



HAL
open science

Contribution à l'analyse de l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires

Sylvain Lambert

► **To cite this version:**

Sylvain Lambert. Contribution à l'analyse de l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Rouen, 2007. Français. NNT : 2007ISAM0023 . tel-00560885

HAL Id: tel-00560885

<https://theses.hal.science/tel-00560885>

Submitted on 31 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale Sciences Physiques et Mathématiques pour l'Ingénieur

Thèse

Présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Rouen

Pour obtenir

Le grade de Docteur

Spécialité : mécanique, génie mécanique

Par

Sylvain LAMBERT

Contribution à l'analyse de l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires

Soutenue le 18 Décembre 2007
Devant la commission d'examen :

AZARI Z.	Rapporteur	Professeur à l'Université d'Amiens
BILLOËT J.L.	Examineur	Professeur à l'ENSAM de Paris
BOUHADDI N.	Rapporteur	Professeur à l'Université de Franche-Comté
EL HAMI A.	Directeur de thèse	Professeur à l'INSA de Rouen
GENEVAUX J.M.	Examineur	Professeur à l'Université du Maine
KHALIJ L.	Co-encadrante	Maître de conférence à l'INSA de Rouen
PAGNACCO E.	Co-encadrant	Maître de conférence à l'INSA de Rouen
PLUVINAGE G.	Examineur	Professeur à l'Université de Metz

Résumé

Cette thèse est consacrée au développement d'un outil de pré-dimensionnement par éléments finis pour l'estimation de l'endommagement par fatigue polycyclique de structures linéaires sous chargements multiaxiaux et stationnaires gaussiens.

L'état de contraintes atteint dans ces structures étant aléatoire, il devient nécessaire de raisonner en terme de statistique et l'approche spectrale s'avère particulièrement adaptée pour cette situation.

Dans ce travail, les méthodes spectrales sont améliorées par la prise en compte des *largeurs de bande* des spectres de réponses des structures soumises à des chargements *non-proportionnels* et de *moyennes non nulles*. Le critère d'endommagement de Sines est retenu.

L'étude numérique de la distribution de l'endommagement résultant des incertitudes sur les paramètres matériaux et des applications dans le domaine de l'optimisation des structures sont également abordées.

Mots clés : vibrations aléatoires, méthodes spectrales, fatigue multiaxiale polycyclique, non proportionnel, largeur de bande, propagation d'incertitudes, analyse de sensibilité, optimisation

Table des Matières

REMERCIEMENTS

INTRODUCTION GENERALE	1
-----------------------------	---

CHAPITRE 1. STRUCTURES SOUMISES A DES CHARGEMENTS ALEATOIRES.....	5
----------------------------------------------------------------------	---

1. Théorie de la mécanique des milieux continus	5
--------------------------------------------------------------	----------

1.1. Contraintes.....	6
-----------------------	---

1.2. Formulation générale du problème mécanique	8
-------------------------------------------------------	---

2. Réponse déterministe d'un système linéaire.....	10
-----------------------------------------------------------	-----------

2.1. Méthode des éléments finis	10
---------------------------------------	----

2.2. Réponse du système mécanique	12
-----------------------------------------	----

2.3. Solution sur base modale.....	13
------------------------------------	----

2.4. Conclusion.....	16
----------------------	----

3. Réponse aléatoire du système linéaire.....	16
------------------------------------------------------	-----------

3.1. Caractérisation des forces aléatoires stationnaires gaussiennes	16
----------------------------------------------------------------------------	----

3.2. Réponse du système linéaire	21
----------------------------------------	----

a. Moyenne de la réponse du système linéaire.....	21
---------------------------------------------------	----

b. DSP du système linéaire	21
----------------------------------	----

3.3. Conclusion.....	24
----------------------	----

4. Propriétés des Processus aléatoires stationnaires Gaussiens	27
-----------------------------------------------------------------------------	-----------

4.1. Moments spectraux.....	27
-----------------------------	----

4.2. Largeur de bande d'un processus	28
--------------------------------------------	----

4.3. Densité de probabilité des maxima.....	30
---------------------------------------------	----

4.4. Distribution et estimation du facteur de pic	30
---------------------------------------------------------	----

5. Conclusion	32
----------------------------	-----------

CHAPITRE 2. METHODES D’ESTIMATION DE L’ENDOMMAGEMENT PAR FATIGUE	35
1. Prédiction de durée de vie en fatigue uniaxiale	36
1.1. Courbes de Wöhler	36
1.2. Facteurs d’influence	38
1.3. Effet de la contrainte moyenne	38
1.4. Cumul de l’endommagement et prédiction de durée de vie	40
1.5. Méthode de comptage Rainflow	41
1.6. Conclusion	43
2. Critères de fatigue multiaxiaux.....	44
2.1. Formalisme des critères de fatigue multiaxiaux	44
2.2. Comparaison des différents critères de fatigue multiaxiaux	47
a. Discussion sur les différentes approches.....	47
b. Résultats issus de la thèse de B. Weber	48
3. Conclusion	50
CHAPITRE 3. ENDOMMAGEMENT PAR FATIGUE DES STRUCTURES SOUS CHARGEMENTS ALEATOIRES	51
1. Etat de l’art	52
2. Prise en compte de la largeur de bande	54
2.1. Résultats en bande étroite	56
2.2. Résultats en bande large	58
3. Prise en compte de la non proportionnalité des chargements dans les critères de fatigue multiaxiaux.....	60
3.1. Chargement proportionnel.....	60
3.2. Chargements non proportionnels.....	61
3.3. Recherche des axes principaux de l’ellipsoïde ξ_5	62
3.4. Estimation de R_a et R_b	65
4. Application à l’estimation de l’endommagement.....	66
4.1. Formalisme du critère de Sines	66
4.2. Estimation de la valeur d’endommagement	67
4.3. Distribution et variance de la valeur indicatrice d’endommagement – Prise en compte des incertitudes.....	68
4.4. Application	68

5. Analyse de sensibilité	73
5.1. Sensibilité de la réponse en contrainte moyenne.....	74
5.2. Sensibilité de la base de réduction.....	74
5.3. Sensibilité des rayons Ri	76
6. Conclusion	77
CHAPITRE 4. APPLICATION A L’OPTIMISATION DES STRUCTURES	79
1. Introduction	79
2. Procédure d’optimisation	82
2.1. Choix d’un critère de sensibilité.....	82
2.2. Procédure d’optimisation par réduction d’épaisseur	83
2.3. Application à une bielle.....	87
2.4. Problème d’optimisation topologique	88
2.5. Procédure d’optimisation avec volume constant.....	88
2.6. Problème d’optimisation fiabiliste	92
3. Optimisation globale	94
3.1. Méthode d’optimisation.....	94
3.2. Application	95
4. Conclusion	100
CONCLUSION GENERALE	101
BIBLIOGRAPHIE	103
ANNEXE 1 : METHODES SPECTRALES DU CALCUL DU DOMMAGE EN FATIGUE UNIAXIALE	111
ANNEXE 2 : FIGURES.....	119

Remerciements

*“When I’m at the pearly gates this’ll be on my videotape
when Mephistopholis is just beneath and he’s reaching up to grab me
this is one for the good days and I have it all here in red blue
green
you are my centre when I spin away out of control on videotape...
This is my way of saying goodbye because I can’t do it face to face
so I’m talking to you before...
no matter what happens now you shouldn’t be afraid because I know
today has been the most perfect day I have ever seen”*



Videotape – Radiohead

La thèse présentée dans ce mémoire a été effectuée au Laboratoire de Mécanique de Rouen et j’en remercie les directeurs qui se sont succédés M. Taleb et M. Souza de Cursi pour leur accueil. Je tiens aussi à remercier mon directeur de thèse, M. El Hami, ainsi que l’ensemble des permanents du L.M.R. de l’INSA de Rouen dont Benoît, Fabrice et Didier pour m’avoir permis de réaliser ce travail dans de bonnes conditions.

J’exprime mes sincères remerciements à l’ensemble des membres de mon jury de thèse et plus particulièrement à M. Bouhaddi – Professeur à l’Université de Franche Comté – et à M. Azari – Professeur à l’Université d’Amiens – pour l’intérêt qu’ils ont bien voulu me porter en acceptant à la fois de participer à mon jury de thèse et d’être rapporteur de ce travail. Les observations et les remarques qu’ils ont émises ont été particulièrement enrichissantes.

Je remercie chaleureusement mes deux encadrants, Leila et Emmanuel, pour leur aide, leurs conseils et leur bonne humeur. Ils ont su me donner la motivation nécessaire pour mener ce

travail à bien mais aussi l'envie de continuer dans le domaine de la recherche. Ils sont maintenant pour moi bien plus que des encadrants.

Je salue et remercie l'ensemble des thésards pour les nombreux moments de détente partagés et leur disponibilité permanente. Des anciens Aurélien et Salem, à ceux arrivés en même temps que moi et à qui je souhaite bon courage pour la fin de leur thèse Abderahman, Ha et Jhojan, à tous ceux arrivés par la suite Crescent, ma colocatrice Ioana, Jérémie, Karim, Nadir, et enfin aux nouveaux Abdelahdim, Anis et Mariana. Ioana et Jérémie, je vous remercie pour le dévouement dont vous avez fait preuve le jour de ma soutenance, je vous dois une présentation personnalisée de mes travaux...

Merci à Thomas Edward Yorke et à son groupe Radiohead dont la musique et les paroles me façonnent au quotidien et constitue pour moi la plus belle et la plus juste expression de mes sentiments. Merci pour leur dernier album In Rainbows dont l'attente fut longue, commencé en 2004 et sorti en 2007... comme ma thèse !

Je dédie ce travail à mes parents à qui je dois tout ainsi qu'à mon frère. Je le dédie aussi à tous mes amis de Besançon, de Haute-Saône, de Perpignan et de Paris : Aurélien, Mélanie, Balou, Dodo, Benjamin, Benoît, Stéphanie, Vincent, Claire, Cédric, Aurélie, Jésus, Virginie, Fanou, Yoyo, Cyrille, Youness, Marie, David, Lydia, Elodie, Pierrick, Ricard, Tauf, Mc Fly, Nikita, Niko, Julien, Emilie, Aymeric, Laura, Nathalie... merci à vous d'avoir contribué à ma quiétude durant ces trois années! Et pour finir je le dédie à celles qui ont particulièrement marqué ma vie, Ana, Delphine et Sylvie. J'aurais dû à l'origine conclure autrement... mais voilà, la vie continue... et après tout, c'est une manière comme une autre de clore ce chapitre de la vie.

Vous êtes tous à votre façon une partie de ma Videotape...

Introduction

Le dimensionnement d'une structure nécessite la prise en compte de l'environnement dans lequel elle sera amenée à évoluer. Dans notre environnement quotidien, de nombreuses structures sont soumises à des chargements aléatoires dont l'évolution dans le temps ne peut être déterminée exactement. Parmi les exemples de chargements aléatoires exercés sur les structures, nous pouvons citer l'action :

- du vent ou encore des tremblements de terre sur les ponts et les bâtiments
- de la houle sur les bateaux ou les structures offshore
- des turbulences atmosphériques sur les avions
- dû aux irrégularités de la route sur les châssis et éléments de suspensions de véhicules

La prédiction de la réponse d'une structure soumise à des excitations aléatoires est confrontée à plusieurs difficultés. Ces difficultés sont principalement liées à la définition même de l'excitation physique qui agit sur la structure. D'une part les réalisations d'un phénomène aléatoire sont par définition différentes l'une de l'autre et d'autre part, la modélisation de l'excitation doit être compatible avec les méthodes de calcul envisagées. C'est afin de pallier à ces difficultés que la théorie des vibrations aléatoires a été développée, s'appuyant sur de nombreux travaux dans le domaine de la dynamique des structures, de la mécanique probabiliste et du traitement des signaux aléatoires.

Ce n'est que vers les années 50 que les premières théories sur les vibrations aléatoires sont apparues. Les travaux de Rice S.O. [RIC44], qui a publié deux très longs articles sur "l'analyse mathématique du signal aléatoire", ont rapidement trouvé de nombreux champs d'application en mécanique : Fung [FUN53] ou Diederich [DIE56] pour les effets de la turbulence atmosphérique sur les avions ; Cartwright [CAR56] et Longuet-Higgins [LON52] pour l'action de la houle sur les structures en mer ou encore Davenport [DAV64] pour les efforts induits par le vent sur les structures de génie civil. Des ouvrages de référence sont ensuite parus : Crandall & Mark en 1963 [CRA63] ou Meirovitch en 1975 [MEI75], puis l'importante contribution dans les développements mathématiques des vibrations aléatoires de Lin en 1967 [LIN67]. Parallèlement à ces développements, d'importants progrès ont été réalisés dans les domaines de la mesure, de l'estimation des paramètres de processus aléatoires et de l'analyse spectrale (Bendat & Piersol en 1966 [BEN66]). Ainsi, sous l'impulsion des besoins de l'industrie aéronautique et du génie civil, la mécanique aléatoire s'est progressivement

développée et des ouvrages tels que ceux de Preumont [PRE94] ou encore Wirshing et al. [WIR95] devraient accélérer la diffusion de la mécanique aléatoire auprès de tous les ingénieurs de structure francophones.

L'expérience montre que la seule connaissance de la manière dont résiste une structure pour une sollicitation appliquée une seule fois ou pour un choc, ne suffit pas à dimensionner cette structure. En effet, si la conception de nouveaux produits passe par la vérification de leur résistance à diverses sollicitations mécaniques en terme de chargement statique, elle doit donc aussi considérer le phénomène de fatigue, au caractère de plus en plus dominant lorsque les chargements sont aléatoires. Il est intéressant de constater que selon plusieurs sources (The Committee on Fatigue and Fracture Reliability [COM82]), 80 à 90% des défaillances en service des structures métalliques sont dues à la fatigue. De nombreux secteurs de l'industrie sont concernés par ces problèmes de défaillance, dont notamment les secteurs de l'industrie marine, offshore, ferroviaire, automobile ou encore celui de l'aéronautique. Beaucoup d'études sont menées dans ces secteurs pour comprendre ces phénomènes de fatigue et pour pouvoir les évaluer. Ainsi les études sur la tenue en fatigue des structures se sont développées au cours du siècle dernier. Ils procurent une importante source d'informations bibliographiques dans ce domaine.

Expérimentalement, pour caractériser des paramètres de fatigue d'un matériau, l'essai le plus simple consiste à soumettre une pièce à un chargement uniaxial cyclique à amplitude constante donnée et à reporter sur une courbe, le nombre de cycles au bout duquel la rupture se produit en fonction de l'amplitude du chargement appliqué. Ainsi les premières méthodes d'évaluation de l'endommagement par fatigue ont concerné les structures soumises à des chargements uniaxiaux. Au cours du siècle dernier, ces méthodes se sont affinées et donnent maintenant des prédictions de durée de vie en accord avec les essais expérimentaux. Lorsque les chargements induisent des états de contrainte multiaxiaux, l'étude de l'endommagement par fatigue est plus complexe. En fatigue à grands nombres de cycles, les critères multiaxiaux sont les outils permettant de prendre en compte du caractère multiaxial des sollicitations. De nombreux critères ont été proposés dans la littérature [WEB99], malheureusement aucun d'entre eux n'est universellement accepté.

Dans ce mémoire nous nous proposons de développer un outil de pré-dimensionnement (figure 1), nous permettant d'évaluer de manière efficace l'endommagement par fatigue à grands nombres de cycles, des structures soumises à des chargements aléatoires. Pour cela nous décomposons ce mémoire en quatre chapitres :

- Dans le chapitre 1, nous déterminons la réponse aléatoire en contrainte d'une structure linéaire soumise à des chargements aléatoires et une étude statistique de la réponse en contrainte est réalisée. Nous démontrons entre autre que la détermination des réponses en contrainte est numériquement plus efficace si elle est réalisée dans le domaine fréquentiel.

- Les principes élémentaires des méthodes d'évaluation de l'endommagement par fatigue des structures, sont présentés dans le chapitre 2. Basés sur différentes études comparatives, les avantages et inconvénients de certains critères d'endommagement multiaxiaux en contraintes, présents dans la littérature, sont exposés. Nous déterminons alors le critère qui nous semble le mieux adapté à l'étude des structures sous chargements aléatoires.
- Dans le chapitre 3, nous adaptons le critère choisi à une étude dans le domaine fréquentiel des réponses en contrainte. L'endommagement par fatigue est alors estimé à partir des statistiques sur les contraintes déterminées dans le chapitre 1 pour des temps de calculs réduits par rapport à une estimation classique dans le domaine temporel. La méthode d'évaluation présentée est applicable aux structures soumises à des chargements aléatoires stationnaires gaussiens de moyennes non nulles. Elle tient compte par ailleurs du caractère non proportionnel des chargements ainsi que de la largeur de bande des réponses en contrainte. Une étude des dispersions sur les valeurs d'endommagement obtenues est réalisée en tenant compte des sources principales d'incertitudes du modèle. Nous concluons ce chapitre par une analyse de sensibilité du critère d'endommagement dans le domaine fréquentiel.
- L'efficacité numérique de la méthode d'évaluation de l'endommagement par fatigue présentée, nous permet d'envisager son application à des problèmes d'optimisation avec contraintes d'endommagement. Ainsi dans le chapitre 4, nous nous intéressons à un problème classique en mécanique : trouver le meilleur compromis entre le volume d'une structure et sa résistance à l'endommagement par fatigue. Le problème d'optimisation de structure correspondant est posé et est résolu pour différentes applications et suivant différents algorithmes adaptés en conséquence. Nous traitons par ailleurs un problème d'optimisation fiabiliste topologique.

Ce rapport se termine par une conclusion générale et une proposition de perspective.

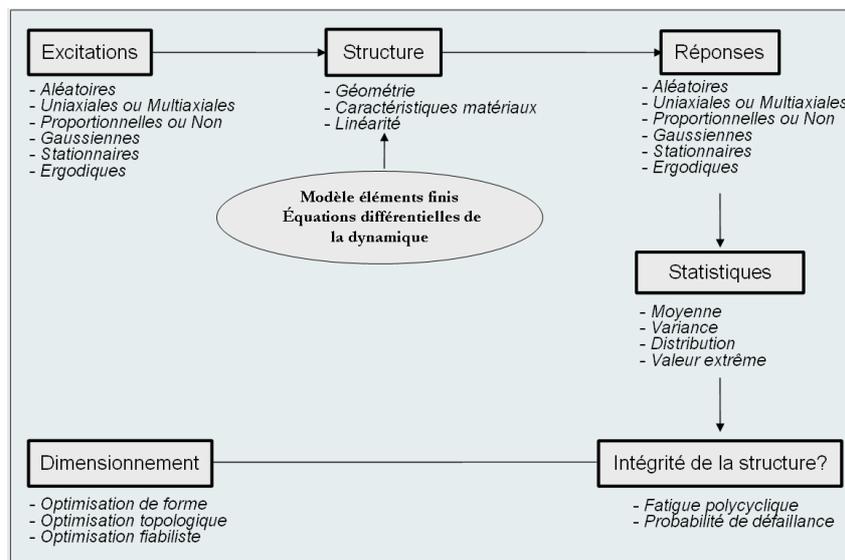


Figure 1. Outil de pré-dimensionnement

Chapitre 1.

Structures soumises à des chargements aléatoires

Nous reprenons dans une première partie les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus en rappelant les notions de contraintes et en introduisant le principe des travaux virtuels. Dans la deuxième partie, la méthode des éléments finis en déplacement est présentée pour résoudre le problème mécanique numériquement et ainsi prévoir le comportement en contrainte des systèmes étudiés. La solution obtenue sur base modale est la plus efficace en mécanique linéaire.

Dans une troisième partie, nous traitons du cas des structures soumises à des forces dites « aléatoires », nous introduisons les notions relatives aux processus aléatoires, puis déterminons les propriétés du premier et du second ordre de la réponse aléatoire en contrainte. Enfin nous terminons par exposer les propriétés des processus gaussiens qui sont utilisés dans la suite du mémoire afin d'adapter les critères de fatigue multiaxiaux à l'étude des structures soumises à des excitations aléatoires.

1. THEORIE DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Soit un solide Ω soumis à des déformations et soit Ω_A une partie de Ω . Les efforts agissant sur la partie Ω_A sont (Figure 1-1) :

- ceux présents dans la partie Ω_A , définis par une densité volumique \mathbf{f}_V représentative des forces et moments dus à la déformation,
- ceux exercés sur Ω_A par le reste du volume $\Omega - \Omega_A$, qui se réduisent selon l'hypothèse fondamentale de la mécanique des milieux continus, à la seule action de la frontière Γ_A entre Ω_A et $\Omega - \Omega_A$. Ces efforts sont définis par une densité surfacique de forces \mathbf{f}_T et par une densité surfacique de moments \mathbf{c} (la densité surfacique de moment est uniquement générée par la densité surfacique de forces d'où $\mathbf{c} = \mathbf{f}_T \wedge \mathbf{x}$. Localement la structure du matériau ne transmet pas de couple).

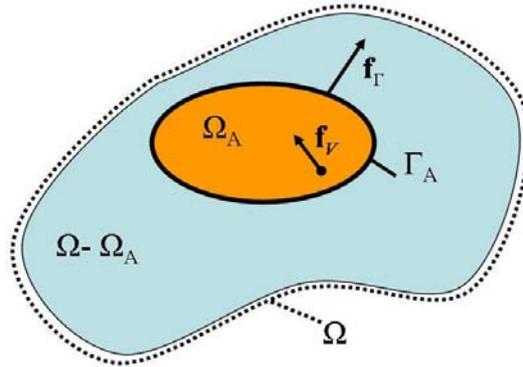


Figure 1-1. Répartition des efforts

1.1. Contraintes

Selon les théorèmes généraux de la statique, les résultantes des forces ainsi que les résultantes des moments s'exerçant sur Ω_A s'annulent :

$$\int_{\Omega_A} \mathbf{f}_V dV = \int_{\Gamma_A} \mathbf{f}_\Gamma dS \quad (1.)$$

$$\int_{\Omega_A} (\mathbf{f}_V \wedge \mathbf{x}) dV = \int_{\Gamma_A} (\mathbf{f}_\Gamma \wedge \mathbf{x}) dS \quad (2.)$$

En appliquant le théorème de la divergence sur ces deux conditions, nous définissons alors un tenseur $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ symétrique de six composantes indépendantes, appelé tenseur des contraintes de Cauchy tel que :

$$\mathbf{f}_V = \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{s}}}) \text{ et } \underline{\underline{\mathbf{s}}} \mathbf{n} = \mathbf{f}_\Gamma \quad (3.)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire sortante de la frontière Γ_A .

Le vecteur contrainte \mathbf{s} (forces de cohésion par unité de surface) est quant à lui défini au point P , appartenant à un élément de surface $\Delta\Gamma$ de normale unitaire \mathbf{n} , par :

$$\mathbf{s}(P, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta\Gamma} \frac{\Delta\mathbf{f}_\Gamma}{\Delta\Gamma} \quad (4.)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est une généralisation du vecteur contrainte dans la matière pour chaque direction de l'espace :

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}} = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_{zz} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{s}(P, \mathbf{n}) = \underline{\underline{\mathbf{s}}}(P) \cdot \mathbf{n} \quad (5.)$$

La Figure 1-2 représente les contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube dont les arêtes sont colinéaires aux vecteurs de référence d'un système orthonormé :

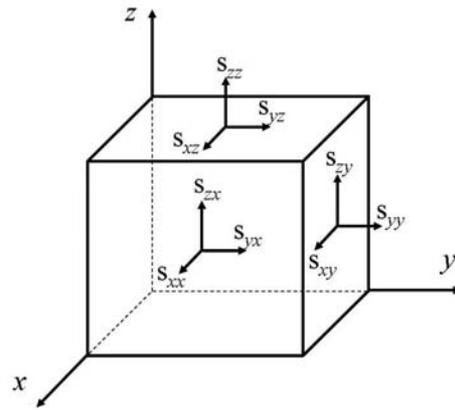


Figure 1-2. Représentation des contraintes

Mais il est commode d'utiliser des scalaires représentatifs du tenseur des contraintes, indépendants du repère dans lequel ils sont exprimés. C'est le cas des invariants I_1, I_2, I_3 du tenseur des contraintes qui sont indépendants du repère :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{s}}}) \\ I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{s}}}\underline{\underline{\mathbf{s}}}) \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{s}}}\underline{\underline{\mathbf{s}}}\underline{\underline{\mathbf{s}}}) \end{cases} \quad (6.)$$

Ainsi, le tenseur des contraintes de Cauchy peut être décomposé en une partie sphérique et une partie déviatorique sous la forme :

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}} = \underline{\underline{\mathbf{d}}} + \frac{1}{3} I_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{d}}} + p \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (7.)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$ désigne le déviateur des contraintes et p la pression hydrostatique représentative des seules contraintes normales s_{xx}, s_{yy} et s_{zz} au volume. Nous notons alors J_1, J_2 et J_3 les invariants du déviateur des contraintes :

$$\begin{cases} J_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{d}}}) \\ J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{d}}}) \\ J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{d}}}) \end{cases} \quad (8.)$$

D'autre part, il est intéressant de définir un scalaire représentatif du tenseur des contraintes et indépendant du repère. Il est appelé contrainte de comparaison ou **contrainte équivalente**. Les contraintes équivalentes de Von Mises et de Tresca sont les plus utilisées.

Dans notre travail, nous retenons la contrainte équivalente de Von Mises ou critère du plus grand travail de distorsion. Elle évalue la part de l'énergie de déformation provoquée par les seules

déformations angulaires, et est fonction uniquement du deuxième invariant du déviateur des contraintes et s'exprime par :

$$s_{vm} = \sqrt{3 J_2} \quad (9.)$$

Elle permet de représenter l'énergie nécessaire pour déformer le volume, sans prendre en compte celle augmentant ou diminuant le volume initial.

Ainsi, pour un état de contrainte plane, nous avons :

$$p = \frac{1}{3}(s_{xx} + s_{yy}) \quad (10.)$$

et

$$s_{vm}^2 = s_{xx}^2 + s_{yy}^2 - s_{xx}s_{yy} + 3s_{xy}^2 \quad (11.)$$

Mais il peut être intéressant d'effectuer le changement de variables suivant :

$$x = \frac{s_{xx}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{s_{yy}}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{s_{xx} - s_{yy}}{\sqrt{2}}, \quad w = \sqrt{3}s_{xy} \quad (12.)$$

avec lequel nous obtenons :

$$s_{vm} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} \quad (13.)$$

ou plus simplement $s_{vm}^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$, si nous considérons le vecteur $\mathbf{v} = [x \ y \ z \ w]^T$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{A}_v \mathbf{s}$ avec :

$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{bmatrix} \quad (14.)$$

1.2. Formulation générale du problème mécanique

Nous considérons maintenant que notre solide Ω de volume V et de masse volumique ρ est délimité par un contour Γ (dont les normales sont notées \mathbf{n}). Les mêmes efforts volumiques \mathbf{f}_v sont exercés dans Ω , en revanche les efforts surfaciques \mathbf{f}_r sont dorénavant exercés sur une partie du contour Γ_r et des efforts ponctuels \mathbf{f}_i sont considérés (Figure 1-3).

On attribue au solide un champ de déplacement $\mathbf{u}(x, y, z, t) = [u_x, u_y, u_z]^T$, de vitesse $\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$ et d'accélération $\ddot{\mathbf{u}} = d^2\mathbf{u}/dt^2$. Le solide possède alors des conditions initiales de déplacement \mathbf{u}_0 et de vitesse \mathbf{v}_0 , et des déplacements imposés $\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}$ pour tout t sur une autre partie Γ_u du contour.

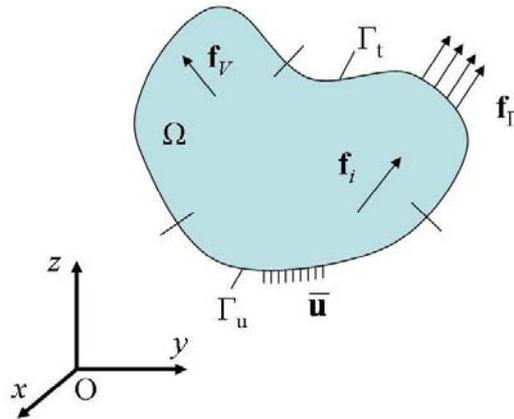


Figure 1-3. Représentation du solide déformable

En considérant le principe de conservation de la masse et d'après le principe fondamental de la dynamique, à chaque instant t , nous avons :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{s}}) + \mathbf{f}_V = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (15.)$$

Conformément à la section 1.1., sur la partie Γ_f sont appliqués des efforts extérieurs surfaciques \mathbf{f}_Γ reliés aux composantes du tenseur des contraintes par la relation :

$$\underline{\underline{s}} \mathbf{n} = \mathbf{f}_\Gamma \quad (16.)$$

Par définition le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \operatorname{grad}^T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (17.)$$

En élasticité linéaire, les déformations ε_{ij} sont reliées aux contraintes s_{ij} par l'intermédiaire du tenseur de Hooke (loi de Hooke) \mathbf{H} [LAR92] :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (18.)$$

Pour un matériau isotrope possédant un comportement élastique et linéaire, cette relation s'écrit :

$$s_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (19.)$$

avec ε_{ij} composante du tenseur des déformations, λ et μ , coefficients de Lamé, s_{ij} composante du tenseur des contraintes et δ_{ij} symbole de Kronecker.

Un champ de déplacements \mathbf{u}^* est dit cinématiquement admissible si et seulement si ses composantes constituent un champ de vecteurs continûment différentiable par morceaux et vérifient la relation $\mathbf{u}_{,r} = \bar{\mathbf{u}}$ sur Γ_u .

Soient le champ de déplacement virtuel $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}$ avec \mathbf{u}_r un champ cinématiquement admissible et le tenseur des déformations virtuel défini par :

$$\underline{\underline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \text{grad}(\delta \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \text{grad}^T(\delta \mathbf{u}) \quad (20.)$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned} -\delta \Pi(t) = & \int_V \underline{\underline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\mathbf{H}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV + \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_V dV \\ & + \oint_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_S dS - \oint_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_\Gamma dS - \sum_i \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (21.)$$

où $V(t) \approx V(0)$ en considérant des hypothèses de petites perturbations et avec \mathbf{r}_S l'effort de réaction surfacique permettant d'imposer la condition cinématique $\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}$ sur Γ_u .

Toutefois, le problème défini par (16) n'admet pas en général, de solution analytique pour des solides de formes quelconques et il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques pour résoudre ce problème.

2. REPONSE DETERMINISTE D'UN SYSTEME LINEAIRE

Parmi les différentes méthodes numériques, nous avons retenu la méthode des éléments finis pour approximer la représentation spatiale du problème de mécanique des milieux continus.

2.1. Méthode des éléments finis

Numériquement, les méthodes d'éléments finis sont une sous-famille des méthodes de Ritz-Galerkin [GER96, DHAT05]. Ces méthodes visent à résoudre les problèmes en mécanique des structures. Pour cela, le solide déformable de volume V est discrétisé en volumes élémentaires $V^{(e)}$ et les différents termes du principe des travaux virtuels sont évalués pour chaque élément suivant :

$$\begin{aligned} -\delta \Pi^{(e)}(t) = & \int_{V^{(e)}} \underline{\underline{\delta \boldsymbol{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\mathbf{H}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV + \int_{V^{(e)}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_{V^{(e)}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_V dV \\ & + \oint_{\Gamma_u^{(e)}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_S dS - \oint_{\Gamma_f^{(e)}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_\Gamma dS = 0 \end{aligned} \quad (22.)$$

Les champs de déplacement et d'accélération continus \mathbf{u} et $\ddot{\mathbf{u}}$ sont interpolés à partir de valeurs en différents points de l'élément, appelés nœuds, par les fonctions d'interpolation en espace \mathbf{N} :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{N} \mathbf{u}^{(e)}(t) \text{ et } \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) \quad (23.)$$

avec $\mathbf{u}^{(e)}$ et $\ddot{\mathbf{u}}^{(e)}$ les vecteurs des déplacements nodaux et des accélérations nodales pour chaque degré de liberté (ddl) de l'élément. D'autre part, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et les contraintes \mathbf{s} sont organisées sous forme de vecteur :

$$\mathbf{s} = [s_{xx} \ s_{yy} \ s_{zz} \ s_{xy} \ s_{yz} \ s_{xz}]^T \quad (24.)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}]^T = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{xy} \ 2\varepsilon_{yz} \ 2\varepsilon_{xz}]^T \quad (25.)$$

Suivant cette organisation, la matrice gradient des fonctions d'interpolation \mathbf{B} permet de relier les déplacements \mathbf{u} aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la matrice \mathbf{H} des coefficients élastiques, les contraintes \mathbf{s} aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (26.)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (27.)$$

En considérant $\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^{(e)}(t)$, le principe des travaux virtuels à l'instant t s'écrit d'après [BAT90, DHAT05] :

$$\begin{aligned} -\delta \Pi^{(e)}(t) &= \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} + \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} \\ &\quad - \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{f}_{ext}^{(e)} + \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{f}_{int}^{(e)} + \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{r}_S^{(e)} \end{aligned} \quad (28.)$$

avec $\mathbf{M}^{(e)}$ et $\mathbf{K}^{(e)}$, les matrices élémentaires symétriques définies positives d'inertie et semi définies positives de raideur obtenues par :

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \, dV \quad (29.)$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dV \quad (30.)$$

et avec :

$$\mathbf{f}_{ext}^{(e)} = \oint_{\Gamma_f^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_\Gamma \, dS + \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_V \, dV \quad (31.)$$

$$\mathbf{f}_{int}^{(e)} = \oint_{\Gamma_u^{(e)} \setminus \Gamma_u} \mathbf{N}^T \mathbf{r}_S \, dS \quad (32.)$$

$$\mathbf{r}^{(e)} = \oint_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \mathbf{r}_S \, dS \quad (33.)$$

Après assemblage des vecteurs et matrices élémentaires et la prise en compte des forces ponctuelles, nous obtenons finalement l'équation d'équilibre discrétisée par éléments finis :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (34.)$$

avec :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_e \mathbf{f}_{ext}^{(e)} - \sum_e \mathbf{f}_{int}^{(e)} + \sum_i \mathbf{f}_i \\ - \sum_e \mathbf{r}^{(e)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (35.)$$

\mathbf{M} et \mathbf{K} sont les matrices globales d'inertie et de raideur de dimension $n \times n$, avec n nombre total de ddl du solide discrétisé. Elles résultent de l'assemblage des matrices $\mathbf{M}^{(e)}$ et $\mathbf{K}^{(e)}$ et sont donc symétriques. Le vecteur \mathbf{u} , de dimension $n \times 1$, contient les coordonnées généralisées u_i ($i=1,2,\dots,n$), tandis que le vecteur \mathbf{f} , de même dimension, contient les forces associées généralisées f_i ($i=1,2,\dots,n$).

Dans la pratique pour un problème en mécanique, il est nécessaire d'introduire un amortissement. Nous choisissons un modèle proportionnel à la vitesse $\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}$ avec $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K}$, ainsi :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (36.)$$

L'équation exprime l'équilibre entre les forces extérieures, d'inertie, de rappel élastique et d'amortissement. Notre étude se limite au cas de conditions limites $\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ et les matrices éléments finis sont ensuite réduites en conséquence.

2.2. Réponse du système mécanique

Pour exprimer la solution en déplacement du système défini par l'équation (36), nous traitons le problème dans le domaine de Fourier. Ainsi nous avons par transformation de Fourier de l'équation (36) :

$$\mathbf{U}(\omega) = [-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}]^{-1} \mathbf{F}(\omega) \quad (37.)$$

avec $\mathbf{U}(\omega)$ et $\mathbf{F}(\omega)$ respectivement les transformées de Fourier¹ de $\mathbf{u}(t)$ et de $\mathbf{f}(t)$ définies par :

$$\mathbf{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (38.)$$

¹ Plusieurs définitions de la transformée de Fourier coexistent, ainsi les définitions suivantes sont parfois utilisées dans la littérature :

$$\mathbf{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\mathbf{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (39.)$$

Nous pouvons alors poser :

$$\mathbf{G}(\omega) = [-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}]^{-1} \quad (40.)$$

telle que :

$$\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (41.)$$

$\mathbf{G}(\omega)$ est alors identifiée comme étant la matrice des fonctions de réponse en fréquence et permet de définir la réponse impulsionnelle $\mathbf{g}(t)$ par transformée de Fourier inverse :

$$\mathbf{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (42.)$$

Ainsi, la réponse du système mécanique dans le domaine temporel avec les conditions initiales $\mathbf{u}(0) = 0$ et $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$ s'écrit sous la forme d'un produit de convolution :

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(\tau) \mathbf{f}(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\tau) \mathbf{f}(t - \tau) d\tau \quad (43.)$$

Ayant la réponse du système mécanique en déplacement, il est possible d'obtenir l'état de contraintes dans le solide suivant :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (44.)$$

où $\mathbf{s}(t)$ est de dimension $ns = 6 \times np$ avec np points d'évaluation des contraintes (np peut être le nombre d'éléments, de points de Gauss, etc...).

Toutefois, l'équation (37) peut s'avérer coûteuse à résoudre numériquement pour un grand nombre de fréquences ω . Ce coût peut être réduit en faisant appel à des stratégies de projection dans des bases de réductions.

2.3. Solution sur base modale

Dans la pratique, il est très coûteux numériquement d'évaluer $\mathbf{G}(\omega)$. C'est pourquoi nous cherchons à développer la réponse sur une base adaptée \mathbf{T} , nous permettant ainsi de résoudre le système de manière efficace. Une approche classique adoptée pour la résolution numérique du système linéaire défini par l'équation d'équilibre discrétisée consiste à construire cette base à partir des premiers modes normaux (à interfaces fixes) et de la compléter par un mode d'attache, suivant la méthode des accélérations modales. Outre la réduction du système à peu de degrés de liberté

généralisés, un autre intérêt de cette base est qu'elle permet de découpler les équations différentielles du système à résoudre.

Pour construire la base des modes normaux, nous considérons le système conservatif associé au système réel, le système conservatif est alors régi par l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (45.)$$

avec

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y} e^{j\omega t} \quad (46.)$$

$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_n]$ et $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\omega_1^2 \ \dots \ \omega_n^2)$ sont respectivement les matrices des modes propres (mode normaux à interfaces fixes) et des fréquences propres du système obtenues par la résolution du système d'équations suivant :

$$\mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y}\mathbf{\Lambda} \quad (47.)$$

Les solutions propres n'étant pas définies de manière unique, nous leur adjoignons la condition de normalisation :

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{I} \quad (48.)$$

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire de la matrice d'inertie et de raideur. Dans ce cas, la matrice modale \mathbf{Y} du système conservatif associé nous permet de découpler le système d'équations du mouvement. La solution de l'équation (36) se met donc sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y} \mathbf{q}(t) \quad (49.)$$

Les composantes $q_r(t)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) du vecteur $\mathbf{q}(t)$ sont les coordonnées modales généralisées, combinaisons linéaires des $u_i(t)$. En utilisant les relations d'orthonormalité, il vient :

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{q} = \mathbf{Y}^T \mathbf{f} \quad (50.)$$

avec :

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (51.)$$

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} = \mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\zeta_n \omega_n \end{bmatrix} \quad (52.)$$

où ζ_r est un facteur d'amortissement associé au $r^{\text{ème}}$ mode et ω_r la $r^{\text{ème}}$ fréquence propre circulaire (rad.s^{-1}) du système non amorti. Ainsi le système précédent s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Xi}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(t) = \mathbf{Y}^T \mathbf{f}(t) \quad (53.)$$

Cependant, cette méthode implique (d'un point de vue théorique) les n solutions modales existantes pour un système à n ddl. Or il n'est pas souvent nécessaire de considérer les n mode normaux de cette base complète pour obtenir une bonne approximation de la réponse dans la base physique. Il est donc fréquent dans la pratique de restreindre la base à (k) modes basses fréquences que nous notons $\mathbf{Y}_{\text{Bf}} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_k]$. Ayant restreint la base des modes normaux, la méthode dite des accélérations modales permet de limiter les effets de la troncature modale en basses fréquences.

La méthode des accélérations modales permet de construire une base plus adaptée en suivant le principe de la méthode de Rayleigh [RAY45].

Cette méthode propose de construire la réponse du système à partir d'un terme $\hat{\mathbf{u}}(t)$ provenant de la superposition modale (avec une base tronquée) et de termes de correction $\bar{\mathbf{u}}(t)$, évalué à partir des réponses statiques du problème suivant :

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (54.)$$

Pour évaluer $\bar{\mathbf{u}}(t)$, nous exprimons dans un premier temps les réponses statiques \mathbf{u}^s données par :

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^s = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2(t) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_m(t) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{f}} \boldsymbol{\alpha}(t) \quad (55.)$$

qu'il faut orthogonaliser par rapport à \mathbf{Y}_{Bf} pour compléter la base modale, en notant $\mathbf{\Lambda}_{\text{Bf}} = \mathbf{Y}_{\text{Bf}}^T \mathbf{K} \mathbf{Y}_{\text{Bf}}$:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{u}^s - \mathbf{Y}_{\text{Bf}} \mathbf{\Lambda}_{\text{Bf}}^{-1} \mathbf{Y}_{\text{Bf}}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (56.)$$

que nous choisissons aussi de normer par rapport à la masse. Ainsi nous avons :

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{y}} \boldsymbol{\alpha}(t) \quad (57.)$$

La base modale \mathbf{Y}_{Bf} définie précédemment, est complétée par la matrice $\bar{\mathbf{y}}$ pour former la base de réduction finale \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{Y}_{\text{Bf}} \quad \bar{\mathbf{y}}] \quad (58.)$$

La matrice des valeurs propres $\mathbf{\Lambda}_{\text{T}}$ correspondant à \mathbf{T} peut alors être redéfinie par :

$$\mathbf{\Lambda}_{\text{T}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (59.)$$

puisque $\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{I}$ et nous considérons :

$$\Xi_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\text{Br}}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}_{\text{Br}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (60.)$$

Ainsi, pour évaluer efficacement la réponse en contrainte du système, nous adaptons la base de réduction \mathbf{T} pour l'évaluation des contraintes et définissons la matrice des contraintes réduites $\Psi = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{T}$ telle que :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{q}(t) = \Psi \mathbf{q}(t) \quad (61.)$$

2.4. Conclusion

La réponse déterministe du système introduit dans la première partie peut être évaluée numériquement par la méthode des éléments finis. La base modale, formée des k premiers modes propres de la structure et d'un terme complémentaire évalué suivant la méthode des accélérations modales, nous permet de découpler l'équation d'équilibre discrétisée obtenue. La réponse en contrainte peut alors être déterminée de manière efficace.

3. REPONSE ALEATOIRE DU SYSTEME LINEAIRE

Nous nous intéressons dans cette partie, à l'étude de la réponse du système soumis à des chargements aléatoires dont les propriétés du premier et du second ordre sont connues et les définissent entièrement. Mais nous définissons dans un premier temps, la notion de processus aléatoires auxquels seront assimilés les forces aléatoires, ainsi que les hypothèses de propriétés stationnaires, ergodiques et gaussiennes. L'étude de ces hypothèses, nous amène à définir plusieurs outils mathématiques tels que les fonctions de corrélation, les densités spectrales et les moments spectraux.

Enfin nous démontrons que lorsque les forces aléatoires $\mathbf{f}(t)$ sont définies par des processus aléatoires stationnaires dont les propriétés statistiques du premier et du second ordre sont connues, il est possible de déterminer ces mêmes propriétés pour la réponse en contrainte du système.

3.1. Caractérisation des forces aléatoires stationnaires gaussiennes

Par définition, une variable dont l'évolution n'est pas connue dans le temps est dite non déterministe ou aléatoire. Par exemple l'enregistrement de la hauteur de la houle en mer peut être assimilé à un historique de la réalisation d'une variable aléatoire. L'ensemble des historiques issus des enregistrements de la hauteur de la houle est alors appelé processus aléatoire.

Si nous considérons un processus de forces aléatoires $\mathbf{f}(t)$ composé de n historiques temporels $\mathbf{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$, chaque historique $f_i(t)$ des réalisations de la force aléatoire sera alors différent d'un autre historique $f_j(t)$ des réalisations de cette même force aléatoire (Figure 1-4).

Certaines propriétés statistiques communes aux différents historiques peuvent être déterminées. En effet, il est possible de calculer des valeurs moyennes sur l'ensemble des historiques, de telles quantités sont appelées *moyennes d'ensemble*.

La *valeur moyenne* du processus aléatoire $f(t)$ à l'instant $t = t_1$ est obtenue en additionnant les valeurs correspondantes à l'instant t_1 de chacun des historiques de l'ensemble et en divisant le résultat par le nombre d'historiques.

Un autre type de moyenne d'ensemble est obtenu en additionnant le produit de deux valeurs de chaque historique prises à deux instants différents $t = t_1$ et $t = t_1 + \tau$ et en divisant le résultat par le nombre d'historiques. Cette moyenne d'ensemble est appelée *fonction d'autocorrélation*.

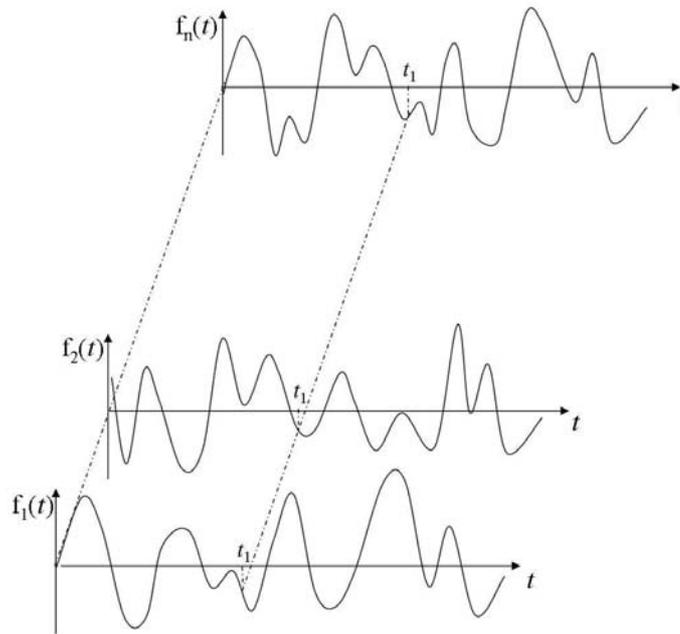


Figure 1-4. Différentes réalisations de $\mathbf{f}(t)$

En considérant $E[\bullet]$ l'opérateur moyenne stochastique, la moyenne $\bar{\mathbf{f}}$, la matrice des fonctions de covariance Σ_f et la matrice des fonctions de corrélation \mathbf{R}_f sont données à l'instant t_1 par :

$$\bar{\mathbf{f}}(t_1) = E[\mathbf{f}(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t_1) p(\mathbf{f}(t_1)) d\mathbf{f} \quad (62.)$$

$$\Sigma_f(t_1, t_1 + \tau) = E\left[\left(\mathbf{f}(t_1) - \bar{\mathbf{f}}(t_1) \right) \left(\mathbf{f}(t_1 + \tau) - \bar{\mathbf{f}}(t_1 + \tau) \right)^T \right] \quad (63.)$$

$$\mathbf{R}_f(t_1, t_1 + \tau) = E\left[\mathbf{f}(t_1) (\mathbf{f}(t_1 + \tau))^T\right] \quad (64.)$$

$p(\mathbf{f})$ représentant la densité de probabilité de \mathbf{f} .

Selon le théorème de la limite centrale si une variable aléatoire est la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et qu'aucune d'entre elles ne contribuent significativement à la somme, alors sous certaines conditions, la distribution de la variable est normale ou gaussienne à la limite. Cette propriété est très souvent employée pour les phénomènes physiques résultant de la superposition de contributions aléatoires indépendantes.

Les forces aléatoires considérées vérifient ces hypothèses, ainsi leur densité de probabilité $p(\mathbf{f})$ s'écrit :

$$p(\mathbf{f}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_f)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{f} - E[\mathbf{f}])^T \Sigma_f^{-1} (\mathbf{f} - E[\mathbf{f}])\right] \quad (65.)$$

Une force aléatoire $f(t)$ a une distribution gaussienne unitaire si $E[f] = 0$ et $\Sigma_f = 1$ (Figure 1-5).

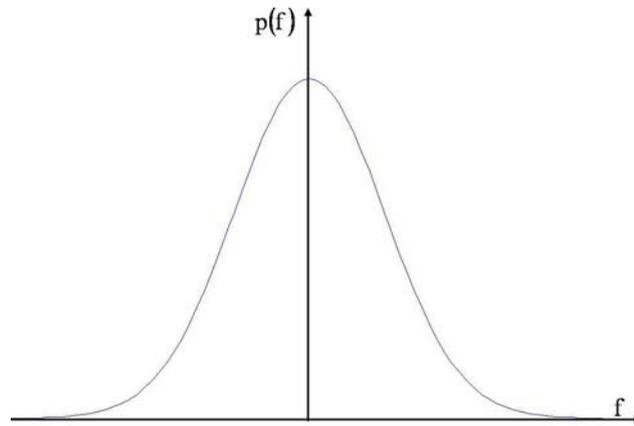


Figure 1-5. Densité de probabilité gaussienne unitaire

Un processus aléatoire est dit stationnaire si sa *valeur moyenne* et sa *fonction d'autocorrélation* sont indépendantes par rapport au temps. Le processus est dit non stationnaire si ces quantités varient.

Ainsi $\forall t_1$ pour un processus de forces aléatoires stationnaires :

$$\bar{\mathbf{f}}(t_1) = E[\mathbf{f}(t_1)] = E[\mathbf{f}(t_1 + \tau)] \quad (66.)$$

$$\Sigma_f(\tau) = \Sigma_f(t_1, t_1 + \tau) \quad (67.)$$

$$\mathbf{R}_f(\tau) = \mathbf{R}_f(t_1, t_1 + \tau) \quad (68.)$$

Un processus aléatoire est dit ergodique s'il est possible de remplacer les moyennes d'ensemble du processus par les moyennes temporelles :

$$E[\mathbf{f}] = \bar{\mathbf{f}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f}(t) dt \quad (69.)$$

$$\Sigma_{\mathbf{f}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) (\mathbf{f}(t + \tau) - \bar{\mathbf{f}})^T dt \quad (70.)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f}(t) (\mathbf{f}(t + \tau))^T dt \quad (71.)$$

Cette propriété est très intéressante car elle permet d'évaluer les moyennes d'ensemble d'un processus à partir d'un seul historique. Ainsi pour un processus de forces aléatoires ergodiques, chaque réalisation particulière des forces permettent d'estimer les statistiques pour l'ensemble du processus.

Une force aléatoire gaussienne est entièrement définie par sa moyenne $\bar{\mathbf{f}}$ et sa variance $\sigma_{\mathbf{f}}^2$ définie par :

$$\sigma_{\mathbf{f}}^2 = V[\mathbf{f}] = E[(\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}})^2] = E[\mathbf{f}^2] - \bar{\mathbf{f}}^2 \quad (72.)$$

Soient σ_{f_i} et σ_{f_j} les écart-types de deux forces aléatoires f_i et f_j , leur fonction de covariance $\Sigma_{f_i f_j}(\tau)$ et de corrélation $\mathbf{R}_{f_i f_j}(\tau)$ sont alors liées par :

$$\mathbf{R}_{f_i f_j}(\tau) = \rho_{f_i f_j}(\tau) \sigma_{f_i} \sigma_{f_j} + \bar{f}_i \bar{f}_j \quad (73.)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{f_i f_j}(\tau) &= \rho_{f_i f_j}(\tau) \sigma_{f_i} \sigma_{f_j} \\ &= E[f_i f_j^T] - \bar{f}_i \bar{f}_j \\ &= \mathbf{R}_{f_i f_j}(\tau) - \bar{f}_i \bar{f}_j \end{aligned} \quad (74.)$$

où la fonction de corrélation normalisée (ou coefficient de corrélation) $\rho_{f_i f_j}(\tau)$ est caractéristique du degré de dépendance de f_i par rapport à f_j :

$$\rho_{f_i f_j}(\tau) = \frac{\mathbf{R}_{f_i f_j}(\tau)}{\sqrt{\mathbf{R}_{f_i f_i}(0) \mathbf{R}_{f_j f_j}(0)}} \quad (75.)$$

En particulier pour la fonction d'autocorrélation de f_i , lorsque $\tau = 0$ f_i est entièrement corrélée avec elle-même, $\rho_{f_i f_i}(0) = 1$ et :

$$\mathbf{R}_{f_i f_i}(0) = \sigma_{f_i}^2 + \bar{f}_i^2 \quad (76.)$$

Lorsque $\tau \rightarrow \infty$, f_i est entièrement décorrélée avec elle-même, $\rho_{f_i f_i}(\tau) \rightarrow 0$ et :

$$\mathbf{R}_{f_i f_i}(\tau) \rightarrow \bar{f}_i^2 \quad (77.)$$

Ainsi il est constaté que la fonction d'autocorrélation de f_i définit entièrement f_i . Par extension, la matrice des fonctions de corrélation \mathbf{R}_f suffit à définir entièrement le processus \mathbf{f} . Il est alors intéressant d'introduire la densité spectrale de puissance afin de caractériser entièrement les processus aléatoires dans le domaine fréquentiel.

Dans le **domaine fréquentiel**, $\mathbf{f}(t)$ est caractérisée par sa matrice de Densités Spectrales de Puissance² (DSP), définie sur $]-\infty, +\infty[$ comme étant la transformée de Fourier de la matrice des fonctions de corrélation (théorème de Wiener-Khinchin). La DSP détermine la répartition fréquentielle de l'énergie moyenne du processus :

$$\Phi_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (78.)$$

Si la matrice des DSP $\Phi_f(\omega)$ du processus $\mathbf{f}(t)$ est connue alors la matrice des fonctions de corrélation du processus est obtenue par transformation inverse de Fourier de la DSP :

$$\mathbf{R}_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (79.)$$

Il est aussi possible de définir la DSP sur la matrice des fonctions de covariance :

$$\mathbf{S}_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (80.)$$

Ainsi la matrice des covariances de \mathbf{f} est déterminée à partir \mathbf{S}_f par :

$$\Sigma_f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_f(\omega) d\omega = \begin{bmatrix} \sigma_{f_1}^2 & \rho_{f_1 f_2} \sigma_{f_1} \sigma_{f_2} & \cdots & \rho_{f_1 f_n} \sigma_{f_1} \sigma_{f_n} \\ & \sigma_{f_2}^2 & & \rho_{f_2 f_n} \sigma_{f_2} \sigma_{f_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & & & \sigma_{f_n}^2 \end{bmatrix} \quad (81.)$$

A l'aide des outils mathématiques que nous venons d'introduire, nous allons maintenant expliciter la réponse aléatoire de la structure.

² Cependant, la DSP est souvent définie sur les fréquences positives (Bendat et Piersol [BEN66]) :

$$\mathbf{W}_f(\omega) = \begin{cases} 2\Phi_f(\omega), & 0 < \omega < \infty \\ \Phi_f(0), & \omega = 0 \end{cases}$$

3.2. Réponse du système linéaire

Nous étudions maintenant la réponse $\mathbf{u}(t)$ d'un système de réponse impulsionnelle $\mathbf{g}(t)$ soumis à une force aléatoire $\mathbf{f}(t)$.

a. Moyenne de la réponse du système linéaire

Considérons maintenant la moyenne de la réponse aléatoire en contrainte $\mathbf{s}(t)$ à une force aléatoire stationnaire $\mathbf{f}(t)$. Nous pouvons écrire :

$$E[\mathbf{s}(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{g}(\tau) \mathbf{f}(t - \tau) d\tau \right] \quad (82.)$$

ou encore :

$$E[\mathbf{s}(t)] = \mathbf{H} \mathbf{B} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\tau) E[\mathbf{f}(t - \tau)] d\tau = \mathbf{H} \mathbf{B} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\tau) d\tau E[\mathbf{f}(t)] \quad (83.)$$

De plus, en utilisant la définition de la transformée de Fourier pour $\omega = 0$, l'expression finale est de la forme :

$$E[\mathbf{s}(t)] = \mathbf{H} \mathbf{B} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\tau) d\tau E[\mathbf{f}(t)] = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{G}(0) E[\mathbf{f}(t)] \quad (84.)$$

En appliquant la définition de la matrice de fonction de réponse en fréquence $\mathbf{G}(\omega)$, nous obtenons la moyenne de la réponse en contrainte du système :

$$E[\mathbf{s}(t)] = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{f}} \quad (85.)$$

L'évaluation de la moyenne de la réponse en contrainte revient donc à estimer la contrainte statique à la moyenne de la force appliquée. Ceci implique que la moyenne de la réponse d'un système linéaire à une force aléatoire stationnaire est constante et proportionnelle à la moyenne de la force aléatoire. Ainsi, si la force est de moyenne nulle alors la réponse est aussi de moyenne nulle.

b. DSP du système linéaire

Comme pour la caractérisation des efforts, la connaissance des DSP est suffisante pour la caractérisation des réponses en contraintes des structures sous chargements aléatoires. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_u(\tau) &= E[\mathbf{u}(t) \mathbf{u}^T(t+\tau)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \mathbf{f}(t-\lambda) \mathbf{f}^T(t+\tau-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \mathbf{f}(t-\lambda) \mathbf{f}^T(t+\tau-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta dt
\end{aligned} \tag{86.}$$

or les processus d'excitation sont stationnaires et ergodiques, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t-\lambda) \mathbf{f}^T(t+\tau-\zeta) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t) \mathbf{f}^T(t+\tau+\lambda-\zeta) dt \\
&= \mathbf{R}_f(\tau+\lambda-\zeta)
\end{aligned} \tag{87.}$$

donc la solution dans le **domaine temporel** nous est donnée par :

$$\mathbf{R}_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \mathbf{R}_f(\tau+\lambda-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \tag{88.}$$

L'équation (88) définit la réponse aléatoire dans le domaine temporel, nous pouvons constater que son évaluation nécessite une double intégration. Nous pouvons aussi remarquer que la valeur de la fonction de corrélation de la réponse ne dépend pas du temps. **Ainsi, pour un système linéaire, si l'excitation est un processus aléatoire stationnaire alors la réponse est aussi un processus aléatoire stationnaire.**

Dans le **domaine fréquentiel**, la matrice des densités spectrales de puissance des réponses en déplacement du système $\Phi_u(\omega)$ peut être définie par :

$$\begin{aligned}
\Phi_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_u(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \mathbf{R}_f(\tau+\lambda-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] e^{j\omega\tau} d\tau
\end{aligned} \tag{89.}$$

Or d'après l'équation (79),

$$\mathbf{R}_f(\tau+\lambda-\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau+\lambda-\zeta)} d\omega \tag{90.}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mathbf{u}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) e^{j\omega(\tau+\lambda-\zeta)} dt \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] e^{j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^T(\zeta) e^{j\omega\zeta} d\zeta \right] e^{j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{G}(\omega) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \times \mathbf{G}^H(\omega) \right] e^{j\omega\tau} d\tau \\
 &= \mathbf{G}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \mathbf{G}^H(\omega)
 \end{aligned} \tag{91.}$$

donc :

$$\Phi_{\mathbf{u}}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) \mathbf{G}^H(\omega) \tag{92.}$$

Il est alors possible d'exprimer la matrice des DSP $\Phi_{\mathbf{s}}(\omega)$ ($ns \times ns$) de la réponse en contrainte à des forces aléatoires définies par la DSP $\Phi_{\mathbf{f}}(\omega)$ ($n \times n$) :

$$\Phi_{\mathbf{s}}(\omega) = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{G}(\omega) \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) \mathbf{G}^H(\omega) \mathbf{B}^T \mathbf{H}^T \tag{93.}$$

Cette matrice est également symétrique. En contraintes planes et en un point elle prend la forme :

$$\Phi_{\mathbf{s}}(\omega) = \begin{bmatrix} \Phi_{s_{xx}s_{xx}}(\omega) & \Phi_{s_{xx}s_{yy}}(\omega) & \Phi_{s_{xx}s_{xy}}(\omega) \\ \Phi_{s_{yy}s_{xx}}(\omega) & \Phi_{s_{yy}s_{yy}}(\omega) & \Phi_{s_{yy}s_{xy}}(\omega) \\ \Phi_{s_{xy}s_{xx}}(\omega) & \Phi_{s_{xy}s_{yy}}(\omega) & \Phi_{s_{xy}s_{xy}}(\omega) \end{bmatrix} \tag{94.}$$

Nous pouvons ainsi constater par les équations (88) et (93), qu'une évaluation de la réponse aléatoire est plus adaptée dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Aussi il apparaît que si un système linéaire est soumis à une excitation aléatoire stationnaire alors la DSP, la fonction de corrélation et la valeur moyenne de la réponse peuvent être respectivement déterminées par la simple connaissance de la DSP de l'excitation et par la fonction de réponse en fréquence du système. Dans la pratique l'inversion de la matrice des fonctions de réponse en fréquence s'avère très coûteuse, et nous préférons utiliser la base de réduction définie dans le cas déterministe.

En utilisant le développement spectral de $\mathbf{G}(\omega)$ dans la base modale $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{Y}(-\omega^2 \mathbf{I} + j\omega \mathbf{\Xi} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{Y}^T$, nous obtenons après regroupement des différents termes :

$$\Phi_{\mathbf{s}}(\omega) = (\mathbf{YHB}) \mathbf{Z}(\omega) \Phi_{\mathbf{F}}(\omega) \mathbf{Z}^H(\omega) (\mathbf{YHB})^T \tag{95.}$$

où $\mathbf{Z}(\omega) = (-\omega^2 \mathbf{I} + j\omega \mathbf{\Xi}_{\mathbf{T}} + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{T}})^{-1}$ et $\Phi_{\mathbf{F}}(\omega) = \mathbf{Y}^T \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) \mathbf{Y}$ est une matrice des DSP des forces aléatoires projetées dans la base modale \mathbf{Y} . En pratique, nous remplaçons toutefois cette base complète par la base de réduction \mathbf{T} , conduisant finalement à :

$$\Phi_s(\omega) = \Psi \mathbf{Z}(\omega) \Phi_F(\omega) \mathbf{Z}^H(\omega) \Psi^T \quad (96.)$$

avec $\Phi_F(\omega) = \mathbf{T}^T \Phi_f(\omega) \mathbf{T}$.

Plusieurs hypothèses peuvent être considérées pour accélérer les calculs. En particulier pour l'évaluation de la matrice des corrélations des réponses en zéro, nous avons [RAO99] :

$$\mathbf{R}_u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u(\omega) d\omega \quad (97.)$$

avec

$$\Phi_{u_i u_j}(\omega) = \sum_r \sum_s \frac{y_{ir} y_{jr}^T}{\omega^2 - \omega_r^2 + 2j\zeta_r \omega \omega_r} \Phi_{f_i f_j}(\omega) \frac{y_{is} y_{js}^T}{\omega^2 - \omega_s^2 + 2j\zeta_s \omega \omega_s} \quad (98.)$$

soit, en négligeant les phases :

$$\mathbf{R}_{u_i u_j}(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_r \sum_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_{ir} y_{jr}^T}{\omega^2 - \omega_r^2 + 2j\zeta_r \omega \omega_r} \Phi_{f_i f_j}(\omega) \frac{y_{is} y_{js}^T}{\omega^2 - \omega_s^2 + 2j\zeta_s \omega \omega_s} d\omega \quad (99.)$$

puis les corrélations croisées (ce qui est justifié pour des amortissements faibles de la structure) :

$$\mathbf{R}_{u_i u_i}(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_r \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y_{ir}^4}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + (2\zeta_r \omega \omega_r)^2} \right) \Phi_{f_i f_i}(\omega) d\omega \quad (100.)$$

Soit pour $\Phi_{f_i f_i}(\omega) = \Phi_{f_i f_i}$ indépendante de ω (de type bruit blanc) :

$$\mathbf{R}_{u_i u_i}(0) = \sum_r \frac{y_{ir}^4 \Phi_{f_i f_i}}{4\omega_r^3 \zeta_r} \quad (101.)$$

3.3. Conclusion

Si une structure linéaire est soumise à des chargements aléatoires définis par des processus aléatoires stationnaires gaussiens alors les réponses de la structure sont aussi définies par des processus aléatoires stationnaires gaussiens.

Ainsi la distribution de probabilité de la réponse est entièrement définie par sa moyenne et sa variance. La matrice des fonctions de corrélation de la réponse en contrainte suffit à caractériser la réponse dans le domaine temporel. De même dans le domaine fréquentiel, la matrice des DSP permet de caractériser entièrement la réponse aléatoire.

La caractérisation de la réponse en contrainte des structures peut donc être réalisée soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel (Figure 1-6). Dans le domaine temporel, ces

propriétés sont évaluées en effectuant des produits de convolution, ce qui d'un point de vue numérique peut s'avérer coûteux en temps de calcul.

En revanche dans le domaine fréquentiel, ce produit de convolution se réduit à une simple multiplication. C'est pourquoi l'approche classique utilisée lorsque les excitations aléatoires sont considérées comme ergodiques et stationnaires, consiste à étudier les excitations et les réponses en terme de DSP, définies dans le domaine fréquentiel.

Nous avons ainsi défini la DSP de la réponse aléatoire en contrainte, soit la répartition fréquentielle de l'énergie moyenne de la réponse.

De même, la contrainte moyenne du système amorti, vibrant à des forces aléatoires a été déterminée en évaluant la réponse statique aux forces moyennes appliquées.

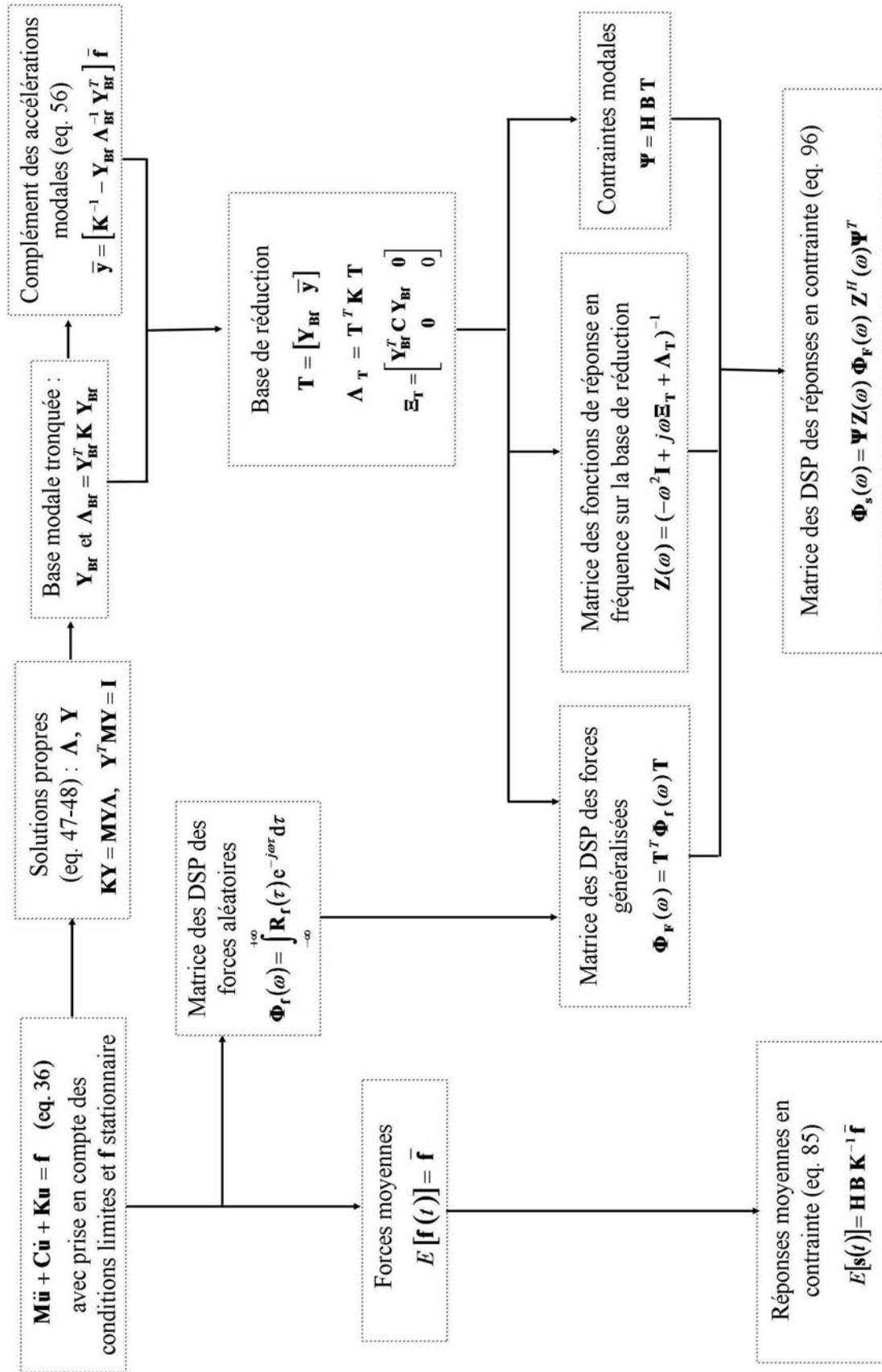


Figure 1-6. Bilan des développements sur base modale des réponses en contrainte (système linéaire)

4. PROPRIETES DES PROCESSUS ALEATOIRES STATIONNAIRES GAUSSIENS

Après avoir étudié les propriétés de la réponse d'une structure, il est souhaitable du point de vue de l'ingénieur, de pouvoir convertir ces propriétés en informations statistiques permettant d'évaluer la fiabilité de la structure.

Nous nous intéressons dans cette section aux paramètres statistiques des processus gaussiens, nécessaires à l'étude en fatigue des structures.

4.1. Moments spectraux

Le processus stationnaire gaussien défini par la DSP $\Phi_s(\omega)$ de la réponse en contrainte peut être complètement caractérisé par un ensemble de moments spectraux liés à la DSP :

$$\lambda_m(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^m \Phi_s(\omega) d\omega \quad (102.)$$

Ces moments contiennent les informations les plus importantes et permettent d'évaluer de nombreuses caractéristiques du processus. Ils représentent certaines propriétés temporelles du processus $s(t)$, comme par exemple les variances de ce processus et de ses dérivées (vitesse, accélération) :

$$\lambda_0(s) = \sigma_s^2 + \bar{s}^2 \quad \lambda_2(s) = \sigma_s^2 + \bar{s}^2 \quad \lambda_4(s) = \sigma_s^2 + \bar{s}^2 \quad (103.)$$

Si la DSP est évaluée à partir de la fonction de covariance ou si le processus est de moyenne nulle alors :

$$\lambda_m(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^m S_s(\omega) d\omega \quad (104.)$$

et,

$$\lambda_0(s) = \sigma_s^2 \quad \lambda_2(s) = \sigma_s^2 \quad \lambda_4(s) = \sigma_s^2 \quad (105.)$$

De nombreuses formules analytiques ont été développées afin d'étudier les propriétés statistiques des processus aléatoires gaussiens et stationnaires.

Parmi ces propriétés, nous rapportons celles utiles pour l'étude de la fatigue des structures :

- Le nombre de passage par un niveau b sur un temps T avec une pente positive est donnée par :

$$N_b = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \exp\left(-\frac{b}{2\lambda_0}\right) \quad (106.)$$

d'où le nombre de passage par zéro avec une pente positive :

$$N_0 = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (107.)$$

➤ Le nombre moyen de maxima par la formule suivante :

$$N_p = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (108.)$$

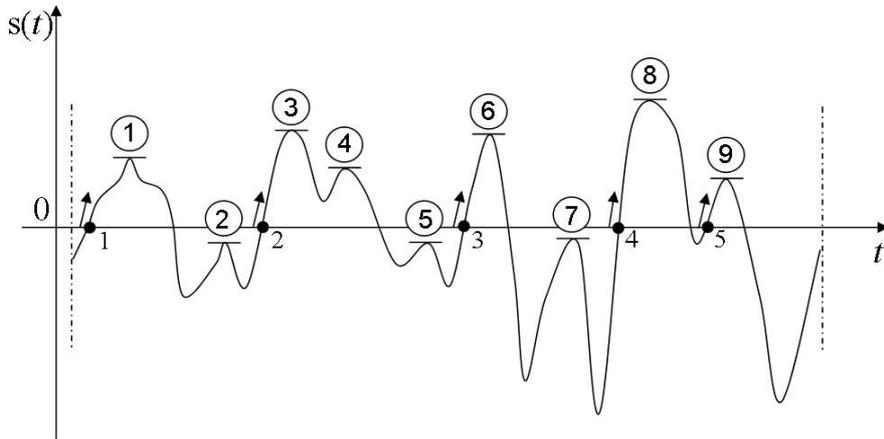


Figure 1-7. Nombre de maxima (9) et de passage par zéro avec pente positive (5) d'un signal aléatoire $s(t)$

Les démonstrations de ces propriétés peuvent être trouvées dans de nombreux ouvrages dont ceux de Bendat, de Crandall ou encore de Rice [BEN58, CRA63, RIC64].

4.2. Largeur de bande d'un processus

La largeur de bande d'un signal donne une mesure du contenu spectral significatif du signal pour les fréquences positives. Généralement, un processus stationnaire est dit en bande étroite si sa DSP possède des valeurs significatives dans un intervalle limité de fréquences.

En revanche ce processus est dit en bande large si sa DSP possède des valeurs significatives sur un grand intervalle de fréquences (Figure 1-8).

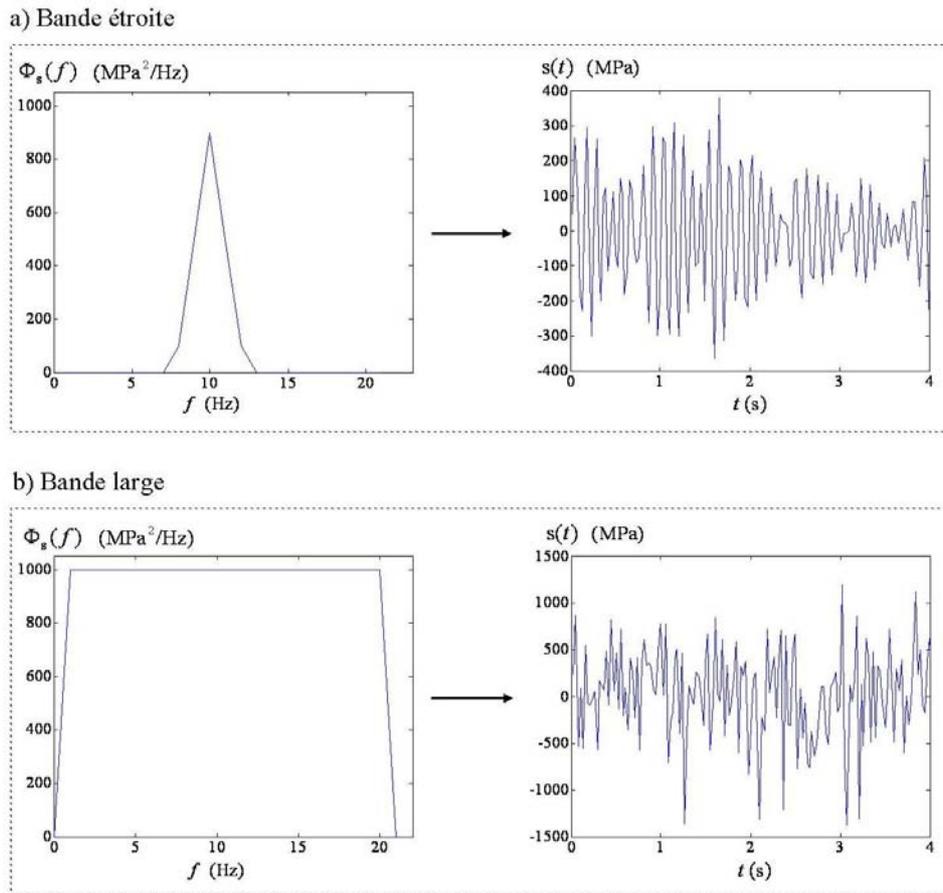


Figure 1-8. Exemple de processus (a) bande étroite et (b) large bande

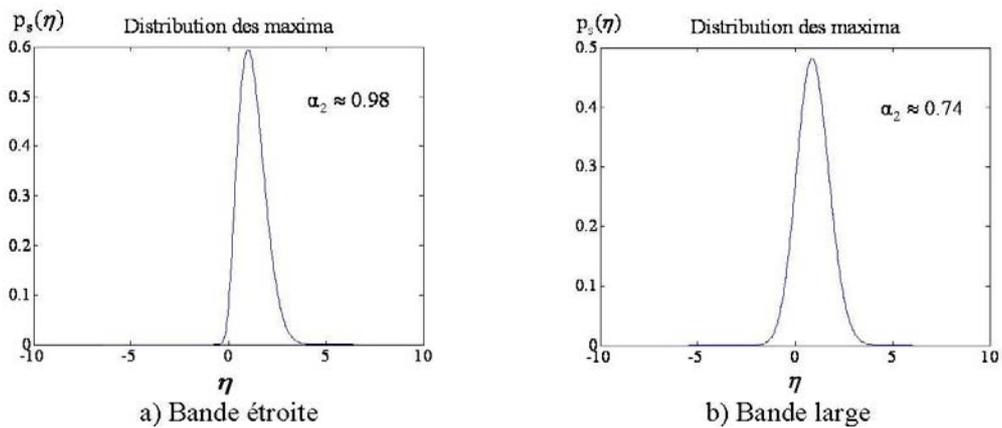


Figure 1-9. Distribution des maxima pour les processus illustrés à la Figure 1-8.

Des indications sur la largeur de bande peuvent être données par l'intermédiaire de cette famille de paramètres :

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_2}}, \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_4}}, \dots, \alpha_m = \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_{2m}}} \quad (109.)$$

Le paramètre α_2 est appelé facteur d'irrégularité, il représente le rapport entre le nombre moyen par seconde de passages par zéro à pente positive et le nombre moyen par seconde de maxima. Les paramètres de largeur de bande sont sans dimension, ils tendent vers l'unité pour des processus en bande étroite, où presque chaque cycle contient alors un seul maximum, et vers zéro pour des processus en large bande.

4.3. Densité de probabilité des maxima

La densité de probabilité des maxima du processus $s(t)$ est une combinaison linéaire d'une distribution gaussienne et d'une distribution de Rayleigh :

$$p_s(\eta) = \frac{\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma_s^2(1-\alpha_2^2)}\right) + \frac{\alpha_2\eta}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma_s^2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_2\eta}{\sigma_s\sqrt{1-\alpha_2^2}}\right) \quad (110.)$$

avec $\Gamma(-)$, la fonction de répartition d'une densité de probabilité gaussienne unitaire :

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi \quad (111.)$$

et :

$$\eta = \frac{b}{\sigma_s} \quad (112.)$$

Pour un processus en bande étroite de facteur d'irrégularité α_2 proche de 1, le premier terme s'annule et cette distribution se réduit à une distribution de Rayleigh. Pour un processus large bande où α_2 est proche de 0, la distribution des maxima est une distribution gaussienne (Figure 1-9).

4.4. Distribution et estimation du facteur de pic

Le facteur de pic (*peak factor*) η , est défini comme étant le plus grand des extrema réduit, observé sur une durée d'observation T par le processus. Sur une durée d'observation T , la probabilité que le processus $s(t)$ ne dépasse pas une valeur donnée $b = \eta\sigma_s$ peut être donnée par :

$$W(\eta, T) = \text{Prob}\left(\frac{|s(t)|}{\sigma_s} \leq \eta, 0 \leq t \leq T\right) \quad (113.)$$

Il est possible de démontrer en considérant que les franchissements à pente positive d'un seuil de niveau b par le processus stationnaire sont des événements indépendants, et que le nombre de franchissements des différents niveaux dans $[0; T]$ constitue un processus de Poisson [CAR56] :

$$W(\eta, T) = \exp\left(-N_0 e^{-\eta^2/2}\right) \quad (114.)$$

La densité de probabilité du facteur de pic³ peut alors s'exprimer par :

$$p(\eta, T) = \frac{\partial W(\eta, T)}{\partial \eta} = N_0 \eta \exp\left(-\left[\frac{\eta^2}{2} + N_0 \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right)\right]\right) \quad (115.)$$

et l'estimation du facteur de pic [PRE94, LAL97] par :

$$E[\eta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta p(\eta, T) d\eta \quad (116.)$$

dont une approximation nous est donnée par les expressions asymptotiques suivantes [LON52, DAV64] :

$$E[\eta] \approx \sqrt{2 \ln N_0} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N_0}} \quad (117.)$$

$$V[\eta] \approx \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2 \ln N_0} \quad (118.)$$

où $\gamma = 0,5772$ est la constante d'Euler. **Ces résultats sont très importants** pour la suite de notre étude. Ils permettent d'estimer la valeur maximum atteinte par une contrainte aléatoire de moyenne nulle ainsi que la dispersion sur la valeur estimée :

$$E[\max(s)] \approx \sigma_s \times \left(\sqrt{2 \ln N_0} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N_0}} \right) \quad (119.)$$

$$V[\max(s)] \approx \sigma_s \times \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2 \ln N_0} \quad (120.)$$

³ La fonction de distribution du facteur de pic est aussi connue sous les noms de fonction de distribution des valeurs extrêmes, ou de Gumbel et est souvent exprimée sous la forme suivante :

$$p(\eta) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{m-\eta}{b} - \exp\frac{m-\eta}{b}\right)$$

Les termes m et b sont reliés à la moyenne et à la variance de η par :

$$E[\eta] = m + 0,5772 \times b, \quad V[\eta] = \frac{\pi^2 b^2}{6}$$

Pour un processus $s(t)$ de moyenne non nulle et si les moments spectraux calculés selon l'équation (104), les expressions (119) et (120) évaluent la valeur extrême atteinte par le processus $s(t) - \bar{s}$.

Cependant, l'estimation du facteur de pic donnée à l'équation (117) est établie pour des processus en bande étroite. En effet, le modèle ne tient pas compte de la largeur de bande du processus, n'étant fonction que du nombre de passage par zéro, tout comme le montre la Figure 1-10 où les distributions du facteur de pic pour un processus en bande étroite et en bande large sont les mêmes.

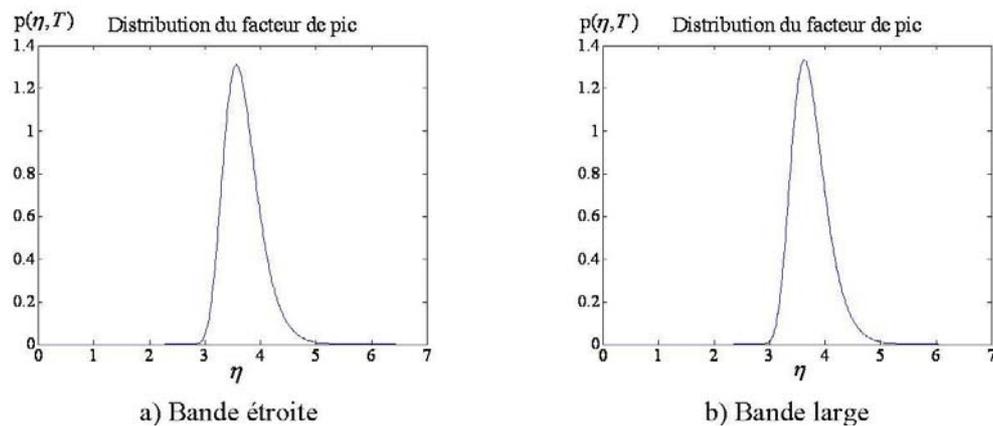


Figure 1-10. Distribution du facteur de pic évaluée pour $T = 60s$ pour les processus illustrés à la Figure 1-8

Des simulations de Monte-Carlo montrent que la moyenne du facteur de pic augmente lorsque la largeur de bande augmente pour une même durée d'observation du processus [PRE94]. La prise en compte de la largeur de bande du processus pour l'estimation de la valeur maximum atteinte par la réponse en contrainte d'une structure, est particulièrement importante. En effet, les réponses en contrainte sont plutôt représentées par des processus en bande large.

5. CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre, à l'évaluation numérique des contraintes dans des structures soumises à des chargements aléatoires. Après un rappel concernant les notions liées à la contrainte et aux équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, nous avons discrétisé le problème mécanique linéaire par la méthode des éléments finis.

Pour évaluer la réponse en contrainte du problème de manière efficace, l'équation d'équilibre discrétisée est découplée par une base de réduction formée des premiers modes propres de la structure et d'un terme complémentaire évalué suivant la méthode des accélérations modales.

Les forces aléatoires considérées sont stationnaires et gaussiennes selon le théorème de la limite centrale et sont par conséquent entièrement définies dans le domaine temporel par leur fonction de corrélation et dans le domaine fréquentiel par leur densité spectrale de puissance. Puisque les réponses aléatoires en contrainte du système linéaire sont aussi stationnaires et gaussiennes, nous définissons

entièrement les réponses en contrainte en déterminant leur fonction de corrélation et leur densité spectrale de puissance. Il apparaît que l'évaluation de leur densité spectrale de puissance est numériquement plus efficace que celle de leur fonction de corrélation. En effet la DSP s'obtient par produit simple tandis qu'il est nécessaire d'effectuer un produit de convolution pour évaluer la fonction de corrélation.

Ayant défini les propriétés des réponses en contrainte, nous avons introduit dans la dernière section, différents paramètres statistiques pour les processus gaussiens, nécessaires à l'étude en fatigue des structures. En particulier le facteur de pic nous permet d'estimer la valeur maximum atteinte par une contrainte aléatoire sur une durée donnée. Ces paramètres statistiques sont utilisés dans la suite du mémoire afin d'adapter les critères de fatigue multiaxiaux à l'étude des structures soumises à des excitations aléatoires.

Chapitre 2.

Méthodes d'estimation de l'endommagement par fatigue

On entend par *fatigue* ou *endommagement par fatigue* la modification des propriétés mécaniques des matériaux consécutive à l'application répétée de cycles d'efforts, ces applications pouvant conduire à la rupture des pièces constituées par ces matériaux. Deux domaines d'étude peuvent alors être distingués, le premier domaine est celui de la fatigue dite « **oligocyclique** » (*Low Cycle Fatigue*) qui correspond aux efforts les plus grands, supérieurs à la limite d'élasticité du matériau et où la rupture intervient aux alentours de $10^4 - 10^5$ cycles. On observe dans ce domaine une rapide déformation plastique suivie d'une rupture.

Dans le cadre de ce travail nous nous intéresserons plus particulièrement au second domaine, celui de la fatigue « **polycyclique** » (*High Cycle Fatigue*). On y distingue deux sous domaines, celui de l'endurance limitée où l'on parle du régime fini de durée de vie et celui de l'endurance illimitée où la structure peut supporter un nombre de cycles théoriquement infini sans qu'elle ne casse. Lorsque l'endurance limitée est traitée, c'est la fatigue à grands nombres de cycles qui est visée. La rupture intervient alors entre $10^5 - 10^7$ cycles, sous une contrainte plus faible que précédemment et sans apparition d'une déformation plastique mesurable, un **phénomène d'adaptation** est alors observé. Les modèles d'estimation de durée de vie pour ce domaine se basent très souvent sur l'historique des contraintes. Nous considérons dans ce travail, que l'initiation d'une fissure au sein de la structure détermine sa durée de vie puisque statistiquement, l'apparition d'une fissure représente en général plus de 90% de la durée de vie d'une structure. Enfin le domaine de l'endurance illimité est celui de la fatigue à très grands nombres de cycles où la rupture n'intervient pas avant 10^8 cycles.

Depuis la découverte du phénomène de fatigue, de nombreuses approches ont été envisagées afin de pouvoir quantifier ce phénomène. En tenant compte de l'hypothèse précédente, nous pouvons principalement distinguer trois approches dans la manière d'évaluer la durée de vie d'un matériau. La première est une approche basée sur la déformation. Elle s'appuie sur l'utilisation de courbes *e-N* (*Strain - Number of cycles to failure*) reliant, pour un matériau donné, des cycles de déformations imposées d'amplitude constante à des durées de vie exprimées en terme de nombre de cycles. Cette

approche est souvent employée lorsqu'on étudie la fatigue à petits nombres de cycles. Nous pouvons également citer les approches basées sur l'énergie de déformation ou la densité d'énergie de déformation. Ces approches ont la particularité de pouvoir évaluer l'endommagement d'une structure soumise simultanément à des chargements de différentes natures (cycle thermique, fluage...). Elle s'adapte tout aussi bien à une étude de fatigue à grands nombres de cycles qu'à petits nombres de cycles ([FRO87, PAP97]). Enfin, les approches basées sur la contrainte sont les plus largement exploitées, notamment pour évaluer les durées de vie de structures élastiques à grands nombres de cycles. Elles s'appuient sur les courbes $S-N$ (*Stress - Number of cycles to failure*) qui, pour un matériau donné, relie des cycles de contraintes appliquées d'amplitude constante, à des durées de vie exprimées en terme de nombre de cycles. Ces approches restent les plus appropriées pour évaluer les durées de vie de la plupart des structures existantes. D'un point de vue physique, ce sont des approches très cohérentes puisqu'il est admis que les fissures apparaissent généralement aux endroits de la structure où les niveaux de contrainte sont les plus élevés.

Dans un premier temps, nous présentons la démarche la plus couramment utilisée pour prédire les durées de vie dans les cas où les structures sont soumises à des chargements simples aléatoires et générant des états de contrainte uniaxiaux. Nous présenterons ensuite les approches utilisées lorsque les états de contrainte générés sont multiaxiaux. Enfin, une étude des avantages et inconvénients des différentes approches est exposée dans le but de définir quelle approche semble la mieux adaptée à notre objectif de dimensionnement en fatigue, pour les structures soumises à des chargements aléatoires multiaxiaux.

Notre objectif est donc de déterminer dans ce chapitre quels sont les méthodes ou les critères les mieux adaptés au développement d'un outil de pré-dimensionnement en fatigue pour des structures soumises à des chargements aléatoires multiaxiaux.

1. PREDICTION DE DUREE DE VIE EN FATIGUE UNIAXIALE

Le domaine de la prédiction de durée de vie pour des pièces soumises à des états de contraintes uniaxiaux a fait l'objet de nombreuses études et les différentes méthodes développées dans ce domaine donnent de très bonnes prédictions. Les approches utilisées dans ce domaine sont à l'origine de la plupart des méthodes développées pour les états de contraintes multiaxiaux.

1.1. Courbes de Wöhler

Depuis les travaux de Wöhler (1860/1870) effectués sur des axes de wagons soumis à des contraintes de flexion rotative, la façon la plus représentative de rendre compte de l'endurance d'un matériau est de tracer la courbe de Wöhler ou courbe $S-N$. En effet, pour caractériser des paramètres de fatigue d'un matériau, l'essai le plus simple consiste à soumettre des éprouvettes « lisses ou

entaillées » de ce matériau à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude maximale et de fréquence constante et à reporter sur une courbe, le nombre de cycles au bout duquel la rupture se produit en fonction de l'amplitude de l'effort appliqué. La Figure 2-1 représente une courbe de Wöhler idéalisée où les différents domaines d'étude de la fatigue sont distingués.

Il est à noter que la fréquence de la sollicitation ne semble pas avoir une influence sur la tenue en fatigue des éprouvettes métalliques et qu'il existe une certaine dispersion (Figure 2-2) sur les résultats de ces essais. En pratique, la courbe de Wöhler est généralement donnée pour une probabilité d'amorçage $p = 0,5$.

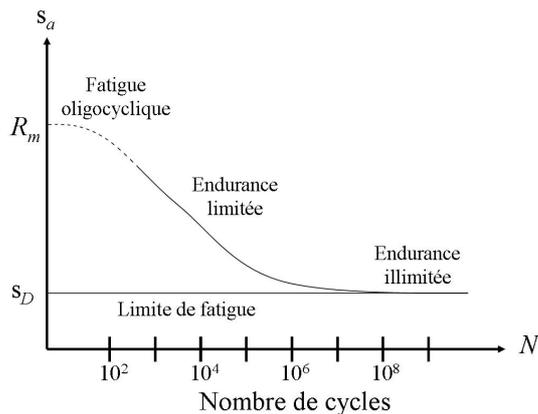


Figure 2-1. Courbe de Wöhler

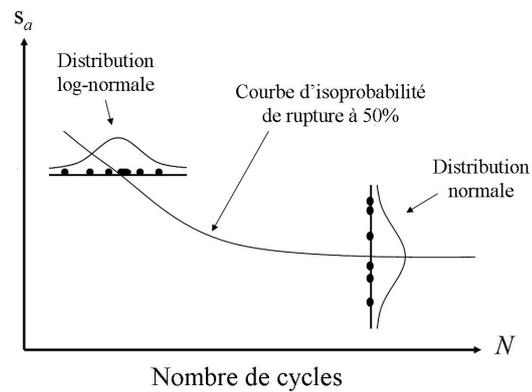


Figure 2-2. Dispersion sur les essais

Diverses expressions analytiques ont été proposées pour représenter les courbes de Wöhler dans les domaines d'endurance limitée ou illimitée. La représentation analytique la plus couramment utilisée a été proposée par Basquin en 1910, cette expression décrit une droite dans des axes logarithmiques. Considérons s_a la contrainte alternée appliquée en essai et N_r le nombre de cycles à rupture, la formule de Basquin peut alors s'écrire :

$$\ln s_a = a - b \ln N_r, a > 0, b > 0 \quad (1.)$$

ou

$$N_r s_a^\beta = C \text{ en posant : } \beta = 1/b \text{ et } \ln C = a/\beta \quad (2.)$$

La formule ne décrit pas la totalité de la courbe puisque s_a ne tend pas vers la limite d'endurance illimitée S_D , définie comme le niveau de contrainte appliquée pour lequel l'éprouvette testée aura une durée de vie supposée infinie. Elle n'est donc représentative que du domaine d'endurance limitée, ce qui toutefois satisfait à notre étude. D'autres relations ont été proposées par la suite et sont décrites dans de nombreux ouvrages dont [LIE82]. Citons à titre d'exemple les formules de Palmgren, de Weibull, de Bastenaire ou encore de Stromeyer.

Les courbes de Wöhler permettent de caractériser la durée de vie des matériaux sous des sollicitations de contrainte à moyennes nulles. Cependant, la nature des sollicitations rencontrées en

service est souvent de contrainte à moyennes non nulles. Il s'avère alors nécessaire de prendre en compte cette influence.

1.2. Facteurs d'influence

De nombreux paramètres ont une influence directe sur la tenue en fatigue d'un matériau. La modification et la nature même de ces paramètres sont en effet susceptibles d'affecter cette résistance à la fatigue. Parmi ces facteurs d'influence, nous pouvons citer les facteurs :

- dépendants des conditions de sollicitations (influence de la forme du signal, surcharges et ordre d'application des charges),
- géométriques (effet d'échelle, accidents de forme, qualité de l'usinage),
- d'environnement (températures élevées, milieux corrosifs...),
- d'ordre métallurgique (orientation du fibrage par rapport à la direction des efforts, taille des grains, défauts métallurgiques, taux d'érouissage, traitement thermique).

Ces différents paramètres sont généralement pris en compte par le calcul et l'application de coefficients de correction spécifiques (Tableau 2-1). Pour un cycle de chargement alterné d'amplitude s_a , un cycle équivalent d'amplitude s_e est déterminé :

$$s_e = s_a C_{\text{chargement}} C_{\text{environnement}} C_{\text{géométrique}} C_{\dots} \quad (3.)$$

Chargement de départ	Chargement final	$C_{\text{chargement}}$
Axial	Flexion	1,25
Axial	Torsion	0,725
Flexion	Torsion	0,58
Flexion	Axial	0,8
Torsion	Axial	1,38
Torsion	Flexion	1,72

Tableau 2-1. Exemple de coefficient de correction pour le chargement

Ces coefficients de correction sont tous déterminés de manière empirique et sont pour la plupart conservatifs et seulement applicables à un type de matériau donné.

1.3. Effet de la contrainte moyenne

Les courbes de Wöhler caractérisent la tenue en fatigue des matériaux sous des sollicitations de contrainte à moyennes nulles. Cependant, il existe dans la littérature un certain nombre de résultats mettant en évidence les effets de la contrainte moyenne sur le comportement en fatigue des matériaux [RIC69, HAN76, WEB99]. En effet, lorsqu'une contrainte de traction s_m est superposée au chargement

mettant en évidence les effets de la contrainte moyenne sur le comportement en fatigue des matériaux [RIC69, HAN76, WEB99]. En effet, lorsqu'une contrainte de traction s_m est superposée au chargement cyclique d'amplitude s_a , la durée de vie de l'éprouvette diminue tandis que l'inverse est observé en présence d'une contrainte moyenne de compression. De nouveaux essais sont alors nécessaires afin de caractériser cette influence par l'intermédiaire d'un diagramme de Haigh (Figure 2-3) qui définit pour une durée de vie fixée N , la contrainte alternée admissible s_a en fonction de la contrainte moyenne s_m .

Les tests requis pour générer un diagramme de Haigh sont très coûteux, c'est pourquoi plusieurs relations empiriques reliant l'amplitude de la contrainte alternée à la moyenne de la contrainte ont été développées. De nombreux essais ont fourni des résultats se situant entre les modélisations proposées par Goodman et par Gerber. Lorsque la contrainte moyenne est petite devant l'amplitude de la contrainte, les deux modélisations sont en accord, en revanche elles ne le sont plus lorsque la contrainte moyenne est proche de l'amplitude. Dans ce cas, il est recommandé d'adopter la modélisation la plus conservative. Ainsi on peut considérer que la parabole de Gerber permet de modéliser l'influence d'une contrainte moyenne de traction :

$$\frac{s_a}{s_e} + \left(\frac{s_m}{R_m} \right)^2 = 1 \text{ avec } |s_m| \leq R_m \quad (4.)$$

tandis que la droite de Goodman semble plus appropriée pour modéliser les effets de la contrainte moyenne de compression :

$$\frac{s_a}{s_e} + \frac{s_m}{R_m} = 1 \text{ avec } |s_m| \leq R_m \quad (5.)$$

Ces deux modélisations, de par l'utilisation de la contrainte limite à la rupture du matériau R_m , permettent ainsi de transformer chaque cycle de moyenne non nulle s_m et d'amplitude s_a en un cycle équivalent de moyenne nulle et d'amplitude s_e .

Le CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques) propose l'emploi du modèle bilinéaire de la Figure 2-4. D'un point de vue mathématique, ce modèle peut se traduire par :

$$s_e = R_m + \frac{1}{2}(s_a - s_m) - \sqrt{R_m + \frac{1}{2}(s_a - s_m)^2 - 2s_a R_m} \quad (6.)$$

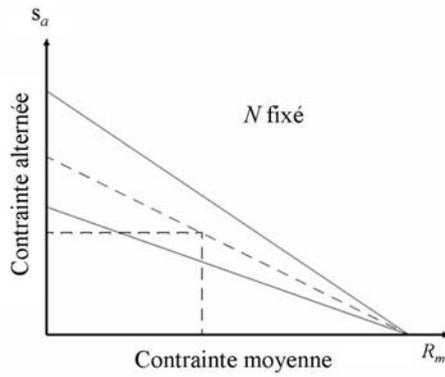


Figure 2-3. Représentation schématique du diagramme de Haigh

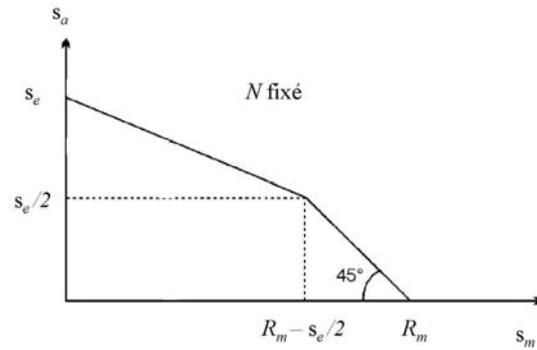


Figure 2-4. Diagramme de Haigh proposé par le CETIM

L'ensemble des corrections apportées aux données fournies par les courbes $S-N$, permet l'exploitation de ces données par les méthodes classiques utilisées en fatigue uniaxiale. Il est ainsi possible, pour un cycle de contrainte d'amplitude et de moyenne données, de déterminer le nombre de répétitions de ce cycle au bout duquel la rupture se produira. Cependant pour des chargements composés de différents cycles, il devient nécessaire d'utiliser des lois de cumul de l'endommagement.

1.4. Cumul de l'endommagement et prédiction de durée de vie

Chaque cycle de contrainte d'amplitude supérieure à la limite d'endurance produit un endommagement irréversible sur la structure. L'endommagement D_i , produit par n_i cycles d'amplitude s_{ai} , est relié à N_i , le nombre total de cycles produisant la rupture par fatigue sous une contrainte d'amplitude constante s_{ai} . Dans le but d'estimer l'endommagement partiel D_i produit par n_i cycles, Miner a proposé la relation suivante :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (7.)$$

Si k groupes de cycles de contrainte d'amplitudes différentes et de moyennes nulles sont considérés, alors l'endommagement produit par chaque groupe est donné par la loi de Miner [MIN45]. Finalement l'endommagement total D subit par la structure soumise à l'ensemble des groupes de cycles de contrainte, est donné par la formule de Palmgren :

$$D = \sum_{i=1}^k D_i \quad (8.)$$

Nous pouvons ainsi écrire la loi du cumul de l'endommagement linéaire de Palmgren-Miner :

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (9.)$$

La rupture se produit alors lorsque $D = 1$.

Le principal inconvénient de la loi de cumul de Palmgren-Miner est de ne pas prendre en compte l'ordre d'apparition des cycles de contrainte. D'autres lois de cumul du dommage ont été proposées dont certaines prennent en compte l'ordre d'apparition des cycles. Plusieurs études comparatives ont été menées, où il apparaît que dans le cas de sollicitations aléatoires, les lois prenant en compte l'ordre d'apparition des cycles perdent de leur efficacité. C'est pourquoi la loi de Palmgren Miner reste parmi les plus utilisées.

Lorsque l'amplitude des contraintes devient aléatoire, il est nécessaire de disposer de méthodes capables d'extraire les cycles endommageant pour ainsi pouvoir exploiter une loi de cumul. Ces méthodes sont appelées méthodes de comptage de cycles.

1.5. Méthode de comptage Rainflow

Le comptage des cycles de contrainte est une étape importante qui doit permettre de filtrer les informations essentielles pour l'étude du dommage par fatigue. Il est par exemple reconnu que seuls les maxima et les minima successifs des contraintes subis par la structure, ont une influence significative sur sa durée de vie.

Il existe une multitude de méthodes pour effectuer ce comptage [AST85]. Pour toutes ces méthodes, il est nécessaire de savoir éliminer les petites variations. Cette correction, destinée à l'origine à supprimer le bruit, a pour objectif la transformation des signaux de longue durée en des signaux plus faciles à utiliser. Le choix d'une méthode dépend de la façon dont sont définis les cycles de contrainte. Chaque méthode procède, à partir d'une définition de la notion de cycle qui lui est propre, à l'évaluation du nombre de cycles et de leur étendue e , pour une durée t de la trajectoire étudiée.

Parmi les méthodes les plus connues, on peut citer la méthode de franchissement de seuils, la méthode du comptage des domaines par paire et la méthode de comptage des extrema entre deux passages par la valeur moyenne. Enfin la méthode du Rainflow est de loin la plus utilisée dans le domaine de la fatigue [AFN93]. Elle définit le cycle de contrainte comme une boucle d'hystérésis fermée dans un diagramme contrainte-déformation.

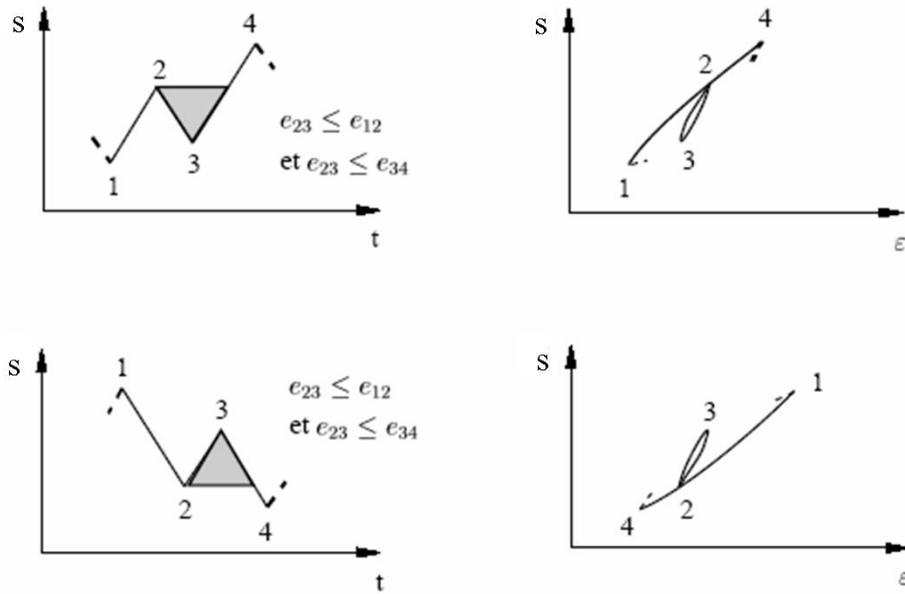


Figure 2-5. Comptage de rainflow (AFNOR)

La procédure usuelle de la méthode Rainflow consiste tout d'abord à discrétiser l'historique de contrainte en définissant un nombre n de classes d'amplitude (la norme française AFNOR – Association Française de Normalisation – préconise $n = 64$) puis l'historique est réduit à une séquence de maxima et de minima locaux (pics et vallées). Chaque maxima u et minima v successif représente alors une étendue $e = |u - v|$. Selon la norme AFNOR, l'extraction d'un cycle se base sur l'étude d'une séquence de trois étendues successives. Un cycle est extrait lorsque l'étendue étudiée e_i est inférieure ou égale à l'étendue précédente e_{i-1} et à l'étendue suivante e_{i+1} ($e_{i-1} \geq e_i \leq e_{i+1}$). Puis l'étendue e_{i-1} est raccordée à l'étendue e_{i+1} en supprimant de la séquence le maximum u_i et le minimum v_i appartenant à l'étendue e_i . L'opération est répétée en repartant de l'étendue nouvellement créée et ceci pour l'ensemble de l'historique.

Le dommage par fatigue est relié aux amplitudes et aux valeurs moyennes des cycles de contrainte. Pour une contrainte aléatoire, la méthode de comptage extrait donc un ensemble de cycles, chacun défini par un pic de niveau u et une vallée de niveau v ou une amplitude s et une valeur moyenne m , ces termes étant reliés entre eux par les expressions suivantes :

$$s = \frac{u - v}{2}, \quad m = \frac{u + v}{2} \quad (10.)$$

La méthode de comptage Rainflow utilisée conjointement avec la loi de cumul de Palmgren-Miner donne des prédictions de durée de vie raisonnables et est à l'heure actuelle la démarche la plus couramment utilisée en fatigue uniaxiale.

1.6. Conclusion

L'évaluation de la durée de vie pour les pièces et structures soumises à des états de contrainte uniaxial passe par différentes étapes dont un organigramme simplifié est présenté Figure 2-6.

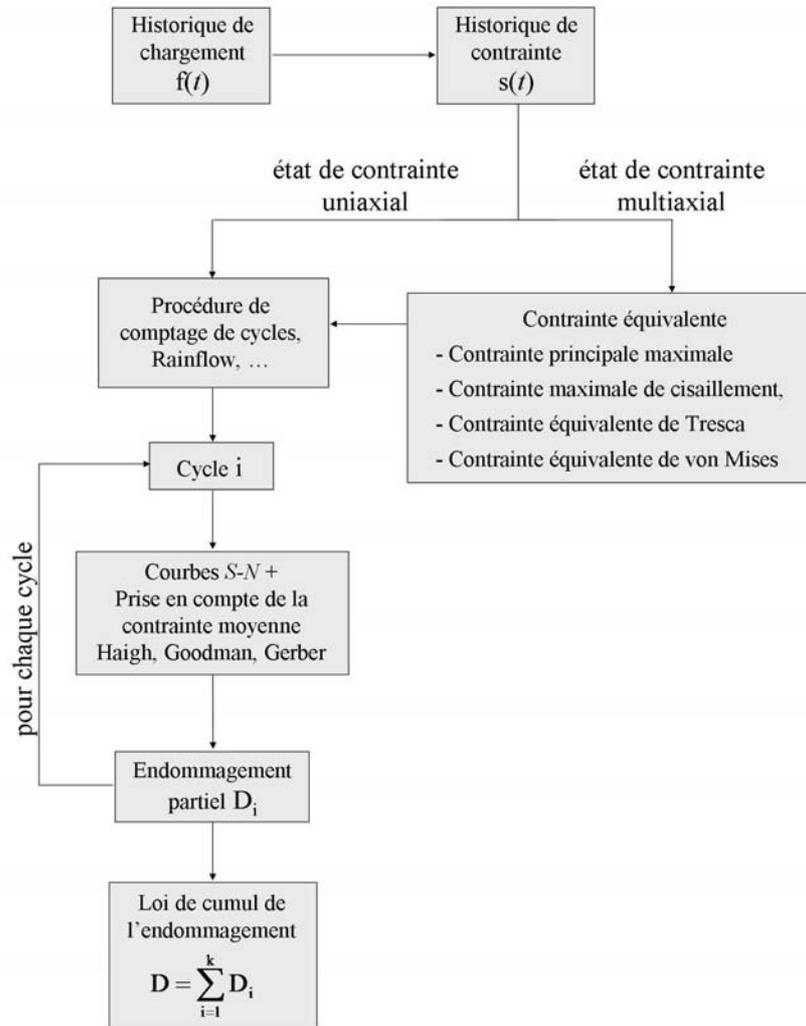


Figure 2-6. Organigramme simplifié d'une étude en fatigue avec une approche en contrainte utilisant une loi de cumul linéaire

Dans un premier temps, il est nécessaire d'identifier le type d'état de contrainte uniaxial (flexion, traction, torsion, ...) et d'effectuer les éventuelles corrections sur les données à disposition. Ensuite une procédure de comptage de cycles (Rainflow) est employée afin d'identifier les cycles de contrainte endommageant pour la structure étudiée. A chaque cycle est associé un endommagement partiel équivalent, dont le cumul par une loi donnée définit l'endommagement total.

La démarche présentée donne des prédictions de durée de vie en accord avec les essais expérimentaux.

2. CRITERES DE FATIGUE MULTIAXIAUX

Pour des états de contrainte multiaxiaux, plusieurs approches ont été proposées durant les dernières décennies, reprenant en partie les outils présentés dans cette partie. Les confrontations dans ce domaine entre les modèles de prédiction et les résultats expérimentaux sont beaucoup moins nombreuses.

Après une brève introduction aux critères de fatigue multiaxiaux, nous présentons dans la partie suivante quelques conclusions concernant la qualité des prédictions des différentes méthodes.

Dans la plupart des situations réelles de service, les composants mécaniques et les structures sont soumis à des états de contraintes cycliques multiaxiaux. Cela signifie qu'en chaque point, les directions des contraintes principales peuvent varier durant le cycle de chargement en fonction du temps. De plus, l'amplitude des contraintes principales peut être non proportionnelle vis-à-vis des autres contraintes principales.

Toutes ces constatations compliquent grandement l'analyse du comportement en fatigue des structures soumises à des états de contraintes multiaxiaux.

2.1. Formalisme des critères de fatigue multiaxiaux

Ces dernières décennies, de nombreux critères permettant de prédire la durée de vie des structures ou des pièces soumises à des chargements multiaxiaux périodiques ont été développés [WEB99]. La plupart de ces critères utilisent des quantités physiques associées à l'échelle macroscopique ou mésoscopique.

Ces critères sont basés, soit sur les historiques du tenseur des contraintes et/ou des déformations, soit sur des concepts énergétiques. Ils ont été développés selon différents points de vue tels que les critères empiriques, les critères basés sur les invariants ou les critères de type plan critique.

Un critère de fatigue basé sur les contraintes utilise plus particulièrement des grandeurs issues de l'historique multiaxial de contrainte, défini sur une période T telles que l'amplitude, les valeurs maximales et moyennes mais aussi des limites d'endurance issues de différents modes de sollicitations. Parmi les plus couramment employées, nous pouvons citer :

- t_{-1} : la limite de fatigue en torsion alternée symétrique,
- f_{-1} : la limite de fatigue en traction alternée symétrique,
- f_0 : la limite de fatigue en traction répétée.

Nous pouvons distinguer deux classes de critères. La première classe a pour objectif de déterminer si, pour un historique de contrainte donné \underline{s} , la pièce étudiée aura une durée de vie infinie ou non. En

effet lorsque la valeur (que nous noterons D) donné par le critère définissant l'endommagement, atteint une valeur supérieure à un seuil D_c (représentant à l'origine une contrainte admissible), une rupture est prédite pour la structure, dans le cas contraire il y aura non rupture.

$$D = g(\underline{s}, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) \geq D_c \rightarrow \text{rupture}$$

$$D = g(\underline{s}, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) < D_c \rightarrow \text{non rupture}$$

Les critères sont souvent reformulés de telle sorte que la valeur seuil D_c soit égale à 1. Cette classe de critère utilise alors deux ou trois paramètres fixés parmi les limites d'endurance du matériau (t_{-1} , f_{-1} , f_0 , ...).

L'autre classe de critères est adaptée pour estimer la durée de vie de la pièce en définissant, comme pour les méthodes utilisées en fatigue uniaxiale, un endommagement partiel dû à un cycle de contrainte. L'emploi de cette classe de critère nécessite alors de connaître les courbes de fatigue du matériau étudié afin de pouvoir déterminer les limites d'endurance du matériau à un nombre de cycles donné ($t_{-1}(N_e)$, $f_0(N_e)$, $f_{-1}(N_e)$, ...).

L'estimation de la durée de vie requiert l'utilisation d'une méthode de comptage, or une méthode de comptage n'est réalisable que sur une seule variable scalaire. Si les six termes du tenseur de contrainte en un point évoluent différemment, il faut réduire cette évolution temporelle en une évolution temporelle d'une seule variable. C'est ainsi que les différents auteurs des critères multiaxiaux de fatigue choisissent une variable dite de comptage et à chaque cycle extrait de cette variable, sont prélevés les paramètres nécessaires à l'évaluation de leur critère. Un organigramme simplifié de ces deux classes de méthodes est présenté sur la Figure 2-7.

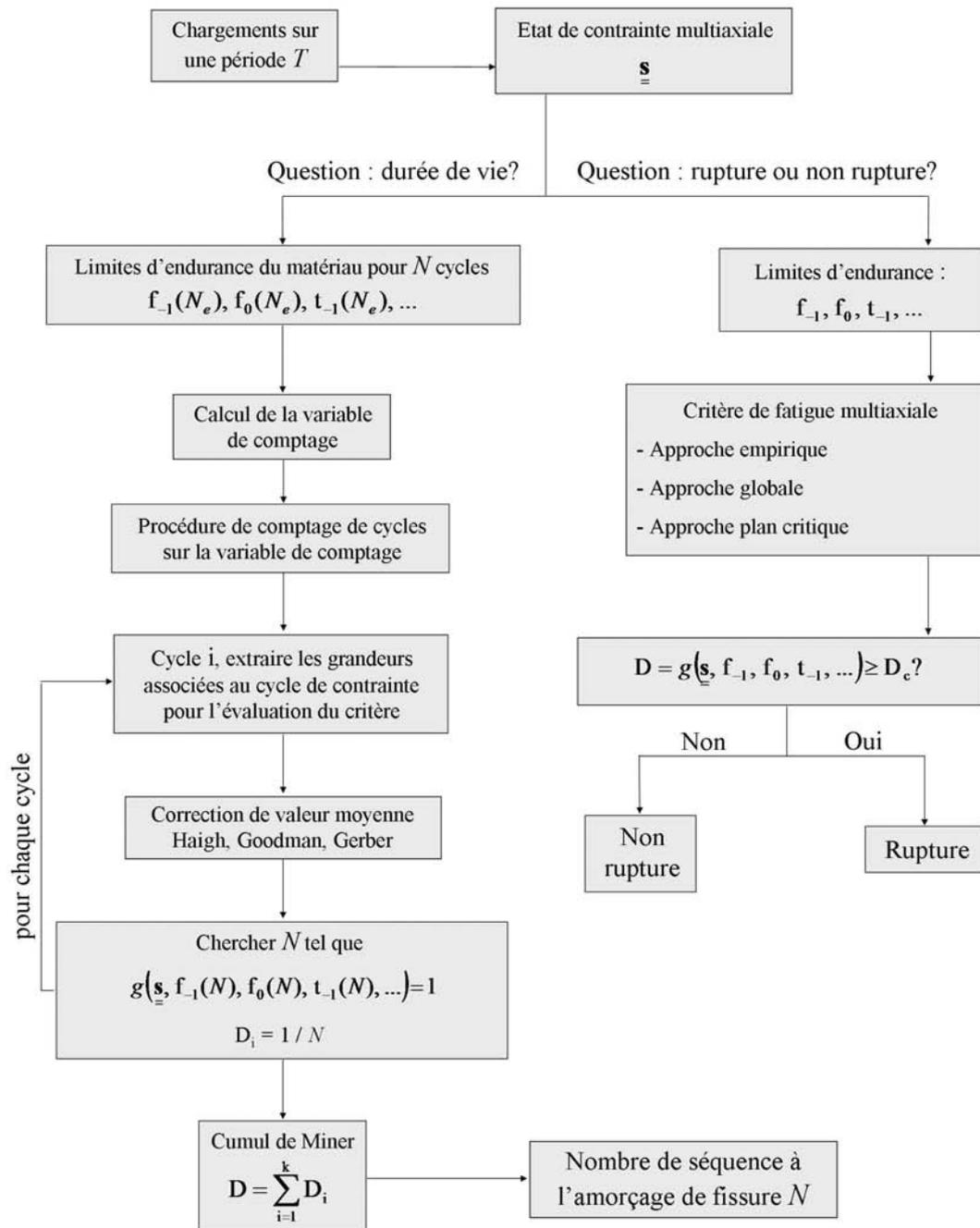


Figure 2-7. Organigramme simplifié d'une étude en fatigue multiaxiale avec une approche en contrainte

A titre d'exemple, présentons le critère initial de Dang Van [DAN73], valable pour les matériaux dont les caractéristiques en fatigue respectent :

$$\frac{t_{-1}}{f_{-1}} > \frac{1}{2} \quad (11.)$$

A partir de considérations établies à l'échelle microscopique, le critère utilise des grandeurs macroscopiques des contraintes telles que la partie alternée du cisaillement et la pression hydrostatique.

Un indicateur d'endommagement D_h pour chaque plan h est évalué par :

$$D_h = \max_t \left\{ \frac{\tau_a(t) + \alpha p(t)}{\beta} \right\} \quad (12.)$$

$$\alpha = 3 \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right), \quad \beta = t_{-1} \quad (13.)$$

La fonction du critère de fatigue de Dang Van est alors évaluée sur le plan donnant la valeur d'endommagement D_h maximale :

$$D_{Dang\ Van} = \max_h (D_h) \quad (14.)$$

égal à l'unité à la limite de fatigue du matériau.

Malgré les nombreux critères et approches existants, il n'existe pas de méthode de prédiction en fatigue multiaxiale universellement acceptée. Nous présentons dans ce qui suit une discussion sur les particularités des différentes approches appuyée par des résultats expérimentaux issus de la littérature.

2.2. Comparaison des différents critères de fatigue multiaxiaux

a. Discussion sur les différentes approches

Les critères empiriques sont généralement issus des critères de Von Mises ou de Tresca et ont été élaborés suite à un grand nombre d'essais de fatigue. Ces critères peuvent donner de très bonnes prédictions mais seulement pour la gamme de sollicitations pour lesquelles ils ont été élaborés. En effet, en dehors de cette gamme ou pour des chargements plus complexes, ces critères sont généralement inexploitable. De plus, ces critères ne prennent en compte aucune considération sur les phénomènes physiques mis en jeu durant le processus de fatigue.

Les critères énergétiques se basent sur le fait que l'énergie transmise au système est emmagasinée d'une part sous forme d'énergie élastique et est dissipée d'autre part sous forme de déformations plastiques ou de dissipations thermiques. C'est pourquoi ces critères sont mieux adaptés aux études dans le domaine de la fatigue oligocyclique ou dans le domaine de la thermomécanique [CHA02, CON04]. Dans le domaine polycyclique, les déformations plastiques au niveau des grains, engendrées par des mouvements de dislocations à l'échelle microscopique, sont à l'origine d'une grande partie des dissipations d'énergie dont l'estimation est plus difficile.

Parmi l'ensemble des critères existants, les approches de type plan critique sont de loin les plus utilisées. Parmi les plus populaires, nous pouvons citer les critères de Dang Van [DAN93], de Papadopoulos [PAP95] ou encore de Matake [MAT77]. Ces approches recherchent le plan où l'endommagement causé par fatigue est maximum. L'approche plan critique est justifiée expérimentalement pour des chargements en phase, où l'existence de directions critiques propices à la

formation de fissures est démontrée. En chaque point où est défini le tenseur des contraintes, l'endommagement est évalué par décomposition et projection du tenseur des contraintes sur l'ensemble des plans physiques étudiés. Ainsi, ces critères déterminent la durée de vie de la structure et la direction critique d'amorçage de fissure, ils utilisent souvent une combinaison de la contrainte de cisaillement et la contrainte normale sur le plan considéré.

Pour des trajets de chargement proportionnel (flexion et torsion combinées en phase par exemple), les confrontations des prévisions de ces méthodes aux résultats d'essais publiés dans la littérature, sont satisfaisantes. Néanmoins, elles sont souvent moins bonnes lorsque les chargements sont non proportionnels. De même les critères de type plan critique fonctionnent mieux pour les chargements en phase que pour les chargements hors phase. D'un point de vue physique cela s'explique par la variabilité des plans critiques lorsque les chargements sont hors phase ou non proportionnels.

La majorité des critères basés sur le concept d'approche globale utilisent le premier invariant $I_1(t)$ du tenseur des contraintes $\underline{\underline{s}}$ et le second invariant $J_2(t)$ du déviateur des contraintes $\underline{\underline{d}}$ du tenseur des contraintes. Ainsi les critères tels que ceux de Sines [SIN59] et de Crossland [CRO56] se fondent sur le choix du plan octaédral comme plan de cisaillement maximal. En effet, plusieurs expériences ont permis de mettre en évidence qu'après amorçage de la fissure, celle-ci se propage suivant un plan de cisaillement, ce qui met en avant l'importance du cisaillement dans l'amorçage d'une fissure. D'autres essais expérimentaux en fatigue ont montré aussi l'importance de la pression hydrostatique dans le processus de fatigue. Ces critères semblent mieux appropriés pour l'étude de cas où les chargements sont hors phase ou non proportionnels.

b. Résultats issus de la thèse de B. Weber

De nombreuses analyses comparatives ont été effectuées dans la littérature et ce pour différents types de chargements et de matériaux [YOU96, PAP97]. Parmi elles, l'étude réalisée par Weber [WEB99] a permis de comparer les résultats donnés par une trentaine de critères de fatigue multiaxiale à un grand nombre de résultats (233) d'essais multiaxiaux. Ces essais, issus principalement de la littérature, font intervenir les influences de la multiaxialité, du niveau de contrainte moyenne et du déphasage entre les composantes des tenseurs de contraintes et ce pour différents matériaux.

Le Tableau 2-2, extrait des tableaux I.2 et I.3 du rapport de thèse de B. Weber, récapitule les résultats obtenus pour les critères ayant donné les meilleures estimations. Dans ce tableau, apparaissent le nombre d'essais répondants aux conditions de validité du critère, les nombres d'essais et, entre parenthèses, les pourcentages correspondants, pour lesquels l'écart de validité est situé entre -40% et +40%, entre -2% et +2%, entre -40% et -2% et de +2% à +40%.

B. Weber mesure la précision d'un critère en faisant la différence entre sa fonction d'endommagement et l'unité, il appelle cette différence, écart de validité, qu'il note ΔI :

$$\Delta I = E - I$$

Plus ΔI est proche de zéro plus le critère est précis. Si ΔI est positif, le critère est alors conservatif tandis qu'au contraire, si ΔI est négatif le critère sera jugé non conservatif.

Critère	Nombre d'essais validant	Nombre (%) d'essais dont l'écart de validité est compris entre			
		[-40%,+40%]	[-2%,+2%] « justesse »	[-40%,+2%] « non-conservatif »	[-2%,+40%] « conservatif »
Fogue	233	232	52 (22,3)	90 (38,6)	81 (34,8)
Sines	233	231	47 (20,2)	99 (42,5)	85 (36,5)
Froustey	233	224	46 (19,7)	73 (31,3)	105 (45,1)
Dang Van	233	232	45 (19,3)	115 (49,4)	72 (30,9)
Papadopoulos	233	232	45 (19,3)	130 (55,8)	57 (24,5)
Deperrois	233	232	44 (18,9)	100 (42,9)	88 (37,8)
Robert	233	232	44 (18,9)	92 (39,5)	96 (41,2)
Matake	233	227	40 (17,2)	96 (41,2)	91 (39,1)
Crossland	233	230	28 (12)	180 (77,3)	22 (9,4)

Tableau 2-2. Résultats des tests de validité de quelques critères issus de la thèse de B. Weber

Sur le Tableau 2-2 les critères sont classés par ordre croissant de nombre de cas considérés comme « justes » (écart de validité compris entre -2% et +2%).

Nous pouvons constater que les critères d'approches globales occupent les trois premières places. La formulation proposée par Fogue nécessite l'utilisation de trois limites d'endurance ce qui restreint grandement son utilisation. En revanche le critère de Sines situé en deuxième position présente les avantages d'une part, d'être très simple de formulation et donc d'application et d'autre part, de ne nécessiter la détermination que de deux limites d'endurance. Le critère de Sines appartient à la famille des critères d'approche globale et évalue l'endommagement sur un seul plan, ce qui implique des temps de calcul réduits par rapport aux critères de type plan critique. Sines considère le plan octaédral comme plan de cisaillement maximal.

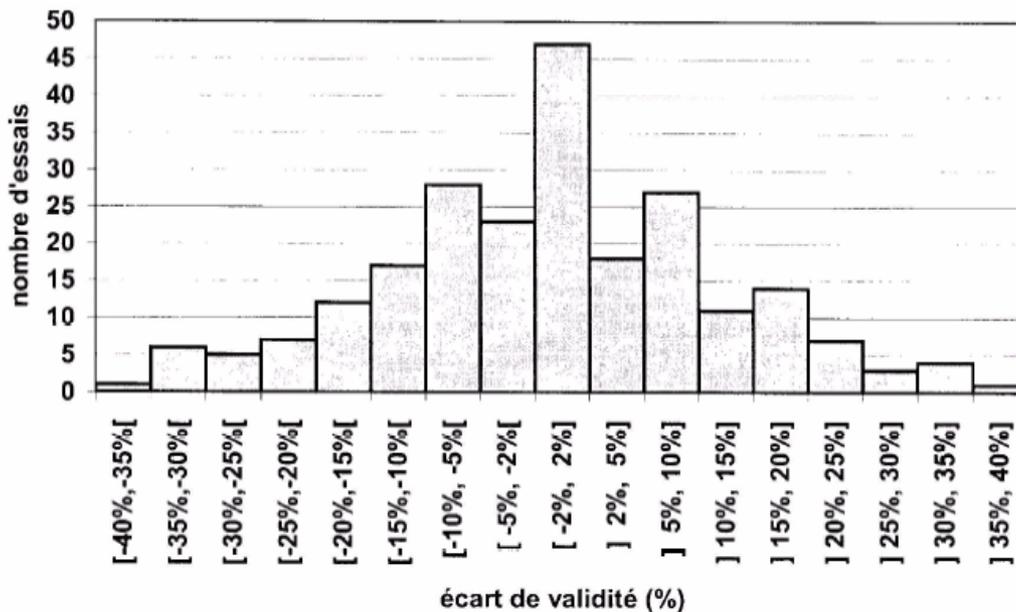


Figure 2-8. Résultats du test de validité obtenus par B. Weber concernant le critère de Sines [WEB99]

Pour ces nombreux avantages, le critère de Sines apparaît particulièrement bien adapté à un objectif de dimensionnement en fatigue. La Figure 2-8 reprend les résultats obtenus sur les tests de B. Weber pour le critère de Sines.

3. CONCLUSION

Nous avons présenté les différentes étapes des méthodes d'évaluation de l'endommagement par fatigue des structures pour des chargements uniaxiaux. Ces méthodes donnent des prédictions de durée de vie en accord avec les essais expérimentaux. Pour des chargements multiaxiaux, l'endommagement par fatigue est généralement évalué par des critères de fatigue. Une étude comparative entre les nombreux critères de fatigue existants est réalisée. Le critère par approche globale de Sines, confronté à des résultats issus d'une grande variété d'essais expérimentaux, semble donner en moyenne les meilleures estimations de durée de vie. De plus l'évaluation du critère est numériquement efficace puisque qu'il évalue l'endommagement sur un seul plan.

Lorsque l'historique des contraintes est connu, on procède généralement à une analyse dans le domaine temporel basée sur les méthodes de comptage de cycles et des lois d'accumulation du dommage. Cependant, dans des conditions réelles de service, plusieurs historiques de contrainte sont souvent nécessaires pour obtenir des statistiques fiables sur les distributions des cycles Rainflow, de l'endommagement et sur les conditions réelles d'utilisation de la structure étudiée. Une étude dans le domaine temporel peut donc s'avérer très coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi dans le chapitre suivant, nous adaptons le critère de Sines à une étude dans le domaine fréquentiel et ceci à partir des différents résultats obtenus au chapitre 1.

Chapitre 3.

Endommagement par fatigue des structures sous chargements aléatoires

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'endommagement par fatigue des structures soumises à des états de contraintes multiaxiaux aléatoires gaussiens. Nous avons précédemment déterminé la réponse en contrainte d'un système mécanique à des chargements aléatoires. Plus précisément la loi de distribution ainsi que le facteur de pic de la réponse aléatoire ont été exprimés de même que les moyennes et la matrice de covariance entre les différents termes de la réponse. A partir des statistiques établies sur les contraintes, nous souhaitons estimer la moyenne, la variance et la distribution obtenues sur un critère d'endommagement donné.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons établi qu'une approche dans le domaine fréquentiel, permet de réduire les temps de calcul par rapport à une approche dans le domaine temporel. De plus, parmi les critères de fatigue présents dans la littérature pour traiter les états de contrainte multiaxiaux, nous avons constaté que le critère d'endommagement de Sines [SIN59], initialement développé à partir d'historiques de chargement connus, pouvait être particulièrement bien adaptée à notre étude. C'est pourquoi nous proposons une méthode d'évaluation de l'endommagement basée sur le critère de Sines, à partir des statistiques obtenues dans le domaine fréquentiel sur la réponse en contrainte du système mécanique linéaire. La méthode proposée apparaît alors comme un outil de pré-dimensionnement en fatigue numériquement efficace.

Nous débutons ce chapitre par un état de l'art sur le domaine en présentant notamment la formulation du critère de Crossland proposé par X. Pitoiset [PIT00]. Puis une étude de l'influence de la largeur de bande dans l'estimation de la valeur extrême atteinte par une contrainte donnée est réalisée afin d'en tenir compte dans notre méthode. Un deuxième facteur d'influence est ensuite considéré avec la prise en compte de la nature non proportionnelle des chargements aléatoires.

Nous présentons alors dans la quatrième section notre méthode d'estimation de l'endommagement par le critère de Sines et étudions les propagations d'incertitudes dans l'estimation à travers un cas pratique. Ce chapitre se conclut par le développement de la méthodologie associée d'analyse de sensibilité de l'endommagement.

1. ETAT DE L'ART

Depuis plusieurs années, de nombreux travaux se sont intéressés à l'étude statistique des réponses en contraintes pour des applications dans le domaine de l'endommagement par fatigue. Cependant la grande majorité des développements se sont restreintes à l'étude des états de contrainte uniaxiaux et ne concerne pas notre étude. Pour un état de l'art dans ce domaine, le lecteur est invité à se référer à l'annexe 1 de ce mémoire. L'étude des critères de fatigue multiaxiaux dans le domaine fréquentiel est encore peu développée et parmi les récents travaux, nous pouvons citer ceux de Macha et de Dang Van [MAC91, MOU05]. En particulier dans les récents travaux réalisés par Pitoiset et Preumont [PIT99, PIT00], les critères de Crossland et de Mataka ont été formulés dans le domaine fréquentiel avec succès, bien que leurs études étaient limitées à des chargements aléatoires de moyennes nulles.

Nous exposons à titre d'exemple l'estimation de l'indicateur d'endommagement du critère de Crossland proposée par Pitoiset. Le critère de Crossland [CRO56] se base sur des invariants du tenseur des contraintes et de son déviateur et peut s'écrire sous la forme :

$$D_{Crossland} = \frac{\sqrt{J_{2,a}} + \alpha \max_{0 \leq t \leq T} p(t)}{\beta} \quad (1.)$$

Dans cette expression :

- $\sqrt{J_{2,a}}$ est l'amplitude du deuxième invariant du déviateur des contraintes. Pour des composantes du tenseur des contraintes de moyennes nulles, ce terme peut être relié à la contrainte équivalente de Von Mises par la relation :

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \max_{0 \leq t \leq T} |s_{vm}(t)| \quad (2.)$$

- $p(t)$ est la pression hydrostatique,
- α et β sont des paramètres liés au matériau, définis par :

$$\alpha = \left(t_{-1} - \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}} \right) / \left(\frac{f_{-1}}{3} \right) \quad (3.)$$
$$\beta = t_{-1}$$

où f_{-1} et t_{-1} sont respectivement les limites d'endurance en traction alternée et en torsion alternée définies pour un nombre de cycles donné.

X. Pitoiset suppose qu'aucun amorçage de fissure ne se produit avant N_e répétitions du chargement « aléatoire périodique » de durée T si :

$$E[D_{Crossland}] = \frac{E[\sqrt{J_{2,a}}] + \alpha E\left[\max_{0 \leq t \leq T}(p(t))\right]}{\beta} \leq 1 \quad (4.)$$

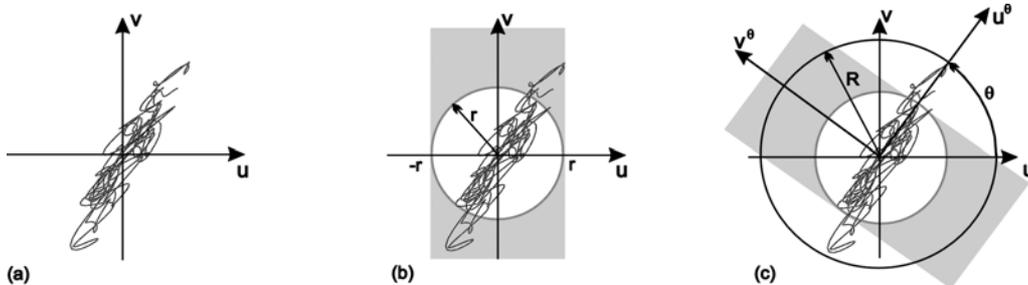
Puisque $p(t)$ est un processus stationnaire gaussien, l'espérance mathématique du maximum de la pression hydrostatique est évaluée en s'appuyant sur la théorie du facteur de pic (cf. chapitre 1) par :

$$E\left[\max_{0 \leq t \leq T}(p(t))\right] \approx \sigma_p \times \left(\sqrt{2 \ln N_0(p)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N_0(p)}} \right) \quad (5.)$$

où σ_p est l'écart type du processus $p(t)$.

En revanche le processus défini par le deuxième invariant du déviateur des contraintes est un processus quadratique avec $s_{vm}^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$ (cf. chapitre 1) et est, par nature, non gaussien. Cependant Pitoiset en propose une approximation en utilisant v_1^a , le processus gaussien correspondant à la plus grande valeur propre de la matrice de covariance Σ_v . Ainsi :

^a Pitoiset considère le nombre de franchissement du cercle de rayon r par l'extrémité du vecteur $\mathbf{v}(t)$ en allant de l'intérieur vers l'extérieur du cercle.



(a) Trajet décrit par l'extrémité d'un vecteur $\mathbf{n}(t)$ dans le plan (u, v) . (b) Bande contenant le cercle de rayon r défini tel que $-r < \mathbf{n}_u(t) < r$. (c) Rotation optimale donnant le nombre maximum de passage par le niveau r avec une pente positive selon u^θ

Le nombre maximum de passages par un niveau b avec une pente positive, du processus défini par l'extrémité du vecteur $\mathbf{v}(t)$, est associé à la direction pour laquelle on obtient la variance maximale sur les composantes de $\mathbf{v}(t)$. Il est alors possible de trouver un repère pour lequel par l'intermédiaire d'une matrice de rotation \mathbf{Q} :

$$\Sigma = \mathbf{Q} \Sigma_v \mathbf{Q}^T = \text{diag}(\sigma_{v_1}^2, \sigma_{v_2}^2, \sigma_{v_3}^2, \sigma_{v_4}^2) \text{ avec } \sigma_{v_1}^2 \geq \sigma_{v_2}^2 \geq \sigma_{v_3}^2 \geq \sigma_{v_4}^2$$

où les termes diagonaux sont les valeurs propres de Σ . Ainsi la diagonalisation de la matrice de covariance, nous donne la direction mais aussi le repère pour lesquels nous obtenons la plus grande variance recherchée $\sigma_{v_1}^2$.

$$E[\sqrt{J_{2,a}}] \approx \sigma_{v_1} \times \left(\sqrt{2 \ln N_0(v_1)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N_0(v_1)}} \right) \quad (6.)$$

Cette stratégie pour l'estimation de l'indicateur d'endommagement peut être appliquée à d'autres critères de fatigue multiaxiaux. Cependant certaines limitations sont constatées. En effet, elles sont limitées à des cas de chargement de moyenne nulle or, dans de nombreux cas industriels, les chargements aléatoires possèdent des composantes continues.

De même, la stratégie ne tient pas compte de la largeur de bande des réponses en contrainte et par conséquent n'est adaptée qu'à des réponses en contrainte en bande étroite, peu fréquentes dans les problèmes mécaniques. Enfin la définition prise de $\sqrt{J_{2,a}}$ ne rend pas compte du caractère non proportionnel des chargements aléatoires.

Nous proposons donc dans la section suivante de généraliser cette stratégie à des états de contraintes tridimensionnels de moyennes non nulles, tout en prenant en compte la largeur de bande des réponses en contrainte, par une amélioration de l'estimation du facteur de pic quelle que soit la largeur de bande et le caractère non proportionnel inhérent aux chargements aléatoires.

2. PRISE EN COMPTE DE LA LARGEUR DE BANDE

La réponse en contrainte des structures complexes est caractérisée par une DSP dont les valeurs significatives sont réparties sur un grand intervalle de fréquence. Les processus des contraintes sont alors caractérisés par une grande largeur de bande. La formule d'estimation du facteur de pic, reprise par Pitoiset, a été établie pour des processus en bande étroite et n'est donc pas bien adaptée aux problèmes mécaniques.

Nous proposons d'améliorer l'estimation du facteur de pic (voir p.27) en considérant le nombre moyen de maxima (N_p) à la place du nombre moyen de franchissement de seuil à pente positive (N_0). Pour valider notre choix, nous proposons de comparer les deux approches à travers une étude de l'estimation de $\sqrt{J_{2,a}}$. Nous les confrontons à un grand nombre de simulations de $\sqrt{J_{2,a}}$ obtenues à partir des tirages aléatoires du processus s . Ces tirages sont réalisés à partir de la matrice des DSP des réponses en contrainte $\Phi_s(\omega)$, en suivant la procédure décrite dans [PRE94, SHI71].

La DSP $\Phi_{v_1}(\omega)$ de la composante du vecteur donnant la plus grande variance est alors donnée par le premier terme de la diagonale de la matrice des DSP $\Phi_{\tilde{v}}(\omega)$ obtenue, comme précédemment, en opérant la même rotation :

$$\Phi_{\tilde{v}}(\omega) = \mathbf{Q} \Phi_{\mathbf{v}}(\omega) \mathbf{Q}^T$$

Les confrontations sont effectuées sur un exemple académique, une poutre élancée discrétisée par 160 éléments quadrangles à 8 nœuds. Nous supposons que la poutre est sollicitée en flexion dans le plan par des forces aléatoires de moyennes nulles sur une de ses longueurs et est encastree sur ses deux largeurs. Les trois premières fréquences propres de la poutre sont 2,39 Hz, 6,14 Hz et 11,11 Hz.

A partir de $\Phi_s(\omega)$, nous effectuons des tirages aléatoires des contraintes $s_x(t)$, $s_y(t)$ et $s_{xy}(t)$ pour chaque élément, ainsi $\sqrt{J_{2,a}}$ est évalué pour chaque tirage et pour chaque élément. La procédure étant coûteuse numériquement, nous nous limitons à 500 tirages pour chacun des éléments et considérons les statistiques obtenues sur les distributions des valeurs obtenues comme représentatives. Ces statistiques sont alors comparées aux deux approches, l'une avec le nombre de passages par zéro N_0 et l'autre avec le nombre de maxima N_p , et ce pour deux cas :

1. Dans le premier cas, l'étude est portée sur l'estimation en présence de contraintes aléatoires en bande étroite. Pour cela, les DSP des forces appliquées sont définies sur une bande de fréquence dans laquelle seul un premier mode de la structure est excité. Une telle situation procure des DSP en contrainte où l'énergie est concentrée autour de la première fréquence de résonance de la structure (Figure 3-1) et ainsi les DSP sont plutôt en bande étroite.
2. Dans le deuxième cas, l'étude est portée sur l'estimation avec des contraintes aléatoires en bande large. Pour cela, les DSP des forces appliquées sont cette fois définies sur une bande de fréquence dans laquelle plusieurs modes de la structure (ici les 3 premiers modes) sont excités. Les DSP en contrainte voient leur énergie se répartir autour de plusieurs fréquences de résonance de la structure (Figure 3-2) et par conséquent les DSP sont plutôt en bande large par rapport au premier cas.

Les DSP utilisées dans les deux cas sont en fait identiques, les DSP en bande étroite sont définies sur $[0, 4\text{Hz}]$ tandis que celles en bande large le sont sur $[0, 13\text{Hz}]$.

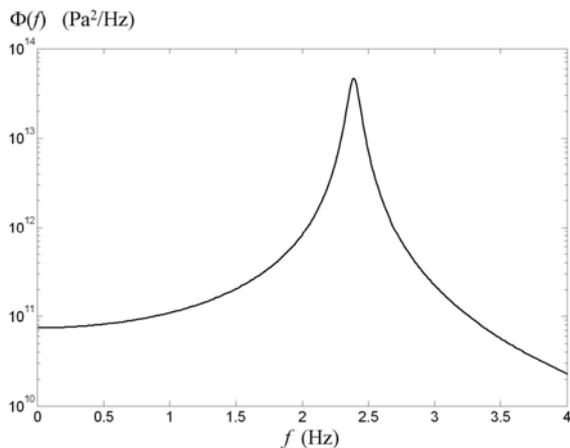


Figure 3-1. DSP en bande étroite

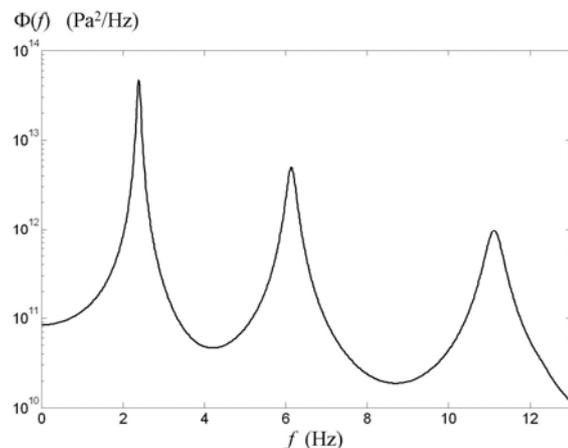


Figure 3-2. DSP en bande large

2.1. Résultats en bande étroite

La Figure 3-3 (a) représente la moyenne des valeurs obtenues pour $\sqrt{J_{2,a}}$ sur les 500 tirages aléatoires effectués pour chaque élément. Les Figure 3-3 (b) et Figure 3-3 (c) représentent les estimations de $\sqrt{J_{2,a}}$ pour chaque élément par chacune des approches.

Nous constatons que les répartitions ainsi que les valeurs estimées sont très cohérentes par rapport à celles obtenues par tirages aléatoires. Le facteur d'irrégularité (voir p. 29) du processus v_1 est d'environ 0,98 pour l'ensemble des éléments. v_1 est par conséquent un processus en bande étroite, N_0 et N_p sont alors très proches et donc les estimations de $\sqrt{J_{2,a}}$ sont semblables par les deux approches. L'écart relatif observé est en moyenne de 0,91% avec N_0 et de 1,13% avec N_p .

Sur la Figure 3-4, sont représentées pour un élément de la structure, la distribution des valeurs obtenues pour $\sqrt{J_{2,a}}$ par tirages aléatoires ainsi que les densités de probabilité de $\sqrt{J_{2,a}}$ issues des densités de probabilité du facteur de pic $p(\eta, T) = \partial W(\eta, T) / \partial \eta$, en prenant en compte soit $W(\eta, T) = \exp\left(-N_0 e^{-\eta^2/2}\right)$ soit $W(\eta, T) = \exp\left(-N_p e^{-\eta^2/2}\right)$. Les deux densités se superposent quasiment et sont représentatives de la distribution des valeurs obtenues pour $\sqrt{J_{2,a}}$.

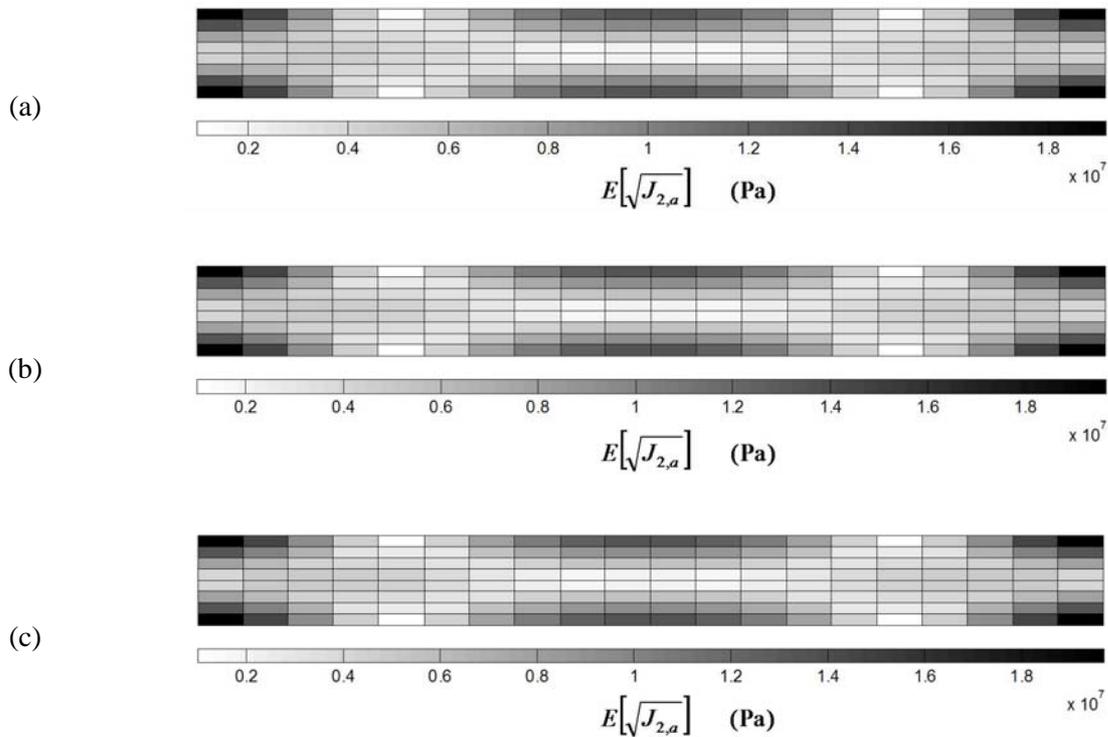


Figure 3-3. Estimation de $\sqrt{J_{2,a}}$ (a) par tirages aléatoires, (b) avec N_0 , (c) avec N_p pour un processus en bande étroite

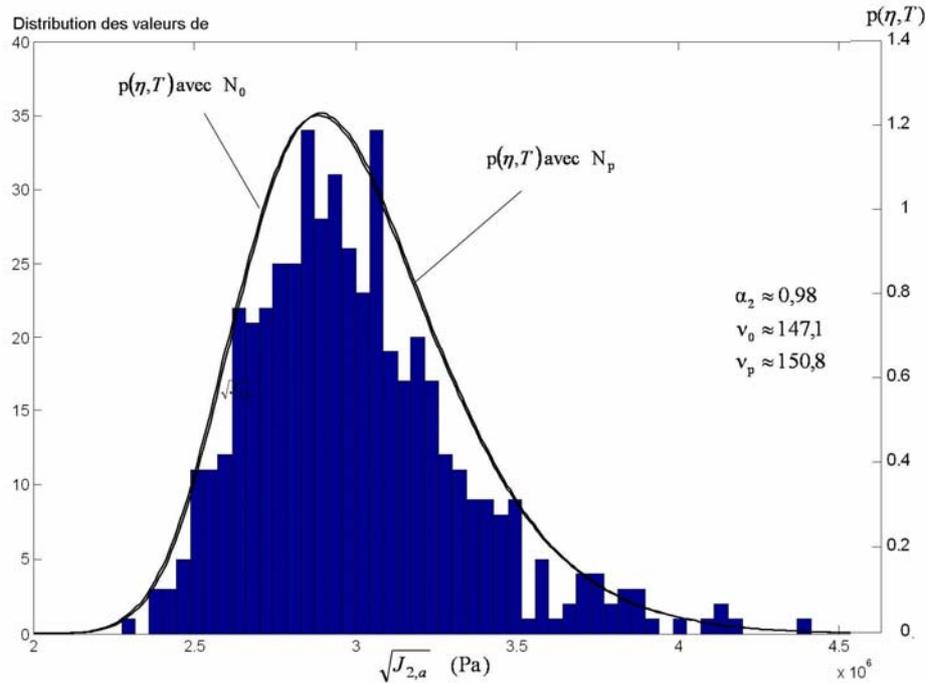


Figure 3-4. Distribution et densités de probabilité de $\sqrt{J_{2,a}}$, estimées à partir de N_0 ou N_p pour un processus en bande étroite

2.2. Résultats en bande large

Lorsque le facteur d'irrégularité du processus v_1 devient faible (i.e. processus en bande large), les valeurs de N_0 deviennent faibles par rapport à celles de N_p . Ainsi nous nous attendons à des différences notables sur les estimations de $\sqrt{J_{2,a}}$.

La Figure 3-5 représente la moyenne des valeurs obtenues pour $\sqrt{J_{2,a}}$ par tirages aléatoires et les estimations de $\sqrt{J_{2,a}}$ par chacune des deux approches.

Le facteur d'irrégularité du processus v_1 varie maintenant entre 0,33 et 0,75 pour l'ensemble des éléments, v_1 s'apparente donc à un processus large bande. L'écart relatif observé par rapport à la moyenne des résultats obtenus par tirage aléatoire est d'environ -2,64% avec N_0 et de 0,39% avec N_p . Ainsi nous constatons que plus la largeur de bande du processus est élevée, plus l'estimation de $\sqrt{J_{2,a}}$ avec N_0 est sous estimée. En revanche l'estimation de $\sqrt{J_{2,a}}$ avec N_p reste cohérente avec les valeurs observées. Nous illustrons nos propos en représentant sur la Figure 3-6, la distribution des valeurs obtenues pour $\sqrt{J_{2,a}}$ par tirages aléatoires et les densités de probabilité de $\sqrt{J_{2,a}}$ avec N_0 et N_p pour un processus v_1 dont le facteur d'irrégularité est d'environ 0,75.

Dans la suite du mémoire, la largeur de bande d'un processus sera prise en considération : l'estimation de la valeur maximale atteinte par celui-ci sur une période T , sera effectuée en estimant le facteur de pic du processus à partir du nombre moyen de maxima observés sur la période T .

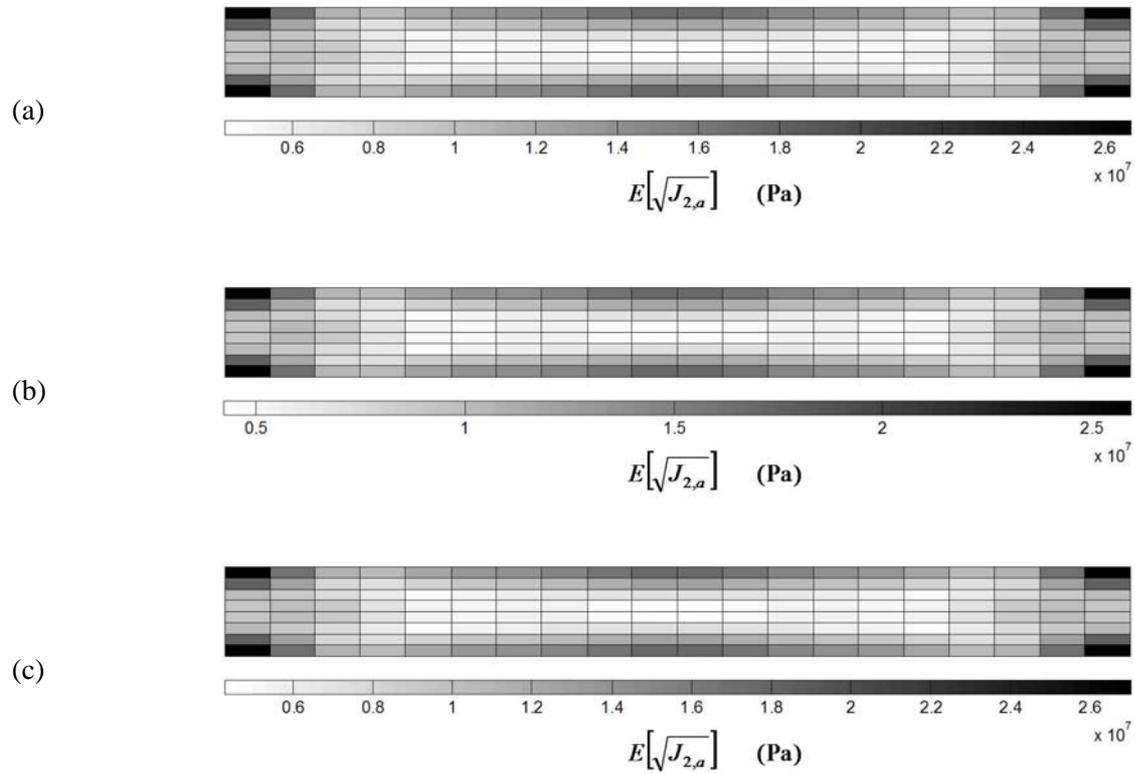


Figure 3-5. Estimation de $\sqrt{J_{2,a}}$ (a) par tirages aléatoires (b) avec N_0 , (c) avec N_p pour un processus en bande large

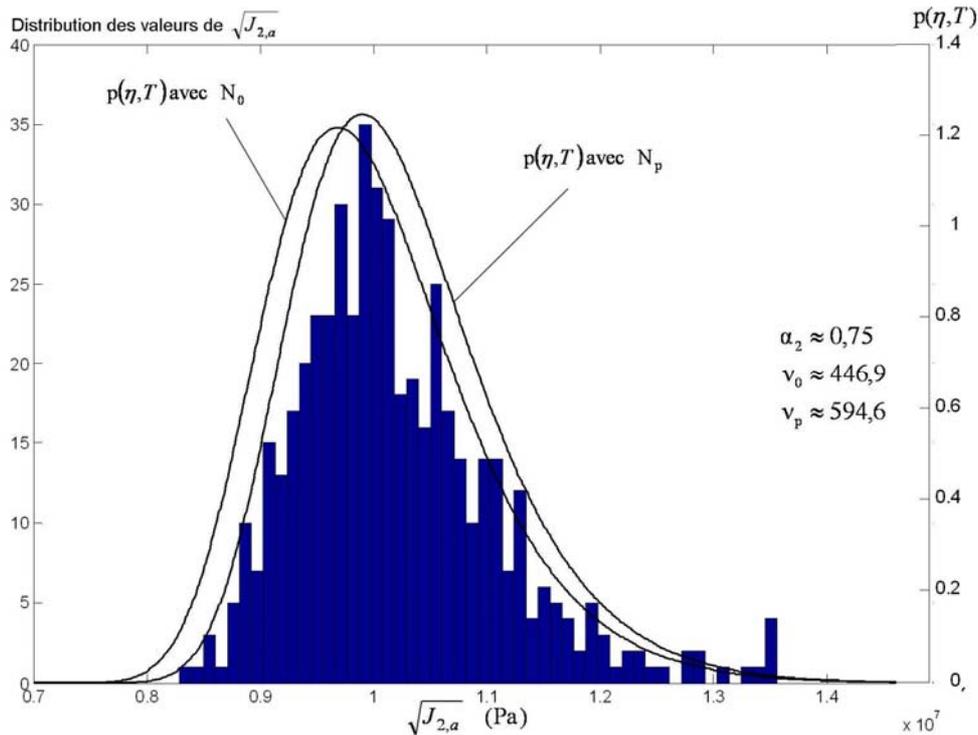


Figure 3-6. Distribution et densités de probabilité de $\sqrt{J_{2,a}}$, estimées à partir de N_0 ou N_p pour un processus en bande large

3. PRISE EN COMPTE DE LA NON PROPORTIONNALITE DES CHARGEMENTS DANS LES CRITERES DE FATIGUE MULTIAxiaux

Les critères par approche plan critique nécessitent la plupart du temps, l'évaluation de l'amplitude de la contrainte de cisaillement sur chaque plan. Les critères par approche globale nécessitent quant à eux l'évaluation de l'amplitude de la contrainte équivalente de cisaillement $\sqrt{J_{2,a}}$. L'amplitude de la contrainte équivalente de cisaillement reste constante quelle que soit l'orientation choisie du plan.

Nous concentrons notre attention sur l'étude de $\sqrt{J_{2,a}}$, cette grandeur intervenant dans l'expression du critère de Sines. Aussi, l'ensemble des conclusions apportées dans cette section, peut être étendu à l'étude de l'amplitude de la contrainte de cisaillement.

3.1. Chargement proportionnel

Nous reprenons la définition classique du deuxième invariant du déviateur des contraintes :

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{d}}}(t) \cdot \underline{\underline{\mathbf{d}}}(t)} \quad (7.)$$

Pour un chargement uniaxial ou en phase, l'amplitude de la contrainte équivalente de cisaillement est déterminée directement à partir des composantes alternées du vecteur contrainte par :

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\frac{1}{6} \left\{ (s_{xx,a} - s_{yy,a})^2 + (s_{yy,a} - s_{zz,a})^2 + (s_{zz,a} - s_{xx,a})^2 + 6(s_{xy,a} + s_{yz,a} + s_{xz,a})^2 \right\}} \quad (8.)$$

Pour faciliter le calcul de $\sqrt{J_{2,a}}$, la transformation suivante est couramment effectuée :

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(s_{xx}(t) - \frac{1}{3}s_{yy}(t) - \frac{1}{3}s_{zz}(t) \right), \quad D_2(t) = \frac{1}{2}s_{yy}(t) - \frac{1}{2}s_{zz}(t), \\ D_3(t) &= s_{xy}(t), \quad D_4(t) = s_{yz}(t), \quad D_5(t) = s_{xz}(t) \end{aligned} \quad (9.)$$

Le deuxième invariant du déviateur des contraintes peut être considéré comme la longueur d'un vecteur $\mathbf{d}(t) = [D_1(t), D_2(t), D_3(t), D_4(t), D_5(t)]^T$ dans un espace euclidien à cinq dimensions. En notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne en dimension 5, nous avons :

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_3^2(t) + D_4^2(t) + D_5^2(t)} = \|\mathbf{d}(t)\| \quad (10.)$$

D'où, pour un chargement uniaxial ou en phase :

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{D_{1,a}^2 + D_{2,a}^2 + D_{3,a}^2 + D_{4,a}^2 + D_{5,a}^2} = \|\mathbf{d}_a\| \quad (11.)$$

avec :

$$\mathbf{d}_a = \begin{bmatrix} D_{1,a} \\ D_{2,a} \\ D_{3,a} \\ D_{4,a} \\ D_{5,a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max_{0 \leq t \leq T} (D_1(t) - \bar{D}_1) \\ \max_{0 \leq t \leq T} (D_2(t) - \bar{D}_2) \\ \max_{0 \leq t \leq T} (D_3(t) - \bar{D}_3) \\ \max_{0 \leq t \leq T} (D_4(t) - \bar{D}_4) \\ \max_{0 \leq t \leq T} (D_5(t) - \bar{D}_5) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E[\mathbf{d}(t)] = \bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \\ \bar{D}_3 \\ \bar{D}_4 \\ \bar{D}_5 \end{bmatrix} \quad (12.)$$

Lorsque le chargement devient non proportionnel, la direction et la longueur du vecteur représentant $\sqrt{J_{2,a}}$ varient au cours du cycle et l'évaluation de $\sqrt{J_{2,a}}$ est plus complexe.

3.2. Chargements non proportionnels

Pour un chargement hors phase, l'expression (11) n'est plus valable. Plusieurs approches sont proposées dans la littérature pour déterminer l'amplitude de $\sqrt{J_2(t)}$ dans ces conditions [BIN02] [BAL07]. Ainsi Dang Van et Papadopoulos [PAP88] ont proposé l'idée d'évaluer l'amplitude en calculant le rayon de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement défini par la pointe du vecteur \mathbf{d} .

Cependant cette définition ne permet pas de prendre en compte l'effet d'un chargement cyclique non proportionnel : sur la Figure 3-7 est représenté un exemple pour lequel un trajet non proportionnel et un trajet proportionnel en phase donnent la même amplitude de $\sqrt{J_2(t)}$, alors qu'ils devraient certainement produire un endommagement différent.

Plusieurs expériences ont démontré l'influence significative d'un chargement non proportionnel sur l'endommagement par fatigue [LIU04]. En effet, le chargement proportionnel produit un endommagement par fatigue plus faible que celui produit par le chargement non proportionnel. A partir d'observations microscopiques, il a été mis en évidence qu'en fatigue à grand nombre de cycles la microplasticité apparaît généralement dans quelques grains, souvent ceux les mieux orientés et que cette microplasticité est responsable de la ruine en fatigue [DOU05]. Les trajets non proportionnels activent plusieurs directions et ont pour conséquence d'augmenter la probabilité de ruine.

Bin Li et al. [BIN02] proposent de considérer la plus petite ellipse de demi-axes R_1 et R_2 circonscrite au trajet de $\sqrt{J_2(t)}$ afin de rendre compte de la non proportionnalité du chargement. Ainsi l'amplitude de $\sqrt{J_2(t)}$ pour le chargement non proportionnel de la Figure 3-7 est approché par $\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$ et pour le chargement proportionnel, par $\sqrt{J_{2,a}} = R_1$ puisque $R_2 = 0$. Le rapport entre R_1 et R_2 peut être une mesure de la non proportionnalité du trajet de chargement.

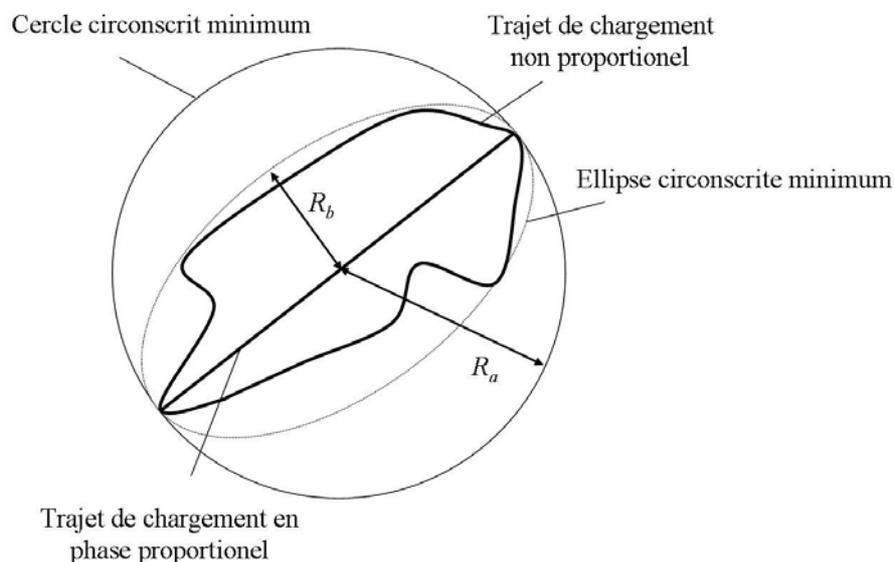


Figure 3-7. Cercle circonscrit minimum et ellipse circonscrite minimum à un trajet de chargement en deux dimensions

La méthode d'évaluation de $\sqrt{J_{2,a}}$ proposée par Bin Li et al. est généralisée dans la suite de ce mémoire, en considérant les demi-axes R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5 de l'ellipsoïde ξ_5 de dimension cinq circonscrit au trajet de $\sqrt{J_2(t)}$ et l'approximation suivante :

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \quad (13.)$$

Pour des chargements aléatoires, l'estimation de $\sqrt{J_{2,a}}$ consistera alors à estimer les demi-axes de ξ_5 . Pour cela nous définissons dans un premier temps les axes principaux de l'ellipsoïde ξ_5 circonscrit au trajet $\|\mathbf{d}(t)\|$ par analyse des composantes principales de la matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{d}}$ de \mathbf{d} .

3.3. Recherche des axes principaux de l'ellipsoïde ξ_5

Nous étudions les cinq composantes aléatoires stationnaires et gaussiennes du vecteur $\mathbf{d}(t)$ en établissant leur matrice de covariance définie par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{d}} &= E[(\mathbf{d}(t) - \bar{\mathbf{d}})(\mathbf{d}(t) - \bar{\mathbf{d}})^T] \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{D_1}^2 & \rho_{D_1D_2} \sigma_{D_1} \sigma_{D_2} & \rho_{D_1D_3} \sigma_{D_1} \sigma_{D_3} & \rho_{D_1D_4} \sigma_{D_1} \sigma_{D_4} & \rho_{D_1D_5} \sigma_{D_1} \sigma_{D_5} \\ & \sigma_{D_2}^2 & \rho_{D_2D_3} \sigma_{D_2} \sigma_{D_3} & \rho_{D_2D_4} \sigma_{D_2} \sigma_{D_4} & \rho_{D_2D_5} \sigma_{D_2} \sigma_{D_5} \\ & & \sigma_{D_3}^2 & \rho_{D_3D_4} \sigma_{D_3} \sigma_{D_4} & \rho_{D_3D_5} \sigma_{D_3} \sigma_{D_5} \\ & & & \sigma_{D_4}^2 & \rho_{D_4D_5} \sigma_{D_4} \sigma_{D_5} \\ & & & & \sigma_{D_5}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.)$$

ou à partir de Σ_s comme suit :

$$\Sigma_{\mathbf{d}} = \mathbf{P} \Sigma_s \mathbf{P}^T \quad (15.)$$

avec :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.)$$

$\Sigma_{\mathbf{d}}$ est une matrice symétrique paire, les termes de la diagonale représentent les variances de chaque composante tandis que les termes hors diagonales représentent les covariances entre chaque composante. Dans le cas général, les composantes initiales de $\mathbf{d}(t)$ sont corrélées entre elles et donc $\Sigma_{\mathbf{d}}$ n'est pas diagonale.

Nous rappelons les propriétés mathématiques suivantes :

- Une matrice symétrique est diagonalisable par une matrice orthonormale formée de ses vecteurs propres.

- L'inverse d'une matrice orthogonale est égal à sa transposée.

Appliquées à la matrice de covariance, il existe une base orthonormée \mathbf{A}_d de vecteurs propres telle que :

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{d}}} = \mathbf{A}_d \Sigma_d \mathbf{A}_d^T = \mathbf{A}_d \Sigma_d \mathbf{A}_d^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \sigma_3^2 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & \sigma_4^2 & 0 \\ & & & & \sigma_5^2 \end{bmatrix} \text{ où } \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2 \geq \sigma_4^2 \geq \sigma_5^2 \quad (17.)$$

L'Analyse des Composantes Principales (ACP), nous permet de transformer les cinq composantes corrélées en un nombre $k \leq 5$ composantes aléatoires non corrélées, appelées composantes principales. Les valeurs propres de la matrice de covariance correspondent ainsi aux variances des nouvelles composantes du vecteur $\mathbf{d}(t)$ (exprimé dans sa base orthonormée de vecteurs propres), reliées linéairement aux anciennes par :

$$\tilde{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{A}_d \mathbf{d}(t) \quad (18.)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{d}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1(t) \\ \tilde{D}_2(t) \\ \tilde{D}_3(t) \\ \tilde{D}_4(t) \\ \tilde{D}_5(t) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A}_d = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5] \quad (19.)$$

Les directions pour lesquelles les composantes de \mathbf{d} sont décorréélées, sont données par les vecteurs propres orthonormés contenus dans \mathbf{A}_d . Chacune de ces directions porte les axes principaux de l'ellipsoïde ξ_5 circonscrit au trajet de $\|\mathbf{d}(t)\|$.

Les valeurs de la diagonale de $\Sigma_{\tilde{\mathbf{d}}}$ représentent alors les variances de la projection de $\|\mathbf{d}(t)\|$ sur les axes principaux de l'ellipsoïde ξ_5 ou encore les variances des processus stationnaires gaussiens $\tilde{D}_1(t)$, $\tilde{D}_2(t)$, $\tilde{D}_3(t)$, $\tilde{D}_4(t)$ et $\tilde{D}_5(t)$.

Afin d'illustrer simplement la méthodologie (Figure 3-8), nous traitons un cas en dimension deux en considérant l'amplitude de la contrainte de cisaillement τ_a .

- Soit $\boldsymbol{\tau}(t) = [\tau_1(t) \ \tau_2(t)]^T$ la contrainte de cisaillement définie par un vecteur de dimension deux.
- Soit $\Sigma_{\boldsymbol{\tau}}$ la matrice de covariance des composantes de $\boldsymbol{\tau}(t)$.

- Soient $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]$ les vecteurs propres orthonormés tels que $\Sigma_{\tilde{\tau}} = \mathbf{A} \Sigma_{\tau} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$
avec $\tilde{\tau}(t) = [\tilde{\tau}_1(t) \ \tilde{\tau}_2(t)]^T$.

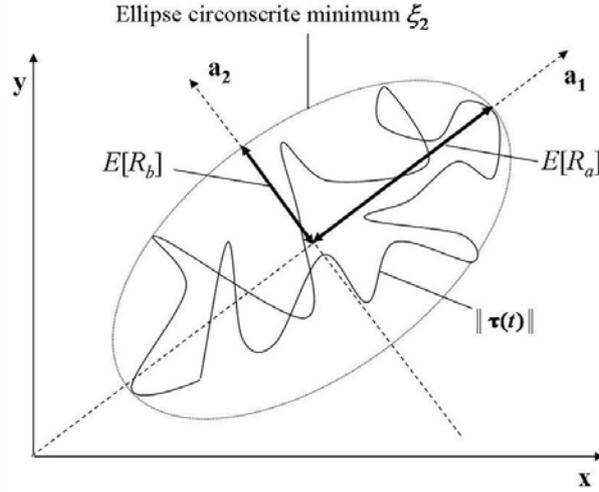


Figure 3-8. Estimation de R_1 et R_2 pour $\tau(t)$

Le trajet de $\|\tau(t)\|$ périodique forme une boucle fermée et peut donc être circonscrit par une ellipse ξ_2 . Les demi-axes R_1 et R_2 sont alors portés par les directions des vecteurs propres orthonormés \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 de la matrice de covariance. Les variances σ_1^2 et σ_2^2 correspondent aux variances des composantes $\tilde{\tau}_1(t)$ et $\tilde{\tau}_2(t)$ projection de $\|\tau(t)\|$ sur les axes principaux de porté par \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 .

3.4. Estimation de R_a et R_b

Nous avons défini les variances des projections de $\|\mathbf{d}(t)\|$ sur les axes principaux de l'ellipsoïde ξ_5 et souhaitons maintenant estimer leur valeur maximale. Pour cela la procédure est généralisée à l'étude en vitesse et en accélération de $\|\mathbf{d}(t)\|$ soient $\|\dot{\mathbf{d}}(t)\|$ et $\|\ddot{\mathbf{d}}(t)\|$. Nous déterminons dans un premier temps les matrices de covariance des vecteurs $\dot{\mathbf{d}}$ et $\ddot{\mathbf{d}}$ à partir de $\Sigma_{\dot{\mathbf{s}}}$ et $\Sigma_{\ddot{\mathbf{s}}}$:

$$\Sigma_{\dot{\mathbf{d}}} = \mathbf{P} \Sigma_{\dot{\mathbf{s}}} \mathbf{P}^T \quad (20.)$$

$$\Sigma_{\ddot{\mathbf{d}}} = \mathbf{P} \Sigma_{\ddot{\mathbf{s}}} \mathbf{P}^T \quad (21.)$$

Puis nous nous plaçons dans le repère des axes principaux de l'ellipsoïde ξ_5 , déterminés dans la section précédente, en reprenant la matrice des vecteurs propres orthonormés \mathbf{A}_d de Σ_d :

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{d}}} = \mathbf{A}_d \Sigma_d \mathbf{A}_d^T \quad (22.)$$

$$\Sigma_{\tilde{d}} = \mathbf{A}_d \Sigma_{\ddot{a}} \mathbf{A}_d^T \quad (23.)$$

Les variances des projections de $\|\dot{\mathbf{d}}(t)\|$ et $\|\ddot{\mathbf{d}}(t)\|$ sur les axes principaux de l'ellipsoïde ξ_5 sont alors données par les éléments des diagonales des matrices $\Sigma_{\tilde{d}}$ et $\Sigma_{\tilde{a}}$.

Sur une période T , les nombres moyens de maxima des composantes $\tilde{D}_i(t) - \bar{\tilde{D}}_i$ sont représentés par :

$$N_p(\tilde{D}_i(t)) = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\ddot{\sigma}_i^2}{\dot{\sigma}_i^2}}, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (24.)$$

Puisque les composantes $\tilde{D}_i(t)$ sont des processus stationnaires gaussiens entièrement décorrélés, nous estimons les valeurs maximales et les variances des valeurs maximales des $\tilde{D}_i(t) - \bar{\tilde{D}}_i$ par :

$$E\left[\max\left(\tilde{D}_i(t) - \bar{\tilde{D}}_i\right)\right] \approx \sigma_i \times \left(\sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))}} \right), \quad i = 1, \dots, 5 \quad (25.)$$

$$V\left[\max\left(\tilde{D}_i(t) - \bar{\tilde{D}}_i\right)\right] \approx \sigma_i^2 \times \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))}, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (26.)$$

Or si nous pouvons considérer que (puisque $\tilde{D}_i(t)$ gaussiens) :

$$E\left[\max\left(\tilde{D}_i(t) - \bar{\tilde{D}}_i\right)\right] \approx E\left[\left|\min\left(\tilde{D}_i(t) - \bar{\tilde{D}}_i\right)\right|\right] \approx E[R_i], \quad i = 1, \dots, 5 \quad (27.)$$

alors :

$$E[R_i] \approx \sigma_i \times \left(\sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))}} \right), \quad i = 1, \dots, 5 \quad (28.)$$

$$V[R_i] \approx \sigma_i^2 \times \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))}, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (29.)$$

Pour des chargements aléatoires stationnaires, nous approximons donc l'amplitude du deuxième invariant du déviateur des contraintes par :

$$E\left[\sqrt{J_{2,a}}\right] \approx \sqrt{E[R_1]^2 + E[R_2]^2 + E[R_3]^2 + E[R_4]^2 + E[R_5]^2} \quad (30.)$$

Ayant pris en compte l'influence des largeurs de bande des réponses en contrainte ainsi que l'aspect non proportionnel des chargements aléatoires, nous proposons dans ce qui suit une estimation de la valeur indicatrice d'endommagement, donnée par le critère de Sines.

4. APPLICATION A L'ESTIMATION DE L'ENDOMMAGEMENT

Selon l'étude comparative menée au chapitre 2, le critère de Sines semble donner les meilleures évaluations de l'endommagement pour des états de contraintes aléatoires. L'étude de l'estimation de l'endommagement est généralisée à des états de contrainte à moyennes non nulles.

4.1. Formalisme du critère de Sines

Nous rappelons la formulation classique du critère de Sines [SIN59], qui à la différence du critère de Crossland prend en compte la moyenne de la pression hydrostatique au lieu du maximum :

$$D_{Sines} = \frac{\sqrt{J_{2,a}} + \alpha E[p(t)]}{A} \quad (31.)$$

α et A sont des paramètres liés au matériau définis par :

$$A = t_{-1}, \quad \alpha = 2 \frac{t_{-1}}{f_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (32.)$$

où f_0 est la limite d'endurance en traction répétée. Le critère est valide pour les matériaux respectant l'inégalité $\alpha > 0$. Néanmoins la limite d'endurance en traction répétée est une valeur rarement accessible pour un matériau donné. C'est pourquoi nous exprimons le paramètre α en fonction des paramètres des limites d'endurance en traction alternée f_{-1} et en torsion alternée t_{-1} ainsi que de la résistance à la rupture R_m .

$$\alpha = \frac{3t_{-1}(R_m + f_{-1})}{f_{-1}R_m} - \sqrt{6} \quad (33.)$$

4.2. Estimation de la valeur d'endommagement

Nous cherchons maintenant à estimer la valeur indicatrice d'endommagement pour une structure soumise à un chargement aléatoire de durée T :

$$E[D_{Sines}] = \frac{E[\sqrt{J_{2,a}}] + \alpha E[p(t)]}{A} \quad (34.)$$

Pour l'évaluation de cet endommagement, nous reprenons l'estimation de $\sqrt{J_{2,a}}$ déterminée à la section 3.4. et exprimons la valeur moyenne de la pression hydrostatique. Puisque les processus aléatoires définis par les contraintes $s_{xx}(t)$, $s_{yy}(t)$ et $s_{zz}(t)$ sont stationnaires, chacune des réalisations suffisamment longues de ces contraintes a les mêmes caractéristiques de moyenne soit de manière générale :

$$E[\mathbf{s}(t)] = \bar{\mathbf{s}} = \left[\bar{s}_{xx} \quad \bar{s}_{yy} \quad \bar{s}_{zz} \quad \bar{s}_{xy} \quad \bar{s}_{yz} \quad \bar{s}_{xz} \right]^T \quad (35.)$$

avec \mathbf{s}_m constant. Plus précisément nous avons vu au chapitre 1, l'expression exacte de la moyenne de la réponse en contrainte, $E[\mathbf{s}(t)] = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{f}}$, avec $\mathbf{f}(t)$ les forces aléatoires stationnaires et $\bar{\mathbf{f}} = E[\mathbf{f}(t)]$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E[p(t)] &= E\left[\left(\frac{s_{xx}(t) + s_{yy}(t) + s_{zz}(t)}{3}\right)\right] \\ &= \frac{E[s_{xx}(t)] + E[s_{yy}(t)] + E[s_{zz}(t)]}{3} \\ &= \frac{\bar{s}_{xx} + \bar{s}_{yy} + \bar{s}_{zz}}{3} \end{aligned} \quad (36.)$$

L'estimation de la moyenne de la pression hydrostatique aléatoire revient donc à estimer les contraintes statiques \bar{s}_{xx} , \bar{s}_{yy} et \bar{s}_{zz} à la moyenne des forces appliquées telles que :

$$E[D_{Sines}] = \frac{\sqrt{E[R_1]^2 + E[R_2]^2 + E[R_3]^2 + E[R_4]^2 + E[R_5]^2} + \alpha \frac{\bar{s}_{xx} + \bar{s}_{yy} + \bar{s}_{zz}}{3}}{A} \quad (37.)$$

4.3. Distribution et variance de la valeur indicatrice d'endommagement – Prise en compte des incertitudes

Nous avons estimé la valeur indicatrice d'endommagement donnée par le critère de Sines et nous souhaitons maintenant étudier les dispersions sur la valeur obtenue en tenant compte des sources principales d'incertitudes. Nous en retenons deux.

La première incertitude considérée est celle liée à l'estimation même de l'amplitude du deuxième invariant du déviateur des contraintes. En effet, les dispersions obtenues sur les valeurs de R_i , liées directement à la nature aléatoire des chargements, peuvent être à l'origine de grandes dispersions sur la valeur d'endommagement obtenue. Des équations (28) et (29), nous obtenons directement les moyennes et variances des valeurs maximales des R_i , nous en connaissons aussi les distributions (*cf.* chapitre 1) en prenant en compte le nombre de maxima N_p .

La seconde source d'incertitude est issue des caractéristiques mécaniques en fatigue des matériaux. En effet, les limites d'endurance des matériaux déterminées à partir d'un grand nombre d'essais en fatigue, ne sont qu'une moyenne des résultats obtenus. Deux pièces identiques soumises au même chargement donné, auront rarement la même tenue en fatigue. Cette dispersion sur la tenue en fatigue peut s'avérer très grande. Dans la littérature cette distribution est généralement trouvée gaussienne, log-normal ou de Weibull [SCH03, SCH05] avec des variances comprises entre 5 et 10% de la valeur moyenne. Nous choisissons pour notre étude une distribution normale des limites d'endurance avec des variances de 5% de la valeur moyenne.

Pour évaluer la propagation de ces incertitudes, nous adoptons la technique numérique de Monte-Carlo : en effectuant des tirages aléatoires des paramètres dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, nous estimons numériquement un endommagement pour ces valeurs. L'analyse statistique des endommagements obtenus pour un grand nombre de tirages, nous permet alors d'approcher la probabilité d'occurrence des résultats, avec une estimation de la moyenne et de la variance de l'endommagement.

4.4. Application

L'application retenue pour l'étude de la distribution et de la variance de la valeur indicatrice d'endommagement concerne un bras de moto soumis à plusieurs types de chargements aléatoires dont ceux induits par :

- les irrégularités de la route et fonction de la vitesse de la moto,
- les changements de direction de la moto et impliquant des efforts de torsion.

Le demi-poids de la moto représente l'effort statique appliqué à la structure.

Le bras en aluminium est discrétisé en 435 éléments coques Hétérosis quadrangles [HUG87] et 42 éléments MITC7 triangles [BAT96] de degré 2, ce qui conduit à 8364 ddl. Les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé, sont rassemblées dans le Tableau 3-1 où les limites de fatigue en torsion et flexion purement alternées sont déterminées à 2.10^{+6} cycles.

E (Mpa)	ν	ρ (kg/m ³)	R_m (Mpa)	t_{-1} (Mpa)	f_{-1} (Mpa)
69400	0,29	2700	343	92	132

Tableau 3-1. Caractéristique mécanique de l'aluminium

La Figure 3-9 représente le maillage de la structure ainsi que les conditions limites et les efforts appliqués. Les éléments fins en vert sur la figure ont une épaisseur de 1,8 mm, ceux en bleu de 3 mm, ceux en rouge de 7 mm. Les éléments supportant l'axe de la roue ont une épaisseur de 240 mm.

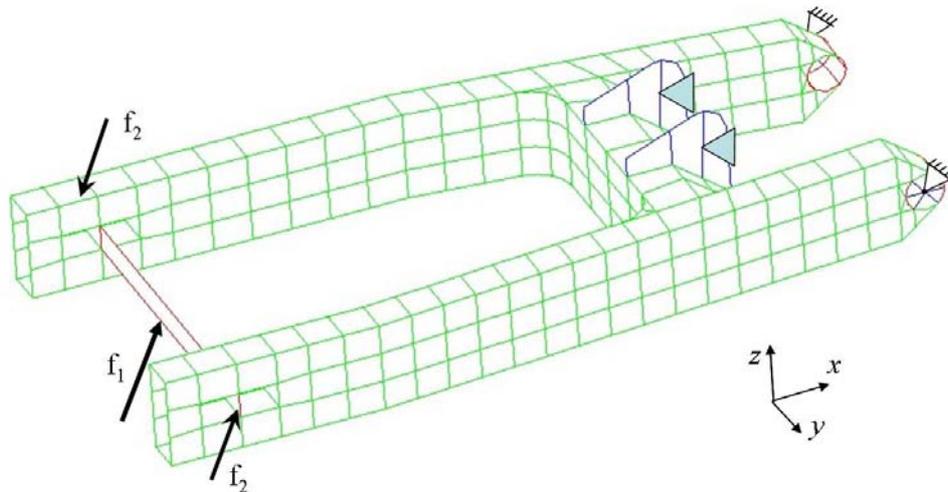


Figure 3-9. Maillage initial du bras de moto

La force f_1 (Figure 3-10) provient des irrégularités de la route et est fonction de la vitesse de la moto avec une composante continue égale au demi-poids de la moto $\bar{f}_1 = 1250\text{N}$. Les forces f_2 (Figure 3-11) proviennent des changements de direction de la moto et sollicitent le bras en torsion. Elles sont entièrement corrélées, identiques en valeur absolue et de signes opposés. Nous les considérons de moyenne nulle.

Les forces sont appliquées en considérant leurs DSP. Nous les modélisons simplement en considérant qu'une grande partie des efforts transmis le sont en basses fréquences [GIL92, FOA02]. Nous représentons sur les Figure 3-10 et Figure 3-11, les allures des DSP des forces appliquées pour f_1 et f_2 suivant l'axe z de la Figure 3-9.

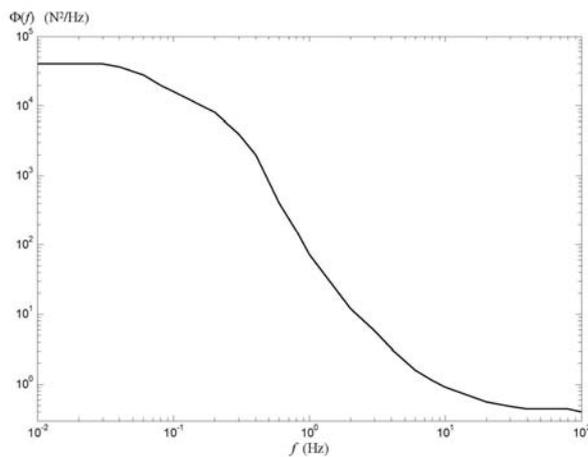


Figure 3-10. Allure de la DSP de f_1 suivant z

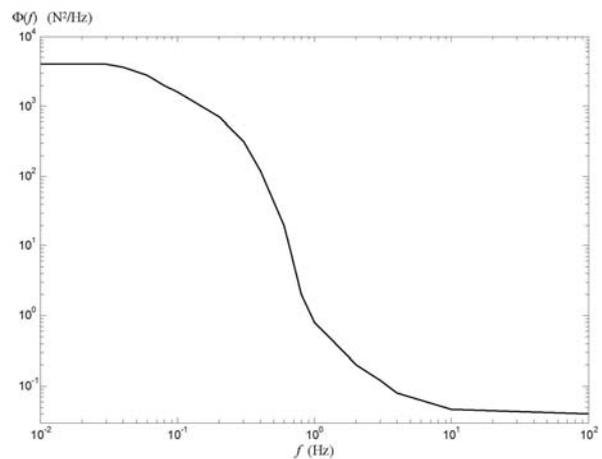


Figure 3-11. Allure de la DSP de f_2 suivant z

Les trois premiers modes normaux de la structure (évalués par un solveur aux valeurs propres par itérations inverses sur sous-espace) et le mode d'attache (mode complémentaire des accélérations modales) sont présentés sur la Figure 3-12.

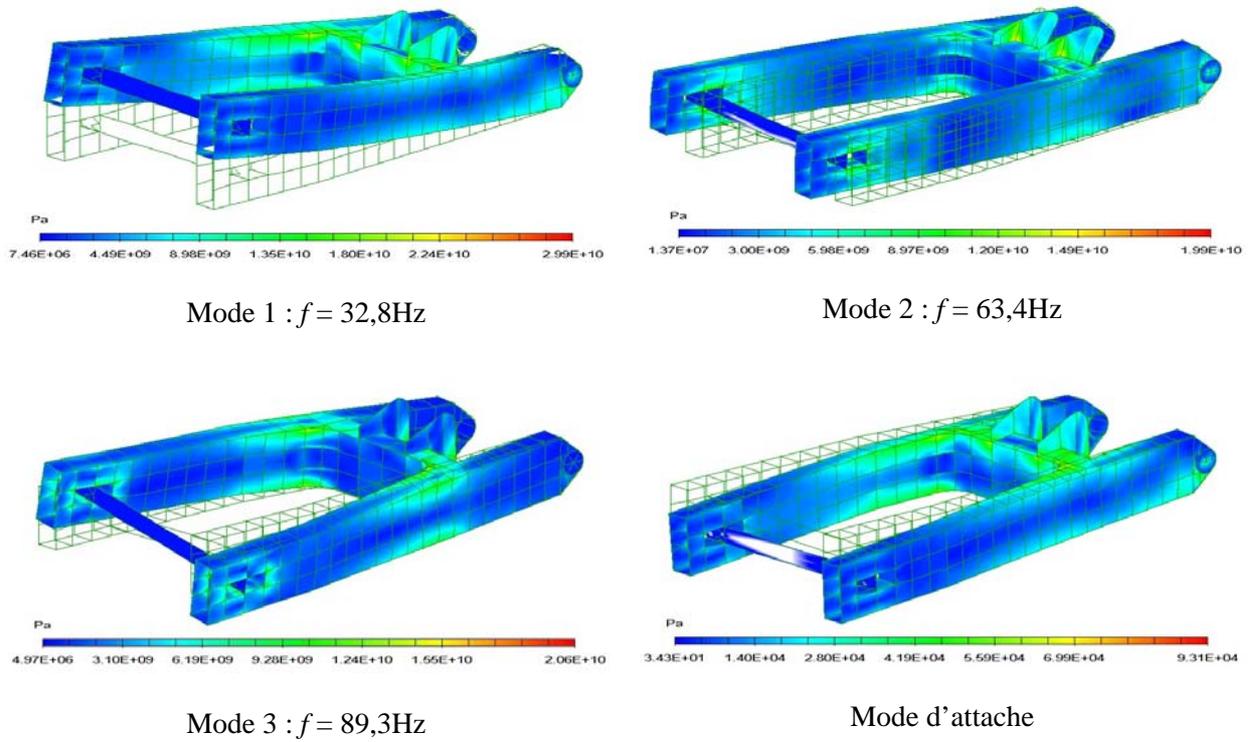


Figure 3-12. Déformées modales des modes 1,2 et 3 et mode d'attache

Nous appliquons la méthode d'estimation de l'endommagement pour un chargement de durée $T = 60\text{s}$. La Figure 3-13 présente les résultats obtenus où le critère d'endommagement est respecté.

Puis nous effectuons les tirages Monte-Carlo en utilisant les données de la section 4.3. : la moyenne des estimations des valeurs indicatrices d'endommagement (Figure 3-14) sont en accord avec les estimations de la Figure 3-13. Les écart-types obtenus sur ces estimations varient de 4% à 20% de la valeur estimée (Figure 3-15).

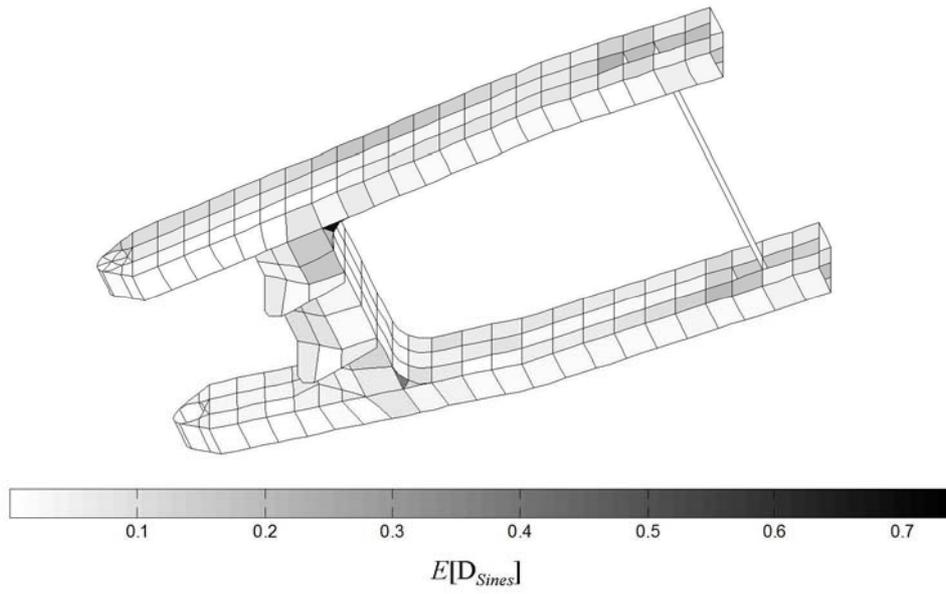


Figure 3-13. Estimation des valeurs indicatrices d'endommagement

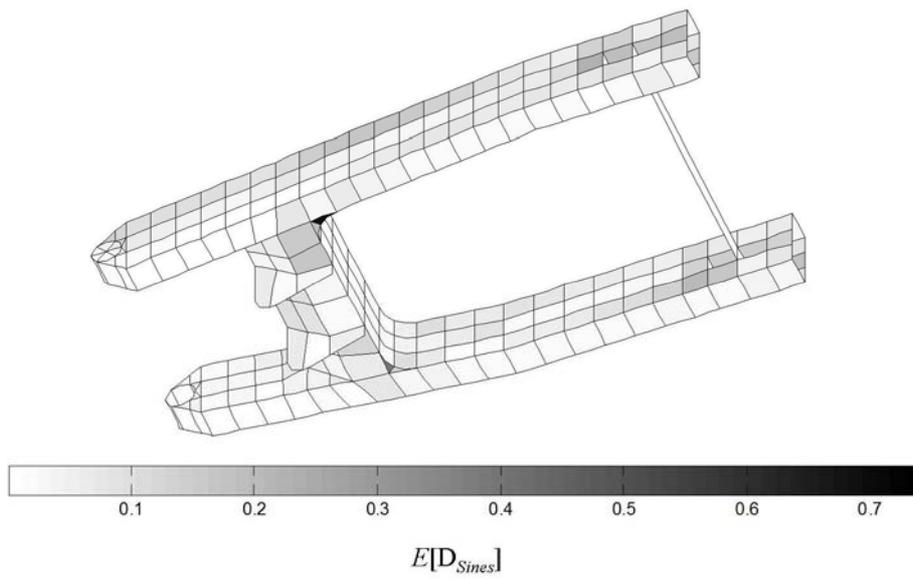


Figure 3-14. Moyenne des estimations des valeurs indicatrices d'endommagement par tirages aléatoires

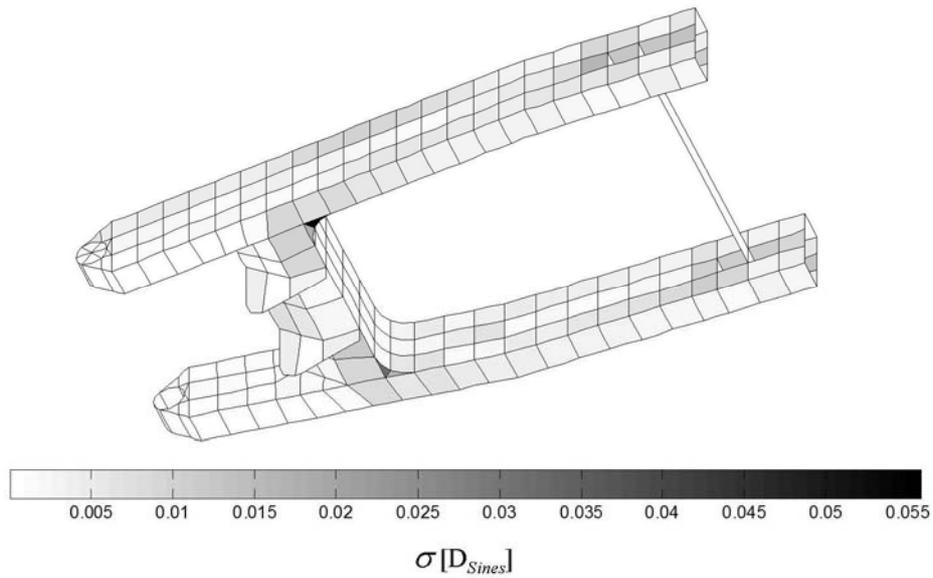


Figure 3-15. *Ecart-types des estimations des valeurs indicatrices d'endommagement par tirages aléatoires*

La figure 3-16 représente la répartition des valeurs d'endommagement pour le tirage aléatoire donnant le maximum d'endommagement. Nous pouvons constater que ce tirage aléatoire aboutit à une estimation de la valeur d'endommagement supérieure à 1, dans ce cas la structure sera considérée défailante pour le chargement aléatoire que nous avons considéré.

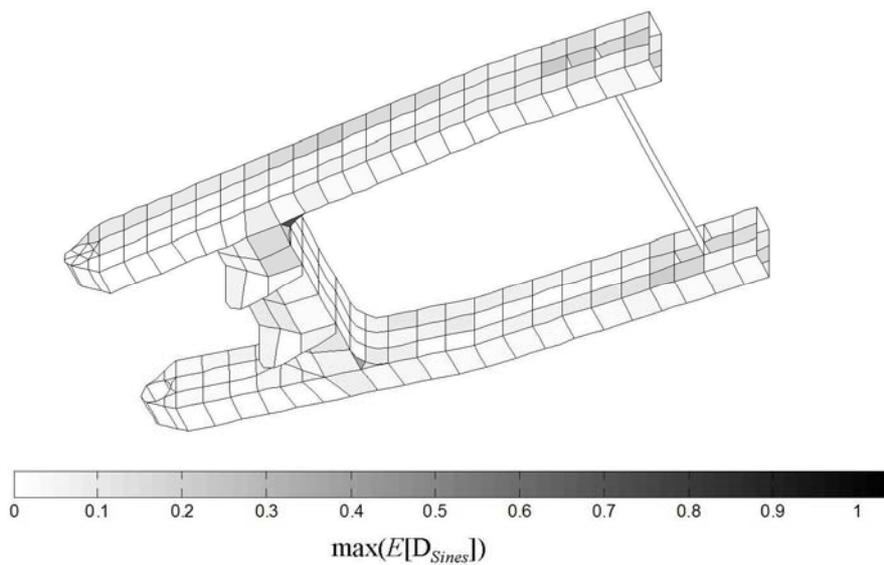


Figure 3-16. *Répartition des valeurs d'endommagement pour le tirage aléatoire donnant le maximum d'endommagement*

La Figure 3-17 représente les distributions obtenues sur les valeurs d'endommagement. En tenant compte des incertitudes citées précédemment, nous pouvons constater que les distributions obtenues sont de type valeurs extrême.

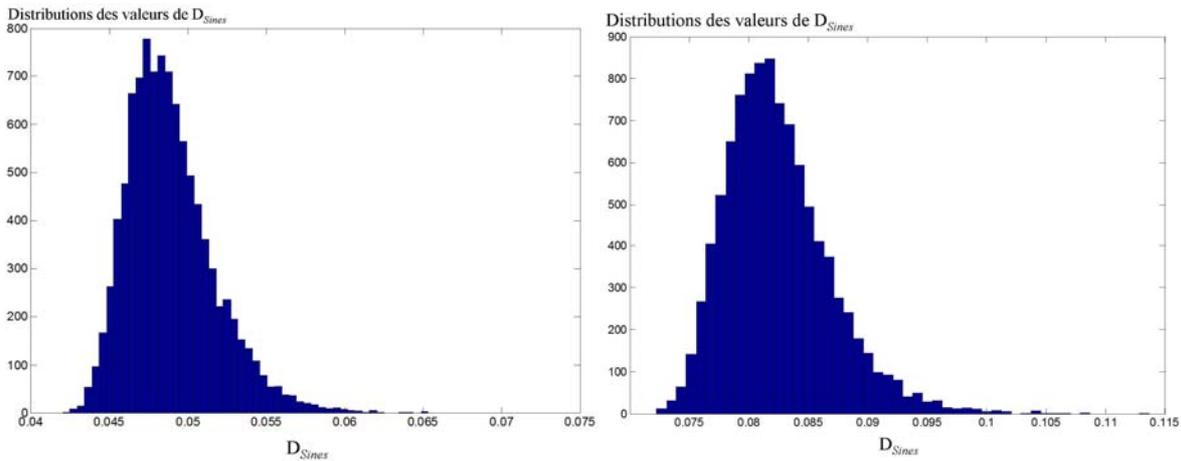


Figure 3-17. Distribution des valeurs d'endommagement pour deux éléments de la structure

En prenant en compte les incertitudes, les structures peuvent être dimensionnées de manière plus fiable. Par la démarche proposée, l'ingénieur peut estimer une probabilité quant à la durée de vie de sa structure.

5. ANALYSE DE SENSIBILITE

L'analyse de sensibilité des réponses d'un système par rapport à des paramètres donnés est un outil particulièrement utile et efficace en phase de conception. Ainsi, pour des problèmes d'optimisation de structures utilisant des méthodes de direction, les analyses de sensibilité permettent une évaluation rapide de la variation de la réponse suite à la variation d'une variable de conception.

Nous proposons une méthode d'évaluation des sensibilités en fatigue des structures basée sur la méthode des éléments finis et à partir de la formulation du critère de Sines proposée. Nous considérons que les paramètres matériaux f_0 et t_1 restent constants pour les variations paramétriques considérées.

Nous explicitons la dérivée du critère d'endommagement de Sines par rapport à un paramètre p de la structure étudiée en notant, dans le but de simplifier nos écritures, $\Delta x = \partial x / \partial p$:

$$\begin{aligned} \Delta E[D_{Sines}] &\approx \frac{1}{A} \left[\Delta E[\sqrt{J_{2,a}}] + \alpha \Delta E[p(t)] \right] \\ &\approx \frac{1}{A\sqrt{3}} \Delta \left(E \left[\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \right] \right) + \frac{\alpha}{A} \Delta \left(\frac{\bar{s}_{xx} + \bar{s}_{yy} + \bar{s}_{zz}}{3} \right) \end{aligned} \quad (38.)$$

L'étude se décompose en trois parties :

- évaluation des sensibilités des contraintes moyennes,
- détermination de la sensibilité de base de réduction,
- sensibilité des rayons R_i .

5.1. Sensibilité de la réponse en contrainte moyenne

Nous nous intéressons à la sensibilité de la moyenne de la réponse en contrainte. Repartant de l'équation de la moyenne des réponses en contrainte (cf. chapitre 1) et déterminée dans le chapitre 1 :

$$E[\mathbf{s}(t)] = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{f}} \quad (39.)$$

La sensibilité en contrainte pour une variation du paramètre p se déduit facilement par la formule :

$$\Delta E[\mathbf{s}(t)] = -\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{f}} \quad (40.)$$

Cette expression est reprise pour les évaluations de $\Delta \bar{s}_{xx}$, $\Delta \bar{s}_{yy}$ et $\Delta \bar{s}_{zz}$, requises dans l'expression (38).

5.2. Sensibilité de la base de réduction

L'expression (38) requiert l'évaluation des sensibilités des rayons R_i . Ceux-ci sont entièrement déterminées à partir de $\Delta \Sigma_s$, $\Delta \Sigma_{\dot{s}}$ et $\Delta \Sigma_{\ddot{s}}$, mais aussi de la sensibilité de la base de réduction $\Delta \Psi$.

Puisque :

$$\lambda_0(\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_s(\omega) d\omega = \Sigma_s(0) = \Psi \Sigma_q(0) \Psi^T \quad (41.)$$

$$\lambda_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \mathbf{S}_s(\omega) d\omega = \Sigma_{\dot{s}}(0) = \Psi \Sigma_{\dot{q}}(0) \Psi^T \quad (42.)$$

$$\lambda_4(\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \mathbf{S}_s(\omega) d\omega = \Sigma_{\ddot{s}}(0) = \Psi \Sigma_{\ddot{q}}(0) \Psi^T \quad (43.)$$

alors :

$$\Delta \lambda_0(\mathbf{s}) = \Delta \Psi \Sigma_q(0) \Psi^T + \Psi \Delta \Sigma_q(0) \Psi^T + \Psi \Sigma_q(0) \Delta \Psi^T \quad (44.)$$

$$\Delta \lambda_2(\mathbf{s}) = \Delta \Psi \Sigma_{\dot{q}}(0) \Psi^T + \Psi \Delta \Sigma_{\dot{q}}(0) \Psi^T + \Psi \Sigma_{\dot{q}}(0) \Delta \Psi^T \quad (45.)$$

$$\Delta \lambda_4(\mathbf{s}) = \Delta \Psi \Sigma_{\ddot{q}}(0) \Psi^T + \Psi \Delta \Sigma_{\ddot{q}}(0) \Psi^T + \Psi \Sigma_{\ddot{q}}(0) \Delta \Psi^T \quad (46.)$$

avec :

$$\Delta\Psi = \mathbf{HB}\Delta\mathbf{T} \quad (47.)$$

Pour évaluer la dérivée de la base de réduction $\Delta\mathbf{T}$, il est nécessaire de disposer des sensibilités des solutions propres i.e. des vecteurs et fréquences propres de la structure par rapport au paramètre p .

Les méthodes telles que la méthode de Nelson [NEL76] ou la méthode de décomposition sur la base modale complète permettent d'évaluer exactement les dérivées des solutions modales. Dans la méthode modale, les dérivées des vecteurs propres sont exprimées comme une combinaison linéaire de toutes les déformées modales considérées comme une base complète de dimension n . La méthode de Nelson n'utilise que les solutions propres concernées par l'étude et un vecteur supplémentaire évalué en résolvant le système modal légèrement modifié. Cette modification est liée à la dérivée de la solution propre étudiée, ce qui augmente les temps de calcul lorsque le nombre de dérivées à évaluer devient grand.

Pour la plupart des systèmes, en particulier pour des structures de grande taille, il est difficile d'obtenir toutes les solutions modales et les factorisations requises dans la méthode de Nelson impliquent quant à elles des temps de calcul prohibitifs. De plus dans la plupart des cas, il s'avère inutile voire inefficace, de calculer les solutions exactes des dérivées des solutions propres. C'est ainsi que de nombreuses méthodes approchées ont été développées basées sur la méthode modale. La plus simple consiste à tronquer la base modale. Ce type d'approximation est en dynamique des structures linéaires. Wang [WAN91] a par la suite amélioré cette méthode en proposant d'ajouter un terme supplémentaire formé par combinaison linéaire des modes retenus. Ce terme supplémentaire correspond à une solution pseudo-statique destinée à remplacer l'influence des modes tronqués et est obtenu à partir de l'équation des dérivées des vecteurs propres. Plusieurs comparaisons entre ces méthodes peuvent être trouvées dans la littérature, comme Sutter et al. [SUT88] ou Yu et al. [YU96] qui ont comparé la méthode modale tronquée, la méthode explicite et implicite de Wang et la méthode de Nelson en terme de rapidité de convergence.

Cependant la plupart des méthodes proposées ne sont pas adaptées aux problèmes à valeurs propres multiples (elles nécessitent un grand nombre de vecteurs propres pour construire la base de développement des solutions). C'est pourquoi nous choisissons une méthode proposée par I.W. Lee et G.H. Jung [LEE97], pour l'évaluation des dérivées des solutions modales. Cette méthode numériquement stable, rapide et efficace permet en effet d'évaluer les dérivées des solutions propres et ce, même pour des problèmes aux valeurs propres multiples.

Prenons les dérivées partielles par rapport au paramètre p des équations du problème aux valeurs propres défini au chapitre 1, nous avons :

$$\left(\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}\right) \Delta \mathbf{y}_r - \Delta \omega_r^2 \mathbf{M} \mathbf{y}_r = -\left(\Delta \mathbf{K} - \omega_r^2 \Delta \mathbf{M}\right) \mathbf{y}_r \quad (48.)$$

$$\mathbf{y}_r^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{y}_r + \frac{1}{2} \mathbf{y}_r^T \Delta \mathbf{M} \mathbf{y}_r = 0 \quad (49.)$$

Les équations (48) et (49) peuvent être regroupées dans une équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M} & -\mathbf{M} \mathbf{y}_r \\ -\mathbf{y}_r^T \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{y}_r \\ \Delta \omega_r^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\Delta \mathbf{K} - \omega_r^2 \Delta \mathbf{M}\right) \mathbf{y}_r \\ \frac{1}{2} \mathbf{y}_r^T \Delta \mathbf{M} \mathbf{y}_r \end{Bmatrix} \quad (50.)$$

pour évaluer $\Delta \mathbf{y}_r$ et $\Delta \omega_r^2$.

A partir de $\Delta \mathbf{y}_r$ et $\Delta \omega_r^2$, nous déterminons $\Delta \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}}$ et $\Delta \Lambda_{\mathbf{Bf}}^{-1}$, puis la sensibilité du complément des accélérations modales $\Delta \bar{\mathbf{y}}$:

$$\Delta \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{f}} - \Delta \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}} \Lambda_{\mathbf{Bf}}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}}^T \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}} \Delta \Lambda_{\mathbf{Bf}}^{-1} \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}}^T \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}} \Lambda_{\mathbf{Bf}}^{-1} \Delta \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (51.)$$

Enfin nous obtenons les sensibilités des éléments de la base de réduction à partir desquels $\Delta \Lambda_{\mathbf{T}}$ et $\Delta \Xi_{\mathbf{T}}$ seront déduits :

$$\Delta \mathbf{T} = [\Delta \mathbf{Y}_{\mathbf{Bf}} \Delta \bar{\mathbf{y}}] \quad (52.)$$

5.3. Sensibilité des rayons R_i

Pour l'évaluation des sensibilités des rayons R_i , il nous reste à déterminer les sensibilités des matrices des covariances de \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ et $\ddot{\mathbf{q}}$ (cf. équations (44) à (46)) dont nous précisons les expressions :

$$\Sigma_{\mathbf{q}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{T}^T \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) \mathbf{T} \mathbf{Z}^H(\omega) d\omega \quad (53.)$$

$$\Sigma_{\dot{\mathbf{q}}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{T}^T \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) \mathbf{T} \mathbf{Z}^H(\omega) d\omega \quad (54.)$$

$$\Sigma_{\ddot{\mathbf{q}}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 \mathbf{Z}(\omega) \mathbf{T}^T \Phi_{\mathbf{f}}(\omega) \mathbf{T} \mathbf{Z}^H(\omega) d\omega \quad (55.)$$

Puisque $\Delta\mathbf{Z}(\omega)$ se calcule facilement à partir des expressions de $\Delta\mathbf{\Lambda}_T$ et $\Delta\mathbf{\Xi}_T$, nous évaluons les sensibilités des matrices des DSP des coordonnées généralisées :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{S}_q(\omega) = & \Delta\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{T}^T\mathbf{\Phi}_f(\omega)\mathbf{T}\mathbf{Z}^H(\omega) + \mathbf{Z}(\omega)\Delta\mathbf{T}^T\mathbf{\Phi}_f(\omega)\mathbf{T}\mathbf{Z}^H(\omega) \\ & + \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{T}^T\mathbf{\Phi}_f(\omega)\Delta\mathbf{T}\mathbf{Z}^H(\omega) + \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{T}^T\mathbf{\Phi}_f(\omega)\mathbf{T}\Delta\mathbf{Z}^H(\omega) \end{aligned} \quad (56.)$$

Nous obtenons simplement les sensibilités des matrices des covariances :

$$\Delta\Sigma_{\mathbf{q}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\mathbf{S}_{\mathbf{q}}(\omega) d\omega \quad (57.)$$

$$\Delta\Sigma_{\dot{\mathbf{q}}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \Delta\mathbf{S}_{\mathbf{q}}(\omega) d\omega \quad (58.)$$

$$\Delta\Sigma_{\ddot{\mathbf{q}}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 \Delta\mathbf{S}_{\mathbf{q}}(\omega) d\omega \quad (59.)$$

D'autre part, lorsque la DSP des efforts est représentée par un bruit blanc et que les corrélations croisées des réponses peuvent être négligées, il est possible d'accélérer l'évaluation de ces quantités grâce à la relation (101) établie dans le chapitre 1.

Déterminée à partir de la formulation proposée du critère de Sines, la méthodologie d'évaluation des sensibilités en endommagement est numériquement efficace. Elle nous permet de résoudre dans le chapitre 4, des problèmes d'optimisation avec contraintes d'endommagement par des méthodes avec gradient.

6. CONCLUSION

Nous avons dans ce chapitre adapté le critère de fatigue multiaxial de Sines à l'étude de l'endommagement par fatigue des structures soumises à des chargements aléatoires. La formulation proposée permet une estimation de la valeur indicatrice d'endommagement directement à partir de la matrice des DSP des réponses en contrainte. Le gain en temps de calcul est par conséquent très grand les DSP regroupant l'ensemble des informations statistiques nécessaires à l'étude.

Nous avons considéré dans notre formulation des chargements de moyenne non nulle et pris en compte leur nature non proportionnelle. De même les largeurs de bande des réponses en contrainte sont prises en compte dans l'estimation des valeurs extrêmes, atteintes par les processus des contraintes sur une durée donnée.

L'estimation de l'endommagement par la formulation est appliquée à un bras de moto qui dans un environnement de chargements aléatoires est naturellement concerné par le problème d'endommagement par fatigue. Des simulations Monte-Carlo nous ont alors permis d'évaluer

efficacement les distributions des estimations obtenues en considérant deux principales sources d'incertitudes.

Enfin nous concluons par le développement d'une méthodologie d'analyse de sensibilité en endommagement à partir de la formulation proposée. Les gains en temps de calcul réalisés nous permettent dans le chapitre suivant d'aborder des problèmes d'optimisation avec contraintes d'endommagement.

Chapitre 4.

Application à l'optimisation des structures

Nous nous intéressons dans ce chapitre à un problème classique en mécanique, trouver le meilleur compromis entre le coût d'une structure et sa fiabilité. Entre autre pour des raisons de coût de transport ou d'encombrement, l'industriel cherche souvent à diminuer le poids ou le volume de ses produits. De même une structure subissant peu d'endommagement par fatigue peut être considérée comme fiable, car possédant une durée de vie estimée plus grande. Par ces deux considérations nous posons le problème mécanique suivant : trouver le meilleur compromis entre le volume de la structure et sa résistance à l'endommagement par fatigue. Le problème posé est un problème d'optimisation.

1. INTRODUCTION

Les problèmes d'optimisation sont généralement formulés mathématiquement par une fonction de coût (ou fonction objectif) à minimiser et des restrictions d'égalité ou d'inégalité appelées contraintes du problème. Il peut s'énoncer de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \min_x f(x) \\ \text{tel que } g_j(x) \leq 0 \end{array}, \quad j \in J \quad (1.)$$

$f : R^n \rightarrow R$ est appelée *fonction objectif*, elle doit être minimisée dans le cadre d'un domaine réalisable défini par les *contraintes* du problème $g_j : R^n \rightarrow R$. $x \in R^n$ est un vecteur d'inconnues appelées variables de conception.

Nous supposons que la structure tridimensionnelle peut être paramétrée par une carte d'épaisseur $h : \Omega \rightarrow R$ où $\Omega \subset R^2$ est la surface moyenne ou le plan inférieur de la structure. Un tel problème implique des fonctions d'espace de dimension infinie. Dans le but d'obtenir un problème de dimension finie correspondant à la formulation (1), nous introduisons une discrétisation éléments finis de la structure incluant un maillage donné. Les structures étudiées sont soumises à des forces aléatoires liées à leurs environnements ou leurs conditions d'utilisation en service. Ainsi l'endommagement par

fatigue sur la structure peut être évalué par une formulation fréquentielle d'un critère d'endommagement.

Notre problème consiste à diminuer le volume $V(\mathbf{x})$ d'une structure composée d'un matériau homogène vis à vis des contraintes correspondant à un domaine de sûreté défini par la formulation fréquentielle d'un critère d'endommagement. Cela implique une évaluation de l'endommagement par fatigue sur l'ensemble des éléments finis de la structure. Le problème d'optimisation est alors formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \\ \text{tel que } \max \mathbf{D} \leq D_U \end{aligned} \quad (2.)$$

où \mathbf{x} est un vecteur de variables de conception et \mathbf{D} est l'endommagement évalué sur l'ensemble des éléments. D_U est une valeur tolérable d'endommagement maximale.

Le problème est posé pour deux types de variables de conception, les épaisseurs $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_{nel}]$ des éléments et le nombre nel d'éléments dans le cadre du problème classique d'optimisation de topologie. Dans le premier cas, les épaisseurs de chaque élément sont continues dans un intervalle borné. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{h}} V(\mathbf{h}) = \sum_{e=1}^{nel} h_e \times s_e \\ \text{tel que } \max \mathbf{D} \leq D_U \end{aligned} \quad (3.)$$

où h_e et s_e sont respectivement l'épaisseur et la surface de l'élément e . Le deuxième cas correspond à un problème d'optimisation topologique, en considérant que chaque élément possède le même volume V_e le problème peut être formulé par :

$$\begin{aligned} \min_{nel} V(nel) = nel \times V_e \\ \text{tel que } \max \mathbf{D} \leq D_U \end{aligned} \quad (4.)$$

Nous nous intéressons aussi à un autre problème : réduire la valeur maximale d'endommagement par fatigue sur la structure tout en imposant un volume fixe A de la structure. Nous choisissons dans ce cas les variables de conception comme étant les épaisseurs de chaque élément fini. Nous posons donc le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{h}} (\max \mathbf{D}) \\ \text{tel que } V(\mathbf{h}) = \sum_{e=1}^{nel} h_e \times s_e = A \end{aligned} \quad (5.)$$

L'optimisation des structures n'est pas une préoccupation récente. C'est en 1960 que Schmit [SCH60] a introduit pour la première fois l'idée de coupler l'analyse structurale par éléments finis et la programmation mathématique non linéaire pour chercher différentes conceptions optimales

automatisées. Ces problèmes sont souvent résolus par une approche itérative convergeant vers la solution du problème, les équations d'état étant vérifiées à chaque itération du problème d'optimisation. Les méthodes mathématiques de résolution des problèmes d'optimisation peuvent alors être classées en deux catégories distinctes selon que l'on dispose ou non des gradients de la fonction objectif.

Pour les méthodes basées sur les gradients, à chaque itération, le nouveau vecteur des variables de conception est obtenu à partir de la valeur de la fonction de coût et de son gradient. Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation basées sur ce modèle, correspondant à différentes méthodes de calcul du nouveau vecteur des variables de conception, à chaque itération. Nous pouvons par exemple citer la méthode de plus grande descente, la méthode de Newton (ou quasi-Newton) ou encore les méthodes duales et leurs dérivées : approche par pénalité, relaxation lagrangienne, techniques d'arrondi. Ces dernières méthodes ont pour principal attrait, de remplacer le problème avec contrainte par un problème quasi non-contraint. Toutes ces méthodes sont largement détaillées dans des ouvrages de référence en optimisation numérique ([FLE90, GIL91]). Leur emploi a souvent été couronné de succès, ces méthodes disposant de nombreuses qualités : preuve de convergence, faible nombre d'évaluations nécessaire, faible dépendance vis-à-vis de la dimension du problème, prise en compte de contraintes multiples.

Néanmoins, plusieurs difficultés limitent l'usage de ces méthodes. Par exemple, pour certains problèmes, la fonction de coût est non différentiable par nature ou présente des discontinuités. De même la fonction de coût peut présenter de multiples minima locaux. Or les méthodes classiques ne sont pas capables de les détecter, convergeant vers le premier minimum trouvé. Ces différents points expliquent pourquoi les méthodes classiques sont souvent écartées pour la résolution de problèmes complexes. Parmi les méthodes d'optimisation sans utilisation de gradient, nous pouvons citer les méthodes de type simplexe, les méthodes de recherche de direction réalisable, les méthodes de recuit, ou encore les méthodes basées sur des algorithmes génétique proposées pour la première fois par Holland en 1975 [HOL75] puis popularisée par Goldberg en 1989 [GOL89]. Cette classification n'est pas exhaustive, mais regroupe les principales stratégies employées à l'heure actuelle.

Grâce à l'efficacité numérique de la méthode d'évaluation de l'endommagement proposé dans ce mémoire, le problème posé peut être résolu pour des structures comportant un grand nombre de variables de conception. Dans un premier temps, le problème est traité pour différentes applications par l'algorithme ESO (Evolutionary Structural Optimisation) proposé par Xie et Steven ([XIE93], [XIE97]) et adapté à des contraintes d'endommagement par fatigue. L'algorithme simple et rapide permet de considérer des problèmes de grande taille. Puis une seconde méthode de résolution plus coûteuse numériquement est envisagée. La méthode dite d'optimisation globale est basée sur un couplage entre des méthodes stochastiques et déterministes et nous permet de sélectionner parmi plusieurs solutions, la plus concevable.

2. PROCEDURE D'OPTIMISATION

L'algorithme d'optimisation structurale évolutionnaire, en anglais Evolutionary Structural Optimisation (ESO), a été pour la première fois proposé par Xie et Steven [XIE93]. Sa simplicité d'utilisation ainsi que son efficacité ont été démontré à travers de nombreuses applications présentes dans la littérature. Une étude théorique de la méthode est présentée dans les travaux de Tanskanen ([TAN02]).

L'idée directrice de la méthode basée sur les éléments finis, est de modifier progressivement les variables de conception ayant la plus petite influence sur la structure discrétisée. Selon ce principe, nous proposons une quantification de l'influence d'une variable de conception vis à vis de l'endommagement par fatigue, à travers l'étude de plusieurs critères basés sur les sensibilités en endommagement. Une adaptation de la méthode ESO à des problèmes d'optimisation comportant des contraintes d'endommagement en fatigue est ainsi présentée.

2.1. Choix d'un critère de sensibilité

Les sensibilités en endommagement par fatigue ont été exprimées avec la formulation fréquentielle du critère de Sines. La même méthodologie est utilisée pour l'évaluation des sensibilités en endommagement par fatigue avec la formulation fréquentielle du critère de Crossland. Les sensibilités nous donnent une estimation de la variation de l'endommagement dans chacun des éléments correspondant à une variation d'une variable de conception donnée. Nous avons donc *nel* valeurs de sensibilité $\partial \mathbf{D} / \partial x_j$ par variable de conception x_j de l'élément j .

Cependant parmi les variables de conception, nous avons besoin d'établir un critère nous permettant de pouvoir attribuer à une variable de conception une seule quantité pour distinguer celles qui sont les plus sensibles à l'endommagement par fatigue. C'est pourquoi nous nous proposons d'étudier plusieurs critères généraux, nous semblant pouvoir synthétiser les informations données par les sensibilités obtenues en une seule valeur^a.

^a La sensibilité de la variable x_j est évaluée selon le critère 6 en effectuant la somme des variations de l'endommagement de chacun des éléments i par rapport à la variation du paramètre x_j . Ce critère peut être considéré comme représentatif de l'importance des variations des valeurs d'endommagement induites par la variation de x_j . Si nous considérons les recommandations de la méthode ESO, ce critère apparaît physiquement comme le plus naturel des critères de sensibilité. Mais nous le comparons ici à d'autres alternatives pour le valider. Par exemple le critère 1 évalue la sensibilité de la variable x_j en effectuant la somme des variations de l'endommagement dans l'élément j associé induite par la variation de l'ensemble des autres paramètres x_i du modèle. Ce critère considère donc que la sensibilité de la variable x_j est déterminée par la sensibilité en endommagement de l'élément j associé à toutes les variations d'épaisseurs du modèle. Les autres critères considérés sont le résultat de combinaisons possibles entre les critères 1 et 6, où les variations de \mathbf{D} sont parfois pondérées par les valeurs d'endommagement de l'élément i ou j .

Nous notons D_i la valeur de l'endommagement de l'élément i et $D_{i,j}$ la variation de l'endommagement à l'élément i , due à la variation du paramètre x_j soit $D_{i,j} = \partial D_i / \partial x_j$. Nous proposons au total 11 critères :

Critère 1 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_{j,i}$$

Critère 2 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_{i,j} D_{j,i}$$

Critère 3 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_i D_{i,j} D_{j,i}$$

Critère 4 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_j D_{i,j} D_{j,i}$$

Critère 5 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_i D_{j,i}$$

Critère 6 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_{i,j}$$

Critère 7 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_i D_{i,j}$$

Critère 8 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^m D_j D_{i,j}$$

Critère 9 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^k D_{i,j} D_{j,i}$$

Critère 10 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^k D_{j,i}$$

Critère 11 :

$$s(x_j) = \sum_{i=1}^k D_{i,j}$$

Pour les critères 9 à 11, la sommation est réalisée sur les k premiers termes où la valeur de l'endommagement est maximum. La valeur de k considérée est équivalente à un choix de 1% des éléments.

Les critères proposés sont utilisés dans l'algorithme ESO pour la résolution des problèmes d'optimisation définis par les équations (3) et (5). Les problèmes sont appliqués à des structures sollicitées dans leur plan. Les conclusions apportées se limitent donc à ce cas où les variables de conceptions sont les épaisseurs des éléments.

2.2. Procédure d'optimisation par réduction d'épaisseur

Nous considérons dans cette section le problème défini par l'équation (3). En diminuant les épaisseurs des éléments dont les valeurs de sensibilité en fatigue sont les plus petites et en augmentant celles dont les valeurs de sensibilité en fatigue sont les plus grandes, une conception optimale est alors trouvée. Les sensibilités en fatigue évaluées ne sont valides que si les modifications sur la structure à chaque itération sont faibles par rapport à l'ensemble de la structure. C'est pourquoi nous définissons un pourcentage de modification (*removal ratio*) autorisé par itération de 0,5-2% du volume total de la structure et cela, pour assurer une faible variation entre chaque itération. La procédure itérative pour résoudre le problème d'optimisation est donnée à la Figure 4-1.

Nous appliquons la procédure d'optimisation à un pont en acier (Figure 4-2) dont les propriétés matérielles sont indiquées dans le Tableau 4-1 où les limites d'endurance pour la traction et la torsion renversée f_{-1} et t_{-1} sont établies à 2.10^6 cycles.

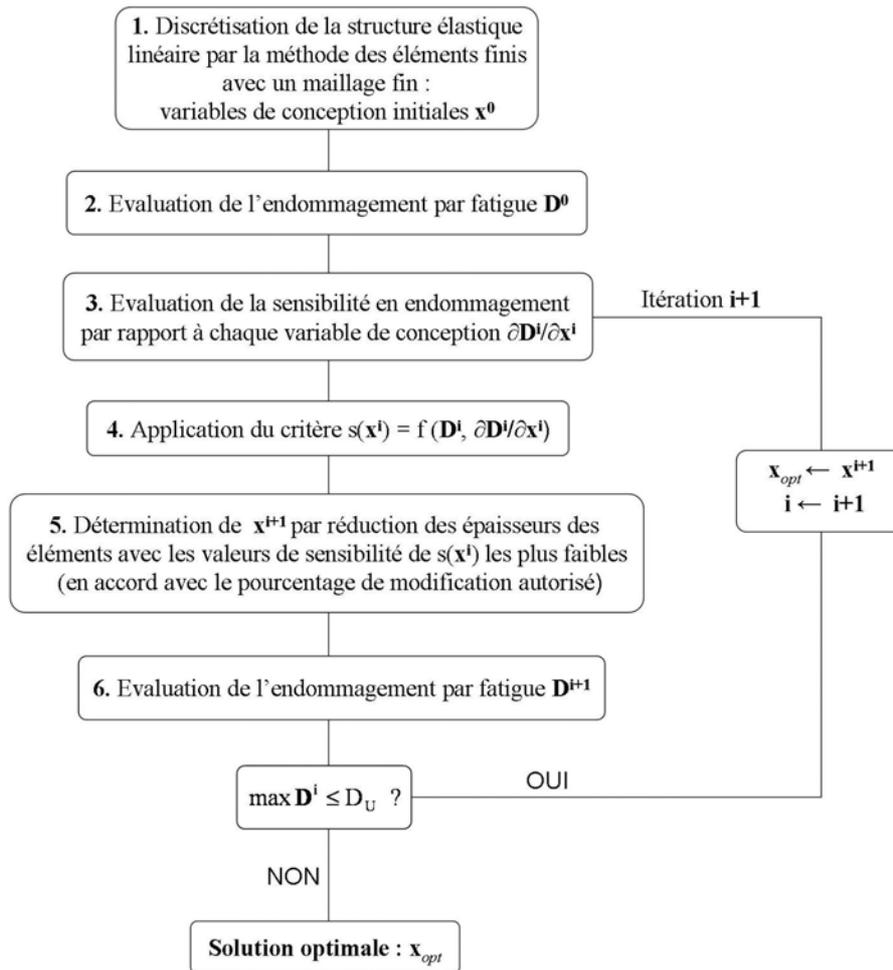


Figure 4-1. Organigramme de l'algorithme n°1

E (Mpa)	ν	ρ (kg/m ³)	t_1 (Mpa)	f_{t1} (Mpa)
210 000	0,3	7 800	182	252

Tableau 4-1. Caractéristique mécanique de l'acier utilisé

Le pont (210m×21m) possède une épaisseur initiale uniforme de 8m et est discrétisé en 2048 éléments quadrangulaires à 8 noeuds formulés en élasticité plane. La structure est soumise à des excitations aléatoires définies par des bruits blancs en bande limitée appliquées sur son tablier (Figure 4-2). Ces excitations sont définies par des DSP constantes sur une bande de fréquence de [0, 5] (Hz). Ses extrémités droite et gauche sont supposées encastées. Les éléments grisés sur la Figure 4-2 sont des éléments dont les épaisseurs ne sont pas des variables de conception.

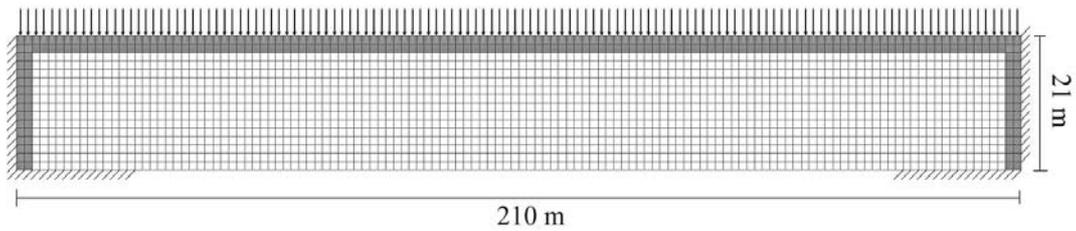


Figure 4-2. Pont en acier

Seul le premier mode est évalué pour prendre en compte les propriétés dynamiques de la structure sur la bande de fréquence d'intérêt en accord avec les facteurs de participation modale [GER97]. Afin d'accélérer le temps de calcul, nous utilisons la méthode de désassemblage des matrices globales proposée par [HEM00]. Cette méthode permet de décomposer de manière explicite les matrices de raideurs en fonction des propriétés matériaux et des épaisseurs élémentaires, y compris pour des éléments de coques (pour lesquels plusieurs puissances des épaisseurs sont mises en jeu). Ainsi, le temps de calcul nécessaire à la formation des matrices initiales est ensuite largement compensé au cours des itérations à chaque mise à jour de la matrice de raideur. Nous utilisons cette méthode dans ce travail pour tous les problèmes où les variables de conception sont les épaisseurs des éléments.

Les critères présentés précédemment sont maintenant comparés à travers la méthode de résolution du problème. Ainsi nous résolvons le problème onze fois, avec pour chaque résolution un critère de sensibilité différent. Sur les Figure 4-3 à Figure 4-5 sont répertoriées les valeurs maximales d'endommagement par fatigue, relevées sur la structure à chaque itération et pour chacun des critères. Le critère d'arrêt énoncé à la dernière étape de la méthode de résolution est volontairement négligé pour effectuer une comparaison plus claire.

Nous pouvons remarquer que les critères 5 à 11 ne permettent pas une convergence du processus et en particulier, le critère 6 (Figure 4-4) considéré physiquement comme le plus proche des recommandations de la méthode ESO, les conceptions obtenues ne respectant aucunement les contraintes du problème. En revanche les critères 1 à 4, permettent d'obtenir des résultats satisfaisants.

Dans le but de pouvoir les comparer plus objectivement, nous établissons un indice de performance κ tel que $\kappa = V(\mathbf{h}) \times \max(\mathbf{D})$. L'indice reflète le produit entre réduction de volume et endommagement maximal, ainsi indice de performance faible sera synonyme de performance. Sur la Figure 4-6, nous notons les indices de performance respectifs obtenus par les critères 1 à 4.

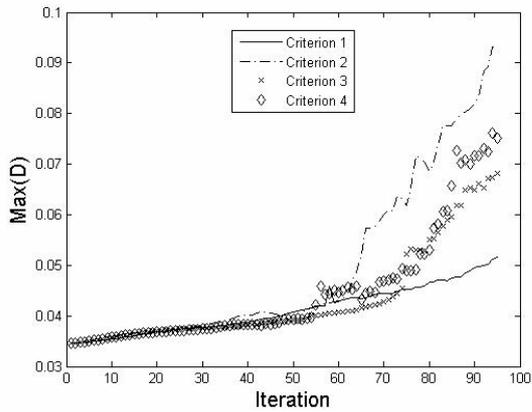


Figure 4-3. Evolution de la valeur maximum de l'endommagement en fatigue pour les critères de 1 à 4

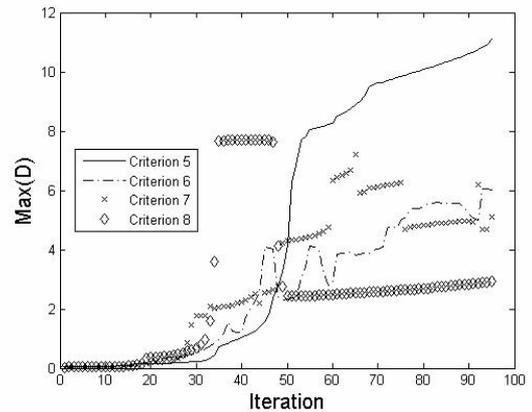


Figure 4-4. Evolution de la valeur maximum de l'endommagement en fatigue pour les critères de 5 à 8

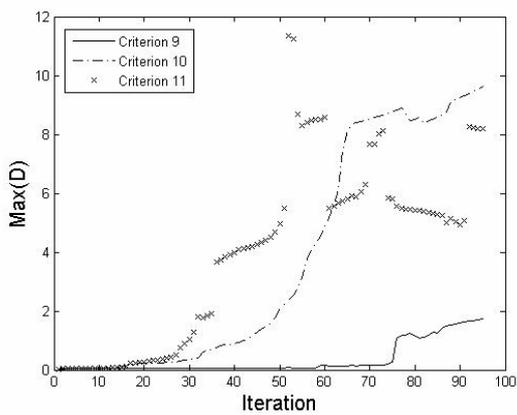


Figure 4-5. Evolution de la valeur maximum de l'endommagement en fatigue pour les critères de 9 à 11

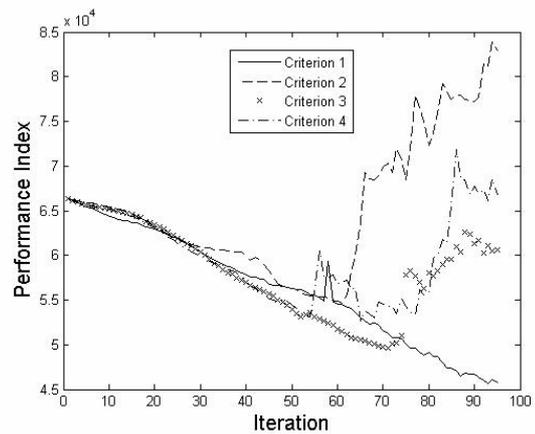


Figure 4-6. Evolution de l'indice de performance pour les critères de 1 à 4

Le critère 1 affiche les indices de performances les plus faibles et par conséquent semble être le critère le plus adapté à notre méthode et ainsi refléter le mieux la sensibilité de l'épaisseur d'un élément en endommagement par fatigue. La Figure 4-7 présente la meilleure répartition d'épaisseur obtenue avec le critère de sensibilité 1 et satisfaisant la contrainte $\max \mathbf{D} \leq \mathbf{D}_U = 0,05$ où 73% du volume initial a été éliminé.

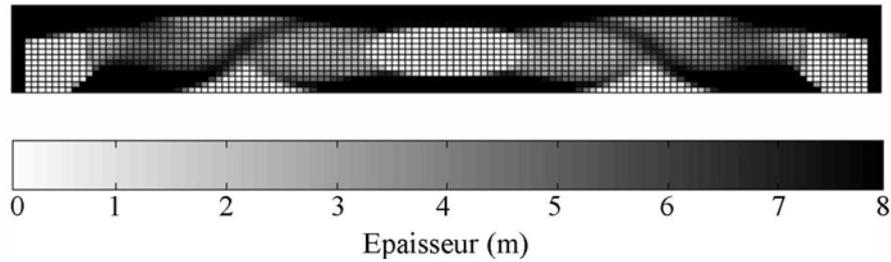


Figure 4-7. Pont en acier optimisé

2.3. Application à une bielle

Nous appliquons la méthode proposée en 1.2 avec le critère n°1, à une bielle en acier possédant les mêmes caractéristiques que l'exemple précédent. La bielle est discrétisée en 372 éléments coques Hétérosis à 8/9 noeuds [HUG87], le trou gauche est fixé tandis que le trou droit est soumis à deux excitations aléatoires Φ_f définies par deux bruits blancs sur $[0, 1000]$ (Hz).

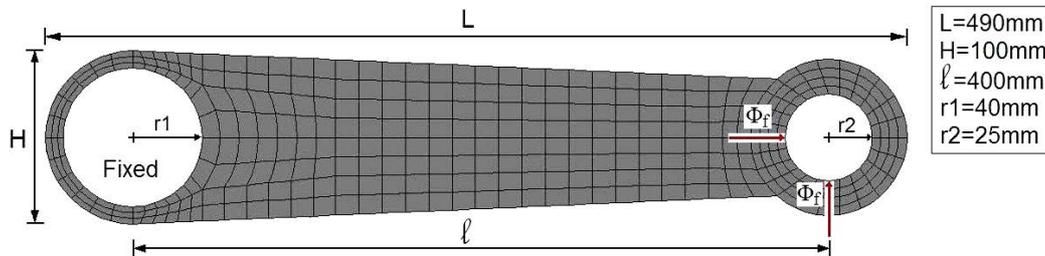


Figure 4-8. Dimension de la bielle discrétisée

Les 5 premiers modes sont évalués pour prendre en compte les propriétés dynamiques de la structure sur la bande de fréquence d'intérêt en accord avec les facteurs de participation modale. $D_U = 1$ et le pourcentage de variation autorisé est fixé à 1%.

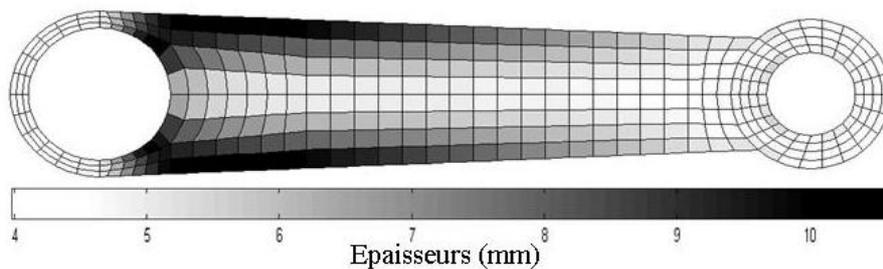


Figure 4-9. Répartition des épaisseurs de la solution trouvée

La bielle a une épaisseur uniforme de 10mm et la valeur d'endommagement maximale évaluée est de 0,74. La résolution du problème est effectuée selon l'algorithme n°1 et après 27 itérations une solution est trouvée avec une réduction de 39% du volume initial pour une valeur d'endommagement maximale de 0,998. La répartition des épaisseurs pour la solution optimale est donnée sur la Figure 4-9.

2.4. Problème d'optimisation topologique

Nous considérons maintenant le problème d'optimisation topologique formulé par l'équation (4). La résolution du problème est effectuée grâce à l'algorithme n°1, toujours en utilisant le critère de sensibilité n°1. Les sensibilités en endommagement sont évaluées par rapport à chaque élément, à chaque itération, les éléments avec les plus faibles valeurs du critère de sensibilité sont retirés de la structure. Le problème est posé pour le pont présenté en 1.2 comprenant deux modifications : les largeurs sont considérées libres et la structure est modélisée par 1600 d'éléments d'élasticité plane de degré deux. Les éléments grisés sur la Figure 4-10 sont des éléments appartenant au tablier et ne peuvent pas par conséquent être retirés.

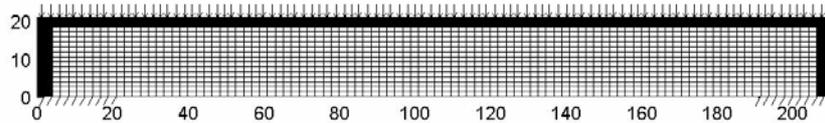


Figure 4-10. Structure initiale pour le pont (unité en mètre)

Deux valeurs de D_U sont considérées 0,3 et 0,55 et le pourcentage de modification autorisé est fixé à 3% pour les deux cas. Une solution pour chaque cas est trouvée respectivement en 30 et 37 itérations et elles sont illustrées sur les Figure 4-11 (a) et Figure 4-11 (b). Ainsi pour un problème d'optimisation topologique, l'algorithme ESO avec le critère de sensibilité retenu, nous a permis d'obtenir rapidement une solution pour les deux cas.

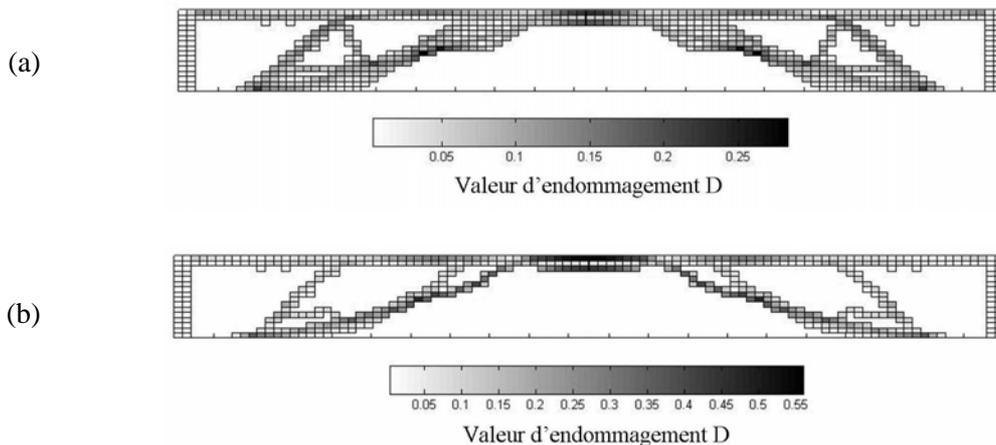


Figure 4-11. Endommagement évalué sur la structure optimisée
(a) pour $D_U = 0,3$ (b) pour $D_U = 0,55$

2.5. Procédure d'optimisation avec volume constant

Nous étudions maintenant le problème d'optimisation défini par l'équation (5) afin de valider le choix du critère proposé. Pour résoudre le problème par la méthode ESO, nous adoptons la procédure

itérative donnée à la Figure 4-12. Les différents critères proposés sont testés. Nous appliquons la procédure d'optimisation à une poutre élancée et à une poutre cantilever avec les mêmes propriétés matérielles que le pont en acier vu précédemment.

La poutre élancée (1m×0,3m) est discrétisée en 2744 éléments quadrangulaires à 8 noeuds formulés en élasticité plane. La structure est soumise à des excitations aléatoires définies par des bruits blancs en bande limitée, appliquées sur sa longueur supérieure (Figure 4-13). Ces excitations sont définies par des DSP constantes sur une bande de fréquence de [0, 1200] (Hz). Ses côtés droit et gauche sont supposés encastés.

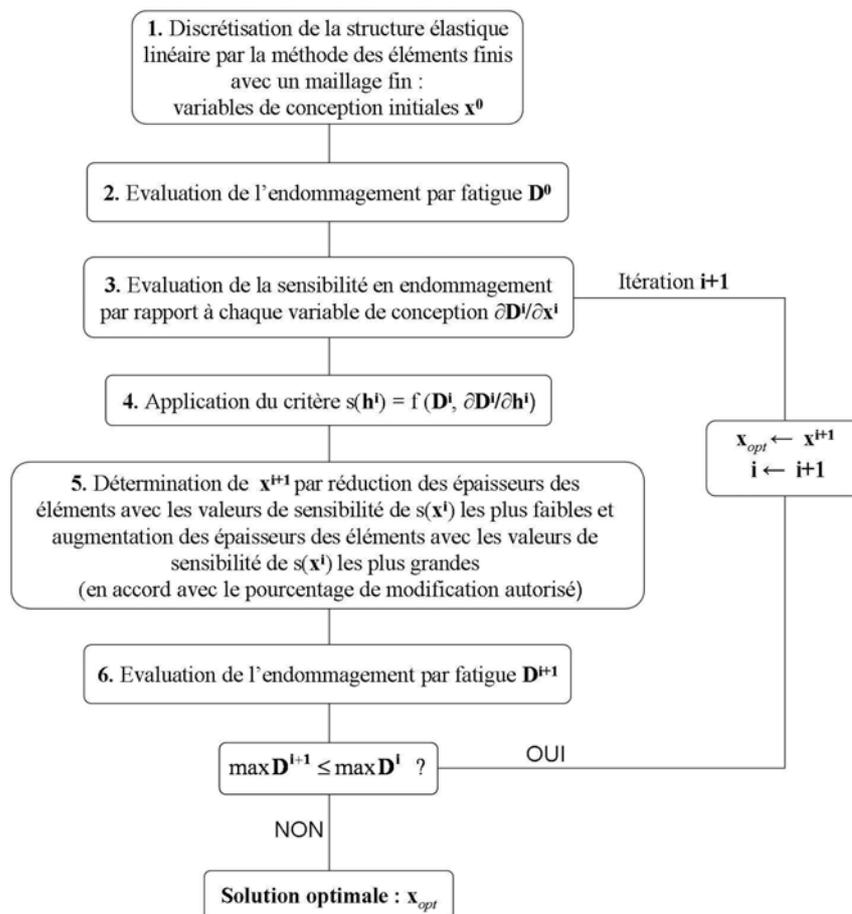


Figure 4-12. Organigramme de l'algorithme n°2

La poutre cantilever (0,3m×0,1m) est discrétisée par 1296 éléments quadrangulaires à 8 noeuds et est soumise à une seule excitation aléatoire définie par un bruit blanc en bande limitée (Figure 4-14) définie par une DSP constante Φ_{Fy} sur une bande de fréquence de [0, 5000] (Hz). Son côté gauche est encasté.

Les deux structures ont respectivement des épaisseurs initiales uniformes de 0,006m et 0,01m. Pour chaque cas, seul le premier mode est évalué pour prendre en compte les propriétés dynamiques

de la structure sur la bande de fréquence d'intérêt en accord avec les facteurs de participation modale [GER97].

La procédure d'optimisation est appliquée aux deux exemples avec un pourcentage de modification autorisé de 1% du volume total de la structure pour la poutre élancée et de 0,8% pour la poutre cantilever. Les résultats obtenus issus de l'application des différents critères sont indiqués dans le Tableau 4-2.

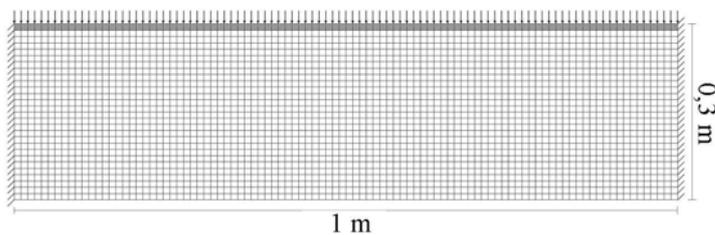


Figure 4-13. Poutre élancée initiale

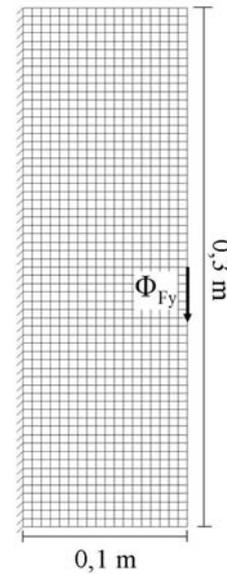


Figure 4-14. Poutre cantilever initiale

Critère	Poutre élancée		Poutre cantilever	
	Meilleure conception à l'itération n°	Valeur maximale de l'endommagement correspondante	Meilleure conception à l'itération n°	Valeur maximale de l'endommagement correspondante
n°1	17	0,3158	16	0,7461
n °2	25	0,3163	4	0,7801
n °3	22	0,3147	22	0,7623
n °4	23	0,3148	19	0,7540
n °5	1	0,4108	1	0,9444
n °6	1	0,4108	1	0,9444
n °7	1	0,4108	1	0,9444
n °8	1	0,4108	1	0,9444
n °9	13	0,3285	4	0,7681
N °10	1	0,4108	1	0,9444
N °11	1	0,4108	1	0,9444

Tableau 4-2. Résultats principaux obtenus pour chacun des critères

Conformément au premier exemple, les critères 5 à 8 et les critères 10 et 11 ne permettent pas de faire converger la procédure. Le critère n°9, qui ne considère que les termes du critère n°1 dont la valeur

d'endommagement est maximale, permet de faire converger la procédure mais les résultats sont moins satisfaisants que ceux obtenus pour les critères 1 à 4. Pour la poutre élancée, le meilleur résultat est obtenu avec le critère 3 tandis que pour la poutre cantilever, le meilleur résultat est obtenu avec le critère 1.

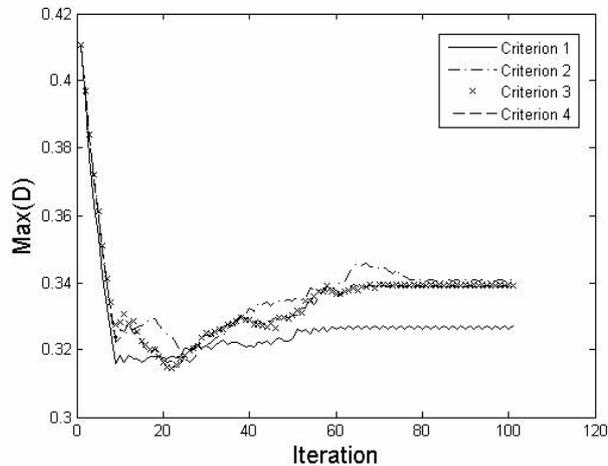


Figure 4-15. Evolution de la valeur maximum de l'endommagement en fatigue avec les critères de 1 à 4 pour la poutre élancée (critère d'arrêt négligé)

Cependant si nous comparons l'évolution de la valeur maximum de l'endommagement avec les critères de 1 et 4 pour la poutre élancée (Figure 4-15), nous observons que les valeurs obtenues par le critère 3 se ne stabilisent qu'autour de l'itération 68 tandis que celles obtenues par le critère 1 se stabilisent autour de l'itération 53 et à une valeur plus faible qu'avec le critère 4. En conclusion le critère 1 semble plus stable et plus apte à faire converger les procédures mises en place. Les Figures 4-16 et 4-17 représentent respectivement les meilleures répartitions d'épaisseur obtenues pour la poutre élancée avec le critère n°3 et pour la poutre cantilever avec le critère n°1.

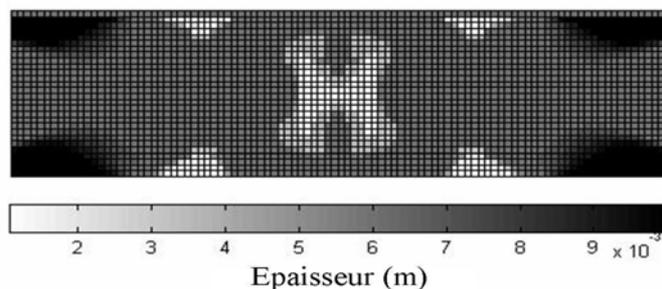


Figure 4-16. Poutre élancée optimisée (critère n°3)

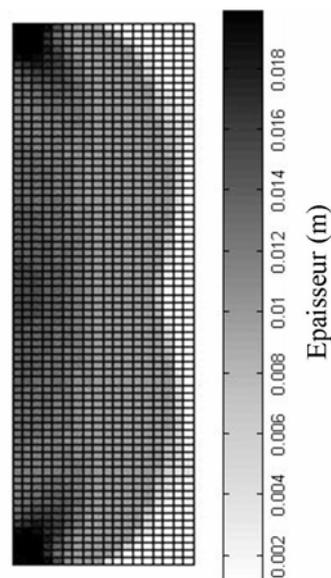


Figure 4-17. Poutre cantilever optimisée (critère n°1)

2.6. Problème d'optimisation fiabiliste

Nous nous intéressons maintenant à une application dans le domaine de l'optimisation fiabiliste de la méthode ESO proposée. Dans un problème d'optimisation fiabiliste, les incertitudes sur les variables de dimensionnement sont prises en compte afin de garantir une plus grande fiabilité de la solution proposée. Nous distinguons trois types de variables pour notre problème :

- les variables de conception du système \mathbf{h} supposées déterministes,
- les variables aléatoires $\Phi_f(\omega)$ représentant les incertitudes dans le système,
- les variables normalisées \mathbf{u} , projection dans l'espace normé des variables physiques $\Phi_f(\omega)$ et définies par $\mathbf{u} = T(\mathbf{h}, \Phi_f(\omega))$, avec $T(\cdot)$ la transformation isoprobabiliste entre les espaces physique et normé.

Un scénario de défaillance est déterminé et un état-limite $H(\mathbf{u})$ pour ce scénario est défini dans l'espace \mathbf{u} . Pour $H(\mathbf{u})$ donné, un indice de fiabilité β est introduit comme une mesure du niveau de fiabilité. L'indice β est évalué dans un espace normé par une procédure d'optimisation sous la contrainte d'appartenir au domaine de défaillance [LAM07] :

$$\beta = \min_{\mathbf{u}} d(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}} \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \quad (6.)$$

tel que $H(\mathbf{u}) \leq 0$

$d(\mathbf{u}) = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$ est la distance dans l'espace normé entre l'origine et la solution de ce problème appelée point de conception.

Le problème d'optimisation fiabiliste appliqué à notre cas, peut être formulé par la minimisation du volume sous contraintes d'endommagement et d'un indice de fiabilité cible. Il est en général décomposé en deux sous problèmes :

1. Optimisation déterministe du problème en intégrant la contrainte de fiabilité :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{h}} V(\mathbf{h}) &= \sum_{e=1}^{nel} h_e \times s_e \\ \text{tel que } \max \mathbf{D} &\leq D_U \quad \text{et} \quad \beta \geq \beta_c \end{aligned} \quad (7.)$$

avec β_c la fiabilité cible. L'algorithme n° 1 basé sur ESO, est utilisé pour résoudre le problème (7).

2. Recherche du point de conception par la résolution du problème d'optimisation (6) en utilisant une procédure particulière d'optimisation dans le but de chercher l'indice de fiabilité pour chaque itération.

Nous définissons trois variables aléatoires gaussiennes : le nombre d'éléments en directions horizontale et verticale, et le chargement réparti. La variable normée pour une loi de distribution normale est donnée par :

$$u_i = \frac{\alpha_i - E_i[\alpha]}{\sigma_{\alpha_i}} \quad (8.)$$

où α_i est la variable aléatoire, $E_i[\alpha]$ est le moyen de variable aléatoire et σ_{α_i} est l'écart type. Nous traitons le problème déterministe d'optimisation topologique (4) en ajoutant une contrainte sur un indice de fiabilité [KHA01] et [KHA04], nous avons alors le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{nel} V(nel) &= nel \times V_e \\ \text{tel que } \max \mathbf{D} &\leq D_U \quad \text{et} \quad \beta \geq \beta_c \end{aligned} \quad (9.)$$

Nous appliquons le problème à une poutre élancée dont les conditions limites et de sollicitations sont similaires à celle de la poutre élancée présentée dans la section 2.5. La poutre est discrétisée en 1960 éléments d'élasticité plane et nous fixons $D_U = 0,55$, $\beta_c = 2$ et $\sigma_{\alpha_i} = 0,1 \times E[\alpha_i]$. La solution obtenue est présentée sur la Figure 4-18 (a). A titre de comparaison la Figure 4-18 (b) représente la solution obtenue en ne considérant que le problème déterministe (4).



Figure 4-18. Solution obtenue pour le problème (a) fiabiliste (7) (b) déterministe (4)

Nous constatons que la prise en compte d'incertitudes sur le modèle amène à une solution dont le volume optimal V^* est plus grand que pour la solution du problème déterministe. Ceci est en accord avec le concept de fiabilité, la solution obtenue pour le problème fiabiliste présente une meilleure résistance à l'endommagement par fatigue [KHA07A] et [KHA08B].

	Solution du problème déterministe (b)	Solution du problème fiabiliste (a)
V^*/V^i (V^i : volume initial)	0,5125	0,6816
max \mathbf{D}	0,525	0,5198 avec $\beta_c = 2$

Tableau 4-3. Résultats obtenus pour les deux solutions

Sur le Tableau 4-3, sont reportés le rapport entre le volume optimal et le volume initial ainsi que la valeur maximale d'endommagement des solutions trouvées.

3. OPTIMISATION GLOBALE

Nous présentons une méthode d'optimisation globale avec des contraintes d'endommagement et adaptée à la conception des structures sous chargements aléatoires. La méthode est basée sur un couplage entre des méthodes stochastiques et déterministes et incluent l'analyse de sensibilité de l'endommagement vis-à-vis de paramètres donnés, présentée dans le précédent chapitre.

L'algorithme général combinant une recherche locale des perturbations aléatoires et des itérations évolutionnaires, une méthode de direction de descente classique est modifiée par l'adjonction d'une perturbation aléatoire adaptée. Plusieurs études sur la convergence de l'algorithme ont été menées et peuvent être trouvées dans la littérature ([SOU97]).

3.1. Méthode d'optimisation

Généralement un problème d'optimisation est résolu numériquement par des itérations dans la direction de descente, qui commencent à une valeur initiale et modifie itérativement la valeur actuelle h^k des variables de conception dans le but d'obtenir une structure réalisable plus performante définie par les variables de conception $\mathbf{h}^{k+1} = Q^k(\mathbf{h}^k)$ (k est l'indice d'itération et Q^k est la fonction itération

associée à la méthode). Les contraintes sont généralement traitées soit par une approche duale (Uzawa) soit par des méthodes de pénalité. Nous considérons ici une approche par pénalité et le problème définie par l'équation (3) est approché par :

$$\min_{\mathbf{h}} V_{\lambda}(\mathbf{h}) = \sum_{e=1}^{nel} h_e \times s_e + \lambda P(\mathbf{h}) ; \quad P(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nel} \left[\frac{(D_e - D_U) + \text{abs}(D_e - D_U)}{2} \right]^2 \quad (10.)$$

Ici $\lambda > 0$ est le paramètre de pénalisation et doit être choisi assez grand : soit h une solution de l'équation (3) et h_{λ} une solution de l'équation (10). Nous avons les inégalités suivantes :

$$V(\mathbf{h}_{\lambda}) \leq V_{\lambda}(\mathbf{h}_{\lambda}) \leq V_{\eta}(\mathbf{h}_{\eta}) \leq V(\mathbf{h}), \text{ pour } \eta \geq \lambda \quad (11.)$$

D'une part, $P(\mathbf{h}_{\lambda}) \rightarrow 0$ et d'autre part :

$$\liminf V(\mathbf{h}_{\lambda}) \leq \limsup V(\mathbf{h}_{\lambda}) \leq \lim V_{\lambda}(\mathbf{h}_{\lambda}) \leq V(\mathbf{h}) \quad (12.)$$

Ainsi chacun des points de la famille \mathbf{h}_{λ} correspond à une solution de l'équation (3) : il est attendu que pour $\lambda \rightarrow +\infty$, nous obtenons une solution de l'équation (3). En pratique, λ est simplement choisi assez grand.

Le problème d'optimisation défini par l'équation (10) implique des difficultés numériques dues à sa non-convexité : le manque d'hypothèse de convexité, les méthodes de direction de descente itérative peuvent converger vers des minimum locaux et non vers un minimum global \mathbf{h}_{λ} . Pour accélérer la convergence, nous utilisons une méthode hybride permettant de perturber aléatoirement la méthode de direction de descente : les directions de descente classiques sont modifiées telles que $\mathbf{h}^{k+1} = Q^k(\mathbf{h}^k) + \mathbb{I}^k$, où \mathbb{I}^k est une variable aléatoire convenablement choisie. Des résultats de convergence ainsi que des choix convenables pour \mathbb{I}^k sont présentés par Souza de Curzi et Autrique [SOU97]. Nous considérons une version évolutionnaire des perturbations aléatoires analogue à ceux introduit par Souza de Curzi et Gonçalves [SOU01]. La méthode de direction de descente choisie est une méthode de gradient avec un pas déterminé par la règle de Wolfe.

La procédure d'optimisation implique de nombreuses évaluations des contraintes mais aussi des gradients des contraintes. Cela entraîne des temps de calcul prohibitifs pour une procédure d'optimisation globale avec des contraintes d'endommagement. De par l'utilisation de formulations fréquentielles et de la méthodologie d'évaluation de la sensibilité à l'endommagement, la procédure optimisation globale présentée avec prise en compte de l'endommagement est appliquée.

3.2. Application

Nous appliquons la procédure d'optimisation à une plaque rectangulaire en acier dont les propriétés sont identiques aux exemples précédents. Les dimensions de la plaque sont de 2,5m×3,5m

avec une épaisseur initiale uniforme h de 5mm. Nous attribuons arbitrairement la valeur 0,8 à D_U . La plaque est encastrée sur ses quatre bords.

Le modèle éléments finis de la plaque comporte 36 éléments quadrangulaires à 8 noeuds formulés en élasticité plane, le problème est ainsi de dimension $d = 36$. La structure est soumise à une excitation aléatoire définie par un bruit blanc en bande limitée (Figure 4-19), avec Φ_{F_x} la DSP constante définie sur la bande de fréquence $[0, 1050]$ (Hz). Seul le premier mode est évalué pour prendre en compte les propriétés dynamiques de la structure sur la bande de fréquence d'intérêt en accord avec les facteurs de participation modale [GER97].

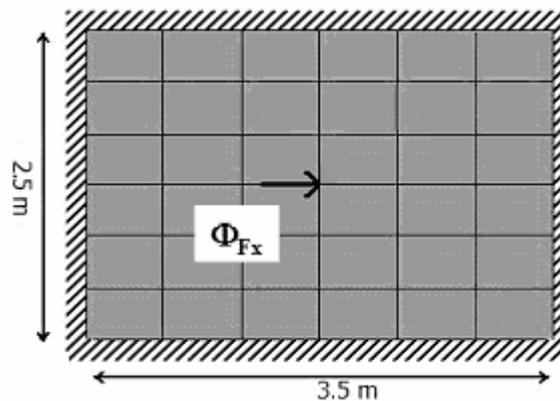


Figure 4-19. Plaque discrétisée initiale

Nous notons n le nombre d'itérations. p , r et t sont des paramètres généralement utilisés en optimisation évolutionnaire, ils correspondent respectivement à la taille de la population, au nombre de recombinaisons et au nombre de mutations. Le paramètre λ est fixé à 1000. Il est prouvé mathématiquement qu'augmenter les valeurs de ces paramètres améliore statistiquement la solution.

Nous allons étudier l'influence de ces paramètres sur les résultats obtenus en faisant varier leurs valeurs. Cependant la nature aléatoire des perturbations dans le processus amène à des résultats légèrement différents pour chaque calcul mené. Idéalement un grand nombre de calculs devraient être effectués et une étude statistique (moyenne et variance) menée sur les résultats obtenus. Même dans notre simple application, il n'est pas possible d'explorer complètement au regard des temps de calcul trop important, la méthode d'optimisation. C'est pourquoi seul un calcul est lancé pour chaque expérience numérique et nous considérons le résultat comme étant proche de la moyenne statistique. Nous notons n_F et n_Q le nombre d'évaluations de la fonction objectif et le nombre d'évaluations de la méthode de direction de descente. f_{opt} et g_{max} représentent la somme des h_e proportionnelle au volume et l'endommagement maximum de la structure optimisée.

Nous représentons dans les Tableau 4-4 à 4-7, les influences des nombres de mutations, de recombinaisons et d'itérations, puis dans le Tableau 4-7 l'influence de la taille de la population.

Comparé à une méthode d'optimisation sans perturbation aléatoire, la méthode d'optimisation choisie a avec succès amélioré les résultats (Tableau 4-5). Comme attendu, augmenter la valeur des paramètres améliore les résultats mais augmentent aussi considérablement les temps de calcul. Ainsi les paramètres initiaux peuvent être un bon compromis entre qualité des résultats et temps de calcul. Cependant si nous désirons augmenter la taille du problème, nous devons logiquement augmenter la valeur de ces paramètres. C'est pourquoi la méthode d'optimisation appliquée à un problème avec contraintes d'endommagement ne semble adaptée que pour un petit nombre de variables de conception. Nous allons illustrer l'influence de la répartition initiale des épaisseurs en adoptant les valeurs suivantes : $n = 25$, $p = 5$, $r = 10$ et $t = 10$. Nous traitons pour cela différents cas de répartition d'épaisseurs initiales (Figure 4-20).

Pour une épaisseur initiale uniforme, nous obtenons $f_{opt} = 0,0587$. Les résultats obtenus (Tableau 4-8) montre que la répartition initiale des épaisseurs a une grande influence sur la solution donnée. Si la répartition initiale des épaisseurs est éloignée de la répartition optimale alors il est conseillé d'augmenter la valeur des paramètres.

Par exemple pour une répartition aléatoire $f_{opt} = 0,096$ les valeurs des paramètres sont clairement trop faibles. C'est pourquoi une attention particulière est requise pour les valeurs initiales attribuées aux variables de conception. Lorsque celles-ci sont fixées aléatoirement alors il est conseillé d'augmenter les valeurs des paramètres de mutation de recombinaison d'itération et de taille de population.

Sur l'ensemble des expériences numériques, celle dont les valeurs considérées sont les suivantes $n = 25$, $p = 20$, $r = 10$ et $t = 10$, a donné le meilleur résultat $f_{opt} = 0,057$. La Figure 4-21 montre la répartition optimale obtenue.

t	0	10	50	100	500
$f_{opt} (mm)$	0.063	0.059	0.058	0.059	0.057
g_{max}	0.800	0.800	0.799	0.800	0.800
Cpu (s)	10308	13332	29680	36439	158000
n_F	530	16400	26030	38030	138030
n_Q	1375	1375	1375	1375	1375

Tableau 4-4. Résultats pour différentes valeurs du nombre de mutations
avec $n = 25, p = 5, r = 10$

r	0	10	20	50	100
$f_{opt} (mm)$	0.073	0.059	0.059	0.058	0.058
g_{max}	0.800	0.800	0.800	0.799	0.794
Cpu (s)	146	13332	26286	61412	127790
n_F	1155	16400	31380	76380	151400
n_Q	105	1375	2625	6375	12625

Tableau 4-5. Résultats pour différentes valeurs du nombre de recombinaisons
avec $n = 25, p = 5$ et $t = 10$

n	1	5	10	25	50
$f_{opt} (mm)$	1.404	0.068	0.065	0.059	0.060
g_{max}	0.436	0.797	0.799	0.800	0.800
Cpu (s)	192	1415	3255	13332	22784
n_F	660	3280	6555	16400	32755
n_Q	55	275	550	1375	2750

Tableau 4-6. Résultats pour différentes valeurs du nombre d'itérations
avec $p = 5, r = 10, t = 10$

p	1	5	10	20	50
$f_{opt} (mm)$	0.062	0.059	0.059	0.057	0.059
g_{max}	0.800	0.800	0.799	0.799	0.799
Cpu (s)	3353	13332	26618	54881	128770
n_F	3280	16400	32800	65600	164000
n_Q	275	1375	2750	5500	13750

Tableau 4-7. Résultats pour différentes valeurs de la taille de la population avec
 $n = 25, r = 10$ et $t = 10$

Cas	a)	b)	c)	d)	e)
$f_{opt} (mm)$	0.075	0.066	0.061	0.068	0.096
g_{max}	0.799	0.797	0.800	0.800	0.799

Tableau 4-8. Résultats pour différentes épaisseurs initiales

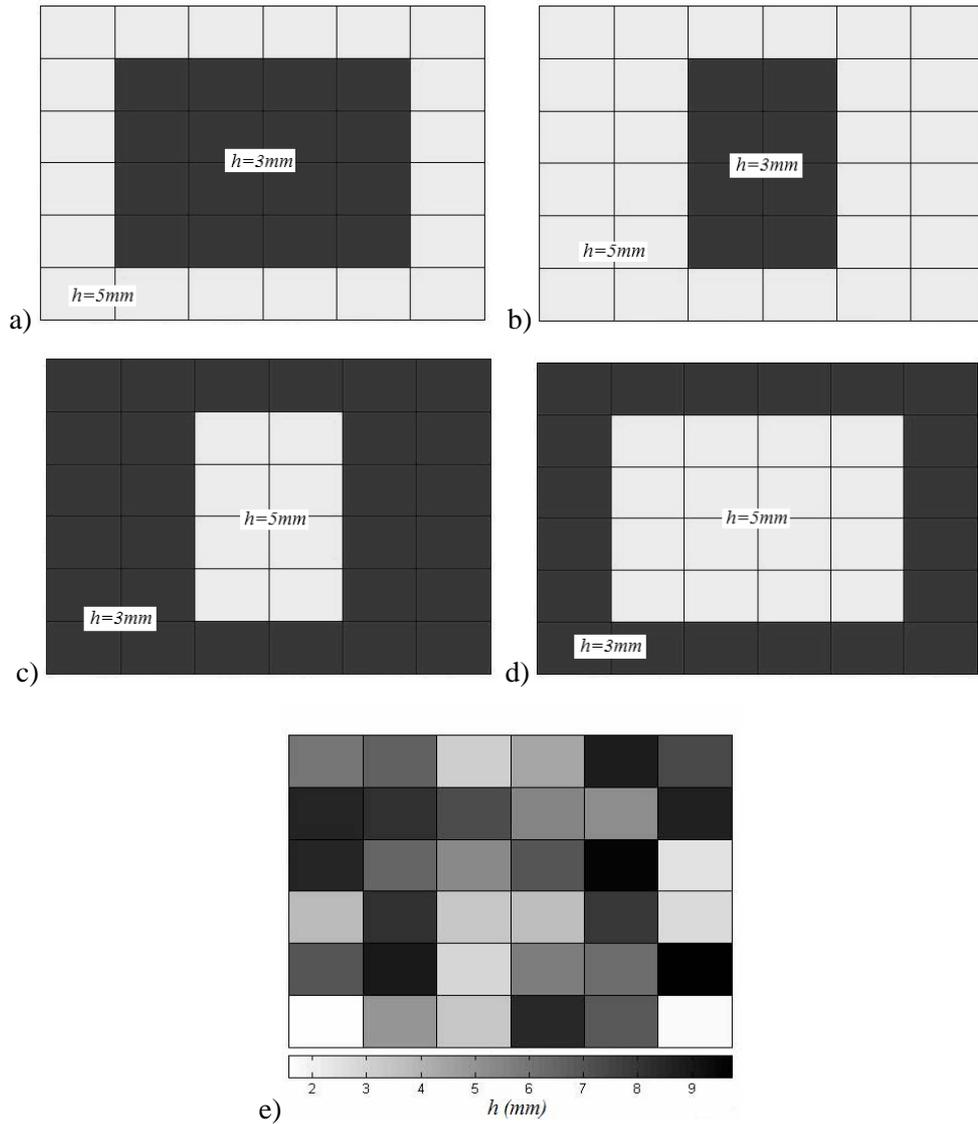


Figure 4-20. Epaisseur initiale pour les différents cas

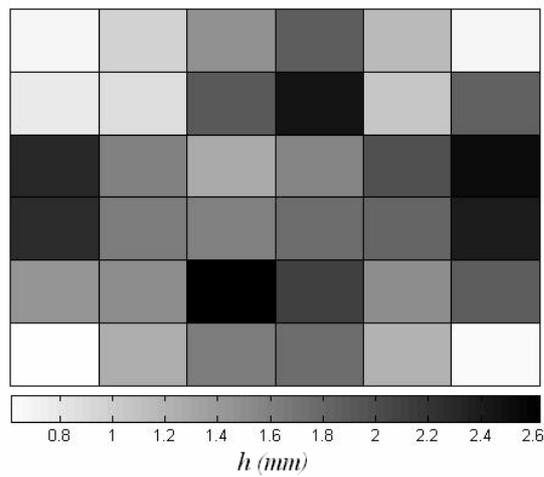


Figure 4-21. Meilleure répartition des épaisseurs obtenue avec $n = 25$, $p = 20$, $r = 10$, $t = 10$

L'algorithme d'optimisation couplant des méthodes stochastiques et déterministes avec gradient est moins coûteux que ceux purement stochastique, nous permettant de l'appliquer à des problèmes mécaniques. Cela dit même pour une simple application, il n'est pas possible d'explorer complètement la méthode d'optimisation, dû au coût numérique lié au problème mécanique. Cependant un bon compromis entre coûts numériques et qualité des résultats a été déterminé. Grâce à la combinaison d'une méthode de recherche stochastique et d'une méthode déterministe, l'algorithme d'optimisation devrait toujours donner, dans le cas le moins idéal, la solution obtenue avec une méthode purement déterministe. Avec un peu de chance ou quelques itérations supplémentaires une meilleure solution sera alors donnée. Cela est un avantage du point de vue de l'ingénieur, lui permettant au moins d'obtenir une bonne solution et si possible une meilleure si les temps de calcul le permettent.

4. CONCLUSION

Nous avons traité le problème d'optimisation consistant à trouver le meilleur compromis entre le volume d'une structure et sa résistance à l'endommagement par fatigue. Plusieurs approches ont été considérées et résolues.

Dans une première partie, nous adaptons l'algorithme d'optimisation ESO aux problèmes sous contraintes d'endommagement en définissant un critère de sensibilité en endommagement. Le critère nous permet alors de définir les variables de conception les plus sensibles à l'endommagement par fatigue. L'algorithme ainsi défini est utilisé pour résoudre divers problèmes dont un problème d'optimisation topologique et un problème d'optimisation fiabiliste. L'efficacité numérique de la méthode d'évaluation de l'endommagement, proposée au chapitre 3, nous a permis de traiter des structures comportant un grand nombre de variables de conception.

Dans la seconde partie, nous avons exploré une méthode d'optimisation globale basée sur un couplage entre des méthodes stochastiques et déterministes. L'algorithme bien que moins coûteux qu'un algorithme purement stochastique, est difficilement applicable à des problèmes d'optimisation où les maillages éléments finis sont de grandes tailles. Cependant un bon compromis entre coûts numériques et qualité des résultats a été déterminé pour l'application considérée.

Conclusion Générale

Cette étude a été consacrée au développement d'un outil de pré-dimensionnement par éléments finis pour l'estimation de l'endommagement par fatigue à grands nombres de cycles, de structures linéaires soumises à chargements multiaxiaux aléatoires. Un soin particulier est apporté au modèle pour qu'il soit applicable à des chargements aléatoires stationnaires non proportionnels et de moyennes non nulles. L'efficacité numérique est également un aspect essentiel recherché, de manière à permettre l'intégration des contraintes d'endommagement par fatigue dans des procédures d'optimisation.

Nous nous sommes dans un premier temps intéressé à l'étude des réponses en contraintes de structures soumises à des chargements aléatoires. En considérant des chargements stationnaires gaussiens, il apparaît qu'une caractérisation des réponses en contraintes du système linéaire est numériquement efficace, si elle est effectuée dans le domaine fréquentiel. A partir de ce constat, nous nous attachons à définir la matrice des DSP des réponses en contrainte. Celle-ci définit entièrement la réponse dans le domaine fréquentiel. Pour accélérer son évaluation, l'expression obtenue pour la matrice des DSP en contrainte, est découplée par projection dans une base de réduction formée des premiers modes propres de la structure et d'un terme complémentaire évalué suivant la méthode des accélérations modales. A partir de cette quantité, nous pouvons déterminer les paramètres statistiques des réponses en contraintes gaussiennes nécessaires à l'étude de la fatigue des structures.

Nous avons par la suite présenté les méthodes classiques d'évaluation de l'endommagement par fatigue en rappelant dans un premier temps les méthodologies utilisées pour des structures sous chargements uniaxiaux. Ces méthodes donnent des prédictions de durée de vie en accord avec les essais expérimentaux lorsque les hypothèses sont vérifiées. Au contraire, l'évaluation de l'endommagement par fatigue des structures sous chargements multiaxiaux, est plus complexe et il n'existe pas de méthodologie universellement acceptée. C'est pourquoi nous avons cherché à distinguer un critère donnant des résultats en accord avec le plus grand nombre d'essais expérimentaux en regroupant des études comparatives de la littérature, ce qui est cohérent pour des chargements aléatoires. Nous avons alors retenu le critère d'approche globale de Sines. Ce critère présente de plus, l'avantage de pouvoir être calculé numériquement de manière efficace puisqu'il évalue l'endommagement à partir d'un seul plan.

Dans la troisième partie de ce mémoire, nous avons adapté le critère de Sines pour l'étude de structures sous chargements aléatoires en utilisant les paramètres statistiques des réponses en contrainte déterminés dans la première partie.

Plusieurs aspects sont alors développés :

- La prise en compte des largeurs de bande dans l'estimation des valeurs maximales atteintes par les processus de contrainte ;
- La prise en compte de la non-proportionnalité des chargements aléatoires en adaptant à notre étude, une définition de la contrainte équivalente de cisaillement ;
- La prise en compte de deux sources d'incertitudes. L'une liée à la dispersion sur les résultats d'essais en fatigue et l'autre inhérente à l'estimation des valeurs extrêmes ;
- L'analyse de sensibilité en endommagement issue de la formulation du critère de Sines proposée.

L'outil de pré-dimensionnement en fatigue, dédié à l'étude des structures sous chargements aléatoires, nous permet d'aboutir à une évaluation très performante en temps de calcul grâce au traitement fréquentiel du problème mécanique.

Un champ d'application de la méthode est enfin exploré dans la dernière partie du mémoire. Le problème de l'optimisation de la masse d'une structure soumise à un critère de résistance à l'endommagement par fatigue, est étudié. Pour cela, nous avons adapté un algorithme de résolution du problème d'optimisation aux problèmes sous contraintes d'endommagement, en définissant un critère de sensibilité. L'algorithme a été utilisé pour résoudre divers problèmes dont un problème d'optimisation topologique et un problème d'optimisation fiabiliste. Nous avons conclu ce mémoire par l'exploration d'une méthode d'optimisation globale, basée sur un couplage entre des méthodes stochastique et déterministe.

L'étude de l'endommagement par fatigue s'est focalisée sur des matériaux de type métalliques, aux comportements isotropes et homogènes. Il serait maintenant intéressant d'élargir ce sujet à l'étude des structures en composites, dont la demande est croissante dans divers secteurs de l'industrie comme l'aéronautique ou l'automobile.

Aussi, nous avons considéré dans ce mémoire, des chargements stationnaires. L'extension de cette étude à des cas de chargements non stationnaires, nous permettrait d'obtenir une méthodologie plus générale sans hypothèse de restriction quant à la nature des chargements.

Un autre point d'intérêt concernerait la prise en compte d'une (des) incertitude(s) sur les propriétés élastiques et dissipatives du matériau ou de la structure. En effet, le niveau de contrainte issu du modèle numérique résulte directement de ces caractéristiques et conditionne le résultat d'endommagement.

Bibliographie

- [AFN93] AFNOR, Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable. Méthode Rainflow de comptage, AFNOR A03-406, 1-32, 1993.
- [AST85] Standard practices for cycle fatigue counting in fatigue analysis, Designation E 1049-85, vol. 03.01 of Metal Test Methods and Analytical procedure, ASTM, pp. 836-848, 1985.
- [BAC00] Bacon C., Pouyet J., Mécanique des Solides Déformables, Ed. Hermès, 2000.
- [BAL07] Balthazar J.C. & Malcher L., A review on the main approaches for the determination of the multiaxial high cycle fatigue strength, Mechanics of solids in Brazil, Marcilio Alves & da Costa Mattos, 2007.
- [BAT90] Batoz J.L., Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, Hermes, 1990.
- [BAT96] Bathe K.J., Finite Element procedure, Edition Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [BEN58] Bendat J.S., Principles and applications of random noise theory, John Wiley and Sons, Inc., 1958.
- [BEN66] Bendat J.S. & Piersol A., Random data : analysis and measurement procedures. Wiley-Interscience, 1966.
- [BIN02] Bin Li & Manuel de Freitas, A procedure for fast evaluation of high-cycle fatigue under multiaxial random loading, Journal of Mechanical Design, Vol 124, Issue 3, pp. 558-563, September 2002.
- [CAR56] Cartwright D.E. & Longuet-Higgins M.S., Statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. Roy. Soc. A., Vol. 237, pp. 212-232, 1956.

- [CHA02] Charkaluk E. & Bignonnet A., Constantinescu A., Dang Van K., Fatigue design of structures under thermomechanical loadings, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 25, n°12, pp. 1199-1206, 2002.
- [COI97] Coirier J., *Mécanique des Milieux Continus - Concepts de base*, Ed. Dunod, 1997.
- [COM82] The Committee on Fatigue and Fracture Reliability of the committee of the structural safety and reliability of the structural division, fatigue reliability: development of criteria for design, *Journal of the structural division, ASCE*, Vol. 108, N°STI, pp. 71-89, 1982.
- [CON04] Constantinescu A., Charkaluk E., Lederer G. & Verger L. A computational approach to thermomechanical fatigue. *Int. J. Fatigue* 26:805–818, 2004.
- [CRA63] Crandall S.H. & Mark W.D., *Random vibration in mechanical systems*, Academic Press, 1963.
- [CRA96] Craveur J.C., *Modélisation des Structures - Calcul par Eléments Finis*, Ed. Masson, 1996.
- [CRO56] Crossland B., Effects of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel, *International conference on fatigue of metals*, London, 1956.
- [DAN73] Dang Van K., Sur la résistance à la fatigue des métaux, *Sciences et techniques de l'Armement*, N°47, 3^{ème} fascicule, pp.641-722, 1973.
- [DAN93] Dang-Van K., Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, *Advances in Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 1191, pp. 120-130, 1993.
- [DAV64] Davenport A.G., Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading, *Proc. Inst.Civ. Eng.*, vol. 28, pp.187-196, 1964.
- [DHAT05] Dhatt G., Touzot G., Lefrançois E., *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005
- [DIE56] Diederich F.W., The dynamic response of a large airplane to continuous random atmospheric disturbances, *J. of Aeronautical Sciences*, October 1956.

- [DOU05] Doudard C., Calloch S., Hild F., Une approche probabiliste pour l'étude de la fatigue multiaxiale, Réunion du Groupe de Travail MECAMAT Physique et Mécanique de l'Endommagement et de la Rupture, 14 juin 2005 à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique.
- [FLE90] Fletcher R., Practical methods of optimization, Wiley & Sons, Chichester, UK, 1990.
- [FOA02] Foale T., Motorcycle handling and chassis design: the Art and Science, Tony Foale, 2002.
- [FRO87] Froustey C., Fatigue multiaxiale en endurance de l'acier 30NCD16, Thèse de l'ENSAM, Talence, Septembre 1987.
- [FUN53] Fung Y.C., Statistical aspects of dynamic loads, J. of aeronautical sciences, 20, n°5, p. 317, mai 1953.
- [GER97] Géradin M. & Rixen D., Mechanical vibrations, theory and application to structural dynamics, John Wiley & Sons, 1997.
- [GIL91] Gill P.E., Murray, W. & Wright M. H., Numerical Linear Algebra and Optimization, Vol.1. Addison Wesley, 1991.
- [GIL92] Gillespie T.D., Fundamentals of Vehicle Dynamics, Society of Automotive Engineers, 1992.
- [GOL89] Goldberg D.E., Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Kluwer Academic Publishers, Boston, M.A., 1989.
- [HAN76] Hancock J.W. & Mackenzie A.C., On the Mechanism of Ductile Failure in High-Strength Steels Subjected to Multiaxial Stress-States, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 24, pp. 147-169, 1976,.
- [HEM00] Hemez F.M., Pagnacco E., Statics and Inverse Dynamics Solvers Based on Strain-Mode Disassembly, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 9:5, juin 2000.
- [HOL75] Holland J.H., Adaptation in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [HUG87] Hughes R., The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall International, 1987.

- [KHA01] Kharmanda G. and Olhoff N., Reliability-based topology optimization, Report N° 110, Aalborg University, December 2001.
- [KHA04] Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A. and Lemaire, M., Reliability-based topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol 26, pp 295-307, 2004.
- [KHA07A] Kharmanda, G., Kourdi, N., Daboul, A., Lambert S. and Elhami A., Reliability-based topology optimization as efficient tool for structural designers, *2nd International Francophone Congress of Advanced Mechanics*, IFCAM02, 14-16 May 2007, Aleppo, Syria
- [KHA07B] Kharmanda G., Lambert S., Kourdi N., Daboul A. and Elhami A., Reliability-based topology optimization for different engineering applications, accepted in November 2007, for *International Journal of CAD/CAM*
- [LAL97] Lalanne C., Vibrations aléatoires, Hermès, tome 3, 1999.
- [LAM06] Lambert S., Khalij L., Pagnacco E. & El Hami A., Sensitivity analysis for optimisation problems with random fatigue life constraints, In Proc. of The Eighth International Conference on Computational Structures Technology, 2006.
- [LAM07] Lambert S., Kharmanda G., Kadi N. and Elhami A., Integration of system reliability analysis for large-scale fatigue damage problems, *2nd International Francophone Congress of Advanced Mechanics*, IFCAM02, 14-16 May 2007, Aleppo, Syria
- [LAR92] Laroze S., Mécanique des structures, Tome 1 & 3, Ed. Masson, 1992.
- [LEE97] Lee I.W. & Jung, G.H., An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities: PART1 Computers & Structures Vol. 62, n°3. pp. 437-443, 1997.
- [LEE97] Lee I.W., Jung G.H., An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities, Computers and Structures, vol. 62, pp. 429-435, 1997.
- [LIE82] Lieurade H. P. & La commission fatigue des métaux de la SFM, Méthodes expérimentales et analyses des résultats : La pratique des essais de fatigue, Pyc Edition, 1982.
- [LIN67] Lin Y.K., Probabilistic Theory of Structural Dynamics. McGraw-Hill, 1967.

- [LIU04] Liu J. & Zenner H., Fatigue limit of ductile metals under multiaxial loading, Biaxial/multiaxial fatigue and fracture, Elsevier Sciences, 2004
- [LON52] Longuet-Higgins M.S., On the statistical distribution of heights of sea waves, Journal of marine Research, n°3, pp. 245-266, 1952.
- [MAC91] Macha E., Generalized fatigue criterion of maximum shear and normal strains on the fracture plane for materials under multiaxial random loadings, Mat-wiss u Werkstofftech, 22:203–210, 1991.
- [MAT77] Mataka K., An explanation on fatigue limit under combined stress, Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers, 20:257, 1977.
- [MEI75] Meirovitch L., Element of vibration analysis, Mc Graw-Hill, 1975.
- [MIN45] Miner M.A., Cumulative damage in fatigue. Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME 12, n°3:159-164, 1945.
- [MOU05] Moumni Z., Maitournam H. & Dang Van K., Analyse spectrale de la fatigue des structures, First International Congress Design and Modeling of Mechanical Systems, Tunisie, mars 2005.
- [NEL76] Nelson R., Simplified calculation of eigenvector derivative, In AIAA J., 14:1201-5, 1976.
- [PAL97] Palin-Luc T. & Lasserre S., High cycle multiaxial fatigue energetic criterion taking into account the volumic distribution of stresses, In Proc. Fifth Int. Conf. on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture, volume 1, pp. 63-79. Opole, Poland, 1997.
- [PAP88] Papadopoulos I.V. & Dang Van K., Sur la nucléation des fissures en fatigue polygocyclique sous chargement multiaxial, Arch Mech, 40, pp. 759-774, 1988.
- [PAP95] Papadopoulos I.V., A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of-phase stress conditions Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., 18:79-91, 1995.
- [PAP97] Papadopoulos I.V., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A., A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals, International Journal of Fatigue, 19:219–235, 1997.

- [PIT00] Pitoiset X., Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux, thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [PIT99] Pitoiset X, Preumont A. Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures, In International Journal of Fatigue, 22:541-550, 2000.
- [PRE94] Preumont A., Vibrations aléatoires et analyse vibratoire, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1994.
- [RAO99] Rao S. S., Mechanical Vibrations Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [RAY45] Lord Rayleigh J.W.S., Theory of sound, Dover publications, New York, 1945.
- [RIC64] Rice J.R., Theoretical prediction of some statistical characteristics of random loadings relevant to fatigue and fracture, Lehigh university, Ph D, 1964.
- [RIC64] Rice S.O., Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal n°23 & 24, Juillet 1944 & Janvier 1945.
- [RIC69] Rice J.R. & Tracey D.M., On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, Journal of the Mechanics and Physics and Solids, Vol. 17, pp. 201-217, 1969.
- [SCH03] Schijve J., Fatigue of structures and materials in the 20th Century and the State of the Art, Materials Science, vol 39, pp. 307-333, 2003.
- [SCH05] Schijve J., Statistical distribution functions and fatigue of structures, International journal of fatigue, 27, pp. 1031-1039, 2005
- [SCH60] Schmit L.A, Structural design by systematic synthesis, Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, pp. 105-132, 1960.
- [SHI71] Shinozuka M., Simulation of multivariate and multidimensional random processes. Journal of Acoustical Society of America, 49:357-367, 1971.
- [SIN59] Sines G., Behaviour of metals under complex stresses, Sines G. & Waisman J.L. editors. Metal fatigue, New York, McGraw-Hill, pp. 145-69, 1959.
- [SOU01] Souza de Cursi J.E., Gonçalves M.B, Parameter estimation in a trip model by random perturbation of a descent method, Transportation Research, part B, 35(2), pp. 137-161, 2001.

- [SOU97] Souza de Cursi J.E. & Autrique L., On stochastic modification for global optimisation problems: an efficient implementation for the control of the vulcanization process, *International Journal of Control*, 67:1, pp. 1-21, 1997.
- [SUT88] Sutter T.R., Camarda C.J., Walsh J.L. & Adelman H. M., Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives. *AIAA J.* 26, pp. 1506-1511, 1988.
- [TAN02] Tanskanen P., The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects, In *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 5485–5498, 2002.
- [WAN91] Wang B.P., Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics, *AIAA J.*, 29:1018-1820, 1991.
- [WEB99] Weber B., *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque*, Thèse de l'INSA de Lyon, Lyon, 1999.
- [WIE99] Wielgosz C., *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité plasticité, éléments finis*, Ed. Ellipses, 1999.
- [WIR95] Wirshing P.H., Paez T.L. & Ortiz K., *Random Vibrations : Theory and Practice*. Wiley-Interscience., 1995.
- [XIE93] Xie Y.M. & Steven G.P., A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers and Structures*, vol. 49, pp. 885-896, 1993.
- [XIE97] Xie Y.M. & Steven G.P., *Evolutionary structural optimization*, Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [YOU96] You B.R., Lee S.B., A critical review on multiaxial fatigue assessment of metals, *International Journal of Fatigue*, 18:235–244, 1996.
- [YU96] Yu M., Liu Z.S. and Wang D.J., Comparison of several approximate modal methods for computing mode shape derivatives *Computers & Structures* Vol. 62, n°2. pp. 301-393, 1996.

Annexe 1.

Methodes spectrales du calcul du dommage en fatigue uniaxiale

Approche spectrale pour l'évaluation de l'espérance du dommage	113
Méthodes spectrales d'évaluation du dommage	114
Approximation de Rayleigh	114
Formule de Wirsching et Light	115
Méthode du « single moment »	115
Distribution approchée de Dirlik.....	115
Modèle de Zhao et Baker	116
Méthode de Tovo et Benasciutti	116
REFERENCES	117

L'étude des processus aléatoires stationnaires gaussiens a permis de déterminer un ensemble de propriétés statistiques. A travers l'ensemble de ces propriétés, de nombreuses méthodes de prédiction de durée de vie ont été développées notamment en fatigue uniaxiale. Ces méthodes sont appelées méthodes spectrales car développées dans le domaine fréquentiel. Les comptages de cycles sont alors effectués en terme de probabilité de réalisation. Nous passons en revue dans ce chapitre les méthodes spectrales les plus couramment utilisées pour la prédiction de durée de vie des structures soumises à des états de contrainte uniaxiaux. Ces approches sont à l'origine des méthodes spectrales utilisées en fatigue multiaxiale.

Approche spectrale pour l'évaluation de l'espérance du dommage

Dans une approche classique d'évaluation de l'endommagement, nous avons vu que les méthodes de comptage définissaient chaque cycle extrait par un pic de niveau u et une vallée de niveau v ou une amplitude s et une valeur moyenne m . Chaque cycle extrait est un événement aléatoire qui possède sa propre probabilité de réalisation. Si l'on considère $h(u,v)$ la densité de probabilité conjointe des cycles extraits, fonction des pics u et des vallées v , alors :

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v h(x, y) dx dy \quad (1.)$$

représente la probabilité d'obtenir un cycle avec un pic inférieur à u et une vallée supérieure à v (fonction de répartition conjointe). Par un simple changement de variable, la distribution conjointe des cycles est obtenue en terme d'amplitude s et de valeur moyenne m :

$$p_{a,m}(s, m) = 2h(m + s, m - s) \quad (2.)$$

La fonction de répartition des amplitudes s'écrit alors :

$$p_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,m}(s, m) dm \quad (3.)$$

Chaque cycle de contrainte d'amplitude s et de moyenne nulle produit un dommage, qui selon l'équation de Basquin $s^k N = C$, est donné par la relation $d = C^{-1} s^k$.

L'espérance de la contribution à l'endommagement des cycles dont l'amplitude, est comprise dans l'intervalle $[s; s+ds]$, peut alors s'écrire :

$$E[d_s] = v_a C^{-1} s^k p_a(s) ds \quad (4.)$$

où $v_a s^k p_a(s) ds$ est le nombre moyen par unité de temps de cycles dont l'amplitude est comprise dans l'intervalle $[s; s+ds]$.

L'espérance du dommage par unité de temps $E[D]$ pour une loi du cumul du dommage linéaire, en négligeant l'effet d'une contrainte moyenne non nulle, peut alors être déduite et nous obtenons :

$$E[D] = \nu_a C^{-1} \int_0^{+\infty} s^k p_a(s) ds \quad (5.)$$

Pour un processus stationnaire, $E[D]$ est constante ainsi l'espérance du dommage pour une durée T s'écrira $E[D(T)] = T \times E[D]$. La durée de vie T_f pourra alors être évaluée en considérant la valeur de dommage critique D_{cr} souvent égale à l'unité ($D_{cr} = 1$) :

$$T_f = \frac{D_{cr}}{E[D]} \quad (6.)$$

Les différentes méthodes spectrales d'évaluation du dommage par fatigue se distinguent dans un premier temps par la procédure de comptage de cycles utilisée. Chaque méthode de comptage génère sa propre distribution conjointe $h(u, \nu)$, cependant il est reconnu que l'utilisation de la méthode Rainflow amène à de meilleures prédictions. En conséquence les méthodes spectrales se focalisent principalement sur l'estimation de la distribution des cycles Rainflow. Il n'existe pas de formule analytique permettant d'établir la distribution des cycles, c'est pourquoi les méthodes spectrales existantes évaluent de manière approchée ou empirique ces distributions.

Parmi les méthodes plus couramment utilisées, nous pouvons citer l'approximation de Rayleigh, la formule de Wirsching et Light [WIR80], la méthode du « single-moment » [LUT90], la distribution approchée des amplitudes de Dirlik [DIR85], le modèle de Zhao et Baker [ZHA92] ou encore la méthode de Tovo et Benasciutti [TOV02]. Nous présentons brièvement ces méthodes dans le but de distinguer les différentes approches proposées.

Méthodes spectrales d'évaluation du dommage

❖ Approximation de Rayleigh

Dans un processus strictement en bande étroite, chaque cycle est formé par un pic de valeur n directement suivi d'une vallée de valeur $-n$. La densité de probabilité des amplitudes peut alors être assimilée à la densité de probabilité des pics $p_p(u)$ définie par une distribution de Rayleigh et de même, le nombre de maxima par unité de temps peut être assimilé au nombre de passage par zéro avec une pente positive. Le dommage par fatigue défini par l'équation (5), s'écrit alors :

$$E[D] = \nu_0 C^{-1} (\sqrt{2} \sigma_x)^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (7.)$$

avec $\Gamma(x)$ la fonction gamma donnée par :

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} t^{(2x-1)} e^{-t^2} dt \quad (8.)$$

Cette relation peut également être exprimée comme une fonction de deux moments spectraux :

$$E[D] = C^{-1} \frac{2^{k/2}}{2\pi} m_0^{(k-1)/2} m_2^{1/2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (9.)$$

Tovo a récemment démontré que l'estimation du dommage par l'approximation de Rayleigh correspondait en fait au dommage donné par un comptage de franchissement de seuil [TOV02].

❖ Formule de Wirsching et Light

Si le processus n'est pas en bande étroite, l'évaluation du dommage devient conservative. C'est pourquoi Wirsching et Light ont proposé en 1980 [WIR80] de réduire de l'approximation de Rayleigh par l'intermédiaire d'un facteur de correction empirique, fonction du facteur d'irrégularité et de l'exposant k de l'équation de Basquin :

$$\chi_{WL} = a(k) + [1 - a(k)](1 - \varepsilon)^{b(k)} \quad (10.)$$

où :

$$a(k) = 0.926 - 0.033k, \quad b(k) = 1.587k - 2.323 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \alpha_2^2} \quad (11.)$$

Pour un processus en bande étroite, nous avons $\alpha_2 = 1$, ce qui donne bien $\chi_{WL} = 1$, nous retrouvons l'expression de l'approximation de Rayleigh.

❖ Méthode du « single moment »

Suite à de nombreuses simulations, Larsen et Lutes proposent en 1990 [LAR91] la méthode du « single moment », une formulation empirique basée sur un seul moment spectral d'ordre $2/k$:

$$E[D] = C^{-1} \frac{2^{k/2}}{2\pi} m_{2/k}^{k/2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (12.)$$

❖ Distribution approchée de Dirlik

La distribution des amplitudes proposée en 1985 par Dirlik [DIR85] se base sur une combinaison linéaire de deux densités de probabilité de Rayleigh et d'une densité de probabilité exponentielle :

$$p_s^{DK}(s) = \frac{1}{\sigma_X} \left[\frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \right] \quad (13.)$$

avec D_1, D_2, D_3, Q et R fonction des moments spectraux m_0, m_1, m_2 et m_4 . Z représente l'amplitude normalisée, $Z = s/\sigma_X$.

Pour le dommage par fatigue on obtient alors :

$$E[D_{DK}] = \frac{v_p}{C} \sigma_X^k \left[D_1 Q^k \Gamma(1+k) + (\sqrt{2})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) (D_2 |R|^k + D_3) \right] \quad (14.)$$

Bien que l'approche ne se base sur aucune considération théorique, plusieurs résultats ont montré son efficacité et sa plus grande précision, comparée aux autres approches (notamment l'approximation de Rayleigh et la formule de Wirsching et Light), ceci dans de nombreux cas.

❖ **Modèle de Zhao et Baker**

Contrairement à la proposition de Dirlik, la distribution proposée en 1992 par Zhao et Baker [ZHA92] se base sur une combinaison linéaire d'une densité de probabilité de Weibull et d'une densité de probabilité Rayleigh :

$$p_Z^{ZB}(Z) = w a b Z^{b-1} e^{-aZ^b} + (1-w) Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \quad (15.)$$

avec a et b les paramètres de Weibull et w un paramètre de pondération, Z étant l'amplitude normalisée.

$$E[D_{ZB}] = \frac{v_p}{C} \sigma_X^k \left[w a^{-\frac{k}{b}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{b}\right) + (1-w) 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \right] \quad (16.)$$

❖ **Méthode de Tovo et Benasciutti**

Enfin en 2002 et 2005, Tovo et Benasciutti [TOV02, BEN05] partent du principe que le dommage recherché peut être borné par deux valeurs du dommage : le dommage donné par un comptage de franchissement de seuil $E[D_{Ray}]$ (approximation de Rayleigh) et le dommage donné par un comptage des étendues moyennes $E[D_{RC}]$ (*range-mean counting method*). Ce principe a été démontré par Rychlik et peut s'écrire :

$$E[D_{RC}] \leq E[D_{RFC}] \leq E[D_{Ray}] \quad (17.)$$

Tovo et Benasciutti proposent une solution possible au problème par une combinaison linéaire pondérée de ces deux bornes :

$$E[D_{RFC}] = b E[D_{NB}] + (1-b) E[D_{RC}] \quad (18.)$$

avec b fonction de paramètres de largeur de bande et $E[D_{Ray}]$ équivalent à l'équation (9).

Il n'existe pas de solution analytique pour $E[D_{RC}]$, cependant un résultat approché est donné par Madsen et al. [MAD86] :

$$E[D_{RC}] \cong v_p C^{-1} (\sqrt{2} \sigma_X \alpha_2)^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) = E[D_{NB}] \alpha_2^{k-1} \quad (19.)$$

Par conséquent Tovo et Benasciutti estiment la distribution des cycles Rainflow par un encadrement de celle-ci, la solution proposée ne se base plus sur un comptage Rainflow.

References

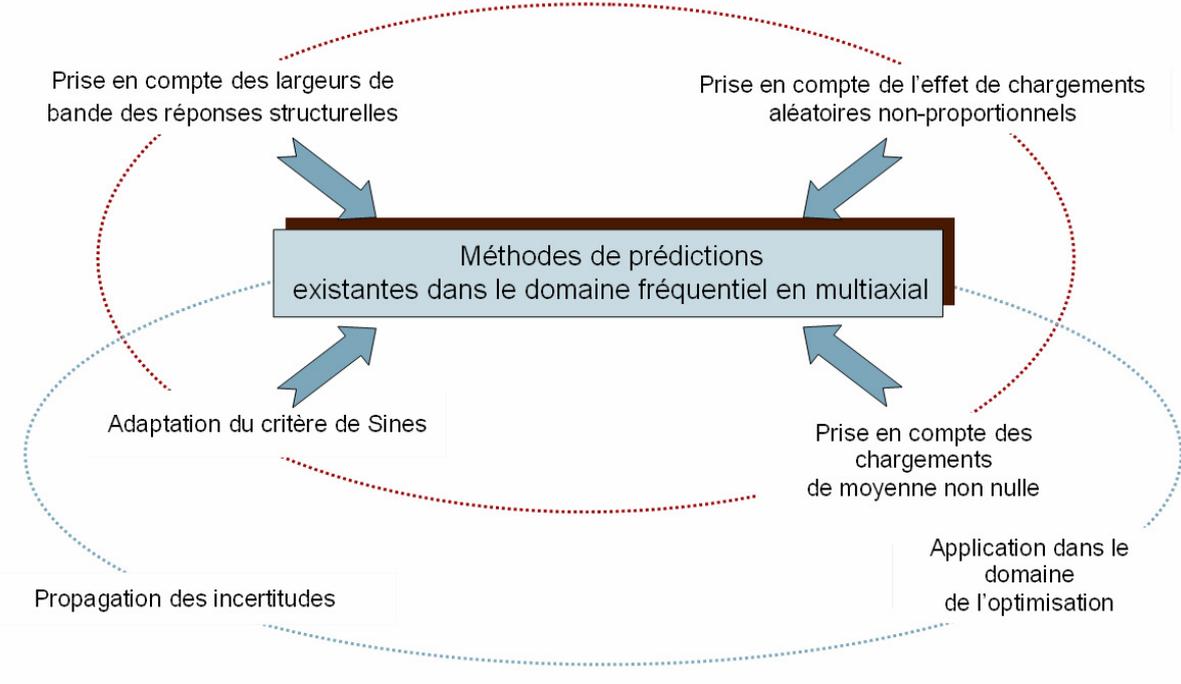
- [BEN05] Benasciutti D. Fatigue analysis of random loadings. PhD thesis, Department of Engineering, University of Ferrara, Italy, March; 2005.
- [DIR85] Dirlik T. Application of computers in fatigue analysis. Ph.D. thesis. UK: University of Warwick; 1985.
- [LAR91] Larsen CE, Lutes LD. Predicting the fatigue life of offshore structures by the single-moment spectral method. Prob Eng Mech;6(2):96–108 1991.
- [LUT90] Lutes LD, Larsen CE. Improved spectral method for variable amplitude fatigue prediction. J Struct Eng ASCE;116(4):1149–64 1990.
- [MAD86] Madsen HO, Krenk S, Lind NC. Methods of structural safety. Englewood Cliffs: Prentice-Hall; 1986.
- [TOV02] Tovo R. Cycle distribution and fatigue damage under broad-band random loading. Int J Fatigue 24(11):1137–47 2002;.
- [WIR80] Wirsching PH, Light CL. Fatigue under wide band random stresses. JStruct Division ASCE 106(7):1593–607, 1980;
- [ZHA92] Zhao W, Baker MJ. On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes. Int J Fatigue;14(2): 121–35 1992.

Annexe 2.

Figures

Amélioration des méthodes de prédiction	121
Lorsque les historiques de contraintes sont connus	122
Estimation de l'endommagement dans le cas d'un état de contraintes uniaxial.....	123
Estimation de l'endommagement dans le cas d'un état de contraintes multiaxial	123
Lorsque les historiques de contraintes sont aléatoires	124
Statistiques sur les processus aléatoires gaussiens	125
Estimation de l'endommagement	125
Outils statistiques	126
Organigramme d'évaluation de l'endommagement par fatigue	127
Organigramme de l'estimation du critère de Sines.....	127
Statistiques sur les réponses en contraintes aléatoires gaussiennes : Distribution des valeurs extrêmes.....	128
Amplitude du deuxième invariant du déviateur des contraintes	129
Pour des chargements proportionnels	129
Pour des chargements non-proportionnels.....	129
Estimation de la pression hydrostatique	130
Critère de Sines pour des chargements aléatoires.....	130

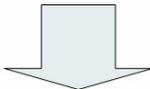
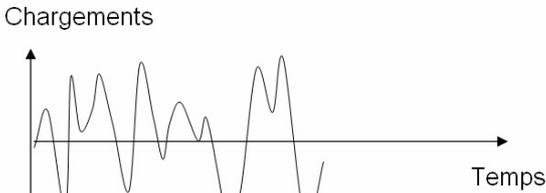
AMELIORATION DES METHODES DE PREDICTION



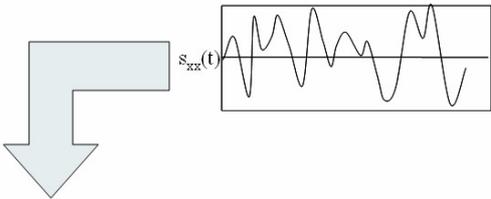
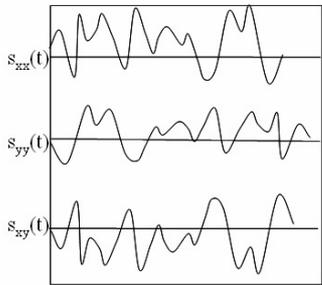
LORSQUE LES HISTORIQUES DE CONTRAINTES SONT CONNUS...



Eoliennes, aéronautique, automobiles, génie civil ...

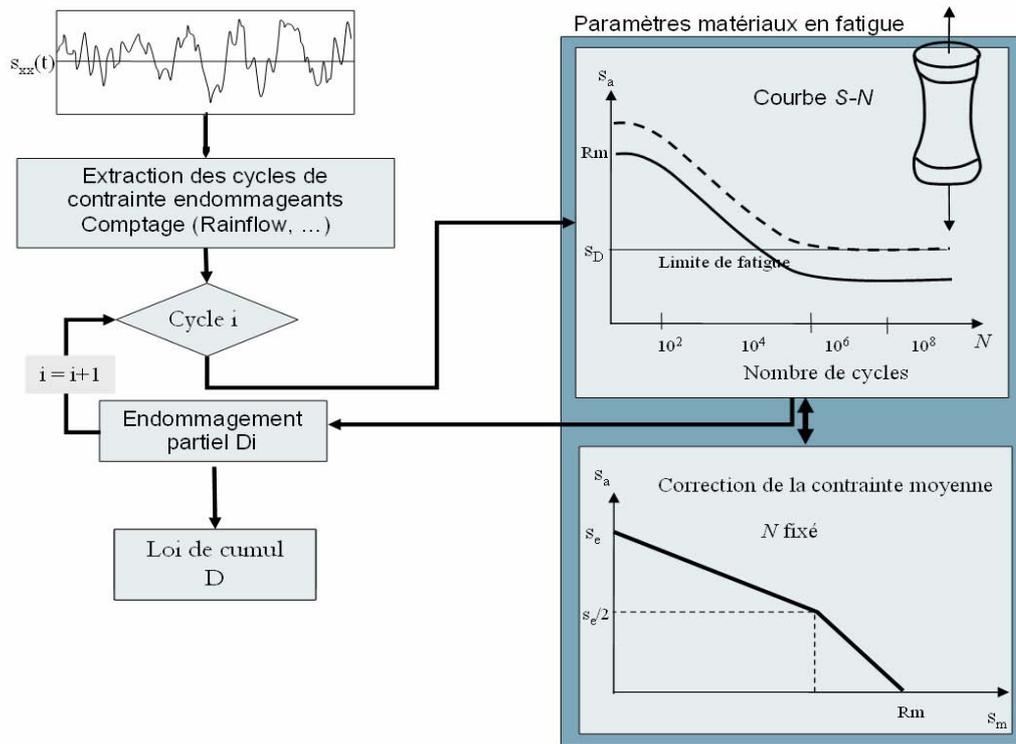


Etats de contraintes Uniaxial ou Multiaxial



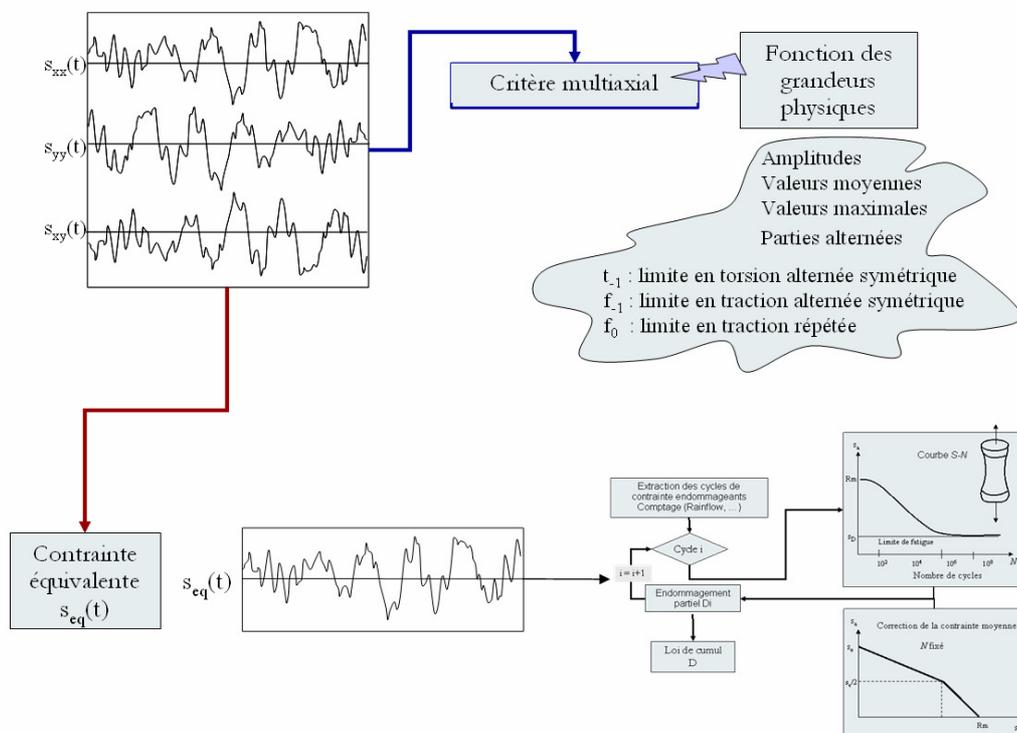
Estimation de l'endommagement

Etat de contrainte **uniaxial**



Estimation de l'endommagement dans le cas d'un état de contraintes uniaxial

Etat de contrainte **multiaxial**



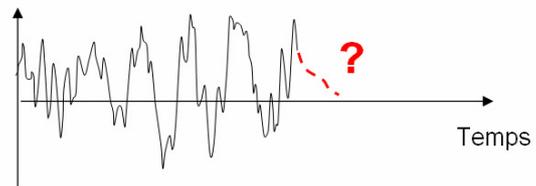
Estimation de l'endommagement dans le cas d'un état de contraintes multiaxial

LORSQUE LES HISTORIQUES DE CONTRAINTES SONT ALEATOIRES...



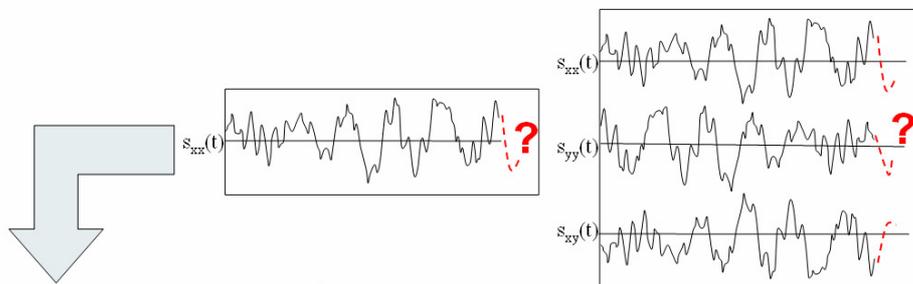
Eoliennes, aéronautique,
automobiles, génie civil ...

Chargements aléatoires



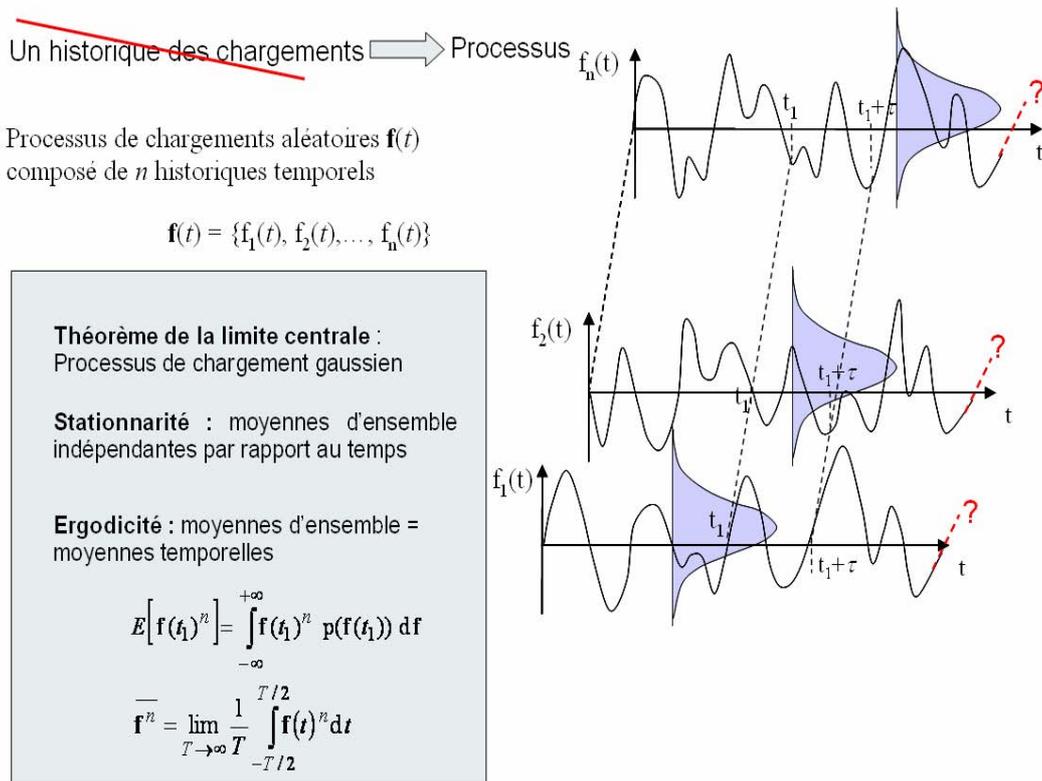
Vents turbulents, houle,
passages ferroviaires,
irrégularités de la route,
...

Etats de contraintes Uniaxial ou Multiaxial

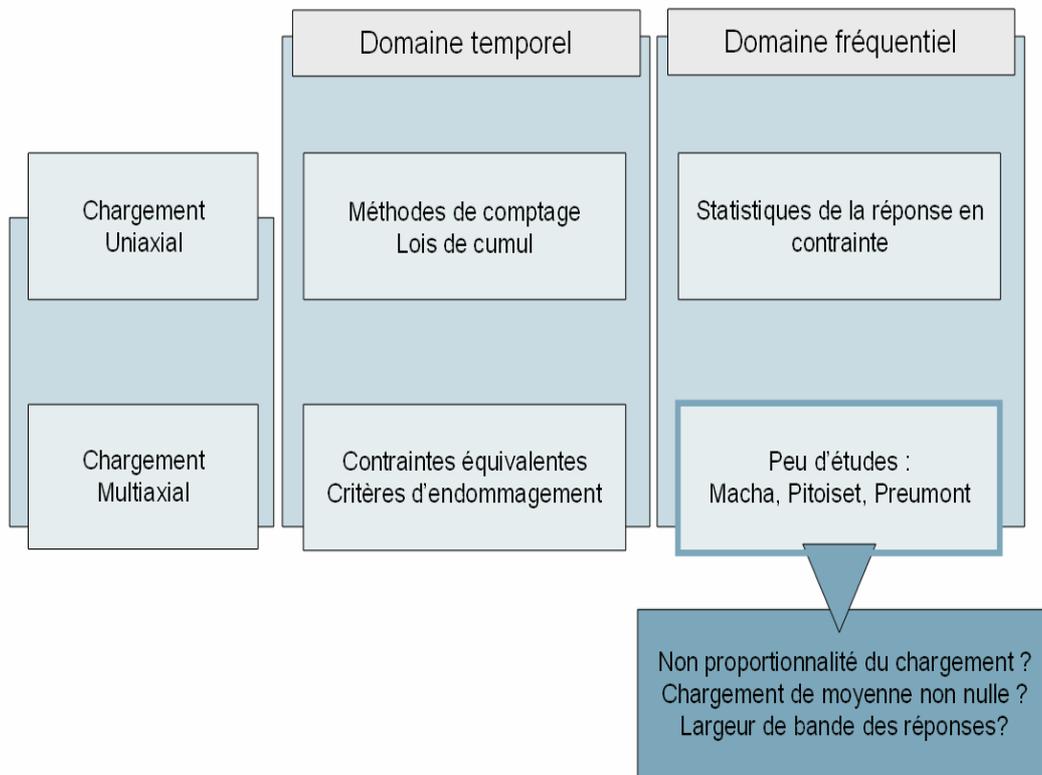


Estimation de l'endommagement ?

Nécessité de raisonner en terme de statistique

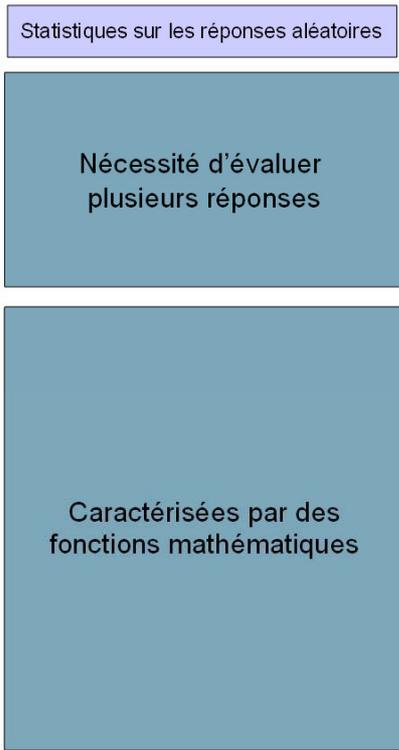
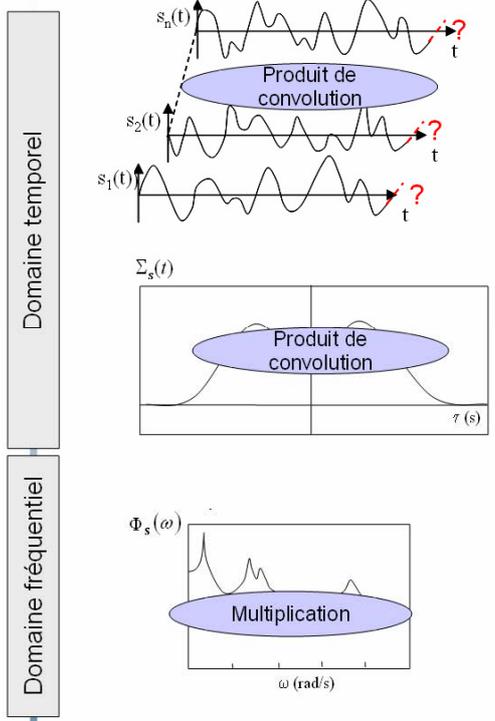
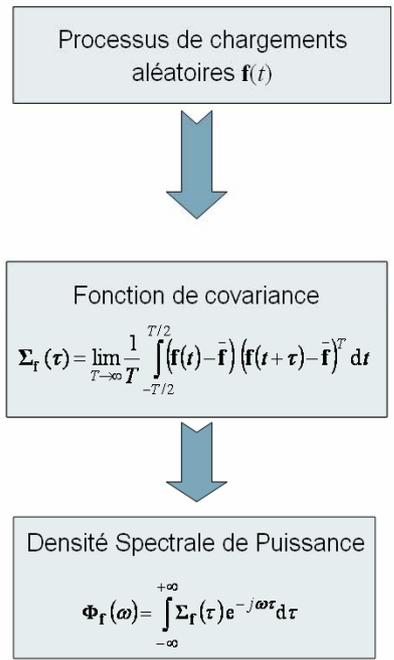
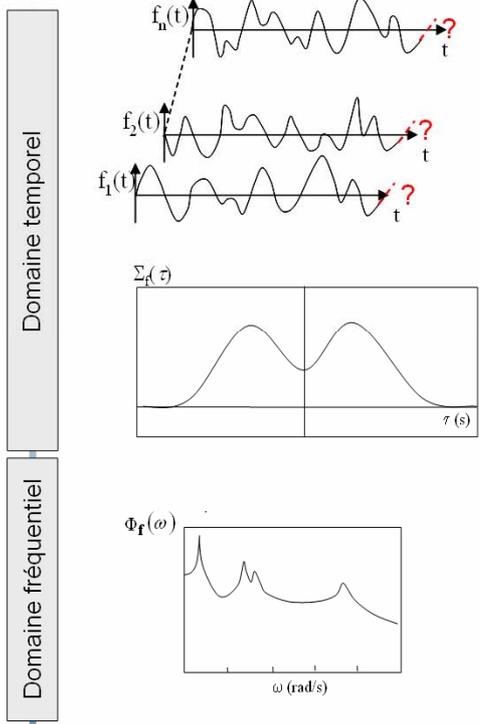


Statistiques sur les processus aléatoires gaussiens



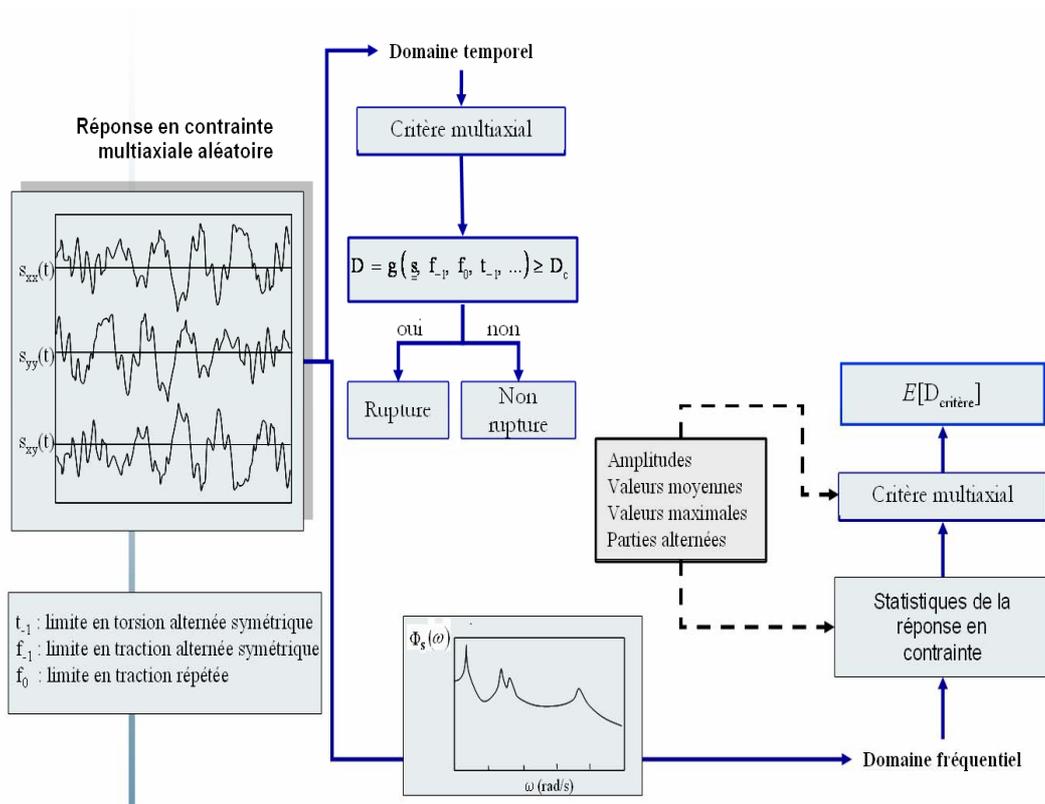
Estimation de l'endommagement

Outils statistiques

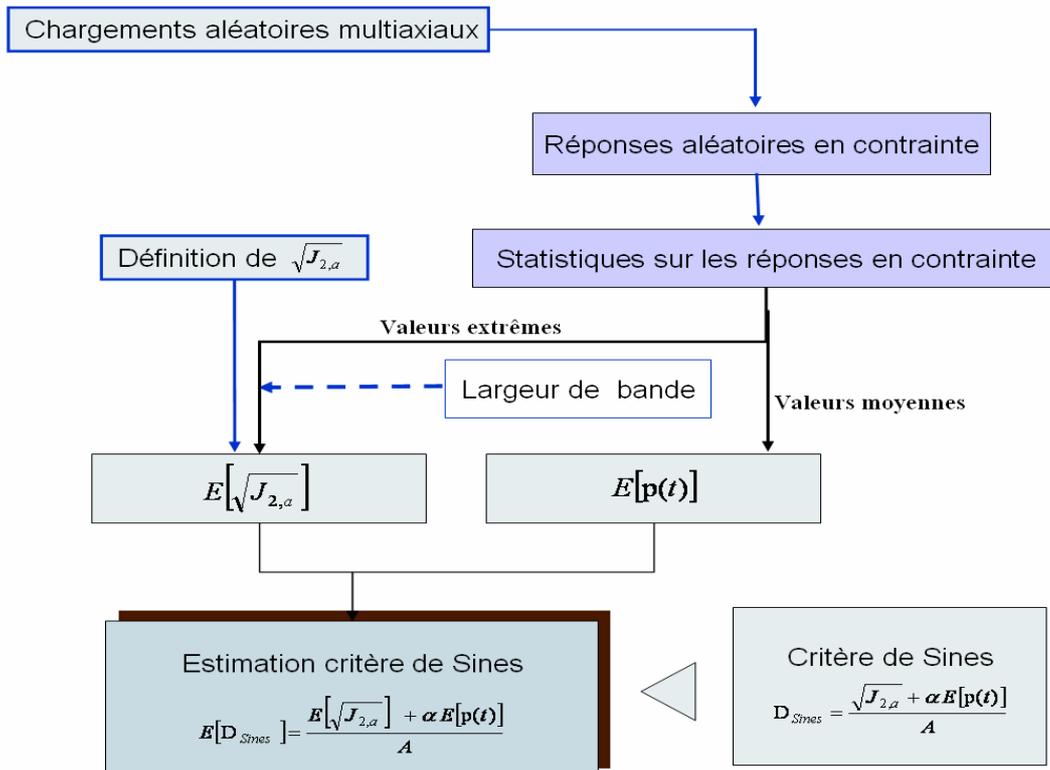


Outils statistiques

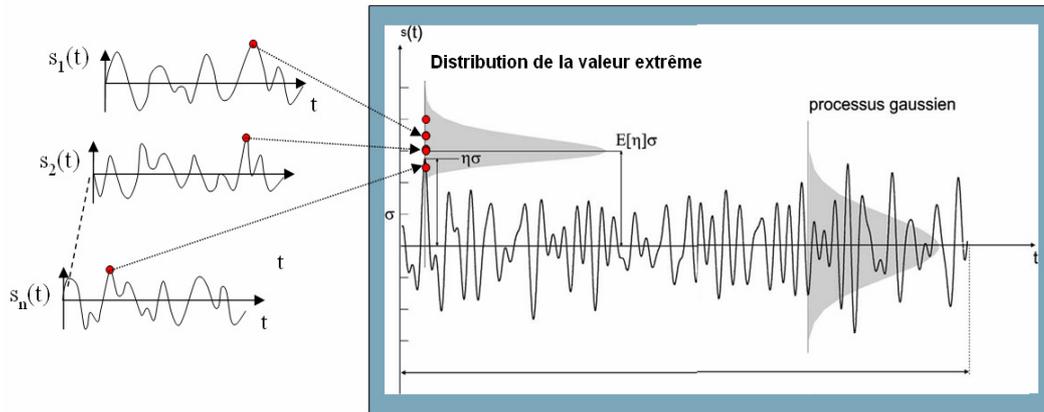
ORGANIGRAMME D'ÉVALUATION DE L'ENDOMMAGEMENT PAR FATIGUE



ORGANIGRAMME D'ESTIMATION DU CRITÈRE DE SINES



STATISTIQUES SUR LES REPONSES EN CONTRAINTES ALEATOIRES GAUSSIENNES : DISTRIBUTION DES VALEURS EXTREMES

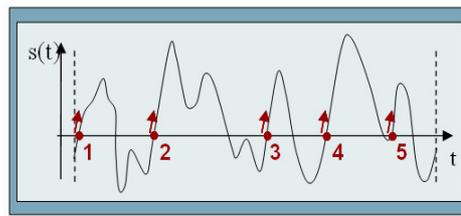


Densité de probabilité de la valeur extrême :

$$p(\max(s), T) = \frac{N_0 \max(s)}{\sigma_s} \exp \left(- \left[\frac{\max(s)^2}{2\sigma_s^2} + N_0 \exp \left(\frac{-\max(s)^2}{2\sigma_s^2} \right) \right] \right)$$

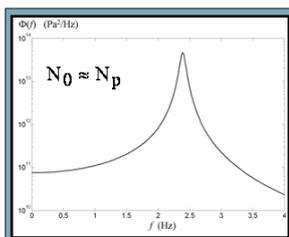
$$N_0 = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{\dot{s}}}{\sigma_s}}$$

$$\sigma_{\frac{d^m s}{dt^m}}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^m \Phi_s(\omega) d\omega$$



En bande étroite

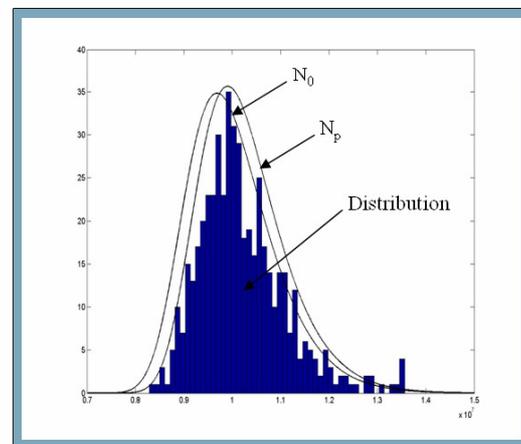
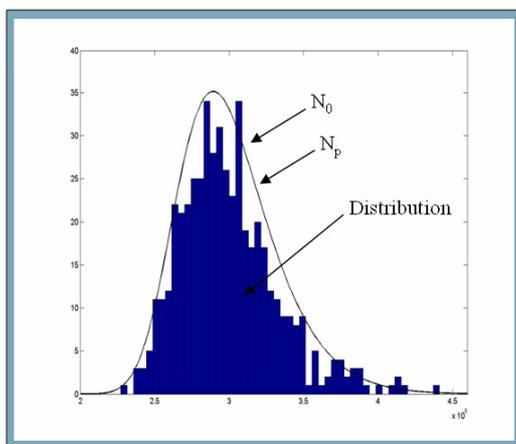
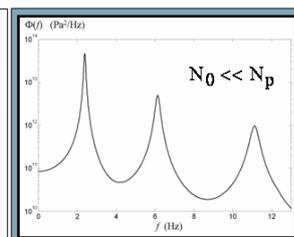
En bande large



Densité de probabilité de la valeur extrême

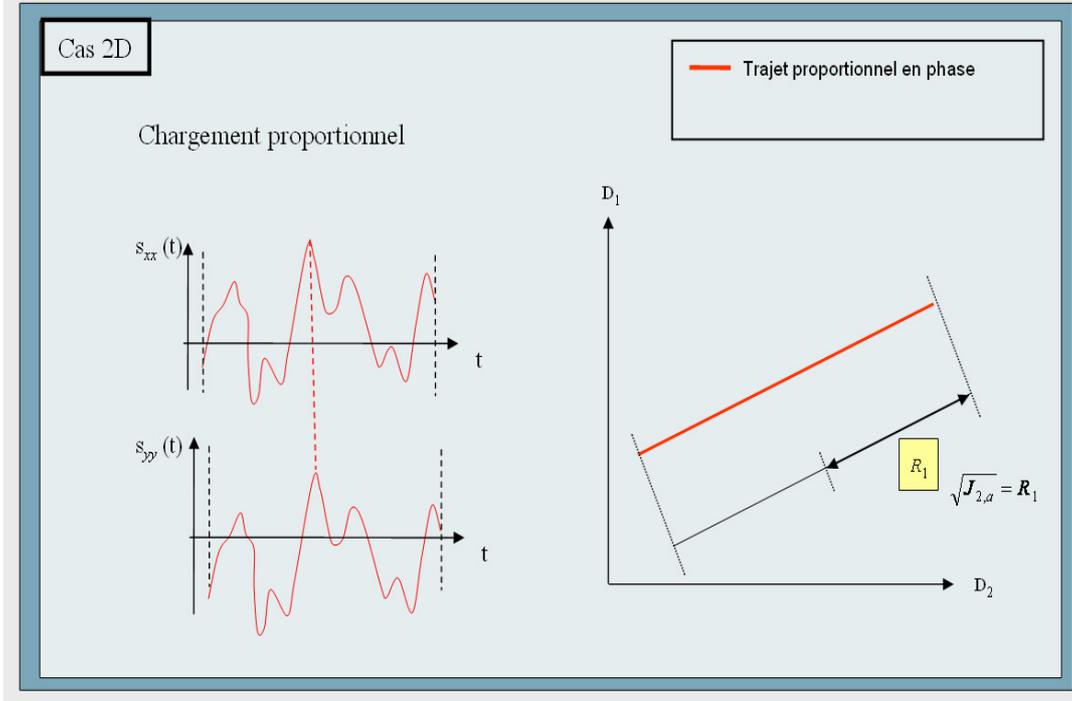
$$p(\max(s), T) = \frac{N_p \max(s)}{\sigma_s} \exp \left(- \left[\frac{\max(s)^2}{2\sigma_s^2} + N_p \exp \left(\frac{-\max(s)^2}{2\sigma_s^2} \right) \right] \right)$$

$$N_p = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{\dot{s}}}{\sigma_s}}$$

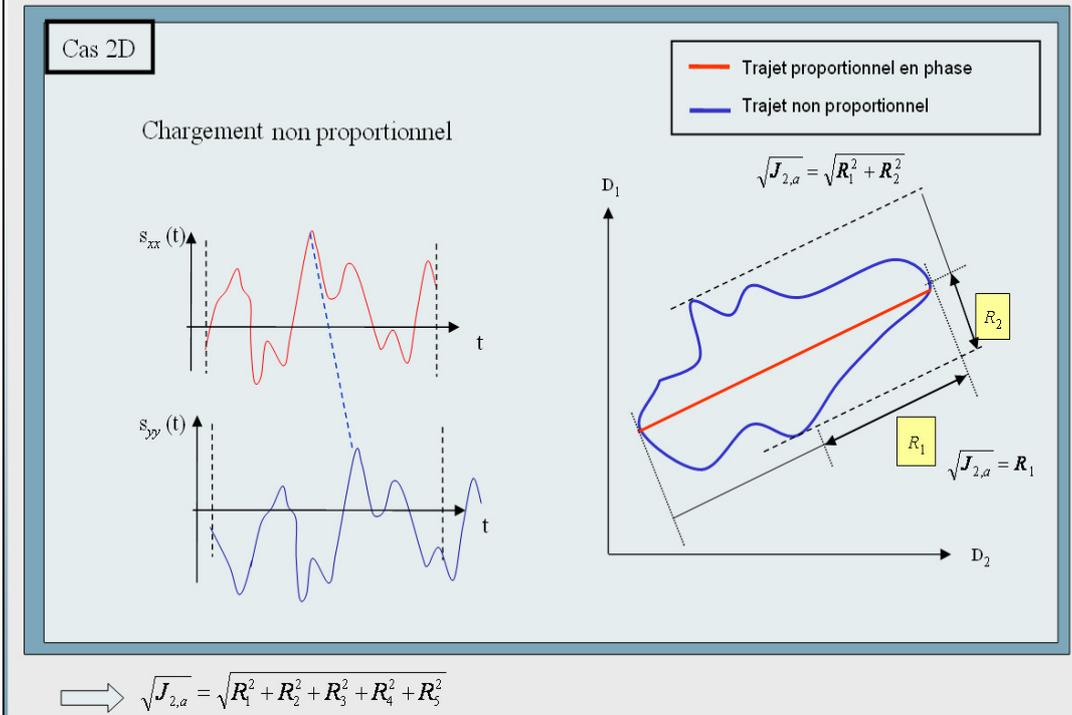


AMPLITUDE DU DEUXIEME INVARIANT DU DEVIATEUR DES CONTRAINTES

$$\sqrt{J_2(t)} = \|d(t)\| = \sqrt{D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_3^2(t) + D_4^2(t) + D_5^2(t)}$$



$$\sqrt{J_2(t)} = \|d(t)\| = \sqrt{D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_3^2(t) + D_4^2(t) + D_5^2(t)}$$



ESTIMATION DE LA PRESSION HYDROSTATIQUE

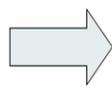
Prise en compte de la contrainte moyenne par l'intermédiaire de la contrainte hydrostatique moyenne :

$$\bar{\mathbf{f}} = E[\mathbf{f}(t)] \quad (\text{Processus stationnaire})$$

Estimation des contraintes statiques \bar{s}_{xx} , \bar{s}_{yy} et \bar{s}_{zz}

à la moyenne des chargements appliquées telles que :

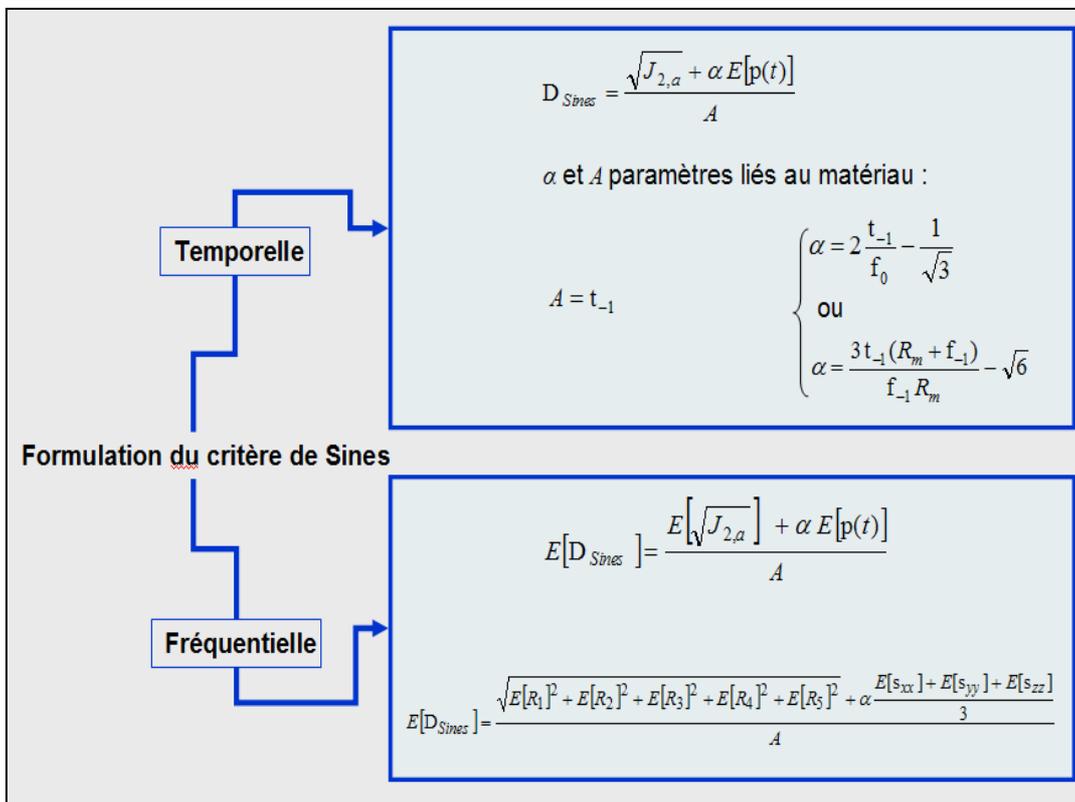
$$E[\mathbf{s}(t)] = \mathbf{HBK}^{-1}\bar{\mathbf{f}} \quad (\text{Réponse moyenne en contrainte})$$



$$E[p(t)] = E\left[\frac{s_{xx}(t) + s_{yy}(t) + s_{zz}(t)}{3}\right]$$

$$= \frac{E[s_{xx}(t)] + E[s_{yy}(t)] + E[s_{zz}(t)]}{3}$$

CRITERE DE SINES POUR DES CHARGEMENTS ALEATOIRES



Contribution à l'analyse de l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires

Résumé

Cette thèse est consacrée au développement d'un outil de pré-dimensionnement par éléments finis pour l'estimation de l'endommagement par fatigue polycyclique de structures linéaires sous chargements multiaxiaux et stationnaires gaussiens.

L'état de contraintes atteint dans ces structures étant aléatoire, il devient nécessaire de raisonner en terme de statistique et l'approche spectrale s'avère particulièrement adaptée pour cette situation.

Dans ce travail, les méthodes spectrales sont améliorées par la prise en compte des *largeurs de bande* des spectres de réponses des structures soumises à des chargements *non-proportionnels* et de *moyennes non nulles*. Le critère d'endommagement de Sines est retenu.

L'étude numérique de la distribution de l'endommagement résultant des incertitudes sur les paramètres matériaux et des applications dans le domaine de l'optimisation des structures sont également abordées.

Mots clés : vibrations aléatoires, méthodes spectrales, fatigue multiaxiale polycyclique, non proportionnel, largeur de bande, propagation d'incertitudes, analyse de sensibilité, optimisation

Contribution to fatigue damage analysis and to design of structures under random loadings

Abstract

This dissertation is devoted to the development of a finite element pre-designing tool for the estimation of high cycle fatigue damage for linear structure subject to multiaxial and Gaussian stationary loads.

Given the random nature of the stress state, it becomes necessary to look at this problem from a statistical point of view and spectral methods appear to be the best approach.

In this work, spectral methods are improved by taking into account the response spectral *bandwidths* of structures under *non proportional* and *non zero mean* loads; the Sines' damage criterion is employed.

The numerical analysis of the fatigue damage distribution resulting from the uncertainties of the material parameters and applications in the field of structural optimisation are also treated.

Keywords: random vibrations, spectral methods, multiaxial high cycle fatigue damage, non proportionality, bandwidth, uncertainties propagation, sensitivity analysis, optimisation