élastique  $\mathcal{E}(\alpha_0)$ ) et d'endommagement  $\alpha_0$ . On choisit de construire ces cycles particuliers de déformations de la façon suivante

1. on charge le matériau élastiquement de telle sorte que la déformation passe de  $\varepsilon_0$  à une déformation  $\varepsilon_1$  se situant sur la surface seuil  $\partial\mathcal{E}(\alpha_0)$
2. on applique un incrément de déformation infinitésimal  $\delta\varepsilon$  tel que  $\varepsilon_1 + \delta\varepsilon$  sorte du domaine  $\mathcal{E}(\alpha_0)$  : ceci induit un incrément infinitésimal  $\delta\alpha$  du paramètre d'endommagement et donc une variation du domaine d'élasticité devenant  $\mathcal{E}(\alpha_0 + \delta\alpha)$
3. on termine par une décharge élastique jusqu'à revenir à la déformation initiale  $\varepsilon_0$

Soit  $W$  le travail total de ce cycle. Pour passer de  $\varepsilon_0$  à  $\varepsilon_1$ , le travail  $W_1$  est purement élastique et vaut donc  $W_1 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \psi_{,\varepsilon}(\varepsilon, \alpha) d\varepsilon = \psi(\varepsilon_1, \alpha_0) - \psi(\varepsilon_0, \alpha_0)$ . De même, on déduit pour la troisième étape de décharge élastique que le travail vaut  $W_3 = \psi(\varepsilon_0, \alpha_0 + \delta\alpha) - \psi(\varepsilon_1 + \delta\varepsilon, \alpha_0 + \delta\alpha)$ . La deuxième étape étant un processus inélastique infinitésimal, le travail des déformation s'écrit formellement  $W_2 = \sigma_{\delta\varepsilon} \cdot \delta\varepsilon$ . À l'ordre 0 en  $\delta\varepsilon$ ,  $\sigma_{\delta\varepsilon}$  est la contrainte au seuil et vaut par définition  $\psi_{,\varepsilon}(\varepsilon_1, \alpha_0)$ . On en déduit qu'au premier ordre en  $\delta\varepsilon$ ,  $W_2 = \phi_{,\varepsilon}(\varepsilon_1, \alpha_0) \cdot \delta\varepsilon + o(\delta\varepsilon)$ . On peut calculer à présent le travail total du cycle  $W = W_1 + W_2 + W_3$  qui est égal à

$$W = \oint_{\mathcal{C}} \sigma \cdot d\varepsilon = (\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_0, \alpha_0) - \partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_1, \alpha_0))\delta\alpha + \dots \quad (1.12)$$

La positivité du travail imposée par le postulat de Drucker-Ilyushin nécessite qu'au premier ordre en  $\delta\varepsilon$  on ait

$$(\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_0, \alpha_0) - \partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_1, \alpha_0))\delta\alpha \geq 0. \quad (1.13)$$

Cette inégalité est valable pour tout  $\varepsilon_0$  dans  $\mathcal{E}(\alpha_0)$  et  $\varepsilon_1$  sur  $\partial\mathcal{E}(\alpha_0)$ . On s'appuie sur cette inégalité pour établir à présent la loi d'évolution du paramètre d'endommagement. On montre successivement l'évolution irréversible du paramètre interne et son évolution à partir de la force

thermodynamique :

- *Irréversibilité de  $\alpha$*  : La monotonie de  $\alpha$  se déduit de (1.13) en prenant  $\varepsilon = 0$ . Sachant que  $-\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon, \alpha)$  est positif par hypothèse, on en déduit que tout incrément d'endommagement est nécessairement positif. En particulier au cours d'une évolution continue en temps, on peut identifier l'incrément d'endommagement à  $\dot{\alpha} dt \geq 0$  et aboutir à  $\dot{\alpha} \geq 0$ .
- *Détermination de la surface seuil* : On se place à un état d'endommagement fixé  $\alpha$ . Soit  $\varepsilon_1$ , un état de déformation sur la frontière du domaine d'élasticité  $\mathcal{E}(\alpha)$  et posons  $\kappa(\alpha) = -\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_1, \alpha) > 0$  (quantité dépendant *a priori* de  $\alpha$ ). Puisque dans (1.13), l'incrément  $\delta\alpha$  est nécessairement positif et que l'inégalité est valable pour tout  $\varepsilon_0$  dans  $\mathcal{E}(\alpha)$ , on en déduit que

$$\forall \varepsilon_0 \in \mathcal{E}(\alpha), \quad -\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_0, \alpha) \leq \kappa(\alpha)$$

En posant

$$\hat{\mathcal{E}}(\alpha) = \{\varepsilon \in \mathbb{M}_s^n \mid -\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon, \alpha) - \kappa(\alpha) \leq 0\},$$

on en déduit que  $\mathcal{E}(\alpha) \subset \hat{\mathcal{E}}(\alpha)$ . D'autre part dans (1.13), en prenant  $\varepsilon_2$  sur  $\partial\mathcal{E}(\alpha)$ , on en déduit que  $\kappa(\alpha) \geq -\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_2, \alpha)$ . En échangeant alors les rôles de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , on trouve alors que  $-\partial_{,\alpha}\psi(\varepsilon_2, \alpha) = \kappa(\alpha)$ . On aboutit alors à l'inclusion  $\partial\mathcal{E}(\alpha) \subset \partial\hat{\mathcal{E}}(\alpha)$ . On a donc nécessairement que  $\mathcal{E}(\alpha) = \hat{\mathcal{E}}(\alpha)$ . □

Le postulat de Drucker Ilyushin a donc pour conséquence de faire dépendre nécessairement le critère d'endommagement de la force thermodynamique associé à la variable interne d'endommagement. La dépendance de la fonction seuil  $\kappa(\alpha)$  et du potentiel élastique vis-à-vis du paramètre d'endommagement n'est soumise à aucune restriction particulière. Nous avons donc pour le moment une liberté sur le choix de celles-ci. Le second principe de la thermodynamique sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem est automatiquement respecté. En effet la dissipation intrinsèque dans le matériau à chaque instant est positive puisqu'elle est donnée par

$$\mathcal{D} = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} \dot{\varepsilon} - \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} \dot{\varepsilon} - \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \dot{\alpha} = -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \dot{\alpha} = \kappa(\alpha) \dot{\alpha} \geq 0. \quad (1.14)$$

**La réécriture énergétique (variationnelle) des lois d'évolution** : La première conséquence majeure du caractère standard de la loi à seuil est que le travail de déformations est une fonction d'état, *i.e.* le travail fourni pour faire passer le matériau de l'état naturel sain (déformation et endommagement nuls) à un état de déformation et d'endommagement  $(\varepsilon, \alpha)$  est indépendant du trajet de déformation suivi. En effet, soit  $[0, 1] \mapsto \mathbb{M}_s^n$ ,  $t \mapsto \varepsilon(t)$  un trajet de déformation allant de  $\varepsilon(0) = 0$  à  $\varepsilon(1) = \varepsilon$ . A chaque instant  $t$  on appelle  $\bar{\alpha}(t)$  l'état d'endommagement dans lequel se trouve le point matériel. On suppose que le matériau est sain à

l'état initial et qu'à l'état final celui-ci soit dans un état endommagé noté  $\bar{\alpha}(1) = \alpha$ . Le travail de déformation  $W_0$  durant cette transformation est donné par

$$W_0 = \int_0^1 \sigma(t) \cdot \dot{\epsilon}(t) dt = \int_0^1 \psi_{,\epsilon}(\epsilon(t), \bar{\alpha}(t)) \cdot \dot{\epsilon}(t) dt$$

Or d'après (1.11), on sait qu'à chaque instant on a l'égalité

$$(\psi_{,\alpha}(\epsilon(t), \bar{\alpha}(t)) + \kappa(\bar{\alpha}(t))) \dot{\bar{\alpha}}(t) = 0.$$

On appelle  $w(\alpha)$  la primitive de  $\kappa$  nulle en 0. La valeur de la dérivée exacte de la quantité prend alors la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\psi(\epsilon(t), \bar{\alpha}(t)) + w(\bar{\alpha}(t))) &= \psi_{,\epsilon}(\epsilon(t), \bar{\alpha}(t)) \cdot \dot{\epsilon}(t) + (\psi_{,\alpha}(\epsilon(t), \bar{\alpha}(t)) + w'(\bar{\alpha}(t))) \dot{\bar{\alpha}}(t) \\ &= \psi_{,\epsilon}(\epsilon(t), \bar{\alpha}(t)) \cdot \dot{\epsilon}(t). \end{aligned}$$

Le travail de déformation est donc l'intégrale d'une dérivée exacte

$$W_0 = \int_0^1 \frac{d}{dt} (\psi(\epsilon(t), \bar{\alpha}(t)) + w'(\bar{\alpha}(t))) dt.$$

et compte tenu des valeurs de l'état aux extrémités du trajet, on déduit que le travail s'écrit

$$W_0(\varepsilon, \alpha) = \psi(\varepsilon, \alpha) + w(\alpha) \quad (1.15)$$

Le travail de déformation ne dépend donc uniquement que des valeurs aux extrémités du trajet et non du chemin de déformation qui les relie. On voit que  $w(\alpha)$  est l'énergie volumique dissipée pour endommager le matériau depuis l'état sain jusqu'à la valeur  $\alpha$ . Les relations locales (définies à chaque point matériel) de contrainte-déformation (1.7), de loi d'évolution de l'endommagement (1.11) peuvent à présent se réécrire en faisant apparaître les dérivées partielles du travail de déformation  $W_0$  :

$$\text{Équilibre mécanique (1.2)} \Rightarrow \sigma = \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha), \quad (1.16)$$

$$\text{Loi d'endommagement (1.4)} \Rightarrow \dot{\alpha} \geq 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha)(\beta - \dot{\alpha}) \geq 0 \quad \forall \beta \geq 0. \quad (1.17)$$

En effet, (1.16) se déduit facilement à partir de la forme de l'énergie de déformation  $W_0$  (1.15). Pour montrer l'équivalence entre (1.11) et (1.17), on considère tout d'abord des champs tests de la forme  $\beta + \dot{\alpha} \geq 0$ . On déduit alors que  $\partial W_0 / \partial \alpha \geq 0$  si et seulement le critère est bien toujours positif ou nul (puisque  $\partial W_0 / \partial \alpha = \partial_{,\alpha} \psi + w'$ ). D'autre part, en considérant successivement des champs test positifs de la forme  $2\dot{\alpha}$  puis  $\dot{\alpha}/2$ , on trouve que  $(\partial W_0 / \partial \alpha) \dot{\alpha} = 0$ . On retrouve bien

la loi d'évolution de l'endommagement.

#### 1.1.2.4 Exemples de potentiels

**En dimension 1**, le modèle le plus général que l'on puisse envisager correspond à

$$W(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2}E_+(\alpha)(\varepsilon^+)^2 + \frac{1}{2}E_-(\alpha)(\varepsilon^-)^2 + w(\alpha) \quad (1.18)$$

où  $\varepsilon^\pm = \max\{0, \pm\varepsilon\}$ .  $E_+(\alpha)$  et  $E_-(\alpha)$  représentent les modules de Young en traction et en compression. Ils doivent décroître (au sens large) quand  $\alpha$  croît. Si l'on veut que le matériau s'endommage en traction mais pas en compression, on prendra  $E_-(\alpha) = E_0 > 0$  et  $E_+$  décroîtra de  $E_0$  à 0 quand  $\alpha$  croîtra de 0 à  $\alpha_m$ . Dans ce cas,  $\mathcal{E}(\alpha)$  et  $\mathcal{E}^*(\alpha)$  sont des intervalles non bornés du côté des compressions.

**En élasticité anti-plane**, la question de contact unilatéral ne se posant pas, pour un matériau isotrope le modèle s'écrira

$$W(\varepsilon, \alpha) = \mu(\alpha)(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) + w(\alpha) \quad (1.19)$$

où la direction 3 correspond à la direction anti-plane.  $\mu(\alpha)$  représente le module de cisaillement qui décroît de  $\mu_0$  à 0 quand  $\alpha$  croît de 0 à  $\alpha_m$ .  $\mathcal{E}(\alpha)$  et  $\mathcal{E}^*(\alpha)$  sont des disques des plans  $(\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})$  et  $(\sigma_{13}, \sigma_{23})$ , centrés à l'origine.

**En dimension 3**, un modèle particulièrement simple permettant de rendre compte du comportement asymétrique consiste à poser [2]

$$W(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2}K(\alpha)(\text{Tr } \varepsilon^+)^2 + \frac{1}{2}K_0(\text{Tr } \varepsilon^-)^2 + \mu(\alpha)\varepsilon^D \cdot \varepsilon^D + d(\alpha) \quad (1.20)$$

où  $K(\alpha)$  et  $\mu(\alpha)$  représentent le module de compressibilité et le module de cisaillement du matériau endommagé,  $K_0$  est le module de compressibilité du matériau sain,  $\varepsilon^D$  est le déviateur de  $\varepsilon$ ,  $\text{Tr } \varepsilon$  sa trace,  $\text{Tr } \varepsilon^\pm = \max\{0, \pm \text{Tr } \varepsilon\}$ .  $\mathcal{E}(\alpha)$  et  $\mathcal{E}^*(\alpha)$  sont non bornés dans la direction des compressions hydrostatiques.

### 1.1.3 Les propriétés d'écrouissage et de convexité

#### 1.1.3.1 Définitions

Dans la littérature, les difficultés ayant attiré aux modèles d'endommagement sont principalement rencontrés dans la modélisation des matériaux de construction tels que le béton ou les roches. Ces problèmes proviennent de ce qu'on appelle mécaniquement l'*adoucissement*. On

formalise cette propriété à partir de cette notion d'écroissage en termes de variations des domaines d'élasticité (vus comme fonctions de l'endommagement). Au moment de l'établissement de la loi d'évolution du paramètre d'endommagement, on a vu que le domaine d'élasticité dans l'espace des déformations pouvait être décrit à l'aide de la force thermodynamique dérivant du potentiel élastique

$$\mathcal{E}(\alpha) = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{M}_s^n \mid -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) \leq w'(\alpha) \right\} = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{M}_s^n \mid \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) \geq 0 \right\} \quad (1.21)$$

De façon duale, on peut aussi définir le domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes par

$$\mathcal{E}^*(\alpha) = \left\{ \sigma \in \mathbb{M}_s^n \mid \frac{\partial \psi^*}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) \leq w'(\alpha) \right\} = \left\{ \sigma \in \mathbb{M}_s^n \mid \frac{\partial W_0^*}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) \leq 0 \right\} \quad (1.22)$$

où  $\psi^*$  et  $W_0^*$  désignent respectivement les transformées de Legendre-Fenchel de  $\psi$  et  $W_0$ ,

$$\psi^*(\sigma, \alpha) = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}_s^n} \{ \langle \sigma, \varepsilon \rangle - \psi(\varepsilon, \alpha) \}, \quad (1.23)$$

$$W_0^*(\sigma, \alpha) = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}_s^n} \{ \langle \sigma, \varepsilon \rangle - W_0(\varepsilon, \alpha) \} = \psi^*(\sigma, \alpha) - w(\alpha). \quad (1.24)$$

On est alors en mesure de donner les définitions des propriétés d'écroissage :

**Définition 1.4.** *On dit qu'il y a écroissage positif en déformation si  $\alpha \mapsto \mathcal{E}(\alpha)$  est croissante, durcissement (ou écroissage positif en contrainte) si  $\alpha \mapsto \mathcal{E}^*(\alpha)$  est croissante et adoucissement si  $\alpha \mapsto \mathcal{E}^*(\alpha)$  est décroissante.*

On exprime à présent ces définitions d'écroissage en termes de propriétés de convexité.

### 1.1.3.2 Choix de la variable d'endommagement

On a vu dans la section précédente que la construction du modèle d'endommagement passait par la connaissance de deux fonctions du matériau dépendant de l'endommagement : le potentiel élastique et la densité d'énergie de dissipation. Il est possible de se ramener via un changement de variable à une unique fonction dont on chercherait la dépendance en  $\alpha$ . Un choix commode est de rendre linéaire la dépendance en l'endommagement de la densité d'énergie de dissipation. Ce faisant, la densité d'énergie de dissipation devient automatiquement convexe et l'hypothèse de convexité de  $w$  dans (1.5) et (1.6) est superflue.

On distingue deux types de changement de variable selon que l'énergie dissipée pour atteindre l'endommagement ultime  $\alpha_m$  soit finie ou pas.

*Supposons tout d'abord que  $w(\alpha_m) < +\infty$  : dans ce cas on décide de prendre comme nouvelle variable d'endommagement  $\beta = w(\alpha)/w(\alpha_m)$ . Le changement est bien strictement monotone puisque par construction on a  $w' > 0$ . Ce faisant,  $\beta$  est compris entre 0 et 1 puisque  $w$  est une*

fonction strictement croissante sur  $[0, \alpha_m]$ . La nouvelle densité d'énergie de dissipation est donc de la forme  $\tilde{w}(\beta) = w(\alpha_m)\beta$ , où  $w(\alpha_m)$  est un paramètre matériau à identifier.

*Supposons à présent que  $w(\alpha_m) = +\infty$  : le changement de variable précédent n'est plus autorisé puisque l'on ne peut plus diviser par  $w(\alpha_m)$ . On choisit de poser directement comme nouvelle variable d'endommagement  $\beta = w(\alpha)$ , son intervalle de définition étant  $[0, +\infty]$ . De ce fait, la construction d'un modèle d'endommagement fragile standard se résume au choix*

- des deux fonctions  $(\varepsilon, \alpha) \mapsto \psi(\varepsilon, \alpha)$  et  $\alpha \mapsto w(\alpha)$  si aucune précaution n'a été prise quant au choix de la variable d'endommagement
- de la fonction  $(\varepsilon, \alpha) \mapsto \psi(\varepsilon, \alpha)$  et d'une densité d'énergie de dissipation  $w(\alpha) = \kappa\alpha$  si l'on a fait le bon choix du paramètre  $\alpha$ .

Dans le cas où l'on a fait le bon changement de variable, la forme du travail de déformation se met sous la forme générique

$$\tilde{W}_0(\varepsilon, \beta) = \tilde{\psi}(\varepsilon, \beta) + \tilde{w}(\beta). \quad (1.25)$$

où  $\tilde{w}$  est une fonction positive, linéaire en  $\beta$  et nulle en 0.

### 1.1.3.3 Les propriétés d'écroissage en termes de convexité

Supposons que l'on ait fait le changement de variable rendant la densité d'énergie de dissipation linéaire en l'endommagement. Dans ce cas les propriétés d'écroissage du matériau telles que définies précédemment sont directement liées aux propriétés de convexité de l'énergie de déformation  $\tilde{W}_0$  (1.25). On a tout d'abord

**Proposition 1.5.** *La stricte convexité de l'énergie de déformation  $\tilde{W}_0$  par rapport à  $\beta$  à  $\varepsilon$  fixé est équivalente à la condition d'écroissage en déformation.*

*Démonstration.* Supposons qu'il y ait écroissage en déformation. On se fixe  $\varepsilon \neq 0$  (le cas  $\varepsilon = 0$  étant immédiat) et on se donne deux états d'endommagement  $\beta_1$  et  $\beta_2$  tels que  $\beta_1 \leq \beta_2$ . En premier lieu, on ramène par homothétie la déformation au niveau de la frontière  $\partial\mathcal{E}(\beta_1)$  du domaine d'élasticité. Il suffit pour cela de construire un scalaire strictement positif  $\lambda_1$  tel que l'état  $\lambda_1\varepsilon$  soit sur la frontière *i.e.* qu'il vérifie le critère :

$$0 = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\beta}(\lambda_1\varepsilon, \beta_1) + \tilde{w}'(\beta_1) = \lambda_1^2 \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\beta}(\varepsilon, \beta_1) + \tilde{w}'(\beta_1). \quad (1.26)$$

On a utilisé dans la deuxième égalité la propriété d'homogénéité de degré 2. La condition d'assouplissement  $\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\beta} < 0$  conduit à l'existence d'un unique scalaire  $\lambda_1$  défini par

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{\tilde{w}'(\beta_1)}{\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\beta}(\varepsilon, \beta_1)}} > 0$$

Comme  $\lambda_1 \varepsilon \in \partial \mathcal{E}(\beta_1)$  et  $\beta_2 \geq \beta_1$ , l'hypothèse de croissance de  $\mathcal{E}(\beta)$  impose que  $\lambda_1 \varepsilon \in \mathcal{E}(\beta_2)$ . On a donc les deux relations suivantes

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\lambda_1 \varepsilon, \beta_2) + \tilde{w}'(\beta_2) \geq 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\lambda_1 \varepsilon, \beta_1) + \tilde{w}'(\beta_1) = 0 \quad (1.28)$$

Or puisque la densité d'énergie de dissipation est linéaire en  $\beta$  en vertu du changement de variable, on a  $\tilde{w}'(\beta_1) = \tilde{w}'(\beta_2)$ . En combinant les inégalités (1.27) et (1.28), on a

$$\lambda_1^2 \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_2) - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_1) \right) \geq 0.$$

Sachant que  $\lambda_1 > 0$  est non nul, on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_2) \geq \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_1).$$

On utilise maintenant la linéarité et la croissance de  $\tilde{w}$  qui assure que  $w'(\beta_1) \leq w'(\beta_2)$  pour finalement obtenir que

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_2) + \tilde{w}'(\beta_2) \geq \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_1) + \tilde{w}'(\beta_1).$$

On en déduit donc la monotonie de la dérivée partielle par rapport à l'endommagement de  $\tilde{W}_0$

$$\frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_2) \geq \frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_1).$$

Réciproquement, supposons que la fonctionnelle  $\tilde{W}_0$  soit convexe par rapport à  $\beta$  à  $\varepsilon$  fixé. On se donne là aussi deux états d'endommagement  $\beta_1$  et  $\beta_2$  tel que  $\beta_1 \leq \beta_2$ . Soit alors  $\varepsilon$  dans  $\mathcal{E}(\beta_1)$ , on a donc

$$\frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_1) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_1) + \tilde{w}'(\beta_1) \geq 0 \quad (1.29)$$

Par croissance de  $\frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \beta}(\varepsilon, \cdot)$  (hypothèse de convexité de  $\tilde{W}_0(\varepsilon, \cdot)$ ), on déduit immédiatement que  $\varepsilon$  appartient aussi à  $\mathcal{E}(\beta_2)$  puisque  $\frac{\partial \tilde{W}_0}{\partial \beta}(\varepsilon, \beta_2) \geq 0$  et que la propriété d'écrouissage en déformation est donc satisfaite.  $\square$

**Proposition 1.6.** *La convexité de l'énergie de déformation  $\tilde{W}_0$  par rapport au couple  $(\varepsilon, \beta)$  est équivalente à la condition de durcissement.*

*Démonstration.* On suppose que l'on ait durcissement et que la dissipation est une fonction

convexe. En transposant la proposition précédente à l'espace dual des contraintes (ce qui revient à remplacer  $\tilde{W}_0$  par  $-\tilde{W}_0^*$ ), on en déduit que  $-\tilde{W}_0^*$  est convexe en  $\beta$  à  $\sigma$  fixé. En effet le potentiel élastique dual  $-\tilde{\psi}^*$  satisfait également les propriétés d'homogénéité d'ordre 2 sur laquelle s'appuie la preuve (résultat immédiat à partir de sa définition par la transformée de Legendre-Fenchel (1.23)). On se donne à présent deux états  $(\varepsilon_1, \beta_1)$  et  $(\varepsilon_2, \beta_2)$  et deux scalaires positifs  $\lambda$  et  $\mu$  tel que  $\lambda + \mu = 1$ . On écrit que

$$\langle \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) = \lambda \langle \varepsilon_1, \sigma \rangle + \mu \langle \varepsilon_2, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \quad (1.30)$$

En exploitant la convexité de  $-\tilde{W}_0^*(\sigma, \cdot)$ , on a successivement les majorations suivantes

$$\langle \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \leq \lambda \left( \langle \varepsilon_1, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_1) \right) + \mu \left( \langle \varepsilon_2, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_2) \right)$$

En prenant le sup sur  $\sigma$  des deux termes du membre de droite, on obtient

$$\langle \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \leq \lambda \sup_{\sigma} \left( \langle \varepsilon_1, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_1) \right) + \mu \sup_{\sigma} \left( \langle \varepsilon_2, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_2) \right)$$

On reconnaît alors la définition du biconjugué  $\tilde{W}_0^{**}$  de  $\tilde{W}_0^*$ ,

$$\langle \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, \sigma \rangle - \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \leq \lambda \tilde{W}_0^{**}(\varepsilon_1, \beta_1) + \mu \tilde{W}_0^{**}(\varepsilon_2, \beta_2)$$

Or la dernière inégalité étant valable pour tout  $\sigma$ , en passant au sup sur tous les  $\sigma$  dans le terme de gauche de l'inégalité, on a abouti à l'inégalité de convexité pour  $\tilde{W}_0^{**}$

$$\tilde{W}_0^{**}(\lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \leq \lambda \tilde{W}_0^{**}(\varepsilon_1, \beta_1) + \mu \tilde{W}_0^{**}(\varepsilon_2, \beta_2) \quad (1.31)$$

Comme la convexité à  $\beta$  fixé de  $\tilde{W}_0$  nous assure l'invariance de  $\tilde{W}_0$  par passage au bidual *i.e.*  $\tilde{W}_0^{**} = \tilde{W}_0$ , on en déduit la convexité de  $\tilde{W}_0$  par rapport au couple  $(\varepsilon, \beta)$ .

Réciproquement, on suppose l'énergie de déformation convexe par rapport au couple  $(\varepsilon, \beta)$ . Tout d'abord, il est clair que  $w$  est convexe en prenant  $\varepsilon = 0$ . Par ailleurs, l'inégalité de convexité associée s'écrit

$$\tilde{W}_0(\lambda(\varepsilon_1, \beta_1) + \mu(\varepsilon_2, \beta_2)) \leq \lambda \tilde{W}_0(\varepsilon_1, \beta_1) + \mu \tilde{W}_0(\varepsilon_2, \beta_2)$$

d'où on déduit en ajoutant  $\langle \sigma, \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 \rangle$  de part et d'autre de l'inégalité

$$\langle \sigma, \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 \rangle - \tilde{W}_0(\lambda(\varepsilon_1, \beta_1) + \mu(\varepsilon_2, \beta_2)) \geq \lambda \left( \langle \sigma, \varepsilon_1 \rangle - \tilde{W}_0(\varepsilon_1, \beta_1) \right) + \mu \left( \langle \sigma, \varepsilon_2 \rangle - \tilde{W}_0(\varepsilon_2, \beta_2) \right).$$



En utilisant la définition de  $\tilde{W}_0^*$ , on en déduit la majoration suivante pour tout  $\varepsilon_1$

$$\lambda \left( \langle \sigma, \varepsilon_1 \rangle - \tilde{W}_0(\varepsilon_1, \beta_1) \right) \leq \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) - \mu \left( \langle \sigma, \varepsilon_1 \rangle - \tilde{W}_0(\varepsilon_2, \beta_2) \right) \quad (1.32)$$

En fixant  $\varepsilon_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  (ce qui fixe le terme de droite) puis en prenant le sup du terme de gauche sur tous les  $\varepsilon_1$ , on en déduit que

$$\lambda \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_1) \leq \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) - \mu \left( \langle \sigma, \varepsilon_1 \rangle - \tilde{W}_0(\varepsilon_2, \beta_2) \right) \quad (1.33)$$

Puis on réécrit (1.33) comme suit

$$\mu \left( \langle \sigma, \varepsilon_1 \rangle - \tilde{W}_0(\varepsilon_2, \beta_1) \right) \leq \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) - \lambda \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_2) \quad (1.34)$$

On prend à présent le sup sur les  $\varepsilon_2$  dans le terme de gauche, ce qui conduit à

$$\mu \tilde{W}_0^*(\varepsilon_2, \beta_2) \leq \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) - \lambda \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_1)$$

qui équivaut après arrangement à

$$\mu \tilde{W}_0^*(\varepsilon_2, \beta_2) + \lambda \tilde{W}_0^*(\sigma, \beta_1) \leq \tilde{W}_0^*(\sigma, \lambda\beta_1 + \mu\beta_2)$$

On reconnaît une identité de concavité sur  $\tilde{W}_0^*(\sigma, \cdot)$  et donc de convexité sur  $-\tilde{W}_0^*$ . Pour conclure et obtenir la croissance de  $\mathcal{E}^*(\beta)$ , il suffit de transposer à nouveau la Proposition 1.5 en prenant formellement  $-\tilde{W}_0^*$  en lieu et place de  $\tilde{W}_0$ . On en déduit alors dans l'espace dual des contraintes, que  $\mathcal{E}^*(\beta)$  donnée par (1.22) croît avec  $\beta$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Les propriétés d'écroissance sont donc intimement liées aux propriétés de convexité de  $\tilde{W}_0$ . Néanmoins ce lien apparaît seulement si on a pris le soin de faire au préalable le bon changement de variable sur l'endommagement. En revanche les propriétés d'écroissance sont quant à elles intrinsèques au matériau et invariantes par changement de variable.

## 1.1.4 L'évolution de l'endommagement dans une structure

### 1.1.4.1 Le problème d'évolution

On considère une structure dont la configuration de référence naturelle est l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , qui est constituée d'un ou plusieurs matériaux endommageables du type précédent. Dans le cas où le matériau est hétérogène, toutes les grandeurs introduites dépendent du point matériel (endommagement ultime, potentiel élastique, taux d'énergie critique). La structure est soumise à un chargement dépendant d'un paramètre  $t > 0$ . On appelle respectivement  $\partial_U \Omega$  et  $\partial_F \Omega$  les parties de de la frontière où les déplacements sont imposés à la valeur  $U_t$  et les forces à la valeur

$F_t$ . La structure est en outre soumise à un chargement volumique  $f_t$ .

Le problème *quasistatique* d'évolution sous forme classique consiste à trouver les champs de déplacements  $u_t$  et d'endommagement  $\alpha_t$  vérifiant sous forme forte, d'une part l'équilibre mécanique

$$\begin{cases} u_t = U_t & \text{sur } \partial_U \Omega, \\ \sigma_t = \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon(u_t), \alpha_t) & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_t \cdot n = F_t & \text{sur } \partial_F \Omega, \\ -\operatorname{div} \sigma_t + f_t = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.35)$$

ainsi que d'autre part le système à seuil de Kuhn et Tucker caractérisant l'évolution standard de l'endommagement

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_t \geq 0 & \text{sur } \Omega, \\ -\frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(x, \varepsilon(u_t), \alpha_t) \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dot{\alpha}_t \left( -\frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(x, \varepsilon(u_t), \alpha_t) \right) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.36)$$

Ces équations sont écrites au niveau local. Le traitement du problème à l'aide des outils du Calcul des Variations ou sa résolution numérique requiert une mise sous forme variationnelle. Le traitement variationnel nécessite l'introduction au préalable des espaces fonctionnels d'admissibilité pour les champs de déplacement et d'endommagement :

**Définition 1.7** (Admissibilité des champs). *On note  $\mathcal{C}_t$  l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles à l'instant  $t$ ,  $\mathcal{C}_t$  est supposé affine, de la forme  $U_t^d + \mathcal{C}^0$  où  $U_t^d$  est un champ donné dépendant régulièrement de  $t$  (avec  $U_t^d = U_t$  sur  $\partial_U \Omega$ ) et  $\mathcal{C}^0$  est un espace vectoriel (indépendant de  $t$ ). On note  $\mathcal{D}_0 = \{\alpha : 0 \leq \alpha \leq \alpha_m \text{ dans } \Omega\}$  l'ensemble des champs d'endommagement admissibles. À  $\alpha \in \mathcal{D}_0$  on associe l'ensemble  $\mathcal{D}(\alpha)$  des champs d'endommagement accessibles depuis  $\alpha$ , restreints par la condition d'irréversibilité :  $\mathcal{D}(\alpha) = \{\beta : \alpha \leq \beta \leq \alpha_m \text{ dans } \Omega\}$ .*

Sous réserve de régularité suffisante, en exploitant les équations (1.16)-(1.17), le problème d'évolution (1.35)-(1.36) est formellement équivalent au système variationnel

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_t \geq 0, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon(u_t)(x), \alpha_t(x)) \cdot \varepsilon(v - u_t)(x) dx = \mathcal{L}_t(v - u_t) & \forall v \in \mathcal{C}_t, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(x, \varepsilon(u_t)(x), \alpha_t(x))(\beta - \alpha_t)(x) dx \geq 0 & \forall \beta \in \mathcal{D}(\alpha_t), \\ \int_{\Omega} \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(x, \varepsilon(u_t)(x), \alpha_t(x)) \dot{\alpha}_t(x) dx = 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

où  $\mathcal{L}_t$  désigne la forme linéaire associée aux travail des forces surfaciques ou volumiques et

correspondant donc à la travail des efforts extérieures

$$\mathcal{L}_t : u \mapsto \int_{\partial_F \Omega} F_t \cdot u \, dx + \int_{\Omega} f_t \cdot u \, dx \quad (1.38)$$

On définit l'énergie totale du système comme la quantité qui à tout couple  $(v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  admissible à l'instant  $t$  associe la différence entre l'énergie totale de déformation et le travail des efforts extérieures

$$\mathcal{P}_t(v, \beta) = \int_{\Omega} W_0(x, \varepsilon(v)(x), \beta(x)) \, dx - \mathcal{L}_t(v). \quad (1.39)$$

Le problème d'évolution (1.37) peut alors s'écrire en termes de variations premières sur l'énergie potentielle et conduire à la formulation variationnelle du problème d'évolution continu en temps

$$\begin{aligned} (\text{ir}) : \dot{\alpha}_t &\geq 0, \\ (\text{st}) : \mathcal{P}'_t(u_t, \alpha_t)(v - u_t, \beta - \alpha_t) \, d\Omega &\geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha_t), \\ (\text{eb}) : \mathcal{P}'_t(u_t, \alpha_t)(0, \dot{\alpha}_t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

où  $J'(f)(\phi)$  désigne la dérivée de  $J$  en  $f$  dans la direction  $\phi$ .

#### 1.1.4.2 Le problème d'évolution incrémental

L'établissement de résultats précis d'existence, d'unicité et de régularité des solutions au problème d'évolution pose des difficultés d'ordre technique. Il est par contre plus facile d'en établir sur le problème incrémental, i.e. celui obtenu après discrétisation en temps. En pratique c'est toujours ce dernier que l'on résout numériquement. Pour le construire, il suffit de remplacer la variable de temps continu  $t$  par une suite (discrète) de temps — on parlera alors d'étape ou de pas de temps  $i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  —, et les vitesses par des accroissements. Le problème incrémental consiste alors à trouver, pour  $i \in \mathbb{N}_+$ , les champs  $u_i$  et  $\alpha_i$  vérifiant

$$\begin{cases} (u_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D}_i \\ \mathcal{P}'_i(u_i, \alpha_i)(v - u_i, \beta - \alpha_i) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D}_i \end{cases} \quad (1.41)$$

où  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{D}_i$  désignent respectivement l'ensemble des champs de déplacements et des endommagement admissibles à l'étape  $i$ , ce dernier tenant compte maintenant de la condition d'irréversibilité, i.e.

$$\beta(x) \geq \alpha_{i-1}(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (1.42)$$

De ce fait les problèmes aux différents étapes sont couplés, la solution à une étape dépend de la solution à l'étape précédente. Leur résolution se fait donc par induction à partir de la réponse  $\alpha_0$  du champ d'endommagement initial.

### 1.1.4.3 Le choix du critère de stabilité

Dans le cadre des matériaux adoucissants, l'unicité de la solution au problème d'évolution peut être plus l'exception que la règle. En effet, lorsqu'il n'y a pas unicité de la configuration d'équilibre d'un système sous une sollicitation donnée, l'étude de sa stabilité fournit un critère de sélection. En toute rigueur, la stabilité est une notion *dynamique*. En particulier un état d'équilibre *sous une sollicitation donnée* est stable si, une fois écarté "un peu" de cet état d'équilibre, le système, *soumis encore à la seule sollicitation donnée*, ne s'écartera jamais "beaucoup" de cet état d'équilibre. Néanmoins la résolution du système dynamique en espace et en temps se révèle être souvent un obstacle insurmontable. On préfère alors remplacer la notion dynamique de stabilité par une notion plus heuristique en raisonnant en termes de minima locaux d'énergie potentiels. Un état sera dit *stable* si et seulement si il n'existe pas dans son voisinage des états accessibles ayant une énergie potentielle moindre. Du fait du caractère irréversible de l'endommagement, les états accessibles sont ceux ayant un endommagement supérieur à l'état testé. Cependant l'écriture du critère nous confronte rapidement au choix de la distance entre les états. En dimension infinie (ce qui est le cas ici pour les espaces fonctionnels considérés), les normes ne sont pas équivalentes entre elles et le choix de la distance a *a priori* une influence sur les résultats de stabilité. Par souci de simplicité, on utilise la stabilité directionnelle qui ne s'appuie que sur la topologie de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.8 (Stabilité directionnelle).** *À un instant  $t$  donné, un état  $(u, \alpha)$  de la structure endommageable est dit stable s'il est admissible et si dans toutes les directions accessibles il existe un voisinage où tout autre état a une énergie supérieure ou égale. Autrement dit, on demande que  $(u, \alpha) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  soit tel que*

$$(ST) : \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha), \quad \exists \bar{h} > 0, \quad \forall h \in [0, \bar{h}], \quad \mathcal{P}_t(u + h(v - u), \alpha + h(\beta - \alpha)) \geq \mathcal{P}_t(u, \alpha). \quad (1.43)$$

Il est bien entendu possible d'envisager des critères de stabilités plus sélectifs se basant par exemple sur la topologie de  $\mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha)$  pour lequel on ne comparerait plus seulement l'état  $(u, \alpha)$  à ses proches voisins situés dans une direction donnée mais à un voisinage pour la topologie associé à  $\mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha)$ .

**Remarque .** *Il est essentiel de noter que le caractère stable d'un état dépend du type de sollicitation imposée. Ainsi un même état pourra être stable dans des conditions de déplacement imposé et instable dans des conditions de force imposée. Ces conditions de sollicitation apparaissent dans la définition ci-dessus de la stabilité d'une part par l'intermédiaire de l'ensemble  $\mathcal{C}$  des déplacements admissibles caractérisant les données cinématiques et d'autre part par l'intermédiaire de l'énergie potentielle dont l'expression tient compte des effort extérieurs donnés.*

On peut tirer de la Définition 1.8 une première condition nécessaire de stabilité. Soient  $(u_t, \alpha_t)$  un état stable et  $(v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha_t)$ . En supposant que  $\mathcal{P}_t$  est Gateaux-différentiable en

$(u_t, \alpha_t)$  dans la direction  $(v, \beta)$ , on a nécessairement pour  $\theta$  positif, assez petit :

$$\begin{aligned} 0 &< \mathcal{P}_t(u + \theta(v - u_t), \alpha + \theta(\beta - \alpha_t)) - \mathcal{P}(u_t, \alpha_t) \\ &= \theta \mathcal{P}'(u_t, \alpha_t)(v - u_t, \beta - \alpha_t) + o(\theta) \end{aligned}$$

En divisant par  $\theta > 0$  et en passant à la limite quand  $\theta$  tend vers 0, on obtient l'inégalité

$$\mathcal{P}'_t(u_t, \alpha_t)(v - u_t, \beta - \alpha_t) \geq 0.$$

D'où finalement la

**Propriété 1.9 (Première Condition Nécessaire de Stabilité).** *Un état  $(u_t, \alpha_t) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha_t)$  est stable seulement si*

$$\mathcal{P}'_t(u_t, \alpha_t)(v - u_t, \beta - \alpha_t) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha_t) \quad (1.44)$$

On reconnaît la condition (st) intervenant dans le problème d'évolution. Les états stables sont donc à chercher parmi les états admissibles vérifiant l'équilibre mécanique et le critère d'endommagement en tout point de la structure. Cependant cette condition est *nécessaire* et en général non *suffisante*. Elle l'est dans le cas de matériaux durcissants mais ne l'est pas dans le cas de matériaux adoucissants. Quelle que soit la nature du matériau, il faut envisager des développements limités de l'énergie potentielle jusqu'au second ordre en  $h$  pour pouvoir conclure. On détaillera la procédure dans la suite de l'étude.

#### 1.1.4.4 Le bilan d'énergie

La condition (eb) (1.40) peut être vue comme une équation de conservation de l'énergie totale. En effet elle stipule qu'à chaque instant, le taux de restitution d'énergie élastique soit égal à la puissance dissipée. Néanmoins, elle fait apparaître sous cette forme la dérivée temporelle du champ d'endommagement et suppose une continuité temporelle de celui-ci. Or dans un matériau subissant des dégradations au cours du temps, il est possible que les dégradations apparaissent de façon brutale. On s'appuie alors sur

**Propriété 1.10 (Bilan d'énergie).** *Dans une évolution régulière, l'évolution de l'énergie totale satisfait le bilan suivant*

$$(EB) \quad \mathcal{P}_t(u_t, \alpha_t) = \mathcal{P}_0(u_0, \alpha_0) + \int_0^t \left( \int_{\Omega} \sigma_{t'} \cdot \varepsilon(\dot{U}_{t'}^d) dx - \mathcal{L}'_t(\dot{U}_{t'}^d) - \dot{\mathcal{L}}_{t'}(u_{t'}) \right) dt' \quad (1.45)$$

où  $U_t$  est un champ admissible régulier en temps et  $\dot{U}_{t'}$  et  $\dot{W}_{t'}^e$  sont les vitesses de chargement à l'instant  $t'$

*Démonstration.* On dérive par rapport au temps l'énergie potentielle d'un couple de champs solution  $(u_t, \alpha_t)$ . On obtient que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_t(u_t, \alpha_t) = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon(u_t), \alpha_t) \varepsilon(\dot{u}_t) + \frac{\partial W}{\partial \alpha}(x, \varepsilon(u_t), \alpha_t) \dot{\alpha}_t dx - \dot{\mathcal{L}}_t(u_t) - \mathcal{L}_t(\dot{u}_t).$$

Soit  $t \mapsto U_t^d$  alors un ensemble de champ régulier en temps et admissible *i.e*  $U_t^d \in \mathcal{C}_t$  pour tout  $t$ . En utilisant la forme variationnelle de l'équilibre mécanique (1.37) et la conservation d'énergie (eb), on trouve que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_t(u_t, \alpha_t) = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon(u_t), \alpha_t) \varepsilon(\dot{U}_t^d) - \dot{\mathcal{L}}_t(u_t) - \mathcal{L}_t(\dot{U}_t^d).$$

En intégrant alors par rapport au temps, on aboutit à (EB).  $\square$

Contrairement à (eb), le bilan d'énergie (EB) garde un sens dans le cas d'une évolution non régulière en temps. En effet, cette réécriture permet d'exiger la régularité non plus des champs solutions  $(u_t, \alpha_t)$  mais que du chargement au travers du travail des forces extérieures  $\mathcal{L}_t$  et du champ régulier admissible  $U_t^d$ . On choisit donc de conserver (EB) en lieu et place de (eb). On peut donc *a priori* gérer de cette façon les évolutions non régulières en temps qui sont normalement du ressort de la dynamique. Dans [19], dans le cadre de l'approche variationnelle de la rupture, les auteurs apportent une justification quant au bienfondé de ce choix de conserver l'énergie du système en comparant rigoureusement l'approche dynamique et l'approche quasi-statique avec conservation de l'énergie. Ils montrent sur un exemple que la longueur brutale d'avancée de fissure est égale à celle que l'on obtiendrait dynamiquement si l'on fait ce choix de conserver l'énergie totale du système.

#### 1.1.4.5 La formulation étendue du problème d'évolution

On est à présent en mesure d'écrire la formulation étendue du problème d'évolution qui se prête à des évolutions discontinues et qui gère la possible non-unicité des solutions au problème. Celui-ci se lit

Trouver pour tout  $t \geq 0$ ,  $(u_t, \alpha_t) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  :

- (IR) :  $t \mapsto \alpha_t$  est croissant depuis  $\alpha_0$ ,
  - (ST) :  $(u_t, \alpha_t)$  est stable au sens de la Définition (1.43),
  - (EB) : le bilan d'énergie (1.45) est satisfait à chaque instant.
- (1.46)

Le problème d'évolution étendu (1.46) est à la fois moins exigeant que celui régulier en temps (1.40) au sens où il autorise des discontinuités temporelles des champs solutions et plus sélectif puisqu'on ne retient que les minima locaux de l'énergie potentielle parmi les états stationnaires

du système. On verra dans le Chapitre 2 sur un exemple de traction simple comment les items (ST) ou (EB) permettent de sélectionner les solutions du problème d'évolution.

### 1.1.5 Application aux états homogènes : existence et stabilité

#### 1.1.5.1 Existence de tels états

Dans le processus d'identification des lois d'endommagement qui détermine notre modèle, les états spatialement homogènes en déformation *et* en endommagement jouent un rôle clé. En effet, dans des essais où il serait possible d'observer ces états, on peut remonter à partir de courbes expérimentales de nature globale telles que les diagrammes forces-déplacement au comportement local du matériau du fait de l'homogénéité de la déformation et de l'endommagement. On peut alors espérer reconstruire les fonctions matériaux qui déterminent le modèle d'endommagement telles que la loi de rigidité ou la densité de dissipation.

Commençons par préciser sous quelles conditions ces états homogènes peuvent exister. On considère une structure connexe dont la configuration de référence naturelle est l'ouvert  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Celle-ci est faite d'un unique matériau élastique endommageable à écrouissage positif en déformation. On suppose que sa relation de comportement est linéaire à endommagement fixé si bien que son potentiel élastique est une forme quadratique en la déformation. On appelle respectivement  $A(\alpha)$  et  $w(\alpha)$  la rigidité et la densité de dissipation du matériau. On suppose le matériau initialement endommagé de façon uniforme à la valeur  $\alpha_0$ .

La première question porte sur le choix des conditions aux limites à appliquer à la structure pour obtenir un chemin d'évolution. On peut imaginer plusieurs types de conditions limites où l'on imposerait les déplacements ou les efforts sur tout ou une partie du bord de la structure. Néanmoins on s'intéresse dans un premier temps à la construction effective d'un *chemin d'évolution allant jusqu'à la ruine de la structure* en respectant les trois principes (IR)-(ST)-(EB). Pour des raisons liées à la charge limite que peut supporter la structure, il est alors préférable de prescrire un déplacement croissant sur tout le bord de la structure plutôt qu'une force.

Soit alors  $\varepsilon_0$  un état non nul de déformation. En tout point  $x$  du bord domaine  $\partial\Omega$  on impose un déplacement  $U_t(x) = t\varepsilon_0x$ . On construit dans un premier temps un chemin d'évolution  $(u_t, \alpha_t)$  respectant à tout temps *l'équilibre mécanique* ainsi que *le critère d'endommagement*. Ce chemin est décrit par le scénario suivant :

1. Pour  $t < t_e$ , la structure est en phase élastique et le champ de déplacement vaut en tout point  $x$  de la structure  $u_t(x) = t\varepsilon_0x$ . L'endommagement reste à la valeur  $\alpha_0$ . La phase élastique se termine au temps  $t_e$  qui correspond à l'égalité du critère d'endommagement à

zéro. Sachant que le critère est donné par (1.36), on en déduit la valeur du temps critique

$$t_e = \sqrt{\frac{2w'(\alpha_0)}{-A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0}}. \quad (1.47)$$

Durant cette phase élastique, les champs de déformation et de contrainte sont homogènes et valent

$$\varepsilon_t(x) = t\varepsilon_0, \quad \sigma_t(x) = A(\alpha_0)t\varepsilon_0. \quad (1.48)$$

2. Pour  $t \geq t_e$ , l'endommagement commence à croître dans la structure. En cherchant des champs de déformation et d'endommagement homogènes en espace, on trouve que le champ de déplacement vaut nécessairement  $u_t = t\varepsilon_0 x$  et l'endommagement  $\alpha_t$  est donné en tout point  $x$  par l'égalité du critère à 0 *i.e.*

$$-\frac{A'(\alpha_t)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0}{2w'(\alpha_t)} = \frac{1}{t^2}. \quad (1.49)$$

Les champs de déformation et de contrainte sont homogènes et valent

$$\varepsilon_t = t\varepsilon_0, \quad \sigma_t = A(\alpha_t)t\varepsilon_0. \quad (1.50)$$

La condition d'écroûissage en déformation joue un rôle clé dans l'existence de ce type de chemin d'évolution. En effet la croissance du domaine d'élasticité  $\mathcal{E}(\alpha)$  assure que la fonction  $\alpha \mapsto A'(\alpha)/w'(\alpha)$  est strictement décroissante vers 0 quand  $\alpha$  croît de 0 à  $\alpha_m$  (au sens du produit scalaire dans l'espace des déformations). Il existe donc bien une unique valeur  $\alpha_t$  pour tout  $t > 0$  vérifiant (1.49). On a donc exhibé la construction explicite d'un chemin d'états de déformation et d'endommagement homogènes en tout point de la structure vérifiant l'équilibre mécanique et le critère d'endommagement. Néanmoins, on ne sait rien pour le moment de l'unicité de cette solution ou de sa minimalité au sens de l'énergie : pour garantir sa pertinence on doit donc regarder si cette solution est stable à tout temps au sens (ST). Avant de réfléchir à ce problème délicat, on illustre d'abord par quelques exemples de lois d'endommagement simples les capacités du modèle à rendre compte de l'adoucissement dans les matériaux fragiles.

### 1.1.5.2 Quelques exemples simples de lois

Jusqu'à présent, les dépendances de la rigidité  $A(\alpha)$  et de la dissipation  $w(\alpha)$  vis-à-vis du paramètre d'endommagement  $\alpha$  sont restées à un niveau purement formel en leur demandant de respecter des conditions d'écroûissage, de durcissement ou d'adoucissement. On illustre plus en détails notre propos en construisant explicitement des lois  $\alpha \mapsto (A(\alpha), w(\alpha))$  à partir de diagrammes contrainte-déformation au niveau local. Ceux-ci correspondent à un essai de traction simple effectué sur un élément de longueur dans lequel la déformation et l'endommagement sont



homogènes (ce qui est possible d'après la section précédente). Dans le cas d'une barre de longueur 1 cela revient à encasturer le bord  $x = 0$  et à imposer un déplacement  $t$  en  $x = 1$ . La rigidité du matériau se réduit quant à elle au module de Young  $\alpha \mapsto E(\alpha)$ . On suppose avoir fait le changement de variable d'endommagement décrit dans la Section 1.1.3.2 conduisant à un potentiel de dissipation linéaire de la forme

$$w(\alpha) = k\alpha \quad (1.51)$$

où  $k$  est un paramètre matériau strictement positif. Enfin on suppose avoir renormalisé la variable d'endommagement de sorte que l'endommagement ultime  $\alpha_m$  soit 1 ou  $+\infty$ . La dépendance inconnue en l'endommagement se fait donc uniquement au travers de la fonction  $\alpha \mapsto E(\alpha)$ . Celle-ci doit vérifier en outre les conditions  $E(0) = E_0$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_m} E(\alpha) = 0$ . On distingue ici 2 types possibles de diagrammes, ceux-ci se différenciant entre eux par la manière dont est décrite la phase adoucissante : le premier correspond à un adoucissement en puissance tandis que le second correspond à un adoucissement linéaire.

**Adoucissement en loi puissance :** La première famille de lois recherchée est celle dont le diagramme contrainte-déformation présente un adoucissement en loi "puissance" comme le montre la Figure 1.7. Concrètement, on veut donc trouver des lois d'endommagement conduisant au scénario suivant pour le diagramme contrainte-déformation :

- Pour  $0 \leq t \leq t_e$ , on a une phase élastique avec une contrainte valant

$$\sigma_t = \sigma_e \frac{t}{t_e} \quad (1.52)$$

- Pour  $t_e \leq t$ , le matériau s'endommage et la contrainte décroît vers 0 à l'infini selon la loi puissance

$$\sigma_t = \sigma_e \left( \frac{t_e}{t} \right)^r, \quad (1.53)$$

où  $r$  est un exposant strictement positif et  $\sigma_e$  désigne la contrainte limite d'élasticité.

Pour identifier la loi de rigidité du matériau, on procède par conditions nécessaires. A partir de (1.50), on tire la relation suivante que doit satisfaire la rigidité pour tout  $t \geq t_e$ ,

$$\sigma_e \left( \frac{t_e}{t} \right)^r = E(\alpha_t)t. \quad (1.54)$$

Par ailleurs, l'état de déformation et le chargement étant reliés par la relation (1.49), on en déduit la deuxième identité ( $w'(\alpha) = k$ ),

$$E'(\alpha_t) = -2k \frac{1}{t^2}. \quad (1.55)$$

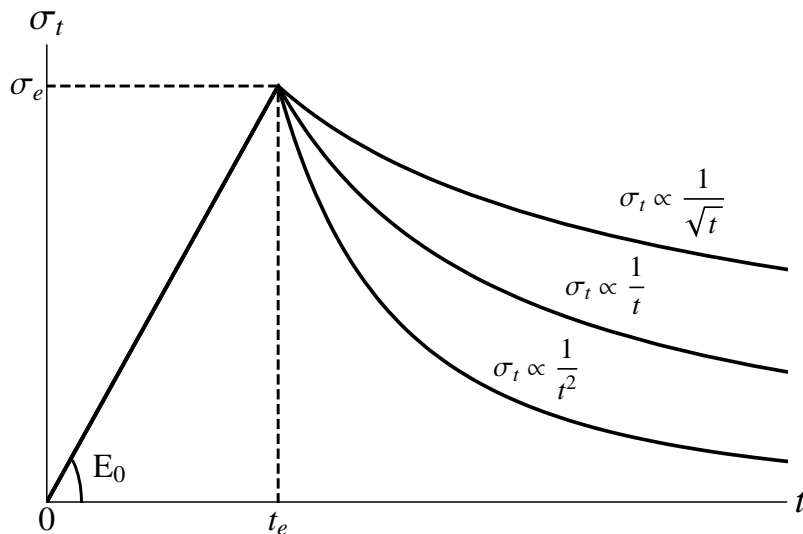


FIG. 1.1 – Diagramme contrainte-déformation en 1D pour des états homogènes

En combinant (1.54) et (1.55), on aboutit à une équation sur  $\alpha_t$  pour tout  $t$  dans  $[0, \infty)$

$$E'(\alpha_t) + KE(\alpha_t)^{\frac{2}{r+1}} = 0, \quad \text{avec } K = 2k\sigma_e^{-2}E_0^{\frac{2}{r+1}}. \quad (1.56)$$

Or l'hypothèse d'érouissage en déformation nous assure que  $t \mapsto \alpha_t$  est une fonction strictement croissante de  $[0, \infty)$  dans  $[0, \alpha_m)$ . Résoudre (1.60) est donc équivalent à résoudre l'équation différentielle sur la rigidité  $E(\alpha)$

$$E'(\alpha) + KE(\alpha)^{\frac{2}{r+1}} = 0 \quad \text{pour } \alpha \in [0, \alpha_m), \quad E(0) = E_0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_m} E(\alpha) = 0. \quad (1.57)$$

On traite tout d'abord le cas où  $r$  est différent de 1. Dans ce cas, la solution générale de l'équation (1.57) se calcule par séparation des variables puis intégration :

$$\frac{r+1}{r-1}E(\alpha)^{\frac{r-1}{r+1}} = -K\alpha + C$$

où  $C$  est une constante d'intégration. Sachant que  $E(0) = E_0$ , on peut alors identifier cette dernière :

$$C = \frac{r+1}{r-1}E_0^{\frac{r-1}{r+1}}. \quad (1.58)$$

Puisque le signe de  $C$  change selon que  $r$  est plus grand ou plus petit que 1, on a 3 cas à étudier. *Cas 1* : ( $r > 1$ ). Sous cette hypothèse, la constante d'intégration  $C$  est strictement positive. On

peut alors réécrire la fonction de rigidité sous la forme

$$E(\alpha) = E_0 \left( 1 - \frac{K}{|C|} \alpha \right)^{\frac{r+1}{r-1}}.$$

L'endommagement critique  $\alpha_m$  est fini et vaut nécessairement

$$\alpha_m = \frac{|C|}{K} = \frac{r+1}{r-1} \frac{\sigma_e^2}{2kE_0}.$$

Pour obtenir une loi d'endommagement normalisée à  $\alpha_m = 1$ , il suffit alors de choisir

$$k = \frac{r+1}{r-1} \frac{\sigma_e^2}{2E_0}.$$

Sachant que lorsque  $r$  varie de  $1^+$  à  $+\infty$ ,  $r \mapsto \frac{r+1}{r-1}$  décrit l'intervalle ouvert  $(1, +\infty)$ , on voit que les diagrammes  $\sigma - \varepsilon$  pour des état d'endommagement homogènes avec un adoucissement en puissance  $1/t^r$  avec  $r > 1$  peuvent être décrits par la famille de lois

$$(E, w)_{q \in (1, +\infty)} = \left( E_0(1 - \alpha)^q, \frac{q\sigma_e^2}{2E_0} \alpha \right)_{q \in (1, +\infty)}. \quad (1.59)$$

*Cas 2 : ( $r < 1$ ).* Dans ce cas  $C$  (1.58) est négatif. En tenant compte de la condition  $E(0) = E_0$ , la loi de rigidité du matériau peut se mettre sous la forme

$$E(\alpha) = \frac{E_0}{\left( 1 + \frac{K}{|C|} \alpha \right)^{\frac{r+1}{1-r}}} \quad (1.60)$$

avec

$$\frac{K}{|C|} = \frac{2kE_0(1-r)}{\sigma_e^2(1+r)} > 0$$

Contrairement au cas  $r > 1$ , l'endommagement pour ce choix de loi n'a pas à être borné. En effet, d'après (1.60), la rigidité du matériau ne peut tomber à 0 uniquement lorsque l'endommagement tend vers l'infini. Pour ce type de loi, nous avons donc  $\alpha_m = +\infty$ . Cependant bien que l'endommagement soit non-borné, il est toujours possible de normaliser la loi d'endommagement en choisissant de la façon suivante le paramètre  $k$ ,

$$k = \frac{\sigma_e^2(1+r)}{2E_0(1-r)}.$$

Ce choix permet de fixer la constante  $K/|C|$  à 1. Sachant que lorsque  $r$  varie de  $1^+$  à  $\infty$ ,  $r \mapsto \frac{r+1}{r-1}$  décrit l'intervalle ouvert  $(1, +\infty)$ , on voit que les diagrammes  $\sigma - \varepsilon$  pour des état d'endommagement homogènes avec un adoucissement en puissance  $1/t^r$  avec  $r < 1$  peuvent être

décrits par les lois d'endommagement

$$(E, w)_{q \in (1, +\infty)} = \left( \frac{E_0}{(1 + \alpha)^q}, \frac{q\sigma_e^2}{2E_0}\alpha \right)_{q \in (1, +\infty)}. \quad (1.61)$$

*Cas 3* : ( $r = 1$ ). En reprenant (1.57), on voit que l'équation différentielle est linéaire à coefficients constants

$$E'(\alpha) + KE(\alpha) = 0 \quad \text{pour } \alpha \in (0, \alpha_m), \quad E(0) = E_0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_m} E(\alpha) = 0.$$

La solution générale se calcule aisément et en tenant compte de la condition en  $\alpha = 0$ , on trouve que

$$E(\alpha) = E_0 e^{-K\alpha} \quad \text{avec } K = \frac{2kE_0}{\sigma_e^2}$$

De même que le cas  $r < 1$ , on voit que l'endommagement n'est pas borné puisque la rigidité ne peut tendre vers 0 que lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ . La normalisation de la loi d'endommagement revient à prendre pour  $k$

$$k = \frac{\sigma_e^2}{2E_0}.$$

Finalement la seule loi d'endommagement permettant de rendre compte de l'adoucissement en puissance  $1/t$  est

$$(E, w) = \left( E_0 e^{-\alpha}, \frac{\sigma_e^2}{2E_0}\alpha \right).$$

On résume dans le Tableau 1.1 l'ensemble des lois d'identifiées.

TAB. 1.1 – Lois d'endommagement pour un adoucissement en puissance

| Adoucissement en $\sigma_t \propto t^{-r}$ | Int. Définition          | $E(\alpha)$                  | $w(\alpha)$                      | Indice réduit $q$         |
|--|--------------------------|------------------------------|----------------------------------|---------------------------|
| $r > 1$                                    | $\alpha \in [0, 1)$      | $E_0(1 - \alpha)^q$          | $\frac{q\sigma_e^2}{2E_0}\alpha$ | $q = \frac{r+1}{r-1} > 1$ |
| $r < 1$                                    | $\alpha \in [0, \infty)$ | $\frac{E_0}{(1 + \alpha)^q}$ | $\frac{q\sigma_e^2}{2E_0}\alpha$ | $q = \frac{1+r}{1-r} > 1$ |
| $r = 1$                                    | $\alpha \in [0, \infty)$ | $E_0 e^{-\alpha}$            | $\frac{\sigma_e^2}{2E_0}\alpha$  | -                         |

**Adoucissement linéaire :** Une deuxième famille de lois souvent utilisée dans la littérature est celle qui conduit à un adoucissement avec une décroissance *linéaire*. C'est ce type de lois qui est choisi dans [35] et [45]. Sur la Figure 1.2, on schématise un diagramme contrainte-déformation type. Celui-ci peut être entièrement décrit géométriquement à l'aide de 3 constantes qui sont  $E_0$ ,  $E_T$  et  $\sigma_e$ . Là encore on se propose de trouver la famille de lois d'endommagement conduisant à ce type de diagramme. On cherche donc à rendre compte du scénario suivant

– Pour  $0 \leq t \leq t_e$ , on a une phase élastique avec une contrainte valant

$$\sigma_t = \sigma_e \frac{t}{t_e} \quad (1.62)$$

– Pour  $t_e \leq t$ , le matériau s'endommage et la contrainte décroît vers 0 à l'infini selon une loi puissance

$$\sigma_t = \sigma_e - E_T \left( t - \frac{\sigma_e}{E_0} \right) \quad (1.63)$$

où  $E_T > 0$  est un paramètre matériau.

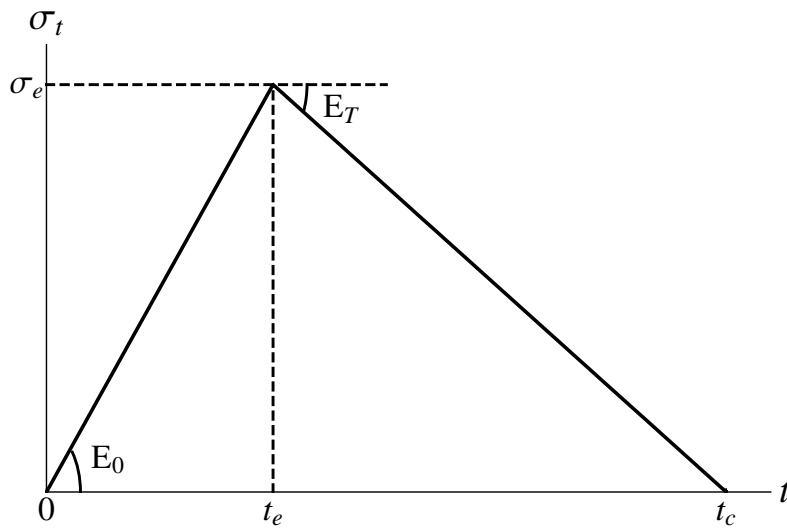


FIG. 1.2 – Diagramme contrainte-déformation en 1D pour des états homogènes

On suppose à nouveau avoir fait le changement de variable d'endommagement conduisant à une forme linéaire pour la densité de dissipation (1.51). Le champ de déformation dans la structure étant en tout point égal à  $t$ , la contrainte peut s'écrire

$$\sigma_t = \left( \sigma_e (1 + E_T/E_0) \frac{1}{t} - E_T \right) t. \quad (1.64)$$

De (1.64), on déduit que  $E(\alpha_t)$  est de la forme

$$E(\alpha_t) = C + \frac{D}{t} \quad (1.65)$$

où les constantes  $C$  et  $D$  valent  $C = -E_T$  et  $D = \sigma_e(1 + E_T/E_0)$ . Sachant qu'une fois que le critère est atteint on a l'égalité  $t^2 = -2k/E'(\alpha_t)$ , on en déduit que

$$E'(\alpha_t) + \frac{2k}{D^2}(E(\alpha_t) - C)^2 = 0. \quad (1.66)$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle

$$E'(\alpha) + \frac{2k}{D^2}(E(\alpha) - C)^2 = 0 \quad \text{pour } \alpha \in (0, \alpha_m) \quad \text{avec } E(\alpha_m) = 0 \quad (1.67)$$

La constante  $k$  sera alors choisie de sorte que  $E(0) = E_0$ . C'est une équation différentielle du premier ordre qui se résout par séparation des variables. La technique de résolution est donc identique à la partie précédente et on ne détaille pas les calculs intermédiaires.

Finalement cette famille de lois peut être décrite par

- une variable d'endommagement  $\alpha$  comprise entre 0 et 1
- une loi de rigidité et une loi de densité de dissipation appartenant à la famille suivante indexée par  $E_0/E_T \in (0, +\infty)$  :

$$(E(\alpha), w(\alpha)) = \left( E_0 \frac{1 - \alpha}{1 + \frac{E_0}{E_T} \alpha}, \frac{\sigma_e^2}{2E_0} \left( 1 + \frac{E_0}{E_T} \right) \alpha \right) \quad (1.68)$$

**Une loi élastique-durcissante-adoucissante** : Les courbes expérimentales contrainte-déformation sous traction simple associées au comportement diffus du béton [53] montrent que la phase adoucissante ne suit pas immédiatement la phase élastique. Elles mettent en évidence une phase intermédiaire de durcissement du matériau. La transition entre la phase durcissante et adoucissante dans le diagramme semble se faire de manière régulière, sans rupture de pente. On montre dans cette section sur un exemple qu'il est tout à fait possible de construire de telles lois d'endommagement à partir de notre formulation en choisissant astucieusement les fonctions matériaux  $E(\alpha)$  et  $w(\alpha)$  et leurs propriétés d'écrouissage. On considère la loi de rigidité

$$E(\alpha) = E_0(1 - \alpha)^2.$$

Pour une loi de dissipation volumique linéaire en  $\alpha$ , on a vu que l'on obtenait une courbe contrainte-déformation avec une phase élastique suivi immédiatement d'un adoucissement en loi puissance. On choisit alors de modifier cette loi en prenant une densité de dissipation sous la forme d'un polynôme de degré 2 en  $\alpha$ ,

$$w(\alpha) = A\alpha + B\alpha^2. \quad (1.69)$$

L'objectif est de déterminer les coefficients  $A$  et  $B$  à partir des grandeurs issues d'un essai de traction comprenant une phase durcissante. Outre les paramètres  $\sigma_e$ ,  $t_e$  et  $E_0$  s'ajoutent donc les deux grandeurs  $\sigma_M$  et  $t_M$  qui désignent respectivement la contrainte maximale atteinte à l'issue de la phase durcissante et la déformation qui y est associée. Durant la phase élastique, l'endommagement est nul et la déformation vaut  $t$ . Le temps  $t_e$  pour lequel le critère est atteint

pour la première fois est donc donné par

$$\frac{1}{2}E'(0)t_e^2 + w'(0) = -E_0t_e^2 + A = 0.$$

On en déduit que le coefficient  $A$  pondérant le terme linéaire est le même que pour la loi sans terme du second ordre dans la densité de dissipation,

$$A = \frac{\sigma_e^2}{E_0}. \quad (1.70)$$

Pour  $t \geq t_e$ , l'endommagement peut commencer à croître dans la structure. En cherchant toujours un endommagement  $\alpha_t$  homogène en espace, celui-ci est donné par l'égalité du critère à 0,

$$-E_0(1 - \alpha_t)t^2 + A + 2B\alpha_t = 0.$$

En factorisant, on aboutit pour  $t \geq t_e$  à

$$\alpha_t = \frac{E_0t^2 - A}{2B + E_0t^2}, \quad (1.71)$$

On en déduit alors la relation contrainte-déformation,

$$\sigma_t = E_0 \left(1 - E_0 \frac{t^2 - A}{2B + E_0t^2}\right)^2 t = E_0 \left(\frac{2E_0B + E_0A}{2B + E_0t^2}\right)^2 t. \quad (1.72)$$

La phase durcissante (si elle existe) se termine au temps  $t_M$ . En supposant que la transition avec la phase adoucissante se fasse de façon suffisamment régulière (continuité de la pente),  $t_M$  est caractérisée par

$$\left. \frac{d\sigma_t}{dt} \right|_{t=t_M} = 0, \quad (1.73)$$

c'est à dire

$$2B - 3E_0t_M^2 = 0.$$

Pour  $t \geq t_M$ , la contrainte décroît,  $\dot{\sigma}_t \leq 0$ . On résume les étapes successives

- Pour  $t \leq t_e$ , la réponse est élastique et

$$\sigma_t = E_0t$$

- Pour  $t_e \leq t \leq t_M$ , la réponse est durcissante. Pour  $t_M \leq t$ , la réponse est adoucissante. Dans les deux cas, la relation contrainte-déformation est donnée par

$$\sigma_t = E_0 \frac{(3t_M^2 + t_e^2)^2}{(3t_M^2 + t^2)^2} t$$

On représente sur la Figure 1.3 le type de diagramme que l'on obtient pour valeurs différentes du  $t_M/t_e$ . Il est donc tout à fait possible de rendre compte d'une grande gamme de comportements

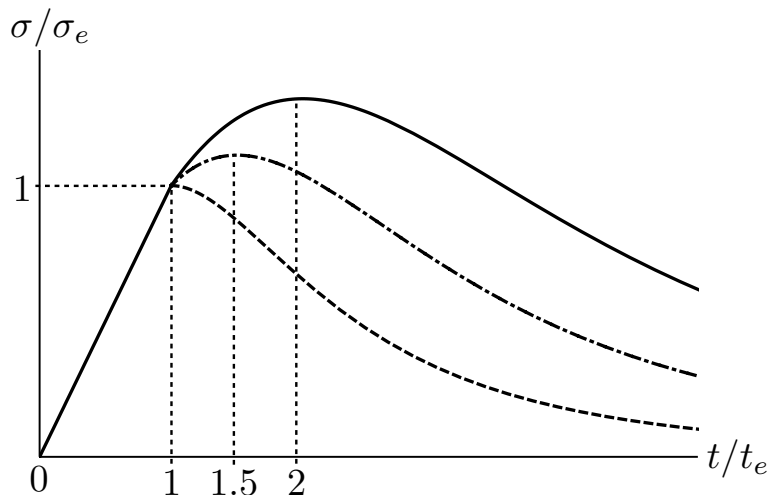


FIG. 1.3 – Diagramme contrainte-déformation pour  $t_M/t_e = 1, 1.5, 2$

endommagés en jouant sur les lois de rigidité  $E(\alpha)$  et de dissipation  $w(\alpha)$ .

### 1.1.5.3 Stabilité des états homogènes

On revient à l'étude des états homogènes et on désire savoir si ceux-ci sont stables au sens (ST) et donc s'ils ont une chance d'être observables dans la réalité. En effet on a vu en jouant sur les conditions aux limites qu'il existait une infinité de trajets temporels faits à chaque instant d'états homogènes de déformation et d'endommagement pouvant vérifier simultanément l'équilibre mécanique et le critère d'endommagement. Ces chemins vérifient donc les conditions nécessaires de stabilité du premier ordre. Pour savoir si ceux-ci sont réellement des minima locaux, il faut aller étudier des conditions suffisantes dites du second ordre, ce que l'on détaille maintenant.

On fixe le temps (la stabilité étant une notion d'état et non temporelle) et on considère un état de déplacement-endommagement de la forme  $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$  où  $\varepsilon_0$  et  $\alpha_0$  sont respectivement un tenseur symétrique et un scalaire positif vérifiant le critère. En effet, à chaque instant, tous les états d'un trajet temporel de déplacement-endommagement construits à la Section 1.1.5.1, qui soient en phase élastique ou en phase d'endommagement peuvent se réécrire sous cette forme générique.

Par ailleurs, les états homogènes obtenus à la Section 1.1.5.1 ont été construits pour un chargement à *déplacement imposé* sur l'ensemble du bord de la structure *i.e.*  $\partial_U \Omega = \partial \Omega$ . Ce choix de chargement n'est pas le seul qui puisse conduire à une homogénéité des champs de déformation et d'endommagement, mais il a l'avantage d'être compatible avec un chargement croissant en



temps sans pâtir des pathologies dues aux charges limites. Cependant, notre intérêt étant ici l'étude de la stabilité qui est une notion d'état et non d'évolution – le chargement étant fixé – on peut tout aussi bien considérer d'autres types de conditions aux limites conduisant à des champs de déplacement et d'endommagement de la forme  $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$ . On peut en particulier envisager des chargements mixtes où l'on impose en un point  $x$  de la surface  $\partial\Omega$  des composantes de la force à la valeur  $\sigma_0 \cdot n = A(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot n$  (où  $n$  est la normale à la surface) et des composantes du déplacement à la valeur  $\varepsilon_0 x$ .

Les cas extrémaux de chargement correspondent aux déplacements imposés sur toute la structure à la valeur  $\varepsilon_0 x$  ou des efforts imposés sur tout le bord de la structure à la valeur  $A(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot n$ . Ce sont ces deux types de chargement particuliers que l'on retient pour illustrer notre propos sur la stabilité. Pour ces deux cas extrémaux, l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_0$  d'admissibilité à zéro des déplacements est  $\{v \mid v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n), v|_{\partial\Omega} = 0\}$  lorsque tous les déplacements sont prescrits à la surface du domaine ou  $\{v \mid v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$  si ce sont les forces qui sont imposées sur l'ensemble des bords de  $\Omega$ . De même, le travail des forces extérieures  $\mathcal{L}(v)$  dans le déplacement admissible  $v$  est égal à zéro si les déplacements sont imposés ou à  $\int_{\partial\Omega} (\sigma_0 \cdot n)v \, dx$  si les forces le sont.

Pour connaître la stabilité de l'état, on développe l'énergie potentielle autour de celui-ci dans une direction admissible  $(v, \beta) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}$  fixée, ce qui donne

$$\mathcal{P}(\varepsilon_0 x + hv, \alpha_0 + h\beta) = \mathcal{P}(\varepsilon_0 x, \alpha_0) + h\mathcal{P}'(\varepsilon_0 x, \alpha_0)(v, \beta) + \frac{h^2}{2}\mathcal{P}''(\varepsilon_0 x, \alpha_0)(v, \beta) + o(h^2). \quad (1.74)$$

Examinons chacun des termes du développement. Le terme du premier ordre se lit

$$\mathcal{P}'(\varepsilon_0 x, \alpha_0)(v, \beta) = \int_{\Omega} A(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon(v) \, dx - \mathcal{L}(v) + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + w'(\alpha_0) \right) \beta \, dx. \quad (1.75)$$

Les deux premiers termes correspondent à la formulation variationnelle de l'équilibre mécanique et leur somme est donc nulle. Dans le cas où l'état correspond à un point de la phase élastique pour laquelle on rappelle que le critère est une inégalité stricte *i.e*  $A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + 2w'(\alpha_0) > 0$ , le troisième terme est strictement positif dans toute direction  $\beta$  non nulle. En revanche, dans le cas où la structure est en phase d'endommagement *i.e*  $A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + 2w'(\alpha_0) = 0$ , le troisième terme est nul quel que soit la direction de test  $\beta$  puisque le critère est une égalité sur tout le domaine en vertu de l'homogénéité de la déformation et de l'endommagement. Il faut donc s'intéresser dans ce cas à la dérivée seconde de l'énergie potentielle. Celle-ci se lit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}''(\varepsilon_0 x, \alpha_0)(v, \beta) &= \int_{\Omega} \left( A(\alpha_0)\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) + \left( \frac{1}{2}A''(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + w''(\alpha_0) \right) \beta^2 + 2A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon(v)\beta \right) dx \\ &= \int_{\Omega} A(\alpha_0) (\varepsilon(v) - \beta S'(\alpha_0)\sigma_0) \cdot (\varepsilon(v) - \beta S'(\alpha_0)\sigma_0) \, dx \\ &\quad - \left( \frac{1}{2}S''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) \right) \int_{\Omega} \beta^2 \, dx, \end{aligned} \quad (1.76)$$

où  $\sigma_0 = A(\alpha_0)\varepsilon_0$  est l'état de contrainte (homogène) dans le matériau et  $S(\alpha_0) = A^{-1}(\alpha_0)$  désigne le tenseur de souplesse du matériau. On distingue à présent le type d'écroissage en contrainte. La contrainte  $\sigma_0$  se situant sur le seuil du domaine d'élasticité  $\mathcal{E}^*(\alpha_0)$  défini par (1.22), on a

- si  $\alpha \mapsto \mathcal{E}^*(\alpha)$  est strictement croissante en  $\alpha_0$  (durcissement) alors  $\frac{1}{2} \frac{S''(\alpha_0)}{w''(\alpha_0)} \sigma_0 \cdot \sigma_0 < 1$ ,
- si  $\alpha \mapsto \mathcal{E}^*(\alpha)$  est strictement décroissante  $\alpha_0$  (adoucissement) alors  $\frac{1}{2} \frac{S''(\alpha_0)}{w''(\alpha_0)} \sigma_0 \cdot \sigma_0 > 1$ .

On en déduit que si le matériau est durcissant alors  $\mathcal{P}''(\varepsilon_0 x, \alpha_0)(v, \beta)$  est la somme de deux termes positifs dont un défini positif : l'état est alors *stable*.

En revanche si le matériau est adoucissant,  $\mathcal{P}''(\varepsilon_0 x, \alpha_0)(v, \beta)$  devient la différence de deux termes positifs. Pour étudier son signe, il est commode d'introduire pour  $\beta$  non nul presque partout, le quotient Rayleigh défini sur  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}$  par

$$\mathcal{R} : (v, \beta) \mapsto \frac{\int_{\Omega} A(\alpha_0) (\varepsilon(v) - \beta e) \cdot (\varepsilon(v) - \beta e) dx}{\left(\frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0)\right) \int_{\Omega} \beta^2 dx}, \quad (1.77)$$

où l'on a posé

$$e = S'(\alpha_0)\sigma_0 = S'(\alpha_0)A(\alpha_0)\varepsilon_0 \quad (1.78)$$

L'étude de la stabilité revient alors à étudier un problème de minimisation globale de la fonctionnelle  $(v, \beta) \mapsto \mathcal{R}(v, \beta)$  sur  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}$ . En effet l'état sera stable si (*resp.* seulement si)

$$\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega) = \inf_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}} \mathcal{R}(v, \beta) > (\text{resp. } \geq) 1 \quad (1.79)$$

Du fait de la présence d'intégrales volumiques, ce minimum dépend *a priori* du domaine  $\Omega$ . Néanmoins, du fait de l'absence d'échelle de longueur dans *le modèle local d'endommagement*, celui-ci est en réalité indépendant du domaine comme on le verra par la suite. On distingue à présent les cas de chargement à déplacement imposé de ceux à force imposée sur toute la frontière pour conclure sur la stabilité de l'état.

**Cas des forces imposées,  $\partial_F \Omega = \partial \Omega$  :** Ce type de chargement conduit nécessairement à une instabilité de l'état homogène. En effet, il suffit de prendre comme champ test  $\beta = 1$ , et  $v = ex$  dans (1.78). Le champ de déplacement est bien admissible puisqu'il n'y a pas de conditions sur les déplacements au bord du domaine. Le quotient de Rayleigh (1.77) calculé pour ce champ est nul. On en déduit que l'infimum du quotient de Rayleigh sur  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}$  est donc nécessairement 0. On conclut que l'état homogène en phase d'endommagement à force imposée sur toute la frontière est toujours instable.

**Cas des déplacement imposés,  $\partial_U \Omega = \partial \Omega$  :** L'étude de ce cas est loin d'être aussi immédiate. En effet les conditions de nullité sur le bord du déplacement vont fortement contraindre le problème et compliquer la recherche du minimum. Pour procéder à l'étude de

ce cas de chargement, nous nous sommes basés sur les travaux de R.V. Kohn dans [31]. Ceux-ci portent sur l'obtention de la relaxée d'une énergie de déformation définie à partir d'un potentiel élastique non convexe à deux puits. Le domaine d'application visé dans l'article est celui de la recherche du comportement effectif de matériaux en phase martensitique.

Ce phénomène physique n'est évidemment pas notre propos mais néanmoins les techniques employées pour répondre à ce problème présentent de fortes similitudes sur le plan formel avec le quotient de Rayleigh écrit pour les états homogènes. En effet, dans le cas des transformations martensitiques, les laminés consistent en une alternance de zones dans des états de déformations libres de contraintes qui correspondent à une rotation près aux puits du potentiel élastique. Cette structure en laminés provient de l'incompatibilité entre la déformation macroscopique appliquée à l'élément de matière et les puits du potentiel élastique. Dans le cas de notre quotient de Rayleigh (1.77), on retrouve cette incompatibilité avec les conditions aux limites puisque une déformation homogène à la valeur  $e$  et un endommagement  $\beta$  homogène à la valeur 1 rendant nul le quotient de Rayleigh est incompatible avec les conditions de nullité de Dirichlet dues aux déplacements imposés. On commence par rappeler succinctement le problème initial traité dans [31] avant de faire le parallèle avec la minimisation sous contrainte du quotient de Rayleigh dans notre cas.

Soit un matériau défini par un potentiel élastique  $\mathcal{B}$  à 2 puits situé en 0 et  $e$ ,

$$\mathcal{B} : \varepsilon \mapsto \min \left( \frac{1}{2} A_0 \varepsilon \cdot \varepsilon, \frac{1}{2} A_0 (\varepsilon - e) \cdot (\varepsilon - e) \right), \quad (1.80)$$

où  $A_0$  désigne un tenseur de rigidité. Le comportement effectif du matériau dans un élément de volume  $\Omega$  soumis à une déformation macroscopique  $\bar{\varepsilon}$  est donné par la quasiconvexifiée de  $\mathcal{B}$

$$\bar{\mathcal{B}} : \bar{\varepsilon} \mapsto \inf_{v|_{\partial\Omega}=\bar{\varepsilon}x} \int_{\Omega} \min \left( \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v), \frac{1}{2} A_0 (\varepsilon(v) - e) \cdot (\varepsilon(v) - e) \right). \quad (1.81)$$

Cette quantité peut être réécrite sous la forme d'une double minimisation en introduisant l'ensemble des fonctions caractéristiques  $\chi$  valant 0 ou 1 presque partout sur  $\Omega$

$$\bar{\mathcal{B}}(\bar{\varepsilon}) = \inf_{v|_{\partial\Omega}=\bar{\varepsilon}x} \inf_{\chi} \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_0 (\varepsilon(v) - \chi e) \cdot (\varepsilon(v) - \chi e). \quad (1.82)$$

Dans le cadre de la stabilité des états homogènes à déplacement imposé, seule la déformation macroscopique nulle *i.e*  $\bar{\varepsilon} = 0$  (correspondant à un encastrement sur tout le bord du domaine) nous intéresse. Dans ce cas on voit que  $\bar{\mathcal{B}}(0) = 0$  (il suffit de prendre  $\chi = 0$  et  $v = 0$  sur  $\Omega$ ). Cependant, la forme du dénominateur du quotient de Rayleigh (1.77) fait que l'on n'est pas autorisé à utiliser ce genre de champ qui correspond à un endommagement nul sur  $\Omega$  et donc à un dénominateur nul dans le quotient de Rayleigh.

Le résultat essentiel de Kohn qui nous permet de faire le lien avec notre propos est de donner le

comportement effectif du matériau à fraction volumique de constituant fixée :

$$\bar{\mathcal{B}}_\theta(0) = \inf_{v|_{\partial\Omega}=0} \inf_{\chi=\theta} \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_0(\varepsilon(v) - \chi e) \cdot (\varepsilon(v) - \chi e), \quad (1.83)$$

où le paramètre  $\theta$  représente la fraction volumique autorisée de matériau pouvant se trouver dans l'état de déformation libre de contrainte  $e$ . Ce cas intermédiaire où l'on impose la fraction de constituants va nous permettre de contrôler la norme  $L^2(\Omega)$  de l'endommagement qui apparaît justement au dénominateur du quotient de Rayleigh. Par ailleurs, puisque la fonction test  $\beta$  peut prendre n'importe quelle valeur possible, on a affaire à un potentiel élastique susceptible d'avoir une multitude de puits. Néanmoins il est important de remarquer que quel que soit leur nombre, ces puits resteront toujours proportionnels au tenseur de déformation  $e$ .

On commence par énoncer les principales étapes conduisant à la résolution du problème :

Étape 1. Le minimum ne dépend pas du domaine  $\Omega$  et peut se calculer sur le cube  $C = [0, 2\pi]^n$  de  $\mathbb{R}^n$

Étape 2. Pour un entier  $N \geq 2$  donné, on se donne  $N$  valeurs d'endommagement  $\beta_i$  distinctes auxquelles on associe à chacune une fraction volumique  $\theta_i$ . On considère alors l'espace des champs d'endommagement constants par morceaux suivants

$$\mathcal{D}(N, \beta_i, \theta_i) = \left\{ \beta \in \mathcal{D} \mid \beta = \sum_{i=1}^N \beta_i \chi_i \right\} \quad (1.84)$$

où les fonctions indicatrices  $(\chi_i)$  forment une partition arbitraire de  $C$  en  $N$  régions de taille  $\int \chi_i = \theta_i$ .

On minimise alors le quotient de Rayleigh sur  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}(N, \beta_i, \theta_i)$ .

Étape 3. On minimise la valeur obtenue à l'Étape 2 sur tous les  $N$  couples  $(\beta_i, \theta_i)$  possibles pour un  $N$  fixé

Étape 4. On passe enfin à la limite quand  $N$  tend vers l'infini le résultat de la minimisation effectuée à l'Étape 3 pour obtenir (1.79)

**Étape 1 :** Soit  $C = [0, 2\pi]^n$  le cube de côté  $2\pi$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On considère la famille des domaines homothétiques  $LC$  de  $C$  où  $L$  est un réel strictement positif. On montre tout d'abord que l'infimum  $\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega)$  du quotient de Rayleigh ne dépend pas de la taille du domaine *i.e*  $\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, C) = \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, LC)$  pour tout  $L > 0$ . Pour cela, on considère le domaine  $LC$  avec le quotient de Rayleigh  $\mathcal{R}(v, \beta)$  défini sur les espaces fonctionnels  $H_0^1(LC, \mathbb{R}^n) \times L^\infty(LC, \mathbb{R}^+)$ . On fait le changement de variable  $y = x/L$  qui envoie le domaine  $LC$  sur le domaine  $C$  et on choisit des champs de déplacement de la forme  $\tilde{v}(y) = Lv(x/L)$  et des champs d'endommagement de la forme  $\tilde{\beta}(y) = \beta(x/L)$ . Ce faisant, on supprime les effets d'échelle dûs au transport des domaines et on obtient que  $\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega)$  est l'infimum du quotient de Rayleigh  $\mathcal{R}(\tilde{v}, \tilde{\beta})$  défini sur les espaces

$H_0^1(C, \mathbb{R}^n) \times L^\infty(C, \mathbb{R}^+)$  pour un domaine normalisé *i.e.*

$$\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, LC) = \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, C) \quad \forall L > 0. \quad (1.85)$$

On revient à présent à notre domaine initial  $\Omega$ . Celui-ci étant de taille finie et d'intérieur non vide, il est toujours possible quitte à centrer  $\Omega$  de trouver  $L_1$  et  $L_2$  tel que  $L_1 C \subset \Omega \subset L_2 C$ . On a alors

$$\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, L_1 C) \leq \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega) \leq \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, L_2 C).$$

En effet, soient deux domaines  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ . Tout couple de champs admissible dans  $H_0^1(\Omega_1, \mathbb{R}^n) \times L^\infty(\Omega_1, \mathbb{R}^+)$  peut le devenir dans  $H_0^1(\Omega_2, \mathbb{R}^n) \times L^\infty(\Omega_2, \mathbb{R}^+)$  en prolongeant par 0 sur  $\Omega_2/\Omega_1$  les champs de déplacement et d'endommagement. On a alors nécessairement que  $\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_2) \leq \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1)$ . Sachant qu'on a montré précédemment que  $\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, L_1 C) = \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, L_2 C) = \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, C)$ , on en déduit finalement que

$$\zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega) = \zeta(\varepsilon_0, \alpha_0, C). \quad (1.86)$$

On peut donc raisonner à présent sur le domaine de notre choix que l'on prendra égal à  $C$ .

**Etape 2 :** On choisit donc de prendre comme volume élémentaire représentatif pour tester la stabilité de notre état homogène le cube  $C = [0, 2\pi]^n$ . Soit  $N$  un entier naturel supérieur strict à 1. On se donne  $N$  valeurs  $\beta_i$  distinctes de l'endommagement et  $N$  fractions volumiques  $\theta_i$  telles que

$$\theta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \theta_i = 1. \quad (1.87)$$

On partage le domaine  $C$  en  $N$  zones auxquelles on associe à chacune un état d'endommagement  $\beta_i$  tel que la fraction volumique occupée par le  $i$ -ème constituant  $\beta_i$  soit  $\theta_i$ . Soit alors une partition  $\chi$  de  $C$  fait de  $N$  fonctions indicatrices  $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_N)$  et respectant les conditions

$$\begin{aligned} \chi_i(x) &= 0 \text{ ou } 1, & \sum_{i=1}^N \chi_i(x) &= 1 \\ \chi_i(x)\chi_j(x) &= 0 \text{ si } i \neq j, & \langle \chi_i \rangle_C &= \theta_i \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot \rangle_C$  désigne la moyenne sur  $C$ . Les fonctions test d'endommagement  $\beta$  constantes par morceaux vérifient alors

$$\beta = \sum_{i=1}^N \beta_i \chi_i(x), \quad \beta^2 = \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \chi_i(x) \quad (1.88)$$

Le minimum de  $\mathcal{R}(v, \beta)$  (1.77) peut alors se réécrire

$$\inf_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}} \mathcal{R}(v, \beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\beta_i, \theta_i} \inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \frac{\int_C \sum_{i=1}^N A(\alpha_0) (\varepsilon(v)(x) - \beta_i e) \cdot (\varepsilon(v)(x) - \beta_i e) \chi_i(x) dx}{\left(\frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0)\right) \int_C \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \chi_i(x) dx}. \quad (1.89)$$

Sous l'hypothèse que l'on minimise tout d'abord à fraction volumique fixée, le dénominateur du quotient de Rayleigh ne dépend pas de la façon de mélanger les constituants via les fonctions  $\chi_i$  mais uniquement des fractions volumiques  $\theta_i$  puisque

$$\int_C \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \chi_i(x) dx = \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \int_C \chi_i(x) dx = \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \theta_i.$$

L'avantage de fixer la fraction des constituants est que l'on peut étudier d'abord le numérateur du quotient de Rayleigh sans se soucier dans un premier temps du dénominateur. Cela revient à effectuer la double minimisation suivante

$$\inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \int_C \sum_{i=1}^N A(\alpha_0) (\varepsilon(v)(x) - \beta_i e) \cdot (\varepsilon(v)(x) - \beta_i e) \chi_i(x) dx. \quad (1.90)$$

Ce problème peut être vu comme un problème d'*optimisation de formes*. En effet, en appelant  $\bar{W}^{(i)}$  le potentiel élastique de la  $i$ -ème phase de rigidité  $2A(\alpha_0)$  centré en la déformation  $\beta_i e$  i.e.

$$\bar{W}^{(i)} : \varepsilon \mapsto \frac{1}{2} 2A(\alpha_0) (\varepsilon - \beta_i e) \cdot (\varepsilon - \beta_i e),$$

on a dans ce cas à calculer la quantité

$$\inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \int_C \sum_{i=1}^N \bar{W}^{(i)}(\varepsilon(v)(x)) \chi_i(x) dx.$$

La première minimisation de (1.90) sur  $\mathcal{C}_0$  représente l'énergie de déformation effective pour une déformation macroscopique nulle d'un mélange de  $N$  matériaux définis par leur potentiel  $\bar{W}^{(i)}$  et ayant une répartition dans  $C$  donnée par  $\chi_i$ . La deuxième minimisation de (1.90) sur  $\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)$  consiste alors à prendre le meilleur comportement effectif possible sur toutes les configurations géométriques ( $\chi_i$ ) possibles – les fractions volumiques et le nombre de constituants étant toujours fixés.

De façon plus générale, on définit l'énergie de déformation effective optimale pour une déformation macroscopique quelconque  $\xi$  à fraction volumique fixée par

$$Q_\theta \bar{W}(\xi) = \inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \int_C \sum_{i=1}^N \bar{W}^{(i)}(\xi + \varepsilon(v)(x)) \chi_i(x) dx \quad (1.91)$$

Dans le cas où l'on mélange plus de 3 matériaux ( $N \geq 3$ ), il n'existe pas de formules explicites donnant l'expression de l'énergie effective  $Q_\theta \bar{W}$ . C'est pourtant bien le cas qui nous intéresse puisque l'on est amené à faire tendre  $N$  vers l'infini. Néanmoins en y regardant de plus près, l'étude de la stabilité des états homogènes nous place idéalement dans un cas particulier à  $N$  phases pour lequel il existe une formule analytique donnée par [31] : il correspond au cas où les  $N$  puits de chaque potentiel  $\bar{W}^{(i)}$  sont proportionnels entre eux deux à deux. En effet ici les puits sont justement de la forme  $\beta_i e$  avec  $\beta_i$  scalaire positif et  $e = S'(\alpha_0)\sigma_0$  un tenseur d'ordre 2 fixé.

L'expression de l'énergie effective  $Q_\theta \bar{W}$  nécessite d'introduire au préalable quelques notations. On définit le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{M}_n^s$  comme étant  $\langle \xi, \eta \rangle = \xi \cdot \eta = \text{Tr}(\xi \eta)$ . Soit  $V$  un sous espace de  $\mathbb{M}_n^s$  et  $\xi$  un élément de  $\mathbb{M}_n^s$ , on appelle  $\pi_V \xi$  la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $V$ . Pour  $k \in \mathbb{R}^n$  non nul, on définit alors

$$V(k) = \{k \otimes \nu + \nu \otimes k \mid \nu \in \mathbb{R}^n\}, \quad (1.92)$$

qui peut être vu comme l'espace des matrices de rang 1 symétrisées (toute matrice de rang 1 pouvant s'écrire  $k \otimes \nu$ ). L'espace  $V(k)$  ne dépend uniquement que de la direction  $k/|k|$ . Le résultat central sur lequel repose notre étude est le calcul exact de l'énergie de déformation effective donnée par la formule

$$Q_\theta \bar{W}_\theta(\xi) = \sum_{i=1}^N \theta_i W^{(i)}(\xi) - g \sum_{i,j=1}^N \beta_i \beta_j \Gamma_{ij} \quad (1.93)$$

avec  $\Gamma$  une matrice ne dépendant uniquement que des fractions volumiques de chacun des  $N$  constituants

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} \theta_i(1 - \theta_j) & i = j \\ -\theta_i \theta_j & i \neq j \end{cases} \quad (1.94)$$

et où  $g$  est une constante ne dépendant uniquement que du tenseur de proportionalité  $e$  et donnée par

$$g = \max_{|k|=1} \left| \pi_{A(\alpha_0)^{1/2}V(k)} A(\alpha_0)^{1/2} e \right|^2. \quad (1.95)$$

La projection  $\pi_{A(\alpha_0)^{1/2}V(k)} A(\alpha_0)^{1/2} e$  est la projection orthogonale de  $A(\alpha_0)^{1/2} e$  sur  $A(\alpha_0)^{1/2}V(k)$ . C'est aussi l'unique point réalisant  $\min_{\xi \in V(k)} A(\alpha_0)(e - \xi) \cdot (e - \xi)$ . En faisant

$\xi = 0$  dans (1.93) on trouve que le résultat du problème de double minimisation (1.90) se lit

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \int_C \sum_{i=1}^N A(\alpha_0) (\varepsilon(v)(x) - \beta_i e) \cdot (\varepsilon(v)(x) - \beta_i e) \chi_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N A(\alpha_0) e \cdot e \theta_i \beta_i^2 - g \sum_{i,j=1}^N \beta_i \beta_j \Gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

**Etape 3 :** On revient à présent au quotient de Rayleigh dont la minimisation (1.89) à nombre de phases  $N$  fixé peut se lire présent

$$\begin{aligned} & \inf_{\beta_i, \theta_i} \inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \mathcal{R} \left( v, \sum_{i=1}^N \beta_i \chi_i \right) \\ &= \inf_{\beta_i, \theta_i} \frac{A(\alpha_0) e \cdot e \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \theta_i - g \sum_{i,j=1}^N \beta_i \beta_j \Gamma_{ij}}{\left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) \right) \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \theta_i}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

En décomposant la matrice  $\Gamma$  et en simplifiant on aboutit à

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) \right) \inf_{\beta_i, \theta_i} \inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \mathcal{R} \left( v, \sum_{i=1}^N \beta_i \chi_i \right) \\ &= A(\alpha_0) e \cdot e - g + \inf_{\beta_i, \theta_i} \frac{\left( \sum_{i=1}^N \beta_i \theta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^N \beta_i^2 \theta_i} g \end{aligned} \quad (1.98)$$

On montre maintenant que cette quantité vaut précisément  $A(\alpha_0) e \cdot e - g$ . Celui-ci est d'abord clairement une borne inférieure puisque le dernier terme de l'égalité est positif. Par ailleurs on peut l'atteindre par la suite minimisante construite de la façon suivante : soit le  $N$ -uplet  $(\beta_i)$  tel que  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$ , les autres valeurs étant prises quelconques mais distinctes 2 à 2. Il suffit alors de considérer le mélange binaire tel que  $\theta_1 = 1 - \theta_2$  avec  $\theta_2 > 0$ , les autres fractions volumiques étant prises nulles. Pour ce choix particulier on a alors

$$\left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) \right) \inf_{\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)} \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \mathcal{R} \left( v, \sum_{i=1}^N \beta_i \chi_i \right) = A(\alpha_0) e \cdot e - g - \theta_2 g$$

En faisant tendre  $\theta_2$  vers 0, on a bien construit une suite minimisante qui nous permet d'atteindre  $A(\alpha_0) e \cdot e - g$ .

**Etape 4 :** On termine en remarquant que le résultat des minimisations successives sur les espaces  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{D}(N, \theta_i, \beta_i)$  et enfin  $(\beta_i, \theta_i)$  à  $N$  fixé est donc indépendant du nombre de phases  $N$ . En prenant la limite quand  $N$  tend vers l'infini, le minimum reste donc inchangé. Le infimum



global du quotient de Rayleigh sur l'espace  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}$  est donc

$$\left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) \right) \inf_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}} \mathcal{R}(v, \beta) = A(\alpha_0) e \cdot e - g.$$

En utilisant la caractérisation (1.79) de la stabilité de l'état  $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$ , on a donc la règle de stabilité suivante pour les états homogènes en phase adoucissante sous déplacement imposé

**Propriété 1.11.** *Pour un matériau adoucissant, l'état de déplacement et d'endommagement  $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$  à déplacement imposé sur l'ensemble de la frontière pour lequel le critère d'endommagement est atteint est stable si (resp. seulement si)*

$$A(\alpha_0) e \cdot e - g > (\text{resp } \geq) \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) \right) \quad (1.99)$$

où  $e$  et  $g$  ne dépendent uniquement que de l'état d'équilibre et sont définis respectivement par (1.78) et (1.95). En outre on a l'égalité  $A(\alpha_0) e \cdot e = g$  si et seulement s'il existe  $c$  et  $d$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que

$$e = c \otimes d + d \otimes c. \quad (1.100)$$

*Démonstration.* Si  $e$  s'écrit  $c \otimes d + d \otimes c$ , alors  $e \in V(c/|c|)$  et alors  $g = A(\alpha_0) e \cdot e$ . Réciproquement supposons que  $g = A(\alpha_0) e \cdot e$ . L'égalité  $\left| \pi_{A(\alpha_0)^{1/2} V(k)} A(\alpha_0)^{1/2} e \right|^2 = |A(\alpha_0)^{1/2} e|^2$  ayant lieu pour un certain  $k$  (le max est atteint dans (1.95) car on maximise sur un compact en dimension finie), on déduit du théorème de projection que  $e \in V(k)$ . Il existe par définition  $c$  et  $d$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que l'on puisse écrire  $e$  sous la forme recherchée.  $\square$

La propriété suivante dont on peut trouver la preuve dans [31] donne une caractérisation simple de la condition  $e = c \otimes d + d \otimes c$

**Propriété 1.12.** *Soit  $\xi$  un élément de  $\mathbb{M}_s^n$ . Il est de la forme  $c \otimes d + d \otimes c$  si et seulement si  $\xi$  est de rang 1 ou  $\xi$  est de rang 2 et que ses valeurs propres non nulles soient de signes opposés.*

La dimension de l'espace dans lequel on travaille a donc des conséquences décisives sur les résultats de stabilité. En dimension 1 tous les éléments non nuls de  $\mathbb{M}_s^1$  sont de rang 1 : les états homogènes en phase d'endommagement pour un matériau adoucissant sont donc toujours instables. En revanche, en dimension 2 ou 3, les matrices de la forme  $c \otimes d + d \otimes c$  étant plus la règle que l'exception, montrer l'instabilité des états homogènes n'est plus une formalité et il faut regarder en détail l'expression (1.99).

On termine cette section en donnant quelques formules explicites pour la quantité  $g$  dans le cas d'un matériau isotrope. On renvoie à nouveau à [31] pour les preuves. Soient donc  $\lambda(\alpha_0)$  et  $\mu(\alpha_0)$  les coefficients de Lamé du matériau pour un état d'endommagement  $\alpha_0$  et  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les valeurs propres du tenseur  $e$ . En dimension 2, le calcul de  $g$  est possible et s'énonce comme suit

**Propriété 1.13.** *En dimension 2, si  $e_1 e_2 \leq 0$ , alors  $e$  est de la forme  $c \otimes d + d \otimes c$  (cf Propriété 1.12) et*

$$g = A(\alpha_0) e \cdot e = \lambda(\alpha_0)(e_1 + e_2)^2 + 2\mu(\alpha_0)(e_1^2 + e_2^2)$$

*En revanche si  $e_1 e_2 \geq 0$ , alors  $A(\alpha_0) e \cdot e - g > 0$  et*

$$g = \frac{\mu(\alpha_0)^2}{\lambda(\alpha_0) + 2\mu(\alpha_0)} \left( \left( 1 + \frac{\lambda(\alpha_0)}{\mu(\alpha_0)} \right) |e_1 + e_2|^2 + |e_1 - e_2| \right)^2$$

En dimension 3, il n'y a plus de formule générale pour  $g$  pour un triplet quelconque de valeurs propres  $e_1, e_2$  et  $e_3$ . Il faut raisonner alors au cas par cas. On se contente donc de donner donc la valeur de  $g$  dans le cas où  $e$  est proportionnel à l'identité.

**Propriété 1.14.** *En dimension 3, si  $e = \bar{e}\mathbf{I}$ , alors  $g > A(\alpha_0) e \cdot e$  et se lit*

$$g = \frac{(3\lambda(\alpha_0) + 2\mu(\alpha_0))^2}{(\lambda(\alpha_0) + 2\mu(\alpha_0))} \bar{e}^2$$

On illustre dans la partie suivante ces propriétés de stabilité des états homogènes en dimension 2 et 3 pour les lois d'endommagement établies à la Section 1.1.5.2 (adoucissement en puissance et adoucissement linéaire).

#### 1.1.5.4 Applications

On considère un matériau isotrope dont les tenseurs de rigidité et de souplesse s'écrivent

$$A(\alpha)\varepsilon = a(\alpha)A_0\varepsilon = a(\alpha)(\lambda_0 \text{Tr } \varepsilon \mathbf{I} + 2\mu_0\varepsilon), \quad S(\alpha) = s(\alpha)A_0^{-1} \quad \text{avec } s(\alpha) = a^{-1}(\alpha) \quad (1.101)$$

où les fonctions scalaires  $a(\alpha)$  et  $s(\alpha)$  dépendent de la loi choisie. On suppose avoir fait par ailleurs le changement de variable rendant linéaire la densité de dissipation. On choisit d'étudier à déplacement imposé sur toute la frontière la stabilité d'états homogènes  $n$ -axiaux tel que l'état de déformation soit de la forme  $\varepsilon_t = t\delta$  où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker et où le paramètre  $t$  fait office de chargement. On rappelle que cet état est obtenu en imposant des déplacements à la frontière du domaine de la forme  $u_t|_{\partial\Omega} = t$ . On suppose que le critère d'endommagement est atteint et qu'on peut donc associer à  $t$  un unique endommagement  $\alpha_t$  défini par

$$\frac{1}{2}A'(\alpha_0)\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t = -w'(\alpha_t) \quad (1.102)$$

c'est à dire dans le cas  $n$ -axial

$$t^2 = \frac{-2w'(\alpha_t)}{n(n\lambda_0 + 2\mu_0)a'(\alpha_t)}. \quad (1.103)$$

On pose

$$t_e^n = \sqrt{\frac{-2w'(0)}{n(n\lambda_0 + 2\mu_0)a'(0)}}, \quad (1.104)$$

le temps au bout duquel se termine la phase élastique et tel que le critère d'endommagement soit atteint pour la première fois. Ce temps dépend de la dimension dans laquelle on travaille du fait de la  $n$ -axialité du chargement. On suppose lorsque la dimension est  $n = 2$  être en déformation plane. Le tenseur  $e$  d'ordre 2 (1.77) se lit

$$e = S'(\alpha_t)A(\alpha_t)\varepsilon_t = s'(\alpha_t)a(\alpha_t)t\delta.$$

Le tenseur  $e$  est donc proportionnel à l'identité pour ce type de chargement  $n$ -axial. D'après la Propriété 1.14, la quantité  $g$  définie par (1.95) se calcule explicitement. Les quantités d'intérêt intervenant dans le calcul de stabilité valent alors :

$$\begin{cases} A(\alpha_0)e \cdot e = n(n\lambda_0 + 2\mu_0)s'(\alpha_t)^2a(\alpha_t)^3t^2, \\ g = \frac{(n\lambda_0 + 2\mu_0)^2}{\lambda_0 + 2\mu_0}s'(\alpha_t)^2a(\alpha_t)^3t^2, \\ \frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t \cdot \sigma_t - w''(\alpha_t) = \frac{1}{2}s''(\alpha_t)a(\alpha_t)^2n(n\lambda_0 + 2\mu_0)t^2 - w''(\alpha_t). \end{cases} \quad (1.105)$$

On est maintenant en mesure d'appliquer la Propriété 1.11 : l'état de déplacement-endommagement  $(\varepsilon_t x, \alpha_t)$  où les quantités  $\varepsilon_t$  et  $\alpha_t$  sont liées par (1.103) sera stable si (*resp.* seulement si)

$$\left( \frac{2(n-1)\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}s'(\alpha_t)^2a(\alpha_t)^3 - \frac{1}{2}ns''(\alpha_t)a(\alpha_t)^2 \right) t^2 > (\text{resp } \geq) - \frac{w''(\alpha_t)}{(n\lambda_0 + 2\mu_0)} \quad (1.106)$$

Appliquons cette inégalité pour les différentes lois considérées et regardons lesquelles peuvent autoriser la stabilité.

**Adoucissement en puissance :** On a vu que ce type d'adoucissement conduisait à 3 familles de lois (voir Tableau 1.1). La condition suffisante (*resp* nécessaire) de stabilité (1.106) se simplifie et se lit

$$\frac{s'(\alpha_t)^2}{s(\alpha_t)s''(\alpha_t)} > (\text{resp } \geq) \left( 1 + \frac{\nu_0}{1 - 2\nu_0} \right) \frac{n}{2(n-1)}. \quad (1.107)$$

On voit que la dépendance vis-à-vis des paramètres matériaux porte uniquement sur le coefficient de Poisson puisque  $\lambda_0/2\mu_0 = \nu_0/(1 - 2\nu_0)$ . On étudie successivement les 3 sous-familles de lois :

**Cas 1 :  $a(\alpha) = (1 - \alpha)^q$ ,  $q > 1$ .** Un calcul direct montre que la condition suffisante de stabilité se lit

$$\frac{q}{q+1} > \left( 1 + \frac{\nu_0}{1 - 2\nu_0} \right) \frac{n}{2(n-1)}. \quad (1.108)$$

Cette condition ne dépend pas de l'état  $(tx, \alpha_t)$  mais uniquement de l'exposant de la loi et du coefficient de Poisson. Cette condition est peu intuitive puisque l'on peut imaginer pour des chargements élevés que la structure préférerait localiser l'endommagement plutôt que de s'endommager de façon diffuse.

Plaçons nous d'abord en dimension 2. On voit qu'il est impossible de vérifier (1.108) puisque le membre de droite est inférieur strictement à 1 alors que le membre de droite est supérieur à 1. Tous les états de déformation biaxiaux dans cette dimension en phase d'endommagement avec ce type de loi sont donc instables. Plaçons nous alors en dimension  $n = 3$ . Dans ce cas la condition suffisante de stabilité (1.108) se lit

$$q(1 - 5\nu_0) > 3(1 - \nu_0). \quad (1.109)$$

La conclusion n'est alors plus triviale puisque selon la valeur du coefficient de Poisson  $\nu_0$  il va être possible de rendre l'état stable pour toute valeur du chargement. En effet si  $\nu_0 < 0.2$ , en choisissant l'exposant  $q$  tel que

$$q > \frac{3(1 - \nu_0)}{1 - 5\nu_0} \quad (1.110)$$

on aboutit à la stabilité *inconditionnelle* de l'état de déformation homogène *triaxial*. Ce résultat nous assure donc l'observabilité de l'état jusqu'à l'état de ruine de la structure. En revanche pour  $\nu_0 \geq 0.2$ , n'importe quel état triaxial en phase d'endommagement est instable. On a

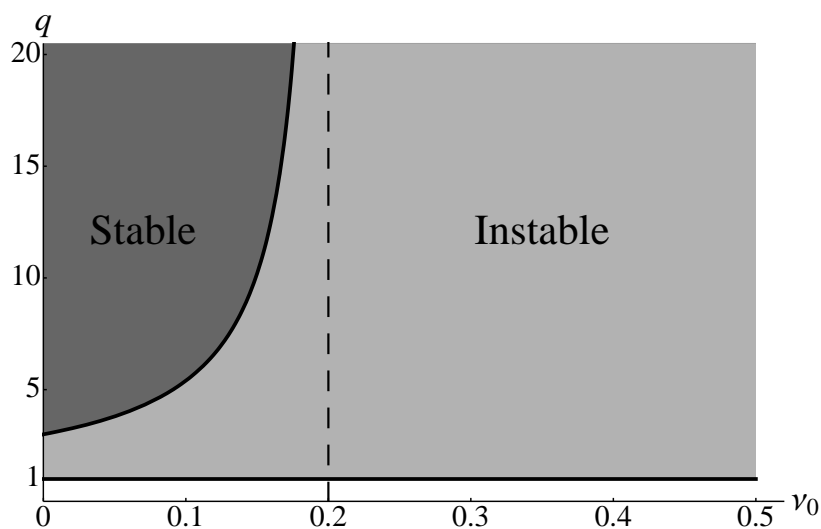


FIG. 1.4 – Diagramme de stabilité pour  $a(\alpha) = (1 - \alpha)^q$  pour l'état triaxial ( $n = 3$ )

représenté sur la Figure 1.4 le diagramme de stabilité en dimension 3 pour la loi  $a(\alpha) = (1 - \alpha)^q$ . Il faut des valeurs peu élevées du coefficient de Poisson combinés à des exposants  $q$  assez grands pour permettre la stabilisation. On rappelle (voir Tableau 1.1) que des exposants  $q$

grands correspondent à des décroissances de la contrainte en  $1/t^r$  avec  $r$  proche de 1 par valeurs supérieures.

**Cas 2 :**  $a(\alpha) = 1/(1 + \alpha)^q$ ,  $q > 1$ . On reprend les mêmes calculs et on aboutit à la condition suffisante de stabilité de la forme

$$\frac{q}{q-1} > \left(1 + \frac{\nu_0}{1-2\nu_0}\right) \frac{n}{2(n-1)}. \quad (1.111)$$

En dimension  $n = 2$ , on aboutit à nouveau à une condition sur l'exposant de la forme

$$q < \frac{1-\nu_0}{\nu_0}. \quad (1.112)$$

Contrairement à la famille  $a(\alpha) = (1 - \alpha)^q$ , cette famille de lois permet la stabilité de l'état biaxial. Il faut néanmoins toujours des valeurs judicieuses du coefficient de Poisson. Pour  $\nu_0 = 0$ , toutes les lois d'endommagement construites sur ce modèle rendent stable l'état biaxial. À mesure que  $\nu_0$  augmente, la plage d'exposants  $q$  autorisant la stabilité se rétrécit. Néanmoins celle-ci n'est jamais réduite à l'ensemble vide puisque pour tout  $\nu_0 \in [0, 0.5)$  on a  $(1 - \nu_0)/\nu_0 > 1$ . On représente sur la Figure 1.5 le diagramme de stabilité en dimension 2 pour la loi  $a(\alpha) = 1/(1+\alpha)^q$ . On constate que les exposants  $q$  proches de 1 tendent à stabiliser l'état homogène. À nouveau, en

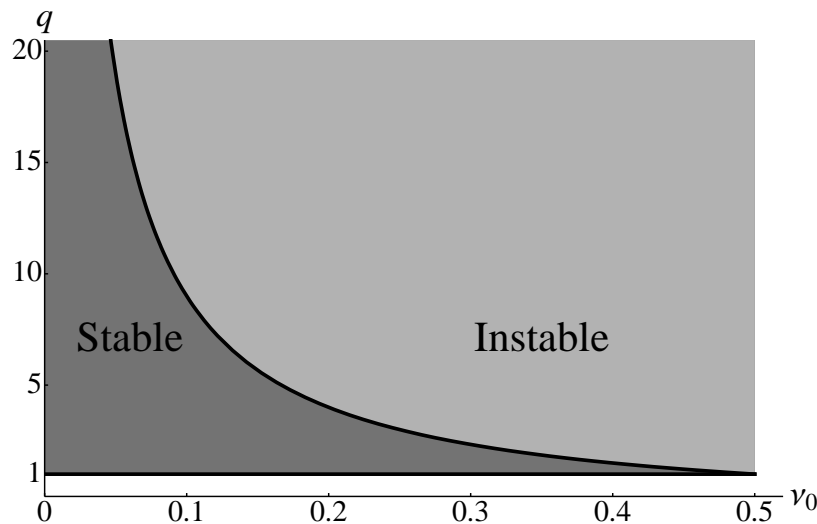


FIG. 1.5 – Diagramme de stabilité pour  $a(\alpha) = 1/(1 + \alpha)^q$  pour l'état biaxial ( $n = 2$ )

se référant au Tableau 1.1, ces exposants correspondent à des adoucissement dans le diagramme contrainte-déformation en  $1/t^r$  avec  $r$  proches de 0. Ceci confirme que des pentes d'adoucissement faibles favorise la stabilité de l'état homogène.

On examine maintenant le cas de la dimension  $n = 3$ . La condition suffisante de stabilité

s'écrit

$$q(1 - 5\nu_0) > -3(1 - \nu_0). \quad (1.113)$$

Si  $\nu_0 < 0.2$ , le membre de droite de (1.113) étant strictement négatif, on en déduit que l'état triaxial est inconditionnellement stable pour tout  $q$ . En revanche, si  $0.2 < \nu_0 < 0.5$ , seuls certains exposants autorisent la stabilité de l'état triaxial : ils doivent être choisis tels que  $1 < q < 3(1 - \nu_0)/(5\nu_0 - 1)$ . On représente sur la Figure 1.6 le diagramme de stabilité en dimension 3 pour ce choix de loi. Comme attendu, la triaxialité des déformations étend la zone

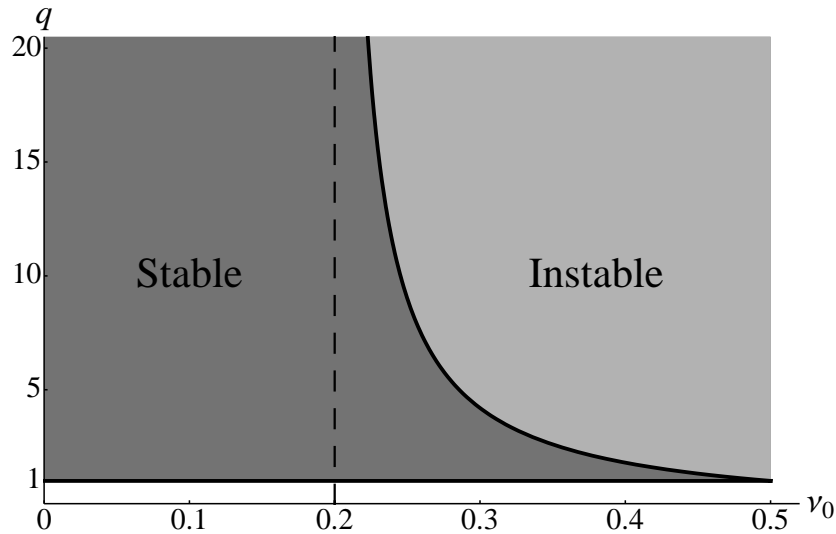


FIG. 1.6 – Diagramme de stabilité pour  $a(\alpha) = 1/(1 + \alpha)^q$  pour l'état triaxial

de stabilité considérablement. En particulier, pour  $\nu_0 < 0.2$ , l'état homogène sera stable pour n'importe quel exposant  $q$ . En revanche des coefficients de Poisson élevés combinés à une pente d'adoucissement raide tendent à favoriser l'instabilité de ces états homogènes.

**Cas 3 :**  $a(\alpha) = e^{-\alpha}$ . On considère pour finir la loi d'endommagement intermédiaire  $e^{-\alpha}$  qui est la loi faisant la transition entre la famille des lois en  $(1 - \alpha)^q$  et celles en  $1/(1 + \alpha)^q$  et telle que l'adoucissement en contrainte dans le temps soit en  $1/t$ . Celle-ci devrait donc présenter des résultats de stabilité à mi-chemin de ceux présentés jusqu'ici. La condition suffisante de stabilité pour un état homogène  $n$ -axial en phase d'endommagement se lit dans ce cas :

$$\frac{2(n - 1)}{n} > \left(1 + \frac{\nu_0}{1 - 2\nu_0}\right). \quad (1.114)$$

En dimension 2, on voit clairement que (1.114), est impossible à satisfaire, le membre de droite étant strictement supérieur à 1. Dans ce cas, la conclusion est la même que pour la famille  $(1 - \alpha)^q$  : il est impossible d'observer des états biaxiaux stables. En dimension 3, (1.114) est vrai

si  $\nu_0 < 0.2$  et on est assuré d'avoir la stabilité de l'état homogène comme pour les lois du Cas 2. Pour  $\nu_0 > 0.2$ , l'état en phase d'endommagement est de nouveau instable de la même façon que les lois du Cas 1. On a bien comme attendu des résultats de stabilité intermédiaires entre ceux du Cas 1 et du Cas 2.

**Adoucissement linéaire :** On illustre de nouveau la stabilité des états homogènes mais en choisissant la famille de lois définies par (1.63). On rappelle que celle-ci conduit à un adoucissement en contrainte linéaire en temps dans le diagramme contrainte-déformation. On appelle  $t_e^n$  le temps de fin de la phase élastique pour des chargements  $n$ -axial. On introduit en outre  $t_c^n$  comme le temps caractéristique en chargement  $n$ -axial de ruine de la structure par endommagement diffus *i.e.* tel que  $\alpha_{t_c^n} = 1$  dans  $\Omega$ . Celui-ci peut être relié au temps de rupture dans un essai de traction simple  $t_c$  (cf Figure 1.2) puisque par définition du temps de rupture on a les deux égalités suivantes quand la structure n'a plus de rigidité

$$\frac{1}{2}a'(1)A_0\varepsilon_{t_e^n} \cdot \varepsilon_{t_e^n} + w'(1) = 0, \quad \frac{1}{2}a'(1)E_0t_c t_c + w'(1) = 0, \quad (1.115)$$

ce qui donne après simplification

$$t_c^n = \sqrt{\frac{E_0}{n\lambda_0 + 2\mu_0}}t_c. \quad (1.116)$$

Les fonctions scalaires  $a(\alpha)$  et  $s(\alpha)$  en facteur des tenseurs de rigidité et de souplesse  $A_0$  et  $S_0$  (1.101) s'écrivent pour ces lois

$$a(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{1 + \frac{E_0}{E_T}\alpha}, \quad s(\alpha) = \frac{1 + \frac{E_0}{E_T}\alpha}{1 - \alpha}. \quad (1.117)$$

La densité d'énergie de dissipation est

$$w(\alpha) = \left( \frac{\sigma_e^2}{2E_0} + \frac{\sigma_e^2}{2E_T} \right) \alpha$$

D'où on déduit que l'état est stable si

$$\frac{1 + E_0/E_T}{1 + E_0/E_T\alpha_t} > \frac{n(\lambda_0 + 2\mu_0)}{2(n-1)\mu_0} \quad (1.118)$$

Contrairement à l'adoucissement en puissance, on voit que la condition de stabilité dépend du temps de chargement via  $\alpha_t$ . En explicitant  $\alpha_t$  à partir du critère d'endommagement qui se lit,

$$n(n\lambda_0 + 2\mu_0)t^2 = \frac{-2w'(\alpha_t)}{a'(\alpha_t)} \quad (1.119)$$

on trouve que l'état est stable si (*resp.* seulement si)

$$t < (\text{resp. } \leq) t_s^n(\nu_0) \quad \text{avec} \quad t_s^n = \frac{2(n-1)}{n} \frac{1-2\nu_0}{2-3\nu_0} t_c^n. \quad (1.120)$$

Là encore, le coefficient de Poisson joue un rôle déterminant dans les résultats de stabilité. On rappelle aussi que l'état est toujours stable en phase élastique, c'est à dire pour  $t < t_e^n$ . On a représenté sur la Figure 1.7, le diagramme de stabilité pour cette loi. Un essai quasi-

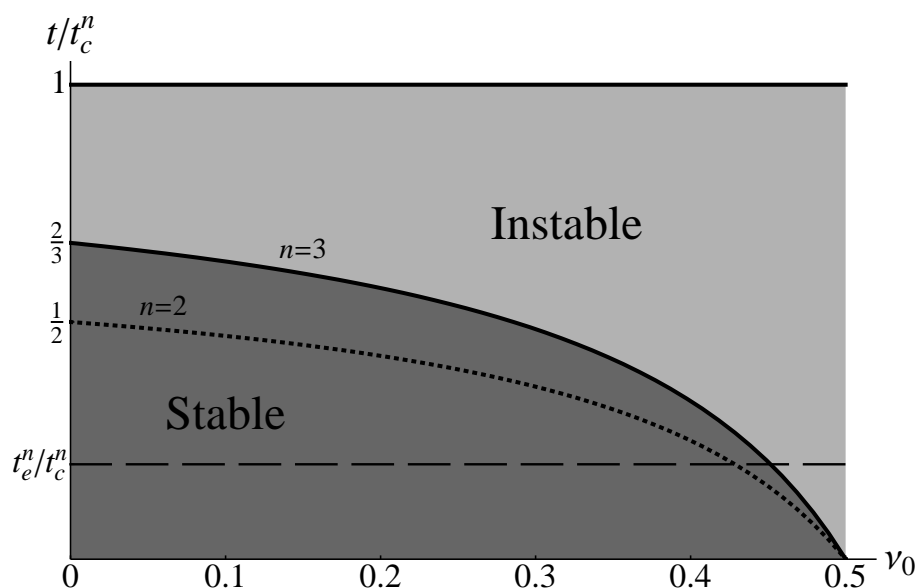


FIG. 1.7 – Diagramme de stabilité pour  $a(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\frac{E_0}{E_T}\alpha}$

statique biaxial ou triaxial sur ce diagramme se lit de la façon suivante. On fixe tout d'abord la dimension  $n$  et les paramètres matériaux  $E_0$ ,  $\nu_0$  et  $E_T$ , ce qui a pour conséquence de fixer les temps caractéristiques  $t_e^n$  et  $t_c^n$ . On a alors le scénario suivant

- Pour  $t < t_e^n$ , l'état sera stable.
- Pour  $t \geq t_e^n$ , on distingue 2 cas
  - si  $t_e^n/t_c^n$  est supérieur à  $(n-1)/n$  ou si  $t_s^n(\nu_0) < t_e^n$  alors l'état sera instable dès la fin de la phase élastique
  - si  $t_e^n/t_c^n$  est inférieur à  $(n-1)/n$  et si  $t_s^n(\nu_0) > t_e^n$  alors l'état sera stable à l'issue de la phase élastique jusqu'au temps  $t_s^n(\nu_0)$  donné par (1.120). Pour  $t > t_s^n(\nu_0)$ , l'état homogène devient instable.

Les résultats de stabilité diffèrent donc fortement selon le choix de la loi d'endommagement. De ces deux exemples qui ne prétendent aucunement à l'exhaustivité, on remarque que la perte de stabilité pour les états homogènes dans le cadre du modèle local n'est pas toujours la règle et qu'elle est intimement liée à la dimension de l'espace et du chargement. Dans le cas où l'état



homogène n'est plus stable, on y imagine que la structure va localiser l'endommagement avec des variations du champ d'endommagement en espace. On montre dans la partie suivante que le modèle local présente de graves pathologies dans la modélisation de ces localisations : Il devient alors nécessaire de régulariser le modèle.

## 1.2 La régularisation du modèle par gradient d'endommagement

### 1.2.1 Pourquoi régulariser ?

On a vu dans la partie précédente pour des matériaux adoucissants que les états homogènes pouvaient être instables. Dans ce cas, la structure est sensée se diriger vers des états stables de plus basse énergie qui sont à des états présentant des variations en espace et qui correspondent probablement à des localisations. Or il est connu que les modèles locaux sont inaptes à gérer les phénomènes de localisation. En effet, ne serait ce que sur une structure particulière telle qu'une barre en traction, on a la

**Propriété 1.15.** *En 1D et dans le cas d'un matériau adoucissant, tout état d'équilibre pour lequel le critère d'endommagement est une égalité sur un ensemble de mesure non nulle est instable.*

*Démonstration.* On considère une barre  $\Omega = (0, 1)$  soumise à des forces linéiques  $f$  et encadrée en  $x = 0$ . La barre est soumise en  $x = 1$  à une force ou un déplacement imposé. Soit alors  $(u, \alpha)$ , les champs de déplacement et d'endommagement réalisant l'équilibre et vérifiant le critère. On enlève les indices temporels puisque la stabilité est une notion d'état. On appelle  $\Omega^a$  la zone où le critère d'endommagement est une égalité et celle-ci est supposée de mesure non-nulle. En chaque point de  $\mathcal{H}$  on a

$$\frac{1}{2}A'(\alpha(x))u'(x) \cdot u'(x) + w'(\alpha(x)) = 0.$$

On développe l'énergie potentielle du système autour de cet état d'équilibre

$$\mathcal{P}(u + hv, \alpha + h\beta) = \mathcal{P}(u, \alpha) + h\mathcal{P}'(u, \alpha)(v, \beta) + \frac{h^2}{2}\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta) + o(h^2). \quad (1.121)$$

On regarde successivement le signe de chacune des dérivées directionnelles. La dérivée première se lit

$$\mathcal{P}'(u, \alpha)(v, \beta) = \int_{\Omega} A(\alpha)u'v' + \left( \frac{1}{2}A'(\alpha)u'^2 + w'(\alpha) \right) \beta dx - \mathcal{L}_t(v)$$

L'état  $(u, \alpha)$  étant à l'équilibre et le critère étant une égalité sur le domaine  $\Omega^a$ , la dérivée

première se réduit à

$$\mathcal{P}'(u, \alpha)(v, \beta) = \int_{\Omega/\Omega^a} \left( \frac{1}{2} A'(\alpha) u'^2 + w'(\alpha) \right) \beta dx$$

La dérivée première est strictement positive pourvu que l'intersection entre le support du champ test  $\beta$  et  $\Omega/\Omega^a$  soit non nulle. En revanche, pour des champs à support inclus dans  $\mathcal{H}$ , l'étude de la dérivée seconde est nécessaire pour conclure. Celle-ci se lit après calcul

$$\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta) = \int_{\Omega} A(\alpha) v'^2 + 2A'(\alpha) u' v' \beta + \left( \frac{1}{2} A''(\alpha) u'^2 + w''(\alpha) \right) \beta^2 dx.$$

avec  $Supp(\beta) \subset \Omega^a$ . Pour montrer l'instabilité de l'état, il suffit de trouver une direction test  $(v, \beta)$  rendant négative la dérivée seconde de énergie. On calcule dans un premier temps le déplacement  $v$  optimal pour un  $\beta$  donné qui rende minimal  $v \mapsto \mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta)$ . Celui-ci est différent selon que l'on soit à déplacement ou force imposée en  $x = 1$ , les espaces d'admissibilité étant différents dans les deux cas.

On commence par traiter le cas à force imposée en  $x = L$ . Dans ce cas là l'espace des champs de déplacements admissibles à zéro est  $\mathcal{C}_0 = \{w \in H^1 \mid w(0) = 0\}$ . L'optimum en  $v$  à  $\beta$  fixé est donné par la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} A(\alpha) v' w' + A'(\alpha) u' w' \beta dx = 0, \quad \forall w \in \mathcal{C}_0, \quad (1.122)$$

dont l'intégration par parties puis l'utilisation des conditions aux limites donne

$$v'(x) = -\frac{A'(\alpha(x))}{A(\alpha(x))} u'(x) \beta(x).$$

En injectant le champ de déplacement optimal dans  $\mathcal{P}''(u, \alpha)$ , on trouve

$$\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta) = - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha) \sigma^2 - w''(\alpha) \right) \beta^2 dx.$$

avec  $\sigma = A(\alpha) u'$ , le champ de contrainte à l'équilibre. En utilisant l'hypothèse d'adoucissement, qui équivaut à la stricte convexité de  $W_0^*(\sigma, \alpha)$  par rapport à  $\alpha$  et donc à la positivité de sa dérivée seconde  $W_{0,\alpha\alpha}^*$ , on en conclut à l'instabilité de l'état en considérant une fonction test  $\beta$  à support non nul inclus dans  $\Omega^a$ . On continue avec le cas où on impose le déplacement en bout de barre. Dans ce cas là, l'espace des champs de déplacements admissibles à zéro est  $\mathcal{C}_0 = \{w \in H^1 \mid w(0) = w(1) = 0\}$ . L'optimum en déplacement  $v$  à endommagement  $\beta$  fixé

s'obtient à nouveau en résolvant (1.122) et se lit

$$v'(x) = -\frac{A'(\alpha(x))}{A(\alpha(x))}u'(x)\beta(x) + \frac{\int_{\mathcal{H}} \frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)}u'\beta dx}{\int_{\mathcal{H}} \frac{dx}{A(\alpha)}} \frac{1}{A(\alpha(x))}.$$

En injectant à nouveau l'optimum dans  $\mathcal{P}''(u, \alpha)$ , on aboutit à

$$\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta) = -\int_{\mathcal{H}} \left( \frac{1}{2}S''(\alpha)\sigma^2 - w''(\alpha) \right) \beta^2 dx + 3 \frac{\left( \int_{\mathcal{H}} \frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)}u'\beta dx \right)^2}{\int_{\mathcal{H}} \frac{dx}{A(\alpha)}} \quad (1.123)$$

Le deuxième terme de (1.123) est positif et peut à première vue améliorer les résultats de stabilité. En considérant des champs test  $\beta$  à support dans  $\mathcal{H}$  tels que ceux-ci aient un support de taille  $\theta$  sur lequel ils prennent la valeur 1 et 0 ailleurs, on trouve que le premier terme de (1.123) est d'ordre  $\theta$  et le deuxième terme d'ordre  $\theta^2$  quand  $\theta$  tend vers 0. On voit donc que pour  $\theta$  assez petit, le premier terme va l'emporter et  $\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta)$  sera négatif dans cette direction test. On aboutit donc à l'instabilité de  $(u, \alpha)$  dans tous les cas.  $\square$

On voit donc que seuls les états en phase élastique pour lesquels le critère est une inégalité stricte en presque tout point de la structure sont stables dans le cas unidimensionnel. C'est beaucoup trop peu pour conserver le modèle en l'état. Le modèle en l'état étant donc inapte à modéliser les comportements adoucissants qui nous intéressent sauf dans des cas particuliers comme ceux de biaxialité ou de triaxialité envisagés précédemment, une régularisation du modèle est nécessaire. Avant tout choix de régularisation, regardons de plus près les mécanismes qui conduisent à l'instabilité des états en phase d'endommagement dans le cas de matériaux adoucissants. Ceux-ci résident dans la possibilité de diminuer l'énergie du système en localisant un incrément d'endommagement  $\beta$  sur une zone de taille assez petite là où le critère est atteint. Par ailleurs l'énergie de dissipation pour créer cette localisation étant proportionnel à la taille de la localisation du fait du caractère local de l'endommagement, on voit qu'en faisant tendre cette épaisseur de localisation vers zéro l'énergie dissipée pour localiser l'endommagement est nulle, ce qui n'est pas acceptable d'un point de vue physique puisque rompre de la matière doit coûter de l'énergie.

Par ailleurs, la seconde lacune du modèle local réside dans l'absence d'effets d'échelle dans les résultats alors que ceux-ci sont constatés expérimentalement lors de la mesure de la dureté de métaux ou de la céramique [54, 43]. Il faut donc trouver un moyen d'introduire une échelle de longueur dans le modèle pour corriger ces défauts tout en gardant la structure variationnelle du modèle.

Dans la littérature, il existe plusieurs façons de régulariser les modèles locaux d'endommagement. On peut utiliser des théories du second gradient comme il est fait en plasticité [21, 17, 42] ou choisir de délocaliser les variables sur lesquelles porte la régularisation en les moyennant avec

une pondération sur un volume représentatif, [51]. On décide pour notre part de choisir une approche déductive tout en restant dans le droit fil de l'approche énergétique initiée jusqu'ici. Ainsi on suppose que la densité d'énergie de déformation est non seulement une fonction de la déformation et de la variable interne d'endommagement mais aussi du gradient d'endommagement puis on examine en détail les conséquences de cette hypothèse.

### 1.2.2 La construction du modèle régularisé

On considère un point matériel du matériau endommageable. On postule que les variables qui caractérisent localement ce point matériel sont non seulement son état de déformation  $\varepsilon$  et son état d'endommagement  $d$  mais aussi son gradient d'endommagement  $\nabla d$ . Ce terme est de nature non local et rend compte des interactions avec les points dans le voisinage. Le travail de déformation pour amener le point matériel de l'état sain naturel  $(0, 0, 0)$  à l'état  $(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$  est donc désormais une fonction de 3 variables  $\mathbb{M}_s^n \times [0, \alpha_m] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) \mapsto W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$ . Dans le cadre d'une théorie linéarisée en  $\varepsilon$  et  $\nabla\alpha$  on choisit de développer ce travail autour de l'état d'équilibre thermodynamique  $(0, \alpha, 0)$  jusqu'à l'ordre 2 en  $\varepsilon$  et  $\nabla\alpha$ . On a alors

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = w(\alpha) + \sigma_0(\alpha) \cdot \varepsilon + \lambda(\alpha) \cdot \nabla\alpha + \psi(\varepsilon, \alpha) + \Lambda(\alpha) \cdot (\varepsilon \otimes \nabla\alpha) + \Gamma(\alpha) \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \quad (1.124)$$

où le point désigne le produit scalaire entre vecteurs et tenseurs du même ordre. Dans (1.124) on retrouve tout d'abord des termes ne faisant pas intervenir le gradient de la variable interne et qu'on choisit d'identifier naturellement aux termes locaux  $\psi(\varepsilon, \alpha)$  et  $w(\alpha)$ , à la différence près qu'apparaît un terme de précontrainte  $\sigma_0(\alpha)$  pouvant évoluer avec l'endommagement. On choisit d'imposer ce terme à 0 puisqu'il n'a pas été pris en compte dans l'étude locale. Les termes suivants correspondent aux termes non-locaux qui font intervenir le gradient d'endommagement. Les coefficients pondérants ces termes du développement sont des tenseurs d'ordre différent :  $\lambda(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Lambda(\alpha) \in \mathbb{M}_s^n \otimes \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma(\alpha) \in \mathbb{M}_s^n$ . Pour simplifier leur dépendance en  $\alpha$ , on suppose que notre matériau a un comportement isotrope et que l'endommagement est un paramètre objectif (*i.e.* invariant par tout changement de référentiel). Formellement, ces hypothèses imposent au travail des déformations de vérifier les conditions suivantes

$$W(Q\varepsilon Q^T, \alpha, Q\nabla\alpha) = W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha), \quad \forall Q \in \mathbb{O}^n, \quad \forall (\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) \in \mathbb{M}_s^n \quad (1.125)$$

où  $\mathbb{O}^n$  désigne le groupe orthogonal en dimension  $n$ . Sous cette hypothèse, on obtient les conséquences suivantes sur (1.124) : le vecteur  $\lambda(\alpha)$  et le tenseur d'ordre 3  $\Lambda(\alpha)$  sont nuls tandis que le tenseur d'ordre  $\Gamma(\alpha)$  est proportionnel à l'identité. Puisque la régularisation du modèle a pour but de pénaliser les forts gradients, le tenseur  $\Gamma(\alpha)$  doit être défini positif. Ainsi,  $\Gamma(\alpha)$  s'écrit  $\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha)\mathbf{I}$  avec  $\gamma(\alpha) > 0$ .

Finalement sous l'hypothèse d'isotropie du matériau et d'objectivité de la variable interne le

travail de déformation prend la forme simplifiée suivante

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = w(\alpha) + \psi(\varepsilon, \alpha) + \gamma(\alpha)\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \quad (1.126)$$

avec  $\psi(Q\varepsilon Q^T, \alpha) = \psi(\varepsilon, \alpha)$ . La différence avec le modèle local tient donc uniquement à la présence supplémentaire d'un terme dépendant quadratiquement du gradient d'endommagement. Notons que cette introduction purement phénoménologique de termes en gradient d'endommagement dans l'énergie souffre d'un manque de base micro-mécanique. Alors qu'il est possible de justifier les termes "locaux" par des arguments basés sur le comportement effectif de matériau micro-fissuré [37], il n'existe pas à ce jour, à notre connaissance, de telle justification pour les termes non locaux dans le cadre des matériaux fragiles adoucissants. En revanche, dans le cas des matériaux ductiles, des approche de type micro-mécanique existent : elles se basent sur des conditions en déformation non-homogène (quadratique) au niveau du VER [27, 20].

Il est à noter que le modèle local a été construit sans hypothèse d'isotropie ou d'objectivité de la variable d'endommagement alors que celle-ci est nécessaire dans le cas du modèle non-local si on veut aboutir à la forme réduite (1.126). Le paramètre  $\gamma(\alpha)$  dépendant *a priori* de  $\alpha$ , on a donc 3 fonctions de l'endommagement à déterminer. On peut fixer toutefois une de ces fonctions en faisant un changement de variable. Dans le modèle local, le changement pratique consistait à prendre comme nouvelle variable d'endommagement la densité d'énergie dissipée. En prenant donc le changement de variable  $\alpha \mapsto d := w(\alpha)/w(\alpha_m)$ , on a

$$\tilde{W}(\varepsilon, d, \nabla d) = \tilde{w}(d) + \tilde{\psi}(\varepsilon, d) + \tilde{\gamma}(d)\nabla d \cdot \nabla d. \quad (1.127)$$

avec  $\tilde{w}$  linéaire en  $d$ . Un autre choix tout aussi intéressant qui permet de faire ressortir clairement l'idée de "longueur interne" est de faire en sorte que le coefficient pondérant le terme en gradient soit indépendant de  $\alpha$ . Pour cela, considérons le changement de variable  $\alpha \mapsto \Delta := \int_0^\alpha \sqrt{\gamma(\beta)} d\beta$ . Afin de comparer certains matériaux entre eux, il est préférable de normaliser l'endommagement. Si  $\Delta(\alpha_m) = +\infty$ , on laisse celle-ci inchangée et on garde  $\Delta$ . En revanche si  $\Delta(\alpha_m) < +\infty$ , alors on ramène la variable d'endommagement à 1 en faisant la normalisation  $\Delta \mapsto D := \Delta/\Delta(\alpha_m)$ . Le travail de déformation s'écrit alors

$$\hat{W}(\varepsilon, D, \nabla D) = \hat{w}(D) + \hat{\psi}(\varepsilon, D) + \frac{\hat{\gamma}}{2}\nabla D \cdot \nabla D \quad (1.128)$$

où  $\hat{\gamma}$  est une constante du matériau qui a la dimension d'une pression multipliée par une longueur au carrée. Un moyen possible de la normaliser est de l'écrire  $\hat{\gamma} = E_0\ell^2$  où  $E_0$  est le module de Young du matériau sain et  $\ell$  est une longueur interne au matériau qui reste à déterminer.

### 1.2.3 Le problème d'évolution

#### 1.2.3.1 La formulation variationnelle

Le caractère non-local du modèle régularisé nous contraint pour formuler proprement le problème d'évolution à raisonner de manière globale *i.e.* au niveau de la structure. Tout le travail préalable à la régularisation tel que la formulation du problème d'évolution prend tout son sens. En effet on peut reprendre directement les items d'irréversibilité (IR), de stabilité (ST) et de conservation de l'énergie (EB) donnés en (1.46) qui sont formulés à un niveau global à l'aide de l'énergie potentielle du système. L'idée est donc de remplacer dans la forme de l'énergie potentielle le travail de déformation local par sa version non-locale (1.128) puis d'examiner les conséquences sur le problème d'évolution.

On considère donc une structure dont la configuration de référence naturelle est l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , qui est constitué d'un (ou plusieurs) matériaux endommageable(s) du type précédent et pour lequel le bon choix de variable d'endommagement normalisé a été fait. L'endommagement ultime vaut donc 1 ou  $+\infty$ . Les fonctions d'état sont surmontées d'un  $\hat{\cdot}$  et, dans le cas où le matériau est hétérogène, les fonctions  $\hat{w}$ ,  $\hat{\psi}$  et le scalaire  $\hat{\gamma}$  dépendent de  $x$ . À l'instant initial  $t = 0$  avant tout chargement, la structure est dans un état d'endommagement  $D_0$  qui peut dépendre de  $x$ . Celle est alors soumise à un chargement à  $t > 0$ . Le problème d'évolution *quasi-statique* consiste à déterminer, à chaque "instant"  $t$ , les champs de déplacement et d'endommagement. Du fait de la présence de gradient d'endommagement dans la nouvelle forme de l'énergie de déformation, il faut modifier les espaces d'admissibilité usuels pour l'endommagement qui requiert plus de régularité. Tout d'abord,

- (i) Nous supposons que l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles à l'instant  $t$  est un espace affine de la forme  $\mathcal{C}_t = U_t + \mathcal{C}^0$  où  $\mathcal{C}^0$  est un espace vectoriel indépendant du temps et  $U_t$  est un champ de déplacement donné dépendant régulièrement de  $t$ .
- (ii) La structure est soumise à un système de forces dépendant régulièrement du temps et dont le potentiel à l'instant  $t$  est la forme linéaire  $\mathcal{L}_t$
- (iii) Du point de vue de la régularité, pour que l'énergie de la structure dans un état d'endommagement  $D$  soit finie, il faut que  $D$  soit dans  $H^1(\Omega, [0, 1])$  (ou  $H^1(\Omega, [0, +\infty))$  selon que l'endommagement ultime vaut 1 ou  $+\infty$ ). De ce fait, il admet une trace sur le bord du domaine et il est tout à fait licite d'imposer des conditions aux limites à  $D$  sur toute ou partie de la frontière. Sur le plan théorique, n'importe quel type de conditions aux limites pour  $D$  est envisageable. D'un point de vue physique, on peut imaginer des systèmes de fixation de la structure sur une partie du bord qui feraient que  $D$  doit rester nul sur ce bord. Pour simplifier, nous supposons ici que  $D = 0$  sur la partie (indépendante du temps)  $\partial^e \Omega$  du bord et l'ensemble convexe (indépendant du temps) des endommagements

admissibles est donc

$$\mathcal{D}_0 = \{D \in H^1(\Omega, [0, 1]) : D = 0 \text{ sur } \partial^e \Omega\}. \quad (1.129)$$

(iv) À un couple  $(u^*, D^*) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  admissible à l'instant  $t$  on associe l'énergie totale  $\hat{\mathcal{P}}_t(u^*, D^*)$  de la structure dans cet état

$$\hat{\mathcal{P}}_t(u^*, D^*) = \int_{\Omega} \hat{W}(x, \varepsilon(u^*)(x), D^*(x), \nabla D^*(x)) dx - \mathcal{L}_t(u^*) \quad (1.130)$$

où  $\varepsilon(u^*)$  désigne la partie symétrique du gradient de  $u^*$ .

(v) À  $D \in \mathcal{D}_0$ , on associe l'ensemble  $\mathcal{D}(D)$  des états d'endommagement accessibles depuis  $D$ , qui sont restreints du fait de la condition d'irréversibilité :

$$\mathcal{D}(D) = \{D^* \in \mathcal{D}_0 : D^* \geq D\}. \quad (1.131)$$

Munis de ces hypothèses et définitions, nous sommes en mesure de formuler le problème d'évolution en reprenant simplement les trois principes d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie introduits. Cela conduit à la

**Définition 1.** *Le problème d'évolution consiste à trouver pour tout  $t \geq 0$ ,  $(u_t, D_t) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  tel que*

(IR)  $t \mapsto D_t$  soit croissant depuis  $D_0$  ;

(ST)  $(u_t, D_t)$  soit stable au sens suivant, :

$$\begin{aligned} \forall (u^*, D^*) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(D_t), \quad \exists \bar{h} > 0, \quad \forall h \in [0, \bar{h}], \\ \hat{\mathcal{P}}_t(u_t + h(u^* - u_t), D_t + h(D^* - D_t)) \geq \hat{\mathcal{P}}_t(u_t, D_t); \end{aligned}$$

(EB) *Le bilan d'énergie suivant soit satisfait à chaque instant :*

$$\hat{\mathcal{P}}_t(u_t, D_t) = \hat{\mathcal{P}}_0(u_0, D_0) + \int_0^t \left( \int_{\Omega} \sigma_{t'} \cdot \varepsilon(\dot{U}_{t'}) dx - \mathcal{L}_{t'}(\dot{U}_{t'}) - \dot{\mathcal{L}}_{t'}(u_{t'}) \right) dt'.$$

Le champ de déplacement initial  $u_0$  s'obtient en résolvant le problème d'élasticité à endommagement fixé à  $D_0$ . Il est donc défini de façon unique par  $u_0 = \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{C}_0} \hat{\mathcal{P}}(v, D_0)$ . Le champs  $\sigma_t$  correspond au champs de contrainte régnant à l'instant  $t$ ,  $\sigma_t = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u_t), D_t)$ , alors que  $\dot{U}_t$  et  $\dot{\mathcal{L}}_t$  représentent les vitesses des données de chargement.

Écrit de manière variationnelle, le problème d'évolution est donc identique à celui formulé pour le modèle local. Les modifications engendrées par la régularisation sont pourtant bien réelles mais apparaissent pour le moment de façon implicite au travers des espaces d'admissibilité et de la nouvelle forme de l'énergie de déformation. Dans la littérature, voir [25], les formulations du problème d'évolution pour les modèles à gradient sont souvent données sous forme forte,

au niveau du point matériel. Bien que ce soit la forme variationnelle que l'on utilise dans la résolution numérique, la formulation forte est utile pour l'obtention de solutions analytiques et pour mettre mieux en évidence les modifications apportées par rapport aux modèles locaux (la formulation du problème au niveau global "masque" dans l'énergie potentielle le caractère non-local du modèle).

### 1.2.3.2 La formulation forte

On suppose que le problème d'évolution admet une solution régulière en temps et en espace et on raisonne par conditions nécessaires. En divisant l'inégalité de stabilité (ST) par  $h > 0$  et en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , on en déduit la condition nécessaire de stabilité d'ordre 1 que doit vérifier  $(u_t, D_t)$  à l'instant  $t$  :

$$\hat{\mathcal{P}}'_t(u_t, D_t)(u^* - u_t, D^* - D_t) \geq 0, \quad \forall (u^*, D^*) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(D_t) \quad (1.132)$$

où  $\hat{\mathcal{P}}'_t(u_t, D_t)$  désigne la dérive de Gâteaux en  $(u_t, D_t)$ , *i.e.* la forme linéaire définie sur  $\mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(D_t)$  par

$$\hat{\mathcal{P}}'_t(u_t, D_t)(\bar{u}, \bar{D}) = \int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\bar{u}) dx - \mathcal{L}_t(\bar{u}) + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) \bar{D} + \hat{\gamma} \nabla D_t \cdot \nabla \bar{D} \right) dx.$$

En prenant  $D^* = D_t$  dans (1.132) et en remarquant que  $\mathcal{C}_t$  est un espace affine, on retrouve la formulation variationnelle de l'équilibre, *i.e.*

$$\int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\bar{u}) dx = \mathcal{L}_t(\bar{u}), \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{C}^0. \quad (1.133)$$

En reportant dans (1.132) on obtient la formulation variationnelle du critère d'endommagement non local, à savoir

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t)(D^* - D_t) + \hat{\gamma} \nabla D_t \cdot \nabla(D^* - D_t) \right) dx \geq 0, \quad \forall D^* \in \mathcal{D}(D_t). \quad (1.134)$$

Soit  $D_m$  la valeur ultime de l'endommagement (qui vaut après normalisation 1 ou  $+\infty$  selon le type de loi). Notons donc  $\Omega_t^c$  le domaine où  $D_t = D_m$  et dans lequel l'endommagement ne peut plus évoluer. On note que ce domaine peut encore contenir de l'énergie élastique si la perte de rigidité n'est que partielle dans certaines directions quand  $D = D_m$ . On appelle  $\Omega_t^d$  le domaine où  $0 \leq D_t < D_m$ . Le cas où  $\Omega_t^c = \Omega$  est trivial, supposons donc que  $\Omega_t^d \neq \emptyset$ . Comme  $D^* = D_t = D_m$  dans  $\Omega_t^c$ , l'intégrale dans (1.133) ne porte que sur  $\Omega_t^d$ . On peut également partitionner  $\partial\Omega$  en trois parties (dont certaines peuvent être vides) : (i)  $\partial^e\Omega$  où  $D_t = D^* = 0$ ; (ii)  $\partial_t^d\Omega$  où  $0 \leq D_t \leq D^* \leq \alpha_m$  et  $D_t < D_m$ ; (iii)  $\partial_t^c\Omega$  où  $D_t = D^* = D_m$ . En vertu des propriétés de la trace pour des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , on a  $D_t = D^* = D_m$  sur  $\partial\Omega_t^c$  et donc  $\partial^e\Omega \subset \partial\Omega_t^d$  ainsi



que  $\partial_t^d \Omega \subset \partial \Omega_t^d$ . Après une intégration par parties dans (1.133), il vient,  $\forall D^* \in \mathcal{D}(D_t)$  :

$$\int_{\Omega_t^d} \left( \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) - \operatorname{div}(\hat{\gamma} \nabla D_t) \right) (D^* - D_t) dx + \int_{\partial_t^d \Omega} \hat{\gamma} \frac{\partial D_t}{\partial n} (D^* - D_t) dS \geq 0 \quad (1.135)$$

où  $n$  désigne la normale unitaire sortante à  $\Omega$ . Sous réserve de régularité suffisante des champs, on obtient par un raisonnement classique de Calcul des Variations les conditions locales suivantes

$$\frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) - \operatorname{div}(\hat{\gamma} \nabla D_t) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega_t^d, \quad \hat{\gamma} \frac{\partial D_t}{\partial n} \geq 0 \quad \text{sur } \partial_t^d \Omega \quad (1.136)$$

qui constituent donc l'écriture locale du critère d'endommagement pour un modèle à gradient. Elles sont le pendant du critère portant sur le taux de restitution d'énergie pour une loi locale, cf (1.36). Ces inégalités sont conformes à ce qui est généralement postulé dans la littérature, cf [34], [14]. Mais notons qu'elles découlent ici de la condition de stabilité. Il serait donc facile de les généraliser à des modèles plus complexes (matériaux anisotropes ou non linéaires par exemple). Remarquons aussi qu'elles fournissent automatiquement des conditions aux limites naturelles sur les bords du domaine où l'endommagement peut encore évoluer ou aux interfaces entre différents matériaux. En effet, dans ce dernier cas, on obtient directement par l'approche variationnelle que  $\hat{\gamma} \frac{\partial D_t}{\partial n}$  doit être *continu* sur toute surface incluse dans  $\Omega_t^d$ . C'est implicitement contenu dans la première inégalité de (1.136) si on la lit au sens des distributions.

Exploitions maintenant le bilan d'énergie pour essayer de récupérer la condition dite de cohérence, *i.e.* le pendant de l'égalité  $\dot{\alpha} \frac{\partial W}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) = 0$  du modèle local. Supposons toujours la régularité en temps et en espace de la solution et dérivons (EB) par rapport  $t$ . Il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \hat{P}_t(u_t, D_t) - \int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\dot{U}_t) dx + \mathcal{L}_t(\dot{U}_t) + \dot{\mathcal{L}}_t(u_t) \\ &= \int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\dot{u}_t - \dot{U}_t) dx - \mathcal{L}_t(\dot{u}_t - \dot{U}_t) + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) \dot{D}_t + \hat{\gamma} \nabla D_t \cdot \nabla \dot{D}_t \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) \dot{D}_t + \hat{\gamma} \nabla D_t \cdot \nabla \dot{D}_t \right) dx, \end{aligned}$$

les deux premiers termes de la deuxième ligne se compensant grâce à l'équilibre (1.133). En intégrant par parties le terme en gradient, comme  $\dot{D}_t = 0$  dans  $\Omega_t^c$ , sur  $\partial^e \Omega$  et sur  $\partial_t^c \Omega$ , on obtient

$$0 = \int_{\Omega_t^d} \left( \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) - \operatorname{div}(\hat{\gamma} \nabla D_t) \right) \dot{D}_t dx + \int_{\partial_t^d \Omega} \hat{\gamma} \frac{\partial D_t}{\partial n} \dot{D}_t dS.$$

Il suffit de tenir compte de l'irréversibilité qui exige que  $\dot{D}_t \geq 0$  et du critère d'endommagement (1.136) pour obtenir la condition de cohérence désirée

$$\dot{D}_t \left( \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) - \operatorname{div}(\hat{\gamma} \nabla D_t) \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t^d, \quad \dot{D}_t \hat{\gamma} \frac{\partial D_t}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial_t^d \Omega. \quad (1.137)$$

Il est à noter que les conditions aux limites naturelles que l'on a obtenues font qu'en général on aura  $\partial D/\partial n = 0$  sur les parties du bord où  $D$  peut évoluer.

En résumé, on vient de montrer que les relations de comportement généralement adoptées pour les modèles à gradient se déduisent dans l'approche variationnelle de la condition d'irréversibilité, de la condition de stabilité d'ordre 1 et du bilan d'énergie. Mais les inégalités (1.136) ne sont que des conditions nécessaires, en général non suffisantes, pour que la condition de stabilité soit satisfaite. Nous nous proposons dans le prochain paragraphe d'établir des conditions nécessaires supplémentaires. Insistons aussi sur le fait que les conditions (1.137) et (1.137) n'ont un sens que dans des évolutions régulières, alors que (IR), (ST) et (EB) valent aussi dans des évolutions non régulières.

### 1.2.3.3 Les conditions de stabilité du second ordre

Pour simplifier la présentation, nous supposons que  $\hat{\psi}$  est quadratique en  $\varepsilon$ , *i.e.*  $\hat{\psi}(\varepsilon, D) = \frac{1}{2}\hat{A}(D)\varepsilon \cdot \varepsilon$  où  $\hat{A}(D)$  est le tenseur de rigidité endommagé (avec  $\hat{A}(D) > 0$  si  $D < 1$  et  $\hat{A}(1) = 0$ ), et que  $\hat{d}$  et  $\hat{A}$  sont deux fois dérivables par rapport à  $D$ . Considérons un état  $(u_t, D_t)$  à l'instant  $t$  satisfaisant les conditions de stabilité d'ordre 1 (1.132) et donc (1.133) et (1.134). Posons  $(\bar{u}, \bar{D}) = (u^* - u_t, D^* - D_t)$  et écrivons la condition de stabilité (ST) en développant  $\hat{P}_t(u_t + h\bar{u}, D_t + h\bar{D})$  par rapport à  $h$  jusqu'à l'ordre 2. Il vient

$$0 \leq h\hat{P}'_t(u_t, D_t)(\bar{u}, \bar{D}) + \frac{h^2}{2}\hat{P}''_t(u_t, D_t)(\bar{u}, \bar{D}) + o(h^2) \quad (1.138)$$

où  $\hat{P}''_t(u_t, D_t)$  désigne la dérivée seconde de l'énergie en  $(u_t, D_t)$ , forme quadratique par rapport à  $(\bar{u}, \bar{D})$ . En utilisant le tenseur de souplesse du matériau endommagé  $\hat{S}(D) = \hat{A}(D)^{-1}$  ainsi que ses dérivées par rapport à  $D$ , la dérivée seconde de l'énergie peut s'écrire

$$\begin{aligned} \hat{P}''_t(u_t, D_t)(\bar{u}, \bar{D}) &= \int_{\Omega_t^d} \hat{A}(D_t)(\varepsilon(\bar{u}) - \bar{D} \hat{S}'(D_t)\sigma_t) \cdot (\varepsilon(\bar{u}) - \bar{D} \hat{S}'(D_t)\sigma_t) dx + \int_{\Omega_t^d} \hat{\gamma} \nabla \bar{D} \cdot \nabla \bar{D} dx \\ &+ \int_{\Omega_t^d} \left( \hat{w}''(D_t) - \frac{1}{2} \hat{S}''(D_t)\sigma_t \cdot \sigma_t \right) \bar{D}^2 dx \end{aligned} \quad (1.139)$$

où on a utilisé le fait que  $\bar{D} = 0$  dans  $\Omega_t^c$ . D'après (1.132), le premier terme du membre de droite de (1.138) est non négatif. S'il est positif, alors, pour  $h$  assez petit, l'inégalité sera vérifiée et l'état  $(u_t, D_t)$  sera stable dans la direction  $(\bar{u}, \bar{D})$ . Par contre, s'il est nul, alors l'état ne sera stable dans la direction  $(\bar{u}, \bar{D})$  que si la dérivée seconde est non négative (et il sera stable dans cette direction si la dérivée seconde est positive). Or, en vertu de la positivité de  $\hat{A}$  et de  $\hat{\gamma}$ , les deux premiers termes dans l'expression (1.139) de la dérivée seconde sont non négatifs. Le terme  $\hat{w}''(D_t) - \frac{1}{2} \hat{S}''(D_t)\sigma_t \cdot \sigma_t$  est positif si toute la structure est durcissante (concavité par rapport à l'endommagement de la partie locale du travail de déformation  $W_0^*$ ) mais peut

être négatif si la structure est adoucissante sur des zones de mesure non nulle. Donc, pour les structures entièrement durcissantes, tout état vérifiant (1.132) est stable et aucune condition supplémentaire n'est à remplir. La régularisation préserve donc les bonnes propriétés des matériaux durcissants. La question se pose par contre pour les structures présentant de l'adoucissement.

Dans ce cas là, d'après (1.135), la dérivée première de l'énergie est nulle si et seulement si  $\bar{D}$  est nul sur la partie du domaine et la partie du bord où il n'y a pas égalité dans (1.136). Introduisons donc  $\Omega_t^a$  et  $\partial_t^a \Omega$ , partie du domaine et partie du bord où le critère d'endommagement est atteint, *i.e.*

$$\Omega_t^a = \left\{ x \in \Omega_t^d : \frac{\partial \hat{W}_0}{\partial D}(\varepsilon(u_t), D_t) - \operatorname{div}(\hat{\gamma} \nabla D_t) = 0 \right\}, \quad \partial_t^a \Omega = \left\{ x \in \partial_t^d \Omega : \frac{\partial D_t}{\partial n} = 0 \right\}. \quad (1.140)$$

Envisageons des directions  $(\bar{u}, \bar{D}) \in \mathcal{C}^0 \times \mathcal{D}_t^a$  avec

$$\mathcal{D}_t^a = \{ \bar{D} \in H^1(\Omega) : \bar{D} \geq 0, \bar{D} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_t^a, \bar{D} = 0 \text{ sur } \partial \Omega \setminus \partial_t^a \Omega \}. \quad (1.141)$$

La dérivée première de l'énergie potentielle étant nulle dans de telles directions, la stabilité de l'état va dépendre du signe de la dérivée seconde. L'état  $(u_t, D_t)$  sera stable ou instable suivant que la dérivée seconde est une forme quadratique (définie) positive sur  $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{D}_t^a$  sera supérieur ou inférieur à 1. Comme  $\hat{\gamma} > 0$ , le terme non local a évidemment un rôle stabilisant. Cette condition suffisante de stabilité est nécessairement *globale* : c'est une propriété structurelle et pas seulement matérielle, cf [5].

On peut donc résumer l'ensemble des résultats de cette section par la

**Propriété 1.16.** *Pour qu'une évolution  $t \mapsto (u_t, D_t)$  partant de  $(u_0, D_0)$  et régulière en espace et en temps satisfasse le problème d'évolution (IR), (ST) et (EB), il faut qu'elle vérifie à chaque instant l'équilibre (1.133), la condition d'irréversibilité, le critère d'endommagement (1.136) et la condition de cohérence (1.137). Dans le cas d'une structure entièrement durcissante, ceci est suffisant. Dans le cas d'une structure ayant une zone adoucissante de mesure non-nulle, il faut (resp. suffit) qu'en plus la dérivée seconde  $\hat{\mathcal{P}}_t(u_t, \alpha_t)$  soit une forme quadratique positive (resp. définie positive) sur  $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{D}_t^a$  à chaque instant.*

#### 1.2.4 Application aux états homogènes : effets d'échelle

On illustre le comportement du modèle régularisé en revenant aux états homogènes d'endommagement dans une structure  $\Omega$ . On a vu dans la section précédente, dans le cadre du modèle local, l'existence de tels états vérifiant l'équilibre et le critère. On a en outre étudié en détails leur stabilité et examiné sous quelles conditions on pouvait observer ces états pour les cas de déplacements imposés ou de force imposée sur tout le bord de la structure. On reprend les mêmes

notations que pour le modèle local et on appelle respectivement  $\alpha_0$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\sigma_0$  l'endommagement, la déformation et la contrainte homogènes dans  $\Omega$ . On pose  $\hat{\gamma} = \frac{1}{2}E_0\ell^2$  où  $E_0$  désigne le module de Young du matériau et  $\ell$  une longueur interne au modèle. Ces états d'endommagement stationnaires pour le modèle local sous-jacent continuent à le rester pour le modèle régularisé. En effet, du fait de l'homogénéité du champ d'endommagement, toutes les dérivées spatiales par rapport à la variable d'endommagement sont nulles. De ce fait ces champs d'endommagement et de déplacement vont continuer à vérifier les équations d'équilibre (1.133), le critère (1.136), ainsi que la condition de cohérence (1.137) du problème régularisé. On s'intéresse de nouveau au problème de stabilité pour un état d'endommagement  $\alpha_0$  et de déformation  $\varepsilon_0$  homogènes donnés et on examine les modifications qu'apportent la régularisation aux résultats de stabilité pour un matériau adoucissant. La dérivée seconde se lit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}''(\varepsilon_0 x, \alpha_0)(v, \beta) = & E_0 \ell^2 \int_{\Omega} \nabla \beta \cdot \nabla \beta dx + \int_{\Omega} \hat{A}(\alpha_0) (\varepsilon(v) - \beta S'(\alpha_0) \sigma_0) \cdot (\varepsilon(v) - \beta \hat{S}'(\alpha_0) \sigma_0) dx \\ & - \left( \frac{1}{2} \hat{S}''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - \hat{w}''(\alpha_0) \right) \int_{\Omega} \beta^2 dx. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Le dernier terme étant négatif en vertu de l'adoucissement du matériau (comme pour le cas local), le quotient de Rayleigh associé se lit

$$\mathcal{R}_L(v, \beta) = \frac{\int_{\Omega} \hat{A}(\alpha_0) (\varepsilon(v) - \beta e) \cdot (\varepsilon(v) - \beta e) dx + E_0 \ell^2 \int_{\Omega} \nabla \beta \cdot \nabla \beta dx}{\left( \frac{1}{2} \hat{S}''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - \hat{w}''(\alpha_0) \right) \int_{\Omega} \beta^2 dx} \quad (1.143)$$

où  $e = \hat{S}'(\alpha_0) \sigma_0$ . On remarque donc la présence d'un terme supplémentaire au numérateur provenant de la régularisation. Celui-ci a des vertus positives dans l'optique de la stabilité des états homogènes. En effet l'état sera stable si (resp. seulement si) l'infimum du quotient de Rayleigh est supérieur strictement (resp. supérieur ou égal) à 1. Selon le type de chargement, les résultats de stabilité seront différents. En effet considérons tout d'abord le

**Cas des forces imposées sur  $\partial\Omega$  :** Dans le cas où l'état de déformation et d'endommagement est maintenu à l'aide de forces imposées sur l'ensemble de la frontière, on conclut de façon identique au modèle local à l'instabilité de l'état. En effet les déplacements admissibles sont libres de mouvement sur tout le bord du domaine et il suffit de prendre comme fonctions tests  $\beta = 1$  et  $v = ex$  pour aboutir à la nullité du quotient de Rayleigh. On en déduit d'après la Propriété 1.16 que l'état est instable. La conclusion est donc la même que pour le modèle local sous-jacent.

**Cas des déplacements imposés sur  $\partial\Omega$  :** Ce cas de chargement avait nécessité quelques outils techniques pour aboutir aux résultats de stabilité pour le modèle local. Ceux-ci étaient en

particulier indépendant de la forme ou de la taille du domaine. Du fait de l'introduction d'une longueur interne au modèle, les résultats de stabilité peuvent être sensibles aux effets d'échelle. Pour les mettre en évidence, on va normaliser la taille du domaine et considérer des domaines homothétiques. Fixons le domaine et considérons des domaines homothétiques de la forme  $L\Omega_1$  avec  $L > 0$  et où  $\Omega_1$  est un domaine unitaire. Moyennant le changement de coordonnées  $y = x/L$ , on peut envoyer tous les domaines sur le domaine de référence  $\Omega_1$ . On peut aussi renormaliser les déplacements suivant la règle

$$v_L \in H_0^1(\Omega_L, \mathbb{R}^n) \mapsto v \in H_0^1(\Omega_1, \mathbb{R}^n) : \quad v_L(x) = Lv\left(\frac{x}{L}\right) \quad (1.144)$$

ainsi que les champs admissibles d'endommagement par

$$\beta_L \in H_0^1(\Omega_L, \mathbb{R}) \mapsto \beta \in H_0^1(\Omega_1, \mathbb{R}) : \quad \beta_L(x) = \beta\left(\frac{x}{L}\right). \quad (1.145)$$

Le quotient de Rayleigh devient alors

$$\mathcal{R}_L(v, \beta) = \frac{\int_{\Omega_1} \hat{A}(\alpha_0)(\varepsilon(v) - \beta e) \cdot (\varepsilon(v) - \beta e) dy + E_0 \frac{\ell^2}{L^2} \int_{\Omega_1} \nabla \beta \cdot \nabla \beta dy}{\left(\frac{1}{2} \hat{S}''(\alpha_0) \sigma_0 \cdot \sigma_0 - \hat{w}''(\alpha_0)\right) \int_{\Omega_1} \beta^2 dy} \quad (1.146)$$

On pose alors

$$\xi_L(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1) = \inf_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}^a} \mathcal{R}_L. \quad (1.147)$$

Par minoration, il est clair que la stabilité de l'état pour le modèle local entraîne la stabilité de l'état  $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$  pour le modèle régularisé. Pour mettre en évidence les effets d'échelle, on fixe l'état  $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$ , la forme du domaine  $\Omega_1$  et on fait varier la taille  $L$  du domaine. On constate tout d'abord que  $\mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^+$ ,  $L \mapsto \xi_L(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1)$  est une fonction croissante de  $L$ . Examinons les cas limites

**Cas limite  $L \rightarrow 0$  :** Notons au préalable que le couple  $(v_L, \beta_L)$  réalisant le minimum satisfait

$$\xi_L = \mathcal{R}_L(v_L, \beta_L), \quad (1.148)$$

$$1 = \int_{\Omega_1} \beta_L^2 dy, \quad (1.149)$$

$$0 = \int_{\Omega_1} \hat{A}(\alpha_0)(\varepsilon(v_L) - \beta_L \hat{S}'(\alpha_0) \sigma_0) \cdot \varepsilon(v) dy, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0. \quad (1.150)$$

Puisque  $0 \leq \xi_L \leq \mathcal{R}(0, 1)$ , et qu'elle est une fonction décroissante de  $L$ ,  $\xi_L$  tend vers un certain  $\xi_0$  lorsque  $L$  tend vers 0. Par ailleurs, on en déduit aussi que les suites  $v_L$  ainsi que  $\beta_L$  sont bornées dans  $H^1$ . Par compacité, on en déduit que  $\beta_L$  et  $v_L$  convergent faiblement vers  $\beta_0$  et  $v_0$  dans  $H^1$ . Par théorème d'injection compacte  $\beta_L$  converge fortement dans  $L^2(\Omega_1)$ . En outre

on a l'estimation  $\|\nabla\beta_L\|_{L^2} = O(L)$  à partir du quotient de Rayleigh. On en déduit par semi-continuité inférieure faible de la norme que  $\|\nabla\beta_0\|_{L^2} = 0$ . Le champ  $\beta_0$  est donc homogène. En utilisant (1.149), on en déduit que  $\beta_0 = 1/\text{Vol}(\Omega)$ . En utilisant la convergence faible de  $v_L$  dans  $H^1$  et l'équation (1.150), on trouve pour tout  $v$  dans  $\mathcal{C}_0$  que

$$\int_{\Omega_1} \hat{A}(\alpha_0)\varepsilon(v_0) \cdot \varepsilon(v)dy = \int_{\Omega_1} \hat{A}(\alpha_0)\beta_0 \hat{S}'(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \varepsilon(v)dy \quad (1.151)$$

$$= \beta_0 \hat{A}(\alpha_0)e \cdot \int_{\Omega_1} \varepsilon(v)dy \quad (1.152)$$

$$= 0. \quad (1.153)$$

On en déduit par unicité de ce problème d'élasticité linéaire que  $v_0 = 0$ . Regroupons les différentes estimations de  $\xi_L$  :

$$\hat{A}(\alpha_0)e \cdot e - \int_{\Omega_1} \hat{A}(\alpha_0)\varepsilon(v_L) \cdot \beta_L edy \leq (\frac{1}{2}\hat{S}''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - \hat{w}''(\alpha_0))\xi_L \leq \hat{A}(\alpha_0)e \cdot e. \quad (1.154)$$

En utilisant la convergence forte de  $\beta_L$  dans  $L^2$  et la bornitude de  $\varepsilon(v_L)$  dans  $L^2$ , on trouve que le terme  $\int_{\Omega_1} \hat{A}(\alpha_0)\varepsilon(v_L) \cdot \beta_L edy$  tend vers 0. Par encadrement on aboutit alors à

$$\lim_{L \rightarrow 0} \xi_L = \frac{\hat{A}(\alpha_0)S'(\alpha_0)\sigma_0 \cdot S'(\alpha_0)\sigma_0}{(\frac{1}{2}\hat{S}''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - \hat{w}''(\alpha_0))}. \quad (1.155)$$

Comparons ce rapport à 1 pour connaître la stabilité de l'état. Pour cela, on remarque que

$$\hat{A}(\alpha_0)S'(\alpha_0)\sigma_0 \cdot S'(\alpha_0)\sigma_0 - (\frac{1}{2}\hat{S}''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - \hat{w}''(\alpha_0)) = \frac{1}{2}\hat{A}''(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + \hat{w}''(\alpha_0) > 0,$$

où la stricte positivité du membre de droite nous est donné par la condition d'écrouissage en déformation. On en déduit que les états homogènes sous déplacement contrôlé sur l'ensemble de la frontière sont stables pour des tailles de domaine suffisamment petits.

**Cas limite  $L \rightarrow \infty$  :** Formellement, on retrouve les résultats de stabilité du modèle local sous-jacent. En effet, pour un état donné, le quotient de Rayleigh  $\mathcal{R}_L$  tend vers le quotient de Rayleigh du modèle local. On a vu que la stabilité du modèle n'était pas triviale et que selon l'état considéré, il était possible qu'un état d'endommagement soit stable. Dans le cas où l'état est instable pour le modèle local, du fait de la décroissance de  $\xi_L$  et que  $\xi_0 > 1$ , on en déduit qu'il existe une longueur critique pour laquelle  $\xi_L$  va passer par 1.

Finalement, en rassemblant les résultats, on a la

**Propriété 1.17 (Taille critique).** *Pour une famille de domaines de forme  $\Omega_1$  donnée, il existe*

une taille critique  $L_c(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1)$  en deçà de laquelle l'état  $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$  est stable sous déplacement de la frontière contrôlé et en deçà de laquelle il devient instable. Si l'état est stable pour le modèle local sous-jacent, alors  $L_c(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1) = +\infty$  et l'état est stable pour tout  $L$  et tout  $\Omega_1$ . Sinon  $L_c(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1)$  est strictement positif, fini et dépend a priori de la forme de  $\Omega_1$ .

Du fait de l'introduction d'une longueur interne au matériau, les effets d'échelle prennent donc une importance considérable dans les résultats de stabilité des états homogènes.

## Conclusions du Chapitre

On a présenté dans ce Chapitre une construction détaillée d'un modèle d'endommagement à gradient dans l'optique de la modélisation de matériaux fragiles adoucissants. Le point de départ a été de mettre en place un modèle local dont les principaux résultats sont les suivants :

- en supposant que le matériau obéisse à un critère thermodynamique de stabilité matérielle de Drucker-Ilyushin, on aboutit à une loi d'évolution pour le paramètre d'endommagement nécessairement standard. La formulation énergétique des équations d'évolution devient alors un "corollaire" et non plus une "hypothèse",
- du fait de la formulation standard, le travail de déformation en un point matériel est une fonction d'état qui est la somme de 2 fonctions définissant entièrement le modèle local : un potentiel élastique et une densité d'énergie de dissipation,
- en supposant que le potentiel élastique est une fonction positivement homogène de degré 2 en la déformation et prenant comme variable d'endommagement la densité d'énergie de dissipation, les définitions d'écrouissage sont équivalentes à des propriétés de convexité sur le travail de déformation.

Dans un deuxième temps, on a formulé le problème d'évolution quasi-statique dans une structure. Celui-ci est formulé de façon globale et énergétique à partir de l'énergie potentielle du système. Il repose sur 3 principes physiques que sont

- l'irréversibilité de l'évolution de l'endommagement,
- un critère de stabilité qui sélectionne à chaque instant les minima locaux unilatéraux de l'énergie potentielle,
- un bilan d'énergie à satisfaire à chaque instant.

Les avantages de ce problème d'évolution sont d'inclure un critère de sélection de solution afin de gérer la multiplicité de solutions en présence d'adoucissement, d'exiger de la régularité temporelle uniquement sur le chargement et non sur les champs d'états et gérer ainsi une possible évolution brutale. Enfin il offre un cadre variationnel parfaitement adapté tant à l'obtention de résultats théoriques par le calcul des variations qu'à la résolution numérique par élément fini. L'étude des états homogènes dans une structure a permis d'illustrer en particulier la pertinence du concept de stabilité, celle-ci dépendant en particulier de la nature du chargement appliqué et

du type d'écrouissage. Dans certains cas, le modèle local présente de si graves pathologies liées à son incapacité à rendre compte du phénomène de localisation qu'une régularisation du modèle a été menée.

Celle-ci s'appuie largement sur le modèle local en ajoutant dans le travail de déformations des termes supplémentaires en gradient d'endommagement afin de mieux décrire l'environnement du point matériel. La présence de ces termes non-locaux dans le travail des déformations est alors un argument de plus en faveur du problème d'évolution variationnel. En effet celui-ci s'accommode parfaitement de ce supplément de régularité sous réserve d'utiliser les espaces fonctionnels adéquats. La stricte application du critère de stabilité et du bilan d'énergie a permis alors de retrouver par les conditions d'optimalité du premier ordre les équations d'évolution non-locales au point matériel souvent postulées dans la littérature. Ces conditions étant seulement nécessaires, on a fait apparaître via les conditions d'optimalité du second ordre des conditions suffisantes portant sur la dérivée seconde de l'énergie potentielle. L'étude des états homogènes pour ce modèle à gradient a alors permis de montrer la présence attendu d'effets d'échelle dans les résultats de stabilité.





# Étude d'une barre sous traction simple

---

## Objectifs du Chapitre

À partir du modèle à gradient d'endommagement construit dans le premier chapitre, on examine qualitativement ses propriétés dans un cadre unidimensionnel. Celui-ci va nous permettre en particulier de pouvoir résoudre analytiquement les équations d'évolution et de mener une étude complète de bifurcation vers des états localisés. On illustre alors l'importance dans le choix des “bons” chemins d'évolution des principes de stabilité et de conservation d'énergie ainsi que l'influence des effets d'échelle sur la présence de bifurcations ou l'apparition brutale de localisations, voir [48].

Dans les sections qui suivent, nous utiliserons les notations suivantes : l'exposant *prime* désigne la dérivée spatiale selon  $x$  ou bien par rapport au paramètre d'endommagement tandis que le point représente la dérivée temporelle, e.g.  $u' = \partial u / \partial x$ ,  $E'(\alpha) = dE(\alpha) / d\alpha$ ,  $\dot{\alpha} = \partial \alpha / \partial t$ .

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Généralités

Soit une barre de longueur  $L$ , de section homogène et que l'on soumet à une traction croissante à déplacement imposé. L'extrémité droite de la barre en  $x = L$  à son déplacement imposé à la valeur  $U_t$ ,

$$u_t(L) = U_t = tL \quad (2.1)$$

où  $t$  désigne le temps de l'expérience. L'autre extrémité en  $x = 0$  est quant à elle encastree,

$$u_t(x = 0) = 0. \quad (2.2)$$

Le matériau constitutif est endommageable et entièrement défini par son énergie de déformation non-locale. En dimension 1, celle-ci se simplifie et s'exprime au point matériel  $x$  sous la forme

$$W(u', \alpha, \alpha') = \frac{1}{2}E_0\ell^2\alpha'^2 + \frac{1}{2}E(\alpha)u'^2 + w(\alpha)$$

On suppose faire les hypothèses suivantes sur le matériau

**Hypothèses 2.1** (Comportement endommageable). *Les fonctions  $\alpha \mapsto E(\alpha)$  and  $\alpha \mapsto w(\alpha)$  sont des fonctions non négatives et continûment différentiables avec  $E(\alpha_m) = 0$ ,  $w(0) = 0$ ,  $E'(\alpha) < 0$  et  $w'(\alpha) > 0$  pour tout  $\alpha \in [0, \alpha_m)$ , où  $\alpha_m$  désigne l'endommagement ultime. Par ailleurs  $-w'(\alpha)/E'(\alpha)$  est croissante vers  $+\infty$  (écrouissage positif en déformation) tandis que  $w'(\alpha)/S'(\alpha)$  est décroissante vers 0 lorsque  $\alpha$  croît depuis 0 à  $\alpha_m$  (adoucissement).*

On appelle respectivement  $\mathcal{C}(U_t)$  et  $\mathcal{C}_0$  l'espace des champs de déplacements admissibles et son espace vectoriel associé

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(U_t) &= \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0, v(L) = tL\} \\ \mathcal{C}_0 &= \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0, v(L) = 0\}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

D'autre part, on appelle  $\mathcal{D}$  le cône convexe des champs d'endommagement admissibles

$$\mathcal{D} = \{\beta \in H^1(0, L) : 0 \leq \beta(x) \leq \alpha_m\} \quad (2.4)$$

Soit  $(u, \alpha)$  un couple de déplacement-endommagement admissible de  $\mathcal{C}(U_t) \times \mathcal{D}$ . Le déplacement étant imposé aux points de la frontière, l'énergie potentielle de la barre dans ce champ  $(u, \alpha)$  se réduit à l'énergie totale de déformation

$$\mathcal{P}_t(u, \alpha) = \int_0^L W(u'(x), \alpha(x), \alpha'(x)) dx = \int_0^L \left( \frac{1}{2}E_0\ell^2\alpha'^2 + \frac{1}{2}E(\alpha)u'^2 + w(\alpha) \right) dx \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Problème d'évolution

On suppose à l'instant initial que le matériau est sain et que la barre est libre de tout chargement. Les champs d'endommagement et de déplacement initiaux se lisent donc

$$u_0(x) = 0, \quad \alpha_0(x) = 0 \quad \forall x \in (0, L). \quad (2.6)$$

On cherche des solutions du problème satisfaisant le problème d'évolution constitué des 3 principes d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie. On a vu dans le Chapitre 1 que ceux-ci doivent vérifier sous forme forte l'équilibre mécanique

$$\sigma'_t(x) = 0 \quad \forall x \in (0, L) \quad (2.7)$$

la relation de comportement ainsi que les conditions aux limites

$$\sigma_t = E(\alpha_t(x))u_t'(x), \quad u_t(0) = 0, \quad u_t(L) = tL. \quad (2.8)$$

D'autre part l'évolution de l'endommagement est piloté par le système non local à seuil constitué de l'item d'irréversibilité et du critère d'endommagement (1.136) qui se lisent en 1D

$$\text{Condition d'irréversibilité : } t \mapsto \alpha_t \text{ croissant,} \quad (2.9)$$

$$\text{Critère d'endommagement : } -E_0\ell^2\alpha_t'' + \frac{1}{2}E'(\alpha_t)u_t'^2 + w'(\alpha_t) \geq 0, \quad (2.10)$$

$$\text{Conditions aux limites : } \alpha_t'(0) \leq 0, \quad \alpha_t'(L) \geq 0. \quad (2.11)$$

La conservation de l'énergie sous forme globale dans le cas de l'essai sous traction simple impose à l'énergie potentielle de satisfaire le bilan

$$\mathcal{P}_t(u_t, \alpha_t) = \mathcal{P}_0(u_0, \alpha_0) + \int_0^t \int_0^L \sigma_{t'}(x) dx dt'. \quad (2.12)$$

Si l'évolution est régulière en temps, celle-ci se réduit aux conditions de consistance (1.137) qui en 1D s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_t(x) \left( -E_0\ell^2\alpha_t''(x) + \frac{1}{2}E'(\alpha_t(x))u_t'(x)^2 + w'(\alpha_t(x)) \right) = 0 & \forall x \in (0, L) \\ \dot{\alpha}_t(0)\alpha_t'(0) = 0, \quad \dot{\alpha}_t(L)\alpha_t'(L) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

On déduit tout d'abord de (2.7) qu'à un temps  $t$  donné la contrainte  $\sigma_t$  est uniforme le long de la barre. En divisant (2.8) par  $E(\alpha_t(x))$  puis en intégrant entre 0 et  $L$  et en utilisant les conditions aux limites (2.1)-(2.2), on trouve que

$$\sigma_t = \frac{U_t}{\int_0^L \frac{dx}{E(\alpha_t(x))}} \quad \text{avec} \quad U_t = tL. \quad (2.14)$$

La première étape est donc tout d'abord de chercher des solutions au système d'équations (2.7)-(2.12) qui sont l'écriture locale des conditions d'optimalité du 1er ordre. Dans le cas des matériaux adoucissants où la non-unicité de la solution du problème est possible, il faudra vérifier que la famille de solutions trouvées soient bien des minima locaux satisfaisant aux conditions suffisantes de stabilité du second ordre.

### 2.1.3 Les conditions suffisantes de stabilité et de non-bifurcation

**Les conditions suffisantes de stabilité :** On a vu dans le premier chapitre que l'obtention de conditions suffisantes de stabilité d'un état passait par des conditions du second ordre sur

l'énergie potentielle. Pour des structures dont chaque point matériel se trouve en phase durcissante, on pouvait conclure directement à la stabilité. En revanche, et c'est précisément sur ce point que se porte notre attention, la stabilité pour des structures en phase adoucissante s'obtient par l'étude des variations du quotient de Rayleigh associée aux variations secondes de l'énergie potentielle. Dans le cadre unidimensionnel, la minimisation du quotient peut se simplifier quelque peu. Soit donc un temps de chargement  $t$  donné auquel on associe un champ de déplacement-endommagement  $(u_t, \alpha_t)$  vérifiant l'équilibre mécanique (2.7) et le critère non-local d'endommagement (2.10). On a vu dans le Chapitre 1 que si cet état est en phase durcissante alors il est stable. Supposons donc qu'il soit en phase adoucissante. On rappelle d'après le Chapitre 1 que les directions de test de l'endommagement sur lesquelles porte la dérivée seconde doivent appartenir au sous-espace des fonctions de (2.4) à support inclus dans les zones où le critère est atteint pour  $(u_t, \alpha_t)$  :

$$\mathcal{D}_t^a = \{\beta \in H^1(\Omega) : \beta \geq 0, \beta = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_t^a, \beta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \partial_t^a \Omega\} \quad (2.15)$$

où les espaces  $\Omega_t^a$  et  $\partial_t^a \Omega$  en dimension 1 sont donnés par

$$\Omega_t^a = \left\{ x \in \Omega_t^d : -E_0 \ell^2 \alpha_t'' + \frac{1}{2} E'(\alpha_t) u_t'^2 + w'(\alpha_t) = 0 \right\}, \quad \partial_t^a \Omega = \left\{ x \in \partial_t^d \Omega : \alpha_t'(x) = 0 \right\} \quad (2.16)$$

La dérivée seconde de l'énergie potentielle calculée dans la direction admissible  $(v, \beta)$  de  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_t^a$  vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) &= \int_{\Omega_t^a} E_0 \ell^2 \beta'(x)^2 dx + \int_0^L E(\alpha_t(x)) (v'(x) - S'(\alpha_t(x)) \sigma_t \beta(x))^2 dx \\ &\quad - \int_{\Omega_t^a} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t(x)) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t(x)) \right) \beta(x)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Puisque toute la structure est supposée en phase adoucissante on a donc  $\frac{1}{2} S''(\alpha_t(x)) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t(x)) > 0$  pour tout  $x$  dans  $(0, L)$ . Soit alors  $\mathcal{R}_t(v, \beta)$  le quotient de Rayleigh défini sur  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_t^a$  par

$$\mathcal{R}_t(v, \beta) = \frac{\int_{\Omega_t^a} E_0 \ell^2 \beta'(x)^2 dx + \int_0^L E(\alpha_t(x)) (v'(x) - S'(\alpha_t(x)) \sigma_t \beta(x))^2 dx}{\int_{\Omega_t^a} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t(x)) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t(x)) \right) \beta(x)^2 dx} \quad (2.18)$$

où  $\sigma_t$  est la contrainte à l'équilibre (2.14). L'état est alors stable à l'instant  $t$  si (*resp.* seulement si)

$$\inf_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_t^a} \mathcal{R}_t(v, \beta) > (\text{resp. } \geq) 1. \quad (2.19)$$

Il est en réalité possible de s'affranchir de la dépendance en la variable de déplacement en optimisant le quotient de Rayleigh (2.18) par rapport à ceux-ci pour un champ d'endommagement

donné. On n'a alors plus qu'à étudier les variations du quotient optimisé par rapport à l'endommagement. Soit donc  $\beta \in \mathcal{D}_t^a$  un champ d'endommagement admissible. En minimisant  $\mathcal{R}_t$  à  $\beta$  fixé sur l'espace des champs de déplacements admissible, on a donc à résoudre un problème d'élasticité linéaire bien posé. Le champ optimal associé  $v_\beta \in \mathcal{C}_0$  vérifie

$$\mathcal{R}_t(v_\beta, \beta) = \inf_{v \in \mathcal{C}_0} \mathcal{R}_t(v, \beta).$$

L'écriture de la stationnarité de  $v_\beta$  donne

$$\int_0^L E(\alpha_t(x)) (v'_\beta(x) - S'(\alpha_t(x))\sigma_t\beta(x)) w'(x) dx = 0, \quad \forall w \in \mathcal{C}_0.$$

En intégrant puis en utilisant les conditions aux limites  $v_\beta(0) = v_\beta(L) = 0$ , on trouve que

$$v_\beta(x) = \int_0^x S'(\alpha_t(z))\sigma_t\beta(z) dz - \frac{\int_0^L \sigma_t S'(\alpha_t(x))\beta(x) dx}{\int_0^L S'(\alpha_t(x)) dx} \int_0^x S(\alpha_t(z)) dz. \quad (2.20)$$

En réinjectant cette expression dans (2.18) puis en utilisant la relation (2.14), on aboutit à la forme optimisée du quotient de Rayleigh

$$\mathcal{R}_t^*(\beta) = \frac{\int_{\Omega_t^a} E_0 \ell^2 \beta'(x)^2 dx + \frac{\sigma_t^3}{U_t} \left( \int_{\Omega_t^a} S'(\alpha_t(x))\beta(x) dx \right)^2}{\int_{\Omega_t^a} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t(x))\sigma_t^2 - w''(\alpha_t(x)) \right) \beta(x)^2 dx} \quad (2.21)$$

avec

$$\min_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_t^a} \mathcal{R}_t(v, \beta) = \min_{\mathcal{D}_t^a} \mathcal{R}_t^*(\beta).$$

**Le critère de non-bifurcation :** Si on s'intéresse à des solutions  $(u_t, \alpha_t)$  du problème d'évolution *suffisamment régulières en temps*, de telle façon qu'on puisse définir des vitesses à partir de ces champs, il peut être intéressant d'étudier le problème en vitesse associé et savoir sous quelles conditions celui-ci admet une solution unique. Il est donc moins général que le critère de stabilité qui, étant une notion d'état, ne suppose pas de régularité temporelle. Formellement le problème en vitesse s'obtient en dérivant par rapport au temps l'écriture variationnelle du problème d'évolution, c'est à dire

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \dot{X}_t \in \dot{\mathcal{C}}_t \times \mathcal{D} \text{ tel que} \\ &\check{\mathcal{P}}_t''(u_t, \alpha_t)(\dot{X}_t, Y - \dot{X}_t) + \dot{\mathcal{P}}_t'(u_t, \alpha_t)(Y - \dot{X}_t) \geq 0, \quad \forall Y \in \dot{\mathcal{C}}_t \times \mathcal{D} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où  $\dot{X}_t = (\dot{u}_t, \dot{\alpha}_t)$  et  $Y = (v, \beta)$  désignent des couples de vitesse de déplacement et d'endommagement. La solution  $\dot{X}_t$  de ce problème sera alors unique *si* la dérivée seconde de l'énergie  $\check{\mathcal{P}}_t''$  est

une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $H_0^1(0, L) \times H^1(0, L)$  (voir [44]) définie par

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{P}}_t''(u_t, \alpha_t)(\dot{X}_t, Y - \dot{X}_t) &= \int_0^L E_0 \ell^2 \dot{\alpha}_t'(\beta' - \dot{\alpha}_t') dx + \int_0^L \left( \frac{1}{2} E''(\alpha_t) u_t'^2 + w''(\alpha_t) \right) \dot{\alpha}_t(\beta - \dot{\alpha}_t) dx \\ &+ \int_0^L (E'(\alpha_t) u_t' \dot{u}_t'(\beta - \dot{\alpha}_t) + E'(\alpha_t) \dot{\alpha}_t u_t'(v' - \dot{u}_t')) dx \\ &+ \int_0^L E(\alpha_t) \dot{u}_t'(v' - \dot{u}_t') dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sa forme quadratique associée est alors donnée par

$$\check{\mathcal{P}}_t''(u_t, \alpha_t)(Y, Y) = \mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) \quad \text{avec } Y = (v, \beta) \quad (2.24)$$

tandis que pour le cas de chargement à déplacement imposé considéré on a  $\check{\mathcal{P}}_t'(u_t, \alpha_t) = 0$ . On voit donc que l'étude de l'unicité du problème en vitesse passe de nouveau par l'étude du signe de la forme quadratique (2.17). Cependant les espaces fonctionnels sont différents puisqu'il s'agit ici de  $H_0^1(0, L) \times H^1(0, L)$ . Ce n'est bien qu'une *condition suffisante* qui nous assure l'unicité du problème en vitesse calculé au point  $(u_t, \alpha_t)$  et donc l'impossibilité de bifurquer continûment depuis cette branche.

À nouveau les barres entièrement en phase durcissante nous assurent de la définie positivité de  $\mathcal{P}_t''$ . Là encore ce sont les structures en phase adoucissante qui posent problème. En écrivant la forme de  $\mathcal{P}_t''$ , on voit que l'on fait apparaître le même quotient de Rayleigh (2.18) que pour l'étude de la stabilité. La différence entre les deux critères tient à l'espace sur lequel la minimisation du quotient de Rayleigh est faite. Pour le critère de non-bifurcation, ce minimum est à chercher parmi l'espace fonctionnel  $H_0^1(0, L) \times H^1(0, L)$  et non plus  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}_t^a$  comme c'était le cas pour le critère de stabilité. Ces critères doivent donc donner *a priori* des résultats différents.

Par ailleurs étant donné que  $H_0^1(0, L)$  s'identifie à  $\mathcal{C}_0$  alors l'optimisation du quotient de Rayleigh par rapport à la variable de déplacement donné par (2.20) reste valable. On en déduit qu'il ne peut pas y avoir de bifurcations dans le chemin d'évolution  $(u_t, \alpha_t)$  à l'instant  $t$  si

$$\inf_{H^1(0, L) \setminus \{0\}} \mathcal{R}_t^*(\beta) > 1. \quad (2.25)$$

Un des objectifs de ce Chapitre est de comparer précisément la pertinence de ces deux critères sur différents types de solutions (homogènes ou localisées).

## 2.2 Les états homogènes d'endommagement

L'objectif est d'apporter dans le cadre unidimensionnel une réponse effective quant à la stabilité de ces états dans le cadre du modèle à gradient. On a vu dans le Chapitre 1 que les effets d'échelle avaient une importance considérable dans les propriétés et qu'il existait (sous

déplacement imposé) une longueur critique de barre en deçà de laquelle l'état homogène était stable. Il s'agit ici d'obtenir une valeur explicite pour cette longueur afin de pouvoir quantifier précisément l'influence des effets d'échelle, du chargement et de la loi d'endommagement. Les techniques employées pour obtenir explicitement le minimum du quotient de Rayleigh sont différentes de celles employées dans le cas local du Chapitre 1 du fait de la forme non locale du travail de déformation.

On commence par rappeler rapidement dans le cas unidimensionnel les solutions du problème d'évolution puis on examine le comportement de ces solutions à la lueur des différents critères de non-bifurcation et de stabilité.

### 2.2.1 Rappel sur leur caractérisation

Ces solutions sont caractérisées par un endommagement uniforme en espace

$$\alpha'_t(x) = 0 \quad \forall x \in (0, L) \quad (2.26)$$

La résolution de l'équilibre mécanique sous cette hypothèse d'homogénéité du champ d'endommagement conduit à

$$u'_t(x) = t, \quad u_t(x) = tx, \quad \sigma_t = E(\alpha_t)t. \quad (2.27)$$

Dans le cas d'un endommagement homogène, en réinjectant (2.27) dans le problème d'évolution (2.9)-(2.11), ce dernier s'écrit

$$\frac{1}{2}E'(\alpha_t)t^2 + w'(\alpha_t) \geq 0, \quad \dot{\alpha}_t \left( \frac{1}{2}E'(\alpha_t)t^2 + w'(\alpha_t) \right) = 0. \quad (2.28)$$

On distingue d'une part la phase élastique et d'autre part la phase d'endommagement.

#### 2.2.1.1 Phase élastique

A l'instant initial  $t = 0$ , la structure étant supposée saine ( $\alpha_0 = 0$ ) et au repos ( $u_0 = 0$ ), le critère (2.28) n'est pas atteint. Il existe donc une phase élastique durant laquelle l'endommagement reste nul dans la structure et telle que la réponse soit élastique linéaire. Cette phase se termine lorsque le critère est atteint pour la première fois dans la structure : il est alors atteint *partout* à cet instant du fait de l'homogénéité du champ de déformation (2.27). Cet instant appelé  $t_e$  vaut alors

$$t_e = \sqrt{-\frac{2w'(0)}{E'(0)}}. \quad (2.29)$$



À cet instant la contrainte vaut

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2w'(0)}{S'(0)}}. \quad (2.30)$$

Cette contrainte critique  $\sigma_e$  est un paramètre matériau mesurable à partir de l'expérience. Une condition nécessaire et suffisante d'existence de cette contrainte critique est que  $w'(0) > 0$ . Dans ce cas, le matériau aura une phase élastique, observable dans l'intervalle de temps  $[0, t_e]$ . A contrario, si  $w'(0) = 0$ , on ne pourra pas observer de phase élastique puisque le critère sera une égalité dès la mise en chargement.

### 2.2.1.2 Phase endommagée

Pour des chargements  $t \geq t_e$ , le critère (2.28) devient une égalité et l'endommagement peut croître. En utilisant la valeur de la déformation (2.27), on tire que

$$t = \sqrt{-\frac{2w'(\alpha_t)}{E'(\alpha_t)}}. \quad (2.31)$$

Puisque  $-w'/E'$  est une fonction positive strictement croissante (écrouissage positif en déformation) alors la relation (2.31) est inversible pour  $t \geq t_e$ . Pour tout  $t \geq t_e$ , il existe donc un unique  $\alpha_t$  calculé par inversion de (2.31). On peut alors identifier l'unique contrainte correspondante donnée par

$$\sigma_t = E(\alpha_t)t = \sqrt{\frac{2w'(\alpha_t)}{S'(\alpha_t)}}. \quad (2.32)$$

Par ailleurs, (2.32) montre clairement que la contrainte dans le matériau décroît (*resp.* croît) avec le déplacement lorsque l'on a *adoucissement* (*resp.* durcissant). On définit alors la contrainte maximale pour un état homogène d'endommagement comme étant

$$\sigma_M = \sup_{\alpha \in [0,1]} \sqrt{\frac{2w'(\alpha)}{S'(\alpha)}}. \quad (2.33)$$

Il est clair que la contrainte maximale telle qu'elle est définie en (2.33) est plus grande que la contrainte limite d'élasticité (2.30). Il n'est pas anodin de différencier la contrainte maximale de la contrainte limite d'élasticité dans le cas où l'on voudrait tenir compte d'une phase durcissante.

## 2.2.2 Critère de stabilité et de non-bifurcation

On s'intéresse maintenant à des états homogènes en phase adoucissante, c'est à dire tels que

$$\frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - w''(\alpha_t) > 0. \quad (2.34)$$

Pour ce type d'état, le quotient de Rayleigh (2.21) calculé en l'état  $(tx, \alpha_t)$  se simplifie du fait de l'homogénéité du champ d'endommagement et vaut

$$\mathcal{R}_t^*(\beta) = \frac{E_0 \ell^2 \int_0^L \beta'(x)^2 dx + \frac{S'(\alpha_t)^2 \sigma_t^3}{U_t} \left( \int_0^L \beta(x) dx \right)^2}{\left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \int_0^L \beta(x)^2 dx}. \quad (2.35)$$

On s'intéresse successivement aux critères de non bifurcation et de stabilité. On va pouvoir dans les deux cas donner l'expression explicite du minimum du quotient de Rayleigh en fonction de l'état de déplacement et d'endommagement  $(tx, \alpha_t)$  avec  $\alpha_t$  donné par (2.31) à l'instant  $t$  ainsi que des paramètres matériaux.

**Le critère de non-bifurcation :** Une minimisation du quotient de Rayleigh sur  $H^1/\{0\}$  conduit à la valeur explicite

$$\min_{\beta \in H^1(0,L)/\{0\}} \mathcal{R}_t^*(\beta) = \min \left( \frac{E(\alpha_t) S'(\alpha_t)^2 \sigma_t^2}{\frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t)}, \frac{E_0 \pi^2}{\frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t)} \frac{\ell^2}{L^2} \right). \quad (2.36)$$

*Démonstration.* Voir Annexe A. □

En appliquant le critère d'unicité, on en déduit alors la

**Propriété 2.2 (Critère de non-bifurcation en phase adoucissante).** *Soit  $t \geq t_e$ . On suppose la barre dans un état de déplacement-endommagement  $(tx, \alpha_t)$ , homogène en endommagement et en phase adoucissante. Aucune bifurcation continue en temps n'est possible depuis l'état de déplacement-endommagement  $(tx, \alpha_t)$  si la longueur de bar  $L$  satisfait l'inégalité stricte*

$$L^2 < \frac{E_0 S'(\alpha_t) \pi^2}{S''(\alpha_t) w'(\alpha_t) - S'(\alpha_t) w''(\alpha_t)} \ell^2. \quad (2.37)$$

Comme prévu, dans le cas des matériaux adoucissants, les effets d'échelle ont un impact direct sur la non-unicité des solutions. Pour des barres suffisamment petites, on est donc capable de garantir l'absence de bifurcation à partir de la branche homogène en phase adoucissante. Cette condition dépend de la loi d'endommagement choisie.

Néanmoins, ce critère ne nous donne uniquement qu'une *condition suffisante* quant à l'impossibilité de bifurquer. Par ailleurs, en examinant la preuve en Annexe A, le champ minimiseur ne nous donne pas d'information pertinente quant à la nature des bifurcations lorsque le critère cesse d'être vérifié. En effet, celui-ci n'est pas admissible en tant que vitesse de champ d'endommagement puisqu'il est négatif sur une moitié de la barre et positif sur l'autre moitié. En l'utilisant comme direction de descente, on va alors violer l'hypothèse d'irréversibilité puisque l'on va diminuer l'endommagement sur une moitié de la barre.

Il n'est donc pas évident à ce stade de l'étude de conclure à l'existence de bifurcation lorsque le

critère de non-bifurcation est invalidé. La réponse sera donnée lorsque l'on calculera explicitement les bifurcations et qu'on examinera leurs conditions d'apparition.

**Le critère de stabilité :** On peut aussi expliciter la valeur de l'infimum du quotient de Rayleigh sur  $\mathcal{D}_t^a/\{0\}$ . Celui-ci s'écrit

$$\min_{\beta \in \mathcal{D}_t^a/\{0\}} \mathcal{R}_t^*(\beta) = \min \left( \frac{E(\alpha_t)S'(\alpha_t)^2\sigma_t^2}{\frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - w''(\alpha_t)}, \frac{\left(\pi^2 E_0 \frac{\ell^2}{L^2} E(\alpha_t)^2 S'(\alpha_t)^4 \sigma_t^4\right)^{1/3}}{\frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - w''(\alpha_t)} \right). \quad (2.38)$$

*Démonstration.* Voir Annexe A. □

Ce résultat nous permet d'énoncer la

**Propriété 2.3 (Stabilité des états homogènes en phase adoucissante).** *Soit  $t \geq t_e$ . On suppose la barre dans un état de déplacement-endommagement  $(tx, \alpha_t)$ , homogène en endommagement et en phase adoucissante. L'état  $(tx, \alpha_t)$  est stable si (resp. seulement si) la longueur de bar  $L$  satisfait l'inégalité*

$$L^2 < (\text{resp. } \leq) \frac{4\pi^2 E_0 S'(\alpha_t)^5 w'(\alpha_t)^2}{S(\alpha_t)^2 (S''(\alpha_t)w'(\alpha_t) - S'(\alpha_t)w''(\alpha_t))^3} \ell^2 = \frac{L_{SB}^2}{4}. \quad (2.39)$$

De la même manière que pour le critère de non-bifurcation, les effets d'échelle pilotent la stabilité des états homogènes bien que la valeur prise par l'endommagement homogène  $\alpha_t$  au cours du temps n'en dépende pas. Pour des barres de petites tailles, le critère de stabilité nous assure la stabilité des états homogènes. On remarque cependant qu'étant encore proportionnelle à la longueur interne, la taille critique diffère de celle donnée par le critère de non bifurcation. En vertu de l'inclusion  $\mathcal{D}_t^a \subset H^1(0, L)$ , on sait que la taille critique de non bifurcation est inférieure à celle de stabilité. On se doute alors que ces deux critères correspondent à des mécanismes différents bien qu'on ne soit pas à ce stade de l'étude en mesure d'en comprendre les raisons.

Par ailleurs, contrairement au critère de non-bifurcation qui, lorsqu'il est invalidé, laisse l'apparition effective d'une bifurcation indéterminée, le critère de stabilité est quant à lui constructif tant au niveau théorique que numérique. En effet, dans le cas où le critère cesse d'être vérifié, on est assuré qu'il existe précisément des états *accessibles* dans un voisinage de l'état  $(tx, \alpha_t)$  qui ont une énergie potentielle inférieure. Les minimiseurs du quotient de Rayleigh correspondent alors à des directions de descente (du moins localement) pour l'énergie potentielle.

## 2.3 Construction des états endommagés localisés

### 2.3.1 La méthode

L'objectif de cette section est de construire des états localisés qui naissent à partir d'états homogènes d'endommagement et qui vérifient les 3 principes physiques du problème d'évolution. Dans un souci de compréhension des processus adoucissants, on ajoute aux hypothèses constitutives suivantes sur le matériau.

**Hypothèses 2.4.** *On suppose que la variable d'endommagement est borné et que l'endommagement maximal  $\alpha_m$  correspondant à l'état ultime soit normalisé à 1. Par ailleurs, pour rendre compte de la présence d'une phase durcissante avant le régime adoucissant, on suppose qu'il existe  $0 \leq \alpha_M < 1$  tel que  $\alpha \mapsto w'(\alpha)/S'(\alpha)$  soit d'abord croissante sur  $[0, \alpha_M)$  puis décroissante jusqu'à 0 sur  $[\alpha_M, 1)$ .*

Ce choix permet de rendre du comportement de matériaux ayant une phase durcissante à l'issue de la phase élastique avant de basculer dans un régime adoucissant. Dans le cas de matériaux purement adoucissants on aura  $\alpha_M = 0$ . Par ailleurs, sous les Hypothèses 2.4, la contrainte maximale (2.33) dans un processus d'endommagement homogène est atteinte en  $\alpha_M$ . Il se trouve qu'en réalité cette contrainte  $\sigma_M$  est une borne supérieure pour les valeurs de contrainte prises au cours de n'importe quel chemin de localisation. Il suffit pour cela de partir d'un état  $(u_t, \alpha_t)$  vérifiant l'équilibre mécanique et le critère. En introduisant alors la contrainte (2.8) dans le critère puis en intégrant la relation entre  $x = 0$  et  $x = L$  on aboutit à

$$-2E_0\ell^2 (\alpha'_t(L) - \alpha'_t(0)) - \sigma_t^2 \int_0^L S'(\alpha_t(x))dx + \int_0^L 2w'(\alpha_t(x))dx \geq 0.$$

Dans le cas où la structure est initialement dans un état sain, la normale au gradient d'endommagement sera toujours nulle au bord du domaine et donc on aura  $\alpha'_t(0) = \alpha'_t(L) = 0$ . On en déduit que

$$\sigma_t^2 \int_0^L S'(\alpha_t(x))dx \leq \int_0^L 2w'(\alpha_t(x))dx. \quad (2.40)$$

On utilise à présent la définition de  $\alpha_M$  de laquelle on déduit que  $2w'(\alpha_t(x)) \leq \sigma_M S'(\alpha_t(x))$ . En intégrant sur  $(0, L)$  puis en injectant dans (2.40), on a la majoration voulue. La contrainte maximale que peut supporter la structure pour n'importe quel chemin d'évolution est donc  $\sigma_M$  (2.33).

Un état d'endommagement localisé sera caractérisé par un ensemble  $\mathcal{S}_t = \bigcup_i \mathcal{S}_t^i$  de *zones de localisations* distinctes où  $\mathcal{S}_t^i$  est un intervalle de  $[0, L]$  où le critère est atteint. À ce stade de la construction, ces intervalles sont supposés de tailles différentes et leur évolution au cours du chargement est une inconnue. On a donc affaire à un problème non-linéaire à frontière libre.

Sur  $[0, L] \setminus \mathcal{S}_t$ , le matériau est supposé être endommagé de façon homogène à la valeur  $\alpha_0$  avec

$\alpha_0 \geq \alpha_M$ . Ce sont des zones de décharge élastique où  $\alpha_0$  représente l'état homogène d'où a eu lieu la localisation. Cet état  $\alpha_0$  ne correspond pas nécessairement à l'état sain, les localisations pouvant apparaître à l'issue d'une phase durcissante ou après avoir suivi pendant un laps de temps la branche homogène.

Les étapes successives dans la construction des états localisés sont alors les suivantes :

1. Pour un temps  $t$  donné, en supposant que  $\sigma_t$  soit connu, on détermine le profil du champ d'endommagement dans la zone de localisation ;
2. Pour un temps  $t$  donné, on établit la relation entre  $\sigma_t$  et  $U_t$  ;
3. On vérifie la condition d'irréversibilité pour la succession temporelle d'états construits.

### 2.3.2 Profil d'endommagement

À l'état d'endommagement  $\alpha_0$  on fait correspondre l'état de contrainte  $\sigma_0$  et le temps de chargement  $t_0$  d'où a lieu la localisation et donnés par (2.29) et (2.30). Toutes les localisations construites à partir de ce point de bifurcation dépendront implicitement de ce point de départ et donc des quantités  $\alpha_0$ ,  $\sigma_0$  et  $t_0$ . Pour éviter d'alourdir les notations on n'y fera donc pas référence explicitement. Le temps étant fixé dans la construction des états localisés, on enlève l'indice  $t$  dans toutes les quantités qui dépendent du temps pour simplifier la présentation. Soit alors  $\sigma \in (0, \sigma_M)$  l'état de contrainte (homogène) de la structure et  $\mathcal{S}_i$  une zone de localisation différente de  $[0, L]$ . Selon que la localisation apparaisse à l'intérieur du domaine ou au bord, on modifie légèrement les notations :

- si  $\overline{\mathcal{S}_i} \subset (0, L)$  alors on pose  $\mathcal{S}_i = (x_i - D_i, x_i + D_i)$  où  $x_i$  est le centre de la localisation et  $2D_i$  la taille du support,
- si  $0 \in \overline{\mathcal{S}_i}$  alors on pose  $\mathcal{S}_i = (0, D_i)$ ,
- si  $L \in \overline{\mathcal{S}_i}$  alors on pose  $\mathcal{S}_i = (L - D_i, L)$ ,

Puisque le critère est supposé être atteint dans chaque zone de localisation, on a

$$-\sigma^2 S'(\alpha) + 2w'(\alpha) - 2E_0 \ell^2 \alpha'' = 0 \quad \text{sur} \quad (x_i - D_i, x_i + D_i). \quad (2.41)$$

La zone  $\mathcal{S}_i$  est supposée être en contact avec une zone de décharge élastique ayant été endommagée à la valeur  $\alpha_0$ . Par continuité du champ d'endommagement et de sa dérivée spatiale, on a dans le cas où  $\mathcal{S}_i = (x_i - D_i, x_i + D_i)$

$$\alpha(x_i \pm D_i) = \alpha_0, \quad \alpha'(x_i \pm D_i) = 0, \quad (2.42)$$

ou si  $\mathcal{S}_i = (0, D_i)$  (on déduit les mêmes conditions pour la demi-localisation en  $x = L$ ),

$$\alpha(D_i) = \alpha_0, \quad \alpha'(0) = \alpha'(D_i) = 0. \quad (2.43)$$

En multipliant (2.41) par  $\alpha'$  puis en intégrant selon  $x$  sur  $\mathcal{S}_i$ , on aboutit à l'intégrale première

$$-\sigma^2 S(\alpha) + 2w(\alpha) - E_0 \ell^2 \alpha'^2 = C \quad \text{sur } \mathcal{S}_i, \quad (2.44)$$

où  $C$  est une constante. En utilisant les conditions de raccord avec la zone de décharge élastique (2.42) ou (2.43), on obtient que (2.44) peut se mettre sous la forme

$$\ell^2 \alpha'(x)^2 = H(\sigma, \alpha(x)) \quad \text{dans } \mathcal{S}_i \quad (2.45)$$

avec

$$E_0 H(\sigma, \beta) := 2(w(\beta) - w(\alpha_0)) - \sigma^2 (S(\beta) - S(\alpha_0)) \quad \text{pour } \beta \in [\alpha_0, 1). \quad (2.46)$$

La résolution de cette intégrale peut se faire dans l'espace des phases. Cela nécessite une analyse fine au préalable des propriétés de  $H$  et en particulier de ses variations par rapport à l'endommagement. En dérivant (2.46) par rapport à  $\beta$ , on trouve que

$$E_0 \frac{\partial H}{\partial \beta}(\sigma, \beta) = 2w'(\beta) - \sigma^2 S'(\beta).$$

En vertu de l'Hypothèse 2.1 et l'Hypothèse 2.4, du fait de l'adoucissement du matériau pour des valeur d'endommagement supérieures à  $\alpha_M$ , on est assuré respectivement de la stricte positivité de  $w'$  et de la décroissance de  $\beta \mapsto 1 - \frac{\sigma^2 S'(\beta)}{2w'(\beta)}$  de  $1 - \sigma^2/\sigma_0^2$  à  $-\infty$  lorsque  $\beta$  croît de  $\alpha_0$  à 1. On en déduit que  $H$  est d'abord croissante depuis 0 puis décroissante jusqu'à  $-\infty$ . De ce fait, il existe une unique valeur positive de  $\beta$  qu'on appelle  $\bar{\alpha}(\sigma)$  en laquelle  $H$  s'annule :

$$H(\sigma, \bar{\alpha}(\sigma)) = 0, \quad \alpha_0 < \bar{\alpha}(\sigma) < 1. \quad (2.47)$$

$\bar{\alpha}(\sigma)$  correspond à la valeur maximale que peut prendre l'endommagement pour cet état de contrainte  $\sigma$ . On distingue à nouveau la localisation à l'intérieur de la barre de la demi-localisation au bord du domaine :

- Si la localisation a lieu à l'intérieur de la barre *i.e.*  $x_i \in (0, L)$  alors l'endommagement croît depuis la valeur  $\alpha_0$  en  $x_i - D_i$  jusqu'à atteindre la valeur  $\bar{\alpha}(\sigma)$  au centre du pustule en  $x_i$  puis redécroit jusqu'à la valeur  $\alpha_0$  en  $x_i + D_i$ .
- Dans le cas où la localisation part depuis le bord gauche (*resp.* droit) du domaine, l'endommagement décroît (*resp.* croît) depuis la valeur  $\bar{\alpha}(\sigma)$  (*resp.*  $\alpha_0$ ) jusqu'à la valeur  $\alpha_0$  (*resp.*  $\bar{\alpha}(\sigma)$ ).

On remarque que  $\bar{\alpha}(\sigma)$  dépend uniquement de la contrainte  $\sigma$ . Elle satisfait la propriété de monotonie suivante :

**Propriété 2.5 (Monotonie de la valeur maximale de l'endommagement en fonction**

**de la contrainte).** Lorsque  $\sigma$  décroît de  $\sigma_0$  à 0,  $\bar{\alpha}(\sigma)$  croît de  $\alpha_0$  à 1.

*Démonstration.* Soit  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux contraintes telles que  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \sigma_0$ . Par définition, nous avons  $0 = H(\sigma_1, \bar{\alpha}(\sigma_1)) = H(\sigma_2, \bar{\alpha}(\sigma_2)) < H(\sigma_1, \bar{\alpha}(\sigma_2))$ , où la dernière majoration vient de la stricte positivité de  $S'$ . Par ailleurs, comme  $H(\sigma_1, \beta) < 0$  pour  $\bar{\alpha}(\sigma_1) < \beta < 1$ , on a  $\bar{\alpha}(\sigma_1) > \bar{\alpha}(\sigma_2)$ . Ceci prouve la décroissance de  $\bar{\alpha}(\sigma)$ . Puisque  $\partial H / \partial \beta(\sigma_0, \beta) < 0$  du fait de l'adoucissement pour  $\beta > \alpha_0$  alors nous avons  $\bar{\alpha}(\sigma_0) = 0$ . Il reste à montrer que  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{\alpha}(\sigma) = 1$ . Comme  $\bar{\alpha}(\sigma)$  est décroissante et majorée par 1, alors la limite existe. Si  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{\alpha}(\sigma) < 1$ , en passant à la limite on trouve  $0 = H(0, \lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{\alpha}(\sigma)) = 2w(\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{\alpha}(\sigma))$  d'où  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{\alpha}(\sigma) = 0$ , ce qui est contradictoire. On a donc nécessairement  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{\alpha}(\sigma) = 1$ .  $\square$

La résolution de l'intégrale première (2.41) pour obtenir le profil d'endommagement se fait de façon implicite par séparation des variables d'espace  $x$  et d'endommagement  $\alpha$ . Le résultat que l'on obtient est la dépendance *implicite* de l'endommagement en fonction de l'abscisse. En effet en passant à la racine carrée dans (2.45) on a

$$\ell \alpha'(x) = \pm \sqrt{H(\sigma, \alpha(x))}, \quad (2.48)$$

le signe dépendant de la position du point sur la partie ascendante ou descendante de la localisation.

**Propriété 2.6 (Taille caractéristique d'une localisation).** *En ayant bifurqué à partir d'un état endommagé uniformément à la valeur  $\alpha_0$ , la taille d'une localisation pour une contrainte  $\sigma \leq \sigma_0$  est*

$$2D(\sigma) = 2\ell \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha}(\sigma)} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma, \beta)}}, \quad (2.49)$$

tandis que pour une demi-localisation la taille du support est  $D(\sigma)$ .

*Démonstration.* Il suffit de séparer les dépendance en  $x$  de celles en  $\alpha$  et d'intégrer tout le long de la localisation. Il faut néanmoins s'assurer que l'on est en droit d'intégrer. C'est le cas pour  $\sigma \in (0, \sigma_0)$ . En effet  $H(\sigma, \beta)$  est équivalent à  $\frac{\partial H}{\partial \beta}(\sigma, \alpha_0)(\beta - \alpha_0)$  lorsque  $\beta$  tend vers 0 et à  $\frac{\partial H}{\partial \beta}(\sigma, \bar{\alpha}(\sigma))(\beta - \bar{\alpha}(\sigma))$  lorsque  $\beta$  tend vers  $\bar{\alpha}(\sigma)$ . Comme  $\frac{\partial H}{\partial \beta}(\sigma, \alpha_0) > 0$  et  $\frac{\partial H}{\partial \beta}(\sigma, \bar{\alpha}(\sigma))$  pour  $\sigma \in (0, \sigma_0)$ , l'intégrale est donc convergente.  $\square$

La valeur (2.49) montre que toutes les localisations entières (*resp.* demi-localisations) ont la même taille. Celle-ci est fixée par l'état de contrainte actuel  $\sigma$  et au point de bifurcation  $\sigma_0$ . Le calcul nous rassure aussi quant à la pertinence de la régularisation. En effet pour un état de contrainte fixé, la taille est proportionnelle à la longueur interne du modèle. La longueur interne étant fixée, on dissipe donc nécessairement de l'énergie lorsque la structure localise l'endommagement. C'est là une différence majeure avec le modèle local pour lequel l'énergie

dissipée était nulle (ce qu'on retrouve ici en faisant  $\ell \rightarrow 0$ ). En faisant une étude fine des propriétés de la taille caractéristique de la localisation, on obtient la

**Propriété 2.7 (Dépendance de la zone de localisation en fonction de la contrainte.)**

*La taille  $D(\sigma)$  de la zone de localisation varie continûment avec  $\sigma$ . Les valeurs aux extrémités du chemin de localisation  $D(\sigma_0)$  et  $D(0) = \lim_{\sigma \downarrow 0} D(\sigma)$  sont finies et données pour un matériau strictement adoucissant par*

$$D(\sigma_0) = \pi \ell \sqrt{\frac{E_0 S'(\alpha_0)}{S''(\alpha_0) w'(\alpha_0) - S'(\alpha_0) w''(\alpha_0)}}, \quad D(0) = \ell \int_{\alpha_0}^1 \sqrt{\frac{E_0}{2(w(\alpha) - w(\alpha_0))}} d\alpha. \quad (2.50)$$

*La fonction  $(0, \sigma_0) \mapsto \mathbb{R}; \sigma \mapsto D(\sigma)$  n'est pas nécessairement décroissante : sous réserve de régularité de la souplesse  $S$  et de la densité de dissipation  $w$ , la zone de localisation croît au point de bifurcation si et seulement si l'inégalité suivante est satisfaite*

$$S''(\alpha_0) \left( S'''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w'''(\alpha_0) \right) > S'(\alpha_0) \left( S''''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w''''(\alpha_0) \right). \quad (2.51)$$

*Si la localisation a lieu au point d'échange entre le comportement durcissant et adoucissant au sens où  $S''(\alpha_0) w'(\alpha_0) - S'(\alpha_0) w''(\alpha_0) = 0$  mais tel que  $S''''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w''''(\alpha_0) > 0$  alors  $\lim_{\sigma \uparrow \sigma_0} D(\sigma) = +\infty$ .*

*Démonstration.* Voir Annexe B □

On déduit de la Propriété 2.7 quelques remarques. Dans le cas d'un matériau strictement adoucissant, il devient clair que seules des barres ayant une longueur suffisante afin de pouvoir insérer une localisation pourront emprunter ce chemin localisé. Puisque pour une contrainte donnée toutes les localisations ont la même taille, on voit que la demi-localisation est celle qui prend le moins de place. Par ailleurs rien n'empêche d'imaginer pour des barres suffisamment grandes, de multiples localisations le long de celles-ci. D'autre part, si le matériau présente une phase durcissante avant de basculer dans une adoucissante on voit que la localisation ne pourra jamais intervenir au point d'échange des écrouissements puisque la taille de la localisation est infinie en ce point. L'hypothèse sur la dérivée troisième  $S''''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w''''(\alpha_0) > 0$  peut s'interpréter graphiquement dans le diagramme contrainte-déformation pour l'état homogène : elle signifie que la courbe est *strictement concave* au point d'échange d'écrouissage durcissement-adoucissement.

On peut alors résumer la condition de bifurcation en termes d'effets d'échelles

**Corollaire 2.8 (Condition d'existence de bifurcation).** *Une bifurcation à partir de l'endommagement homogène  $\alpha_0$  en phase strictement adoucissante, faite de  $n$  localisations (demi-*



entière ou entières) est possible si et seulement si la taille de la barre est telle que

$$L \geq 2n \sqrt{\frac{E_0 S'(\alpha_0) \pi^2}{S''(\alpha_0) w'(\alpha_0) - S'(\alpha_0) w''(\alpha_0)}} \ell = 2nD(\sigma_0). \quad (2.52)$$

Concernant le centre  $x_i$  d'une localisation, en supposant que la barre est assez grande, celui-ci peut donc être choisi librement dans l'ensemble  $[D(\sigma), L - D(\sigma)] \cup \{0, L\}$ . Dans l'ouvert  $(0, D(\sigma)) \cup (L - D(\sigma), L)$ , il n'est pas possible qu'une localisation entière se développe car celle-ci n'a pas assez de place.

Pour connaître enfin le profil de la localisation pour tout  $x \in \mathcal{S}_i$ , on revient à l'intégrale première qu'on intègre cette fois sur l'intervalle  $(x, x_i)$  (ou  $(x_i, x)$ ),

$$|x - x_i| = \ell \int_{\alpha(x)}^{\bar{\alpha}(\sigma)} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma, \beta)}}. \quad (2.53)$$

Le champ d'endommagement localisé est donc symétrique par rapport au centre  $x_i$  et décroissant continûment de  $\bar{\alpha}(\sigma)$  au centre à  $\alpha_0$  aux extrémités. Cette formule est par ailleurs valable aussi pour une demi-localisation avec  $x_i = 0$  ou  $L$ . Enfin pour une contrainte donnée, le profil de localisation est indépendant du nombre de localisations. En revanche le nombre de localisations aura une influence sur le diagramme global contrainte-déformation moyenne comme le montrera la section suivante.

On pourrait penser que l'irréversibilité est naturellement assurée par le processus de construction et qu'une condition *suffisante* pour qu'une pustule puisse se développer entièrement dans la barre sans toucher les bords serait d'imposer à la taille finale  $\lim_{\sigma \downarrow 0} D(\sigma)$  d'être inférieure à la taille de la barre  $L$ . Malheureusement, contrairement à la valeur maximale  $\sigma \mapsto \bar{\alpha}(\sigma)$  atteinte au centre de la localisation qui est une fonction monotone, la fonction  $\sigma \mapsto D(\sigma)$  n'est pas nécessairement décroissante. Dans la Propriété 2.7, c'est une condition sur la loi d'endommagement faisant intervenir des conditions du 3-ème ordre qui nous assure la décroissance de  $\sigma \mapsto D(\sigma)$ . Les conditions matériaux telles que celles d'écrouissage ou d'adoucissement qu'on a utilisées jusqu'à présent ne font intervenir que des dérivées allant jusqu'au second ordre. Il faudrait donc un miracle pour que toutes les lois d'endommagement puissent satisfaire cette condition. Il suffit de prendre une loi particulière pour vite déchanter. Soit la loi définie par *i.e.*  $E(\alpha) = E_0(1 - \alpha)^2$  et  $w(\alpha) = \sigma_0^2 \alpha / E_0$ . Une application directe de la formule (2.51) montre que pour cette loi, la localisation se décharge au niveau de ses extrémités dès son apparition. Suivre continûment l'évolution de ce profil de localisation tel qu'il est construit revient à violer la condition d'irréversibilité. Pour sortir de cette possible impasse, on donnera dans la Section 2.3.4 une condition suffisante nous assurant l'irréversibilité.

### 2.3.3 Réponse globale et régularité en temps

On a vu que pour une contrainte donnée il était possible de construire entièrement les profils de localisation d'endommagement. Cependant l'essai de traction simple se fait sous déplacement imposé. Il s'agit donc de relier cette contrainte à la valeur du déplacement imposé en bout de barre. Cela revient à identifier la relation contrainte-déformation moyenne puisqu'en appelant  $\bar{\varepsilon}$  la déformation moyenne on a

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{L} \int_0^L u'(x) dx = \frac{U}{L}. \quad (2.54)$$

où  $U$  désigne le déplacement imposé en bout de barre. Puisque la contrainte est homogène dans la barre, la relation  $\sigma - \bar{\varepsilon}$  est bien de nature globale et s'identifie à un coefficient multiplicatif près à la relation force-déplacement. Les relations clé pour aboutir à cette relation sont l'équilibre mécanique et la relation de comportement. On a vu qu'on aboutissait du fait de l'homogénéité de la contrainte à (2.14). On suppose donc que la barre possède  $n$  localisations (dans le cas d'une demi localisation, on a  $n = 1/2$ ). En dehors de ces zones l'endommagement est homogène à la valeur  $\alpha_0$ . On appelle  $x \mapsto \alpha(x)$  le profil d'endommagement correspondant. En séparant les contributions de chaque localisation dont le profil est identique, on aboutit à

$$U = \sigma \int_0^L S(\alpha(x)) dx = \sigma \left( n \int_{\mathcal{S}_1} S(\alpha(x)) dx + S(\alpha_0)(L - (2n + m)D(\sigma)) \right). \quad (2.55)$$

L'intégrale portant sur  $\mathcal{S}_1$  peut s'exprimer en fonction des quantités introduites dans le paragraphe précédent puisqu'on a  $n \int_{\mathcal{S}_1} S(\alpha(x)) dx = 2n \int_{x_i - D(\sigma)}^{x_i} S(\alpha(x)) dx$  (relation valable aussi pour  $n = 1/2$ ). Maintenant, en faisant le changement de variable  $\beta = \alpha(x)$  croissant sur  $(x_i - D(\sigma), x_i)$ , puis en utilisant la relation  $\ell d\beta = \sqrt{H(\sigma, \beta)} dx$  déduite de (2.55), on trouve

$$\int_{\mathcal{S}_1} S(\alpha(x)) dx = 2\ell \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha}(\sigma)} \frac{S(\beta) d\beta}{\sqrt{H(\sigma, \beta)}}.$$

En remplaçant  $D$  par sa forme intégrale (2.49), on établit la

**Propriété 2.9 (La relation contrainte-déformation moyenne).** *La déformation moyenne  $\bar{\varepsilon}$  dans la structure pour  $n$  localisations (demi-entière ou entières) est reliée à l'état de contrainte  $\sigma$  via la relation implicite valable pour  $\sigma \leq \sigma_0$*

$$\bar{\varepsilon} = \frac{U}{L} = \varepsilon^e(\sigma) + n \frac{\ell}{L} \varepsilon_1^d(\sigma), \quad (2.56)$$

où  $\varepsilon^e(\sigma)$  et  $\varepsilon_1^d(\sigma_0, \sigma)$  sont des quantités ne dépendant que de l'état de contrainte et définies par

$$\varepsilon^e(\sigma) = S(\alpha_0)\sigma, \quad \varepsilon_1^d(\sigma) = 2\sigma \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha}(\sigma)} (S(\beta) - S(\alpha_0)) \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma, \beta)}}. \quad (2.57)$$

La déformation apparaît donc comme la somme de deux termes de nature différente. Le premier terme  $\varepsilon^e(\sigma)$  représente la déformation élastique calculée pour l'état de contrainte  $\sigma$  pour un module de souplesse  $E(\alpha_0)$ . Le deuxième terme est quant à lui fortement non-linéaire et est relié au processus de localisation : il dépend essentiellement d'une fonction  $\sigma \mapsto \varepsilon_1^d(\sigma)$  qui peut se calculer indépendamment du nombre de localisations ou du rapport d'échelle  $\ell/L$ .

D'après (2.56), le nombre de localisations a une influence décisive sur le diagramme contrainte-déformation moyenne. En effet, pour une contrainte fixée, plus il y a de localisations, plus le déplacement que l'on doit imposer pour équilibrer la barre doit être grand. On en déduit deux chemins de localisation partant d'un même point de bifurcation mais avec un nombre de localisations différent ne pourront jamais se croiser.

La continuité par rapport au déplacement imposé (et donc temporelle) des champs d'évolution repose sur l'absence de snap-back dans le diagramme global  $\sigma - \bar{\varepsilon}$ , c'est à dire sur l'inversibilité de la relation (2.56). On dira qu'il y a *snap-back* en un état de contrainte  $\sigma$  si on a  $\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\sigma}(\sigma) > 0$ . On voit donc qu'il faut connaître en détail les propriétés de monotonie de  $\varepsilon_1^d$ , celles de  $\varepsilon_e$  étant relativement simples. Tout d'abord sachant que  $\varepsilon_1^d(\sigma_0) = 0$  et  $\varepsilon_1^d(\sigma) > 0$  pour  $\sigma < \sigma_0$ , la fonction  $\varepsilon_1^d(\sigma)$  est nécessairement décroissante au voisinage de  $\sigma_0$ . Néanmoins, pour répondre à la question d'absence de snap-back, on a besoin de quantifier précisément cette décroissance. On s'appuie pour cela sur la

**Propriété 2.10 (Comportement de  $\sigma \mapsto \varepsilon_1^d(\sigma)$  au voisinage de  $\sigma_0$ ).** *Au point de bifurcation, on a  $\varepsilon_1^d(\sigma_0) = 0$  et*

$$\frac{d\varepsilon_1^d}{d\sigma}(\sigma_0) = -\frac{\pi 2^{5/2} S'(\alpha_0)^2 \sigma_0^2 E_0^{1/2}}{(S''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w''(\alpha_0))^{3/2}}. \quad (2.58)$$

On peut alors établir le

**Corollaire 2.11 (Continuité temporelle au point de bifurcation).** *Soit un chemin de localisation ayant bifurqué d'un état d'endommagement homogène  $\alpha_0$  et fait de  $n$  localisations. La localisation apparaît continûment avec le chargement si la longueur de la barre est telle que*

$$L \leq nL_{SB} \quad (2.59)$$

où  $L_{SB}$  désigne une longueur caractéristique définie par

$$L_{SB} = 4\sqrt{\frac{\pi^2 E_0 S'(\alpha_0)^5 w'(\alpha_0)^2}{S(\alpha_0)^2 (S''(\alpha_0) w'(\alpha_0) - S'(\alpha_0) w''(\alpha_0))^3}} \ell. \quad (2.60)$$

Pour des petites longueurs de barre, les chemins de localisation vont donc être nécessairement continus en temps au voisinage du point de bifurcation. Néanmoins, la condition (2.59) ne garantit pas l'absence de snap-back ultérieurement dans le chemin de localisation. Il faut pour

cela exiger une condition plus forte puisqu'il faut demander à la longueur de la barre d'être telle que

$$L \leq n\ell E(\alpha_0) \inf_{\sigma \in (0, \sigma_0]} \left\{ -\frac{d\varepsilon_1^d}{d\sigma}(\sigma) \right\} = nL_M. \quad (2.61)$$

Sous cette condition, on est alors en mesure d'assurer une réponse localisée régulière en temps jusqu'à la rupture de la barre. Le bilan d'énergie est alors automatiquement satisfait à chaque instant en vertu de cette régularité. En revanche dans le cas où  $L > L_M$ , un snap-back devient alors possible et il faut procéder autrement pour garantir le bilan d'énergie. Ce type de comportement étant délicat à gérer, on verra ultérieurement la façon de procéder dans ce cas.

### 2.3.4 La condition d'irréversibilité

Il reste maintenant à vérifier que les chemins de localisation respectent le principe d'irréversibilité. Dans le cas des états homogènes, on a vu que l'irréversibilité était garantie par la condition d'écrouissage positif en déformation. Néanmoins, la réponse est loin d'être aussi triviale pour le cas des localisations. On a vu que la taille de la zone de localisation n'était pas forcément une fonction monotone de la contrainte. En particulier celle-ci pouvait décroître à mesure que décroissait la contrainte. C'est précisément ce type de phénomène que l'on voudrait éviter : il correspond à un chemin de localisation dans lequel les parties extrémales de la zone de localisation se mettent à se décharger élastiquement (le critère d'endommagement y devenant une inégalité stricte) tandis que la partie centrale continue à s'endommager (le critère étant une égalité). Ce type de comportement complique sérieusement l'analyse puisqu'il faut tenir compte de l'histoire de la localisation. Pour éviter donc ce désagrément on propose d'ajouter les hypothèses suivantes

**Hypothèses 2.12.** *Les lois d'endommagement  $\alpha \mapsto E(\alpha)$  et  $\alpha \mapsto w(\alpha)$  sont choisies de sorte que  $\sigma \mapsto D(\sigma)$  définie par (2.49) soit croissante.*

Il faut noter que c'est une hypothèse *constitutive* et non structurelle puisque la quantité  $D(\sigma)$  ne dépend que de la loi d'endommagement à travers  $E$  et  $w$ . On peut alors énoncer la

**Propriété 2.13 (Irréversibilité de la localisation).** *Sous l'Hypothèse 2.12, le profil de localisation  $t \mapsto \alpha_t$  défini par (2.53) est croissant si et seulement si  $t \mapsto \sigma_t$  est décroissante.*

*Démonstration.* Supposons que l'irréversibilité soit satisfaite. Dans ce cas,  $\bar{\alpha}(\sigma_t)$  est une fonction croissante de  $t$ . Or par la Propriété 2.7,  $d\bar{\alpha}/d\sigma < 0$  d'où on déduit la décroissance de  $\sigma_t$ . Réciproquement supposons que  $\sigma_t$  soit une fonction décroissante. Dans ce cas, en utilisant à nouveau la dérivation par composition,  $t \mapsto \bar{\alpha}_t$  et  $t \mapsto D(\sigma_t)$  sont décroissantes. Soient alors  $t_1 < t_2$  deux instants et  $x$  un point intérieur à la localisation  $\alpha_{t_1}$  i.e.  $|x - x_i| \leq D(\sigma_{t_1})$ . Il suffit de prouver que  $\alpha_{t_2}(x) \geq \alpha_{t_1}(x)$ . Comme  $D(\sigma_{t_2}) \geq D(\sigma_{t_1})$ , le point  $x$  se situe automatiquement

dans la zone de localisation au temps  $t_2$ . De ce fait, on a l'égalité

$$|x - x_i| = \ell \int_{\alpha_{t_2}}^{\bar{\alpha}_{t_2}} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma_{t_2}, \beta)}} = \ell \int_{\alpha_{t_1}}^{\bar{\alpha}_{t_1}} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma_{t_1}, \beta)}}.$$

En séparant les intégrales et en utilisant la décroissance de  $\sigma \mapsto H(\sigma, \beta)$  on trouve

$$0 \leq D(\sigma_{t_2}) - D(\sigma_{t_1}) = \ell \int_0^{\alpha_{t_2}} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma_{t_2}, \beta)}} - \ell \int_0^{\alpha_{t_1}} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma_{t_1}, \beta)}} \leq \ell \int_{\alpha_{t_1}}^{\alpha_{t_2}} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma_{t_1}, \beta)}},$$

d'où  $\alpha_{t_2}(x) \geq \alpha_{t_1}(x)$ . □

Il reste donc à trouver des lois d'endommagement vérifiant l'Hypothèse 2.12, ce qui fera l'objet de la Section 2.3.6.

### 2.3.5 Liens avec les critères de non-bifurcation et de stabilité

Maintenant que l'on a mené une étude complète des chemins localisés vus comme des bifurcations depuis la branche homogène, on est en mesure de faire le lien avec les deux critères de non-bifurcation et de stabilité calculés pour les états homogènes. Le but est de savoir s'il est possible d'observer la nature des états localisés les conséquences de l'invalidation des deux critères de sélection. Examinons tout d'abord

**Le critère de non-bifurcation :** En examinant la condition de non-bifurcation du problème en vitesse (2.37) et la condition d'apparition écrite en termes d'effets d'échelle d'une demi-localisation (2.37), on remarque que l'une est précisément le pendant de l'autre. Formulé autrement, une demi-localisation peut apparaître à partir d'un état homogène dès que le critère de non-bifurcation est invalidé. C'est précisément ce que l'on attendait du critère de non-bifurcation (qui devient alors un "vrai" critère de bifurcation) mais que l'on n'était pas capable de montrer à partir du minimiseur du quotient de Rayleigh. Ce lien entre l'invalidation du critère de non-bifurcation et l'apparition effective d'une bifurcation fait écho aux résultats similaires obtenus dans le cas de *milieux locaux* tel qu'en plasticité. Cependant la forme du travail de déformation est non-locale, ce qui complique fortement l'analyse. Ce résultat laisse néanmoins entrevoir une possible généralisation des dimensions supérieures, ce qui n'a pas été observé à notre connaissance dans la littérature.

**Le critère de stabilité :** Là encore, la construction des chemins bifurqués de localisation permet d'apporter un éclairage sur la stabilité des états homogènes. On remarque en effet que la condition de continuité temporelle (2.59) au point de bifurcation de la demi-localisation est précisément la condition de stabilité de l'état homogène donnée par (2.39). On en déduit qu'au moment où la branche homogène perd sa stabilité, une demi-localisation peut apparaître dans

la barre mais de façon *brutale i.e.* avec une discontinuité en temps des champs de déplacement et d'endommagement. Bien que la demi-localisation ne soit pas l'unique bifurcation possible (on pourrait avoir une localisation), il est intéressant de noter ce lien qui semble se dessiner entre la notion d'instabilité et d'évolution brutale. C'est une connexion que l'on retrouve en mécanique de la rupture mais qui semble là encore inédite dans le cas de l'endommagement.

### 2.3.6 Exemples

On illustre notre construction de chemins de localisation pour une famille de lois d'endommagement. En particulier, on examine rigoureusement quels types de lois permettent de satisfaire les conditions d'irréversibilité et de continuité temporelle.

**Exemple 1.** *On considère la famille suivante de lois*

$$E(\alpha) = E_0 \frac{(1 - \alpha)^q}{(1 + \alpha)^p}, \quad w(\alpha) = (p + q) \frac{\sigma_e^2}{2E_0} \alpha \quad (2.62)$$

où  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$  sont deux constantes matériau et  $\sigma_e$  représente la contrainte limite d'élasticité.

Ceux sont des lois strictement adoucissantes à écrouissage positif en déformation. Afin de réduire le nombre de cas de figures possibles, on considère dans le reste de cette section uniquement que des localisations qui naissent depuis la fin de la phase élastique et donc depuis un état d'endommagement sain. Les principales difficultés sont de garantir l'irréversibilité du processus localisation et le bilan d'énergie. On examine successivement ces deux points.

**Taille et irréversibilité de la localisation :** On calcule tout d'abord pour cette famille les tailles caractéristiques des supports de localisation au point de bifurcation et lorsque  $\sigma$  tend vers 0. Ces deux tailles, d'après la Propriété 2.7 dépendent de la valeur de l'endommagement homogène d'où a lieu la bifurcation. Dans le cas où les bifurcations ont lieu depuis le point de fin de phase élastique correspondant à une contrainte  $\sigma_e$ , ces quantités se lisent respectivement

$$D(\sigma_e) = \frac{E_0 \pi \ell \sqrt{2}}{\sigma_e \sqrt{(p+q)^2 + q - p}}, \quad D(0) = \frac{2E_0 \ell}{\sigma_e \sqrt{p+q}} \quad (2.63)$$

La condition (2.51) pour que la localisation d'endommagement croisse dans un voisinage du point de bifurcation se lit  $(q-p)^2 > (q+p)^2(q-p+2)$ . Cette inégalité est satisfaite par exemple pour  $q = 2$  et  $p = 4$ . En revanche elle n'est jamais satisfaite lorsque  $q \geq 1$  et  $1 \leq p \leq 2$ . Cette condition n'assure cependant l'irréversibilité de la localisation qu'autour du point de bifurcation. Pour s'assurer de l'irréversibilité sur tout le processus de localisation, on a vu qu'il faut vérifier que  $\sigma \mapsto D(\sigma)$  soit une fonction décroissante sur tout  $(0, \sigma_e)$ . Ceci ne peut que se vérifier semi-analytiquement en calculant par un logiciel de calcul formel comme Mathematica la quantité (2.49) sur l'intervalle  $(0, \sigma_e)$ . En restant sur le choix de paramètres  $q = 2$  et  $p = 4$ , on obtient

la Figure 2.1. On constate bien la décroissance de la fonction à mesure que croît la contrainte.

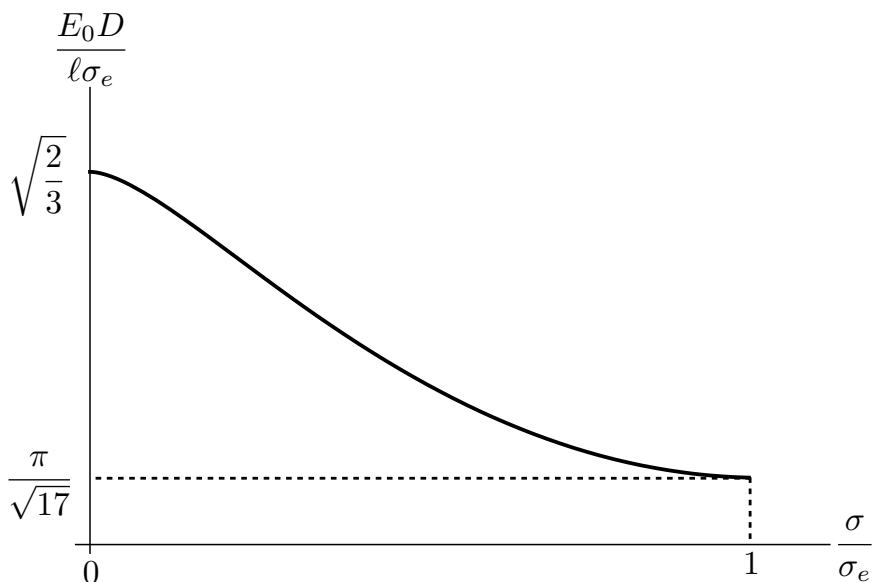


FIG. 2.1 – Fonction  $\sigma \mapsto D(\sigma)$  pour  $q = 2$  et  $p = 4$

On représente sur la Figure 2.2 la forme de la localisation pour différents champs de contrainte et on constate bien l'irréversibilité de la localisation. On insiste sur le fait qu'il faut vérifier la décroissance de  $D(\sigma)$  sur tout l'intervalle  $(0, \sigma_e)$  et non pas seulement vérifier la monotonie au voisinage du point de bifurcation – en espérant que celle-ci perdure au delà. En effet les variations de  $D(\sigma)$  sont très sensibles aux choix de la loi d'endommagement. Pour  $p = 4$  et  $q = 1$ , on obtient la Figure 2.3. La zone s'endommageant va pour cette loi croître au voisinage du point de bifurcation et satisfaire l'irréversibilité. Mais on voit bien qu'en deçà d'une certaine contrainte, la taille de la localisation se remet à décroître. Cet exemple montre donc l'importance de connaître l'allure de la courbe  $D(\sigma)$  sur tout son intervalle de définition.

**Réponses globales** On représente à présent les courbes globales pour certaines lois d'endommagement. Celles-ci se tracent directement à partir de la relation (2.56). Elles peuvent se calculer pour n'importe quel rapport d'échelle  $\ell/L$  une fois que l'on connaît l'allure de la fonction  $\varepsilon_1^d(\sigma)$ . On trace sur la Figure 2.4 cette fonction pour différents choix de coefficient  $p$  et  $q$ . On remarque sur ce graphique que la valeur limite atteinte lorsque la contrainte tend vers 0 est très variable selon le choix de l'exposant  $q$ . En faisant de la continuation sur la branche localisée, on peut donc casser la barre aussi bien pour un déplacement imposé fini, infinie voire nulle. Plus précisément

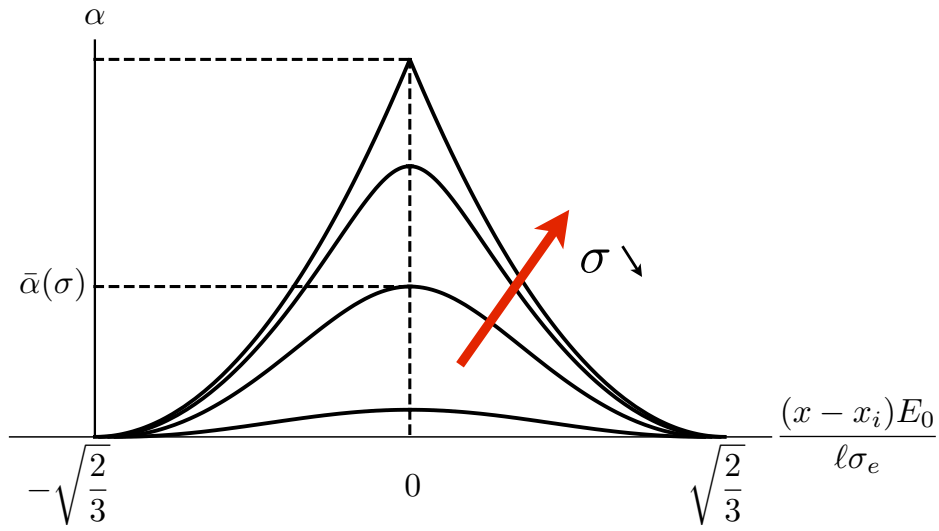


FIG. 2.2 – Profil de localisation pour  $q = 2$  et  $p = 4$  pour différents  $\sigma$

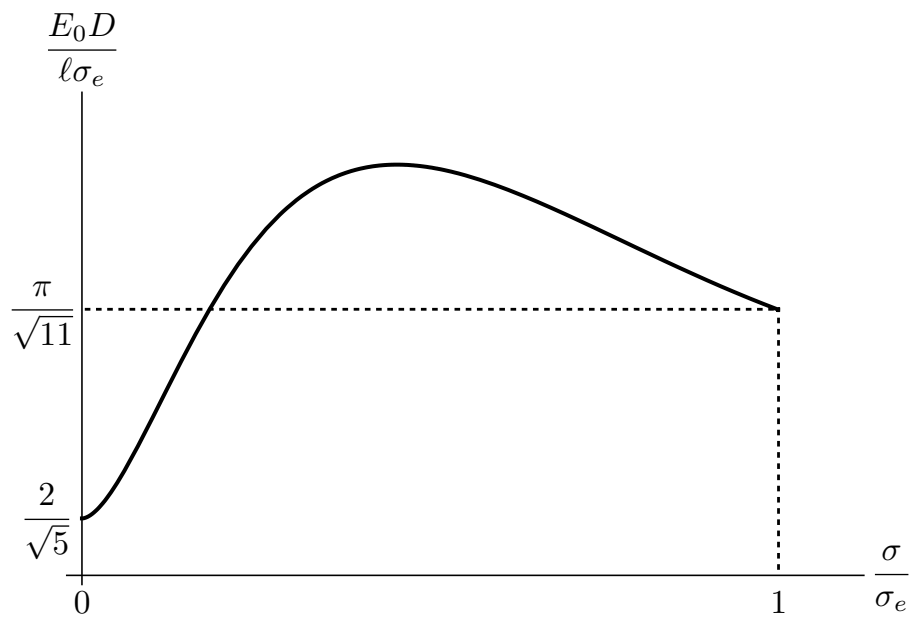
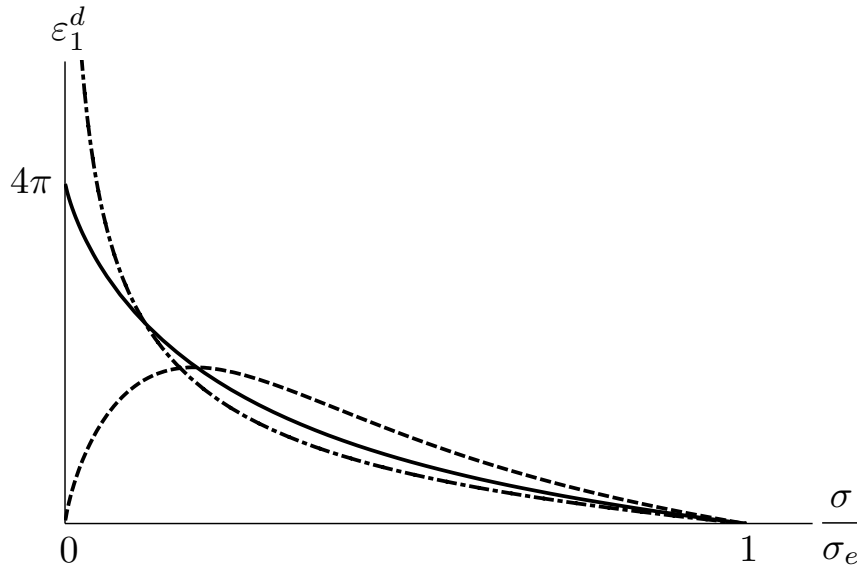


FIG. 2.3 – Fonction  $\sigma \mapsto D(\sigma)$  pour  $(p, q) = (4, 1)$



FIG. 2.4 – Fonction  $\sigma \mapsto \varepsilon_1^d(\sigma)$ 

un calcul asymptotique montre que pour un couple  $(p, q)$  on a

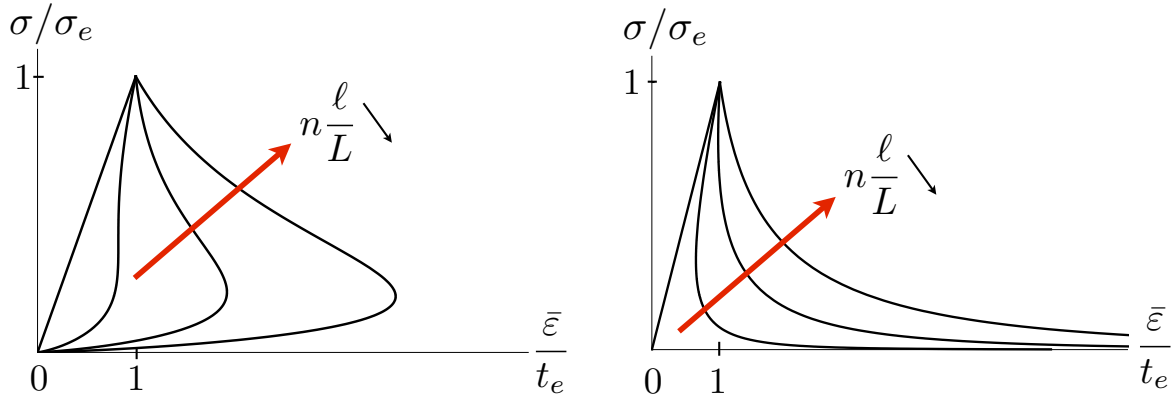
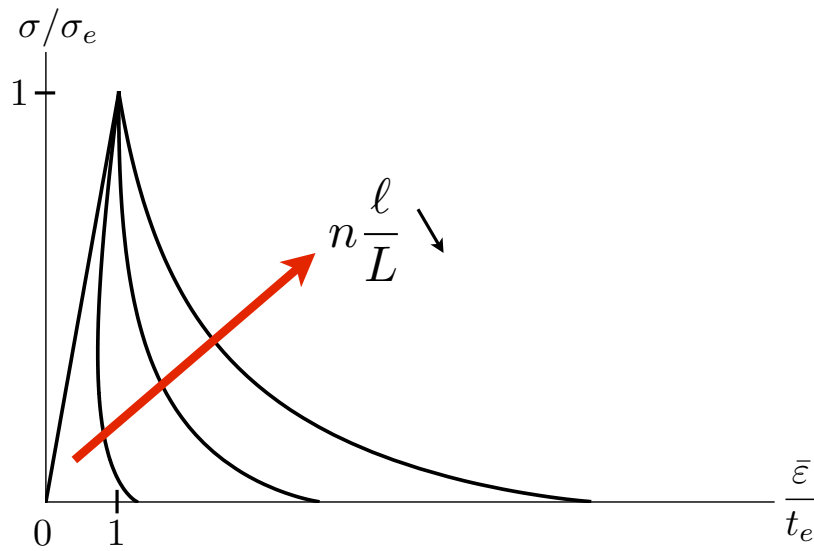
$$\lim_{\sigma \downarrow 0} \varepsilon_1^d(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 2 \\ \pi 2^{p/2} & \text{si } q = 2 \\ +\infty & \text{si } q > 2. \end{cases} \quad (2.64)$$

La grande variabilité de comportement dans l'allure de cette fonction selon les lois considérées vont avoir un impact décisif sur l'allure des courbes globales. Sur la Figure 2.5 et la Figure 2.6, on trace ces courbes pour différents ratio  $n\ell/L$ . On note que plus ce rapport est faible, plus on force la continuité temporelle au sortir de la phase élastique. Par ailleurs pour les lois ayant un exposant  $q < 2$ , un snap-back dans la réponse globale est irrémédiable puisque  $\lim_{\sigma \downarrow 0} \varepsilon_1^d(\sigma) = 0$ .

Il faut donc choisir avec une grande précaution ces lois d'endommagement si on ne veut pas se retrouver avec des comportements fantaisistes.

**Conservation de l'énergie et régularité temporelle :** Une difficulté supplémentaire, outre la vérification de l'irréversibilité, est de satisfaire le bilan d'énergie à chaque instant. Pour une évolution régulière en temps, ce bilan est vérifié automatiquement. La question est alors de savoir comment exploiter ce bilan si l'évolution n'est plus régulière, ce qui est fatalement le cas pour des barres trop grandes. Pour des raisons qui apparaîtront par la suite on fait alors l'hypothèse suivante

**Hypothèses 2.14.** Les lois d'endommagement  $\alpha \mapsto E(\alpha)$  et  $\alpha \mapsto w(\alpha)$  sont choisies de sorte

FIG. 2.5 – Diagramme  $\sigma - \bar{\epsilon}$  pour  $(p, q) = (4, 1)$  (Gauche) et  $(p, q) = (4, 3)$  (Droite)FIG. 2.6 – Diagramme  $\sigma - \bar{\epsilon}$  pour  $(p, q) = (4, 2)$

que le matériau soit strictement adoucissant et que  $\alpha \mapsto \varepsilon_1^d(\alpha)$  soit strictement convexe.

Le choix n'est donc pas ici de proposer une méthode générale pour satisfaire la conservation de l'énergie mais plutôt de montrer qualitativement pour une famille de lois les avantages et les difficultés dans l'application de ce principe. D'après la Figure 2.4, la loi  $(p, q) = (4, 2)$ , pour laquelle on garantit l'irréversibilité, vérifie bien l'Hypothèse 2.14.

**Propriété 2.15.** *Sous l'Hypothèse 2.14, il y a au plus une discontinuité temporelle dans le chemin d'évolution correspondant à une localisation. Celle-ci a lieu nécessairement à l'issue de la phase élastique pour des barres de longueur  $L > nL_{SB}$  (2.59).*

*Démonstration.* Dans le cas où  $\varepsilon_1^d$  est convexe, la condition nécessaire et suffisante d'absence totale de snap-back (2.61) jusqu'à la rupture de la barre se vérifie au point de bifurcation puisqu'on a

$$\inf_{\sigma \in (0, \sigma_e]} \left\{ -\frac{d\varepsilon_1^d}{d\sigma}(\sigma) \right\} = -\frac{d\varepsilon_1^d}{d\sigma}(\sigma_e).$$

Ainsi, il suffit de vérifier le critère de continuité temporelle au point de bifurcation donné par (2.59). La présence d'au plus un snap-back est due à la stricte convexité de  $\varepsilon_1^d$  qui garantit la stricte croissance de  $d\varepsilon_1^d/d\sigma$ .  $\square$

Pour la loi  $(p, q) = (4, 2)$  assurant l'irréversibilité et la convexité de  $\varepsilon_1^d$ , la condition d'absence de snap-back est donc d'avoir des barres de longueur telle que

$$L \leq n \frac{72\pi}{17\sqrt{17}} \ell \frac{E_0}{\sigma_e}. \quad (2.65)$$

Sous cette condition, le bilan d'énergie est alors satisfait. Plaçons nous maintenant dans le cas de barres de longueur plus grandes. L'idée pour satisfaire le bilan d'énergie est dans l'esprit identique à la construction de la ligne de Maxwell lorsqu'on suit le minimum global. Par une construction géométrique sur le diagramme contrainte-déformation moyenne, on garantit la conservation de l'énergie. L'idée est que dans la courbe contrainte-déformation moyenne d'une succession *continue* d'états (peu importe le type de chargement), l'énergie potentielle d'un état se trouvant en n'importe quel point du chemin sera donné par l'aire sous cette courbe. On utilise alors cette propriété pour construire un chemin de localisation respectant la conservation de l'énergie.

Commençons par faire la liste des différentes énergies en jeu. À l'issue de la phase élastique, l'énergie totale du système est donnée par l'aire hachurée sous la courbe de la Figure 2.7. Un calcul immédiat montre que cette énergie vaut  $\frac{1}{2} \frac{\sigma_e^2}{E_0} L$ . C'est donc cette quantité que l'on voudrait conserver à travers la discontinuité temporelle des champs. Une idée intuitive dans le cas d'un snap-back au point de bifurcation serait de sauter comme le montre la Figure 2.8. C'est précisément le type de chemin que l'on peut voir numériquement lorsqu'aucune précaution n'est

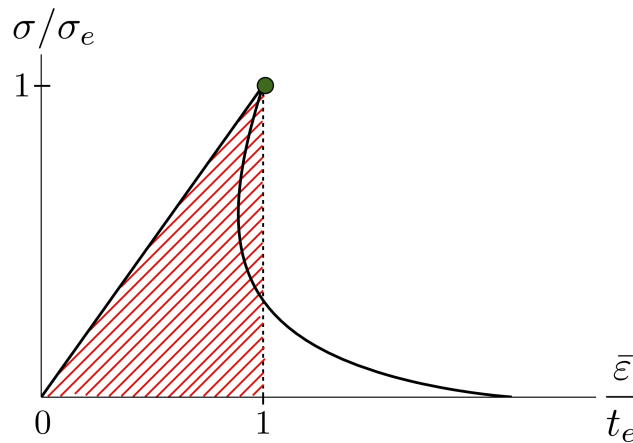


FIG. 2.7 – Énergie totale du système à l'issue de la phase élastique

prise à déplacement imposé. Ce faisant, on ne conserve pas l'énergie puisque l'énergie de l'état sur lequel on saute est inférieure strictement à celle qu'on avait à l'issue de la phase élastique (voir Figure 2.8.). D'ailleurs on remarque que plus le snap-back est sévère, plus l'on perd de l'énergie en choisissant ce type de bifurcation. Il faut en fait procéder autrement. L'idée est

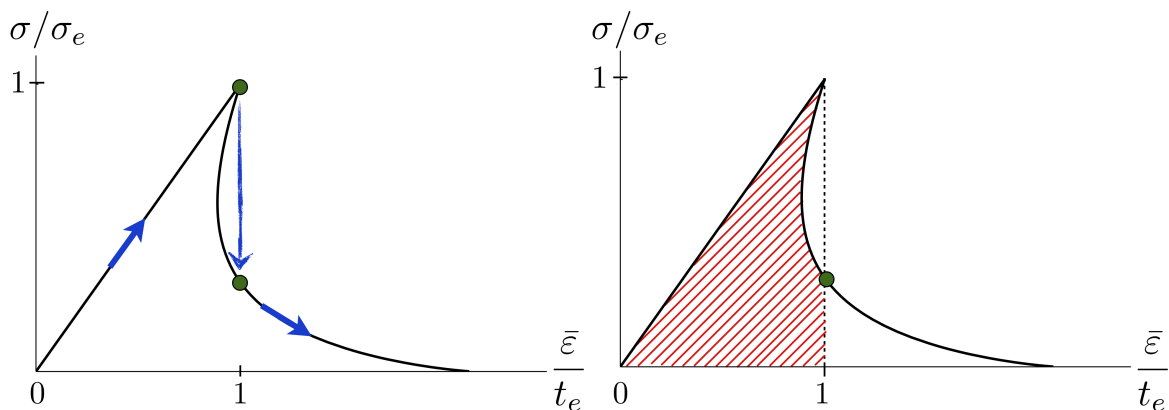


FIG. 2.8 – Chemin d'évolution ne respectant pas la conservation de l'énergie

présentée sur la Figure 2.9 : supposons par l'esprit que l'on décharge élastiquement un état en phase d'endommagement dont la déformation moyenne soit supérieure à  $t_e$  jusqu'à arriver à un état (en phase élastique) ayant une déformation moyenne égale à  $t_e$ . Puisqu'on a la liberté sur le choix de l'état depuis lequel on réalise la décharge élastique, on fixe celle-ci en prenant cet état de sorte à égaliser les deux aires hachurées de part et d'autre de la droite  $\bar{\varepsilon} = t_e$  (voir Figure 2.9). Le point d'intersection entre la droite de décharge et la droite  $\bar{\varepsilon} = t_e$  est alors précisément l'état sur lequel on doit sauter pour assurer la conservation de l'énergie. On obtient alors le scénario suivant d'évolution brutale

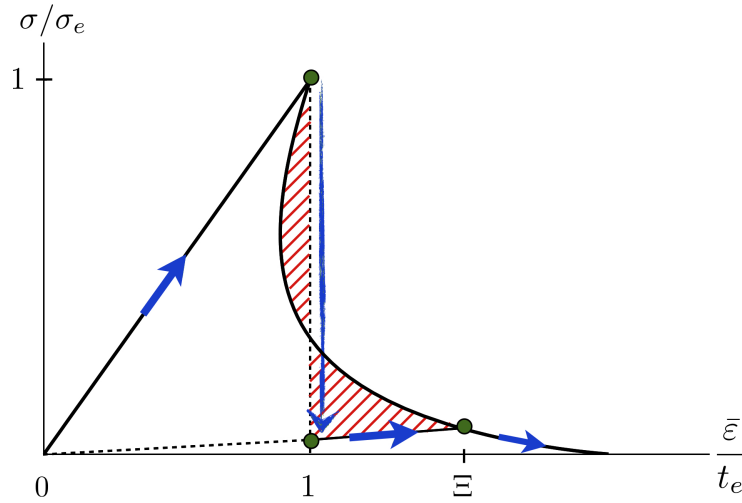


FIG. 2.9 – Construction de la pseudo-ligne de Maxwell par égalisation des aires

1. La barre répond élastiquement jusqu'à la fin de la phase élastique en  $t = t_e$ .
2. La structure bifurque brutalement alors vers un nouvel état de même énergie. La contrainte chute dans la barre. Ce nouvel état consiste en une localisation brutale de l'endommagement sur un support de taille finie. Cet état bifurqué se trouve en phase élastique. En poursuivant le chargement, la barre continue de répondre élastiquement jusqu'à atteindre le temps de chargement  $t = \Xi t_e$ .
3. Pour  $t \geq \Xi t_e$ , la structure entre en phase d'endommagement et la localisation se met à croître. La contrainte décroît jusqu'à devenir nulle. On a alors rompu la barre.

On remarque par ailleurs qu'avec la construction proposée, en sautant à partir du point de bifurcation vers un état localisé en phase élastique, on retrouve alors un état stable (puisque les états en phase élastique sont stables). Au final, on aboutit à la

**Propriété 2.16.** *Sous l'Hypothèses 2.14, l'énergie du système se conserve en cas de discontinuité temporelle à l'issue de la phase élastique si et seulement si la longueur de la barre est telle que*

$$L \leq n \frac{4\sqrt{2E_0}}{\sigma_e t_e} \int_0^1 \sqrt{w(\beta)} d\beta \ell. \quad (2.66)$$

*Démonstration.* Une condition nécessaire et suffisante pour conserver l'énergie est que l'énergie dissipée pour rompre la barre soit supérieure ou égale à l'énergie emmagasinée à l'issue de la phase élastique. L'énergie dissipée pour localiser l'endommagement jusqu'à rendre la contrainte nulle est pour  $n$  localisations  $n\ell \int_0^1 2\sqrt{2E_0 w(\beta)} d\beta$  (voir Section 3.1.1). Puisque l'énergie élastique contenue dans la structure à l'issue de la phase élastique vaut  $\frac{1}{2} \frac{\sigma_e^2}{E_0} L$ , on en déduit la relation (2.66).  $\square$

Pour la loi  $(p, q) = (4, 2)$  assurant l'irréversibilité et la convexité de  $\varepsilon_1^d$ , la condition pour satisfaire à tout moment le bilan d'énergie est donc d'avoir des barres de longueur telle que

$$L \leq n \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}t_e} \ell.$$

On voit donc que seules des barres qui ne sont pas trop longues vont pouvoir satisfaire à la conservation de l'énergie. On a donc une borne supérieure sur le domaine de validité du problème d'évolution quasi-statique. Pour des barres plus grandes, il faut revoir en amont le problème. Un choix pourrait être d'abandonner les minimas locaux et de raisonner en terme de minimum global. Néanmoins cela conduirait d'une part à "sauter" sur la branche localisée avant la fin de la phase élastique et d'autre part de choisir nécessairement la demi-localisation qui coûte deux fois moins d'énergie dissipée. On peut donc légitimement se poser des questions sur la pertinence de ce choix. Une autre solution serait d'introduire une viscosité, qui à défaut d'être d'origine physique nous permettrait de régulariser à nouveau le modèle. Enfin une autre dernière solution possible et qui serait peut être la plus viable serait de résoudre le problème en dynamique. On n'aurait alors plus à se poser la question de la conservation de l'énergie, celle-ci étant implicitement assurée par la nécessaire régularité en temps des champs d'évolution. Cependant il est compliqué en dynamique de trouver un équivalent au principe variationnel consistant à minimiser (localement ou globalement) l'énergie potentielle. La question est donc ouverte sur ce point.

## 2.4 Stabilité des états localisés

Les modes localisés dans les matériaux adoucissants étant plus la règle que l'exception, l'étude de leur stabilité est un passage obligé. Cependant celle-ci présente un certain nombre de difficultés supplémentaires en comparaison avec les modes diffus. À défaut d'être exhaustif, on va essayer d'apporter des éléments de réponse qualitatifs.

### 2.4.1 Des propriétés préliminaires

La stabilité étant une notion d'état pour un chargement fixé, on imagine à nouveau fixer le temps et on enlève des grandeurs l'indice  $y$  faisant référence. On considère toujours une barre de longueur  $L$  suffisamment grande, soumise à un déplacement imposé  $U$ . On suppose qu'il y a  $n$  localisations entières ou une demi-localisation (dans ce cas  $n = 1/2$ ) en phase d'endommagement (le critère est donc atteint sur l'ensemble des localisations) réparties qu'on appelle  $\mathcal{S}_i$  avec  $\frac{1}{2} \leq i \leq n$  le support de localisation. D'après ce qui a été montré précédemment, les profils de localisation sont identiques pour un état de contrainte donnée. En dehors de ces zones le matériau est endommagé de façon homogène à la valeur  $\alpha_0$  : le critère  $y$  est une inégalité stricte et le matériau se décharge donc élastiquement.

D'après le Chapitre 1, les conditions du second ordre de l'item de stabilité (ST) portent sur des fonctions d'endommagement admissibles à support inclus dans les zones où le critère est atteint. Cet espace fonctionnel s'écrit  $\mathcal{D}^a = \{\beta \in H^1(0, L) \mid \beta \geq 0, \text{Supp}(\beta) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}_i\}$ . Contrairement aux états homogènes, on ne possède pas de formule explicite donnant  $\min_{\beta \in \mathcal{D}^a} \mathcal{R}^*(\beta)$  où le quotient de Rayleigh est donné par (2.21). La difficulté du calcul trouve plusieurs raisons : tout d'abord le profil non homogène des états localisés fait que les conditions d'optimalité appliquées au quotient de Rayleigh conduisent à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants. En outre ces coefficients non constants font intervenir le profil des localisations d'endommagement qui est donné de façon implicite via la résolution de l'intégrale première (2.53). Néanmoins, sans pour autant calculer explicitement le minimum, il est tout de même possible d'extraire quelques résultats généraux de stabilité propres aux états localisés. On peut tout d'abord réduire le champ d'exploration des fonctions tests grâce à la

**Propriété 2.17.** *L'état à  $n$  localisations est stable pour un déplacement imposé  $U$  si (resp. seulement si)*

$$\min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta) > (\text{resp. } \geq) 1$$

où  $\mathcal{D}_1^a = \{\beta \in H^1(0, L) \mid \beta \geq 0, \text{Supp}(\beta) \subset \mathcal{S}_1\}$  est le support d'une unique localisation choisie parmi les  $n$  existantes.

*Démonstration.* Voir Annexe B □

Cette propriété nous permet donc de tester le quotient de Rayleigh uniquement qu'avec des champs d'endommagement à support inclus dans une seule localisation. Cependant cela ne signifie pas que deux localisations (voir plus) sont instables. La propriété nous dit juste que la meilleure façon de diminuer l'énergie potentielle d'un ensemble d'états localisés est d'endommager un peu plus une des localisations tout en laissant se décharger élastiquement les autres. Ce résultat nous permet d'aboutir à la

**Propriété 2.18 (Influence du nombre de localisations).** *Soit une barre ayant  $n$  localisations entières. À contrainte fixée, le minimum du quotient de Rayleigh pour cet état est une fonction décroissante du nombre de localisations. En particulier si un état à  $n$  localisations est instable, tout état ayant un nombre de localisations supérieur le sera aussi.*

*Démonstration.* Voir Annexe B □

On en déduit que la multiplication de localisations ne peut que dégrader les résultats de stabilité. La dernière propriété que l'on présente porte sur la stabilité d'une branche ayant un snap-back dans la diagramme global contrainte-déformation moyenne. En effet on a la

**Propriété 2.19 (Instabilité du snap-back).** *Soit un état en phase d'endommagement avec  $n$  localisations. Si cet état est en phase de snap-back alors il est instable.*

*Démonstration.* Voir Annexe B □

Ce résultat est identique à celui montré dans [13] pour les modèles cohésifs. Les conditions d'optimalité du second ordre permettent donc d'affiner considérablement la selection de solutions viables.

### 2.4.2 Stabilité des localisations au voisinage du point de bifurcation

Puisqu'il est compliqué d'étudier de manière exhaustive la stabilité des états localisés, on s'intéresse à la stabilité de ces états localisés au voisinage du point de bifurcation. On va voir que l'on peut y observer suffisamment de cas de figures possibles pour appeler à la plus grande prudence dans l'établissement de propriétés générales.

Au voisinage de la bifurcation, on linéarise les états localisés par rapport à la contrainte qui est le paramètre permettant de suivre continûment la branche localisée. Soit donc  $U_0$  le déplacement au point de bifurcation et  $\alpha_0$  et  $\sigma_0$ , respectivement l'endommagement et l'état de contrainte associé. Le quotient de Rayleigh pour les états respectant les conditions de stabilité du premier ordre peut se linéariser pour un champ test donné par rapport à  $\sigma$  et on trouve qu'à l'ordre 0, celui-ci s'écrit

$$\mathcal{R}_0(\beta) = \frac{E_0 \ell^2 \int_{\mathcal{D}_0} \beta'^2 dx + \frac{\sigma_0^3 S'(\alpha_0)^2}{U_0} \left( \int_{\mathcal{D}_0} \beta dx \right)^2}{\left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0^2 - w''(\alpha_0) \right) \int_{\mathcal{D}_0} \beta^2 dx}, \quad (2.67)$$

où le support des  $n$  localisations se linéarise lui aussi et vaut

$$\mathcal{D}_0 = \begin{cases} (0, L) \text{ pour un état homogène,} \\ (0, D(\sigma_0)) \text{ pour une demi-localisation,} \\ \bigcup_{i=1}^n (x_i - D(\sigma_0), x_i + D(\sigma_0)) \text{ pour } n \text{ localisations entières.} \end{cases} \quad (2.68)$$

La différence entre les différents modes d'endommagement tient uniquement au support des fonctions tests, celles-ci devant être nulles là où le critère n'est plus atteint. En minimisant le quotient de Rayleigh sur les espaces fonctionnels associés à chacun de ces supports, on aboutit alors à la

**Propriété 2.20.** *Au voisinage d'un point de bifurcation depuis l'état homogène à la contrainte  $\sigma_0$ , on observe suivant la nature de la localisation que*

– *l'état homogène et la demi-localisation sont stables si (resp. seulement si)*

$$L < (\text{resp. } \leq) \frac{1}{2} L_{SB} \quad (2.69)$$



–  $n$  localisations entières sont stables si (resp. seulement si)

$$L < (\text{resp. } \leq) L_{SB}. \quad (2.70)$$

*Démonstration.* Voir Annexe B □

Or on sait d'après le Corollaire (2.8) que  $n$  localisations sont susceptibles d'apparaître si  $2nD(\sigma_0) < L$ . On en déduit que le nombre maximal de localisations  $n^*$  pouvant être stables au voisinage du point de bifurcation est donc donné par la formule

$$n^* = \left\lceil \frac{L_{SB}}{2D(\sigma_0)} \right\rceil \quad (2.71)$$

où  $\lceil \cdot \rceil$  désigne la fonction partie entière.

Examinons la valeur de cette quantité  $n^*$  en détail. On sait déjà que  $L_{SB} \geq 2D(\sigma_0)$  du fait que  $\min_{\beta \in \mathcal{D}_i^a / \{0\}} \mathcal{R}_i^*(\beta) \geq \min_{\beta \in H^1(0,L) / \{0\}} \mathcal{R}_i^*(\beta)$ . On a donc nécessairement  $n^* \geq 1$ . Il existe donc toujours des longueurs de barre permettant la stabilité d'une localisation entière au voisinage de la bifurcation. En revanche il ne semble pas claire que l'on puisse stabiliser plusieurs localisations. Dans le cadre de la mécanique de la rupture avec un modèle cohésif, des études similaires de stabilité ont été menées. Pour des énergies de surface de type Barenblatt concave, il a été justement montré rigoureusement dans [13] que deux fissures ou plus dans une barre en traction à déplacement imposé sont nécessairement instables. Dans le cadre de l'endommagement, il est difficile de trouver une borne supérieure à  $n^*$  valable pour n'importe quelle loi. On regardera donc dans la section qui suit sur un exemple les valeurs effectives que peut prendre cet entier  $n^*$ .

Par ailleurs, on note que bien que la perte de stabilité au point de bifurcation de la solution homogène est concomitante d'une perte de stabilité de la demi-localisation, une localisation entière continue à rester stable au voisinage du point de bifurcation si on prend le soin de choisir des longueurs de barre entre  $\frac{1}{2}L_{SB}$  et  $L_{SB}$ . La conséquence est que la perte de stabilité d'une branche (en l'occurrence la branche homogène) ne s'accompagne pas toujours d'une évolution brutale puisqu'on peut choisir de suivre *continûment* la branche à une localisation pour des longueurs de barre entre  $1/2L_{SB}$  et  $L_{SB}$ . En revanche si l'on choisit la branche à une demi-localisation, l'évolution se fera brutalement.

### 2.4.3 Exemples

On reprend l'exemple de la famille des lois considérées dans l'Exemple 1 et on examine la stabilité des localisations au voisinage du point de bifurcation. Un calcul direct de  $L_{SB}$  et de  $D(\sigma_e)$  montre que le nombre critique de localisations pour lequel il existe des tailles de barre

permettant leur stabilité autour point de bifurcation vaut

$$n^* = \left\lceil \frac{2(p+q)^2}{(p+q)^2 + q - p} \right\rceil = \left\lceil 2 + \frac{2(p-q)}{(p+q)^2 + q - p} \right\rceil \quad (2.72)$$

On voit donc que si  $p > q$ , on aura  $n^* \geq 2$  : deux localisations seront donc stables au point de bifurcation pour des longueurs de barre telles que  $2D(\sigma_e) < L < L_{SB}$ . Ce résultat est donc contraire à ce qu'on observe avec les modèles cohésifs pour une énergie de surface concave. C'est en particulier le cas pour la loi  $(p, q) = (4, 2)$  qui respecte la condition d'irréversibilité. Contrairement aux modèles cohésifs, il est donc possible avec le modèle d'endommagement à gradient de stabiliser deux localisations en choisissant correctement la loi.

## Conclusions du Chapitre

On a pu constaté à travers cet exemple de barre sous traction simple toute la complexité d'une modélisation rigoureuse des matériaux adoucissants. Le modèle d'endommagement à gradient accompagné de son cadre d'évolution énergétique semble être un bon candidat en vue de modéliser les dégradations dans ce type de matériau dans un cadre quasi-statique. On a montré que celui-ci était capable de gommer une partie des défauts rhéologiques des modèles locaux concernant le phénomène de localisation. En effet, dans le cas du modèle régularisé, les localisations d'endommagement ont toujours une taille de support finie et proportionnelle à la longueur interne du modèle. Ce faisant, l'énergie dissipée pour créer une localisation ne sera jamais nulle et les résultats des simulations numériques ne seront pas *a priori* dépendantes du maillage. Cependant, cette étude pointe surtout la trop grande richesse des comportements endommagés due au caractère mal-posé intrinsèque aux matériaux adoucissants. En variant le choix des lois d'endommagement, la taille de la barre, voire le nombre de localisations, on a montré qu'il était possible d'obtenir une multitude de diagrammes globaux force-déplacement (ou de façon équivalente contrainte-déformation moyenne) se différenciant par la présence de snap-back plus ou moins forts ou par la possibilité de rompre la barre pour un déplacement fini ou infini. D'autre part les effets d'échelle jouent un rôle prépondérant dans l'apparition de localisation. En effet, la barre doit être suffisamment longue pour faire naître une (voir plusieurs) localisation. Par ailleurs, pour des barres trop longues, un snap-back dans le chemin de localisation au point de bifurcation est irrémédiable. L'apparition de localisation(s) se fait alors brutalement.

Toute cette latitude de comportements fait que d'une part le choix des lois d'endommagement est une étape primordiale à ne pas négliger si l'on ne veut pas se retrouver avec des comportements fantaisistes et que d'autre part l'utilisation des 3 principes du problème d'évolution que sont l'irréversibilité, le critère de stabilité et la conservation d'énergie est *obligatoire* si l'on veut affiner la sélection des solutions. En effet la seule application de l'équilibre mécanique et du

critère d'endommagement conduisent à un ensemble de solutions bien trop grand pour pouvoir être gardé en l'état. En demandant aux solutions d'être en plus des minima locaux unilatéraux de l'énergie potentielle (ce qu'exige le critère de stabilité), on est en mesure d'éliminer les états en phase de snap-back ou bien les branches ayant un nombre excessif de localisations. D'un autre côté la recherche de solutions régulières en temps tel que l'exige l'évolution de l'endommagement écrite sous la forme d'un système de Kuhn-Tucker faisant intervenir la vitesse d'endommagement " $\dot{\alpha}_t$ " restreint considérablement la plage d'utilisation du modèle. En effet on a montré que pour des barres assez longues l'apparition d'une localisation sera nécessairement brutale : l'utilisation du principe de conservation d'énergie permet justement de repousser les limites du cadre d'application du modèle puisque celui-ci s'accommode des évolutions non régulières. Néanmoins pour des barres de tailles trop longues, le respect du bilan d'énergie n'est plus possible et le recours à la dynamique, voire une régularisation par l'introduction d'une viscosité, semble être inévitable.

# Méthodes pour l'identification des lois d'endommagement

---

## Objectifs du Chapitre

L'identification des paramètres du modèle d'endommagement est une étape fondamentale dans l'optique d'une utilisation industrielle. Étant donnée la grande dispersion dont peuvent faire preuve les données expérimentales sur un matériau comme le béton et le peu de courbes expérimentales fiables, on doit veiller à avoir un modèle ne présentant pas un nombre excessif de paramètres sous peine de rendre impossible l'identification. Le modèle d'endommagement à gradient qu'on a construit vise à modéliser des matériaux isotropes pouvant présenter un comportement unilatéral. Il dépend de 3 paramètres si l'on a effectué le bon changement de variable d'endommagement : une longueur interne indépendante de l'endommagement ainsi que deux fonctions de l'endommagement que sont la loi de rigidité et la loi de dissipation.

On exploite dans ce chapitre les résultats théoriques établis dans les Chapitre 1 et Chapitre 2 en essayant de les relier à des données qu'on estime obtenables à partir d'essais expérimentaux classiques *e.g.* éprouvette sous traction simple, voir [47]. Les applications numériques se font sur le béton qui est le matériau de construction adoucissant par excellence.

Le premier objectif est d'estimer la valeur de la longueur interne. On s'appuie pour cela sur une analogie énergétique entre les fissures en mécanique de la rupture et les localisations en mécanique de l'endommagement.

Dans un second temps, on tente d'identifier les lois de rigidité et de dissipation. On exploite à cette fin les courbes globales de réponse homogène qui permettent de remonter, par homogénéité des champs, directement à des informations locales. Cependant, ces états diffus n'étant plus stables pour des tailles d'éprouvette élevées (voir Chapitre 2), on étudie l'essai PIED [3] qui est une version modifiée de l'essai de traction simple. Il consiste à fixer de part et d'autre de l'éprouvette de béton des barrettes d'aluminium. Le but est de limiter les localisations de déformation et de privilégier les états diffus. On tente de comprendre les mécanismes sous-jacents à cet essai à travers des expériences numériques et une analyse asymptotique dans le cas de barres de faibles épaisseurs.

### Choix de normalisation

Dans le Chapitre 2, le terme en gradient d'endommagement dans l'énergie avait été normalisé selon

$$\frac{1}{2}\hat{\gamma}\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha\equiv\frac{1}{2}E_0\ell^2\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha. \quad (3.1)$$

Ce choix a l'avantage d'être "universel" et valable quelle que soit la loi. En particulier, les résultats sur la stabilité des états homogènes dans le Chapitre 2 sont vrais même pour des lois avec une variable d'endommagement non bornée *e.g.* lois exponentielle en  $e^{-\alpha}$ . On se restreint ici aux lois ayant une variable d'endommagement bornée par 1. Pour des raisons qui seront plus claires dans la suite, on choisit alors de renormaliser le terme en gradient d'endommagement de la façon suivante

$$\frac{1}{2}\hat{\gamma}\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha\equiv\frac{1}{2}\hat{w}\ell^2\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha \quad \text{avec} \quad \hat{w}=w(1). \quad (3.2)$$

On fait ainsi apparaître la *specific fracture energy*  $\hat{w}$  qui est la densité d'énergie pour endommager jusqu'à la rupture un volume élémentaire de matériau, voir [15]. Ce faisant, l'énergie totale du système se lit à présent

$$\mathcal{P}_t(u, \alpha) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}\hat{w}\ell^2\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha + \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u) + w(\alpha) \right) dx. \quad (3.3)$$

On raisonne dans tout le reste du Chapitre sur cette nouvelle forme normalisée de l'énergie.

## 3.1 Quel choix pour la longueur interne ?

### 3.1.1 Le lien énergétique avec la rupture

Un des paramètres des modèles à gradient d'endommagement qui fait débat du fait de sa délicate justification est la longueur interne. Celle-ci étant introduite de façon *ad-hoc* sans lien direct avec la microstructure du matériau, on choisit donc de procéder à son identification en continuant à raisonner à l'échelle de la structure. En effet, on pourrait être tenté de choisir une des multiples "petites" longueurs existant à l'échelle de la microstructure (tailles caractéristiques des vides, des microfissures) comme la longueur de régularisation. Néanmoins, aucune preuve claire et rigoureuse à partir d'une approche micromécanique n'a pu encore être apportée pour justifier la présence d'une longueur interne ainsi que des termes en gradient d'endommagement dans la forme du travail de déformation.

L'idée est donc d'exploiter plutôt le cadre énergétique et d'interpréter les localisations d'endommagement comme l'apparition de fissures (au sens de la mécanique de la rupture).

L'étude dans le Chapitre 2 de la barre en traction simple offre le cadre idéal pour mettre en place cette équivalence énergétique. On calcule en premier lieu l'énergie dissipée pour créer une localisation conduisant à contrainte nulle (et ayant donc rompu la barre en 2). Dans un second

temps on comparera cette énergie à la densité d'énergie de surface utilisée classiquement en rupture pour créer une fissure. On veille ici à considérer une localisation entière et non pas une demi-localisation. En effet on évalue mal l'énergie dissipée dans le cas de cette dernière puisqu'elle coûte deux fois moins en énergie du fait de son support de taille moitié moindre. On a vu qu'un état localisé  $(u, \alpha)$  pouvait se paramétrer continûment à partir de la contrainte dans la barre  $\sigma$ . L'énergie totale de cet état localisé est donc une fonction d'un paramètre (la contrainte)

$$\mathcal{P}_\sigma : \sigma \mapsto \int_0^L \frac{1}{2} \hat{w} \hat{\ell}^2 \alpha'^2 + \frac{1}{2} S(\alpha) \sigma^2 + w(\alpha) dx. \quad (3.4)$$

On suppose par ailleurs que la localisation naît depuis un état d'endommagement homogène à la valeur  $\alpha_0$  qui correspond à la valeur critique correspondant à la fin de la phase durcissante. En effet il n'est ni anecdotique ni superflu de faire le calcul à partir d'un endommagement diffus  $\alpha_0$  plutôt que depuis l'état sain. Pour des matériaux strictement adoucissants, il est vrai que les effets d'échelle font que pour des grandes barres, on localisera quoi qu'il arrive à la fin de la phase élastique et on ne pourra observer cet état d'endommagement diffus. Ceci n'est néanmoins plus vrai dans le cas des matériaux ayant au préalable une phase durcissante comme il est observé sur certaines expériences sur du béton (voir [53]). On reprend alors les équations (2.45)-(2.46) établies au Chapitre 2 donnant le profil d'une localisation *entière* pour un état de contrainte  $\sigma$

$$\mathcal{P}_\sigma = \left( \frac{1}{2} S(\alpha_0) \sigma^2 + w(\alpha_0) \right) L + 2 \int_S (w(\alpha(x)) - w(\alpha_0)) dx. \quad (3.5)$$

En utilisant la symétrie de la localisation par rapport à son centre puis en faisant le changement de variable  $\alpha := \alpha(x)$  (qui est bien monotone sur la moitié de la localisation), on obtient

$$\mathcal{P}_\sigma = \left( \frac{1}{2} S(\alpha_0) \sigma^2 + w(\alpha_0) \right) L + 4\hat{\ell} \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha}(\sigma)} \frac{w(\beta) - w(\alpha_0)}{\sqrt{H(\sigma, \beta)}} d\beta. \quad (3.6)$$

En faisant tendre  $\sigma$  vers 0, on obtient alors l'énergie dissipée pour rompre une barre initialement saine en deux parties endommagées à la valeur  $\alpha_0$ ,

$$\mathcal{P}_0 = w(\alpha_0)L + 2\sqrt{2}\hat{\ell} \int_{\alpha_0}^1 \sqrt{\hat{w}(w(\beta) - w(\alpha_0))} d\beta. \quad (3.7)$$

On fait ici l'hypothèse que l'énergie dissipée  $w(\alpha_0)L$  pour endommager de façon diffuse la structure à la valeur  $\alpha_0$  n'entre pas en compte dans le processus de rupture de la barre et donc dans le calcul de la ténacité. On obtient alors que

$$G_c = 2\sqrt{2}\hat{\ell} \int_{\alpha_0}^1 \sqrt{\hat{w}(w(\beta) - w(\alpha_0))} d\beta, \quad (3.8)$$

d'où on déduit la valeur de la longueur interne en fonctions des paramètres matériaux

$$\hat{\ell} = \frac{G_c}{2\sqrt{2} \int_{\alpha_0}^1 \sqrt{\hat{w}(w(\beta) - w(\alpha_0))} d\beta} \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Applications

Pour illustrer la pertinence de cette équivalence, on considère ici l'ensemble des lois d'endommagement strictement adoucissantes ayant pour point commun une densité d'énergie de dissipation linéaire en l'endommagement et donc pouvant s'écrire

$$w(\alpha) = \hat{w}\alpha, \quad (3.10)$$

où  $\hat{w}$  peut être défini comme la *specific fracture energy*, c'est à dire la densité d'énergie pour endommager jusqu'à rupture, voir [15]. Les lois étant supposées strictement adoucissantes, des localisations surviennent nécessairement à la fin de la phase élastique pour des barres suffisamment longues, voir Propriété 2.3. Un calcul direct de la ténacité ainsi que de la taille finale de la localisation donne

$$G_c = \frac{4\sqrt{2}}{3} \hat{w}\hat{\ell}, \quad D(0) = \sqrt{2}\hat{\ell}, \quad \sigma_e^2 = \frac{2\hat{w}}{S'(0)}. \quad (3.11)$$

On trouve bien le lien de proportionnalité utilisé dans la littérature. Cette relation est valable pour n'importe quelle loi ayant une loi de dissipation linéaire en  $\alpha$ .

On calcule à présent ce jeu de paramètres pour le béton à partir des données expérimentales issues de [3, 15] (ces valeurs sont approximatives et peuvent présenter une dispersion assez importante dans le cas de la densité d'énergie de surface),

$$E_0 = 29 \text{ GPa}, \quad \sigma_e = 4.5 \text{ Mpa}, \quad G_c = 70 \text{ N/m}. \quad (3.12)$$

À partir de ces valeurs, on calcule les deux longueurs du modèle, à savoir  $\hat{\ell}$  et  $D(0)$ ,

$$2D(0) = 106 \text{ mm}, \quad \hat{\ell} = 38 \text{ mm}, \quad \hat{w} = 698 \text{ N/m}^3. \quad (3.13)$$

On trouve donc une longueur interne qui est de l'ordre de la taille  $d_a$  d'un agrégat de béton. En effet pour un béton classique la taille d'un aggrégat varie entre 10 mm et 40 mm. Cette équivalence énergétique donne donc des résultats qui sont en accord avec la taille caractéristique de la microstructure. Cette épaisseur de localisation qui est de l'ordre de la dizaine de centimètres ne se voit pas à l'œil nu sur l'éprouvette : ce que l'on constate visuellement à l'issu de l'essai est la zone rompue qui correspond i) en 3D à une surface, ii) en 2D à une ligne, iii) en 1D à un point, où l'endommagement a atteint sa valeur ultime. Pour pouvoir déterminer cette épaisseur de localisation, il faut procéder à des mesures expérimentales avancées (ultrasons, mesure des

champs par corrélation d'images) autour de la zone entourant la fissure. Là encore, du fait de la microstructure compliquée et aléatoire du béton, ces mesures locales doivent être prises avec une grande précaution.

On continue d'examiner les méthodes d'identification que nous offre l'analyse théorique du modèle en examinant dans la Section les méthodes permettant de remonter aux lois de rigidité et de dissipation.

### 3.2 Utilisation du diagramme de stabilité pour l'identification

Outre la longueur interne, les autres paramètres du modèle à déterminer sont la loi de rigidité  $\alpha \mapsto A(\alpha)$  et la loi de dissipation  $\alpha \mapsto w(\alpha)$ . Ces fonctions sont des propriétés locales du matériau puisqu'elles ne font intervenir que la valeur de l'endommagement au point matériel. Puisqu'il n'est pas possible d'envisager une expérience au niveau d'un point matériel, l'idée est de délocaliser au maximum l'information au niveau d'une zone d'intérêt. À la limite où l'on arrive à rendre ces états diffus sur l'ensemble de la structure on a obtenu précisément des états homogènes.

Dans le cas unidimensionnel, la loi de rigidité se réduit à la loi scalaire  $\alpha \mapsto E(\alpha)$ . On a donc deux fonctions scalaires à identifier. Or on a été en mesure d'exhiber analytiquement deux diagrammes pour les états homogènes qui sont

- la courbe contrainte-déformation,
- le diagramme de stabilité en termes d'effets d'échelle.

Tandis que le diagramme contrainte-déformation est souvent employé dans la littérature pour construire des lois d'endommagement (voir Chapitre 1 pour la construction de plusieurs types de lois), le deuxième diagramme est, on l'estime, un élément clé dans l'optique d'identifier les deux fonctions d'endommagement. On examine sur deux exemples successifs l'utilité de ce diagramme dans le cas d'un essai de traction à déplacement imposé à la valeur  $tL$  ( $t$  désignant l'allongement de la barre mais aussi la déformation moyenne dans la barre).

**Exemple 1.** Pour commencer, on considère la loi d'endommagement

$$E(\alpha) = E_0(1 - \alpha)^2, \quad w(\alpha) = \hat{w}\alpha. \quad (3.14)$$

Selon cette loi, la contrainte et l'allongement limite d'élasticité se lisent

$$\sigma_e = \sqrt{\hat{w}E_0}, \quad t_e\sqrt{\hat{w}E_0} = \frac{\sigma_e}{E_0} \quad (3.15)$$



Le diagramme contrainte-déformation pour la branche homogène a déjà été étudié dans la Section 1.1.5.2. Celle-ci se lit

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_e t & \text{pour } t \leq t_e, \\ \sigma_e \left(\frac{t_e}{t}\right)^3 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Ce qui nous intéresse ici est plutôt son diagramme de stabilité. En appliquant la Propriété 2.3 (où l'on aura veillé à remplacer  $E_0$  par  $\hat{w}$  en vertu de la nouvelle normalisation), l'état homogène sera stable pour l'allongement  $t$  si (*resp.* seulement si) la longueur de la barre est telle que

$$L < (\text{resp. } \leq) \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{t_e}{t} \hat{\ell}. \quad (3.17)$$

Sur la Figure 3.1, on représente le diagramme de stabilité pour cette loi. On y constate plusieurs

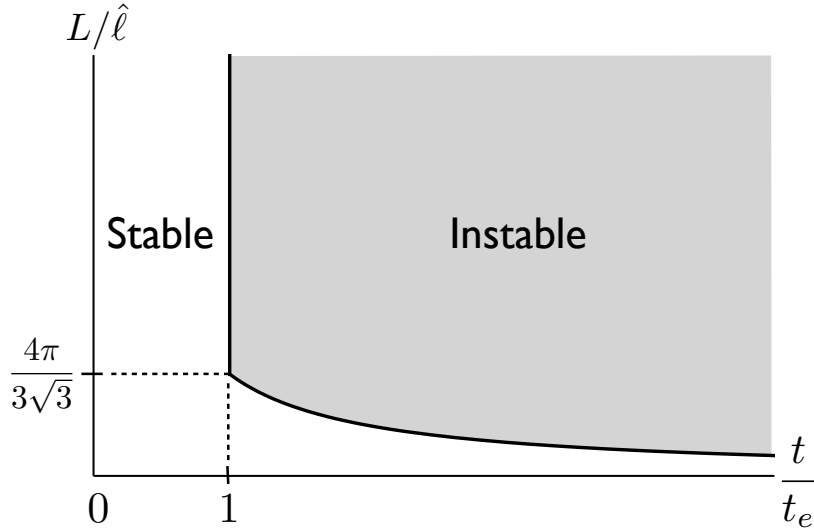


FIG. 3.1 – Stabilité des états homogènes pour la barre en traction simple

points. Tout d'abord si la longueur de la barre est plus grande que  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \hat{\ell}$ , l'état homogène sera instable dès la fin de la phase élastique : la barre localisera et il sera impossible d'observer ces états homogènes. Pour pouvoir observer des états homogènes, il faut nécessairement choisir des longueurs de barre inférieures à  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \hat{\ell}$ . Dans ce cas, la branche homogène est stable à l'issue de la phase élastique. Cependant, une fois atteint l'allongement  $\frac{4\pi \hat{\ell} t_e}{3\sqrt{3} L}$ , la branche homogène redevient instable et une localisation apparaît. Puisque l'observabilité des états homogènes est fixée par les effets d'échelle, on en déduit qu'il suffit de prendre une famille de barres de différentes tailles et de mesurer pour chacune d'entre elles l'allongement caractéristique à l'issue duquel une localisation apparaît. En comparant le diagramme théorique et le diagramme expérimental, on pourra vérifier la pertinence de la loi d'endommagement. Bien entendu, cela suppose que dans

la réalité que la structure privilégie les minima locaux et ne quitte la branche homogène que lorsque celle-ci perd sa stabilité.

Par ailleurs on insiste sur le fait que ce diagramme de stabilité apporte bel et bien des informations *complémentaires* au diagramme contrainte-déformation. Pour cela, on exhibe une famille de lois ayant le même diagramme contrainte-déformation mais exhibant des diagrammes de stabilité différents.

**Exemple 2.** On considère la famille de lois d'endommagement indexée par l'indice  $p$ ,

$$E(\alpha) = E_0(1 - \alpha)^p, \quad w(\alpha) = \hat{w}(1 - (1 - \alpha)^{p/2}). \quad (3.18)$$

Cette famille a la particularité d'avoir pour les états homogènes le même diagramme contrainte-déformation. Quel que soit l'indice  $p$ , la contrainte et l'allongement limite d'élasticité se lisent

$$\sigma_e = \sqrt{\hat{w}E_0}, \quad t_e\sqrt{\hat{w}E_0} = \frac{\sigma_e}{E_0}. \quad (3.19)$$

En appliquant les formules (2.31) et (2.32) donnant la relation contrainte-déformation, on trouve la loi considérée précédemment *i.e.*

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_e t & \text{pour } t \leq t_e, \\ \sigma_e \left(\frac{t_e}{t}\right)^3 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.20)$$

On constate donc que pour cette famille de lois qu'il est impossible de différencier deux lois associées à deux indices distincts à partir du diagramme contrainte-déformation. Le seul moyen est de faire appel au diagramme de stabilité. En appliquant de nouveau la Propriété 2.3 (où l'on aura encore veillé à remplacer  $E_0$  par  $\hat{w}$  en vertu de la nouvelle normalisation), l'état homogène sera stable pour un allongement  $t$  si (*resp.* seulement si) la longueur de la barre est telle que

$$L < (\text{resp. } \leq) \frac{8\pi}{3\sqrt{3}p} \left(\frac{t_e}{t}\right)^{4/p-1} \hat{\ell}. \quad (3.21)$$

Sur la Figure 3.2, on représente le diagramme de stabilité pour différentes valeurs de  $p$ . On remarque que les diagrammes de stabilité sont fortement modifiés, selon le choix de l'indice, non seulement dans la forme de la courbe mais surtout dans l'interprétation mécanique que l'on peut en faire. En effet pour la loi d'indice  $p = 4$ , le comportement est binaire : pour  $L > 2\pi/3\sqrt{3}$  la branche homogène est instable dès la fin de la phase élastique tandis que pour  $L < 2\pi/3\sqrt{3}$ , la branche sera stable jusqu'à l'issue de l'essai. Pour  $p = 8$ , bien que l'instabilité de la branche homogène à l'issue de la phase élastique intervient pour des barres de plus petites longueurs, on a en contrepartie un regain de stabilité pour des temps longs quelle que soit la longueur de la barre.

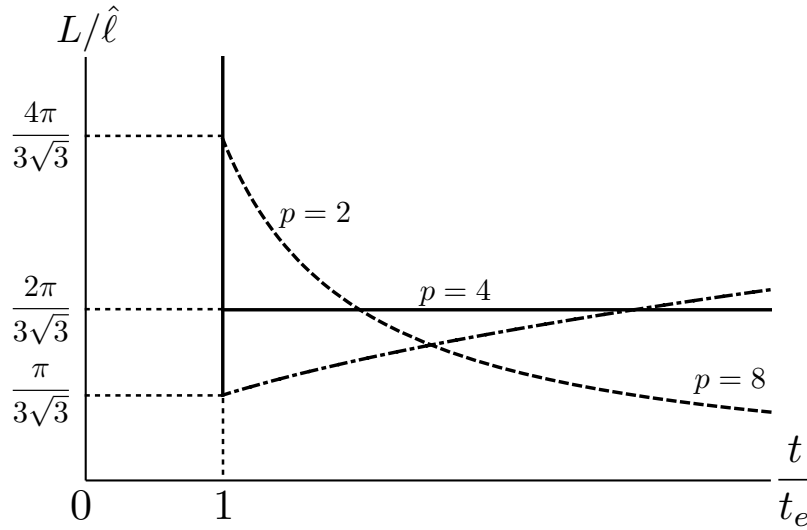


FIG. 3.2 – Stabilité des états homogènes pour la famille de lois (3.18) différentes valeurs de  $p$

On voit donc qu'à partir du mécanisme d'endommagement que l'on observe expérimentalement (endommagement diffus ou localisé) pour différentes tailles de barre, on doit être capable de reconstruire ce type de diagramme. Dans le cas où l'on est en mesure d'observer un état homogène jusqu'à la ruine de la structure, les relevés des données force-déplacement fournissent le diagramme contrainte-déformation. Cependant, selon les lois d'endommagement, il n'est pas toujours possible d'observer la branche homogène jusqu'à l'issue de l'essai, celle-ci devenant instable tôt ou tard. Dans ce cas, le diagramme contrainte-déformation est incomplet et il devient difficile d'identifier les lois d'endommagement à partir de données seulement partielles. De plus, bien qu'il soit toujours possible en théorie de stabiliser la branche homogène en prenant des barres de plus en plus courtes, il est en pratique difficile voire impossible de créer des éprouvettes de béton de taille comparable à celle d'un agrégat. Il faut donc repenser en amont l'essai de traction simple. On s'appuie pour cela sur l'essai PIED dont on examine les propriétés dans la section qui suit.

### 3.3 L'essai PIED

#### 3.3.1 Modélisation

##### 3.3.1.1 Introduction

L'essai PIED (Pour l'Identification de l'Endommagement Diffus) proposé par Bâzant et Pijaudier-Cabot [3] est une modification de l'essai sous traction simple visant à assurer une

homogénéité du champ de déformation dans le béton. L'idée est de coller des barrettes d'aluminium à une éprouvette en béton. Grâce à la rigidité suffisamment élevée de l'aluminium on espère empêcher ainsi la formation de localisations (correspondant à une macrofissure) au profit d'un endommagement homogène dans la structure (correspondant à des microfissures). Cet essai a été repris par Ramtani et al. [53] pour mettre en évidence l'effet unilatéral du béton caractérisé par la refermeture des microfissures quand celles-ci sont mises en compression. En effet, si on est capable d'endommager de manière diffuse le béton en traction, en faisant le chargement inverse qui consiste à mettre en compression l'éprouvette, on devrait être capable d'observer sur la courbe force-déplacement la restauration de raideur due à la refermeture des microfissures. Les études expérimentales ont donné des résultats encourageants bien qu'une modélisation de l'essai ainsi qu'une explication quant à son fonctionnement n'aient pas été réellement avancées. On se propose de comprendre sous l'angle de notre modèle d'endommagement et en particulier de celui de concept de stabilité les raisons pour lesquelles la structure choisit de privilégier l'endommagement diffus plutôt que la localisation.

On choisit de modéliser l'essai en dimension 2. On considère deux matériaux isotropes : l'un est élastique linéaire tandis que l'autre est élastique endommageable. On vient alors coller deux barrettes de longueur  $L$  et d'épaisseur  $e_f$  faites du matériau incassable à une éprouvette de longueur  $L$  et d'épaisseur  $2e_m$  faite du matériau endommageable. On a donc au final une barre composite qui occupe dans  $\mathbb{R}^2$  un espace  $\Omega = (0, L) \times (-e/2, e/2)$  où  $L$  et  $e = 2(e_f + e_m)$  désignent respectivement la longueur de l'éprouvette et son épaisseur. On appelle aussi respectivement  $\Omega_m = (0, L) \times (-e_m, e_m)$  et  $\Omega_f = (0, L) \times (-e/2, -e_m) \cup (e_m, e/2)$  les domaines qu'occupent le matériau incassable et le matériau endommageable.

Définissons énergétiquement chacun des 2 matériaux. Le matériau incassable a une loi de Hooke  $A_f$  caractérisée par un module de Young  $E_f$  et un coefficient de Poisson  $\nu_f$ . Sa densité d'énergie de déformation se lit donc

$$W_f(\varepsilon) = \frac{1}{2} A_f \varepsilon \cdot \varepsilon. \quad (3.22)$$

Le matériau endommageable est quant à lui caractérisé par sa densité d'énergie de déformation non-locale

$$W_m(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha) = \frac{1}{2} \hat{w}_m \hat{\ell}^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha + \frac{1}{2} A_m(\alpha) \varepsilon \cdot \varepsilon + w_m(\alpha) \quad (3.23)$$

où la loi de Hooke  $\alpha \mapsto A_m(\alpha)$  n'est affectée par l'endommagement qu'au travers du module de Young  $\alpha \mapsto E_m(\alpha)$ , le coefficient de Poisson  $\nu_m$  étant supposé constant. On suppose avoir un endommagement ultime normalisé à la valeur 1. On appelle  $\hat{w}_m$  la *specific fracture energy* définie par  $\hat{w}_m = w_m(1)$ .

Le dispositif d'essai est représenté schématiquement sur la Figure 3.3. On raisonne à déplacement imposé et on souhaite réaliser l'évolution quasi-statique du système. Au niveau du bord droit de la structure, le déplacement normal est prescrit par une machine à la valeur  $U_t = tL$ , où  $t$  peut

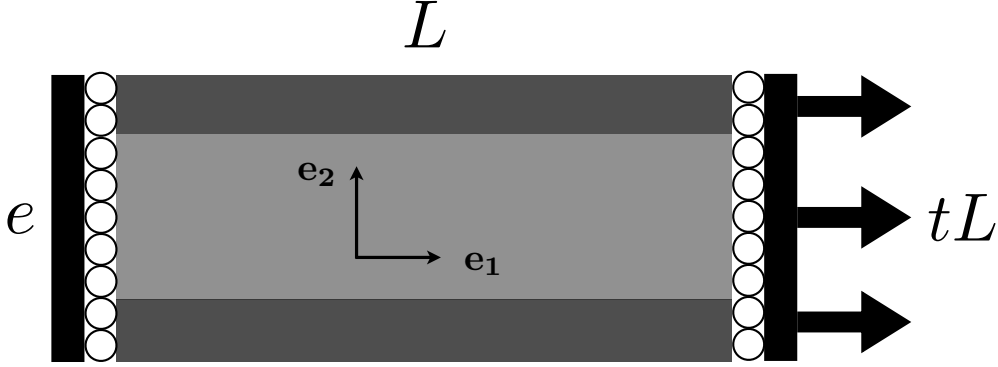


FIG. 3.3 – Schéma de l'essai PIED

s'identifier au temps de l'expérience. À l'extrémité opposée en  $x = 0$ , le déplacement normal est fixé à 0. Les bords latéraux de la structure ainsi que les composantes tangentielles de l'effort au niveau des deux extrémités sont libres d'effort. On en déduit alors les espaces d'admissibilité pour les déplacement et l'endommagement

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(U_t) &= \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid u(0, \cdot) \cdot e_1 = 0, \quad u(L, \cdot) \cdot e_1 = 0\}, \\ \mathcal{D} &= \{\alpha \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid \alpha \geq 0\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

L'énergie totale d'un état admissible  $(u, \alpha) \in \mathcal{C}(U_t) \times \mathcal{D}$  pour un allongement  $t$  se lit alors

$$\mathcal{P}_t(u, \alpha) = \int_{\Omega_f} \frac{1}{2} A_f \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \int_{\Omega_m} \left( \frac{1}{2} \hat{w}_m \hat{\ell}^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha + \frac{1}{2} A_m(\alpha) \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) + w_m(\alpha) \right) dx. \quad (3.25)$$

Avec comme choix d'espace d'admissibilité pour l'endommagement (3.24), on aura des conditions aux limites naturelles de type  $\hat{w}_m \hat{\ell}^2 \nabla \alpha \cdot n \geq 0$  pour l'endommagement à l'interface entre les différents matériaux. L'endommagement sera donc libre de se développer en ces points.

### 3.3.1.2 Recherche de solutions homogènes

On regarde s'il est possible de construire des états homogènes d'endommagement dans le cadre de l'essai PIED tels que ceux-ci vérifient l'équilibre mécanique et le critère d'endommagement. Supposons que pour un allongement  $t$  donné qu'il existe un état de déplacement-endommagement vérifiant l'équilibre et le critère tel que les champs de déformation et d'endommagement soient homogènes de valeurs respectives  $\varepsilon_t$  et  $\alpha_t$ .

Dans ce cas, en utilisant la relation de comportement dans chacun des matériaux et l'homogénéité des champs de déformation et d'endommagement, on en déduit que le champ de contrainte  $\sigma_t$  est homogène dans chacun des matériaux. Puisque les bords latéraux et la compo-

sante tangentielle aux extrémités sont libres d'effort, on en déduit que

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega_m \quad \text{et} \quad \sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega_f. \quad (3.26)$$

On en déduit par la relation de comportement que

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \sigma_m/E_m(\alpha_t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \sigma_f/E_f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega_f. \quad (3.27)$$

Par ailleurs la déformation étant homogène, le déplacement  $u_t$  en tout point de la structure est de la forme  $u_t : x \mapsto \varepsilon_t x$  où  $x$  désigne le vecteur de coordonnées du point. En appliquant d'une part les conditions aux limites associées au chargement en  $x_1 = 0$  et  $x_1 = L$ , puis les conditions de raccord du déplacement aux interfaces entre le matériau incassable et endommageable, on trouve que

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m(\alpha_t)} = t, \quad \nu_f \frac{\sigma_f}{E_f} = \nu_m \frac{\sigma_m}{E_m(\alpha_t)} \quad (3.28)$$

Or ceci n'est possible que si les coefficients de Poisson des deux matériaux sont identiques. Supposons alors que les matériaux aient le même coefficient de Poisson *i.e.*  $\nu_f = \nu_m = \nu$ . Dans ce cas, toutes les équations de l'équilibre mécanique sont vérifiées. Reste à trouver la forme de  $\alpha_t$ . Une application directe du critère d'endommagement  $\frac{1}{2}A'(\alpha_t)\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t + w'(\alpha_t) \geq 0$  montre que de façon similaire en 1D, que le champ d'endommagement  $\alpha_t$  est nul tant que  $t < t_e = \sqrt{2w'_m(0)/E'_m(0)}$  et est donné pour  $t \geq t_e$  par l'équation implicite

$$t^2 = \frac{2w'_m(\alpha_t)}{E'_m(\alpha_t)}. \quad (3.29)$$

En appelant  $F_t$  la force par unité de longueur mesurée à l'extrémité de l'éprouvette et valant en l'occurrence dans le cas de l'état homogène

$$F_t = (e_f E_f + e_m E_m(\alpha_t))t, \quad (3.30)$$

on peut remonter à la relation contrainte-déformation dans le matériau endommageable

$$E_m(\alpha_t)t = \frac{F_t - e_f E_f}{e_m}. \quad (3.31)$$

On en déduit que dans le cas où les coefficients de Poisson des deux matériaux sont égaux, il existe donc bien un chemin d'endommagement homogène qui vérifie les conditions de stabilité du premier ordre. Si les coefficients de Poisson sont différents, l'absence de compatibilité entre les déplacements aux interfaces fibre-matrice fait que des états strictement homogènes ne pourront jamais être observés.

### 3.3.1.3 Essais numériques

La résolution est formellement identique à celle employée pour la simulation numérique de l'approche variationnelle de la rupture. Celle-ci a été développée initialement par Bourdin et collaborateurs [7, 8, 2] pour la simulation de l'approche variationnelle de la rupture. On rappelle les grandes lignes de la démarche avant de l'appliquer à l'essai PIED.

La simulation numérique du problème passe par la discrétisation de l'intervalle de temps de l'expérience  $[0, T]$  en un nombre fini  $N + 1$  d'allongements notés  $\{t_i\}_{i=0}^N$  avec un pas temporel  $\Delta t$  uniforme. La résolution se fait de façon itérative : à partir des champs  $(u_{i-1}, \alpha_{i-1})$  calculés au temps  $t_{i-1}$  on cherche les champs  $(u_i, \alpha_i)$  au temps  $t_i$  vérifiant l'équilibre mécanique ainsi que le critère d'endommagement, c'est à dire vérifiant sous forme variationnelle le problème sous contrainte suivant

$$\mathcal{P}'_{t_i}(u_i, \alpha_i)(v - u_i, \beta - \alpha_i) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}(t_i) \times \mathcal{D}_i, \quad (3.32)$$

où  $\mathcal{D}_i = \{\alpha \in H^1(\Omega) : \alpha(x) \geq \alpha_{i-1} \text{ p.p.}\}$ . Les conditions du second ordre pour s'assurer numériquement d'avoir trouvé un minimum local unilatéral ainsi que la vérification du bilan d'énergie (en cas d'évolution discontinue) sont particulièrement difficiles à mettre en œuvre et mériteraient un chapitre à elles seules. Elles ne seront donc pas explorées ici.

La résolution de (3.32) se fait à l'aide d'un algorithme de minimisation alternée. En effet la fonctionnelle  $\mathcal{P}_{t_i}$  n'est pas convexe en la paire  $(u, \alpha)$  pour des matériaux adoucissants. Cependant elle est convexe en chacun des arguments : la convexité par rapport au déplacement est assuré par l'élasticité positive du matériau tandis que la convexité par rapport à l'endommagement provient de l'écroissage positif en déformation (en supposant que  $w_m$  soit convexe, voir Proposition 1.5). Pour un temps donné on minimise donc par rapport au déplacement à endommagement fixé puis par rapport à l'endommagement à déplacement fixé jusqu'à convergence. On est alors assuré de vérifier (3.32). En revanche on ne peut rien garantir sur la stabilité de l'état. Dans les faits, l'algorithme se lit comme suit

- Initialisation : Poser  $(u^{(0)}, \alpha^{(0)}) := (u_{i-1}, \alpha_{i-1})$
- Itération  $p$  :

1. Calculer,

$$u^{(p)} := \arg \min_{u \in \mathcal{C}(t_i)} \mathcal{P}_{t_i}(u, \alpha^{(p-1)}) \quad (3.33)$$

2. Calculer,

$$\alpha^{(p)} := \arg \min_{\alpha_{i-1} \leq \alpha \leq 1} \mathcal{P}_{t_i}(u^{(p)}, \alpha) \quad (3.34)$$

- Fin : Répéter jusqu'à ce que  $\|\alpha^{(p)} - \alpha^{(p-1)}\|_\infty \leq \delta_1$ . Poser  $(u_i, \alpha_i) := (u^{(p)}, \alpha^{(p)})$ .

Le paramètre  $\delta_1$  est la tolérance pour le critère de convergence. On utilise pour la simulation 2D le code de calcul écrit par Blaise Bourdin pour l'approche variationnelle mécanique de la rupture, voir [7]. Le problème est discrétisé en espace par des éléments finis classiques triangles linéaires. Ceux ci ont 3 degrés de liberté par noeud (2 pour le déplacement et 1 pour l'endommagement). Ce code est implémenté sous Matlab et fait appel pour l'assemblage des matrices à des routines écrites sous Fortran et C. La résolution du problème d'élasticité se fait à l'aide de solveurs linéaires classiques tandis que le problème de minimisation de l'endommagement se fait à l'aide de la Toolbox d'optimisation de Matlab. Cette méthode permet de résoudre des structures à grands nombres de degré de libertés (jusqu'à 200000). Pour des calculs intensifs, une version parallélisable du code a été développé par Bourdin, voir [6].

Dans le cadre de l'essai PIED envisagé par Ramtani et al. [53], les dimensions de l'éprouvette sont les suivantes

$$L = 160 \text{ mm}, \quad e_f = 8 \text{ mm}, \quad e_m = 20 \text{ mm}.$$

On reprend les valeurs du modèle (3.12) avec en outre un module de Young pour l'aluminium égal à 70 Mpa. On considère que les modules de Poisson sont égaux de façon à pouvoir comparer les résultats numériques à la branche homogène trouvée analytiquement. Le pas de temps est fixé à la valeur  $\Delta t = 0.01$ . L'essai numérique se passe alors comme suit :

- de  $t = 0.$  jusqu'à  $t = 1.$ , la réponse est élastique et l'endommagement est nul, voir Figure 3.4.

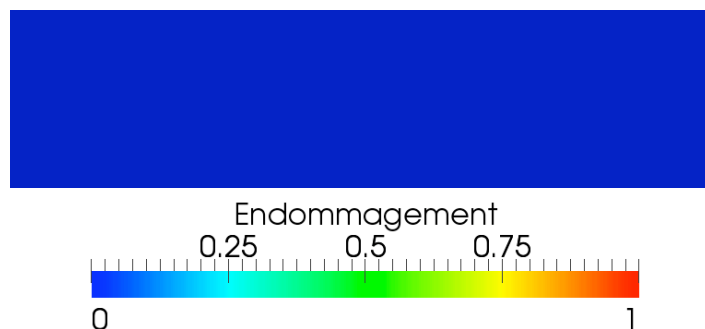


FIG. 3.4 – Profil d'endommagement dans la partie endommageable de l'essai PIED à  $t = 0.7$

- de  $t = 1.$  à  $t = 2.23$ , l'endommagement croît dans la structure de façon homogène, voir Figure 3.5. À  $t = 2.23$ , la structure est endommagée à la valeur 0.79.
- à  $t = 2.24$  a lieu une bifurcation qui consiste en l'apparition de 2 localisations, voir Figure 3.6. Tandis que ces localisations croissent, l'endommagement environnant reste à la valeur 0.79 d'où a eu lieu la bifurcation.

En plus de cette simulation de l'essai PIED, on effectue une autre simulation numérique de traction simple sur l'éprouvette de béton seule. On peut ainsi mettre en évidence les effets



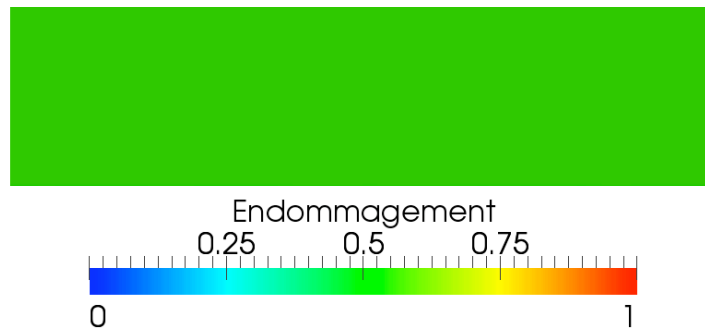


FIG. 3.5 – Profil d'endommagement dans la partie endommageable de l'essai PIED à  $t = 1.5$

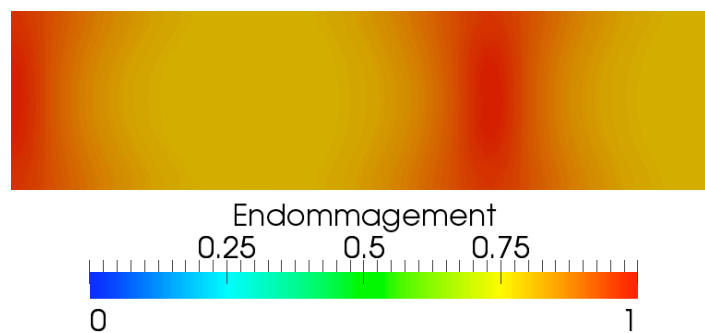


FIG. 3.6 – Profil d'endommagement dans la partie endommageable de l'essai PIED à  $t = 2.37$

bénéfiques des barrettes d'aluminium sur le champ d'endommagement apparaissant dans la structure. Pour cet essai, on constate numériquement une localisation de l'endommagement dès la fin de la phase élastique. La barre est alors rompue en 2 morceaux et l'essai est terminé. À partir des données récupérées de ces deux simulations, on représente sur la Figure 3.7 la contrainte moyenne dans le matériau endommageable en  $x_2 = L$ . On compare les valeurs obtenues à celles théoriques que l'on aurait dans le cas d'un endommagement homogène. On remarque que dans le cas d'éprouvette de béton sans renfort, la contrainte chute comme attendu à 0 dès la fin de la phase élastique. En revanche, dans le cas de l'essai PIED, la branche homogène est suivie correctement par la branche numérique jusqu'à  $t = 2.24$  où l'algorithme préfère localiser l'endommagement plutôt que de continuer à suivre la branche homogène.

### 3.3.2 Étude du cas à faibles épaisseurs

Il est compliqué d'étudier la stabilité des états homogènes pour une structure dont l'épaisseur transverse est comparable à la longueur interne. On choisit donc ici de simplifier le problème en regardant le comportement de la structure lorsque l'épaisseur  $e$  de la structure est petite devant la longueur de la barre  $L$  ainsi que la longueur interne au modèle  $\hat{\ell}$ . Il s'agit donc d'une étude asymptotique dans laquelle le paramètre d'élançement de la barre  $\eta = e/L$  va jouer le rôle de "petit" paramètre dans l'étude asymptotique qui va suivre. Il est possible dans ce cas là d'étudier

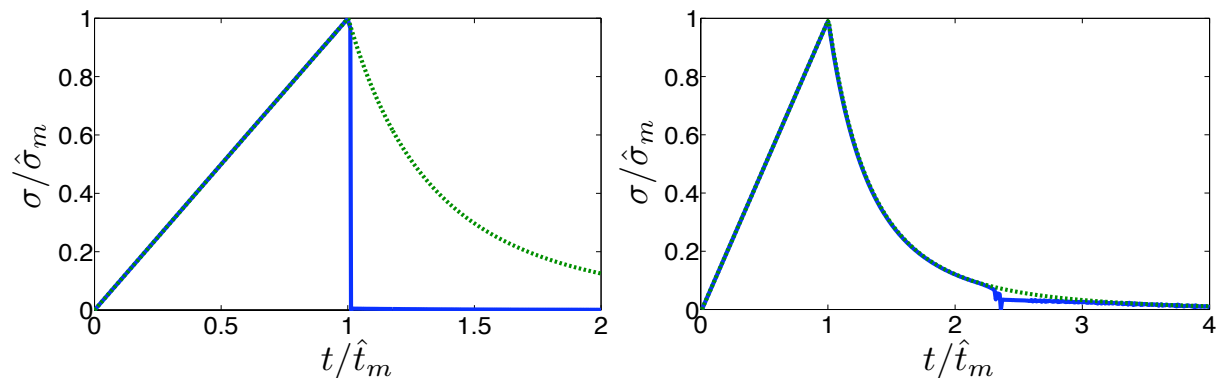


FIG. 3.7 – Comparaison des contraintes moyennes en bout de barre en fonction du temps pour l'éprouvette seule de béton (Gauche) et l'essai PIED (Droite) pour la branche homogène analytique (Verte pointillée) et numérique (Bleu)

la stabilité des états homogènes voire de mettre en évidence des modes d'endommagement assez surprenants.

### 3.3.2.1 Le modèle réduit

Dans une première étape, on choisit d'adimensionner le problème afin de pouvoir comparer les ordres des différents termes du développement entre eux. On transporte tout d'abord les domaines réels  $\Omega$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_f$  vers des domaines normalisés définis par

$$\Omega \mapsto \tilde{\Omega} = (0, 1) \times (-1/2, 1/2), \quad (3.35)$$

$$\Omega_m \mapsto \tilde{\Omega}_m = (0, 1) \times (-\chi_m/2, \chi_m/2), \quad (3.36)$$

$$\Omega_f \mapsto \tilde{\Omega}_f = (0, 1) \times (-1/2, -\chi_m/2) \cup (\chi_m/2, 1/2) \quad (3.37)$$

où  $\chi_m = e_m/(e_m + e_f)$  désigne la fraction volumique de matrice (la fraction volumique de fibre valant  $\chi_f = 1 - \chi_m$ ). Ce transport se fait moyennant le changement de coordonnées  $(y_1, y_2) = (x_1/L, x_2/e)$  où  $(y_1, y_2)$  représente les nouvelles variables dans le domaine  $\tilde{\Omega}$ . On peut aussi renormaliser les déplacements suivant la règle

$$u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mapsto \tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^2) : \quad u(x_1, x_2) = L\tilde{u}\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{e}\right). \quad (3.38)$$

La variable d'endommagement étant déjà normalisée et sans unité, celle-ci se transporte simplement vers le domaine normalisé  $\tilde{\Omega}$ ,

$$\alpha \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \mapsto \tilde{\alpha} \in H_0^1(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}) : \quad \alpha(x_1, x_2) = \tilde{\alpha}\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{e}\right). \quad (3.39)$$

On écrit à présent l'énergie totale normalisée dans les nouvelles variables,

$$\tilde{\mathcal{P}}_t(\tilde{u}, \tilde{\alpha}) = \int_{\tilde{\Omega}_f} \frac{1}{2} A_f \varepsilon^\eta(\tilde{u}) \cdot \varepsilon(\tilde{u}) \, dy + \int_{\tilde{\Omega}_m} \frac{1}{2} \hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \nabla^\eta \tilde{\alpha} \cdot \nabla^\eta \tilde{\alpha} + \frac{1}{2} A_m(\tilde{\alpha}) \varepsilon^\eta(\tilde{u}) \cdot \varepsilon^\eta(\tilde{u}) + w_m(\tilde{\alpha}) \, dy, \quad (3.40)$$

où les opérateurs linéaires de déformation et de gradient se transportent selon la règle

$$\varepsilon^\eta = \frac{1}{2} (\nabla^\eta + {}^T \nabla^\eta) \quad \text{avec} \quad \nabla^\eta = (\partial_{y_1} | \eta^{-1} \partial_{y_2}). \quad (3.41)$$

L'objectif est alors de chercher le modèle asymptotique lorsque le rapport  $\eta = e/L$  devient petit devant l'autre rapport de longueur  $\hat{\ell}/L$ . Plus précisément on veut obtenir les équations asymptotiques que vérifient les points critiques de l'énergie et remonter à partir de là à la forme de l'énergie du modèle réduit. Il existe bien entendu d'autres outils permettant d'obtenir le modèle réduit tels que ceux reposant sur la notion de  $\Gamma$ -convergence. Cependant ceux-ci garantissent seulement la convergence des minima globaux. Étant ici intéressés par la stabilité des états homogènes qui peuvent être des points critiques instables, il est préférable de ne pas utiliser cette notion de convergence. On raisonne donc formellement à partir des équations fortes qui caractérisent les points stationnaires du problème avant de passer à la limite dans celles-ci. On ne suppose pas que les coefficients de Poisson sont identiques dans les matériaux. On fait tout d'abord les

**Hypothèses 3.1.** *Soient  $(\tilde{u}^\eta, \tilde{\sigma}^\eta, \tilde{\alpha}^\eta)$  un triplet de champs de déplacements, de contraintes et d'endommagement vérifiant l'équilibre mécanique ainsi que le critère d'endommagement. On suppose que ces champs se développent asymptotiquement pour  $\eta = e/L$  petit de la façon suivante,*

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\eta &= \tilde{u}^0 + \eta \tilde{u}^1 + \dots \\ \tilde{\sigma}^\eta &= \tilde{\sigma}^0 + \eta \tilde{\sigma}^1 + \dots \\ \tilde{\alpha}^\eta &= \tilde{\alpha}^0 + \eta \tilde{\alpha}^1 + \dots \end{aligned} \quad (3.42)$$

*On suppose en outre que l'énergie totale de l'état point stationnaire  $(\tilde{u}^\eta, \tilde{\sigma}^\eta, \tilde{\alpha}^\eta)$  est bornée indépendamment de  $\eta$  par celle de l'état admissible  $(ty_1 \mathbf{e}_1, 1)$ ,*

$$\tilde{\mathcal{P}}_t(\tilde{u}^\eta, \tilde{\alpha}^\eta) \leq \tilde{\mathcal{P}}_t(ty_1 \mathbf{e}_1, 1) = O(1). \quad (3.43)$$

Sous ces hypothèses, les champs asymptotiques continuent à satisfaire un problème variationnel. En effet on a la

**Proposition 3.2 (Problème asymptotique à petite épaisseur).** *Les champs asymptotiques  $\tilde{\alpha}_0$  et  $\tilde{u}_1^0$  sont indépendants de  $y_2$ . On pose alors  $\bar{\alpha}(y_1) = \tilde{\alpha}^0(y_1, y_2)$  et  $\bar{u}(y_1) = \tilde{u}_1^0(y_1, y_2)$ . Ce*

couple  $(\bar{u}, \bar{\alpha})$  est un point stationnaire de la fonctionnelle  $\bar{\mathcal{P}}_t$  sur  $\bar{\mathcal{C}}(t) \times \bar{\mathcal{D}}$  et satisfait pour un allongement  $t$  l'inéquation variationnelle

$$\bar{\mathcal{P}}'_t(\bar{u}, \bar{\alpha})(v - \bar{u}, \beta - \bar{\alpha}) \geq 0, \quad \forall (v, \beta) \in \bar{\mathcal{C}}(t) \times \bar{\mathcal{D}}. \quad (3.44)$$

L'énergie totale unidimensionnelle  $\bar{\mathcal{P}}_t$  est définie par

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_t : (v, \beta) &\mapsto \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \chi_m \hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \beta'^2 + \frac{1}{2} (\chi_f E_f + \chi_m E_m(\beta)) v'^2 + \chi_m w_m(\beta) \right) dy \\ \bar{\mathcal{C}}(t) \times \bar{\mathcal{D}} &\mapsto \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.45)$$

où les espaces fonctionnels réduits sont définis par  $\bar{\mathcal{C}}(t) = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0, v(L) = t\}$  et  $\bar{\mathcal{D}} = \{\beta \in H^1(0, 1) : \beta(y) \geq 0\}$ .

Avant de donner une preuve de cette proposition, on remarque que le coefficient de Poisson n'a pas d'influence sur le terme d'ordre dominant du problème asymptotique. Cette énergie réduite ne diffère de l'énergie (2.5) d'une barre 1D purement endommageable que par la présence d'un terme d'élasticité résiduel  $\chi_f E_f$  provenant du matériau incassable. La forme de cette énergie est plutôt intuitive puisqu'elle correspond à moyenner dans l'épaisseur les rigidités de chaque matériau. On étudie alors les propriétés des solutions de ce problème, le but étant de mieux comprendre l'origine de la stabilité des états homogènes pour l'essai PIED.

*Démonstration.* Le triplet  $(\tilde{u}^\eta, \tilde{\sigma}^\eta, \tilde{\alpha}^\eta)$  vérifiant par hypothèses les équations d'équilibre ainsi que le critère d'endommagement, celui-ci satisfait le système d'équations suivant

$$\text{Equilibre dans } \tilde{\Omega} \quad : \quad -\operatorname{div} \tilde{\sigma}^\eta = 0 \quad (3.46)$$

$$\text{Loi de Cpt dans } \tilde{\Omega}_f \quad : \quad \tilde{\sigma}^\eta = A_f \varepsilon_\eta(\tilde{u}^\eta) \quad (3.47)$$

$$\text{Loi de Cpt dans } \tilde{\Omega}_m \quad : \quad \tilde{\sigma}^\eta = A_m(\tilde{\alpha}^\eta) \varepsilon_\eta(\tilde{u}^\eta) \quad (3.48)$$

$$\text{Critère dans } \tilde{\Omega}_m \quad : \quad -\hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L} \Delta_\eta \tilde{\alpha}^\eta + \frac{1}{2} A'_m(\tilde{\alpha}^\eta) \varepsilon^\eta(\tilde{u}) \cdot \varepsilon^\eta(\tilde{u}^\eta) + w'_m(\tilde{\alpha}^\eta) \geq 0 \quad (3.49)$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\tilde{u}_1^\eta(0, y_2) = \tilde{u}_1^\eta(L, y_2) = 0 \quad (3.50)$$

$$\tilde{\sigma}^\eta(y_1, \pm 1/2) \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (3.51)$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \tilde{\sigma}^\eta(0, y_2) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \tilde{\sigma}^\eta(L, y_2) \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (3.52)$$

$$\nabla^\eta \tilde{\alpha}^\eta(y_1, \pm 1/2) \cdot (\pm \mathbf{e}_2) \geq 0 \quad (3.53)$$

$$\nabla^\eta \tilde{\alpha}^\eta(0, y_2) \cdot \mathbf{e}_1 \leq 0 \quad \text{et} \quad \nabla^\eta \tilde{\alpha}^\eta(L, y_2) \cdot \mathbf{e}_1 \geq 0 \quad (3.54)$$

L'obtention des équations qui régissent le modèle asymptotique se fait en injectant le

développement (3.42) dans les équations (3.46)-(3.52) puis en identifiant les termes de même ordre en  $\eta$ . On isole tout d'abord les termes dominants dans chacune des équations (3.46)-(3.52) :

**Équilibre mécanique :**

$$\text{Ordre -1 : } \quad \tilde{\sigma}_{12,2}^0 = 0, \quad \tilde{\sigma}_{22,2}^0 = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad (3.55)$$

**Loi de comportement :**

$$\text{Ordre -1 : } \quad \tilde{u}_{1,2}^0 = 0, \quad \tilde{u}_{2,2}^0 = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \quad (3.56)$$

$$\text{Ordre 0 : } \quad \begin{cases} \tilde{u}_{1,1}^0 = \frac{1}{E}\sigma_{11}^0 - \frac{\nu}{E}\tilde{\sigma}_{22}^0 \\ \tilde{u}_{2,2}^1 = \frac{1}{E}\tilde{\sigma}_{22}^0 - \frac{\nu}{E}\tilde{\sigma}_{11}^0 \\ \tilde{u}_{2,1}^0 + \tilde{u}_{1,2}^1 = \frac{1+\nu}{E}\tilde{\sigma}_{12}^0 \end{cases} \quad (3.57)$$

où les coefficients  $E$  et  $\nu$  prennent les valeurs  $E_f$  et  $\nu_f$  ou  $E_m(\alpha_0)$  et  $\nu_m(\alpha_0)$  selon l'appartenance au domaine  $\tilde{\Omega}_f$  ou au domaine  $\tilde{\Omega}_m$  ( $\tilde{\alpha}_0$  dépendant *a priori* de  $x$ ).

**Conditions aux limites :**

$$\text{Ordre 0 : } \quad \begin{cases} \tilde{u}_1^0(0, y_2) = 0, & \tilde{u}_1^0(L, y_2) = tL \\ \tilde{\sigma}^0(y_1, \pm 1/2) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, & \mathbf{e}_1 \cdot \tilde{\sigma}^0(0, y_2) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \tilde{\sigma}^0(L, y_2) \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \end{cases} \quad (3.58)$$

Examinons les conséquences de ces relations sur la forme des champs. On déduit de (3.55) que  $\tilde{\sigma}_{12}^0$  et  $\tilde{\sigma}_{22}^0$  sont indépendants de la variable transverse  $y_2$ . En utilisant les conditions aux limites de bord libre en  $y_2 = \pm 1/2$ , les champs de contrainte  $\tilde{\sigma}_{12}^0$  et  $\tilde{\sigma}_{22}^0$  sont donc identiquement nuls en tout point de  $\tilde{\Omega}$ . En conséquence la relation de comportement à l'ordre 0 se réduit à

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1,1}^0 = \frac{1}{E}\tilde{\sigma}_{11}^0 \\ \tilde{u}_{2,2}^1 = -\frac{\nu(\alpha_0)}{E}\tilde{\sigma}_{11}^0 \\ \tilde{u}_{2,1}^0 = -\tilde{u}_{1,2}^1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Or par ailleurs, l'équation (3.56) montre que le champs  $\tilde{u}^0$  est aussi indépendant de  $y_2$ . En intégrant les relations de comportement (3.59) par rapport à  $y_2$  sur  $(-1/2, 1/2)$  et en utilisant l'homogénéité de  $\tilde{u}^0$  par rapport à  $y_2$ , on trouve que,

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1,1}^0 = \frac{1}{\langle E \rangle}\tilde{\sigma}_{11}^0 \\ \tilde{u}_{2,1}^0 = -(\tilde{u}_1^1(y_1, 1/2) - \tilde{u}_1^1(y_1, -1/2)) \end{cases} \quad (3.60)$$

où  $\langle E \rangle$  désigne la moyenne des modules de Young à l'ordre 0 le long de l'axe transverse : c'est donc une fonction de la variable longitudinale  $y_1$  donnée par la formule,

$$\langle E \rangle(y_1) = \int_{-\chi_m/2}^{\chi_m/2} E(\tilde{\alpha}_0(y_1, y_2)) dy_2 + \chi_f E_f \quad (3.61)$$

On s'intéresse au terme d'ordre 0 en l'endommagement. Puisque seul le terme  $\tilde{\sigma}_{11}^0$  du tenseur des contraintes  $\tilde{\sigma}^0$  est non nul, le terme dominant du taux de restitution d'énergie est

$$\frac{1}{2} A'_m(\tilde{\alpha}^\eta) \varepsilon(\tilde{u}^\eta) \cdot \varepsilon(\tilde{u}^\eta) = -\frac{1}{2} S'_m(\tilde{\alpha}^0) \tilde{\sigma}^0 \cdot \tilde{\sigma}^0 + O(\eta) = \frac{1}{2} E'_m(\tilde{\alpha}^0) (\tilde{u}_{1,1}^0)^2 + O(\eta). \quad (3.62)$$

Par ailleurs, puisque l'énergie  $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{u}^\eta, \tilde{\alpha}^\eta)$  est bornée sous l'Hypothèses 3.1, on en déduit que

$$\int_{\tilde{\Omega}_m} (\tilde{\alpha}_{,1}^\eta)^2 dy \leq M, \quad \int_{\tilde{\Omega}_m} (\tilde{\alpha}_{,2}^\eta)^2 dy \leq \eta^2 M. \quad (3.63)$$

À l'ordre 0 on voit donc que  $\tilde{\alpha}_{,2}^0 = 0$  et on en déduit que  $\tilde{\alpha}^0$  est indépendant de la variable  $y_2$ . Isolons maintenant les termes dominants successifs du critère d'endommagement (3.49),

$$\text{Ordre -2 : } -\tilde{\alpha}_{,22}^0 \geq 0 \quad (3.64)$$

$$\text{Ordre -1 : } -\tilde{\alpha}_{,22}^1 \geq 0 \quad (3.65)$$

$$\text{Ordre 0 : } -\hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} (\tilde{\alpha}_{,11}^0 + \tilde{\alpha}_{,22}^2) + \frac{1}{2} E'_m(\tilde{\alpha}^0) (\tilde{u}_{1,1}^0)^2 + w'_m(\tilde{\alpha}^0) \geq 0 \quad (3.66)$$

L'équation d'ordre  $-2$  sur  $\tilde{\alpha}_0$  est automatiquement satisfaite du fait de l'indépendance de  $\tilde{\alpha}_0$  par rapport à  $y_2$ . Intéressons-nous au terme d'ordre 1 à présent. Une intégration par rapport à  $y_2$  du terme d'ordre 1 donne

$$\tilde{\alpha}_{,2}^1(y_1, -1/2) \geq \tilde{\alpha}_{,2}^1(y_1, y_2) \geq \tilde{\alpha}_{,2}^1(y_1, +1/2). \quad (3.67)$$

Or les conditions aux limites naturelles sur les bords latéraux (3.53) après développement asymptotique se lisent,

$$\tilde{\alpha}_{,2}^\eta(y_1, \pm 1/2) = \pm(\tilde{\alpha}_{,2}^0(y_1, \pm 1/2) + \eta \tilde{\alpha}_{,2}^1(y_1, \pm 1/2) + \eta^2 \tilde{\alpha}_{,2}^2(y_1, \pm 1/2) + o(\eta^2)) \geq 0. \quad (3.68)$$

Comme  $\tilde{\alpha}_{,2}^0$  est nul, cela impose au terme d'ordre 1 de vérifier l'inégalité,

$$\tilde{\alpha}_{,2}^1(y_1, -1/2) \leq 0, \quad \tilde{\alpha}_{,2}^1(y_1, +1/2) \geq 0. \quad (3.69)$$

On ne peut rien dire pour le moment sur le terme du deuxième ordre de (3.68). En combinant avec l'inégalité (3.70) on en conclut que nécessairement  $\tilde{\alpha}_{,2}^1$  est identiquement nul sur  $\tilde{\Omega}$ . On

en déduit que les termes dominants dans (3.53) sont ceux d'ordre 2 et qu'ils doivent satisfaire l'inégalité

$$\tilde{\alpha}_{,2}^2(y_1, -1/2) \leq 0, \quad \tilde{\alpha}_{,2}^2(y_1, +1/2) \geq 0. \quad (3.70)$$

On intègre alors le long de l'axe transverse l'équation d'ordre 0 (3.66) en tenant compte de l'homogénéité de  $\alpha_0$  par rapport à  $y_2$ . On aboutit à une inéquation en la variable  $y_1$ ,

$$-\hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \tilde{\alpha}_{,11}^0 + \frac{1}{2} E'_m(\tilde{\alpha}^0) (\tilde{u}_{1,1}^0)^2 + w'_m(\tilde{\alpha}^0) \geq (\tilde{\alpha}_{,2}^2(y_1, 1/2) - \tilde{\alpha}_{,2}^2(y_1, -1/2)). \quad (3.71)$$

En utilisant les conditions aux limites (3.70), on trouve que

$$-\hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \tilde{\alpha}_{,11}^0 + \frac{1}{2} E'_m(\tilde{\alpha}^0) (\tilde{u}_{1,1}^0)^2 + w'_m(\tilde{\alpha}^0) \geq 0. \quad (3.72)$$

Par ailleurs comme on sait à présent que  $\tilde{\alpha}^0$  est homogène en  $y_2$ , on obtient finalement que  $\langle E \rangle = \chi_f E_f + \chi_m E_m(\tilde{\alpha}^0)$ . En réunissant l'ensemble de ces résultats on en déduit bien la Proposition 3.2.  $\square$

### 3.3.2.2 Stabilité des états homogènes

On travaille dorénavant sur l'énergie asymptotique  $\bar{\mathcal{P}}_t$  et on souhaite étudier la stabilité des états homogènes pour cette fonctionnelle. Cette énergie est très semblable à celle du modèle unidimensionnel étudié au chapitre précédent. Mis à part les coefficients de fractions volumiques qui viennent pondérer les termes de lénergie, la principale différence tient à la présence d'une rigidité résiduelle  $\chi_f E_f$ . La structure garde donc toujours une réserve d'élasticité qui va empêcher la contrainte de chuter à zéro. Ce terme résiduel va avoir des conséquences majeurs sur la nature des résultats de stabilité.

Avant de commencer l'étude de stabilité, on s'assure que les états homogènes sont possibles après passage à la limite, celui-ci ne supposant pas des coefficients de Poisson identiques. Puisque la rigidité résiduelle  $\chi_f E_f$  est indépendante de l'endommagement, sa dérivée par rapport à l'endommagement est nulle. Les valeurs du déplacement  $u_t$  et de l'état homogène  $\alpha_t$  donnés pour un allongement  $t$  par (2.27) et (2.31) restent donc toujours valables. On étudie alors de nouveau la stabilité de cet état  $(u_t, \alpha_t)$  mais pour la nouvelle fonctionnelle (3.45). La stabilité des états homogènes passe de nouveau par l'étude du signe de la dérivée seconde de l'énergie  $\bar{\mathcal{P}}_t$

calculée. En l'état homogène  $(u_t, \alpha_t)$  dans la direction admissible  $(v, \beta) \in \bar{\mathcal{C}}(0) \times \bar{\mathcal{D}}$ , celle-ci se lit

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) &= \int_0^1 \chi_m \hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \beta'^2 + 2\chi_m E_m'(\alpha_t) u_t' v' \beta \\ &\quad + (\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)) v'^2 + \chi_m \left( \frac{1}{2} E_m''(\alpha) u_t'^2 + w_m''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx \\ &= \chi_m \hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \int_0^1 \beta'^2 dx + (\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)) \int_0^1 \left( v' + \frac{\chi_m E_m'}{\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)} t \beta \right)^2 dx \\ &\quad - \chi_m \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2\chi_m E_m'(\alpha_t)^2}{\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)} - E_m''(\alpha_t) \right) t^2 - w_m''(\alpha_t) \right) \int_0^1 \beta^2 dx. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Pour mettre en évidence le quotient de Rayleigh associé, on rappelle que la condition d'adoucissement porte sur la loi d'endommagement du matériau adoucissant  $(E_m, w_m)$  et non sur la loi effective du matériau composite  $(\chi_f E_f + \chi_m E_m, w_m)$ . Il faut donc isoler dans un premier temps les contributions du matériau adoucissant dans la dérivée seconde de l'énergie. Du fait de la condition d'adoucissement du matériau endommageable,  $\alpha \mapsto 2w'(\alpha)/S'(\alpha)$  est une fonction décroissante et on a

$$0 < \frac{1}{2} S_m''(\alpha_t) (E_m(\alpha_t) t)^2 - w_m''(\alpha_t) = \frac{1}{2} \left( \frac{2E_m'(\alpha_t)^2}{E_m(\alpha_t)} - E_m''(\alpha_t) \right) t^2 - w_m''(\alpha_t). \quad (3.74)$$

En faisant apparaître dans la dérivée seconde, on en déduit que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) &= \chi_m \hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \int_0^1 \beta'^2 dx + (\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)) \int_0^1 \left( v' + \frac{\chi_m E_m'}{\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)} t \beta \right)^2 dx \\ &\quad - \chi_m \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2E_m'(\alpha_t)^2}{E_m(\alpha_t)} - E_m''(\alpha_t) \right) t^2 - w_m''(\alpha_t) \right) \int_0^1 \beta^2 dx \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$+ \frac{\chi_m \chi_f E_f E_m'(\alpha_t)^2 t^2}{(\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)) E_m(\alpha_t)} \int_0^1 \beta^2 dx. \quad (3.76)$$

Les signes de chacun des termes de l'énergie seconde sous cette écriture sont maintenant formellement identifiés et on peut construire le quotient de Rayleigh  $\bar{\mathcal{R}}_t : \bar{\mathcal{C}}(0) \times \bar{\mathcal{D}} \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_t(v, \beta) &= \frac{\chi_m \hat{w}_m \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \int_0^1 \beta'^2 dx + (\chi_f E_f + \chi_m E_m(\bar{\alpha}_t)) \int_0^1 \left( v' + \frac{\chi_m E_m'}{\chi_f E_f + \chi_m E_m(\bar{\alpha}_t)} t \beta \right)^2 dx}{\chi_m \left( \frac{1}{2} S_m''(\bar{\alpha}_t) (E_m(\bar{\alpha}_t) t)^2 - w_m''(\bar{\alpha}_t) \right) \int_0^1 \beta^2 dx} \\ &\quad + \frac{\chi_f E_f E_m'(\bar{\alpha}_t)^2 t^2}{\left( \frac{1}{2} S_m''(\bar{\alpha}_t) (E_m(\bar{\alpha}_t) t)^2 - w_m''(\bar{\alpha}_t) \right) (\chi_f E_f + \chi_m E_m(\bar{\alpha}_t)) E_m(\bar{\alpha}_t)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Bien que sa forme soit différente de celle du quotient de Rayleigh pour la barre adoucissante 1D ( $\chi_f = 0$ ), voir (2.18)), il se trouve que le minimum global sous contrainte de  $\bar{\mathcal{R}}_t$  se calcule de



façon identique. On aboutit alors à (voir l'Annexe A pour la preuve)

$$\left( \frac{1}{2} S_m''(\alpha_t) (E_m(\alpha_t) t)^2 - w_m''(\alpha_t) \right) \min_{\bar{c}(0) \times \bar{D}} \bar{\mathcal{R}}_t(v, \beta) = \frac{\chi_f E_f E_m'(\alpha_t)^2 t^2}{(\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t)) E_m(\alpha_t)} + \min \left( \frac{E_m'(\alpha_t)^2 t^2}{E_m(\alpha_t)}, \left( \frac{\sqrt{\hat{w}_m} \pi t^2 \chi_m E_m'(\alpha_t)^2 \hat{\ell}}{\chi_f E_f + \chi_m E_m(\alpha_t) L} \right)^{2/3} \right). \quad (3.78)$$

À nouveau, l'état homogène sera stable si (*resp.* seulement si)  $\min_{\bar{c}(0) \times \bar{D}} \bar{\mathcal{R}}_t$  est supérieur strict (*resp.* supérieur ou égal) à 1. Il devient alors possible de calculer explicitement cette valeur pour n'importe quelle loi d'endommagement  $(E_m, w_m)$ . En examinant (3.78), on remarque que, outre l'influence des effets d'échelle inhérents au modèle d'endommagement régularisé, le paramètre adimensionné  $\chi_f E_f / \chi_m E_m^0$  influence notablement le résultat de stabilité. Il caractérise entièrement l'essai PIED dans la limite des faibles épaisseurs. En faisant  $\chi_f E_f / \chi_m E_m^0 = 0$ , on retombe logiquement sur le critère de stabilité pour la barre purement adoucissante. Puisque l'essai PIED est bâti pour stabiliser les états diffus dans le matériau, on s'attend à ce que le paramètre  $\chi_m E_f / \chi_f E_m^0$  ait des vertus stabilisantes. On remarque alors que pour des ratios satisfaisant l'inégalité

$$\frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0} > \sup_{\alpha \in (0,1)} \frac{E_m(\alpha)^3 (S_m''(\alpha) w_m'(\alpha) - w_m''(\alpha) S_m'(\alpha))}{E_m^0 (E_m''(\alpha) w_m'(\alpha) - w_m''(\alpha) E_m'(\alpha))} \quad (3.79)$$

que l'état homogène devient inconditionnellement stable *i.e.* quel que soit l'allongement.

### 3.3.2.3 Exemples

On examine pour une loi d'endommagement donnée ces résultats de stabilité afin de mieux comprendre la compétition qui a lieu entre les effets d'échelle et les effets structurels. On reprend le modèle  $(E_m, w_m) = (E_m^0 (1-\alpha)^2, \hat{w}_m \alpha)$  utilisée pour la simulation numérique. Pour cette loi et à partir de l'équation (3.78), l'état sera stable pour l'allongement  $t \geq t_e$  ( $t_e$  étant l'allongement de fin de la phase élastique) si la longueur de la barre est telle que

$$L < 4\pi \frac{t_e}{t} \frac{\left( 1 + \frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0} (t/t_e)^4 \right)^{1/2}}{\left( 3 - \frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0} (t/t_e)^4 \right)^{3/2}} \hat{\ell}. \quad (3.80)$$

Pour chaque valeur de  $\chi_f E_f / \chi_m E_m^0$  est donc associée une courbe de stabilité. Pour cette loi, la fraction critique (3.79) au delà de laquelle l'état homogène est inconditionnellement stable pour toute longueur de barre est égale à 3. Dans ce cas le diagramme de stabilité devient trivial. On représente sur la Figure 3.8 le diagramme de stabilité pour un jeu de fractions  $\chi_m E_m^0 / \chi_f E_f$  inférieures à 3 pour lesquelles les effets d'échelle ont une influence. On constate qu'en choisissant

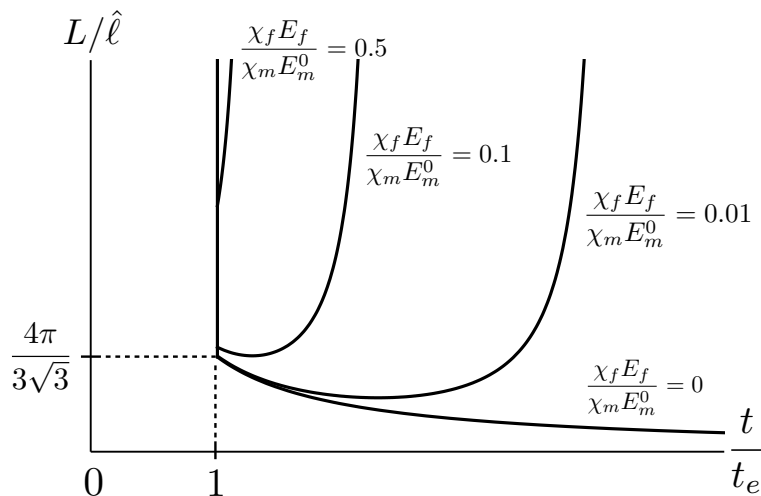


FIG. 3.8 – Stabilité des états homogènes pour différents ratio  $\frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0}$

correctement la longueur de barre, que la solution homogène sera instable dès la fin de la phase élastique puis redeviendra stable pour des temps assez longs, voir la Figure 3.8. Durant cette phase d'instabilité, l'état d'endommagement sera nécessairement non-homogène. Dans le cas de la barre purement adoucissante sous traction avec la même loi d'endommagement, la branche homogène redevient stable au bout d'un certain temps. On peut alors se poser la question de savoir s'il est possible, une fois avoir bifurquée vers cet état non-homogène à l'issue de la phase élastique, que la structure retombe sur cette branche homogène lorsque celle-ci regagne sa stabilité. À l'aide d'investigations numériques pratiquées sur le modèle réduit puis sur le modèle complet 2D, on tente donc de mettre en évidence les mécanismes ayant lieu durant ces phases d'instabilité.

### 3.3.2.4 Régime non-homogène

On s'intéresse maintenant au cas des ratios intermédiaires  $\chi_m E_m^0 / \chi_f E_f$  pour lesquels la branche homogène est instable à l'issue de la phase élastique. L'étude qui suit va donc au delà de l'objectif initial de l'essai PIED qui est de stabiliser les états homogènes. Ces investigations sont essentiellement d'ordre numérique et se basent de nouveau sur l'algorithme de minimisation alternée permettant de résoudre (en partie) le problème d'évolution. On l'applique d'abord au modèle réduit (3.45). Dans le cas de la loi  $(E_m, w_m) = (E_m^0 (1 - \alpha)^2, \sigma_m \alpha / E_m^0)$ , l'énergie totale (3.45) peut s'écrire :

$$\frac{\bar{P}_t(v, \beta)}{\chi_m E_m^0} = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} t_e^2 \frac{\hat{\ell}^2}{L^2} \beta'^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0} + (1 - \beta)^2 \right) v'^2 + t_e^2 \beta \right) dx. \quad (3.81)$$

Elle ne dépend donc que de 3 paramètres adimensionnés que sont  $t_e^2 \frac{\hat{\ell}^2}{L^2}$ ,  $\frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0}$  et  $t_e^2$ . On choisit pour illustrer notre propos le jeu de paramètres suivant

$$t_e = 1, \quad \frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0} = 0.25, \quad \frac{\hat{\ell}}{L} = 0.1, \quad \Delta t = 0.01 \quad (3.82)$$

Sur la Figure 3.9, on représente le profil d'endommagement obtenus numériquement pour

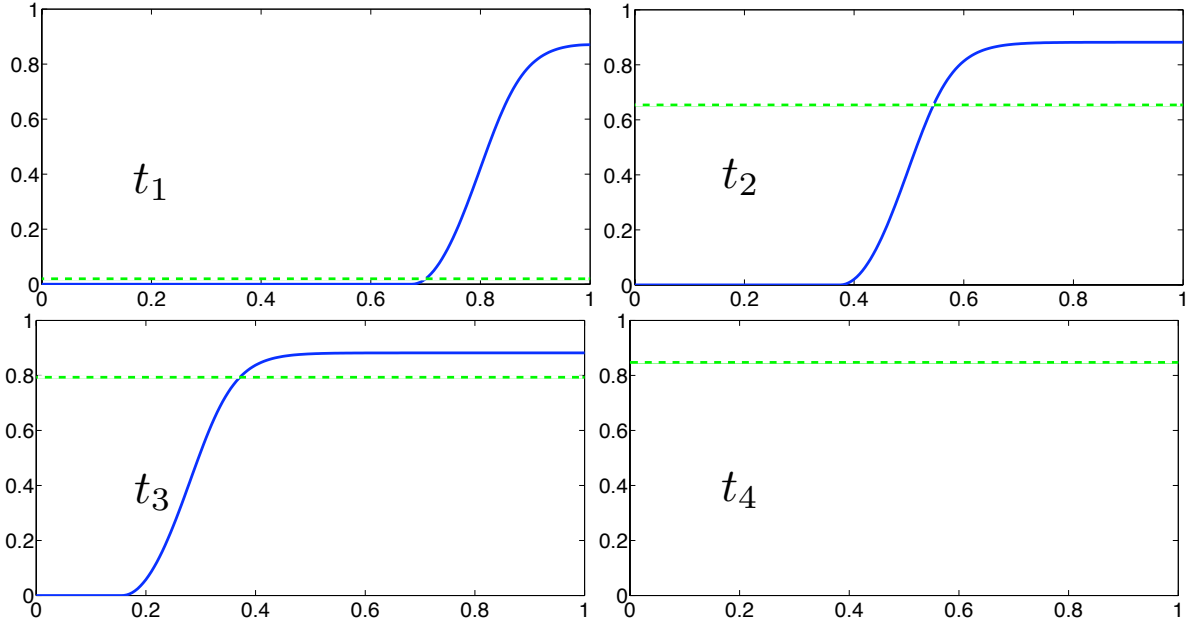


FIG. 3.9 – Profil d'endommagement aux temps  $t_1 = 1.01$ ;  $t_2 = 1.7$ ;  $t_3 = 2.2$ ;  $t_4 = 2.56$ . La courbe Verte Pointillée représente la branche homogène analytique tandis que la courbe Bleue représente la branche numérique

différents valeurs d'allongement (le nombre d'éléments finis est de 200). Jusqu'à  $t = 1$ , l'endommagement est bien nul dans la barre et la réponse est comme prévu élastique. À  $t = 1.01$ , la structure bifurque vers un demi-état localisé dont le support est indépendant de la taille de maille et qui se situe au bord du domaine. Sur cette demi-localisation l'endommagement atteint la valeur maximale de 0.88. Cette bifurcation vers un état localisé est bien en accord avec l'analyse de stabilité puisque la formule (3.80) nous dit que l'état homogène est instable dès la fin de la phase élastique. En poursuivant le chargement, on observe alors que contrairement à une barre purement adoucissante, la localisation ne continue pas à croître jusqu'à atteindre la valeur 1. La structure choisit au contraire d'étendre la localisation le long de la barre à la manière d'une transition de phase. Pour un allongement  $t$  donné, on peut en effet distinguer très clairement 3 zones :

- une zone où l'endommagement est nul,

- une zone où l'endommagement est quasiment constant à la valeur 0.88,
- une zone qui fait la transition entre les deux premières zones de façon régulière en espace.

À mesure que l'allongement augmente la taille de la première zone se réduit au profit de la deuxième zone. La valeur de l'endommagement dans cette zone reste pratiquement constante à la valeur 0.88 au cours du temps. Par ailleurs le profil de la zone de transition est quasiment identique à chaque pas de temps. Cette transition de phase se termine lorsque le front de transition atteint le bord opposé : toute la structure est alors endommagée à la même valeur et on se retrouve donc avec un état homogène. l'allongement de fin de transition  $t = 2.56$  se situe bien dans la zone de regain de stabilité de l'état homogène. En effet, d'après (3.80), l'état homogène redevient stable à partir de  $t = 1.64$ . La solution numérique reste alors jusqu'à la fin de l'essai sur la branche homogène redevenue stable. Cette rigidité résiduelle peut

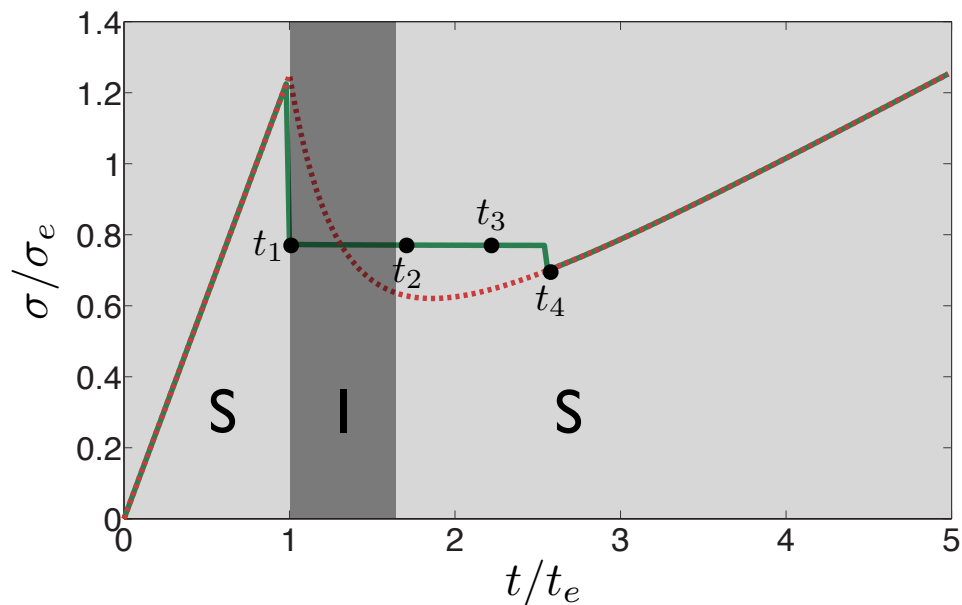


FIG. 3.10 – Courbe contrainte vs temps pour le modèle réduit. Les courbes en Rouge pointillé, Vert sont associés respectivement à la branche homogène, à la branche numérique du modèle réduit. La zone grise claire (*resp.* foncée) correspond au régime stable (*resp.* instable) de la branche homogène.

donc modifier les mécanismes d'endommagement en comparaison avec le modèle purement adoucissant si l'on veille à choisir correctement la longueur de la barre ainsi que la quantité de matériau incassable. On a représenté sur la Figure 3.10 les contraintes en fonctions du temps de chargement. Ces résultats étant obtenus dans le cadre du modèle réduit, on peut se demander si ces états non-homogènes persistent dans le cas du modèle complet 2D pour lequel aucune séparation d'échelle de longueur interne et d'épaisseur de la barre ne sont supposées.

On reprend donc les simulations numériques mais cette fois dans le cadre d'une barre avec les paramètres suivants

$$L = 1.0, \quad e_f = 0.01, \quad e_m = 0.02, \quad \hat{\ell} = 0.1, \quad E_f = 0.5, \quad E_m = 1, \quad \sigma_m = 1, \quad \nu_f = \nu_m = 0.2. \quad (3.83)$$

On fixe de nouveau le pas de temps à  $\Delta t = 0.01$ . Le ratio de  $\frac{\chi_f E_f}{\chi_m E_m^0}$  est donc de 0.25 et identique à celui utilisé en 1D. Cependant contrairement au modèle 1D, les paramètres adimensionnés  $E_f/E_m$  et  $\chi_f/\chi_m$  sont deux paramètres indépendants dans le modèle 2D.

Au cours d'une simulation, on constate que l'endommagement est nul jusqu'à  $t = 1.0$  qui correspond à la fin de la phase élastique. À partir de  $t = 1.0$ , l'endommagement commence à croître *mais* de façon homogène, ce qui est en contradiction avec l'instabilité de la phase homogène démontrée sur le modèle réduit. Cependant cette phase homogène s'arrête dès  $t = 1.05$ . On peut donc imaginer que ce léger retard avant la bifurcation est dû à la complexité des directions d'exploration possibles en 2D. À partir de cet allongement, un endommagement non homogène sous forme de localisation apparaît en bout de barre. Il correspond à un mécanisme de transition de phase identique au 1D, voir Figure 3.11. Ce profil est quasiment invariant dans la direction transverse à l'éprouvette et reste donc un mécanisme essentiellement 1D. On compare sur la Figure 3.12 le profil issu du modèle réduit et du modèle complet au temps  $t = 7.1$ . Mis à part un résidu d'endommagement dû au bref suivi de la branche homogène dans le cas 2D, on note que les profils sont quasiment identiques. De façon identique au 1D, cette transition

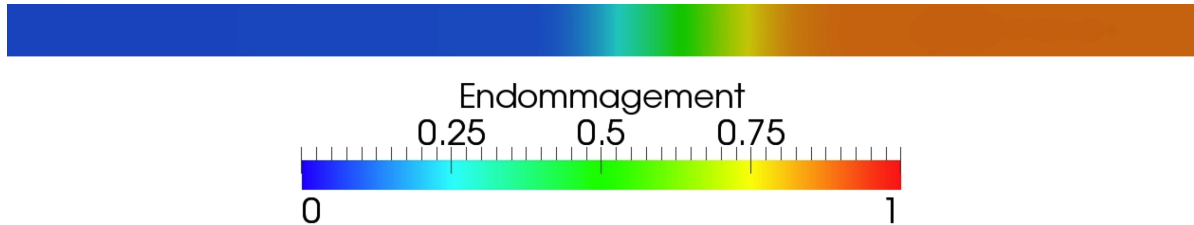


FIG. 3.11 – Profil d'endommagement dans la partie endommageable de la barre 2D composite à  $t=1.6$

de phase se termine lorsque le front de propagation atteint l'extrémité gauche de la barre. On obtient alors un endommagement totalement homogène. Cependant, contrairement au modèle réduit pour lequel on a d'une part montré que la branche homogène redevenait stable et d'autre part l'algorithme numérique ne bifurquait plus après être retombé sur cette branche à l'issue de la transition de phase, le modèle 2D se comporte sensiblement différemment. En effet, celui-ci continue à suivre la branche homogène jusqu'à  $t = 7$ . : pour cet allongement la structure est endommagée uniformément à la valeur 0.97. À partir de ce moment se développe une nouvelle bifurcation : elle correspond à un mécanisme de fissuration transverse : une série de localisations

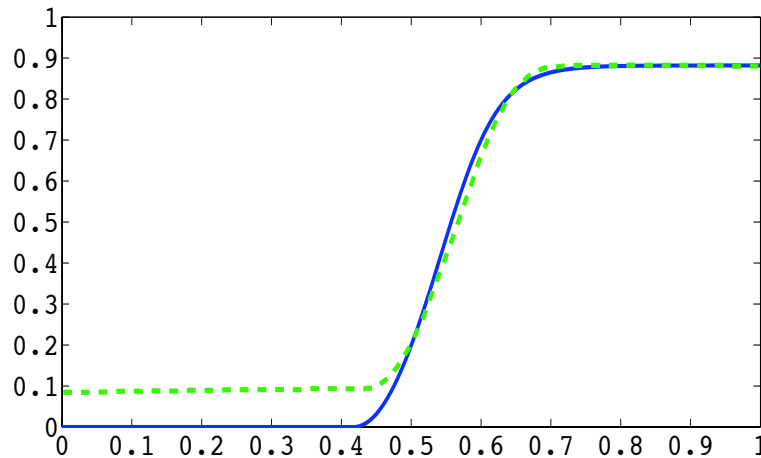


FIG. 3.12 – Profil d'endommagement numérique dans la barre composite 1D (Bleu plein) et sur la ligne  $y = 0$  dans la barre 2D (Vert pointillé) à  $t=1.6$

espacées périodiquement apparaît à partir de l'extrémité droite de la barre jusqu'à la recouvrir entièrement, voir Figure 3.13 et Figure 3.14. C'est une différence notable avec ce qu'on a pu observer dans le cas du modèle réduit. En effet ce dernier restait jusqu'à la fin de l'essai sur la branche homogène. On représente sur la Figure 3.15 la contrainte moyenne dans l'épaisseur

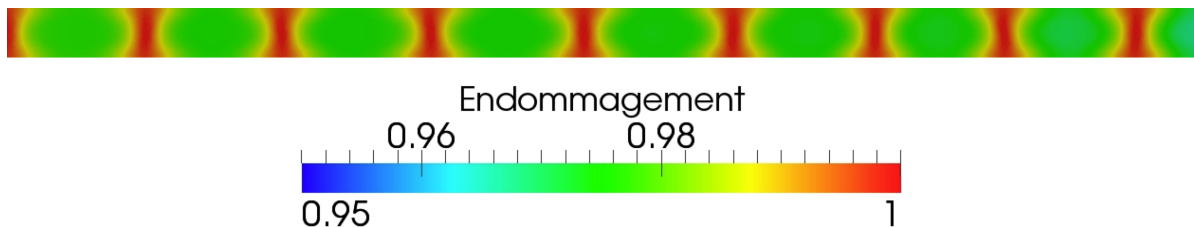


FIG. 3.13 – Profil d'endommagement dans la partie endommageable de la barre 2D composite à  $t=7.1$

en  $x = L$  en fonction du temps pour les simulations numériques à partir du modèle réduit, du modèle complet et pour la branche homogène analytique. On observe alors très clairement 3 phases successives

- une phase élastique,
- une phase à contrainte pratiquement constante,
- une phase durcissante jusqu'à la fin de l'essai.

Ces 3 phases correspondent précisément aux 3 mécanismes intervenant au cours de l'essai (phase élastique suivie d'une transition de phase et se terminant par une phase homogène). On remarque que la contrainte dans la barre durant la transition de phase est légèrement plus faible dans la barre 2D que celle dans le modèle réduit. Cela est dû au fait que la bifurcation a lieu

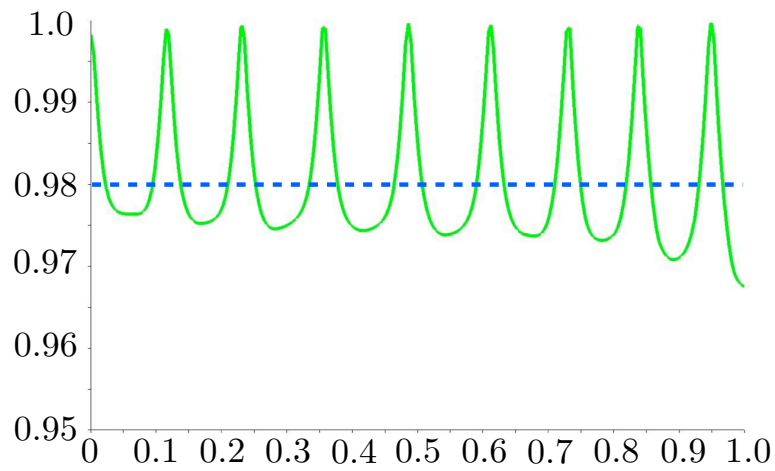


FIG. 3.14 – Profil d'endommagement sur la ligne  $y = 0$  dans la barre 2D (Droite) à  $t=7.1$ . La branche homogène correspond aux pointillés tandis que la branche numérique correspond aux trait plein

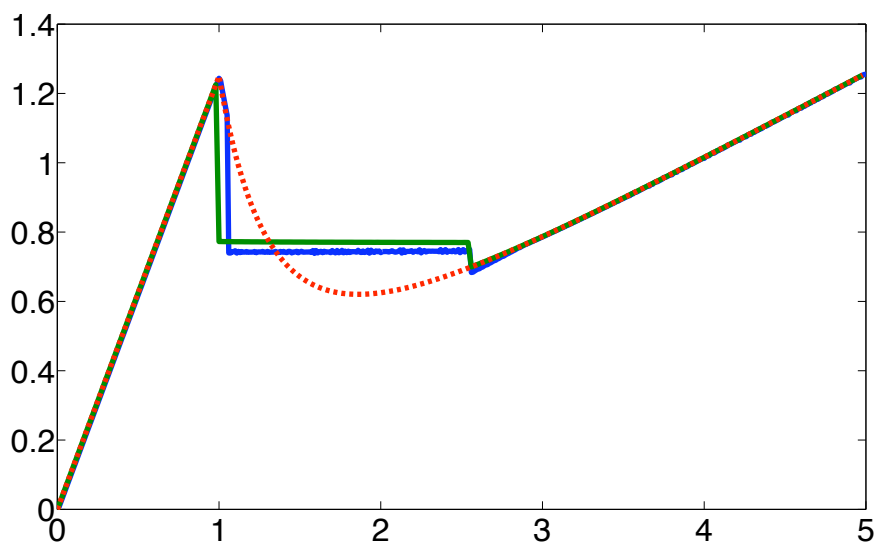


FIG. 3.15 – Courbe contrainte moyenne dans l'épaisseur en  $x = L$  vs temps. Les courbes en Rouge pointillé, Vert et Bleu sont associés respectivement à la branche homogène, à la branche numérique du modèle réduit et à la branche numérique du modèle 2D

ultérieurement dans l'essai 2D et qu'il y a donc un résidu d'endommagement homogène au moment de la bifurcation. Les deux branches retrouvent la branche homogène au même moment.

## Conclusions du Chapitre

On a abordé dans ce Chapitre la question pratique de l'identification des paramètres du modèle. Ayant pris le parti d'une approche phénoménologique dans l'introduction des termes en gradient d'endommagement et étudié ce modèle dans un cadre avant tout structurel, on a examiné ces questions d'identification en exploitant de la façon la plus exhaustive possible les résultats rigoureux établis dans le Chapitre 1 et le Chapitre 2 sur les états homogènes et localisés. Le modèle d'endommagement à gradient pour un matériau isotrope sans non-linéarité en traction-compression est en effet fixé par la donnée de 3 paramètres : la longueur interne, la loi de rigidité de Hooke et la loi de dissipation.

Pour identifier le paramètre de longueur interne, on a utilisé une équivalence énergétique entre l'énergie dissipée pour casser une barre en 2 morceaux en localisant l'endommagement et celle dissipée pour casser cette même barre en 2 morceaux dans le cadre de la rupture. Dans le cas du béton, on a trouvé une longueur raisonnable de l'ordre de la taille d'un agrégat.

Les lois de rigidité et de dissipation en supposant que le coefficient de Poisson ne dépende pas du niveau d'endommagement doivent être identifiées à l'aide d'au moins deux diagrammes expérimentaux issus d'un essai de traction simple. On a montré que les états homogènes avaient les propriétés idéales pour l'identification de ces lois. En effet, du fait de l'homogénéité des champs, les diagrammes au niveau global (*e.g.* force-déplacement) peuvent être reliés directement aux diagrammes locaux (*e.g.* contrainte-déformation). Cependant on a vu dans les Chapitres précédents que ces états homogènes n'étaient pas toujours observables selon qu'ils soient stables ou instables. L'idée a alors été d'exploiter cette perte de stabilité que l'on a mis en évidence dans le Chapitre 2 à l'aide du diagramme de stabilité pour obtenir les informations manquantes. À partir de différents exemples, on a alors montré la complémentarité des diagrammes contrainte-déformation et de stabilité : ce dernier peut en effet servir à différencier deux lois d'endommagement ayant la même réponse contrainte-déformation.

Dans un deuxième temps nous nous sommes concentrés sur l'essai PIED dont le but est de stabiliser les états homogènes en vue d'obtenir un diagramme contrainte-déformation le plus fiable possible. On a mis en évidence à partir de simulations numériques, que contrairement à une éprouvette de béton seule, l'essai PIED permettait de suivre la branche homogène jusqu'à un niveau d'endommagement élevé. À l'aide d'une étude asymptotique sur des barres de faible épaisseur, on a montré rigoureusement que la branche homogène pouvait effectivement devenir stable en collant une quantité suffisante de matériau incassable sur l'éprouvette de béton et permettre ainsi une identification fiable des lois d'endommagement. En revanche, pour des quantités insuffisantes de matériau incassable, des comportements surprenants peuvent apparaître tels que



des endommagements par transition de phase ou par fissuration transverse.

# Conclusion

## Résumé

Ce travail a porté sur la construction puis l'analyse d'un modèle général d'endommagement à gradient. L'objectif principal était de mettre en place un problème d'évolution associé à un cadre adapté à ce type de modèle pour permettre d'une part une meilleure modélisation et compréhension des phénomènes adoucissants et d'autre part offrir un traitement mathématique rigoureux à l'aide du Calcul des Variations. On a montré sur plusieurs exemples que ce modèle conduisait à toute une zoologie de comportements possibles. Le traitement numérique en vue d'une utilisation dans un code de calcul industriel est quant à lui très prometteur puisqu'il s'appuie sur une formulation variationnelle du problème étudié d'ors et déjà en détails dans le cadre de l'approche variationnelle de la rupture [8].

On présente un résumé des principaux résultats et contributions originales du manuscrit avant d'ouvrir sur les perspectives de travail possible.

## Approche variationnelle pour l'endommagement

La construction du modèle d'endommagement régularisé repose sur des bases qui prennent leurs racines dans des théories et des concepts éprouvés. Les deux piliers de la formulation sont

- **Le comportement local endommageable du matériau** : celui-ci repose sur un modèle local à variable d'endommagement scalaire dont le caractère standard n'a pas été postulé mais a été justifié à partir d'arguments thermodynamiques. Le travail de déformation d'un point matériel dans un cycle de déformation est une fonction d'état, ce qui rend possible l'usage des approches énergétiques. Les propriétés d'écrouissage, de durcissement et d'adoucissement ont été définies formellement en termes de monotonie des domaines d'élasticité. On a montré que, moyennant un bon choix de variable d'endommagement, ces dernières pouvaient s'identifier à des propriétés de convexité ou de concavité sur le travail des déformations.
- **Le problème d'évolution quasi-statique** : La formulation classique de celui-ci en termes d'équilibre mécanique et de conditions de Kuhn-Tucker locales pour l'évolution de l'endommagement n'est pas toujours adaptée à l'usage de tous les matériaux. En effet, mises sous une forme variationnelle en vertu du caractère standard, les théorèmes classiques d'analyse convexes s'appliquent que pour des matériaux strictement durcissants pour lesquels on peut assurer l'existence voire l'unicité de la solution du problème d'évolution. Pour les matériaux adoucissants, le caractère bien posé du problème est perdu. La formulation classique ne suffit pas à départager les solutions en cas de perte d'unicité. Il nous a

donc été nécessaire d'introduire d'une part un critères de sélection et d'autre part un bilan d'énergie sous forme global ne faisant pas intervenir les vitesses des champs pour gérer les possibles évolutions non-régulières en temps. Ces deux outils conceptuels qui ont fait leurs preuves dans le cadre de l'approche variationnelle de la mécanique de la rupture sont donc adaptés à la mécanique de l'endommagement. Ils font tous les deux une utilisation forte du cadre énergétique puisque le critère de sélection consiste à ne retenir que les minima locaux unilatéraux de l'énergie pour un chargement donné tandis que la conservation de l'énergie conduit à exiger une absolue continuité de l'énergie potentielle par rapport au temps.

C'est donc uniquement dans ce cadre d'évolution constitués des trois principes physiques d'irréversibilité de l'endommagement, de stabilité directionnel et de conservation d'énergie que l'on a cherché, retenu, voire rejeté des solutions du problème. On a alors montré que même pour des matériaux adoucissants avec un modèle local d'endommagement, il existait des états (homogènes) pouvant satisfaire toutes les conditions requises par le problème d'évolution. Il faut pour cela bien choisir le matériau (loi d'endommagement, coefficient de Poisson) et envisager des chargement biaxiaux voire triaxiaux à déplacement imposé. En revanche, dans une situation plus classique telle qu'un essai de traction simple sur une barre, on a montré qu'aucun état d'équilibre en phase d'endommagement vérifiant le critère n'est stable. Pour éviter ce genre de situation on a donc enrichi le modèle local tout en préservant la formulation énergétique du problème d'évolution quasi-statique.

Au delà du choix (arbitraire) de la variable à régulariser, l'originalité de notre régularisation du modèle tient plus sur la manière de régulariser. En effet, là où les régularisations à l'aide de termes d'ordre supérieur se font directement sur les équations fortes du problème, on a choisi ici d'agir directement sur la densité de travail des déformations en développant celle-ci jusqu'aux termes du second ordre en endommagement. Sous une hypothèse d'isotropie du matériau (mais en tenant compte d'une possible dissymétrie en traction-compression), la nouvelle forme du travail de déformation ne diffère de la forme "locale" que par la présence supplémentaire d'un terme quadratique en gradient d'endommagement. Tout l'avantage de cette régularisation est de préserver le cadre énergétique et variationnel introduit en amont. Le problème d'évolution se lit donc formellement de la même façon à la différence près que la densité de travail de déformation en un point matériel est non-locale. Le modèle est alors déterminé *a priori* par 3 fonctions matériau dépendant du paramètre d'endommagement : la rigidité, la densité d'énergie de dissipation et la longueur interne . Par un changement de variable d'endommagement on peut alors s'affranchir de la dépendance en l'endommagement de la longueur interne.

On a illustré alors les bienfaits de la régularisation en revenant sur la recherche d'état homogène respectant le problème d'évolution. Bien que la valeur de ces champs ne soit pas modifiée par la régularisation, leur stabilité dépend maintenant des effets d'échelle. En effet on montre que contrairement au modèle local, il est toujours possible sous déplacement imposé de rendre

stables des états homogènes avec le modèle régularisé pour des structures de tailles assez petites.

### Étude d'une barre sous traction simple

Contrairement à l'approche variationnelle de la rupture, il n'existe pas de résultats mathématiques généraux portant sur l'existence de solutions au problème d'évolution pour un modèle d'endommagement à gradient. La régularisation du modèle introduit une échelle de longueur dans le matériau et complique sérieusement l'analyse puisque les effets structurels (taille et forme de la structure) jouent un rôle décisif. En effet sur un exemple unidimensionnel, on a montré que le modèle régularisé muni du cadre énergétique d'évolution offrait un panorama de résultats suffisamment complexes pour se garder de tirer des conclusions actives sur le sujet.

Tout d'abord la construction explicite des états localisés pour une large famille de lois d'endommagement nous a permis d'obtenir des résultats précis sur ces derniers. On a retrouvé en premier lieu que la localisation d'endommagement a toujours une taille finie proportionnelle à la longueur interne. Deuxièmement, la taille de la structure modifie fortement la réponse globale puisque pour des barres assez longues la localisation sera nécessairement brutale, due à la présence d'un snap-back dans le diagramme contrainte-déformation moyenne. L'allure de la réponse globale est aussi très sensible au choix de la loi d'endommagement : tous les types de courbes sont envisageables avec en particulier des barres qui peuvent se casser pour des déplacements finis, infinis voire nuls.

Par ailleurs, le cadre unidimensionnel permet de mieux comprendre la pertinence des critères de sélection tels que ceux de non-bifurcation et de stabilité dans un environnement non-local. On a montré que le critère de non-bifurcation en un point de la branche homogène est invalidé dès qu'il existe une branche bifurquée correspondant à une demi-localisation partant de ce point. En revanche l'instabilité de la branche homogène ne conduit pas nécessairement à une évolution discontinue en temps. Enfin on a montré que l'utilisation du principe de conservation d'énergie permet bel et bien de continuer à respecter le problème d'évolution même dans le cas d'évolution non-régulière là où les écritures en vitesse" du bilan d'énergie ne le permettent plus.

### Identification des lois d'endommagement

Ce volet plus pratique a traité de l'identification des paramètres du modèle. La longueur interne au modèle s'identifie à partir d'une analogie énergétique entre la mécanique de la rupture et la mécanique de l'endommagement dans un essai de traction simple. En comparant l'énergie dissipée par unité de surface dans la création d'une localisation et la densité d'énergie de surface  $G_c$  pour créer une fissure, on aboutit à une valeur de la longueur interne. Calculée dans le cas du béton, on trouve une valeur qui est de l'ordre de la dizaine de cm et qui est en accord avec les règles de calculs usuelles. En revanche la loi de rigidité et la loi de dissipation étant des fonctions de l'état d'endommagement sont de fait plus délicates à identifier. Les études théoriques

des deux premiers chapitres nous ont permis de mettre en évidence plusieurs courbes pouvant contribuer à l'identification de ces lois. Tout d'abord la réponse globale force-déplacement pour des états homogènes est en réalité une courbe intrinsèque au matériau qui donne une première relation entre ces deux fonctions. Cependant, dus aux effets d'échelle, on a montré dans le premier chapitre que ces états n'étaient pas toujours stables (et donc observables). La stabilité ou l'instabilité de ces états selon la taille de la structure fournit précisément un second diagramme de stabilité dans lequel on représente la taille critique d'instabilité en fonction du temps de chargement. La connaissance analytique (ou numérique) et expérimentale de ces deux diagrammes permet alors en principe de remonter aux deux lois d'endommagement.

L'observabilité des états homogènes étant sensibles à la taille de l'échantillon, on étudie dans un second temps l'essai PIED qui permet de forcer l'homogénéité du champs de déformation dans le béton. Une modélisation numérique de l'essai est alors entreprise à l'aide de l'algorithme de minimisation alternée utilisé dans l'approche variationnelle de la rupture. On observe que les états homogènes sont observables jusqu'à un certain temps après lequel survient dans l'échantillon de béton la fissuration transverse. Pour mieux comprendre cet essai, on suppose l'épaisseur de l'échantillon petite devant les autres longueurs ce qui nous permet d'aboutir à un modèle réduit 1D de l'essai PIED. Sur ce modèle simplifié, on a mis en évidence le lien entre la stabilité des états homogènes et la quantité de matériau incassable collé à l'éprouvette de matériau endommageable. Par ailleurs, pour certaines quantités de matériau incassable, on a mis en évidence un régime intermédiaire en cas d'instabilité de l'état homogène. Des expériences numériques ont montré que ces régimes alternatifs consistent en une transition de phase progressive entre le matériau sain et un matériau endommagé de façon homogène.

## Perspectives

Les perspectives pour l'étude de ces modèles d'endommagement sont nombreuses et couvrent une multitude de domaines. Sur le plan théorique on peut envisager d'étudier d'autres types de régularisation tels que l'introduction de gradient de déformation dans la densité de travail de déformation et comparer les résultats avec ceux de ce manuscrit sur des cas académiques (barre en traction). Il s'agirait aussi de justifier la présence des ces termes régularisants par une approche micromécanique, ce qui n'existe pas à notre connaissance dans la littérature pour des matériaux adoucissants. Un point difficile serait l'obtention de résultats généraux sur l'existence et la régularité de solutions au problème d'évolution. En effet on a vu que l'endommagement pouvait localiser jusqu'à atteindre la valeur ultime pour un déplacement critique *fini*. Au delà de ce chargement critique, il faut donc envisager des sauts de déplacement comme en mécanique de la rupture et modifier le choix des espaces fonctionnels (espace à variations bornées). Par ailleurs, les réponses globales des chemins localisés sur la barre en traction ne sont pas sans rappeler celles obtenues dans le cadre des lois cohésives. Il serait donc intéressant de comprendre

le lien entre ces deux théories et chercher s'il est possible de passer d'un modèle à l'autre par une convergence en énergie ou des méthodes asymptotiques comme il a été fait en mécanique de la rupture. Enfin, on peut se demander s'il est possible de généraliser aux dimensions 2 et 3 le lien entre l'invalidation du critère de non-bifurcation et l'apparition effective d'une bifurcation dans la structure.

Sur un plan pratique, il s'agirait de trouver un algorithme qui puisse tester la stabilité d'une solution trouvée à l'issue de la minimisation alternée. Il n'existe d'ailleurs pas à ce jour de moyen numérique pour connaître la définie-positivité d'une forme quadratique sous contrainte de positivité.

Une difficulté supplémentaire est la prise en compte du comportement unilatéral. Tel qu'il est formulé, le modèle d'endommagement à gradient peut prendre en compte ce type de non-linéarité. Néanmoins en pratique, le rapport élevé entre la résistance à la compression et à traction rend délicate l'écriture tridimensionnelle du modèle.

Il faudrait par la même occasion repenser les conditions de stabilité du second ordre qui supposent une différentiabilité suffisante de la densité du travail des déformation que l'on perd lorsqu'on vient à prendre en compte le comportement unilatéral du béton.

Enfin il reste la nature des conditions aux limites à imposer à l'endommagement. On a envisagé dans ce travail de laisser l'endommagement libre de se développer sur le bord du domaine mais on peut tout aussi bien décréter des conditions de Dirichlet. Une solution plus intéressante serait d'élargir suffisamment le domaine d'étude en modélisant la machine d'essai avec un matériau lui même non-local endommageable et de laisser la structure gérer elle-même l'évolution de l'endommagement aux interfaces (via les conditions d'optimalité).

Sur le plan expérimental, on peut envisager des expériences de traction simple sur des éprouvettes de différentes tailles dans le but d'obtenir le diagramme de stabilité des états homogènes. On pourrait aussi imaginer reprendre l'essai de PIED en diminuant la quantité d'aluminium. L'objectif serait de mettre en évidence le régime des transitions de phases et de fissurations transverses observées numériquement.

L'étude des modèles d'endommagement à gradient pour modéliser l'adoucissement dans les matériaux reste donc un sujet foisonnant de questions ouvertes. Au-delà des défis scientifiques qu'elle offre sur le plan mécanique, mathématique voire numérique, elle nous semble avant tout fondamentale dans l'optique d'une utilisation industrielle sérieuse.



# Annexe

---

## Étude des quotients de Rayleigh 1D

On considère le quotient de Rayleigh  $\mathcal{R} : H^1(0, 1) \mapsto \mathbb{R}$  défini par

$$\mathcal{R}(\beta) = \frac{a \int_0^1 \beta'(x)^2 dx + b \left( \int_0^1 \beta(x) \right)^2}{\int_0^1 \beta(x)^2 dx} \quad (\text{A.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs. On présente dans cette Annexe la minimisation effective de ce quotient sur différents espaces fonctionnels. On commence par le

**Lemme A.1.** *L'infimum sur  $H^1(0, 1)$  de  $\mathcal{R}$  est atteint et vaut*

$$\inf_{H^1(0,1)} \mathcal{R} = \min(b, a\pi^2) \quad (\text{A.2})$$

*Démonstration.* On montre d'abord que l'infimum est un minimum atteint dans  $H^1(0, 1)$ . Soit  $\lambda = \inf_{H^1(0,1)} \mathcal{R}$ . Il existe une suite minimisante  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H^1(0, 1)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(\beta_n) = \lambda. \quad (\text{A.3})$$

Quitte à renormaliser cette suite de fonctions (ce qui ne change en rien la limite (A.3)), on peut supposer en outre pour tout  $n$  que  $\|\beta_n\|_{L^2} = 1$ . Par ailleurs  $\lambda$  étant l'infimum du quotient de Rayleigh, il est borné par  $\mathcal{R}(1)$ . À une extraction près, on a pour tout  $n$  que  $\mathcal{R}(\beta_n) \leq \mathcal{R}(1)$ . On en déduit alors que  $(\beta_n)$  est borné dans  $H^1(0, 1)$ . Quitte à en extraire une sous-suite, elle converge donc faiblement dans  $H^1(0, 1)$  vers un élément  $\bar{\beta}$  de  $H^1(0, 1)$ . En vertu de l'injection compacte de  $H^1$  dans  $L^2$ , il existe donc une sous-suite minimisante de  $(\beta_n)$  telle que celle-ci converge fortement dans  $L^2$  vers  $\bar{\beta}$ . L'application  $f \mapsto \int \beta^2$  étant semi continu inférieurement faible dans  $L^2$ , on en déduit que  $\liminf \int_0^1 \beta_n'^2 \geq \int_0^1 \bar{\beta}'^2$ . Par ailleurs  $\beta_n$  convergeant aussi faiblement dans  $L^2$ , on a que  $\lim \int_0^1 \beta_n = \int_0^1 \bar{\beta}$ . Finalement en rassemblant les différentes limites, on trouve que  $\lambda = \liminf \mathcal{R}(\beta_n) \geq \mathcal{R}(\bar{\beta})$ . Comme  $\bar{\beta}$  appartient à  $H^1(0, 1)$ , on a l'inégalité inverse et l'infimum est donc bien un minimum.



Explicitons à présent la valeur de  $\bar{\beta}$ . La condition d'optimalité du premier ordre se lit

$$\mathcal{R}'(\bar{\beta})(\beta - \bar{\beta}) \geq 0, \quad \forall \beta \in H^1(0, 1). \quad (\text{A.4})$$

Un calcul direct nous fait aboutir à la formulation variationnelle

$$a \int_0^1 \bar{\beta} \beta dx + b \int_0^1 \beta dx \int_0^1 \bar{\beta} dx - \lambda \int_0^1 \bar{\beta} \beta dx = 0, \quad \forall \beta \in H^1(0, 1). \quad (\text{A.5})$$

On a bien une égalité dans (A.5) puisqu'on a le choix du signe des fonctions test dans  $H^1(0, 1)$ . En intégrant par parties, on aboutit à la formulation forte du système

$$\begin{cases} a\bar{\beta}''(x) + \lambda\bar{\beta}(x) = b \int_0^1 \bar{\beta} & \forall x \in (0, 1), \\ \bar{\beta}'(0) = \bar{\beta}'(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

On pose  $w = \sqrt{\lambda/a}$ . La solution générale de (A.6) est

$$\bar{\beta}(x) = A \cos wx + B \sin wx + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta} \quad (\text{A.7})$$

Les conditions aux limites naturelles (A.6) imposent que  $B = 0$  et que

$$A \sin w = 0. \quad (\text{A.8})$$

Par ailleurs en intégrant sur  $(0, 1)$  l'équation (A.7), on trouve une relation nécessaire à satisfaire

$$\left(1 - \frac{b}{\lambda}\right) \int_0^1 \bar{\beta} = \frac{A}{w} \sin w = 0. \quad (\text{A.9})$$

On distingue alors deux cas :

- a) soit  $\int_0^1 \bar{\beta} \neq 0$  et nécessairement  $\lambda = b$  d'après (A.16) et un choix possible est  $\bar{\beta} = 1$ ,
- b) soit  $\int_0^1 \bar{\beta} = 0$  et  $w = \pi$  d'après (A.8). Finalement on en déduit que  $\lambda = \min(b, a\pi^2)$ .  $\square$

La deuxième minimisation du quotient de Rayleigh se fait sur l'ensemble convexe  $\mathcal{D} = \{\beta \in H^1(0, 1) \mid \beta \geq 0 \text{ p.p.}\}$ . On a le

**Lemme A.2.** *L'infimum sur  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{R}$  est atteint et vaut*

$$\inf_{\mathcal{D}} \mathcal{R} = \min \left( b, (ab^2\pi^2)^{1/3} \right) \quad (\text{A.10})$$

*Démonstration.* La preuve de l'atteignabilité en un élément  $\bar{\beta} \in \mathcal{D}$  est identique à celle de la Proposition précédente à ceci près que la positivité de  $\bar{\beta}$  provient du fait que la suite minimisante  $(\beta_n) \in \mathcal{D}$  converge fortement dans  $L^2$  et que l'on peut toujours extraire une sous-suite

convergeant presque partout vers  $\beta_0$ . Puisque les  $(\beta_n)$  sont positifs presque partout, on en déduit en passant à la limite presque partout que  $\beta_0$  est positive.

Établissons maintenant la valeur de l'infimum. La condition d'optimalité du premier ordre se lit

$$\mathcal{R}'(\bar{\beta})(\beta - \bar{\beta}) \geq 0, \quad \forall \beta \in \mathcal{D}. \quad (\text{A.11})$$

En posant de nouveau  $\lambda = \inf_{\mathcal{D}} \mathcal{R}$ , un calcul direct nous fait aboutir à la formulation variationnelle

$$a \int_0^1 \bar{\beta} \beta dx + b \int_0^1 \beta dx - \lambda \int_0^1 \bar{\beta} \beta dx \geq 0, \quad \forall \beta \in \mathcal{D}. \quad (\text{A.12})$$

L'inégalité dans (A.12) provient du fait que l'on ne peut choisir que des fonctions positives dans  $\mathcal{D}$ . En intégrant par parties, on aboutit à la formulation forte du système

$$\begin{cases} a\bar{\beta}''(x) + \lambda\bar{\beta}(x) \leq b \int_0^1 \bar{\beta} & \forall x \in (0, 1), \\ \bar{\beta}(x) \left( a\bar{\beta}''(x) + \lambda\bar{\beta}(x) - b \int_0^1 \bar{\beta} \right) = 0 & \forall x \in (0, 1), \\ \bar{\beta}'(0) \leq 0, \quad \bar{\beta}'(1) \geq 0, \quad \bar{\beta}(0)\bar{\beta}'(0) = 0, \quad \bar{\beta}(1)\bar{\beta}'(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

On pose  $w = \sqrt{\lambda/a}$ . Sur toutes les segments de la forme  $(x_0, x_1)$  où  $\bar{\beta} > 0$  et où donc le critère différentiel est une égalité, la solution générale s'écrit

$$\bar{\beta}(x) = A \cos wx + B \sin wx + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta}. \quad (\text{A.14})$$

Les conditions d'optimalité font que  $\bar{\beta}$  est  $C^1$  sur  $(0, 1)$ . Dans le cas où  $x_0$  ou  $x_1$  sont différents de 0 ou 1, on a donc par continuité que  $\bar{\beta}(x_0) = \bar{\beta}'(x_0) = 0$  et  $\bar{\beta}(x_1) = \bar{\beta}'(x_1) = 0$ .

Supposons tout d'abord que  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 1$ . Dans ce cas là les conditions aux limites naturelles imposent nécessairement que  $\bar{\beta}'(0) = \bar{\beta}'(1) = 0$ . En effet dans le cas contraire, en supposant que  $\bar{\beta}'(0) < 0$  (ou bien  $\bar{\beta}'(1) > 0$ ), on a que  $\bar{\beta}(0) = 0$  et on en déduit par continuité que dans un voisinage de 0 que  $\bar{\beta}$  est strictement négatif. Ceci est en contradiction avec la positivité de  $\bar{\beta}$ . La relation (A.13) impose alors que  $B = 0$  et que

$$A \sin w = 0. \quad (\text{A.15})$$

Par ailleurs en intégrant sur  $(0, 1)$  l'équation (A.7), on trouve une relation nécessaire à satisfaire

$$\left(1 - \frac{b}{\lambda}\right) \int_0^1 \bar{\beta} = \frac{A}{w} \sin w = 0. \quad (\text{A.16})$$

Puisque  $\int_0^1 \bar{\beta} > 0$  alors on aboutit nécessairement dans ce cas là à  $\lambda = b$  et un choix possible est  $\bar{\beta} = 1$ .

Supposons maintenant que l'on a égalité sur le bord du domaine et que  $x_0 = 0$  et  $x_1 = D$  et que sur le reste de la barre que  $\bar{\beta} = 0$ . Dans ce cas les conditions aux limites naturelles (A.6) imposent que  $B = 0$  et que

$$A \sin wD = 0. \quad (\text{A.17})$$

Par ailleurs en intégrant sur  $(0, 1)$  l'équation (A.14) et en tenant compte du fait que  $\bar{\beta} = 0$  sur  $(D, 1)$ , on trouve une relation nécessaire à satisfaire

$$\left(1 - \frac{bD}{\lambda}\right) \int_0^1 \bar{\beta} = A \sin wD = 0. \quad (\text{A.18})$$

Puisque  $\int_0^1 \bar{\beta}$  est strictement positif (sinon  $\bar{\beta}$  est identiquement nul) alors on a

$$\lambda = bD, \quad wD = \pi \quad (\text{A.19})$$

On en déduit dans ce cas là que  $\lambda = (ab^2\pi^2)^{1/3}$ .

Sans détailler, en considérant toutes les autres configurations possibles (*e.g.* plusieurs segments où le critère différentielle est atteint), on aboutit toujours à des valeurs de  $\lambda$  supérieures. En prenant le minimum entre  $b$  et  $(ab^2\pi^2)^{1/3}$  on aboutit bien au résultat désiré.  $\square$

On pose  $\mathcal{D}_0 = \{\beta \in H^1(0, 1) \mid \beta \geq 0, \beta(0) = \beta(1) = 0\}$ .

**Lemme A.3.** *Supposons que  $a = 1/(4\pi^2)$  et que  $b > 1$ . Dans ce cas, l'infimum sur  $\mathcal{D}_0$  de  $\mathcal{R}$  donné par (A.1) est tel que*

$$\inf_{\mathcal{D}_0} \mathcal{R} > 1 \quad (\text{A.20})$$

*Démonstration.* Ce sont les conditions aux limites qui sont différentes par rapport au cas précédent. Celles-ci sont à présent de Dirichlet. Supposons dans un premier temps que le critère est atteint sur  $(0, 1)$ . Dans ce cas là, en posant  $w^2 = \lambda/a$  avec  $\lambda = \inf_{\mathcal{D}_0} \mathcal{R}$ . Toujours pour les mêmes raisons que pour les preuves précédentes, le profil du champ optimal  $\bar{\beta}$  là où le critère est atteint se lit

$$\bar{\beta}(x) = A \cos wx + B \sin wx + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta} \quad \text{pour } x \in (0, 1) \quad (\text{A.21})$$

Les conditions aux limites imposent que

$$\begin{cases} A + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta} = 0, \\ A \cos w + B \sin w + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta} = 0, \\ A \frac{\sin w}{w} + B \frac{1 - \cos w}{w} + \left(\frac{b}{\lambda} - 1\right) \int_0^1 \bar{\beta} = 0, \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

où la dernière équation est la condition de consistance imposée lorsqu'on intègre (A.21) sur  $(0, 1)$ . Puisque d'après (A.22) on a que  $A = -\frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta}$ , le système à résoudre se réduit à

$$\begin{cases} B \sin w + \frac{b}{\lambda}(1 - \cos w) \int_0^1 \bar{\beta} = 0, \\ B \frac{1 - \cos w}{w} + \left(\frac{b}{\lambda}(1 - \frac{\sin w}{w}) - 1\right) \int_0^1 \bar{\beta} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Supposons d'abord que  $\sin w = 0$ . Dans ce cas,  $w$  est un multiple de  $\pi$ . D'après la première ligne de (A.23), puisque  $\int_0^1 \beta > 0$  (sinon  $\beta$ , étant positif, serait nul), on a aussi que  $\cos w = 1$ . On trouve donc nécessairement que  $w = 2\pi$ . La dernière ligne de (A.23) impose quant à elle que  $\lambda = b$ . Puisque  $w^2 = \lambda/a$ , on aboutit à  $b/a = 4\pi^2$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

On peut donc supposer dorénavant que  $\sin w \neq 0$ . Dans ce cas, on tire de (A.23)

$$\left(\frac{b}{\lambda} \left(1 - \frac{\sin w}{w}\right) - 1 - \frac{b}{\lambda} \frac{(1 - \cos w)^2}{w \sin w}\right) \int_0^1 \bar{\beta} = 0 \quad (\text{A.24})$$

En utilisant que  $\int_0^1 \beta > 0$  et que  $\lambda = aw^2$ , on aboutit à l'équation

$$\frac{a}{b} = g(w) \quad (\text{A.25})$$

où l'on a posé  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par

$$g(w) = \frac{1}{w^2} \left(1 - \frac{2 - 2 \cos w}{w \sin w}\right) = -\frac{1}{w^2} \left(\frac{2 - 2 \cos w - w \sin w}{w \sin w}\right). \quad (\text{A.26})$$

Sur  $(0, \pi)$ ,  $g$  est une fonction strictement négative. En effet la fonction  $w \mapsto 2 - 2 \cos w - w \sin w$  est strictement positive sur  $(0, \pi)$  car strictement convexe sur  $(0, \pi)$ , nulle en  $w = 0$  ainsi qu'à dérivée nulle en  $w = 0$ . L'équation (A.26) n'est donc possible que pour  $w > \pi$ . Pour  $\pi < w < 2\pi$ , on a la minoration suivante,

$$g(w) \geq \frac{1}{w^2} > \frac{1}{4\pi^2} \quad (\text{A.27})$$

Or puisque par hypothèse  $a/b < 1/4\pi^2$ , on en déduit que (A.26) n'est possible que pour  $w > 2\pi$ . Puisque  $w^2 = \lambda/a$  et que  $1/a = 4\pi^2$ , on en déduit que dans ce cas là on aura nécessairement  $\lambda > 1$ .

Supposons à présent que le critère soit atteint sur une zone à support inclus dans  $(0, 1)$ . En appelant  $D$  la taille de la zone, on a, quitte à translater le support en 0 (l'équation étant invariante par translation)

$$\bar{\beta}(x) = A \cos wx + B \sin wx + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta} \quad \text{pour } x \in (0, D) \quad (\text{A.28})$$

En vertu de la régularité du profil optimal, on a les conditions aux limites  $\bar{\beta}(0) = \bar{\beta}'(0) = 0$  et  $\bar{\beta}(D) = \bar{\beta}'(D) = 0$ . On aboutit alors au système

$$\begin{cases} A + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta} = 0, & B = 0, \\ A \cos wD + \frac{b}{\lambda} \int_0^1 \bar{\beta} = 0, & -wA \sin wD = 0, \\ A \frac{\sin wD}{w} + \left(\frac{bD}{\lambda} - 1\right) \int_0^1 \bar{\beta} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

On tire de (A.29) d'une part que  $\sin wD = 0$  et  $\cos wD = 1$ , d'où  $wD = 2\pi$  et d'autre part que  $\lambda = bD$ . On en déduit que  $\lambda^3 = 4\pi^2 ab^2 = b^2$  et  $D^3 = 1/b$  puisque  $a = 1/(4\pi^2)$ . Or par hypothèse  $b > 1$ . On en déduit que  $\lambda > 1$  et que cette solution est d'ailleurs bien admissible puisque  $D < 1$ .

Le dernier cas à traiter est celui pour lequel le critère est atteint sur un intervalle de type  $[0, D)$  incluant un bord du domaine. Dans ce cas là les conditions aux limites s'écrivent  $\bar{\beta}(0) = 0$  et  $\bar{\beta}(D) = \bar{\beta}'(D) = 0$ . Sans détailler le calcul, un examen de ce cas montre qu'on a abouti nécessairement à  $\bar{\beta}'(0) = 0$ . On est donc ramené au cas précédent.

On a donc montré dans tous les cas que  $\lambda > 1$  sous les hypothèses  $a = 1/(4\pi^2)$  et  $b > 1$ .  $\square$

# Annexe

## Preuve de la Propriété 2.7

**Propriété (Dépendance de la zone de localisation en fonction de la contrainte.).** *La taille  $D(\sigma)$  de la zone de localisation varie continûment avec  $\sigma$ . Les valeurs aux extrémités du chemin de localisation  $D(\sigma_0)$  et  $D(0) = \lim_{\sigma \downarrow 0} D(\sigma)$  sont finies et données pour un matériau strictement adoucissant par*

$$D(\sigma_0) = \pi \ell \sqrt{\frac{E_0 S'(\alpha_0)}{S''(\alpha_0) w'(\alpha_0) - S'(\alpha_0) w''(\alpha_0)}}, \quad D(0) = \ell \int_{\alpha_0}^1 \sqrt{\frac{E_0}{2(w(\alpha) - w(\alpha_0))}} d\alpha. \quad (\text{B.1})$$

*La fonction  $(0, \sigma_0) \mapsto \mathbb{R}; \sigma \mapsto D(\sigma)$  n'est pas nécessairement décroissante : sous réserve de régularité de la souplesse  $S$  et de la densité de dissipation  $w$ , la zone de localisation croît au point de bifurcation si et seulement si l'inégalité suivante est satisfaite*

$$S'''(\alpha_0) \left( S''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w''(\alpha_0) \right) > S'(\alpha_0) \left( S'''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w'''(\alpha_0) \right). \quad (\text{B.2})$$

*Si la localisation a lieu au point d'échange entre le comportement durcissant et adoucissant au sens où  $S''(\alpha_0) w'(\alpha_0) - S'(\alpha_0) w''(\alpha_0) = 0$  mais tel que  $S'''(\alpha_0) \sigma_0^2 - 2w'''(\alpha_0) > 0$  alors  $\lim_{\sigma \uparrow \sigma_0} D(\sigma) = +\infty$ .*

*Démonstration.* La difficulté principale dans l'obtention de la valeur de  $D$  et de sa dérivée au point de bifurcation vient de la singularité du dénominateur puisque  $H(\sigma_0, \alpha) = 0$ . On ne peut donc pas dériver "brutalement" l'intégrale par rapport  $\sigma$  du fait des singularités aux bornes de l'intervalle. Il faut donc procéder autrement. La méthode choisie est de faire un développement limité au point de bifurcation de toutes les quantités dépendant de  $\sigma$  dans l'intégrand et d'intégrer en dernier lieu. On évalue dans un premier temps le comportement asymptotique de l'endommagement maximal  $\bar{\alpha}(\sigma)$  dans le pustule. On appelle  $\theta$  la variable adimensionnée définie par  $\theta = \sigma^2 / \sigma_0^2$ . Le développement limité autour du point  $\theta = 1$  de (B.9) nécessite au préalable de connaître le comportement asymptotique de  $\bar{\alpha}(\sqrt{\theta})$  défini par

$$E_0 H(\sqrt{\theta} \sigma_0, \bar{\alpha}(\sqrt{\theta})) = 2(w(\bar{\alpha}(\sqrt{\theta})) - w(\alpha_0)) - \theta \sigma_0^2 (S(\bar{\alpha}(\sqrt{\theta})) - S(\alpha_0)) = 0. \quad (\text{B.3})$$

A cet effet on pose

$$\tilde{\alpha} : \theta \mapsto \bar{\alpha}(\sqrt{\theta}), \quad \tilde{H} : (\theta, \alpha) \mapsto H(\sqrt{\theta}\sigma_0, \alpha).$$

En posant  $\theta = 1 - h$  avec  $0 \leq h \ll 1$ , et en supposant que  $\tilde{\alpha}(\theta)$  puisse se développer jusqu'au second ordre en  $h$  par,

$$\tilde{\alpha}(\theta = 1 - h) = \alpha_0 + h\alpha_1 + h^2\alpha_2 + o(h^2), \quad (\text{B.4})$$

on développe formellement (B.3) jusqu'au troisième ordre en  $h$

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{H}(1 - h, \tilde{\alpha}(1 - h)) &= \tilde{H}_{0,00} - h\tilde{H}_{0,10} + \tilde{H}_{0,01}(h\alpha_1 + h^2\alpha_2) \\ &+ \frac{1}{2}(h^2\tilde{H}_{0,20} - 2h(h\alpha_1 + h^2\alpha_2)\tilde{H}_{0,11} + (h\alpha_1 + h^2\alpha_2)^2\tilde{H}_{0,02}) \\ &+ \frac{1}{6}(-h^3\tilde{H}_{0,30} + 3h^2(h\alpha_1 + h^2\alpha_2)\tilde{H}_{0,21} \\ &- 3h(h\alpha_1 + h^2\alpha_2)^2\tilde{H}_{0,12} + (h\alpha_1 + h^2\alpha_2)^3\tilde{H}_{0,03}) + o(h^3) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où  $\tilde{H}_{0,ij}$  désigne

$$\tilde{H}_{0,ij} = \frac{\partial^{i+j}\tilde{H}}{\partial\theta^i\partial\alpha^j}(1, \alpha_0).$$

Sachant que  $\tilde{H}$  est défini par

$$E_0\tilde{H} : (\theta, \alpha) \mapsto 2(w(\alpha) - w(\alpha_0)) - \theta\sigma_0^2(S(\alpha) - S(\alpha_0)),$$

on en déduit que

$$\tilde{H}_{0,00} = 0, \quad \tilde{H}_{0,01} = 0, \quad \tilde{H}_{0,10} = 0, \quad \forall i \geq 2, \forall j \geq 0 \quad \tilde{H}_{0,ij} = 0.$$

La nullité de  $\tilde{H}_{0,01}$  provient de l'équation  $\frac{1}{2}S'(\alpha_0)\sigma_0^2 = w'(\alpha_0)$  (2.32) reliant la contrainte  $\sigma_0$  à l'endommagement homogène  $\alpha_0$ . En développant (B.5) en puissance de  $h$ , on trouve que

$$0 = \tilde{H}(1 - h, \tilde{\alpha}(1 - h)) = h^2(-\tilde{H}_{0,11}\alpha_1 + \frac{1}{2}\tilde{H}_{0,02}\alpha_1^2) + h^3(-\tilde{H}_{0,11}\alpha_2 + \frac{1}{2}\tilde{H}_{0,02}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}\tilde{H}_{0,12}\alpha_1^2 + \frac{1}{6}\tilde{H}_{0,03}\alpha_1^3) + o(h^3)$$

d'où on extrait les deux équations donnant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$

$$-2\tilde{H}_{0,11} + \tilde{H}_{0,02}\alpha_1 = 0, \quad (\text{B.6a})$$

$$6(\tilde{H}_{0,02}\alpha_1 - \tilde{H}_{0,11})\alpha_2 = 3\tilde{H}_{0,12}\alpha_1^2 - \tilde{H}_{0,03}\alpha_1^3. \quad (\text{B.6b})$$

Une résolution directe de (B.6a) et (B.6b) conduit à

$$\alpha_1 = \frac{2\tilde{H}_{0,11}}{\tilde{H}_{0,02}}, \quad (\text{B.7a})$$

$$\alpha_2 = \frac{3\tilde{H}_{0,12}\alpha_1^2 - \tilde{H}_{0,03}\alpha_1^3}{6(\tilde{H}_{0,02}\alpha_1 - \tilde{H}_{0,11})}, \quad (\text{B.7b})$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0,11} &= -2\sigma_0 S'(\alpha_0) \\ \tilde{H}_{0,12} &= -2\sigma_0 S''(\alpha_0) \\ \tilde{H}_{0,02} &= 2w''(\alpha_0) - \sigma_0^2 S''(\alpha_0) \\ \tilde{H}_{0,03} &= 2w'''(\alpha_0) - \sigma_0^2 S'''(\alpha_0) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Muni des ces développements, on regarde le comportement de la fonction donnant la taille de la localisation près du point de bifurcation. En faisant un changement de variable, on peut réécrire l'intégrale donnant la taille de la localisation comme étant

$$\tilde{D}(\theta) = D(\sqrt{\theta}) = \ell \int_0^1 \frac{(\tilde{\alpha}(\theta) - \alpha_0)dy}{\sqrt{\tilde{H}(\theta, (\tilde{\alpha}(\theta) - \alpha_0)y + \alpha_0)}}. \quad (\text{B.9})$$

Le développement limité du dénominateur de l'intégrand autour de  $\theta = 1$  se fait de façon similaire à (B.5),

$$\begin{aligned} \tilde{H}(1-h, (\tilde{\alpha}(1-h) - \alpha_0)y + \alpha_0) &= \frac{1}{2}((h\alpha_1 + h^2\alpha_2)^2 y^2 \tilde{H}_{0,02} - 2h(h\alpha_1 + h^2\alpha_2)y\tilde{H}_{0,11}) \\ &\quad + \frac{1}{6}(3h^2(h\alpha_1 + h^2\alpha_2)y\tilde{H}_{0,21} - 3h(h\alpha_1 + h^2\alpha_2)^2 y^2 \tilde{H}_{0,12} \\ &\quad + (h\alpha_1 + h^2\alpha_2)^3 y^3 \tilde{H}_{0,03}) + o(h^3). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

En introduisant (B.10) dans (B.9), puis en développant jusqu'à l'ordre 1, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}(1-h)}{\ell} &= \int_0^1 \frac{\alpha_1 dy}{\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{H}_{0,02}\alpha_1^2 y^2 - \tilde{H}_{0,11}\alpha_1 y}} \\ &\quad + h \left( \int_0^1 \frac{-\frac{1}{2}\alpha_1(-\tilde{H}_{0,11}\alpha_2 y + \tilde{H}_{0,02}\alpha_1\alpha_2 y^2 - \frac{1}{2}\tilde{H}_{0,12}\alpha_1^2 y^2 + \frac{1}{6}\tilde{H}_{0,03}\alpha_1^3 y^3)}{(\frac{1}{2}\tilde{H}_{0,02}\alpha_1^2 y^2 - \tilde{H}_{0,11}\alpha_1 y)^{3/2}} dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \frac{\alpha_2 dy}{\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{H}_{0,02}\alpha_1^2 y^2 - \tilde{H}_{0,11}\alpha_1 y}} \right) + o(h). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Le premier terme du développement donne la taille du support de la localisation. Un calcul montre que

$$\frac{1}{2}\tilde{H}_{0,02}\alpha_1^2 y^2 - \tilde{H}_{0,11}\alpha_1 y = -\frac{2\tilde{H}_{0,11}^2}{\tilde{H}_{0,02}} y(1-y) \quad (\text{B.12})$$

En utilisant la valeurs de  $\alpha_1$  explicitée en (B.9), on obtient la taille de la zone de localisation au



point de bifurcation

$$D(\sigma_0) = \tilde{D}(1) = \ell \sqrt{\frac{-2}{\tilde{H}_{0,02}}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}},$$

où  $\tilde{H}_{0,02}$  est donné par (2.53). Le changement de variable  $y = \sin(\theta)^2$  dans l'intégrale donne,

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sqrt{\sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2}} d\theta = \pi. \quad (\text{B.13})$$

On en déduit la taille de la zone de localisation au point de bifurcation explicitée en (2.50).

Pour savoir à présent si la localisation croît à sa naissance, on étudie le terme d'ordre 1 de (B.11).

Dans la première intégrale, le polynôme du 3-ème ordre au numérateur a pour racine évidente 0 mais aussi 1 (il suffit de revenir à la définition de  $\alpha_2$  en (B.7b)). On peut donc factoriser ce polynôme par

$$-\tilde{H}_{0,11}\alpha_2 y + \tilde{H}_{0,02}\alpha_1\alpha_2 y^2 - \frac{1}{2}\tilde{H}_{0,12}\alpha_1^2 y^2 + \frac{1}{6}\tilde{H}_{0,03}\alpha_1^3 y^3 = y(1-y) \left( -\frac{1}{6}\tilde{H}_{0,03}\alpha_1^3 y - \tilde{H}_{0,11}\alpha_2 \right) \quad (\text{B.14})$$

En combinant (B.12) et (B.14), on aboutit à

$$\frac{d\tilde{D}}{d\theta}(1) = \left( \frac{-\tilde{H}_{0,02}}{2\tilde{H}_{0,11}} \right)^{1/2} \pi \left( \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{3} \frac{\tilde{H}_{0,03}\tilde{H}_{0,11}^2}{\tilde{H}_{0,02}^3} \right)$$

où on a utilisé l'égalité

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1-y}} dy = \frac{\pi}{2}.$$

En utilisant la valeur de  $\alpha_2$  en (B.7b), on en déduit que

$$\frac{d\tilde{D}}{d\theta}(1) = \left( \frac{-\tilde{H}_{0,02}}{2\tilde{H}_{0,11}} \right)^{1/2} \pi \left( \frac{\tilde{H}_{0,11}\tilde{H}_{0,12}}{\tilde{H}_{0,02}^2} - \frac{\tilde{H}_{0,11}^2\tilde{H}_{0,03}}{\tilde{H}_{0,02}^3} \right).$$

La zone de localisation s'étendra donc après la bifurcation si et seulement si

$$\frac{\sigma_0}{2} \frac{dD}{d\sigma}(\sigma_0) = \frac{d\tilde{D}}{d\theta}(1) < 0 \iff \frac{\tilde{H}_{0,11}\tilde{H}_{0,12}}{\tilde{H}_{0,02}^2} < \frac{\tilde{H}_{0,11}^2\tilde{H}_{0,03}}{\tilde{H}_{0,02}^3}.$$

En remplaçant les  $\tilde{H}_{0,ij}$  par leurs valeurs en (2.53), on aboutit bien au résultat énoncé (2.51).

On étudie pour finir le cas où la bifurcation a lieu précisément au point de basculement entre la phase durcissante et la phase adoucissante. Ce point est caractérisé par un point de stationnarité dans la courbe contrainte-déformation *i.e.*  $S''(\alpha_0)w'(\alpha_0) - S'(\alpha_0)w''(\alpha_0) = 0$ . La formule (2.50) ne peut donc plus s'appliquer à cause de la singularité au dénominateur. Le développement limité (B.4) tel qu'il a été postulé au point de bifurcation n'est en fait plus valable car l'échange

d'écrouissage conduit à une valeur de  $\alpha_1$  infini (B.7a). Le développement correct se trouve être dans ce cas là

$$\tilde{\alpha}(\theta = 1 - h) = \alpha_0 + h^{1/2}\alpha_{1/2} + o(h^{1/2}).$$

On développe à nouveau en puissance de  $h$  la quantité,

$$0 = \tilde{H}(1 - h, \tilde{\alpha}(1 - h)) = h^{3/2} \left( -\alpha_{1/2}\tilde{H}_{0,11} + \frac{1}{6}(\alpha_{1/2})^3\tilde{H}_{0,03} \right) + o(h^{3/2})$$

d'où on identifie on tire que

$$\alpha_{1/2} = \sqrt{\frac{6\tilde{H}_{0,11}}{\tilde{H}_{0,03}}} \neq 0.$$

Muni de ce développement asymptotique de la valeur maximale de l'endommagement au point de bifurcation, on l'étend au reste de la localisation similairement à (B.10),

$$\tilde{H}(1 - h, (\tilde{\alpha}(1 - h) - \alpha_0)y + \alpha_0) = h^{3/2} \left( -\alpha_{1/2}y\tilde{H}_{0,11} + \frac{1}{6}(\alpha_{1/2})^3y^3\tilde{H}_{0,03} \right) + o(h^{3/2}),$$

d'où on déduit le développement limité de la taille de localisation au voisinage de la bifurcation,

$$\tilde{D}(1 - h) = \int_0^1 \frac{dy}{y(1 - y^2)} \left( \frac{6}{\tilde{H}_{0,03}\tilde{H}_{0,11}} \right) h^{-1/4} + o(h^{-1/4}).$$

Le premier terme du développement étant singulier, on en conclut que la taille de la localisation est infinie quand la localisation apparaît en un point d'échange d'écrouissage.  $\square$

## Preuve de la Propriété 2.17

**Propriété.** *L'état à  $n$  localisations est stable pour un déplacement imposé  $U$  si (resp. seulement si)*

$$\min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta) > (\text{resp. } \geq) 1$$

où  $\mathcal{D}_1^a = \{\beta \in H^1(0, L) \mid \beta \geq 0, \text{ Supp}(\beta) \subset \mathcal{S}_1\}$  est le support d'une unique localisation choisie parmi les  $n$  existantes.

*Démonstration.* Supposons que  $\min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta) \geq 1$  et montrons la stabilité de l'état. On écrit la dérivée seconde de l'énergie calculée en l'état  $(u, \alpha_t)$  dans la direction  $(v, \beta)$

$$\mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) = \int_0^L E_0 \ell^2 \beta'^2 + E(\alpha_t) (v'(x) - S'(\alpha_t)\sigma_t\beta)^2 dx - \left( \frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx$$

De la même façon que pour le quotient de Rayleigh, on peut minimiser cette expression à  $\beta$

donné sur l'espace  $\mathcal{C}_0$  des déplacements admissibles à 0. On obtient alors la minoration

$$\mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) \geq \int_0^L E_0 \ell^2 \beta'^2 dx + \frac{\sigma_t^3}{U_t} \left( \int_0^L S'(\alpha_t) \beta dx \right)^2 - \int_0^L \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx.$$

On a vu que l'étude de la stabilité se réduit à étudier le signe de la dérivée seconde pour des champs  $\beta$  à support inclus dans les zones où le critère est une égalité.

Soient  $n$  le nombre de localisations et  $\mathcal{S}_i$  le  $i$ -ème support de localisation. On a alors la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) \geq & \sum_{i=1}^n E_0 \ell^2 \int_{\mathcal{S}_i} \beta'^2 dx + \frac{\sigma_t^3}{U_t} \left( \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{S}_i} S'(\alpha_t) \beta dx \right)^2 \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{S}_i} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx. \end{aligned}$$

On développe le deuxième terme du membre de droite de l'inégalité. On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) \geq & \sum_{i=1}^n E_0 \ell^2 \int_{\mathcal{S}_i} \beta'^2 dx + \frac{\sigma_t^3}{U_t} \left( \int_{\mathcal{S}_i} S'(\alpha_t) \beta dx \right)^2 \\ & - \int_{\mathcal{S}_i} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx \\ & + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_t^3}{U_t} \int_{\mathcal{S}_i} S'(\alpha_t) \beta dx \int_{\mathcal{S}_j} S'(\alpha_t) \beta dx \end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite étant toujours positif, on peut le minorer par 0. Sachant que les localisations ont le même profil, on a alors que

$$E_0 \ell^2 \int_{\mathcal{S}_i} \beta'^2 dx + \frac{\sigma_t^3}{U_t} \left( \int_{\mathcal{S}_i} S'(\alpha_t) \beta dx \right)^2 \geq \min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta) \int_{\mathcal{S}_i} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v, \beta) \geq \left( \min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta) - 1 \right) \int_{\mathcal{S}_i} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx.$$

Sachant que par hypothèse  $\min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta) \geq 1$ , on en déduit que la dérivée seconde est toujours positive et que l'état est stable.

Réciproquement, supposons que l'état à  $n$  localisations identiques soit stable. On construit alors un champ d'endommagement  $\beta_1$  admissible particulier : on le choisit nul sur l'ensemble de la barre sauf sur le support d'une localisation. Sur cette dernière, le champ particulier est choisi égal à  $\operatorname{argmin}_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta)$  i.e un champ admissible réalisant le minimum du quotient de Rayleigh restreint à cette unique localisation (celui-ci existe sachant que l'infimum du quotient de Rayleigh

est atteint). On calcule alors le champ de déplacement  $v(\beta_1)$  réalisant l'équilibre dans cet état d'endommagement  $\beta_1$ . La dérivée seconde de l'énergie vaut alors

$$\mathcal{P}_t''(u_t, \alpha_t)(v(\beta_1), \beta_1) = \left( \min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}_t^*(\beta) - 1 \right) \int_{\mathcal{S}_i} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - w''(\alpha_t) \right) \beta_1^2 dx.$$

La positivité du terme de gauche étant assurée par l'hypothèse de stabilité, on en déduit que  $\min_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}_t^*(\beta) \geq 1$ .  $\square$

## Preuve de la Propriété 2.18

**Propriété (Influence du nombre de localisations).** *Soit une barre ayant  $n$  localisations entières. À contrainte fixée, le minimum du quotient de Rayleigh pour cet état est une fonction décroissante du nombre de localisations. En particulier si un état à  $n$  localisations est instable, tout état ayant un nombre de localisations supérieur le sera aussi.*

*Démonstration.* Puisqu'il suffit de minimiser le quotient de Rayleigh  $\mathcal{R}^*(\beta)$  sur une unique localisation on a à minimiser

$$\mathcal{R}^*(\beta) = \frac{\int_{\mathcal{S}_1} E_0 \ell^2 \beta'^2 dx + \frac{\sigma^3}{U} \left( \int_{\mathcal{S}_1} S'(\alpha) \beta dx \right)^2}{\int_{\mathcal{S}_1} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha) \sigma^2 - w''(\alpha) \right) \beta^2 dx}$$

sur tous les  $\beta$  à support inclus dans  $\mathcal{S}_1$ . La différence entre le quotient de Rayleigh de deux états avec deux nombres de localisations différents à contrainte fixé se fait donc uniquement au travers du chargement  $U$  qui conduit à ces états. Or le déplacement imposé  $U$  est relié à la contrainte  $\sigma$  dans la barre et au nombre de localisations à travers la relation (2.56). En particulier, à  $\sigma$  fixé,  $U$  est une fonction croissante du nombre de localisations. On voit donc qu'à  $\sigma$  et  $\beta$  fixé, le quotient de Rayleigh est une fonction décroissante du nombre de localisations (le profil des localisations  $\alpha$  et son support  $\mathcal{S}_1$  ne varient plus une fois la contrainte fixée). On en déduit alors que  $\min_{\beta \in \mathcal{D}_a} \mathcal{R}^*(\beta)$  est une fonction décroissante du nombre de localisations. L'instabilité de l'état à  $n$  localisations entraîne alors nécessairement celle de tout état ayant un nombre de localisations supérieur.  $\square$

## Preuve de la Propriété 2.19

**Propriété (Instabilité du snap-back).** *Soit un état en phase d'endommagement avec  $n$  localisations. Si cet état est en phase de snap-back alors il est instable.*

*Démonstration.* On considère une des  $n$  zones de localisation. Sur celle-ci, le critère est une égalité. On appelle  $\alpha(\sigma, x)$  le profil d'endommagement construit au point  $x$  pour une contrainte

globale  $\sigma$ . On a alors

$$-E_0\ell^2\alpha''(\sigma, x) - \frac{1}{2}S'(\alpha(\sigma, x))\sigma^2 + w'(\alpha(\sigma, x)) = 0, \quad \forall x \in (x_i - D(\sigma), x_i + D(\sigma)) \quad (\text{B.15})$$

avec

$$\alpha(\sigma, x_i \pm D(\sigma)) = \alpha_0, \quad \alpha'(\sigma, x_i \pm D(\sigma)) = 0, \quad \forall \sigma \quad (\text{B.16})$$

En dehors de ces zones, l'endommagement est homogène et sa valeur correspond à celle au point de bifurcation *i.e*  $\alpha(\sigma, x) = \alpha_0$ . L'idée est alors de prendre comme fonction test pour le quotient de Rayleigh la dérivée par rapport à  $\sigma$  de  $\alpha(\sigma, x)$ . En dérivant formellement (B.15), on a que

$$-E_0\ell^2 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)'' - \left( \frac{1}{2}S''(\alpha)\sigma^2 - w''(\alpha) \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} = S'(\alpha)\sigma, \quad \forall x \in (x_i - D(\sigma), x_i + D(\sigma)) \quad (\text{B.17})$$

Par ailleurs on a aux points situés au bord de la localisation que

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}(\sigma, x_i \pm D(\sigma)) = 0 = \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}(\sigma, x_i \pm D(\sigma)) \pm \frac{\partial D}{\partial \sigma} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\sigma, x_i \pm D(\sigma)).$$

En vertu de (B.16), le deuxième terme est nul. Enfin sur  $[0, L] \setminus \cup \mathcal{S}_i$ , on a  $\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} = 0$ . Enfin le champ  $-\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$  est bien positif puisque l'endommagement croît à mesure que la contrainte diminue. Ce champ  $-\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$  est donc bel et bien une fonction test admissible. L'idée est donc de calculer le quotient de Rayleigh en ce champ. Pour ce faire, on établit quelques relations au préalable.

On a tout d'abord l'identité

$$\sigma = \frac{\sigma^2}{U} \frac{dU}{d\sigma} - \frac{\sigma^3}{U} \int_{\cup \mathcal{S}_i} S'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} dx \quad (\text{B.18})$$

où  $U$  est le chargement en bout de barre. En effet, on a par construction que

$$\int_{\cup \mathcal{S}_i} S'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} dx = \int_0^L S'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} dx = \int_0^L \frac{\partial S(\alpha)}{\partial \sigma} dx = \frac{d}{d\sigma} \int_0^L S(\alpha) dx$$

où l'on a utilisé dans la dernière égalité la dérivation par rapport au domaine  $(0, L)$  (fixe par rapport à  $\sigma$ ). Or puisque  $U/\sigma = \int_0^L S(\alpha) dx$ , on obtient

$$\int_{\cup \mathcal{S}_i} S'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} dx = \frac{1}{\sigma} \frac{dU}{d\sigma} - \frac{U}{\sigma^2},$$

d'où on déduit l'identité (B.18). On réécrit maintenant (B.17) en introduisant (B.18)

$$-E_0\ell^2 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)'' - \left( \frac{1}{2}S''(\alpha)\sigma^2 - w''(\alpha) \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} = -\frac{\sigma^3}{U} S'(\alpha) \int_{\cup \mathcal{S}_i} S'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} dx + \frac{\sigma^2}{U} S'(\alpha) \frac{dU}{d\sigma}$$

puis on multiplie cette équation différentielle par  $\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$  et on l'intègre sur  $\cup \mathcal{S}_i$ . On obtient après intégration par parties et en utilisant la nullité de  $-\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$  sur les bords  $\cup \partial \mathcal{S}_i$  que

$$\begin{aligned} E_0 \ell^2 \int_0 \left( -\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)^2 dx + \frac{\sigma^3}{U} \left( \int_{\cup \mathcal{S}_i} S'(\alpha) \left( -\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right) dx \right)^2 \\ = \int_{\cup \mathcal{S}_i} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha) \sigma^2 - w''(\alpha) \right) \left( -\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)^2 dx - \frac{\sigma^2}{U} \frac{dU}{d\sigma} \int_{\cup \mathcal{S}_i} S'(\alpha) \left( -\frac{d\alpha}{d\sigma} \right) dx. \end{aligned}$$

En divisant l'égalité par le premier terme du membre de droite, on retrouve le quotient de Rayleigh appliqué à la direction  $(-\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma})$  :

$$\mathcal{R}^* \left( -\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right) = 1 - \frac{\sigma^2}{U} \frac{dU}{d\sigma} \frac{\int_{\cup \mathcal{S}_i} S'(\alpha) \left( -\frac{d\alpha}{d\sigma} \right) dx}{\int_{\cup \mathcal{S}_i} \left( \frac{1}{2} S''(\alpha) \sigma^2 - w''(\alpha) \right) \left( -\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \right)^2 dx}$$

On voit que si  $dU/d\sigma > 0$ , ce qui correspond à un snap-back dans la réponse globale force-déplacement, le quotient de Rayleigh dans la direction construite est plus petit strictement que 1. On en déduit que le minimum du quotient est lui aussi plus petit que 1 et on conclut à l'instabilité de l'état.  $\square$

## Preuve de la Propriété 2.20

**Propriété.** *Au voisinage d'un point de bifurcation depuis l'état homogène à la contrainte  $\sigma_0$ , on observe suivant la nature de la localisation que*

– *l'état homogène et la demi-localisation sont stables si (resp. seulement si)*

$$L < (\text{resp. } \leq) \frac{1}{2} L_{SB} \quad (\text{B.19})$$

– *n localisations entières sont stables si (resp. seulement si)*

$$L < (\text{resp. } \leq) L_{SB}. \quad (\text{B.20})$$

La preuve repose sur 3 lemmes :

**Lemme B.1.** *L'état correspondant à une demi-localisation est stable dans un voisinage du point de bifurcation (le paramètre de continuation étant la contrainte) si (resp. seulement si)  $L < (\text{resp. } \leq) \frac{1}{2} L_{SB}$ .*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que l'état correspondant à une demi-localisation soit stable dans un voisinage du point de bifurcation. Dans ce cas si (par l'absurde)  $L > \frac{1}{2} L_{SB}$  alors on sait d'après le Corollaire 2.11 que la branche à une demi-localisation a un snap-back dans un voisinage du point de bifurcation. En vertu de la Propriété 2.19 sur l'instabilité d'un

snap-back, on en déduit que l'état est instable, ce qui est absurde. Donc on a bien  $L \leq \frac{1}{2}L_{SB}$ .

Supposons à présent que la longueur  $L$  de la barre soit strictement inférieure à  $\frac{1}{2}L_{SB}$  et montrons que la demi localisation est stable. Pour connaître la stabilité de l'état, on étudie le quotient de Rayleigh associé à cet état. On suppose que l'infimum de ce quotient de Rayleigh se développe en effet continûment par rapport à la contrainte dans un voisinage de  $\sigma_0$ . Dans ce cas son terme dominant est donné par

$$\inf_{\beta \in \mathcal{D}_{1/2}^a} \mathcal{R}^*(\beta) = \inf_{\beta \in \mathcal{D}_{1/2}^a} \frac{\int_0^L E_0 \ell^2 \beta'(x)^2 dx + \frac{\sigma_0^3}{U_0} \left( \int_0^L S'(\alpha_0) \beta(x) dx \right)^2}{\int_0^L \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0^2 - w''(\alpha_0) \right) \beta(x)^2 dx} \quad (\text{B.21})$$

où l'espace d'admissibilité est donné par  $\mathcal{D}_{1/2}^a = \{\beta \in H^1(\Omega) : \beta \geq 0, \beta = 0 \text{ dans } (0, L) \setminus (0, D(\sigma_0))\}$  où  $D(\sigma_0)$  désigne la taille du support de la demi-localisation. Puisque on a l'inclusion  $\mathcal{D}_{1/2}^a \subset \{\beta \in H^1(\Omega) : \beta \geq 0\}$ , on en déduit qu'une condition suffisante pour avoir la stabilité de la demi-localisation est d'avoir la stabilité de l'état homogène. Or celle-ci est précisément assurée lorsque  $L < \frac{1}{2}L_{SB}$  d'après la Propriété 2.3, ce qui est exactement ce que l'on recherche.  $\square$

La deuxième étape est donnée par le

**Lemme B.2.** *L'état correspondant à une localisation est stable dans un voisinage du point de bifurcation (le paramètre de continuation étant la contrainte) si (resp. seulement si)  $L < (resp. \leq) L_{SB}$ . Donc on a bien  $L \leq L_{SB}$ .*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que l'état correspondant à une localisation soit stable dans un voisinage du point de bifurcation. Dans ce cas si (par l'absurde)  $L > L_{SB}$  alors on sait d'après le Corollaire 2.11 que la branche à une localisation à un snap-back dans un voisinage du point de bifurcation. En vertu de la Propriété 2.19 sur l'instabilité d'un snap-back, on en déduit que l'état est instable, ce qui est absurde.

Supposons à présent que la longueur  $L$  de la barre soit strictement inférieure à  $L_{SB}$  et montrons que la localisation est stable. Pour connaître la stabilité de l'état, on étudie le quotient de Rayleigh associé à cet état. L'infimum de ce quotient de Rayleigh se développe en effet continûment par rapport à la contrainte dans un voisinage de  $\sigma_0$ . Son terme dominant est donné par

$$\inf_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \mathcal{R}^*(\beta) = \inf_{\beta \in \mathcal{D}_1^a} \frac{\int_0^L E_0 \ell^2 \beta'(x)^2 dx + \frac{\sigma_0^3}{U_0} \left( \int_0^L S'(\alpha_0) \beta(x) dx \right)^2}{\int_0^L \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_0) \sigma_0^2 - w''(\alpha_0) \right) \beta(x)^2 dx} \quad (\text{B.22})$$

où l'espace d'admissibilité est cette fois donné par  $\mathcal{D}_1^a = \{\beta \in H^1(\Omega) : \beta \geq 0, \beta = 0 \text{ dans } (0, L) \setminus (x_i - D(\sigma_0), x_i + D(\sigma_0))\}$  où  $x_i$  et  $2D(\sigma_0)$  désignent respectivement le centre

de la localisation et la taille de son support. En faisant le changement de variable  $y = (x - (x_i - D(\sigma_0))/2D(\sigma_0))$ , on se ramène à l'étude

$$\inf_{\beta \in \mathcal{D}^a} \mathcal{R}^*(\beta) = \inf_{\bar{\beta} \in \bar{\mathcal{D}}^a} \frac{\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 E_0 \ell^2 \bar{\beta}'(x)^2 dx + \frac{L_{SB}}{L} \left( \int_0^L \bar{\beta}(x) dx \right)^2}{\int_0^L \bar{\beta}(x)^2 dx} \quad (\text{B.23})$$

où l'espace d'admissibilité est à présent donné par  $\bar{\mathcal{D}}^a = \{\bar{\beta} \in H^1(\Omega) : \bar{\beta} \geq 0, \bar{\beta}(0) = \bar{\beta}(1) = 0\}$ . On pose alors  $a = 1/4\pi^2$  et  $b = L_{SB}/L$ . En vertu du Lemme A.3 et de l'hypothèse  $L < L_{SB}$ , on aboutit à

$$\inf_{\beta \in \mathcal{D}^a} \mathcal{R}^*(\beta) = (L_{SB}/L)^{2/3}. \quad (\text{B.24})$$

On en déduit que l'état est stable, ce qui termine la preuve. □

Enfin on conclut par le cas de  $n$  localisations. En effet on a le

**Lemme B.3.** *L'état correspondant à  $n$  localisations est stable dans un voisinage du point de bifurcation (le paramètre de continuation étant la contrainte) si (resp. seulement si)  $L <$  (resp.  $\leq$ )  $L_{SB}$ .*

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que l'état correspondant à  $n$  localisations soit stable dans un voisinage du point de bifurcation. Dans ce cas si (par l'absurde)  $L > L_{SB}$  alors on sait d'après le Corollaire 2.11 que la branche avec *une* localisation a un snap-back dans un voisinage du point de bifurcation. En vertu de la Propriété 2.19 sur l'instabilité d'un snap-back, on en déduit cet état à une localisation est donc instable. Il suffit alors d'appliquer la Propriété 2.18 pour en déduire que l'état à  $n$  localisations est instable.

Supposons à présent que la longueur  $L$  de la barre soit strictement inférieure à  $L_{SB}$  et montrons qu'un état à  $n$  localisations soit stable. Puisque  $L > L_{SB}$ , on en déduit que l'infimum du quotient de Rayleigh associé à *une* localisation est strictement supérieur à 1. En utilisant la Propriété 2.17, on en déduit que l'état à  $n$  localisations est stable. □





# Bibliographie

- [1] E.C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the Asme*, 106(4) :326–330, 1984. 2
- [2] H. Amor, J.-J. Marigo, and C. Maurini. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8) :1209–1229, 8 2009. 13, 112
- [3] Z. Bazant and G. Pijaudier-Cabot. Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics-Asce*, 115(4) :755–767, April 1989. 4, 101, 104, 108
- [4] A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. Bifurcation and localization in rate independent materials. In Q.S. Nguyen, editor, *C.S.I.M Lecture Notes on Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*. Springer-Verlag, 1993. 2
- [5] A. Benallal and J.-J. Marigo. Bifurcation and stability issues in gradient theories. *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering*, 15 :S283–S295, 2007. 60
- [6] B. Bourdin. Numerical implementation of the variational formulation of brittle fracture. *Interfaces Free Bound.*, 9(411-430), 2007. 113
- [7] B. Bourdin, G.A. Francfort, and J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4) :797–826, April 2000. 3, 112, 113
- [8] B. Bourdin, G.A. Francfort, and J.-J. Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91 :1–148, 2008. 3, 112, 131

- 
- [9] J.-L. Chaboche. Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *Int. J. Damage Mech.*, 1 :149–171, 1992. 1
- [10] J.-L. Chaboche, P.M. Lesne, and J.-F. Maire. Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites. *Int. J. Damage Mech.*, 4 :5–22, 1995. 1
- [11] A. Chambolle, G.A. Francfort, and J.-J. Marigo. When and how do cracks propagate? *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(9) :1614 – 1622, 2009. 3
- [12] A. Chambolle, G.A. Francfort, and J.-J. Marigo. Revisiting energy release rates in brittle fracture. *Journal of Nonlinear Science*, Published Online, 2010. 3
- [13] M. Charlotte, G. Francfort, J.-J. Marigo, and L. Truskinovsky. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparisons of Griffith and Barenblatt surface energy models. In Benallal, editor, *Symposium on continuous damage and fracture*, Cachan, France, 2000. Elsevier. 97, 98
- [14] C. Comi. Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 4(1) :17–36, January 1999. 2, 58
- [15] C. Comi and U. Perego. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 38(36-37) :6427–6454, September 2001. 102, 104
- [16] G. Dal Maso, G.A. Francfort, and R. Toader. Quasistatic crack growth in nonlinear elasticity. *Archive For Rational Mechanics and Analysis*, 176(2) :165–225, May 2005. 3
- [17] R. de Borst and H.B. Muhlaus. Gradient dependent plasticity : Formulation and algorithmic aspects. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 35(3) :521–539, August 1992. 2, 52

- [18] G. Del Piero, G. Lancioni, and R. March. A variational model for fracture mechanics : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(12) :2513–2537, December 2007. 3
- [19] P. E. Dumouchel, J. J. Marigo, and M. Charlotte. Dynamic fracture : an example of convergence towards a discontinuous quasistatic solution. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 20(1) :1–19, April 2008. 23
- [20] K. Enakoutsa and J.-B. Leblond. Numerical implementation and assessment of the glpd micromorphic model of ductile rupture. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 28(3) :445–460, May-Jun 2009. 54
- [21] N.A. Fleck, G.M. Muller, M.F. Ashby, and J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity - theory and experiment. *Acta Metallurgica Et Materialia*, 42(2) :475–487, February 1994. 2, 52
- [22] G.A. Francfort and J.-J. Marigo. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 12 :149–189, 1993. 3
- [23] G.A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization. *J. Mech. Phys. Solids*, 46 :1319–1342, 1998. 3
- [24] M. Frémond and B. Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8) :1083 – 1103, 1996. 2
- [25] M.G.D. Geers, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and R.H.J. Peerlings. Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 160(1-2) :133–153, July 1998. 2, 56
- [26] M.G.D. Geers, R.H.J. Peerlings, W.A.M. Brekelmans, and R. de Borst. Phenomenological nonlocal approaches based on implicit gradient-enhanced damage. *Acta Mechanica*, 144(1-

- 2) :1–15, 2000. 2
- [27] M. Gologanu, J.-B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. *Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1997. 54
- [28] B. Halphen and Q.S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 :39–63, 1975. 1, 7
- [29] R. Hill. Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(1) :1–16, 1962. 2
- [30] L. M. Kachanov. On the time to failure under creep conditions. *Otd. Tekhn. Nauk.*, 8 :26–31, 1958. 1
- [31] R.V. Kohn. The relaxation of a double-well energy. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 3(3) :193–236, August 1991. 36, 40, 42
- [32] J. Lemaître and J.L. Chaboche. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *J. Méca. Appl.*, 2 :317–365, 1978. 1
- [33] J. Lemaître and J.L. Chaboche. *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod, Paris, 1985. 6
- [34] E. Lorentz and S. Andrieux. Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures*, 40(12) :2905–2936, June 2003. 2, 58
- [35] E. Lorentz and A. Benallal. Gradient constitutive relations : numerical aspects and applications to gradient damage. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194 :5191–5220, 2005. 29
- [36] J.-J. Marigo. Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II*, 292(19) :1309–1312, 1981. 1

- [37] J.-J. Marigo. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(4) :861 – 874, 1985. 54
- [38] J.-J. Marigo. Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property. *Nuclear Engineering and Design*, 114 :249–272, 1989. 2, 7
- [39] J.-J. Marigo. From clausius-duhem and drucker-ilyushin inequalities to standard materials. In G. A. Maugin, R. Drouot, and F. Sidoroff, editors, *Continuum Thermodynamics : the art and science of modelling material behaviour*, volume 76 of *Solids Mechanics and Its Applications : Paul Germain's anniversary*, pages 289–300. Kluwer Acad. Publ., 2000. 7
- [40] J.-J. Marigo. L'endommagement et la rupture : hier, aujourd'hui et demain. Technical Report 8, IPSI, 2000. 3
- [41] A. Mielke. Evolution of rate-independent systems. In *Evolutionary equations*, volume II of *Handb. Differ. Equ.*, pages 461–559. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005. 7
- [42] H.B. Muhlaus and E. C. Aifantis. A variational principle in gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28(7) :845–857, 1991. 2, 52
- [43] F.R.N. Nabarro, S. Shrivastava, and S.B. Luyckx. The size effect in microindentation. *Philosophical Magazine*, 86(25-26) :4173–4180, September 2006. 2, 52
- [44] Q. S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley & Son, London, 2000. 2, 7, 72
- [45] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P. deVree, and I. Spee. Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 15(6) :937–953, 1996. 29
- [46] R.H.J. Peerlings, M.G.D Geers, R. deBorst, and W.A.M. Brekelmans. A critical comparison

- of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45) :7723–7746, November 2001. 2
- [47] K. Pham, H. Amor, J.-J. Marigo, and C. Maurini. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, page Accepted, 2010. 101
- [48] K. Pham and J.-J. Marigo. Construction and analysis of localized responses for gradient damage models in a 1d setting. *Vietnam Journal of Mechanics*, 31(3-4) :233–246, 2009. 67
- [49] K. Pham and J.-J. Marigo. Approche variationnelle de l’endommagement : I. les concepts fondamentaux. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) :191–198, 2010. 5
- [50] K. Pham and J.-J. Marigo. Approche variationnelle de l’endommagement : II. les modèles à gradient. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) :199–206, 2010. 5
- [51] G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bazant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics-Asce*, 113(10) :1512–1533, October 1987. 2, 53
- [52] G. Pijaudier-Cabot and A. Benallal. Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 30(13) :1761–1775, 1993. 2
- [53] S. Ramtani, Y. Berthaud, and J. Mazars. Orthotropic behavior of concrete with directional aspects : modelling and experiments. *Nuclear Engineering and Design*, 133(1) :97–111, February 1992. 31, 103, 109, 113
- [54] N.A. Stelmashenko, M.G. Walls, L.M. Brown, and Yu.V. Milman. Microindentations on w and mo oriented single crystals : An stm study. *Acta Metallurgica et Materialia*, 41(10) :2855 – 2865, 1993. 2, 52
- [55] N. Triantafyllidis and E. C. Aifantis. A gradient approach to localization of deformation :

I. hyperelastic materials. *J. Elasticity*, 16 :225-237, 1986. 2





---

**Résumé :** L'objectif de cette thèse est d'étudier les matériaux adoucissants à l'aide de modèles d'endommagement à gradient. On construit dans un premier temps le modèle local sous-jacent en montrant sa forme nécessairement standard, ce qui fournit automatiquement un cadre variationnel à l'écriture du problème d'évolution quasi-statique. Celui-ci est constitué des trois principes physiques d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie. Cependant, la modélisation des matériaux adoucissants requiert un enrichissement du modèle local. La régularisation se fait par l'introduction de termes à gradient d'endommagement dans le travail de déformation. Les mérites de l'approche variationnelles ainsi que les apports de la régularisation sont mis en évidence via l'étude des états homogènes.

Dans une deuxième partie, on mène une étude de bifurcations et de stabilité d'une barre adoucissante en traction simple. On construit explicitement des états localisés bifurquant depuis la branche fondamentale homogène. On peut alors mettre en lumière différents phénomènes tels que la localisation conduisant à la ruine de la structure ou les snap-back dans la réponse globale. Cette étude permet aussi mieux de comprendre le phénomène de localisation en termes de critères de sélection tels que ceux de non-bifurcation ou de stabilité. Par ailleurs, on illustre sur cet exemple l'utilisation du principe de conservation d'énergie pour gérer dans le cadre quasi-statique des évolutions non-régulières en temps.

Finalement on propose dans une dernière partie des méthodes pour l'identification des paramètres du modèle dans le cas du béton. Par une analogie avec la mécanique de la rupture, on identifie tout d'abord la longueur interne au modèle à l'aide de la densité d'énergie de surface du matériau. Les lois de rigidité et de dissipation sont quant à elles identifiées par le biais des états homogènes en se servant des diagrammes contrainte-déformation et de stabilité de la réponse homogène. On reprend alors l'essai PIED qui vise à stabiliser ces états dans un essai de traction simple en l'analysant dans le détail et en soulignant par une étude théorique et numérique l'utilité et le potentiel de cet essai.

**Mots clés :** endommagement, non-local, stabilité, méthodes variationnelles, éléments finis

---

---

## Construction and analysis of gradient damage models

**Abstract :** This work is concerned with the modeling of softening material by regularized damage models. First we propose a rigorous construction of the underlying local model by justifying its formulation within the framework of Generalized Standard Materials. Accordingly, the strain work becomes a state function whose convexity properties are directly related to the hardening or softening properties and the quasi-static evolution problem admits a variational form. As the modeling of softening material can deal with non-uniqueness and time discontinuities, we propose to reinforce the classical evolution problem by integrating stability concepts and energy conservation principle. The local model is then enhanced by inserting gradient of damage into the energy expression. The merits of this new approach are emphasized throughout the study of homogeneous damage states.

Secondly, a bifurcation and stability analysis is carried out for a bar submitted to a tensile test. It permits us to construct homogeneous as well as localized damage solutions in closed form and to illustrate the concepts of loss of uniqueness and stability, of damage localization and structural failure. Additionally, by enforcing the energy balance, we provide an explicit construction to overcome the issue of time discontinuities.

Finally we proceed to the identification of the model parameters in the case of concrete. On the one hand, by an energetic analogy with fracture mechanics, the internal length of the model is linked to the surface energy density of a crack. On the other hand, the laws of rigidity and dissipation of the underlying local damage model are identified by using stress-strain and stability diagrams of homogeneous states. As the PIED experiment allows to stabilize these states in a tensile test, we carry on analytical and numerical calculations on this experimental procedure and show under which conditions the homogeneous states can really gain stability.

**Keywords :** non-local damage, stability, variational methods, finite elements

---